Ueber stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung.

(Von Herrn *A. Oberbeck*.)

Die allgemeinen Differentialgleichungen der Hydrodynamik, bei welchen die innere Reibung mit in Betracht gezogen wird *), sind bisher hauptsächlich zur Lösung einer besonderen Classe von Aufgaben verwandt worden, von Aufgaben, welche durch die zur numerischen Bestimmung der Reibungsconstanten angestellten Versuche gegeben waren **). Viel zahlreicher und vielseitiger sind diejenigen Probleme der Hydrodynamik, welche ohne Rücksicht auf die Reibung behandelt worden sind. Besonders hat in neuerer Zeit eine Art von Bewegungen, welche man als Strömungen, beeinflusst durch feste Körper in der Flüssigkeit, bezeichnen kann, die Aufmerksamkeit hervorragender Mathematiker auf sich gezogen ***). Ich habe gefunden, dass ein Theil dieser Aufgaben auch dann löslich ist, wenn man die allgemeineren Differentialgleichungen zu Grunde legt.

Alle Flüssigkeitsbewegungen, bei denen die innere Reibung eine Rolle spielt, verdienen ein besonderes Interesse durch den nahen Zusammenhang mit denjenigen Bewegungserscheinungen, welchen Herr *Helmholtz* †) den Namen Wirbelbewegungen gegeben hat. Diese Beziehung, auf welche Herr *Helmholtz* selbst zuerst aufmerksam gemacht hat, und welche dann ausführlicher von Herrn *Stefan* ††) besprochen und bei Strömungen durch Capillarröhren nachgewiesen worden ist, ist bisher noch wenig für die Theorie der Flüssigkeitsbewegungen mit Reibung verwerthet worden. Sie

---

*) Aufgestellt von: *Navier*, Mémoires de l'acad. des sc. de Paris VI., 389; *Poisson*, Journal de l'éc. polyt. XIII., cahier 20, 139; *Stokes*, Cambr. philos. Transactions VIII., 287.

**) *Helmholtz* und *Piotrowski*, Ber. d. Wien. Acad. XL., 607—655. *O. E. Meyer*, dieses Journal Bd. LIX., 229—304; LXXIII., 31—69; LXXV., 336—347. *Lübeck*, Bd. LXXVII., 1—38.

***) *Dirichlet*, Monatsber. der Berl. Akad. 1852, 12—17. — *Clebsch*, dieses Journal Bd. LII., 103—132. *Kirchhoff*, dieses Journal Bd. LXXI., 237—262 und Vorlesungen über math. Physik, Leipzig 1874, 214—250.

†) *Helmholtz*, dieses Journal Bd. LV., 25—56.

††) Ber. d. Wien. Akad. XLVI., 8—32; 495—520.

ist indess von fundamentaler Bedeutung für die Behandlung einer ganzen Classe von Aufgaben, wie die folgende einfache Betrachtung zeigt. Ist eine Flüssigkeitsbewegung ohne Reibung so beschaffen, dass sie ein Geschwindigkeitspotential zulässt, ist für diesen Fall die Aufgabe gelöst, d. h. das Geschwindigkeitspotential bestimmt, so hat man bei Berücksichtigung der Reibung zu den vorher gefundenen Geschwindigkeitscomponenten nur diejenigen Integrale der hydrodynamischen Differentialgleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, hinzuzufügen. Die darin auftretenden willkürlichen Functionen lassen sich dann in vielen Fällen vermittelst des Geschwindigkeitspotentials durch die Oberflächenbedingungen bestimmen.

In dieser Weise ist hier eine Reihe von Aufgaben behandelt, bei welchen, ohne Reibung, die Geschwindigkeitscomponenten durch die Differentialquotienten einer Function ausgedrückt werden können. Diese Function soll von der Zeit unabhängig sein, d. h. die Bewegung wird als stationär angenommen. Es wird die Frage gestellt, welche Grössen, bei gewissen Annahmen über das Geschwindigkeitspotential und bei entsprechenden Voraussetzungen über die Grenzen der Flüssigkeit, zu den ursprünglichen Geschwindigkeitscomponenten hinzukommen müssen, wenn die Reibung mitberücksichtigt wird.

Nach Aufstellung der allgemeinen Gleichungen und ihrer Lösungen soll zunächst an zwei möglichst einfachen Beispielen der Vortheil des eben besprochenen Verfahrens gezeigt werden (§. 1). Dann soll in der unbegrenzten Flüssigkeit eine feste Kugel angenommen werden. Die Flüssigkeit kann sich ausserhalb derselben in beliebiger Weise bewegen. Auch nach Einführung der Reibung ist es möglich diese Aufgabe vollständig zu lösen, ohne die Allgemeinheit der Annahme über das Geschwindigkeitspotential zu beschränken. Der specielle Fall, wo überall in unendlicher Entfernung die Strömung einer Richtung parallel ist, führt zu sehr einfachen Lösungen. Bei demselben soll etwas eingehender die Analogie der Geschwindigkeiten der Flüssigkeit mit magnetischen und elektromagnetischen Kräften verfolgt werden, auf welche Herr *Helmholtz* *) in seiner oben angeführten Arbeit zuerst aufmerksam gemacht hat (§. 2). Unter denselben speciellen Voraussetzungen lassen sich die Geschwindigkeitscomponenten auch dann noch durch Ausdrücke von geschlossener Form wiedergeben,

---

*) l. c. 27.

wenn sich an Stelle der Kugel ein dreiaxiges Ellipsoid befindet. Auch der Druck, welchen die strömende Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausübt, kann dann leicht berechnet werden (§. 3).

