
INTRODUCCIÓN

La presente monografía presenta el trabajo llevado a cabo y los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo del proyecto de fin de carrera “uQuad!”. El objetivo del mismo es diseñar e implementar un vehículo aéreo no tripulado (UAV, por sus siglas en inglés) a partir de un cuadricóptero radiocontrolado.

Para ello será necesario estudiar el comportamiento físico del sistema y modelar el mismo. En base a dicho modelo se podrá entonces diseñar e integrar un sistema de control que permita el vuelo autónomo del sistema.

El sistema necesitará obtener información acerca de su estado y el de su entorno para poder llevar a cabo sus funciones. Dicha información será obtenida a través de un conjunto de sensores, los cuales deberán ser adaptados e integrados al sistema en forma adecuada. Se deberá, entonces, integrar la instrumentación adecuada para obtener medidas de variables físicas fundamentales para realizar el control.

A fin de definir el alcance del proyecto, debe aclararse que se entiende por vuelo autónomo la capacidad de mantener una posición y altitud determinada o la de seguir una ruta programable. El dispositivo deberá contar con algoritmos de control lo suficientemente robustos como para poder realizar maniobras simples en forma autónoma en diversas condiciones, tanto en espacios interiores como exteriores.

Si bien no se ha definido una aplicación específica para el sistema diseñado, es claro que mediante modificaciones no demasiado grandes el mismo puede ser adaptado a múltiples usos.

El desarrollo del proyecto implicará, entonces:

- Analizar el dispositivo comercial con el fin de comprender el sistema a controlar
- Analizar el comportamiento físico del sistema y modelar el mismo en forma adecuada
- Realizar ingeniería inversa al cuadricóptero, su electrónica y su sistema de control. En particular, se prestará especial detalle a los protocolos utilizados para el control de motores.

- Poner a punto la instrumentación necesaria
- Diseñar el sistema de procesamiento de datos de los sensores
- Implementar las vías de comunicación necesarias para obtener datos a partir de los sensores, realizar el comando remoto del sistema, dar instrucciones e indicar la ruta a seguir al mismo, etc.
- Diseñar e integrar el sistema de control
- Lograr que el cuadricoptero sea capaz de realizar el seguimiento de una ruta en forma autónoma

Parte I

Descripción del sistema

CAPÍTULO 1

ELECCIÓN DE HARDWARE

La elección del Hardware significa una parte muy importante del Proyecto, ya que las decisiones tomadas condicionan el resto del mismo. Una mala elección de alguno de los componentes puede resultar en complicaciones no previstas a la hora de la ejecución, causando contratiempos inesperados y trabajo excesivo. Es necesario, entonces, el estudio detallado de cada uno de los componentes a utilizar, comparando características, rendimientos y utilidades.

Elegir adecuadamente el Hardware necesario agiliza las etapas siguientes de todo el Proyecto. Resulta fundamental la toma de buenas decisiones, las cuales deben estar basadas en un previo estudio de cada etapa del proyecto, sus requerimientos, un estudio comparativo de las posibles soluciones y el conocimiento cabal de los componentes a utilizar.

1.1. Elección de plataforma física: Cuadricópteros

A la hora de la planificación del Proyecto se plantean dos opciones que se diferencian básicamente en el punto de partida. Ambas tienen como objetivo principal diseñar e integrar un sistema de control que permita al cuadricóptero mantener un vuelo autónomo, pero una de ellas consta además del diseño y el armado del mismo. Esta última incluye desafíos de ingeniería mecánica, conocimientos de resistencia, flexibilidad y peso de materiales, así como también diversas complicaciones a la hora de fabricar y armar las partes.

Teniendo en cuenta que se trata de un proyecto con tiempo acotado y su objetivo se centra en el control del vehículo, la necesidad de partir de hardware ya construido resulta imperiosa. Por ello se realiza un estudio sobre las opciones que el mercado ofrece en esta materia. Desafortunadamente, las opciones no son muy numerosas, disponiendo de cuadricópteros comerciales controlados a control remoto. Todos ellos incluyen un pequeño sistema de control integrado del cuál no es posible obtener información, ya que se trata de software privativo. Las opciones que el mercado ofrece son:

- Gauí 330X

- XAircraft X650
- Turbo Ace X720

Se procede a la comparación de los equipos mencionados y se analizan algunos aspectos fundamentales y críticos, como puede ser por ejemplo el peso del dispositivo y la carga útil que puede soportar.

Motor

Al estudiar las posibilidades nos encontramos con que en todos los casos los motores se controlan con modulación por ancho de pulsos, de ahora en más **PWM** por sus siglas en inglés, técnica en la cual se modifica el ciclo de trabajo de una señal periódica para controlar la cantidad de energía que se entrega a una carga.

En la tabla 1.1 se muestran las características de los motores de los 3 cuadricópteros considerados.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Motor	Hélices de 8 pulgadas, 4 motores brushless con 4 ESCs de 10A	Hélices de 12 pulgadas, 4 motores brushless con 4 ESCs de 10A. Las hélices impulsadas por el motor tienen una eficiencia de 9g/W bajo carga nominal.	Hélices de 12 pulgadas, 4 motores brushless con 4 ESCs de 10A. Las hélices impulsadas por el motor tienen una eficiencia de 12g/W bajo carga nominal.

Cuadro 1.1: Comparación motores

Los motores *Brushless* son motores eléctricos alimentados con corriente continua. Tienen un sistema de commutación eléctrica y presentan relaciones lineales entre *Corriente* y *Torque* y entre *Frecuencia* y *velocidad*. Son comúnmente utilizados en vehículos radio-controlados por su gran eficiencia, potencia, durabilidad y su bajo peso en comparación con los tradicionales motores *Brushed*. Sin embargo, los motores de CC *Brushless* son mucho más complicados de controlar, ya que la fase varía con la rotación del motor. Para controlarlos debe utilizarse un dispositivo llamado *Controlador eléctrico de velocidad*, o **ESCs**. Comúnmente los ESCs se clasifican según su corriente máxima, por ejemplo 10 ampéres o 10A.

Como se puede ver en la tabla 1.1, todos los dispositivos utilizan motores similares y la única diferencia radica en que la eficiencia de los motores del *Turbo Ace X720* es mayor.

Tiempo de vuelo

El tiempo de vuelo puede resultar crítico según la aplicación considerada. En la tabla 1.2 se muestran los datos que se obtuvieron para los 3 cuadricópteros considerados.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Tiempo de vuelo	Con batería de 2200mAh vuela entre 7 y 20 minutos	Vuela 12 minutos con batería de 2200mAh y carga menor a 1,5kg	Con batería de 2200mAh vuela 15 minutos a carga nominal y puede llegar a la media hora de vuelo con una batería de 10,000mAh

Cuadro 1.2: Comparación Tiempo de vuelo

Como se puede apreciar los tiempos de vuelo son similares en los 3 dispositivos, por lo que no será un factor determinante a la hora de tomar la decisión.

Un factor determinante en el tiempo de vuelo es la batería a utilizar. Deben considerarse 2 aspectos importantes: la capacidad de la batería y su peso. Si bien una batería con mayor capacidad permitirá mayor autonomía de vuelo, es claro que su peso también aumentará, lo cual a su vez, causará un mayor consumo. Los 3 cuadricópteros en consideración incluyen una batería de 3 celdas de Litio de 2200 mAh.

Peso

La carga útil que el dispositivo pueda soportar juega un papel fundamental. Vale recordar que, además de toda la instrumentación que incluye el cuadricóptero, se incorporará un microprocesador, una batería independiente para su alimentación, un giróscopo, un acelerómetro, un GPS y alguna interfaz para la comunicación. A su vez es interesante conservar la posibilidad de integrar una cámara fotográfica convencional ya que puede ser de gran utilidad para numerosas aplicaciones. La fuerza que los motores pueden realizar es acotada, por lo que el peso del dispositivo influye directamente en la carga útil del mismo.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Peso	700g	Versión de fibra de vidrio: 1100g. Versión de fibra de carbono: 950g.	990g
Carga útil	500g	Versión de fibra de vidrio: 700g. Versión de fibra de carbono: 850g.	1300g

Cuadro 1.3: Comparación peso y carga útil

Como se puede ver en la tabla 1.3, no cabe duda que el dispositivo que puede cargar con más peso es el *Turbo Ace X720*, lo cual constituye una ventaja considerable de este dispositivo frente a los otros.

Instrumentación

Toda la instrumentación que los dispositivos brindan está originalmente destinada al manejo mediante el control remoto. Todos ellos incluyen un acelerómetro y un giróscopo de 3 ejes y traen algún sistema de estabilización incluido, de forma tal

de facilitar el control.

Como ya se mencionó, se añadirá al cuadricóptero la instrumentación necesaria para su control automático, por lo cual la instrumentación incluida en el dispositivo carece de gran importancia. Sin embargo, resulta interesante conservar la posibilidad de controlarlo mediante el control remoto, ya que puede ser útil tanto en determinadas aplicaciones, como para evitar eventualidades en las primeras pruebas donde se testean los algoritmos de control desarrollados. El algoritmo de control deberá poder alternar entre estos dos modos de vuelo dándole prioridad al control remoto, de modo de conservar la integridad física del dispositivo ante fallas en los algoritmos de control.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Instrumentación	Sistema de estabilización integrado <i>GU344</i> : incluye giróscopo de 3 ejes y acelerómetro.	Giróscopo de 3 ejes y acelerómetro. Puede usar hasta 13 sensores para chequiar actitud de vuelo, altitud, dirección, posición, temperatura, consumo energético, etc.	Giróscopo y acelerómetro de 3 ejes integrados. Se vende por separado el módulo GPS que incluye barómetro como medidor de altitud y brújula electrónica.

Cuadro 1.4: Comparación instrumentación

En la tabla 1.4 se muestra un resumen de la instrumentación incluida en cada cuadricóptero.

Control

El control mediante el mando remoto requiere de cierta práctica y habilidad para ejecutarlo de buena forma, por lo cual todos los algoritmos de control integrados que el dispositivo incluya significarán una interesante ventaja. Por otro lado se debe tener en cuenta que el control remoto se utilizará en reducidos casos, siendo el control automático el verdadero interés del proyecto. Es importante tener en cuenta que dichos algoritmos encarecen el precio del dispositivo y no serán utilizados con mucha frecuencia.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Control	-	Software de configuración incluido. Dispositivo de control de 4 velocidades diseñado todo en 1. Soporta protocolos <i>Ultra PWM</i> y control de frecuencia hasta <i>500Hz</i> . Posee algoritmos de control de vuelo incorporados que hacen q sea mas fácil volarlo	Nivelación automática con control de altitud

Cuadro 1.5: Comparación control

Si bien el *XAircraft X650* es el que tiene más algoritmos de control implementados que facilitan su mando, se considera que el dispositivo que se adecúa más a

nuestras necesidades es el *Turbo Ace X720*. Tiene un pequeño sistema de estabilización que ayuda a la hora de su control, pero no incluye demasiado software ni hardware que no será utilizado y encarecen al producto, como el *XAircraft X650*.

Dimensiones

Las dimensiones de los 3 cuadricópteros considerados se pueden apreciar en la tabla 1.6.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Dimen- siones	33 cm entre ejes diagonalmente opuestos	61.5 cm entre ejes diag- onalmente opuestos	61.5 cm entre ejes diag- onalmente opuestos

Cuadro 1.6: Comparación dimensiones

Como se puede ver el *GAUI* es el más pequeño, mientras que los otros dos tienen el mismo tamaño aproximadamente.

En la figura 1.1 se pueden apreciar fotografías de los 3 equipos considerados.



Figura 1.1: Fotos de las posibles plataformas a utilizar

1.1.1. Definición de la plataforma - Cuadricóptero

- El *Turbo Ace X720* tiene hélices de 12 pulgadas y el grupo hélice motor proporciona una eficiencia de 12 g/W , superando a los otros dos cuadricópteros considerados.
- La carga útil que puede trasportar el *Turbo Ace X720* es la mayor de todos los cuadricópteros considerados.
- El *Turbo Ace X720* trae un sistema de nivelación automática y estabilización que resultará útil al momento de controlarlo con el mando remoto. Además no incluye excesivas utilidades para este mando, las cuales no serían utilizadas y contribuirían a encarecer el precio.

Por todas las razones expuestas anteriormente y los análisis comparativos realizados se concluye que la opción que mejor se adecúa a nuestro proyecto es el **Turbo Ace X720**.

1.2. Inteligencia

Además de la plataforma física, deben seleccionarse componentes electrónicos capaces de procesar la información proveniente de los sensores, computar y ejecutar los algoritmos de control y generar las señales necesarias para transmitir las instrucciones a los motores.

Será necesario, entonces, seleccionar uno (o varios) componentes capaces de desarrollar las tareas mencionadas. Para ello, el sistema elegido deberá contar con:

- Un microprocesador con suficiente poder de cómputo.
- Un sistema de entradas y salidas que permita interactuar con la instrumentación y con el sistema de control de motores.
- Un sistema de memoria no volátil que permita mantener cargado el programa de control.
- Elementos de comunicación para establecer conexión con un PC.
- Un sistema de potencia que brinde energía al sistema con una autonomía suficiente.

Dado que el sistema utilizará motores brushless, es necesario contar con un sistema capaz de generar señales PWM, ya sea mediante software, hardware o ambas, para controlar los motores.

También será necesario que el sistema seleccionado tenga una interfaz UART que permita la comunicación con los sensores involucrados.

Es evidente que la elección de la inteligencia no puede realizarse en forma independiente, sino que estará fuertemente condicionada por la elección del resto de la arquitectura del sistema final. Por ello, las decisiones tomadas serán afectadas considerablemente por las características del resto de los componentes del sistema.

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores, se seleccionaron varias arquitecturas posibles en una primera etapa. Se realizó un primer estudio de las diversas posibilidades ofrecidas, manejándose varias opciones.

Varias de ellas fueron descartadas por no cumplir todos los requisitos arriba mencionados. De las opciones que sí verificaban dichos requisitos fueron descartadas aquellas que implicaban más de un componente, optándose por considerar las opciones que fueran capaces de proveer todas las prestaciones arriba mencionadas integradas en una única placa.

Una vez realizado un primer análisis de las vastas posibilidades disponibles en el mercado se pre-seleccionaron las siguientes opciones:

1. Beagleboard XM
2. Gumstix Overo Fire

A continuación se desarrollarán y compararán las características fundamentales de ambas opciones, permitiendo así la selección de alguno de ellos en virtud de los requisitos del sistema que se desea implementar.

Procesadores: CPU y DSP

Es claro que el procesador es un componente determinante, pues será el encargado de computar completamente los algoritmos de control. También se encargará de manejar parte de la comunicación con la instrumentación y elementos de control. Finalmente, deberá ser capaz de manejar información proveniente de los canales de comunicación establecidos con un PC.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
CPU	ARM Cortex A8 1Ghz, 256KB L2 cache, 1200 MIPS	ARM Cortex A8 720Mhz, 256KB L2 cache, 1200 MIPS
DSP	TMS320C64x+, 800Mhz	TMS320C64x+, 520Mhz

Cuadro 1.7: Procesadores

Resulta evidente que ambas opciones presentan los mismos procesadores, con la salvedad que ambos procesadores de la Beagleboard presentan una mayor frecuencia de reloj.

Memoria

La memoria disponible en el sistema (tanto estática como volátil) resulta de vital importancia, pues será allí que se guardará la información del programa de control, configuraciones, etc. Adicionalmente, es necesario contar con suficiente memoria volátil a la hora de procesar datos y ejecutar los algoritmos de control.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Volátil(RAM)	512Mb	256Mb
Estática	Sin memoria interna. Soporta microSD de hasta 4Gb	256Mb de memoria interna

Cuadro 1.8: Memoria

La superioridad de la Beagleboard en cuanto a memoria resulta evidente a partir del análisis anterior.

Dimensiones y peso

Si bien no resulta una característica determinante, es conveniente que las dimensiones y peso de la placa elegida sean lo menores posibles, de forma de no ocupar gran parte de la carga útil del cuadricóptero con electrónica asociada a la inteligencia implementada.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Dimensiones	85.09x87.63mm	17x58mm
Peso	36g	5.6g

Cuadro 1.9: Dimensiones y Peso

En cuanto a dimensiones y peso, la placa Gumstix Overo Fire parece ser más adecuada.

Programación y Sistema Operativo

Es importante tener en cuenta como será realizada la programación de los sistemas considerados (dónde se almacena el programa, hardware necesario para la programación, etc.) En particular, es conveniente poder contar con algún sistema operativo que facilite la tareas de programación, testeo y debugging.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Sistema Operativo	Booteable desde microSD	Booteable desde microSD
Programación	A través de SO. Puerto JTAG de 14 pines	A través de SO

Cuadro 1.10: Programación y Sistema Operativo

Es claro que la placa Beagleboard parece ser mejor en cuanto a sus prestaciones de programación.

Alimentación y Energía

La forma en que la placa elegida es alimentada, así como el grado de autonomía que pueda lograrse con la misma deben ser tenidos en cuenta.

Lograr un nivel de autonomía lo suficientemente grande permitirá que el sistema se mantenga en vuelo durante un tiempo mayor. Idealmente, la autonomía de la alimentación de la inteligencia no debería ser el factor determinante del tiempo de vuelo del dispositivo.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Alimentación	BeagleJuice. Sistema de alimentación diseñado específicamente para la Beagleboard. (Dimensiones idénticas a la misma. Conector estándar para BeagleBoard).	Alimentado desde una Daughter board: Zippy Flightmax 2200mAh 3S1P
Voltaje. Intensidad de Corriente. Capacidad	5V, 1.5A, 4500mAh	11.1V, 44A (= 2200mA x 1P x 20C), 2200mAh 20C
Autonomía	6.5 horas	No especificado
Dimensiones	85.09x87.63x10mm	102x37x24mm
Peso	40g	180g

Cuadro 1.11: Alimentación

Pareciera ser evidente que la Beagleboard resulta superior en cuanto a alimentación disponible, dado que el pack de baterías BeagleJuice fue diseñado específicamente para brindar alimentación a la misma.

Puertos e I/Os

Los puertos disponibles para entradas, salidas y/o comunicación serán también un factor determinante a la hora de definir la arquitectura del sistema, pues es imperativo que el sistema de control pueda comunicarse con los sensores, el sistema de control de motores, etc.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Puertos	<ul style="list-style-type: none"> ■ 14 pin JTAG ■ UART ■ 28 pin expansion port ■ LCD ■ DVI-D ■ S-VIDEO ■ Stereo in/out ■ USB-OTG ■ RS232 ■ EHCI ■ 4 USBs ■ 10/100Mbps Ethernet 	<ul style="list-style-type: none"> ■ wifi ■ bluetooth ■ 2x70 pin expansion board port ■ 27 pin camara port

Cuadro 1.12: Puertos

Cada opción presenta ventajas y desventajas con respecto a los puertos disponibles. Si bien la Beagleboard parece tener una mayor variedad de puertos, la Gumstix Overo Fire cuenta con puertos WiFi y Bluetooth integrados, lo cual resulta ser una ventaja considerable en términos de comunicación.

Comunicación

Es deseable que el sistema posea algún tipo de comunicación inalámbrica integrada.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
WiFi	No	Sí
Bluetooth	No	Sí

Cuadro 1.13: Comunicación

La Gumstix Overo Fire resulta claramente superior en este aspecto.

Precio

El precio resulta ser, evidentemente, un factor importante a tener en cuenta.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Precio	149USD	220USD

Cuadro 1.14: Precio

Dada la diferencia de precios, sería deseable utilizar la Beagleboard, siempre y cuando esto no vaya en detrimento del desempeño final del sistema.

Otras características

Se presentan, a continuación, algunas características propias relevantes de cada uno de los sistemas propuestos.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Otras características	<ul style="list-style-type: none"> ■ Existencia de Camera Boards integrables directamente en un puerto dedicado ■ Existencia de la biblioteca OpenCV de visión computacional, optimizada para ser utilizada por Beagleboard 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Existencia de gran variedad de daughter boards con diversas funcionalidades

Cuadro 1.15: Otras caraterísitcas

Si se tiene en cuenta el objetivo secundario planteado (desarrollar un algoritmo de tracking visual), la Beagleboard parece ser más adecuada.

1.2.1. Definición de la inteligencia

En virtud del análisis anterior puede asegurarse que:

- La placa Beagleboard parece ser superior en los siguientes aspectos:
 - Procesadores
 - Memoria
 - Programación y Sistema Operativo
 - Alimentación
 - Puertos e I/Os
 - Precio
- La placa Gumstix Overo Fire parece ser superior en los siguientes aspectos:
 - Dimensiones y Peso
 - Comunicación
- Cada placa presenta sus características únicas, lo cual provee ventajas y desventajas para ambas arquitecturas posibles. Si se tiene en cuenta el objetivo secundario del proyecto, it est, la implementación de un sistema capaz de realizar tracking visual mediante una cámara, un sistema basado en la placa Beagleboard parecería ser más adecuado.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, se optó por construir el sistema en base a una arquitectura basada en la placa Beagleboard.

1.3. Comunicación

La inteligencia debe comunicarse con dos bloques del sistema: el de los sensores y el de los motores sobre los cuales se actúa. Además es necesario comunicar a la intellegencia con una PC con el objetivo de programar tanto los algoritmos de control como los rumbos del sistema.

1.3.1. Comunicación con PC

La placa elegida posee diversos puertos USB, por dicho motivo se pueden utilizar dichos puertos para obtener una comunicación directa con la PC. Dicha comunicación sirve para programar el sistema en una primera etapa, sin embargo no parece la forma más adecuada de comunicarse con el cuadricóptero mientras el mismo se encuentra en el aire para reprogramar una ruta, o para modificar algún detalle de un algoritmo. Por dicho motivo se opta por alguna comunicación de tipo inalámbrica. Las opciones que consideradas fueron: WiFi, Bluetooth y GSM. Al poseer en la intellegencia un kernel de linux, la comunicación vía WiFi es muy sencilla de implementar. Por dicho motivo se opta por este tipo de comunicación. Al disponer de diversos puertos USB en la inteligencia se opta por un módulo WiFi USB.

1.3.2. Comunicación con instrumentación

En lo que respecta a la comunicación con la instrumentación se disponen de diversas opciones. Se tiene la posibilidad de comunicarse a través de un protocolo serie, I2C o incluso puertos USB. Por dicho motivo este aspecto no será analizado cabalmente en esta sección sino que se realizará al momento de analizar las opciones de comunicación.

1.3.3. Comunicación con motores

Los motores, tal como se explicó anteriormente, son comandados mediante señales PWM. Por lo tanto, la comunicación entre la inteligencia y los motores será cableada. La señal de entrada de los ESCs se conectará directamente a los pines de salida de la inteligencia donde se programen los PWM.

1.4. Instrumentación

Para poder controlar el sistema es importante poder conocer los valores que toman las variables del mismo. Como se verá en el capítulo sobre el desarrollo del modelo físico del cuadricóptero, las variables que es necesario conocer son:

- La orientación del sistema en el sistema de coordenadas utilizado
- La altura del sistema en el sistema de coordenadas utilizado
- La aceleración en las tres coordenadas
- La velocidad angular del sistema según tres ejes de rotación

Por dicho motivo parece imprescindible dotar al sistema de sensores capaces de medir dichas magnitudes.

1.4.1. Acelerómetro

Previo a definir el acelerómetro, su principio básico de funcionamiento y su interés en la aplicación presentada, se debe realizar una discusión física sobre la caída libre como sistema de referencia.

En la física clásica, la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre una masa es proporcional a la intensidad del campo gravitatorio en la posición en la cual se encuentra. La teoría general de la relatividad es una teoría métrica de la gravitación. Los fenómenos que en la mecánica clásica se le atribuyen a la acción de la fuerza de gravedad, corresponden a movimientos inerciales en una geometría curvada del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad general.

Por lo tanto, desde el punto de vista de la física clásica, un sistema de referencia en caída libre es un sistema acelerado por la fuerza de la gravedad, y como tal, es no inercial.

Por el contrario, desde el punto de vista de la física relativista, el sistema está acelerado en el espacio, pero no en el espacio-tiempo, por lo tanto el sistema de referencia es inercial.

Saldada esta discusión se define un acelerómetro como un dispositivo capaz de medir su aceleración propia en el marco de referencia de la caída libre relativista. Esto implica que el dispositivo no mide siempre su cambio de velocidad en el espacio. Por ejemplo, la medida de un acelerómetro en caída libre será cero a pesar de que su velocidad crezca, de la misma forma se puede observar que un acelerómetro en reposo respecto de la Tierra, no dará una medida nula, sino que por el contrario medirá como aceleración g .

Existen diversos tipos de acelerómetro, en este caso se eligió trabajar con un acelerómetro contenido en un circuito integrado (tecnología MEMS). Las razones de esta elección son fundamentalmente tamaño y peso (críticos en la aplicación) y económicos. Los mismos son más pequeños, livianos y baratos que otras tecnologías.

Dicho acelerómetro procesa las medidas y las convierte a una salida eléctrica; la forma de dicha salida depende si el integrado es analógico o digital.

Los acelerómetros basados en tecnologías MEMS miden cambios internos de la transferencia de calor causada por la aceleración, ofreciendo ventajas significativas sobre el empleo de una estructura tradicional sólida de masas de prueba.

Ya que la masa de prueba en el diseño de los sensores MEMS son moléculas de gas, las estructuras móviles mecánicas son eliminadas dentro del acelerómetro.

Un acelerómetro de tres ejes no es otra cosa que un acelerómetro capaz de medir su aceleración propia en tres ejes de coordenadas.

Resulta fundamental dotar al cuadricóptero de un acelerómetro, el mismo será utilizado para obtener la aceleración lineal en cada instante. Integrando esta información se puede obtener la velocidad con la que se desplaza el sistema y por ende se puede obtener la posición del mismo conociendo la posición de partida. Este instrumento no provee toda la información necesaria para realizar el control del sistema. El sistema presenta 6 grados de libertad: las tres coordenadas de su centro de masa y los tres ángulos que determinan su orientación. En particular, el acelerómetro no detecta giros, por lo tanto es incapaz de aportarnos toda la información necesaria. Es imprescindible entonces dotar al cuadricóptero de un giróscopo.

1.4.2. Giróscopo

Un giróscopo es un instrumento que mide la velocidad angular del sistema en un marco de referencia inercial como el definido en la sección anterior. Las mismas restricciones sobre tamaño, peso y costos que se aplicaban para el acelerómetro se aplican aquí. Por dicho motivo se vuelve a optar por un instrumento de tecnología MEMS.

Desde el punto de vista teórico, procesando la información obtenida a partir del acelerómetro y del giróscopo se puede conocer en todo momento la posición del sistema y su orientación a partir de las condiciones iniciales.

En la práctica, sin embargo, esto no sucede así. Todas las medidas realizadas tienen un cierto error. Para obtener la orientación y la posición a cada instante se deben integrar las medidas obtenidas, por lo tanto, se integra también el error. Esto produce una acumulación de errores que afecta de forma considerable el resultado final luego de cierta cantidad de muestras.

Parece razonable, entonces, poder cotejar los datos que se obtienen mediante este método con datos obtenidos mediante otras fuentes. Es a partir de esta problemática que surge la necesidad de contar con un GPS. Se puede, cada cierto intervalo de tiempo, observar en cuanto difieren los resultados obtenidos integrando las medidas de los sensores con los datos que aporta el GPS, logrando de esta forma corregir los errores debido al *integration drift*.

1.4.3. GPS

La elección del GPS se basó casi totalmente en lograr la simplicidad del sistema. Existían muchas opciones, placas de diversos tamaños, con diversos tamaños de antenas, pero todas con similares especificaciones.

Las placas candidatas a estar a cargo de la inteligencia contaban con interfaces USB, por lo que se optó por comprar un dongle GPS, cuyas especificaciones son similares a las del resto de las opciones, y se puede comunicar vía USB. Existen drivers para dicho GPS en linux, por lo que la comunicación con el mismo no debería ser un problema.

Se optó por utilizar un GPS *Canmore GT-730F*.



Figura 1.2: Canmore GT-730F

1.4.4. Sensor de presión

Si bien un dispositivo GPS provee una estimación de la altura a la que se encuentra, la misma resulta ser poco exacta y confiable, por depender fuertemente de la cantidad de satélites vistos por el GPS así como por el efecto del rebote de las ondas en estructuras cercanas (resulta particularmente crítico el efecto de los rebotes en el piso, los cuales dan poca precisión a la medida de altura al estar muy cerca del suelo). Por este motivo es necesario contar con un sensor de presión absoluta que nos permita determinar la altura del cuadricóptero en forma independiente al resto de los sensores. La medida de presión debe ser absoluta pues es este tipo de medidas las que pueden ser traducidas a altura en forma rápida y confiable.

1.4.5. Magnetómetro

Si bien el sistema contará con giróscopos que permitirán, a través de integración, estimar la orientación del cuadricóptero, dicha estimación está sujeta a los errores asociados a este tipo de sensores (errores de drift e integración, entre otros), siendo además dicha medida una medida diferencial, teniendo como única referencia la orientación inicial del cuadricóptero. Eso por ello que resulta conveniente contar con un magnetómetro que permita tener una medida absoluta y confiable de la orientación del sistema, la cual puede ser entonces complementada y corregida mediante la información obtenida mediante la integración de la información generada por el giróscopo.

1.4.6. Sensor de temperatura

Si bien el control del sistema no depende directamente de la temperatura, los instrumentos a utilizarse están construidos con cierta tecnología que presenta dependencia con (y por ende tendrá errores asociados a) la temperatura. El contar con un sensor de temperatura permitirá sensar la misma y realizar correcciones en tiempo real que permitan minimizar dicho errores.

1.4.7. Definición de instrumentación

En las secciones 1.4.1 y 1.4.2 se detalló el porqué de la elección de la tecnología MEMS para el acelerómetro y el giróscopo. Las razones fundamentales son el costo, tamaño y peso de los instrumentos, siendo los últimos dos críticos en la aplicación. A partir de esta definición surgen dos posibilidades, integrar los instrumentos diseñando un PCB o adquirir uno en el cual se encuentren los dos sensores. Al diseñar un PCB se reduce el costo de la instrumentación. El precio de cada chip ronda los 5 U\$S, sumado al precio de algunas resistencias, capacidores y otros materiales necesarios para la construcción del PCB (Placa de cobre, percloruro, estaño, etc) hacen un total muy inferior al costo de comprar una placa ya armada (más de 60 U\$S). Sin embargo, el proceso de diseño del PCB extiende los plazos en gran medida, se debe diseñar el circuito, construir y verificar su funcionamiento. El proceso mencionado tendrá probablemente una duración superior a las dos semanas, lo cual implica un retraso en varios aspectos del proyecto, ya que diversas tareas previamente definidas dependen fuertemente del funcionamiento de la instrumentación. Por otra parte el peso que representa el costo de adquirir una placa en la que se incluyan ambos sensores (acelerómetro y giróscopo) en el presupuesto total es muy bajo (4%).

En base al análisis realizado se opta por adquirir una placa ya diseñada que contenga los sensores necesarios. Existe una gran diversidad de soluciones de instrumentación en el mercado. Debido a los requerimientos del proyecto se descartaron muchas de ellas. Las opciones consideradas finalmente se resumen en la siguiente tabla. La característica común a todas ellas es que pueden medir 6 grados de libertad, la misma cantidad de variables del sistema a controlar (tres coordenadas correspondientes a la posición del centro de masa, raw, yaw, pitch).

Los criterios que se fijaron para definir la instrumentación fueron los siguientes:

- Rango de medidas de los sensores
- Capacidad de cómputo
- Facilidad de programación (algunas placas incluyen microprocesadores)
- Comunicación disponible
- Compatibilidad con el resto del sistema
- Costo

En lo que respecta al rango de medida de los acelerómetros se definió que el mismo fuera de 3g. Dicha elección está fundamentada en que se planea un vuelo en el cual no se precisen considerar aceleraciones que sean muy superiores a la de la caída libre. Asimismo, se definió como rango de medida de los giróscopos un valor superior a los $300^{\circ}/s$, de forma que el sistema pueda realizar un giro casi completo en cualquiera de los tres ejes en 1 segundo. Lo que se observa es que todos los acelerómetros y giroscopos de las placas de esta preselección cumplen con dicho requerimiento.

	Acelerómetro		Giróscopo	
	Rango	Sensibilidad	Rango	Sensibilidad
CHR-6d	3g	300mV/g	$400^{\circ}/s$ ó $100^{\circ}/s$	2.5mV/ $(^{\circ}/s)$ ó 2.5mV/ $(^{\circ}/s)$
Atomic IMU	1.5g ; 6g	800mV/g 200mV/g	$300^{\circ}/s$	3.3mV/ $(^{\circ}/s)$
IMU Digital Combo Board	2g ; 16g	356LSB/g 321LSB/g	$2000^{\circ}/s$	14.375 LSB/ $(^{\circ}/s)$
IMU Analgo Combo Board Razor	3g	300mV/g	$300^{\circ}/s$ $1200^{\circ}/s$	3.3mV/ $(^{\circ}/s)$ 0.83mV/ $(^{\circ}/s)$
IMU Fusion Board	2g	256 LSB/g	$250^{\circ}/s$ $2000^{\circ}/s$	131 LSB/ $(^{\circ}/s)$ 16.4 LSB/ $(^{\circ}/s)$
Mongoose 9DoF IMU	2g; 4g; 8g; 16g	256 LSB/g 128 LSB/g 64 LSB/g 32 LSB/g	$2000^{\circ}/s$	14.375 LSB/ $(^{\circ}/s)$

Cuadro 1.16: Sensores

Resulta conveniente que la instrumentación posea un microprocesador. La razón principal para esto es que le ahorra tiempo a la inteligencia del sistema en el procesamiento de las medidas crudas de los sensores. Los sensores presentan sus medidas constantemente en forma analógica o digital dependiendo del sensor en cuestión. En caso de ser una medida analógica la misma debe ser, en primer lugar, digitalizada. Una vez que se tiene la medida digitalizada se debe realizar un procesamiento que consiste básicamente en ponerle una marca de tiempo a cada medida y asociarle una etiqueta correspondiente al sensor que la realizó. Resulta sumamente interesante que no sea el procesador principal quien se encarga de esta identificación, sino que el mismo reciba los datos pre-procesados. Por esta razón se favorecieron las placas que incluyeran un microprocesador.

	Frecuencia reloj	Largo de palabra	RAM	Flash
Mongoose 9DoF IMU	20MHz	8 bits	2Kb	32Kb
CHR-6d	72MHz	32 bits	20Kb	64Kb
Atomic IMU	10MHz	8 bits	2Kb	32Kb
IMU Digital Combo Board	-	-	-	-
IMU Analgo Combo Board Razor	-	-	-	-
IMU Fusion Board	-	-	-	-

Cuadro 1.17: Características de los microprocesadores

En caso de optar por una placa con microprocesador resulta fundamental que la misma sea sencilla de programar. Las razones son evidentes, ya que si los algoritmos que vienen programados de fábrica no resultan adecuados para la aplicación éstos deberían poder ser modificados fácilmente.

También parece importante que el código de fábrica sea abierto, principalmente para comprender su funcionamiento y poder procesar adecuadamente los datos que se obtengan de los sensores. Es interesante además poder modificar secciones puntuales de código, sin necesidad de reprogramar completamente el microprocesador.

La comunicación no resultó un factor crítico ya que todos los candidatos a procesador principal poseen diversas interfaces (UART, I2C, Convertoares AD). Sin embargo, debido a la familiarización del grupo de proyecto con las comunicaciones serie, se prefirió dar prioridad a aquellas placas que se comunicaran vía UART (en caso de que se optara por una placa con microprocesador).

En lo que respecta a compatibilidad con el sistema, se buscó que la alimentación de la placa fuera la misma que la del procesador principal. Por dicha razón lo ideal sería que la placa pueda ser alimentada a 5V.

A partir de las consideraciones anteriores, se consideró inicialmente que la solución más adecuada para el objetivo que se plantea en esta sección es la placa *Razor Atomic IMU*.

Dicha placa cumple con los rangos de medida especificados anteriormente y posee un procesador de 8 bits con un reloj de 10MHz.

Existen ya scripts en C disponibles para programar el dispositivo. Los mismos pueden ser modificados en caso de no cumplir con todos los requerimientos necesarios. La placa dispone de un puerto JTAG para programación.

La forma que tiene la placa de presentar los datos obtenidos de los sensores es a través de un puerto serie capaz de transmitir datos con una tasa de transferencia de 115.200bps.

Cabe aclarar que la Atomic IMU es la única de las soluciones consideradas que puede ser alimentada con una fuente de tensión de 5V.

Finalmente, el costo de la misma es de los más bajos dentro de las posibilidades consideradas.

En la figura 1.3 se puede observar dicha placa de instrumentación:



Figura 1.3: Atomic IMU

Luego de seleccionada y adquirida la placa, y a partir de varias pruebas realizadas y conocimientos adquiridos a lo largo del desarrollo del proyecto resulto claro que la misma no poseía suficiente cantidad de sensores para la aplicación deseada.

A partir de este punto se procedió a estudiar los nuevos requerimientos en cuanto a sensores y resulto evidente que además de los sensores ya existentes en la placa seleccionada sería necesario añadir un magnetómetro y un sensor de presión.

Nuevamente se planteó la disyuntiva entre comprar otra placa que contenga todos los sensores ya integrados o añadir los nuevos sensores en forma independiente. Con argumentos similares a los que motivaron la primer compra se optó por adquirir una nueva placa.

Analizando las diversas opciones se optó por adquirir la Mongoose 9DoF IMU. La misma no sólo cuenta con un magnetómetro y un sensor de presión adecuados a los requerimientos de la aplicación, sino que resulta ser considerablemente similar a la Atomic IMU, presentando mejores rangos y sensibilidades en sus sensores y mayor capacidad de almacenamiento y procesamiento de datos.

Adicionalmente, la Mongoose 9DoF IMU posee un sensor de temperatura que permitirá llevar a cabo compensación por temperatura y corregir las medidas obtenidas a partir de los otros sensores.

En la figura 1.4 se puede observar dicha placa de instrumentación:



Figura 1.4: Atomic IMU

1.4.8. Especificaciones técnicas de la placa de instrumentación seleccionada (Mongoose 9DoF IMU)

Acelerómetro

Rango	$\pm 16g$
Resolución	10-13 bits (siempre 4mg/LSB)
Datos nuevos	0.1 a 800 Hz
Ruído XY	0.75@100Hz - 3@3200Hz LSB-rms
Ruído Z	1.1@100Hz - 4.5@3200Hz LSB-rms
Cross Axis	$\pm 1\%$

NOTAS:

- Output data rate puede llegar a 3200Hz, pero usando SPI. Con I²C a 400kHz solamente se puede llegar a 800Hz.
- Ancho de banda = $Datos_nuevos/2$

Giróscopo

Rango	$\pm 2000^{\circ}/s$
Resolución	14.475 LSB/(°/s)
Datos nuevos	3.9Hz a 8kHz
Ancho de banda	256Hz
Cross Axis	$\pm 2\%$
Ruído	0.38 °/s-rms

NOTAS:

- Datos nuevos: La muestras pasan por un LPF digital de 256 a 5Hz, esto limita el ancho de banda.

Magnetómetro

Rango	± 8 Ga
Resolución	5mGa@GN=2
Datos nuevos	0.75 - 75Hz
Ancho de banda	37Hz
Cross Axis	$\pm 0.2\%$ FS/Ga
Ruído	-

NOTAS:

- El rango queda determinado por la ganancia, que se configura con 3 bits:

GN	0	1	2	3	4	5	6	7
Rango (Ga)	±0.88	±1.3	±1.9	±2.5	±4.0	±4.7	±5.6	±8.1

- Se puede configurar para que el dato que muestre sea el promedio de hasta 8 muestras.

Sensor de presión

Rango	300 a 1100 hPa (9000 a -500m)
Resolución	1Pa
Precisión. Abs.	typ/max ±1.0/±3.0 hPa
Precisión Rel.	±0.5 hPa
Datos nuevos	typ/max: 3/4.5ms - 17/25ms
Ancho de banda	333/40Hz
Ruído (hPa)	0.06 - 0.03
Ruído (m)	0.5 - 0.25

NOTAS:

- El rango, en altura, se refiere a la altura sobre el nivel del mar.
- El modo de operación (cantidad de muestras promediadas) afecta:
 - El tiempo de conversión.
 - El ancho de banda.
 - La resolución.
 - El ruído.
- Es necesario hacer una medida de temperatura de vez en cuando (1Hz) para mejorar la lectura del sensor de presión.

Sensor de temperatura

Rango	0 a 65 °C
Resolución	0.1 °C
Precisión Abs.	typ/max ±1.0/±2.0 °C
Datos nuevos	typ/max: 3/4.5ms
Ruído	-

NOTAS:

- El sensor de temperatura está incorporado al sensor de presión.

Parte II

Modelado del sistema

CAPÍTULO 2

MODELO FÍSICO

Resulta imprescindible para controlar el cuadricóptero comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de esta sección es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo de Variables de Estado, de ahora en más MVE. Lo que se busca es obtener una representación del sistema de la forma $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$, donde \vec{x} es el vector de estados del sistema, \vec{u} es el vector que representa las entradas del sistema y t es el tiempo.

Al tratarse de una plataforma comercial no se dispone de todos los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo. Por ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores (tanto velocidad como empuje), el tensor de inercia del sistema,etc. Sí bien algunos parámetros como las masas de las distintas partes que componen el sistema y las distancias involucradas en el desarrollo que se hará a continuación son sencillas de obtener, se tuvieron que realizar experimentos y cálculos más sofisticados para la completa caracterización del sistema. Estos aspectos no serán desarrollados en profundidad a lo largo de este trabajo, pero pueden consultarse los valores de las constantes obtenidas en el anexo ?? ,mientras que el cálculo de los tensores de inercia de interés y la obtención de la respuesta de los motores se encuentran desarrollados en profundidad en los anexos ?? respectivamente.

En la presente sección nos limitaremos a obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del cuadricóptero.

Para el estudio en cuestión se considerará el cuadricóptero según las convenciones expresadas en la figura 2.1. Por un lado se definen las coordenadas "del mundo" (i_I, j_I, k_I) , un sistema de referencia inercial fijo. Las magnitudes correspondientes a la base de este referencial se notarán con el subíndice I . Por otro lado se utilizará el sistema de referencia (i_q, j_q, k_q) solidario al cuadricóptero. En este caso las magnitudes medidas en ese referencial se notarán con el subíndice q . En la figura 2.1 se pueden apreciar ambos sistemas de referencia.

En la presente sección se utilizarán las herramientas de la mecánica clásica a fin de obtener un modelo, que como tal, no es una representación exacta de la realidad.

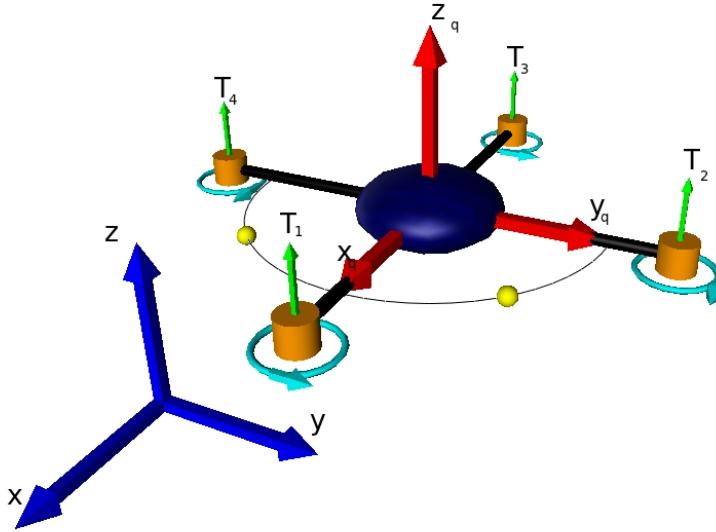


Figura 2.1: Modelo del cuadcóptero

Se realizarán diversas hipótesis que permiten conocer el sistema en forma aproximada, pero perfectamente adecuada para las condiciones en las cuales se operará el cuadricóptero.

2.1. Hipótesis de trabajo

Previo al desarrollo del modelo es muy importante esclarecer las hipótesis en las cuales opera el cuadricóptero. Una vez definidas las mismas seremos capaces de realizar las simplificaciones pertinentes.

