Analysis I & II

HS20/FS21 ETH Zürich
Prof. E. Kowalski & Prof. T. Rivière

Robin Sieber
rosieber@ethz.ch

16. August 2021

1 Grundlagen

1.1 Quantoren

$\forall$ für alle
$\exists$ es existiert ein
$\nexists$ es existiert kein
$\exists!$ es existiert genau ein

1.2 Logik

$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B (incl. OR)
$A \Rightarrow B$	A impliziert B
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann wenn B

$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A) \equiv (\neg A \vee B)$
$(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

1.3 Mengenoperationen

$x \in A$	Element von
$A \subset B$	Teilmenge von
$A \cap B$	Durchschnitt
$A \cup B$	Vereinigt
$A \cap B = \emptyset$	Disj. Vereinigung
$A \setminus B$	Differenz
$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	Sym. Differenz
A^c	Komplementär
$[a,b]$	Abgeschl. (inkl.)
$(a,b),\ ]a,b[$	Offen (exkl.)

1.4 Supremum und Infimum

- Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist **nach oben beschränkt**, falls $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in A : a \leq b$, wobei b eine **obere Schranke** von A ist
- Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist **nach unten beschränkt**, falls $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in A : a \geq b$, wobei b eine **untere Schranke** von A ist
- $\sup(A) :=$ „kleinste obere Schranke“ mit $\sup(\varnothing) := -\infty$
- $\inf(A) :=$ „grösste untere Schranke“ mit $\inf(\varnothing) := \infty$
- $\sup(A) \in A \Rightarrow \max(A) = \sup(A)$
- $\inf(A) \in A \Rightarrow \min(A) = \inf(A)$
- Menge hat kein Max/Min, falls unbeschränkt oder offen

Beispiele

- $\Omega = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \sup(\Omega) = 1 \qquad \inf(\Omega) = 0$
- *$[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ und (a,b) mit $a < b$*
  a ist jeweils das Infimum und b das Supremum

1.5 Binomialkoeffizienten

- **Allgemein** ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{C}$)

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

- **Kombinatorik** ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $n \geq k$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- **Rekursive Relation** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

1.6 Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.7 Summen und Produkte

1.7.1 Teleskopsummen

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

1.7.2 Arithmetische Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n-k) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(Induktion)}$$

1.7.3 Fakultät

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! := 1$$

1.7.4 Gammafunktion

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

1.7.5 Weitere:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.8 Polynomdivision

- Meistens durch NST des Polynoms teilen, da kein Rest übrig bleibt
- NST durch Raten (Ordnung +2) bzw. Mitternachtsformel (Seite 1 Kapitel 1.6) herausfinden

Beispiel

$$\begin{array}{l} (\,-2x^2 \;\; -x-1) \div (x-1) = \,-2x-3+\frac{-4}{x-1} \\ \underline{\;\;2x^2 - 2x\;\;} \\ \qquad -3x-1 \\ \qquad \underline{\;\;3x-3\;\;} \\ \qquad\quad -4 \end{array}$$

1.9 Partialbruchzerlegung

Nützlich um Integrale der Form $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \mathrm{d}x$ zu berechnen

1. Polynomdivison (falls $n > m$) mit Rest (ganzrational + echt gebrochen)
2. Nullstellen von $Q_m(x)$ berechnen
3. Nullstellen ihrem Partialbruch zuordnen
   - reelle r-fache Nullstelle x_0

$$\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_0)^r}$$

   - komplexe r-fache Nullstelle

$$\frac{A_1 x + B_1}{(x^2+2ax+b)} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+2ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_r x + B_r}{(x^2+2ax+b)^r}$$

4. Gleichung aufstellen
5. Trick: Nullstellen einsetzen und so die Zähler einfacher Nullstellen bzw. höchster Nullstellen berechnen

   Beispiel

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)} \qquad x = A(x-1) + B(x+1)$$

$$(x_0 = 1) \qquad 1 = 0 + 2B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$(x_1 = -1) \qquad -1 = -2A + 0 \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

6. Koeffizientenvergleich

Anmerkung

i) Die allgemeine Stammfunktion von $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ist im Kapitel 7.2.4 auf Seite 8 zu finden

1.10 Vollständige Induktion

Predicate Logic: $(P(n_0) \wedge \forall n\ (P(n) \to P(n+1))) \Rightarrow \forall n\ P(n)$
Zu beweisen: Aussage $A(n)$ ist wahr, $\forall n \geq n_0 \quad n \in \mathbb{N}$

- **Induktionsverankerung:** Beweise $A(n_0)$ direkt
- **Induktionsannahme:** Nimm an dass $A(n)$ für **ein** $n \geq n_0$ gilt
- **Induktionsschritt:** Beweise $A(n+1)$ mit der Induktionsvoraussetzung. Daraus folgt dann $A(n) \quad \forall n \geq n_0$

Beispiel
Zu zeigen: $u(n) = 11^n - 1$ durch 10 teilbar $\forall n \geq 1$

- *Induktionsanfang $n_0 = 1 \quad u(1) = 11 - 1 = 10$ ✓*
- *Induktionsschritt $n \to n+1$*

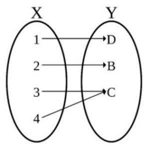
$$\begin{aligned} u(n+1) &= 11^{n+1} - 1 \\ &= 11 \cdot 11^n - 1 \\ &= (10+1)11^n - 1 \\ &= \underbrace{10 \cdot 11^n}_{\text{durch 10 teilbar}} + \underbrace{11^n - 1}_{u(n)} \end{aligned}$$

$u(n)$ ist aufgrund der Voraussetzung durch 10 teilbar, somit ist $u(n)$ durch 10 teilbar $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$ ■

1.11 Surjektiv, Injektiv, Bijektiv

1.11.1 Surjektiv

Jedes Element aus dem Wertebreich wird mind. einmal getroffen (es gilt: $\mathbf{X} \geq \mathbf{Y}$)

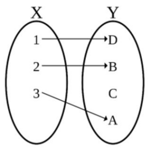


- $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

Lässt sich für stetige f oft mit dem Zwischenwertsatz (9.1, Seite 11) zeigen. Zuerst zeigen, dass $f(X) =]-\infty, \infty[$.

1.11.2 Injektiv

Jedes Element aus dem Wertebreich wird höchstens einmal getroffen (es gilt: $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$)



- $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Eine stetige Funktion ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton (steigend/fallend) ist. $f' \geq 0$ bzw. ≤ 0

1.11.3 Bijektiv

Jedes Element aus dem Wertebereich wird genau einmal getroffen
Bijektive Funktionen sind surjektiv und injektiv (es gilt: $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$)

- $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$

1.12 Skalarprodukt

Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Positive Definitheit: $\forall v \in V : \begin{cases} \langle v, v \rangle \geq 0 \\ \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \end{cases}$
2. Bilinearität:
   - $\forall v, w, w' \in V : \langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$
   - $\forall v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R} : \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$
3. Symmetrie: $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

Diese Bedingungen gelten nur für $\mathbb{R}$-Vektorräume

1.13 Normen

Eine Norm auf V ist eine Abbildung $\| \bullet \| : V \to \mathbb{R}$ mit:

1. Positive Definitheit:
   $\forall v \in V : \begin{cases} \|v\| \geq 0 \\ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \end{cases}$
2. Homogenität: $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. Dreiecksungleichung: $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Äquivalenz der Normen
Jegliche zwei Normen $\|\cdot\|^{(1)}, \|\cdot\|^{(2)}$ sind äquivalent, d.h. $\exists C > 0$ s.d. $\frac{1}{C}\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq C\|x\|^{(1)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
Induzierte Normen
Man sagt, dass die Norm von einem Inneren Produkt induziert wird, wenn $\forall v \in V : \|v\|^2 = \langle v, v \rangle$

Beispiele für Normen für $V = \mathbb{R}^n$:

- *Maximumnorm:* $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$
- *Euklid'sche Norm:* $\|v\|_2 = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2}$
- *p-Norm:* $\|v\|_p = \left(|v_1|^p + |v_2|^p + \dots + |v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{N}$

Beispiele für Normen für $V = C^0(a, b)$:

- *Maximumnorm:* $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|, \ x \in (a, b)$
- *Lp-Norm:* $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{N}$

1.14 metrische Räume

Ein metrischer Raum (X,d) ist eine Menge X mit einer Abstandsfkt. $d : X \times X \to \mathbb{R}$

1. Positive Definitheit: $\forall x, y : \ d(x, y) \geq 0 \ \&\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Symmetrie: $\forall x, y \in X : \ d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreiecksungleichung: $\forall x, y, z \in X : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.15 Vektoren

(Euklidscher) Betrag
$|x| = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$
Dreiecksungleichung
$|x + y| \leqslant |x| + |y|$
(Euklidsches) Skalarprodukt
$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}^n$ für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$
Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha \cdot \hat{n}$$

2 Folgen

2.1 Konvergenzverhalten von Folgen

2.1.1 Definition der Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a für $n \to \infty$, falls
$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
Man schreibt $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, a ist der Grenzwert. Wenn der Limes existiert, dann ist die Folge **konvergent**, sonst ist sie **divergent**.
Nicht konvergieren heisst nicht, dass eine Folge **divergiert**. Eine Folge kann weder konvergieren noch divergieren.

2.1.2 Arten von Folgen

- **Arithmetische Folge:** konstante Abstände zwischen Glieder, z.B. $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **Geometrische Folge:** konstante Verhältnisse zwischen Glieder, z.B. $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$
- **Cauchy-Folge:** Abstände der Glieder werden beliebig klein, z.B. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$
  Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge!
- **Teilfolgen:** eine neue Folge, die entsteht, wenn Folgenglieder der ursprüng. Folge weggelassen werden, bspw. $b_n := a_{2n}$.
  Ein **Häufungspunkt (HP)** einer Folge a_n ist ein Punkt, der ein Grenzwert einer **unendlichen Teilfolge** von a_n ist. Falls eine Folge mehrere HP hat, dann kann die Folge nie konvergieren. Der $\lim\sup_{n \to \infty}(a_n)$ berechnet den grössten HP.
- **implizite Folgen:** von der Form $a_{n+1} = f(a_n)$. Falls die Folge beschränkt und monoton ist, dann existiert ein Grenzwert (Prop. aus VL). Somit muss man immer Monotonie und Beschränktheit beweisen (meist über Induktion). Grenzwerte sind i.d.R. schwierig zu berechnen, es gilt aber:
  $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(a_{n+1}) = a$

2.1.3 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^s} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{Q}^+$$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0 \quad \forall q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

2.1.4 Berechnen von Grenzwerten

Der Limes ist ein linearer Operator und kommutiert mit Multiplikation/Division. $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty}(a_n) + \beta \lim_{n\to\infty}(b_n)$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)$

- **Brüche:** Durch die grösste Potenz des Zählers/Nenners teilen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 7n}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{7}{n^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- **Wurzelterme:** Mit der 3. binomischen Formel erweitern

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad \| \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

- **Sonstige Terme:** Falls a_n monoton (fallend/steigend) ist, dann suche eine untere Schranke $c_1(n) \le a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und eine obere Schranke $c_2(n) \ge a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} c_1(n) = \lim_{n\to\infty} c_2(n) = c$. Es gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

$$a_n = \sqrt[n]{u^n + v^n} \quad u, v \in \mathbb{R}_{\ge 0} \quad u > v$$

Untere Schranke: $a_n \ge \sqrt[n]{u^n} = u = c_1(n)$

Obere Schranke: $a_n \le \sqrt[n]{2u^n} = \sqrt[n]{2}u = c_2(n)$

$$\lim_{n\to\infty} c_1(n) = \lim_{n\to\infty} c_2(n) = u \to \lim_{n\to\infty} a_n = u$$

3 Reihen

3.1 Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q} \qquad q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

3.2 Allgemeine harmonische Reihe (Dirichlet-Reihe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert für} & s > 1 \\ \text{divergiert für} & s \le 1 \end{cases}$$

3.3 Binomische Reihe

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k \qquad \alpha \in \mathbb{C} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Anmerkungen

i) Konvergenz, falls $x > 0$ und $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$

ii) Die Definition der allgemeinen Binomialkoeffizienten ist im Kapitel 1.5 auf Seite 1

3.4 Cauchy-Produktformel

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

3.5 Konvergenzkriterien

3.5.1 Nullfolgenkriterium

Falls a_n keine Nullfolge bildet, so divergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

3.5.2 Leibnitzkriterium

Falls a_n eine monoton fallende Nullfolge bildet, dann konvergiert auch die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Zu zeigen:

i) $a_n \ge 0$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

iii) $a_{n+1} - a_n \le 0$ oder $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ (monoton fallend)

3.5.3 Majorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \le b_n \ \forall n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

3.5.4 Minorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine divergente Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \ge b_n \ \forall n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (meistens ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ die harmonische Reihe)

Wann Major-, wann Minorantenkrit. verwenden:

- *relative Ordnung der Reihe = (Grad Nenner) - (Grad Zähler)*
- *Faustregel:* $\begin{cases} \textit{rel. Ordnung} > 1 & \to \textit{Majorantenkrit} \\ \textit{rel. Ordnung} \le 1 & \to \textit{Minorantenkrit} \end{cases}$

3.5.5 Quotientenkriterium

$$Q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & Q > 1 \\ \text{konvergiert absolut} & Q < 1 \\ \text{keine Aussage} & Q = 1 \end{cases}$$

3.5.6 Wurzelkriterium

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & L > 1 \\ \text{konvergiert absolut} & L < 1 \\ \text{keine Aussage} & L = 1 \end{cases}$$

3.5.7 Integralkriterium

Sei $p \in \mathbb{Z}$, $f : [p, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend und das Integral $\int_p^\infty f(x)\mathrm{d}x$ existiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ und es gilt die Abschätzung

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \le \int_p^\infty f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

3.5.8 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert absolut, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert. Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz.

