Übriggebliebene Aufgaben: Lösungen

(1)
```
BINOMIAL(n, k)
//sei b[0..n][0..k] ein neues Feld
for i = 0 to n
    for j = 0 to k
        if (j > i)
            b[i][j] = 0;
        else if (j == 0 or i == j)
            b[i][j] = 1;
        else
            b[i][j] = b[i - 1][k - 1] + b[i - 1][k];
return b[n][k];
```

(2) Gegenbeispiel: Knoten $1, 2, 3, 4$ und folgende Kanten mit Gewichten: $c(\{1, 2\}) = 1$, $c(\{2, 3\}) = 1$, $c(\{3, 4\}) = 1$ und $c(1, 4) = 2$. Bilde den kürzeste-Wege-Baum von 1 aus. Benutzte Kanten: $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}$ mit Gewicht 4. Der minimale Spannbaum besteht aus den drei Kanten mit Gewicht 1 (Gesamtgewicht 3).

(3) (a) Knoten $1, 2, 3$ und folgende Kanten mit Gewichten: $c(\{1, 2\}) = 3$, $c(\{2, 3\}) = -2$, und $c(\{1, 3\}) = 2$. Startknoten sei Knoten 1.

(b) Knoten $1, 2, 3$ und folgende Kanten mit Gewichten: $c(\{1, 2\}) = 1$, $c(\{2, 3\}) = -1$, und $c(\{1, 3\}) = 9$. Startknoten sei wieder Knoten 1.

(c) bei ungerichteten Graphen gilt: negative Kante = negativer Kreis (Kante beliebig oft vor und zurück).

(4) (a) Es ist $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = n$ und $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Daher ist $f(n) = n \in \Omega(n^{0+0,5})$ mit $\varepsilon = 0,5$ und $a \cdot f(\frac{n}{b}) = \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot n = c \cdot f(n)$ mit $c = \frac{1}{2}$. Also ist Fall 3 des Mastertheorems anwendbar, es folgt $T(n) \in \Theta(n)$.

(b) Es ist $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = 1$ und $\log_b a = \log_2 2 = 1$. Daher ist $f(n) = 1 \in O(n^{1-0,5})$ mit $\varepsilon = 0,5$. Also ist Fall 1 des Mastertheorems anwendbar, es folgt $T(n) \in \Theta(n)$.

(c) Es ist $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = 1$ und $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Daher ist $f(n) = 1 \in \Theta(n^0) = \Theta(1)$. Also ist Fall 2 des Mastertheorems anwendbar, es folgt $T(n) \in \Theta(\log n)$.

(5) (a) Es ist $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = \log(n)$ und $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Nun ist einerseits $\log(n) \notin O(1)$, also sind die Fälle 1 und 2 nicht anwendbar. Es gilt zwar $\log(n) \in \omega(1)$, aber es existiert kein $\varepsilon > 0$ mit $\log(n) \in \Omega(n^{0+\varepsilon})$, also ist es auch nicht Fall 3.

(b) Diese Gleichung hat nicht die Form des Mastertheorems, dort ist a eine Konstante.

(c) Es gilt $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = n \cdot (2 - \cos(n))$ und $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Da $n \leq n \cdot (2 - \cos(n)) \leq 3n$, ist $n \cdot (2 - \cos(n)) \in \Omega(n^{0+0,5})$, was Fall 1 und Fall 2 ausschließt, aber die erste Bedingung von Fall 3 erfüllt. Die Regularitätsbedingung $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$ für ein $c \in [0,1)$ ist aber verletzt. Dies soll hier nur veranschaulicht werden (und nicht exakt bewiesen). Wähle $n = 2(2k+1)\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ (allerdings keine ganze Zahl).

$$f(n) = 2(2k+1)\pi \cdot (2 - \cos(2(2k+1)\pi)) = 2(2k+1)\pi \cdot (2-1) = 2(2k+1)\pi$$

$$f(\frac{n}{2}) = (2k+1)\pi \cdot (2 - \cos((2k+1)\pi)) = (2k+1)\pi \cdot (2+1) = 3(2k+1)\pi = \frac{3}{2} f(n)$$

Wenn n nahe genug bei einer natürlichen Zahl liegt, wird die Regularitätsbedingung auch durch diese verletzt.

(d) Diese Gleichung ist überhaupt nicht lösbar, denn $T(n) = T(n) + 1 \Rightarrow 0 = 1$: Widerspruch!

(6) (a) Falsch! Wähle $f(n) = n, g(n) = 2n, h(n) = j(n) = 2^n$.

