Ausgleichsrechnung

Methode der kleinsten Quadrate

Gegeben: Überbestimmtes LGS $Ax = b$
Gesucht: $\underline{x}$, so dass $\|Ax - b\|_2^2$ minimal ist.

→ Löse $\boxed{A^T A x = A^T b}$

bzw. mit QR-Zerlegung: $\boxed{Rx = Q^T b}$

Bsp

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\underline{A}\ (\text{Rang}=2)} \underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Variante 1

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{II} + (-1)\mathrm{I}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 3x_1 + 3(-3) = 6 \Rightarrow x_1 = 5$
$\Rightarrow x_2 = -3$

$\Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Variante 2: QR

→ QR-Zerlegung mit GV

$$\underset{3\times 3}{Q} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{matrix}}_{Q_0} & \begin{matrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

orthonormale Spalte mittels Vektorprodukt
⇒ aber sowieso irrelevant wegen Reduktion auf Q_0

$$\underset{3\times 2}{R} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{matrix}}\ R_0 \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Hilfsrechnungen:

$$\text{GV: } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$r_{11} = \langle q_1, a_1 \rangle = \sqrt{3}$
$r_{12} = \langle q_1, a_2 \rangle = \sqrt{3}$
$r_{22} = \langle q_2, a_2 \rangle = \sqrt{2}$

⇒ Problem: R nicht invertierbar
→ R auf 2x2-Matrix reduzieren ⇒ R_0

⇒ Dimension von Q anpassen, dann $\boxed{R_0 x = Q_0^T b}$ lösen

$$R_0 x = Q_0^T b$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \sqrt{3} x_1 + \sqrt{3}(-3) = 2\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = 5$
$\Rightarrow x_2 = -3$

$\Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

→ vgl. Ausgleichsrechnung mit SVD