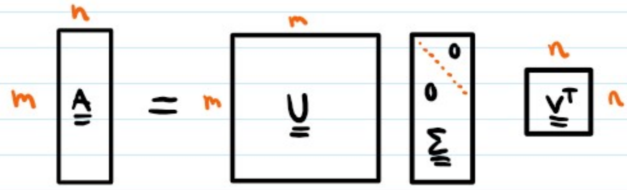
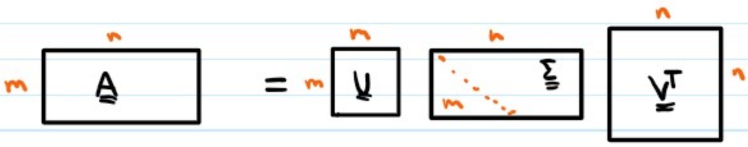
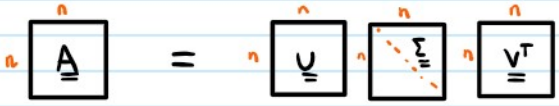
Singulärwertzerlegung (SVD)

→ verallgemeinerte Diagonalisierung

$$A = \underset{\text{orthogonal}}{U}\;\underset{\text{Diagonalmatrix, Nullzeilen erlaubt}}{\Sigma}\;\underset{\text{orthogonal}}{V^T}$$







$\underline{\underline{U}}$: EV von AA^T (symmetrisch => EV orthogonal)

$\underline{\underline{V}}$: EV von A^TA (symmetrisch => EV orthogonal)

⌐ A^TA und AA^T sind immer symmetrisch und positiv semidefinit → EW ≥ 0 ⌟

$\underline{\underline{\Sigma}}$: Diagonalmatrix → $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ von A^TA bzw. AA^T

(A^TA und AA^T haben dieselben EW, die grössere Matrix hat zusätzlich den EW 0.

Wichtig: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$, $k = \min\{m,n\}$

Bem: grösster Singulärwert = Eukl. Norm $\|A\|_2 = \sigma_1$

Frobeniusnorm $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$ (Eukl. Norm des Singulärwertvektors)

Nuclearnorm $\|A\|_N = \sigma_1 + \dots \sigma_r$

$\text{Rang}(A) = \# \sigma_i \neq 0$

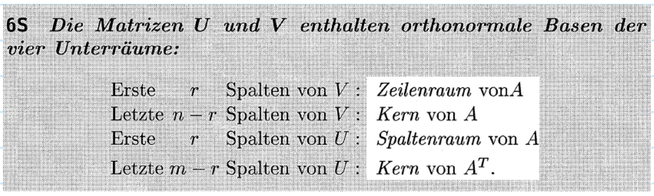
$A = \sum_i \sigma_i \cdot \underline{u_i} \cdot \underline{v_i}^T$ ($u_i \cdot v_i^T$ = Rang-1-Matrix)

$\text{Kern}(A) = \text{span}\{v_i^T\}$ für i mit $\sigma_i = 0$

$\text{Bild}(A) = \text{span}\{u_i\}$ für i mit $\sigma_i \neq 0$

$\text{Kern}(A) = \text{span}\{v_i\}$ für i mit $\sigma_i = 0$

$\text{Bild}(A) = \text{span}\{u_i\}$ für i mit $\sigma_i \neq 0$



6S *Die Matrizen U und V enthalten orthonormale Basen der vier Unterräume:*

Erste	r Spalten von V :	*Zeilenraum* von A
Letzte	$n - r$ Spalten von V :	*Kern* von A
Erste	r Spalten von U :	*Spaltenraum* von A
Letzte	$m - r$ Spalten von U :	*Kern* von A^T.

Strang. S. 372

$\underline{\underline{U}}$ aus $\underline{\underline{V}}$ bestimmen und umgekehrt:

$$\underline{u_i} = \frac{1}{\sigma_i} \underline{\underline{A}}\underline{v_i}$$

$$\underline{v_i} = \frac{1}{\sigma_i} \underline{\underline{A}}\underline{u_i}$$

Vorgehen (nach Karpfinger)

① Bestimme Eigenwerte von A^TA und ordne der Grösse nach. Normiere zugehörige Eigenvektoren, um $\underline{\underline{V}}$ zu erhalten.

② $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq \min\{m,n\}$

- $m \leq n$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- $n \leq m$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \sigma_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

③ $\underline{u_i} = \frac{1}{\sigma_i} \underline{\underline{A}}\underline{v_i}$, $1 \leq i \leq r$ falls $r < m$ (Nullzeilen/-Spalten in Σ), dann restliche Spalten von $\underline{\underline{U}}$ zu ONB ergänzen. (z.B Vektorprodukt)

Pseudoinverse (Penrose) $\underset{m \times n}{A}$ $\underset{n \times m}{A^+}$

(i) $AA^+A = A$ (ii) $A^+AA^+ = A^+$

(iii) $(A^+A)^H = A^+A$ (iv) $(AA^+)^H = AA^+$

! $AA^+ \neq I_m$, $A^+A \neq I_n$!

Ausgleichsrechnung mit SVD

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow U\Sigma V^T x = b$$

$$\Leftrightarrow \quad x^* = \underbrace{V\tilde{\Sigma}^{-1}U^T}_{\text{Pseudoinverse}} b$$

Alternative: $\|Ax-b\|_2^2 = \|r\|_2^2$ (Residuumsvektor)

$$= \|U\Sigma V^T x - b\|_2^2 = \|\Sigma V^T - U^T b\|_2^2 \qquad \ulcorner\, U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} \,\lrcorner$$

$$\Rightarrow \|\hat{\Sigma}V^T x - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2 = \|r\|_2^2$$

↖ Fehler, unabhängig von x

$$\Rightarrow x = V\hat{\Sigma}^{-1} d_0$$

(→ weniger Rechnen notwendig, weil Dimension der Matrix angepasst wurde.)

Bsp (aus: Prüfung Sommer 2020)

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 & 1/12 & 1/4 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 1/4 & -1/12 & -1/12 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = A^+ b = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$