Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет информационных технологий и управления

ОТЧЕТ

по лабораторной работе
« ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ»

Студенты гр. 121701 Липский Р.В.
Проверил Самсонов П.А.

Минск 2022

Вариант 7

№	$f(x)$	$[a,b]$
7	$ln\ x$	[1,3]

Ход работы

Построение интерполяционных многочленов степени n для функции f(x), заданной в равноотстоящих точках отрезка [a,b] и исследована зависимость погрешности интерполирования от степени полинома n = 4 (или, что равносильно, от расстояния между узлами h = (b − a)/ n).

Для этого:

```
In[35]:= n := 4; a := 1; b := 3;
h := (b - a)/n
Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
For[i = 0, i ≤ n, i++,
 xdata[i] = a + i * h;
 ydata[i] = N[Log[xdata[i]]];]
tabl1 := {}
For[i = 0, i < n + 1, i++,
 tabl1 = Append[tabl1, {xdata[i], ydata[i]}];]
MatrixForm[tabl1]
```

Out[41]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0. \\ \frac{3}{2} & 0.405465 \\ 2 & 0.693147 \\ \frac{5}{2} & 0.916291 \\ 3 & 1.09861 \end{pmatrix}$$

Таблица значений x и y (таблица начальных точек)

Таблица разностей по рекуррентной формуле с помощью циклов:

```
In[44]:= Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
For[k = 1, k ≤ n, k++,
  For[i = n, i ≥ n - k, i--, difftab[i, k] = ""]];
For[i = 0, i ≤ n, i++, difftab[i, 0] = ydata[i]];
For[k = 1, k ≤ n, k++,
  For[i = 0, i ≤ n - k, i++,
   difftab[i, k] = (difftab[i + 1, k - 1] - difftab[i, k - 1]) / (xdata[i + k] - xdata[i])]];
tabl2 = Array[difftab, {n + 1, n - 1}, {0, 0}];
PaddedForm[TableForm[tabl2], {6, 5}]
```

Out[49]//PaddedForm=

0.00000	0.81093	-0.23557
0.40547	0.57536	-0.12908
0.69315	0.44629	-0.08164
0.91629	0.36464	
1.09861		

Найден интерполяционный многочлен $N_n(x)$ для интерполирования вперед:

```
In[24]:= pln := difftab[0, 0] + difftab[0, 1] * (x - xdata[0]);
lst := List[pln];
For[k = 2, k ≤ n, k++,
  pln = lst[[k - 1]] + difftab[0, k] * Product[(x - xdata[i]), {i, 0, k-1}];
  lst = Append[lst, pln];];
nwtn[x_] := N[lst[[n]]];
Print[ColumnForm[Collect[lst, x]]];
```

$-1.16428 + 1.39985\,x - 0.235566\,x^2$

$-1.16428 + 1.39985\,x - 0.235566\,x^2$

$-1.37726 + 1.8613\,x - 0.555033\,x^2 + 0.0709927\,x^3$

$-1.5249 + 2.24024\,x - 0.904448\,x^2 + 0.20879\,x^3 - 0.0196853\,x^4$

с помощью встроенной функции **InterpolatingPolinomial** получаем решение:

```
In[33]:= data = {{1, 0}, {3/2, 0.405465}, {2, 0.693147}, {5/2, 0.916291}, {3, 1.09861}}
inpln := InterpolatingPolynomial[data, x];
Collect[inpln, x]
```

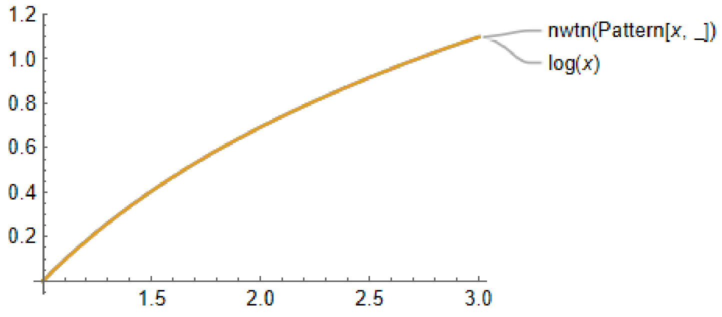
Out[33]= $\{\{1, 0\}, \{\frac{3}{2}, 0.405465\}, \{2, 0.693147\}, \{\frac{5}{2}, 0.916291\}, \{3, 1.09861\}\}$