3.5.9 Normale Konvergenz (Funktionenreihe)

Eine Funktionenreihe $\sum f_n$ konvergiert normal, falls $\exists b_n \forall n f_n(x) \le b_n$ und die Reihe $\sum b_n$ konvergiert, wobei b_n unabhängig von x ist. *Bem.:* $\exp, \sin$ konvergieren nicht normal auf ganz $\mathbb{R}$, da dies gleichm. Schranken über alle reellen Zahlen implizieren würde (aus MC).

3.6 Potenzreihe

Eine Potenzreihe hat folgende Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad x_0 : \text{Entwicklungspunkt}$$

3.6.1 Wichtige Potenzreihen (Entwicklungspunkt P = 0)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Konvergenzradien der Pozenzreihen

- *für e^x, $cos(c)$, $sin(x)$, $cosh(x)$ und $sinh(x)$ ist der Konvergenzradius ∞, aufgrund der Fakultät im Nenner.*
- *$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $a \in \mathbb{C}$*

3.6.2 Konvergenzradius

Sei R der Konvergenzradius einer Potenzreihe. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut $\forall x \in \mathbb{C}$, $|x - x_0| < R$ und divergiert für $|x - x_0| > R$. Der Rand $|x - x_0| = R$ muss separat betrachtet werden.
Berechnungsarten:

- $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
- $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

4 Funktionen

4.1 Berechnen von Grenzwerten

4.1.1 Dominanzen

Die Sachen die links stehen wachsen langsamer als die Sachen die rechts stehen:
$\log(n) \prec \log^2(n) \prec \cdots \prec n^{\frac{1}{3}} \prec \sqrt{n} \prec n \prec n^2 \prec \cdots \prec e^n \prec n! \prec n^n$

4.1.2 Brüche

Durch die grösste/kleinste Potenz des Zählers/Nenners teilen

4.1.3 Beträge

Beträge vereinfachen indem man sich überlegt, ob das Argument im Betrag grösser bzw. kleiner 0 ist

Beispiel

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} (2+x) = 4$$

4.1.4 Wurzelterme

Wurzelterme kann man meistens mithilfe der 3. binomischen Formel erweitern

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

4.1.5 Beschränktheit einer Funktion

Man kann die Beschränktheit einer Funktion (v.a. trig. Fkt.) ausnutzen um Grenzwerte zu berechnen

Beispiel

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

4.1.6 Sandwich-Theorem

Seien $(x_n), (y_n), (z_n)$ Folgen so dass $x_n \leq y_n \leq z_n$
mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c$, dann muss auch $\lim_{n\to\infty} y_n = c$

Beispiel *siehe 2.1.4 "Sonstige Terme"*

4.1.7 Potenzreihen

Falls die Potenzreihe der Funktion bekannt ist, kann man sie durch die Potenzreihe darstellen

4.1.8 l'Hospitalsche Regel (bei Folgen nicht verwendbar!)

Für $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty$ Mögliche Umformungen: $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$ oder $f - g = \frac{1}{1/f} - \frac{1}{1/g} = \frac{1/g - 1/f}{1/(f\cdot g)}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

4.1.9 "exp-log" Methode

$$\lim_{x\to x_0} g(x)^{h(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0} h(x)\cdot\ln(g(x))\right)$$

Beispiel

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} (1+3\sin(x))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3\sin(x))}{x}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x)}{1+3\sin(x)}\right)\\ &= e^3\end{aligned}$$

Trick

$$\exp(\lim_{x\to 0} \ln(x)\cdot x) = \exp(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}})$$

$$(= \exp(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}) = e^0 = 1)$$

4.1.10 Substitution

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{u\to u_0} f(u) \quad \text{mit } u_0 = \lim_{x\to x_0} u(x)$$

Beispiel

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) \qquad u(x) = -\ln(x) \to x = e^{-u}$$

$$u_0 = \lim_{x\to 0^+} -\ln(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{u\to\infty} -ue^{-u} = 0$$

4.2 Stetigkeit

4.2.1 Epsilon-Delta-Kriterium

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Wie finde ich zu jedem $\varepsilon > 0$ das passende δ?

1. Beginne mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ und finde einen Ausdruck so dass: $|f(x) - f(x_0)| \leq \ldots|x - x_0|\ldots < \varepsilon$
2. Setze ein: $|x - x_0| < \delta$
3. $|f(x) - f(x_0)| \leq \ldots|x - x_0|\ldots < \ldots\delta\ldots < \varepsilon$
4. Benutze $\ldots\delta\ldots < \varepsilon$ um $\delta(x_0, \varepsilon)$ zu finden
5. Zeige, dass wirklich $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

4.2.2 Grenzwert-Kriterium

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{!}{=} f(x_0)$$

Anmerkung

i) Wenn nichts anderes verlangt wird, wird die Stetigkeit meistens mit dem Grenzwert-Kriterium gezeigt
ii) ***Achtung:*** *Bei einem $x_0 \neq \infty$ oder $x_0 \neq -\infty$ muss der Grenzwert von beiden Seiten berücksichtigt werden!*

4.2.3 Stetige Funktionen

- Polynome
- rationale Funktionen (Nenner $\neq 0$)
- trig. Funktionen
- hyperbolische Funktionen
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Komposition von stetigen Funktionen

4.2.4 Lipschitz Stetigkeit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad L \geq 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Anmerkung

i) Lipschitz-stetige Funktionen sind insbesondere stetig
ii) Falls f diffbar, dann: $L = \max_x |f'(x)|$

Beispiel. *$f(x) = x^2$ ist Lipschitz-stetig auf $[0, 1]$, weil $L = \max_x |f'(x)| = 2$, aber f ist <u>nicht</u> Lip.-stetig auf $\mathbb{R}$, weil $L = \max_x |f'(x)| = |2x| = \infty$*

4.2.5 topologische Stetigkeit

Falls für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist, dann heisst die Funktion topologisch stetig.

4.2.6 Stetigkeit überprüfen (1-dim)

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < p \\ f_2(x) & x > p \\ a & x = p \end{cases} \qquad \lim_{x\to p^-} f_1(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to p^+} f_2(x) \overset{!}{=} a$$

4.2.7 Stetigkeit überprüfen (n-dim)

Der Limes $\lim_{x\to x_0} f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$ muss existieren und eindeutig sein.

Im $\mathbb{R}^2$ den Polarkoordinatentrick nutzen, um jede Richtung auf einmal betrachten zu können ($x \mapsto r\cos(\theta), y \mapsto r\sin(\theta)$).

Anmerkungen

i) Falls $n = 2$: Transformiere x und y in Polarkoordinaten, φ muss sich dabei rauskürzen, da der Limes sonst nicht eindeutig ist

ii) Falls $n > 2$: Nur zeigen, dass der Grenzwert nicht eindeutig ist, sonst zu kompliziert

4.3 Punktweise und gleichmässige Konvergenz

4.3.1 Punktweise Konvergenz

Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen ihre Grenzfunktion f, wenn für jedes x im Definitionsbereich gilt: $f_n(x) \to f(x)$. Die Grenzfunktion f muss dabei *nicht* stetig sein.

Beispiel

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}: \quad f_n(x) = x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

4.3.2 Gleichmässige Konvergenz

Eine Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen ihre Grenzfunktion f, falls gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \le b_n$$

wobei die Folge b_n unabhängig von x ist und gegen 0 konvergiert. Sind die Folgenglieder f_n stetig, ist in diesem Fall auch die Grenzfunktion f stetig.

Gleichmässige Konv. ($\exists\epsilon\forall x$) $\Rightarrow$ Punktweise Konv. ($\forall x\exists\epsilon$)

5 Differentialrechnung

5.1 Eindimensionale Differentialrechnung

Eine Funktion heisst differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert (und somit eindeutig ist) $\to$ punktweise Eigenschaft

5.1.1 Regeln

- **Produktregel**

$$(f \cdot h)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

- **Kettenregel**

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(Trick: $a^x = e^{x\ln(a)} = e^{\ln(a^x)}$)

- **Umkehrregel**

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

- **Potenzregel**

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

- **Log. Ableitung**

$$(\ln(f))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

5.1.2 Entwicklung

- **Taylorpolynom**

$$T_N f(x; x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- **Fehlerabschätzung**

$$R_N(x; x_0) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1} \qquad \xi \in [x_0, x]$$

- **Taylorreihe**

$$Tf(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Anmerkung

i) Falls die Taylorreihe mit der Potenzreihe übereinstimmt, nennt man die Funktion analytisch und es gilt $Tf(x, x_0) = f(x)$

Konvexität: $f''(x) \ge 0$ (siehe auch 9.4, Seite 11)

5.2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

5.2.1 Richtungsableitung

$$D_v f(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h} \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

Partielle Ableitung: Achsenrichtungen $x_1, \ldots, x_n$ einsetzen.

Die Richtungsableitung kann auch mithilfe des Gradienten berechnet werden. Es gilt:

- $\partial_e f(x_0) = \vec{e} \cdot \nabla f(x_0)$ wobei $\vec{e}$ normiert ist (Länge 1)

5.2.2 Differenzierbarkeit

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in U$ Vektoren und $Jf(\mathbf{x})$ eine lineare Abbildung. Die Funktion (Skalarfeld) $f : U \to \mathbb{R}$ ist (total) differenzierbar in $\mathbf{x}_0$, falls der folgende Grenzwert existiert und eindeutig ist

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Jf(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||} \\ &= \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - Jf(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{||\mathbf{h}||} \end{aligned}$$

Anmerkungen

i) $Jf(\boldsymbol{x})$ entspricht der Jacobi-Matrix, also der ersten totalen Ableitung bezüglich der Standartbasen von $\mathbb{R}^n$ (und $\mathbb{R}^m$ für Vektorfelder)

ii) $\boldsymbol{h}$ kann man sich als kleine Änderung vorstellen (im Grenzwert wird $\boldsymbol{h}$ ein Differential)

iii) Die Funktion ist (total) differenzierbar, falls sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches (total) differenzierbar ist

iv) Meistens schreibt man nur differenzierbar und meint damit totale

v) Alle partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig in $x_0 \Rightarrow$ die totale Abletiung $df(x_0) = (\frac{\partial f}{x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{x_n})$ existiert. (Achtung: $\not\Leftarrow$)

5.2.3 Vorgehen um Differenzierbarkeit zu zeigen

Funktionen die aus diffbaren Funktionen besteht, darf man als diffbar annehmen, somit muss man meistens nur einen Punkt $\mathbf{x}_0$ auf (totale) Differenzierbarkeit überprüfen

1. Partielle Ableitungen über die Definition im Punkt $\mathbf{x}_0$ berechnen. Falls die partiellen Ableitungen nicht existieren, dann ist die Funktion nicht (total) differenzierbar
2. Falls die partiellen Ableitungen stetig sind, dann ist auch die Funktion (total) differenzierbar
3. Die lineare Abbildung $Jf(\mathbf{x}_0)$ im Punkt $\mathbf{x}_0$ berechnen
4. $Jf(\mathbf{x}_0)$ in die Definition einsetzen und Grenzwert berechnen. Die Funktion ist (total) differenzierbar in $\mathbf{x}_0$, falls die Definition erfüllt ist

5.2.4 Gradient

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} (= df(x))$$

5.2.5 Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix)

$$J_f(x) = \mathrm{d}f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

5.2.6 Hesse-Matrix (für Skalarfelder)

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad \text{(symmetrisch!)}$$

5.2.7 Implizite Differentiation

Erfüllt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung $F(x, f(x)) = 0$ und gilt $F_y(x_0, y(x_0)) \neq 0$, dann ist die Ableitung von f gegeben durch

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

Beispiel

$$F(x, y) = x - 2y^3 - 3y^5 - y = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -6y^2 - 15y^4 - 1$$
$$\rightarrow y'(x) = \frac{1}{6y^2 + 15y^4 + 1}$$

Anmerkung

i) Falls f mehrdimensional ist, dann wende das implizite Funktionentheorem an (Kapitel 9.8 Seite 11)

5.2.8 Allgemeine Kettenregel

Seien $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^L$ und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^m$ differenzierbare Funktionen, dann ist die Ableitung von $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ im Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_\mathbf{p} = D\mathbf{g}_{\mathbf{f}(\mathbf{p})} \cdot D\mathbf{f}_\mathbf{p}$$
$$J_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{p}) = J_\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{p})) \cdot J_\mathbf{f}(\mathbf{p})$$

5.2.9 Taylorentwicklung

- **Taylorpolynom 2-ter Ordung**

$$T_2 f(x, a) = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T H_f(a)(x - a)$$

- **Taylorpolynom 3-ter Ordung**

$$\begin{aligned} T_3 f(x, a) = f(a) &+ \triangle x_1 \partial_{x_1} f(a) + \triangle x_2 \partial_{x_2} f(a) \\ &+ \frac{1}{2}(\triangle x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} f(a) + \triangle x_1 \triangle x_2 \partial_{x_1 x_2} f(a) \\ &+ \frac{1}{2}(\triangle x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} f(a) + \frac{1}{6}(\triangle x_1)^3 \partial_{x_1 x_1 x_1} f(a) \\ &+ \frac{1}{2}(\triangle x_1)^2 \triangle x_2 \partial_{x_1 x_1 x_2} f(a) \\ &+ \frac{1}{2}\triangle x_1 (\triangle x_2)^2 \partial_{x_1 x_2 x_2} f(a) \\ &+ \frac{1}{6}(\triangle x_2)^3 \partial_{x_2 x_2 x_2} f(a) \end{aligned}$$

