

# Simulação computacional - Problema de 3 corpos

## Projeto 1 - Métodos Computacionais em Física

Renan de Assis, NUSP: 9865401

Abril 2020

## 1 Introdução

### 1.1 Objetivo e descrição física

O seguinte relatório tem como objetivo resolver numericamente o problema de determinar as posições e momentos de 3 corpos interagindo ao longo do tempo. No caso, será utilizado um sistema no qual Sol, Terra e Júpiter interagem gravitacionalmente apenas em duas dimensões.

Inicialmente pensou-se em abordar o problema com coordenadas polares devido a facilidade para a resolução analítica do problema, entretanto pela praticidade no cálculo computacional foram adotadas coordenadas cartesianas.

A interação gravitacional que um corpo com massa  $M_1$  faz em outro com massa  $M_2$  é dada pela Lei da Gravitação Universal de Newton

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = \frac{GM_1M_2}{r_{12}^3}\vec{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.1)$$

com  $G$  sendo a constante gravitacional e  $\vec{\mathbf{r}}_{12}$  o vetor posição entre o corpo com massa  $M_1$  e o corpo com massa  $M_2$ .

Além disso, utilizaremos a 2ª lei de Newton que nos diz que a taxa de variação temporal do momento de um corpo é equivalente a sua força resultante.

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_R \quad (1.2)$$

sendo  $\vec{p}$  o vetor momento do corpo e  $\vec{F}_R$  a força resultante atuando nele.

E para a resolução numérica do problema a variação temporal da posição ( $\vec{r}$ ) de um corpo com massa  $m$  é escrita como

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \quad (1.3)$$

Neste relatório analisaremos também como se comporta a energia cinética (1.4) e potencial (1.5) dos astros com as seguintes equações

$$T = \frac{p^2}{2M} \quad (1.4)$$

$$V = \frac{-GM_1M_2}{r_{12}} \quad (1.5)$$

sendo  $p$  o módulo do vetor momento do astro com massa  $M$  e  $r_{12}$  o módulo do vetor posição entre o corpo com massa  $M_1$  e o corpo com massa  $M_2$ .

Por conveniência e pelas dimensões do problema a ser tratado, movimento de corpos celestes, as unidades utilizadas foram:

- Para distâncias: unidades astronômicas (UA)
- Para massa: massas solares ( $M_\odot$ )
- Para tempo: anos (ano)

Assim, as unidades de momento e da constante gravitacional foram convertidas de acordo.

## 2 Descrição da simulação e dos resultados

A partir da discussão na seção 1, vemos que ,atualmente, com as ferramentas matemáticas existentes temos uma solução analítica geral para o problema de 2 corpos, mas não para o problema de 3 corpos interagindo gravitacionalmente, por isso foi utilizada uma resolução numérica.

## 2.1 Descrição dos sistemas

Inicialmente foi realizada uma simulação de apenas dois corpos interagindo gravitacionalmente, sendo eles a Terra e o Sol, a fim de compreender melhor o sistema tratado. Portanto a única força presente no sistema é a força gravitacional de um corpo no outro definida pela equação (1.1). Assim, a equação (1.2) para um corpo  $i$  fica

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ij} \quad (2.1)$$

Com isso temos 8 coordenadas a determinar ao longo do tempo: duas de posição e duas de momento para cada astro.

A partir da situação acima foi realizada a simulação de 3 corpos, Sol, Terra e Júpiter, a qual era nosso objetivo principal. Para isso a força resultante sobre um corpo é agora a soma da força gravitacional (1.1) dos dois outros e a 2ª lei de Newton (1.2) fica

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ik} \quad (2.2)$$

e aqui temos 12 coordenadas a determinar, duas de posição e duas de momento para cada um dos 3 astros.

## 2.2 Método de Euler

Para descrever com que método foi resolvido as equações diferenciais acima é necessário entender um procedimento numérico anterior, o método de Euler. Com esse intuito usaremos o problema de 3 corpos para exemplificar a explicação.

