Basiswechsel und Lineare Abbildungen

→ Zardini S. 81

- Einzige Bedingung einer Basis eines Vektorraums ist die lineare Unabhängigkeit.

Alte Basis: A

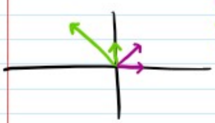
Neue Basis: B

① Schreibe jedes Element von B als lineare Kombination von Elementen von A

② Erhaltene Spaltenvektoren als Matrix $\underline{\underline{C}}$ schreiben

③ Löse $\boxed{\underline{\underline{C}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}$ $\boxed{\begin{bmatrix} \text{neue} \\ \text{Basismatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{neue} \\ \text{Koord.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{alte} \\ \text{Koord.} \end{bmatrix}}$

Nicht wirklich intuitiv, besser vorstellbar, wenn man sich Matrixmult. als lin. Komb. der Spaltenvektoren vorstellt.



$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x_B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \to \underline{x_A} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{x_B} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to x_B = \underline{\underline{C}}^{-1} x_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basiswechsel

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_1 \cdot x_1 = B_2 \cdot x_2}$$

B_1, B_2, x_1 bekannt

$$x_2 = B_2^{-1} B_1 x_1$$

2x2 Inverse berechnen:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Lineare Abbildung

Theoreme:

- F injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(F) = \{0\}$
- F bijektiv $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$
- $F: X \to Y$, X, Y endlich, dann:

$\dim \mathrm{Kern}\, F + \dim \mathrm{Bild}\, F = \dim X$ und $\dim \mathrm{Bild}\, F = \mathrm{Rang}(F)$

X, Y Vektorräume

$F: X \longrightarrow Y$ ist linear, falls

$$\left.\begin{array}{lll} ① \ F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) & \forall x_1, x_2 \in X \\ ② \ F(\alpha x) = \alpha F(x) & \forall x \in X \end{array}\right\} \text{Eigenschaften einer linearen Abbildung}$$

Abbildungsmatrix definieren

① Wende F auf alle Elemente der Basis von X

② Schreibe als lineare Kombination der Basis von Y

Abbildungsmatrix in andere Basis übersetzen

$$\begin{tikzcd}
\text{Basis } Z & X \arrow[l] \arrow[r, "\underline{A}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\underline{P}"] & \text{Basis } B \\
\text{Basis } \tilde{Z} & V \arrow[l] \arrow[u, "\underline{L}"] \arrow[r, "\underline{T}"'] & W \arrow[r] & \text{Basis } \tilde{B}
\end{tikzcd}$$

(kommutatives Diagramm)

$\tilde{Z} \cdot v = Z \cdot x$ (Koordinatentransformation) $\qquad B \cdot y = \tilde{B} w$

$\Rightarrow x = \underbrace{Z^{-1} \cdot \tilde{Z}}_{\underline{L}} \cdot v \qquad \Rightarrow w = \underbrace{\tilde{B}^{-1} \cdot B}_{\underline{P}} \, y$

$\underline{T} \cdot \underline{v} = \underline{w}$

$\underline{P} \cdot \underline{A} \cdot \underline{L} \cdot \underline{x} = w$

$\Rightarrow \underline{T} = \underline{P}\,\underline{A}\,\underline{L}$

Orthonormale Basis (ONB)

→ Gram-Schmidt bei QR-Zerlegung

Bsp P_5 mit $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$; span $\{1, 3x^4\}$

GV: $e_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1$

in abstrakten VR hat 1 nicht zwingend die Norm 1

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1,1 \rangle} = \left(\int_0^1 1\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{[x]_0^1} = 1$$

$$e_2' = 3x^4 - \langle 3x^4, 1 \rangle \cdot 1 = 3x^4 - \int_0^1 3x^4\, dx$$

$$= 3x^4 - \left[\tfrac{3}{5} x^5\right]_0^1 = 3x^4 - \tfrac{3}{5}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{15}{4} x^4 - \frac{3}{4}$$

$$\|e_2'\| = \left(\int_0^1 9x^8 - \tfrac{18}{5} x^4 + \tfrac{9}{25}\, dx\right)^{1/2} = \left(\left[x^9 - \tfrac{18}{25} x^5 + \tfrac{9}{25} x\right]_0^1\right)^{1/2} = \frac{4}{5}$$

Merkhilfe:

Matrix von $\tilde{B}$ nach B finden

$\Rightarrow \tilde{b}_i$ als lin Komb. von b_i schreiben

$\Rightarrow$ Linearkombination dann als Spaltenvektoren in die Matrix schreiben.