Universidad de la República
Facultad de Ingeniería

Proyecto AUION

PROYECTO DE FIN DE CARRERA

AUTOMATIZACIÓN DEL VUELO DE UN AVIÓN

Integrantes del grupo

Rodrigo Alonso
Guzmán Hernández
Pablo Iturralde

Tutor: Ing. Rafael Canetti

Montevideo - Uruguay
Abril 2009

Agradecimientos

Queremos hacer público nuestro agradecimiento a los docentes del Instituto de Física Ricardo *'Pollo'* Siri y Nicolás Casaballe por su colaboración desinteresada en aspectos relativos al proyecto, y al trabajo que fue necesario realizar para concretarlo y presentarlo adecuadamente.

Queremos agradecer especialmente también al Ing. Ariel Gago que nos brindó guías al adentrarnos en el ambiente de la aviación y nos proporcionó ánimo en las etapas tempranas de este proyecto, y también por su ayuda y colaboración desinteresada.

Finalmente es justo elevar un agradecimiento a nuestras familias por haber siempre confiado en nosotros y por habernos apoyado (y mantenido) durante la duración de este Proyecto y los 5 años de facultad que le precedieron.

Resumen

Presentamos en este trabajo una estrategia para resolver el vuelo auto-guiado de un avión UAV desarrollada en base a la generación, regeneración y seguimiento de trayectorias comparativamente sencillas de controlar, o controlables con herramientas típicas del control lineal. Se detalla en esta documentación el proceso y los fundamentos por los cuales fueron implementados el algoritmo de generación de trayectorias y el controlador final, así como todo el proceso ocurrido desde la formulación inicial de este proyecto. Éstas estrategias fueron evaluadas mediante pruebas y testeos cualitativos y cuantitativos en un simulador que se desarrolló utilizando las herramientas proporcionadas por el ambiente Simulink del software Matlab. Se realizó además un software orientado a usuario que integra simulador, generador de trayectorias y controlador en un mismo paquete y ambiente de trabajo.

Palabras clave: *UAVs, vuelo auto-guiado, técnicas de control, control lineal, gain scheduling, tracking, modelado, trayectorias, path planning, LQR, piloto automático, minimización de función de costo.*

Índice general

Índice general **6**

1. Introducción **10**
1.1. Introducción al proyecto . . . 10
1.2. Objetivos del proyecto . . . 10
1.3. Objetivo de este documento . . . 11
1.4. Visión global del proyecto . . . 11
1.5. Visión global de este documento . . . 12

2. Aeronáutica y modelo del avión **14**
2.1. Definición de la nomenclatura aeronáutica . . . 14
2.2. El avión de la UdelaR . . . 19
2.2.1. Descripción geométrica . . . 20
2.2.2. Aviónica . . . 22
2.2.3. Especificaciones del cable para la comunicación con el *Gumstix* . . . 24
2.3. Modelo de avión utilizado: *DHC-2 BEAVER* . . . 25
2.3.1. Parámetros de geometría del avión . . . 26
2.3.2. Masa total y tensor de inercia . . . 26

3. Modelado del sistema **28**
3.1. Modelado físico del sistema . . . 28
3.2. Modelado de la atmósfera y superficie terrestre . . . 33
3.3. Definición de los subconjuntos de variables . . . 36
3.4. Fuerzas y momentos involucrados . . . 36
3.4.1. Peso del avión . . . 37
3.4.2. Fuerzas y momentos aerodinámicos . . . 37
3.4.3. Fuerzas y momentos del motor . . . 39
3.4.4. Resumen de coeficientes . . . 40
3.4.5. Comentarios sobre el modelado de las fuerzas y momentos . . . 41
3.4.6. Corrección de las fuerzas aerodinámicas en presencia de una atmósfera no estable . . . 45
3.4.7. Modelado del viento . . . 45
3.5. Corrección por rotación de la tierra . . . 47
3.6. Resumen de efectos no considerados en el modelado . . . 48
3.7. Modelo en variables de estado para el diseño . . . 49

4. Simulación del lazo abierto **51**
4.1. Desarrollo del simulador . . . 52
4.1.1. Primer versión del simulador . . . 52
4.1.2. Versión del simulador en *Simulink* . . . 52
4.2. Modelos implementados para el lazo abierto . . . 56
4.2.1. MDL estandar . . . 56

4.2.2. MDLs para el testeo de la linealización analítica . . . 57
4.2.3. MDL para la validación del controlador . . . 57
4.3. Pruebas del simulador . . . 57
4.3.1. Prueba 1: Caída libre . . . 58
4.3.2. Prueba 2: Planeo vs caída libre . . . 60
4.3.3. Prueba 3: Efecto de los alerones . . . 62
4.3.4. Prueba 4: Efecto de los elevadores . . . 63
4.3.5. Prueba 5: Efecto del timón de cola . . . 65
4.3.6. Prueba 6: Efecto de los *flaps* . . . 66
4.3.7. Prueba 7: Efecto del motor . . . 68
4.3.8. Prueba 8: Efecto del viento . . . 70

5. Linealización **72**
5.1. Trayectorias estacionarias y puntos de operación . . . 73
5.2. Vuelo en línea recta a velocidad constante . . . 74
5.3. Giro a velocidad angular constante . . . 77
5.4. *Software* de linealización y trimado . . . 83

6. Generador de trayectorias **84**
6.1. ¿Qué entendemos por generador de trayectorias? . . . 84
6.2. Elementos a considerar para la construcción del generador de trayectorias . . . 84
6.3. El generador de trayectorias implementado . . . 85
6.3.1. Especificación funcional del generador de trayectorias . . . 86
6.3.2. Análisis del problema geométrico en 2D . . . 88
6.3.3. Representación elegida . . . 89
6.3.4. Optimización de la solución . . . 91
6.3.5. Construcción de la semilla . . . 93
6.3.6. Función de costos a minimizar . . . 94
6.3.7. El algoritmo de minimización . . . 99
6.3.8. Tratamiento de los puntos a distinta altura . . . 100
6.3.9. Post-procesamiento de la solución optimizada . . . 100
6.4. Análisis de los resultados . . . 101
6.4.1. Criterios de éxito. . . . 101
6.4.2. Indicadores cuantitativos. . . . 102
6.4.3. Casos de prueba y resultados . . . 103
6.4.4. Conclusiones referidas al generador de trayectorias . . . 104

7. Diseño del controlador **106**
7.1. *Gain Scheduling* . . . 106
7.2. Control lineal . . . 107
7.2.1. Realimentación de estados . . . 107
7.2.2. Comentarios sobre el cambio de variables de estado para el vuelo en círculos . . . 112
7.2.3. Agregado de dinámica para controlar errores grandes en la posición . . . 112
7.3. Regeneración de trayectorias . . . 113
7.3.1. Condición de salida . . . 113
7.3.2. Trayectoria regenerada . . . 114
7.4. El algoritmo de control implementado . . . 115
7.5. Otras posibilidades de control . . . 118

8. Pruebas del Controlador **120**
8.1. Modelo utilizado para las simulaciones . . . 120
8.2. Pruebas del controlador lineal . . . 121
8.2.1. Vuelo a velocidad constante horizontal . . . 122
8.2.2. Vuelo en trayectoria circular de radio máximo con velocidad angular constante . . . 130
8.2.3. Pruebas con *Gain Scheduling* . . . 134
8.3. Pruebas con regeneración de trayectorias . . . 137

9. Consideraciones generales para la implementación del sistema propuesto **140**
9.1. El generador de trayectorias . . . 140
9.2. Validación del modelo . . . 140
9.3. Evaluación de necesidades en aviónica . . . 141
9.4. Trimado y linealización . . . 142
9.5. Observación de estados . . . 143
9.6. Entradas y actuadores . . . 143
9.7. Controlador lineal . . . 143
9.8. Regeneración de trayectorias . . . 144
9.9. Comentarios finales sobre la implementación . . . 144

10. *Software* implementado **146**
10.1. *Software* integrado . . . 146
10.1.1. Criterios para la construcción del *software* . . . 147
10.1.2. Diseño de la integración . . . 149
10.1.3. Interfaz gráfica . . . 150

11. Conclusión Final **154**
11.1. Modelado . . . 154
11.2. Generador de trayectorias . . . 155
11.3. Sistema de Control . . . 155
11.4. Paquete de *Software* - Interfase Gráfica . . . 156
11.5. Trabajo a futuro . . . 156
11.6. Gestión del Proyecto . . . 156

A. Cálculos realizados **158**
A.1. Cálculos relativos a las linealizaciones . . . 158
A.1.1. Linealización del MVE en torno a una trayectoria de operación . . . 159
A.1.2. Linealización en torno a una trayectoria de giro a velocidad angular constante . . . 171

B. Testeo del generador de trayectorias **174**
B.1. Descripción de los casos de prueba . . . 174
B.1.1. Caso de prueba 1 . . . 175
B.1.2. Caso de prueba 2 . . . 176
B.1.3. Caso de prueba 3 . . . 177
B.1.4. Caso de prueba 4 . . . 178
B.1.5. Caso de prueba 5 . . . 178
B.1.6. Caso de prueba 6 . . . 179
B.1.7. Caso de prueba 7 . . . 179
B.1.8. Caso de prueba 8 . . . 180
B.1.9. Caso de prueba 9 . . . 180
B.1.10. Caso de prueba 10 . . . 180
B.1.11. Caso de prueba 11 . . . 181
B.1.12. Caso de prueba 12 . . . 181

B.1.13. Caso de prueba 13 181
B.2. Resultados 182

C. Acrónimos utilizados **186**

D. Definición de la simbología utilizada **188**

Índice de figuras **197**

Índice alfabético **200**

Bibliografía **206**

Capítulo 1
Introducción

1.1. Introducción al proyecto

Existe actualmente en el Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE de ahora en más) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, una línea de trabajo orientada hacia la robótica móvil y técnicas de control, asociado al Departamento de Control. Este proyecto se encuentra inscripto dentro del marco de esta orientación y estas líneas de trabajo. A lo largo del tiempo, se han desarrollado y se continúan desarrollando plataformas experimentales y de investigación de interés para los integrantes de dicho Departamento a través de proyectos de fin de carrera. En uno de estos proyectos, *AMFO-1/Bobby* [Cha07], culminado hace aproximadamente dos años, se confeccionó un avión *UAV* con capacidad de vuelo relativamente prolongada (más de $100km$, volando a algunos centenares de metros de altura), con posibilidad de acarrear una cierta carga útil, cuyas superficies de vuelo son movilizadas mediante servomecanismos e instrumentado electrónicamente con distintos sensores. Actualmente dicha plataforma de vuelo es pilotada por control remoto, permite que se almacenen los datos de vuelo en la computadora de abordo, y dichos datos se recogen luego del vuelo. Se pretende que el avión, en un período próximo, tenga capacidad de vuelo autónomo y una comunicación fluida de datos y comandos con tierra.

