Implementación Funcional del Algoritmo CNF. Informe Técnico

Fco. M. García Olmedo* Jesús García Miranda**
Pedro González Rodelas***

29 de septiembre de 2023

Resumen

Definimos tres funciones sobre fórmulas proposicionales expresadas mediante conjunción y disyunción que se entenderán como la entrada de el algoritmo CNF en su versión sintáctica. Estas funciones calculan el número exacto de iteraciones necesarias para los pases de distributividad y distributividad y asociatividad mediante las cuales obtendremos de esta fórmula fórmula otra —la salida del procedimiento algorítmico— lógicamente equivalente pero ya en forma normal conjuntiva. La eficacia de esos números exactos se demuestra matemáticamente y se llevada a una implementación funcional mejorada del algoritmo CNF en el lenguaje Haskell.

Índice

1. Introducción

La forma normal conjuntiva (CNF por sus siglas en inglés) es tan famosa en la historia del pensamiento debido a que ordena el discurso normalizando afirmaciones eventualmente caóticas mediante conjunción

*Dpto. de Álgebra, UGR; folmedougr.es
**Dpto. de Álgebra, UGR; jesusgm@ugr.es
***Dpto. de Matemática Aplicada, UGR; prodelas@ugr.es

de una serie de afirmaciones con la forma de disyunciones de otras afirmaciones simples: atómicas o negación de ellas.

La CNF ha resultado imprescindible el el tratamiento del problema SAT, que a su vez es el centro del trabajo en la demostración automática de teoremas, y ello gracias a la eficacia de la regla de resolución y de lo conocido sobre el tratamiento de las cláusulas de Horn.

La otra gran utilidad de la CNF está en la minimización de expresiones booleanas bajo la condición de quedar expresada como producto de sumas (POS). Claro está que el criterio POS está íntimamente relacionado con el criterio suma de productos (SOP).

En general la transformación de una fórmula en una CNF es la esencia del Método de Petrick (Petrick's method, cfr. [3]), algoritmo éste tan usado en tantos ámbitos: cibernética, economía, lingüística, filosofía, psicología, etc.

Dada una fórmula proposicional (resp. expresión booleana), la obtención de otra en forma normal conjuntiva equivalente puede ser llevada a cabo construyendo e inspeccionando su tabla de verdad (resp. descripción por exhausión de la función booleana asociada). En el caso de la fórmula proposicional, ese es un trabajo pesado con una buena parte de esfuerzo desperdiciado; en el caso de la teoría de commutación (Switching Theory) sólo está prescrito el uso de una tabla para la obtención de una CNF o DNF previa a la obtimización cuando es llevada a cabo la ingeniería inversa sobre un circuito hallado; en el resto de casos está prescrito un análisis sintáctico de la expresión booleana.

Si nos centramos en el método del análisis sintáctico para la obtención de la CNF, pensaremos sin pérdida de generalidad en fórmulas de la lógica proposicional. En ese círculo de ideas, la esencia del algoritmo es muy simple: previa interiorización de la negación y anulación de la doble negación, todo consiste en sustituir subfórmulas del tipo[1] $A\alpha K\beta\gamma$ por su equivalente $KA\alpha\beta A\alpha\gamma$ (distributividad). Este trabajo es ordenado en iteraciones de mandatos recursivos (cfr. [2, pag. 31]) y la fase iterativa es imprescindible. Pero cómo detener el proceso de mandatos recursivos, cada uno de los cuales acerca más la fórmula a su expresión CNF. No hemos encontrado respuesta en la bibliografía a nuestra alcance, ni siquiera una alusión. Consideramos que [2] es una buena y casi exhaustiva recopilación de técnicas y algoritmos sobre lógica proposicional; en él descubrimos que la detención de las iteraciones es ordenada cuando el fruto de una iteración coincide con la fórmula que se tenía al comenzar la misma. No obstante, si dispusiésemos de antemano de un cómputo exacto en función de la (única) sintaxis de la fórmula del número de iteraciones necesarias, ahorraríamos el tiempo de comparación de una fórmula con la que se obtuvo en el paso iterativo anterior. En realidad lo que necesitaríamos es definir una distancia de la fórmula dato al conjunto de las fórmulas en forma normal conjuntiva, para ir reduciéndola en una unidad por cada mandato de sustitución recursiva.

En este trabajo haremos ese cómputo exacto del número de iteraciones a partir de una inspección inicial de la fórmula; no obstante hay más. La fórmula $A\alpha A\beta\gamma$ (resp. $K\alpha K\beta\gamma$) es equivalente a $AA\alpha\beta\gamma$ (resp. $K\alpha K\beta\gamma$) (asociatividad). En general la carga a la izquierda de las conectivas K y seguidamente la carga a la izquierda de las conectivas A dará una especialización de gran interés computacional a nuestra CNF. En este caso estamos nuevamente ante la necesidad de una distancia para el cómputo de iteraciones con este fin; este trabajo lleva a cabo ese innovador cómputo exacto.

Finalmente y como fruto del trabajo, ofrecemos una implementación funcional del algoritmo con estas eficaces innovaciones en el lenguaje Haskell.

De forma resumida, las secciones de este artículo contienen lo que sigue. Dado que el objetivo de este trabajo es la manipulación de fórmulas sobre un lenguaje, la Sección 2 establece la definición rigurosa de lenguaje y fórmula. Seguidamente son definidos cuatro subconjuntos de formulas generados por un subconjunto no vacío de las mismas según reglas apropiadas; esencialmente son el soporte para poder

[1] Usaremos por eficacia la notación polaca para las fórmulas.

definir el concepto de cláusula y de fórmula en las formas normales conjuntivas. La sección continúa dando cuatro conceptos distintos de complejidad de una fórmula. El resto de sección está dedicado a definir el concepto de equivalencia semántica de fórmulas según la lógica proposicional clásica, ejemplos y el enunciado de un resultado clásico sobre distributividad. La negación no es nombrada porque no tiene relevancia en el márco teórico del artículo. La Sección 3 está dedicada al tratamiento de la distributividad que en un sentido amplio del término la lógica proposicional clásica tiene entre la disyunción y la conjunción. En la sección es definida la función dak (cfr. Figura 1) que aplicada sobre fórmulas consigue disminuir la alternancia en ellas del conector K sobre el A; esa alternancia es medida en cada fórmula por la función alt. La sección concluye demostrando que justamente es la alternancia de cada fórmula el número mínimo de aplicaciones de dak a la misma para conseguir a partir de ella otra fórmula equivalente en forma normal conjuntiva. La experiencia práctica de laboratorio en el campo de la deducción lógica indica que la asociatividad de las conectivas K y A debe ser tenida en cuenta para conseguir una forma canónica que, en notación polaca, acumule dichas conectivas al comienzo de la fórmula; el tratamiento riguroso de este asunto es el objetivo de la Sección 4. Al escribirla nos hemos inspirado en la estructura de la Sección 3, sin embargo la teoría intrínseca es sensiblemente más compleja. Todo se basa en dos "medidas" sobre fórmulas que esencialmente expresan cuánto de alejada está la fórmula de esa forma canónica; es también importante el máximo de esas dos valores. En la sección justificamos la inmensa capacidad expresiva de las aludidas medidas para caracterizar la pertenencia a los subconjuntos de fórmulas definidos en la Sección 2. Es definida la contraparte para la asociatividad de la función dak, se trata de la función lasc (cfr. Figura 2). Esta vez la aplicación de la función lasc disminuye la medida de separación de la forma canónica a la mitad, en ese sentido sirve para dar grandes pasos. Determinado valor natural basado en el logaritmo en base dos da la cantidad mínima de aplicaciones de lasc a la fórmula para obtener su forma canónica deseada. La última sección es de conclusiones.

2. Previos

En esta sección enumeramos las definiciones de los conceptos básicos que serán usados en el desarrollo del artículo, así como los resultados esenciales necesarios en el mismo.

Definición 2.1. Un *lenguaje* es un par $\langle S, g\rangle$, donde S es un conjunto no vacío de *símbolos* y g es una aplicación de S que toma valores naturales (i.e. $g\colon S \longrightarrow \omega$). Para todo $n \in \omega$, sea $S(n) = g^*(n)$. Un símbolo perteneciente a S es de ariedad n sii, por def., pertenece a $S(n)$.

Definición 2.2. El *lenguaje proposicional de la forma normal conjuntiva*, abreviadamente f.n.c., es un lenguaje $\mathbf{L_{KA}} = \langle S, g\rangle$ cumpliendo que:

- $S(0)$ es un conjunto numerable (no finito en la mayoría de las aplicaciones) que abreviaremos por X. Sus elementos son representados con las primeras letras minúsculas del alfabeto latino, subindicándolas si fuese preciso: x, y, z, x_0, x_1, x_2, etc.
- $S(2) = \{A, K\}$.
- Para todo número natural n distinto de 0 y 2, $S(n) = \varnothing$.

Definición 2.3. Dado un lenguaje $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ definimos para todo $i \in \omega$:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= S(0)\\ \Phi_{i+1} &= \Phi_i \cup \{fA_0\cdots A_{n-1}\colon f \in S\setminus S(0),\, g(f) = n \text{ y } A_0,\ldots,A_{n-1} \in \Phi_i\}\end{aligned}$$

y finalmente:

$$\mathrm{P}(\mathbf{S}) = \bigcup_{i\in\omega} \Phi_i$$

Observación 2.1. Para abreviar, ocasionalmente podríamos escribir simplemente $\mathrm{P}(\mathbf{L})$ en lugar de $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$.

Definición 2.4. Sea Δ un conjunto no vacío de fórmulas del lenguaje $\mathbf{L_{KA}}$. Definimos los siguientes conjuntos:

- $\mathrm{A}(\Delta) = \bigcap\{\Gamma\colon \Delta \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{P}(\mathbf{L}) \text{ y } \Gamma \text{ es cerrado bajo } A\}$
- $\mathrm{K}(\Delta) = \bigcap\{\Gamma\colon \Delta \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{P}(\mathbf{L}) \text{ and } \Gamma \text{ es cerrado bajo } K\}$
- $\Xi_{\mathrm{A}}(\Delta) = \bigcap\{\Gamma\colon \Delta \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{P}(\mathbf{L}) \text{ y } \mathrm{A}\alpha\beta \in \Gamma \text{ siempre que } \alpha \in \Gamma \text{ y } \beta \in \Delta\}$
- $\Xi_{\mathrm{K}}(\Delta) = \bigcap\{\Gamma\colon \Delta \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{P}(\mathbf{L}) \text{ y } \mathrm{K}\alpha\beta \in \Gamma \text{ siempre que } \alpha \in \Gamma \text{ y } \beta \in \Delta\}$

Definición 2.5. Sea $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. La fórmula α es una *forma normal conjuntiva* (resp. *cláusula*) sii, por definición, $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ (resp. $\alpha \in \Xi_{\mathrm{A}}(X)$). Por otra parte, α es una *forma normal conjuntiva a izquierdas* cuando, y sólo cuando, $\alpha \in \Xi_{\mathrm{K}}(\Xi_{\mathrm{A}}(X))$. En lo que sigue abreviaremos $\Xi_{\mathrm{A}}(X)$ por $\mathrm{cl}(X)$, $\Xi_{\mathrm{K}}(X)$ por $\mathrm{ml}(X)$ y $\Xi_{\mathrm{K}}(\Xi_{\mathrm{A}}(X))$ por $\mathrm{lcnf}(X)$.