No debe perderse de vista que el cuadricóptero con el que se trabaja fue diseñado para ser comandado a través de un control remoto. Por dicho motivo es razonable que sus características sean tales que le permitan a una persona volarlo desde el suelo. Parece perfectamente razonable que se haya diseñado el sistema para volar por tiempos limitados, distancias relativamente cortas y a bajas velocidades, para permitirle al operador un control manual más sencillo. Asimismo, estas consideraciones permiten introducir diversas simplificaciones en el modelado.

2.1.1. La Tierra como sistema de referencia inercial

Evidentemente la Tierra **no** es un sistema de referencia inercial ya que la misma se encuentra sometida a la traslación en torno al Sol y a una rotación en sobre su eje. Supongamos una partícula que se encuentra en movimiento relativo a la Tierra. Su aceleración respecto de un sistema verdaderamente inercial puede escribirse como:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C \quad (2.1)$$

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (2.2)$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (2.3)$$

En las ecuaciones anteriores \vec{a}' es la aceleración de la partícula en el sistema relativo, \vec{v}' es la velocidad relativa de la partícula, \vec{r}' la posición relativa, $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de la Tierra y \vec{a}_O' es la aceleración del centro de masa de la Tierra.

El objetivo es ahora analizar si es posible considerar que $\vec{a} \approx \vec{a}'$. Si esto último se cumple se puede aproximar a la Tierra como un sistema inercial. El radio promedio de la órbita Heliocéntrica(R_H) es de $1,5 \times 10^8 Km$, dicha órbita se recorre en 365 días lo que nos da una velocidad promedio de:

$$V_T = \frac{1,5 \times 10^{11} m}{365 \times 24 \times 60 \times 60 s} \approx 4,8 \times 10^3 ms^{-1}$$

Esta velocidad implica que la aceleración del centro de masa de la Tierra(\vec{a}_O') es de aproximadamente:

$$a_O' = \frac{V_T^2}{R_H} \approx 15,36 \times 10^{-5} ms^{-2}$$

Por otra parte sabemos que la Tierra rota sobre su eje una vez cada 24 horas con velocidad angular constante, tenemos así que:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60 s} \approx 7,3 \times 10^{-5} rads^{-1}$$

Finalmente debemos considerar el radio promedio de la Tierra($R_T = 6,731 \times 10^6 m$), ya que las alturas que alcanzará nuestro sistema son despreciables respecto del radio de la Tierra.

Por lo tanto

$$a_T \approx 3,6 \times 10^{-2} ms^{-2}$$

Para que el término de la aceleración de Coreolis sea comparable con la aceleración de transporte las velocidades del cuadricóptero relativas a la Tierra deberían ser del orden de cientos de metros por segundo. Las velocidades evidentemente serán inferiores, por lo tanto este término puede ser despreciado.

La aceleración relativa al sistema de la Tierra difiere de aproximadamente $3,6 \times 10^{-2} ms^{-2}$ de la aceleración medida en un sistema verdaderamente inercial. Por otra parte la resolución del acelerómetro utilizado es de $4mg \approx 4,81 \times 10^{-2} ms^{-2}$. Es imposible de detectar el término de la aceleración de transporte, por dicho motivo parece razonable despreciarlo.

En resumen tenemos que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \approx m\vec{a}'$$

Esto nos permite afirmar que la Tierra puede aproximarse como un sistema de referencia inercial.

2.1.2. Curvatura de la Tierra

El cuadricóptero no se desplazara una distancia superior a una centena de metros paralelo a la superficie de la Tierra. Supongamos entonces que el cuadricóptero se desplaza $1km$ en una dirección. Esto corresponde a recorrer un arco de círculo de

$\theta = \frac{1\text{km}}{6,731 \times 10^3 \text{km}} \approx 1,5 \times 10^{-4} \text{rad}$. Si consideramos la superficie terrestre como un plano, la distancia recorrida es:

$$d = R_T \sin(\theta) \approx 0,999999996 \text{km}$$

Como era de esperar, la diferencia entre la distancia recorrida como arco de círculo y asumiendo una aproximación local de la Tierra por un plano es despreciable. Por lo tanto trabajaremos con un sistema de coordenadas cartesiano.

2.1.3. Atracción gravitacional

Todos los objetos se encuentran relacionados entre sí por medio de la Fuerza de atracción gravitacional. Sin embargo en las cercanías de la Tierra la atracción gravitacional con el resto de los objetos es completamente despreciable. Dicha fuerza vale:

$$F_G = G \frac{M_T m}{d^2} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

Donde G es la constante gravitacional y h la altura a la cual se encuentra una partícula. Como ya se analizó anteriormente las alturas a las cuales se desenvolverá el cuadricóptero son despreciables respecto del radio de la Tierra. Por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$F_G \approx \frac{M_T m}{R_T^2} = gm$$

donde g es la constante gravitacional de la Tierra, su valor es aproximadamente $9,81 \text{m s}^{-2}$

2.1.4. Fuerzas aerodinámicas

Debido a las bajas velocidades que logrará el cuadricóptero se decidió despreciar las fuerzas de tipo aerodinámicas, salvo aquellas responsables de las fuerzas y momentos de las hélices. Estas fuerzas serán analizadas con mayor profundidad en la sección 2.5.

2.2. Sistema de referencia

Como ya se mencionó, a lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia: uno inercial¹ solidario a la tierra (S_I) y otro solidario al cuadricóptero (S_q) como se muestra en la figura 2.1. El sistema S_I es un sistema local donde la dirección \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} corresponden a las direcciones Este, Norte y hacia arriba. El sistema S_q se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas del sistema S_I , dichas rotaciones se muestran en la figura 2.2. Los ángulos θ , φ y ψ son conocidos como ángulos de Euler.

La importancia del sistema S_q radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema el empuje de las hélices, los torques que introducen y velocidades angulares de los motores del

¹En esta sección se consideran sistemas inerciales en el sentido clásico

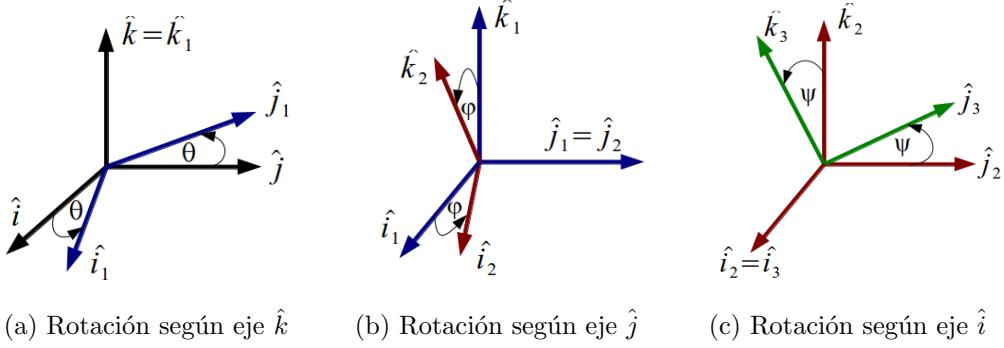


Figura 2.2: Rotaciones

cuadricóptero tienen siempre la misma dirección. Asimismo cabe agregar que el sistema de navegación incluirá entre otros un acelerómetro y un giróscopo IMU (Inertial Measurement Unit). Dichos dispositivos miden la aceleración y la velocidad angular del sistema en un sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero, es decir en el sistema S_q . Si bien no es fundamental expresar las ecuaciones del sistema en este marco de referencia resulta conveniente hacerlo ya que gran parte de la información vendrá dada en este sistema. Considerar este sistema implica una simplificación del procesamiento de los datos obtenidos por la IMU.

Las tres transformaciones pueden representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

La transformación de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al cuadricóptero se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotación definidas.

$$H_I^q = H_2^q \cdot H_1^2 \cdot H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta & \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix}$$

A su vez, la transformación inversa puede obtenerse multiplicando las coordenadas del sistema S_q por la matriz H_I^I . Dicha matriz puede obtenerse de la siguiente forma:

$$H_I^I = (H_2^q \cdot H_1^2 \cdot H_I^1)^{-1} = (H_I^1)^{-1} \cdot (H_1^2)^{-1} \cdot (H_2^q)^{-1} = H_1^I \cdot H_2^I \cdot H_q^I$$

2.3. Cinemática

Además de la relación entre las coordenadas de un sistema y del otro, es interesante conocer la relación que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas de los ángulos de Euler. Sea $\vec{\omega}$ la velocidad angular del cuadricóptero (y por ende la del sistema S_q). La expresión de la velocidad angular en el sistema de

referencia del cuadricóptero es la siguiente:

$$\vec{\omega} = w_{q_x} \vec{i}_q + w_{q_y} \vec{j}_q + w_{q_z} \vec{k}_q$$

Donde w_{q_x} , w_{q_y} y w_{q_z} son las proyecciones ortogonales de la velocidad angular en el sistema S_q . Por como fue construido el sistema de referencia solidario al cuadricóptero y utilizando el teorema de adición de velocidades angulares, se deduce trivialmente que la velocidad angular del cuadricóptero puede escribirse como:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} + \dot{\varphi} \vec{j}_1 + \dot{\psi} \vec{i}_2$$

El vector \vec{i}_2 es invariante respecto de la tercera rotación, es decir que $\vec{i}_2 = \vec{i}_q$. Por otra parte, multiplicando los vectores \vec{k} y \vec{j}_1 por las matrices $H_1^2.H_2^q$ y H_2^q respectivamente se puede obtener la velocidad angular del cuadricóptero en el sistema de coordenadas referido a el. Operando se obtiene:

$$w_{q_x} \vec{i}_q + w_{q_y} \vec{j}_q + w_{q_z} \vec{k}_q = (\dot{\psi} + \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{i}_q + (\dot{\varphi} \cos \psi + \dot{\theta} \cos \varphi \sin \psi) \vec{j}_q + (\dot{\theta} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi) \vec{k}_q$$

De esta ecuación se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero con las derivadas de los ángulos de Euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q_x} + \omega_{q_z} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{q_y} \tan \varphi \sin \psi \\ \omega_{q_y} \cos \psi - \omega_{q_z} \sin \psi \\ \omega_{q_z} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{q_y} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Realizando un razonamiento similar se deduce la relación que existe entre la velocidad del sistema expresada en el marco de referencia inercial con la velocidad expresada en el sistema de referencia solidario al cuadricóptero. La velocidad en el sistema de referencia inercial no es otra cosa que la derivada de la posición (\vec{r}).

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})'$$

Al igual que con la velocidad angular se puede escribir la velocidad absoluta del cuadricóptero en el sistema S_q . Lo que se tiene es que $\vec{v} = v_{q_x} \vec{i}_q + v_{q_y} \vec{j}_q + v_{q_z} \vec{k}_q$. Donde v_{q_x}, v_{q_y} y v_{q_z} son las proyecciones ortogonales de la velocidad absoluta en el sistema solidario al cuadricóptero. Igualando ambas expresiones de la velocidad se obtiene:

$$\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} = v_{q_x} \vec{i}_q + v_{q_y} \vec{j}_q + v_{q_z} \vec{k}_q$$

Para transformar las coordenadas de un sistema de referencia al otro alcanza con multiplicar por una de las matrices de cambio de base definidas previamente. En particular nos interesa tener una expresión para las derivadas de la posición en el sistema S_I , por esta razón se multiplica la expresión de la velocidad en el sistema S_q por la matriz H_q^I . Operando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_x} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\ v_{q_x} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\ -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Hasta aquí hemos obtenido simplemente relaciones cinemáticas; por un lado entre la velocidad angular del sistema S_q y las derivadas de los ángulos de Euler, por el otro se tiene el vínculo entre la velocidad absoluta del sistema y la velocidad absoluta expresada en el sistema S_q y los ángulos de Euler. Sin embargo aún no conocemos cuales son las Fuerzas y Momentos presentes en el sistema, ni que efectos producen sobre el mismo. Es aquí que nos detendremos en el análisis cinemático para considerar la dinámica del sistema.

2.4. Dinámica del Sistema

Existen diversas formas de atacar el problema de la dinámica de un sistema, en particular se puede encarar el problema desde la mecánica analítica o realizando consideraciones energéticas, sin embargo en este caso se elige trabajar con las ecuaciones cardinales.

2.4.1. Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleración. Esto se puede escribir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$$

Anteriormente fue expresado el interés de trabajar en el sistema solidario al cuadricóptero. El vector aceleración se puede obtener derivando la velocidad. Para realizar la derivada de un vector expresado en un sistema móvil puede utilizarse la siguiente formula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

En la ecuación anterior $\frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal, mientras que $\frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial. Operando se obtiene:

$$\vec{a} = (\dot{v}_{q_x} + v_{q_z}\omega_{q_y} - v_{q_y}\omega_{q_z})\vec{i}_q + (\dot{v}_{q_y} + v_{q_x}\omega_{q_z} - v_{q_z}\omega_{q_x})\vec{j}_q + (\dot{v}_{q_z} + v_{q_y}\omega_{q_x} - v_{q_x}\omega_{q_y})\vec{k}_q$$

Operando se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{q_x} \\ \dot{v}_{q_y} \\ \dot{v}_{q_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_y}\omega_{q_z} - v_{q_z}\omega_{q_y} \\ v_{q_z}\omega_{q_x} - v_{q_x}\omega_{q_z} \\ v_{q_x}\omega_{q_y} - v_{q_y}\omega_{q_x} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^4 F_{ext} \quad (2.7)$$

2.4.2. Segunda Cardinal

La segunda cardinal indica que la derivada del momento angular de un sistema respecto a un punto Q es igual al torque externo que se ejerce sobre el mismo más un término que depende de la velocidad de dicho punto. La ecuación queda:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M_Q^{ext} + M\vec{v}_G \times \dot{\vec{r}_Q}$$

Asumiendo simetría del sistema, se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de la esfera principal del mismo. Esto no es completamente cierto ya que existen algunas asimetrías en el sistema, a modo de ejemplo se puede nombrar que la batería del UAV queda por fuera de la esfera y los apoyos también, sin embargo en una primera aproximación del modelo se asume la simetría respecto al plano que intersecta la esfera en ecuador. Realizada dicha suposición y planteando la segunda cardinal en el centro de masa obtenemos una expresión más sencilla:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = M_G^{ext}$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del cuadricóptero y el momento angular de cada motor. Consideraremos el cuadricóptero sin los motores como un primer rígido y los motores como cuatro rígidos independientes.

El momento angular de un rígido respecto a un punto Q del mismo puede calcularse como:

$$\vec{L}_Q = M_i(\vec{G}_i - \vec{Q}) \times \vec{V}_Q + \Pi_Q \vec{\Omega}_i$$

Donde M_i , G_i , Π_Q y $\vec{\Omega}_i$ son la masa de cada rígido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

Como se propuso anteriormente, se elige calcular el momento angular en el centro de masa del cuadricóptero. Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir el momento angular del cuadricóptero sin los motores como:

$$\vec{L}_{O'} = (M - 4M_m)(\vec{O'} - \vec{O'}) \times \vec{V}_{O'} + \Pi_{O'_q}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{w}_q = \Pi_{O'_q}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_q$$

La velocidad angular de cada motor es la suma de la velocidad angular del cuadricóptero y de la velocidad de rotación según su eje principal. El cálculo del momento angular de los motores difiere en que no se realizará respecto de un punto del motor. En este caso se debe considerar al motor como un rígido rotando en torno a su eje y realizando un movimiento de traslación respecto del centro de masa del cuadricóptero. Para el cálculo del momento angular debido a la propia rotación del motor se debe considerar una base móvil solidaria a cada motor (i_m, j_m, k_m). El origen de dicha base es el centro de masa del motor, se cumple además que $k_m = \vec{k}_q$. El momento angular del primer motor es entonces:

$$\vec{L}_{O'_{m1}} = \Pi_{G_m}^{\{i_m, j_m, k_m\}} (\vec{\omega}_q + \vec{\omega}_1) + M_m d_m \vec{i}_q \times \vec{v}_{m1}$$

En la ecuación anterior v_{m1} corresponde a la velocidad del centro de masa del primer motor. Por el teorema de distribución de velocidades podemos afirmar que: $\vec{v}_{m1} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_1 \vec{k}_q$. Operando se obtiene que:

$$\vec{L}_{O'_{m1}} = \Pi_{G_m}^{\{i_m, j_m, k_m\}} (\vec{\omega}_q + \vec{\omega}_1) + M_m d_m \vec{i}_q \times \vec{v}_{O'} + J_{O'}^{M_m G} \vec{\omega}_q$$

Donde:

$$J_{O'}^{M_{m1}G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_m d_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_m d_v^2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Para realizar el producto: $\Pi_{G_m}^{\{i_m, j_m, k_m\}}(\vec{\omega}_q + \vec{\omega}_1)$ se debe transformar $\vec{\omega}_q$ al sistema solidario a los motores. Sin embargo al ser la matriz diagonal y al haber modelado el motor como un cilindro, es decir un objeto que posee simetría de revolución se tiene que: $\Pi_{G_m}^{\{i_m, j_m, k_m\}} = \Pi_{G_m}^{\{i_q, j_q, k_q\}}$

Por lo tanto se puede afirmar que: $\Pi_{G_m}^{\{i_m, j_m, k_m\}}(\vec{\omega}_q + \vec{\omega}_1) = \Pi_{G_m}^{\{i_q, j_q, k_q\}}(\vec{\omega}_q + \vec{\omega}_1)$ La matriz de la ecuación 2.8 no otra cosa que el término asociado al cálculo del tensor de inercia en un eje paralelo (Teorema de Steiner). Por lo tanto podemos reducir la expresión del momento angular para un motor a la siguiente forma:

$$\vec{L}_{O'm_1} = \Pi_{O'M_{m1}}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{M_{m1}}}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_1 + M_m d_m \vec{i}_q \times \vec{v}_{O'}$$

Se observa que al sumar el último término de cada momento angular de los motores el resultado es cero. La simetría asumida del sistema es la que nos permite simplificar nuevamente las ecuaciones. El momento angular toma la forma:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{O'} &= \Pi_{O'_q}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_q + 2\Pi_{O'_M x}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_q + 2\Pi_{O'_M y}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{M_m}}^{\{i_q, j_q, k_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4) = \\ &= \Pi_{O'}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{M_m}}^{\{i_q, j_q, k_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4) \end{aligned}$$

Tanto las velocidades angulares como los tensores de inercia que componen la ecuación anterior se encuentran expresados en la base solidaria al cuadricóptero. Para realizar dicha derivada se utiliza nuevamente la fórmula de la derivada de un vector:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{r}\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Lo que se obtiene de dicha derivada es:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_Q}{dt} &= \Pi_{O'}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \dot{\vec{\omega}}_q + \Pi_{G_{M_m}}^{\{i_q, j_q, k_q\}} (\dot{\vec{\omega}}_1 - \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3 - \dot{\vec{\omega}}_4) \\ &\quad + \vec{\omega}_q \times (\Pi_{O'}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{M_m}}^{\{i_q, j_q, k_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4)) \end{aligned}$$

A partir del cálculo de esta derivada podemos reescribir la segunda cardinal:

$$\Pi_{O'}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{q_x} \\ \dot{\omega}_{q_y} \\ \dot{\omega}_{q_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q_y} \omega_{q_z} (I_{yy} - I_{zz}) - \omega_{q_y} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ \omega_{q_x} \omega_{q_z} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q_x} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ -I_{zzm} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) \end{pmatrix} + M_G^{ext} \quad (2.9)$$

2.5. Fuerzas y momentos involucrados

Para completar el análisis del sistema es fundamental conocer las expresiones de las fuerzas y los momentos involucrados. Por un lado se debe considerar la acción del peso en el sistema. Además debemos conocer con precisión las fuerzas y momentos que introducen las hélices del cuadricóptero ya que son estos los elementos sobre los cuales se pueden realizar las acciones de control. Finalmente consideraremos también el efecto del viento. Esta última es una fuerza que no puede conocerse a priori y será considerada como una perturbación en el sistema. Recordamos que las bajas velocidades a las que el sistema se mueve nos permiten despreciar las fuerzas aerodinámicas, a excepción de aquellas que tienen como origen el giro de las hélices.

2.5.1. Peso

Como ya se aclaró anteriormente, debido a la pequeña variación de la altura, el peso del cuadricóptero será considerado constante. Esta fuerza se aplica sobre el centro de masa del sistema, cabe recordar que en el presente análisis se considera la segunda cardinal en torno a dicho punto. Por lo tanto la distancia entre el eje en el cual se calculan los momentos y el punto de aplicación es cero. Recordando que:

$$M = \vec{d} \times \vec{F}$$

se deduce trivialmente que el momento del peso es cero. La expresión para el peso es:

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

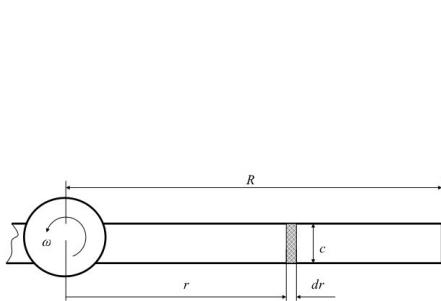
Insistimos en el hecho que nos interesa conocer las fuerzas en el sistema solidario al cuadricóptero. Para expresar esta fuerza en dicho sistema se multiplica el peso por la matriz H_I^q . Lo que se obtiene es:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} Mg$$

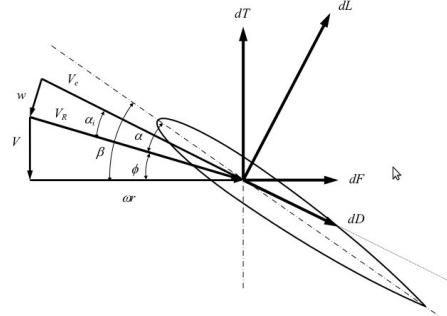
2.5.2. Fuerzas y momentos de las hélices

La teoría de fluidos que explica el comportamiento de las hélices es compleja y ampliamente difundida por lo que no es de interés desarrollarla en profundidad en este trabajo. Diversa bibliografía puede ser consultada en donde se explican adecuadamente los fenómenos involucrados en las fuerzas aerodinámicas presentes en una hélice. Sin embargo si parece pertinente realizar un breve resumen de dichas fuerzas. Para el presente análisis consideraremos una hélice rotando en sentido antihorario, el razonamiento para una hélice rotando en sentido opuesto es análogo. En la figura 2.3 se observan dos vistas de la misma hélice. En la figura 2.3a puede observarse una hoja de la hélice. En la figura 2.3b se representa una vista transversal de la hélice con las fuerzas aerodinámicas involucradas.

La *Blade Element Theory*(BET) intenta explicar las fuerzas presentes en la hélice considerando en primer lugar las fuerzas en un elemento de área infinitesimal de la hélice. Una vez halladas estas fuerzas se integra sobre el total de la superficie obteniendo así las fuerzas y momentos totales. Como se explica en ??, las fuerzas



(a) Vista superior de una hélice



(b) Fuerzas aerodinámicas presentes en una hélice

Figura 2.3: Vistas de una hélice y diagrama de fuerzas aerodinámicas presentes

presentes sobre un elemento de área de la hélice son la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*, dichas fuerzas se encuentran representadas en la figura 2.3 como dL y dD respectivamente. La forma que tienen dichas fuerzas es:

$$dL = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_L c r^2 dr$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_D c r^2 dr$$

Donde ρ_A es la densidad del aire, ω_p la velocidad angular de la hélice, r la distancia del elemento de hélice al eje de la hélice, c es la longitud promedio de la cuerda de la hélice ², C_L y C_D son coeficientes adimensionados.

La fuerza infinitesimal de empuje (dT) puede escribirse en función de las fuerzas de *lift* y de *drag* de la siguiente forma:

$$dT = dL \cos \varphi_I - dD \sin \varphi$$

Realizando la aproximación que φ es un ángulo pequeño y que la fuerza de *lift* es al menos un orden mayor que la de *drag* se puede afirmar que:

$$dT \approx dL$$

El empuje por lo tanto puede calcularse como la integral de dT respecto de r . Considerando que la hélice consta de dos hojas, se obtiene que:

$$T = \frac{1}{3} \rho_A C_L c R_P^3 \omega_p^2 \quad (2.10)$$

Donde R_P es el radio radio de la hélice. En todo momento tenemos dos fuerzas (una sobre cada hoja de la hélice) en dirección vertical y hacia arriba. Si nos referimos a la configuración de la figura 2.3b, el momento de las fuerzas dT es hacia la izquierda para la hoja considerada, sin embargo para la otra hoja este momento será hacia la derecha. Se puede concluir entonces que el torque neto que aporta esta

²segmento imaginario que une el borde de ataque con el borde de fuga

fuerza en torno al eje de rotación de la hélice es nulo.

Intentaremos ahora obtener la resultante de las fuerzas horizontales sobre la hélice y el torque de dichas fuerzas. Comenzaremos por analizar que sucede con las sumas de las fuerzas, para luego proceder a calcular el momento de las mismas. Consideremos ahora la fuerza dF como la que se muestra en la figura 2.3b. Como se observa en la figura dicha fuerza es hacia la derecha. Si consideramos la fuerza horizontal sobre la otra hoja de la hélice, se obtiene una fuerza hacia la izquierda. Por lo tanto la suma de las fuerzas horizontales es nula. Sin embargo los momentos de las fuerzas en una y otra hoja de la hélice no se anulan, el momento que producen ambas es en la dirección de \vec{k}_q . Por lo tanto el momento total será la suma de los momentos infinitesimales en toda la superficie de una hoja de la hélice multiplicado por la cantidad de hojas, es decir 2.

En primer lugar escribimos la fuerza horizontal como una composición de la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*.

$$dF = dD \cos \varphi + dL \sin \varphi \approx dD + dL \left(\frac{V}{\omega_p} \right)$$

En esta ecuación V y $\omega_p r$ representan la velocidad del flujo de aire en las direcciones vertical y horizontal respectivamente. Operando se obtiene el momento total de la hélice en la dirección entrante:

$$Q = \frac{1}{4} \rho_A c R_P^4 (C_D + K) \omega_p^2 \quad (2.11)$$

En resumen, la teoría BET nos permite afirmar que sobre cada hélice del cuadricóptero que rota en sentido antihorario se aplicará una fuerza en la dirección \vec{k}_q cuyo módulo se expresó en la ecuación 2.10 y un momento en la dirección \vec{k}_q cuyo módulo es lo expresado en la ecuación 2.11. Para una hélice rotando en sentido anti-horario se obtiene exactamente los mismos resultados excepto que el momento es en sentido opuesto.

Hasta aquí sabemos que sucede las fuerzas y momentos aplicados sobre una hélice. Nos concentraremos ahora en estudiar como influyen estas fuerzas y momentos en el cuadricóptero. Para lo que sigue continuaremos trabajando con las convenciones adoptadas en 2.1.

A partir de lo estudiado anteriormente se deduce trivialmente que el empuje de las hélices puede expresarse en el sistema S_q como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{i=4} T_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se determinó que las fuerzas de empuje no introducen un momento neto en el eje de las mismas. Sin embargo no debemos perder de vista que la segunda cardinal fue planteada en el centro de masa del sistema, por lo tanto respecto de dicho punto las fuerzas sí introducen un momento que puede calcularse como $M1 = L \vec{x}' \times \vec{T}_1 \vec{k}_q$ para el motor 1. L es la distancia del centro de masa del cuadricóptero al eje del motor 1. La expresión del momento es análoga para los restantes motores.

Debemos considerar además el momento obtenido para cada hélice en la dirección \vec{k}_q . Cabe recordar que se dedujo que para hélices rotando en sentido anti- horario se

tiene un momento positivo, mientras que para una hélice rotando en sentido horario el momento es negativo. Realizando estas consideraciones es posible afirmar que la suma total de los momentos es:

$$M_G^{ext} = \begin{pmatrix} L(T2 - T4) \\ L(T3 - T1) \\ Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 \end{pmatrix}$$

En base al estudio realizado se podrían conocer dichas relaciones calculando los parámetros que dependen de la geometría de la hélice, sin embargo este estudio resulta tedioso y la mayor parte de los métodos existentes para determinar dichos parámetros con buena precisión son destructivos. Por lo tanto se optó por obtener dichas respuestas en forma experimental. El proceso detallado puede consultarse en el anexo ???. En dichos experimentos se obtuvo que:

$$T = 3,5296 \times 10^{-5} \omega^2 - 4,9293 \times 10^{-4} \omega$$

$$Q = 3,4734 \times 10^{-6} \omega^2 - 1,3205 \times 10^{-4} \omega$$

Estos resultados parecen adecuados respecto de lo desarrollado teóricamente ya que ambas respuestas son cuadráticas.

2.6. Modelo en variables de Estado

Luego de realizados los estudios sobre la cinemática y dinámica del sistema y luego de comprender cabalmente las fuerzas y momentos involucrados se procede a construir el modelo en variables de estado.

Se debe aclarar que la elección realizada del vector de estados se debe exclusivamente a la conveniencia práctica que se encuentra al trabajar con las variables expresadas en el sistema del cuadricóptero. Esta conveniencia se ve reflejada en dos aspectos, en primer lugar las simplificaciones que introduce trabajar con estas variables en el marco de un desarrollo teórico de las ecuaciones que gobiernan al sistema, por otra parte, al disponer de sensores montados sobre el cuadricóptero, los mismos medirán las velocidades angulares y lineales en el sistema S_q . Bajo esta elección parece razonable escoger el vector de estados de la siguiente manera:

$$X = \{x, y, z, v_{q_z}, v_{q_y}, v_{q_x}, \theta, \varphi, \psi, \omega_{q_x}, \omega_{q_y}, \omega_{q_z}\}$$

Las ecuaciones desarrolladas hasta ahora son las que gobiernan el comportamiento mecánico del sistema y son las que serán utilizadas para el desarrollo del simulador. Dichas ecuaciones dependen tanto de la velocidad angular de las hélices como de sus derivadas. Para realizar el control resulta más sencillo poder trabajar sin dichas derivadas. La razón es que las velocidades angulares y sus derivadas no son entradas independientes. Por lo tanto no se pueden imponer valores a unas sin considerar el comportamiento de las otras. En este sentido se realiza última aproximación. El término de las derivadas de las velocidades angulares se encuentra presente exclusivamente en la ecuación 2.9. Dicho término se encuentra multiplicado por el momento de inercia de los motores. Considerando que la variación en

la velocidad angular de los motores es inferior a la respuesta al escalón estudiada en ??, se puede despreciar el término de las derivadas de las velocidades angulares respecto al término asociado a los torques en la ecuación 2.9.

Luego de realizada esta simplificación tenemos que la entrada está compuesta por el vector:

$$u = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

El modelo en variables de estado es por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{q_x} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\ \dot{y} &= v_{q_x} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\ \dot{z} &= -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \\ \dot{\psi} &= \omega_{q_x} + \omega_{q_z} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{q_y} \tan \varphi \sin \psi \\ \dot{\varphi} &= \omega_{q_y} \cos \psi - \omega_{q_z} \sin \psi \\ \dot{\theta} &= \omega_{q_z} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{q_y} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \\ \dot{v}_{q_x} &= v_{q_y} \omega_{q_z} - v_{q_z} \omega_{q_y} + g \sin \varphi \\ \dot{v}_{q_y} &= v_{q_z} \omega_{q_x} - v_{q_x} \omega_{q_z} - g \cos \varphi \sin \psi \\ \dot{v}_{q_z} &= v_{q_x} \omega_{q_y} - v_{q_y} \omega_{q_x} - g \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 T_i \\ \dot{\omega}_{q_x} &= \frac{\omega_{q_y} \omega_{q_z} (I_{yy} - I_{zz}) + \omega_{q_y} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{xx}} + \frac{L(T_2 - T_4)}{I_{xx}} \\ \dot{\omega}_{q_y} &= \frac{\omega_{q_x} \omega_{q_z} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q_x} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{yy}} + \frac{L(T_3 - T_1)}{I_{yy}} \\ \dot{\omega}_{q_z} &= \frac{Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4}{I_{zz}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

CAPÍTULO 3

SIMULACIONES DEL MODELO FÍSICO

Luego de desarrollado un modelo físico resulta fundamental disponer de un entorno para realizar simulaciones. Las razones para construir un simulador son evidentes. En primer lugar resulta fundamental para comprobar que el modelo realizado se comporta acorde a lo que uno espera a priori del sistema. Para este tipo de pruebas se trabajará con las situaciones más sencillas en las cuales se puede calcular la trayectoria trivialmente. El segundo objetivo del simulador es poder conocer el comportamiento de nuestro sistema frente a algunas acciones de control determinadas. Por ejemplo conocer la trayectoria que desarrolla el cuadricóptero si accionamos solamente uno de los motores o cualquier combinación que sea pertinente de estudio. El simulador es utilizado también para verificar el funcionamiento del Filtro de Kalman Extendido realizado para la integración de los sensores (Ver capo tulo ??). Se puede generar una trayectoria a la cual se le agrega ruido que simule el ruido de medida de los sensores. Luego se puede comparar la trayectoria obtenida con el filtrado de Kalman con la generada inicialmente. Por último y fundamentalmente el simulador será clave para testear y mejorar los algoritmos de control desarrollados. Previo a testear con el sistema real y a fin de evitar daños sobre el mismo, se deben verificar dichos algoritmos en el simulador. Por los motivos expresados es necesario que el simulador represente fielmente el modelo físico y se comporte acorde a la realidad.

El diseño del simulador se realiza utilizando Simulink. Dado que se debe trabajar con entradas que no dependen exclusivamente del tiempo, no fue posible desarrollar un simulador que resolviera directamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan al sistema utilizando un método más directo, como por ejemplo *ODE45*.

3.1. Estructura del Simulador

El simulador se compone de tres elementos fundamentales. El lazo abierto, es decir las ecuaciones que gobiernan al cuadricóptero. En dicho sistema tenemos como entradas las velocidades angulares del sistema sobre las cuales realizaremos las acciones de control y como salidas tenemos el vector de estados del sistema en todos los instantes desde el tiempo inicial establecido en la simulación hasta el tiempo

final. Se compone además de un bloque encargado de generar las rutas a seguir por el cuadricóptero a partir de los *waypoints* que se ingresen. Finalmente una tercer parte que se encarga de simular el control. Este último bloque se vale de los dos anteriores.

3.1.1. Lazo Abierto

La estructura que se eligió para desarrollar esta sección se corresponde en buena forma con el camino que se recorrió para determinar el modelo físico. El lazo abierto consta de tres bloques principales. En primer lugar tenemos un bloque encargado de generar las fuerzas y momentos a partir de las velocidades angulares de las hélices. Luego tenemos un bloque que se encarga de resolver la dinámica del sistema y un cuarto bloque encargado de la cinemática. En la figura 3.1 se observa la estructura global del lazo abierto. En la figura 3.2 se observa una captura de pantalla que representa la vista general de la parte encargada de simular el lazo abierto.

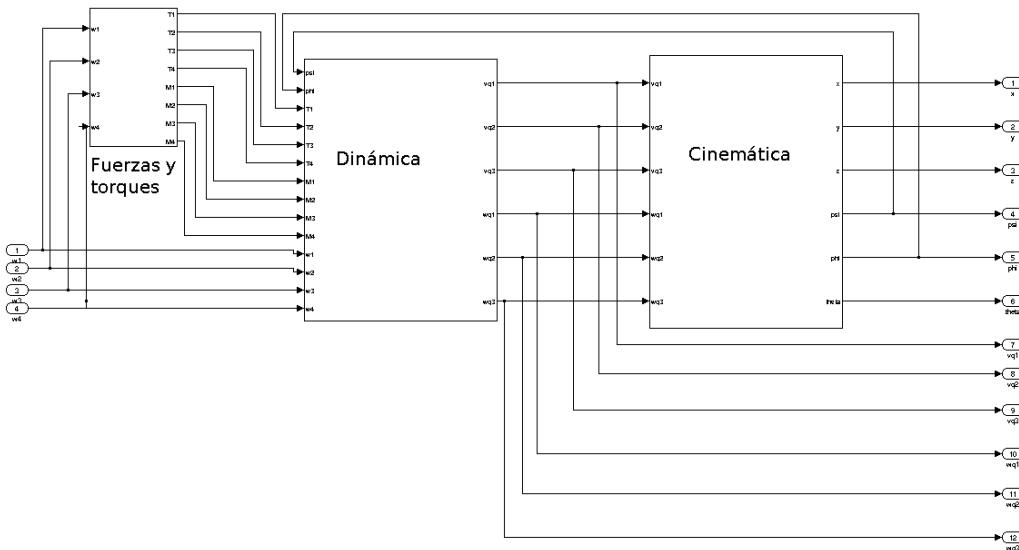


Figura 3.1: Bloque de lazo abierto

Cinemática

En la figura 3.3a se puede observar un diagrama de bloques de la parte del sistema que transforma las velocidades lineales y angulares en posiciones y ángulos de Euler. Se distinguen dos sub-bloques principales, uno encargado de devolver la posición y otro encargado de devolver los ángulos de Euler

Dinámica

Al igual que el bloque anterior, se divide este en dos sub-bloques más (ver figura 3.3b). Los bloques en este caso son el que devuelve las velocidades angulares y las lineales.

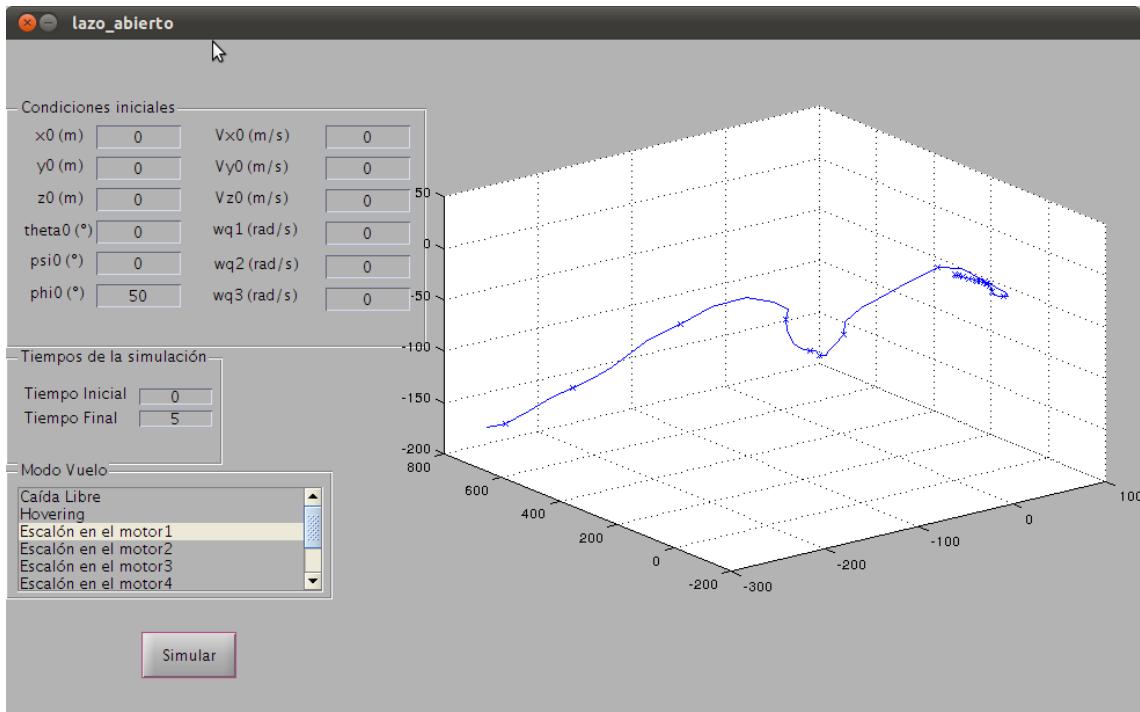


Figura 3.2: Interfaz del simulador de lazo abierto

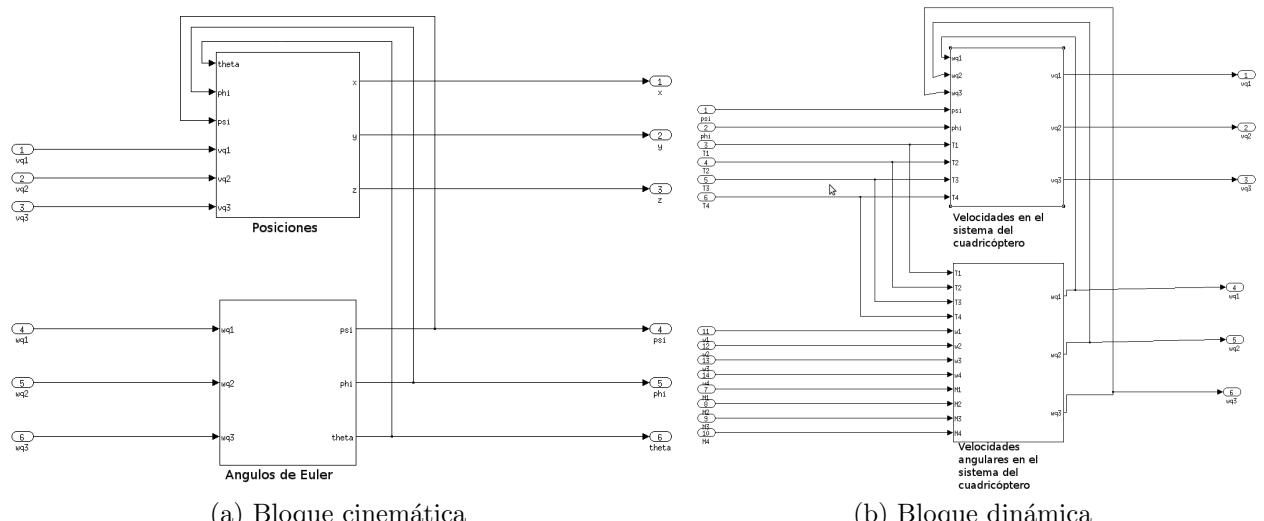


Figura 3.3: Bloques en mayor detalle

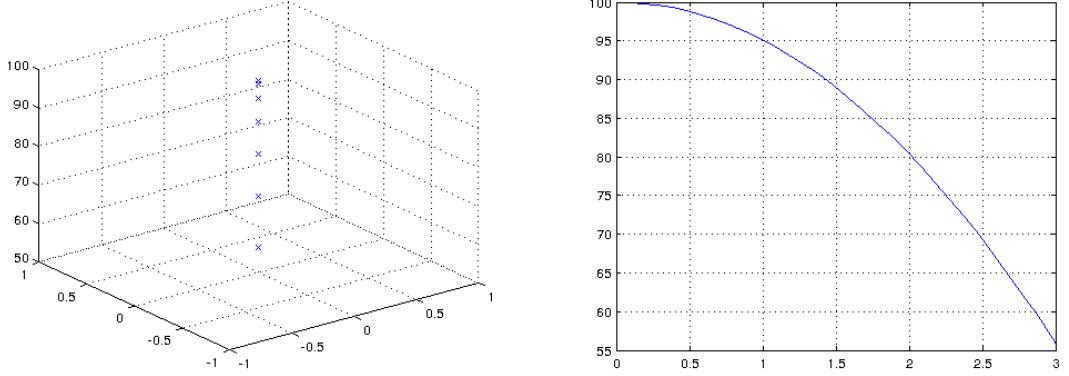
3.2. Simulaciones

En esta sección procederemos a realizar algunas simulaciones a fin de verificar que los resultados arrojados se corresponden con lo esperado a priori.

Caída libre con velocidad inicial nula

Se simula una caída libre con condiciones iniciales nulas excepto la altura que se fija a 100m. El tiempo de simulación considerado es de tres segundos. En la figura 3.4a se observa la trayectoria obtenida. En este caso se grafica uno de cada cinco puntos obtenidos. La misma se corresponde con lo que se espera a priori: puntos

equiespaciados en el tiempo se encuentran cada vez más apartados a medida que transcurre el tiempo. En la figura 3.4b se representa la altura en función del tiempo. La altura final es $z_f = 55,855m$. La altura en una caída libre puede calcularse como $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + Z_0$. En este caso se obtiene $z(3) = 55,855m$.



