

Задачи по топологическому анализу данных

Листок 4

Задача 1. Докажите, что при $n = \dim K$, числа Бетти и f -числа комплекса K связаны соотношением

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \cdots + (-1)^n \beta_n.$$

Замечание: Число

$$\chi(K) = f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^n f_n = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \cdots + (-1)^n \beta_n$$

называется *эйлеровой характеристикой* симплициального комплекса K .

Задача 2. Докажите, что эйлерова характеристика удовлетворяет формуле включения-исключения

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).$$

Задача 3. Докажите, что для симплициального комплекса K , гомеоморфного сфере S^{n-1} выполнена формула Эйлера:

$$f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}.$$

Задача 4. Докажите, что задание модуля устойчивости $V_0 \xrightarrow{x} V_1 \xrightarrow{x} V_2 \xrightarrow{x} \cdots \xrightarrow{x} V_m \xrightarrow{x} \cdots$ эквивалентно заданию структуры градуированного $\mathbb{k}[x]$ -модуля на векторном пространстве $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ (если вы не знаете, что такое модуль над кольцом, то это хороший повод пообщаться с семинаристом).

Задача 5. Пусть $0 \leq j < s < k$. Докажите, что модуль устойчивости $I_{[j,s)} \oplus I_{[s,k)}$ не изоморфен модулю $I_{[j,k)}$, хотя в любой отдельный момент времени эти модули изоморфны.

Задача 6. Докажите, что множество симплексов фильтрации можно линейно упорядочить (отсортировать) по временам рождения таким образом, что каждый симплекс появляется в списке не раньше чем его грани (т.е. подмножества).

Задача 7.* Пусть $L \subset K$ и $K \setminus L$ состоит из одного j -мерного симплекса. Тогда при переходе от L к K верно одно из двух:

- $(j-1)$ -ое число Бетти уменьшается на 1.
- j -ое число Бетти увеличивается на 1.

Другие числа Бетти не меняются.

Задача 8. (на интуитивное геометрическое понимание) Нарисуйте баркод и вычислите времена жизни циклов для фильтрации, заданной следующим образом. В момент времени 0 родились 3 вершины $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. В момент времени 4 родились ребра $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ и вершина $\{4\}$. В момент времени 5 родились ребра $\{1, 4\}, \{3, 4\}$. В момент времени 7 родилось ребро $\{1, 3\}$. В момент времени 10 родилось ребро $\{2, 4\}$. В момент времени 16 родились треугольники $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$. В момент времени 20 родился треугольник $\{2, 3, 4\}$. В момент времени 23 родился тетраэдр $\{1, 2, 3, 4\}$. Каковы гомологии комплекса в момент времени 9?