Out[34]= $-1.52492 + 2.2403\,x - 0.904498\,x^2 + 0.208809\,x^3 - 0.019688\,x^4$

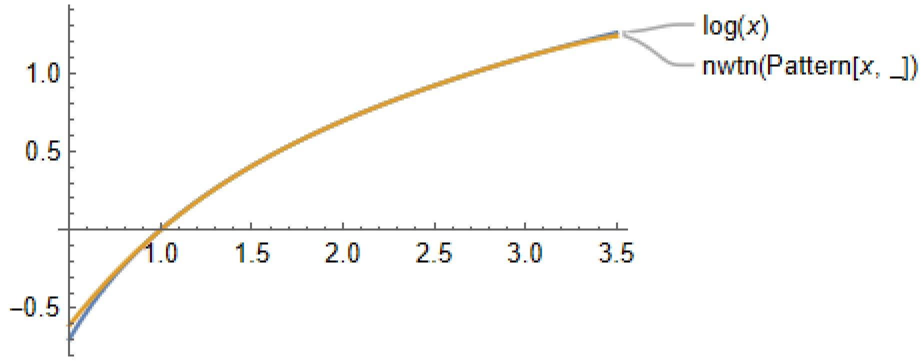
Выведены графики функции f(x), интерполяционного многочлена и абсолютной величины погрешности интерполирования на отрезках [a,b], [a-h, b+h], [a-2h,b+2h], на которых подписи у графиков означают соответствующие функции (log(x) - ln(x), nwtn(x_) – интерполяционный многочлен Ньютона):

```
In[28]:= Plot[{Log[x], nwtn[x_]}, {x, a, b}, PlotLabels → "Expressions"]
         Plot[{Log[x], nwtn[x_]}, {x, a - h, b + h}, PlotLabels → "Expressions"]
         Plot[{Log[x], nwtn[x_]}, {x, a - 2*h, b + 2*h}, PlotLabels → "Expressions"]
```

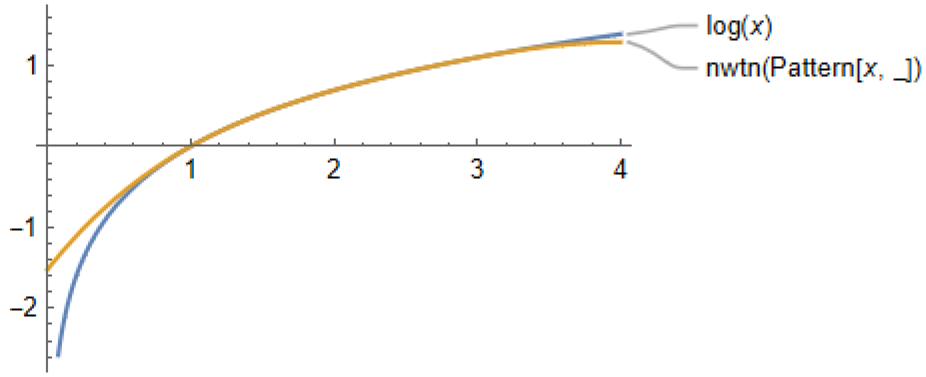
Out[28]=



Out[29]=



Out[30]=



Реализуем алгоритм вычисления интерполяционного многочлена N (x) n по схеме Горнера:

```
In[37]:= Pln = {}; P[n + 1] = 0;
         For[i = n, i ≥ 0, i--, P[i] = difftab[0, i] + (x - xdata[i]) * P[i + 1];
          Pln = Append[Pln, P[i]];]
         Print[ColumnForm[Pln]]
```

-0.0196853

$0.0709927 - 0.0196853\left(-\frac{5}{2} + x\right)$

$-0.235566 + \left(0.0709927 - 0.0196853\left(-\frac{5}{2} + x\right)\right)(-2 + x)$

$0.81093 + \left(-0.235566 + \left(0.0709927 - 0.0196853\left(-\frac{5}{2} + x\right)\right)(-2 + x)\right)\left(-\frac{3}{2} + x\right)$