(a) Trayectoria de caída libre con velocidad inicial nula (b) Altura en función del tiempo

Figura 3.4: Caída libre con velocidad inicial nula

Caída libre con velocidad inicial

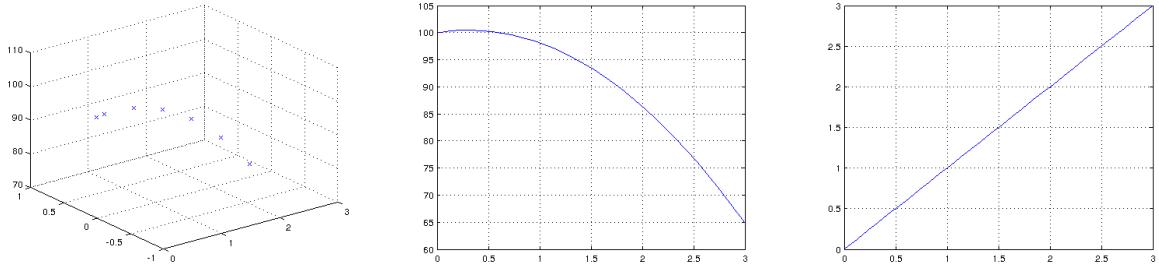
Se realiza la misma simulación que en la sección anterior excepto que se inicia el vuelo con $V_0 = 1ms^{-1}\vec{i} + 3ms^{-1}\vec{k}$. Los resultados de la simulación pueden encontrarse expresados graficamente en la figura 3.5. Tal como es de esperar en la posición según \vec{i} se tiene una posición que aumenta con el tiempo con pendiente igual a la velocidad inicial. La altura cumple que $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + 3ms^{-1}t + Z_0$. Por lo tanto la misma aumenta hasta un tiempo $t^*/\dot{z}(t) = 0$. Lo cual implica que $t^* = \frac{3ms^{-1}}{g} \approx 0,31s$. Por otra parte tiempo para el cual se da el máximo en la simulación es $t_{max} \approx 0,33s$. Considerando que las simulaciones se realizan con un paso variable el cual puede ser de hasta $0,1s$ se considera un resultado aceptable. Por otra parte la altura máxima en teoría vale $z_{max_{teo}} = 100,459m$ mientras que la altura máxima obtenida a través de la simulación es de $z_{max_{sim}} = 100,456m$. Esta diferencia puede explicarse gracias a que estamos evaluando la trayectoria en tiempos distintos. A partir de este punto tenemos una caída libre como la que ya estudiamos en el caso anterior. Las alturas finales, tanto en la simulación como en la teoría valen $64,885m$.

Condición de Hovering

Se aplica una fuerza constante en los cuatro motores tal que la resultante es igual al peso. Las condiciones iniciales son todas nulas. Excepto $Z_0 = 10m$. Se logra el equilibrio mecánico. Todas las variables permanecen constantes. Se simula durante diez segundos

Giro según el eje \vec{k}

En las mismas condiciones que la simulación anterior, en el tiempo $t = 5s$ se aumenta repentinamente la velocidad angular de los motores que rotan en sentido

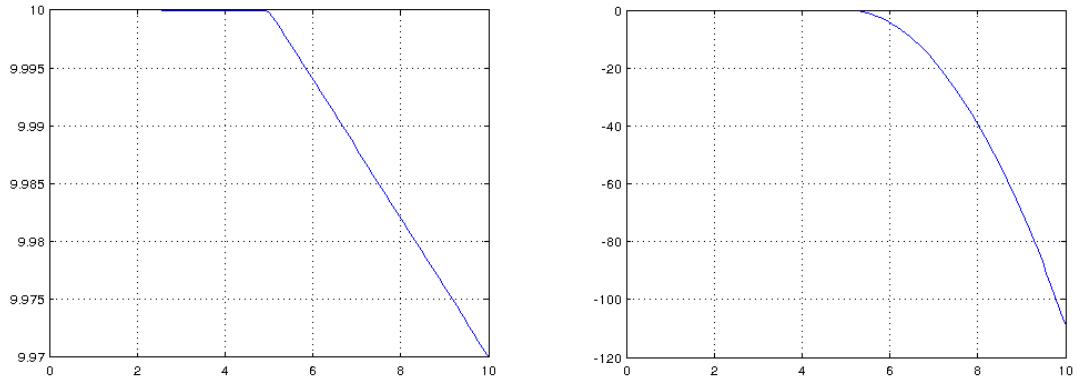


(a) Trayectoria de caida libre con velocidad $V_0 = 1ms^{-1}\vec{i} + 3ms^{-1}\vec{k}$ (b) Altura en función del tiempo (c) Desplazamiento hacia el Este en función del tiempo

Figura 3.5: Caida libre con velocidad inicial no nula

horario con un valor tal que la fuerza de cada uno de esos motores aumenta en $1N$. Para los motores que rotan en sentido anti-horario se disminuye la velocidad angular de forma que la fuerza de cada uno de ellos disminuye $1N$. Estas velocidades son $375,03rads^{-1}$ y $287,68rad^{-1}$. La fuerza neta permanece constante y el momento segúnl los versores \vec{i}_q y \vec{j}_q es nulo. Sin embargo aparece un torque negativo segúnl el vedor \vec{k}_q .

En la figura 3.6a se presenta la altura en función del tiempo. La misma debería permanecer constante sin embargo se observa una pequeña diferencia en la altura de $3cm$. Esta diferencia es atribuida a un error numérico a la hora de calcular las velocidades con las cuales deben girar los motores. Por otra parte en la figura 3.6b se observa como el ángulo decrece hasta el valor de $-108,77rad$. El torque neto vale $Q = -0,38Nm$. Por lo tanto en 5 segundos se debe rotar un ángulo de $\theta_f = -108,42rad$. Nuevamente se percibe una pequeña diferencia entre el valor teórico y el simulado. Sin embargo dicho error es completamente aceptable.



(a) Altura en función del tiempo

(b) Ángulo de Yaw

Figura 3.6: Giro segúnl el \vec{k}_q

3.2.1. Escalón en los cuatro motores

Con condiciones iniciales nulas, excepto que $z_0 = 50m$ en condición de hovering se aumenta la velocidad angular de los motores en $100rads^{-1}$ en $t = 5s$. Se simula

durante diez segundos. En la figura 3.7 se presentan graficamente los resultados obtenidos en la simulación. La altura máxima alcanzada por el cuadricóptero en la simulación es de $136,6m$ mientras que en la teoría dicha altura es de $136,4m$. Nuevamente la diferencia entre el valor simulado y el esperado difieren de manera despreciable.

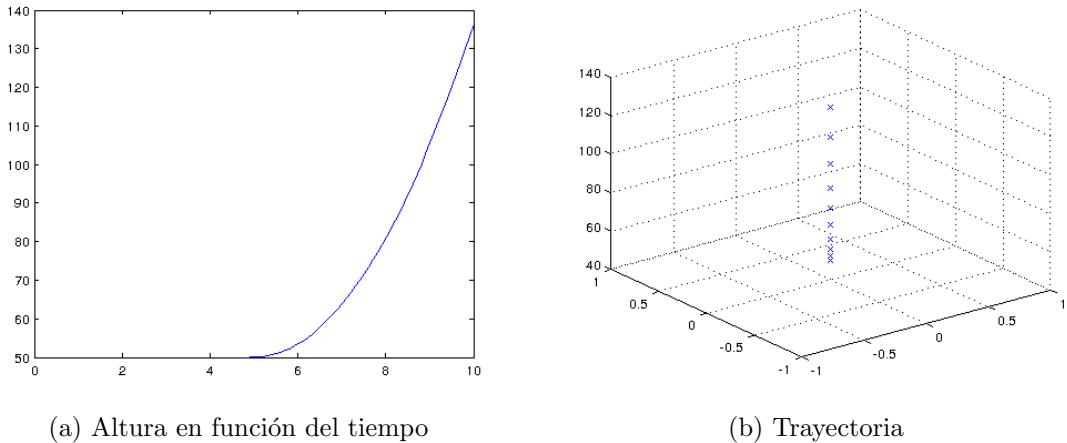


Figura 3.7: Escalón en los cuatro motores

Vuelo en linea recta

Con condiciones inicial nulas, excepto por $Z_0 = 10m$ y $\varphi = 30^\circ$. Se simula durante diez segundos. En la figura 3.8 se observa un vuelo en linea recta en la dirección \vec{i} . Como es de esperar el vuelo será uniformemente acelerado ya que la fuerza es siempre en el sentido de \vec{k}_q . La simulación arroja que al cabo de diez segundos el desplazamiento es de $283,19m$, mientras que en la teoría se obtiene un desplazamiento de $218,20m$. Nuevamente se concluye que los resultados arrojados por el simulador son satisfactorios.

Hasta aquí hemos testeado el simulador en situaciones conocidas. De acuerdo a las pruebas realizadas puede afirmarse que su funcionamiento es el adecuado ya que en ninguna prueba se obtuvieron errores considerables.

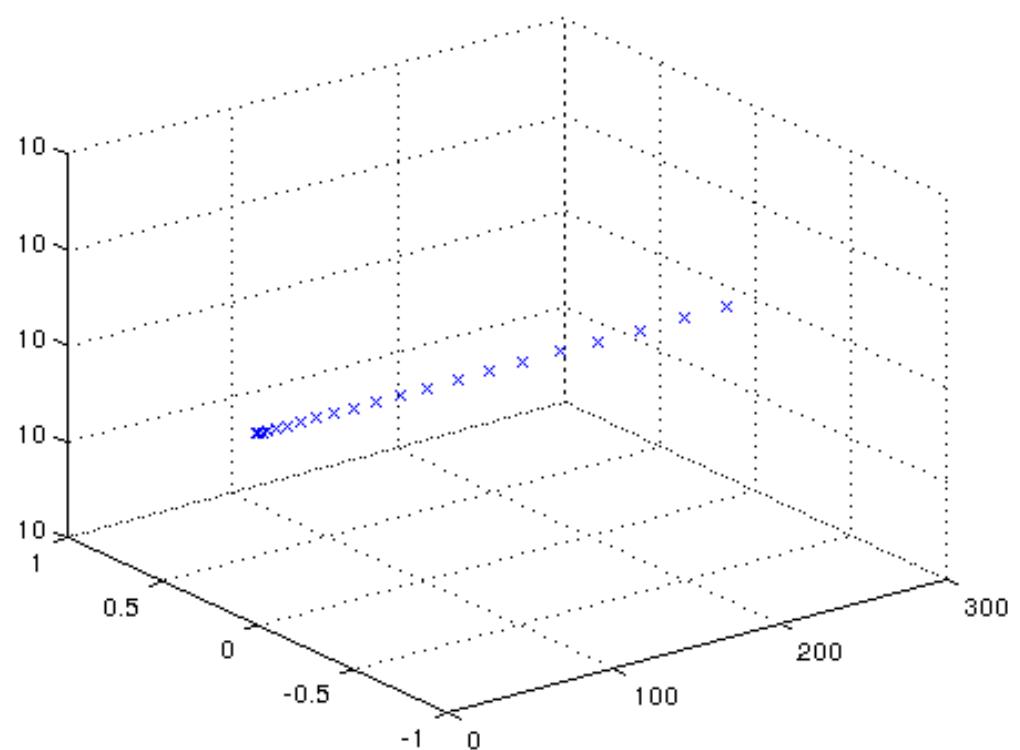


Figura 3.8: Vuelo en linea recta

Parte III

Calibración de los sensores

CAPÍTULO 4

CARACTERIZACIÓN DEL ACELERÓMETRO

4.1. Objetivos

Realizar una serie de pruebas con el fin de caracterizar el acelerómetro de tres ejes de la unidad de medida inercial (IMU).

4.2. Materiales

- Mongoose 9DoF IMU de *Ckdevices*
- Prisma de madera
- Escuadra con ángulo de 45°
- Mesa nivelable con tapa móvil ajustable a distintos ángulos
- Nivel

4.3. Marco Teórico

Existen diversas no idealidades que afectan la lectura de los valores de aceleración registrados por el acelerómetro. Las no idealidades a considerar basados en lo desarrollado por [?] son:

- Ruido inherente
- Relación entre aceleración real y lectura del acelerómetro no lineal.
- No ortogonalidad de los ejes
- Drift aleatorio
- Variación de las medidas con la temperatura

Ruido Inherente

Existe un ruido inherente del cual no nos preocuparemos en demasía ya que el mismo se modela como un proceso estocástico de distribución normal y media nula, como veremos luego. Por lo tanto, en esta etapa de calibración donde se tomarán muchas muestras y se promediarán se puede trabajar sin considerar este ruido.

Relación no lineal

En la hoja de datos del acelerómetro ADXL345 de la *Mongoose 9DOF IMU* se declara que en cualquiera de los tres ejes los errores debido a una respuesta no lineal son, en el peor caso, $\pm 0.5\%$ del valor de fondo de escala, por lo tanto se decide considerar para el acelerómetro una respuesta lineal.

No ortogonalidad de los ejes

Debido a defectos de construcción los ejes de sensibilidad del dispositivo pueden no ser ortogonales. Evidentemente si no se considera este aspecto se tendrá un error que puede ser importante en las medidas de aceleración. A modo de ejemplo, el acelerómetro en reposo colocado horizontalmente debería medir una aceleración igual a g en el eje vertical y cero en los ejes perpendiculares al primero. Debido a la no ortogonalidad del dispositivo se pueden tener entonces medidas que no coincidan con la realidad. Se modela esta no idealidad considerando la siguiente relación entre la aceleración medida en cada eje de sensibilidad del acelerómetro y la aceleración medida en un sistema solidario a la plataforma:

$$\mathbf{a}^p = T_a^p \mathbf{a}^a, \quad T_a^p = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{yz} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & 1 & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

- α_{ij} es la rotación del i -ésimo eje de sensibilidad del acelerómetro sobre el j -ésimo eje del sistema de la plataforma. Dichas rotaciones se ven representadas en la figura 4.1.
- \mathbf{a}^a es el vector de aceleración medido por el acelerómetro.
- \mathbf{a}^p es el vector de aceleración medido en el sistema solidario a la plataforma.

Estos parámetros son constantes ya que su origen es puramente de construcción y se puede asumir que las orientaciones se mantendrán durante la vida útil del sensor.

Drift aleatorio y variación de las medidas con la temperatura

La salida del acelerómetro es una tensión que luego es convertida a un nivel digital gracias a un conversor AD. Asumiendo un modelo lineal, la relación entre la aceleración y la medida realizada se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{a}}^a = K_a \mathbf{a}^a + \mathbf{b}_a$$

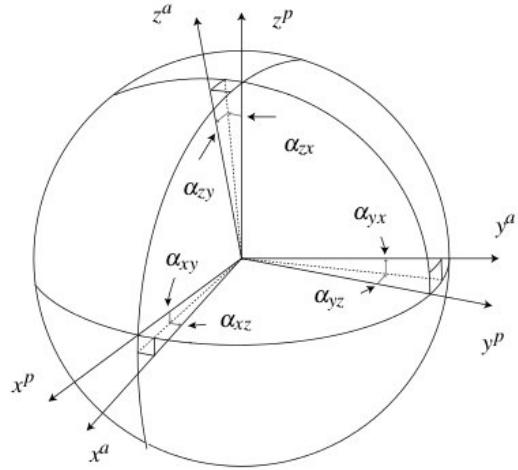


Figura 4.1: Rotaciones entre los ejes de la plataforma y del acelerómetro

donde K_a es una matriz diagonal que representa el factor de escala para convertir del valor digital a una aceleración correspondiente. \mathbf{b}_a no es otra cosa que un término independiente para corregir la posición del cero, que no necesariamente corresponde a la mitad de la escala digital. Estos dos parámetros poseen algunas de las fuentes de error que resulta más difícil de corregir. Resulta que dichos parámetros varían con la temperatura, por lo tanto se pueden observar algunas variaciones según la estación del año o el momento del día. A su vez, dichos parámetros poseen un drift aleatorio.

Podemos pensar estos parámetros como un valor estático más un valor relativamente pequeño que varía según estas descripciones. En una primera instancia intentaremos caracterizar los valores estáticos.

Modelo del acelerómetro

A partir del análisis realizado se puede concluir que el modelo de acelerómetro que se considerará es el siguiente:

$$\tilde{\mathbf{a}}^a = K_a(T_a^p)^{-1} \mathbf{a}^p + \mathbf{b}_a$$

4.4. Procedimiento

4.4.1. Caracterización de las no idealidades variables

Previo a la calibración de los parámetros estáticos parece interesante estudiar una serie “larga” de muestras. En particular se tomará una hora de muestras a una tasa de muestreo de 50Hz. Estos datos serán útiles para la determinación de dos no idealidades:

- Ruido inherente
- Drift aleatorio

Además se realizará una medida variando la temperatura ambiente a fin de determinar la magnitud del Drift térmico.

4.4.2. Determinación de parámetros estáticos

Como se desprende de la sección anterior, para poder calibrar el acelerómetro se deben determinar 12 parámetros. Por dicho motivo, se precisan obtener al menos 12 ecuaciones diferentes. Típicamente se trabaja con el doble o triple de ecuaciones que de parámetros a determinar. Para mejorar los resultados se trabajará con 27 medidas donde cada una de ellas aporta 3 ecuaciones (una por cada eje), logrando un total de 81 ecuaciones, y se procederá a determinar los parámetros que minimizan el error cuadrático medio entre los valores efectivamente medidos y los valores teóricos.

Preparación

Para realizar una buena calibración es muy importante contar con una figura geométrica en forma de paralelepípedo de forma de poder solidarizar la IMU a dicho objeto. De esta forma nos aseguramos que no se introducen errores a la hora de orientar un eje en una dirección particular. Del mismo modo, es ideal disponer de una superficie perpendicular a la vertical y otra paralela, de modo que para rotar 90 grados la IMU, basta con rotar el paralelepípedo ese mismo ángulo, es decir, apoyar otra de las caras del mismo.

El prisma que se utilizó fue el cubo de lapacho que puede verse en la figura 4.2.

Los ángulos del mismo son prácticamente rectos difiriendo a lo sumo en medio grado.

Se construyó una plataforma de madera en forma de mesa con la tapa superior móvil, de modo que permite el giro sobre uno de sus lados (eje de giro). Se muestra en la figura 4.3. A su vez, es posible ajustar el dispositivo de forma de asegurar que dicho eje se encuentre en posición horizontal, por medio de 3 patas de altura regulable situadas en la parte inferior de la mesa. Para realizar las 27 medidas se irá modificando el ángulo de la tapa móvil de la plataforma y será medido con un semicírculo solidarizado a dicha tapa y un péndulo. En cada posición de la plataforma se tomarán medidas colocando el cubo en 3 posiciones distintas.

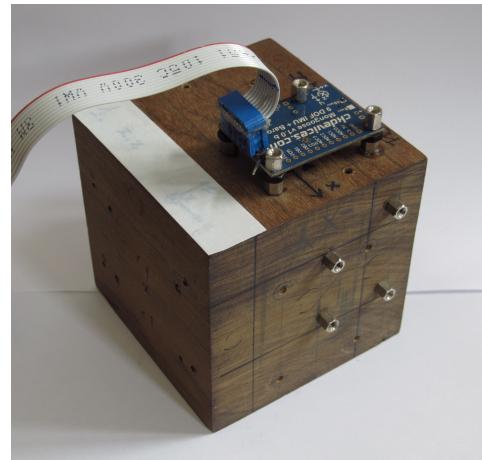


Figura 4.2: Cubo de lapacho

Medidas a realizar

En reposo el acelerómetro medirá una fuerza igual a g en la dirección vertical y en el sentido radial saliente de la Tierra. En cada uno de los ejes de sensibilidad del acelerómetro se medirá la proyección ortogonal de dicho vector gravedad sobre cada eje. De esta forma, con distintas orientaciones se obtendrá una descomposición distinta.

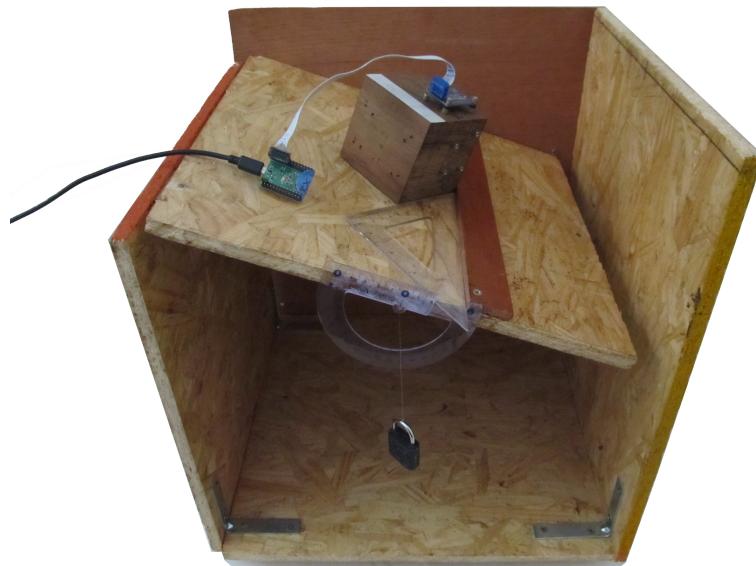


Figura 4.3: Mesa - Plano inclinado regulable

4.5. Resultados y análisis

4.5.1. Medida estática durante una hora

En la figura 4.4 pueden observarse los datos crudos obtenidos de las aceleraciones registradas en los tres ejes de la IMU durante un período de 1 hora.

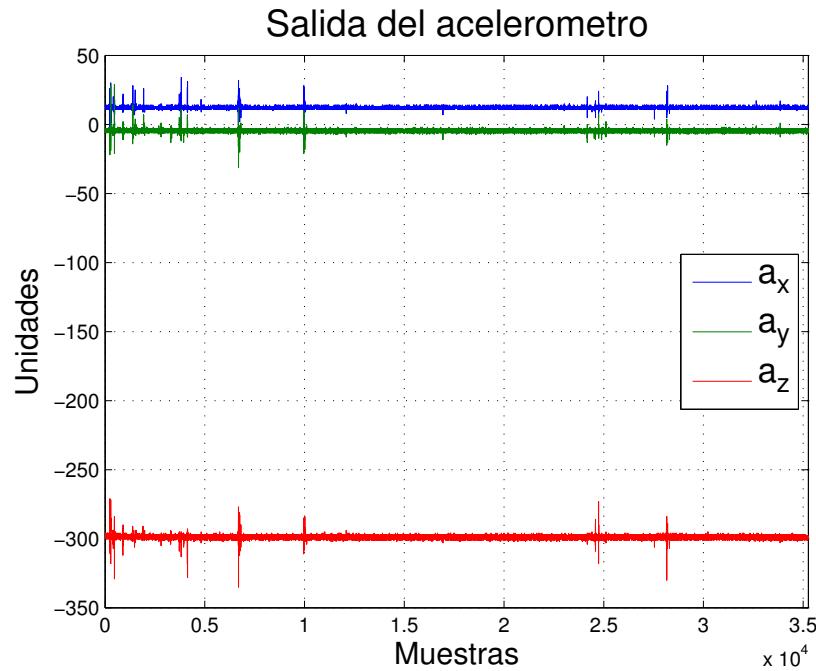


Figura 4.4: Aceleraciones y velocidades angulares registradas por la IMU orientada con el eje z verticalmente y en reposo

Se observa que dos medidas corresponden a un valor cercano a 0, mientras que la aceleración medida en z es cercana a -300. El eje z es el ubicado verticalmente hacia abajo, por lo tanto en dicha dirección se debería leer una medida equivalente a $-g$, mientras que en los otros dos ejes se debería leer un valor que corresponde

a aceleración cero. Más allá de estas consideraciones, que permiten simplemente demostrar cierta coherencia entre lo esperado y lo obtenido, podemos afirmar que el ruido observado es asociable a un ruido blanco de media nula. Por otra parte no parece haber una deriva en las medidas realizadas.

A partir de dichas constataciones se podrá afirmar que trabajar con el valor promedio de una tirada de medidas arrojará un resultado muy similar al que se obtendría trabajando con la tirada completa.

4.5.2. Medias estáticas para el acelerómetro

Como se aclaró en la sección anterior se trabajará con el promedio de las aceleraciones medidas en una serie de datos. Cada serie de datos es de 20 segundos de duración. Además de variar el ángulo (θ) de la mesa, se rotará el prisma de forma de realizar una medida con cada eje perpendicular al plano de la mesa. Asimismo utilizando una escuadra se lograrán rotaciones de 45° respecto del eje perpendicular a la tapa (ϕ). Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 4.1. Se utiliza la siguiente notación para las orientaciones utilizadas:

- Orientación “z”
 - Eje “z” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia abajo.
 - Giro de la tapa de la mesa según el eje “x”.
- Orientación “y”
 - Eje “y” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia abajo.
 - Giro de la tapa de la mesa según el eje “-z”.
- Orientación “x”
 - Eje “x” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia arriba.
 - Giro de la tapa de la mesa según el eje “y”.

El tercer eje se deduce sabiendo que la base es directa. La aceleración medida es un número sin unidades.

Posición		Orientación z		Orientación x Aceleraciones		Orientación y	
$\theta(^{\circ})$	$\phi(^{\circ})$	Medida	Teórica ($m s^{-2}$)	Medida	Teórica ($m s^{-2}$)	Medida	Teórica ($m s^{-2}$)
0	0	16.18138; 0.3579454; -296.1701	0; 0; - 9.81	276.9511; -0.3572594; -46.29364	9.81; 0; 0	13.39179; -266.4408; -44.0221	0; -9.81; 0
10	0	16.27273; -49.02392; -292.201	0; 1.7035; -9.661	272.6542; -0.045677; 0.5318108	9.661; 0; 1.7035	61.69231; -262.3715; -44.1195	1.7035; -9.661; 0
10	45	-14.74318; -35.02247; -292.0225	-1.2045; -1.2045; -9.661	272.8368; -33.2294; -12.55412	9.661; -1.2045; 1.2045	48.10742; -262.3444; -11.9763	1.2045; -9.661; 1.2045
20	0	16.74718; -94.71498; -279.7955	0; 3.3552; -9.2184	260.3108; -0.01932367; 43.84863	9.2184; 0; 3.3552	107.4279; -251.4245; -44.0647	3.3552; -9.2184; 0
20	45	-48.512; -66.7136; -278.9184	-2.3725; -2.3725; -9.2184	260.2182; -65.37851; 18.87273	9.2184; -2.3725; 2.3725	79.13748; -251.2897; 19.3682	2.3725; -9.2184; 2.3725
30	0	16.37318; -136.5687; -259.0533	0; 4.905; -8.4957	242.0839; 0.004746835; 85.09968	8.4957; 0; 4.905	149.6053; -229.7778; -42.7181	4.905; -8.4957; 0
30	45	-76.82085; -96.91368; -259.6808	-3.4684; -3.4684; -8.4957	242.3039; -95.85131; 48.34477	8.4957; -3.4684; 3.4684	109.3377; -230.7721; 48.941	3.4684; -8.4957; 3.4684
45	0	15.07717; -190.8315; -220.3402	0; 6.9367; -6.9367	198.5261; 0.07394958; 136.558	6.9367; 0; 6.9367	200.7626; -189.0423; -42.6423	6.9367; -6.9367; 0
45	45	-117.0878; -134.7984; -219.9024	-4.905; - 4.905; - 6.9367	198.4038; -133.7997; 84.62754	6.9367; -4.905; 4.905	145.8022; -188.9018; 85.0561	4.905; -6.9367; 4.905

Cuadro 4.1: Aceleraciones medidas y aceleraciones teóricas en los tres ejes de la plataforma

Para la calibración se consideran solamente 24 de las 27 medidas realizadas a fin. Esto es útil ya que se tienen 3 medidas que no serán tenidas en cuenta en la calibración para realizar una verificación de qué tan buena es la calibración obtenida.

El problema de calibración consiste en encontrar el vector de parámetros θ que mejor ajusta las medidas obtenidas a los valores teóricos de aceleración. El vector θ se compone de los elementos de la diagonal de la matriz K_a , de los elementos de b_a y de los α_{ij} de la matriz T_a^p . Es decir:

$$\theta = [k_{ax}, k_{ay}, k_{az}, b_{ax}, b_{ay}, b_{az}, \alpha_{yz}, \alpha_{zy}, \alpha_{xz}, \alpha_{zx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}]$$

Como criterio de ajuste se decide minimizar la suma de los cuadrados de las diferencia entre la aceleración teórica y la aceleración medida. Dicho problema se puede expresar matemáticamente como:

$$\theta : \min \left\{ \sum_{i=1}^M \| \tilde{\mathbf{a}}_i^p - T_a^p K_a^{-1} (\tilde{\mathbf{a}}_i^a - \mathbf{b}_a) \| \right\}$$

donde M es la cantidad de medidas realizadas, $\tilde{\mathbf{a}}_i^p$ los valores de aceleración teóricos en cada eje de la plataforma según la posición y orientación de la IMU y $\tilde{\mathbf{a}}_i^a$ los valores obtenidos de la IMU. Las relaciones entre los parámetros a determinar **no** es lineal, por lo tanto se utilizará para su determinación un algoritmo de mínimos cuadrados no lineales. *Matlab* provee un algoritmo con dicho fin: *lsqnonlin*. El algoritmo precisa además una semilla para comenzar, dicha semilla debe ser bien elegida de forma de que el mínimo encontrado por el algoritmo sea el deseado. Sucede que dicho algoritmo encuentra mínimos locales. Si la semilla proporcionada se encuentra muy lejos de la solución que en realidad interesa, se puede obtener una solución que no sirva.

El rango de aceleraciones manejado en la prueba es de $\pm 16g$. Según la hoja de datos del acelerómetro, se tiene una ganancia de $3.9mg/LDB$. La ganancia debe ser entonces $\frac{1}{g \times 3.9 \times 10^{-3}} = 26,1376$ para los tres ejes. La IMU expresa las aceleraciones

obtenidas en complemento a2, por lo que una aceleración de 0 equivale a una lectura de 0. Finalmente, los ángulos se suponen pequeños, por lo tanto una semilla válida parece ser:

$$\theta_0 = \left[\frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, \frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, \frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]$$

Los parámetros que minimizan la suma de los errores al cuadrado son los siguientes:

$$\theta = [26,9553 \quad 27,1044 \quad 25,9160 \quad 13,0717 \quad -1,0795 \quad -40,7236 \quad -0,0095 \quad 0,0096 \quad -0,0004 \quad 0,0068 \quad -0,0105 \quad -0,0046]$$

Luego de realizada la minimización se calcula la media del error cometido y la desviación estándar del error.

$$\mu = 6,88 \times 10^{-10} ms^{-2}$$

$$\sigma = 0,0397 ms^{-2}$$

La media del error cometido es completamente despreciable, por lo tanto podemos afirmar que el 95 % de las medidas de aceleración realizadas tendrán un error inferior $2\sigma = 0,0794$. Este error se integrará dos veces a la hora de obtener la posición del cuadricóptero, por lo tanto en el 95 % de los casos estaremos cometiendo un error inferior a los 5 metros al cabo de 10 segundos de navegación.

Para verificar la calibración realizada se utilizan las medidas siguientes:

- $\theta = 0 \quad \phi = 0 \quad$ orientación z
- $\theta = 20 \quad \phi = 0 \quad$ orientación x
- $\theta = 10 \quad \phi = 45 \quad$ orientación y

Se presenta para las tres medidas la aceleración teórica, la medida convertida con los parámetros obtenidos y el error en la tabla 4.2.

Medida	Aceleración medida (ms^{-2})	Aceleración teórica(m^{-2})	Error(ms^{-2})
1	0.0217; 0.120; - 9.856	0.00;0.00;-9.810	0.0217; 0.120; - 0.0460
2	9.204;0.0136;3.359	9.218;0.00;3.355	-0.0140; 0.0136; 0.00400
3	1.218;- 9.647;1.167	1.204;- 9.660;1.205	0.0140; 0.0130 - 0.0380

Cuadro 4.2: Medidas de verificación

Si bien estos valores no son una buena muestra estadística, sirven como verificación ya que en la mayoría de los casos se obtiene un error inferior a σ y tenemos solamente un error superior a 2σ .

4.5.3. Variación con la temperatura

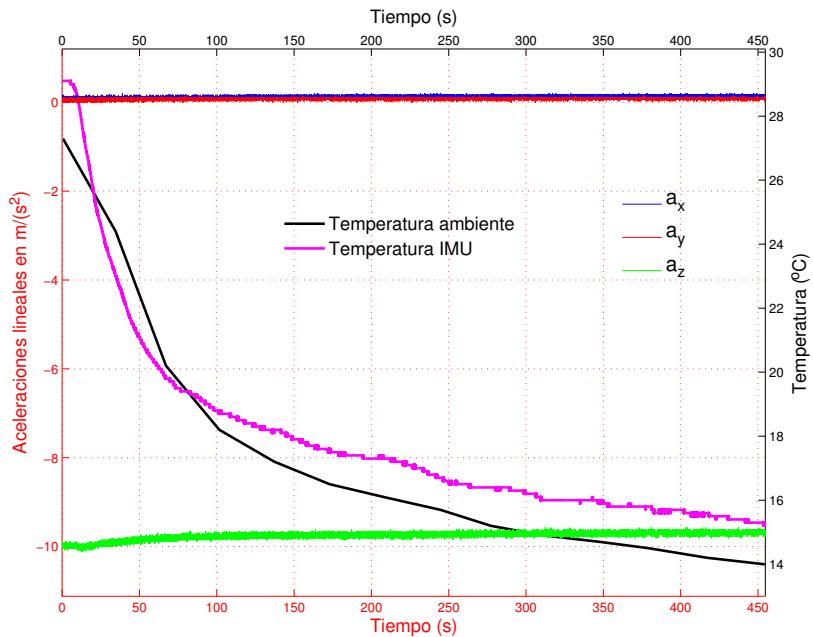


Figura 4.5: Variación de la medida del acelerómetro con la temperatura

4.5.4. Análisis de variación

A partir del análisis de los experimentos realizados es claro que la mínima variación existente en las señales procedentes de los acelerómetros es del orden de $0,04m/s^2$, tal como puede observarse en la siguiente gráfica:

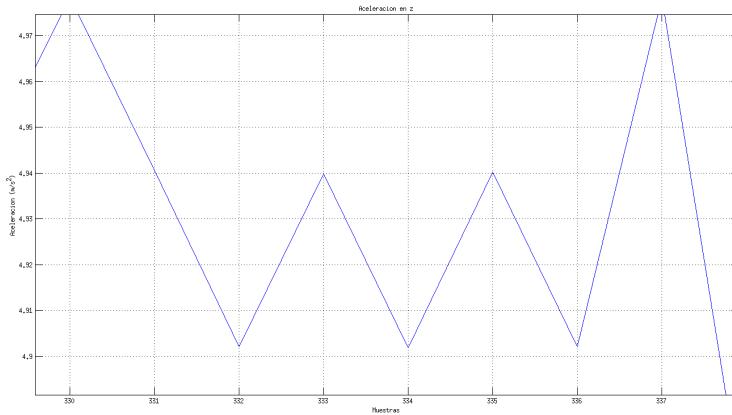


Figura 4.6: Variación de la medida del acelerómetro con la temperatura

Por otro lado, de los parámetros obtenidos de la calibración, se determina que $\sigma = 0,0396798455378608$, lo cual resulta coherente con el resultado anterior.

Finalmente, de la hoja de datos del acelerómetro se obtiene que el factor de escala para la señal es de $3,9mg/LSB$, lo cual nuevamente es coherente con los resultados obtenidos anteriormente.

De lo anterior puede concluirse que el procedimiento de calibración parecería ser correcto, obteniéndose valores similares para σ tanto en la teoría como en la realidad.

CAPÍTULO 5

CALIBRACIÓN DE GIRÓSCOPO

5.1. Objetivos

- Realizar una serie de pruebas con el fin de calibrar el giróscopo de tres ejes de la IMU.
- Estudiar, proponer y validar un modelo posible para dicha calibración.
- Estimar las fuentes de error del mismo (ruido y bias).

5.2. Materiales

- Mongoose 9Dof IMU de *Ckdevices*
- Beagleboard xM
- Adaptador Wi-Fi
- Tocadiscos
- Cronómetro
- Cubo perfecto de madera
- 2 escuadras de 45°
- 2 escuadras de 30°
- Madera de 4 cm de ancho con lados paralelos

5.3. Marco teórico

Para la calibración del giróscopo se utiliza el mismo modelo que se utilizó para el acelerómetro en la sección 4, se estudia las no idealidades que afectan la lectura de los valores de velocidad angular registrados en el dispositivo y se validan los resultados obtenidos. Las no idealidades a considerar basados en lo desarrollado por [?] son:

- Ruido inherente
- Relación entre aceleración real y lectura del acelerómetro no lineal.
- No ortogonalidad de los ejes
- Drift aleatorio
- Variación de las medidas con la temperatura

El modelo para la calibración del giróscopo, como puede verse con más detalle en el capítulo 4, es:

$$\tilde{\mathbf{w}}^a = K_w(T_a^p)^{-1}\mathbf{w}^p + b_w$$

con K_w matriz diagonal que representa el factor de escala para convertir del valor digital a la aceleración correspondiente, \mathbf{b}_w un término independiente para corregir la posición del cero y T_a^p una matriz que corrige la no perpendicularidad perfecta de los ejes:

$$T_a^p = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{yz} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & 1 & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

A su vez, estos parámetros varían con la temperatura, lo cual puede introducir errores significativos dependiendo del estado del tiempo, la estación del año, o la hora del día

5.4. Procedimiento

5.4.1. Caracterización de las no idealidades variables

Para obtener más información sobre el *ruido inherente* y el *drift aleatorio* se toman datos durante una hora a una frecuencia de 50 Hz con el dispositivo quieto.

5.4.2. Determinación de parámetros estáticos

Para poder realizar la calibración pertinente es necesario determinar 12 parámetros: las ganancias y bias de los 3 ejes y los 6 ángulos de la matriz T_a^p . Para determinar dichos parámetros es conveniente obtener el doble o triple de medidas que de parámetros. Las medidas a realizar son las siguientes:

Eje de giro principal	Eje de giro secundario	Ángulo de giro
x	z	0
x	z	30
x	z	45
y	x	0
y	x	30
y	x	45
z	y	0
z	y	30
z	y	45

Cuadro 5.1: Configuraciones utilizadas para calibrar el giróscopo

Con un total de 9 configuraciones diferentes, donde cada una de ellas aporta 3 medidas (una por cada eje), se utilizarán un total de 27 medidas para determinar los 12 parámetros involucrados.

Preparación

Las medidas consisten básicamente en dejar la IMU girar a la velocidad del tocadiscos en las posiciones listadas en la tabla 5.1.



Figura 5.1: Escuadras

La dirección de giro principal es la dirección de giro del tocadiscos cuando no hay giro en la dirección secundaria. Con el cubo de madera se resuelven las rotaciones de 90 grados para alinear los diferentes ejes de la IMU con el eje de giro del tocadiscos. Los giros en el eje secundario se realizan utilizando las escuadras y la madera de 4 cm de ancho y lados paralelos, como se muestra en la figura 5.1. Apoyando el cubo sobre la escuadra se logran los ángulos de 30° y 45° deseados en las direcciones de giro secundarias.

Si bien la velocidad de giro estándar del tocadiscos es 33.3 rpm, resulta conveniente medir la velocidad del tocadiscos para corroborarla. Se mide la velocidad con el dispositivo IR y se verifica el buen funcionamiento del tocadiscos.

Un esquema completo de la configuración utilizada para la calibración del giróscopo se puede ver en la figura 5.2.

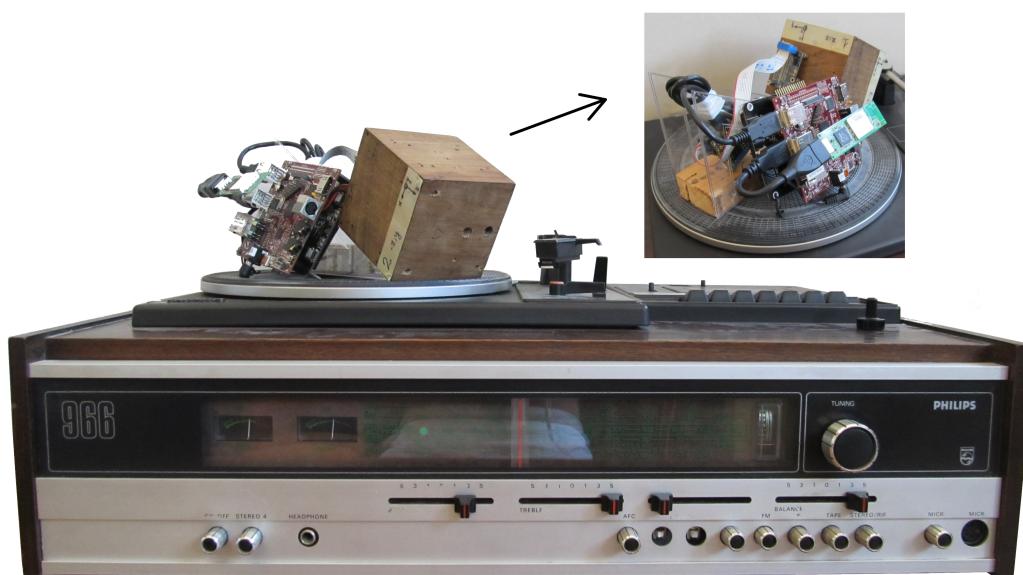


Figura 5.2: Tocadiscos

5.5. Resultados y análisis

5.5.1. Medias estáticas para el giróscopo

Se pone el tocadiscos a girar y mediante la conexión Wi-Fi se indica a la *BeagleBoard xM* que empiece y termine de logear los datos. Se trabaja con el promedio de las velocidades angulares obtenidas en series de datos de 20 segundos controlados por cronómetro. La velocidad del tocadiscos permanece constante en todas las pruebas y lo que se varía es el ángulo del plano donde se apoya el cubo, haciendo uso de las escuadras (figura 5.1).

La IMU arroja datos enteros en complemento A2 convertidos a *grados/segundo*. Dicha conversión se hace internamente a la IMU utilizando la siguiente ganancia asegurada en la hoja de datos: $14,375 \text{ LDB}/(\text{°}/\text{s})$.

Al igual que con la calibración del acelerómetro (capítulo ??), se utiliza la función *lsqnonlin* de *Matlab* para ajustar las medidas obtenidas contra los valores teóricos para cada configuración. Dado que las medidas ya vienen expresadas en $(\text{°}/\text{s})$ y previamente pre-calibradas internamente a la IMU, se afirma que una buena semilla para las ganancias en los 3 ejes es el vector $G = [1; 1; 1]$. A su vez se supone que cada offset de cada eje será cercano a 0. Además suponiendo que los ángulos de no-ortogonalidad de los ejes es despreciable, se llega a que una buena semilla para la función *lsqnonlin* es la siguiente:

$$\theta_0 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Los parámetros que minimizan la suma de los errores al cuadrado son los siguientes:

$$\theta = [0,9900,9670,987 - 0,0792 - 0,0442 - 0,01250,006100,03280,0005220,0227 - 0,02180,0543]$$

Es interesante destacar que el vector θ hallado es similar a la semilla propuesta, por lo que podemos afirmar que el mínimo local encontrado por la función *lsqnonlin* es el deseado.

Una buena medida de los resultados obtenidos se puede obtener al analizar el promedio de los errores cometidos (μ) y la desviación estándar (σ):

$$\mu = -2,483 \times 10^{-11} \text{ } (\text{°}/\text{s}) \quad (5.1)$$

$$\sigma = 0,0276 \text{ } (\text{°}/\text{s}) \quad (5.2)$$

Como se mencionó anteriormente, en la hoja de datos del giróscopo se indica una ganancia de $14,375 \text{ LDB}/(\text{°}/\text{s})$, lo cual implica que un cambio en el bit menos significativo de la medida del giróscopo, se traduce en un cambio de:

$$r = 0,0696 \text{ } (\text{°}/\text{s}) \quad (5.3)$$

Es interesante comprar la resolución del instrumento (r) con la desviación estándar obtenida. Se obtiene que la desviación estándar es 2 veces y media más chica que la resolución del instrumento, llegando a un resultado absurdo. Lo que sucede es que la desviación estándar fue calculada en base a las medidas tomadas para calibrar, por lo cual carece de sentido ya que la función *lsqnonlin* minimiza el error cuadrático medio de esas medidas. Para obtener una desviación estándar válida se deben realizar otras medidas distintas y basarse en ellas para hallar la desviación estándar.

