Komplexe Analysis

FS21 ETH Zürich
Prof. A. Iozzi

Robin Sieber
rosieber@ethz.ch

20. August 2021

1 Grundlagen

1.1 Quantoren

$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert ein
$\nexists$	es existiert kein
$\exists!$	es existiert genau ein

1.2 Logik

$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B (incl. OR)
$A \Rightarrow B$	A impliziert B
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann wenn B

$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A) \equiv (\neg A \vee B)$

1.3 Mengenoperationen

$x \in A$	Element von
$A \subset B$	Teilmenge von
$A \cap B$	Durchschnitt
$A \cup B$	Vereinigt
$A \cap B = \emptyset$	Disj. Vereinigung
$A \setminus B$	Differenz
$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	Sym. Differenz
A^c	Komplementär
$[a, b]$	Abgeschl. (inkl.)
$(a, b),\ ]a, b[$	Offen (exkl.)

1.4 Komplexe Zahlen

- $z = x + iy = re^{i\varphi}$
- $\overline{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$
- $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ (-i)^2 = -1,\ (-i)^3 = i,\ (-i)^4 = 1$
- $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$
- $z \cdot z' = xx' - yy' + i(x'y + y'x) = rr' \cdot e^{i(\varphi + \varphi')}$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$
- $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$
- $z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i\varphi n}$
- $\mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\quad \mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\arg(z) = \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\quad \mathrm{Arg}(z) = \varphi$ (Hauptwert)
- $\mathrm{Arg}(\varphi) = \begin{cases} \arctan(y/x) & z \text{ im 1. oder 4. Quadranten} \\ \arctan(y/x) + \pi & z \text{ im 2. Quadranten} \\ \arctan(y/x) - \pi & z \text{ im 3. Quadranten} \end{cases}$
- n-te Wurzel: $\sqrt[n]{z} = w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$
- $\log(z) = \log(|z|) + i\arg(z)$ (nicht eindeutig!)
- Hauptwert: $\mathrm{Log}(z) := \log(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$ stetig für $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (log-Gesetze gelten nicht)

2 Stetigkeit, Differenzierbarkeit & Holomorphie

2.1 Stetigkeit

f ist stetig $\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Bemerkung. *Der Limes muss für jede Richtung in der $\mathbb{C}$-Ebene gleich sein. Gegenbeweis einfach per Counter-Example, wenn 2 Richtungen nicht denselben Grenzwert haben. Mögliche Richtungen zum Überprüfen: $x = 0,\ y = 0,\ y = x,\ y = x^2$ etc.*

Verknüpfungen und Linearkombinationen stetiger Funktionen sind stetig.

2.2 Differenzierbarkeit

f ist $\mathbb{C}$-differenzierbar in z_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z_0)$ existiert.

Bemerkung. *$|z|, Re(z), Im(z), \overline{z}$ sind in keinem Punkt $\mathbb{C}$-diffbar. $|z|^2$ ist einzig an der Stelle 0 diffbar, aber nicht holomorph, weil nicht in einer Umgebung um 0 diffbar (durch obige lim-Def. überprüfen).*

Es ist möglich, dass eine Funktion stetige partielle Ableitungen besitzt, aber trotzdem nicht $\mathbb{C}$-differenzierbar ist.

2.3 Holomorphie

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heisst holomorph auf U, falls sie auf ganz U $\mathbb{C}$-differenzierbar ist. f heisst holomorph in z_0, falls sie in einer offenen Menge um z_0 holomorph ist. $\Rightarrow$ Holomorphie in einem einzigen Punkt ist per Definition nicht möglich.

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph. Dann existieren die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y ($\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$) und die Cauchy-Riemann Gleichungen (CRG) werden erfüllt:

- $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ | $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$
- $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = -iu_y(z) + v_y(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)$

Bedingung für Holomorphie:
Sei $f : U \to \mathbb{C}, z_0 \in U$. Falls $u_x, u_y, v_x, v_y \ldots$

1. in einer *offenen* Menge um z_0 existieren, und
2. in z_0 stetig sind und die CRG erfüllen

Dann existiert $f'(z_0)$, d.h. f ist $\mathbb{C}$-differenzierbar.

Ausserdem gilt für f holomorph:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$
- Falls f holomorph, sind auch alle Ableitungen $f^{(n)}$ holomorph.
- $|f(z)|$ konstant $\Rightarrow f(z)$ konstant
- $|f(z)|$ kann im Inneren einer Menge kein Maximum annehmen. Ausser $f(z)$ ist konstant. ($\to$ vgl. Max-Mod., Kap. 6.2)

Insbesondere sind Polynome, $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh$ holomorph auf $\mathbb{C}$.

3 Integrale

3.1 Kurvenintegrale

3.1.1 Stammfunktionen

Eine Menge U heisst wegzusammenhängend (wzh.), falls es für zwei bel. Punkte $z_1, z_2 \in U$ einen Pfad gibt, der die zwei Punkte verbindet.

Sei U wzh. und offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. Für jede geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ gilt $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$
2. Das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ ist unabhängig vom Pfad
3. Es gibt eine $\mathbb{C}$-diffbare Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$

Falls eine (und deshalb jede) der Aussagen gilt, heisst F Stammfunktion von f und ist bis auf eine Konstante eindeutig.

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

3.1.2 Kurvenintegral

Ein Pfad ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Ein Pfad ist einfach, wenn er keine Selbstschnitte hat und geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und sei $\gamma : [a,b] \to U$ diffbar.

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\mathrm{d}t$$

bzw. auch $= \int_a^b \mathrm{Re}(f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t))\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t))\mathrm{d}t$
γ darf an endlich vielen Stellen nur stetig und nicht diffbar sein.

Es gelten folgende Eigenschaften:

(KI1) (Linearität) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int_\gamma [\alpha f(z) + \beta g(z)]\mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$$

(KI2) Sei $\gamma, \delta : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\delta(t) := \gamma(1-t)$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int_\delta f(z)\mathrm{d}z$$

(KI3) Sei $\delta : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(1) = \delta(0)$ mit der Verkettung

$$(\gamma * \delta)(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \delta(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma*\delta} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \int_\delta f(z)\mathrm{d}z$$

(KI4) (Unabhängigkeit der Parametrisierung) Sei δ eine andere Parametrisierung des Bildes von γ. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\delta f(z)\mathrm{d}z$$

(KI5) Sei U wzh.

$$\left|\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)|\mathrm{d}t$$

(KI6) Sei $L = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\mathrm{d}t$ die Länge von γ. Wenn $|f(z)| \le M \ \forall z \in U$, dann folgt

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \le M \cdot L$$

3.2 Cauchy'scher Integralsatz

3.2.1 Einfach zusammenhängend

- Eine Menge U ist einfach zusammenhängend (ezh.) $\Leftrightarrow$ wzh. $\wedge$ bel. zwei Pfade von a nach b sind homotop ("deformierbar")
- $U \subset \mathbb{C}$ ezh. und offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow$ f besitzt Stammfunktion (Achtung: $\not\Leftarrow$)

3.2.2 Cauchy Integralformel

$z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ ezh. und offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ umläuft z_0 einmal in positiver Richtung, dann gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z \quad \text{und}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

Bemerkung. *Der Integrand muss nicht holomorph sein, nur f selbst. Ansonsten wäre das Integral sowieso 0. CIF funktioniert nur für Pole, für andere Singularitäten $\to$ Residuensatz*

3.3 Residuensatz

Sei γ positiv orientiert und geschlossen.