$0. + \left(0.81093 + \left(-0.235566 + \left(0.0709927 - 0.0196853\left(-\frac{5}{2} + x\right)\right)(-2 + x)\right)\left(-\frac{3}{2} + x\right)\right)(-1 + x)$

Вычислены по схеме Горнера значения интерполяционного многочлена $N_n(x)$ в узлах и точках между узлами интерполирования $\left(x_k = a + \frac{b-a}{10n} \cdot k, \quad k = 0,1,\ldots,10n\right)$:

```
In[66]:= P[0]
```

Out[66]= $0. + \left(0.81093 + \left(-0.235566 + \left(0.0709927 - 0.0196853\left(-\frac{5}{2} + x\right)\right)(-2 + x)\right)\left(-\frac{3}{2} + x\right)\right)(-1 + x)$

```
In[72]:= nwtn[x_] := P[0];
         m = 40
         XDAT = {}; YDAT = {}; nwtnDAT = {}; MR = {};
         For[i = 0, i ≤ m, i++,
           xdatas[i] = a + i * h/10;
           ydatas[i] = N[Log[xdatas[i]]];
           x = xdatas[i];
           nwtndatas[i] = nwtn[x];
           mr[i] = Abs[ydatas[i] - nwtndatas[i]];
           XDAT = Append[XDAT, xdatas[i]];
           YDAT = Append[YDAT, ydatas[i]];
           nwtnDAT = Append[nwtnDAT, nwtndatas[i]];
           MR = Append[MR, mr[i]];];
         MatrixForm[N[XDAT]] × MatrixForm[YDAT] × MatrixForm[nwtnDAT] × MatrixForm[MR]
```

Out[76]=

0.	0.	0.	1.
0.000815826	0.0479743	0.0487902	1.05
0.00124664	0.0940635	0.0953102	1.1
0.00140122	0.138361	0.139762	1.15
0.00136554	0.180956	0.182322	1.2
0.0012069	0.221937	0.223144	1.25
0.000977402	0.261387	0.262364	1.3
0.000716647	0.299388	0.300105	1.35
0.00045399	0.336018	0.336472	1.4
0.000210402	0.371353	0.371564	1.45
0.	0.405465	0.405465	1.5
0.000168661	0.438424	0.438255	1.55
0.000291509	0.470295	0.470004	1.6
0.000368038	0.501143	0.500775	1.65
0.000400531	0.531029	0.530628	1.7
0.000393391	0.560009	0.559616	1.75
0.000352575	0.588139	0.587787	1.8
0.000285092	0.615471	0.615186	1.85
0.000198583	0.642052	0.641854	1.9
0.000100943	0.66793	0.667829	1.95
0.	0.693147	0.693147	2.
0.0000967723	0.717743	0.71784	2.05
0.000182504	0.741755	0.741937	2.1
0.000251151	0.765217	0.765468	2.15
0.000297689	0.78816	0.788457	2.2
0.00031829	0.810612	0.81093	2.25
0.000310474	0.832599	0.832909	2.3
0.000273248	0.854142	0.854415	2.35
0.00020723	0.875262	0.875469	2.4
0.000114761	0.895973	0.896088	2.45
0.	0.916291	0.916291	2.5
0.000130982	0.936224	0.936093	2.55
0.000270122	0.955782	0.955511	2.6
0.000407292	0.974967	0.97456	2.65
0.000530236	0.993782	0.993252	2.7
0.000624502	1.01223	1.0116	2.75
0.000673395	1.03029	1.02962	2.8
0.000657921	1.04798	1.04732	2.85
0.000556747	1.06527	1.06471	2.9
0.000346153	1.08215	1.08181	2.95
0.	1.09861	1.09861	3.

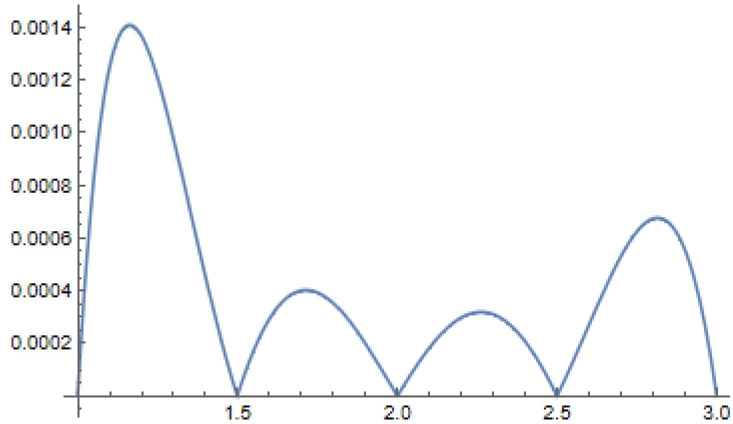
Результаты

1 колонка – погрешность, 2 – интерполяционный многочлен, 3 – y, 4 – x. Максимальной погрешностью будет являться значение 0.00140122.