- **Taylorpolynom n-ter Ordnung**

$$T_n f(x, a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(x) \Bigg|_{x=a}$$

Anmerkungen

i) Δx_i bezeichnet die Differenz $(x_i - a_i)$

ii) Es wird zuerst die Funktion partiell abgeleitet und erst danach am Punkt a ausgewertet

iii) Die Tangentialebene ist das Taylorpolynom erster Ordnung

5.2.10 Zusammenhänge & Implikationen

- f stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ f differenzierbar $\Longrightarrow$ f partiell differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig
- f partiell diff'bar in x_0 + part. Abl. stetig an Stelle x_0 $\Longrightarrow$ f diff'bar in x_0
- f partiell diff'bar in x_0 + part. Abl. stetig in Umgebung von x_0 $\Longrightarrow$ f stetig diff'bar in x_0

5.3 Extremwerte ohne Nebenbedingungen

5.3.1 Eindimensionale Funktion

1. **Kandidaten**
   - Intervallgrenzen (globale Extrema)
   - $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$
2. **Art von Extrema**
   - (lokales) Maximum: $f''(x_0) < 0$
   - (lokales) Minimum: $f''(x_0) > 0$
3. **Vergleich lokale und globale Extrema**

5.3.2 Mehrdimensionale Funktion

1. **Kandidaten**

$$\nabla f(x_0) \stackrel{!}{=} 0$$

2. **Art von Extrema**
   - $H_f(x_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ *Maximum*
   - $H_f(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ *Minimum*
   - $H_f(x_0)$ indefinit $\Rightarrow$ *Sattelpunkt*
   - $H_f(x_0)$ semidefinit $\Rightarrow$ *unbekannt*
   - $\not\Leftarrow$: es könnte auch semidefinit sein.

   Für eine symmetrische reelle 2×2-Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und } \det(A) = a \cdot d - b \cdot c \text{ gilt:}$$

   - *positiv definit* $\Longleftrightarrow a > 0$ und $\det(A) > 0$
   - *negativ definit* $\Longleftrightarrow a < 0$ und $\det(A) > 0$
   - *indefinit* $\Longleftrightarrow \det(A) < 0$ (Sattelpunkt)
   - *semidefinit* $\Longleftrightarrow \det(A) = 0$
   - 0-*Matrix* ist pos/neg <u>semi</u>-definit $\Rightarrow$ keine Aussage möglich

Anmerkungen

i) Definitheit von Matrizen Kapitel 11.8.4 (Seite 15)

ii) Falls $H_f(x_0)$ semipositiv bzw. seminegativ definit ist, kann keine Aussage zur Art des Extremums getroffen werden

iii) Wenn $H_f(x)$ negativ definit (positiv definit) ist, dann ist f konkav (konvex)

5.4 Extremwerte mit Nebenbedingungen

$$\nabla L(\mathbf{x}_0) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \qquad \text{mit } L = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

φ_i : Nebenbedingungen $\qquad \lambda_i$: Lagrange-Multiplikatoren

5.4.1 Vorgehen

1. Nebenbedingungen zeichnen
2. Menge sollte abgeschlossen und beschränkt sein $\rightarrow$ existiert ein Maximum/Minimum (wegen Extremumsatz) (die Funktion sollte natürlich auf dem Bereich auch stetig sein)
3. Gradienten berechnen
   i) innere Punkte: $\nabla f(\mathbf{x}_0) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ ($\mathbf{x}_0$ muss Element der Menge sein)
   ii) Randpunkte: $\nabla L \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$
4. Löse Gleichungssystem mit Nebenbedingungen
5. Kandidaten der Extrema + Eckpunkte ($\nexists$ Ableitung) aufschreiben
6. Kandidaten in $f(\mathbf{x})$ einsetzen und vergleichen

Beispiel

$$f(x, y, z) = 4y - 2z \qquad \varphi_1 = x^2 + y^2 - 1 \qquad \varphi_2 = 2x - y - z - 2$$

1. Nebenbedingungen zeichnen

2. $f(x, y, z)$ ist stetig und die Menge M ist beschränkt und abgeschlossen $\rightarrow \exists$ Max/Min

3. keine inneren Punkte (schräg im Raum liegende Ellipse)

$$\nabla \varphi_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla \varphi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Gleichungssystem lösen $\qquad \nabla f = \lambda_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_2 \nabla \varphi_2$

$$\begin{array}{rl|rl} I: & 0 = 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 & IV: & 1 = x^2 + y^2 \\ II: & 4 = 2\lambda_1 y - \lambda_2 & & \\ III: & 2 = \lambda_2 & V: & 2 = 2x - y - z \end{array}$$

$$\lambda_1 = \pm\sqrt{13} \qquad \lambda_2 = 2 \qquad x = \mp\tfrac{2}{\sqrt{13}}$$
$$y = \pm\tfrac{3}{\sqrt{13}} \qquad z = \mp\tfrac{7}{\sqrt{13}-2}$$

5. *Punkte aufschreiben*

$$P_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-7}{\sqrt{13}} - 2\right)$$
$$P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right)$$

6. *Punkte vergleichen*

$$f(P_1) = \frac{26}{\sqrt{13}} + 4$$
$$f(P_2) = \frac{-26}{\sqrt{13}} + 4$$

Somit ist P_1 ein Maximum und P_2 ein Minimum

Anmerkungen

i) Es kann sein, dass der Rand nicht durch Nebenbedingungen darstellbar ist, dann kann man die Funktion direkt für den Rand auswerten und die Funktionswerte vergleichen

ii) Man kann den Rand auch parametrisieren und die Parametrisierung in $f(\boldsymbol{x})$ einsetzen. Jetzt kann man wie gewohnt die Ableitung gleich 0 setzen und die Kandidaten berechnen vergleichen Randpunkte nicht vergessen

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

6.1 Separierbare Differentialgleichung

Falls eine DGL folgende Form hat, dann gilt

$$y' = p(y)q(x) \rightarrow \int \frac{1}{p(y)} \mathrm{d}y = \int q(x) \mathrm{d}x$$

Wenn man die Integrale löst, erhält man eine implizite Gleichung. y explizit darzustellen kann schwierig sein, zumal man die Lösungsmenge nicht verändern darf

Beispiel

$$yy' + 2 = 0 \rightarrow \int y\,dy = \int -2\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -2x + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$
$$y = \pm\sqrt{-4x + C_2}$$

6.2 Lineare Differentialgleichung

Eine lineare DGL der n-ten Ordnung hat folgende Form

$$a_0 y^{(0)} + \cdots + a_n y^{(n)} = q(x)$$

Anmerkung

i) $q(x)$ bezeichnet die Inhomogenität

ii) Da die DGL linear ist, gilt für die Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

wobei y_h die homogene und y_p die partikuläre Lösung ist

6.2.1 Homogene Lösung ($q(x) = 0$)

1. Man setzt die Inhomogenität 0

$$a_0 y^{(0)} + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$$

2. Mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ folgt das charakteristische Polynom

$$\mathrm{Chp}(\lambda) = a_0\lambda^0 + a_1\lambda^1 + \cdots + a_n\lambda^n = 0$$

3. Nullstellen in den Ansatz einsetzen
   - λ_i k-fache reelle Nullstelle
   $$y_i(x) = x^0 e^{\lambda_i x}, \ldots,\ y_{i+k}(x) = x^{k-1}e^{\lambda_i x}$$
   - λ_i und λ_j reelle betragsmässig gleiche Nullstelle ($\lambda = \pm a$)
   $$y_i(x) = \cosh(ax),\ y_j(x) = \sinh(ax)$$
   - λ_i und λ_j komplexe Nullstelle ($\lambda = a \pm bi$)
   $$y_i(x) = e^{ax}\cos(bx),\ y_j(x) = e^{ax}\sin(bx)$$

4. Die einzelnen Teillösungen zusammensetzen ($C_i \in \mathbb{R}$)

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$$

6.2.2 Partikuläre Lösung

- **Ansatztabelle**
  Sollte man nur verwenden, wenn k = 0 (siehe unten), da sonst möglicherweise Fehler entstehen!
  Man muss den richtigen Anstatz für $y_p(x)$ finden

Rechte Seite $q(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
Ce^{ax}	Ae^{ax}
$C\cos(bx)$	$A\sin(bx) + B\cos(bx)$
$C\sin(bx)$	$A\sin(bx) + B\cos(bx)$
$C\cos(bx)e^{ax}$	$(A\sin(bx) + B\cos(bx))e^{ax}$
$C\sin(bx)e^{ax}$	$(A\sin(bx) + B\cos(bx))e^{ax}$
$a_nx^n + ... + a_1x + a_0$	$A_nx^n + ... + A_1x + A_0$
$(a_nx^n + ... + a_1x + a_0)e^{ax}$	$(A_nx^n + ... + A_1x + A_0)e^{ax}$
$(a_nx^n + ... + a_0)\sin(bx)$	$(A_nx^n + ... + A_0)\sin(bx)$ $+(B_nx^n + ... + B_0)\cos(bx)$
$(a_nx^n + ... + a_0)\cos(bx)$	$(A_nx^n + ... + A_0)\sin(bx)$ $+(B_nx^n + ... + B_0)\cos(bx)$
$(a_nx^n + ... + a_0)e^{ax}\sin(bx)$	$(A_nx^n + ... + A_0)e^{ax}\sin(bx)$ $+(B_nx^n + ... + B_0)e^{ax}\cos(bx)$
$(a_nx^n + ... + a_0)e^{ax}\cos(bx)$	$(A_nx^n + ... + A_0)e^{ax}\sin(bx)$ $+(B_nx^n + ... + B_0)e^{ax}\cos(bx)$

  Setze den Ansatz für $y_p(x)$ in die Gleichung ein, und mache ein Koeffizientenvgl. um die Parameter A, B, A_n, B_n, … in $y_p(x)$ zu finden $\rightarrow y_p(x)$

  Anmerkungen

  i) Falls man zwei Störterme hat, also $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$, macht man zwei Ansätze und man bekommt <u>zwei</u> part. Lösungen $y_{p_1}(x), y_{p_2}(x)$

  ii) Falls der Ansatz y_p ein Term hat, welcher bereits in $y_h(x)$ vorkommt, muss der Ansatz <u>mit x multipliziert</u> werden

- **Ansatz vom Typ der rechten Seite**
  $q(x)$ muss folgende Form haben ($\mu \in \mathbb{R}$)

$$q(x) = (b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)e^{\mu x}$$

  dann ist der Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \begin{cases} \frac{b_0}{\mathrm{Chp}^{(k)}(\mu)} x^k e^{\mu x} & m = 0 \\ (C_0 + \cdots + C_mx^m)x^k e^{\mu x} & m \neq 0 \end{cases}$$

  Der Ansatz ($m \neq 0$) in die DGL einsetzen und mit einem Koeffizientenvergleich, die Koeffizienten $C_0, \ldots, C_m$ berechnen. Den Fall $m = 0$ dürfen wir nicht verwenden, da nicht besprochen, kann aber als Kontrolle helfen.

  Anmerkungen

  i) k bezeichnet die Ordnung der NST von λ, falls $\lambda = \mu$, anders gesagt, k gibt an, wie oft μ als NS in der inhomogenen LSG vorkommt.

  ii) Falls die Inhomogenität $q(x) = q_1(x) + \cdots + q_r(x)$ aus mehreren Termen besteht, kann man die einzelnen Lösungen der Terme berechnen und diese dann zusammenaddieren $y_p(x) = y_1(x) + \cdots + y_r(x)$

  iii) Man kann $q(x)$ komplexifizieren ($q(x) = cos(x)/sin(x) \rightarrow \mu = i$) für die partikuläre Lösung gilt $y_p(x) = Re(z_p(x))$ (bei cos) oder $Im(z_p(x))$ (bei sin).
  Erinnere: $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$

  iv) Wenn möglich der Ansatz vom Typ der rechten Seite anwenden (oder Ansatztabelle), sonst Variation der Konstanten

- **Variation der Konstanten** (nicht besprochen in VL)
  Zuerst das folgende Gleichungssystem lösen

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \cdots & y_n^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{pmatrix}$$

  danach die Integrale ausrechnen (Konstanten nicht vergessen)

$$U_i = \int u_i(x)\mathrm{d}x$$

  und zum Schluss die Lösung für die inhomogene Gleichung bilden

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x)y_i(x)$$

  Anmerkung

  i) Die $y_i(x)$ sind die Einheitsvektoren des n-dimensionalen Lösungsraum der DGL (ohne Konstanten)

Beispiel

$$y''(x) + y = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \to y_h(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}$$

$$\to u_1 = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \qquad u_2 = 1$$

$$U_1 = \int -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \ln|\cos(x)| + C_1$$

$$U_2 = \int 1 dx = x + C_2$$

$$y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \ln|\cos(x)|\cos(x) + x\sin(x)$$

6.2.3 Anfangswertproblem (AWP)

Damit die Lösung der DGL eindeutig ist, müssen n-Anfangswerte für n-Freiheitsgrade gegeben sein $\to$ Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ bestimmen

Anmerkung

i) *Die Konstanten erst mit der* ***kompletten*** *Lösung $y(x)$ bestimmen (mit partikulärer Lösung)*

6.3 DGL-Systeme

6.3.1 Matrixexponential

Das Matrixexponential einer $n \times n$-Matrix ist über die Talyorentwicklung der Exponentialfunktion wie folgt definiert:

$$e^{Ax} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x^k}{k!} = I_n + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \ldots$$

Lösung des Matrixexponentials:

1. A ist nilpotent ($A^q = 0$ für $q \in \mathbb{N}$). Dann ist die Summe endlich und kann einfach berechnet werden.

2. A ist eine Diagonalmatrix. Dann gilt

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{a_1x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_nx} \end{pmatrix}$$

3. $A = VDV^{-1}$ ist diagonalisierbar. Dann gilt

$$e^{Ax} = Ve^{Dx}V^{-1}$$

6.3.2 Lösung von DGL-Systemen

Das Differentialgleichungssystem
$\dot{f}_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots a_{1n}f_n$
$\dot{f}_2 = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots a_{2n}f_n$
$\cdots$
$\dot{f}_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \cdots a_{nn}f_n$
kann in die Form

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = A \cdot F(t)$$

gebracht werden, wobei

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Lösung (mit Konstanter $C \in R^n$ ist

$$F(t) = e^{At} \cdot C$$

7 Integralrechnung

7.1 Integraleigenschaften

$$\int C \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f_1(x) + f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-a}^a g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x \text{ für g(x) gerade}$$

$$\int_{-a}^a u(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ für u(x) ungerade}$$

$$\int_a^{a+k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x \text{ für f(x) k-periodische Fkt}$$

7.2 Integralrechnung einer Variablen

7.2.1 Riemannsche Summen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(akn + bn^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(akn + bn^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{ak}{n} + b\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx$$

7.2.2 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

f so wählen, dass f' das Integral vereinfacht und g sollte einfach integrierbar sein.