5.5.2. Análisis de Resolución

Se analizan los resultados obtenidos para una configuración en particular: girando según “z” a la velocidad del tocadiscos ($200^{\circ}/s$), a modo de ejemplo. Se obtiene la gráfica mostrada en la figura 5.3

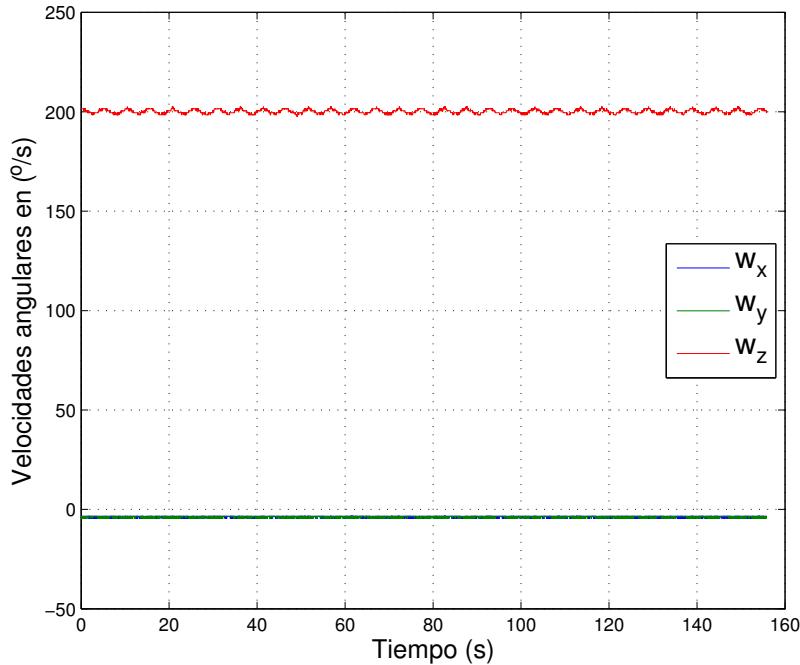


Figura 5.3: Resultados luego de calibrar

Se puede ver a simple vista que los resultados obtenidos son muy similares a los esperados, obteniendo los siguientes valores promedio:

Aceleración angular ($^{\circ}/s$)		
x	y	z
-3.80	-3.65	200.16

Cuadro 5.2: Resultados ejemplo luego de la calibración

Es posible notar una oscilación sobre todo en la medida de w_z . Dicha oscilación se da a 45 rpm aproximadamente. Si bien no se tiene certeza de su procedencia, es probable que provenga del propio tocadiscos. El mismo posee la posibilidad de girar a 2 velocidades distintas, 33.33rpm (la utilizada) y 45 rpm. Es viable pensar que dentro del tocadiscos hay un solo motor que gira a 45 rpm y se logran los 33.33 rpm mediante una reducción mecánica. De alguna manera el motor podría estar introduciendo una oscilación a su velocidad de giro.

Realizando un acercamiento a la velocidad angular obtenida en el eje “z” es posible divisar algunos fenómenos interesantes. Analizando la figura 5.4 se pueden divisar 2 saltos distintos, como si se contara con 2 resoluciones distintas.

Uno de ellos, el más grande, es de aproximadamente $1^{\circ}/s$, mientras que el otro, que se observa en el acercamiento realizado en dicha figura, es de aproximadamente

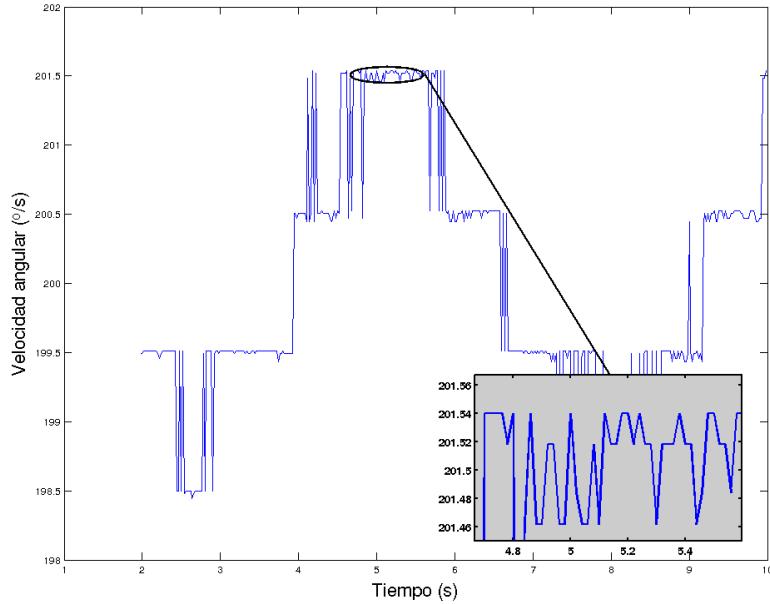


Figura 5.4: Acercamiento de los resultados luego de calibrar

$0,05^{\circ}/s$. Éste último es comparable con el valor hallado de la desviación estándar por lo que puede pensarse como una verificación de la coherencia de los datos obtenidos y calibrados. Por otra parte, los saltos de $1^{\circ}/s$ no parecen tener, a priori, un sentido claro. Analizando el código que corre internamente en la IMU se detectó el causante de dichos saltos. Resulta que a la hora de enviar los datos, la imu realiza un *cast* de los valores expresados en punto flotante a entero, lo cual se traduce en una pérdida aberrante de la resolución del instrumento de medida. Es evidente que el código será retocado para evitar esta pérdida de información en el futuro. Por otro lado es importante destacar que este error no afecta al proceso de calibración realizado, ya que se tomaron medidas de velocidades angulares constantes durante todo el tiempo de muestreo y se realizó un promedio de cada tirada, logrando valores más robustos ante dicho fenómeno.

CAPÍTULO 6

BARÓMETRO

Como instrumento para determinar la altura del cuadricóptero se pensaba utilizar un GPS. La frecuencia de muestreo del GPS y el error en los datos provenientes del mismo lo hacen insuficiente como medio para estimar la elevación del cuadricóptero. Esta fue la motivación para la incorporación de un barómetro.

Las características principales del GPS son:

- Permite obtener un valor para la altura absoluta, libre de bias, pero hace falta promediar muestras durante varios minutos antes de llegar a un dato confiable.
- La precisión del GPS es mala muy cerca del suelo, lo cual representa un problema al intentar despegar y/o aterrizar.

Se opta por incorporar un barómetro, ya que aparentemente dichos sensores padecen de *otros* problemas, y pueden complementar al GPS.

El sensor adquirido es un barómetro digital BOSCH BMP085. Permite medir presión absoluta, y, conociendo la presión y la temperatura a nivel del mar, permite calcular la altura absoluta.

Tiene varios modos de funcionamiento, habiendo un compromiso entre el consumo, la tasa de actualización, y la resolución.

6.1. Objetivos

El objetivo de estas pruebas es determinar como ha de usarse el barómetro BOSCH BMP085, incorporado para asistir en la determinación de la altura del cuadricóptero. Para ello se procede a caracterizar el sensor.

Se analizan las siguientes situaciones:

- Reposo: Se analizan períodos de distinta duración, para cumplir con distintos objetivos:
 - Decenas de minutos: Caracterizar el drift y el tiempo de *warm-up*.
 - Decenas de segundos: Caracterización del ruido de las medidas.
- Altura relativa: 3 experimentos variando el rango a analizar: Puntos que distan decenas de centímetros entre sí, 1m entre sí, y aproximadamente 5m entre sí.

6.2. Materiales

- Laptop.
- Tanza.
- Cinta métrica.
- Cubo de lapacho.
- IMU “Mongoose” de CKDevices (cuenta con un BMP085).

6.3. Consideraciones previas

El sensor de presión devuelve la presión absoluta. Si se conoce la presión y la temperatura a nivel del mar, es posible calcular la elevación.

A nivel de la tropósfera, la capa más baja de la atmósfera, se puede calcular la altura a partir de la presión atmosférica mediante la siguiente fórmula[?]:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{L \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g \cdot M}{R \cdot L}} \quad (6.1)$$

Donde:

- p_0 : Presión atmosférica estándar a nivel del mar - 101325 Pa.
- L : Gradiente de temperatura¹ - 0.0065 K/m
- T_0 : Temperatura estándar a nivel del mar - 288.15 K
- g : Constante de gravitación universal - 9.80665 m/s²
- M : Masa molar del aire seco - 0.0289644 kg/mol
- R : Constante universal de los gases - 8.31447 J/(mol·K)

¹Tasa de incremento de la temperatura con la altura (es negativa).

6.4. Procedimiento

6.4.1. Drift y *warm-up*

En los datos tomados durante varios minutos, se observa lo que parecería ser un drift en las medidas obtenidas del barómetro. Se toman muestras durante 1 hora, con el barómetro quieto, comenzando con el circuito en frío².

6.4.2. Caracterización del ruido

Es de interés caracterizar el ruido en los datos provenientes del barómetro. Si se trata de un proceso estacionario, y de ruido blanco, entonces, promediando se puede reducir el error.

Se analizan datos tomados durante diversos períodos de tiempo: 5 minutos, 2 minutos, 20 segundos y 15 segundos.

Se analiza la autocorrelación de las muestras, y se compara el ruido con los valores dados por la hoja de datos. La hoja de datos especifica ruido RMS típico para los distintos modos de funcionamiento.

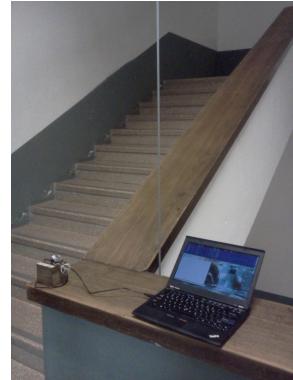
6.4.3. Medidas de altura absoluta

Para analizar la performance del barómetro como instrumento para determinar la elevación absoluta, se toman puntos de altura conocida, y se comparan las lecturas contra los datos conocidos.

6.4.4. Distancias de varios metros

Se deja desplegada una cinta métrica en el vacío del centro de una escalera de 4 tramos en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. La cinta extendida cubre aproximadamente 25 metros. Se comparan las medidas dadas por el barómetro con las que se obtienen de la cinta.

Se utiliza una cinta de agrimensor, graduada cada 10 centímetros, para medir la distancia de un piso a otro. Luego se toman 1 minuto de datos en cada piso, recorriendo la escalera de un extremo a otro. Se repite este experimento 3 veces (se sube, se baja y se vuelve a subir) y luego se realiza un experimento similar, pero en lugar de detenerse a tomar muestras durante 1 minuto en cada piso, se apoya la IMU, se anota el tiempo (mediante software), y se sigue. La pausa en cada punto es menor a 2 segundos.



(a) Toma de datos.



(b) Vacío de la escalera.

²Habiendo estado apagado durante, por lo menos, los 30 minutos previos a la prueba.

6.4.5. Distancias de un metro

Se toma una tanza de pesca resistente. Se realizan marcas cada un metro, en seis puntos distintos de la tanza. En un extremo de la tanza se ata el cubo de lapacho, con la *Mongoose* atornillada a él. Se lo deja descender desde la escalera del *IMERL*³. Se suelta tanza hasta que el cubo se apoya contra el piso, de forma que la primer marca en la cuerda se encuentre junto a quien está realizando las medidas. Se hace una pequeña marca sobre la baranda, en el punto que coincide con la primer marca de la cuerda. Se mide la presión durante un minuto. Luego se sube el cubo hasta que la marca en la baranda coincida con la segunda marca de la cuerda (y por lo tanto el cubo subió 1 metro).

Se vuelve a tomar la medida de presión.

Se repite el procedimiento hasta tener la medida de presión a 5 alturas distintas. Se repite el experimento dos veces. Luego se toma la medida de presión a nivel del suelo. Se toman medidas mientras se sube y se baja el barómetro dos veces, se vuelven a tomar medidas a nivel del suelo.

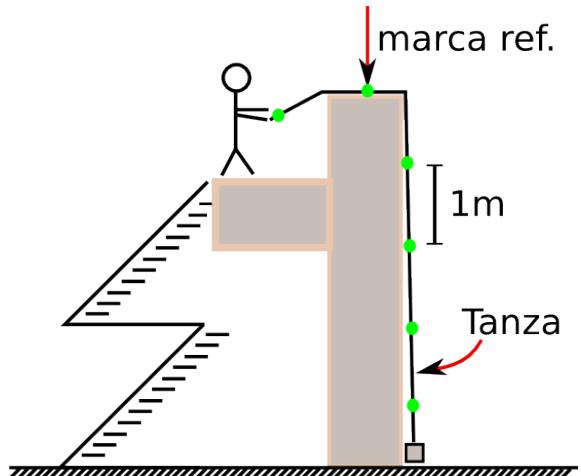


Figura 6.2: Esquema experimento usando

distancias de 1m.

6.4.6. Distancias de decenas de centímetros

Se ubica el cubo de lapacho siempre en la misma orientación sobre cada uno de los estantes de una estantería. Se coloca el cubo sobre el primer estante. Se mide la altura desde el suelo a la cara del cubo sobre la cual se encuentra apoyada la IMU. Se mide la presión durante 8 minutos. Se mueve el cubo al estante siguiente. Se vuelve a medir la altura respecto del suelo con un metro y se mide la presión durante un minuto. Se repite el procedimiento para cada uno de los cinco estantes que componen la estantería. Luego se repite el experimento, pero tomando solamente 5 segundos de datos por estante.

³Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia

6.5. Análisis y resultados

6.5.1. Drift y *warm-up*

Para observar si hay un drift y/o tiempo de *warm-up* significativo, se procede a tomar muestras durante 1 hora, habiendo estado el dispositivo desenchufado durante por lo menos media hora (el circuito arranca en frío).

Se repite este experimento varias veces. En las figuras 6.4 y 6.3 se observan los resultados característicos.

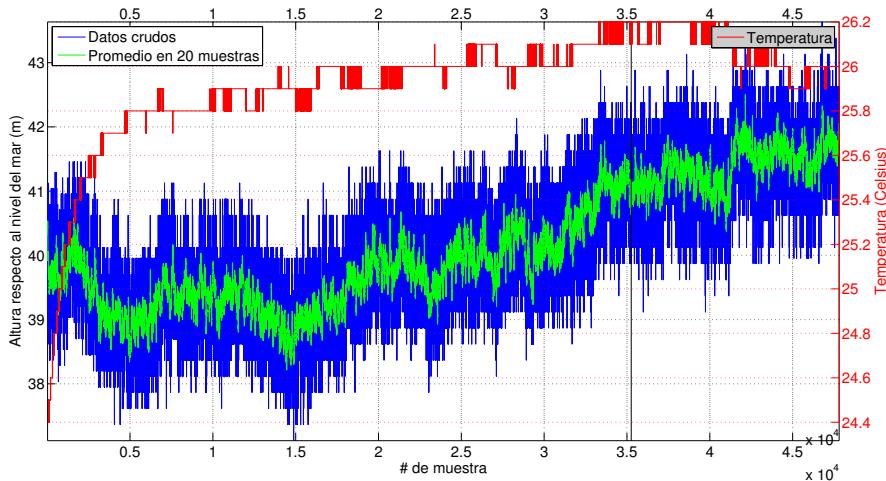


Figura 6.3: Muestras durante una hora, experimento #1.

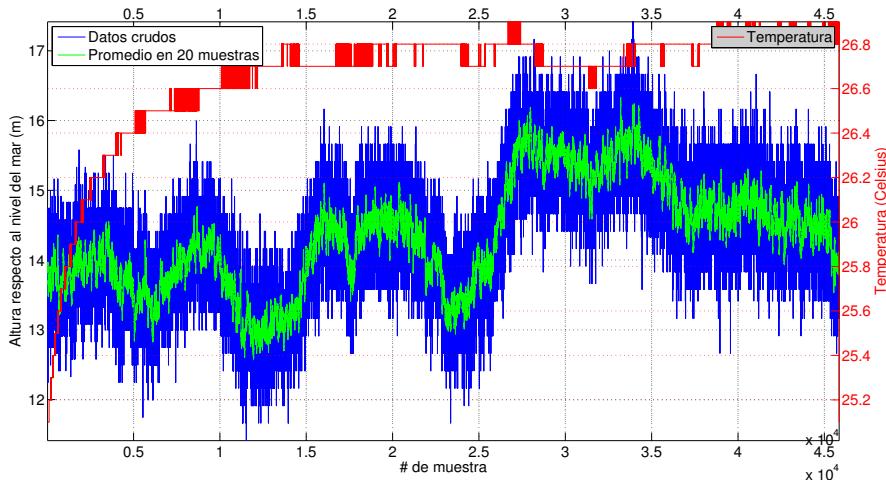


Figura 6.4: Muestras durante una hora, experimento #4.

Se observa que existe un tiempo de *warm-up* bastante extenso, pero con un rango pequeño. La temperatura tarda entre 15 y 45 minutos en estabilizarse, y en el proceso varía menos de 2°C. Las muestras del barómetro no parecen estar directamente correlacionadas con la temperatura.

El barómetro no parece ser adecuado para medir la elevación absoluta. En los datos de las figuras 6.3 y 6.4 se observan variaciones de hasta 3 metros en la estimación de la altura en un período de 1 hora. Sin embargo, el error en el corto plazo es significativamente menor que en el largo plazo, parece viable el uso del barómetro como estimador de la altura en el corto plazo. Esto se analiza más adelante.

6.5.2. Caracterización del ruido

En los logs de la sección 6.5.1, se observa que:

- El comportamiento del ruido en intervalos extensos no es estacionario.
- La mayoría de los saltos en la medida de la altura son de aproximadamente 25cm. Esto no es coherente con las especificaciones dan una resolución de 1Pa, que corresponden a una variación en altura de aproximadamente 8cm.

Estacionariedad

Analizando el ruido en intervalos más pequeños, donde el proceso se puede considerar estacionario, el comportamiento del ruido es muy similar al del ruido blanco.

En la figura 6.10 se observa la autocorrelación de la muestras tomadas del barómetro en intervalos de tiempo de 5 minutos, 2 minutos, y 15 segundos.

Cabe destacar que el ruido se puede considerar estacionario si se usan intervalos de tiempo menores a 15 segundos.

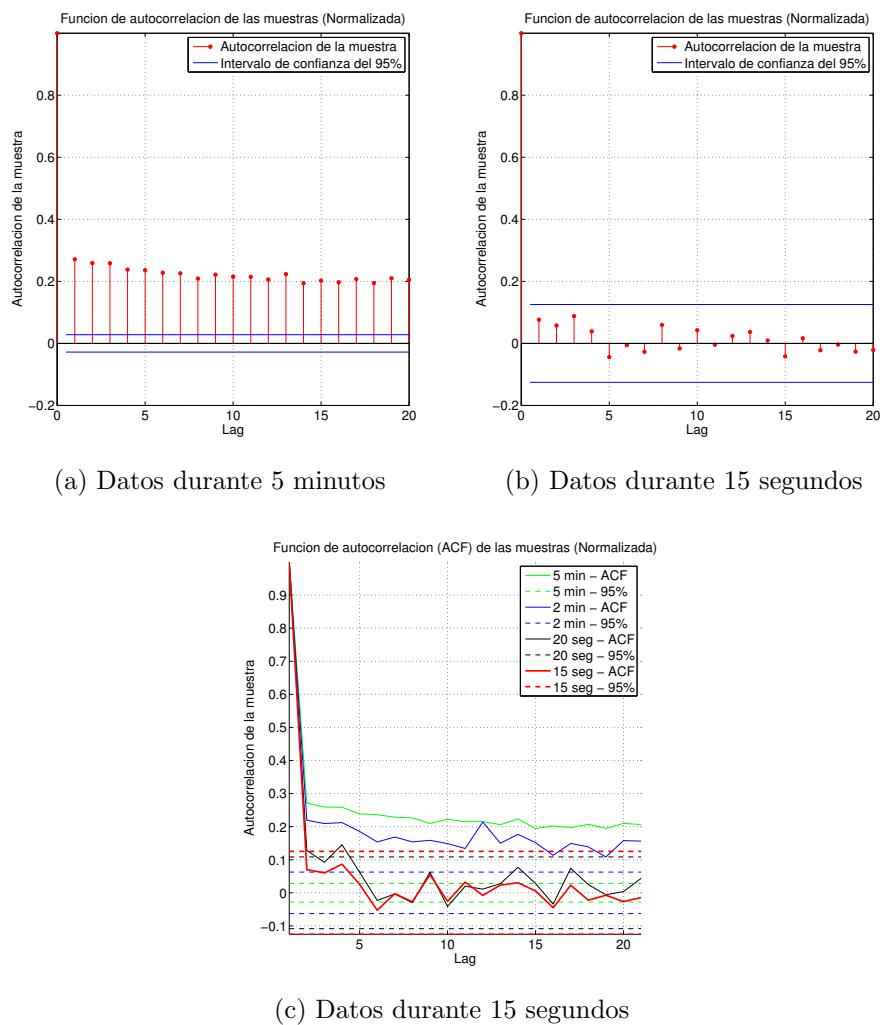


Figura 6.5: Autocorrelación de las muestras del barómetro.

Modos de funcionamiento

El barómetro permite trabajar en varios modos. Básicamente, permite que se le exija más resolución, menos ruido, y a cambio aumenta el tiempo que tarda en tener un dato nuevo listo, y consume más energía. Esto lo logra promediando datos internamente. En la tabla 6.3 se compara el ruido RMS en los distintos modos, con lo que se lograría usándolo en el modo básico (sin promediar internamente) y promediando en el microprocesador.

Modo	Ruido RMS (m)		
	Microprocesador	Sensor	Especificaciones
0	0.52	0.52	0.50
1	0.37	0.45	0.40
2	0.25	0.37	0.30
3	0.63	0.35	0.25

Cuadro 6.1: Ruido RMS, 2 minutos de datos a 14Hz.

La resolución más atractiva parece ser la número 2, en la cual se promedian 4 datos. Se concluye que, si se dispone de procesador se optará por promediar datos en él, de lo contrario se usará el promedio calculado por el sensor.

Resolución del instrumento

En la figura 6.6 se observa un histograma de las diferencias entre muestras sucesivas de los datos del barómetro. Se observa que la mayor parte de los datos saltan de a 25cm. Se esperaba una discretización en niveles de aproximadamente 8cm, correspondientes a variaciones de presión de 1Pa (la resolución del instrumento).

Puede resultar difícil ver que hay muestras en todos los bins, pero mirando con detalle se puede. Puede deberse a un problema de software, o la construcción del sensor en sí. Este problema no parece ser significativo.

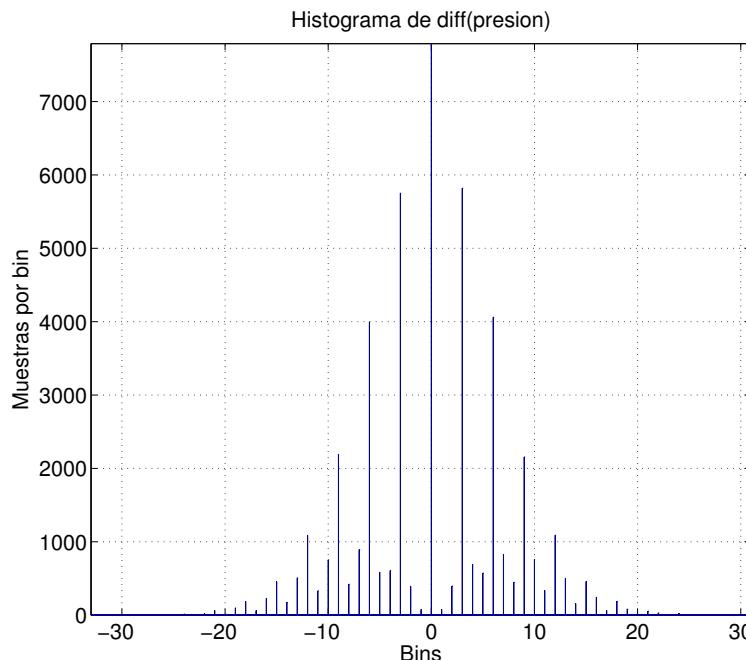


Figura 6.6: Histograma de las diferencias, experimento #4.

6.5.3. Altura absoluta

Las figuras 6.3 y 6.4 se corresponden a datos tomados a la misma altura, pero en días distintos. Cabe destacar que la diferencia entre ambas curvas llega es de aproximadamente 25 metros.

Se descarta la posibilidad de utilizar el barómetro para determinar la altura absoluta, ya que estando el barómetro a una altura fija, la elevación varía mucho de un día a otro, lo cual refleja una fuerte dependencia con factores externos, probablemente climáticos, que no interesa considerar.

6.5.4. Distancias de varios metros

En las siguientes figuras se observan los resultados del experimento. Las líneas verticales (en negro) representan el comienzo y el fin de la toma de datos en cada piso. No se hace una medida de la altura absoluta, se miden las distancias entre piso y piso (con la cinta métrica), y se usa como origen de coordenadas la altura dada por el promedio de algunas muestras al comienzo del experimento, ya sea en el piso de más arriba, o en el piso de más abajo (bajadas y subidas respectivamente). La coordenada Y de los segmentos en rojo que unen las rectas verticales representan la distancia entre el origen y el piso actual. Dicha distancia se mide con la cinta métrica.

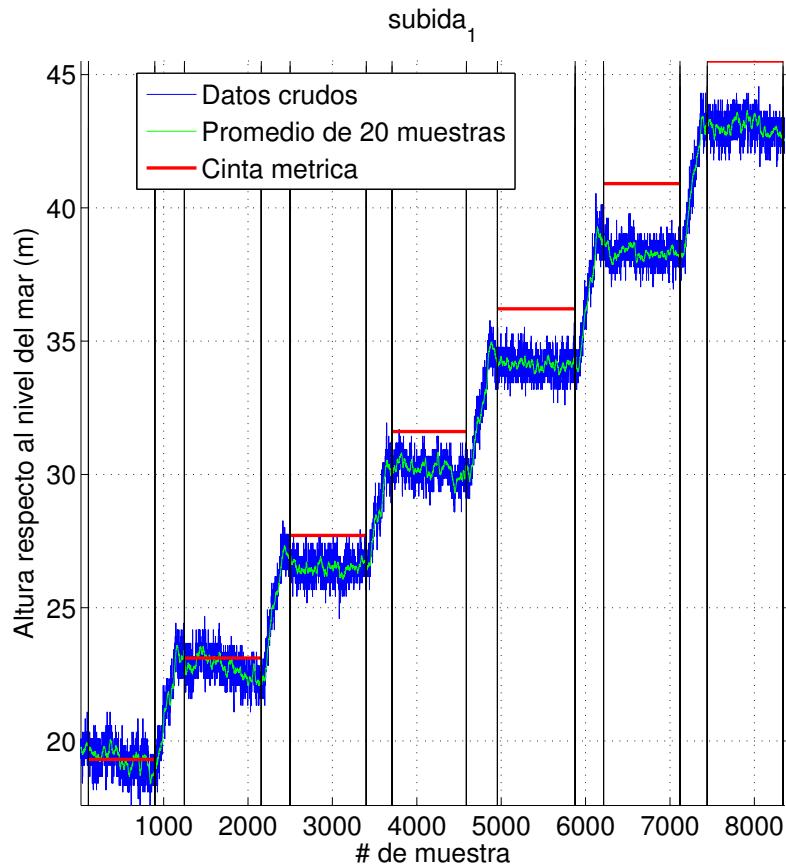


Figura 6.7: Subida #1.

En la figura 6.7 se observa que para cuando se termina de recorrer la escalera, el error acumulado se llega a los 3 metros.

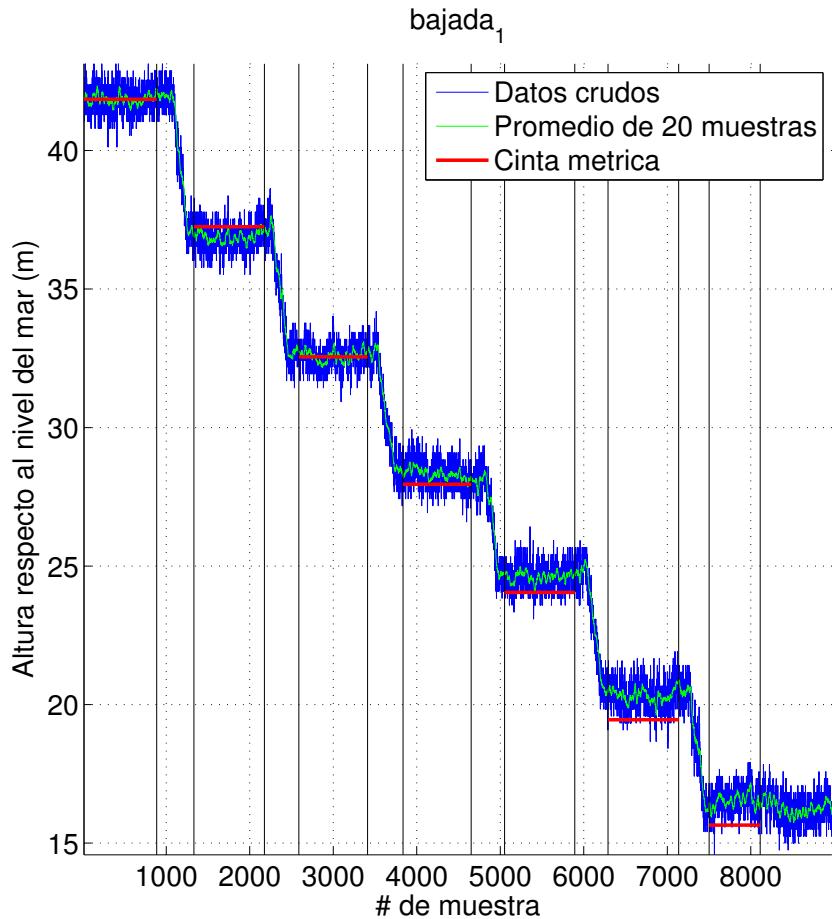


Figura 6.8: Bajada #1.

En la figura 6.8 se observan resultados mejores que en la figura 6.7. Se repite la subida, y se obtienen resultados similares a los de la figura 6.8, por este motivo no se incluye una figura de este último experimento.

Los errores en las medidas se analizan más adelante.

Cabe destacar que la performance en la figura 6.9 es muy similar a la que se obtuvo tomando muestras durante 1 minutos. Esto resulta alentador, ya que se pretende utilizar el barómetro para obtener medidas con una frecuencia mucho mayor 1Hz.

En la figura 6.10a se observa la evolución del error acumulado para 2 subidas⁴, 1 bajada y una bajada rápida.

El error en la determinación de la distancia entre un piso y el siguiente se observa en la figura 6.10b.

El error de la figura 6.10b es relativo a la altura de cada piso, que son de aproximadamente 4.3m. Analizando los número con cuidado, se llega a que el error es siempre menor al 10 %.

De las figuras 6.9 y 6.10a se desprende que utilizando promedios de 20 muestras⁵, se obtiene un error de aproximadamente 0.5m. El comportamiento del barómetro es aceptable, y se corresponde con las especificaciones de la hoja de datos.

⁴No se incluye una gráfica de la segundo subida, ya es muy similar, en cuanto al error, a la de la primera bajada, pero con un error del orden del de la primer bajada.

⁵Esta es la cantidad de muestras que se promediaron para determinar la altura cada vez en cada piso en el experimento “rápido”.

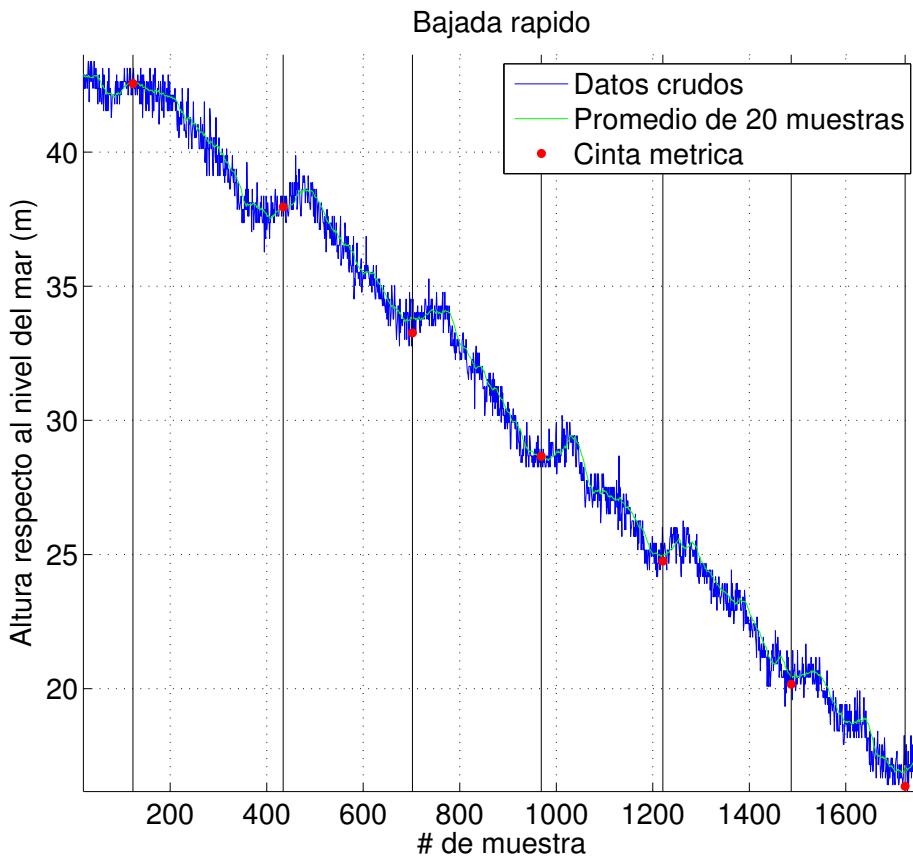


Figura 6.9: Bajada sin detenerse en cada piso.

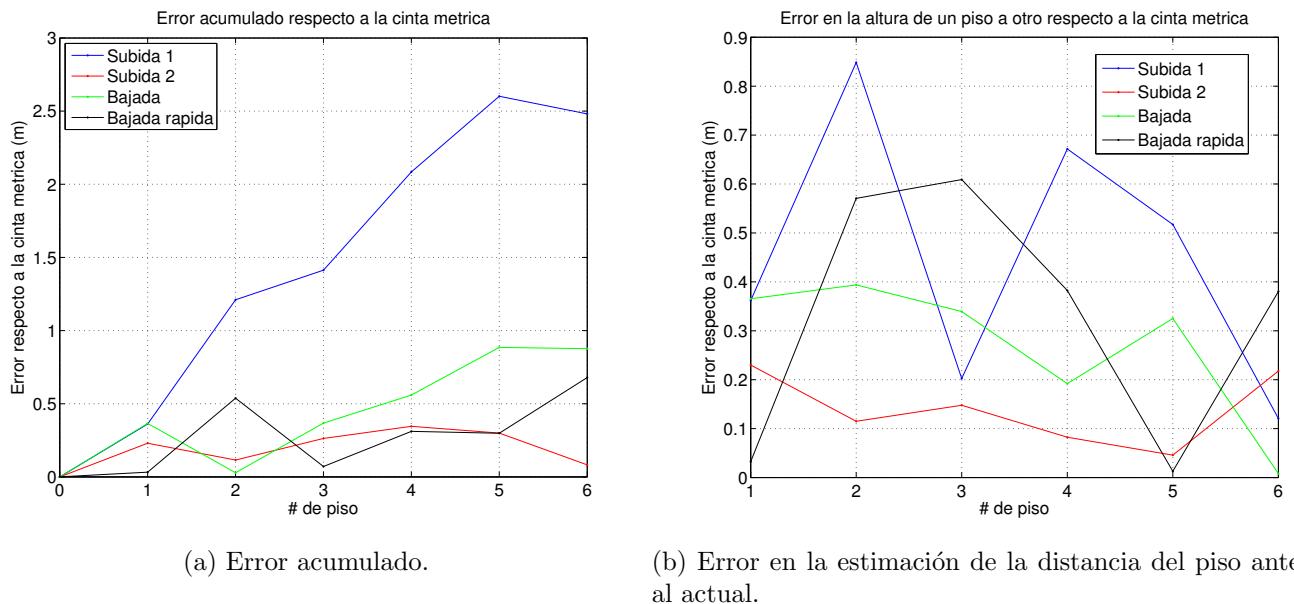


Figura 6.10: Evolución del error en distancias de varios metros.

6.5.5. Distancias de un metro

Las figuras 6.11a y 6.11b presentan las medidas obtenidas al realizar las medidas estáticas a alturas que difieren de un metro. La figura 6.13 muestra las medidas obtenidas durante el proceso de subir y bajar el barómetro. En las tres figuras se observan los datos obtenidos y la media móvil considerando 20 muestras.

Se aprecia que el comportamiento es acorde a lo esperado, corresponde a las acciones realizadas. Se analizan con mayor detenimiento los resultados para concluir que es lo que se puede esperar del barómetro.

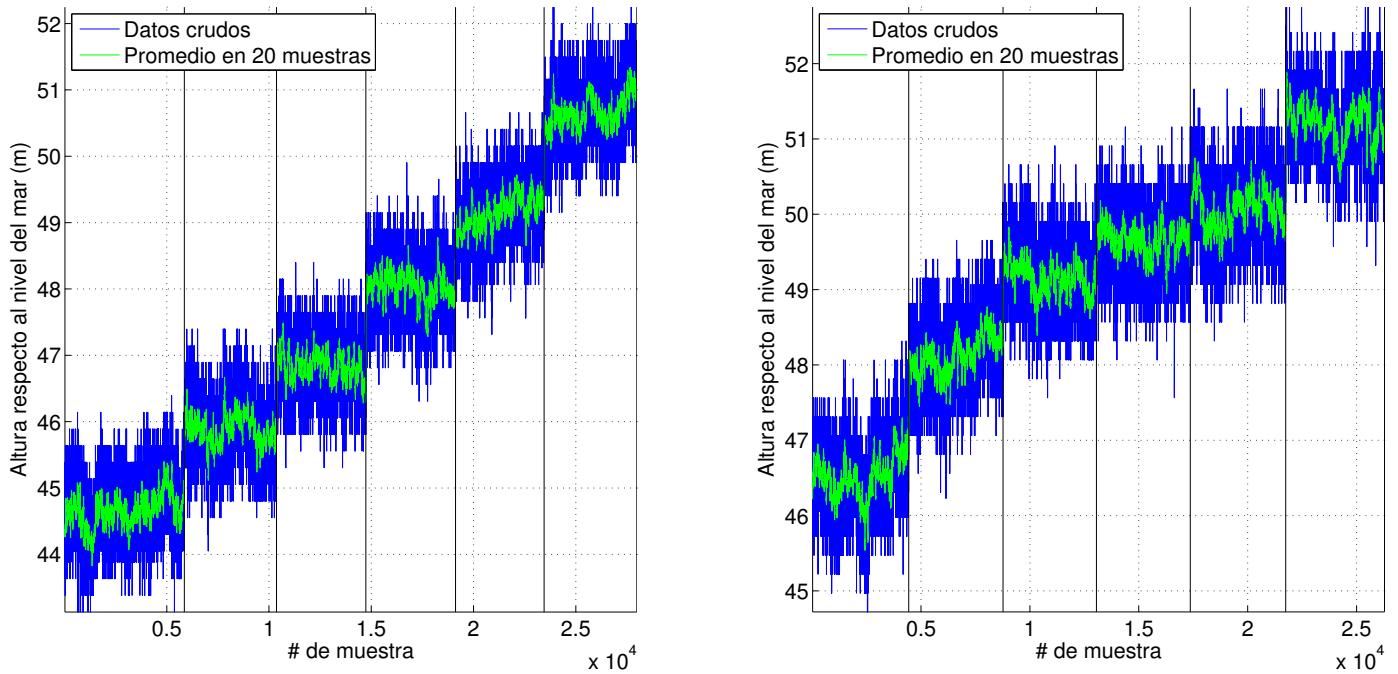


Figura 6.11: Experimento: Distancias de 1 metro.

En la tabla 6.2 se muestran los valores de altura obtenidos en las distintas posiciones en las dos series de datos tomadas. La altura absoluta no tiene sentido, ya que no se conoce la presión a nivel del mar en el momento de tomar las muestras, por lo tanto la ecuación 6.1 no dará el resultado correcto.

Posición	Altura medida con el barómetro (m)	
	Serie 1	Serie 2
1	44.66	46.52
2	45.87	48.12
3	46.82	49.15
4	48.04	49.66
5	49.15	50.05
6	50.66	51.21

Cuadro 6.2: Alturas obtenidas con el barómetro

Se observa inmediatamente en las medidas de altura realizadas que la altura absoluta registrada por el barómetro cambia considerablemente de una serie a la otra.

En la segunda se observa que las medidas se encuentran en promedio un metro más arriba. Los puntos que se consideraron fueron los mismos, sin embargo las medidas fueron realizadas un día de tormenta. La presión atmosférica es muy cambiante en esos días. Eso puede explicar dicha diferencia. Otra explicación puede ser el drift observado en secciones previas.

En la figura 6.12 se muestra la evolución de los errores relativo y acumulado.

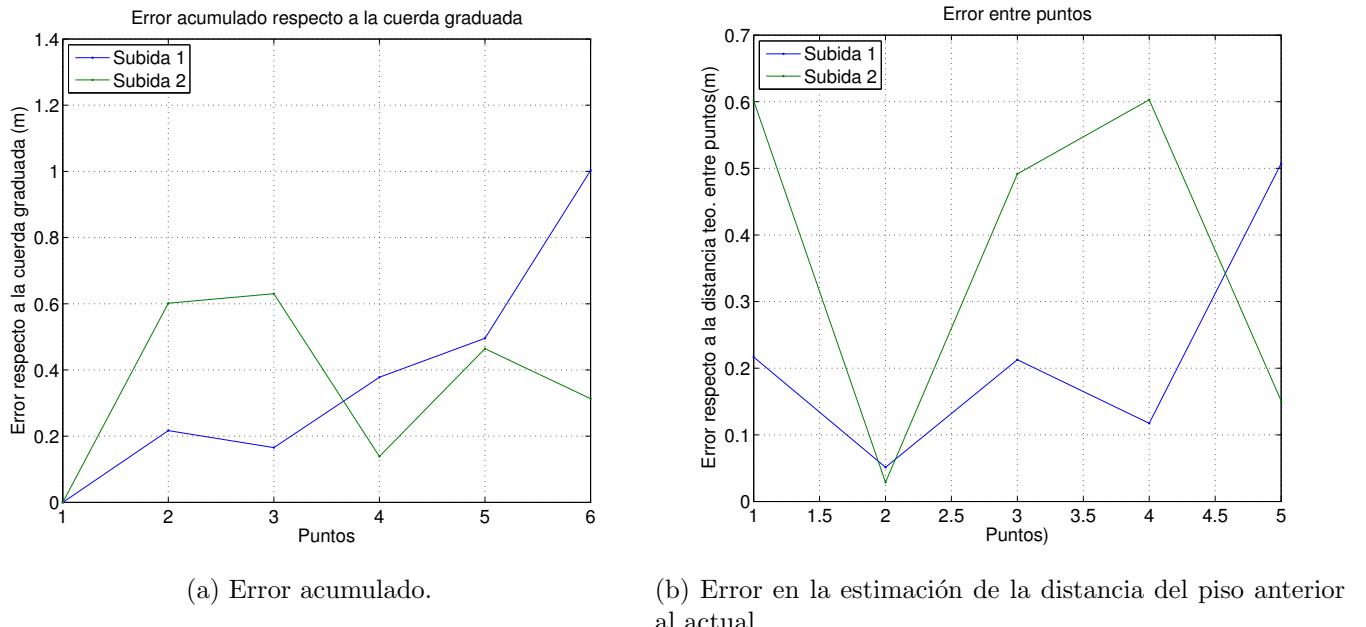


Figura 6.12: Errores en las medidas a 1 metro entre sí.

Del análisis de cada serie de manera independiente:

- Serie 1:
 - Error promedio: $0,20m$
 - Desviación estándar: $0,20m$
- Serie 2:
 - Error promedio: $-0,07m$
 - Desviación estándar: $0,49m$

Al tener pocas muestras en cada una de las series es imposible considerarlas para armar estadísticas, de hecho ambas difieren mucho en cuanto al error promedio que presentan y la desviación estándar.