O método de Euler consiste em aproximar as derivadas de uma equação, as equações de momento (2.2) e posição (1.3) no caso, para

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \approx \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \approx \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Assim, reescrevendo essas equações temos que cada posição e momento em

$(t + \Delta t)$  é dado por

$$\vec{\mathbf{p}}_i(t + \Delta t) = \vec{\mathbf{p}}_i(t) + (\vec{\mathbf{F}}_{ij}(t) + \vec{\mathbf{F}}_{ik}(t))\Delta t \quad (2.5)$$

$$\vec{\mathbf{r}}_i(t + \Delta t) = \vec{\mathbf{r}}_i(t) + \left( \frac{\vec{\mathbf{p}}_i(t)}{M} \right) \Delta t \quad (2.6)$$

precisando ser determinados previamente  $\vec{\mathbf{p}}_i(t)$  e  $\vec{\mathbf{r}}_i(t)$ .

A partir dessa explicação podemos nos ater a descrever o próximo método, mais preciso, que foi utilizado para as simulações.

### 2.3 Método de Runge-Kutta 2ª ordem (RK2)

O método numérico de Runge-Kutta de 2ª ordem consiste em aprimorar o método de Euler através da determinação das posições e momentos em  $(t + \Delta t)$  em meio passo primeiramente para depois em um passo inteiro.

Pelo método de Euler, nas equações (2.5) e (2.6), uma vai utilizar o passo anterior calculado pela outra, entretanto para o método de Runge-Kutta de 2ª ordem calcularemos meio passo a cada vez para cada coordenada. Para isso, realizaremos esse cálculo nas seguintes etapas explicadas abaixo.

1. Definimos a variável  $k_1$ , que é a inclinação no início do intervalo, a partir das equações (2.5) e (2.6).

$$k_1^{\vec{\mathbf{p}}_i} = (\vec{\mathbf{F}}_{ij}(t) + \vec{\mathbf{F}}_{ik}(t))\Delta t \quad (2.7)$$

$$k_1^{\vec{\mathbf{r}}_i} = \left( \frac{\vec{\mathbf{p}}_i(t)}{M} \right) \Delta t \quad (2.8)$$

2. Calculamos o valor em meio passo utilizando  $k_1$

$$\vec{\mathbf{p}}_i(t + \Delta t/2) = \vec{\mathbf{p}}_i(t) + k_1^{\vec{\mathbf{p}}_i} \quad (2.9)$$

$$\vec{\mathbf{r}}_i(t + \Delta t/2) = \vec{\mathbf{r}}_i(t) + k_1^{\vec{\mathbf{r}}_i} \quad (2.10)$$

3. Definimos a variável  $k_2$ , a qual é a inclinação do ponto médio do intervalo, através dos valores em meio passo calculados em (2.9) e (2.10)

$$k_2^{\vec{\mathbf{p}}_i} = (\vec{\mathbf{F}}_{ij}(t + \Delta t/2) + \vec{\mathbf{F}}_{ik}(t + \Delta t/2))\Delta t \quad (2.11)$$

$$k_2^{\vec{r}_i} = \left( \frac{\vec{p}_i(t + \Delta t/2)}{M} \right) \Delta t \quad (2.12)$$

4. Por fim atualizamos a posição e momento do corpo utilizando  $k_2$

$$\vec{p}_i(t + \Delta t) = \vec{p}_i(t) + k_2^{\vec{p}_i} \quad (2.13)$$

$$\vec{r}_i(t + \Delta t) = \vec{r}_i(t) + k_2^{\vec{r}_i} \quad (2.14)$$

## 2.4 Simulação Sol-Terra

Para a simulação de 2 corpos interagindo gravitacionalmente, sendo eles o Sol e a Terra, foi utilizado um passo temporal de 1/365.25 ano ao longo de 1 ano e as massas e distância foram aproximadas dos astros reais, ou seja,  $M_{\text{sol}} = 1 M_{\odot}$ ,  $M_{\text{terra}} = 3.003e^{-6} M_{\odot}$ ,  $d_{\text{ST}} = 1 \text{ UA}$ . As condições iniciais foram que o Sol começou na origem do sistema de coordenadas (0,0) com momento nulo (0,0) e a Terra a uma distância (dST,0) e momento (0,1.92e<sup>-5</sup>), nesse último utilizando a velocidade de translação real da Terra em torno do Sol,  $v = 6.39 \text{ UA/ano}$ .

A Figura 1 abaixo ilustra o começo da simulação ao longo de 1 ano com os astros e suas respectivas órbitas.

