Regressão Linear Múltipla (2 Atributos)
Resolução Analítica por Mínimos Quadrados

1 Dados

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	0	0	1
2	1	0	2
3	0	1	2
4	1	1	3

Modelo com intercepto:

$$\hat{y}_i = w_0 + w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i} = \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

2 Formulação matricial

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução de mínimos quadrados é dada pela equação normal

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{w}} = (X^\top X)^{-1} X^\top \boldsymbol{y}}.$$

Passo 1: calcular $X^\top X$ e $X^\top \boldsymbol{y}$

$$X^\top X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad X^\top \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: resolver $(X^\top X)\boldsymbol{w} = X^\top \boldsymbol{y}$

$$\begin{cases} 4w_0 + 2w_1 + 2w_2 = 8 \\ 2w_0 + 2w_1 + w_2 = 5 \\ 2w_0 + w_1 + 2w_2 = 5 \end{cases}$$

Eliminação de Gauss:

$$\begin{aligned}
(2)\times 2 &: 4w_0 + 4w_1 + 2w_2 = 10 \\
(2)\times 2 - (1) &: 2w_1 = 2 \;\Rightarrow\; w_1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3)\times 2 &: 4w_0 + 2w_1 + 4w_2 = 10 \\
(3)\times 2 - (1) &: 2w_2 = 2 \;\Rightarrow\; w_2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{subst. em } (2) &: 2w_0 + 2(1) + 1 = 5 \\
&\Rightarrow 2w_0 = 2 \;\Rightarrow\; w_0 = 1
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

3 Modelo ajustado

$$\hat{y} \;=\; 1 + 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \;=\; 1 + x_1 + x_2.$$

Todos os quatro pontos são ajustados *exatamente* (erro zero), pois os dados alinham-se perfeitamente com esse plano linear.

4 Observações finais

- A matriz $X^\top X$ é simétrica e definida positiva quando as colunas de X são linearmente independentes.
- Para conjuntos maiores, usa-se tipicamente fatoração de Cholesky ou QR em vez de inversão explícita, por estabilidade numérica.
- O coeficiente de cada atributo vale 1: cada aumento unitário em x_1 ou x_2 incrementa $\hat{y}$ em 1.

5 Método Gauss–Jordan para A^{-1}

Considere $A = X^\top X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Monte a matriz aumentada $[A \mid I_3]$ e aplique operações elementares de linha até obter $[I_3 \mid A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Portanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6 Método da Matriz Adjunta (Cofatores)

O determinante de A vale $\det A = 4$. Os cofatores $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ resultam na matriz de cofatores

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A adjunta é $\operatorname{adj}(A) = C^\top$, logo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.75 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a fórmula dos pesos

Teste os dois métodos multiplicando $(X^\top X)^{-1} X^\top \boldsymbol{y}$:

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

confirmando o resultado obtido via sistema linear.