

## Задачи по топологическому анализу данных

### Листок 4

**Задача 1.** Докажите, что при  $n = \dim K$ , числа Бетти и  $f$ -числа комплекса  $K$  связаны соотношением

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^n f_n = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \cdots + (-1)^n \beta_n.$$

Замечание: Число

$$\chi(K) = f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^n f_n = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \cdots + (-1)^n \beta_n$$

называется *эйлеровой характеристикой* симплициального комплекса  $K$ .

**Задача 2.** Докажите, что эйлерова характеристика удовлетворяет формуле включения-исключения

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).$$

**Задача 3.** Докажите, что для симплициального комплекса  $K$ , гомеоморфного сфере  $S^{n-1}$  выполнена формула Эйлера:

$$f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}.$$

**Задача 4.** Докажите, что задание модуля устойчивости  $V_0 \xrightarrow{x} V_1 \xrightarrow{x} V_2 \xrightarrow{x} \cdots \xrightarrow{x} V_m \xrightarrow{x} \cdots$  эквивалентно заданию структуры градуированного  $\mathbb{k}[x]$ -модуля на векторном пространстве  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$  (если вы не знаете, что такое модуль над кольцом, то это хороший повод пообщаться с семинаристом).

**Задача 5.** Пусть  $0 \leq j < s < k$ . Докажите, что модуль устойчивости  $I_{[j,s]} \oplus I_{[s,k]}$  не изоморфен модулю  $I_{[j,k]}$ , хотя в любой отдельный момент времени эти модули изоморфны.

**Задача 6.** Докажите, что множество симплексов фильтрации можно линейно упорядочить (отсортировать) по временам рождения таким образом, что каждый симплекс появляется в списке не раньше чем его грани (т.е. подмножества).

**Задача 7.\*** Пусть  $L \subset K$  и  $K \setminus L$  состоит из одного  $j$ -мерного симплекса. Тогда при переходе от  $L$  к  $K$  верно одно из двух:

- $(j-1)$ -ое число Бетти уменьшается на 1.
- $j$ -ое число Бетти увеличивается на 1.

Другие числа Бетти не меняются.

**Задача 8.** (на интуитивное геометрическое понимание) Нарисуйте баркод и вычислите времена жизни циклов для фильтрации, заданной следующим образом. В момент времени 0 родились 3 вершины  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ . В

момент времени 4 родились ребра  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$  и вершина  $\{4\}$ . В момент времени 5 родились ребра  $\{1, 4\}$ ,  $\{3, 4\}$ . В момент времени 7 родилось ребро  $\{1, 3\}$ . В момент времени 10 родилось ребро  $\{2, 4\}$ . В момент времени 16 родились треугольники  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ . В момент времени 20 родился треугольник  $\{2, 3, 4\}$ . В момент времени 23 родился тетраэдр  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Каковы гомологии комплекса в момент времени 9?