Anmerkungen

i) *Falls man kein Produkt hat, kann man auch 1 als konstante Funktion verwenden:* $\int_a^b \log(x)dx = \int_a^b 1 \cdot \log(x)dx = [x\log(x)]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x}dx$

ii) *Bei trigonometrischen Funktionen wird meistens nach endlich vielen Durchführungen das Startintegral vorkommen. Dann kann man das Integral mit der Gleichung bestimmen.*

7.2.3 Substitution

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{f(u)}{u'(x)}\mathrm{d}u \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x)$$

Anmerkungen

i) *Wenn die Stammfunktion gesucht ist, dann wird am Schluss wieder rücksubstituiert*

ii) *Im Kapitel 11.5.1 auf Seite 13 findet man wichtige Substitutionen*

iii) *lineare Funktionen $(ax+b)$ kann man immer substituieren, da $u'(x) = (ax+b)' = a$.*

7.2.4 Rationale Funktionen

- **Wichtig:**
  Wenn der Grad des Zählers grösser als der Grad des Nenners ist, zuerst eine Polynomdivision durchführen.

- **Reelle r-fache Nullstelle**

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^r}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{A}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C & r > 1 \\ A\ln|x-x_0| + C & r = 1 \end{cases}$$

- **Komplexe einfache Nullstelle** ($b > a^2$)

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2ax+b}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+2ax+b) + \frac{B-aA}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C$$

Anmerkung

i) *Das Integral kann mit quadratischer Ergänzung sowie mit geeigneten Substitutionen gelöst werden (Kapitel 11.5.1 Seite 13)*

7.2.5 Uneigentliche Integrale

Sei $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ und gilt $-\infty \leq a < \alpha < c < \beta < b \leq \infty$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\beta\to b}\int_c^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

7.3 Mehrdimensionale Integralrechnung

7.3.1 Allgemeiner Tipp

Falls ein Integral symmetrische Grenzen hat, schauen ob die zu integrierende Funktion ungerade ist, denn dann ist das Integral =0 und man kann mühsame berechnungen sparen.

7.3.2 Satz von Fubini

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \qquad f : Q \to \mathbb{R}$$

$$\int_Q f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1$$

Anmerkung

i) Die Integrationsreihenfolge spielt keine Rolle, falls die Funktion f auf dem Bereich Q stetig ist

*ii) f muss **stetig** auf $\overline{Q}$ sein, sodass der Satz angewendet werden darf.*

iii) Der Satz gilt nicht zwingend für uneigentliche Integrale!

7.3.3 Jordan-Bereiche/Normalbereiche

$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ bzw.
$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, f(y) \leq x \leq g(y)\}$ sind Normalbereiche bezüglich der x-, bzw. y-Achse. Man sagt auch Sie sind x-, bzw. y-einfache Bereiche.

- $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x)\}$ ist ein **Hypograph**. Die Fläche von S entspricht genau der Fläche unter g(x) zwischen a und b und ist somit genau das Integral von g(x) auf dem Gebiet [a,b].

- $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq 0\}$ ist ein **Hypergraph**. Die Fläche von T entspricht genau der Fläche über g(x) zwischen a und b und is somit genau das negative Integral von g(x) auf dem Gebiet [a,b].

7.3.4 Integrale über Normalbereiche (2-dim)

Sei Ω ein Normalbereich, dann gilt für das Integral

$$\int_\Omega f(x, y)\mathrm{d}S = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Anmerkungen

i) Die Integrationsreihenfolge ist wichtig

ii) Für höhere Dimensionen bleibt das Prinzip das Gleiche

7.3.5 Transformationssatz (Substitution)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d \quad \Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus und falls f auf $\Phi(\Omega)$ integrierbar ist, dann gilt

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_\Omega f(\Phi(\mathbf{x}))|\det(D\Phi(\mathbf{x}))|\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Anmerkungen

i) Dabei bezeichnet $\det(D\Phi(\boldsymbol{x}))$ die Funktionaldeterminante von Φ und $D\Phi(\boldsymbol{x})$ die Jacobimatrix

ii) Die Bedingung, dass Φ ein Diffeomorphismus sein muss, kann abgeschwächt werden

iii) Die allgemeine Funktionaldeterminante von $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $\sqrt{\det\left((D\Phi(\boldsymbol{x})^T \cdot D\Phi(\boldsymbol{x})\right)}$, wobei $\det\left(D\Phi(\boldsymbol{x})^T \cdot D\Phi(\boldsymbol{x})\right)$ die gramsche Determinante von $D\Phi$ ist

iv) Falls $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist, dann gilt für die allgemeine Funktionaldeterminante von Φ (siehe Oberflächenintegrale)

$$\sqrt{\det\left((D\Phi(\boldsymbol{x})^T \cdot D\Phi(\boldsymbol{x})\right)} = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right\|$$

v) Wichtige Parametrisierungen Φ sind im Kapitel 11.7 auf Seite 15 zu finden

7.3.6 Kurvenintegral

- **Standardparametrisierungen** (siehe auch Parametrisierungen)
  - Kreis mit Radius 1 und Ursprung (pos Richtung):
    $\gamma : [0, 2\Pi] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$
    (negative Richtung: $(\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos(t), -\sin(t))$)
  - Funktion auf x in [a,b]:
    $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2; x \mapsto (x, f(x))$
  - Strecke von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1):
    $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (x_0 + (x_1 - x_0)t, y_o + (y_1 - y_0)t)$

i) **Kurvenintegral erster Art (über Skalarfeld)**
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld und $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise differenzierbarer Weg, dann ist das Integral von f über $\boldsymbol{\gamma}$ wie folgt definiert

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t))\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|_2\,\mathrm{d}t$$

Die Länge einer gegebenen Kurve $\gamma : [a.b] \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||_2 \;\mathrm{d}t$$

Linienintegrale sind einfach zu berechnen, falls die zu integrierende Funktion λ ein Potential df hat. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\int_\gamma \lambda = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis: *$\int_\gamma \lambda = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \int_a^b df(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$*
substituiere:$u = \gamma(t)$ und $du = \dot{\gamma}(t)dt$
$= \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} df(u)du = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

ii) **Kurvenintegral zweiter Art (über Vektorfeld)**
Sei $\mathbf{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise differenzierbarer Weg, dann ist das Integral von $\mathbf{K}$ über $\boldsymbol{\gamma}$ wie folgt definiert

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} := \int_a^b \mathbf{K}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t$$

Anmerkungen

i) Dieses Kurvenintegral bezeichnet man auch als Arbeitsintegral, wobei das Vektorfeld der Kraft entspricht (bspw. elektrisches Feld)

ii) Das Integral eines Gradientenfeldes $\boldsymbol{K} = \nabla f$ ist wegunabhängig, d.h. nur der Anfangspunkt und der Endpunkt ist entscheidend. Man bezeichnet in diesem Fall f auch als Potential und $\boldsymbol{K}$ als konservatives Feld

7.3.7 Flussintegrale 2D

2D Flussintegrale sind grundsätzlich identisch zu Kurvenintegralen zweiter Art, wobei im Skalarprodukt nicht die tangentielle Komponente, sondern die normale Komponente des Vektorfeldes bestimmt wird.
Sei $V : \Omega \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2; \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ eine Kurve, dann gilt

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{n} = \int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \vec{n}||\dot{\gamma}(t)||_2 dt$$

wobei $ds = ||\dot{\gamma}(t)||_2 dt$ das sogenannte Linienelement ist und $\vec{n}$ wie folgt definiert ist:

- falls Fluss von innen nach aussen: $\vec{n} = \frac{1}{||\dot{\gamma}(t)||_2}(\dot{\gamma}_2(t), -\dot{\gamma}_1(t))$
- falls Fluss von aussen nach innen: $\vec{n} = \frac{1}{||\dot{\gamma}(t)||_2}(-\dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_1(t))$

7.3.8 Oberflächenintegral

i) **Oberflächenintegral erster Art (über Skalarfeld)**
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld und A eine Fläche die mit $\Phi : B \to \mathbb{R}^3$ $(B \subset \mathbb{R}^2)$ parametrisiert wird. Das Oberflächenintegral von f über A lautet

$$\iint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S = \iint_B f(\Phi) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_2 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Kochrezept:

1. parametrisiere Fläche A: $\Phi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$
2. Berechne $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, dann $||\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}||_2$
3. Berechne $\iint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S = \int_a^b \int_c^d f(\Phi) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_2 \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$

ii) **Oberflächenintegral zweiter Art (über Vektorfeld)**
Sei $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und A eine Fläche die mit $\Phi : B \to \mathbb{R}^3$ $(B \subset \mathbb{R}^2)$ parametrisiert wird. Das Oberflächenintegral von $\mathbf{K}$ über A lautet

$$\iint_A \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_B \mathbf{K}(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Anmerkungen

i) Dieses Integral wird auch häufig als Flussintegral 3D bezeichnet

ii) Im Allgemeinen besteht das (vektorielle) Wegelement aus $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S$, wobei $\boldsymbol{\nu}$ das Einheitsnormalenfeld bezeichnet

iii) ***Achtung:*** *Falls der Fluss von aussen nach innen gefragt ist, so muss noch ein minus vor das Integral auf der rechten Seite gesetzt werden.*

iv) *Oberfläche von Φ: $O(\Phi) = \int_\Phi dS = \int_B \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv$*

Kochrezept:

1. parametrisiere Fläche A: $\Phi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$
2. Berechne $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, dann $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$
3. Berechne $\iint_A \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \int_c^d \mathbf{K}(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$

7.3.9 Volumenintegral

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, dann lautet das Volumenintegral (über das Volumen V) wie folgt

$$\iiint_V f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V = \int_V f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V$$

bzw:

$$V = \iiint 1 dxdydz$$

Anmerkungen

i) *Meistens spricht man von einem Volumenintegral, wenn man über ein 3-dimensionales Volumen integriert, aber grundsätzlich kann die Dimension auch höher sein*

ii) *Falls man das Volumen von V berechnen möchte, kann man als Skalarfeld die Indikatorfunktion ($f(x, y, z) = 1$ für $(x, y, z) \in V$) wählen*

iii) *Das Volumenelement $\mathrm{d}V$ berechnet sich mit einer geeigneten Parametrisierung $\Phi(\boldsymbol{x})$ (siehe Transformationssatz)*

$$\mathrm{d}V = |\det(D\Phi(\boldsymbol{x}))|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

7.3.10 Schwerpunkt

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Körper und bezeichne $S_k = (s_{x_1}, \ldots, s_{x_n}) \in \mathbb{R}^n$ den Schwerpunkt von K, dann gilt

$$s_{x_i} = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K x_i \mathrm{d}V$$

bzw:

$$S_k = \iiint xdxdydzdz$$

Anmerkung

i) *Symmetrien von K beachten $\to$ spart Zeit*

7.3.11 Rotationskörper

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x$$

7.3.12 Gesamtmasse

$$M = \iiint \rho(x, y, z) dxdydz$$

wobei $\rho(x, y, z)$ die Dichtefunktion ist.

