Determinanten

Def det: $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ / $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$, so dass (nur quadratische Matrizen!)

(D1) $\det I = 1$

(D2) det wechselt das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen/Spalten vertauscht werden (Antisymmetrie)

(D3) det ist linear in jeder Zeile/Spalte

$$\det\begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix} = t \cdot \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\lambda\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 \cdot \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Aus (D1), (D2) und (D3) folgt:

(D4) Zwei Spalten/Zeilen sind gleich $\Rightarrow \det = 0$

(D5) $A = LR \Rightarrow \det A = \det R$

$PA = LR \Rightarrow \det A = \det R \cdot (-1)^{\#\text{Permutationen}}$

(D6) Nullzeile/Nullspalte $\Rightarrow \det = 0$

(D7) A Dreiecksmatrix $\Rightarrow \det A =$ Produkt Diagonalelemente

(D8) A singulär $\Rightarrow$ GEV liefert Nullzeile $\Rightarrow \det = 0$

(D9) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(D10) $\det(A^T) = \det(A)$

Determinanten berechnen

2x2

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

3x3

- GEV → Produkt der Diagonalelemente von R
- $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ (Regel von Sarrus)
- $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ Zeile Spalte in denen der Faktor liegt (werden "gestrichen") Vorzeichen: $(-1)^{i+j}$ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow +a(e\cdot i - hf) - d(b\cdot i - hc) + g(bf - ce)$ $\quad +a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - eg)$

Rekursives Verfahren, geht für jede Grösse. Einfach für dünnbesetzte Matrizen mit Nullen, zB an a, b, c, d, g

4x4

- GEV → Produkt der Diagonalelemente von R
- Rekursives Verfahren von oben oder auch rekursiv und dann Sarrus
- Falls Blockmatrix in folgender Form $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$ $\det M = \det A \cdot \det C$

⚠ Sarrus erweitern geht nicht! $\hookrightarrow$ gilt auch für grössere Matrizen