Es en la línea de lograr el vuelo autónomo de la mencionada plataforma que se concentraron los esfuerzos de este grupo de proyecto de fin de carrera. Trabajamos durante el transcurso del proyecto -y que representa el núcleo en sí mismo de este proyecto- en la concepción, el diseño, la implementación y el testeo de algoritmos de generación y seguimiento de trayectorias de vuelo, para un avión modelo que extrajimos de la bibliografía. Sin olvidarnos del 'macro-objetivo' del vuelo autónomo de la plataforma de vuelo disponible por el IIE, este proyecto tuvo un especial énfasis en la portabilidad respecto al modelo de avión de forma que las técnicas que se produjeran fueran fácilmente adaptables a dicho *UAV*.

1.2. Objetivos del proyecto

El objetivo de este proyecto consiste en la síntesis de un sistema de control automático para un avión en situación de vuelo, lo que comúnmente es llamado un 'piloto automático'. Un aspecto importante de este objetivo es que el avión estará ya en situación de vuelo al momento que el sistema de control -a diseñar- tome el mando de la plataforma de vuelo, quedando las situaciones de aterrizaje y despegue por fuera del marco de este proyecto.

El problema de control a resolver consiste en que el avión sea capaz de generar y seguir de manera autónoma una trayectoria que recorra -o pase suficientemente cerca de- un conjunto de puntos ordenados en el espacio (*waypoints*) especificados por el usuario del sistema. Toda la solución fue diseñada e implementada a partir de un simulador del sistema físico real a controlar, que también debía ser construido por nosotros. En este caso, las etapas de comprensión del sistema, modelado y posteriores pruebas del modelo físico-matemático realizado debían anteceder a la formulación del problema que representa la generación de los algoritmos necesarios para lograr el vuelo auto-guiado.

Todas las etapas a realizar que apuntaran a resolver los objetivos planteados en los párrafos anteriores debían seguir la línea de que el trabajo realizado fuese finalmente implementado en el avión *UAV* disponible

por el IIE, con lo cual se debían tener algunos aspectos en consideración; el modelo del avión que se utilizaría y el costo computacional de la lógica a diseñar. No obstante, este proyecto no engloba la implementación del sistema en el micro-procesador de abordo.

1.3. Objetivo de este documento

Originalmente este proyecto se planteó de forma ambiciosa, trazando objetivos y plazos para cumplirlos que probaron ser en la práctica imposibles de alcanzar. Surgieron entonces las necesarias reformulaciones, lo que finalmente acabó en el proyecto que se presenta con este documento. El mismo no pretende ser un registro del periplo que significó todo este proceso, pero sí tiene una intención superior que la de dejar una constancia escrita del producto final que surgió del mismo. Pretendemos -y quizás aquí nos hayamos trazado una vez más un objetivo ambicioso- poner de manifiesto los procesos que llevaron al producto final, la investigación que hicimos, los caminos que exploramos -por infructuosos que hayan sido-, y la justificación de las decisiones tomadas.

Las razones para hacer esto son básicamente dos: la primera es que consideramos que hay poco valor en presentar un trabajo en un ámbito de aprendizaje, sin justificarlo adecuadamente. La segunda, y quizás más importante, es que aspiramos a que exista una continuación de este proyecto por parte de otros grupos de trabajo, con el fin de lograr en algún momento el ambicioso objetivo que nos trazamos originalmente -y que incluso otros supieron trazarse antes-. Para esto es necesario que quien tome contacto con este proyecto entienda claramente lo que hicimos y por qué, de modo de que no tengan la necesidad de volver a recorrer caminos que se han descartado. Esto obviamente no significa que todas nuestras decisiones hayan sido las más adecuadas y que no puedan ser modificadas, sino que al menos puedan comprenderse las decisiones que determinaron el producto final.

1.4. Visión global del proyecto

Para la culminación exitosa de este proyecto debieron procesarse varias etapas, en general de forma secuencial, pudiéndose realizar pocas veces grandes *items* del proyecto en forma paralela. La primer etapa, sin duda alguna fue la de acercarse a un mundo que para nosotros era desconocido como estudiantes de ingeniería eléctrica; la aeronáutica. Para esto fue necesario abordar y procesar una vasta cantidad de información (bibliografía sobre el área) relativa a la mecánica de los fluidos, aerodinámica, y los términos y convenciones del ambiente aeronáutico. También durante las etapas tempranas de este proyecto tomamos contacto con el mundo del aeromodelismo.

Luego de adquirir una cierta cantidad de conocimiento básicos, llegó la etapa del modelado y la construcción del modelo matemático. Identificar todos los elementos que tenían interacción con el sistema real a controlar, y decidir cuales de ellos podían ser despreciados. Se debe notar que despreciar un efecto en la etapa de modelado, además de ser crítico por tratarse de una etapa temprana del proyecto, implica necesariamente que ese efecto se verá posteriormente como una perturbación en el sistema a controlar. Una vez obtenido -o mejor dicho, construido- el modelo físico-matemático o modelo en variables de estado (no lineal y con doce variables de estado) se encaró la etapa de estudio de las ecuaciones matemáticas (de donde se desprenderán las etapas de linealización del modelo entre otras), y la etapa de testeo del modelo construido (en cuanto a que fuese consistente con la situación física real que se deseaba modelar). De alguna manera evaluar qué porcentaje de error tiene el nuestro respecto al sistema real, que en nuestro caso, creemos que es pequeño, lo que nos daría una mayor flexibilidad respecto al modelo de avión. Para el modelo de avión se utilizó el *BEAVER* manufacturado por *De Havilland of Canada Ltd.* el cual creemos, como ya se mencionó, puede aproximar a una gran variedad de aviones y de *UAVs*.

Una de las pocas etapas relativamente independientes de este proyecto fue la etapa de la construcción del generador de trayectorias. Esto es a menos de la relación íntima que tendrá el sistema de generación de trayectorias con el sistema encargado del seguimiento de las mismas. El sistema generador de trayectorias

genera trayectorias en un sub-espacio de fase, en nuestro caso particular el sub-espacio de posiciones y velocidades. En base al conocimiento adquirido del modelo se utilizó como idea para la generación de las trayectorias, la concatenación de trayectorias en torno a las cuales se pudiera aplicar control lineal, a saber, trayectorias donde las estrategias de control fueran menos costosas. El sistema generador de trayectorias, es base a la concatenación de estas trayectorias particulares, genera una trayectoria óptima en cuanto a una serie de criterios (minimizar distancia total recorrida, maximizar los radios de giros, minimizar la distancia a los *waypoints*, entre otros) cuyos pesos pueden ser ajustados por el usuario. Esto se logra mediante un proceso de minimización de una función de costo, partiendo de una semilla que representa un trayectoria posible pero sub-óptima.

En base al modelo obtenido y sus linealizaciones en torno a determinadas trayectorias, se elaboró un sistema de control en dos capas. Una primer capa que resuelve el problema de *tracking* de una trayectoria dada mediante control lineal en torno a las mencionadas trayectorias en un esquema *gain scheduling* y de realimentación de estados. Por otro lado, existen ciertos casos donde ya no tiene sentido que la primer capa de control continúe su esfuerzo por seguir una trayectoria dada, en estos casos actúa la segunda capa de control. Esta segunda capa de control es la encargada de regenerar la trayectoria cuando el error entre la trayectoria a seguir y la trayectoria real supera una cierta cota ingresada por el usuario del sistema.

Finalmente, se realizaron las etapas de validación del trabajo realizado, que consistió en el testeo del sistema propuesto mediante pruebas cualitativas y cuantitativas. Los testeos fueron realizados sobre el sistema completo (generador de trayectorias, seguimiento de trayectorias y regeneración de trayectorias) y también sobre cada parte por separado. Cabe destacar que para el diseño del sistema de control autónomo se debieron hacer algunas simplificaciones sobre el modelo, aunque el testeo se realizó sobre un modelo más completo (lo que sería el 'lazo abierto') al que se le agregaron algunos otros efectos para hacer más realista la situación de la simulación, como por ejemplo variaciones estocásticas de la velocidad del viento y otros efectos debido a la atmósfera no estacionaria.

El trabajo realizado se entrega en dos modalidades; una modalidad que apunta a un usuario conocedor y que, probablemente, desee utilizar las herramientas desarrolladas para implementar nuevas funcionalidades o continuar con el trabajo realizado, y otra modalidad que apunta a un usuario que sólo desea usufructuar y probar el sistema diseñado. Para esta última modalidad se generó un *software* con interfaz gráfica que integra todas las funcionalidades correspondientes al trabajo realizado en una sola aplicación.

También hemos considerados otros aspectos dentro de los plazos del proyecto. Realizamos algunos trabajos y relevamientos sobre la plataforma de vuelo disponible por el IIE. En lo que tiene que ver con los trabajos realizados podemos enumerar la búsqueda de alimentación más liviana y eficiente, se exploró con éxito la comunicación con el procesador de abordo con una PC, se construyó el cable para dicha comunicación y se consideró la posible necesidad de instalar sensores extras en el mismo. También se hicieron relevamientos apuntando a obtener alguna aproximación al modelo de dicho *UAV*. En este respecto se tomaron distintas medidas y se discutieron algunas técnicas computacionales para obtener algunos parámetros necesarios. Finalmente, hemos observado e identificado cierta cantidad de aspectos que deberían ser consideramos para la implementación del sistema que proponemos en dicho avión.

1.5. Visión global de este documento

La forma en la que está diagramado este documento pretende seguir el esquema temporal en que se sucedieron las etapas del proyecto y que enumeramos en la sección anterior. Básicamente, a cada etapa que hemos identificado le hemos asignado un capítulo en esta documentación.

En el capítulo dos se realizará una introducción a los términos de la aeronáutica y conceptos que se necesitarán a lo largo de la documentación. También se realiza una descripción del avión de UdelaR y los trabajos que realizamos sobre él, así como una descripción del avión que finalmente usamos para el modelado; el *BEAVER*. En el capítulo tres es donde desarrollamos la etapa de modelado y obtención de la ecuaciones del modelo en variables de estado propiamente dicho. Se enumeran todos los efectos considerados y cómo afectan el modelo, y también se presenta una enumeración de los efectos no considerados. Por otro lado se

hace también en este capítulo un análisis cualitativo de algunos aspectos del modelado realizado. Una vez obtenida la descripción en términos de un conjunto de ecuaciones, pudimos construir un simulador del sistema a controlar, lo que identificamos como el lazo abierto. El testeo y construcción de este lazo abierto se presenta en el capítulo cuatro.

El capítulo cinco versa sobre las trayectorias en torno a las cuales se puede linealizar el modelo en variables de estado y el proceso de linealización que devuelve un sistema lineal invariante en el tiempo: cómo se obtienen dichas trayectorias, cómo se obtienen las linealizaciones en torno a las mencionadas trayectorias y en base a qué ecuaciones. Por otro lado, el capítulo seis está plenamente dedicado al sistema generador de trayectorias, su concepción, sus fundamentos y su construcción. En el capítulo siete es donde se detallará el sistema de control que se implementó, de qué forma se implementó, la finalidad y la construcción de las distintas capas de control y otros aspectos correspondientes a la globalidad del proyecto en cuanto al sistema de vuelo autónomo diseñado e implementado. El testeo de todo el sistema se presenta en el capítulo ocho.

