# Lineare Unabhängigkeit

## Bsp. Polynome:

$$q_0(x) = 1+x^2$$
$$q_1(x) = 1-x^2$$
$$q_2(x) = 1+x^2+x^4$$

$$\Rightarrow a_0\, q_0(x) + a_1 q_1(x) + a_2 q_2(x) = 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow a_0 (1+x^2) + a_1 (1-x^2) + a_2 (1+x^2+x^4) = 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_0 x^2 + a_1 - a_1 x^2 + a_2 + a_2 x^2 + a_2 x^4 = 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow 1(a_0+a_1+a_2) + x^2(a_0-a_1+a_2) + x^4 a_2 = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_0+a_1+a_2 &= 0 \\ a_0-a_1+a_2 &= 0 \\ a_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\overset{\text{II}-\text{I}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ ZSF $\Rightarrow$ voller Rang
$\Rightarrow$ nur triviale Lösung!

$\Rightarrow$ linear unabhängig

## ALTERNATIVE: Geschicktes Wählen von Unbekannten

$$a_0\, q_0(x) + a_1 q_1(x) + a_2 q_2(x) = 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow$ 3 Unbekannte
3 Gleichungen nötig
z.B $x = 0, 1, 2$

$\underline{x=0}$: $a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = 0$

$\underline{x=1}$: $a_0 \cdot 2 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 3 = 0$

$\underline{x=2}$: $a_0 \cdot 5 + a_1 (-3) + a_2 \cdot 21 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 - 5a_0 \\ a_1 - 2a_0 - \frac{1}{4}(a_2 - 5a_0) \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ voller Rang $\Rightarrow$ nur triviale Lösung

**Bekommt man die triviale Lösung mit den drei Beispielen, reicht dies aus, um zu zeigen, dass es für alle gilt. Bekäme man eine andere Lösung mit anderen x-Werten, würde diese Lösung nicht für das obige Beispiel gelten, also müssen sie linear unabhängig sein.**

**Die Schlussfolgerung in die andere Richtung geht aber nicht: Nur weil man neben der trivialen Lösung noch andere Lösungen für einige x-Werte bekommt, darf man nicht daraus schliessen, dass sie linear abhängig sind.**

## Bsp 2 (Serie 6.2)

$f_1(x) = \sin(x)$

$f_2(x) = \cos(x)$

$f_3(x) = x \cdot \cos(x)$

$f_1, f_2$ und $f_3$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) = 0$ nur für $x = 0$ (triviale Lösung)

$\underline{x=0}$: $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = 0$

$\underline{x=\frac{\pi}{2}}$: $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0$

$\underline{x=\pi}$: $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot (-1) + \pi \cdot a_3 \cdot (-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ voller Rang $\Rightarrow$ nur triviale Lösung

$\Rightarrow$ linear unabhängig in $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

## Vektoren eines Vektorraums linear unabhängig?

Geg: $v_1, \dots, v_k \in V$
Ges: $\dim(\text{span}\{v_1, \dots, v_k\})$, Frage nach linearer Unabhängigkeit

① Schreibe Matrix $M = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix}$

② GEV bis $\underline{\underline{R}}$

③ $\text{Rang}(A) = \dim(\text{span}\{v_1, \dots, v_k\})$

$\text{Rang}(A) = k \Rightarrow$ linear unabhängig

$\text{Rang}(A) < k \Rightarrow$ linear abhängig

$\text{Rang}(A) = \dim(V) \leq k \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ bilden ES

$\text{Rang}(A) = \dim(V) = k \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ bilden minimales ES = Basis