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_i W(\gamma, z_i) \cdot \mathrm{Res}(f, z_i)$$

Windungszahl $W(\gamma, z) = \#$Umrundungen von γ um z im GUZ

3.3.1 Arten von Singularitäten $\to$ vgl. 4.3

3.3.2 Residuenberechnung an Polstellen

1. Ordnung: $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$

n. Ordnung: $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(n-1)!}}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}((z-z_0)^n f(z))$

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ für $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ und p, q analytisch, wobei z_0 eine einfache Nullstelle von q ist.

Wenn z_0 eine Singularität n-ter Ordnung ist, muss $f(z) \cdot (z - z_0)^n$ an der Stelle $z_0 \neq 0$ sein. Falls dies nicht der Fall ist, muss das Residuum mittels Laurentreihe berechnet werden.
Bsp.: $\sinh(z)/z^4 \Rightarrow g(z) = z^4 f(z) = \sinh(z)$ mit $g(0) = 0 \Rightarrow$ mit Laurentreihe erhält man $\mathrm{Res}(f, 0) = 1/3!$

3.3.3 Residuenberechnung an anderen Singularitäten

$\to$ Funktion in Laurentreihe entwickeln, dann Koeffizient c_{-1} ablesen

3.4 Uneigentliche Integrale

Der Limes

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z =: P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z$$

wird als Cauchy-Hauptwert (P.V. = principal value) des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z$ bezeichnet.
Definition des "normalen" uneigentlichen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\mathrm{d}x$$

Falls beide Integrale auf der rechten Seite existieren, existiert auch der $P.V.$, umgekehrt gilt die Implikation nicht! Bsp.: $P.V.\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x = 0$, aber $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x = -\infty + \infty$ (unbestimmt)
*Für **gerade** Funktionen ist der Cauchy-Hauptwert = uneigentliches Integral.*

3.4.1 Uneigentliche Integrale mit dem Residuensatz berechnen

Ziel: Integral mit dem Residuensatz berechnen über dem Pfad $\gamma(t) = \gamma_1(t) * \gamma_2(t)$ mit $\gamma_1(t) = -R + 2Rt$ ($t \in [0,1]$) und $\gamma_2(t) = Re^{i\pi t}$ ($t \in [0,1]$) Es gilt

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Res}(f, z_k),$$

falls $\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$. Dies gilt genau dann, wenn ($f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$):

1. $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}h(z)$ mit p, q Polynomen
2. $\deg(q) \ge \deg(p) + 2$
3. $|h(z)| < C$ auf $\{z \mid \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$ (beschränkt)
4. $q(z)$ hat keine Nullstelle auf der x-Achse

Bemerkung. *Das Ganze gilt auch für die untere Hälfte des Koordinatensystems. Die Formel und Pfade müsssen einfach entsprechend angepasst werden.*

4 Reihenentwicklung

4.1 Taylorreihe

Sei $f : B(z_0, R_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $R_0 > 0$. Dann konvergiert folgende Reihe $\forall z \in B(z_0, R_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

4.2 Laurentreihe

Sei f holomorph auf dem Kreisring $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Dann gilt folgende Reihenentwicklung:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und $b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, bzw $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ wobei γ ein geschlossener Pfad im Kreisring ist (im GUZ).
Spezialfall: $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$

4.3 Singularitäten

Sei $z_0 \in U, f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls f in z_0 nicht definiert oder analytisch ist, heisst z_0 eine Singularität. Der Punkt z_0 ist eine isolierte Singularität von f, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass f keine weitere Singularität in der Scheibe $B(z_0, \epsilon)$ hat.

Beispiel. *$\sin \frac{1}{z}$ hat im Ursprung eine isolierte Singularität. $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ hat im Ursprung eine Singularität, die nicht isoliert ist (Singularitäten bei $1/(n\pi)$, es lässt sich also keine Scheibe um 0 finden, in der es keine Singularität hat.*

4.3.1 Arten von Singularitäten

Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und f holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$. Schreiben wir $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ für jedes $z \in B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ für $R > 0$, so definiert man:

1. z_0 ist eine wesentliche Singularität, falls $c_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$
2. z_0 ist ein Pol der Ordnung $m \geq 1$, falls $c_{-m} \neq 0$ und $c_n = 0$ für alle $n < -m$. Falls $m = 1$, heisst z_0 einfacher Pol.
3. z_0 ist eine hebbare Singularität, falls $c_n = 0$ für alle $n < 0$
4. z_0 ist eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 0$, falls $c_m \neq 0$ und $c_n = 0$ für alle $n < m$

Lemma: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph an der Stelle $z_0 \in U$. f hat an der Stelle z_0 eine NS der Ordnung $m \Leftrightarrow \exists g : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ und $g(z_0) \neq 0$.
Korollar: Seien p, q holomorph an der Stelle z_0 mit $p(z_0) \neq 0$ und sei z_0 eine Nullstelle der Ordnung m für q. Dann ist z_0 ein Pol der Ordnung m für $\frac{p(z)}{q(z)}$.
Lemma: Sei $f : B(z_0, \epsilon) \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $f(z_0) = 0$. Entweder ist $f(z) \equiv 0$ oder z_0 ist eine isolierte NS.
Satz: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und U wzh. Falls $f(z) \equiv 0$ auf einer offenen Menge oder auf einer Geradenstrecke, ist $f(z) \equiv 0$ auf U.
Korollar: Sei U offen, $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls $f(z) = g(z)$ auf einer offenen Menge oder einer Geradenstrecke in U, dann gilt $f(z) \equiv g(z)$. *Gilt nicht für reellwertige Funktionen!*

4.3.2 Satz von Picard

Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f holomorph. Für jedes $\epsilon > 0$ nimmt $f(z)$ auf $B(z_0, \epsilon)$ alle komplexen Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

4.4 Fourierreihen

4.4.1 Periodizität

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Falls es $p \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(t + p) = f(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$$

heisst f periodisch und p heisst die Periode von f. Die Frequenz von f ist $1/p$. Die kleinste Periode heisst Fundamentalperiode.

Sei f eine Funktion, die auf einem endlichen Intervall definiert ist. Man kann f periodisch fortsetzen: z.B.

$$f(t) := \begin{cases} 1 & t \in]0, \frac{L}{2}] \\ 0 & t \in]\frac{L}{2}, L[\end{cases}$$

Man kann als f als L-periodische Funktion fortsetzen oder als $2L$-periodische Funktion, wobei f entweder als gerade oder ungerade Funktion fortgesetzt wird.

