

Lista de Exercícios Regressão Linear

1. Regressão Linear por Mínimos Quadrados

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	0	0	1
2	1	0	2
3	0	1	2
4	1	1	3

- Monte X (com coluna de 1's) e \mathbf{y} .
 - Calcule $X^\top X$ e $X^\top \mathbf{y}$.
 - Inverta $X^\top X$ via **Gauss–Jordan**. Documente cada operação de linha.
 - Inverta novamente pelo **método da adjunta**: cofatores, adjunta e determinante.
 - Obtenha os pesos $\hat{\mathbf{w}}$ multiplicando a inversa por $X^\top \mathbf{y}$.
 - Calcule o erro quadrático do modelo com os pesos calculados.
- Dados $(x_1, x_2, y) \in \{(0, 0, 2), (2, 0, 3), (0, 2, 3), (2, 2, 6)\}$, repita os itens 1–6 acima e verifique se os dois métodos de inversão produzem o mesmo $\hat{\mathbf{w}}$.
 - Formule o problema de regressão linear por mínimos quadrados como um problema de otimização. Explique o significado geométrico da solução obtida.
 - Derive as equações normais associadas ao problema

$$\min_{\mathbf{w}} \|X\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2$$

e explique sob quais condições elas admitem uma solução única.

- Mostre que a matriz $X^\top X$ é sempre simétrica e semidefinida positiva. Em que situação ela é definida positiva?
- Explique a interpretação geométrica do vetor de resíduos

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - X\hat{\mathbf{w}}$$

e sua relação com o espaço coluna de X .

- Explique por que a função custo

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \|X\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2$$

é convexa. Qual é a consequência dessa propriedade para a otimização por descida do gradiente?