§. 1.

Die allgemeinen Differentialgleichungen der Hydrodynamik sind:

$$\varrho\cdot\frac{du}{dt} = \varrho.X-\frac{\partial p}{\partial x}+k.\varDelta u,$$
$$\varrho\cdot\frac{dv}{dt} = \varrho.Y-\frac{\partial p}{\partial y}+k.\varDelta v,$$
$$\varrho\cdot\frac{dw}{dt} = \varrho.Z-\frac{\partial p}{\partial z}+k.\varDelta w,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Hier bedeuten, wie gewöhnlich, u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten, ϱ die Dichtigkeit, p den Druck, X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Kraft im Punkt x, y, z. Das Zeichen $\varDelta$ drückt die Differentiationen aus:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

k ist die Reibungsconstante.

Für den hier betrachteten Fall der stationären Bewegung nehmen diese Gleichungen die einfachere Form an:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varDelta u = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \varDelta v = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \varDelta w = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(2.)\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Durch Einführung der doppelten Componenten der Rotationsgeschwindigkeiten in Bezug auf die drei Axen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \eta = \dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

erhält man eine Reihe von Gleichungen, welche sich leicht aus (1.), (2.), (3.) ergeben:

$$(4.)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0,$$

$$(5.)\qquad \begin{cases} \varDelta u = \dfrac{\partial\eta}{\partial z}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\[2mm] \varDelta v = \dfrac{\partial\zeta}{\partial x}-\dfrac{\partial\xi}{\partial z} = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\[2mm] \varDelta w = \dfrac{\partial\xi}{\partial y}-\dfrac{\partial\eta}{\partial x} = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(6.)\qquad \varDelta\xi = \varDelta\eta = \varDelta\zeta = 0.$$

Hiernach lassen sich die Lösungen der Differentialgleichungen (1.), (2.) in die Form bringen *):

$$(7.)\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial W}{\partial y}-\dfrac{\partial V}{\partial z}, \\[2mm] v = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial U}{\partial z}-\dfrac{\partial W}{\partial x}, \\[2mm] w = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}+\dfrac{\partial V}{\partial x}-\dfrac{\partial U}{\partial y}. \end{cases}$$

Die hier vorkommenden Functionen müssen die Bedingungen erfüllen:

$$(8.)\qquad \varDelta\varphi = 0,$$

$$(9.)\qquad \varDelta U = -\xi,\quad \varDelta V = -\eta,\quad \varDelta W = -\zeta,$$

$$(10.)\qquad \frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

φ ist hier das Geschwindigkeitspotential. U, V, W sind die noch zu bestimmenden, willkürlichen Functionen, von denen die Wirbelbewegungen abhängen.

Die bisher aufgestellten Gleichungen gelten für alle Punkte des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes. Für die Grenzen der Flüssigkeit gegen feste Körper soll stets der gewöhnlichen Annahme gefolgt werden, dass die Flüssigkeit an denselben haftet, d. h. dass:

$$u = v = w = 0,$$

eine Annahme, welche zu gelten scheint, so lange die Geschwindigkeit der bewegten Flüssigkeit nicht über gewisse Grenzen hinausgeht.

*) *Helmholtz,* dieses Journal Bd. LV., 38—39. Vergl. auch *Kirchhoff,* Vorles. über math. Physik, 251—253.

Es sollen nun zunächst die Flüssigkeitsbewegungen in zwei einfachen Fällen besprochen werden.

a) Es sei:

$$(11.)\qquad \varphi = -gx;$$

also:

$$u = g,\quad v = w = 0,$$

wenn man von der Reibung absieht. Die Begrenzung der Flüssigkeit kann aus einer beliebigen Cylinderfläche, parallel der x-Axe bestehen. So würden hierhin die Strömungen durch geradlinige Röhren von beliebigem Querschnitt gehören *). Es soll hier indess die einfachste Voraussetzung zu Grunde gelegt werden. Die Flüssigkeit sei durch zwei unendlich grosse, der x-Axe parallele Ebenen begrenzt, deren Abstand gleich $2q$ ist. Der Anfangspunkt der Coordinaten liege in der Mitte der beiden Ebenen. Die y-Axe stehe senkrecht zu denselben. Gehen wir nun zur Berücksichtigung der inneren Reibung über, so ist leicht einzusehen, dass die hierbei in Betracht kommenden Rotationsbewegungen nur in Bezug auf die z-Axe stattfinden können, dass ferner die Rotationsgeschwindigkeiten ζ nur von y abhängen. Also:

$$\xi = \eta = U = V = 0,$$

$$\zeta = ay + b,$$

$$W = -\frac{a}{6}y^3 - \frac{b}{2}y^2 + cy + d,$$

$$u = g - \frac{a}{2}y^2 - by + c.$$

Da u für $y = \pm q$ verschwinden muss, so ist:

$$b = c = 0,\quad \frac{a}{2} = \frac{g}{q^2},$$

$$(12.)\qquad u = g\left(1 - \frac{y^2}{q^2}\right).$$

Für die Geschwindigkeit als Function der senkrechten Entfernung von den festen Uferwänden gilt also das Gesetz der Parabel. Dasselbe scheint in der That bei der Bewegung des Wassers in Flüssen vorzukommen **).