Построен график абсолютной разности между значениями функции ln(x) и интерполяционного многочлена $N_n(x)$ на заданном отрезке и вычислена величина погрешности интерполирования на данном отрезке:

```
In[97]:= Plot[Abs[Log[x] - nwtn[x]], {x, a, b}]
         FindMaximum[{Abs[Log[x] - nwtn[x]], a < x < b}, {x, a}]
```

Out[97]=




```
Out[98]= {0.00140723, {3 → 1.16308}}
```

Максимальная величина погрешности на отрезке достигается для x=1.66308 и равна 0.00140723.

Найдена оценка погрешности интерполирования на отрезке [1, 2] с помощью априорной формулы оценки погрешности.

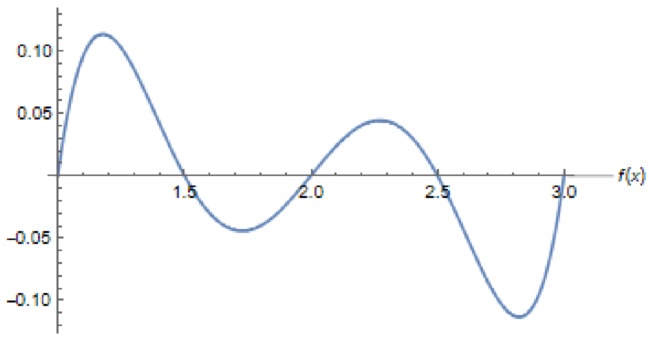
Априорная оценка формулой оценки погрешности интерполирования на отрезке [1, 3]:

Найдено максимальное значение произведения $\prod_{i=0}^{4}\left(x-x_i\right)$, а также построен график этой функции:

```
In[54]:= f[x_] := ∏_{i=0}^{n} (x - xdata[i])
         Collect[f[x], x]
         Plot[f[x], {x, 1, 3}, PlotLabels → "Expressions"]

Out[55]= 0
```

Out[56]=




```
In[59]:= FindMaximum[{f[x], 1 ≤ x ≤ 3}, {x, 1}]

Out[59]= {0.113482, {3 → 1.17778}}
```

M_{n+1}=log (x)=log (3)

Тогда $|f(x)-P_4(x)| \le \frac{3}{5!} * \prod_{i=0}^{4} (x - x_i) \le 0.477121*0.113482=0.541446453$

Максимальные величины погрешностей для n = 6, 8, 10 равны:

6: 0.000113586, x -> 1.10096

8: 0.0000107706, x -> 1.07215

10: 1.10248*10^-6, x -> 1.06452

Изучив полученные данные, можно сделать вывод, что при увеличении точек уменьшается погрешность интерполирования.

Это можно заметить и на графиках абсолютной разности между значениями функции ln(x) и интерполяционного многочлена $N_n(x)$ на заданном отрезке:

