Bild/Kern einer Matrix

Bild(A) ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ wenn $A\overset{\mathbb{R}^n}{x} = b \in \mathbb{R}^m$

→ Bild wird aufgespannt | erzeugt von den Spalten von A

Spaltenraum = Bild(A)

Zeilenraum = Bild(A^T)

Kern / Nullraum

$Ax = 0 \quad \forall x \in \text{Kern}(A)$

Bsp

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 13 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{GEV} \quad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_2 - b_1 \end{array}$$

$x_2 \quad x_4$ frei

KB: $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ erfüllt für $\underline{b} = \underline{0}$ ✓

Lösung $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{0}$

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

Wähle $x_2 = 1,\ x_4 = 0$ spezielle Lsg: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = 0,\ x_4 = 1$ spezielle Lsg: $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Erzeugenden System (ES)

Def Ein linearer Raum V heisst **endlich-dimensional**, wenn es $v_1, \dots, v_n \in V$ gibt (endliche Menge), so dass $v_1, \dots, v_n$ erzeugend für V sind.

Minimales Erzeugendensystem

aufgespannt durch kleinstmögliche Anzahl Vektoren

Fundamentalsatz der linearen Algebra

$$\underline{\underline{A}} = \overset{k}{\boxed{\quad\quad\quad}}\ n$$

① $\dim[\text{Kern}(A)] + \dim[\text{Bild}(A^T)] = k$

$\dim[\text{Kern}(A^T)] + \dim[\text{Bild}(A)] = n$

② $\mathrm{Kern}(A) \perp \mathrm{Bild}(A^T)$

Menge an Vektoren

egal welche Vektoren man aus diesen Mengen nimmt, ihr Skalarprodukt ist 0

$\mathrm{Kern}(A^T) \perp \mathrm{Bild}(A)$

weil $\mathrm{Skalar}^T = \mathrm{Skalar}$

Beweis: $\mathrm{Kern}(A) = \{\underline{x} \mid \underline{A}\underline{x} = \underline{0}\}$

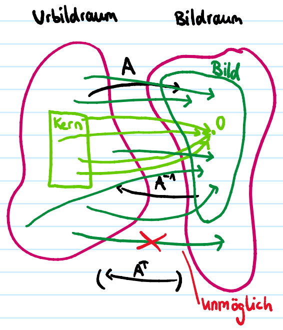
$\mathrm{Bild}(A^T) = \{\underline{y} \mid \underline{A}^T\underline{z} = \underline{y}\}$

$$\Rightarrow \langle \underbrace{x}_{\in \mathrm{Kern}(A)}, \underbrace{y}_{\in \mathrm{Bild}(A^T)} \rangle = x^T y = \underbrace{x^T A^T z}_{\text{Skalar}} = (z^T \underbrace{Ax}_{0})^T$$

$$= z^T \cdot 0 = 0$$

Bild/Kern eines lin. Abbildung

Bildraum $\supseteq$ Bild(A)



A^T nimmt alle Elemente des Bildraumes und bildet sie ab.

Bsp

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Urbildraum dim = 4
Bildraum dim = 3

GEV →
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

$x_4 = s \in \mathbb{R}$
$x_3 = t \in \mathbb{R}$
$x_2 = \frac{3s-3t}{2}$
$x_1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} = \frac{t}{4} - \frac{3s}{4}$

Bild 2D
=> Kern 2D

$$\mathrm{Kern}(A) = \left\{ \frac{1}{4} \begin{bmatrix} t-3s \\ 6s-6t \\ 4t \\ 4s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{4} t \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} s \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Bild(A)

$$b = Ax = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \mathrm{ES}$$

→ minimales ES = Basis → Spalten mit Pivot-Elementen

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Bem dim Bild(A) = 2, aber dim Bildraum = 3