4.4.2 Trigonometrisches Polynom

Ein trig. Polynom des N-ten Grades ist eine endliche Linearkombination der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) \Leftrightarrow \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}t}$$

Es gelten folgende Orthogonalitätsrelationen ($n, m \in \mathbb{N}_0$):

1. $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}t\right) \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \\ 2L & n = m = 0 \end{cases}$$
2. $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}t\right) \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \end{cases}$$
3. $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}t\right) \mathrm{d}t = 0\ \forall n, m$$

4.4.3 Fourierreihe

Sei f eine $2L$-periodische Funktion. Es gilt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}t}$$

mit

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos\left(\frac{m\pi}{L}t\right) \mathrm{d}t, \text{ falls } m \geq 0$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin\left(\frac{m\pi}{L}t\right) \mathrm{d}t, \text{ falls } m > 0$$

$$c_m = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{i\frac{m\pi}{L}t} \mathrm{d}t, \text{ falls } m \in \mathbb{Z}$$

Ausserdem gilt folgendes:

- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$
- $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$
- $a_n = c_n + c_{-n}$
- $b_n = i(c_n - c_{-n})$
- $a_n \equiv 0$, falls f ungerade
- $b_n \equiv 0$, falls f gerade

An einer Sprungstelle von f ist der zugehörige der Wert der FR $\frac{1}{2}\left(\lim_{t \to t_0^-} f(t) + \lim_{t \to t_0^+} f(t)\right)$

Satz: Sei f eine $2L$-periodische Funktion auf $[-L, L]$, die stückweise stetig ist und die linke und rechte Ableitung an jedem Punkt in $[-L, L]$ hat. Dann besitzt f genau eine FR, durch welche sie für alle Werte dargestellt wird (Eindeutigkeit der FR).

4.4.4 Satz von Parseval

Das trig. Polynom des Grades N, das am besten eine 2π-periodische Funktion f auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ approximiert (kleinster quadr. Fehler), ist die partielle Summe s_N der Fourier-Reihenentwicklung von f. Der kleinste Wert $E_N^*(f)$ von dem quadratischen Fehler ist

$$E_N^*(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

und $E_N^*(f)$ ist monoton abnehmend mit zunehmendem N.
Daraus folgt die Parseval'sche Identität

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

bzw. in reeller Form: $\frac{1}{2}\left(a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right)$

4.4.5 Prüfungsaufgabe

Wenn man an der Prüfung eine Reihe berechnen muss:

1. n kommt in der FR mit derselben Potenz vor wie in der gesuchten Reihe $\Rightarrow t$ geschickt wählen und Reihen vergleichen
2. n kommt irgendwie quadratisch vor $\Rightarrow$ Parseval anwenden und Integral berechnen

5 Transformationen

5.1 Fourier-Transformation

5.1.1 Absolute Intregrierbarkeit

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst absolut integrierbar, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

Absolut integrierbar: $e^{-x^2}, \frac{1}{1+x^2}, \chi_{[-a,a]}$
Nicht absolut integrierbar: $\sin, \cos, \exp, x^2, 1$

5.1.2 Satz von Dirichlet

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, absolut integrierbare Funktion, die an jedem Punkt eine linke und rechte Ableitung hat, sowie Frequenzvariable ω. An jedem Punkt, wo f stetig ist, gilt:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} \mathrm{d}v \right) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Das innere Integral spielt die Rolle der Fourier-Koeffizienten. Falls f an einer Stelle nicht stetig ist, gilt, wie bei der FR auch, dass die FT den Mittelwert bei der Sprungstelle annimmt.

5.1.3 Fourier-Transformation

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion. Die Fourier-Transformation $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$\mathcal{F}[f](t) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$

5.1.4 Inverse Fourier-Transformation

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $\hat{f}$ absolut integrierbar. Dann ist

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

5.1.5 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sowie $\hat{f}, f', f^{(n)}, \ldots$ absolut integrierbar. Dann gilt:

(FT1) (Linearität) Für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$(\widehat{\alpha f + \beta g})(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$$

(FT2) (Verschiebung in der t-Variablen) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $T_a f(t) := f(t-a)$. Es gilt

$$\widehat{T_a f}(\omega) = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega)$$

(FT3) (Verschiebung in der ω-Variablen) Sei $a \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\widehat{e^{iat} f(t)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$$

(FT4) (Streckung) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $S_a f(t) := f(at)$. Dann gilt

$$\widehat{S_a f}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(FT5) Es gilt $\hat{\hat{f}}(t) \equiv f(-t)$

(FT6) ($\mathcal{F}$ der Ableitung) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

(FT7) (Ableitung von $\mathcal{F}$)

$$\widehat{t^n f(t)}(\omega) = i^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n} \hat{f}(\omega)$$

5.1.6 Faltung

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zwei absolut integrierbare Funktionen.

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) \mathrm{d}t$$

Die Faltung von f mit g ist ein gewichteter Mittelwert von f mit Gewicht gegeben durch g.

Wichtige Faltung: $\chi_{[0,1]} * g(x) = \int_{x-1}^{x} g(t)\mathrm{d}t$ für $g(t) = 0$ für $t < 0$

Es gelten folgende Eigenschaften:

(F1) (Kommutativität)

$$f * g = g * f$$

(F2) (Assoziativität)

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

(F3) (Distributivität) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h$$

(F4) Falls $T_a(f)(x) := f(x-a)$ wie in (FT2) definiert ist, gilt $\forall a \in \mathbb{R}$

$$(T_a f) * g = T_a(f * g)$$

(F5) ($\mathcal{F}$ der Faltung)

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

(F5') ($\mathcal{F}^{-1}$ der Faltung)

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(f) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g)$$

(F6) ($\mathcal{F}$ des Produkts)

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

(F6') ($\mathcal{F}^{-1}$ des Produkts)

$$\mathcal{F}^{-1}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$$

5.1.7 Satz von Plancherel

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion, deren Fourier-Transformation auch absolut integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

Physikalische Interpretation: Energieerhaltung eines Zeitsignals unter der FT.

5.2 Laplace-Transformation

5.2.1 Originalraum

Wir nennen ε den Originalraum und eine Funktion $f \in \varepsilon$ Originalfunktion. Funktionen in ε erfüllen folgende Eigenschaften:

i. $f(t) = 0, \quad \forall t < 0$

ii. $\exists \sigma \in \mathbb{R}, \exists M > 0, \quad |f(t)| \le M e^{\sigma t}$.
Das kleinste σ, das die Ungleichung erfüllt, heisst *Wachstumskoeffizient*.

iii. f ist stückweise stetig und die Grenzwerte

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) \text{ und } \lim_{t \to t_0^+} f(t)$$

existieren an jeder Sprungstelle $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, insb. an $t_0 = 0^+$.

Die Laplace-Transformation ist für $f \in \varepsilon$ auf der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \sigma\}$ wohldefiniert und analytisch.

5.2.2 Heaviside Sprungfunktion

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

f mit H multiplizieren, falls Bedingung (i.) nicht erfüllt ist.