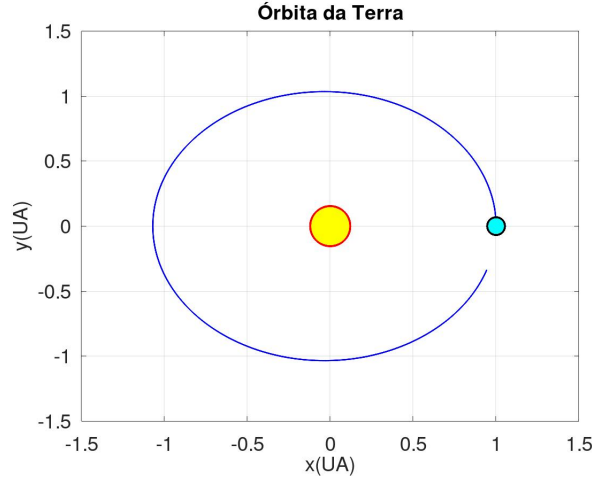


Figura 1: Simulação da trajetória da Terra ao redor do Sol ao longo de 1 ano

É possível visualizar que o movimento do Sol é imperceptível e mesmo que o

intervalo de tempo seja de um ano a órbita da Terra não faz uma volta completa pelo Sol, isso se dá provavelmente pelas aproximações feitas pelo método de RK2 e sendo que deveria ter sido calculado um centro de massa onde os dois astros deveriam orbitar.

A Figura 2a) abaixo representa a distância Sol-Terra em UA pelo tempo decorrido. Com ela é possível ver que a Terra possui uma órbita elíptica, e não circular, em torno do sol.

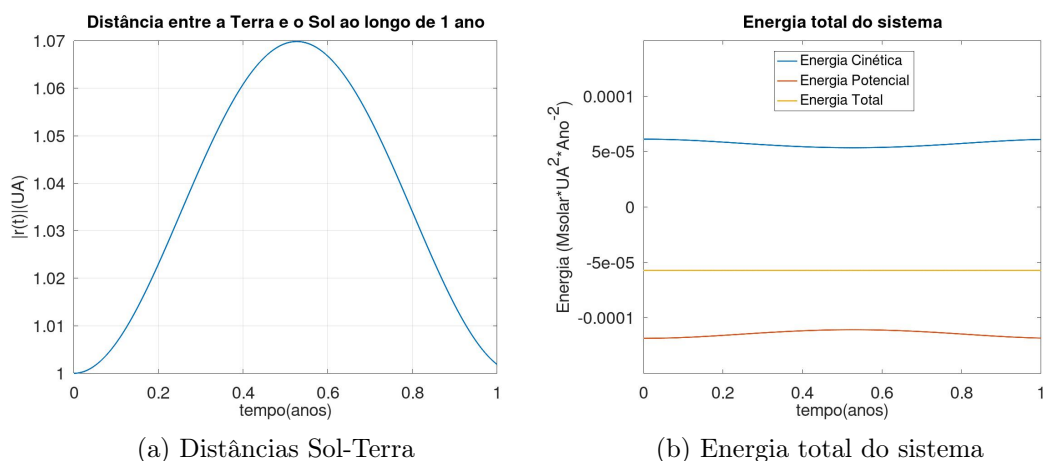


Figura 2: Características do sistema

Já a Figura 2b) mostra a energia cinética(1.4) e potencial(1.5) do sistema Sol-Terra, tanto quanto a sua energia total (soma da cinética com a potencial). Analisando o gráfico vemos que a energia total está bem próxima de zero visto que é um sistema isolado e por isso a energia deveria se conservar, infelizmente não é exatamente zero devido às aproximações realizadas.

## 2.5 Simulação Sol-Terra-Júpiter

Para o problema principal que foi o de 3 corpos interagindo gravitacionalmente, no caso o Sol, a Terra e Júpiter, foram utilizados os mesmos valores da simulação de 2 corpos adicionando ainda a massa de Júpiter ( $M_{\text{jupiter}} = 9.55e^{-4}M_{\odot}$ ) e a distância entre Júpiter e o Sol ( $d_{\text{SJ}} = 5.2 \text{ UA}$ ). As condições iniciais também foram as mesmas do problema anterior acrescentando a posição de Júpiter (0, $d_{\text{SJ}}$ ) e o

momento  $(0, -2.76e^{-3})$  para esse último a velocidade de Júpiter ao torno do Sol foi de  $v = 2.89$  UA/ano.