Si se trabaja con las dos series de datos, se obtienen:

- Error promedio: $0,07m$
- Desviación estándar: $0,38m$

A partir de los datos anteriores se puede concluir que el 95,5 % de las veces se tiene errores inferiores a $0,76m$ en diferencias de un metro. El error se mantiene por

debajo de 1m al usar pocas (4 muestras, 8, 10, etc) muestras para cada punto. Esto es prometedor, ya que se piensa utilizar

Este error depende del drift del barómetro, y se puede reducir incorporando, de manera periódica, información externa (GPS) sobre la altura absoluta.

En la figura 6.13 se observa la variación en la altura absoluta. Si bien cada tramo comienza y termina a una altura que cae dentro del error esperado, hay tramos del principio y del final del experimento (barómetro apoyado en el suelo) entre los que se observa una diferencia en altura de 1.5m. Esto no cae dentro del error esperado. El problema se ve luego de transcurridos varios minutos, tiempo mucho mayor al sugerido en la sección 6.5.2, por lo que no parece ser un problema relevante, ya que puede ser causado por el drift y/o por cambios en las condiciones atmosféricas.

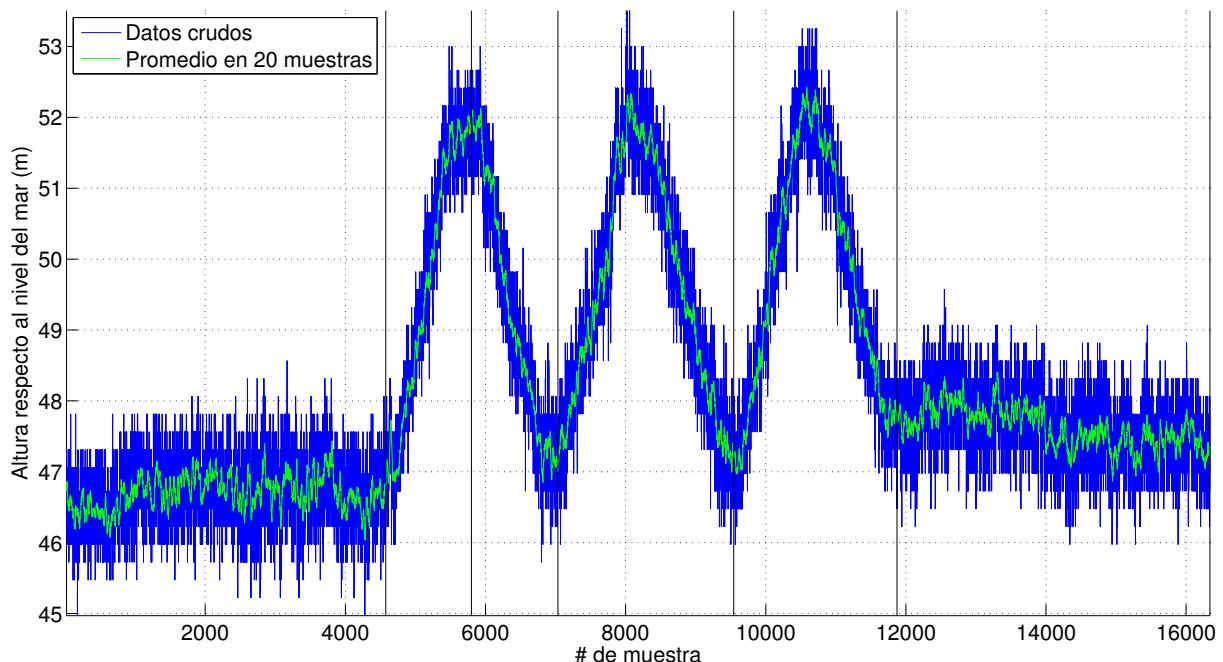


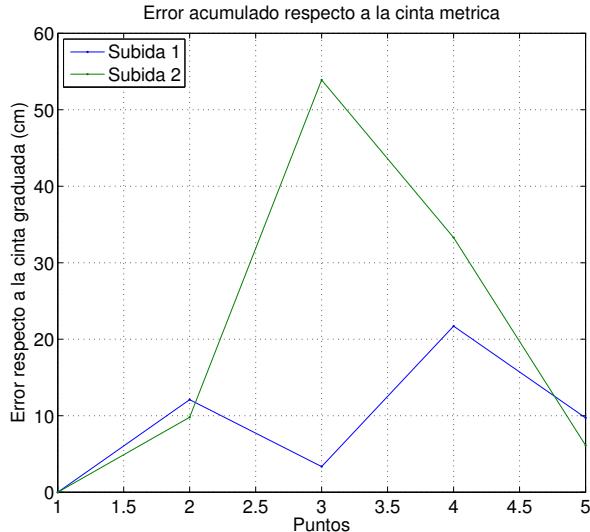
Figura 6.13: Medidas de altura subiendo y bajando.

6.5.6. Distancias de decenas de centímetros

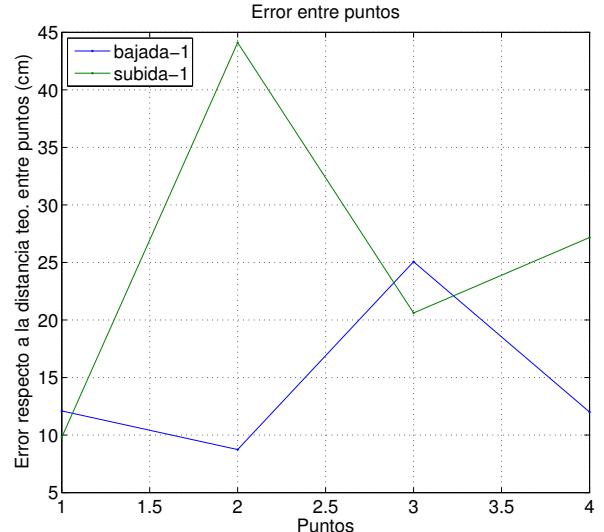
5 segundos por estante

Se toman datos durante 5 segundos en casa escalón. Repitiendo el análisis realizado en secciones anteriores, se obtiene:

- Error promedio: 2.0 cm
- Desviación estándar: 24.4 cm



(a) Error acumulado.



(b) Error en la estimación de la distancia del estante anterior al actual.

Figura 6.14: Errores en las medidas a decenas de cm entre sí.

8 minutos por estante

En la figura 6.15 se observan los datos capturados durante este experimento. El experimento se realiza un día de tormenta. Se toman 8 minutos de datos en cada estante, el experimento en su totalidad dura 40 minutos. El cambio de presión durante una tormenta es significativo. Se considera que esta fue la causa del drift observado en la figura 6.15. No se analiza el error en las medidas, ya que claramente está lejos de ser algo utilizable. Cabe destacar que no sirve tomar medidas durante tanto mucho tiempo con el barómetro, ya que el drift y/o factores externos introducen errores importantes.

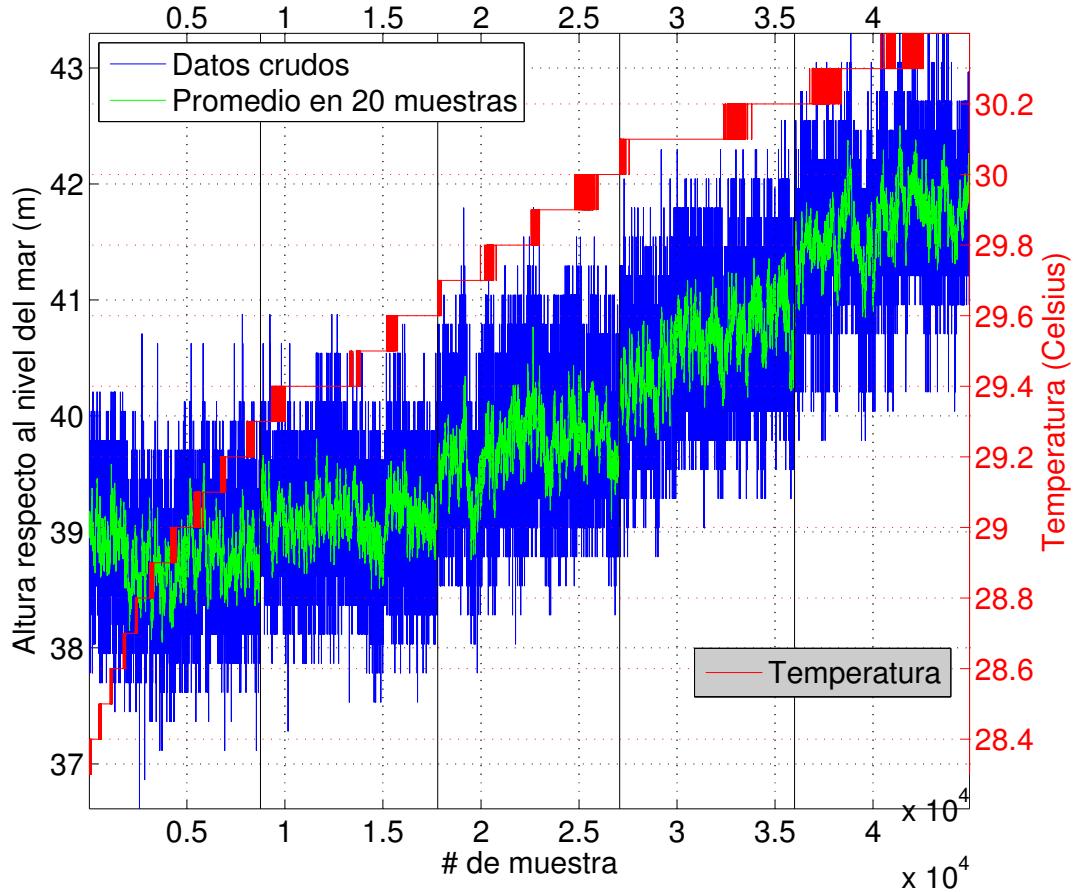


Figura 6.15: 8 minutos por estante durante una tormenta.

3m en aproximadamente 7 segundos

Como prueba extra, se recorre 4 veces la estantería sin detenerse cada estante, completando el trayecto de bajar y volver a subir en aproximadamente 7 segundos. Se calcula la distancia recorrida al bajar, la distancia recorrida al subir, y la total, y se compara dichas distancias contra los valores medidos con la cinta métrica. Los resultados se muestran en la tabla 6.3. Solamente se hicieron 4 experimentos, por lo que los datos estadísticos son solamente para dar una idea de la performance frente a movimientos bruscos.

	Error promedio (cm)	Desviación estándar (cm)
Bajada	15.1	25.9
Subida	4.4	58.9
Bajada+Subida	10.7	49.0

Cuadro 6.3: 3 metros en aproximadamente 7 segundos.

Cabe destacar que el error se mantiene por debajo de los 1.2m en el peor caso. La figura 6.16 muestra gráficamente los resultados del experimento.

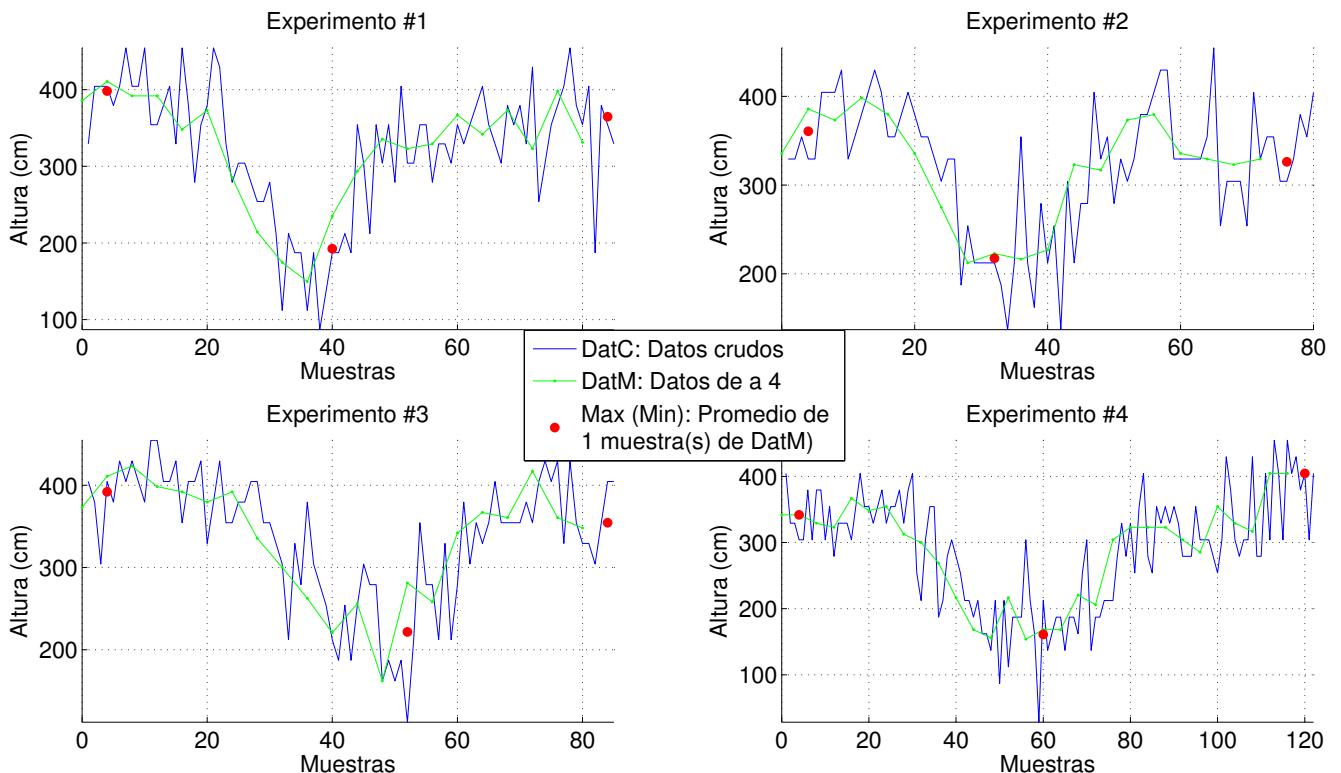


Figura 6.16: 3m metros en aproximadamente 7 segundos.

6.6. Conclusiones

Conclusiones más importante de las pruebas hechas con el barómetro:

- **Tiempo de *warm-up*:** El circuito tiene un tiempo de *warm-up* de aproximadamente 45 minutos, durante el cual la temperatura sube aproximadamente 1.5°C. De las especificaciones de los sensores se deduce que una variación de temperatura tan pequeña no debería afectar la performance. De cualquier forma, es de interés analizar experimentalmente, el efecto de la variación de la temperatura sobre las lecturas de la IMU.
- **Drift y Altura absoluta:** El drift y la sensibilidad a factores externos (clima, etc) hacen que el barómetro **no** sea adecuado para determinar la altura absoluta. No es posible obtener una mejor estimación de la altura tomando promedios durante períodos de tiempo mayores, ya que el drift introduciría errores en dicho estimador. Se observa un drift de hasta 0.5m en 1 minuto.
- **Altura relativa:** Estando en reposo, en períodos de tiempo menores a 1 minuto es posible conocer variaciones de altura con una error menor a 0.5m.
- **Rol del barómetro:** Se concluye que el barómetro sirve para determinar variaciones de altura, suavizando la trayectoria, mientras se espera una altura absoluta proveniente del GPS. El barómetro y el GPS se complementan. El barómetro ha de utilizarse con los siguientes parámetros:
 - Error promedio: 0.5m
 - Desviación estándar: 0.25m
 - Modo: 0, promediando 4 muestras en la IMU.
 - Se observa un drift de hasta 0.5m por minuto. Se debe utilizar el GPS para corregirlo.

CAPÍTULO 7

MAGNETÓMETRO

7.1. Objetivos

El objetivo de estas pruebas es comprender y caracterizar el magnetómetro de 3 ejes Honeywell HMC5583, incorporado para asistir en la determinación de la orientación absoluta del cuadricóptero.

7.2. Materiales

- Mesa de madera de 1.5m de largo.
- Laptop.
- Hilo y clavos.
- Mesa nivelable.
- Cubo de lapacho
- IMU “Mongoose” de CKDevices, con un HMC5583.
- Foto satelital, con información sobre coordenadas.
- Mesa nivelable, con una superficie que se pueda inclinar en ángulos conocidos.
- Escuadra

7.3. Procedimiento

El modelo adoptado para relacionar las medidas de campo magnético sin calibrar con las medidas calibradas es idéntico al utilizado a la hora de calibrar el acelerómetro y el giróscopo. Se trata de realizar una transformación lineal de las medidas obtenidas para transformarlas en los valores de campo magnético. Se propone un modelo de la forma:

$$\mathbf{C}^P = K_m(\tilde{\mathbf{C}}^m - \mathbf{b}_m)$$

Se proponen dos métodos de calibración. En primer lugar se toman medidas de campo magnético con la plataforma alineada en una dirección conocida, sobre una mesa nivelada (de forma que se encuentre paralela a la superficie de la Tierra). Se toman las medidas del campo magnético variando el ángulo de la mesa y rotando la plataforma ángulos conocidos. Finalmente realizando una minimización por mínimos cuadrados se determinan los parámetros de interés.

Por otra parte, se toma una serie de medidas de campo magnético terrestre en la mayor cantidad de orientaciones posibles. Para asegurar la calidad de los datos es recomendable tomar medidas distribuidas uniformemente en todas las direcciones. Dado que el campo es constante, la gráfica de las medidas anteriores debería resultar en una esfera con centro en el origen de radio igual al módulo del campo magnético de la Tierra. Al no tener un sensor calibrado el resultado será un elipsoide. Se utilizó un algoritmo desarrollado por *Alain Barraud* para realizar la calibración, dicho algoritmo no es otra cosa que la implementación de la minimización presente en el método propuesto por [??](#). El resultado que se obtiene es la matriz y el vector que hacen que las medidas tomadas aproximen una esfera de centro el origen.

Una vez calibrado el sensor se procede a verificar la exactitud que ofrece el mismo para determinar la orientación de la plataforma. Con dicho objetivo Cabe aclarar que el Norte magnético no se corresponde con el Norte geográfico en toda la Tierra, sino que por el contrario (dependiendo de la región del mundo) presenta una declinación. Es decir que tenemos una componente del campo magnético en la dirección Oeste-Este además de la componente Sur-Norte. La declinación es diferente en cada punto de la Tierra. En particular en Uruguay la misma es de $-9,74^\circ$ según la convención mundial, es decir que el Norte magnético se encuentra $9,74^\circ$ al Oeste del Norte geográfico.

7.4. Resultados y Análisis

7.4.1. Calibración con el primer método

Con el primer método propuesto se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\bullet K_m = \begin{pmatrix} 7,24 \times 10^{-4} & -2,79 \times 10^{-5} & -2,63 \times 10^{-5} \\ 8,03 \times 10^{-5} & 7,23 \times 10^{-4} & 1,89 \times 10^{-5} \\ 6,19 \times 10^{-5} & -5,07 \times 10^{-5} & 7,80 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{b}_m = \begin{pmatrix} 32,990198627287 \\ -120,1211527671 \\ 4,6285537022096 \end{pmatrix}$$

- Error promedio: $\mu = -1,07 \times 10^8 G$

- Desviación estándar: $\sigma = 0,014G$

Si bien el error promedio parece aceptable la desviación estándar no lo es. El valor del campo magnético en Uruguay en la dirección Norte es de $0,175G$. La desviación estándar corresponde al 8 % del valor del campo magnético. En las demás direcciones el error cometido será aún mayor.

7.4.2. Calibración con el segundo método

Con el segundo método de calibración se obtienen los siguientes parámetros:

- $K_m = \begin{pmatrix} 4,73 \times 10^{-3} & -2,19 \times 10^{-5} & 3,09 \times 10^{-4} \\ 0 & 4,55 \times 10^{-3} & 7,83 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 5,35 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$
- $b_m = \begin{pmatrix} 23,32 \\ -126,62 \\ 19,04 \end{pmatrix}$

7.4.3. Primera Comparación entre los métodos

En la figura 7.1a se observan graficadas las medidas de campo magnético con el sensor descalibrado en los ejes solidarios a la plataforma. Como era de esperarse en la medida con el sensor descalibrado no se obtiene una esfera, esto se debe a que las ganancias en cada eje no son las adecuadas. Por otra parte los ejes principales tampoco son colineales con X_q , Y_q y Z_q . Debido a los *offset* en cada dirección el centro del elipsoide no concuerda con el origen. En la figura 7.1b tenemos las medidas de campo magnético con el sensor calibrado con el segundo método de calibración propuesto. En primer lugar es interesante destacar que se tiene una esfera centrada en el origen, por lo tanto la calibración puede calificarse de exitosa. La magnitud que medimos luego del proceso de calibración se encuentra normalizada. Dado que utilizaremos dicho sensor para determinar una orientación, nos interesan simplemente las relaciones entre las componentes medidas en cada eje del sensor, por lo tanto trabajar con las medidas normalizadas arroja el mismo resultado que trabajar con las medidas de campo en Teslas o Gauss.

En la figura 7.1c se transformaron las medidas utilizadas para realizar el segundo método de calibración utilizando los parámetros obtenidos gracias al primer método. Luego se normalizó el resultado obtenido a fin de poder compararlo con el resultado obtenido gracias al segundo método de calibración. Gráficamente no resulta evidente extraer una conclusión sobre cual de las dos medidas es más adecuada.

Con los datos convertidos se procede a realizar una minimización gracias a los mínimos cuadrados para obtener las coordenadas del centro de cada esfera y su radio.

Para el primer método de calibración utilizado se encuentra que:

- Centro de la esfera: $C = (-3,86 \times 10^{-2}; -6,53 \times 10^{-3}; -5,99 \times 10^{-2})$

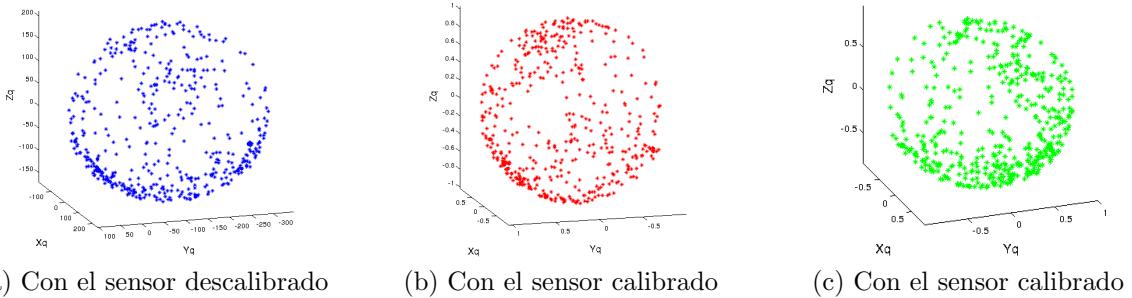


Figura 7.1: Medias de campo magnético Terrestre

- Radio de la esfera: $R = 0,9389$
- Error promedio: $\mu = -6,85 \times 10^{-4}$
- Desviación estándar de la medida del radio: $\sigma = 3,55 \times 10^{-2}$

Para el segundo método de calibración utilizado se encuentra que:

- Centro de la esfera: $(2,39 \times 10^{-3}; -2,63 \times 10^{-3}; -5,38 \times 10^{-4})$
- Radio de la esfera: $0,9979$
- Error promedio: $\mu = -3,00 \times 10^{-4}$
- Desviación estándar de la medida del radio: $\sigma = 2,42 \times 10^{-2}$

Si bien la diferencia obtenida entre ambas calibraciones no es significativa en cuanto a los errores cometidos en el radio de las esferas, sí aparece una diferencia de un orden de magnitud en una de las coordenadas del centro de la esfera y de dos ordenes de magnitud en otro.

7.4.4. Determinación de la orientación

Luego de calibrado el sensor se quiere determinar la capacidad que tiene el mismo de proporcionar una adecuada orientación. Con dicho fin se utiliza la tabla larga para alinear el sensor en una dirección en particular. La ubicación donde fue realizado el experimento se encuentra marcada aproximadamente con la marca roja en la figura 7.2. El objeto elegido para realizar la alineación es el que se muestra en la parte superior de la figura 7.2, su ubicación es la indicada por el “muñeco” en la figura 7.2.

Del mapa de la Intendencia de Montevideo ¹ se obtienen las coordenadas de los puntos seleccionados. El punto en que fue realizado el experimento es el $(576039, 6135625)$ y el punto con el cual se alineo es el $(572118, 6136415)$. El ángulo de la recta que une los dos puntos medido respecto del eje Sur-Norte es de $78,6^\circ$ al Oeste.

Interesa determinar los tres ángulos de Euler (θ , φ y ψ). En primer lugar se intenta utilizando exclusivamente el magnetómetro. En las tablas 7.2 se presentan

¹<http://sig.montevideo.gub.uy/mapas/mapa-principal>

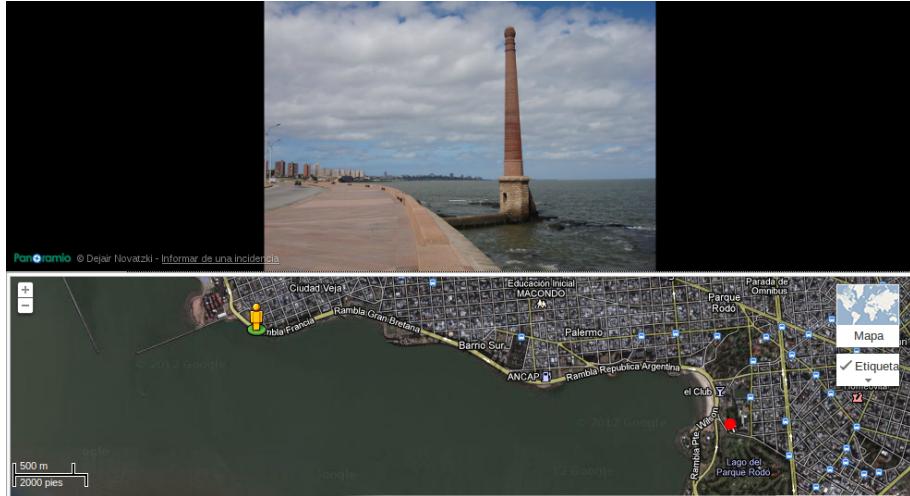


Figura 7.2: Mapa de la costa de Montevideo

los resultados obtenidos para cada método de calibración. En la tabla se observa claramente que los resultados difieren considerablemente de lo esperado. Se confirma que el magnetómetro por si solo, no es suficiente para determinar la orientación del cuadricóptero.

En reposo, los ángulos de pitch y roll, pueden determinarse fácilmente gracias a la medida de aceleración. Luego de determinados dichos ángulos se proyecta la lectura del campo magnético en la base S_1 definida en ???. La orientación se calcula finalmente como:

$$\theta = \text{atan}(\vec{C}_{med} \vec{i}_1 / \vec{C}_{med} \vec{j}_1)$$

Donde C_{med} es el campo magnético medido luego de proyectado en la base S_1 .

Los resultados obtenidos en este caso se presentan en la tabla ??.

En este caso los ángulos encontrados se asemejan en mayor medida a los resultados teóricos.

El error promedio obtenido con el primer método de calibración es $\mu_1 = -61^\circ$, la desviación estándar obtenida es $\sigma_1 = 3,83^\circ$, mientras que para el segundo método de calibración tenemos que $\mu_2 = -7,10^\circ$, la desviación estándar obtenida es $\sigma_2 = 3,28^\circ$.

Cabe aclarar que la exactitud de los resultados obtenidos para las seis primeras medidas en los ángulos de pitch y roll, se debe a un ajuste realizado para cubrirse frente a la situación de *gimbal lock*. El análisis del error cometido en la medida de los ángulos de pitch y roll puede encontrarse en el capítulo ??.

En ambos casos se obtiene un error promedio distinto de cero. Con cualquier método de ajuste que se elija se deberá restar a la medida realizada el error promedio. Lo más adecuado parece ser elegir el método que tiene una desviación estándar menor. Por dicho motivo volvemos a escoger el segundo método.

θ		φ		ψ	
ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido
-90.20	16.17	-90.00	54.88	0.00	-54.23
-60.20	27.47	-90.00	43.92	0.00	-26.59
-45.20	31.96	-90.00	38.77	0.00	-13.86
-30.20	35.82	-90.00	33.57	0.00	-1.70
-0.20	43.41	-90.00	22.75	0.00	22.86
89.80	62.34	-90.00	-7.55	0.00	76.77
-90.20	-30.76	-0.00	-19.64	90.00	23.46
-60.20	-43.24	-0.00	-20.10	90.00	42.72
-45.20	-45.54	-0.00	-17.55	90.00	53.33
-30.20	-44.20	-0.00	-14.35	90.00	63.15
-0.20	-28.13	-0.00	-9.57	90.00	79.90
89.80	46.50	-0.00	0.62	90.00	61.21
179.80	24.61	-0.00	-11.21	180.00	84.50
-150.20	-3.43	-0.00	-9.98	180.00	84.68
-135.20	-18.96	-0.00	-9.27	180.00	85.06
-120.20	-33.05	-0.00	-8.56	180.00	85.22
-90.20	-63.76	-0.00	-6.57	180.00	85.84
-0.20	-156.62	-0.00	-15.41	180.00	77.69

Cuadro 7.1: Ángulos medidos con la primer calibración y teóricos en las distintas posiciones

θ		φ		ψ	
ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido
-90.20	22.89	-90.00	62.86	0.00	-50.24
-60.20	34.83	-90.00	50.00	0.00	-22.52
-45.20	39.31	-90.00	44.14	0.00	-10.21
-30.20	43.11	-90.00	38.26	0.00	1.50
-0.20	50.58	-90.00	25.49	0.00	25.90
89.80	60.40	-90.00	-12.45	0.00	83.52
-90.20	-24.09	-0.00	-16.70	90.00	19.61
-60.20	-36.79	-0.00	-18.84	90.00	38.91
-45.20	-39.90	-0.00	-17.07	90.00	49.95
-30.20	-39.70	-0.00	-14.39	90.00	60.29
-0.20	-26.81	-0.00	-9.76	90.00	78.48
89.80	49.40	-0.00	-1.47	90.00	65.71
179.80	22.33	-0.00	-12.36	180.00	88.71
-150.20	-4.33	-0.00	-10.00	180.00	85.71
-135.20	-18.88	-0.00	-9.31	180.00	84.54
-120.20	-31.82	-0.00	-8.90	180.00	83.65
-90.20	-59.48	-0.00	-7.79	180.00	83.71
-0.20	-136.17	-0.00	0.59	180.00	84.91

Cuadro 7.2: Ángulos medidos con la segunda calibración y teóricos en las distintas posiciones

θ		φ		ψ	
ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido
-101.39	-102.65	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-71.39	-72.79	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-56.39	-58.60	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-41.39	-44.64	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-11.39	-15.33	-90.00	-90.00	0.00	0.00
78.61	65.13	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-101.39	-100.11	-0.00	-2.21	90.00	92.22
-71.39	-75.67	-0.00	-1.86	90.00	92.02
-56.39	-63.05	-0.00	-1.72	90.00	91.97
-41.39	-50.65	-0.00	-1.63	90.00	91.96
-11.39	-23.03	-0.00	-1.55	90.00	92.24
78.61	70.92	-0.00	-1.41	90.00	93.40
168.61	165.02	-0.00	-0.11	180.00	-179.33
-161.39	-165.54	-0.00	-0.63	180.00	-179.59
-146.39	-149.33	-0.00	-0.73	180.00	-179.78
-131.39	-134.53	-0.00	-0.72	180.00	179.94
-101.39	-102.08	-0.00	-0.57	180.00	179.84
-11.39	-16.00	-0.00	-0.02	180.00	179.66

Cuadro 7.3: Ángulos medidos con la primer calibración y teóricos en las distintas posiciones, asistido por el acelerómetro

θ		φ		ψ	
ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido
-101.39	-110.21	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-71.39	-77.27	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-56.39	-62.03	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-41.39	-47.03	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-11.39	-14.40	-90.00	-90.00	0.00	0.00
78.61	73.61	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-101.39	-108.27	-0.00	-2.21	90.00	92.22
-71.39	-80.63	-0.00	-1.86	90.00	92.02
-56.39	-66.41	-0.00	-1.72	90.00	91.97
-41.39	-52.67	-0.00	-1.63	90.00	91.96
-11.39	-23.42	-0.00	-1.55	90.00	92.24
78.61	66.18	-0.00	-1.41	90.00	93.40
168.61	165.14	-0.00	-0.11	180.00	-179.33
-161.39	-164.83	-0.00	-0.63	180.00	-179.59
-146.39	-149.40	-0.00	-0.73	180.00	-179.78
-131.39	-135.93	-0.00	-0.72	180.00	179.94
-101.39	-107.43	-0.00	-0.57	180.00	179.84
-11.39	-22.85	-0.00	-0.02	180.00	179.66

Cuadro 7.4: Ángulos medidos con la segunda calibración y teóricos en las distintas posiciones, asistido por el acelerómetro

CAPÍTULO 8

GPS - TEST 2

8.1. Objetivos

En el capítulo anterior se comenzó a analizar la performance del GPS. Se intentó reconstruir un polígono, y se analizó el error al estimar la posición de un punto fijo. En este capítulo se continúa dicho análisis, repitiendo el procedimiento, pero con un polígono más grande, y tiempo más largos para la estimación de la posición de un punto fijo.

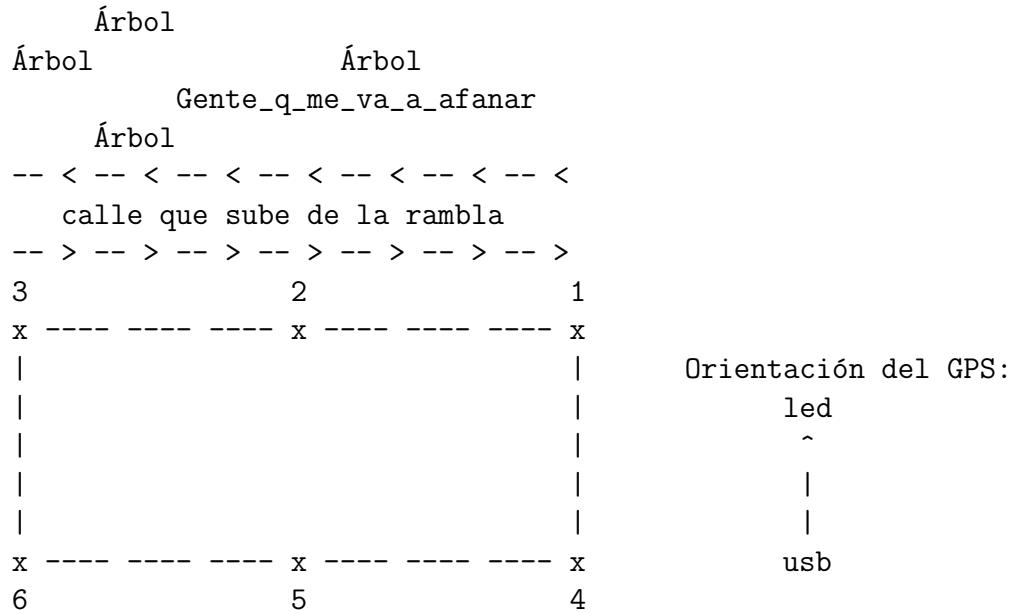
8.2. Materiales

- GPS.
- Laptop.
- Trípode (de fotografía).
- Cinta métrica, pintura y cuerda.

8.3. Procedimiento

En esta prueba se trata de obtener el error del GPS en el plano paralelo a la tierra, es decir, el error en latitud y longitud.

El experimento que se diseñó consiste en marcar un rectángulo sobre el suelo (pasto), utilizando 6 puntos, con la siguiente disposición:



Estacionamiento de la facultad

A diferencia del experimento de la sección 8.1, aquí todas líneas punteadas son de 6m de largo, en lugar de 1m. Resulta en un rectángulo de 6m por 12m.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Construir el rectángulo sobre un superficie plana.
 - Se utilizó pintura para marcar los vértices del triángulo.
 - Para trazar uno de los lados de 12 metros (puntos 1,2 y 3), se fijó una cuerda de 12 metros (con el punto medio marcado) a un punto, y se extendió (sin estirarla). El principio (1) y el final (3) de la cuerda son vértices del polígono, y el punto medio (2) es otro de los puntos de interés.
 - Para construir rectas perpendiculares se utilizó una cuerda de 6m, y otra de 8.5m¹. Uno de los extremos de la cuerda de 6 metros se fijó al 1, y uno de los extremos de la cuerda de 8.5m se fijó a 2. El punto donde ambas se intersectan corresponde a 4. Un procedimiento similar se siguió para determinar la ubicación de 5 y 6.
2. Medir, con un metro, las distancias entre todos los puntos.
3. Utilizar mínimos cuadrados para minimizar el error entre las distancias esperadas, y las experimentales. Esto puede llevar a trabajar con un polígono que **no** sea un rectángulo, pero el error será menor que el que resultaría de usar los valores teóricos.

¹Pitágoras: $8,5 \approx \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,4852\dots$

4. Fijar la altura y la orientación del GPS, y tomar medidas en cada uno de los puntos [1,2,3,4,5,6].
5. Tomar un punto como origen, y comparar la figura que resulta de los datos provenientes del GPS con las medidas tomadas con el metro.

En la figura 8.1a se observa el trípode que sostiene al GPS. El objetivo era tener el GPS a una altura fija, y separado del piso. Al nivel del piso los rebotes degradan seriamente la performance del GPS. La cuerda que marca el lado del polígono, junto con las patas del trípode, se utilizaron para fijar la orientación del GPS durante el experimento.



(a) Trípode de fotografía, con el GPS atado en lugar de la cámara..

(b) GPS amarrado al trípode.

Figura 8.1: GPS + Atril

8.3.1. Adquisición de datos

Para tomar datos se conectó el GPS, que manda información mediante USB-serie, al puerto USB de una computadora. En la computadora se utilizó el GPSD, un software open-source que hace de *daemon*, y se encarga de transformar lo que llega del GPS en una estructura de datos fácil de manejar en C.

El GPS emite sentencias NMEA a través de USB serie, a 38400bps. Trabaja con sentencias:

- GPGGA - *Global Positioning System Fix Data*: Información sobre la fecha, posición y datos relevantes sobre el *fix*.
- GPGSV - *Satellites in view*: Información sobre la cantidad de satélites detectados, y la calidad de la señal proveniente de cada uno.
- GPGSA - *DOP and active satellites*: Información sobre DOP² y satélites activos.
- GPRMC - *Recommended minimum specific GPS/Transit data*: Sentencia mínima recomendada, trae suficiente información como para poder trabajar con el GPS.
- GPVTG - *Track Made Good and Ground Speed*: Información sobre la dirección y la velocidad (**no** sobre la posición absoluta).

8.4. Geometría: DOP - *Dilution of precision*

El método que utiliza el GPS para determinar su ubicación consiste básicamente en:

1. Determinar la distancia r_i a cada satélite S_i , cuya posición es P_i .
2. Repetir el paso anterior para cada satélite disponible.
3. Intersecciar las “cáscaras” de las esferas de centros P_i y radios r_i .

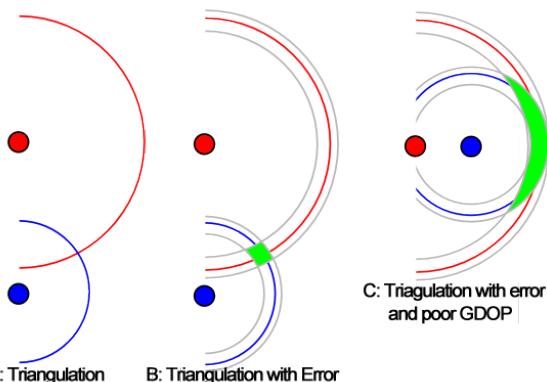


Figura 8.2: DOP en 2 dimensiones.

Las “cáscaras” de las esferas no serán de ancho despreciable, ya que hay un cierta incertidumbre asociado a los datos. Esto implica que la intersección será un volumen, en lugar de un punto. La geometría de la distribución de los satélites determinará el tamaño de este volumen, y por lo tanto la incertidumbre en la determinación de la posición. En la figura ??e muestra un ejemplo ilustrativo, en dos dimensiones.

El DOP es el cociente entre la exactitud de la ubicación y exactitud de la medida[?]:

$$\sigma = \sigma_o \cdot DOP$$

donde

- σ : Exactitud de la medida.

²Dilution of precision.

- σ_o : Exactitud de la posición.

Básicamente, el DOP representa la sensibilidad de localización frente a errores en las medidas, o sea, cuanto te vas a perder si te llega una medida equivocada. Cuanto más bajo sea el DOP, mejor. En la tabla 8.1 se muestra como interpretar valores típicos[?].

1	Ideal	Máxima exactitud posible.
1-2	Excelente	La exactitud a este nivel se considera suficiente para casi cualquier aplicación.
2-5	Bueno	Este nivel marca el mínimo apropiado para navegación.
5-10	Moderado	Las medidas se pueden utilizar, pero es recomendado buscar un lugar con cielo más abierto.
10-20	Regular	Solo se deben usar los datos para estimaciones de muy poca precisión.
>20	Malo	A este nivel, las exactitud de las medidas puede tener un error de hasta 300m, deben descartarse.

Cuadro 8.1: Interpretación de los valores de DOP.

El GPS envía información sobre:

- $HDOP$ - DOP horizontal:

$$HDOP = \sqrt{\sigma_{east}^2 + \sigma_{north}^2} \quad (8.1)$$

- $VDOP$ - DOP vertical:

$$VDOP = \sqrt{\sigma_{altitud}^2} \quad (8.2)$$

- $PDOP$ - DOP de la posición:

$$PDOP = \sqrt{\sigma_{east}^2 + \sigma_{north}^2 + \sigma_{altitud}^2} \quad (8.3)$$

Esta información se puede utilizar en el algoritmo de control, para ponderar los datos provenientes del GPS.

8.4.1. Verificación del polígono

Una vez construido el polígono, es de interés medir todas las diagonales (con la cinta métrica) por dos motivos:

- Verificar que no se cometieron errores.
- Hacer mínimos cuadrados con las medidas, de manera de obtener un polígono, que no tiene porqué ser (y en general no será) un rectángulo, sino algo similar a un rectángulo, más ajustado a la realidad.

Las medidas tomadas se resumen en la tabla 8.2, donde D12 representa la medida de la recta que une el punto 1 con el punto 2, en cm.

D12	D13	D14	D15	D16
603	1205	606	855	1345
D23	D24	D25	D26	D34
603	853	608	853	1344
D35	D36	D45	D46	D56
850	602	602	1202	603

Cuadro 8.2: Diagonales del polígono en cm.

Lectura: D24 representa la longitud (en cm) de la recta que une el punto 2 con el punto 4.

El polígono resultante se observa en la figura 8.3. El error relativo, es decir, el cociente entre las medidas de cada recta **D##** resultante de aplicar MC, y lo esperado en el polígono teórico, de 6m de lado, es:

- 9,51 % en el peor caso.
- 4,65 % en promedio.

Se considera que el error, siendo menor al 10 % en el peor caso, es aceptable.

En realidad se podría hacer una figura irregular cualquiera, y tomarlo en cuenta en el resto del experimento, pero complicaría la interpretación intuitiva de los resultados.

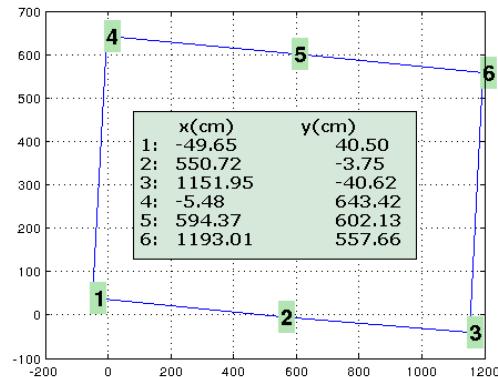


Figura 8.3: Polígono luego de MC.

8.4.2. Punto fijo - 10 minutos

Se tomaron datos durante 10 minutos (≈ 600 muestras) en cada uno de los vértices del polígono, con el objetivo de observar la estabilidad de la información proveniente del GPS.

