Eigenwerte/Diagonalisierung

Ähnlichkeit: $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ sind ähnlich $\Leftrightarrow \exists S, S^{-1} \quad A = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{S}}$

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A ähnlich zu einer Diagonalmatrix

Ähnliche Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ haben dieselben Eigenwerte!

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert der Matrix $\underline{\underline{A}}$, falls es einen Vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$ gibt,

so dass $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \lambda \underline{x}$. $\underline{x}$ heisst Eigenvektor von $\underline{\underline{A}}$ zum Eigenwert λ.

EV sind nicht eindeutig. Die Menge der EV zu einem EW ist ein linearer Raum.

charakteristische Gleichung $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$

Matrixnorm

$|\lambda| \leq \|A\|$ $\rightarrow$ alle EW liegen in einem Kreis innerhalb der Matrixnorm 

Jede Matrix hat einen Eigenwert, da charakteristische Gleichung in $\mathbb{C}$ immer Nullstellen hat.

AM Algebraische Multiplizität Vielfachheit der Nullstelle zum jeweiligen EW in der charakteristischen Gleichung

GM Geometrische Multiplizität Dimension des Kerns der Matrix zum jeweiligen EW

$1 \leq GM \leq AM$

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A hat n linear unabhängige EV

A nicht diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists \lambda_i \quad GM_{\lambda_i} < AM_{\lambda_i}$

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A halbeinfach $(AM_{\lambda_i} = GM_{\lambda_i} \quad \forall \lambda_i)$

⚠ Eine reelle Matrix kann komplexe Eigenwerte haben!

Komplexe Eigenwerte treten immer als Paare komplex konjugierter Zahlen auf!

Theorem: λ EW von $\underline{\underline{A}} \Rightarrow \bar{\lambda}$ EW von $\underline{\underline{A}}$

Theorem: Eigenvektoren zu versch. Eigenwerten sind linear unabhängig

Symmetrische Matrizen / Spektralsatz

- $A^T = A \Rightarrow$ EW reell und EV stehen orthogonal zueinander.
- $A^T A = I \Rightarrow |EW| = 1$
- $A^T = -A \Rightarrow$ EW rein imaginär

Theorem

- $\underline{A} \in \overset{\mathbb{C}^{n\times n}}{\mathbb{R}^{n\times n}}$ hat n orthogonale EV $\Leftrightarrow$ $\overset{A^HA = AA^H}{A^TA = AA^T}$ [normale Matrix]
- A (Hermit) symmetrisch $\Rightarrow$ $A = U\Lambda U^H$ mit U unitär
- Für eine symmetrische, invertierbare Matrix ist die Anzahl EW >0 gleich der Anzahl Pivots.

Diagonalisierung $\approx$ Basiswechsel in den Eigenraum

$$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EV}}}{S}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{EW}}}{\Lambda}\, S^{-1} \qquad \text{bzw. } TDT^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T^{-1}"'] & B \\ C \arrow[r, "D"'] & C \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

Standardbasis

Eigenbasis

Bsp

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10}x$$

EW: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det = -\lambda\big((-\lambda)(2-\lambda) - (-2)(-1)\big) - (-2)\big((-2)(2-\lambda) - 2(1)\big) + \big((-2)(-2) - 2(-\lambda)\big)$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 2) + 6\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8) \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 4 \end{array} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_1 = 0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = -x_3 \\ \rightarrow x_2 = x_3 \\ \rightarrow x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \qquad E_0 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_3 = 0 \quad \begin{array}{l} x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = x_2 \end{array} \qquad E_{-2} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = TD^{10}T^{-1}x = TD^{10}z \qquad Tz = x$$

$$z: \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\text{GEV}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Symmetrisch positiv definite Matrizen (spd)

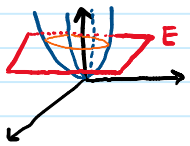
Def $\underline{A}$ heisst spd, falls A symmetrisch ist und alle EW > 0 (siehe auch Hurwitz-Kriterium)
($\Leftrightarrow$ alle Pivots > 0)

Def $\underline{A}$ heisst symmetrisch positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ $\underline{x}^T \underline{A}\, x \geq 0$ für alle x

Theorem: $\underline{A}$ spd $\Leftrightarrow \begin{cases} x^TAx \geq 0 & \text{für alle } x \\ x^TAx = 0 & \Rightarrow x = 0 \end{cases}$ ($\Leftrightarrow$ vgl. Skalarprodukt)

Anwendung: Ellipsen (je nach Dimension Ellipsoid)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ $\quad f(x_1, x_2) = x^TAx = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

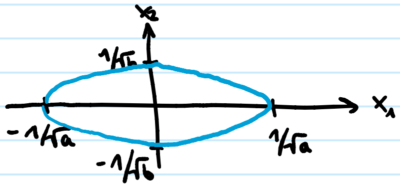


→ Ebenenschnitt ergibt eine Ellipse
↳ auf $x_3 = 1$

$A = S\Lambda S^T$ ← weil symmetrisch (Spektralsatz)

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^TAx &= x^TS\Lambda S^Tx \\ &= (S^Tx)^T \Lambda (S^Tx) \\ &= y^T \Lambda y \\ &= y_1^2\lambda_1 + y_2^2\lambda_2 \overset{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Ellipse: $ax_1^2 + bx_2^2 = 1$



$\Rightarrow$ Ellipse mit Halbachsen mit Längen $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, Achsen: y_1, y_2

↑ Matrix muss spd sein, da sonst die Wurzel nicht definiert wäre oder durch Null geteilt werden würde

(Falls die Höhe nicht 1 ist, sondern k, einfach Halbachsen mit $\sqrt{k}$ strecken)

Prüfungsaufgaben zu Eigenwerten

- Berechne e^A

$$e^A = Te^DT^{-1} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}T^{-1}$$

- Berechne A^{100}

$$A^{100} = (TDT^{-1})^{100} = \overbrace{(TD\underbrace{T^{-1})(T}_{I}DT^{-1})\cdots(TDT^{-1})}^{100\times} = TD^{100}T^{-1} = T\begin{bmatrix} \lambda_1^{100} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{100} \end{bmatrix}T^{-1}$$

- DGL 1. Ordnung $\quad \dot{y} = Ay$

① System entkoppeln → Diagonalisieren $\quad \dot{y} = TDT^{-1} y$

② Basiswechsel in Eigenbasis: $\underline{z} = T^{-1} \underline{y} \Rightarrow \underline{z}' = D\underline{z}$ $\left\{ \begin{array}{l} z_1' = d_1 z_1 \\ z_2' = d_2 z_2 \\ \vdots \\ z_n' = d_n z_n \end{array} \right.$

③ Euler-Ansatz: $z_1(t) = e^{\lambda t} c_1 \quad \Rightarrow d_i = \lambda_i$

$z_1'(t) = \lambda e^{\lambda t} c_1$

$\underline{z}(t) = e^{Dt} \underline{z_0} \qquad z_0 = z(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

④ Zurücktransformieren: $\underline{y} = \underline{\underline{T}}\underline{z} = Te^{Dt} z_0$

$\Rightarrow c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{a_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{a_2} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \underline{a_n}$

⑤ Anfangswertproblem:

$y(0) = c_1 \underline{t_1} + \dots + c_n \underline{t_n} \overset{!}{=} \underline{b}$ (geg. Vektor)

$\Rightarrow$ LGS mit Matrix $\underline{\underline{T}}$ und Unbekanntenvektor $\underline{c}$ lösen.