*) Die Strömung durch gerade Röhren mit kreisförmigem Querschnitt ist zuerst von *F. Neumann* behandelt worden. Vergl. auch *Stefan*, Wien. Ber. XLVI., 495—520. Ueber Strömungen durch Röhren mit elliptischem und rechteckigem Querschnitt: *Boussinesq*, *Liouville* J. (2) XIII., 377—424.

**) Beobachtungen von *Humphreys* und *Abbot* am Mississippi. Fortschr. der Physik 1867, 107.

b) Es soll ferner als Geschwindigkeitspotential die vieldeutige Function:

$$(13.)\qquad \varphi = g.\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

angenommen werden. Die Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeitstheile sind dann:

$$u = -\frac{gy}{r^2},\quad v = \frac{gx}{r^2},\quad w = 0,$$

wo $r^2 = x^2+y^2$ gesetzt ist. Jeder Punkt der Flüssigkeit beschreibt also ohne Reibung eine kreisförmige Bahn mit der Geschwindigkeit $\frac{g}{r}$. Man kann sich daher die Flüssigkeit durch zwei Kreiscylinder mit derselben Axe, welche mit der z-Axe zusammenfällt, begrenzt denken. Die Radien dieser Cylinder seien: R_1 und R_2. Dann muss bei Berücksichtigung der Reibung:

$$u = v = 0 \quad \text{sein, wenn} \quad \begin{cases} r = R_1, \\ r = R_2. \end{cases}$$

Auch hier ist leicht zu übersehen, dass:

$$\xi = \eta = U = V = 0.$$

Denkt man sich dann Polarcoordinaten eingeführt:

$$x = r.\cos\vartheta,\quad y = r.\sin\vartheta,$$

so müssen ζ und W von ϑ unabhängig sein. Dann folgt aus den Gleichungen (6.) und (9.):

$$\begin{aligned} \zeta &= a+b.\log r, \\ W &= r^2\{c+d.\log r\}. \end{aligned}$$

Es genügt für W hier die angegebene, particuläre Lösung. Die Constanten a und b stehen in einfacher Beziehung zu c und d. Aus den Gleichungen (7.) folgt dann:

$$(14.)\qquad \begin{cases} u = -y\left\{\frac{g}{r^2}-(2c+d)-2d.\log r\right\}, \\ v = x\left\{\frac{g}{r^2}-(2c+d)-2d.\log r\right\}, \\ w = 0. \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen geben:

$$(15.)\quad \begin{cases} d = \dfrac{g}{2} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{R_2^2} - \dfrac{1}{R_1^2}}{\log R_2 - \log R_1}, \\ 2c+d = g \cdot \dfrac{\dfrac{1}{R_2^2}\log R_1 - \dfrac{1}{R_1^2}\log R_2}{\log R_1 - \log R_2}. \end{cases}$$

§. 2.

In einer allseitig unbegrenzten Flüssigkeit befinde sich eine Kugel mit dem Radius R. Der Mittelpunkt derselben sei Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Die Bewegung der Flüssigkeit ohne Reibung sei durch den allgemeinsten Werth bestimmt, welchen das Geschwindigkeitspotential annehmen kann. Bekanntlich lässt sich eine jede Function, welche der partiellen Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt, in der Form darstellen:

$$(16.)\quad \varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \alpha_n r^n + \frac{\beta_n}{r^{n+1}} \right\} K_n,$$

wo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und K_n die Kugelfunction n^{ter} Ordnung bedeutet. Wenn φ in dem hier betrachteten Fall das Geschwindigkeitspotential darstellen soll, so muss noch eine Bedingung erfüllt sein. Es muss an der Kugeloberfläche die senkrecht gegen dieselbe gerichtete Geschwindigkeitscomponente verschwinden. Also:

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0, \quad \text{wenn} \quad r = R.$$

Daraus folgt:

$$(17.)\quad \varphi = \Sigma \alpha_n \left\{ r^n + \frac{n}{n+1} \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right\} \cdot K_n.$$

Für die weitere Rechnung ist es vortheilhaft, an Stelle der nur von den Winkeln abhängigen Function K_n eine neue Function:

$$P_n = \alpha_n . r^n . K_n$$

einzuführen. K_n und P_n sind also die einander entsprechenden Functionen, für welche vor Kurzem die Benennungen: Kugelflächenfunction und räumliche Kugelfunction vorgeschlagen worden sind *). P_n ist bekanntlich eine

*) *Thomson* und *Tait*, Handbuch der theoretischen Physik, übersetzt von *Helmholtz* und *Wertheim*. Braunschweig 1871, I., 156.

ganze homogene Function n^{ten} Grades von x, y, z. Der allgemeinste Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential ist also:

$$(18.)\quad \begin{cases} \varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{1+\frac{n}{n+1}\,\frac{R^{2n+1}}{r^{2n+1}}\right\}\cdot P_n, \\ \varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} R_n . P_n, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung:

$$R_n = 1+\frac{n}{n+1}\,\frac{R^{2n+1}}{r^{2n+1}}$$

gesetzt worden ist.