El capítulo nueve lo hemos dedicado a las consideraciones para la implementación del sistema propuesto sobre el *UAV* que dispone UdelaR. Se detallan los elementos que hemos identificado se deberían considerar pre-implementación. Dado que la construcción del *software* de usuario fue un proceso complejo desde el punto de vista de la integración de los distintos ambientes y elementos que interactúan en la implementación del sistema en *Matlab*, hemos dedicado el capítulo diez a dicho proceso de construcción. Se detalla el diseño de la integración, la especificación funcional con la que nos manejamos, el diseño de la interfaz de usuario y las herramientas o funcionalidades que pretende brindar al usuario final como comodidad de uso y versatilidad.

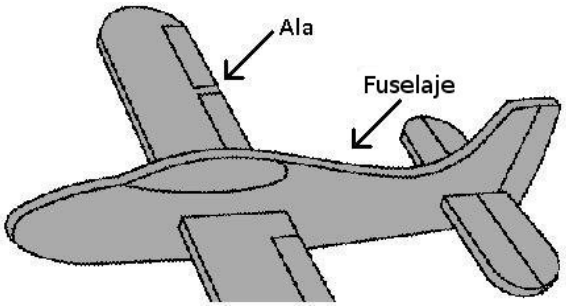
Finalmente en el último capítulo, el número once, se detallan las conclusiones finales de este proyecto. Los objetivos cumplidos, los problemas encontrados, y por sobre todo la evaluación que el grupo hace del trabajo realizado, del trabajo futuro en estas líneas de trabajo y de la forma en que se trabajó durante el transcurso de este proyecto.

Capítulo 2
Aeronáutica y modelo del avión

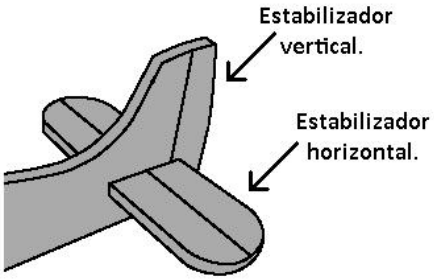
El objetivo de este capítulo es definir el vocabulario técnico a utilizar, los distintos términos utilizados en el área de la aeronáutica y demás elementos que se utilizarán con fluidez en el resto de esta documentación. Además, queremos hacer un breve repaso del avión que disponemos, pues los esfuerzos realizados durante el transcurso de este proyecto se enmarcan en la línea de generar un piloto automático para el avión disponible por parte de Universidad de la República. Finalmente, introduciremos un avión en particular -que será utilizado como modelo para el desarrollo del resto del proyecto- del que se detallan en este capítulo los aspectos más sobresalientes.

2.1. Definición de la nomenclatura aeronáutica

Los aviones, en su configuración estándar, constan de un fuselaje el cual representa el cuerpo del avión y de distintas superficies de vuelo, a saber, las alas ubicadas a ambos lados del fuselaje y los estabilizadores los cuales se encuentran situados en la cola del avión. La cola del avión consta de dos estabilizadores horizontales y un estabilizador vertical. Por otro lado, el avión del que se dispone es propulsado mediante el giro de una hélice ubicada en la parte delantera del avión.



(a) Superficie de vuelo: Fuselaje y alas.



(b) Superficie de vuelo: Cola y estabilizadores.

Figura 2.1: Distintos elementos que componen la configuración estándar en un avión. Imagen modificada [Www01].

Si llamamos O al centro de gravedad del avión, podemos definir tres ejes que pasan por dicho punto. Si nos referimos a la figura 2.2 tenemos que; el eje Ox_B será el eje longitudinal, el eje Oy_B será el eje lateral y el eje Oz_B será el eje vertical. Las distintas rotaciones que el avión puede tener respecto a estos ejes son representadas en una base solidaria a él y son llamadas en el ambiente de la aeronáutica *roll*, *pitch* y *yaw*. Si colocamos una base ortonormal $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$ solidaria al avión [a], tenemos que el *roll* corresponde a una rotación según el vector $\hat{i_B}$, el *pitch* corresponde a una rotación según el vector $\hat{j_B}$ y finalmente el *yaw* se corresponde con una rotación respecto al vector $\hat{k_B}$, como se puede observar en la imagen 2.2.

La forma de maniobrar el avión es mediante la deflexión de sus superficies de vuelo y la variación de la velocidad a la que gira la hélice. La deflexión de las superficies de vuelo se logra mediante partes móviles situadas en dichas superficies de vuelo, mientras que la variación del giro de la hélice se logra acelerando el

[a] En el siguiente capítulo se hará más extensiva la explicación respecto a esta base.

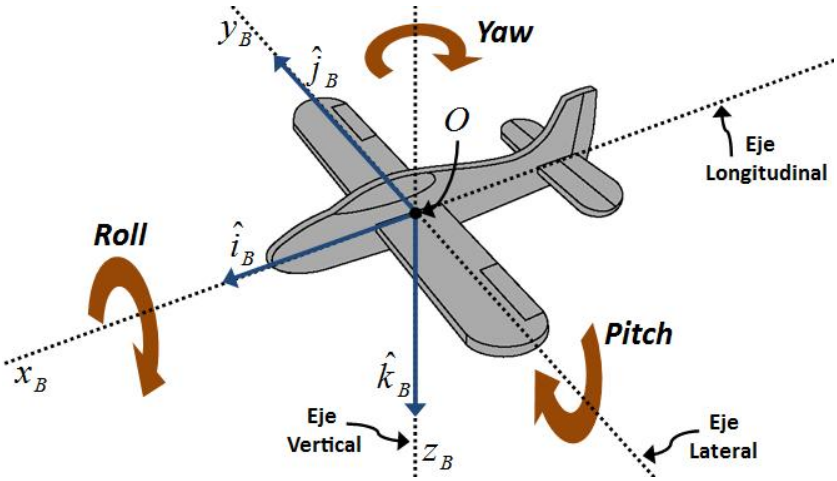


Figura 2.2: Descriptivo de los ejes longitudinal, lateral y vertical. Se puede notar el sentido definido positivo para las rotaciones de *roll*, *pitch* y *yaw*. Imagen modificada [Www01].

motor proporcionándole más o menos combustible. Las partes móviles en las superficies de vuelo, también llamadas superficies de control, son:

- ▷ **Alerones** - Se encuentran situados en las alas, en la parte más alejada del fuselaje.
- ▷ **Elevadores** - Se encuentran situados en los estabilizadores horizontales.
- ▷ **Timón de cola** - Se encuentra situado en el estabilizador vertical.
- ▷ ***Flaps*** - Se encuentran situados en las alas, en la parte más cercana al fuselaje.

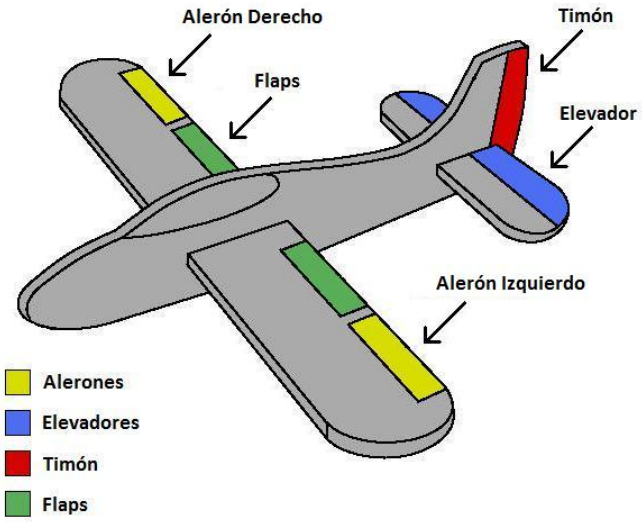
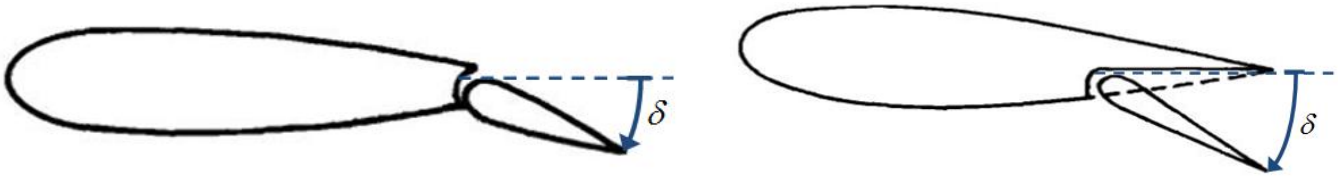


Figura 2.3: Descriptivo de las distintas superficies de vuelo. Imagen modificada [Www01].

La ubicación de los alerones, elevadores, timón de cola y *flaps* se puede observar en la figura 2.3. Se puede apreciar también la convención que utilizaremos para definir cual será el alerón derecho y el alerón izquierdo, la izquierda y la derecha son tales que se corresponden con un observador parado en la parte trasera del avión mirando hacia la parte delantera del mismo.

El movimiento de éstas superficies será descripto por un ángulo, del cual interesa en particular definir desde dónde está medido y cual es el sentido positivo. La forma en que se mueven los *flaps* es distinta a las demás superficies de vuelo, si bien el ángulo se medirá de la misma manera. En la figura 2.4 se puede observa

la diferencia entre las dos formas de movimientos de las superficies de control. Cabe observar además de dicha figura lo que respecta a la posición de la superficie móvil para $\delta = 0$, es decir, el origen de medición que utilizaremos para cada superficie de control. Los ángulos que definiremos a continuación se medirán de manera similar a la que se expone en dicha figura.



(a) Movimiento de las superficies de vuelo que no son *flaps*.

(b) Movimiento de los *flaps*.

Figura 2.4: Forma de medir los ángulos para la deflexión de las superficies de vuelo. Imagen modificada [Kun02].

La nomenclatura utilizada para medir estos desplazamientos, y que se utilizará en el resto de este documento, es la de llamar $\delta_a^{'}$ al ángulo correspondiente al alerón, δ_e al ángulo correspondiente al elevador, δ_r al ángulo que corresponde al movimiento del timón de cola [b] y δ_f para el ángulo correspondiente al movimiento de los *flaps*. El movimiento de los alerones es conjugado, a saber, cuando el alerón derecho baja una cierta cantidad de radianes, el alerón izquierdo sube la misma cantidad de radianes. Por esto último es que a efectos del modelado, no nos interesará expresar las fuerzas en términos de $\delta_a^{'}$, sino que lo haremos en términos de δa siendo $\delta_a = 2\delta_a^{'}$. Esto es consistente intuitivamente con el hecho de que cuando se mueve una cierta cantidad $\delta_a^{'}$ los alerones, al estar el movimiento conjugado, en un primer análisis las fuerzas aerodinámicas que aparecen en las superficies de vuelo apuntan hacia arriba en un ala y hacia abajo en la otra ala, generando ambas un momento respecto al eje longitudinal del avión en el mismo sentido, y por lo tanto aprece un factor dos al considerar la influencia de la deflexión de uno de los alerones. En cuanto a lo que respecta a los elevadores, ambos se mueven en la misma dirección en todo momento, un valor δ_e positivo generará un movimiento hacia abajo de los elevadores. Para el caso del timón de cola, la convención de signos utilizada para el ángulo δ_r, es que cuando se tiene un δ_r positivo el timón se moverá hacia la izquierda (respetando la definición de izquierda y derecha realizada párrafos anteriores). Finalmente, para el movimiento de los *flaps* no es necesaria ninguna aclaración dado que el movimiento sólo se puede efectuar en un sentido, ese único sentido en el que se puede mover será el definido positivo.