A Figura 3 abaixo representa o início da simulação do movimento dos 3 corpos, nela podemos ver que, da mesma forma que na Figura 1 a órbita da Terra não se completa em 1 ano e além disso é mostrado o quanto Júpiter percorreria nesse tempo.

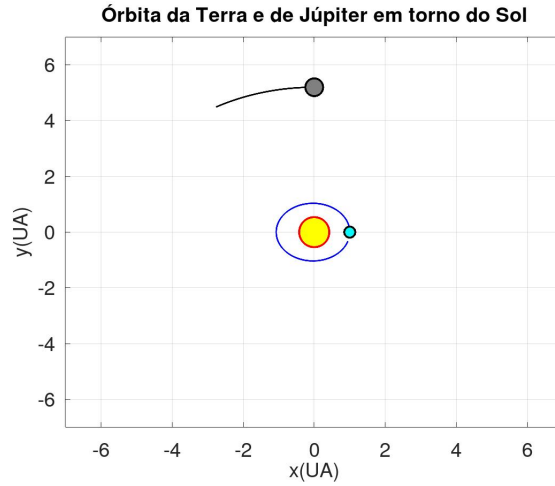


Figura 3: Simulação da trajetória da Terra e de Júpiter ao redor do Sol ao longo de 1 ano

Já na Figura 4 alteramos o intervalo de tempo para 14 anos a fim de visualizar a órbita completa de Júpiter. É interessante notar que Júpiter leva 12 anos para dar uma volta completa em torno do Sol na realidade, entretanto devido às aproximações levou 2 anos a mais.

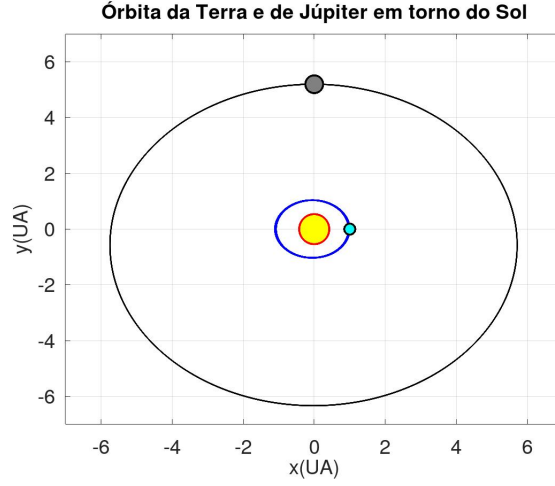


Figura 4: Simulação da trajetória da Terra e de Júpiter ao redor do Sol ao longo de 14 anos

A Figura 5a) abaixo caracteriza a distância Sol-Júpiter em UA pelo tempo decorrido, não foi colocado aqui o gráfico da distância Sol-Terra pois ele era semelhante a Figura 2a). O mesmo comportamento foi visto para a órbita de Júpiter, indicando que o astro também possui uma trajetória elíptica.