Hiernach kann zu der entsprechenden Flüssigkeitsbewegung mit Berücksichtigung der inneren Reibung übergegangen werden. Die hierbei in Betracht kommenden drei willkürlichen Functionen U, V, W lassen mit Rücksicht auf die Gleichungen (6.) und (9.) ebenfalls Reihenentwickelungen nach Kugelfunctionen zu. Wollte man indess die allgemeinsten Werthe für dieselben wählen, so würde die Rechnung zur Bestimmung der willkürlichen Constanten sehr umfangreich ausfallen. Man gelangt leicht zu geeigneteren Werthen für U, V, W, indem man ein Verfahren benutzt, für welches die Behandlung der Differentialgleichungen der Elasticität durch Herrn *Borchardt* *) als Muster gedient hat. Dasselbe beruht auf der Anwendung des folgenden Satzes, welcher leicht durch directe Ausführung der angedeuteten Differentiationen bewiesen werden kann.

Ist f eine beliebige Function von x, y, z, welche der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta f = 0$$

genügt, setzt man ferner:

$$(19.)\quad \begin{cases} f_0 = f+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}, \\ f_1 = z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}, \\ f_2 = x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}, \\ f_3 = y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

so ist:

---

*) Monatsber. der Berl. Akad. 1873, 9—56.

$$\Delta f_0 = \Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f_3 = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0,$$

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_0}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x} = \dfrac{\partial f_0}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_0}{\partial z}. \end{cases}$$

Ist f die oben eingeführte, räumliche Kugelfunction, so ist:

$$(20^a.)\quad f_0 = (n+1).P_n.$$

Die Functionen f_1, f_2, f_3 erfüllen alle Bedingungen, welche (Gleichungen (4.) und (6.)) für ξ, η, ζ gestellt waren. Es mag daher gesetzt werden:

$$(21.)\quad \xi = f_1,\quad \eta = f_2,\quad \zeta = f_3,$$

wo f noch eine willkürliche Function bleibt. Man darf dann nach (9.) für U, V, W das folgende Werthsystem setzen:

$$(22.)\quad \begin{cases} U = z\dfrac{\partial F}{\partial y} - y\dfrac{\partial F}{\partial z}, \\ V = x\dfrac{\partial F}{\partial z} - z\dfrac{\partial F}{\partial x}, \\ W = y\dfrac{\partial F}{\partial x} - x\dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

vorausgesetzt dass:

$$(23.)\quad \begin{cases} \Delta F = -f, \\ \Delta(\Delta F) = 0. \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung folgt eine allgemeine Reihenentwickelung für F:

$$(24.)\quad F = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n + B_n r^2}{r^{2n+1}}.Q_n,$$

oder kürzer:

$$F = \sum_{n=0}^{n=\infty}.S_n.Q_n,$$

wo:

$$S_n = \frac{A_n + B_n r^2}{r^{2n+1}}$$

gesetzt ist. Q_n ist hier wie P_n in (18.) eine räumliche Kugelfunction n^{ter} Ordnung. Da der Einfluss der inneren Reibung, welche durch das Haften der Flüssigkeit an der Kugeloberfläche bedingt ist, in unendlicher Entfernung verschwinden muss, so ist für F nur eine Entwickelung nach negativen Potenzen von r zu benutzen.

Setzt man den Werth von F aus (24.) in (22.) ein und berücksichtigt, dass:

$$z\frac{\partial S_n}{\partial y} - y\frac{\partial S_n}{\partial z} = 0, \quad \text{etc.},$$

so ist:

$$(25.)\quad \begin{cases} U = \sum_0^\infty S_n\left\{z\frac{\partial Q_n}{\partial y} - y\frac{\partial Q_n}{\partial z}\right\} = \Sigma S_n . U_n, \\ V = \sum_0^\infty S_n\left\{x\frac{\partial Q_n}{\partial z} - z\frac{\partial Q_n}{\partial x}\right\} = \Sigma S_n . V_n, \\ W = \sum_0^\infty S_n\left\{y\frac{\partial Q_n}{\partial x} - x\frac{\partial Q_n}{\partial y}\right\} = \Sigma S_n . W_n, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung:

$$U_n = z\frac{\partial Q_n}{\partial y} - y\frac{\partial Q_n}{\partial z}, \quad \text{etc.}$$

gesetzt ist.