Observación 2.2. Son evidentes las siguientes relaciones:

1. $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{lcnf}(X)$
2. $\mathrm{ml}(X) \subseteq \mathrm{lcnf}(X)$
3. $\mathrm{lcnf}(X) \subseteq \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$

La “complejidad” y la “longitud” de las fórmulas nos servirán a modo de medida de su volumen. Ambos conceptos vienen expresados como sigue:

Definición 2.6. Para todo $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$ sean $\mathrm{comp}(\alpha)$ (complejidad), $\mathrm{comp_k}(\alpha)$, $\mathrm{comp_a}(\alpha)$ y $\lg(\alpha)$ (longitud) los valores naturales definidos como sigue:

$$\mathrm{comp}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \in X, \\ 1 + \mathrm{comp}(\varphi) + \mathrm{comp}(\psi), & \text{si } \alpha \equiv A\varphi\psi \text{ ó } \alpha \equiv K\varphi\psi. \end{cases}$$

$$\mathrm{comp_k}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \in X, \\ \mathrm{comp_k}(\varphi) + \mathrm{comp_k}(\psi), & \text{si } \alpha \equiv A\varphi\psi, \\ 1 + \mathrm{comp_k}(\varphi) + \mathrm{comp_k}(\psi), & \text{si } \alpha \equiv K\varphi\psi. \end{cases}$$

$$\mathrm{comp_a}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \in X, \\ \mathrm{comp_a}(\varphi) + \mathrm{comp_a}(\psi), & \text{si } \alpha \equiv K\varphi\psi, \\ 1 + \mathrm{comp_a}(\varphi) + \mathrm{comp_a}(\psi), & \text{si } \alpha \equiv A\varphi\psi. \end{cases}$$

$$\lg(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha \in X, \\ 1 + \text{máx}\{\lg(\varphi), \lg(\psi)\}, & \text{if } \alpha \equiv A\varphi\psi \text{ ó } \alpha \equiv K\varphi\psi. \end{cases}$$

Definición 2.7. Consideremos el lenguaje proposicional $\mathbf{L_{KA}}$ y lo detallado en la Definición 2.2. Una *valoración* es cualquier aplicación $v\colon X \longrightarrow \{0, 1\}$. Por el *principio de lectura única* cualquier asignación puede ser extendida de forma única a $P(L_{KA})$ de forma que (suponemos que dicha extensión es representada por la misma letra v):

- $v(A\alpha\beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)$
- $v(K\alpha\beta) = v(\alpha)v(\beta)$

donde la suma y multiplicación entre los elementos 0 y 1 que hemos considerado en la enumeración anterior son las de $\mathbb{Z}_2$, es decir, son las consignadas en la siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Definición 2.8. Dado un conjunto de fórmulas Γ —posiblemente vacío— y una fórmula φ decimos que Γ *implica semánticamente* a φ, abreviadamente $\Gamma \models \varphi$, si para toda valoración v se tiene $v(\varphi) = 1$ siempre que para toda fórmula γ de Γ valga la igualdad $v(\gamma) = 1$. Si Γ consta solamente de las fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, en lugar de $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \models \varphi$ escribimos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$ y cuando $\Gamma = \emptyset$ escribimos simplemente $\models \varphi$ en lugar de $\emptyset \models \varphi$.

Definición 2.9. Las fórmulas α y β son *lógicamente equivalentes* , en símbolos $\alpha = \beta$ sii por definición $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$.

Observación 2.3. De acuerdo con la Definición 2.9 en lo sucesivo dedicaremos el símbolo $=$ para indicar la equivalencia lógica y el símbolo $\equiv$ para indicar la igualdad sintáctica.

Ejemplo 2.1. *Sean α, α', β, β' y γ fórmulas. Si α es logicamente equivalente a α' y β es lógicamente equivalente a β', entonces cada item subsiguiente enumera fórmulas lógicamente equivalentes:*

1. $A\alpha\beta$, $A\alpha'\beta'$
2. $K\alpha\beta$, $K\alpha'\beta'$
3. $A\alpha K\beta\gamma$, $KA\alpha\beta A\alpha\gamma$
4. $K\alpha A\beta\gamma$, $AK\alpha\beta K\alpha\gamma$

Teorema 2.2. *Sean φ, ψ, ξ, α y β fórmulas del lenguaje proposicional. Si α es lógicamente equivalente a $A\varphi\psi$ y β lo es a $A\varphi\xi$, entonces son lógicamente equivalentes las fórmulas:*

- $A\varphi K\psi\xi$
- $K\alpha\beta$

Teorema 2.3. *Sean φ, ψ, ξ y α fórmulas del lenguaje proposicional. Si α es lógicamente equivalente a $A\varphi\psi$ (resp. $K\varphi\psi$), entonces son lógicamente equivalentes las fórmulas:*

- $A\varphi A\psi\xi$ *(resp. $K\varphi K\psi\xi$)*
- $A\alpha\xi$ *(resp. $K\alpha\xi$)*

3. Distributividad

Nuestro objetivo ahora es, dada una fórmula φ de $P(\mathbf{L_{KA}})$, encontrar φ_{cnf} perteneciente a $K(\mathrm{A}(X))$ tal que ambas sean equivalentes. Esto será la base del algoritmo y para ello lo primero es determinar una medida de cuánto de alejada está φ de $K(A(X))$. Como veremos en breve, la esperada medida es la función *alt*, la cual indica la alternancia en su fórmula argumento de los símbolos K y A de interior a exterior de la fórmula.

Definición 3.1. Sea α cualquier fórmula perteneciente a $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. La *alternancia* de α, $\mathrm{alt}(\alpha)$, es por definición:

$$\mathrm{alt}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathrm{K} \notin \alpha; \\ \max\{\mathrm{alt}(\varphi), \mathrm{alt}(\psi)\}, & \text{si } \alpha \equiv \mathrm{K}\,\varphi\psi; \\ 1 + \max\{\mathrm{alt}(\varphi), \mathrm{alt}(\psi)\}, & \text{si } \alpha \equiv \mathrm{A}\,\varphi\psi \text{ y } \mathrm{K} \in \alpha. \end{cases}$$

En el Lema 3.1 caracterizamos qué significa “pertenecer al cojunto $\mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$” mediante la aplicación alt. Como veremos las fórmulas para las que $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$ son exactamente las del conjunto $\mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$.

Lema 3.1. *Let $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$.
2. $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$.

Demostración. Sea α una fórmula tal que $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$. Si $\mathrm{K} \notin \alpha$, entonces $\alpha \in \mathrm{A}(X)$ y así $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Si $\mathrm{K} \in \alpha$, entonces $\alpha \equiv \mathrm{K}\,\phi\psi$, donde $\mathrm{alt}(\phi) = \mathrm{alt}(\psi) = 0$. Por hipótesis de inducción, $\phi, \psi \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ y entonces $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. El recíproco es de desmostración inmediata a partir de la Definición 3.1. $\square$

Definición 3.2 (distributividad). Consideremos las siguientes reglas compuestas sobre relaciones binarias entre fórmulas de $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$:

$$x_i \rightarrow_{dak} x_i \tag{1}$$

$$\frac{A\varphi\xi \rightarrow_{dak} \alpha \quad A\psi\xi \rightarrow_{dak} \beta}{AK\varphi\psi\xi \rightarrow_{dak} K\alpha\beta} \tag{2}$$

$$\frac{A\xi\varphi \rightarrow_{dak} \alpha \quad A\xi\psi \rightarrow_{dak} \beta}{A\xi K\varphi\psi \rightarrow_{dak} K\alpha\beta} \tag{3}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow_{dak} \varphi' \quad \psi \rightarrow_{dak} \psi'}{A\varphi\psi \rightarrow_{dak} A\varphi'\psi'} \tag{4}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow_{dak} \varphi' \quad \psi \rightarrow_{dak} \psi'}{K\varphi\psi \rightarrow_{dak} K\varphi'\psi'} \tag{5}$$

donde (2), (3) y (4) son aplicadas con la preferencia que indica el orden en las que han sido dadas. Siendo así, definimos la siguiente aplicación

$$\mathrm{dak}\colon\ \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}}) \longrightarrow \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$$

por

$$\mathrm{dak}(\varphi) \equiv \psi, \text{ siempre que } \varphi \rightarrow_{dak} \psi$$

Observación 3.1. dak es realmente una aplicación pues se ha establecido una precedencia en las reglas en las que se basa su definición. Más aún, la transformada por dak de una fórmula resulta ser otra lógicamente equivalente.

$$x_i \rightarrow_{dak} x_i$$

$$\frac{A\varphi\xi \rightarrow_{dak} \alpha \quad A\psi\xi \rightarrow_{dak} \beta}{AK\varphi\psi\xi \rightarrow_{dak} K\alpha\beta} \qquad \frac{A\xi\varphi \rightarrow_{dak} \alpha \quad A\xi\psi \rightarrow_{dak} \beta}{A\xi K\varphi\psi \rightarrow_{dak} K\alpha\beta}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow_{dak} \varphi' \quad \psi \rightarrow_{dak} \psi'}{A\varphi\psi \rightarrow_{dak} A\varphi'\psi'} \qquad \frac{\varphi \rightarrow_{dak} \varphi' \quad \psi \rightarrow_{dak} \psi'}{K\varphi\psi \rightarrow_{dak} K\varphi'\psi'}$$

Figura 1: Axioma y reglas para la definición de dak.

Por medio del Teorema 3.2 entendemos que la aplicación de dak a cualquier fórmula no altera en absoluto su significado lógico, como es de desear.

Teorema 3.2. *Para toda* $\zeta \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$, $\mathrm{dak}(\zeta) = \zeta$, *es decir* $\mathrm{dak}(\zeta)$ *y* ζ *son fórmulas lógicamente equivalentes.*

Demostración. Sea ζ perteneciente a $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$ y tal que $\mathrm{comp}(\zeta) = n$. Supongamos, como hipótesis de inducción, que lo que se quiere probar es cierto para cualquier fórmula η tal que $\mathrm{comp}(\eta) < n$. Pueden darse varios casos:

1. $\zeta \equiv x \in X$; como cualquier fórmula es lógicamente equivalente a ella misma y $\mathrm{dak}(\zeta) \equiv \zeta$, se tiene el resultado para este caso.

