Lösungen zum Thema Laufzeit

(1) (a) Der Heap lässt sich in $\Theta(n)$ aufbauen. Wenn das Extrahieren des Minimums jedes Mal $\Theta(1)$ braucht, dauern alle Extrahierungsaktionen zusammen $\Theta(n)$, da man diesen Schritt n Mal macht. Es ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von $\Theta(n)$, was der unteren Schranke des Sortierproblems widerspricht.

(b) Eine aufsteigend sortierte verkettete Liste erfüllt genau das gewünschte (Extrahieren des Minimums ist dann einfach „remove head").

(c) Beim Aufbau dieser Datenstruktur muss die Liste sortiert werden. Dies braucht wegen der unteren Schranke mindestens $\Theta(n \log n)$. Für ein Sortierverfahren ist der Aufbau der Datenstruktur aber nötig. Also widerspricht dies nicht den Überlegungen aus (a).

(2) (a) Es ist $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = n$ und $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Daher ist $f(n) = n \in \Omega(n^{0+0,5})$ mit $\varepsilon = 0,5$ und $a \cdot f(\frac{n}{b}) = \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot n = c \cdot f(n)$ mit $c = \frac{1}{2}$. Also ist Fall 3 des Mastertheorems anwendbar, es folgt $T(n) \in \Theta(n)$.

(b) Es ist $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = 1$ und $\log_b a = \log_2 2 = 1$. Daher ist $f(n) = 1 \in O(n^{1-0,5})$ mit $\varepsilon = 0,5$. Also ist Fall 1 des Mastertheorems anwendbar, es folgt $T(n) \in \Theta(n)$.

(c) Es ist $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = 1$ und $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Daher ist $f(n) = 1 \in \Theta(n^0) = \Theta(1)$. Also ist Fall 2 des Mastertheorems anwendbar, es folgt $T(n) \in \Theta(\log n)$.

(3) (a) Es ist $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = \log(n)$ und $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Nun ist einerseits $\log(n) \notin O(1)$, also sind die Fälle 1 und 2 nicht anwendbar. Es gilt zwar $\log(n) \in \omega(1)$, aber es existiert kein $\varepsilon > 0$ mit $\log(n) \in \Omega(n^{0+\varepsilon})$, also ist es auch nicht Fall 3.

(b) Diese Gleichung hat nicht die Form des Mastertheorems, dort ist a eine Konstante.

(c) Es gilt $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = n \cdot (2 - \cos(n))$ und $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Da $n \leq n \cdot (2 - \cos(n)) \leq 3n$, ist $n \cdot (2 - \cos(n)) \in \Omega(n^{0+0,5})$, was Fall 1 und Fall 2 ausschließt, aber die erste Bedingung von Fall 3 erfüllt. Die Regularitätsbedingung $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$ für ein $c \in [0, 1)$ ist aber verletzt. Dies soll hier nur veranschaulicht werden (und nicht exakt bewiesen). Wähle $n = 2(2k + 1)\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ (allerdings keine ganze Zahl).

$$f(n) = 2(2k + 1)\pi \cdot (2 - \cos(2(2k + 1)\pi)) = 2(2k + 1)\pi \cdot (2 - 1) = 2(2k + 1)\pi$$

$$f(\frac{n}{2}) = (2k+1)\pi \cdot (2 - \cos((2k+1)\pi)) = (2k+1)\pi \cdot (2+1) = 3(2k+1)\pi = \frac{3}{2} f(n)$$

Wenn n nahe genug bei einer natürlichen Zahl liegt, wird die Regularitätsbedingung auch durch diese verletzt.

(d) Diese Gleichung ist überhaupt nicht lösbar, denn $T(n) = T(n) + 1 \Rightarrow 0 = 1$: Widerspruch!