5.2.3 Transformation

Sei $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann ist Laplace-Transformation von f:

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

5.2.4 Rücktransformation

Sei $f \in \varepsilon$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

wobei $x > \sigma$ (Wachstumsfaktor, siehe oben)

5.2.5 Eigenschaften der Laplace-Transformation

(LT1) Linearität

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha\mathcal{L}[f](s) + \beta\mathcal{L}[g](s)$$

(LT2) Verschiebung in der t-Variablen. $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[f(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$$

(LT3) Verschiebung in der s-Variablen. $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-\alpha)$$

(LT4) Ähnlichkeit. $a \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

(LT5) Transformation der Ableitung ($\rightarrow$ vgl. auch Tabelle)

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

(LT6) Ableitung der Transformation

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s) = (-1)^n\mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

(LT7) Transformation eines Integrals

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$$

(LT8) Sei σ_f der Wachstumkoeffizient von f. Für $x > \sigma_f$ gilt

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](x+iy) = \int_{x+iy}^{\infty+iy}\mathcal{L}[f](\tau)d\tau$$

(LT9) Sei $T > 0$ und f eine T-periodische Funktion. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Res}(s) > 0$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

(LT10) Faltungssatz. $f, g \in \varepsilon$

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$$

(LT11) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) = e^{-as}$$

5.2.6 DGL mit Laplace lösen

- DGL auf beiden Seiten mit Hilfe der Tabelle Laplace transformieren. (Linearität ausnutzen!)
- Anfangswerte einsetzen.
- DGL nach $Y(s)$ auflösen.
- Ergebnis mit Tabelle rücktransformieren. Oft mit PBZ.

Vorteil: DGL können direkt mit Anfangswerten betrachtet werden.
Nachteil: Liefert keine allgemeine Lösung

5.2.7 Transformationstabelle

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$e^{\alpha t}f(t)$	$F(s-\alpha)$
$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)\cdot G(s)$
$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(t)$

5.2.8 Diruc Delta

Sei $\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon}\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}$. Diruc-Delta ist definiert wie folgt:

$$\delta(t) := \lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(t) = \begin{cases}\infty & t = 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Verschiebung um a: $\delta(t-a)$ hat Max. bei a.
Es gelten folgende Eigenschaften:

(D1)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

(D2) Für jede stetige Funktion f gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

vgl. auch Faltung $\delta_\epsilon * f(t_0)$ als gewichtetes Mittel zwischen dem Intervall.

(D3)

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(s)\mathrm{d}s$$

5.2.9 Partialbruchzerlegung

Nützlich um Integrale der Form $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$ zu berechnen

1. Polynomdivison (falls $n > m$) mit Rest (ganzrational + echt gebrochen)
2. Nullstellen von $Q_m(x)$ berechnen
3. Nullstellen ihrem Partialbruch zuordnen
   - reelle r-fache Nullstelle x_0
     $$\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_0)^r}$$
   - komplexe r-fache Nullstelle
     $$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+2ax+b)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+2ax+b)^2} + \dots + \frac{A_rx+B_r}{(x^2+2ax+b)^r}$$
4. Gleichung aufstellen
5. Trick: Nullstellen einsetzen und so die Zähler einfacher Nullstellen bzw. höchster Nullstellen berechnen

   Beispiel

   $$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)} \qquad x = A(x-1) + B(x+1)$$

   $$(x_0 = 1) \qquad 1 = 0 + 2B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

   $$(x_1 = -1) \qquad -1 = -2A + 0 \rightarrow A = \frac{1}{2}$$
6. Koeffizientenvergleich

6 Sätze

6.1 Mittelwertsatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$, so dass $B(z_0, r) \subset U$. Dann gilt

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + r\exp(2\pi it))\mathrm{d}t$$

$f(z_0)$ ist der Mittelwert von f auf dem gewählten Kreis.

6.2 Maximum-Modulus-Prinzip

Sei U wzh.

- f holomorph $\wedge$ $\neg$konst $\Rightarrow$ $\nexists$ Maximum auf U ($\nexists z_0 : |f(z)| < |f(z_0)|$)
- $\exists$ Maximum auf $U \Rightarrow f$ $\neg$holomorph $\vee$ konstant

Korollar: f nicht konst, stetig auf K (kompakt), holomorph auf $K^\circ \Rightarrow \max_z|f(z)|$ hat $z \in \partial K$ (Max. wird auf dem Rand erreicht)

6.3 Satz von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion (holomorph auf $\mathbb{C}$). Falls $|f(z)|$ beschränkt ist, ist f konstant.

6.4 Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion ist gerade, wenn $f(z) = f(-z)\ \forall z$.
Eine Funktion ist ungerade, wenn $f(z) = -f(-z)\ \forall z$.
Ausserdem:

- gerade · ungerade = ungerade ($x^2 \cdot x = x^3$)
- gerade · gerade = gerade ($x^2 \cdot x^2 = x^4$)
- ungerade · ungerade = gerade ($x \cdot x = x^2$)
- $\int_{-L}^{L}$ ungerade $\equiv 0$
- $\int_{-L}^{L}$ gerade $\equiv 2\int_0^L$ gerade

7 Folgen

7.1 Konvergenzverhalten von Folgen

7.1.1 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{Q}^+$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \forall q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

7.1.2 Berechnen von Grenzwerten

- **Brüche:** Durch die grösste Potenz des Zählers/Nenners teilen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 7n}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{7}{n^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- **Wurzelterme:** Mit der 3. binomischen Formel erweitern

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad \| \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

- **Sonstige Terme:** Falls a_n monoton (fallend/steigend) ist, dann suche eine untere Schranke $c_1(n) \leq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ und eine obere Schranke $c_2(n) \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} c_1(n) = \lim_{n\to\infty} c_2(n) = c$.
  Es gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

$$a_n = \sqrt[n]{u^n + v^n} \qquad u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad u > v$$

Untere Schranke: $a_n \geq \sqrt[n]{u^n} = u = c_1(n)$

Obere Schranke: $a_n \leq \sqrt[n]{2u^n} = \sqrt[n]{2}u = c_2(n)$

$$\lim_{n\to\infty} c_1(n) = \lim_{n\to\infty} c_2(n) = u \to \lim_{n\to\infty} a_n = u$$

8 Reihen

8.1 Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q} \qquad q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

8.2 Allgemeine harmonische Reihe (Dirichlet-Reihe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert für} & s > 1 \\ \text{divergiert für} & s \leq 1 \end{cases}$$

8.3 Binomische Reihe

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k \qquad \alpha \in \mathbb{C} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Anmerkungen

i) Konvergenz, falls $x > 0$ und $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$

*ii) Die Definition der allgemeinen Binomialkoeffizienten ist im Kapitel **??** auf Seite **??***

8.4 Cauchy-Produktformel

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

8.5 Konvergenzkriterien

8.5.1 Nullfolgenkriterium

Falls a_n keine Nullfolge bildet, so divergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

8.5.2 Leibnitzkriterium

Falls a_n eine monoton fallende Nullfolge bildet, dann konvergiert auch die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Zu zeigen:

i) $a_n \geq 0$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

iii) $a_{n+1} - a_n \leq 0$ oder $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