En la figura 2.5 aparecen representados los distintos ángulos utilizados, identificando su origen de medición y su sentido positivo. Ésta figura es para $\delta_a^{'} > 0$, $\delta_e > 0$ y $\delta_r > 0$. Es de notar que $\delta_a^{'} > 0$ implica necesariamente que la variable δ_a que utilizaremos es tal que $\delta_a > 0$.

Como se verá más adelante, las fuerzas aerodinámicas dependen fuertemente -además de las deflexiones de las superficies de vuelo que se explicó en párrafos anteriores- de dos ángulos que se definen a partir del eje longitudinal, el eje lateral, el eje vertical, el vector velocidad lineal del avión que en este caso conviene expresarlo en términos de la base $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$ como $\vec{v_B} = v_{Bx}\hat{i_B} + v_{By}\hat{j_B} + v_{Bz}\hat{k_B}$, y el vector velocidad del viento que también expresaremos en dicha base como $\vec{v_{vB}} = v_{vBx}\hat{i_B} + v_{vBy}\hat{j_B} + v_{vBz}\hat{k_B}$. Éstos dos ángulos son: el ángulo de ataque, al cual nos referiremos utilizando la letra α, y el ángulo de *sideslip*, para el cual se utiliza la letra β. Tanto α como β se definen más específicamente en base a la velocidad relativa al viento del avión que llamaremos $\vec{v_{rB}}$, y se define como la diferencia entre la velocidad lineal del avión y la velocidad del viento. La forma en que queda expresada esta velocidad se muestra en la ecuación 2.1.

$$\begin{aligned} \vec{v_{rB}} = \vec{v_B} - \vec{v_{vB}} &= (v_{Bx} - v_{vBx})\hat{i_B} + (v_{By} - v_{vBy})\hat{j_B}) + (v_{Bz} - v_{vBz})\hat{k_B}) \\ &= v_{rBx}\hat{i_B} + v_{rBy}\hat{j_B} + v_{rBz}\hat{k_B} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Finalmente, α es el ángulo comprendido entre la proyección de $\vec{v_{rB}}$ sobre el plano Ox_Bz_B y el eje longitudinal Ox_B. Por otro lado el ángulo β es el ángulo que forman el vector velocidad relativa al viento $\vec{v_{rB}}$

[b] El subíndice r que se utiliza para el movimiento δ_r del timón de cola proviene del inglés *rudder*.

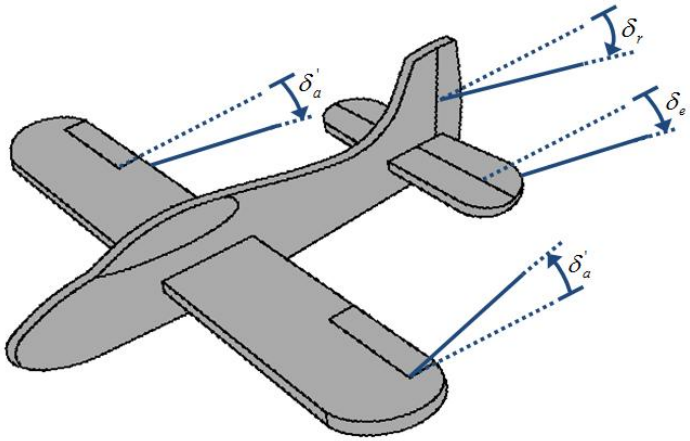


Figura 2.5: Descriptivo de los ángulos utilizados para medir los desplazamientos de los alerones, elevadores y timón. Se muestra en caso para valores de los parámetros tales que $\delta_a^{'}, \delta_e, \delta_r > 0$. Imagen modificada [Www01].

y el vector resultante de la proyección de dicha velocidad sobre el plano Ox_Bz_B. En la figura 2.6 se puede apreciar más claramente a qué ángulos nos referimos.

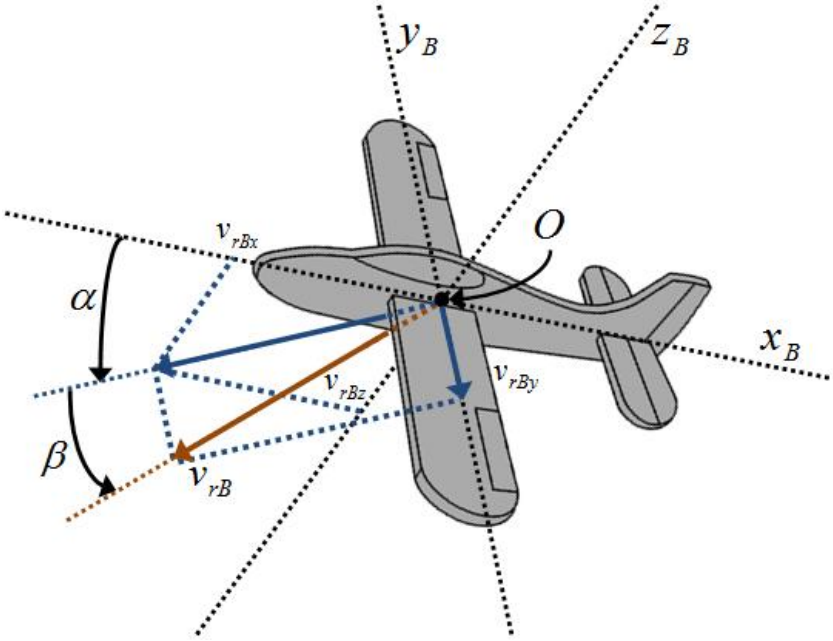


Figura 2.6: Ángulo de ataque α y ángulo *sideslip* β. Imagen modificada [Www01].

A partir de la figura 2.6 podemos observar de forma más clara como escribir los ángulos α y β en función de las componentes v_{rBx}, v_{rBy} y v_{rBz} de la velocidad lineal del avión. Los triángulos involucrados en la determinación de estos ángulos se pueden extraer de la figura 2.6 y son los que se muestra en la figura 2.7, de los cuales se pueden obtener las expresiones que se muestran en la ecuaciones 2.2 y 2.3. En el próximo capítulo se verá que el vector $\vec{v_{rB}}$ es extremadamente importante en el modelado de la fuerzas y momentos aerodinámicos involucrados en el vuelo de un avión. En este punto podemos observar que dicho vector es necesario para poder definir los ángulos α y β. En algunos casos se puede despreciar el efecto de la velocidad del viento $\vec{v_{vB}}$ respecto a la velocidad lineal del avión $\vec{v_B}$; en nuestro caso queremos hacer un modelado lo más representativo posible. Por otro lado, la velocidad del viento es un parámetro externo a nuestro sistema - que no podemos controlar de ninguna manera - con lo cual no podríamos asegurar que dicha hipótesis se cumpla para todos los casos de situación de vuelo.

Cabe destacar en este punto, que si no se considera la velocidad del viento en el modelado, es decir, si se considera dicha velocidad como perturbación al sistema, el efecto esperado es que el avión se aparte

de la trayectoria deseada, situación que deberá ser solucionada por el sistema de control. Por lo tanto, no considerarlo no representa un problema mayor en los casos usuales. En este trabajo, en algunos puntos se deberá realizar esta hipótesis y se considerará el viento con velocidad nula, tomando su efecto en la realidad como una de las tantas perturbaciones al sistema.

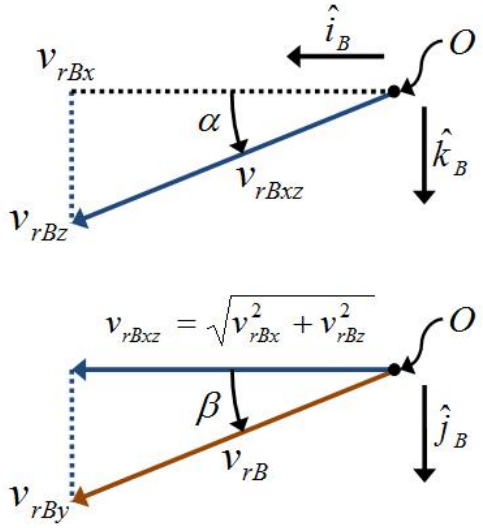


Figura 2.7: Triángulos involucrados en la determinación de α y β.

► $$\alpha = \arctan\left(\frac{v_{rBz}}{v_{rBx}}\right) \tag{2.2}$$

► $$\beta = \arctan\left(\frac{v_{rBy}}{\sqrt{v_{rBx}^2 + v_{rBz}^2}}\right) \tag{2.3}$$

Finalmente, nos quedan por definir diversos aspectos y parámetros que se obtienen a partir de la geometría del avión. Los más relevantes y que serán los que abordaremos en estos últimos párrafos de esta sección son: la superficie alar, la cuerda aerodinámica media, el ángulo de diedro, el ángulo de flecha (*sweepback*) y la envergadura del avión (*wing span*).

▷ **Superficie alar.**

A esta magnitud la denotaremos con la letra S. Es la superficie total de un ala del avión. Está íntimamente ligada a las fuerzas aerodinámicas, pues éstas últimas son directamente proporcionales a dicha superficie. Por lo tanto es un parámetro muy importante a definir; en un pre-dimensionamiento para el diseño de un avión es uno de los primeros parámetros que se definen.

▷ **Cuerda aerodinámica media.**

MAC por su siglas en inglés (*Mean Aerodynamic Chord*), es otro de los parámetros importantes a efectos del diseño y/o el modelado del sistema. Para definir esta magnitud primero debemos definir qué se entiende por cuerda. Dado un perfil de ala infinito según el eje perpendicular a la hoja y de sección homogénea, la cuerda aerodinámica a la cual denominaremos c es la distancia entre el centro de curvatura de la parte delantera del ala y su extremo trasero, como aparece descripta en la figura 2.8.

En el caso de estar frente a un ala finita la cual carezca de un perfil homogéneo, entonces se define la MAC como el promedio de las cuerdas aerodinámicas a lo largo del ala, al que denotaremos según el parámetro $\bar{c}$. Este promedio es claro que se trata de un promedio continuo. En el caso de que el perfil varíe de forma continua (lo cual siempre es válido en la realidad), esta MAC $\bar{c}$ coincide con una cuerda aerodinámica c para una sección de ala a una determinada distancia del fuselaje.