(b) Wahr! Wegen $f \in \Theta(g)$ und $h \in \Theta(j)$ folgt: $\exists a, b \in \mathbb{R}^+, N \in \mathbb{N}$ mit $f(n) \leq a \cdot g(n)$ und $h(n) \leq b \cdot j(n)$ für $n \geq N$. Nun gilt:

$$\underbrace{f(n)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{h(n)}_{\geq 0} \leq \underbrace{a \cdot b}_{:=c} \cdot g(n) \cdot j(n) \qquad (n \geq N)$$

Der Beweis für die andere Ungleichung läuft analog.

(c) Falsch! Wähle $f(n) = g(n) = h(n) = n, j(n) \equiv 1$.

(d) Falsch! Wähle $f(n) = 2^n, g(n) = 4^n, h(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$.
Alternative Lösung: $h(n) \equiv 1$.

(e) Falsch! Wähle $f(n) = 2n, g(n) = n, h(n) = 2^n$.

(f) Wahr! Wegen $f \in o(g)$ folgt: $\forall a \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} : f(n) < a \cdot g(n)$. Wähle $a = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : f(n) < g(n)$. Nun gilt aber, da h monoton wachsend:

$$h(f(n)) \leq h(g(n)) = 1 \cdot h(g(n)) \qquad (n \geq N)$$

(g) Wahr! $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n^2 \geq n$. Da $f(n) \in \mathbb{N}_0$, folgt automatisch $f(n) \leq (f(n))^2 = 1 \cdot (f(n))^2$.

(h) Falsch! Wähle $f(n) \equiv 1$.

(i) Falsch! Wähle $f(n) = n$.

(7)
```
bh(x,T)
if x = T.wurzel
    return 0
else
    return (x.farbe == schwarz ? 1 : 0) + bh(x.vater, T)
```

(8) Lösungsskizze: prüfe zuerst, ob Wurzel schwarz. Gehe nun rekursiv bis zu den Blättern. Auf dem Weg dorthin können die Eigenschaften „Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz“ und „Ein roter Knoten hat schwarze Kinder“ überprüft werden. In den Blättern angekommen, wird getestet ob diese schwarz sind. Für die Schwarz-Höhe wird (1) verwendet.

(9) (a) Schwarzhöhe des Baums ist minimal $\lceil \frac{h}{2} \rceil$ und maximal h. Die minimal mögliche Höhe von Knoten ist damit $\lceil \frac{h}{2} \rceil$. Die Differenz ist also $h - \lceil \frac{h}{2} \rceil = \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$.

(b) Die Lösung ist ein Baum mit genau einem roten Knoten (nicht an der Wurzel).

(10) (a) Blatt-Knoten unter dem roten Knoten haben die Höhe h. Der Unterbaum des roten Knotens ist vollständig und hat die Höhe $h-d$. Andere Blatt-Knoten haben kleinere Höhe $\Rightarrow a(h) = 2^{h-d}$.
Auf der Höhe d gibt es 2^d Knoten, davon $2^d - 1$ schwarze. Die entsprechende Blatt-Knoten haben Höhe h, die Unterbäume haben also die Höhe $h - d - 1 \Rightarrow a(h-1) = (2^d - 1) \cdot 2^{h-d-1}$.
Für alle anderen n ist $a(n) = 0$.

(b) $a(h) = 2^{h-d} \stackrel{!}{=} 2^h \Rightarrow d = 0$. Damit ist der rote Knoten die Wurzel. Diese muss aber schwarz sein.

(11) Die Anzahl der Hashtabellenslots muss mindestens proportional zur Anzahl der gespeicherten Elemente sein, d.h. im Durchschnitt darf höchstens 1 Element pro Slot gespeichert sein.

(12) (a) Amortisierte Analyse ist eine Art, die Laufzeit einer Operation zu bestimmen. Es wird der Durchschnitt der Laufzeit über eine (Worst-Case-)Folge von Operationen gebildet. Dabei wird ausgenutzt, dass ein Worst Case zwar eine längere Laufzeit hat, aber so selten auftreten kann, dass er den Durchschnitt praktisch nicht verändert.

(b) Einfügen bzw. Löschen in unbeschränkten Feldern. Worst Case: $\Theta(n)$, Amortisierte Analyse: $\Theta(1)$.

(c) Gemeinsamkeit: Durchschnittsbildung der Laufzeit über mehrere Operationen
Unterschiede: Amortisierte Analyse ist trotzdem eine Worst-Case-Betrachtung und kein Avereage Case; amortisierte Analyse betrachtet Folgen von Operationen, Average-Case-Analyse jedoch unabhängige Operationen