8.5.3 Majorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \leq b_n\ \forall n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

8.5.4 Minorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine divergente Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \geq b_n\ \forall n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (meistens ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ die harmonische Reihe)

8.5.5 Quotientenkriterium

$$Q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & Q > 1 \\ \text{konvergiert absolut} & Q < 1 \\ \text{keine Aussage} & Q = 1 \end{cases}$$

8.5.6 Wurzelkriterium

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & L > 1 \\ \text{konvergiert absolut} & L < 1 \\ \text{keine Aussage} & L = 1 \end{cases}$$

8.5.7 Integralkriterium

Sei $p \in \mathbb{Z}$, $f : [p, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend und das Integral $\int_p^\infty f(x)\mathrm{d}x$ existiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ und es gilt die Abschätzung

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^\infty f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

8.6 Potenzreihe

Eine Potenzreihe hat folgende Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad x_0 : \text{Entwicklungspunkt}$$

8.6.1 Wichtige Potenzreihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\operatorname{Log}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n \text{ konvergiert für } |z-1| < 1$$

8.6.2 Konvergenzradius

Sei R der Konvergenzradius einer Potenzreihe. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut $\forall x \in \mathbb{C}$, $|x - x_0| < R$ und divergiert für $|x - x_0| > R$.

Anmerkungen

i) Der Konvergenzradius berechnet sich wie folgt: $R = \frac{1}{Q} = \frac{1}{L}$

ii) Der Rand $|x - x_0| = R$ *muss separat betrachtet werden*

iii) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \to$ *nur* a_n *anschauen*

9 Differentialrechnung

9.1 Eindimensionale Differentialrechnung

Eine Funktion heisst differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert (und somit eindeutig ist)

9.1.1 Regeln

- **Produktregel**

$$(f \cdot h)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2}$$

- **Kettenregel**

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- **Umkehrregel**

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

9.1.2 entwicklung

- **Taylorpolynom**

$$T_N f(x; x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- **Fehlerabschätzung**

$$R_N(x; x_0) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1} \qquad \xi \in [x_0, x]$$

- **Taylorreihe**

$$Tf(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Anmerkung

i) Falls die Taylorreihe mit der Potenzreihe übereinstimmt, nennt man die Funktion analytisch und es gilt $Tf(x, x_0) = f(x)$

10 Integralrechnung

10.1 Integralrechnung einer Variablen

10.1.1 Riemannsche Summen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left(akn + bn^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(akn + bn^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{ak}{n} + b\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax + b}} dx$$

10.1.2 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

f so wählen, dass f' das Integral vereinfacht und g sollte einfach integrierbar sein.
Falls man kein Produkt hat, kann man auch 1 als konstante Funktion verwenden: $\int_a^b \log(x)\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \cdot \log(x)\mathrm{d}x = [x\log(x)]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x}\mathrm{d}x$

10.1.3 Substitution

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{f(u)}{u'(x)}\mathrm{d}u \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x)$$

Anmerkungen

i) Wenn die Stammfunktion gesucht ist, dann wird am Schluss wieder rücksubstituiert

ii) Im Kapitel 12.5.1 auf Seite 8 findet man wichtige Substitutionen

10.1.4 Rationale Funktionen

- **Reelle r-fache Nullstelle**

$$\int \frac{A}{(x - x_0)^r}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{A}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C & r > 1 \\ A\ln|x - x_0| + C & r = 1 \end{cases}$$

- **Komplexe einfache Nullstelle** $(b > a^2)$

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + 2ax + b}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2 + 2ax + b) + \frac{B - aA}{\sqrt{b - a^2}}\arctan\left(\frac{x + a}{\sqrt{b - a^2}}\right) + C$$

Anmerkung

i) Das Integral kann mit quadratischer Ergänzung sowie mit geeigneten Substitutionen gelöst werden (Kapitel 12.5.1 Seite 8)

10.1.5 Uneigentliche Integrale

Sei $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ und gilt $-\infty \le a < \alpha < c < \beta < b \le \infty$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\beta \to b} \int_c^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

10.1.6 x-einfach/ y-einfach

- **x-einfacher Bereich**

  Etwas der Form
  $$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|a < x < b, g(x) < y < h(x)\right\}$$

- **y-einfacher Bereich**

  Etwas der Form
  $$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|a < y < b, g(y) < x < h(y)\right\}$$

10.1.7 Rotationskörper

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x$$

11 Wichtige Sätze aus Analysis I&II

11.1 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert ein $c \in [a, b]$ zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) \le f(b)$) bzw. $u \in [f(b), f(a)]$ (falls $f(b) < f(a)$) mit $f(c) = u$

11.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

11.3 Konvexität

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^2-Abbildung, dann ist $f(x)$ konvex auf $[a, b]$, wenn $\forall x, y \in [a, b]$ folgendes gilt

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2} \Leftrightarrow f''(x) \ge 0$$

11.4 Inverses Funktionentheorem

Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Sei in $a \in U$ die Ableitung $\varphi' = d\varphi(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar (also $\det(\varphi'(a \neq 0)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a, so dass $V_0 = \varphi(U_0)$ eine offene Umgebung von $b = \varphi(a)$ ist und $\varphi\mid_{U_0}: U_0 \to V_0$ ein Diffeomorphismus (d.h. φ^{-1} ex. und ist C^1)ist. Ferner gilt

$$d(\varphi^{-1}(b) = (d\varphi(a))^{-1}$$

11.5 Regulärer Punkt/Wert

Ein Punkt $x \in U \subset X$ heisst ein regulärer Punkt der differenzierbaren Abbildung $f : U \to Y$, wenn das Differential $df(x) : X \to Y$ surjektiv abbildet (lokal invertierbar). Das dazugehörige $y \in Y$ heisst regulärer Wert von f.

12 Addendum

12.1 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

12.1.1 Trigonometrische Grössen

Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	-$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

12.1.2 Identitäten

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(nt)\sin(mt) = \frac{1}{2}(\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t))$$

$$\cos(nt)\cos(mt) = \frac{1}{2}(\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t))$$

$$\sin(nt)\cos(mt) = \frac{1}{2}(\sin((n+m)t) + \sin((n-m)t))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x))$$

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left((n-2k)(x - \frac{\pi}{2})\right)$$

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(x(n-2k)\right)$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\sinh(x) = -i\sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

$$\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

12.2 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{n}{x})^x = e^n$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

$$\lim_{x\to\infty} n\sin(\frac{1}{n}) = 1 \qquad \lim_{x\to 0} x^a\ln^b(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(x)} = 2 \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a} \qquad \lim_{x\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^n = \frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

12.3 Wichtige Ableitungen

$$\sin(x)' = \cos(x) \qquad \cos(x)' = -\sin(x)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = \ln(a)a^x \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt[x]{a})' = -\frac{\sqrt[x]{a}\ln(a)}{x^2} \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x) \qquad \sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$$

$$\cot'(x) = -\csc^2(x) \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh(x)' = \cosh(x) \qquad \cosh(x)' = \sinh(x)$$

$$\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \operatorname{arsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arcosh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \operatorname{artanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