8 Vektoranalysis

8.1 Skalarfeld

Jedem Punkt wird eine Zahl (Skalar) zugeordnet $\to$ Gradient (5.2.4) wirkt auf ein Skalarfeld (Vektor $\to$ Skalar)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

8.2 Vektorfeld

Jedem Punkt wird ein Vektor zugeordnet (Vektor $\to$ Vektor)

$$\mathbf{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \mathbf{K}(x) = \begin{pmatrix} K_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ K_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

8.2.1 Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes gibt die "Quellendichte" an (Skalarfeld)

$$\mathbf{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{div}(K) = \nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{\partial K_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial K_n}{\partial x_n}$$

$$div(K) \begin{cases} > 0 : \text{Quelle} \\ < 0 : \text{Senke} \\ = 0 : \text{Es strömt gleich viel raus wie rein} \end{cases}$$

8.2.2 Rotation

Falls $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dann gilt für die Rotation von $\mathbf{K}$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{K}) = \nabla \times \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Falls $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dann gilt für die Rotation von $\mathbf{K}$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{K}) = \frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y}$$

8.2.3 Identitäten

$\nabla \times f$ zeigt in die Richtung der Drehachse

$|\nabla \times f|$ ist die Stärke der Rotation

$\mathrm{div}(f \cdot K) = \nabla f \cdot K + f \cdot \mathrm{div}(K)$

$\mathrm{div}(K \times L) = L \cdot \mathrm{rot}(K) - K \cdot \mathrm{rot}(L)$

$\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$

$$\mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \qquad \text{(Laplace-Operator)}$$

$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(K)) = 0$

$\mathrm{div}(f \cdot \mathrm{rot}(K)) = \nabla f \cdot \mathrm{rot(K)}$

8.2.4 Integrabilitätsbedingungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir sagen v erfüllt die Integrabilitätsbedignungen, falls gilt:

$$\forall i \neq j \in \{1, 2, ..., n\} : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

Falls n = 2 oder n = 3, sind die Bedinungen erfüllt, falls $rot(v) = 0$. Wir sagen dann auch dass v rotationsfrei ist.

8.2.5 wegzusammenhängend und einfach-zusammenhängend

- Eine Menge U heisst **wegzusammenhängend**, falls es für alle Punkte $z_1, z_2 \in U$ einen Pfad gibt, der die Punkte verbindet.
- Eine offene, wegzusammenhängende Menge $U \in \mathbb{C}$ heisst **einfach-zusammenhängend**, wenn man jede in ihr enthaltene geschlossene Kurve γ stetig zu einem Punkt zusammenziehen kann. (kein Loch)

8.2.6 Potential

Sei $\mathbf{K} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Falls es ein Skalarfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla f = \mathbf{K}$, heisst $\mathbf{K}$ Gradientenfeld (5.2.4) und f ist das zugehörige Potential ($\approx$ Stammfunktion). Sei λ die äquivalente Differentialform. Bsp: $\mathbf{K} = (x^2y, 3y)^T \Rightarrow \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}s = x^2y\mathrm{d}x + 3y\mathrm{d}y = \lambda$
Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) $\exists f \in C^1(\Omega) : \mathbf{K} = \nabla f$. Also besitzt $\mathbf{K}$ ein Potential.

ii) (Wegunabhängigkeit) Für zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}^1_{pw}([a, b]; \Omega)$ und gleichen Start-/Endpunkten $\gamma_1(a) = \gamma_2(a),\ \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ gilt:

$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$$

iii) Für jeden geschlossenen Weg gilt $\gamma \in C^1_{pw}([a, b]; \Omega)$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt:

$$\int_\gamma \lambda = 0$$

Wann existiert ein Potential?

i) Ω ezh und IB erfüllt: ***existiert***
ii) Ω ezh und IB nicht erfüllt: ***existiert nicht***
iii) Ω nicht ezh und IB erfüllt: ***keine Aussage machbar***
iv) Ω nicht ezh und IB nicht erfüllt: ***existiert nicht***

Methoden zur Berechnung

1. Falls das Potential aus einfach Termen besteht, kann man sie separat integrieren. Bsp.: Sei $\lambda = -ydx + xdy$. Integrieren ergibt: $\int -ydx = -yx + C(y)$ und $\int xdy = xy + C(y)$. Man sieht schnell, dass kein Potenzial existieren kann, da die Konstanten nicht so gewählt werden können, so dass die Stammfunktionen gleich sind.

2. Zuerst zeigen, dass das Potential existiert, indem man zeigt, dass das geschlossene Wegintegral (z.B. Einheitskreis) 0 ergibt. Dann Wegintegral vom Ursprung zum Punkt (x, y) bilden mit $\gamma : [0, x] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, \frac{y}{x}t)^T,\ ds = (1, y/x)^T dt$. Potential berechnen mit $f(x, y) - f(0, 0) = \int_\gamma \mathbf{F} ds$

8.2.7 Überblick Differentialoperatoren

Gradient:	Skalarfeld → Vektorfeld
Divergenz:	Vektorfeld → Skalarfeld
Rotation 2D:	Vektorfeld → Skalarfeld
Rotation 3D:	Vektorfeld → Vektorfeld

8.2.8 Konservative Felder

Ein Vektorfeld $\mathbf{K} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst **konservativ**, falls Ω *einfach zusammenhängend* ist und auf Ω $\text{rot}(\mathbf{K}) = 0$ gilt. Ein Wegintegral über ein konservatives Vektorfeld ist wegunabhängig.

8.2.9 Satz von Green (2D-Stokes)

$$\oint_{\partial D} \mathbf{K} \cdot ds = \int_D \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} dS$$

Anmerkungen

i) Das Umlaufintegral muss dabei mathematisch positive Umlaufrichtung haben

ii) Man kann so auch die Fläche von D, mithilfe eines Linienintegrals, berechnen

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \to vol(D) = \int_D 1 dx dy = \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot ds$$

8.2.10 Satz von Stokes (3D) (Weg ↔ Fluss)

$$\oint_{\partial D} \mathbf{K} \cdot ds = \int_D \text{rot}(\mathbf{K}) \cdot \vec{n}\ do$$

Anmerkungen

i) Nach Konvention lassen sich die Richtungen des (vektoriellen) Wegelements ds und des (vektoriellen) Flächenelements $d\boldsymbol{S}$ gemäss der rechten-Hand-Regel bestimmen (der Daumen entpricht dem Einheitsnormalenfeld und die Finger bescheiben die Richtung des Weges)

ii) Falls nur rot($\boldsymbol{K}$) gegeben ist, kann man durch Raten ein passendes Vektorfeld $\boldsymbol{K}$ bestimmen

iii) Wenn D geschlossen ist, so hat D kein Rand und somit existiert das Integral nicht.

8.2.11 Satz von Gauss (Fluss ↔ Volumen)

Grundidee: Falls wir eine Flüssigkeitsquelle einhüllen, dann ist der Fluss durch die Hülle gleich der Abgabe der Quelle. Falls der Fluss > 0 ist, so ist das Gebiet eine Quelle (fliesst mehr raus als rein), falls der Fluss < 0 ist, ist das Gebiet eine Senke (fliesst mehr rein als raus).

$$\oint_{\partial V} \mathbf{K} \cdot \vec{n}\ do = \int_V \text{div}(\mathbf{K})\, dV$$

Anmerkung

i) ∂V muss geschlossen sein, $\vec{n}$ nach aussen gerichtet

ii) V kann ∂V auch nur enthalten, man muss einfach das zusätzliche Flussintegral subtrahieren

iii) geht auch in 2D

iv) ***Achtung:*** *Falls der Fluss von aussen nach innen gefragt ist, so muss noch ein minus vor das Integral auf der rechten Seite gesetzt werden.*

9 Wichtige Sätze und Definitionen

9.1 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert ein $c \in [a, b]$ zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) \le f(b)$) bzw. $u \in [f(b), f(a)]$ (falls $f(b) < f(a)$) mit $f(c) = u$

9.2 Extremumsatz

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig auf Ω, so nimmt f auf Ω ihr Maximum und Minimum an.

9.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

9.4 Konvexität

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^2-Abbildung, dann ist $f(x)$ konvex auf $[a, b]$, wenn $\forall x, y \in [a, b]$ folgendes gilt (Funktion ≤ Sekante zw. x und y):

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \Leftrightarrow f''(x) \ge 0$$

9.5 Diffeomorphismus

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive C^1-Abbildung $\Phi : U \to V$ heisst Diffeomorphismus, falls die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \to U$ wieder C^1 ist.

Kochrezept:
Gegeben: $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$
Gefragt: ist Φ eine Diffeomorphismus?
1. Zeige, dass $\Phi \in C^1$ und dass $\forall x \in U$, $\det(d\Phi(x)) \neq 0$. Der Umkehrsatz impliziert dann, dass Φ lokal um jeden Punkt U ein Diffeomorphismus ist.
2. Zeige, dass Φ die Menge U bijektiv auf V abbildet. Wenn das der Fall ist, ist Φ ein Diffeomorphismus. Alle Parametrisierungen in 11.7 sind Diffeomorphismen auf ihr Bild.

9.6 Umkehrsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x_0 \in \Omega$ mit $det(df(x_0)) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $U \subset \Omega$ von x_0 und $V \subset \tilde{\Omega} = f(\Omega)$ von $f(x_0)$, so dass $f|_U : U \to V$ bijektiv und die Umkehrabbildung ist dann ebenfalls von der Klasse C^1. Es gilt auch:

$$d(f^{-1})(f(x)) = df(x)^{-1}$$

9.7 Inverses Funktionentheorem

Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Sei in $a \in U$ die Ableitung $\varphi' = d\varphi(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar (also $\det(\varphi'(a) \neq 0)$). Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a, so dass $V_0 = \varphi(U_0)$ eine offene Umgebung von $b = \varphi(a)$ ist und $\varphi\,|_{U_0} : U_0 \to V_0$ ein Diffeomorphismus (d.h. φ^{-1} ex. und ist C^1)ist. Ferner gilt

$$\mathrm{d}(\varphi^{-1}(b)) = (\mathrm{d}\varphi(a))^{-1}$$

9.8 Implizites Funktionentheorem

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $F(X) = 0_{\mathbb{R}^l}$ (implizite Fkt) mit $l < n$

1) Wir teilen $\mathbb{R}^n$ auf in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-l} \times \mathbb{R}^l$, mit $z \in \mathbb{R}^{n-l}$ und $y \in \mathbb{R}^l$

2) Sei $p_o = (z_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$

3) Falls gilt:

$$det(\frac{dF}{dy}(p_o)) \neq 0$$

Dann lässt sich $F(X) = 0$ in einer Umgebung von p_0 schreiben als:

$$F(X) = F(z, f(z)) = 0$$

mit $f : \mathbb{R}^{n-l} \to \mathbb{R}^l$ und $f(z_0) = y_0$

Ferner gilt:

$$Df(\mathbf{a}) = -\left(D\mathbf{F_y}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right)^{-1} \cdot D\mathbf{F_x}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

9.9 Satz von Schwarz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion. dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

für alle $j, k \in \{1, ..., n\}$. Dieser Satz sagt im Kern aus, dass die Reihenfolge in welcher partiell abgeleitet wird egal ist.

9.10 Lokaler Existenzsatz (Picard-Lindelöf)

Betrachte das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad x(t_0) = x_0$$

mit $f(t,x)$ lipschitz-stetig im 2ten Argument und $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Die Folge

$$x^{[0]}(t) = x_0$$
$$\vdots$$
$$x^{[l+1]} = x_0 + \int_0^t f(s, x^{[l]}(s))ds$$

mit $t \in [t_0, t_0+\varepsilon]$ konvergiert für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gleichmässig gegen die Lösung $x(t)$

9.11 Regulärer Punkt/Wert

Ein Punkt $x \in U \subset X$ heisst ein regulärer Punkt der differenzierbaren Abbildung $f : U \to Y$, wenn das Differential $df(x) : X \to Y$ surjektiv abbildet (lokal invertierbar). Das dazugehörige $y \in Y$ heisst regulärer Wert von f.

9.12 Satz vom regulären Wert

Es sei $f : U \to Y$ eine C^1-Abbildung auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und $M = f^{-1}(c)$ die Niveaumenge zu einem regulären Wert $c \in Y$. Ist M nicht leer, so ist M eine Untermannigfaltigkeit von X der Dimension $dim(M) = dim(X) - dim(Y)$

Beispiel

1. *Zeige dass M eine Untermannigfaltigkeit ist*
$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 - z^2 = -1\right\}$$
2. *Kandidat für $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \in C^1$*
Kandidat für regulären Wert, damit $M = f^{-1}(c)$ gilt ist: c = -1
3. *Überprüfe, dass -1 tatsächlich ein regulärer Wert ist.*
Dafür muss gelten: $\nabla f(x,y,z) \neq 0 \quad \forall (x,y,z) \in M$
4. *$f(0,0,0) = 0 \neq -1$ einziger irregulärer Wert $\to (0,0,0) \notin M$ $\to$ somit folgt aus dem Satz vom regulären Wert, dass M eine Untermannigfaltigkeit des R^3 der Dimension $dim(R^3) - dim(R) = 2$ ist*