2. $\zeta \equiv AK\varphi\psi\xi$; suponemos que $\text{dak}(A\varphi\xi) \equiv \alpha$ y $\text{dak}(A\psi\xi) \equiv \beta$. Como la complejidad de cualquiera de las fórmulas $A\varphi\xi$ y $A\psi\xi$ es menor que la de ζ, $A\varphi\xi = \alpha$ y $A\psi\xi = \beta$. Por lo que afirma el Teorema 2.2 sabemos que $AK\varphi\psi\xi = K\alpha\beta$, es decir, $AK\varphi\psi\xi = \text{dak}(AK\varphi\psi\xi)$.
3. $\zeta \equiv A\xi K\varphi\psi$; este caso se demuestra análogamente al 2).
4. $\zeta \equiv A\varphi\psi$; suponemos que $\text{dak}(\varphi) \equiv \varphi'$ y $\text{dak}(\psi) \equiv \psi'$. Como la complejidad de cualquiera de las fórmulas φ y ψ es menor que la de ζ, $\varphi = \varphi'$ y $\psi = \psi'$. Por lo ilustrado con el Ejemplo 2.1 sabemos que $A\varphi\psi = A\varphi'\psi'$, es decir, $A\varphi\psi = \text{dak}(A\varphi\psi)$.
5. $\zeta \equiv K\varphi\psi$; este caso se demuestra análogamente al 4).

□

Lema 3.3. *Sea α una fórmula cualquiera de $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. Si $\alpha \in \mathrm{A}(X)$ entonces* $\text{dak}(\alpha) \equiv \alpha$

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \mathrm{A}(X)$ y que $\text{comp}(\alpha) = n$. Razonando por inducción sobre $\text{comp}(\alpha)$ demostraremos que $\text{dak}(\alpha) \equiv \alpha$. Supongamos que la implicación es cierta para toda fórmula $\beta \in \mathrm{A}(X))$ tal que $\text{comp}(\beta) < n$. Si $\alpha \in \mathrm{A}(X)$, entonces son posibles dos situaciones:

1. $\alpha \in X$; si $x \in X$ y $\alpha \equiv x$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{dak}(\alpha) &\equiv \text{dak}(x) \\
&\equiv x && \text{por Regla 3} \\
&\equiv \alpha
\end{aligned}$$

2. existen fórmulas φ y ψ de $\mathrm{A}(X)$ de complejidades menores que las de α tales que $\alpha \equiv A\varphi\psi$. Como $K \notin \alpha$, para el cálculo de $\text{dak}(\alpha)$ no es de aplicación más que la Regla 4. En efecto:

$$\begin{aligned}
\text{dak}(\alpha) &\equiv \text{dak}(A\varphi\psi) \\
&\equiv A\,\text{dak}(\varphi)\,\text{dak}(\psi) && \text{por Regla 4} \\
&\equiv A\varphi\psi && \text{por hip. induc.} \\
&\equiv \alpha
\end{aligned}$$

□

Observación 3.2. En el Lema 3.3 la condición $\alpha \in \mathrm{A}(X)$ es suficiente para que se de $\text{dak}(\alpha) \equiv \alpha$, pero no es necesaria. El Lema 3.4, que es consecuencia del Lema 3.3, da la condición necesaria y suficiente.

Lema 3.4. *Sea $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. Si $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ entonces* $\text{dak}(\alpha) \equiv \alpha$.

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ y que $\text{comp}(\alpha) = n$. Razonando por inducción sobre $\text{comp}(\alpha)$ demostraremos que $\text{dak}(\alpha) \equiv \alpha$. Supongamos que la implicación es cierta para toda fórmula $\beta \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ tal que $\text{comp}(\beta) < n$. Si $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, entonces son posibles dos situaciones:

1. $\alpha \in \mathrm{A}(X)$; que en este caso $\text{dak}(\alpha) \equiv \alpha$ es lo que establece el Lema 3.3.
2. existen fórmulas φ y ψ de $\mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ de complejidades menores que las de α tales que $\alpha \equiv K\varphi\psi$. Para el cálculo de $\text{dak}(\alpha)$ no es posible comenzar más que por la Regla 5. Así pues:

$$\begin{aligned}
\text{dak}(\alpha) &\equiv \text{dak}(K\varphi\psi) \\
&\equiv K\,\text{dak}(\varphi)\,\text{dak}(\psi) && \text{por Regla 5} \\
&\equiv K\varphi\psi && \text{por hip. induc.} \\
&\equiv \alpha
\end{aligned}$$

□

En cuanto al Teorema 3.5, en esencia su significado es que aplicando dak a una fórmula dada, digamos φ, el resultado está más cerca de $\mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ que φ, ello según la "medida" alt.

Teorema 3.5. *Sea α una fórmula cualquiera de $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. Entonces:*

$$\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) = \begin{cases} 0, & \textit{si } \alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X)); \\ \mathrm{alt}(\alpha) - 1, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{6}$$

Demostración. La demostración es sobre la complejidad de la fórmula. Sea α perteneciente a $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$ y tal que $\mathrm{comp}(\alpha) = n$. Supongamos, como hipótesis de inducción, que (6) vale para toda fórmula β tal que $\mathrm{comp}(\beta) < n$. Son posibles varios casos:

1. $\alpha \equiv x \in X$; en este caso $\mathrm{dak}(\alpha) \equiv x \in X$ y como quiera que $X \subseteq \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ deducimos, según lo que establece el Lema 3.1, que $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$ lo que demuestra el resultado en este caso.
2. $\alpha \equiv AK\varphi\psi\xi$; en este caso tenemos que $\alpha \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ y que:

$$\begin{aligned} \mathrm{alt}(\alpha) &= 1 + \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(K\varphi\psi), \mathrm{alt}(\xi)\} \\ &= 1 + \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\varphi), \mathrm{alt}(\psi), \mathrm{alt}(\xi)\} \end{aligned} \tag{7}$$

Por otra parte, $\mathrm{dak}(\alpha) \equiv K\,\mathrm{dak}(A\varphi\xi)\,\mathrm{dak}(A\psi\xi)$ por lo que:

$$\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) = \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(A\varphi\xi)), \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(A\psi\xi))\} \tag{8}$$

Para abreviar, llamaremos β a $A\varphi\xi$ y γ a $A\psi\xi$. Tengamos en cuenta lo siguiente:

a) $K \in \beta$; entonces $\mathrm{alt}(\beta) = 1 + \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\varphi), \mathrm{alt}(\xi)\}$ y $\beta \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Como $\mathrm{comp}(\beta) < \mathrm{comp}(\alpha)$, la hipótesis de inducción permite establecer que:

$$\begin{aligned} \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\beta)) &= \mathrm{alt}(\beta) - 1 \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\varphi), \mathrm{alt}(\xi)\} \end{aligned} \tag{9}$$

b) $K \notin \beta$; entonces $\varphi, \xi, \beta \in \mathrm{A}(X)$. Según lo que establece el Lema 3.3, entonces $\mathrm{dak}(\beta) \equiv \beta$ y, según el Lema 3.1,

$$\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\beta)) = \mathrm{alt}(\beta) = 0 \tag{10}$$
$$\mathrm{alt}(\varphi) = 0 \tag{11}$$
$$\mathrm{alt}(\xi) = 0 \tag{12}$$

Analizaremos la igualdad 8 por casos:

a) $K \in \beta$ y $K \in \gamma$; entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) &= \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\beta)), \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\gamma))\} && \text{por (8)} \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\varphi), \mathrm{alt}(\psi), \mathrm{alt}(\xi)\} && \text{por (9)} \\ &= \mathrm{alt}(\alpha) - 1 \end{aligned}$$

b) $K \notin \beta$ y $K \in \gamma$; entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) &= \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\beta)), \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\gamma))\} && \text{por (8)} \\ &= \mathrm{máx}\{0, \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\gamma))\} && \text{por (10)} \\ &= \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\gamma)) \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\psi), \mathrm{alt}(\xi)\} && \text{por (9)} \\ &= \mathrm{alt}(\psi) && \text{por (12)} \\ &= \mathrm{máx}\{0, \mathrm{alt}(\psi), 0\} \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\varphi), \mathrm{alt}(\psi), \mathrm{alt}(\xi)\} && \text{por (10) y (12)} \\ &= \mathrm{alt}(\alpha) - 1 && \text{por (7)} \end{aligned}$$

   c) $K \in \beta$ y $K \notin \gamma$; esta situación es tratada como el caso del apartado $2b$).
   d) $K \notin \beta$ y $K \notin \gamma$; en este caso $\beta, \gamma \in \mathrm{A}(X)$ y $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Por lo que afirma el Lema 3.4, $\mathrm{dak}(\alpha) \equiv \alpha$ y, por lo que establece el Lema 3.1, $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$; así pues, $\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) = 0$
3. $\alpha \equiv A\xi K\varphi\psi$; esta situación es tratada como el caso del apartado 2).
4. $\alpha \equiv A\varphi\psi$; ni φ ni ψ comienzan por K pero $K \in \alpha$; sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathrm{alt}(\psi) \leq \mathrm{alt}(\varphi)$, de donde $K \in \varphi$ y φ comienza por A, es decir $\varphi \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Entonces $\mathrm{alt}(\alpha) = 1 + \mathrm{alt}(\varphi)$ y

$$\begin{aligned}
\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) &= \mathrm{alt}(A\,\mathrm{dak}(\varphi)\,\mathrm{dak}(\psi)) \\
&= 1 + \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\varphi)), \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\psi))\} \\
&= 1 + \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\varphi)) \\
&= 1 + \mathrm{alt}(\varphi) - 1 && \text{hip. de induc. y condiciones de } \varphi \\
&= \mathrm{alt}(\varphi) \\
&= \mathrm{alt}(\alpha) - 1
\end{aligned}$$

5. $\alpha \equiv K\varphi\psi$; sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathrm{alt}(\psi) \leq \mathrm{alt}(\varphi)$. Si $\mathrm{alt}(\varphi) = 0$, entonces $\mathrm{alt}(\psi) = 0$, $\varphi, \psi, \alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ y por tanto, $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$ (cfr. Lema 3.1). Si $\mathrm{alt}(\varphi) \neq 0$, es decir $\varphi \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, entonces $\alpha \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Así pues:

$$\begin{aligned}
\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) &= \mathrm{alt}(K\,\mathrm{dak}(\varphi)\,\mathrm{dak}(\psi)) && \text{def. de dak} \\
&= \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\varphi)), \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\psi))\} && \text{def. de alt} \\
&= \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\varphi)) \\
&= \mathrm{alt}(\varphi) - 1 && \text{hip. de induc. y condiciones de } \varphi \\
&= \mathrm{máx}\{\mathrm{alt}(\varphi), \mathrm{alt}(\psi)\} - 1 \\
&= \mathrm{alt}(\alpha) - 1 && \text{def. de alt}
\end{aligned}$$

□

Observación 3.3. Como consecuencia del Teorema 3.5 se tiene que la condición suficiente del Lema 3.4 es también necesaria.