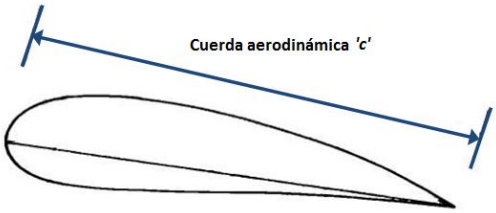


Figura 2.8: Cuerda aerodinámica para un perfil infinito y homogéneo. Imagen modificada [Kun02].

▷ **Ángulo de diedro.**

El ángulo de diedro es el ángulo que forman cada una de las alas con el eje lateral del avión Oy_B (2.6). Este ángulo por lo general es pequeño y muchas veces es nulo.

▷ ***Sweepback*. Ángulo de flecha.**

El ángulo de *sweepback* o ángulo de flecha, es el ángulo que forman la posición de las alas con el eje longitudinal del avión si se observa el avión sobre el plano Ox_By_B. Este ángulo se puede observa en la figura 2.9.

▷ ***Wing Span*. Envergadura.**

La envergadura de un avión se define como la distancia desde una punta de un ala a la punta de la otra ala. En la figura 2.9 se puede observar además cuál es esta distancia. Esta magnitud es también muy importante para la definición de las fuerzas aerodinámicas, y muy en particular en los momentos que ejercen dichas fuerzas.

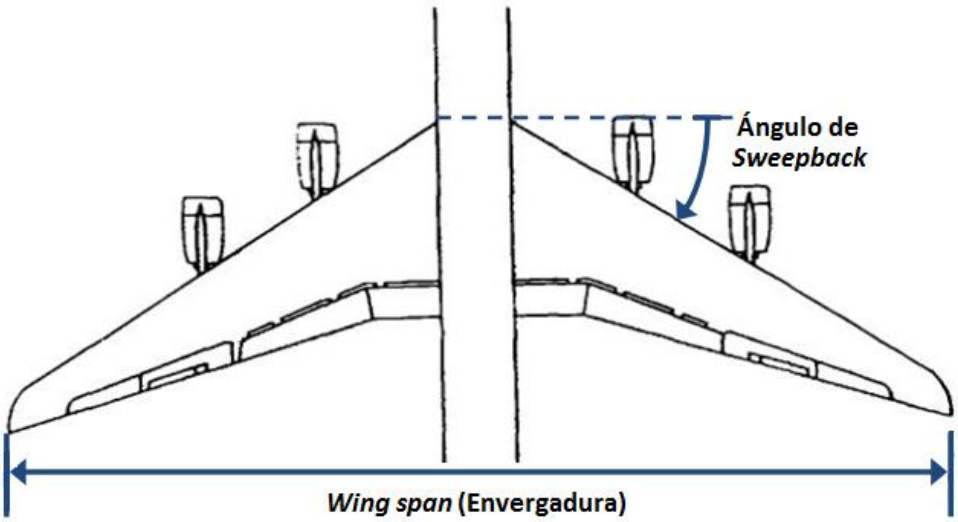


Figura 2.9: *Wing Span* y ángulo de *sweepback*. Imagen modificada [Kun02].

2.2. El avión de la UdelaR

En la primera formulación de este proyecto se aspiraba a desarrollar un sistema de control para el vuelo autónomo de un avión que había sido desarrollado en un proyecto de fin de carrera anterior de nuestra Facultad. Dicho avión se encuentra documentado extensivamente en la referencia [Cha07], pero a modo de

resumen presentamos un detalle de sus características más sobresalientes a continuación. Cabe notar que cuando se hizo la reformulación del proyecto, y se dejó por fuera del alcance del mismo a la implementación del sistema, todos los trabajos y relevamientos sobre el mismo quedaron truncados.

Nos interesa destacar sin embargo que existen diferencias no menores entre el avión que se desarrolló en el marco del proyecto anterior -y que se documenta en la referencia mencionada- y el avión que efectivamente llegó a nosotros. Por ejemplo, el motor que se entregó no fue el que se había usado en las pruebas exitosas de vuelo (si bien se entregó un motor funcionando), carecía de eje para conectar con la hélice y no estaba adaptado a la carrocería del avión, por lo que se requería de algún trabajo mecánico previo para el cual no teníamos previsto ningún tipo de infraestructura. Tampoco se entregó el tanque de nafta del avión o las baterías para la alimentación de la electrónica de abordo. Todo esto implicó la caída de varios supuestos del proyecto en su formulación inicial que finalmente desembocaron en la reformulación del mismo y el correspondiente dejado de lado del avión de la UdelaR.

2.2.1. Descripción geométrica

Como ya dijimos, el avión de la UdelaR se encuentra documentado en forma exhaustiva en [Cha07]. A modo de resumen, se incluye aquí una tabla con las características geométricas más relevantes del avión de la UdelaR.

Parámetros característicos del avión de la UdelaR	
Masa sin nafta	$12kg$
Carga útil	$2kg$
Superficie alar - S	$0,78m^2$
MAC - $\bar{c}$	$300mm$
Wing span - b	$2,6m$
Ángulo de diedro	4°
Ángulo de *sweepback*	0°
Longitud el fuselaje	$1,7m$
Altura	$0,75m$
Perfil del ala	Eppler 214
Diámetro de la hélice	$20''$
Motor	Nafta dos tiempos con $8kgf@8000RPM$
Tanque de combustible	$750ml$

Cuadro 2.1: Tabla de parámetros referentes a la geometría del avión de la UdelaR. [Cha07].

A continuación, en las figuras 2.10, 2.11 y 2.12, se pueden ver algunas imágenes del avión tal como se encuentra actualmente y como nos fue entregado.

Existen algunas características del mismo que nos interesa resaltar. Por ejemplo, el avión de la UdelaR es un avión que tiene propulsión mediante una hélice delantera que es movida por un motor de dos tiempos. Adicionalmente, el avión carece de *flaps*, por lo que se separa un poco del avión que finalmente fue utilizado para este proyecto (ver sección 2.3). Sin embargo, este último hecho no es del todo preocupante dado que se puede trabajar perfectamente con $\delta_f = 0$[c].

[c]En el sistema que se diseñó finalmente se hizo especial énfasis en que fuese portable a otro modelo de avión de manera sencilla. Para pasar a trabajar con un avión que carece de *flaps* simplemente se podrá fijar en cero ciertos coeficientes relativos a las fuerzas y momentos aerodinámicos que son afectados por los movimientos del *flap*

(a) Vista superior.

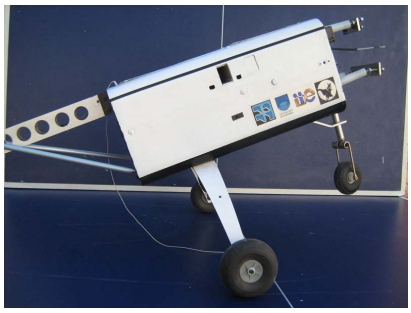
(b) Vista frontal con carenado.

Figura 2.10: Fotos tomadas del avión al final de la semana en que fue entregado a nosotros.

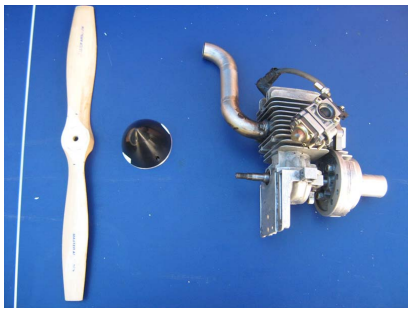
(a) Vista en diagonal.

(b) Vista frontal sin carenado.

Figura 2.11: Fotos tomadas del avión al final de la semana en que fue entregado a nosotros.



(a) Vista lateral sin carenado.



(b) Motor, hélice y *spinner*.

Figura 2.12: Fotos tomadas del avión al final de la semana en que fue entregado a nosotros.

Adicionalmente a los datos ya ofrecidos en la citada documentación, al comienzo de este proyecto hicimos un relevamiento de las características del avión con el objeto de completar algunos datos necesarios que no estaban documentados. Por ejemplo, comenzamos un proceso de medición (dado que el pesado ya estaba documentado en [Cha07]) para las distintas partes del avión por separado, de modo de poder obtener una estimación del tensor de inercia del mismo (I_{OB} como será llamado en capítulos y secciones posteriores).

Cabe destacar que no se trabajó extensamente en la forma de lograr un cálculo suficientemente preciso del tensor de inercia del avión de UdelaR, dado que el proyecto fue reformulado casi al tiempo que nos estábamos planteando dicho problema. Las ideas respecto al cálculo del tensor de inercia eran la siguientes: obtener las medidas y pesos de cada parte por separado, luego modelando a cada parte según un objeto de forma regular (cubos, prismas, esferas, poliedros en general) asumir una distribución de masa uniforme para cada parte por separado y calcular el tensor de inercia respecto al punto O por los ejes principales del avión, finalmente, calcular sumando los tensores de inercia o utilizando el teorema de *Steiner* (según correspondiese) la inercia total del avión[d]. También se consideró, dado que teníamos realizadas varias medidas, calcular

[d]Para esto es necesario considerar el avión como un rígido, despreciando los movimientos de la hélice y superficies de vuelo, así como la pérdida de masa asociada al combustible en vuelo

computacionalmente una estimación para el tensor de inercia. Respecto a este último punto incluso se generó una versión primaria de un *software* que lo implementara.

Si bien no se concluyó con el cálculo del tensor de inercia (aunque se armaron algunas rutinas *Matlab* en ese respecto, pero eran computacionalmente muy costosas), las medidas relevadas se utilizaron para construir planos *QCad* 2D. A continuación, en las figuras 2.14, 2.13 y 2.15, se muestran los planos del avión donde se pueden apreciar las medidas relevadas.

