Lineare Algebra

Inhalt

Abkürzungen:

LGS	Lineares Gleichungssystem
GEV	Gauss-Eliminationsverfahren
KB	Kompatibilitätsbedingung
DGL	Differentialgleichung
ONB	Orthonormalbasis
GV	Gram-Schmidt-Verfahren

Facts

- Matrix mal Vektor ist die lin. Kombination von Spalten einer Matrix mit Koeffizienten aus dem Vektor
- b muss im Spaltenraum von A liegen, damit das LGS Ax = b eine Lösung hat.
- Bei Matrizen, die nicht vollen Rang haben: ∞ Lösungen, falls die Kompatibilitätsbedingung (KB) erfüllt ist. Es gibt jeweils m-r KB, die erfüllt sein müssen.
- Die zu freien Variablen gehörenden Spalten sind lineare Kombinationen von Pivotspalten.
- Die letzten m-r Zeilen sind lineare Kombinationen der ersten r Zeilen.
- Um die Matrix darzustellen, reichen Pivotspalten.
- GEV liefert Rang (Anzahl Pivots), freie Variablen, Zeilenstufenform sowie Determinante
- Transponierte Matrix: Zeilen und Spalten vertauschen: $a_{ij} \Rightarrow a_{ji}$
- Hermite transponierte Matrix: Transponiert und Einträge komplex konjugiert: $a_{ij} \Rightarrow \overline{a_{ji}}$
- $(AB)^T = B^T A^T$

- A (quadratisch!) hat eine Inverse gdw. Rang(A) = n (voller Rang) bzw. $\det A \neq 0$
- Eine invertierbare Matrix heisst regulär, sonst singulär (-> keine bzw. ∞Lösungen).
- Die Inverse ist eindeutig und auch das LGS Ax = b ist für jedes x eindeutig lösbar.
- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- A, B invertierbar: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- AA^T invertierbar ⇔ $Rang(A) = n$

- Orthogonale Matrizen verändern die Längen und Winkel nicht.
- A orthogonal (unitär) ⇒A regulär
- A, B orthogonal, dann: A invertierbar und $A^{-1} = A^T, A^T$ orthogonal, AB orthogonal
- Vektoren orthogonal ⇒Vektoren linear unabhängig

Eigenschaften von Matrizen:

- A symmetrisch: $A = A^T$ (A zwingend quadratisch!)
- A antisymmetrisch: $A^T = -A$
- A Hermite-symmetrisch: $A = A^H$
- A orthogonal: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle Spalten von A sind *paarweise orthogonal und normiert*, so dass $A^T A = I$
- A unitär: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, falls $A^H A = I$