Corolario 3.6. *Sea α una fórmula cualquiera de $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathrm{dak}(\alpha) \equiv \alpha$
2. $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$
3. $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$

Demostración. Sea α una fórmula cualquiera de $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. Supongamos que $\mathrm{dak}(\alpha) \equiv \alpha$. Según lo que afirma el Teorema 3.5, si $\alpha \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathrm{alt}(\alpha) &= \mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) \\
&= \mathrm{alt}(\alpha) - 1
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo y, por tanto, α debe ser un elemento de $\mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Si $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ se tiene, según lo que afirma el Lema 3.1, que $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$. Finalmente, si $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$ entonces, según lo que afirma el Lema 3.1, $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ y por lo que asevera el Lema 3.4, $\mathrm{dak}(\alpha) \equiv \alpha$. □

Ahora sabemos que dada una fórmula cualquiera, α, de $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$ es posible obtener a partir de ella otra en forma normal conjuntiva por aplicación reiterada de la función dak. Además, el número de iteraciones necesarias es exactamente $\mathrm{alt}(\alpha)$. El Teorema 3.2 prueba que esa otra fórmula en forma normal conjuntiva es lógicamente equivalente a α, la fórmula de partida.

Corolario 3.7. *Para toda* $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$*, el número natural* $\mathrm{alt}(\alpha)$ *es el menor número natural entre los números naturales* m *que cumplen* $\mathrm{dak}^m(\alpha) \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$*.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre n según el predicado $Q(n)$ del tenor:

Si $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$ y $n = \mathrm{alt}(\alpha)$, entonces n es el menor natural m cumpliendo $\mathrm{dak}^m(\alpha) \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$

El razonamiento es como sigue:

- $n = 0$; si $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$ y $0 = \mathrm{alt}(\alpha)$, entonces por el Corolario 3.6 sabemos que $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, es decir, $\mathrm{dak}^0(\alpha) \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ puesto que dak^0 es la aplicación identidad. Al ser 0 el menor número natural, el conjunto de los números naturales menores que él es vacío, de lo que concluimos la aseveración.
- Supongamos que $0 < n$, que $Q(n-1)$ es cierta y que $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$ es fija pero arbitraria a condición de cumplir $n = \mathrm{alt}(\alpha)$. Según sabemos por el Teorema 3.5 y el Corolario 3.6, se cumple:

$$\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) = \mathrm{alt}(\alpha) - 1 = n - 1 \tag{13}$$

  Por (13) y la hipótesis de inducción tenemos, en particular, que:

$$\mathrm{dak}^n(\alpha) = \mathrm{dak}^{n-1}(\mathrm{dak}(\alpha)) \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$$

  Por otra parte, sea m un número natural tal que $m < n$. Pueden darse tres casos:
  - $m = n - 1$; entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{alt}(\mathrm{dak}^{n-1}(\alpha)) &= \mathrm{alt}(\alpha) - n + 1 \\ &= n - n + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

    por lo que (cfr. Corolario 3.6) $\mathrm{dak}^{n-1}(\alpha) \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$.
  - $0 < m < n - 1$; por lo que establece el Teorema 3.5 sabemos que $\mathrm{alt}(\mathrm{dak}(\alpha)) = n - 1$ y como $m - 1 < m < n - 1$, por la hipótesis de inducción, que

$$\mathrm{dak}^m(\alpha) = \mathrm{dak}^{m-1}(\mathrm{dak}(\alpha)) \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$$

  - $m = 0$; $\mathrm{dak}^0(\alpha) = \alpha$ y al ser $\mathrm{alt}(\alpha) = n > 0$, deducimos que $\mathrm{dak}^0(\alpha) \notin \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$.

Por el principio de inducción finita deducimos que $Q(n)$ es cierta para todo número natural n. Como la función alt puede ser aplicada a cualquier fórmula, el resultado es cierto. □

4. Asociatividad

Por la iteración de dak a una fórmula cualquiera obtendremos, como hemos visto, una fórmula lógicamente equivalente a ella que está en forma normal conjuntiva. Sin embargo, la expresión de cualquier fórmula en forma normal conjuntiva puede ser dada según múltiples fórmulas todas lógicamente equivalentes entre sí. A partir de una cualquiera de ellas explicaremos en lo que sigue un algoritmo para obtener una determinada que consideraremos canónica y que llamaremos "forma normal conjuntiva a izquierda".

Definición 4.1. Sea $\mathrm{ar}\colon \mathrm{P}(\mathbf{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida como sigue:

$$\mathrm{ar}(\alpha) = \begin{cases} -1, & \text{if } \alpha \in X; \\ \text{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(\psi)\}, & \text{if } \alpha = \mathrm{K}\,\varphi\psi; \\ \text{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), 1 + \mathrm{ar}(\psi)\}, & \text{if } \alpha = \mathrm{A}\,\varphi\psi. \end{cases}$$

y sea $\mathrm{kr}\colon \mathrm{P}(\mathbf{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida como sigue:

$$\mathrm{kr}(\alpha) = \begin{cases} -1, & \text{if } \alpha \in X; \\ \text{máx}\{\mathrm{kr}(\varphi), 1 + \mathrm{kr}(\psi)\}, & \text{if } \alpha = \mathrm{K}\,\varphi\psi; \\ \text{máx}\{\mathrm{kr}(\varphi), \mathrm{kr}(\psi)\}, & \text{if } \alpha = \mathrm{A}\,\varphi\psi. \end{cases}$$

Sea definida también $\mathrm{her}\colon \mathrm{P}(\mathbf{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ como sigue:

$$\mathrm{her}(\alpha) = \text{máx}\{\mathrm{ar}(\alpha), \mathrm{kr}(\alpha)\}$$

Las aplicaciones ar y kr tienen las propiedades que señala el Lema 4.1. Sirven para caracterizar a los elementos de $\mathrm{K}(X)$, $\mathrm{A}(X)$ y X.

Lema 4.1. *Para todo* $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$*:*

1. $\alpha \in \mathrm{K}(X)$ *si, y solamente si,* $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$.
2. $\alpha \in \mathrm{A}(X)$ *si, y solamente si,* $\mathrm{kr}(\alpha) = -1$.

Demostración. Demostremos la afirmación 1). En primer lugar razonamos por inducción según la complejidad de α y según el predicado $Q(n)$:

$$\text{para todo } \alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L}), \text{ si } \alpha \in \mathrm{K}(X) \text{ y } \mathrm{comp}(\alpha) = n \text{ entonces } \mathrm{ar}(\alpha) = -1$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$ vale $Q(k)$. Tenemos los siguientes casos:

- $n = 0$; entonces sea —como único caso de interés— $\alpha \equiv x \in X$. Por definición (cfr. Definición 4.1), $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ por lo que $Q(0)$ es cierta.
- $n > 0$; si $\alpha \in \mathrm{K}(X)$ y $n > 0$, deben existir $\varphi, \psi \in \mathrm{K}(X)$ tales que $\alpha \equiv K\varphi\psi$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{ar}(\alpha) &= \text{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(\psi)\} && \text{Definición 4.1} \\ &= \text{máx}\{-1, -1\} && \text{hip. de induc.} \\ &= -1 \end{aligned}$$

  por lo que $Q(n)$ es cierta.

Por el *segundo principio de inducción finita*, para todo número natural n es cierta $Q(n)$ y de ahí la implicación. Recíprocamente, consideremos ahora el predicado $Q(n)$:

$$\text{Para todo } \alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L}), \text{ si } \mathrm{comp}(\alpha) = n \text{ y } \mathrm{ar}(\alpha) = -1, \text{ entonces } \alpha \in \mathrm{K}(X).$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$ vale $Q(k)$. Tenemos los siguientes casos:

- $n = 0$; entonces sea —como único caso de interés— $\alpha \equiv x \in X$. Puesto que $X \subseteq \mathrm{K}(X)$ se tiene que $Q(0)$ es cierta.
- $n > 0$; sea $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$ tal que $\mathrm{comp}(\alpha) = n$ y $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$. Caben, en principio, las siguientes posibilidades:

- existen $\varphi, \psi \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$ tales que $\alpha \equiv K\varphi\psi$; entonces

$$\begin{aligned} -1 &= \mathrm{ar}(\alpha) \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(\psi)\} \\ &\Rightarrow \mathrm{ar}(\varphi) = -1 = \mathrm{ar}(\psi) \\ &\Rightarrow \varphi, \psi \in \mathrm{K}(X) && \text{hip. inducc.} \\ &\Rightarrow \alpha \in \mathrm{K}(X) \end{aligned}$$

- existen $\varphi, \psi \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$ tales que $\alpha \equiv A\varphi\psi$; entonces

$$\begin{aligned} -1 &= \mathrm{ar}(\alpha) \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), 1 + \mathrm{ar}(\psi)\} \\ &\geq 0 \\ &\Rightarrow \text{luego este caso no es posible} \end{aligned}$$

por lo que $Q(n)$ es cierta.

Por el *segundo principio de inducción finita*, para todo número natural n es cierta $Q(n)$ y de ahí la implicación. La afirmación 2) puede ser demostrada con el mismo esquema anterior. □

Lema 4.2. *Para toda* $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$*,* $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ *y* $\mathrm{kr}(\alpha) = -1$ *si, y sólo si,* $\alpha \in X$*. Además* $\mathrm{K}(X) \cap \mathrm{A}(X) = X$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{kr}(\alpha) = -1 = \mathrm{ar}(\alpha)$. Al ser $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ tenemos que $\alpha \in \mathrm{K}(X)$ y si existieran $\varphi, \psi \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$ tales que $\alpha \equiv K\varphi\psi$, entonces se tendría:

$$\begin{aligned} -1 &= \mathrm{kr}(\alpha) && \text{hipótesis} \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{kr}(\varphi), 1 + \mathrm{kr}(\psi)\} && \text{Definición 4.1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

lo cual es absurdo, por lo que $\alpha \in X$. La afirmación recíproca es evidente y como consecuencia de esto y Lema 4.1 se deduce que $\mathrm{K}(X) \cap \mathrm{A}(X) = X$. □

Lema 4.3. *Para todo* $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$*:*

1. *Si* $\alpha \in \mathrm{K}(X) \setminus X$ *entonces* $0 \leq \mathrm{kr}(\alpha)$*.*
2. *Si* $\alpha \in \mathrm{A}(X) \setminus X$ *entonces* $0 \leq \mathrm{ar}(\alpha)$*.*

Demostración. Para toda $\psi \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$, $-1 \leq \mathrm{kr}(\psi)$ (resp. $-1 \leq \mathrm{ar}(\psi)$) por lo que $0 \leq 1 + \mathrm{kr}(\psi)$ (resp. $0 \leq 1 + \mathrm{ar}(\psi)$). □

Observación 4.1. Las respectivas afirmaciones recíprocas del Lema 4.3 no son ciertas. En efecto, $\mathrm{kr}(AKxyx) = 0$ (resp. $\mathrm{ar}(KAxyx) = 0$) y sin embargo $AKxyx \notin \mathrm{K}(X) \setminus X$ (resp. $KAxyx \notin \mathrm{A}(X) \setminus X$).

