Práctica 2. Sistemas de Ecuaciones lineales

Universidad Nacional del Comahue
Centro Regional Universitario Bariloche

Agosto de 2016

Métodos directos: eliminación Gaussiana, factorización LU y métodos con pivoteo

Nota: trate de resolver "TODOS" los ejercios en papel para luego comparar los resultados obtenidos con los métodos numéricos implementados.

1) Calcular el determinante de las siguientes matrices y clasifique cada caso como (no) singular, bien (mal) condicionada. Explique.

(a)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.11 & -0.80 & 1.72 \\ -1.84 & 3.03 & 1.29 \\ -1.57 & 5.25 & 4.30 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(d)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -18 & 13 \end{bmatrix}$$

2) Resolver los sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ utilizando eliminación gaussiana.
Hint: Utilice reordenamiento donde sea necesario

(a)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3) Utilice la factorización de (a) Doolittle y de (b) Choleski para encontrar $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

4) Utilice la factorización de Doolittle para resolver el siguiente **SEL** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 9 & -8 & 24 \\ -12 & 24 & -26 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 65 \\ -42 \end{bmatrix}$$

5) Utilice la factorización de Choleski para resolver el siguiente **SEL** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6) Modifique el módulo que resuelve **SEL** mediante eliminación gaussiana para que resuelva un sistema con m vectores $\mathbf{x}$ (ver ej. 2-(a)). Pruebe el programa resolviendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) Determine los coeficientes del polinomio $P_3(x)$ que pase por los puntos (0, 10), (1, 35), (3, 31) y (4, 2).

8) Determine **L** and **D** que resulta de la factorización de Doolittle de la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 39 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 14 \end{bmatrix}$$

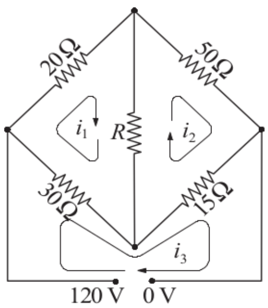
9) Resuelva el siguiente **SEL** tridiagonal utilizando factorización de Doolittle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10)Resuelva el siguiente **SEL** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mediante eliminación gaussiana con pivoteo de fila escalonado

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.34 & -4.10 & 1.78 \\ 1.98 & 3.47 & -2.22 \\ 2.36 & -15.17 & 6.81 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.73 \\ -6.63 \end{bmatrix}$$

11) El sistema eléctrico que se muestra a continuación puede analizarse aplicando las leyes de Kirchoff $\sum$(caídas de voltaje)=$\sum$(fuentes de voltaje)) aplicado a cada lazo. En el ejemplo pueden distinguirse tres lazos y al aplicar las leyes de Kirchoff para resolver las corrientes que circulan en cada lazo se obtiene el **SEL** mostrado a la derecha de la figura. Resuelva para R = $5\,\Omega$, $10\,\Omega$, and $20\,\Omega$



$$(50 + R)i_1 - Ri_2 - 30i_3 = 0$$
$$-Ri_1 + (65 + R)i_2 - 15i_3 = 0$$
$$-30i_2 - 15i_2 + 45i_3 = 120$$

Métodos iterativos: Gauss-Seidel, gradiente conjugado y Jacobi

12) Invierta las siguientes matrices triangulares

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

13) Utilizando el método de Gauss-Seidel resuelva

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 7 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -26 \end{bmatrix}$$

14) Utilizando el método de Gauss-Seidel con relajación resuelva el siguiente **SEL**. Utilice el vector inicial $x_i = \frac{b_i}{A_{ii}}$ y $\omega = 1.1$ como factor de relajación.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

15) Aplique el método de gradiente conjugado con vector inicial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para resolver el siguiente **SEL**. Cambia el resultado si utiliza otros vectores iniciales?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

16) Resuelva con precisión de 10^{-8} el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Jacobi. Cambia el resultado al utilizar otros vectores iniciales?

$$\left.\begin{array}{rcl} 10x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 & = & -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 & = & 15 \end{array}\right\}$$

Referencias

[1] Numerical Methods in Engineering with Python 3 3rd Edition (2013). Cambridge University Press. Jaan Kiusalaas. ISBN-10: 1107033853 ISBN-13: 978-1107033856