10 Topologie

10.1 Begriffe

- **offener Ball:** $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) < r\}$
- für eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist:
  - $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein **innerer Punkt** von X, falls $\exists r > 0$, mit $B_r(x_0) \subset X$
  - $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein **äusserer Punkt** von X, falls x_0 ein innerer Punkt von X^C ist.
  - $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein **Randpunkt** von X, falls x_0 weder ein innerer noch ein äusserer Punkt von X ist.
- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$:
  - X **offen** $\Leftrightarrow \forall x \in X$, x ist ein innerer Punkt von X
  - X **abgeschlossen** $\Leftrightarrow X^C$ offen
- Notation für Intervalle in $\mathbb{R}$:
  - **offenes** Intervall: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - **halb-offenes** Intervall: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
  - **halb-offenes** Intervall: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
  - **abgeschlossenes** Intervall: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$:
  - **Inneres:** $\mathring{X} = \{x \in X : \exists r > 0, B_r(x) \subset x\} = \{x \in X :$ x ist inneren Punkt von X$\}$
  - **Abschluss:** $\overline{X} = \cap A$, wobei $A \subset X$ und A abgeschlossen $= \{x \in X :$ x ist innerer Punkt oder Randpunkt von X$\}$
  - **Rand:** $\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n :$ x ist ein Randpunkt von X
- Es gilt auch:
  - $\mathring{X} = \overline{X} \setminus \partial X$
  - $\overline{X} = \mathring{X} \cup \partial X$
  - $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X}$
- Seit $X \subset \mathbb{R}^n$. Die Unterraumtopologie auf X ist dann wie folgt definiert:
  - $A \subset X$ **relativ offen** $\Leftrightarrow \exists B \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $A = B \cap X$
  - $A \subset X$ **relativ abgeschlossen** $\Leftrightarrow \exists B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, mit $A = B \cap X$, bzw. $X \setminus A$ relativ offen
- $X \subset \mathbb{R}^n$ heisst **kompakt**, falls jede Folge $(x_k)_{k=1}^\infty$ in X einen Häufungspunkt in X besitzt. Das heisst es existiert eine streng monoton steigende bijektive Funktion $l : \mathbb{N} \to \Lambda \subset \mathbb{N}, k \mapsto l(k)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{l(k)} = x_0 \in X$.
Einfacher ausgedrückt gilt auch:
$X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow$ X abgeschlossen und beschränkt
- (Satz 4.5.2 Struwe) Für $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent
  - f ist stetig (in allen Punkten $x_0 \in \Omega$)
  - Das Urbild $U = f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist *relativ offen.*
  - Das Urbild $A = f^{-1}(B)$ jeder abgeschlossenen Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist *relativ abgeschlossen.*

10.2 Beispiele

Offene Mengen: $]0,1[, \mathbb{R}, \varnothing$
Abgeschlossene Mengen: $[0,1], \mathbb{N}, \mathbb{R}, \varnothing, \{0\}$
Weder noch: $\mathbb{Q}, [0,1[, \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (weil 1 ein Randpunkt ist und 0, der Limes der Folge, nicht in der Menge ist)

$\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \quad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \quad \partial\mathbb{R} = \varnothing$
$\mathring{\varnothing} = \varnothing \quad \overline{\varnothing} = \varnothing \quad \partial\varnothing = \varnothing$
$\mathring{Q} = \varnothing \quad \overline{Q} = \mathbb{R} \quad \partial Q = \mathbb{R}$

11 Addendum

11.1 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

11.1.1 Trigonometrische Grössen

Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	-$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

11.1.2 Identitäten

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$
$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$
$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$
$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x))$$
$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos\left((n-2k)(x - \frac{\pi}{2})\right)$$
$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos\left(x(n-2k)\right)$$
$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$\sinh(x) = -i\sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$
$$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$
$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$
$$\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$
$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

11.2 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(1+x)} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{n}{x})^x = e^n$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$
$$\lim_{x\to\infty} n\sin(\frac{1}{n}) = 1 \qquad \lim_{x\to 0} x^a \ln^b(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} = 2 \qquad \lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a} \qquad \lim_{x\to\infty} (\frac{n-1}{n+1})^n = \frac{1}{e^2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

11.3 Wichtige Ableitungen

$$\sin(x)' = \cos(x) \qquad \cos(x)' = -\sin(x)$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = \ln(a)a^x \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$
$$\left(\sqrt[x]{a}\right)' = -\frac{\sqrt[x]{a}\ln(a)}{x^2} \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2}$$
$$\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x) \qquad \sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$$
$$\cot'(x) = -\csc^2(x) \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\sinh(x)' = \cosh(x) \qquad \cosh(x)' = \sinh(x)$$
$$\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \operatorname{arsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\operatorname{arcosh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \operatorname{artanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\frac{d}{dx}|x| = sgn(x)$$

11.4 Spezielle Ableitungen

Sei $f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to \omega$ multilinear, dann ist f differenzierbar und es gilt

$$df(a_1,\ldots,a_n)(h_1,\ldots,h_n) = f(h_1,a_2,\ldots,a_n)+\cdots+f(a_1,a_2,\ldots,h_n)$$

Beispiele

- $d(X^TX)H = H^TX + X^TH$
- $d(det(X))H = tr(adj(X)H)$

weitere:

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) \qquad (x^x)' = x^x(\ln(x) + 1)$$

11.5 Integrale

11.5.1 Substitutionen

$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$	$u(x) = g(x)$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$
$\int f(g(x))\cdot g'(x)\mathrm{d}x$	$u(x) = g(x)$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$
$\int f(e^x, \sinh(x), \cosh(x))\mathrm{d}x$	$u(x) = e^x$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{e^x}$
$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$	$x = \sin(u)$	$\mathrm{d}x = \cos(u)\mathrm{d}u$
$\int f(x, \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$	$x = \sinh(u)$	$\mathrm{d}x = \cosh(u)\mathrm{d}u$
$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$	$x = \cosh(u)$	$\mathrm{d}x = \sinh(u)\mathrm{d}u$
$\int f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x$	$u(x) = \frac{x}{a}$	$\mathrm{d}x = a\mathrm{d}u$
$\int f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\mathrm{d}x$	$u(x) = \sqrt{x^2-1}$	$\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}u$
$\int R(\sin(x), \cos(x))\mathrm{d}x$	$u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

$$\to \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \to \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

11.5.2 Potenzen und Wurzeln

$$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad n \neq -1$$
$$\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) + C$$
$$\int \sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2-x^2} + \arcsin(\frac{x}{r})\cdot r^2\right) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\mathrm{d}x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\right) + C$$
$$\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$$
$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + C$$
$$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$
$$\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log(\sqrt{a^2+x^2}+x)\right) + C$$
$$\int \frac{1}{(ax^2+b)^n} = \frac{2n-3}{2b(n-1)}\int \frac{1}{(ax^2+b)^{n-1}}\mathrm{d}x + \frac{x}{2b(n-1)(ax^2+b)^{n-1}}$$

11.5.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$$
$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = x(\ln|x| - 1) + C \qquad x > 0$$
$$\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C$$
$$\int x^s\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\ln|x| - \frac{1}{s+1}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
$$\int \frac{1}{x \pm a}\mathrm{d}x = \ln|x \pm a| + C$$
$$\int \frac{1}{e^x + a}\mathrm{d}x = \frac{x - \ln|a + e^x|}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{e^x - a}\mathrm{d}x = \frac{\ln|e^x - a| - x}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{x^2 + x}\mathrm{d}x = \ln(x) - \ln(x+1) + C$$
$$\int a^{kx}\mathrm{d}x = \frac{a^{kx}}{k\ln|a|} + C \qquad a > 1$$
$$\int x^ne^{ax}\mathrm{d}x = e^{ax}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} + C$$

11.5.4 Hyperbolische Funktionen

$$\int \cosh(x)\mathrm{d}x = \sinh(x) + C$$

$$\int \sinh(x)\mathrm{d}x = \cosh(x) + C$$

$$\int \tanh(x)\mathrm{d}x = \ln|e^{2x}+1| - x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\mathrm{d}x = \tanh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}(x) + C \qquad x > 1$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{artanh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\mathrm{d}x = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1) + C$$

$$\int \sinh^{-1}(x)\mathrm{d}x = x\sinh^{-1}(x) - \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\int \cosh^{-1}(x)\mathrm{d}x = x\cosh^{-1}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \tanh^{-1}(x)\mathrm{d}x = x\tanh^{-1}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$

$$\int \tanh^2(x)\mathrm{d}x = x - \tanh(x) + C$$

$$\int \sinh^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\sinh(2x) - 2x) + C$$

11.5.5 Trigonometrische Funktionen

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\tan(x)}\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\tan(x)} + C$$

$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

$$\int \cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$$

$$\int \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{32}(4x - \sin(4x)) + C$$

$$\int \sin^n(ax)\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$

$$\int \sin(ax)\cos^n(ax)\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$

$$\int \sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}$$

$$\int \cos^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$$

$$\int \cot(x)\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \csc(x)\mathrm{d}x = -\ln|\csc(x) + \cot(x)| + C$$

$$\int \sec(x)\mathrm{d}x = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$$

$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arccos(x)\mathrm{d}x = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x) + C$$

$$\int x^2\sin(x)\mathrm{d}x = 2x\sin(x) - (x^2-2)\cos(x) + C$$

$$\int x^3\sin(x)\mathrm{d}x = 3(x^2-2)\sin(x) - x(x^2-6)\cos(x) + C$$

$$\int x\cos(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

$$\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x = (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C$$

$$\int x^3\cos(x)\mathrm{d}x = x(x^2-6)\sin(x) + 3(x^2-2)\cos(x) + C$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\mathrm{d}x = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a-b)} + C$$

$$\int x\sin(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{\sin(\alpha x) - \alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$$

$$\int x^2\sin(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{(2-\alpha^2x^2)\cos(\alpha x) + 2\alpha x\sin(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$

$$\int x\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha x\sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$$

$$\int x^2\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{(\alpha^2x^2-2)\sin(\alpha x) + 2\alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$

$$\int xe^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}(\alpha x - 1)}{\alpha^2} + C$$

$$\int x^2e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}(\alpha^2x^2 - 2\alpha x + 2)}{\alpha^3} + C$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \qquad \Re(\alpha) > 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)dt = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^3(t)dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin^2(t)dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

11.5.6 Bestimmte trigonometrische Integrale

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
cos	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
$\sin \cdot \cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2 \cdot \cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin \cdot \cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

11.6 Punktmengen

11.6.1 Kreis

Fläche: $A = \pi r^2$ Umfang: $U = 2r\pi$

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\right\}$$

$r \in \mathbb{R}^{>0}$ ist der Radius des Kreises

11.6.2 Kugel

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Oberfläche: $S = 4\pi r^2$

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2\right\}$$

$r \in \mathbb{R}^{>0}$ ist der Radius des Kreises

11.6.3 Kreiszylinder

Volumen: $V = \pi r^2 h$ Mantelfläche: $M = 2\pi r h$
Oberfläche: $S = M + 2 \cdot G = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$$Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2, \quad 0 \le z \le h\right\}$$

$r \in \mathbb{R}^{>0}$ ist der Radius des Kreiszylinders

11.6.4 Kegel

Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Oberfläche: $S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2}(h-z)^2\right\}$$

$r, h \in \mathbb{R}^{>0}$ ist der Radius bzw. die Höhe des Kegels

11.6.5 Ellipse

$a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnet die Halbachsen der Ellipse

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\right\}$$

11.6.6 Ellipsoid

$a, b, c \in \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnet die Halbachsen des Ellipsoides

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1\right\}$$

11.6.7 Elliptisches Paraboloid

$a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnet die Halbachsen der elliptischen Querschnitte

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0, \quad z > z_0\right\}$$

11.6.8 Torus

$r, R \in \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnen $r < R$ die Radien des Torus

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - R\right)^2 + (z-z_0)^2 = r^2\right\}$$

Anmerkungen

i) Die Gleichungen beschreiben nur die Randpunkte ∂P der Punktmengen P (sonst $\le$)

ii) Die Zahlen x_0, y_0, z_0 beschreiben jeweils die Translation in die jeweilige Achsenrichtung (meistens 0)

11.7 Parametrisierungen

11.7.1 Polarkoordinaten/Kreis

$$\Phi : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \qquad \Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(r,\varphi)) = r$$

Anmerkung

*i) Falls man eine **Ellipse** ($x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$) parametrisieren möchte, dann wählt man für die Parametrisierung $\Phi(r,\varphi) = (a\cos(\varphi), b\sin(\varphi))^T$, wobei a und b die Halbachsen der Ellipse beschreiben $\to \det(D\Phi(r,\varphi)) = ab$*

11.7.2 Zylinderkoordinaten

$\to$ verwenden bei Symmetrien um eine Achse

$$\Phi : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^3 \quad \Phi(r,\varphi,h) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(r,\varphi,h)) = r$$

11.7.3 Kugelkoordinaten

$\to$ verwenden bei Punktysmmetrien

$$\Phi : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \Phi(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(r,\varphi,h)) = r^2\sin(\vartheta)$$

Anmerkungen

i) ϑ ist der Polarwinkel und ist der Winkel zwischen der Polrichtung und dem Punkt P auf der Kugeloberfläche

ii) φ ist der Azimutwinkel und der gleiche Winkel wie bei den Polar- bzw. Zylinderkoordinaten

*iii) $\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \to$
$\iiint f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta$*

iv) Für Oberflächenintegrale: $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, pi], \Phi(\vartheta,\varphi) = R(\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)^T$, dann gilt: $\partial_\vartheta\Phi \times \partial_\varphi\Phi = R^2\sin\vartheta(\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)^T$ und $\|\partial_\vartheta\Phi \times \partial_\varphi\Phi\| = R^2\sin\vartheta$

11.7.4 Ellipsoidkoordinaten

$$\Phi : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \Phi(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ br\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ cr\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(r,\varphi,h)) = abc * r^2\sin(\vartheta)$$

11.7.5 Toruskoordinaten

$$\Phi : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} (R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi) \\ r\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(r,\varphi,h)) = r(R + r\cos(\vartheta))$$

11.7.6 Reguläre Flächen

Eine reguläre Fläche ist eine 2-dimensionale, differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ (Kapitel 9.12, Seite 12). Lässt sich diese Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ durch eine differenzierbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = z$ beschreiben, dann gilt für die Parametrisierung Φ von S

$$\Phi : I \to \mathbb{R}^3 \qquad \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

Anmerkungen

i) Diese Parametrisierung braucht man häufig zur Berechnung von Oberflächenintegralen (Integralsatz von Gauss/Stokes)

ii) Die allgemeine Funktionaldeterminante von $\Phi(x,y)$ lässt sich folgendermassen berechnen (Siehe Kapitel 7.3.5 auf Seite 9)

$$\sqrt{\det\left((D\Phi(x,y))^T \cdot D\Phi(x,y)\right)} = \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\|$$

11.8 Lineare Algebra (wichtige Formeln)

11.8.1 Inverse (2x2-Matrizen)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

11.8.2 Eigenwerte einer 2x2-Matrix

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\quad m = \frac{1}{2}\text{spur}(A) := \frac{1}{2}(a+d)$

A hat die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = m \pm \sqrt{m^2 - \det}$
Überprüfen: $\det(A) = \prod_i \lambda_i$

11.8.3 Diagonalisierung (für DGL-Systeme)

Eine $n \times n$ Matrix A ist diagonalisierbar, wenn die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen. Dann gibt es eine Diagonalmatrix D und eine reguläre Matrix T, dass $D = T^{-1}AT$.
Die Einträge auf der Diagonalen von D sind die Eigenwerte von A, die Spalten von T sind die Eigenvektoren von A (gleiche Reihenfolge!).

