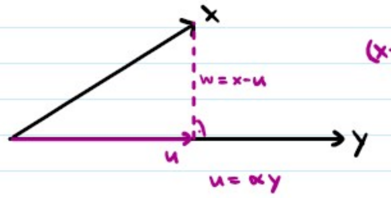
Projektionen



$(x-u) \perp y$

$$\langle x-u, y\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle = \langle u,y\rangle$$
$$\langle x,y\rangle = \alpha \langle y,y\rangle$$
$$\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \qquad \Rightarrow \underline{u} = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\, \underline{y}$$

Projektionsmatrix:

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\, \underline{y} = \frac{y\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} = \frac{y\, y^T x}{\langle y,y\rangle} = \underbrace{\frac{y\, y^T}{\langle y,y\rangle}}_{\underline{\underline{P_y}}}\, \underline{x}$$

→ vgl. Gram-Schmidt-Verfahren + Householder-Matrix
↳ auch für abstrakte Vektorräume

$P: V \to V$ lin. Abb. heisst **orthogonaler Projektor**, falls

$\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$ und $\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}$ gilt. Falls nur $P^2 = P$ gilt, ist P ein schiefer Projektor.

→ Ein Projektor erhält, im Gegensatz zur Givensrotation, die Länge des Vektor nicht.
→ Eine Projektion bleibt nach einer Anwendung stehen ($P^2 = P$), Rotationen drehen weiter ($G^2 \neq G$).

Bsp

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{P_y}}\, \underline{x} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 2.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P_y}} = \frac{yy^T}{\langle y,y\rangle} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$P_y = P_y^2 = P_y^n$ ✓
$P_y^T = P_y$ ✓
$\Rightarrow$ orthogonaler Projektor

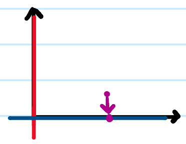
Beispiel: Schiefe Projektion

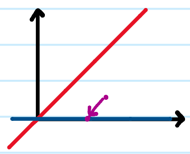
$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Projektionsmatrix ($P^2 = P$), aber keine orthogonale Projektion ($P \neq P^T$)

Bild(P) = Spaltenraum: x-Achse

Kern(P) = Gerade $y = x$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$





■ Kern ■ Bild

=> Projektion parallel zum Kern

	P_1	P_2	
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	← bereits im Bild
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	← im Kern von P_2
$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	