Задачи по топологическому анализу данных

Листок 1

Задача 1. Докажите, что гомеоморфизм пространств $\cong$ является “отношением эквивалентности”: если $X \cong Y$ и $Y \cong Z$, то $X \cong Z$. В кавычках, потому что отношение эквивалентности обычно рассматривают на множестве, а совокупность всех топологических пространств множеством не является (если их определять как положено, а не как на лекции).

Задача 2. Докажите гомеоморфизм $(-1; 1) \cong \mathbb{R}$.

Задача 3. Докажите, что круг гомеоморфен квадрату.

Задача 4. Докажите, что если $X \cong Y$ и X компакт, то Y — тоже компакт. Если речь про подмножества в $\mathbb{R}^n$, то [напоминание] компакт — это замкнутое ограниченное подмножество.

Определение. Введем на точках пространства X отношение эквивалентности: скажем, что $x \sim y$, если существует непрерывная кривая $p\colon [0; 1] \to X$, такая что $p(0) = x$, $p(1) = y$.

Задача 5. Докажите, что это действительно отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности точек относительно этого отношения эквивалентности называется *компонентой линейной связности* пространства X.

Задача 6. Докажите, что если $X \cong Y$, то у X и Y одинаковое число компонент линейной связности (то есть между компонентами связности X и компонентами связности Y можно установить биекцию).

Задача 7. Пусть $f, g\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x$, $g(x) = 0$. Докажите, что отображения f и g гомотопны, построив явную гомотопию между ними.

Задача 8. Докажите, что гомотопность является отношением эквивалентности на множестве непрерывных отображений из X в Y.

Задача 9. Докажите, что гомотопическая эквивалентность является “отношением эквивалентности” на топологических пространствах.

Определение. Пространство X называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Задача 10. Докажите, что n-мерный шар стягиваем. Докажите, что любое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ стягиваемо.

Задача 11.* Докажите, что геометрическая реализация конечного графа стягиваема тогда и только тогда, когда граф — дерево.

Задача 12. Пусть $f, g\colon X \to Y$ гомотопны и $h\colon Y \to Z$ — какое-то отображение. Докажите, что $h \circ f$ и $h \circ g$ — гомотопные отображения из X в Z. Аналогично, если $f \sim g\colon X \to Y$ и $k\colon Z \to X$, то $f \circ k \sim g \circ k$.

Задача 13. Докажите, что число компонент связности является инвариантом гомотопической эквивалентности.

Задача 14. (1) Придумайте алгоритм проверки одномерного симплициального комплекса на стягиваемость. (2) Придумайте алгоритм проверки двух одномерных симплициальных комплексов на гомотопическую эквивалентность.

Задача 15.* Придумайте алгоритм проверки двух одномерных симплициальных комплексов на гомеоморфизм.