Normen und Skalarprodukte

Sei V lin. Raum

$\|\cdot\|: V \to [0,\infty[$ heisst **Norm** auf V, falls:

(N1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

(N2) α Skalar, $v \in V$: $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

(N3) $v, w \in V$: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

V lin. Raum mit $\|\cdot\|$-Norm heisst normierter lin. Raum.

Bsp $\mathbb{R}^d$, Euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2} = \sqrt{x^T x}$$

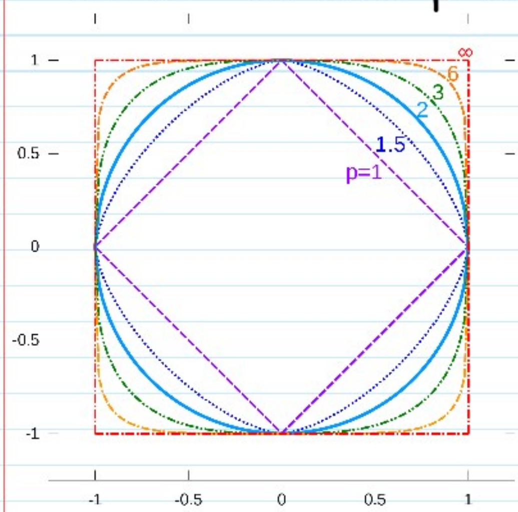
$\mathbb{C}^d$, Euklidische Norm in $\mathbb{C}^d$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_d \bar{x}_d} = \sqrt{x^H x}$$

Andere Normen im $\mathbb{R}^d$

- $p = \infty$ $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|\}$
- $1 \leq p < \infty$ $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_d|^p)^{1/p}$
- $p < 1$ Dreiecksungleichung nicht erfüllt. $\Rightarrow$ keine Norm

"Einheitskreis" der versch. p-Normen



Theorem

-1 -0.5 0 0.5 1

Theorem

Alle Normen in $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent

Seien $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ Normen in $\mathbb{R}^d$. Dann gibt es Konstante $C = C(d) \geq 1$, so dass

$$\frac{1}{c}\|v\| \leq |||v||| \leq c\,\|v\| \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^d$$

äquivalent: Konvergenz in $\|\cdot\|$ $\Leftrightarrow$ Konvergenz in $|||\cdot|||$

Skalarprodukt in linearen Räumen

Sei V ein lin. Raum: Skalarprodukt auf V ist eine Funktion

$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ falls

(S1) $\langle x, ay+bz\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle x,z\rangle$ Linearität im zweiten Argument

(S2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ in $\mathbb{R}$ bzw $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ in $\mathbb{C}$ Symmetrie

(S3) positiv definit: $\underbrace{\langle x,x\rangle \geq 0 \;\forall x \in V}_{\text{nur diese Eigenschaft = positiv semi-definit}}$ und $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Bsp
1) Euklidisches Skalarprodukt
2) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)}\cdot g(x)\,dx$

Bem: $x \in \mathbb{R}^d$: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Def Seien $x,y \in V$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Man sagt x ist orthogonal auf y $(x \perp y)$,

falls $\langle x,y\rangle = 0$

$\underline{\underline{A}}$-Skalarprodukt

→ $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch + positiv definit

$$\langle u,v\rangle_{\underline{\underline{A}}} \overset{\text{def.}}{=} \underline{u}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{v} \quad \in \mathbb{R}$$

$\underline{\underline{A}}$-Norm

$$\|u\|_{\underline{\underline{A}}} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{\underline{\underline{A}}}}$$

$\Leftarrow$ symmetrisch + positiv definit

$$\langle u,v\rangle_{\underline{\underline{A}}} \overset{\text{def.}}{=} \underline{u}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{v} \qquad \in \mathbb{R}$$

$\underline{\underline{A}}$-Norm

$$\|\underline{u}\|_{\underline{\underline{A}}} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{\underline{\underline{A}}}}$$

Schwarzsche Ungleichung für Skalarprodukte

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \quad = \|x\|\cdot\|y\|$$

Zwischenwinkel von Vektoren

$$\widehat{x,y} = \arccos \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\ \|y\|} \quad \leq 90°$$

Frobeniusnorm

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2} \quad = \|R\|$$

aus Schur-Zerlegung

2-Norm / Spektralnorm

$$\|A\|_2 = \sigma_1 \quad \text{bei SVD}$$

$$\|A\|_2 = \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Bsp $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ symm. $\quad \overset{\text{GEV}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ p.s.d.

$$\langle x,y\rangle = x^T A y$$

(i) $\langle x, \lambda(y+z)\rangle = x^T A(\lambda(y+z)) = x^T A(\lambda y + \lambda z) = \lambda x^T A y + \lambda x^T A z \quad \checkmark$

(ii) $\langle x,y\rangle = x^T A y \overset{\text{weil Skalar}}{=} (x^T A y)^T = y^T A^T x \overset{\text{A symmetrisch}}{=} y^T A x = \langle y,x\rangle \quad \checkmark$

(iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$