En la figura 8.4 se muestran los datos luego de restar el promedio, o sea que se muestra el error respecto al valor promedio.

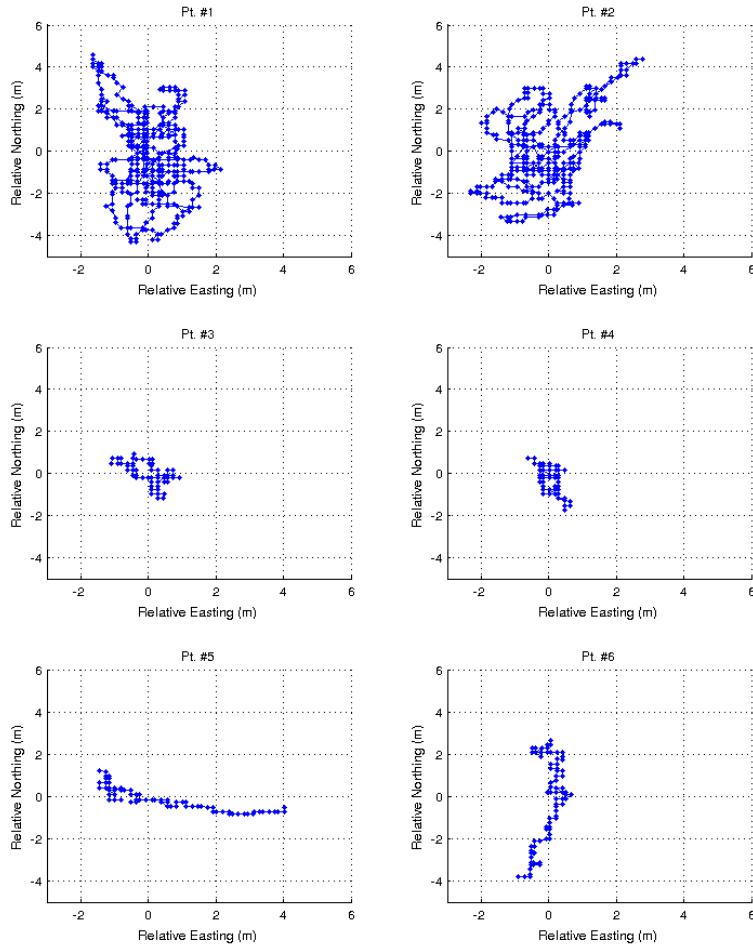


Figura 8.4: GPS quieto en cada punto del polígono, GPS orientado como se describe en 8.3 y se muestra en 8.1b.

Cabe destacar que en la figura 8.4 no parece haber la misma cantidad de muestras por punto, pese a que en el log habían aproximadamente la misma cantidad de datos por punto. Esto se debe a que a veces en el log se genera información repetida, es decir, el GPS envía sucesivamente la misma información, y la etiqueta como *información válida*. Esto se analiza con más detalle en la sección 8.8.

En la figura 8.5 se observan todas las gráficas de la figura 8.4, pero superpuestas.

Si el GPS fuese perfecto, entonces todas las muestras coincidirían con el promedio, y estarían ubicadas en el punto [0,0]. El círculo negro tiene 2.5m de radio, las muestras que caen fuera de él están a más de 2.5m del valor promedio. En la leyenda se muestra qué porcentaje de las muestras caen fuera del círculo.

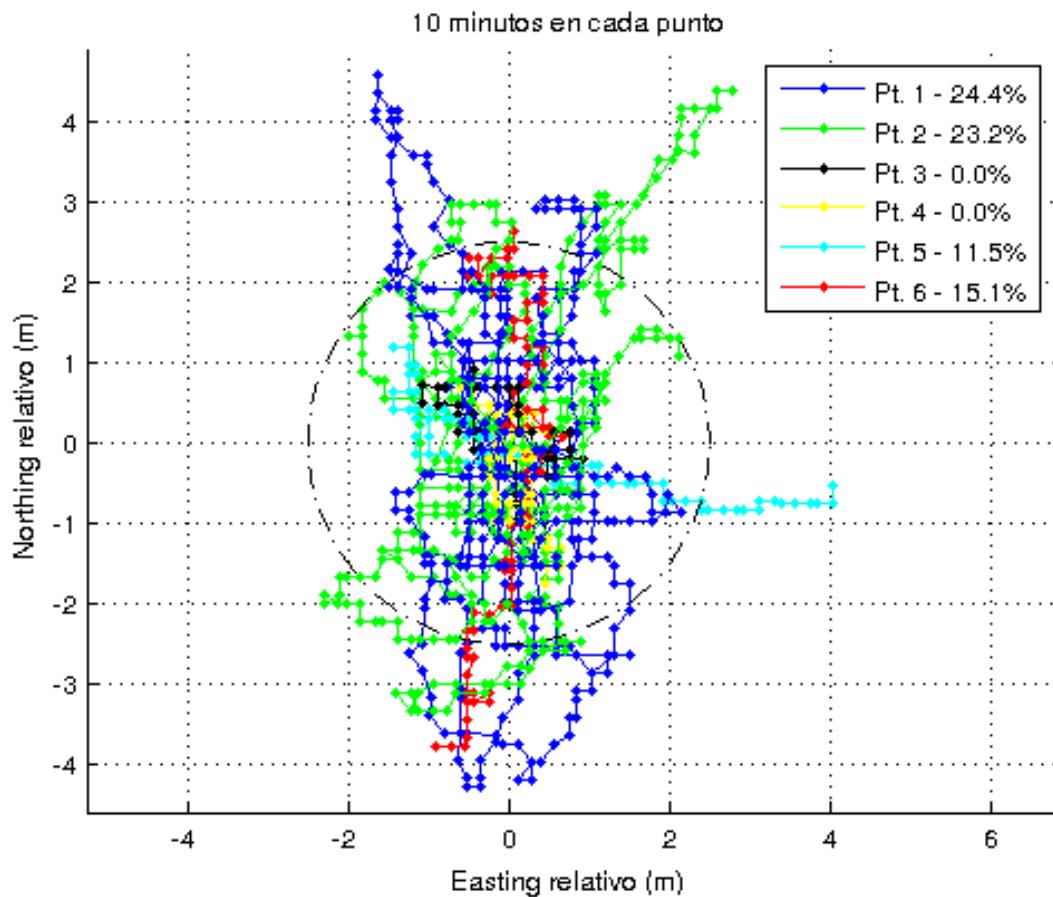


Figura 8.5: Error respecto al valor medio (Plots de 8.4 superpuestos). En la leyenda se muestran que porcentaje de muestras que caen a más de 2.5m del promedio.

8.4.3. Punto fijo - 2 minutos

Se repitió el experimento, tomando 2 minutos de muestras por punto. Se optó por tomar datos durante solamente 2 minutos para agilizar el experimento, y acercarse más a un tiempo razonable. Los resultados fueron similares a los que se obtuvieron con el experimento de 10 minutos.

Se orientó el GPS de 3 maneras distintas, siempre alineando el trípode con uno de los lados de 12m del rectángulo:

1. USB hacia la calle, LED hacia el estacionamiento, como en la figura 8.6b.
2. USB hacia la rambla, LED hacia el IIE (no hay figura)
3. Como en la figura 8.6a.
4. Nuevamente, USB hacia la calle, LED hacia el estacionamiento, como en la figura 8.6b.



(a) Orientación #3

(b) Orientación #1 y #4.

Figura 8.6: Fotos de algunas de las orientaciones del GPS en las pruebas de 2 minutos por punto.

Los resultados se observan en las siguientes figuras. Nuevamente, en la leyenda se muestra qué **porcentaje de las muestras caen a más de 2.5m del valor promedio**.

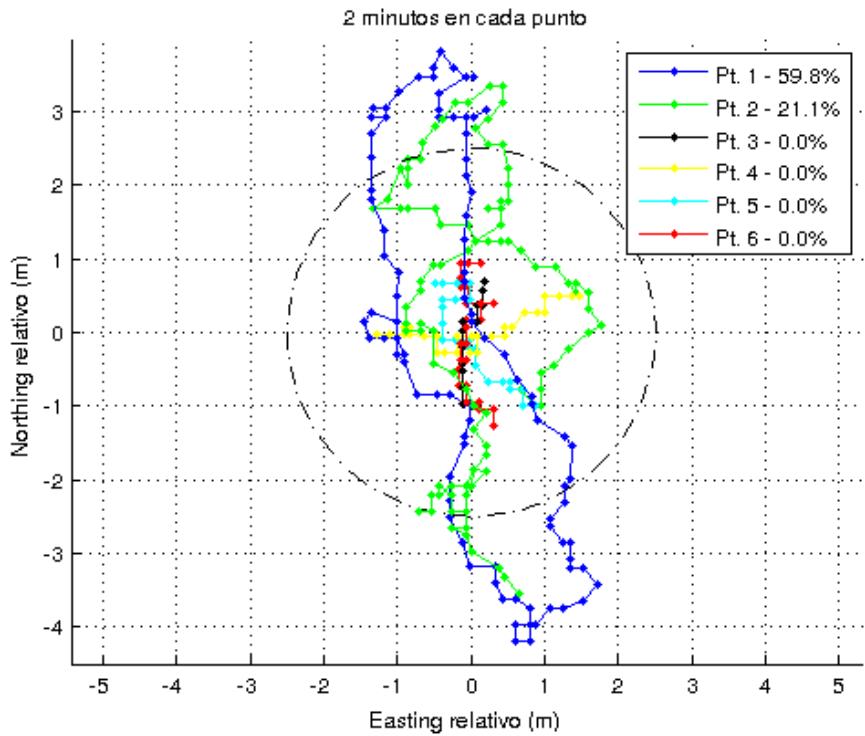


Figura 8.7: Orientación: 4.

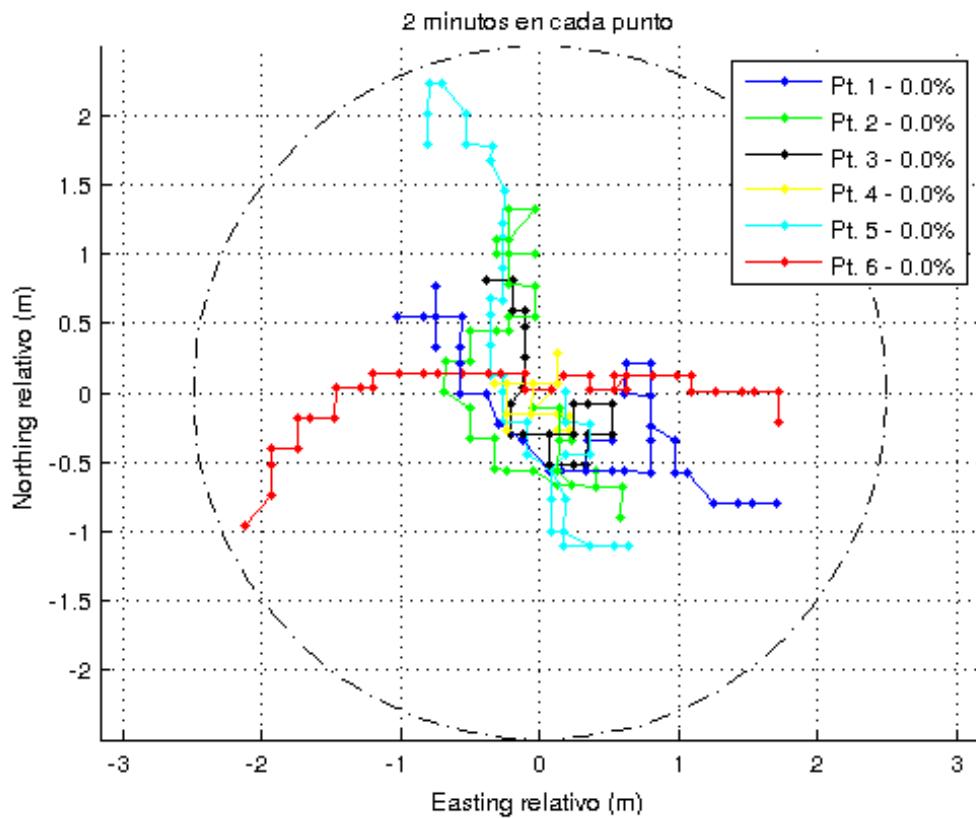


Figura 8.8: Orientación: 2.

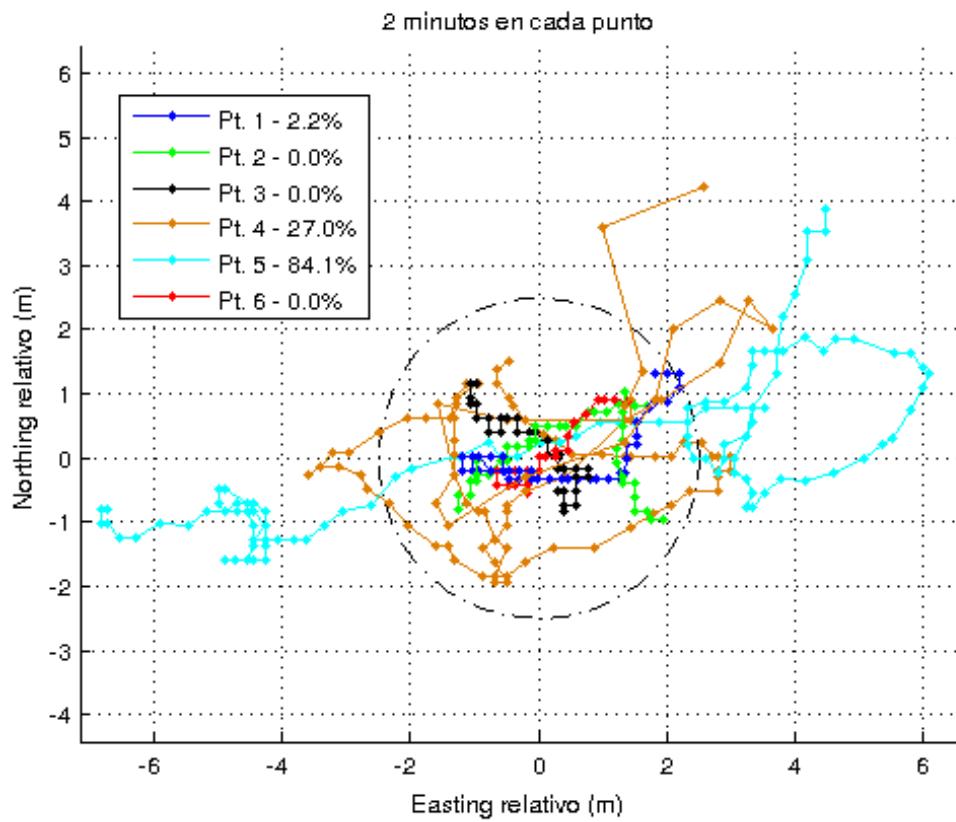


Figura 8.9: Orientación: 3.

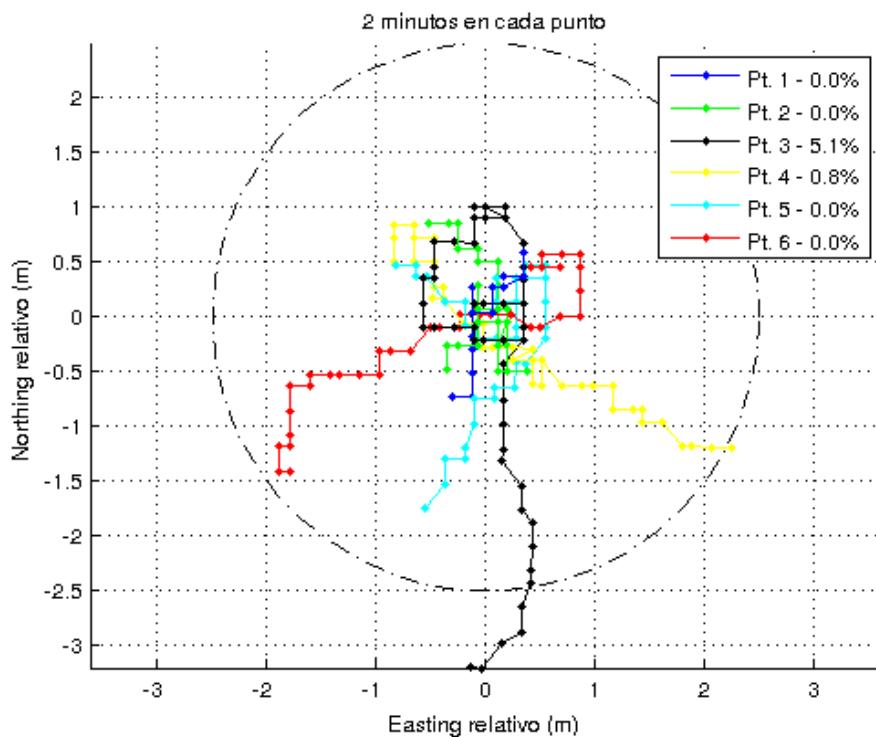


Figura 8.10: Orientación: 4

Punto fijo: Análisis

- Influencia de la cantidad de satélites disponibles

La teoría dice que con 4 satélites debería alcanzar para obtener un *fix 3D*, es decir, estimar la posición sobre la esfera terrestre, y la distancia (altura) a la misma. Se recomienda tener no menos de 6. Durante el experimento de la figura 8.9, en un momento el GPS perdió señal, y el número de satélites disponibles, que usualmente anda por los 9 o 10, pasó a ser 4. Los datos correspondientes se muestran en la figura 8.11. El trazo naranja, con un error de hasta 23 metros, corresponde a instantes donde la cantidad de satélites era entre 4 y 5. Luego de volver a 9 o 10 satélites, los datos vuelven a ser más razonables.

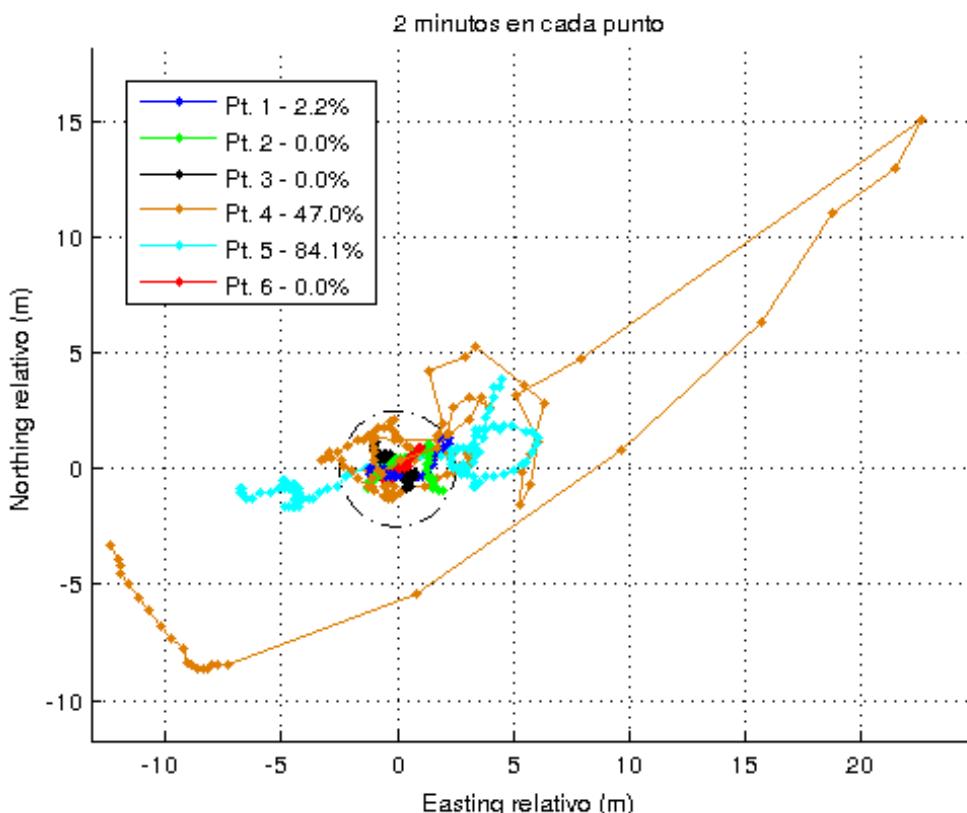


Figura 8.11: Datos con solamente 4 satélites. Orientación: 3.

En la figura 8.9 se observa el mismo log que en 8.11, pero luego de haber quitado las muestras correspondientes al período donde se deterioró la señal.

No se pudo encontrar una explicación para la mala calidad de las muestras correspondientes al punto 5 en la figura 8.9. La cantidad de satélites disponibles se mantuvo estable en 9 o 10 durante la adquisición de esos datos.

- Influencia de la orientación:

No parece haber una correlación directa entre resultados y la orientación del GPS, evidencia de esto son las figuras 8.10 y 8.7, que fueron tomadas con la misma orientación.

Resulta intuitivo suponer que existe, debido a que el GPS tiene una antena adentro. En la sección 8.4.3 se estudia un poco más este asunto.

Orientación

Para evaluar si existe una correlación entre la orientación y las medidas del GPS, se hizo el siguiente experimento:

1. Tomar datos durante 10 minutos con el GPS arriba del trípode, dos patas alineadas con una recta fija.
2. Rotar el trípode 120 grados en sentido horario (visto desde arriba), de manera que otro lado del triángulo que forman las patas del trípode quede alineado con la recta. Tomar datos durante 10 minutos.
3. Rotar y tomar datos nuevamente.

Los resultados del experimento se observan en la figura.

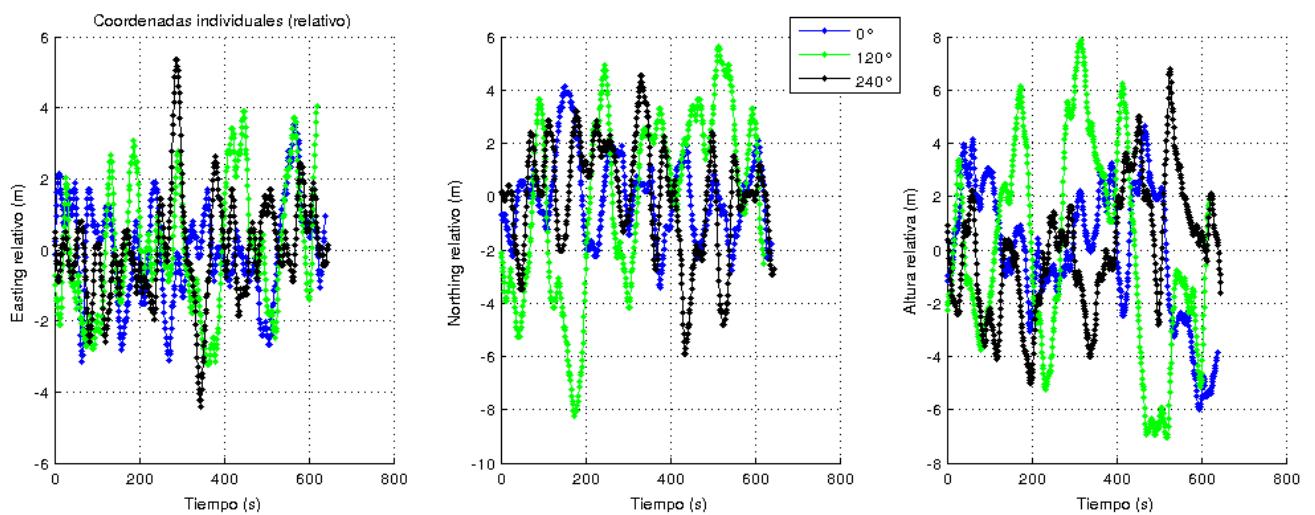


Figura 8.12: Datos rotando el GPS sobre un punto fijo.

Orientación - Conclusiones

No se encontró una correlación entre la orientación del GPS y el error en las medidas. El experimento se realizó con cielo abierto, con una buena geometría, en términos de distribución de satélites. Tal vez en situaciones de visibilidad limitada se podría observar una correlación, ya que si la dirección en la que la antena recibe mejor coincide con el lugar donde hay pocos satélites, entonces la cantidad de información sería menor/peor que en otras orientaciones.

Tener visibilidad limitada por obstáculos, o tener una mala geometría deteriora la performance del GPS. No es el objetivo de este informe evaluar la performance en ambientes complicados.

8.4.4. Polígono

En la figura 8.13, la línea en roja representa el polígono resultante de unir el promedio, en cada vértice, de las muestras tomadas durante de 10 minutos. En la figura 8.14 se dicho polígono, proyectado sobre una foto satelital³.

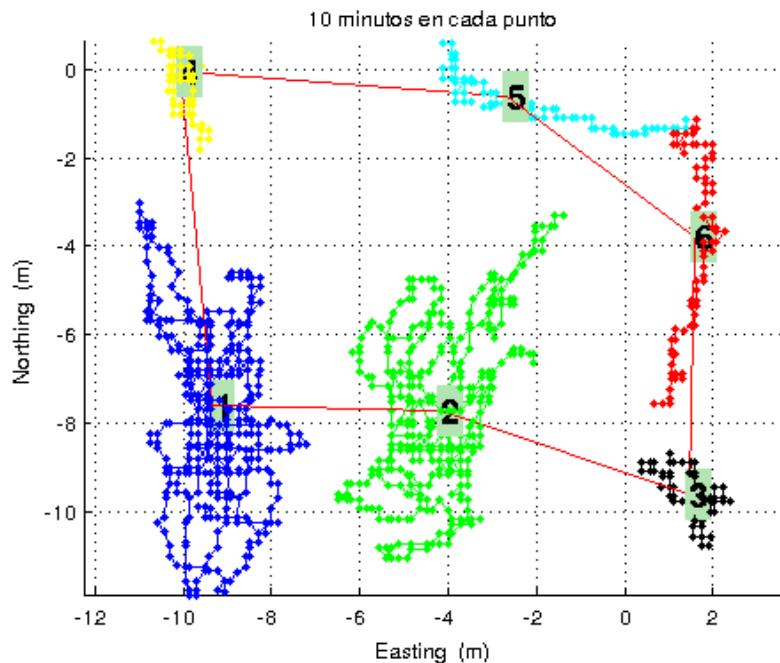


Figura 8.13: Polígono formado por los promedios de 10 minutos.

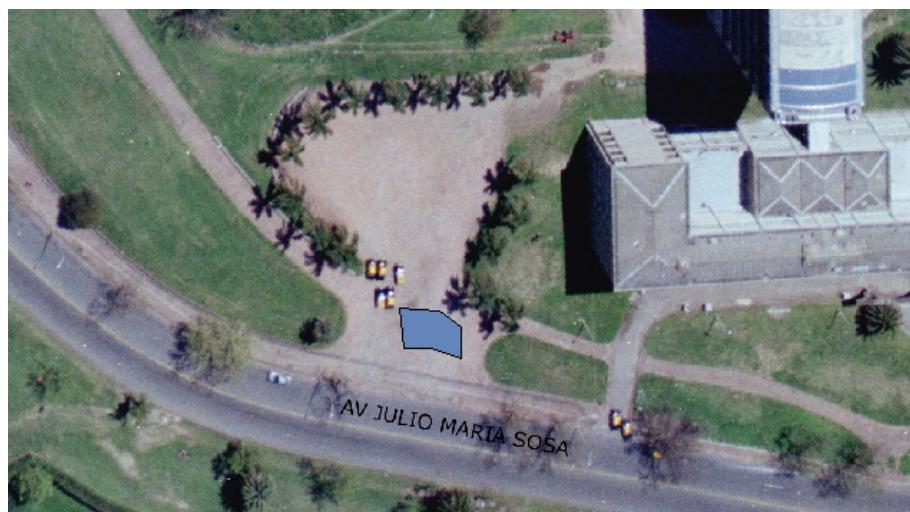


Figura 8.14: Proyección del polígono formado por los promedios de 10 minutos sobre una foto satelital.

En las siguientes figuras se observan los polígonos formados por los promedios de varias secuencias de 2 minutos por punto.

³El mapa y las fotos se obtuvieron de:
<http://sig.montevideo.gub.uy/mapas/mapa-principal>

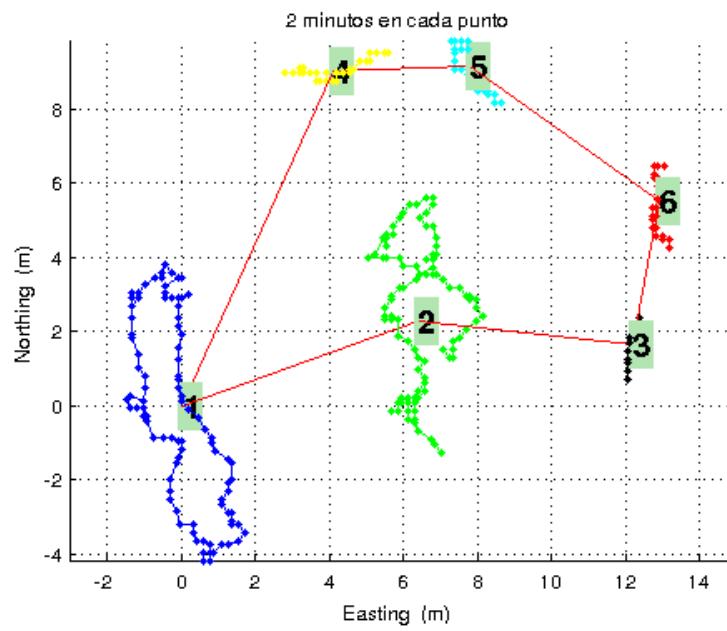


Figura 8.15: Orientación: 4.

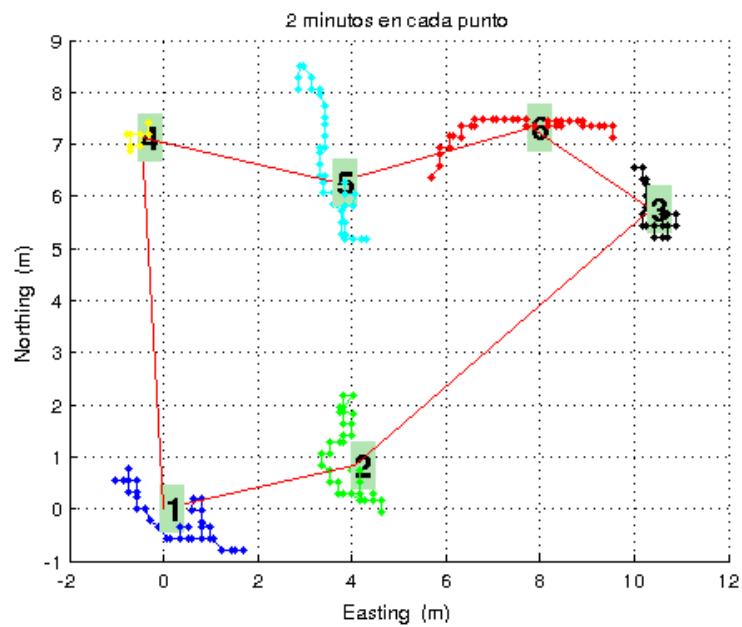


Figura 8.16: Orientación: 2.

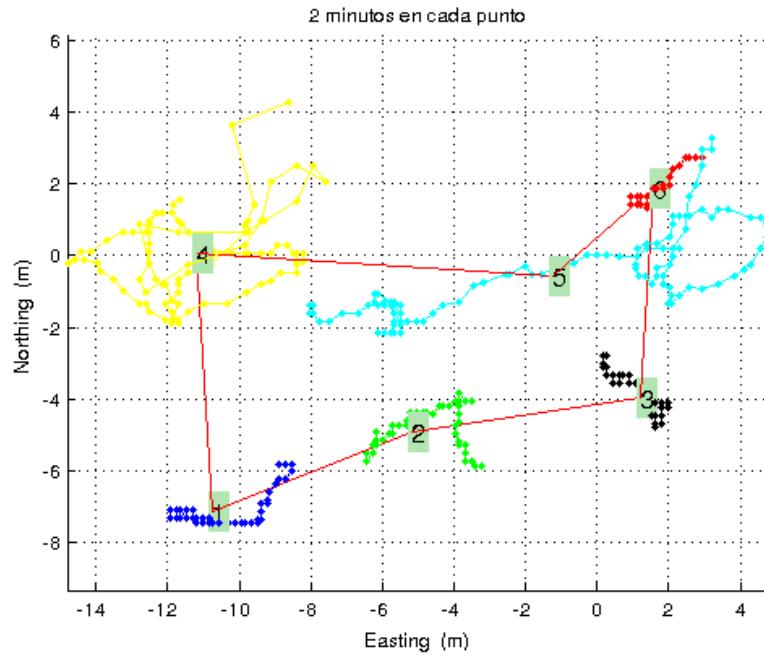


Figura 8.17: Orientación: 3.

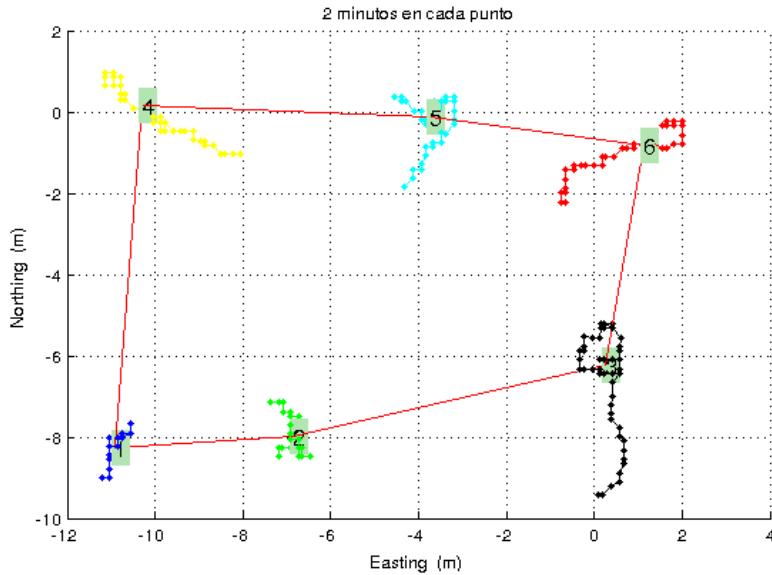


Figura 8.18: Orientación: 4

8.4.5. Polígono - Análisis

Dado que no se cuenta con una referencia absoluta, como podría serlo un GPS de alto nivel, no es posible hablar de error absoluto. De cualquier forma, con la información disponible es posible obtener un estimador del error típico en una distancia de X metros, donde X pertenece al conjunto de las medidas de las rectas en juego: $\{6; 8.5; 12; 13.45\}$ metros. Se comparan las distancias entre los vértices del polígono experimental, con las distancias entre las coordenadas resultantes de la aplicación de mínimos cuadrados a las medidas efectuadas con el metro (ver la sección 8.4.1).

El error relativo para cada recta resulta:

$$E = \left| \|\hat{P}_i - \hat{P}_j\| - D_{ij} \right| \quad (8.4)$$

Donde:

- \hat{P}_i es la dupla $\{x, y\}$, coordenadas experimentales del i-ésimo vértice del polígono.
- D_{ij} es la distancia entre el i-ésimo y el j-ésimo vértice, resultado de la aplicación de MC en la sección 8.4.1.

Para cada set de estimaciones de la posición de los vértices del polígono⁴, se utilizó la fórmula 8.4, separando los datos según el largo esperado de la recta⁵. Resulta un set de valores del “*error al estimar la distancia entre dos puntos que deberían estar a X metros*”, para cada valor de X.

Los resultados se resumen en la tabla 8.3.

Largo Teo. (cm)	μ (cm)	σ (cm)	$\frac{\mu+2\sigma}{\text{Largo Teo.}}$	# Muestras
600	372.15	169.39	118 %	35
848	493.6	165.79	97 %	20
1200	429.67	212.81	71 %	10
1341	614.73	166.71	70 %	10

Cuadro 8.3

En la tabla 8.3 se observa, cómo es de esperarse, que el error relativo disminuye al intentar estimar distancias mayores. Asumiendo que el error en la estimación de la posición de cada punto A, B es similar, entonces para cometer un error de P % en la estimación de una distancia X (medida con el metro) entre A y B, el GPS debe equivocarse en $\frac{P}{100}X\frac{1}{2}$ en la estimación de la posición de A y B.

Resulta que el error en la estimación de la posición de un punto es de aproximadamente 4.5m. Esto es coherente con los resultados sobre la estimación de un punto fijo. Si las medidas para la posición de un punto fijo en general caen dentro de un círculo de 2.5m de radio, entonces, asumiendo que la posición real cae dentro del círculo, en un peor caso se tendría un error de 5m.

Nuevamente, no se cuenta con información sobre la posición real, pero parece razonable asumir que la ubicación real es cercana al promedio de los datos provenientes del GPS. Evidencia a favor de esto se observa en la figura 8.14. Se trata este tema un poco más en la sección 8.9.

⁴Un set de valores $\hat{P}_1^1, \hat{P}_2^1, \hat{P}_3^1, \hat{P}_4^1, \hat{P}_5^1, \hat{P}_6^1$

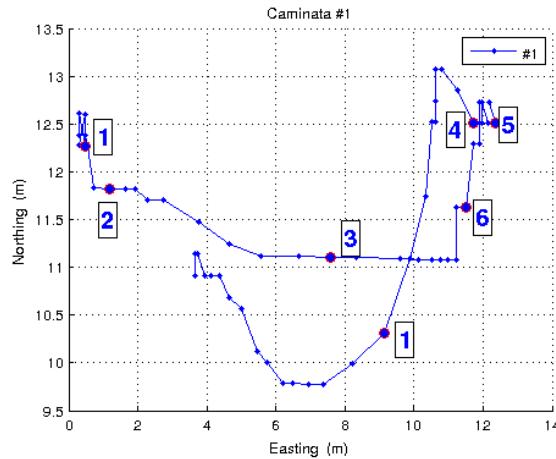
⁵Valores posibles: {6;8.5;12;13.45}

8.5. Caminata por el borde del polígono

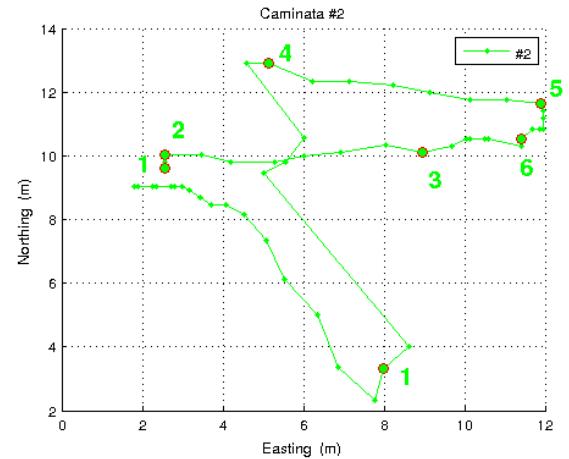
Para simular una situación más parecida a la que se tendrá con el GPS montado sobre el cuadricóptero, se colocó el trípode con el GPS en un mochila, y se procedió a recorrer el polígono con con la mochila puesta.

Los errores en la medida de un punto fijo hacen pensar que sería posible que la trayectoria determinada por el GPS luego de este experimento fuese algo parecido a un rectángulo.

En las figuras siguientes se observan los datos tomados durante 3 caminatas siguiendo el contorno del polígono, siguiendo la secuencia 1-2-3-6-5-4-1⁶. Se empezó a loguear datos en el punto 1, y se terminó nuevamente en el punto 1.



(a) Caminata #1



(b) Caminata #2

8.5.1. Caminata - Análisis

Las gráficas de las caminatas a primera vista son muy desalentadoras. Se observa un error que parece ser muy significativo, la trayectoria no se parece en nada a un rectángulo. Un análisis más detallado de los resultados revela que la performance del GPS es acorde a los esperado según las pruebas de las secciones anteriores.

La posición parece tender a estabilizarse una vez que se llega al destino final, el punto 1. Ahí se continuó logueando datos por unos 20 segundos. En la figura 8.19b la posición final parece tener un drift que se aleja de la posición inicial, en lugar de acercarse. No se encontró una justificación para este comportamiento, pero es similar al observado para puntos fijos, por lo que no se le prestó especial atención.

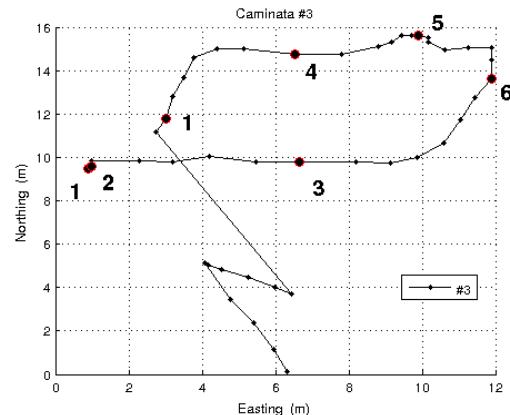


Figura 8.19: Caminata #3

⁶Notar que **no** se recorre en el mismo orden en el que se numeran los puntos del rectángulo

8.6. Error en altura

Para determinar el error la información sobre la altura que provee el GPS, se diseñó un experimento, que consiste en tomar medidas en una perpendicular a la esfera terrestre, a 4 alturas diferentes: 0m, 1m, 2m y 3m respecto al suelo.

En la primera etapa del experimento, se mantuvo el GPS quieto en cada uno de los niveles, y se tomaron muestras durante aproximadamente 60 segundos. El objetivo de esta etapa era verificar si era viable el experimento.

Se colocó una escalera en el medio del estacionamiento de atrás de la Facultad de Ingeniería, se ató un piolín con marcas cada 1 metro, y una plomada en la punta para mantenerlo tenso y vertical.

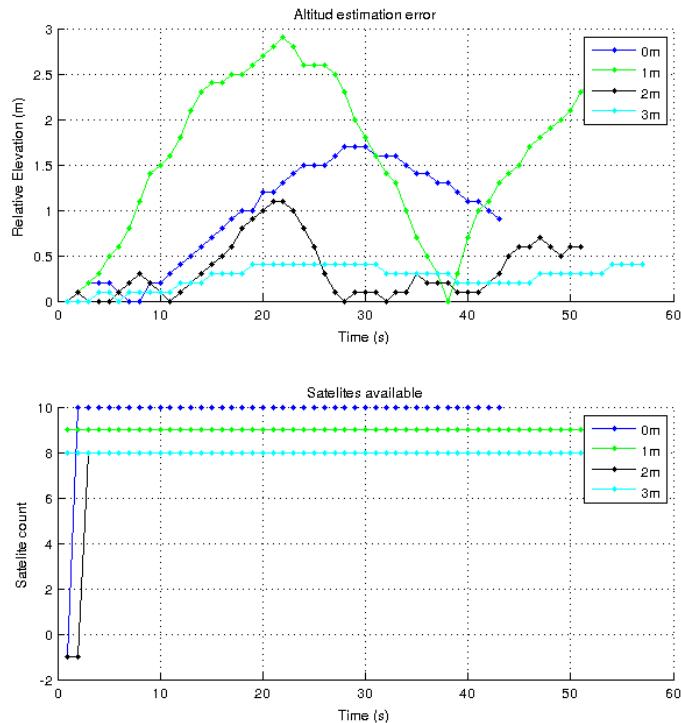


Figura 8.20: Variación de la altura determinada por el GPS a distintas alturas.

En la figura 8.20 se observan los resultados del experimento. Es de esperarse que el error sea mayor al estar apoyado sobre el suelo, ya que los rebotes (*multipath*) pueden deteriorar el sistema. El error a 1m de altura es mayor al que se obtuvo con el GPS en el suelo, una posible explicación para esto sería que el GPS estaba muy cerca de la escalera metálica, lo cual podría introducir una cantidad significativa de rebotes.

Los resultados de este experimento llevan a pensar que el GPS da información estable si se encuentra a al menos 2m del suelo. Esto no parece ser un problema, ya que el cuadricóptero volará a más de 2m de altura.

8.7. Tiempo de *warmup*

El tiempo que demora el GPS en adquirir un *fix* depende de si estaba frío, o si estaba andando previamente.

- **Frío:** Aproximadamente 40 segundos.
- **Caliente:** Entre 3 y 5 segundos.

Esto implicaría que al prender el cuadricóptero, habría que esperar unos 40 segundos para obtener señal del GPS, y que si por algún motivo se pierde la conexión con el GPS, habrá que esperar entre 3 y 5 segundo antes de contar con datos útiles nuevamente.