Wir kommen nun zur Bestimmung der willkürlichen Constanten durch die Grenzbedingungen:

$$u = v = w = 0, \quad \text{wenn:} \quad r = R.$$

Man bildet zunächst mit Benutzung von (18.) und (25.) die Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Diese Gleichung zerfällt in ein System von Gleichungen, von denen jede einem bestimmten Werthe von n entspricht. Es genügt die Aufstellung einer dieser Gleichungen

$$R_n\frac{\partial P_n}{\partial x} + P_n\frac{\partial R_n}{\partial x} = S_n\left\{\frac{\partial W_n}{\partial y} - \frac{\partial V_n}{\partial z}\right\} + W_n\frac{\partial S_n}{\partial y} - V_n\frac{\partial S_n}{\partial z}.$$

Nun sind die Grössen U_n, V_n, W_n Ausdrücke von derselben Form, wie die Functionen f_1, f_2, f_3 in (19.); daher ist nach (20.) und (21.)

$$\frac{\partial W_n}{\partial y} - \frac{\partial V_n}{\partial z} = (n+1)\frac{\partial Q_n}{\partial x}.$$

Ferner ist:

$$W_n\frac{\partial S_n}{\partial y} - V_n\frac{\partial S_n}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{dS_n}{dr}\left\{y^2\cdot\frac{\partial Q_n}{\partial x} - xy\cdot\frac{\partial Q_n}{\partial y} - xz\cdot\frac{\partial Q_n}{\partial z} + z^2\cdot\frac{\partial Q_n}{\partial x}\right\}.$$

Durch Hinzufügen von $\pm x^2 \frac{\partial Q_n}{\partial x}$ zu dem Ausdruck in der letzten Klammer und mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$x \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial z} = n \cdot Q_n,$$

erhält man:

$$W_n \cdot \frac{\partial S_n}{\partial y} - V_n \cdot \frac{\partial S_n}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{dS_n}{dr} \left\{ r^2 \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial x} - n x \cdot Q_n \right\}.$$

Hiernach geht die erste Grenzgleichung über in:

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} R_n + \frac{dR_n}{dr} \cdot \frac{x}{r} P_n = \frac{\partial Q_n}{\partial x} \left\{ (n+1) S_n + r \frac{dS_n}{dr} \right\} - n \frac{dS_n}{dr} \cdot \frac{x}{r} Q_n.$$

Die Gleichungen: $v = 0$, $w = 0$ liefern entsprechende Gleichungen, in denen nur y resp. z an Stelle von x tritt. Offenbar befriedigt man die drei Grenzgleichungen durch die Annahme:

$$(26.) \quad \begin{cases} P_n = Q_n, \\ R_n = (n+1) S_n + r \frac{dS_n}{dr}, \\ \frac{dR_n}{dr} = -n \frac{dS_n}{dr}, \end{cases}$$

für $r = R$.

Hiernach sind alle willkürlichen Constanten der Function F durch die Constanten der gegebenen Function φ bestimmt. Entnimmt man die Werthe von R_n und S_n aus den Gleichungen (18.) und (24.), so ergiebt sich schliesslich:

$$(27.) \quad \begin{cases} A_n = -\frac{1}{2} \frac{2n+1}{n+1} R^{2n+1}, \\ B_n = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n+1} R^{2n-1}. \end{cases}$$

Die Function F erhält dadurch den nun vollständig bestimmten Ausdruck:

$$(28.) \qquad F = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n+1} \frac{R^{2n-1}}{r^{2n-1}} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cdot P_n.$$

Nachdem auf diese Weise mit Berücksichtigung der Gleichungen (22.) sämmtliche willkürlichen Functionen bestimmt worden sind, lassen sich die allgemeinen Lösungen des Problems in sehr einfache Ausdrücke bringen. Man setzt in die Gleichungen (7.) die gefundenen Werthe für U, V, W ein und formt dieselben in ähnlicher Weise um wie die Grenzgleichungen.

Dann ist mit Berücksichtigung von (26.):

$$(29.)\quad \begin{cases} u = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{\partial P_n}{\partial x}\left\{(n+1)S_n+r\cdot\frac{dS_n}{dr}-R_n\right\}-\frac{x}{r}\cdot P_n\frac{d}{dr}\{R_n+nS_n\}\right], \\ v = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{\partial P_n}{\partial y}\left\{(n+1)S_n+r\cdot\frac{dS_n}{dr}-R_n\right\}-\frac{y}{r}\cdot P_n\frac{d}{dr}\{R_n+nS_n\}\right], \\ w = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{\partial P_n}{\partial z}\left\{(n+1)S_n+r\cdot\frac{dS_n}{dr}-R_n\right\}-\frac{z}{r}\cdot P_n\frac{d}{dr}\{R_n+nS_n\}\right]. \end{cases}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(30.)\quad \begin{cases} R_n = 1+\frac{n}{n+1}\frac{R^{2n+1}}{r^{2n+1}}, \\ S_n = \frac{1}{2}\frac{2n+1}{n+1}\frac{R^{2n-1}}{r^{2n-1}}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right). \end{cases}$$