Lema 4.4. *Para toda* $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$*,* $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ *y* $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$ *si, y solamente si,* $\alpha \in \mathrm{ml}(X) \setminus X$*.*

Demostración. Si $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$, entonces (cfr. Lema 4.1) $\alpha \in \mathrm{K}(X)$; pero $\alpha \notin X$ puesto que $\mathrm{kr}(\alpha) \neq -1$; en definitiva, $\alpha \in \mathrm{K}(X) \setminus X$ y, en particular, $\mathrm{comp}(\alpha) > 0$. La demostración es por inducción según la complejidad de α y según el predicado $Q(n)$ del tenor:

Para todo α, si $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$, $\mathrm{comp}(\alpha) = n$, $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$, entonces $\alpha \in \mathrm{ml}(X)$.

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$, $Q(k)$ vale. Distinguimos los siguientes casos:

- $n = 1$; existirán $x, y \in X$ tales que $\alpha \equiv Kxy$ y por tanto $\alpha \in \mathrm{ml}(X) \setminus X$. Así pues, $Q(1)$ es necesariamente cierta.
- $n > 1$; existirán $\varphi, \psi \in \mathrm{K}(X)$ tales que $\alpha \equiv K\varphi\psi$. Como $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$, necesariamente $\psi \in X$. En cuanto a φ: será un elemento de $\mathrm{K}(X) \setminus X$ ya que $2 \leq n$; $\mathrm{ar}(\varphi) = -1$, pues si no lo fuera entonces $\mathrm{ar}(\alpha) \neq -1$ y $0 \leq \mathrm{kr}(\varphi)$ según el Lema 4.3, pero $\mathrm{kr}(\varphi) \leq 0$ por la definición de kr y la condición $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$, luego $\mathrm{kr}(\varphi) = 0$. Por la hipótesis de inducción, $\varphi \in \mathrm{ml}(X) \setminus X$; así pues, $\alpha \equiv K\varphi\psi$, con $\varphi \in \mathrm{ml}(X) \setminus X$ y $\psi \in X$, lo cual significa que $\alpha \in \mathrm{ml}(X) \setminus X$.

Por el *segundo principio de inducción finita*, para todo número natural n vale $Q(n)$. Para demostrar la afirmación recíproca razonamos por inducción sobre la complejidad de la fórmula α según el predicado $Q(n)$ siguiente:

$$\text{Para toda fórmula } \alpha, \text{ si } \mathrm{comp}(\alpha) = n \text{ y } \alpha \in \mathrm{ml}(X) \setminus X \text{ entonces } \mathrm{ar}(\alpha) = -1 \text{ y } \mathrm{kr}(\alpha) = 0$$

- $n = 1$; si $\alpha \in \mathrm{ml}(X) \setminus X$ y $\mathrm{comp}(\alpha) = 1$, existirán $x, y \in X$ tales que $\alpha \equiv Kxy$. Siendo así, $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$ y por tanto $Q(1)$ es cierta.
- Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural no nulo y que $Q(n-1)$ vale.
- Si $\alpha \in \mathrm{ml}(X) \setminus X$ y $\mathrm{comp}(\alpha) = n$, deben existir $\varphi \in \mathrm{ml}(X)$ y $\psi \in X$ tal que $\alpha \equiv K\varphi\psi$. Como $\mathrm{comp}(\varphi) = n - 1$ debe ser $\mathrm{ar}(\varphi) = -1$ y $\mathrm{kr}(\varphi) = 0$. Por tanto, $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$.

Por el *primer principio de inducción finita* se tiene que para todo número natural no nulo n, vale $Q(n)$ y de ahí lo que queremos demostrar. □

Lema 4.5. *Para toda* $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$*,* $\mathrm{ar}(\alpha) = 0$ *y* $\mathrm{kr}(\alpha) = -1$ *si, y solamente si,* $\alpha \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$*.*

Demostración. La demostración de este lema es el razonamiento dual del empleado en la demostración del Lema 4.4. □

Lema 4.6. *Para toda* $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$*,* $\mathrm{ar}(\alpha) = 0$ *y* $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$ *si, y solamente si,* $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$*.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, que $\mathrm{ar}(\alpha) = 0$ y que $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$. Según lo que afirma el Lema 4.1, ni $\alpha \in \mathrm{K}(X)$ ni $\alpha \in \mathrm{A}(X)$, así que en particular $\alpha \notin X$, de lo que se deduce que en las hipótesis del lema necesariamente $\mathrm{comp}(\alpha) > 0$. Por otra parte, tampoco puede darse $\alpha \equiv Kxy$, donde $x, y \in X$, ni $\alpha \equiv Axy$, donde igualmente $x, y \in X$. En efecto, si $\alpha \equiv Kxy$, $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ y si fuese $\alpha \equiv Axy$, entonces sería $\mathrm{kr}(\alpha) = -1$. Sin embargo, $\mathrm{kr}(KxAxy) = 0 = \mathrm{ar}(KxAxy)$; por tanto, $\mathrm{comp}(\alpha) = n \geq 2$. La demostración es por inducción según la complejidad de α y según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$\text{Para todo } \alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X)), \text{ si } \mathrm{comp}(\alpha) = n,\ \mathrm{ar}(\alpha) = 0 \text{ y } \mathrm{kr}(\alpha) = 0, \text{ entonces}$$
$$\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X)).$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$, $Q(k)$ vale. Sea ahora α, fija pero arbitraria, tal que $\mathrm{comp}(\alpha) = n$; distinguimos los siguientes casos:

1. $n = 2$; deben existir $x, y, z \in X$ tales que $\alpha \equiv KxAyz$ o bien $\alpha \equiv KAxyz$. En cualquiera de los casos α es un elemento de $\mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$. Así pues $P(2)$ es cierta.

2. $n > 2$; si α fuese un elemento de $\mathrm{A}(X)$ (resp. $\mathrm{K}(X)$), entonces $\mathrm{kr}(\alpha)$ (resp. $\mathrm{ar}(\alpha)$) valdría -1 (cfr. Lemma 4.1) cuando lo cierto es que vale 0; por tanto $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X)) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$. Así pues, existirán $\varphi, \psi \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ tales $\alpha \equiv K\varphi\psi$. Siendo así y siendo que $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$, debe de ocurrir que $\mathrm{kr}(\psi) = -1$ o equivalentemente $\psi \in \mathrm{A}(X)$. Pero $\mathrm{ar}(\alpha) = 0$, de donde $-1 \leq \mathrm{ar}(\psi) \leq 0$. Considérese, en general, que si $\mathrm{ar}(\psi) = 0$ y $\mathrm{kr}(\psi) = -1$, entonces $\psi \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$ (cfr. Lema 4.5); mientras que si $\mathrm{ar}(\psi) = -1$ y $\mathrm{kr}(\psi) = -1$, entonces $\psi \in X \subseteq \mathrm{cl}(X)$ (cfr. Lema 4.2). Pueden darse los siguientes casos:
   a) $\mathrm{kr}(\psi) = -1$, $\mathrm{ar}(\psi) = 0$, $\mathrm{ar}(\varphi) = 0$ y $\mathrm{kr}(\varphi) = -1$; como $\mathrm{ar}(\varphi) = 0$ y $\mathrm{kr}(\varphi) = -1$, $\varphi \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$ (cfr. Lema 4.5). Así pues $\varphi, \psi \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$, de lo que $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$.
   b) $\mathrm{kr}(\psi) = -1$, $\mathrm{ar}(\psi) = 0$, $\mathrm{ar}(\varphi) = 0$ y $\mathrm{kr}(\varphi) = 0$; como $\varphi, \psi \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, $\mathrm{ar}(\varphi) = 0$, $\mathrm{kr}(\varphi) = 0$ y $\mathrm{comp}(\varphi) < n$, la hipótesis de inducción permite concluir que $\varphi \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$ y, en definitiva, que $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$.
   c) $\mathrm{kr}(\psi) = -1$, $\mathrm{ar}(\psi) = 0$, $\mathrm{ar}(\varphi) = -1$ y $\mathrm{kr}(\varphi) = -1$; en tal caso $\varphi \in X \subseteq \mathrm{lcnf}(X)$ (cfr. Lema 4.2). Igualmente la conclusión es $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$.
   d) $\mathrm{kr}(\psi) = -1$, $\mathrm{ar}(\psi) = 0$, $\mathrm{ar}(\varphi) = -1$ y $\mathrm{kr}(\varphi) = 0$; en tal caso $\varphi \in X \subseteq \mathrm{ml}(X) \setminus X$ (cfr. Lema 4.4). De nuevo la conclusión es $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$.
   e) $\mathrm{kr}(\psi) = -1$, $\mathrm{ar}(\psi) = -1$, $\mathrm{ar}(\varphi) = 0$ y $\mathrm{kr}(\varphi) = -1$; en tal caso $\varphi \in X \subseteq \mathrm{cl}(X) \setminus X$ (cfr. Lema 4.4). Así pues, $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$.
   f) $\mathrm{kr}(\psi) = -1$, $\mathrm{ar}(\psi) = -1$, $\mathrm{ar}(\varphi) = 0$ y $\mathrm{kr}(\varphi) = 0$; como $\varphi, \psi \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, $\mathrm{ar}(\varphi) = 0$, $\mathrm{kr}(\varphi) = 0$ y $\mathrm{comp}(\varphi) < n$, la hipótesis de inducción permite concluir que $\varphi \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$ y, en definitiva, que $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$.

Por el *segundo principio de inducción finita* se tiene que para todo número natural no nulo n, vale $Q(n)$ y de ahí la validez de la implicación directa. Para la recíproca, observemos que si $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$ entonces deben existir $\varphi \in \mathrm{lcnf}(X)$ y $\psi \in \mathrm{cl}(X)$ tales que $\alpha \equiv K\varphi\psi$; pero si $\psi \in X$, entonces $\varphi \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus \mathrm{ml}(X)$ y en particular debe cumplirse $\mathrm{comp}(\alpha) \geq 2$. Razonamos también por inducción sobre la complejidad de la fórmula según el predicado $Q(n)$:

Para todo $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, si $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$ y $\mathrm{comp}(\alpha) = n$, entonces $\mathrm{ar}(\alpha) = 0$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$.