8.8. Tasa de muestreo

El GPS bajo funcionamiento normal trabaja a 1Hz. Se observó que estando quieto, a veces repite información, y la etiqueta como “válida”. Se observó este comportamiento durante los experimentos de punto fijo, llegando a pasar 30 segundos registrando exactamente la misma información.

Se compararon los datos crudos provenientes del GPS con los que devuelve el GPSD, y se concluyó que el GPSD **no** es responsable de la repetición de datos, es decir, no es un problema de software, sino que el GPS es el que a veces repite datos.

Al loguear trayectorias de movimiento permanente, como un recorrido en bicicleta de 15 minutos, no se observó más de 4 segundo de corrido de datos repetidos.

No parece razonable que el cálculo de la posición dé *exactamente* lo mismo durante varias medidas sucesivas, probablemente se trate de un problema interno del GPS.

Para enfrentar este problema, lo más razonable parece ser que el algoritmo que lee datos del GPS ignore datos repetidos.

8.9. Posición Absoluta

No se cuenta con fuente de información que nos permite saber exactamente donde estaba el GPS al momento de tomar datos. Se podría haber usado un GPS de mejor calidad como referencia, aunque la performance de los GPS comerciales de un costo razonable no suele ser mucho mejor que la que se obtuvo en los experimentos realizados.

Se realizaron varios experimentos para analizar si la ubicación que daba el GPS se correspondía con la realidad, ya que algunos GPSs a veces dan un error constante de varios metros, y de ser el caso, se podría compensar este problema una vez detectado.

Sobre un mapa de Montevideo, se graficaron trayectorias conocidas, con el objetivo de verificar que los datos provenientes del GPS eran “razonables”.

No se observó un offset evidente y constante, por lo que se asume el GPS **no** introduce un offset, o por lo menos no una constante, que se pueda compensar corriendo todos los datos por una cantidad fija.

En la figura 8.21 se observa una trayectoria realizada en bicicleta, con el GPS colocado sobre el trípode, asomando de una mochila. El recorrido fue hacia el sur-oeste, sobre la senda derecha, contra el lado derecho (cerca del cordón). No se observa un offset constante. Se analizaron otras figuras, y se llegaron a conclusiones similares.

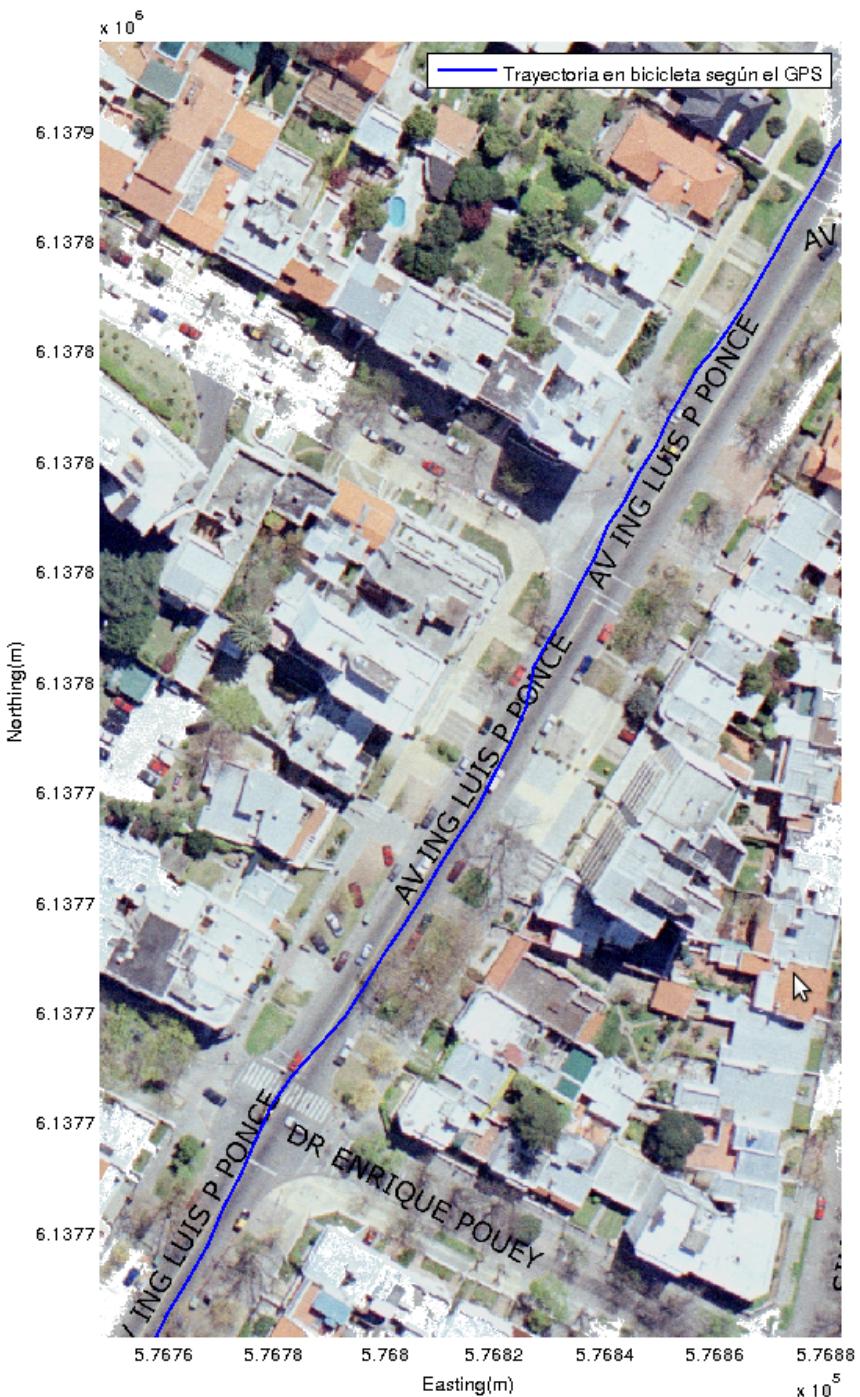


Figura 8.21: Recorrido en bicicleta.

8.10. Conclusiones

Los siguientes items servirán de guía para la utilización del GPS como instrumento de navegación:

- **Error en las medidas:** Bajo las condiciones anteriores, se concluye que es razonable asumir que las medidas del GPS tienen un **error menor a 5m**. Esto es un poco menor a las especificaciones dadas por el fabricante del GPS, 5m *CEP*⁷. Es de esperarse que la performance se reduzca al utilizar el GPS en un entorno más agresivo, como el que resultará al colocar el GPS sobre el cuadricóptero, donde estará sujeto a interferencia electromagnética de los motores, vibraciones, etc.
- **Visibilidad:** Es importante asegurar buena visibilidad, la performance del GPS se reduce drásticamente si pierde satélites.
- **Promedios:** Promedios de 2 minutos son suficientes para reducir el error a 2.5m, con una probabilidad del 75 %.
- **Resolución:** El GPS **no** es adecuado para tareas de navegación con restricciones del orden del metro, pero sí para distancias del orden de decenas de metros.
- **Tasa de muestreo:** El GPS normalmente muestrea a **1Hz**. Cabe destacar que debe ignorarse información repetida (muestras sucesivas que sea idénticas).
- **Error en altura:** El GPS **no** es adecuado para determinar la elevación durante el aterrizaje/despegue, ya que a menos de 2m del piso, la estimación de la elevación es muy mala. Será necesario otro sensor (sensor de presión, IR, etc) para asistir durante el despegue/aterrizaje.
- **Tiempo de fix:** En frío demora alrededor de 40 segundos, en caliente entre 3 y 5 segundos.

Por último, cabe destacar que los resultados de este informe dan una idea de la performance del GPS en condiciones “ideales”. Será importante analizar el efecto de las vibraciones y la interferencia electromagnética que introducirá la presencia del cuadricóptero, de manera de ajustar los márgenes de error al contexto en el que se utilizará el GPS.

⁷CEP de Xm: Garantiza que el 50 % de la muestras caerán en un círculo de radio X y centro el promedio de las muestras.

Parte IV

Ingeniería inversa

CAPÍTULO 9

INGENIERÍA INVERSA

El cuadricóptero adquirido resuelve la comunicación entre los controladores de los motores (**ESCs**) y el microprocesador mediante el protocolo **i²c**.

Para el presente proyecto resulta de vital importancia conocer dicho protocolo, ya que se utilizará otro microprocesador que deberá comandar a esos mismos ESCs, supliendo el trabajo del anterior. Es entonces imprescindible conocer al detalle el funcionamiento de este protocolo, para luego poder reproducirlo.

Dado que no se cuenta con la colaboración de los fabricantes, y toda la información parece ser privativa, no pudiendo conseguir dato alguno de su implementación, es necesario realizar un proceso de ingeniería inversa para poder analizar, decodificar, entender y reproducir el protocolo existente. Dicho proceso de ingeniería inversa se realiza utilizando el hardware existente del cuadricóptero comercial adquirido y un analizador lógico¹ que es capaz de leer e interpretar las líneas del bus i^2c sin intervenir en las mismas.

Antes de presentar los resultados obtenidos en el proceso, se realiza una breve introducción al protocolo i^2c y se presenta en la figura 9.1 la definición de los ejes a utilizar, lo cual será de utilidad más adelante.



Figura 9.1: Definición de ejes

¹ChronoVu

9.1. Introducción al protocolo i^2c

El bus i^2c es un bus de comunicaciones serie. Su nombre viene de *Inter-Integrated Circuit* (Circuitos Inter-Integrados).

Utiliza dos líneas para transmitir la información: una para los datos y otra para la señal de reloj. Además será necesaria una tercera línea de tierra, como referencia.

En la imagen ² se muestra un diagrama de un circuito equivalente simplificado de la conexión i^2c entre 2 dispositivos.

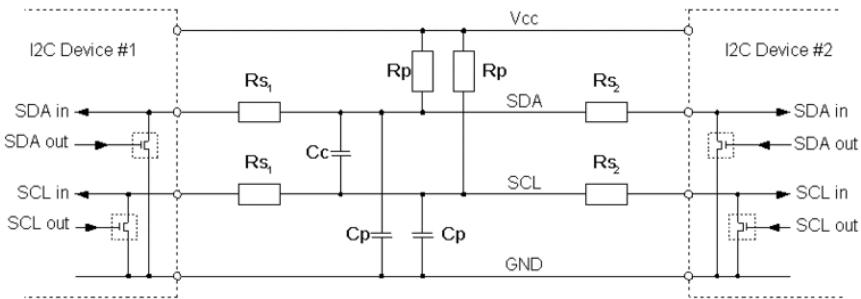


Figura 9.2: Conexión i^2c .

donde:

Vcc	Voltaje de entrada, típicamente varía entre 1.2 V y 5.5 V
GND	Tierra común
SDA	Línea serial de datos
SCL	Línea serial de reloj
R_p	Resistencia de "Pull-up"
R_s	Resistencia serie
C_p	Capacitancia del cable
C_c	Capacitancia de canal cruzado

Las líneas **SDA** y **SCL** son de drenador abierto, lo que significa que tanto el maestro como los esclavos solamente pueden conducir a nivel bajo estas líneas o dejarlos abiertos. Si ningún dispositivo i^2c está conduciendo hacia abajo la línea, la resistencia de *pull-up* R_p se encarga de conducir la línea a V_{cc} .

Cada dispositivo tiene asignada una dirección que lo identifica. Para establecer una comunicación la secuencia típica empieza por el maestro enviando una secuencia de comienzo de conexión, seguida de la dirección del esclavo con el cual desea comunicarse. Seguidamente el maestro envía un bit que determina si la acción que desea realizar es escritura o lectura, a lo que el esclavo correspondiente responde con un bit de *acknowledge* (**Ack**). Luego el maestro envía la dirección de memoria interna del esclavo donde debe ser almacenada la información enviada, y por último envía los datos. Para finalizar la conexión, el maestro envía una secuencia de fin de conexión.

²Imagen tomada de www.i2c-bus.org

9.2. Pruebas en régimen

Como se dijo anteriormente, para realizar el proceso de ingeniería inversa se utilizó el cuadricóptero y un analizador lógico. La forma de operar es enviar comandos conocidos con el control remoto y analizar los datos que se cursan en las líneas del bus. En la figura 9.3 se muestra una foto del proceso descripto.



Figura 9.3: Proceso de lectura del bus.

Al realizar este proceso se puede observar que se repiten cada $2ms$ bloques similares al mostrado en la figura 9.4.

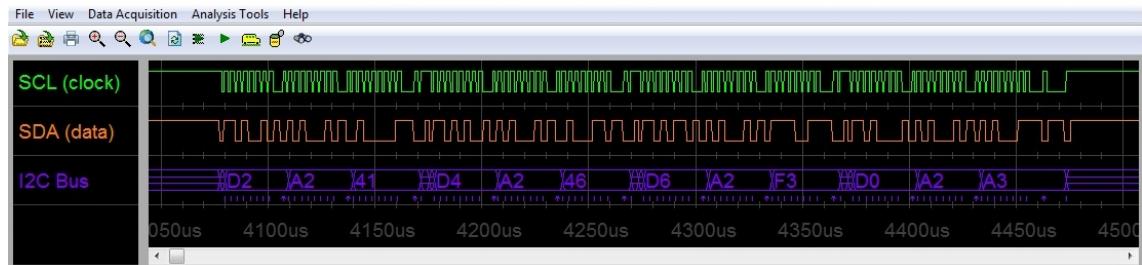


Figura 9.4: Bloque de transmisión i^2c

Rápidamente, visto lo anterior, se puede deducir que hay 4 esclavos correspondientes a los 4 ESC's de los 4 motores, cuyas direcciones en hexadecimal son **D0**, **D2**, **D4** y **D6**. La dirección de la memoria interna de los esclavos donde se almacenan los datos que envía el maestro es, en todos los casos **A2**. Además el maestro envía un tercer conjunto de datos que refiere, de alguna manera, a la velocidad con la que debe girar cada motor. Este conjunto de órdenes, agrupadas por bloques como el que se muestra en la figura 9.4, se repite periódicamente, indicando la velocidad con la que debe girar cada motor.

Para comprender las pruebas realizadas es importante dejar en claro algunos aspectos previos. En la figura 9.5 se muestra el transmisor utilizado para enviar comandos al cuadricóptero, un **Walkera WK-2801** y se indican los nombres de los mandos más importantes del mismo.



Figura 9.5: Transmisor

Al mover el mando de la izquierda (**Elev/Rudder**) en la dirección vertical (**Elev**) se logra que el cuadricóptero se eleve verticalmente, dando igual potencia a todos los motores, mientras que al moverlo en la dirección horizontal, el cuadricóptero presenta un movimiento de rotación según su eje vertical (que pasa por el centro).

Al mover el mando de la derecha (**Throttle/Aile**) en la dirección horizontal (**Aile**) y vertical (**Throttle**), se logran movimientos de rotación según los ejes horizontales x e y del cuadricóptero. Las definiciones de los ejes se pueden ver en la figura 9.1.

Se analizan las siguientes situaciones:

Id	Elev	Rudder	Aile	Throttle	Movimiento
0	atrás ³	medio	medio	medio	idle
1	medio	medio	medio	medio	vertical hacia arriba con aceleración constante
2	adelante	medio	medio	medio	vertical hacia arriba con aceleración constante
3	medio	izquierda	medio	medio	giro según eje z
4	medio	derecha	medio	medio	giro según eje $-z$
5	medio	medio	izquierda	medio	giro según eje $-x$
6	medio	medio	derecha	medio	giro según eje x
7	medio	medio	medio	atrás	giro según eje $-y$
8	medio	medio	medio	adelante	giro según eje y

Cuadro 9.1: Pruebas realizadas

Se realiza un análisis de los resultados obtenidos para cada motor, graficando el contenido del byte de datos que se le transmite a cada motor. Se obtienen representaciones como la mostrada en la figura 9.6

En la figura 9.6 se puede observar que a los 4 motores les llega un byte con el valor promedio en 50, el cual corresponde a la mínima potencia entregada a los motores para encenderlos.

Haciendo un análisis similar con el resto de las pruebas detalladas en la tabla 9.1 se construye la tabla 9.2 donde se muestran los valores enviados a cada motor en promedio en todas las pruebas.

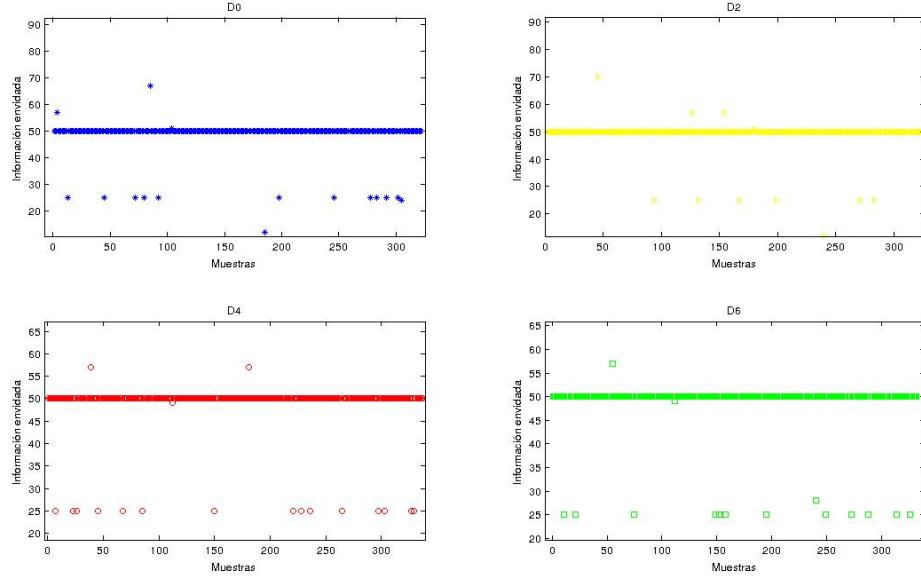


Figura 9.6: Prueba N° 0

Prueba	Valor promedio				Movimiento
	D0	D2	D4	D6	
0	50	50	50	50	Idle
1	80	140	180	140	$a_z = cte \neq 0$
2	180	220	250	240	$a_z = cte \neq 0$
3	160	70	60	250	giro según eje z
4	50	200	200	100	giro según eje $-z$
5	250	160	140	50	giro según eje $-x$
6	50	160	150	250	giro según eje x
7	90	50	250	160	giro según eje $-y$
8	110	250	50	100	giro según eje y

Cuadro 9.2: Resumen de los resultados obtenidos

De dicha tabla se pueden sacar algunas conclusiones que se analizarán en la sección 9.5;

9.3. Prueba de arranque

En esta sección se analiza la secuencia de arranque del cuadricóptero, para obtener conclusiones sobre la misma. Se parte con la palanca de elevación al mínimo y se procede a moverla para hacer arrancar los motores.

Mientras la palanca de elevación se mantiene al mínimo, se le envía el valor 0 a los cuatro motores. Al mover la palanca, luego de un *tiempo muerto* donde las líneas quedan inactivas, se les empieza a mandar el valor correspondiente a cada motor, como se puede ver en la figura 9.7.

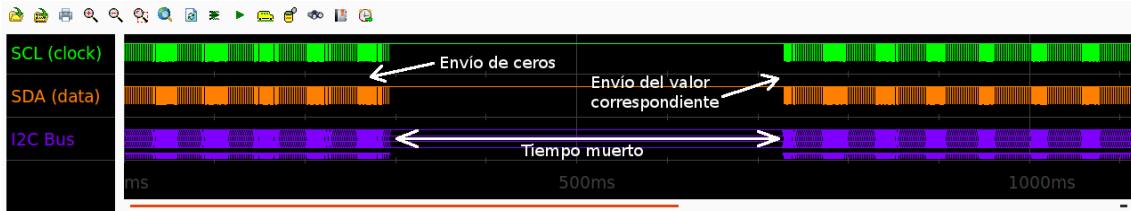
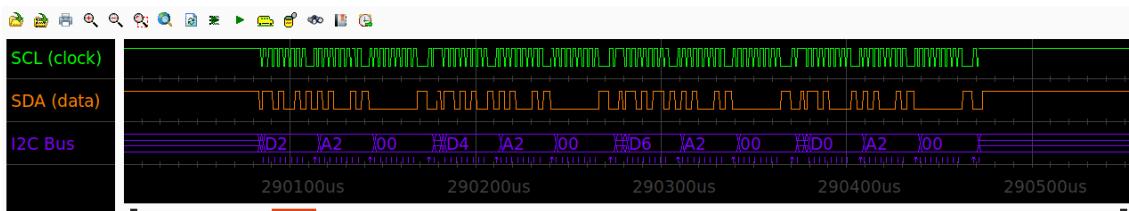
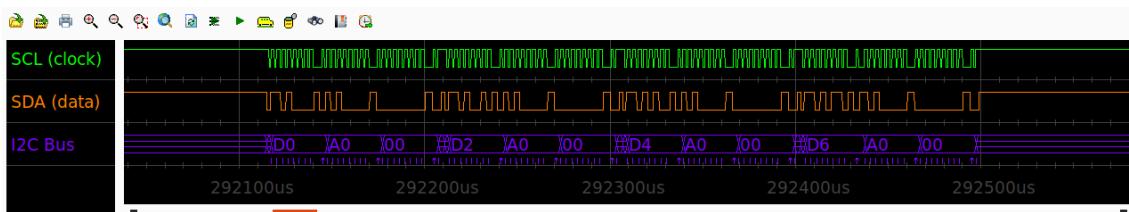


Figura 9.7: Arranque

Observando más detenidamente los comandos enviados se pueden sacar algunas conclusiones importantes. En la gran mayoría de los casos se envían los comandos en el orden $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$ y se guardan en el registro 0xA2 del esclavo. Pero se puede observar una importante diferencia en la el último comando que se manda a cada motor antes de arrancar, es decir, el último comando en la tanda de ceros mostrada en la figura 9.7. En la figura 9.8a se muestra una tanda regular de ceros y en la figura 9.8b se muestra la última tanda de ceros mencionada.



(a) Tanda normal de ceros



(b) Última tanda de ceros

Figura 9.8: Envío de ceros

Se observan 2 claras diferencias:

- **El orden en el que se envían datos a los motores no es mismo** que el anterior. En este caso el orden es: $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$.
- **El registro en el que se escriben los datos es 0xA0**

Dichas diferencias se pueden observar claramente al graficar todos los datos obtenidos, como se muestra en la figura 9.9. Se grafica para cada motor el valor que le llega (figura 9.9a) y el registro donde el valor es escrito (figura 9.9b). Al analizar los resultados gráficamente resulta evidente el cambio en el registro al terminar de mandar los ceros. En la figura 9.9a se puede observar que el último cero que se manda a los motores, se manda alrededor de la muestra 150. Analizando la figura 9.9b es clarísimo que alrededor de la muestra 150, el registro al que se envían los comandos cambia al valor 160 (0xA0), tal como se había observado anteriormente.

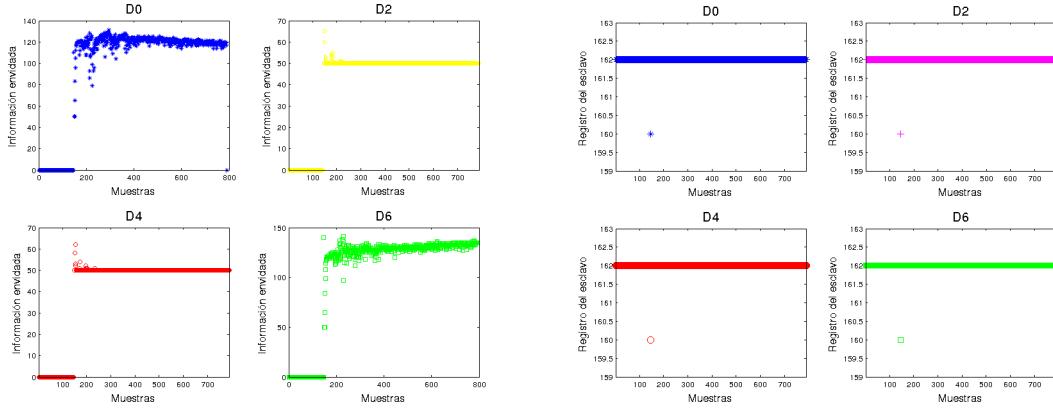


Figura 9.9: Arranque

9.4. Prueba de frenado

Se procede del mismo modo que en la prueba anterior (sección 9.3), analizando los comandos enviados a los motores a la hora de apagarlos. Se realiza una prueba análoga a la anterior partiendo de los motores funcionando y bajando al mínimo la palanca de elevación, causando que estos se detengan.

Una vez que se lleva la palanca de elevación al mínimo, los motores se apagan y se permanece enviando ceros a los motores en el orden $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$. Se pueden sacar algunas conclusiones importantes de la última tanda de valores distintos de cero enviados, mostrada en la figura 9.10:

- El orden en el que se envían datos es $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$
- El registro en el que se escriben los datos es 0xA1

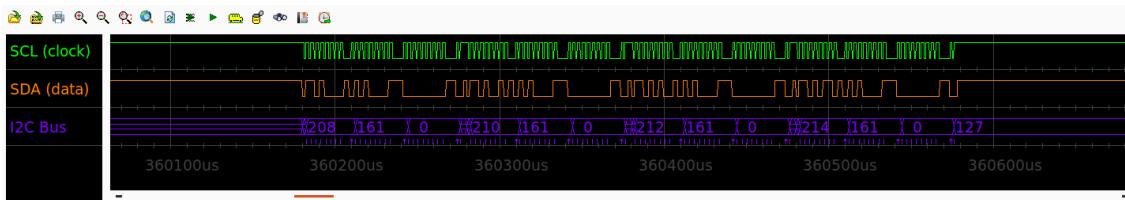
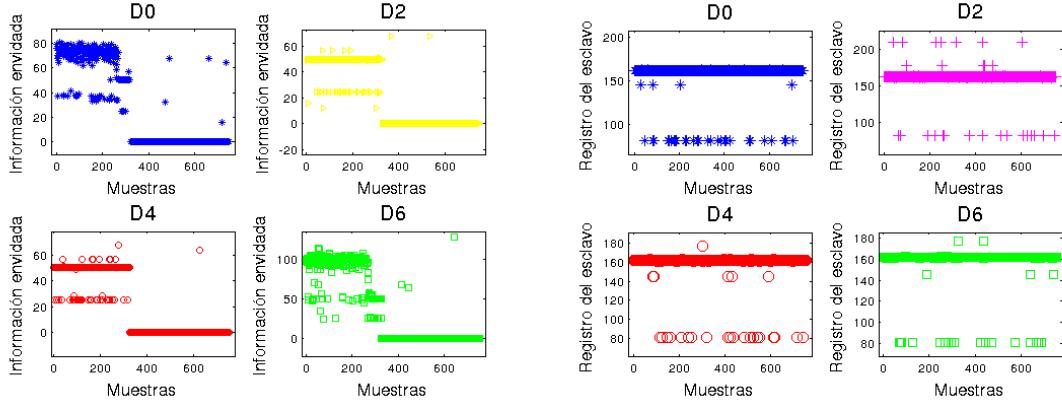


Figura 9.10: Frenado

Se presenta también un análisis gráfico en la figura 9.11. En este caso, a diferencia del de la sección 9.3, no es posible divisar con claridad el registro 0xA1 (161) en la figura 9.11b, ya que se escriben comandos a una cantidad importante de registros diferentes.

Avalados por la prueba realizada en la sección 9.6 que se verá luego, se afirma que en realidad la aparición de estos registros (por ejemplo los números 81, 145, etc) son causados por el proceso de *sniffing* y no son, de hecho, el comando mandado a los motores.



(a) Valores enviados a los motores

(b) Registro al que se envía el valor

Figura 9.11: Frenado

Analicemos por ejemplo el valor 81. Es claro que el resultado de dividir el valor 162 (correspondiente al conocido registro 0xA2) es exactamente 81, por lo cual parece probable que haya sido generado por un error del *sniffer*, ya que un corrimiento hacia la derecha de un bit en una palabra binaria es equivalente a realizar una división entre 2. Es probable entonces que el sniffer haya incluido un bit en 0 antes de la verdadera palabra y haya descartado el último bit, causando una aparente división entre 2. Más graficamente:

$$162 = 10100010 \rightarrow \text{ verde } 01010001\text{ rojo }0 = 81$$

En verde se muestra el bit agregado y en rojo el eliminado.

9.5. Conclusiones

- La comunicación entre el amo y los esclavos por medio del protocolo i^2c se lleva a cabo mediante un formato del tipo

Dirección esclavo – Lugar de memoria donde guardar dato – dato

- Dicho formato se repite para todos los esclavos
- Cada esclavo recibe una actualización de estado (un dato nuevo) cada $2ms$
- La velocidad mínima de funcionamiento se logra enviando el valor 50
- La velocidad máxima de funcionamiento se logra enviando el valor 250
- Cuando el mando de Elevación del control se encuentra al mínimo, se les envía el valor 0 a los cuatro motores periódicamente con el formato mencionado.
- La dirección de memoria interna de todos los esclavos donde se guardan los datos recibidos por el maestro es siempre 0xA2 (ó 162), a excepción del arranque y el frenado.

- El último comando enviado antes de arrancar se guarda en el registro 0xA0.
- El último comando enviado antes de frenar se guarda en el registro 0xA1.
- El orden normal en el que se envían los comandos es $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$, menos en los casos descriptos en los 2 puntos anteriores donde el orden es $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$.
- La correspondencia entre las direcciones y los motores se muestra en la figura 9.12. El motor con dirección 0xD0 es el de adelante, el motor con dirección 0xD4 es el de atrás y mirándolo de frente el de la izquierda se corresponde con 0xD0, y el de la derecha con 0xD6
- Las direcciones 0xD0, 0xD2, 0xD4 y 0xD6 (de 8 bits) en realidad no refieren únicamente a direccionamiento, sino que incluyen además el bit de lectura/escritura, por lo cual cada esclavo tendrá una única dirección de 7 bits. Notar que las direcciones 0xD0 a 0xD6 al pasarlas a binario todas terminan en 0, lo cual implica que se tratan de comandos de escritura. Al omitir el último bit se obtienen las direcciones (sin incluir el bit de lectura/escritura) como se puede ver a continuación:

$$0xD0(11010000) \longrightarrow 0x68(1101000) \quad (9.1)$$

$$0xD2(11010010) \longrightarrow 0x69(1101001) \quad (9.2)$$

$$0xD4(11010100) \longrightarrow 0x6A(1101010) \quad (9.3)$$

$$0xD6(11010110) \longrightarrow 0x6B(1101011) \quad (9.4)$$

Las direcciones de los motores son entonces: **0x68, 0x69, 0x6A, 0x6B**.

- En las pruebas 0, 1, 2, 5, 6 y 7 se observa que la suma del valor promedio enviado al motor D0 más el enviado a la dirección D2 es similar a la suma de los valores entregados a los motores con dirección D4 y D6, lo cual implica un equilibrio en los pares realizados en ambos sentidos. Se infiere entonces que el movimiento según el eje “z” se logra desequilibrando los pares en ambos sentidos (según “z” y según “-z”)

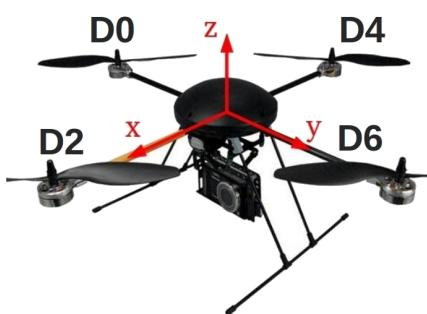


Figura 9.12: correspondencias

9.6. Verificaciones

Se presentan diversas verificaciones realizadas para corroborar la veracidad de las conclusiones sacadas, además de la corroboración experimental utilizando el puerto i^2c de la Beagleboard.

