

Lista de Exercícios — Regressão Logística e Regressão Linear

Use apenas papel, caneta e calculadora básica. Nada de Python nesta parte!

Parte A — Regressão Logística

Considere sempre a função sigmoide

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}.$$

Conjunto (3 pontos)

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	0	0	0
2	1	0	0
3	0	1	1

1. **Predições iniciais.** Tome $w_0 = w_1 = w_2 = 1$. Calcule z_i e $\hat{y}_i = \sigma(z_i)$ para cada linha.
 2. **Gradientes.** Derive $\partial J / \partial w_0, \partial J / \partial w_1, \partial J / \partial w_2$ para entropia-cruzada ($-\log(\text{verossimilhança})$) e substitua os valores do item 1.
 3. **Primeira atualização.** No algoritmo de descida do gradiente, use taxa $\alpha = 0.4$ e calcule a primeira atualização dos pesos. Mantenha quatro casas decimais.
 4. **Perda.** Com os novos pesos, recalcule \hat{y}_i e avalie J .
 5. **Segunda iteração.** Repita os itens 2–4. Compare o novo J com o anterior.
 6. **Variação da taxa.** Refaça apenas a primeira atualização com $\alpha = 1.2$ e discuta.
-

Parte B — Regressão Linear por Mínimos Quadrados

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	0	0	1
2	1	0	2
3	0	1	2
4	1	1	3

1. Monte X (com coluna de 1's) e \mathbf{y} .
2. Calcule $X^\top X$ e $X^\top \mathbf{y}$.
3. Inverta $X^\top X$ via **Gauss–Jordan**. Documente cada operação de linha.
4. Inverta novamente pelo **método da adjunta**: cofatores, adjunta e determinante.
5. Obtenha os pesos $\hat{\mathbf{w}}$ multiplicando a inversa por $X^\top \mathbf{y}$.
6. Calcule o erro quadrático do modelo com os pesos calculados.

Novo conjunto

Dados $(x_1, x_2, y) \in \{(0, 0, 2), (2, 0, 3), (0, 2, 3), (2, 2, 6)\}$, repita os itens 1–6 acima e verifique se os dois métodos de inversão produzem o mesmo $\hat{\mathbf{w}}$.

Parte C — Regressão linear com descida do gradiente

1. Derive o gradiente de $J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \|X\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2$ e execute três iterações manuais de descida do gradiente com $\alpha = 0.1$ no primeiro conjunto da Parte B.
2. Para cada iteração, calcule o erro quadrado total e compare com o erro quadrado do método analítico. Comente a taxa de convergência.