In den Gleichungen (29.) und (30.) ist die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe enthalten. Es sollen nun noch die Componenten der Rotationsgeschwindigkeiten und der Druck berechnet werden. Für erstere waren die Ausdrücke genommen:

$$(31.)\quad \begin{cases} \xi = z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}, \\ \eta = x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \zeta = y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Die Function f war definirt durch die Gleichung (23.). Daher erhält man:

$$(31^a.)\quad f = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{n+1}(2n-1)\frac{R^{2n-1}}{r^{2n+1}}\cdot P_n.$$

Ferner ist, wenn man die Gleichungen (5.), (19.), (20.), (21.) vergleicht:

$$p = k.f_0 = k\left\{f+r\frac{\partial f}{\partial r}\right\},$$

$$(32.)\quad p = -k\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{n+1}(2n-1).n\cdot\frac{R^{2n-1}}{r^{2n+1}}\cdot P_n.$$

Um die allgemeinen Lösungen auf den besonderen Fall anzuwenden, wo die Strömung der Flüssigkeit überall in grosser Entfernung von der Kugel parallel der positiven x-Axe ist, hat man die Kugelfunctionen P_n sämmtlich mit Ausnahme von P_1 gleich Null zu setzen. Ferner ist:

$$P_1 = -gx.$$

Man erhält dann:

$$(33.)\quad \begin{cases} u = g\left\{1-\frac{3}{4}\frac{R}{r}-\frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3}\right\}-\frac{3g}{4}\frac{R}{r^3}\left\{1-\frac{R^2}{r^2}\right\}\cdot x^2, \\ v = \qquad -\frac{3g}{4}\frac{R}{r^3}\left\{1-\frac{R^2}{r^2}\right\}\cdot xy, \\ w = \qquad -\frac{3g}{4}\frac{R}{r^3}\left\{1-\frac{R^2}{r^2}\right\}\cdot xz. \end{cases}$$

$$f = -\tfrac{3}{2}g\cdot\frac{R}{r^3}x,$$

$$p = \tfrac{3}{2}gk\cdot\frac{R}{r^3}x,$$

$$(34.)\quad \begin{cases} \xi = 0, \\ \eta = \tfrac{3}{2}g\frac{R}{r^3}z, \\ \zeta = -\tfrac{3}{2}g\frac{R}{r^3}y. \end{cases}$$

An diese letzten Ausdrücke soll noch eine Bemerkung angeknüpft werden. In seiner Abhandlung über Wirbelbewegungen hat Herr *Helmholtz* gezeigt, dass die Geschwindigkeit eines Punktes der Flüssigkeit analytisch durch dieselben Ausdrücke dargestellt wird, wie die Wirkung magnetischer Massen und elektrischer Ströme auf ein magnetisches Theilchen in dem betreffenden Punkte. Lässt sich die Flüssigkeitsbewegung durch ein Geschwindigkeitspotential darstellen, so sind die Geschwindigkeiten dieselben Ausdrücke, wie die Kräfte magnetischer Massen, welche sich an den Grenzflächen der Flüssigkeit befinden. Diejenigen Geschwindigkeiten dagegen, welche von Wirbelbewegungen herrühren, sind den Wirkungen elektrischer Ströme gleichzusetzen, welche innerhalb der Flüssigkeit verlaufen können. Die Componenten dieser Ströme nach den drei Axen im Punkte x, y, z sind identisch mit den Componenten der Rotationsgeschwindigkeiten ξ, η, ζ. Die Gleichungen (34.) zeigen, dass in dem hier betrachteten speciellen Fall die Strombahnen Kreise sind, deren Mittelpunkte auf der x-Axe liegen. Die Ströme sind also geschlossen und verlaufen vollständig innerhalb der Flüssigkeit. Hieraus geht hervor, dass dieselben nicht von elektromotorischen Kräften irgend welcher Art herrühren können, welche ihren Sitz auf der Kugeloberfläche haben. Dagegen kann man sich dieselben sehr einfach hervorgebracht denken, wenn man sie als Inductionsströme auffasst. Man denke sich die Kugel gleichmässig mit magnetischer Masse belegt. Der ganze Raum sei mit leitender Substanz erfüllt, welche sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit g parallel der x-Axe bewegt. Dann werden durch Induction diejenigen Ströme hervorgerufen, deren Componenten ξ, η, ζ sind. Denkt man sich umgekehrt die Kugel in dem ruhenden Medium bewegt, so wirken die inducirten Ströme in derselben Weise hemmend auf die Bewegung der Kugel, als es die Reibung der Flüssigkeit bei der Bewegung der Kugel in derselben thun würde.

§. 3.