i2cdetect

Utilizando la librería *i2c Tools*⁴ con la Beagleboard es posible mandar el comando **i2cdetect** que lo que hace es preguntar a todos los esclavos que estén presentes en el bus, por su dirección. El resultado en terminal es el siguiente

```
root@beagleboard:~# i2cdetect -r 2
WARNING! This program can confuse your I2C bus, cause data loss and worse!
I will probe file /dev/i2c-2 using read byte commands.
I will probe address range 0x03-0x77.
Continue? [Y/n] y
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
00:			--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
10:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
20:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
30:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
40:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
50:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
60:	--	--	--	--	--	--	--	--	68	69	6a	6b	--	--	--	--
70:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Puede verse claramente que las direcciones de los esclavos obtenidas por la función mencionada son: **0x68**, **0x69**, **0x6A**, **0x6B**.

MSP430F5438

Se utiliza el chip **MSP430F5438**, que se muestra en la figura 9.13.

El MSP430F5438 posee un puerto i^2c habilitado para su utilización. Se configurara como esclavo y se guarda en una variable todos los comandos recibidos en el bus. De este modo se logra independizarse de los problemas que pueda introducir el sniffer y se obtiene exactamente el comando mandado a ese esclavo. Se le configura la dirección 0x68 para comunicarse con el maestro cuando éste mande comandos a esa dirección.



Figura 9.13: MSP430F5438

⁴<http://www.lm-sensors.org/wiki/i2cToolsDocumentation>

Luego, analizando la variable donde se guardan los comandos, es posible obtener información más concluyente.

En la figura 9.14 se muestran los resultados obtenidos al adquirir datos en un arranque.

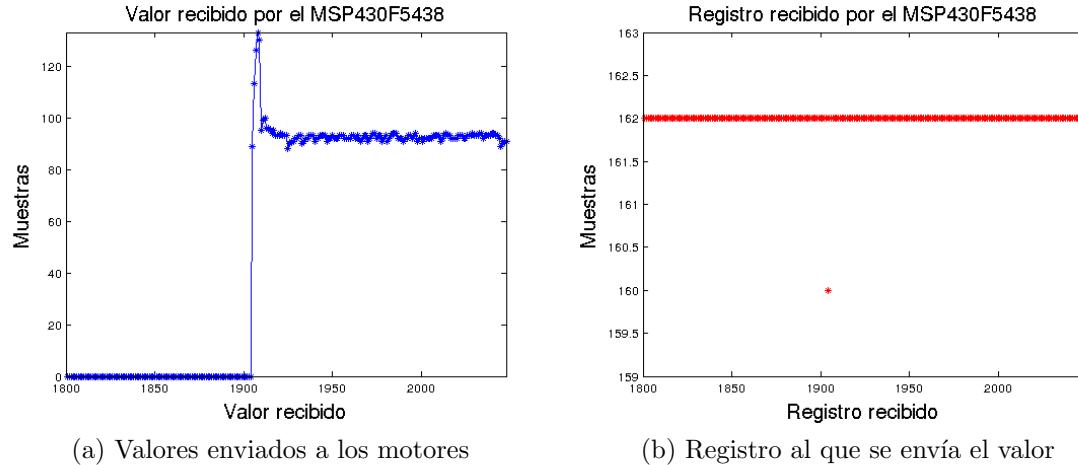


Figura 9.14: Arranque detectado por el MSP430F5438

En la figura 9.15 se muestran los resultados obtenidos al adquirir datos en un frenado.

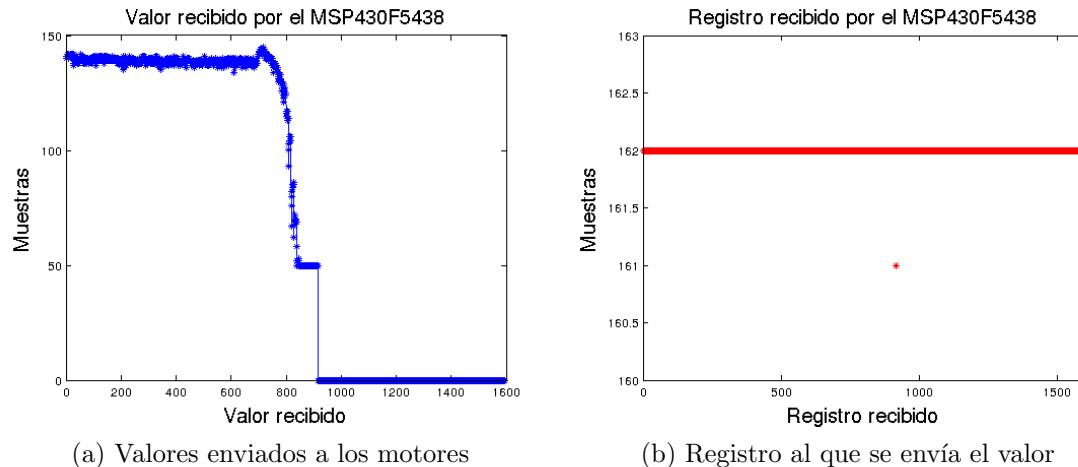


Figura 9.15: Frenado

Estas últimas dos figuras son las corroboraciones más concluyentes que se obtuvieron. Ratifica y deja bien en claro lo antes dicho sobre los registros: **para el arranque se escribe en la dirección 0xA0 del esclavo y para el frenado se escribe en la dirección 0xA1**.

A su vez sirve de confirmación para los errores del sniffreado detectados en la sección 9.4.

CAPÍTULO 10

CARACTERIZACIÓN DE LOS MOTORES

10.1. Objetivo

El objetivo es el de caracterizar los motores del cuadricóptero Turbo Ace X720. Con dicho fin se busca:

- Analizar el comportamiento de los cuatro motores individualmente
- Determinar la relación entre velocidad angular y fuerza
- Determinar la relación entre comando I^2C y la velocidad angular.
- Determinar la relación entre comando I^2C y la fuerza.
- Determinar la relación entre velocidad angular y torque.
- Determinar la relación entre comando I^2C y torque.
- Determinar la respuesta al escalón

Los algoritmos de control se centraran o bien en la velocidad angular o bien en los comandos I^2C . Por dicho motivo es fundamental como se relacionan dichas magnitudes con la fuerza y el torque. Asimismo, si se decidiera que el control estuviera centrado en la velocidad angular se debe conocer la relación entre esta última y el comando I^2C ya que es sobre los comandos I^2C que se tiene real poder de actuar.

10.2. Materiales

- Cuadricóptero Turbo Ace X720
- LED IR TSAL6200
- Detector IR TSOP38256
- Resistencia de 20Ω

- Generador de onda Tektronix CFG250
- Fuente de alimentación de $5V_{DC}$
- Osciloscopio digital GwINSTEC GDS2062
- Balanza Presiser LK-15P presición media III
- Beagleboard XM rev C
- Analizador lógico ChronoVu
- Buffer Octal 74HC245

10.3. Procedimiento

10.3.1. Consideraciones previas

Funcionamiento del dispositivo IR

Es necesario entender el funcionamiento del *detector IR* para poder realizar un experimento adecuado. Dicho dispositivo es sensible a las *radiaciones infrarrojas* moduladas a una frecuencia de 56kHz . Si se lo expone a una onda cuadrada de dicha frecuencia la salida del mismo es un “0” lógico. Si no recibe dicha radiación la salida es un “1” lógico

Diseño del circuito de medida de velocidad angular

La idea del dispositivo de medida es sencilla. Se trata de hacer “pasar” la radiación infrarroja emitida por el LED a través de la hélice en funcionamiento de uno de los motores. Esta radiación es recogida del otro lado por el receptor IR.

De este modo tendremos a la salida del detector, pulsos de frecuencia correspondientes a la velocidad con la que la hélice obstruye el camino entre el sensor y la LED. **La velocidad angular será entonces la mitad de dicha frecuencia.**



Figura 10.1: Dispositivo en forma de U funcionando como generador de onda cuadrada a dicha frecuencia. Para lograr un correcto funcionamiento de la LED se requiere una corriente superior a los $100mA$. La amplitud de la onda cuadrada se regulará a $5V$ y se trabajará con una resistencia de 20Ω en serie. Midiendo la tensión en la resistencia se puede comprobar que

El dispositivo se trata de un cuerpo en forma de “U”, donde de un lado se tiene la LED infrarroja y del otro el detector, tal como se puede ver en la figura 10.1.

Como explicamos anteriormente la LED debe ser conmutada con una frecuencia de 56kHz por lo tanto se la alimentará con un generador de señales

dichos valores son adecuados para el propósito. La salida del receptor IR se conecta directamente al osciloscopio digital.

10.3.2. Relación entre comando I^2C , velocidad angular y empuje

Objetivos particulares

Este experimento servirá para obtener las curvas:

- Diferencias en el comportamiento de los motores
- Relación entre velocidad angular y fuerza
- Relación entre comando I^2C y la velocidad angular.
- Relación entre comando I^2C y la fuerza.

Modelos de ajuste

Es claro que si no se envía ningún comando I^2C los motores no giran. También es evidente que si los motores no giran las hélices no realizan ningún empuje. Por lo tanto los modelos deben estar ajustados al cero.

- Para la relación entre velocidad angular y fuerza en base a la bibliografía consultada sobre el tema se proponen dos modelos de ajuste siguientes:
 - Modelo cuadrático $T = a\omega^2 + b\omega$
 - Modelo cúbico $T = a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega$
- Esta relación es interesante si el control se centra en determinar los valores de la velocidad angular de los motores para realizar una acción de control concreta. En este caso se determinará el valor de dicha velocidad angular y a partir del mismo se busca determinar el comando I^2C correspondiente, por lo tanto para la relación entre comando I^2C y la velocidad angular se propone un ajuste en base a los siguientes modelos:
 - Modelo cuadrático $x = a\omega^2 + b\omega$
 - Modelo cúbico $x = a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega$
- Para la relación entre comando I^2C y fuerza se propone un ajuste en base a los modelos:
 - Modelo cuadrático $T = a\omega^2 + b\omega$
 - Modelo cúbico $T = a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega$

Desarrollo del experimento

El procedimiento consiste en enviar distintos comandos I^2C al cuadricóptero y registrar las diferentes lecturas de masa en la balanza para determinar el empuje de los motores y en registrar las diferentes medidas de frecuencia en el oscilloscopio para determinar la velocidad angular de los cuatro motores. El setup experimental puede observarse en la figura 10.2. Se solidariza el cuadricóptero a una base de madera. Sobre esta última se añade peso suficiente para asegurar que el cuadricóptero no se eleve, se agregaron 3Kg de sobrepeso para asegurar completamente dicha condición. Al estar el sistema en equilibrio mecánico se cumple que:

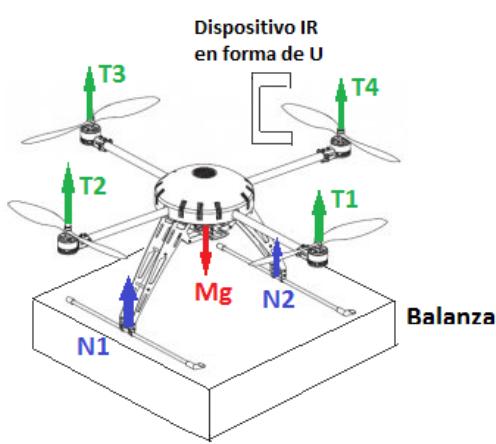


Figura 10.2: Primer set-up experimental

$$\sum F_{ext} = 0$$

En este caso las fuerzas presentes son el peso del sistema (M_{total}) la normal de la balanza sobre el sistema ($N = N_1 + N_2$) y el empuje de los motores ($T_{total} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$). Por lo tanto

$$T_{total} - M_{total}g + N = 0$$

Por lo tanto el empuje de los motores puede calcularse como:

$$T_{total} = M_{total}g - N$$

La lectura de la balanza no es otra cosa que $\frac{N}{g}$. Una vez ubicado el cuadricóptero con el sobrepeso sobre la balanza se tara la balanza. Por lo tanto la lectura que indica la balanza (M_{medida}) luego de realizada esta acción es:

$$M_{medida} = \frac{N - M_{total}g}{g}$$

Por lo tanto el empuje de los cuatro motores puede calcularse como:

$$T_{total} = -M_{medida}g$$

Asumiendo que los cuatro motores se comportan en forma similar se tiene que:

$$T = -\frac{M_{medida}g}{4}$$

La medida de frecuencia se realiza con el dispositivo IR descrito en la sección anterior. La frecuencia medida (f_{medida}) corresponde al inverso del tiempo que transcurre entre el pasaje de una hoja de la hélice y la otra. El período de la rotación de la hélice es el doble y por ende la frecuencia de la rotación es la mitad de la frecuencia medida. Por lo tanto se tiene que:

$$\omega = 2\pi f = \pi f_{medida}$$

Se mide la velocidad angular de los cuatro motores y se trabaja con el promedio. En la sección 10.4.1 se verá porqué es adecuado considerar el promedio.

10.3.3. Relación entre velocidad I^2C , velocidad angular y torque

Objetivos específicos

Los objetivos de este experimento son:

- Obtener la relación entre velocidad angular y torque
- Obtener la relación entre comando I^2C y torque.

Modelos de ajuste

Al igual que en el experimento anterior se fuerzan los modelos para que pasen por el cero ya que sin comando I^2C no hay velocidad angular y por lo tanto no hay torque. Realizando esta consideración y los modelos estudiados para las fuerzas y momentos de las hélices se proponen los siguientes modelos de ajuste:

- Para la relación entre velocidad angular y torque se proponen un modelo cuadrático:

$$\bullet Q = a\omega^2 + b\omega$$

Desarrollo del experimento

Se ubica el cuadricóptero sobre la balanza. Se retiran tres de las cuatro hélices del cuadricóptero. La cuarta hélice se rota de forma que el eje en torno al cual rota sea paralelo respecto del plano del plato de la balanza. Se ubica el detector IR de forma de poder medir la velocidad angular de la hélice. El setup de medida puede verse en las figuras 10.3. De acuerdo a lo estudiado la hélice presenta un torque (Q) positivo respecto de su eje central si el motor rota en sentido anti-horario. Nos proponemos calcular el torque total respecto de dicho eje. Las fuerzas presentes en el sistema son: la fuerza de empuje, la normal y las fuerzas reactivas en el plano del plato de la balanza. Estas últimas y el empuje no realizan ningún torque en la dirección de interés. Recordamos que el torque de una fuerza respecto de un eje se calcula como:

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$

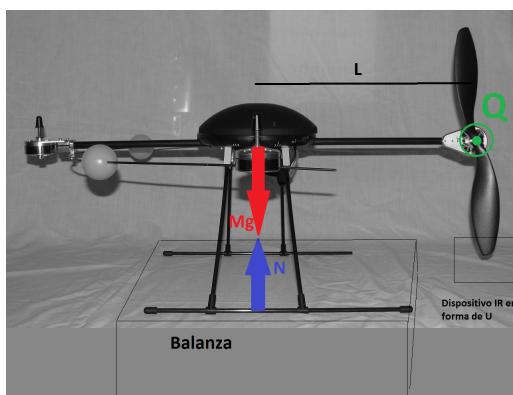


Figura 10.3: Segundo set-up experimental al plano del plato de la balanza.

Donde \vec{F} es la fuerza considerada y \vec{r} es vector distancia entre el eje y el punto de aplicación de la fuerza.

Definimos el largo $L = 29,3cm$ como la distancia entre el eje de la hélice y el centro de masa del cuadricóptero. Asumimos que el peso aplica sobre el centro de masa y la normal sobre la recta que pasa por el centro de masa del cuadricóptero y es perpendicular

De esta forma se tiene que el torque total vale:

$$\tau = Q + LM_{total}g - LN = Q + L(M_{total}g - N)$$

Como se explico anteriormente luego de tarar la balanza la masa medida por la misma corresponde a $M_{medida} = \frac{N - M_{total}g}{g}$. De esta forma se puede escribir el torque total sobre el sistema como:

$$\tau = Q - LM_{medida}g$$

Al igual que en el experimento anterior el sistema se encuentra en equilibrio mecánico y por lo tanto:

$$\tau = 0$$

De esta forma queda claro que el torque que nos interesa caracterizar puede calcularse como:

$$Q = LM_{medida}g$$

10.3.4. Respuesta al Escalón

Se caracterizará al motor en lo que respecta a su respuesta al escalón. Se verá cuánto demora un motor en pasar de la velocidad angular en régimen correspondiente al valor de comando i^2c 50 a la velocidad angular en régimen correspondiente al valor de comando i^2c 150. El osciloscopio no resulta adecuado para observar las diferencias de velocidad angular obtenida. Se procede a conectar la salida del sensor IR a un *buffer* octal y la salida de este último al analizador lógico¹. El analizador lógico registrará la salida del sensor R durante 5 segundos a una tasa de muestreo de 2kHz. Se obtendrán las diferencias de tiempos entre flancos de subida sucesivos(t_f). Cada flanco de subida corresponde a una hoja de la hélice siendo detectada por el sensor IR. La velocidad angular de la hélice puede calcularse como:

$$\omega = 2\pi \frac{2}{t_f}$$

10.4. Resultados y análisis

10.4.1. Comparación entre motores

En la tabla 10.1 todos los valores obtenidos experimentalmente de acuerdo al procedimiento descrito.

¹ Esto fue necesario ya que la tensión de la salida del IR disminuía drásticamente al conectarlo directamente al analizador lógico a valores que este último no es capaz de identificar como “1” lógicos

i^2c	Peso medido	Frecuencia (Hz)			
		Motor D0	Motor D2	Motor D4	Motor D6
0	0	0	0	0	0
50	-140	34.2	34.3	35.5	34.3
70	-300	49.2	49.5	49	48.4
90	-500	63.7	62.7	63.3	63.5
110	-765	76.7	74.4	75.5	73.4
130	-1010	87.3	86.3	86.2	84.7
150	-1250	97.5	95.4	96.2	94.2
170	-1520	104.7	104.2	106.2	105.5
200	-1870	115.5	113.4	119.9	117.3
250	-2400	133.5	132.4	131.5	134.2

Cuadro 10.1: Comando i^2c enviado y fuerza obtenida

En la figura 10.4a se presentan las velocidades angulares de los cuatro motores contra el comando i^2c , mientras que en la figura 10.4b se muestra la diferencia entre la velocidad angular de cada motor y el promedio de las mismas para cada comando i^2c enviado.

En la figura 10.4a se observa que el comportamiento de los motores es en todos los casos similar. Para velocidades angulares bajas los motores se comportan en forma idéntica, mientras que a medida que aumenta la misma se ve afectada esta característica

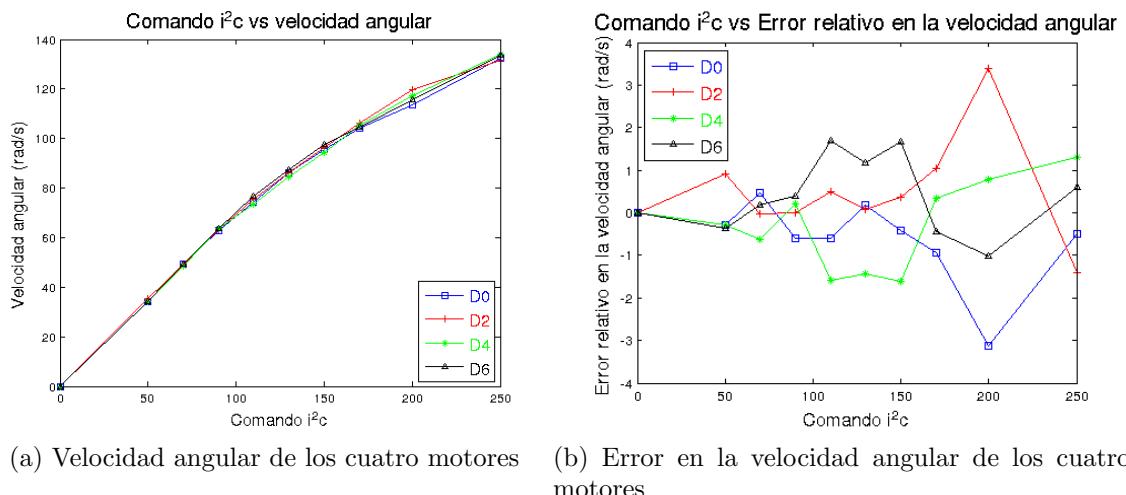


Figura 10.4: Curva i^2c vs. velocidad angular para los 4 motores

En la figura 10.4b puede observarse que la máxima diferencia entre las velocidades angulares de dos motores es de aproximadamente 6.5rad/s . Dicha diferencia se obtiene para un valor de comando i^2c igual a 200. Si observamos la velocidad angular a dicho valor de comando i^2c en la tabla 10.1 se observa que el menor valor corresponde a 113.4rad/s . El error relativo que se obtiene es inferior al 6 %

Se puede afirmar que:

- Es válido promediar las velocidades angulares de los 4 motores y trabajar con esos promedios como un motor típico. Además de este modo se reducen los posibles errores que se pueden haber causado a la hora de realizar las medidas.
- Por lo tanto la fuerza medida (de los 4 motores juntos) corresponde con el cuádruple de la fuerza ejercida por cada uno de ellos

10.4.2. Obtención de la curva fuerza contra velocidad angular

Los resultados obtenidos de frecuencia y medida en la balanza se presentan la tabla 10.2.

En la figura 10.5 se observan los puntos obtenidos experimentalmente ya las curvas obtenidas con los modelos de ajuste propuesto. En dicha figura se observa que cualquiera de los dos modelos aproxima adecuadamente los puntos obtenidos experimentalmente.

Para el modelo cuadrático se obtiene:

- Parámetros: $a = 3,5296 \times 10^{-5} Ns^2$, $b = -4,9293 \times 10^{-4} Ns$
- Error promedio: $e = -2,76 \times 10^{-3} N$
- Desviación estándar: $\sigma = 4,03 \times 10^{-2} N$

Para el modelo cúbico se obtiene:

- Parámetros: $a' = -1,5197 \times 10^{-8} Ns^3$, $b' = 4,4399 \times 10^{-5} Ns^2$, $c' = 0,0018 Ns$
- Error: $7,17 \times 10^{-4} N$
- Desviación estándar: $\sigma = 2,66 \times 10^{-2} N$

Peso (g)	Frecuencia (Hz)	Peso (g)	Frecuencia (Hz)
0	0	-1010	86.13
-140	34.58	-1250	95.83
-300	49.03	-1520	105.15
-500	63.30	-1870	116.53
-765	75.00	-2400	132.9

Cuadro 10.2: Medidas obtenidas de peso y frecuencia medida por el dispositivo IR

Como es de esperar el modelo cúbico aproxima mejor los puntos que el modelo cuadrático, sin embargo cualquiera de los dos modelos ajusta adecuadamente los puntos. Esto fue observado gráficamente en una primera instancia y se comprobó realizando el estudio del error promedio y de la desviación estándar. Ya que ambos modelos parecen adecuados a partir de este momento se trabajará con el más sencillo de los dos, es decir con el modelo cuadrático. Por lo tanto:

$$T = 3,5296 \times 10^{-5} \omega^2 - 4,9293 \times 10^{-4} \omega$$

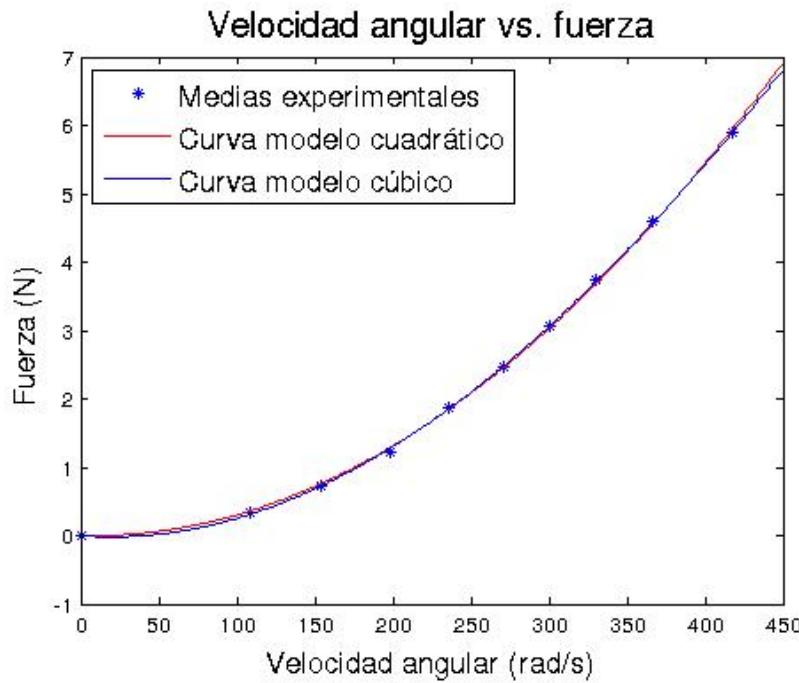


Figura 10.5: Curva experimental de Fuerza-Velocidad angular

10.4.3. Obtención de la curva i^2c contra velocidad angular

En la tabla 10.3 se presentan los resultados obtenidos de frecuencia para distintos valores del comando I^2C . En la figura 10.6 se muestran además de los datos obtenidos las curvas predichas por los modelos de ajuste por los que se optó.

Comando i^2c	Velocidad angular (rpm)	Velocidad angular (rad/s)
0	0	0
50	17.29	108.6206
70	24.51	154.0166
90	31.65	198.8628
110	37.50	235.6194
130	43.06	270.5697
150	47.91	301.0431
170	52.58	330.3385
200	58.26	366.0741
250	66.45	417.5177

Cuadro 10.3: Comando i^2c enviado y velocidad angular obtenida

A simple vista en la figura ya puede observarse que el modelo cúbico aproxima mejor que el modelo cuadrático. Los resultados obtenidos para los modelos de ajuste propuesto vienen a confirmar dicha constatación.

Para el modelo cuadrático se obtiene:

- Parámetros: $a = 6,1226 \times 10^{-4} s^2$, $b = 0,3270 \times 10^{-4} s$
- Error promedio: $e = 5,08 \times 10^{-1}$
- Desviación estándar : $\sigma = 4,42$

Para el modelo cúbico se obtiene:

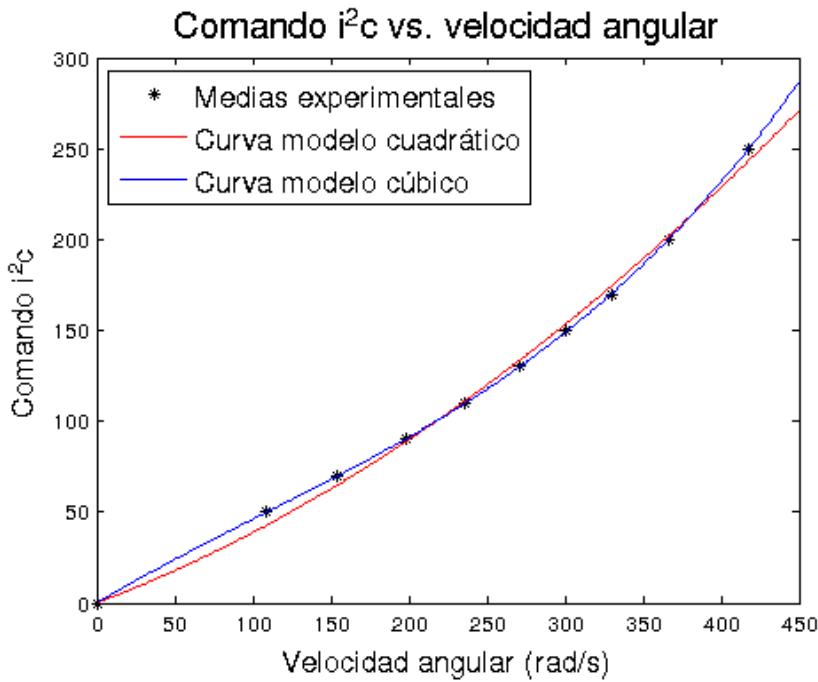


Figura 10.6: Curva i^2c en función de la velocidad angular

- Parámetros: $a' = 2,2118 \times 10^{-6} s^3$, $b' = -7,1258 \times 10^{-4} s^2$, $c' = 0,5106 s$
- Error promedio: $2,04 \times 10^{-3}$
- Desviación estándar: $\sigma = 4,01 \times 10^{-1}$

El error promedio obtenido con el modelo cúbico y la desviación estándar son menores que en el modelo cuadrático. Además se observa claramente que la curva del modelo cúbico ajusta mejor los puntos. Esta es evidencia suficiente para elegir dicho modelo. Tendremos entonces que:

$$x = 2,2118 \times 10^{-6} \omega^3 - 7,1258 \times 10^{-4} \omega^2 + 0,5106 \omega$$

10.4.4. Obtención de la curva i^2c contra fuerza

Se presentan los datos obtenidos para la determinación de la curva de interés en la tabla 10.4.

Comando i^2c	peso (g)	Comando i^2c	peso (g)
0	0	130	-1010
50	-140	150	-1250
70	-300	170	-1520
90	-500	200	-1870
110	-765	250	-2400

Cuadro 10.4: Comando i^2c enviado y fuerza obtenida

Se desea ajustar la fuerza que realizan los motores con modelos cuadrático y cúbico, en función del comando i^2c . Los resultados experimentales y las curvas obtenidas con cada modelo se presentan en la figura 10.7.

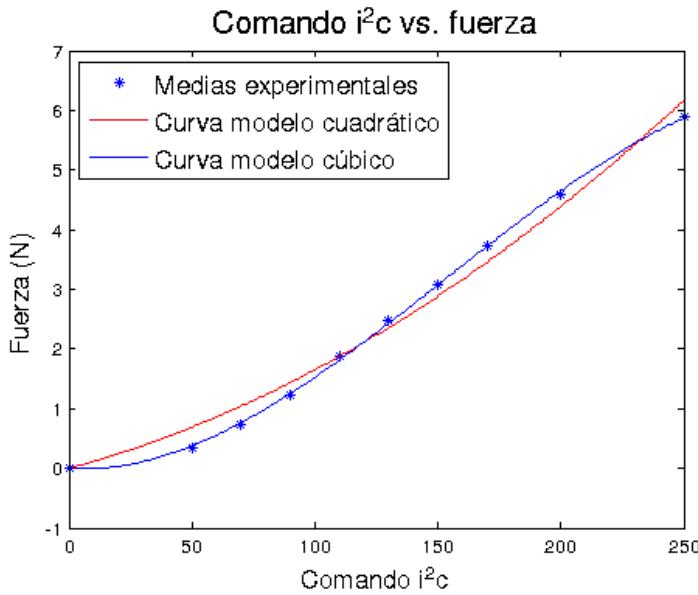


Figura 10.7: Curva i^2c contra fuerza

Los parámetros obtenidos para el modelo cuadrático son:

- Parámetros $a = 5,4588 \times 10^{-5} N, b = 0,0110 N$
- Error promedio: $e = -3,712158 \times -2 N$
- Desviación estándar: $2,087 \times 10^{-1} N$

Los parámetros obtenidos para el modelo cúbico:

- Parámetros $a' = -5,0,166 \times 10^{-7} N, b' = 2,3031 \times 10^{-4} N, c' = -0,0028 N$
- Error promedio: $e = -1,78 \times 10^{-3} N$
- Desviación estándar: $3,71 \times 10^{-2} N$

10.4.5. Obtención de la curva velocidad angular contra torque

De acuerdo al procedimiento detallado en 10.3.3 se obtuvieron las siguientes medidas de velocidad angular y peso.

Recordamos que para la caracterización de la respuesta velocidad angular - torque se propuso un modelo cuadrático. Los resultados obtenidos fueron:

- Parámetros: $a = 3,4734 \times 10^{-6} Nms^2; b = -1,3205 \times 10^{-4} Nms$
- Error promedio: $\mu = 1,7824 \times 10^{-6} Nm$
- Desviación estándar: $\sigma = 9,2686 \times 10^{-4}$

En la figura 10.8 pueden observarse las medidas experimentales obtenidas y la curva que corresponde al modelo elegido para realizar el ajuste. La observación gráfica de dicha curva confirma que el modelo elegido es un buen ajuste para los datos experimentales obtenidos.

Comando i^2c	Frecuencia (Hz)	peso (g)
0	0	0
50	35.4	10
55	39.6	13
60	43.3	16
65	47.1	19
70	50.7	24
75	54.8	28
80	58.3	32
85	62.1	37
90	65.7	42

Cuadro 10.5: Comando i^2c enviado, frecuencia y peso

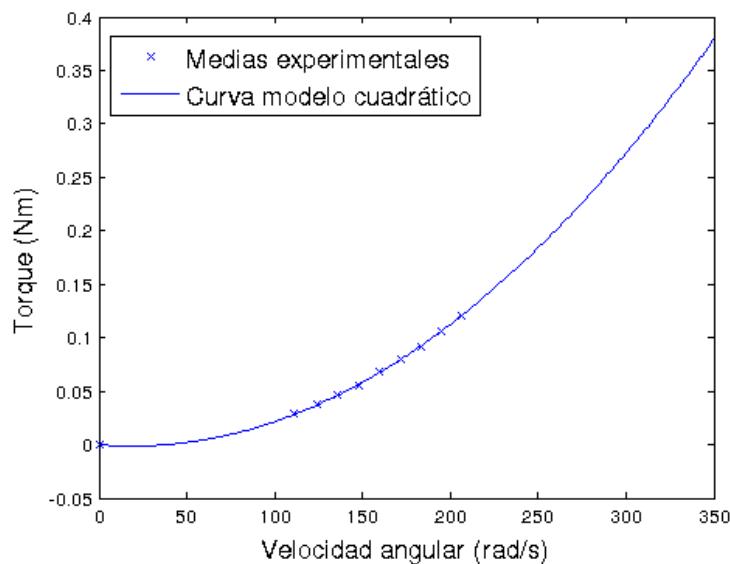


Figura 10.8: Curva torque contra velocidad angular

10.4.6. Respuesta al escalón

En la figura 10.9 se muestran las velocidades angulares obtenidas. El tiempo de rise obtenido es de $0,19s$ y la respuesta al escalón no presenta prácticamente sobretiro.

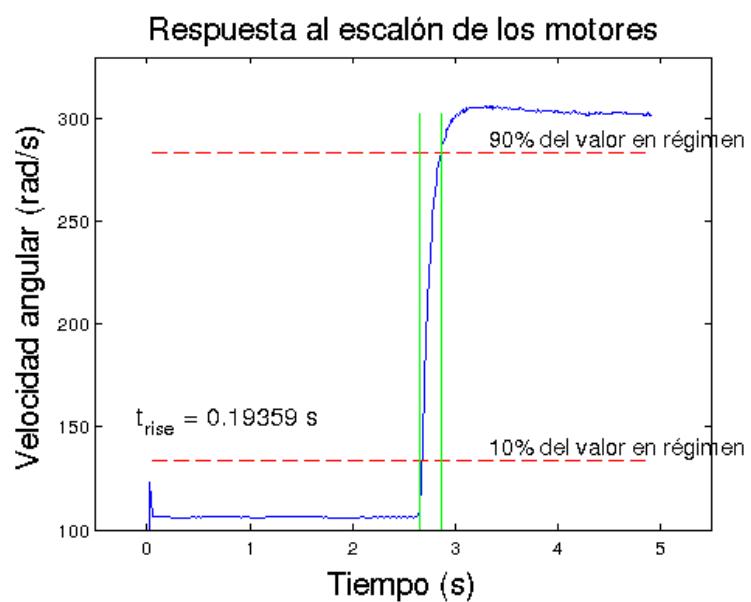


Figura 10.9: Curva i^2c contra fuerza

Parte V

Desarrollo del controlador

CAPÍTULO 11

LINELIZACIÓN Y PUNTOS DE OPERACIÓN

Independientemente del sistema bajo estudio, a la hora de elegir la técnica de control a utilizar se plantean diversas posibilidades. Parece razonable intentar resolver el problema planteado utilizando las técnicas más sencillas que se disponen, al menos en una primera aproximación. En caso de que dicha solución no fuese satisfactoria se puede optar por una técnica con un mayor grado de complejidad.

Las técnicas de control más sencillas y con las que se tiene mayor experiencia se basan en el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLIT). Sin embargo el MVE obtenido en el capítulo 2 es no lineal. Se propone entonces resolver el problema del control del cuadricóptero aproximando el sistema por un sistema lineal invariante en el tiempo. Es claro que el sistema no puede ser linealizado en cualquier trayectoria o punto de operación. En este capítulo nos concentraremos en determinar bajo qué condiciones es posible aproximar el sistema por un modelo lineal.

11.1. Concepto general

Consideremos un sistema que se rige por la siguiente evolución de su vector de estados.

$$\dot{x}(t) = f(X(t), u(t)) \quad (11.1)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados del sistema y $u(t)$ el vector de las entradas. Supongamos en una primera instancia que tanto $x(t)$ y $u(t)$ son de dimensión uno. Consideremos además el punto de operación definido por $x^*(t)$ y $u^*(t)$. Si realizamos un desarrollo de Taylor de orden uno en torno al punto de operación se tiene que:

$$x(t) = f(x(t), u(t)) = f(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} (x(t) - x^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} (u(t) - u^*) \quad (11.2)$$

Si definimos $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ y $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$ tenemos que:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} \tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} \tilde{u}(t) \quad (11.3)$$

Este mismo concepto puede generalizarse en caso de que tanto el vector de estados como las entradas sean vectores de dimensión mayor a uno, n y m respectivamente. En este caso lo que se tiene es que:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \quad (11.4)$$

Donde $A(t)$ es una matriz de $n \times n$ y $B(t)$ es de $n \times m$, tales que $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{x=x^*}^{x=x^*}$ y $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$

En el caso en que todos los coeficientes de las matrices A y B son constantes podemos afirmar que estamos en presencia de un sistema lineal invariante en el tiempo.

11.2. Puntos de operación

Lo que buscamos ahora es encontrar las trayectorias que permiten que la linearización de nuestro sistema en torno a estas resulte en un sistema invariante en el tiempo.

Para lograr este cometido, se debe cumplir que todos los elementos de las matrices A.23 y ?? sean constantes. Se desprende del análisis de dichas matrices que los puntos de operación que cumplen esta condición quedan restrictos a un subconjunto tal que:

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = \dot{v}_{qx} = \dot{v}_{qy} = \dot{v}_{qz} = \dot{\omega}_{qx} = \dot{\omega}_{qy} = \dot{\omega}_{qz} = \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_4 = 0 \quad (11.5)$$

Veremos luego que, realizando un cambio de variable como se explica en ??, se puede ampliar el conjunto de trayectorias posibles, pudiendo agregar aquellas para las cuales $\dot{\theta} \neq 0$. Estas consideraciones nos llevan a concluir que el conjunto de trayectorias permitidas¹ es aquel en el cual tanto la velocidad del centro de masa, como la velocidad angular son constantes en el tiempo. Las trayectorías que cumplen con estas condiciones son tres:

- Hovering
- Vuelo en linea recta a velocidad constante
- Vuelo en círculo a velocidad constante

En los tres casos se tienen que cumplir las restricciones de 11.6.

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{qx} \\ \dot{v}_{qy} \\ \dot{v}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx} \\ \dot{\omega}_{qy} \\ \dot{\omega}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (11.6)$$

Cada una de las trayectorias posibles tiene además sus particularidades, a continuación nos encargaremos justamente de determinar las restricciones específicas de cada trayectoria posible.

¹por las restricciones que hemos impuesto de trabajar con un sistema lineal invariante en el tiempo

Hovering

En el caso del reposo mecánico no solo debe cumplirse las condiciones establecidas en 11.6 si no que además las velocidades del centro de masa y las velocidades angulares deben ser iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (11.7)$$

El sistema que tenemos es independiente de la posición, lo cual es razonable ya que el reposo puede lograrse en cualquier punto del espacio. Dado que la velocidad y velocidad angular del sistema fue definida como cero tenemos por despejar 7 variables: los ángulos de Euler, y las velocidades angulares de los motores.

Al imponer las condiciones de 11.7 las ecuaciones 2.5 y 2.6 del MVE se cumplen trivialmente. Por lo tanto tenemos solamente las seis ecuaciones correspondientes a las derivadas de las velocidades y de las velocidades angulares. Estas últimas no dependen de θ , por lo tanto podemos afirmar que el reposo también se da para cualquier ángulo de Yaw. Lo cual también parece razonable ya que el sistema presenta simetría respecto del eje \vec{k}_q . Del análisis de las ecuaciones 11.7 se obtiene rápidamente que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad (11.8)$$

Se deduce además que:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 334,28 rad/s \quad (11.9)$$

Vuelo en linea recta a velocidad constante

Para lograr el vuelo en linea recta a velocidad constante se tienen que cumplir las condiciones de 11.6 al igual que en el caso anterior. La particularidad del vuelo en linea recta es que la velocidad del centro de masa es una constante distinta de cero. Queda claro que lo que tenemos es que:

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = cte \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (11.10)$$

Al imponer que $\vec{\omega} = 0$ la ecuación 2.5 se verifica trivialmente y las ecuaciones ?? y 2.9 quedan idénticas al caso del sistema en reposo. Por lo tanto, tendremos también para el movimiento en linea recta que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 334,28 rad/s \quad (11.11)$$

Hasta aquí no hemos considerado la ecuación que relaciona las velocidades lineales en el sistema inercial con las velocidades lineales expresadas en el sistema del cuadricóptero. Al considerando el resultado obtenido sobre φ y ψ dichas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ \dot{y} &= v_{qy} \sin \theta + v_{qx} \cos \theta \\ \dot{z} &= v_{qz} \end{aligned} \quad (11.12)$$

El vuelo en linea recta nos ofrece la posibilidad de fijar los restantes 4 parámetros de la trayectoria. Estos parámetros serán determinados por el generador de trayectorias con el objetivo de realizar alguna maniobra en particular.

11.2.1. Vuelo en círculos

Dado que queremos un sistema invariante en el tiempo para poder trabajar con el no nos es posible, con las ecuaciones desarrolladas hasta este instante realizar movimientos con velocidades angulares distintas de cero. Si se viola esta condición se tiene que al menos alguno de $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ o $\dot{\theta}$ es distinto de cero. Por lo tanto tenemos al menos algún ángulo de Euler variante en el tiempo. Para poder obtener un movimiento circular se debe realizar el cambio de variable en el MVE en lo que respecta a las ecuaciones de la derivada de la posición propuesto en ??.

El cambio de variables en cuestión consiste en expresar la posición (exclusivamente para los movimientos circulares) en la base del cuadricóptero. Supongamos que el cuadricóptero se encuentra realizando un movimiento tal, que su proyección sobre el plano horizontal ($Z = 0$) es circular. Podemos describir la posición en todo momento tomando como origen el centro de dicho círculo. Como se observa en la figura ?? la posición en dicho plano se puede expresar como $R\vec{i}_1$. Donde R , es el radio del círculo e \vec{i}_1 es el primer vector de la base que se obtiene al realizar la primera rotación de Euler. A continuación expresaremos la posición en la base solidaria al cuadricóptero. Para lograr dicho objetivo se debe multiplicar $R\vec{i}_1$ por la matriz cambio de base $H_2^q H_1^2$. Estas matrices son las definidas en 2.4. La posición (\vec{r}_q) expresada en dicha base es entonces:

$$\vec{r}_q = H_2^q H_1^2 R \vec{i}_1 = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (11.13)$$

La ventaja que se obtiene con esta forma de expresar la posición es que la misma es independiente de uno de los tres ángulos de Euler: θ . Este cambio es una gran ventaja ya que bajo este modelo de variables de estado se puede lograr la invariancia temporal a pesar de que este ángulo no sea constante.

Nos interesa ahora derivar la posición para terminar de completar el modelo del sistema. Dado que la posición se encuentra expresada en el sistema del cuadricóptero tendremos que:

$$\frac{d\vec{r}_q}{dt} = \frac{dR\vec{i}_1}{dt} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q = \vec{v}_q + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q \quad (11.14)$$

Por lo tanto tendremos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{y}_q \\ \dot{z}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{qx} + \omega_{qy} z_q - \omega_{qz} y_q \\ v_{qy} + \omega_{qz} x_q - \omega_{qx} z_q \\ v_{qz} + \omega_{qx} y_q - \omega_{qy} x_q \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

Este modelo nos permitirá realizar el control basándonos en técnicas de control lineal para una trayectoria circular en el plano $z = 0$.

Es fundamental aclarar que las ecuaciones derivadas hasta aquí serán utilizadas exclusivamente para la linealización del sistema y no para determinar los valores de los parámetros a controlar. Para esto último continuaremos utilizando el modelo de 2.12. El movimiento circular queda determinado exclusivamente por dos parámetros la velocidad (V_I) y la velocidad angular ($\dot{\theta}$), estos serán considerados conocidos ya que es trabajo del generador de rutas o del usuario determinar que movimiento se desea realizar. Se desea determinar 12 parámetros, ocho de las doce variables de

estado (No nos interesa fijar ni ángulo de Yaw ni la posición) y las cuatro velocidades angulares de los motores. Se deben tener en cuenta evidentemente las restricciones establecidas en 11.6 sobre las derivadas de las velocidades del centro de masa y de las velocidades angulares. En lo que respecta a las derivadas de los ángulos de Euler se debe cumplir que $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$ además $\dot{\theta}$ debe ser igual al valor impuesto.

Dado que la velocidad debe ser de módulo constante, podemos considerar por ejemplo las tres primeras ecuaciones del MVE asumiendo $\theta = 0$. Dado que estamos considerando movimientos circulares con la proyección sobre el plano horizontal del vector \vec{j}_q tangente al círculo, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} v_{q_x} \cos \varphi + v_{q_y} \sin \varphi \sin \psi + v_{q_z} \sin \varphi \cos \psi \\ v_{q_y} \cos \psi - v_{q_z} \sin \psi \\ -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_{I_{hor}} \\ V_{I_{vert}} \end{pmatrix} \quad (11.16)$$

Tenemos entonces un sistema donde se desean determinar doce incógnitas y se dispone de doce ecuaciones. Dicho sistema no será resuelto en forma analítica, por el contrario se resolverá en forma numérica a la hora de planificar la trayectoria.

Se ha dado un paso fundamental en camino de lograr controlar el cuadricóptero, se han definido tres tipos de trayectorias las cuales es posible tratar desde el “mundo” del control lineal. Las trayectorías definidas ofrecen una amplia gama de posibilidades, ya que concatenando las mismas se pueden obtener prácticamente cualquier movimiento, a excepción de maniobras que involucren variaciones en más de un ángulo de Euler a la vez. El subconjunto de trayectorias con el que se puede trabajar es considerado ampliamente satisfactorio y por ende se da por concluido el análisis sobre los puntos de operaciones y la linealización del sistema.

Appendices

ANEXO A

CÁLCULO DE LOS TENSORES

A.1. Magnitudes a considerar

Según el modelo considerado explicado en 2 dividiremos el sistema en una esfera central, cuatro cilindros y cuatro varillas (también cilíndricas). Las magnitudes que debemos conocer para calcular los momentos de inercia del sistema son:

- Radio de la esfera central $R = 8 \times 10^{-2}m$
- Largo de las varillas $L = 26 \times 10^{-2}m$
- Radio de los motores $r = 1,65 \times 10^{-2}m$
- Altura de los motores $h = 3,5 \times 10^{-2}m$

Además nos interesa conocer las distancias de cada uno de los elementos del sistema al centro de masa del cuadricóptero.

- Distancia entre el centro de masa de la varilla y el centro de masa del cuadricóptero $d_v = 14 \times 10^{-2}m$
- Distancia del eje de los motores al centro de masa del cuadricóptero $d_m = 0,29m$

Por último las masas de los elementos en cuestión son:

- Masa de la esfera central $M_E = 1,037kg$
- Masa de las varillas $M_v = 0,013kg$
- Masa de los motores $M_m = 0,113kg$

A.2. Tensor de inercia del sistema

El tensor de inercia del sistema puede calcularse como la suma de los tensores de inercia de los rígidos que lo componen. Se considera como fue expresado anteriormente el centro del cuadricóptero como una esfera maciza. El tensor de inercia de dicha esfera puede calcularse a partir de la definición misma de tensor de inercia, sin embargo por ser una forma geométrica de vasto uso en el campo de la mecánica su tensor de inercia se encuentra ya tabulado. Sucede lo mismo con las restantes formas geométricas que componen al sistema. Los tensores utilizados pueden obtenerse en ?? En el caso de la esfera se tiene que el tensor de inercia respecto de su centro de masa es:

$$\Pi_{G_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_E \begin{pmatrix} \frac{2R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R^2}{5} \end{pmatrix}$$

En este caso el centro de masa del sistema corresponde al centro de masa de la esfera a partir de ciertas suposiciones que se realizan sobre la simetría del sistema. Por dicho motivo podemos afirmar que $\Pi_{G_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \Pi_{O'E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$, siendo O' el centro de la esfera.

Por otra parte el tensor de inercia de una varilla, cuya longitud coincide con el versor \vec{i}_q , respecto a su centro de masa tiene la forma:

$$\Pi_{G_{Vx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}$$

Sin embargo resulta mucho más interesante obtener el tensor de inercia expresado respecto del centro de masa del sistema. Para realizar dicho cambio se utiliza el Teorema de Steiner. Dicho teorema afirma que: $\Pi_Q = \Pi_G + J_Q^{M,G}$, donde los términos de $J_Q^{M,G}$ pueden calcularse como: $(J_Q^{M,G})_{\alpha\beta} = M(G-Q)^2\delta_{\alpha\beta} - M(G-Q)_\alpha M(G-Q)_\beta$. El término $\delta_{\alpha\beta}$ es conocido como Delta de Kronecker. Su valor es uno si $\alpha = \beta$ y cero si $\alpha \neq \beta$. En el caso en consideración dicha matriz resulta en:

$$J_{O'}^{M_{Vx},G} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{L}{2} + d_v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{L}{2} + d_v)^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el momento de inercia total de dicha varilla es:

$$\Pi_{O'Vx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 \end{pmatrix}$$

Análogamente, el tensor de inercia de una varilla cuya longitud se encuentra respecto de la dirección \vec{j}_q respecto del centro de masa del sistema es:

$$\Pi_{O'Vy}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 \end{pmatrix}$$

Sucede algo similar en lo que respecta a los motores. Tendremos un tensor de inercia para los motores que se encuentran sobre la dirección \vec{i}_q y otro para los

motores que se encuentran sobre la dirección \vec{j}_q . El momento de inercia de un cilindro en su centro de masa es:

$$\Pi_{G_M}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

La entrada (3, 3) de la matriz de la ecuación A.1 la pasaremos a llamar I_{zmm}

Por lo tanto el momento de inercia respecto del centro de masa del sistema para un cilindro que se encuentra en la dirección \vec{i}_q es:

$$\Pi_{O'M_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} + d_m^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + d_m^2 \end{pmatrix}$$

En el caso de un cilindro que se encuentra en la dirección \vec{j}_q se tiene que::

$$\Pi_{O'M_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} + d_m^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + d_m^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el tensor de inercia del sistema, se calcula como la suma de los tensores de inercia de las partes que lo componen:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \Pi_{O'E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'V_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'V_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'M_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'M_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$$

Dado que todos los tensores de inercia considerados hasta el momento son diagonales, podemos escribir el tensor de inercia del sistema como:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

A.3. Resultados

En base al análisis realizado hasta el momento se tiene que:

$$I_{zmm} = 1,54 \times 10^{-5} \text{kgm}^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 2,32 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$$

$$I_{zz} = 4,37 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$$

Appendices

ANEXO A

CÁLCULOS NECESARIOS PARA LA LINEALIZACIÓN DEL SISTEMA

Tal como se explica en el capítulo 11 se linealiza el MVE obtenido en 2, esto es, expresar el sistema no lineal bajo la forma:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \quad (\text{A.1})$$

Donde $A(t)$ y $B(t)$ son tales que $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$ y $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$

A.1. Linealización para cualquier trayectoria

Para una trayectoria genérica al linealizar el sistema se obtienen las matrices:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Las entradas de la matriz de A.23 representan matrices de 3×3 mientras que las entradas de la matriz ?? representan matrices de 3×4 . Es importante conocer las entradas de las matrices anteriores, al menos en lo que respecta a las dependencias de cada una de ellas con las variables de estado.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} f_{A_{12_1}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_2}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_3}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_4}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_5}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_6}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_7}}(\psi, \varphi, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_8}}(\psi, \varphi, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} f_{A_{13_1}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_2}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_3}}(\psi, \varphi, \theta) \\ f_{A_{13_4}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_5}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_6}}(\psi, \varphi, \theta) \\ f_{A_{13_7}}(\varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi, \varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi, \varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} f_{A_{22_1}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & f_{A_{22_2}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 \\ f_{A_{22_4}}(\psi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 & 0 \\ f_{A_{22_7}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & f_{A_{22_8}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$A_{24} = \begin{pmatrix} 1 & f_{A_{24_2}}(\psi, \varphi) & f_{A_{24_3}}(\psi, \varphi) \\ 0 & f_{A_{24_5}}(\psi) & f_{A_{24_6}}(\psi) \\ 0 & f_{A_{24_8}}(\psi, \varphi) & f_{A_{24_9}}(\psi, \varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & g \cos \varphi & 0 \\ -g \cos \varphi \cos \psi & g \sin \varphi \sin \psi & 0 \\ g \cos \varphi \sin \psi & g \sin \varphi \cos \psi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{qz} & -\omega_{qy} \\ -\omega_{qz} & 0 & \omega_{qx} \\ \omega_{qy} & -\omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_{zzm}}{I_{xx}}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qz} & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qy} \\ \frac{I_{zzm}}{I_{yy}}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + \frac{-I_{xx} + I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qz} & \frac{-I_{xx} + I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{B_{31_9}}(\omega_1) & f_{B_{31_10}}(\omega_2) & f_{B_{31_11}}(\omega_3) & f_{B_{31_12}}(\omega_4) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$B_{41} = \begin{pmatrix} 0 & f_{B_{41_2}}(\omega_2) & 0 & f_{B_{41_4}}(\omega_4) \\ f_{B_{41_5}}(\omega_1) & 0 & f_{B_{41_6}}(\omega_3) & 0 \\ f_{B_{41_9}}(\omega_1) & f_{B_{41_{10}}}(\omega_2) & f_{B_{41_{11}}}(\omega_3) & f_{B_{41_{11}}}(\omega_4) \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

A.2. Linealización para la condición de hovering

Con las condiciones 11.6 y 11.7 obtenidas en el capítulo 11 se pueden obtener las matrices A y B en el caso particular de hovering. Además puede verificarse que todas las entradas de dichas matrices son constantes y que por lo tanto estamos frente a un sistema lineal invariante en el tiempo.

$$A_{hov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{hov_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{hov_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$B_{hov} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{hov_{31}} \\ B_{hov_{41}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Donde Id es la matriz identidad y las matrices $A_{hov_{13}}, A_{hov_{32}}, B_{hov_{31}}$ y $A_{hov_{41}}$ son:

$$A_{hov_{13}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{hov_{32}} = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$B_{hov_{31}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$B_{hov_{41}} = \begin{pmatrix} 0 & 2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 & -2,9 \times 10^{-1} s^{-2} \\ -2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 & 2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 \\ 5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & -5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & 5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & -5,0 \times 10^{-2} s^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Dado que fue impuesto que θ fuese constante para este movimiento, tenemos efectivamente un sistema lineal invariante en el tiempo.

A.3. Vuelo en linea recta a velocidad constante

Las matrices A y B obtenidas para esta situación de vuelo son:

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 0 & A_{rec12} & A_{rec13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{rec32} & 0 & A_{rec34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$B_{rec} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{rec31} \\ B_{rec41} \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Donde $A_{rec13} = A_{hov13}$, $A_{rec32} = A_{hov32}$, $B_{rec} = B_{hov}$ y

$$A_{rec12} = \begin{pmatrix} v_{qz} \sin \theta & v_{qz} \cos \theta & -v_{qy} \cos \theta - v_{qx} \sin \theta \\ -v_{qz} \cos \theta & v_{qz} \sin \theta & v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ v_{qy} & -v_{qz} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{hov32} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

A.4. Vuelo a velocidad angular constante

Luego de las modificaciones introducidas en el MVE en la sección 11 se procede a linealizar el sistema obtenido.

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{cir11} & 0 & Id & A_{cir14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Las matrices obtenidas son todas idénticas a las obtenidas en la linealización del MVE original a excepción de las matrices A_{cir11} y A_{cir14} . Estas tienen la forma:

$$A_{cir11} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{qz} & -\omega_{qy} \\ -\omega_{qz} & 0 & \omega_{qx} \\ \omega_{qy} & -\omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{cir14} = \begin{pmatrix} 0 & -z_z & y_q \\ z_q & 0 & -x_q \\ -y_q & x_q & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$