Schur-Zerlegung

Was, wenn eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ nicht diagonalisierbar ist? → Schur-Zerlegung

Ziel: $A = UTU^H$ mit
- T obere Dreiecksmatrix und EW auf der Diagonalen
- U unitär

(alles $n \times n$-Matrizen)

durch orthogonale Transformation (→ numerisch stabil EW berechnen)

Bem: Schur-Zerlegung ist nicht eindeutig!

Theorem:

1) "komplexe" Schur-Zerlegung

A $n \times n$-Matrix $\Rightarrow$ gibt $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (kann komplex sein, auch wenn A reell), so dass

$A = UTU^H$ $\quad (\Leftrightarrow U^H A U = T)$

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig $\Rightarrow$ gibt $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, so dass

$$U^T A U = T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{R_{11}}} & \cdots & \underline{\underline{R_{1m}}} \\ 0 & \underline{\underline{R_{22}}} & \cdots \underline{\underline{R_{2m}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \; R_{mm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

"obere Dreiecksblockmatrix"
mit $\underline{\underline{R_{ii}}}$ 1×1- oder 2×2-Matrix

1×1: $= \lambda_i$; 2×2: Matrix mit EW $\lambda_i, \overline{\lambda_i}$

<u>Bsp</u>: 1) $T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$ EW $\begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 7 \end{cases}$ $\quad \lambda_1 = 5$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_3 = 0 \end{array}$ $\Rightarrow EV_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $EV_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) $T = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$

$\Rightarrow \lambda_1 = 7$

Beweis durch Induktion (nach Dimension) & Konstruktion von $\underline{\underline{T}}$:

$n = 1$ klar

Induktionsannahme (IA): Aussage stimmt für $n-1$.

Sei $\underline{q_1}$ ein EV von $\underline{A}$ ($n\times n$-Matrix), $\|q_1\|_2 = 1$

$Aq_1 = t_{11} q_1$, t_{11} EW von A

Ziel: $AU = UT$ mit U orthogonal/unitär

Vervollständige q_1 zu ONB in $\mathbb{C}^n$ (z.B GV)

Vervollständige q_1 zu ONB in $\mathbb{C}^n$ (z.B GV)

$\Rightarrow Q_1 = [\underline{q_1}\ \underline{q_2} \cdots \underline{q_n}]$, unitär $Q_1^H Q_1 = I$

$$\Rightarrow T = Q_1^H A Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{q_1^H A q_1} & \boxed{q_1^H A q_2 \cdots q_1^H A q_n} \\ \hline \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \underline{\underline{A_2}}\ (n-1)\times(n-1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} t_{11} & * \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \underbrace{\underline{\underline{\hat{U}\hat{T}\hat{U}^H}}}_{\hookrightarrow (IA)} \end{array}\right]$$

$\square$: $q_1^H A q_1 \overset{EV}{=} q_1^H t_{11} q_1 = t_{11} q_1^H q_1 = t_{11}$

$\square$: $q_2^H A q_1 \overset{EV}{=} q_2^H t_{11} q_1 = t_{11} q_2^H q_1 \overset{orth.}{=} 0$ usw. für $3,\dots,n$

$\square$ Falls A $\overset{\text{(Hermite-)}}{\text{symmetrisch}}$: $q_1^H A q_2 = (q_2^H A q_1)^H = q_2^H A^H q_1 = t_{11} q_2^H q_1 = 0$ usw. für $3,\dots,n$
$\Rightarrow$ T Diagonalmatrix

Falls nicht: irgendetwas $\neq 0 \Rightarrow *$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \underline{\underline{\hat{U}}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} t_{11} & * \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \hat{T} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \hat{U}^H \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{Q_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \hat{U} \end{array}\right]}_{\underline{\underline{U}}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} t_{11} & * \\ \hline 0 & \hat{T} \end{array}\right]}_{\underline{\underline{T}}} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \hat{U}^H \end{array}\right] Q_1^H}_{\underline{\underline{U^H}}}$$

Normale Matrizen

Theorem: A normal $(A^H A = A A^H)$ $\Leftrightarrow$ A diagonalisierbar mit orthogonalen Transformation

Beweis: Basiert auf der Schur-Zerlegung:

$$A = QTQ^H \quad \text{mit } Q \text{ unitär, } T \text{ obere Dreiecksmatrix}$$

A normal : $A^H A = A A^H$

$$QT^H \underbrace{Q^H \cdot Q}_{I} TQ^H = QT \underbrace{Q^H \cdot Q}_{I} TQ^H$$

$$Q^H | \qquad QT^H T Q^H = QTT^H Q^H \qquad | Q$$

$$A \text{ normal} \Leftrightarrow T^H T = TT^H \Leftrightarrow T \text{ normal}$$

Aber: T normal und obere Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow$ T Diagonalmatrix

$$\Rightarrow T^H T = \begin{bmatrix} \boxed{|t_{11}|^2} & \boxed{\bar{t}_{11} t_{12}} & \boxed{\cdots} & \boxed{\bar{t}_{11} t_{1n}} \\ \boxed{t_{11} \bar{t}_{12}} & \boxed{|t_{12}|^2 + |t_{22}|^2} & \boxed{\cdots} & \boxed{\bar{t}_{12} t_{1n} + \bar{t}_{22} t_{2n}} \\ \cdots & & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T^H T = \begin{bmatrix} \boxed{t_{11}\bar{t}_{12}} & \boxed{|t_{12}|^2 + |t_{22}|^2} & \boxed{\cdots} & \boxed{\bar{t}_{12} t_{1n} + \bar{t}_{22} t_{2n}} \\ & \cdots & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T T^H = \begin{bmatrix} \boxed{\sum_{j=1}^{n} |t_{1j}|^2} & & \\ & \sum_{j=2}^{n} |t_{2j}|^2 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{|t_{11}|^2} = \boxed{\sum_{j=1}^{n} |t_{1j}|^2} \Leftrightarrow \sum_{j=2}^{n} |t_{1j}|^2 = 0$$

usw: $t_{ij} = 0$ für $j > i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$\Rightarrow$ Somit ist T eine Diagonalmatrix https://matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=51346&ref=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F