Aufgaben zum Thema Laufzeit

(1) Gegeben sei ein Datentyp, dessen Elemente bezüglich $<$ bzw. $>$ vergleichbar sind. Im folgenden betrachten wir Datenstrukturen für Elemente dieses Typs.

(a) Warum lässt sich in einem Heap das Minimum nicht in $\Theta(1)$ entfernen, so dass die entstehende Struktur immer noch ein Heap ist?
Tipp: Analysieren Sie die Laufzeit des sich ergebenden Heapsorts.

(b) Geben Sie eine Datenstruktur an, die die entsprechende Eigenschaft aus (a) hat.

(c) Warum ist dies kein Widerspruch zur Überlegung aus (a)?

(2) Lösen Sie folgende Rekurrenzgleichungen:

(a) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$

(b) $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + 1$

(c) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$

(3) Warum lässt sich das Mastertheorem nicht auf folgende Gleichungen anwenden?

(a) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \log(n)$

(b) $T(n) = n \cdot T(\frac{n}{2}) + 1$

(c) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n \cdot (2 - \cos(n))$

(d) $T(n) = T(n) + 1$

(4) Seien $f, g, h, j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ monoton wachsend. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $f \in \Theta(g)$ und $h \in \Theta(j) \Rightarrow f \circ h \in \Theta(g \circ j)$

(b) $f \in \Theta(g)$ und $h \in \Theta(j) \Rightarrow f \cdot h \in \Theta(g \cdot j)$

(c) $f \in \Theta(g)$ und $h \in \omega(j) \Rightarrow f + h \in \Theta(g + j)$

(d) $f \in o(g) \Rightarrow h \circ f \in o(h \circ g)$

(e) $f \in O(g) \Rightarrow h \circ f \in O(h \circ g)$

(f) $f \in o(g) \Rightarrow h \circ f \in O(h \circ g)$

(g) $f \in O(f^2)$

(h) $f \in o(f^2)$

(i) $f \in \Theta(f^2)$