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$, $Q(k)$ vale. Sea ahora α, fija pero arbitraria, tal que $\mathrm{comp}(\alpha) = n$; distinguimos los siguientes casos de interés:

1. $\psi \in X$; entonces $\alpha \equiv K\varphi\psi$ con $\varphi \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus \mathrm{ml}(X)$. Pueden darse dos casos:
   a) $\varphi \in \mathrm{cl}(X)$; entonces $\varphi \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$ y se tiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{kr}(\alpha) &= \max\{\mathrm{kr}(\varphi), 1 + \mathrm{kr}(\psi)\}\\ &= \max\{-1, 1 - 1\}\\ &= \max\{-1, 0\}\\ &= 0\\ \mathrm{ar}(\alpha) &= \max\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(\psi)\}\\ &= \max\{0, -1\}\\ &= 0\end{aligned}$$

   b) $\varphi \notin \mathrm{cl}(X)$; entonces:

$$\begin{aligned}\varphi &\in (\mathrm{lcnf}(X) \setminus \mathrm{cl}(X)) \cap (\mathrm{lcnf}(X) \setminus \mathrm{ml}(X))\\ &= \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X)\end{aligned}$$

Dado que $\text{comp}(\varphi) < \text{comp}(\alpha)$, por la hipótesis de inducción deducimos que $\text{ar}(\alpha) = 0 = \text{kr}(\alpha) = 0$ y entonces:

$$\begin{aligned}\text{ar}(\alpha) &= \text{máx}\{0, -1\} = 0\\ \text{kr}(\alpha) &= \text{máx}\{0, 1-1\} = 0\end{aligned}$$

2. $\psi \notin X$; dado que $\psi \in \text{cl}(X) \setminus X$ entonces $\text{ar}(\psi) = 0$ y $\text{kr}(\psi) = -1$ (cfr. Lema 4.5). Tendremos los siguientes casos:
   a) $\varphi \in X$; entonces:

$$\begin{aligned}\text{ar}(\alpha) &= \text{máx}\{-1, 0\} = 0\\ \text{kr}(\alpha) &= \text{máx}\{-1, 1-1\} = 0\end{aligned}$$

   b) $\varphi \notin \text{cl}(X) \setminus X$; entonces $\text{ar}(\varphi) = 0$ y $\text{kr}(\varphi) = -1$. Así pues:

$$\begin{aligned}\text{ar}(\alpha) &= \text{máx}\{\text{ar}(\varphi), \text{ar}(\psi)\} = 0\\ \text{kr}(\alpha) &= \text{máx}\{\text{kr}(\varphi), 1+\text{kr}(\psi)\}\\ &= \text{máx}\{-1, 1-1\} = 0\end{aligned}$$

   c) $\varphi \notin \text{ml}(X) \setminus X$; entonces $\text{ar}(\varphi) = -1$ y $\text{kr}(\varphi) = 0$ (cfr. Lema 4.4). Así pues:

$$\begin{aligned}\text{ar}(\alpha) &= \text{máx}\{\text{ar}(\varphi), \text{ar}(\psi)\}\\ &= \text{máx}\{-1, 0\} = 0\\ \text{kr}(\alpha) &= \text{máx}\{\text{kr}(\varphi), 1+\text{kr}(\psi)\}\\ &= \text{máx}\{0, 1-1\} = 0\end{aligned}$$

   d) $\varphi \in \text{lcnf}(X) \setminus (\text{cl}(X) \cup \text{ml}(X))$; por la hipótesis de inducción se cumplirá $\text{ar}(\varphi) = 0 = \text{kr}(\varphi)$. Así pues:

$$\begin{aligned}\text{ar}(\alpha) &= \text{máx}\{\text{ar}(\varphi), \text{ar}(\psi)\}\\ &= \text{máx}\{0\} = 0\\ \text{kr}(\alpha) &= \text{máx}\{\text{kr}(\varphi), 1+\text{kr}(\psi)\}\\ &= \text{máx}\{0, 1-1\} = 0\end{aligned}$$

Por el *segundo principio de inducción finita* se tiene que para todo número natural no nulo n, vale $Q(n)$ y de ahí la validez de la implicación recíproca y la equivalencia. □

Observación 4.2. La fórmula $\alpha \equiv AKxyx$ cumple $\text{ar}(\alpha) = 0 = \text{kr}(\alpha)$, pero $\alpha \notin \text{lcnf}(X)$. De ahí la necesidad de la restricción en el enunciado del Lema 4.6.

Tras varios lemas técnicos en el Teorema 4.7, en el que mediante her podemos caracterizar al conjunto $\text{lcnf}(X)$ de las fórmulas en forma normal conjuntiva a izquierda. Una vez más destacaremos el signo $\leq$ en su enunciado, poniendo de relieve la importancia del valor -1 en la definición Definición 4.1; esto aparecerá en la demostración.

Teorema 4.7. *Para todo $\alpha \in \text{K}(\text{A}(X))$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\text{her}(\alpha) \leq 0$.
2. $\alpha \in \text{lcnf}(X)$.

Demostración. Demostremos en primer lugar que la afirmación 1) es condición suficiente para que se cumpla 2). Caben los siguientes casos:

1. $\text{ar}(\alpha) = -1 = \text{kr}(\alpha)$; según afirma el Lema 4.2, $\alpha \in X$.

2. $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$; según afirma el Lema 4.4, $\alpha \in \mathrm{ml}(X) \setminus X$.
3. $\mathrm{ar}(\alpha) = 0$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = -1$; según afirma el Lema 4.5, $\alpha \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$
4. $\mathrm{ar}(\alpha) = 0$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = 0$; según afirma el Lema 4.6, $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \setminus (\mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{ml}(X))$.

y por tanto, $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X)$. Pero 1) es condición necesaria para que se cumpla 2), lo que se deduce como consecuencia de los mencionados lemas. □

Definición 4.2 (left associativity). Consideremos las siguientes reglas:

$$x_i \rightarrow_{lasc} x_i \tag{14}$$

$$\frac{A\varphi\psi \rightarrow_{lasc} \alpha \quad \xi \rightarrow_{lasc} \beta}{A\varphi A\psi\xi \rightarrow_{lasc} A\alpha\beta} \tag{15}$$

$$\frac{K\varphi\psi \rightarrow_{lasc} \alpha \quad \xi \rightarrow_{lasc} \beta}{K\varphi K\psi\xi \rightarrow_{lasc} K\alpha\beta} \tag{16}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow_{lasc} \varphi' \quad \psi \rightarrow_{lasc} \psi'}{A\varphi\psi \rightarrow_{lasc} A\varphi'\psi'} \tag{17}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow_{lasc} \varphi' \quad \psi \rightarrow_{lasc} \psi'}{K\varphi\psi \rightarrow_{lasc} K\varphi'\psi'} \tag{18}$$

donde (15), (16), (17) y (18) serán aplicadas con la prioridad de mayor a menor según el orden dado. Definamos ahora la aplicación $\mathrm{lasc}\colon P(\mathbf{L}) \longrightarrow P(\mathbf{L})$ mediante $\mathrm{lasc}(\varphi) \equiv \psi$ si, y sólo si, $\varphi \rightarrow_{lasc} \psi$.

Observación 4.3. Como consecuencia del Teorema 2.3 es evidente que para toda fórmula φ, $\mathrm{lasc}(\varphi)$ es (lógicamente) equivalente a φ; por tanto lasc no altera el significado lógico de las fórmulas al actuar sobre ellas, aunque sí eventualmente su sintaxis eventualmente.

Lo que establece el Lema 4.8 es cierto evidentemente.

$$x_i \rightarrow_{lasc} x_i$$

$$\frac{A\varphi\psi \rightarrow_{lasc} \alpha \quad \xi \rightarrow_{lasc} \beta}{A\varphi A\psi\xi \rightarrow_{lasc} A\alpha\beta} \qquad \frac{K\varphi\psi \rightarrow_{lasc} \alpha \quad \xi \rightarrow_{lasc} \beta}{K\varphi K\psi\xi \rightarrow_{lasc} K\alpha\beta}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow_{lasc} \varphi' \quad \psi \rightarrow_{lasc} \psi'}{A\varphi\psi \rightarrow_{lasc} A\varphi'\psi'} \qquad \frac{\varphi \rightarrow_{lasc} \varphi' \quad \psi \rightarrow_{lasc} \psi'}{K\varphi\psi \rightarrow_{lasc} K\varphi'\psi'}$$

Figura 2: Axioma y reglas para la definición de lasc.

Lema 4.8. *Para todo* $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L})$,

1. *Si* $\alpha \in A(X)$ *entonces* $\mathrm{lasc}(\alpha) \in A(x)$
2. *Si* $\alpha \in K(X)$ *entonces* $\mathrm{lasc}(\alpha) \in K(x)$

Lema 4.9. *Para todo* $\alpha \in A(X)$,

$$\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre la complejidad de α según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$\text{Para todo } \alpha, \text{ si } \alpha \in A(X) \text{ y } \mathrm{comp}(\alpha) = n \text{ entonces } \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \tfrac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$ vale $Q(k)$. Tenemos los siguientes casos:

- $n = 0$; entonces sea —como único caso de interés— $\alpha \equiv x \in X$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) &= \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(x)) = \mathrm{ar}(x) \\ &= -1 = \left\lfloor \frac{-1}{2} \right\rfloor\end{aligned}$$

  por lo que $Q(0)$ es cierto.
- $n > 0$; sea $\alpha \equiv A\varphi\rho$ para determinados $\phi, \rho \in \mathrm{A}(X)$. Surge entonces la siguiente casuística:
  - $\varphi, \rho \in X$; $\alpha \equiv Ayx$, para ciertos $y, x \in X$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) &= \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(Ayx)) \\ &= \mathrm{ar}(A\,\mathrm{lasc}(y)\,\mathrm{lasc}(x)) = \mathrm{ar}(Ayx) \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(y), \mathrm{ar}(x)+1\} = \mathrm{máx}\{-1, -1+1\} \\ &= 0 = \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(Ayx)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor\end{aligned}$$

  - $\varphi \in \mathrm{A}(X) \setminus X$ y $\rho \in X$; $\alpha \equiv A\varphi x$, para cierto $x \in X$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) &= \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(A\varphi x)) \\ &= \mathrm{ar}(A\,\mathrm{lasc}(\varphi)\,\mathrm{lasc}(x)) = \mathrm{ar}(A\,\mathrm{lasc}(\varphi)x) \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\varphi)), \mathrm{ar}(x)+1\} = \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\varphi)), 0\} \\ &= \mathrm{máx}\left\{\left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\varphi)}{2} \right\rfloor, 0\right\} && \text{hip. de inducción} \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\varphi)}{2} \right\rfloor && \text{Lema 4.3} \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), 0\}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(x)+1\}}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(A\varphi x)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor\end{aligned}$$

  - $\alpha \equiv A\varphi A\psi\xi$, para ciertos $\varphi, \psi, \xi \in \mathrm{A}(X)$; entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) &= \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(A\varphi\psi)), 1+\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\xi))\} \\ &= \mathrm{máx}\left\{\left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(A\varphi\psi)}{2} \right\rfloor, 1+\left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\xi)}{2} \right\rfloor\right\} && \text{(hip. ind.)} \\ &= \mathrm{máx}\left\{\left\lfloor \frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), 1+\mathrm{ar}(\psi)\}}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2+\mathrm{ar}(\xi)}{2} \right\rfloor\right\} \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), 1+\mathrm{ar}(\psi)\}, 2+\mathrm{ar}(\xi)\}}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), 1+\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\psi), 1+\mathrm{ar}(\xi)\}\}}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), 1+\mathrm{ar}(A\psi\xi)\}}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(A\varphi A\psi\xi)}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor\end{aligned}$$

  por lo que $Q(n)$ es cierta.

Por el *segundo principio de inducción finita*, para todo número natural n es cierta $Q(n)$ y de ahí el resultado. □

Lema 4.10. *Para todo* $\alpha \in A(X)$,

$$\mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{kr}(\alpha)}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. Si $\alpha \in A(X)$ entonces $\mathrm{lasc}(\alpha) \in A(X)$. La demostración concluye aplicando el Lema 4.1 y teniendo en cuenta que:

$$-1 = \left\lfloor \frac{-1}{2} \right\rfloor$$

□

Como vemos en el Teorema 4.11 el papel reductor del $\mathrm{her}(\alpha)$ es muy podereso al aplicar lasc a la fórmula α; como vemos es tal que divide por 2, lo que invoca inevitablemente al logaritmo en base 2.

