Vektorräume

Eine Menge V ist ein Vektorraum, falls

1. $x \in V,\ y \in V$, dann ist $x + y \in V$
2. $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in V$, dann gilt $\alpha \cdot x \in V$

7 weitere Eigenschaften

(A1) $a + b = b + a$
(A2) $a + (b + c) = (a + b) + c$
(A3) $\exists 0$, so dass $a + 0 = a$
(A4) $\forall a, \exists(-a)$, so dass $a + (-a) = 0$

(M1) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
(M2) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
(M3) $a \cdot 1 = a$

An der Prüfung:

- Entweder Gegenbeweis mit den Eigenschaften
- oder falls es sich um einen handelt, alle 9 Eigenschaften überprüfen.

Bsp: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Unterräume

Sei V ein Vektorraum. U ist ein Unterraum von V, falls

wichtig: $V \neq \emptyset$, in der leeren Menge kann z.B. auch kein Null-Element drin sein.

1. $x \in U,\ y \in U$, dann ist $x + y \in U$
2. $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in U$, dann gilt $\alpha \cdot x \in U$

→ Unterraum ist abgeschlossen bzgl. linearen Kombinationen

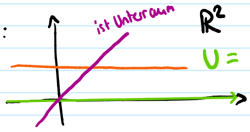
Bsp: Ist $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum von V? Nein, diverse Eigenschaften werden verletzt.

1) $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ lin. Raum

2) $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ reeller lin. Raum

$V = \mathbb{C}^n = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \right\}$ komplex lin. Raum

Bsp:



$\mathbb{R}^2$

$U = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset V$

Unterraum von $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$, Unterraum

$\tilde{U} = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \right\} \subset V$

aber kein Unterraum, da $\underline{0} \notin U$!

$\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$ Unterraum

Bsp 2 $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \ldots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \ldots \subset P$
$\subset C^\infty \subset \ldots \subset C^s \subset \ldots \subset C^1 \subset C^0 \subset L^2$

$P = \{\text{Polynome beliebigen Grades}\}$

→ Mehr Bsp → VL05

Bsp

$U = \{A \in V \mid \underbrace{A^T = -A}_{\text{schief-symmetrisch}}\}, V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

Überprüfen: $\forall U_1, U_2 \in U \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Nicht als Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ausschreiben! Viel zu kompliziert

(i) $= (U_1+U_2)^T = U_1^T + U_2^T = -U_1 - U_2 = -(U_1+U_2)$

(ii) $= (\alpha U_1)^T = U_1^T \alpha = \alpha(-U_1) = -(\alpha U_1)$

Oder beides in einem Schritt zeigen: $(U_1 + \alpha U_2)^T = -(U_1 + \alpha U_2)$

Span

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

└ Matrix A spannt diese Menge auf

Alle Elemente der Menge sind durch die Matrix darstellbar.

$\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Theorem 8. Falls V n-dimensional ist ($\dim(V) = n$) gilt:

(i) Mehr als n Vektoren sind linear abängig

(ii) weniger als n Vektoren sind nicht erzeugend

(iii) n Vektoren sind genau dann linear unabängig wenn sie erzeugend sind. Sie bilden dann eine **Basis** von V.