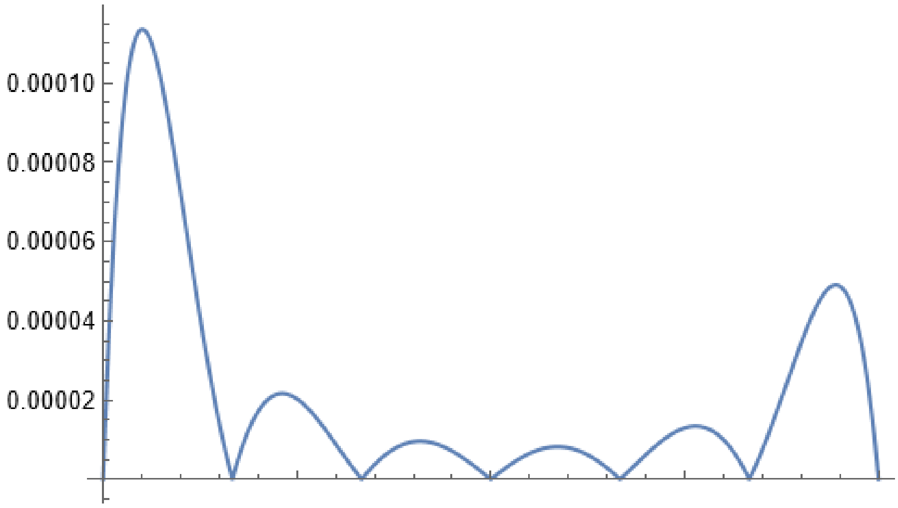


График абсолютной разности между значениями функции ln(x) и интерполяционного многочлена $N_n(x)$ при n = 6

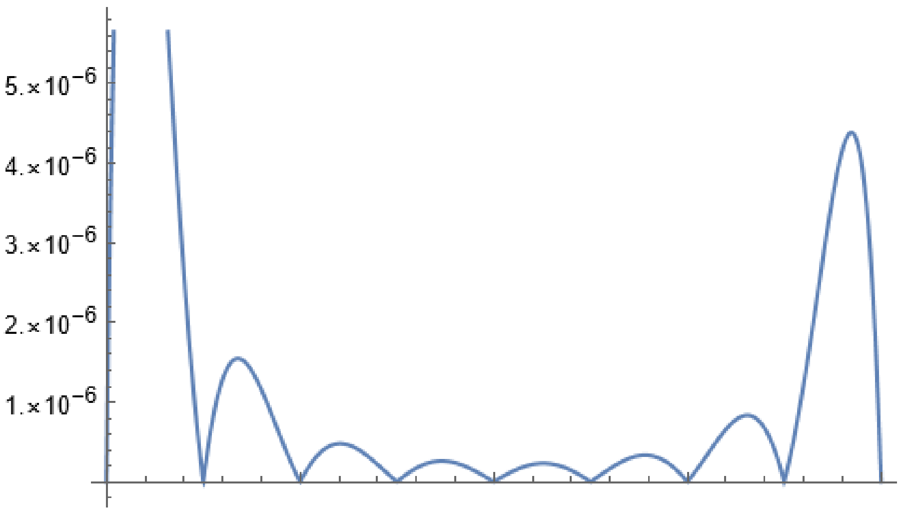


График абсолютной разности между значениями функции ln(x) и интерполяционного многочлена $N_n(x)$ при n = 8

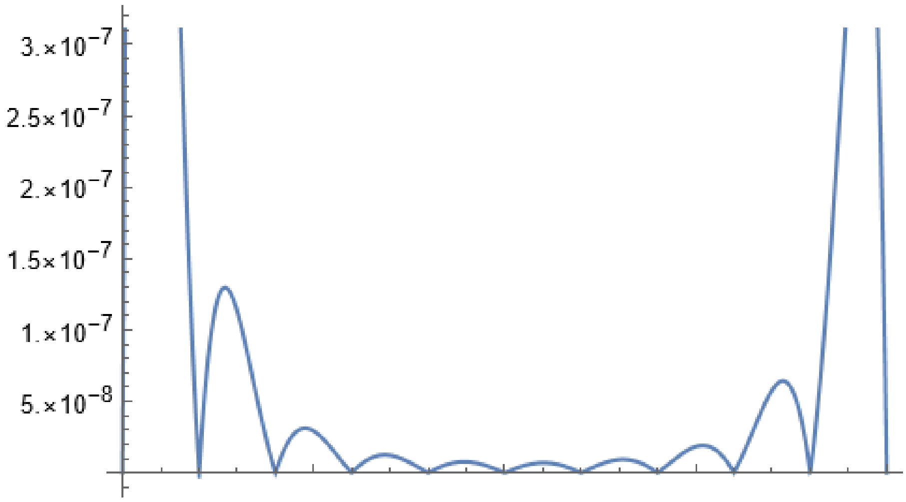


График абсолютной разности между значениями функции ln(x) и интерполяционного многочлена $N_n(x)$ при n = 10

Исследована зависимость погрешности интерполирования от числа и взаимного расположения узлов и от гладкости функци: при увеличении точек уменьшается погрешность интерполирования.