Teorema 4.11. *Para todo* $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$*:*

1. $\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor$
2. $\mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{kr}(\alpha)}{2} \right\rfloor$
3. $\mathrm{her}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{her}(\alpha)}{2} \right\rfloor$

Demostración. Para demostrar 1) razonaremos por inducción sobre la complejidad de α según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$\text{Para todo } \alpha, \text{ si } \alpha \in K(A(X)) \text{ y } \mathrm{comp}_{\mathrm{k}}(\alpha) = n \text{ entonces } \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \tfrac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$ vale $Q(k)$. Tenemos los siguientes casos:

- $n = 0$; debe ser $\alpha \in \mathrm{A}(X)$, fórmula para la cual $\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor$ según establece el Lema 4.9.
- $n > 0$; sea —como único caso de interés— $\alpha \equiv K\varphi\rho$ para ciertos $\varphi, \rho \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Distingamos pues los siguientes casos:
  - $\rho \in A(X)$; entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(K\varphi\rho)) &= \mathrm{ar}(K\,\mathrm{lasc}(\varphi)\,\mathrm{lasc}(\rho)) \\ &= \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\varphi)), \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\rho))\} = \mathrm{máx}\left\{\left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\varphi)}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\rho)}{2} \right\rfloor\right\} \quad (\text{h.i. y Lema 4.9}) \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(\rho)\}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor\end{aligned}$$

- $\rho \notin A(X)$; entonces $\alpha \equiv K\varphi K\psi\xi$ para ciertos $\psi, \xi \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. En este caso:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) &= \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(K\varphi K\psi\xi)) = \mathrm{ar}(K\,\mathrm{lasc}(K\varphi\psi)\,\mathrm{lasc}(\xi)) \\
&= \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(K\varphi\psi)), \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\xi))\} \\
&= \mathrm{máx}\left\{\left\lfloor\frac{\mathrm{ar}(K\varphi\psi)}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{\mathrm{ar}(\xi)}{2}\right\rfloor\right\} && \text{(hip. induc.)} \\
&= \mathrm{máx}\left\{\left\lfloor\frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(\psi)\}}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{\mathrm{ar}(\xi)}{2}\right\rfloor\right\} \\
&= \mathrm{máx}\left\{\left\lfloor\frac{\mathrm{ar}(\varphi)}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{\mathrm{ar}(\psi)}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{\mathrm{ar}(\xi)}{2}\right\rfloor\right\} \\
&= \left\lfloor\frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(\psi), \mathrm{ar}(\xi)\}}{2}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\psi), \mathrm{ar}(\xi)\}\}}{2}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{ar}(\varphi), \mathrm{ar}(K\psi\xi)\}}{2}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\frac{\mathrm{ar}(K\varphi K\psi\xi)}{2}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2}\right\rfloor
\end{aligned}$$

Por el *segundo principio de inducción finita*, para todo número natural n es cierta $Q(n)$ y de ahí la validez de lo que afirma 1). Para demostrar 2) razonemos por inducción sobre la complejidad de α según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$\text{Para todo } \alpha, \text{ si } \alpha \in K(A(X)) \text{ y } \mathrm{comp_k}(\alpha) = n \text{ entonces } \mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor\tfrac{\mathrm{kr}(\alpha)}{2}\right\rfloor$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$ vale $Q(k)$. Tenemos los siguientes casos:

- $n = 0$; debe ser $\alpha \in \mathrm{A}(X)$, fórmula para la cual $\mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor\frac{\mathrm{kr}(\alpha)}{2}\right\rfloor$ según establece el Lema 4.10.
- $n > 0$; sea —como único caso de interés— $\alpha \equiv K\varphi\rho$ para ciertos $\varphi, \rho \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Distingamos pues los siguientes casos:
  - $\rho \in A(X)$; entonces:

$$\begin{aligned}
\mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\alpha)) &= \mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(K\varphi\rho)) = \mathrm{kr}(K\,\mathrm{lasc}(\varphi)\,\mathrm{lasc}(\rho)) \\
&= \mathrm{máx}\{\mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\varphi)), 1 + \mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\rho))\} = \mathrm{máx}\left\{\left\lfloor\frac{\mathrm{kr}(\varphi)}{2}\right\rfloor, 0\right\} && \text{(h.i. y Lema 4.1)} \\
&= \left\lfloor\frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{kr}(\varphi), 0\}}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{\mathrm{máx}\{\mathrm{kr}(\varphi), 1 + \mathrm{kr}(\rho)\}}{2}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\frac{\mathrm{kr}(K\varphi\rho)}{2}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\frac{\mathrm{kr}(\alpha)}{2}\right\rfloor
\end{aligned}$$

- $\rho \notin A(X)$; entonces $\alpha \equiv K\varphi K\psi\xi$ para ciertos $\psi, \xi \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. En este caso:

$$\begin{aligned}
\mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\alpha)) &= \mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(K\varphi K\psi\xi)) = \mathrm{kr}(K\,\mathrm{lasc}(K\varphi\psi)\,\mathrm{lasc}(\xi)) \\
&= \max\{\mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(K\varphi\psi)), 1 + \mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\xi))\} \\
&= \max\left\{\left\lfloor \frac{\mathrm{kr}(K\varphi\psi)}{2} \right\rfloor, 1 + \left\lfloor \frac{\mathrm{kr}(\xi)}{2} \right\rfloor\right\} && \text{(hip. induc.)} \\
&= \max\left\{\left\lfloor \frac{\max\{\mathrm{kr}(\varphi), 1 + \mathrm{kr}(\psi)\}}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2 + \mathrm{kr}(\xi)}{2} \right\rfloor\right\} \\
&= \left\lfloor \frac{\max\{\max\{\mathrm{kr}(\varphi), 1 + \mathrm{kr}(\psi)\}, 2 + \mathrm{kr}(\xi)\}}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{\max\{\mathrm{kr}(\varphi), \max\{1 + \mathrm{kr}(\psi), 2 + \mathrm{kr}(\xi)\}\}}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{\max\{\mathrm{kr}(\varphi), 1 + \max\{\mathrm{kr}(\psi), 1 + \mathrm{kr}(\xi)\}\}}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{\max\{\mathrm{kr}(\varphi), 1 + \mathrm{kr}(K\psi\xi)\}}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{\mathrm{kr}(K\varphi K\psi\xi)}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{\mathrm{kr}(\alpha)}{2} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Por el *segundo principio de inducción finita*, para todo número natural n es cierta $Q(n)$ y de ahí la validez de lo que afirma 2). La afirmación 3) es inmediata a partir de 1) y 2) teniendo en cuenta que:

$$\max\left\{\left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\mathrm{kr}(\alpha)}{2} \right\rfloor\right\} = \left\lfloor \frac{\max\{\mathrm{ar}(\alpha), \mathrm{kr}(\alpha)\}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathrm{her}(\alpha)}{2} \right\rfloor$$

□

Lema 4.12. *Sea $\alpha \in \mathrm{A}(X)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\alpha \in \mathrm{cl}(X)$
2. $\mathrm{lasc}(\alpha) \equiv \alpha$
3. $\mathrm{ar}(\alpha) \leq 0$

Demostración. Para demostrar que la afirmación 1) implica la afirmación 2) razonaremos por inducción sobre la complejidad de α según el predicado $Q(n)$ del tenor:

Para todo α, si $\alpha \in \Xi_{\mathrm{A}}(X)$ y $\mathrm{comp}(\alpha) = n$ entonces $\mathrm{lasc}(\alpha) \equiv \alpha$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$ vale $Q(k)$. Distinguimos los siguientes casos:

- $n = 0$; debe ser $\alpha \equiv x \in X$ y entonces $\mathrm{lasc}(\alpha) \equiv \mathrm{lasc}(x) \equiv x \equiv \alpha$.
- $n > 0$; sea —como único caso de interés— $\alpha \equiv A\varphi x$, donde $\varphi \in \Xi_{\mathrm{A}}(X)$ y $x \in X$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathrm{lasc}(\alpha) &\equiv \mathrm{lasc}(A\varphi x) \\
&\equiv A\,\mathrm{lasc}(\varphi)\,\mathrm{lasc}(x) \\
&\equiv A\varphi x && \text{(hip. inducción y Definición 4.2)} \\
&\equiv \alpha
\end{aligned}$$

luego $Q(n)$ es cierta.

Por el segundo principio de inducción finita, para todo número natural n es cierta $Q(n)$ y de ahí la validez de lo que afirma 2). Supongamos ahora cierta 2), es decir que $\alpha \in \mathrm{A}(X)$ y que $\mathrm{lasc}(\alpha) \equiv \alpha$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{ar}(\alpha) &= \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) \\ &= \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor && \text{(Lema 4.9)} \end{aligned}$$

de donde $\mathrm{ar}(\alpha) \in \{-1, 0\}$, o sea, que es cierta la afirmación 3). Finalmente, supongamos que $\alpha \in \mathrm{A}(X)$ y que $\mathrm{ar}(\alpha) \leq 0$. Por el Lema 4.1 debe ser $\mathrm{kr}(\alpha) = -1$, por lo que caben exactamente los siguientes casos:

1. $\mathrm{ar}(\alpha) = -1$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = -1$; entonces $\alpha \in X \subseteq \mathrm{cl}(X)$ (cfr. Lema 4.2).
2. $\mathrm{ar}(\alpha) = 0$ y $\mathrm{kr}(\alpha) = -1$; entonces $\alpha \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$ (cfr. Lema 4.5).

Esto prueba que bajo las hipótesis del supuesto 3) se cumple $\alpha \in \mathrm{cl}(X)$, como buscábamos demostrar. □

En el Teorema 4.13 aparecen finalmente combinados los efectos de alt y her para caracterizar a las fórmulas de $\mathrm{lcnf}(X)$. Como era de esperar intervienen los valores mínimos de dichas funciones, incluyendo de nuevo en nuestro discurso a -1 de forma esencial.

Teorema 4.13. *Para toda $\alpha \in \mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X)$
2. $\mathrm{dak}(\alpha) \equiv \alpha$ *y* $\mathrm{lasc}(\alpha) \equiv \alpha$
3. $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$ *y* $\mathrm{her}(\alpha) \leq 0$.

