Lösungen zum Thema Rot-Schwarz-Bäume

(1)
```
bh(x,T)
if x = T.wurzel
    return 0
else
    return (x.farbe == schwarz ? 1 : 0) + bh(x.vater, T)
```

(2) Lösungsskizze: prüfe zuerst, ob Wurzel schwarz. Gehe nun rekursiv bis zu den Blättern. Auf dem Weg dorthin können die Eigenschaften „Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz“ und „Ein roter Knoten hat schwarze Kinder“ überprüft werden. In den Blättern angekommen, wird getestet ob diese schwarz sind. Für die Schwarz-Höhe wird (1) verwendet.

(3) (a) Schwarzhöhe des Baums ist minimal $\lceil \frac{h}{2} \rceil$ und maximal h. Die minimal mögliche Höhe von Knoten ist damit $\lceil \frac{h}{2} \rceil$. Die Differenz ist also $h - \lceil \frac{h}{2} \rceil = \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$.

(b) Die Lösung ist ein Baum mit genau einem roten Knoten (nicht an der Wurzel).

(4) (a) Blatt-Knoten unter dem roten Knoten haben die Höhe h. Der Unterbaum des roten Knotens ist vollständig und hat die Höhe $h-d$. Andere Blatt-Knoten haben kleinere Höhe $\Rightarrow a(h) = 2^{h-d}$.
Auf der Höhe d gibt es 2^d Knoten, davon $2^d - 1$ schwarze. Die entsprechende Blatt-Knoten haben Höhe h, die Unterbäume haben also die Höhe $h - d - 1 \Rightarrow a(h-1) = (2^d - 1) \cdot 2^{h-d-1}$.
Für alle anderen n ist $a(n) = 0$.

(b) $a(h) = 2^{h-d} \stackrel{!}{=} 2^h \Rightarrow d = 0$. Damit ist der rote Knoten die Wurzel. Diese muss aber schwarz sein.