Mit Beibehaltung der speciellen Voraussetzungen, welche über die Bewegung der Flüssigkeit in grosser Entfernung von der Kugel im vorigen Paragraphen gemacht wurden, kann man die Aufgabe auch dann noch lösen, wenn sich an Stelle der Kugel ein dreiaxiges Ellipsoid befindet. Die Gleichung desselben sei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Man ist im Stande die Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten fast unmittelbar hinzuschreiben, wenn man die Werthe derselben für die Kugel in eine etwas geeignetere Form gebracht hat. Zu dem Ende ist es vortheilhaft, das Potential der Kugel in Bezug auf äussere Punkte in die Gleichungen (33.) einzuführen. Dieselben lassen sich am einfachsten schreiben, wenn man zwischen zwei verschiedenen Potentialen unterscheidet und setzt:

$$(35.)\quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{3gR}{4}\cdot\dfrac{1}{r}, \\ K_2 = \dfrac{gR^3}{4}\cdot\dfrac{1}{r}. \end{cases}$$

Dann ist:

$$(36.)\quad \begin{cases} u = g-K_1+x\cdot\dfrac{\partial K_1}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 K_2}{\partial x^2}, \\ v = \qquad\quad x\cdot\dfrac{\partial K_1}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 K_2}{\partial x\,\partial y}, \\ w = \qquad\quad x\cdot\dfrac{\partial K_1}{\partial z}+\dfrac{\partial^2 K_2}{\partial x\,\partial z}. \end{cases}$$

Wenn man ferner bei der behandelten Flüssigkeitsbewegung von der Reibung absieht, so ist dieselbe vollständig durch das Geschwindigkeitspotential bestimmt *):

*) *Kirchhoff*, Vorlesungen über math. Physik, 218—223. Die Constanten sind hier etwas anders definirt, wie oben.

$$(37.)\qquad \varphi = -g\left\{x - \frac{1}{4\pi - A}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\right\}.$$

Hier bedeutet P das Potential des Ellipsoids in Bezug auf einen äusseren Punkt x, y, z, wobei das Ellipsoid gleichmässig mit Masse von der Dichtigkeit Eins erfüllt ist. Es ist:

$$(38.)\qquad P = \pi . abc\int_\sigma^\infty \frac{1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\,ds.$$

Ferner ist σ die positive Wurzel der Gleichung dritten Grades:

$$(39.)\qquad \frac{x^2}{a^2+\sigma}+\frac{y^2}{b^2+\sigma}+\frac{z^2}{c^2+\sigma} = 1.$$

Endlich ist $\frac{A}{a}$ die negativ genommene Anziehungskraft des Ellipsoids auf den Endpunkt der Axe a, d. h.:

$$(40.)\qquad A = 2\pi . abc\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}.$$

Hiernach lag der Gedanke nahe, dass die Stromcomponenten u, v, w sich auch bei Mitwirkung der Reibung durch ähnliche Ausdrücke würden darstellen lassen, wie bei der Kugel, d. h. durch Ausdrücke, welche in einfacher Weise aus Potentialausdrücken des Ellipsoids zusammengesetzt wären. Die Potentiale K_1 und K_2 lassen es noch unbestimmt, ob dieselben herrühren von Massen, welche die Kugel gleichmässig erfüllen oder von solchen, die gleichmässig über die Oberfläche ausgebreitet sind. Dieser Unterschied tritt deutlich bei dem Ellipsoid hervor. Es zeigt sich, dass man an Stelle von K_2 das Potential P (Gleichung (38.)) zu setzen hat, an Stelle von K_1 dagegen ein Potential von Massen, welche auf der Oberfläche des Ellipsoids liegen. Und zwar ist dasjenige Oberflächenpotential zu benutzen, welches im Innern einen constanten Werth hat. Dasselbe ist

$$(41.)\qquad \begin{cases} \text{a) für einen äusseren Punkt:} \\ \quad Q = 2\pi abc\displaystyle\int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}, \\ \text{b) für einen inneren Punkt:} \\ \quad Q_0 = 2\pi abc\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}. \end{cases}$$

Die Oberflächendichtigkeit δ, welche diesem Potentiale entspricht, findet man leicht aus der bekannten Gleichung:

$$\frac{dQ_a}{dn_a} + \frac{dQ_i}{dn_i} = -4\pi\delta;$$

also:

$$(42.)\quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Q kann also angesehen werden als das Potential elektrischer Massen in Bezug auf einen äusseren Punkt, welche so auf der Oberfläche des Ellipsoids angeordnet sind, dass sie sich für sich im Gleichgewicht befinden. Nach diesen Vorbereitungen soll gesetzt werden:

$$(43.)\quad \begin{cases} u = g+\lambda\left\{x\frac{\partial Q}{\partial x} - Q + \mu\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right\}, \\ v = \lambda\left\{x\frac{\partial Q}{\partial y} + \mu\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\right\}, \\ w = \lambda\left\{x\frac{\partial Q}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}\right\}. \end{cases}$$

Hierin stellen λ und μ zwei noch unbestimmt gelassene Constanten vor. Dieselben sind leicht durch die Grenzbedingung zu bestimmen, dass die Flüssigkeit an der Oberfläche des Ellipsoids haftet. Also (Gleichung (39.)):

$$u = v = w = 0, \quad \sigma = 0.$$

Die Ausführung dieser Rechnung ergiebt:

$$(44.)\quad \lambda = \frac{g}{Q_0 + Aa^2}, \quad \mu = a^2,$$

wo Q_0 und A dieselbe Bedeutung haben, wie in (41.) und (40.).

Durch die Gleichungen (43.) und (44.) ist die gestellte Aufgabe vollständig gelöst.

