1. LR - Zerlegung

$$PA = LR$$

Permutationsmatrix

obere Dreiecksmatrix (Resultat GEV)

untere Dreiecksmatrix
Produkt der Eliminationsmatrizen

→ Praktisch, falls man $Ax=b$ für verschiedene b lösen will.

Vorgehen, um das LGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ zu lösen.

1. Finde $\underline{\underline{L}}, \underline{\underline{R}}, \underline{\underline{P}}$, so dass $PA = LR$.
2. Finde $\underline{c}$, so dass $\underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{b}$
   → L obere Zeilenstufenform → Vorwärtseinsetzen
3. Finde $\underline{x}$, so dass $\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$
   → R untere Zeilenstufenform → Rückwärtseinsetzen

Bsp

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \overbrace{\begin{matrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix}}^{\underline{\underline{A}}} \quad \overset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\Longleftrightarrow} \quad \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{matrix}$$

$$\overset{\mathrm{II}+(-2)\mathrm{I}}{\Longleftrightarrow} \quad \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{matrix} \quad \overset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\Longleftrightarrow} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}}_{\underline{\underline{P}}} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{L}}} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{R}}}$$

Vorzeichen ändern!

$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$:

$$\Rightarrow \underline{\underline{P}} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 3$
$\Rightarrow c_2 = 0$
$\Rightarrow 2 \cdot 3 + c_3 = 3$
$\Rightarrow c_3 = -3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 2x_1 - 2 + 3 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$
$\Rightarrow 3x_2 - 2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$
$\Rightarrow x_3 = 3$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Elliminations- und Permutationsmatrizen

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{P}}_{13} \underline{\underline{B}}$ vertauscht Zeilen 1 und 3 von B

$\underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{P}}_{13}$ vertauscht Spalten 1 und 3 von B

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{II} + (-3)\,\mathrm{I} \quad ; \quad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{III} + 2\,\mathrm{II}$$

2. QR-Zerlegung

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{Q}\,\underset{m\times n}{R}$$

Q: orthogonal/unitär

R: obere Dreiecksmatrix

→ Numerisch stabil, keine Rundungsfehler

$$Ax = b \quad \Rightarrow QRx = b \quad \Rightarrow Rx = Q^T b$$

2.1 QR durch Givens-Rotationen

Rotationsmatrix

→ Praktisch, falls $\underline{A}$ dünnbesetzt ist (viele Null-Einträge)

$$G_{ij} = \begin{array}{c} \\ i- \\ \\ j- \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad i \qquad\qquad\qquad j \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \cos & 0 \cdots 0 & \sin & & \\ \vdots & & & 1 \ddots 1 & \vdots & & \\ & & -\sin & 0 \cdots 0 & \cos & & \\ 0 & & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

G_{ij} dreht im Uhrzeigersinn, G_{ij}^T im Gegenuhrzeigersinn

Vorgehen:

① Jeden Eintrag unterhalb der Diagonale auf Null bringen, um obere Dreiecksmatrix zu erhalten

→ Eintrag $\underline{a_{ij}}$ mit $\underline{G_{ji}}$ auf Null bringen.

② Alle Rotationsmatrizen zusammen multipliziert ergeben $\underline{\underline{Q}}$.

Bsp $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

① a_{31} auf Null bringen $\Rightarrow G_{13} = \begin{bmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin & 0 & \cos \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{G_{13}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin & 0 & \cos \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos + \sin \\ 1 \\ \cos - \sin \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos\phi - \sin\phi = 0 \quad |: \cos\phi;\ -1$$

$$-\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -1$$

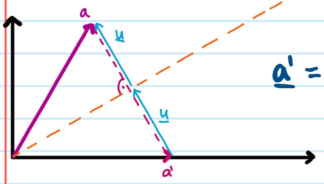
$$\tan\phi = 1 \quad \Rightarrow \phi = 45^\circ \quad \Rightarrow G_{13}(45^\circ) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

② Wiederholen für a_{21} und a_{32}

③ $\Rightarrow G_{23}\,G_{12}\,G_{13}\,A = R \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A = \underbrace{G_{13}^T\,G_{12}^T\,G_{23}^T}_{\underline{\underline{Q}}}\,R}$

2.2 QR mit Householder-Matrix

$\underline{u}$ ist der Normalenvektor der Spiegelungsebene



$$\underline{a}' = \underline{a} - 2\underline{u} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{a}')$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2}\left(\underline{a} - \begin{bmatrix} \|a\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{H}}\,\underline{a} = \underline{a}' = \begin{bmatrix} \|a\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$ (H orthogonal, Länge ändert nicht)

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - 2\,\frac{\overbrace{uu^T}^{\text{Matrix}}}{\underbrace{u^Tu}_{\text{Skalar}}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1} \begin{bmatrix} l & m & n \\ 0 & \boxed{j} & \boxed{p} \\ 0 & \boxed{q} & \boxed{r} \end{bmatrix} \xrightarrow[= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix}]{H_2} \begin{bmatrix} l & m & n \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{H_2}} & \\ 0 & & \end{bmatrix} \underline{\underline{H_1}}}_{Q^T} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$$

Bsp (Serie 4.7)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \frac{1}{2}\left(\underline{a_1} - \begin{bmatrix} \|a_1\| \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{H}} = I - \frac{2}{u^Tu}uu^T = I - (2\sqrt{2}+4)\begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{2}+3}{4} & \frac{\sqrt{2}-1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{4} & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{A}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

2.3 QR mit Gram-Schmidt-Verfahren

Ziel: QR-Zerlegung mit Spalten von Q als Vektoren einer ONB

$\longrightarrow$ Sehr einfach, wenn A bereits orthogonal ist.

Gram-Schmidt-Verfahren

Aus alter Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine neue orthonormale Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ bestimmen,

die denselben Vektorraum aufspannt. $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$ und $\langle b_i, b_i \rangle = 1$

Vorgehen:

① $b_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|}$

Orthogonalprojektion

② $c_2 = a_2 - \underbrace{\dfrac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}}_{=1\text{, wenn } b_1 \text{ bereits normiert}} b_1$; $\quad b_2 = \dfrac{c_2}{\|c_2\|}$

③ $c_3 = a_3 - \dfrac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \dfrac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2$; $\quad b_3 = \dfrac{c_3}{\|c_3\|}$

④ $c_i = a_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \langle a_i, b_j \rangle b_j$; $\quad b_i = \dfrac{c_i}{\|c_i\|}$

Bsp

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

① $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

② $c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\quad b_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

③ $c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\quad = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}_{1/3} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$; $\quad b_3 = \sqrt{\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$$

QR-Zerlegung:

Vorgehen:

→ Aus $\underline{A}$ mit GV eine ONB bestimmen.

Resultierende Matrix $\left[\underline{b_1} \cdots \underline{b_n}\right] = \underline{\underline{Q}}$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \langle q_1, a_1 \rangle & \langle q_1, a_2 \rangle & \cdots & \langle q_1, a_n \rangle \\ 0 & \langle q_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle q_2, a_n \rangle \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle q_n, a_n \rangle \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{A}$$

Unterschiede der QR-Zerlegungen

- Givens/Householder: stabil, aber teuer
  Q entsteht erst am Schluss, wenn alles zusammenmultipliziert wird
- Gram-Schmidt: Zwischenschritte nicht orthogonal → Rundungsfehler
  Aber: Q wird schrittweise aufgebaut
  ↳ Je nach Anwendung kann man früher aufhören