11.8.4 Definitheit von Matrizen

- **Möglichkeit I (2x2-Matrizen)**
  Eigenwerte λ_i mit $\det(A - \lambda_i I_n) \stackrel{!}{=} 0$
  - $\lambda_i > 0$ positiv definit (semi bei $\ge$)
  - $\lambda_i < 0$ negativ definit (semi bei $\le$)
  - $\lambda_i > 0$, $\lambda_j < 0$ indefinit
- **Möglichkeit II (3x3-Matrizen)**
  Hauptminoren A_i berechnen

$$A_i = \det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

- $A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ \cdots,\ A_n > 0 \to$ positiv definit
- $A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ \cdots \to$ negativ definit
- Kein Muster $\to$ indefinit

11.8.5 Determinante einer 3x3-Matrix (Sarrus)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

12 Diverses

12.1 Implizites Funktionentheorem V2

Sei $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eine C^1-Abbildung und sei $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ eine Nullstelle von $\mathbf{F}$, d.h. $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ mit $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U \times \mathbb{R}^m$. Sei $D\mathbf{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ eine invertierbare Matrix. Dann gibt es Umgebungen U' von $\mathbf{a}$ und U'' von $\mathbf{b}$, und eine C^1-Abbildung $\mathbf{f} : U' \to U''$, so dass die Nullstellenmenge von $\mathbf{F}$ in $U' \times U''$ genau der Graph von $\mathbf{f}$ ist.

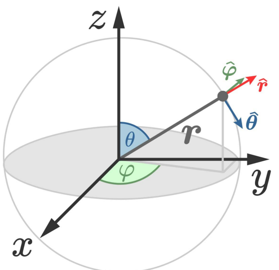
$$\big(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0},\ \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U' \times U''\big) \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Ferner gilt

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = -\left(D\mathbf{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right)^{-1} \cdot D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

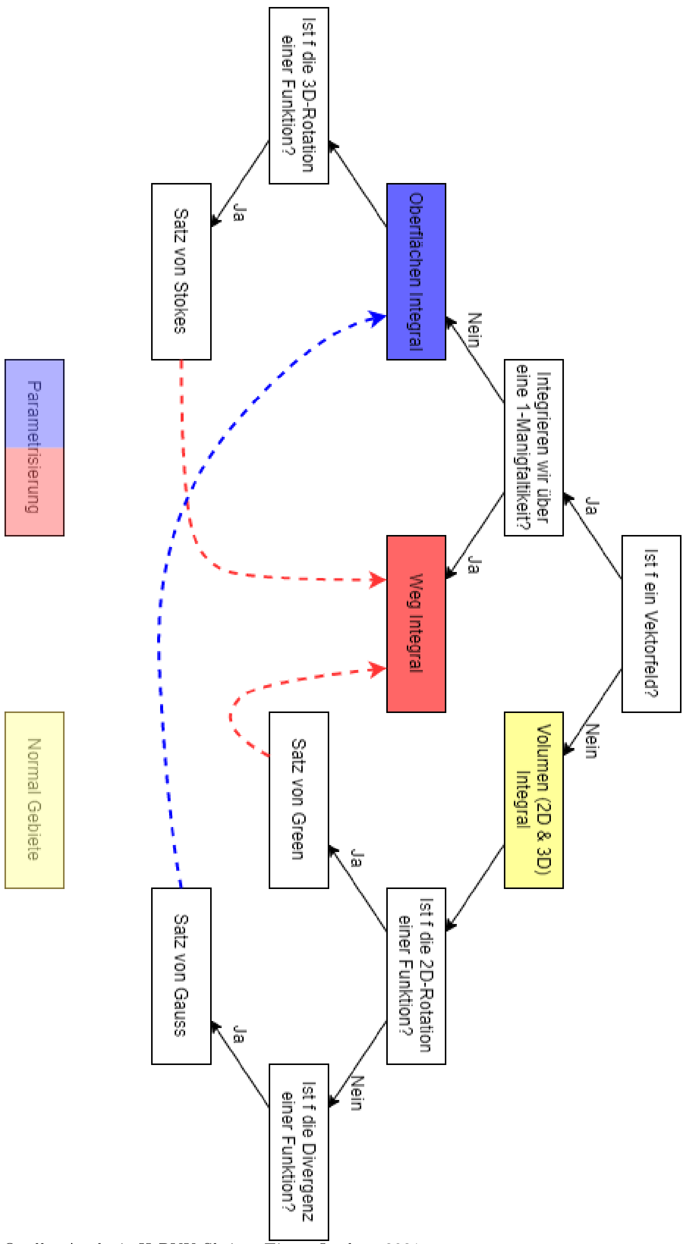
Einfacher formuliert: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ offen und sei $f : \Omega \to R^l$ eine C^1-Funktion. Falls der Punkt $p_0 = (a, b) \in \Omega$ regulär ist mit $f(p_0) = 0$ und $\det(d_y f(p_0)) \neq 0$, dann lässt sich die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal um p_0 nach y auflösen: $f(x, y(x)) = 0$
Ausserdem gilt dann: $\mathrm{d}y(x) = -\mathrm{d}_y f(x, y(x))^{-1} \cdot \mathrm{d}_x f(x, y(x))$. Für $l = 1$ (Skalarfeld) gilt: $\det(d_y f(p_0)) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \neq 0$.

12.2 Kugelkoordinaten



Quelle: universaldenker.org

12.3 Integralsätze anwenden



Quelle: Analysis II PVK-Skript, Timur Locher, 2021

12.4 Disclaimer

Diese Zusammenfassung wurde für die Vorlesung Analysis I & II im HS20 bzw. FS21 erstellt. Sie basiert auf der Zusammenfassung von Colin Dirren und Marek Landert, mit Ergänzungen von Nico Müller, Severin Nigg, Armin Riess und Robin Sieber. Der Schwerpunkt der Zusammenfassung liegt auf der Methodik und nicht auf dem mathematischen Formalismus. Es wird keine Garantie für die Richtigkeit der angegebenen Daten erteilt.

Analysis I & II   Robin Sieber   August 2021

$a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$ $\left|\frac{3+4i}{5}\right| = 1$ $\arg(z) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

alle Punkte auf Einheitskreis sind Häufungspunkte

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^n} = 1$ Sandwich $\sqrt[n]{1/3} \le \sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^n} \le \sqrt[n]{1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n} = \sqrt[n]{3^n(1^n-(\frac{2}{3})^n)} = 3\sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^n} = 3\cdot 1 = 3$

$a_n = (-1)^n \frac{n^2}{(2n+3)^2}$ $b_n = a_{2n}$, $c_n = a_{2n+1}$ → HP separat ber.

$||x-2|-1| < 3 \Rightarrow -3 < |x-2|-1 < 3 \Rightarrow -2 < |x-2| < 4$

$\Rightarrow |x-2| < 4 \Rightarrow -4 < x-2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 6$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = [\sinh]_0^1$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x>0 \\ \cos(x)-1 & x\le 0 \end{cases}$ Wo stetig, diff, st. diff?

Stetig: Für $x \neq 0$ ist f stetig, weil Komposition

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$ weil sin beschränkt

$\lim\limits_{x\to 0^-} \cos(x)-1 = 0 \Rightarrow f$ stetig auch in 0

Diffbarkeit: für $x\neq 0$ diffbar, weil Komp. Für $x=0$:

$\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} f(h)/h = \lim\limits_{h\to 0^+} h\cdot\sin(\frac{1}{h}) = 0$

$\lim\limits_{h\to 0^-} f(h)/h = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\cos(x)-1}{x} \overset{\text{Hop}}{=} \lim -\sin(x) = 0$

$\Rightarrow$ diffbar in 0.

Stetig diff: $x>0$: $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ konv. nicht für 0 $\Rightarrow$ nicht stetig diff.

$f(x,y) = \begin{cases} xy^3/(x^2+y^2) & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$ total diffbar?

Für $\vec{x}\neq 0$ klar. $\vec{x}=0$: Part. Abl. $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim \frac{f(h\cdot\vec{e}_1)-f(0,0)}{h}$

$= \lim \frac{f(h,0)-0}{h} = 0$. Gleich für $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0 \Rightarrow df(0,0) = (0,0)$

In Def einsetzen: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)-0\cdot h_1 - 0\cdot h_2}{\|h\|} = \lim \frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|}$

$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^4\cos\cdot\sin^3}{r^3} = \lim r\cdot\cos\cdot\sin^3 = 0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi[$

$\Rightarrow$ überall total diffbar.

$\partial_x \sqrt{x^2+y^2} = x/\sqrt{x^2+y^2}$

$(e^{-x^2/2})' = -xe^{-x^2/2}$

Extremwerte: $f: S\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^4+z^4+\frac{y^2}{2}-y^3+15$

mit $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^4+2y^2+z^4 \le 8\}$

S kompakt, weil abgeschlossen & beschränkt: $S \subseteq [-2,2]^3$

$\Rightarrow$ Maxima und Minima existieren.

Innere Punkte: $\nabla f = (4x^3, y-3y^2, 4z^3)^T \overset{!}{=} (0,0,0)^T$

$\Rightarrow x=z=0,\ y=0 \vee y=\frac{1}{3} \Rightarrow (0|0|0), (0,\frac{1}{3},0) \in S$ ✓

Rand: Lagrange-Funktion $L := f(x,y,z) - \lambda(x^4+2y+z^4-8)$

$\nabla L \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$ (I): $4x^3 = 4\lambda x^3$; (II): $y-3y^2 = 4\lambda y$; (III): $4z^3 = 4\lambda z^3$

(IV): $x^4+2y^2+z^4 = 8$; Falls $\lambda=1$: (I),(III) ✓, (II): $y=0$ →

$\to x_1^4+z_1^4 = 8 \vee y=-1 \to x_2^4+z_2^4 = 6$. Falls $\lambda\neq 1$: $x=z=0$, $y=\pm 2$

$\Rightarrow$ krit. Randpunkte: $(x_1,0,z_1), (x_2,-1,z_2), (0,2,0), (0,-2,0)$

Zeige $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$ und $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ sind äquiv.

Abschätzung: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \le n\cdot\max\limits_i |x_i| = n\cdot\|x\|_\infty = C\cdot\|x\|_\infty$

Für $n\ge 1$: $\frac{1}{n}\cdot\|x\|_\infty \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i| \le \|x\|_1$

Für $C=n$: $\frac{1}{C}\cdot\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le C\cdot\|x\|_\infty$

Ist $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt[4]{x^6+42}+\log(1+|y|) = z\}$ abgeschlossen? kompakt?

Def. $g(x,y,z) := \sqrt[4]{x^6+42}+\log(1+|y|)-z$. g ist stetig und $A = g^{-1}(\{0\})$ (Urbild) $\Rightarrow A$ abg. weil $\{0\}$ abg. A ist aber nicht beschränkt, daher nicht kompakt.

$f(x,y) = x/(y^2+1)$, $g(t) = (\log(1+t^2), \cos(t))$ $d(f\circ g)$?

$df(x,y) = \left(\frac{1}{y^2+1}, \frac{-2xy}{(y^2+1)^2}\right)$, $g'(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, -\sin(t)\right)$

$d(f\circ g)(t) = df(g(t))\cdot g'(t) = \left(\frac{1}{\cos^2+1}, \frac{-2\log(1+t^2)\cos}{(\cos^2+1)^2}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{2t}{1+t^2}\\ -\sin(t)\end{pmatrix}$

Folgende f (a) in (0,0) stetig ergänzbar? (b) Part. Abl. in (0,0)? (c) Richtungsabl. in jede Richtung bei (0,0)? (d) in (0,0) diffbar? $f(x,y) = (x^3-3y^2x)/(x^2+y^2)$ (a) $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f = 0$

$\Rightarrow$ stetig fortsetzbar. (b) $\partial_x f(0,0) = \lim \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 1$

$\partial_y f(0,0) = 0 \Rightarrow$ existieren (c) $v=(v_1,v_2)$ $\partial_v f(0,0) =$

$\lim \frac{f(hv_1,hv_2)-f(0,0)}{h} = \frac{v_1^3-3v_2^2v_1}{v_1^2+v_2^2}$ → existieren. Weil Richtungsabl. nicht linear von v abhängen, ist f nicht diffbar.