12.4 Spezielle Ableitungen

Sei $f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to \omega$ multilinear, dann ist f differenzierbar und es gilt

$$df(a_1,\ldots,a_n)(h_1,\ldots,h_n) = f(h_1,a_2,\ldots,a_n) + \cdots + f(a_1,a_2,\ldots,h_n)$$

Beispiele

- $d(X^TX)H = H^TX + X^TH$
- $d(det(X))H = tr(adj(X)H)$

weitere:

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) \qquad (x^x)' = x^x(\ln(x) + 1)$$

12.5 Integrale

12.5.1 Substitutionen

$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$	$u(x) = g(x)$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$
$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x$	$u(x) = g(x)$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$
$\int f(e^x, \sinh(x), \cosh(x))\mathrm{d}x$	$u(x) = e^x$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{e^x}$
$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$	$x = \sin(u)$	$\mathrm{d}x = \cos(u)\mathrm{d}u$
$\int f(x, \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$	$x = \sinh(u)$	$\mathrm{d}x = \cosh(u)\mathrm{d}u$
$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$	$x = \cosh(u)$	$\mathrm{d}x = \sinh(u)\mathrm{d}u$
$\int f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x$	$u(x) = \frac{x}{a}$	$\mathrm{d}x = a\mathrm{d}u$
$\int f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\mathrm{d}x$	$u(x) = \sqrt{x^2-1}$	$\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}u$

$$\int R(\sin(x),\cos(x))\mathrm{d}x \qquad u(x)=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$\rightarrow \sin(x)=\frac{2u}{1+u^2} \qquad \rightarrow \cos(x)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

12.5.2 Potenzen und Wurzeln

$$\int x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \qquad n\neq -1$$
$$\int \sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$
$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right)+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin(x)+C$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arccos(x)+C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\mathrm{d}x=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\right)+C$$
$$\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|+C$$
$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}}+C$$
$$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}}+C$$
$$\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\log(\sqrt{a^2+x^2}+x)\right)+C$$

12.5.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$$
$$\int \ln(x)\mathrm{d}x=x\left(\ln|x|-1\right)+C \qquad x>0$$
$$\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+C$$
$$\int x^s\ln(x)\mathrm{d}x=\frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\ln|x|-\frac{1}{s+1}\right)+C$$
$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$$
$$\int \frac{1}{x\pm a}\mathrm{d}x=\ln|x\pm a|+C$$
$$\int \frac{1}{e^x+a}\mathrm{d}x=\frac{x-\ln|a+e^x|}{a}+C$$
$$\int \frac{1}{e^x-a}\mathrm{d}x=\frac{\ln|e^x-a|-x}{a}+C$$
$$\int \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x=\ln(x)-\ln(x+1)+C$$
$$\int a^{kx}\mathrm{d}x=\frac{a^{kx}}{k\ln|a|}+C \qquad a>1$$
$$\int x^ne^{ax}\mathrm{d}x=e^{ax}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{a^{k+1}}+C$$
$$\int xe^{ax}\mathrm{d}x=\frac{(ax-1)e^{ax}}{a^2}+C$$

12.5.4 Hyperbolische Funktionen

$$\int \cosh(x)\mathrm{d}x=\sinh(x)+C$$
$$\int \sinh(x)\mathrm{d}x=\cosh(x)+C$$
$$\int \tanh(x)\mathrm{d}x=\ln|e^{2x}+1|-x+C$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\mathrm{d}x=\tanh(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\operatorname{arsinh}(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\operatorname{arcosh}(x)+C \qquad x>1$$
$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\operatorname{artanh}(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\mathrm{d}x=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)+C$$
$$\int \sinh^{-1}(x)\mathrm{d}x=x\sinh^{-1}(x)-\sqrt{1+x^2}+C$$
$$\int \cosh^{-1}(x)\mathrm{d}x=x\cosh^{-1}(x)-\sqrt{x^2-1}+C$$
$$\int \tanh^{-1}(x)\mathrm{d}x=x\tanh^{-1}(x)+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$$
$$\int \tanh^2(x)\mathrm{d}x=x-\tanh(x)+C$$
$$\int \sinh^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(\sinh(2x)-2x)+C$$

12.5.5 Trigonometrische Funktionen

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x=-\cos(x)+C$$
$$\int \cos(x)\mathrm{d}x=\sin(x)+C$$
$$\int \tan(x)\mathrm{d}x=-\ln|\cos(x)|+C$$
$$\int \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x=\ln|\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}|+C$$
$$\int \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x=\ln|\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}|+C$$
$$\int \frac{1}{\tan(x)}\mathrm{d}x=\ln|\sin(x)|+C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x=\tan(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\tan(x)}+C$$
$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}+C$$
$$\int \cos^2(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}+C$$
$$\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin^2(x)+C$$
$$\int \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin^3(x)+C$$
$$\int \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos^3(x)+C$$
$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{32}(4x-\sin(4x))+C$$
$$\int \sin^n(ax)\cos(ax)\mathrm{d}x=\frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a}+C$$
$$\int \sin(ax)\cos^n(ax)\mathrm{d}x=-\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a}+C$$
$$\int \sin^n(x)\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x-\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}$$
$$\int \cos^n(x)\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x+\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$$
$$\int \cot(x)\mathrm{d}x=\ln|\sin(x)|+C$$
$$\int \csc(x)\mathrm{d}x=-\ln|\csc(x)+\cot(x)|+C$$
$$\int \sec(x)\mathrm{d}x=\ln|\sec(x)+\tan(x)|+C$$
$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x=x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$$
$$\int \arccos(x)\mathrm{d}x=x\cdot\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$$
$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x=x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$$
$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x=\sin(x)-x\cos(x)+C$$
$$\int x^2\sin(x)\mathrm{d}x=2x\sin(x)-(x^2-2)\cos(x)+C$$
$$\int x^3\sin(x)\mathrm{d}x=3(x^2-2)\sin(x)-x(x^2-6)\cos(x)+C$$
$$\int x\cos(x)\mathrm{d}x=x\sin(x)+\cos(x)+C$$
$$\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x=(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$$
$$\int x^3\cos(x)\mathrm{d}x=x(x^2-6)\sin(x)+3(x^2-2)\cos(x)+C$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\mathrm{d}x = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a-b)} + C$$

$$\int x\sin(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{\sin(\alpha x) - \alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$$

$$\int x^2\sin(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{(2-\alpha^2x^2)\cos(\alpha x) + 2\alpha x\sin(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$

$$\int x\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha x\sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$$

$$\int x^2\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{(\alpha^2x^2-2)\sin(\alpha x) + 2\alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$

$$\int xe^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}(\alpha x - 1)}{\alpha^2} + C$$

$$\int x^2e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}(\alpha^2x^2 - 2\alpha x + 2)}{\alpha^3} + C$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^4(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sin^4(t)dt = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^3(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sin^3(t)dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sin^2(t)dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\cos(t)\sin^2(t)dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

