Regressão Logística com Dois Atributos e Gradiente Descendente Manual

1 Dados

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	0	0	0
2	1	0	0
3	0	1	1

Modelo com intercepto:

$$\hat{y}_i = \sigma(z_i), \qquad z_i = w_0 + w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i}, \qquad \sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}.$$

2 Função-custo e gradientes

$$J(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[y_i \ln \hat{y}_i + (1-y_i)\ln\Big(1-\hat{y}_i\Big)\Big], \qquad m = 3.$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_0} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{y}_i - y_i), \qquad \frac{\partial J}{\partial w_1} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{y}_i - y_i)\, x_{1i}, \qquad \frac{\partial J}{\partial w_2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{y}_i - y_i)\, x_{2i}.$$

3 Hiperparâmetros

- Pesos iniciais: $w_0^{(0)} = w_1^{(0)} = w_2^{(0)} = 0$
- Taxa de aprendizagem: $\alpha = 0.5$

4 Iterações do gradiente descendente

Iteração 0 $\to$ 1

$$\hat{y}_i^{(0)} = \sigma(0) = 0.5 \quad \forall i$$

$$\begin{aligned}
g_{w_0}^{(0)} &= \tfrac{1}{3}(0.5 + 0.5 - 0.5) = 0.1667,\\
g_{w_1}^{(0)} &= \tfrac{1}{3}\Big(0.5\cdot 0 + 0.5\cdot 1 + (-0.5)\cdot 0\Big) = 0.1667,\\
g_{w_2}^{(0)} &= \tfrac{1}{3}\Big(0.5\cdot 0 + 0.5\cdot 0 + (-0.5)\cdot 1\Big) = -0.1667.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_0^{(1)} &= 0 - 0.5 \cdot 0.1667 = -0.0833, \\ w_1^{(1)} &= 0 - 0.5 \cdot 0.1667 = -0.0833, \\ w_2^{(1)} &= 0 - 0.5 \cdot (-0.1667) = 0.0833. \end{aligned}}$$

Iteração 1 $\rightarrow$ 2

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= [-0.0833,\ -0.1666,\ 0.0000], \\ \hat{y}^{(1)} &= \sigma(z^{(1)}) \approx [0.4792,\ 0.4585,\ 0.5000]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{w_0}^{(1)} &= \tfrac{1}{3}(0.4792 + 0.4585 - 0.5) = 0.1459, \\ g_{w_1}^{(1)} &= \tfrac{1}{3}(0{+}0.4585{+}0) = 0.1528, \\ g_{w_2}^{(1)} &= \tfrac{1}{3}(0{+}0{-}0.5) = -0.1667. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_0^{(2)} &= -0.0833 - 0.5 \cdot 0.1459 = -0.1563, \\ w_1^{(2)} &= -0.0833 - 0.5 \cdot 0.1528 = -0.1597, \\ w_2^{(2)} &= 0.0833 - 0.5 \cdot (-0.1667) = 0.1667. \end{aligned}}$$

Iteração 2 $\rightarrow$ 3

$$\begin{aligned} z^{(2)} &= [-0.1563,\ -0.3160,\ 0.0104], \\ \hat{y}^{(2)} &\approx [0.4610,\ 0.4217,\ 0.5026]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{w_0}^{(2)} &= \tfrac{1}{3}(0.4610 + 0.4217 - 0.4974) = 0.1284, \\ g_{w_1}^{(2)} &= \tfrac{1}{3}(0{+}0.4217{+}0) = 0.1406, \\ g_{w_2}^{(2)} &= \tfrac{1}{3}(0{+}0{-}0.4974) = -0.1658. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_0^{(3)} &= -0.1563 - 0.5 \cdot 0.1284 = -0.2205, \\ w_1^{(3)} &= -0.1597 - 0.5 \cdot 0.1406 = -0.2299, \\ w_2^{(3)} &= 0.1667 - 0.5 \cdot (-0.1658) = 0.2496. \end{aligned}}$$

5 Observações

- O peso w_1 torna-se negativo enquanto w_2 cresce positivamente, coerente com o fato de que $x_2 = 1$ está associado a $y = 1$ e $x_1 = 1$ está associado a $y = 0$.
- Mais iterações continuarão a ajustar os pesos até que a variação em J se torne pequena.
- O procedimento geral com mais atributos ou amostras é idêntico: calculam-se gradientes, aplicam-se as atualizações, repete-se.