$g(t) := f(t\cdot v)$ f diffbar in (0,0) $\Leftrightarrow g'(0) = df(0,0)\cdot v$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$f(x,y) = (x^3-3yx)/(x^2+y^2)$ a) Für $(x,y) = (1/n, 1/n) \to (0,0)$ ist $f \to -\frac{3}{2}$, für $(x,y) = (0,1/n)\to(0,0)$ ist $f\to 0 \Rightarrow$ nicht stetig fort.

$\Rightarrow$ nicht diffbar.

$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ stetig ✓ $\partial_x f(0,0) = \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, $\partial_y f(0,0) = 0$

$\partial_v f(0,0) = \lim \frac{f(hv_1,hv_2)-0}{h} = \lim \frac{h^2 v_1 v_2}{h\sqrt{h^2(v_1^2+v_2^2)}} = \frac{h v_1 v_2}{|h|\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$

Betrag, GW nicht eindeutig, Abl. exist. nicht.

Umkehrsatz: $f(x,y) = (x^2-y, x+xy)$

$df(x,y) \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 1+y & x \end{bmatrix}$ $\det = 2x^2+1+y$

$\to$ lokal bijektiv für $2x^2+1 \neq -y$

$\int_{\Omega_\psi} y^3\, d\mu \quad \psi: [-1,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$= \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^3\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 1-2x^2+x^4\, dx$

$\int_{B_r(0)} d\mu,\ r \geq 0 \quad \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\, dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\, dx$

$= \int_{-1}^{1} 2r^2 \sqrt{1-z^2}\, dz \quad (z = \frac{x}{r}, dx = r\, dz) = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \sqrt{1-\sin^2}\, d\theta$

$(z = \sin\theta, dz = \cos\theta\, d\theta) = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)\, d\theta = 2r^2 \frac{\pi}{2}$ (ZF / part. Int)

$\int_\Omega e^{-y^2/2}\, d\mu \quad \Omega = \{(x,y) \mid |x| \leq |y| \leq 1\}$

$|y| < 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \quad |x| \leq |y| \Rightarrow -|y| \leq x \leq |y|$

$\Rightarrow \int_\Omega e^{-y^2/2}\, d\mu = \int_{-1}^{1} \int_{-|y|}^{|y|} e^{-y^2/2}\, dx\, dy = 2\int_{-1}^{1} |y| e^{-y^2/2}\, dy$

$= 2\int_{-1}^{0} (-y) e^{-y^2/2}\, dy + 2\int_0^1 y e^{-y^2/2}\, dy = 4\left[-e^{-y^2/2}\right]_0^1$

Gauss: $\vec{v} = (y\cos(y), x^3 + ze^z - 1, e^z)$. $\int_{\partial S} \vec{v}\cdot\vec{n}\, do$ für

$S = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, x+y \leq 2, x-y \leq 2, 0 \leq z \leq \log(1+x)\}$

$\to \operatorname{div}(v) = e^z$, $S = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 2, x-2 \leq y \leq 2-x, 0 \leq z \leq 1+\log\}$

$\int_{\partial S} \vec{v}\cdot\vec{n}\, do = \int_S e^z\, d\mu = \int_0^2 \int_{x-2}^{2-x} \int_0^{\log(1+x)} e^z\, dz\, dy\, dx$

Stokes: $\vec{v} = (z, x, y)$, $H = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$

Berechne $\int_H \operatorname{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}\, do$

(1) $\operatorname{rot}(v) = (1,1,1)$, $\Phi: [0,\pi/2]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ $(\theta,\phi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = (\sin^2\theta\cos\phi, \sin^2\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\theta)$

$\Rightarrow \int_H \operatorname{rot}(v)\cdot\vec{n}\, do = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\, d\phi\, d\theta$

(2) $\partial H =$ Kreis mit $r = 1$, Zentrum 0 $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ $t \mapsto \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}$

$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \int_H \operatorname{rot}(v)\cdot\vec{n}\, do = \int_{\partial H} \vec{v}\cdot d\vec{s}$

$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$

$f: B_1(0) \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$ Diffeomorphismus auf Bild?

f surjektiv (auf Bild), f injektiv, weil $|f(x,y)| = \frac{|(x,y)|}{\sqrt{1-|(x,y)|}}$

und $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ist injektiv (monoton steigend)

$df(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \begin{bmatrix} 1-y^2 & xy \\ xy & 1-x^2 \end{bmatrix}$ $\det = \frac{(1-x^2)(1-y^2)-x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^3}$

$= \dots \neq 0 \ \forall (x,y) \in B_1(0) \Rightarrow f$ ist Diffeomorphismus auf Bild

Flächeninhalt von $F = \{(x,y,z) \mid x^2+4y^2 < 8, z = \frac{1}{2}(x^2+2y^2)$

$\to$ Betrachte $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+2y^2)$ auf $B = \{x^2+4y^2 < 8\}$

Fläche: $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$. $\Phi_x = (1,0,x)$, $\Phi_y = (0,1,2y)$

$|\Phi_x \times \Phi_y| = |(-x,-2y,1)| = \sqrt{1+x^2+4y^2} \Rightarrow \int_F do = \int_B \sqrt{1+x^2+4y^2}\, dx\, dy$

Ellipsenkoordinaten: $x = 2\sqrt{2} r\cos\theta$, $y = \sqrt{2} r\sin\theta$, $dx\,dy = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$

$\Rightarrow \int_0^1\int_0^{2\pi} 4\sqrt{1+8r^2}\, d\theta\, dr = 8\pi\left[\frac{1}{24}(1+8r^2)^{3/2}\right]_0^1$

$\int_F \frac{1}{z^4}\, do$ für $F = \{(x,y,z) \mid z = (x^2+y^2)^{-1/2}, 1 \leq z \leq 2\}$

$\to f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2}$, $B = \{\frac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 2\} \Rightarrow \Phi: B \to \mathbb{R}^3$ $(x,y,f(x,y))$

$do = \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\, dx\, dy \quad \Rightarrow \int_F \frac{1}{z^4}\, do = \int_B (x^2+y^2)^2 \cdot \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\, dx\, dy$

Polarkoordinaten: $\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{1} r^3\sqrt{1+r^4}\, dr\, d\theta$

Fluss nach aussen von $v = (2x-yz, xz+3y, xy-z)$ durch Mantel des Kegels mit Spitze in 0, Öffnungswinkel $\frac{\pi}{4}$, Höhe 1 und Achse = z-Achse. $\to \Phi: [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ $(r,\theta) \mapsto$

$(r\cos\theta, r\sin\theta, r)$. $-\Phi_r \times \Phi_\theta = (+r\cos\theta, +r\sin\theta, -r)$, <u>negieren</u>

damit Vektor nach aussen zeigt. $\int_{\text{Kegel}} \vec{v}\cdot\vec{n}\, do = \int_0^1\int_0^{2\pi} v(\Phi)\cdot\vec{n}\, d\theta\, dr$

$F(x,y) = 4(x+y) - x^2 + 2y\arctan(y) - \log(y^2+1)$

$\partial_y F(x,y) = 4 + 2\arctan(y) \neq 0 \ \forall y$ weil $\arctan \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow$ y lässt sich überall lokal als $y(x)$ schreiben.

$y'(x) = -\partial_x F(x,y(x)) / \partial_y F(x,y(x)) = \frac{4-2x}{2+\arctan(y(x))}$

$y''(x) = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{2 + at(y(x)) - (x-2)\frac{y'(x)}{y^2+1}}{(2+at(y(x)))^2}$

Punkt x_0 kritisch $\Leftrightarrow y'(x_0) = 0$

$\Rightarrow y''(x_0) = 1/(2+at(y(x)))$

$f(x,y) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^l \quad l+k = n$

$$df(x,y) = \left[\underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{matrix}}_{l\times(n-l)} \quad \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ & & \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{matrix}}_{\substack{l\times l \\ d_y f}}\right]$$

$f(p_0) = 0$ und $\det(d_y f(p_0)) \neq 0 \Rightarrow f(x, y(x))$

$\Rightarrow dy(x) = -(d_y f(x,y(x)))^{-1} \cdot d_x f(x,y(x))$

Analysis I & II – Aufgaben

(a) Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist surjektiv,

(iii) g ist injektiv,

(iv) g ist surjektiv,

(v) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(a) Wenn die Folge (a_n) konvergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(b) Wenn die Folge (a_n) divergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(c) Eine Folge (a_n) mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(d) Eine beschränkte Folge (a_n), welche nicht konvergiert, hat mindestens zwei Häufungspunkte.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

Es existiert eine surjektive stetige Funktion $f : [a, b] \to]c, d[$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(d) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? (SCHWIERIG)

Es existiert eine stetige Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$, welche jeden Wert in ihrer Bildmenge genau zwei Mal annimmt.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(a) Man nehme an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergente Folgen von Funktionen $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktionen f, g sind. Wählen Sie alle korrekten Antworten aus:

(i) $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $f + g$

(ii) $(f_n g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen fg

(iii) Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n + g_n)$ gleichmässig gegen $f + g$

(iv) Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmässig gegen fg

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

Gegenbsp.: e^x ist streng monoton wachsend, aber nicht surjektiv.

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$2 \geq f'(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(b) Seien $f : Y \to X$ und $g : Z \to Y$ Funktionen. Entscheiden Sie, welche der nachfolgenden Aussagen für jedes solche Paar von Funktionen gilt.

	richtig	falsch
i) Wenn $f \circ g$ surjektiv ist, dann ist auch f surjektiv.	x	
ii) Wenn $f \circ g$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.		x
iii) Wenn $f \circ g$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.		x
iv) Wenn $f \circ g$ injektiv ist, dann ist auch g injektiv.	x	

(a) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auch eine Regelfunktion ('ruled function').

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar ausser in endlich vielen Punkten.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Es sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, welche alle in $]a, b[$ differenzierbar sind. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ der punktweise Grenzwert der f_n. Markiere alle der folgenden Bedingungen, welche hinreichend sind um sicherzustellen, dass f differenzierbar ist.

(i) Die Folge f_n konvergiert gleichmässig gegen f.

(ii) Die Folge f'_n konvergiert gleichmässig gegen eine Funktion.

(iii) Beide obigen Bedingungen zusammen.

(iv) Keine der Bedingungen ist hinreichend.

(a) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cup A_2} \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(iii) Weiss nicht.

(b) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(iii) Weiss nicht.

(c) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(iii) Weiss nicht.

(d) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cap A_2} \supset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(iii) Weiss nicht.

(a) Es sei:

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) := \sin(1/x)$$

Ist das Urbild von $[-1, 0[$ unter f relativ offen in $]0, 1]$?

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Kann man nicht sagen.

(b) Es sei:

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) := \sin(1/x)$$

Ist das Urbild von $]-1, 0[$ unter f relativ offen in $]0, 1]$?

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Kann man nicht sagen.

(c) Es sei:

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \sin(1/x)$$

Ist das Urbild von $[-1, 0[$ unter f relativ offen in $]0, \infty[$?

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Kann man nicht sagen.

(d) Es sei:

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \sin(1/x)$$

Ist das Urbild von $]-1, 0[$ unter f relativ offen in $]0, \infty[$?

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Kann man nicht sagen.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Wenn f an einer Stelle x_0 differenzierbar ist, so existieren an dieser Stelle auch alle Richtungsableitungen.

(ii) Wenn f an einer Stelle x_0 alle Richtungsableitungen besitzt, so ist die Funktion an dieser Stelle auch differenzierbar.

(iii) Existieren alle partiellen Ableitungen von f in Richtung der Koordinatenachsen in einer Umgebung eines Punktes x_0 und sind die partiellen Ableitungen stetig, dann ist f dort auch differenzierbar.

(iv) Wenn f differenzierbar ist in einer Umgebung eines Punktes x_0, so existieren dort auch die partiellen Ableitungen und diese sind in x_0 stetig.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Wenn eine Differentialform λ ein Potential f besitzt, so ist dieses eindeutig.

(ii) Jede Differentialform λ besitzt ein zugehöriges Potential in einer Umgebung jedes Punktes.

(iii) Wenn λ kein Potential besitzt, so existiert ein geschlossener Weg γ, d.h. mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, sodass $\int_\gamma \lambda \neq 0$.

(iv) Es seien λ_1, λ_2 zwei Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion mit $\lambda_2 = \lambda_1 + df$. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ: $\int_\gamma \lambda_1 = \int_\gamma \lambda_2$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Wenn f eine C^1-Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, so steht das Gradientenfeld ∇f stets senkrecht zu den Level-Mengen $M_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$, für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ mit $M_c \neq \emptyset$.

(ii) Das Gradientenfeld ∇f einer C^1-Funktion f zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f.

(iii) Wenn ein Vektorfeld "rotiert", z.B. $v(x, y) = (-y/|(x, y)|, x/|(x, y)|)$, dann ist dieses Vektorfeld nicht konservativ.

(iv) Sei $v = (v_1, v_2)$ ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Falls $\partial_y v_1 = \partial_x v_2$ gilt, so ist v konservativ.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt für Funktionen $f : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

(i) Wenn f stetig ist, so nimmt f sein Maximum und Minimum an.

(ii) Wenn f differenzierbar ist, so kann f sein Maximum und Minimum nur in Punkten $(x, y) \in B_1(0)$ annehmen, in denen $df(x, y) = (0, 0)$ gilt.

(iii) Es kann sein, dass f sein Maximum und/oder Minimum auf $\partial B_1(0) = S^1$ annimmt.

(iv) Um die Extrema von einer C^1-Funktion f auf $\partial B_1(0) = S^1$ zu bestimmen, kann man Lagrange-Multiplikatoren verwenden.

Ist die folgende Inklusion korrekt?

$(A_1 \cap A_2)^o \subset \mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2$

✔ Ja.