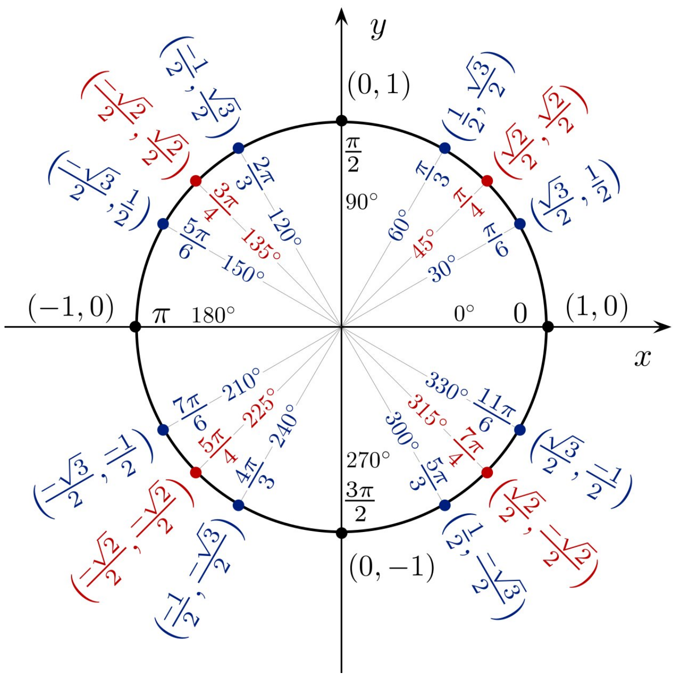
12.5.6 Bestimmte trigonometrische Integrale

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\sin$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\cos$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
$\sin\cdot\cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2\cdot\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin\cdot\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

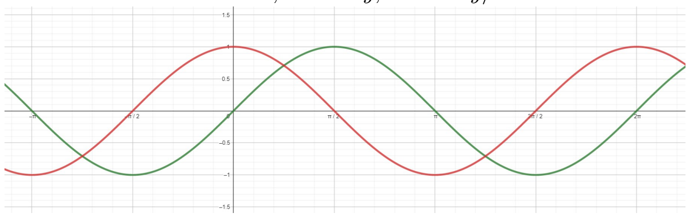
13 Disclaimer

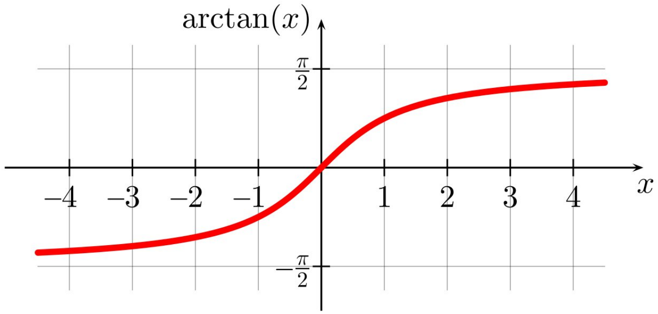
Diese Zusammenfassung basiert auf jener von Colin Dirren und Marek Landert für die Vorlesung Analysis I & II und wurde für das FS21 auf die Vorlesung Komplexe Analysis von Prof. A. Iozzi von Nico Müller und Robin Sieber umgeschrieben. Der Schwerpunkt der Zusammenfassung liegt auf der Methodik und nicht auf dem mathematischen Formalismus. Wichtige Grundlagen wurden bewusst ausgelassen, da man diese auch ohne Zusammenfassung anwenden können sollte. Es wird keine Garantie für die Richtigkeit der angegebenen Daten erteilt.

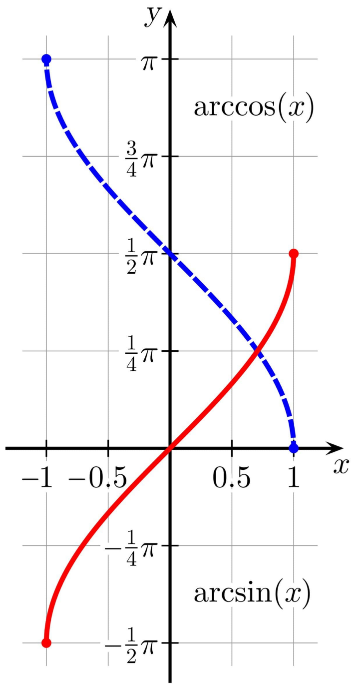
14 Abbildungen



$\cos\theta = x,\ \sin\theta = y,\ \tan\theta = y/x$







Quellen: Wikipedia / Geogebra

Komplexe Analysis

Robin Sieber Aug. 2021

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z) = -i\,\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$ holomorph?

$z = x+iy \Rightarrow u(x,y) = y,\ v(x,y) = -x$ CRG: $u_x = v_y = 0$ ✓, $u_y = -v_x = 1$ ✓ $\}$ stetig $\Rightarrow$ holomorph

$f:\Omega\to\mathbb{C},\ f(z) = \frac{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(z))}{\exp(\exp(z))},\ \Omega = \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ holomorph?

Log holomorph auf $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$, $\mathrm{Log}(\Omega) \subset \mathbb{C}\setminus]-\infty,0] \Rightarrow \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,z$ hol.

$\exp(\exp(z)) > 0$ und holomorph auf $\mathbb{C}$ $\Rightarrow f$ holomorph auf Ω

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{R},\ f(z) = |z|$ holomorph? $f(0)$ reell nicht diffbar $\Rightarrow$ nicht holomorph

$z\neq 0$: Falls f $\mathbb{C}$-diffbar wäre, wäre auch $\frac{f^2}{z} = \frac{z\cdot\bar z}{z} = \bar z$, weil $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph. Weil $\bar z$ in keinem Punkt $\mathbb{C}$-diffbar ist, ist auch f nirgends holomorph.

$f(z) = \sum_{n=0}^\infty n^2 z^n$ → Komp. von holomorphen Funktionen $\Rightarrow$ überall, wo die Summe konvergiert holomorph → Konvradius $= 1 \Rightarrow \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$

$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\,dz$, γ: Quadrat mit Länge 4 um 0

Singularitäten: $0, \pm\sqrt{8}\,i$. Nur 0 innerhalb Pfad $\Rightarrow f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2+8}$

CIF: $\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i\cdot f(0) = \frac{\pi i}{4}$

$\int_\gamma \frac{\cosh(z)}{z^4}\,dz$, γ wie oben

Singularität: 0, Pol 4. Ordnung, $f(z) = \cosh(z)$

CIF: $\int \frac{f(z)}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\cdot f^{(3)}(0) = \frac{\pi i}{3}\cdot\sinh(0) = 0$

Laurentreihe von $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+3}$ auf $1<|z|<3$

- $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{z/3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-z/3)} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^\infty\left(-\frac{z}{3}\right)^k$ (konv. für $|z|<3$)
- $\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-i/z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{i}{z}\right)^k$ (konv. für $|z|>1$)

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{i}{z}\right)^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^\infty\left(-\frac{z}{3}\right)^k$