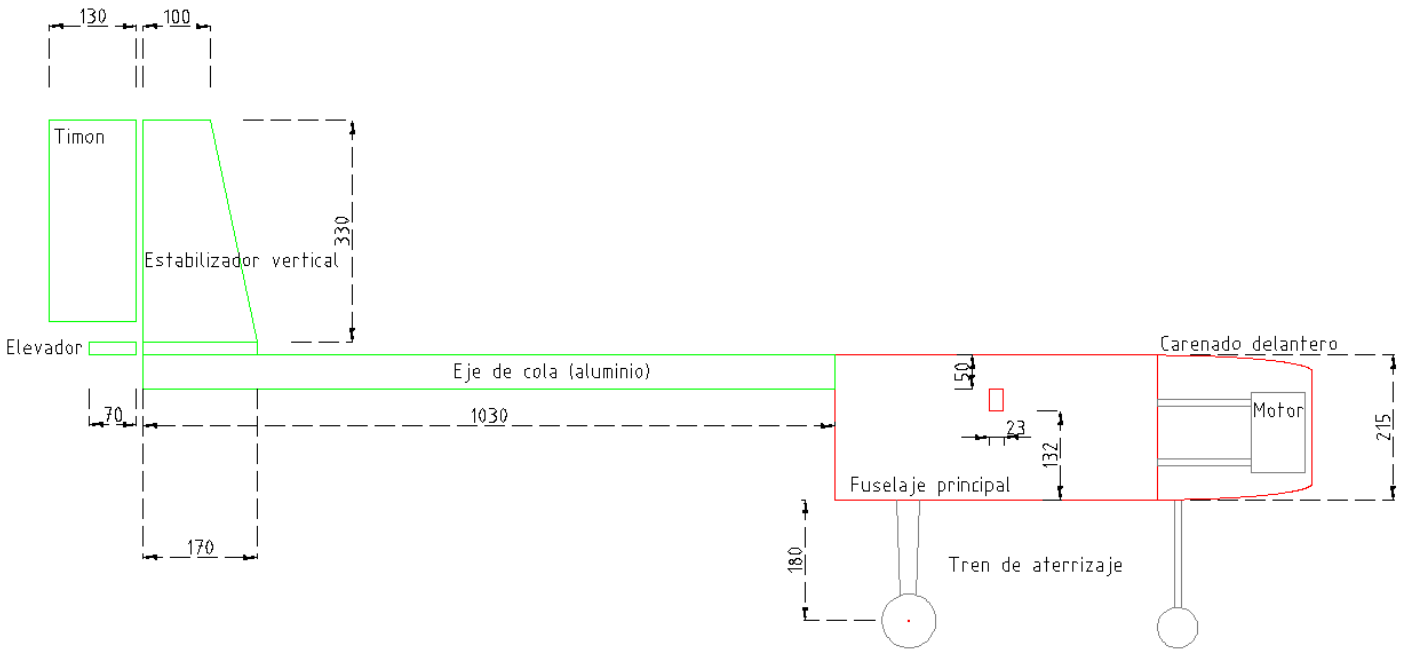


Figura 2.13: Vista lateral del avión de la UdelaR. Dimensiones en mm.

Otros esfuerzos fueron realizados en la línea de intentar obtener un modelo para las fuerzas aerodinámicas y del motor, pensando mayoritariamente en dos posibilidades: realizar ensayos en el túnel de viento de la Facultad, o realizar modelos computacionales precisos para simular las interacciones de interés, como podía hacerse con el software *Caffa3D* desarrollado en el IMFIA [Use07].

En todos los casos, estos trabajos fueron truncados cuando se tomó la decisión de abandonar el avión de la UdelaR y trabajar en torno al modelo de otro avión. Esta decisión se fundó básicamente en las carencias que tenía el avión de la UdelaR cuando llegó a nosotros, en particular el hecho de que el motor suministrado no fue el que se utilizó en las pruebas exitosas del avión y tampoco estaba resuelto su montaje al fuselaje. Se debían también realizar relevamientos de dicho avión para estimar distintos parámetros. Esto implicaba el diseño de los experimentos, armado del *set-up* experimental, acceso al túnel de viento y la elección de alguna técnica inteligente para relevarlos. Formas sobre estimar parámetros experimentales para un avión pueden encontrarse en la bibliografía [Nas74].

2.2.2. Aviónica

Con el término 'aviónica' nos referimos al conjunto de los elementos eléctricos y electrónicos que posee el avión, y que son necesarios para una futura implementación del sistema de control abordo del mismo. Una vez más, un detalle extensivo de esto puede encontrarse en la documentación [Cha07], pero nos interesa hacer algunas consideraciones surgidas de nuestra breve experiencia con el conjunto.

La aviónica existente cuenta esencialmente de 3 partes importantes: la computadora de abordo (placa *Gumstix* , por más detalles referirse al manual de usuario) con algunas placas periféricas para el control de puertos serie, de servomotores y conversores A/D; los sensores, entre los que se encuentran acelerómetros, giróscopos y el GPS; y finalmente los actuadores o servomotores.

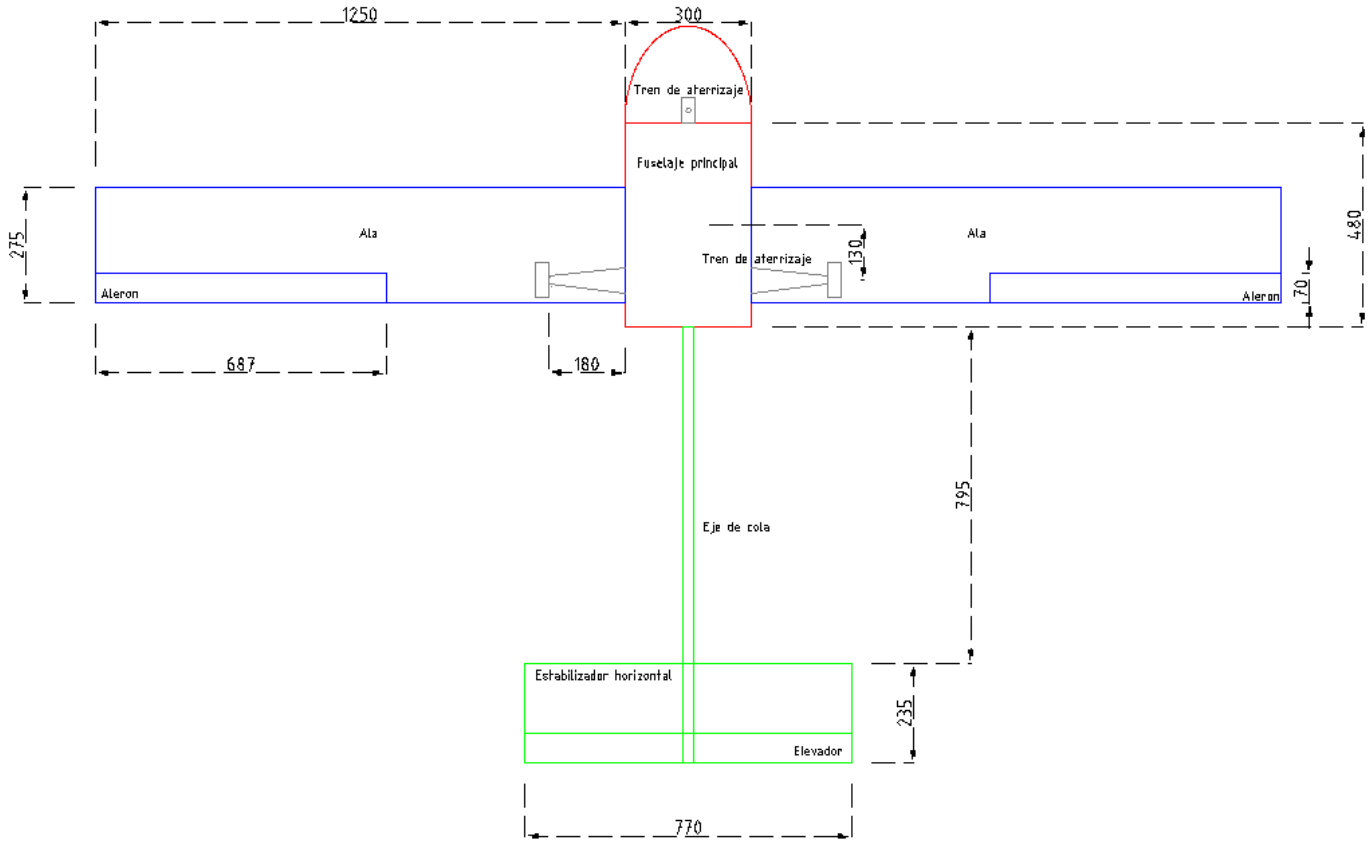


Figura 2.14: Vista aérea del avión de la UdelaR. Dimensiones en mm.

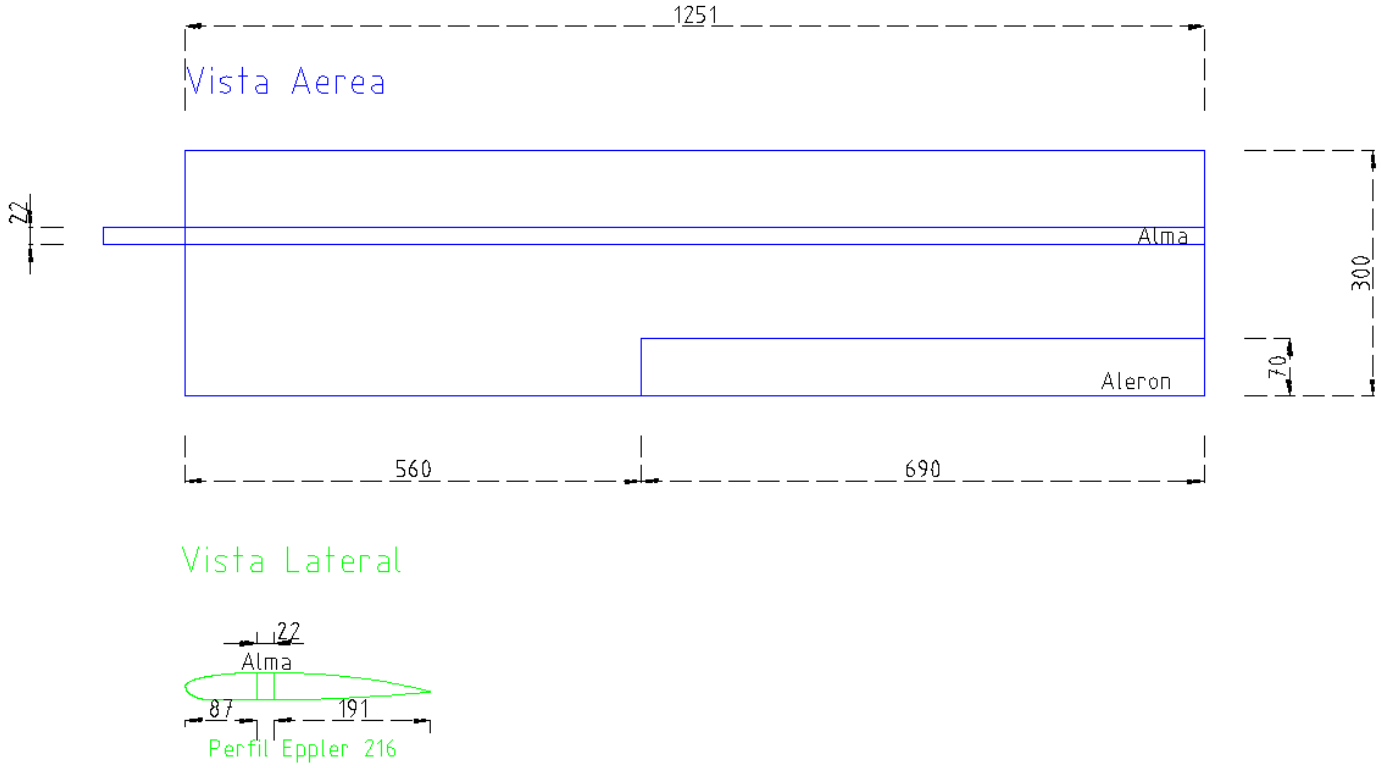


Figura 2.15: Detalle del ala del avión de la UdelaR. Dimensiones en mm.