Demostración. Sea α una fórmula cualquiera perteneciente a $\mathrm{P}(\mathbf{L_{KA}})$. Supongamos lo que afirma 1), es decir que $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X)$. Razonaremos por inducción sobre la complejidad de α según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$\text{Para todo } \alpha, \text{ si } \alpha \in \mathrm{lcnf}(X) \text{ y } \mathrm{comp}(\alpha) = n \text{ entonces } \mathrm{dak}(\alpha) = \alpha \text{ y } \mathrm{lasc}(\alpha) = \alpha$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$ vale $Q(k)$. Distinguimos los siguientes casos:

- $n = 0$; debe ser $\alpha \equiv x \in X$ y entonces $\mathrm{dak}(\alpha) \equiv \mathrm{dak}(x) \equiv x \equiv \alpha$ y análogamente $\mathrm{lasc}(\alpha) \equiv \alpha$. Se tiene así que es cierta $Q(0)$.
- $n > 0$; sea —como único caso de interés— $\alpha \equiv K\varphi\psi$, donde $\varphi \in \mathrm{lcnf}(X)$ y $\psi \in \mathrm{cl}(X)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{dak}(\alpha) &\equiv \mathrm{dak}(K\varphi\psi) \\ &\equiv K\,\mathrm{dak}(\varphi)\,\mathrm{dak}(\psi) \\ &\equiv K\varphi\,\mathrm{dak}(\psi) && \text{(hip. induc.)} \\ &\equiv K\varphi\psi && \text{(Observación 2.2 e hip. induc.)} \\ &\equiv \alpha \\ \mathrm{lasc}(\alpha) &\equiv \mathrm{lasc}(K\varphi\psi) \\ &\equiv K\,\mathrm{lasc}(\varphi)\,\mathrm{lasc}(\psi) \\ &\equiv K\varphi\,\mathrm{lasc}(\psi) && \text{(hip. induc.)} \\ &\equiv K\varphi\psi && \text{(Lema 4.12)} \\ &\equiv \alpha \end{aligned}$$

  por lo que sabemos que $Q(n)$ es cierta.

Por el segundo principio de inducción finita, para todo número natural n es cierta $Q(n)$ y de ahí la validez de lo que afirma 2). Si suponemos ahora cierto lo que afirma 2), que $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$ y que $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ está asegurado por el Corolario 3.6. En particular, como consecuencia del Teorema 4.11, tenemos:

$$\mathrm{ar}(\alpha) = \mathrm{ar}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{ar}(\alpha)}{2} \right\rfloor$$
$$\mathrm{kr}(\alpha) = \mathrm{kr}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{kr}(\alpha)}{2} \right\rfloor$$

y por tanto, $\mathrm{ar}(\alpha) \leq 0$ y $\mathrm{kr}(\alpha) \leq 0$; así pues, hemos demostrado lo que afirma 3). Supongamos, finalmente, cierto lo que afirma 3) y demostremos que $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X)$. Al ser $\mathrm{alt}(\alpha) = 0$ y usando de nuevo el Corolario 3.6, sabemos que $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$. Según lo que establece el Teorema 4.7, al ser $\mathrm{her}(\alpha) \leq 0$ debe necesariamente cumplirse $\alpha \in \mathrm{lcnf}(X)$ y esto es lo que establece la afirmación 1). □

Definición 4.3. Para toda $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, $\mathrm{hre}(\alpha)$ es el número natural definido por la igualdad:

$$\mathrm{hre}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathrm{her}(\alpha) \leq 0, \\ \lfloor log_2(\mathrm{her}(\alpha)) \rfloor + 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 4.4. Entendida la evaluación de las expresiones desde un punto de vista "perezoso", debe ser aceptada la igualdad:

$$\mathrm{hre}(\alpha) = (1 - \chi_{\{-1,0\}}(\mathrm{her}(\alpha)))(\lfloor log_2(\mathrm{her}(\alpha)) \rfloor + 1)$$

donde $\chi_{\{-1,0\}}$ es la función característica en el conjunto $\{-1, 0\}$. Sea observado también que en el caso de que para la fórmula α se tenga $0 < \mathrm{her}(\alpha)$, entonces $\mathrm{hre}(\alpha)$ es el número de dígitos en la (única) expresión binaria de $\mathrm{her}(\alpha)$ cuando es mayor que 0 y 0 en otro caso.

Finalmente el Corolario 4.14 informa que para toda fórmula α perteneciente a $\mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, $\mathrm{lasc}^{\mathrm{hre}(\alpha)}(\alpha)$ es una fórmula en forma normal conjuntiva a izquierdas (equivalente a α, por supuesto) y que por iteración de lasc el número de iteraciones $\mathrm{hre}(\alpha)$ es el menor de los que lo consiguen. Obtenemos así una estimación de la complejidad de nuestro algoritmo y ésta es logarítmica en el peor de los casos.

Corolario 4.14. *Para toda* $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, $\mathrm{hre}(\alpha)$ *es el menor entre los números naturales* m *que cumplen* $\mathrm{lasc}^m(\alpha) \in \mathrm{lcnf}(X)$.

Demostración. La demostración es por inducción sobre n según el predicado $Q(n)$ del tenor:

para todo $\alpha \in \mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$, si $n = \mathrm{her}(\alpha)$ entonces $\mathrm{hre}(\alpha)$ es el menor natural m cumpliendo $\mathrm{lasc}^m(\alpha) \in \mathrm{lcnf}(X)$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$ vale $Q(k)$. Sea ahora α, fija pero arbitraria, tal que $\mathrm{her}(\alpha) = n$; distinguiremos los siguientes casos:

1. $n \leq 0$; por lo que establece el Teorema 4.7 sabemos que $\alpha \in \mathrm{fncl}(X)$, es decir, $\mathrm{lasc}^0(\alpha) \in \mathrm{fncl}(X)$ puesto que lasc^0 es la aplicación identidad. Al ser 0 el menor número natural, el conjunto de los números naturales menores que él es vacío, de lo que concluimos la aseveración.
2. $n > 0$; según sabemos por el Teorema 4.11 se ha de cumplir:

$$\mathrm{her}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \left\lfloor \frac{\mathrm{her}(\alpha)}{2} \right\rfloor < \mathrm{her}(\alpha) \tag{19}$$

y ya que $n > 0$ se tiene $\mathrm{her}(\mathrm{lasc}(\alpha)) < n$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{lasc}^{\mathrm{hre}(\alpha)}(\alpha) &= \mathrm{lasc}^{\mathrm{hre}(\mathrm{lasc}(\alpha))+1}(\alpha) \\ &= \mathrm{lasc}^{\mathrm{hre}(\mathrm{lasc}(\alpha))}(\mathrm{lasc}(\alpha)) \end{aligned} \tag{20}$$

Por (20), (19) y la hipótesis de inducción deducimos que $\mathrm{lasc}^{\mathrm{hre}(\alpha)}(\alpha) \in \mathrm{lcnf}(X)$.

Supongamos ahora que $m < \mathrm{hre}(\alpha)$; tendremos los siguientes casos:

- $m = 0$; como $0 < \mathrm{her}(\alpha)$, $\mathrm{lasc}^0(\alpha) \equiv \alpha \notin \mathrm{lcnf}(X)$ (cfr. Teorema 4.7).
- $0 < m$; teniendo en cuenta lo establecido en (19), se cumplirá $\mathrm{hre}(\mathrm{lasc}(\alpha)) = \mathrm{hre}(\alpha) - 1$ y por tanto $m - 1 < \mathrm{hre}(\mathrm{lasc}(\alpha))$. En virtud de esto y la hipótesis de inducción (sea considerada de nuevo (19)):
$$\mathrm{lasc}^m(\alpha) = \mathrm{lasc}^{m-1}(\mathrm{lasc}(\alpha)) \notin \mathrm{lcnf}(X)$$

Por el *segundo principio de inducción finita*, para todo número natural n es cierta $Q(n)$ y de ahí el corolario. □

5. Conclusiones

En este artículo hemos desarrollado un algoritmo: correcto, completo y eficaz; explicaremos esto.

La noción de *corrección* tiene que ver con el hecho de que cada aplicación de dak (resp. lasc), como fue detallada en la Definición 3.2 (resp. Definición 4.2), proporciona una fórmula (lógicamente) equivalente a su argumento, siendo la equivalencia una relación transitiva. Esta afirmación descansa en el Teorema 2.2 (resp. Teorema 2.3) que ha sido enunciado y no probado por ser muy conocidos en el ámbito de la lógica clásica.

Aquí la noción de *completitud* viene a indicar que la iteración en un número apropiado de veces de dak (resp. lasc) concluye aportando una fórmula perteneciente a $\mathrm{K}(\mathrm{A}(X))$ (resp. $\mathrm{lcnf}(X)$). Esto ha quedado nítidamente probado en el Corolario 3.7 (resp. Corolario 4.14).

La noción de *eficacia* es también incontrovertible dado que tanto el Corolario 3.7 como el Corolario 4.14 establecen el número mínimo de veces que las mencionadas funciones han de ser iteradas para obtener sus objetivos.

Por tanto, combinadas dak y lasc e itereadas el número adecuado de veces que se detalla, todo ello, proporciona un algoritmo óptimo para la transformación de una fórmula del lenguaje de este artículo en otra equivalente en forma normal conjuntiva; ése era el objetivo y se ha alcanzado. Así pues hemos contribuido a mejorar las exposiciones y las aplicaciones técnicas hasta donde las conocemos.

El contenido de este artículo será empleado en el futuro para actuar en el ámbito del problema SAT clásico, por ejemplo para preparar de forma óptima la aplicación del algoritmo de Davis&Putnam. Pretendemos comparar dicho algoritmo, basandonos en la optimización de este artículo y otras, con la deducción mediante secuentes.

Aunque tanto dak como lasc son usadas en iteraciones, la definición de ambas (cfr. Definición 3.2 y Definición 4.2) está basada claramente en la recursión. Esto las hace idóneas para ser usadas en una implementación funcional en lenguajes tipo Haskell. Con la intención de mostrar la viabilidad y efectividad de los avances teóricos expuestos en este artículo, hemos elaborado una implementación funcional para el lenguaje Haskell del algoritmo desarrollado. Damos a la vez un avance de la implementación del algoritmo de Davis&Putnam. El código puede ser consultado en la dirección https://github.com/ringstellung/CNF. Queda así justificado el objetivo fundamental del trabajo que plasmamos en su título.

Índice alfabético

Referencias

[1] BOURBAKI, N. *Théorie des Ensembles.* Eléments de Mathématique. Hermann, 1977.

[2] BÜNING, H.K. and LETTMANN, T. *Propositional Logic: Deduction and Algorithms.* Cambridge University Press, 1999.

[3] HILL, F.J. and PETERSON, G.R. *Introduction to Switching Theory and Logical Design.* John Wiley & Sons, 1981.

[4] JACKSON, P. and SHERIDAN, D. Clause form conversions for boolean circuits. In Hoos, H.H. and Mitchell, D.G., editors, *SAT 2004, LNCS 3542*, pages 183–198. Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[5] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics*, volume 19 of *Mathematical Logic and Foundations.* College Publications, 2009.

[6] TSEITIN, G.S. On the complexity of derivation in propositional calculus. In Bolç, L., Bundy, A., Siekmann, J., and Sloman, A., editors, *Automation of Reasoning. 2 Classical Papers on Computational Logic 1967–1970*, pages 466–483. Springer-Verlag, 1983.

[7] WHITESITT, J.E. *Boolean Algebra and its Applications.* Addison-Wesley Publishing Company, 1962.