Aus den gefundenen Lösungen soll noch der Gesammtdruck berechnet werden, welchen die bewegte Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausübt. Denkt man sich die Flüssigkeit als ruhend, das Ellipsoid in Richtung der x-Axe mit der Geschwindigkeit $-g$ bewegt, so ist derselbe identisch mit dem Widerstand, welchen das Ellipsoid bei seiner Bewegung erleidet. Nach der allgemeinen Theorie sind die Druckkräfte X', Y', Z' auf die Flächeneinheit im Punkte x, y, z:

$$(45.)\quad \begin{cases} X' = X_x.\cos\alpha + X_y.\cos\beta + X_z.\cos\gamma, \\ Y' = Y_x.\cos\alpha + Y_y.\cos\beta + Y_z.\cos\gamma, \\ Z' = Z_x.\cos\alpha + Z_y.\cos\beta + Z_z.\cos\gamma. \end{cases}$$

Hier bedeuten α, β, γ die Richtungswinkel der Oberflächennormale. Ferner ist:

$$(46.)\quad \begin{cases} X_x = p - 2k\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = p - 2k\dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad Z_z = p - 2k\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ X_y = Y_x = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \\ X_z = Z_x = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ Y_z = Z_y = -k\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Die Componenten des Gesammtdruckes sind dann:

$$X = \int X'\,do, \quad Y = \int Y'\,do, \quad Z = \int Z'\,do.$$

Man übersieht leicht, dass in dem hier behandelten Fall:

$$Y = Z = 0.$$

Die Berechnung von X wird erheblich erleichtert durch den folgenden Lehrsatz, welchen der Verfasser den Universitätsvorlesungen des Herrn ***Kirchhoff*** über Hydrodynamik entnommen hat. Derselbe gilt für stationäre Flüssigkeitsbewegungen und lautet:

Jede Druckcomponente, genommen über alle Grenzflächen einer allseitig begrenzten Flüssigkeit, ist gleich Null.

Während bisher die Flüssigkeit in grosser Entfernung als unbegrenzt angesehen wurde, soll dieselbe jetzt einerseits durch das Ellipsoid, andererseits durch eine Kugel von sehr grossem Radius begrenzt sein, deren Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten liegt. Nennt man ein Oberflächenelement dieser Kugel $d\omega$, des Ellipsoids do, so ist:

$$(47.)\quad \int X'\,d\omega + \int X'\,do = 0.$$

Das erste Integral ist leicht zu berechnen. Bildet man X' aus den Gleichungen (43.), (45.), (46.), so findet sich zunächst, dass die mit μ behafteten Glieder bei hinreichend grossem Radius der Kugel verschwinden. Es bleibt:

$$(48.)\quad X' = 2k\lambda\Big[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha - x\Big(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}\cos\beta + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z}\cos\gamma\Big)\Big].$$

Hier bedeuten α, β, γ die Richtungswinkel der Kugelnormale, also:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \cos\beta = \frac{y}{r},\quad \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Nach der oben besprochenen Bedeutung des Potentials Q kann man dasselbe schreiben:

$$Q = \int \frac{do'}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}}\cdot\frac{1}{\varrho},$$

wo:

$$\varrho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Die Integration erstreckt sich über die ganze Oberfläche des Ellipsoids.

Denkt man sich $\frac{1}{\varrho}$ in eine Reihe nach Potenzen von x', y', z' entwickelt, so kann man für Punkte x, y, z der Kugeloberfläche alle höheren Glieder gegen das erste vernachlässigen.

Dasselbe ist $\frac{1}{r}$; also:

$$Q = \frac{1}{r}\int \frac{do'}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}},$$

Setzt man noch:

$$(49.)\quad E = \int \frac{do'}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}},$$

so ist E diejenige Elektricitätsmenge, welche man dem Ellipsoid mittheilen muss, damit innerhalb desselben das Potential den constanten Werth Q_0 annimmt. Schliesslich ist also:

$$Q = \frac{E}{r}.$$

Setzt man diesen Werth in (48.) ein, und führt dann die in (47.) angedeutete Integration über die ganze Kugeloberfläche aus, so erhält man:

$$\int X'\,d\omega = -8\pi k.g.E.\lambda = -\frac{8\pi g.k.E}{Q_0 + a^2 A}.$$

Also ist der Gesammtdruck auf das Ellipsoid:

$$(50.)\quad X = \frac{8\pi k.g.E}{Q_0 + A.a^2}.$$

Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so sind die Integrale, welche in (50.) vorkommen, leicht in endlicher Form auszuführen. Die x-Axe sei Rotationsaxe; also $b=c$. Dann ist:

$$E = 4\pi . ab^2.$$

Ist ferner das Rotationsellipsoid ein verlängertes: $a > b$, so ist:

$$Q_0 = \frac{2\pi ab^2}{e} \cdot \log \frac{a+e}{a-e},$$

$$A = \frac{4\pi ab^2}{e^3} \left\{ \tfrac{1}{2} \log \frac{a+e}{a-e} - \frac{e}{a} \right\},$$

wo:

$$e = \sqrt{a^2-b^2}.$$

Hieraus ist der Ausdruck für den Gesammtdruck zusammenzusetzen.

Berlin, Juni 1875.