Como ya se dijo, nuestra interacción con la aviónica se dio al comienzo de este proyecto, cuando aún nuestro objetivo era la implementación de un sistema de control para el vuelo autónomo del avión que poseía la UdelaR. En este contexto empezamos a hacer pruebas con el sistema, en particular para empezar a relevar

el funcionamiento de los sensores y actuadores. Sin embargo, nos encontramos con algunos imprevistos a la hora de interactuar con el conjunto de la aviónica. Por un lado carecíamos de cierta información básica como un diagrama completo de los circuitos y sus conexiones, características de la alimentación necesaria para los mismos (voltaje y consumo) y especificaciones de como iniciar la comunicación entre un PC de escritorio y el procesador de abordo de modo de programarlo. Por otro lado tampoco nos fue provista una batería adecuada para alimentar el sistema, o el cable necesario para las comunicaciones.

Si bien todas las dificultades pudieron ser salvadas con algo de investigación, es de notar que dicho proceso consumió una cantidad importante de tiempo. Por ejemplo, el cable que era imprescindible para las comunicaciones no era muy común y por lo tanto no se podía encontrar en plaza. El cable en sí cumplía con ciertas especificaciones que se podían encontrar en la web (aunque a veces se encontraban especificaciones contradictorias) por lo que pasamos a construirlo por nuestra cuenta. Lamentablemente para nosotros, uno de los conectores tampoco era particularmente común por lo que no fue fácil su adquisición localmente y aún luego de adquirirlo la construcción del cable probó ser un proceso no trivial (en parte por el reducido tamaño de uno de los conectores y en parte por la falta de experiencia soldando).

Otra línea de trabajo en este tema fue la de evaluar los sensores presentes en el avión, sus características eléctricas y de precisión. Ya había sido indicado en [Cha07] que si bien el avión de la UdelaR poseía ya una cantidad interesante de sensores, existían algunos problemas con los mismos. Por ejemplo, existía una falta de precisión asociada al rango dinámico necesario para los giróscopos y la cantidad de bits utilizada por los conversores A/D. Si bien llegamos a estudiar las hojas de datos de los conversores involucrados así como su el diagrama de las conexiones eléctricas, no existieron avances reales en este tópico debido a la reformulación del proyecto.

2.2.3. Especificaciones del cable para la comunicación con el *Gumstix*

La comunicación entre una PC de escritorio y el *Gumstix*, se hace mediante un protocolo serie RS-232. El conector en el *Gumstix* es mini-DIN de ocho pines hembra. Para establecer la conexión entonces utilizamos un conversor USB/DB-9 que es estándar para agregar puertos serie en las computadoras modernas que no los tienen y luego tuvimos que construir el cable para pasar de un conector DB-9 macho a un mini-DIN de ocho pines. Estrictamente para la comunicación se utilizan solamente tres pines: el de tierra, transmisión y recepción de datos (un dato que si hubiéramos conocido al comienzo de este proyecto nos hubiera ahorrado unas cuantas horas de trabajo). En el esquema que sigue se muestran ambos conectores del cable (un DB-9 hembra y un mini-Din 8 macho), los pines involucrados y su conexión.

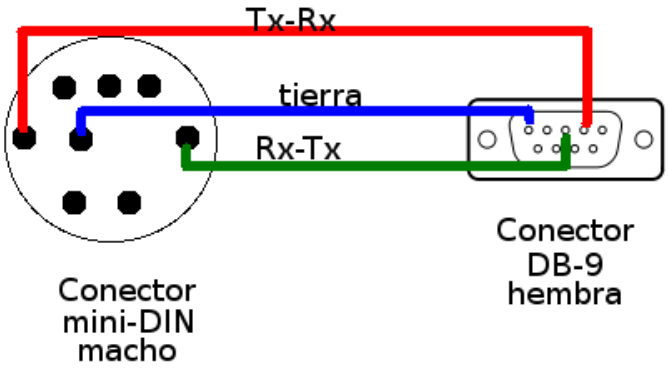


Figura 2.16: Diagrama de conexionado para el cable necesario para interactuar con el *Gumstix*.

2.3. Modelo de avión utilizado: *DHC-2 BEAVER*

Dada la imposibilidad de realizar las medidas necesarias sobre el avión disponible dentro de los márgenes de duración del proyecto, se decidió utilizar un modelo de avión disponible en la bibliografía. El avión a escoger debía ser -dentro de lo posible- lo más parecido al avión que disponíamos, en particular nos interesaba fundamentalmente similitud en el mecanismo de propulsión, a saber, propulsión mediante una única hélice situada en la parte delantera del avión. Otros aspectos a tener en cuenta eran la característica de la alas y la estructura general del avión.

El modelo de avión que finalmente utilizamos para el desarrollo de este proyecto fue el *BEAVER*. Es claro que existen notorias diferencias con el avión que dispone Universidad de la República, pero es importante que comparten varias características lo cual hace de este modelo una aproximación cercana al avión que se dispone en la realidad. Este avión fue manufacturado por la empresa canadiense *The De Havilland Aircraft of Canada Ltd.* (DHC de ahora en más) durante la década del 50, y el nombre completo del modelo es DHC-2 *BEAVER*. Disponemos según las referencias [Mul88] y [Rau01] todos los valores numéricos para los parámetros que se han venido definiendo durante el transcurso de este capítulo, pero lo más importante es que disponemos de la relación funcional entre las distintas fuerzas y momentos aerodinámicos y del motor con las distintas superficies y variables de control.

El modelo es un modelo aceptable para una vasta cantidad de situaciones de vuelo posibles según la referencia [Rau01], si bien dicho modelo fue obtenido mediante simulaciones en un rango de velocidades entre $35m/s$ y $55m/s$. En la medida que se trabaje en este rango de velocidades se asegura que el modelo es excelente. Es claro que el presente modelo deja de ser válido en situaciones de despegue y aterrizaje, en cuyo caso la referencia [Mul88] brinda algunas correcciones a realizar de modo de seguir utilizando el modelo sin grandes cambios de estructura [e]. Esto de por si no es del todo problemático pues en este proyecto nos concentraremos en el *tracking* de trayectorias unas vez el avión se encuentre en situación de vuelo, y nos independizaremos del problema del aterrizaje y del despegue.

En la figura 2.17 se puede observar un dibujo esquemático del *BEAVER*, en donde se puede apreciar su geometría básica.

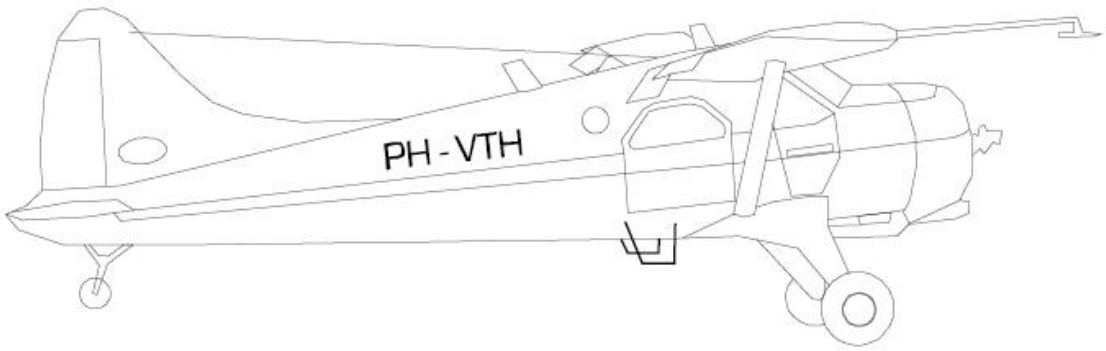


Figura 2.17: Vista lateral del *BEAVER*. [Rau01].

Como ya se ha mencionado durante el transcurso de este capítulo, durante el desarrollo de todo el proyecto hemos tenido siempre como premisa la portabilidad respecto al modelo de avión. Además de utilizar los parámetros que se detallarán en la siguiente sub-sección, utilizaremos una serie de coeficientes adimensionados que serán los que nos den las expresiones para las fuerzas y momentos aerodinámicos y del motor (esto se explicará en detalle en el próximo capítulo en la sección 3.4). Estos coeficientes adimensionados dependen fundamentalmente de la geometría del avión (en una primera aproximación). Amparados en el teorema de similitud [Kun02], que en nuestro caso básicamente nos dice que las magnitudes adimensionadas pueden ser portables (o migradas) desde un avión grande a un avión chico como el caso del avión de UdelaR, nos da cierta tranquilidad respecto a la elección de un modelo particular de avión para trabajar y

[e] Por ejemplo, cambian algunos parámetros del modelado del motor

la independización del modelo de avión que buscábamos. De todas formas, en todo el trabajo realizado dichos coeficientes (y también los parámetros) se pueden variar fácilmente de modo de pasar a trabajar con otro modelo de avión de forma rápida. Finalmente, debemos comentar que los parámetros que aparecen listados en la próxima sub-sección en la tabla 2.2 sí son parámetros que deben ser modificados para cada avión y ajustados a su escala pues, por ejemplo, inciden directamente en la magnitud de las fuerzas y momentos sobre las superficies de vuelo.

2.3.1. Parámetros de geometría del avión

Es esta sub-sección expondremos los parámetros que dependen de la geometría del avión, de los cuales se han realizado diversas explicaciones durante el desarrollo de este capítulo. En el cuadro 2.2 que se expone a continuación se pueden observar los valores obtenidos para las magnitudes de interés para esta sub-sección.

Parámetros de la geometría del avión *BEAVER*	
Superficie alar - S	$23{,}23m^2$
MAC - $\bar{c}$	$1{,}5875m$
Wing span - b	$14{,}63m$
Ángulo de diedro	1°
Ángulo de *sweepback*	0°
Longitud el fuselaje	$9{,}22m$
Altura	$2{,}74m$
Perfil del ala	NACA 64 A 416
Diámetro de la hélice	$2{,}59m$
Motor	Motor de pistones con $450HP@2300rpm$
Tanque de combustible	$521l$

Cuadro 2.2: Tabla de parámetros referentes a la geometría del *BEAVER*. [Mul88] [Rau01].

2.3.2. Masa total y tensor de inercia

Dos parámetros que serán de particular interés para el capítulo siguiente -donde desarrollaremos el modelado físico del sistema- son: la masa total del avión y el tensor de inercia del mismo.

El valor utilizado para la masa total del avión m (esto es, la masa total del avión sin combustible), será entonces:

▷ **Masa total del avión:**

$$\boxed{m = 2288{,}231kg} \tag{2.4}$$

En lo referente al tensor de inercia del avión, utilizaremos la nomenclatura usual para los momentos de inercia de la forma I_{xx}, I_{yy} y I_{zz}, y para los productos de inercia I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yz}, I_{zx} y I_{zy}. Es claro que el tensor de inercia que nos interesa es aquél que está medido en los ejes del avión, es decir, el eje longitudinal Ox_B, el eje lateral Oy_B y el eje vertical Oz_B. El tensor que corresponde al *BEAVER* se puede observar en la ecuación 2.5.

