

Задачи по топологическому анализу данных

Листок 2

Задача 1. Докажите, что симплициальный комплекс размерности k можно вложить в \mathbb{R}^{2k+1} без самопересечений.

Задача 2. Докажите, что в графе $\dim \operatorname{Im} \partial_1 (= \operatorname{rk} D_1) = \# \text{вершин} - \# \text{связн.компонент}$.

Задача 3. Докажите, что в симплициальном комплексе K выполнено равенство $\beta_1(K) = \# \text{ребер} - \operatorname{rk} D_1 - \operatorname{rk} D_2$, где D_i — матрицы симплициальных дифференциалов (D_1 — матрица инцидентности ребер и вершин, а D_2 — матрица инцидентности треугольников и ребер).

Задача 4. Докажите, что для симплициальных дифференциалов выполнено $\partial_j \circ \partial_{j+1} = 0$.

Задача 5. Докажите, что для любого симплициального комплекса $\beta_0(K)$ равно числу компонент связности комплекса K .

Задача 6. Докажите, что $\beta_j(K) = \# j\text{-мерн.симплексов} - \operatorname{rk} D_j - \operatorname{rk} D_{j+1}$, где D_j — матрица симплициального дифференциала ∂_j в стандартном базисе из симплексов.

Задача 7. Предполагая известной гомотопическую инвариантность симплициальных гомологий, вычислите гомологии сферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

Задача 8. Докажите, что $P(X \sqcup Y; t) = P(X; t) + P(Y; t)$.

Следующие задачи предполагают программирование. Выберите и решите в Python или Sage любую из них по своему выбору. Коэффициенты берите какие вам больше нравятся. Теоретические решения допускаются, но в этом случае надо написать решения всех трех задач.

Задача 9. Задайте явно какую-нибудь триангуляцию бутылки Клейна и вычислите все ее гомологии.

Задача 10. Вычислите все пространства гомологий $H_j(K; \mathbb{Z}_2)$ для комплекса K , являющегося 2-остовом 4-мерного симплекса (т.е. K — это симплициальный комплекс на множестве вершин $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, состоящий из всех подмножеств мощности ≤ 3).

Задача 11. Рассмотрим симплициальный комплекс U_3 , множество вершин которого — это все ненулевые векторы конечного пространства \mathbb{Z}_2^3 (всего 7 вершин), а симплексы — это те подмножества, которые соответствуют линейно независимым векторам. Вычислите $\beta_j(U_3; \mathbb{Z}_2)$.