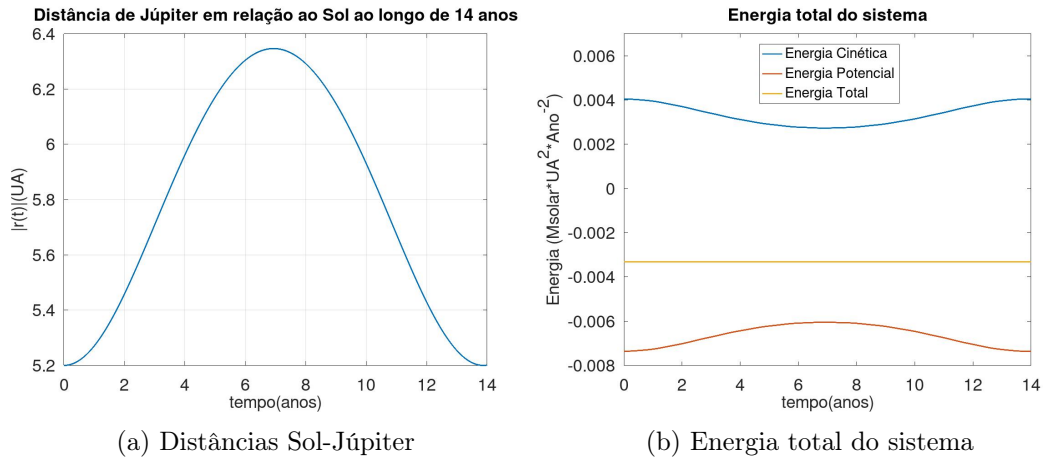


Figura 5: Características do sistema

Para a Figura 5b) vemos que a energia total do sistema de 3 corpos que deveria ser nula, se encontra deslocada para baixo da mesma forma que a Figura 2b),



indicando que a energia potencial deveria ser um pouco mais negativa.

Por fim, foi explorado a situação se Júpiter tivesse 10% da massa do Sol na Figura 6.

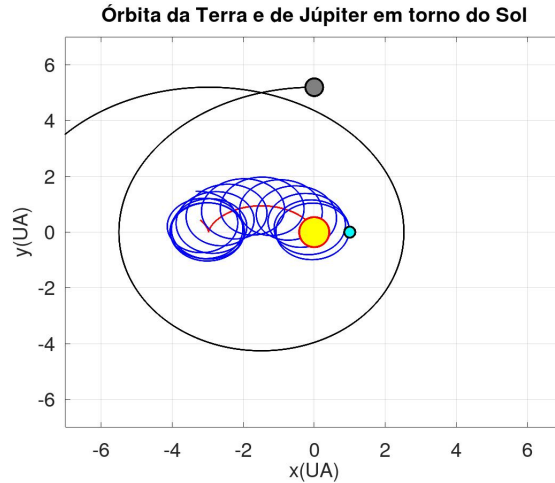


Figura 6: Órbitas dos astros sendo que a massa de Júpiter é 10% da massa do Sol ao longo de 14 anos

Com isso é possível notar que agora é visível o movimento do Sol e Júpiter sairá de órbita ao longo de 14 anos, mas a Terra permanecerá na órbita do Sol, o acompanhando.

### 3 Manual do usuário para o script

O problema abordado nesse relatório foi resolvido numericamente com o *software* Octave[1]. Foram feitos dois *scripts* um para o sistema de 2 corpos (*script* 1) e outro para o de 3 corpos (*script* 2), ambos possuem o objetivo de calcular as posições e momentos dos corpos e gerar as Figuras de 1 a 8 vistas nesse relatório. A diferença na estrutura entre os *scripts* é que para o *script* 1 não foi visto ser necessário o uso de funções para organizar o código, apenas a separação de cada etapa já era suficiente.

Assim, ambos os *scripts* são organizados da seguinte forma geral:

1. Definição de constantes

2. Inicializar vetores posição e momento dos astros
3. Definir as condições iniciais do problema
4. Laço para resolver as equações pelo método de Runge-Kutta 2ª ordem
5. Cálculo das energias e dos vetores distância dos astros em relação ao Sol
6. Plot das energias do sistema pelo tempo
7. Plot da posição entre a Terra ou Júpiter e o Sol
8. Plot da animação de movimento do sistema

As variáveis importantes que podem ser modificadas estão na parte 1 (valores de massas, distâncias e velocidades dos astros, passo e o intervalo de tempo) e na parte 3 (posição e momento de cada astro).

## 4 Conclusão

Com as simulações numéricas realizadas, tanto do problema de 2 corpos como de 3 corpos, foi possível entender algumas das unidades usadas em problemas de corpos celestes, verificar, com as próprias animações e com as Figuras de distâncias por tempo, que as órbitas são elípticas e visualizar o que aconteceria com a órbita dos astros se a massa de Júpiter fosse 10% da massa do Sol.

Esse último ponto leva a compreender que as massas dos planetas estão na proporção para se manterem em órbita por um bom tempo, se por algum motivo algum planeta ganhasse ou perdesse uma quantidade considerável de massa, isso poderia alterar a órbita de todos os planetas ao redor.

## Referências

- [1] John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg, and Rik Wehbring. *GNU Octave version 5.2.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*, 2020. URL <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v5.2.0/>.