$\frac{1}{z^2+z-2}$ für a) $|z|<1$ b) $1<|z|<2$ c) $|z|>2$

$= \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right)$ a) $-\frac{1}{3}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z/2} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^\infty z^k - \frac{1}{6}\sum_{k=0}^\infty\left(-\frac{z}{2}\right)^k$

b) $= \frac{1}{3z}\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{6}\sum_{k=0}^\infty\left(-\frac{z}{2}\right)^k = \frac{1}{3z}\sum_{k=0}^\infty z^{-k} - \frac{1}{6}\sum_{k=0}^\infty\left(-\frac{z}{2}\right)^k$

c) $\frac{1}{3z}\sum_{k=0}^\infty z^{-k} - \frac{1}{6}\frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{3z}\sum_{k=0}^\infty z^{-k} - \frac{1}{6z}\frac{1}{1/z+1/2} = \frac{1}{3z}\sum_{k=0}^\infty z^{-k} - \frac{1}{3z}\frac{1}{1+2/z}$

$= \frac{1}{3z}\sum_{k=0}^\infty z^{-k} - \frac{1}{3z}\sum_{k=0}^\infty\left(-\frac{2}{z}\right)^k$

Laurentreihe $\frac{z^2}{1+z}$ auf $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ → an der Singularität entwickeln

→ in Form $\sum c_n(z-z_0)$ bringen, hier: $(z-(-1)) = z+1$ $\Rightarrow$ Reihe überall holomorph

$\Rightarrow \frac{z^2}{1+z} = \frac{(z+1)^2-2z-1}{z+1} = \frac{(z+1)^2-2(z+1)+1}{z+1} = z+1-2+\frac{1}{z+1}$

Was für eine Singularität in $z_0=0$? $\frac{1}{\sin(z)-z}$

$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - o(z^7) \Rightarrow \sin(z)-z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - o(z^7) = z^3\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots\right)$

$\Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{z^m}{z^3\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+o(z^4)\right)}$ → wie gross muss m sein, so dass existiert und $\neq 0$ ist?

$\Rightarrow m=3 \Rightarrow$ Pol 3. Ordnung

Residuum $z_0=0$ $\frac{\sin(z)}{z^2}$ (→ Pol 1. Ordnung) $= \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - o(z^7)\right) = \underbrace{z^{-1}}_{c_{-1} = \mathrm{Res} = 1} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - o(z^5)$

$z_0=2$ $\frac{\sin(z)}{(z-2)^2}$ (→ Pol 2. Ordnung) $\mathrm{Res} = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\frac{(z-2)^2\cdot\sin(z)}{(z-2)^2} = \cos(2)$

$y''(t) + 9y(t) = t^2$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

Sei $\mathcal{L}[y](s) = Y(s)$. Durch Laplace-Transformation erhalten wir:

$\mathcal{L}[y''+9y](s) = \mathcal{L}[t^2](s)$

$\overset{LT4,LT5}{\Longleftrightarrow} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = s^2Y(s) - s + 9Y(s) = \frac{2}{s^3}$

$Y(s) = \frac{2}{s^3(s^2+9)} + \frac{s}{s^2+9}$ PBZ: $\frac{As^2+Bs+C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+9} = \frac{2}{s^3(s^2+9)}$

$Y(s) = \frac{-2}{81s} + \frac{2}{9s^3} + \frac{83s}{81(s^2+9)}$ $\Rightarrow \frac{2}{s^3(s^2+9)} = \frac{-2s^2+18}{81s^3} + \frac{2s}{81(s^2+9)}$

$y(t) = \left(-\frac{2}{81} + \frac{t^2}{9} + \frac{83}{81}\cos(3t)\right)\cdot H(t)$

$y''' + y'' = \delta(t-6)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$

$\Rightarrow s^3Y(s) + s^2Y(s) - 1 = e^{-6s}$

$Y(s) = (e^{-6s}+1)\cdot\frac{1}{s^2(s+1)} = (e^{-6s}+1)\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$

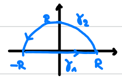
$= (e^{-6s}+1)\,\mathcal{L}[e^{-t}-1+t](s)$

$\Leftrightarrow y(t) = u(t-6)(e^{-t+6}-1+t-6) + e^{-t}+t-1 = u(t-6)(e^{-t+6}+t-7) + e^{-t}+t-1$

$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{1+x^2}\,dx$ Tipp: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos(2x)}{1+x^2}\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos(2x)}{1+x^2}\,dx$

Wir bilden die komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2} - \frac{e^{2iz}}{1+z^2}$

Wir wenden den Residuensatz über den folgenden Weg an: 

$\gamma_1 = -R+2Rt,\ t\in[0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{i\pi t},\ t\in[0,1]$, $\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2$

Mit dem Residuensatz erhalten wir $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

$= 2\pi i\cdot\sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0}\mathrm{Res}(f,z_i)$

Residuen: e^{2iz} keine Polstelle, $z^2=-1 \Rightarrow \overbrace{z_1 = i,\ z_2 = -i}^{\text{Pole 1. Ordnung}}$, brauchen nur z_1

$\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\cdot f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z+i} - \frac{e^{2iz}}{z+i} = \frac{1}{2i} - \frac{e^{-2}}{2i} = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2e^2}i$

Damit $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$ ist, muss $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$ sein.

Dies ist der Fall, falls folgende 4 Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}\cdot h(z)$ mit p,q Polynomen ✓ $p(z) = 1$, $q(z) = z^2+1$, $h(z) = e^{2iz}$
2. $\deg(q) \geq \deg(p)+2$ ✓   3. $|h(z)| < C$ $(C\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{C}, \mathrm{Im}(z)>0)$

$|h(z)| = |e^{2iz}| = |e^{2i(x+iy)}| = |e^{2ix}|\cdot|e^{-y}| = e^{-y} < 1$, weil $y = \mathrm{Im}(z) > 0$ ✓

4. $q(z) = 1+z^2$ hat keine Nullstellen auf der x-Achse ✓

$\Rightarrow$ daher gilt $\int_0^\infty\frac{\sin^2(x)}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\pi i\left(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2e^2}i\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4e^2}}}$

P.V. $\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos(t)}{t^4+2}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos t}{t^4+2}\,dt$ Zeigen, dass der Hauptwert existiert.

$\left|\lim\int_{-R}^R\frac{\cos(t)}{t^4+2}\,dt\right| = 2\left|\lim\int_{-R}^R\frac{\cos(t)}{t^4+2}\,dt\right| \leq 2\lim\int_0^R\left|\frac{\cos(t)}{t^4+2}\right|dt \leq 2\lim\int\frac{1}{t^4+2}\,dt < \infty$

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = f(z+a) = f(z+ia)$. Zeige, dass f konst.

f periodisch in reelle und imag. Richtung $\Rightarrow f$ hat Max auf $[0,a]^2$.

f holomorph $\Rightarrow f$ stetig $\Rightarrow |f|$ stetig $\Rightarrow$ stetige Funktion auf kompaktem Gebiet beschränkt $\Rightarrow f$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt $\Rightarrow$ Liouville: f konstant.