▷ **Tensor de inercia del avión (SB):**

$$\boxed{I_{OB} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_{xx} = 5368{,}39 kgm^2 \\ I_{yy} = 6928{,}93 kgm^2 \\ I_{zz} = 11158{,}75 kgm^2 \\ I_{xz} = I_{zx} = -117{,}64 kgm^2 \\ I_{xy} = I_{yx} = I_{zy} = I_{yz} = 0 \end{cases}} \tag{2.5}$$

Más adelante será de utilidad tanto la matriz I_{OB} como su inversa. La inversión de esta matriz, I_{OB}^{-1}, se puede obtener de manera sencilla aplicando la regla de *Kramer* por ejemplo, y la misma se muestra a continuación en la ecuación 2.6.

$$\boxed{I_{OB} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_{OB}^{-1} = \frac{1}{\Upsilon} \begin{pmatrix} I_{zz} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & \Upsilon / I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{xx} \end{pmatrix}} \tag{2.6}$$

Con: $\Upsilon = |I_{OB}|/I_{yy} = I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2$.

La información necesaria para la elaboración de este capítulo fue extraída de las siguientes referencias: [Abb59], [Cha07], [Hul07], [Kun02], [Mul88], [Nas74], [Ros101], [Tal75], [Use07], [Www01] y [Www02].

Capítulo 3
Modelado del sistema

A efectos de lograr cualquier tipo de control sobre un determinado sistema, se hace indispensable conocer este último en algún nivel. Es decir, es imprescindible conocer las propiedades del sistema, así como los distintos comportamientos frente a las diferentes situaciones que se pueden llegar a plantear. Una posible representación de estos comportamientos se constituye en un modelado mediante ecuaciones diferenciales. En este caso, no es sólo importante obtener las ecuaciones que gobiernan la dinámica, sino también lograr una comprensión del sistema tal que los resultados que se desprenden de esas ecuaciones resulten naturales e intuitivos, o por lo menos comprensibles y coherentes con la situación que se desea modelar. En un caso ideal, existirá un modelo que representará en forma matemática exacta la situación física, pero esto necesariamente lleva una complejidad inmanejable e innecesaria, pues es posible ver que, modelando las eventuales deficiencias del modelo como perturbaciones en el sistema, si el controlador es suficientemente robusto podrá controlar el sistema de todas maneras[a]. Es por todo esto que el primer paso que dimos en el camino a obtener un sistema de vuelo autónomo, es conseguir un Modelo en Variables de Estado (MVE de ahora en más) del sistema, es decir, un modelo de la forma $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t)$; donde $\vec{x}$ es el vector de estados del sistema, $\vec{u}$ el vector de entradas al sistemas y t el tiempo (que podría aparecer en principio explícitamente en las ecuaciones).

Como se puede desprender de lo anterior, es completamente necesario definir cual es el sistema a modelar, o dicho de otra manera, cual es el sistema a controlar. En nuestro caso el sistema a modelar es un avión en situación de vuelo, o más abstractamente, una cierta masa distribuida según una cierta geometría que, en situación de vuelo, está sometida a distintas fuerzas aerodinámicas sobre sus superficies y otras fuerzas tales como la gravedad o el propio motor. En base a esto pasaremos a explicar la obtención del MVE de nuestro sistema.

3.1. Modelado físico del sistema

Antes de empezar a deducir las distintas ecuaciones que gobiernan la dinámica de nuestro sistema, es conveniente gastar unas cuantas líneas a fin de definir de buena manera las diferentes coordenadas y magnitudes físicas que formarán parte del vector de estados de nuestro MVE. Por otro lado, siempre que se desea realizar un correcto modelado de una situación física se debe especificar claramente que sistemas de referencia y de coordenadas se están utilizando, no sólo para la comprensión posterior sino también para poder chequear la consistencia de todos los pasos realizados.

Como primer sistema de referencia se escogió el sistema $(\hat{i_I}, \hat{j_I}, \hat{k_I})$, un sistema de referencia inercial[b] fijo al que llamaremos Sistema Inercial (SI) y las magnitudes medidas en la base de ese referencial se notarán con el subíndice I. El otro sistema de referencia que se utilizará es el sistema $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$ al que llamaremos Sistema Body (SB), en este caso las magnitudes expresadas en la base de ese referencial se notarán con el

[a]Un caso paradigmático de esto es el control mediante un piloto humano que necesariamente desconoce la representación matemática exacta de las situaciones de vuelo pero de todas formas es capaz de pilotear el avión.

[b]Estrictamente hablando, se eligió un sistema de referencia solidario con la tierra, que no es inercial. Más adelante se hace referencia a las correcciones que son necesarias para introducir esta diferencia al modelo.

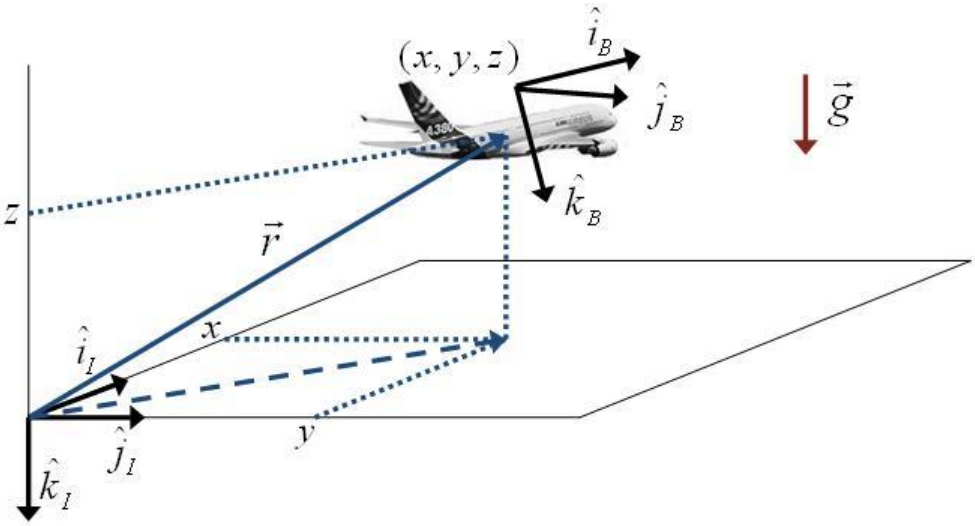
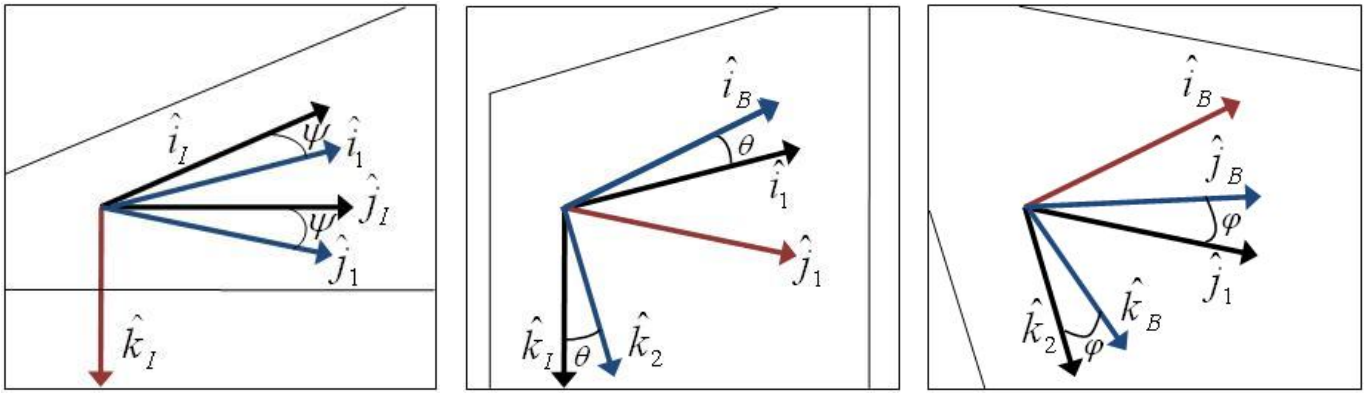


Figura 3.1: Ilustrativa de los distintos sistemas de referencia a utilizar y las coordenadas (x, y, z)

subíndice B. Dado que, por ejemplo, el momento de inercia del avión es constante en el SB[c] o que el SI es poco conveniente para expresar las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre las superficies de vuelo, es de particular interés expresar las magnitudes físicas y las distintas ecuaciones en la base del SB.

En la figura 3.1 se muestra de forma clara estos sistemas de referencia. Por otro lado es de notar que la posición absoluta del avión se puede expresar desde el SI como $\vec{r} = x\hat{i_I} + y\hat{j_I} - z\hat{k_I}$, y por lo tanto la velocidad absoluta expresada en esa base será $\vec{v_I} = \dot{x}\hat{i_I} + \dot{y}\hat{j_I} - \dot{z}\hat{k_I}$.

Siguiendo con el análisis, una relación importante a obtener es la relación que existe entre la velocidad absoluta del avión medida desde SI y expresada en este mismo sistema $\vec{v_I}$ y la velocidad absoluta del avión expresada en la base del SB $\vec{v_B}$. Esta relación viene dada simplemente por el cambio de base existente entre ambas bases ortonormales $(\hat{i_I}, \hat{j_I}, \hat{k_I})$ y $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$. Para esto se toma como convención realizar tres rotaciones en un determinado orden desde el SI hasta el SB. Estás rotaciones son las correspondientes a la elección de los ángulos de *Euler* (φ, θ, ψ), donde la primer rotación es la correspondiente a un ángulo ψ en torno al eje $\hat{k_I}$. Esto define otra base ortonormal $(\hat{i_1}, \hat{j_1}, \hat{k_I})$. Luego se realiza la segunda rotación correspondiente a una rotación de ángulo θ alrededor del eje $\hat{j_1}$, definiendo así la segunda base ortonormal $(\hat{i_B}, \hat{j_1}, \hat{k_2})$. Finalmente la última rotación necesaria es la rotación de ángulo φ en torno al eje $\hat{i_B}$, obteniéndose finalmente la base $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$ correspondiente al SB. Este proceso se ilustra en la figura 3.2.



(a) Primera rotación, ángulo ψ (b) Segunda rotación, ángulo θ (c) Tercera rotación, ángulo φ

Figura 3.2: Esquema de las distintas rotaciones en base a los ángulos de *Euler*. Por convención desde SI a SB.

Utilizando las ideas que se explicaron en el párrafo anterior es que se obtiene la relación entre las

[c]En realidad esta afirmación no es completamente cierta, pues sin duda tenemos una variación de la masa y del tensor de inercia del avión debido al consumo de nafta por parte del motor.

velocidades absolutas del avión expresadas en las bases de SI y SB, según se muestra en las ecuaciones siguientes. Las matrices H_2^B, H_1^2 y H_I^1 son las matrices de cambio de base entre las bases que correspondan, son relativamente sencillas de hallar y corresponden a cada una de las rotaciones en el orden correcto.

$$\begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{pmatrix} = H_2^B H_1^2 H_I^1 \begin{pmatrix} v_{Ix} \\ v_{Iy} \\ v_{Iz} \end{pmatrix} = H_I^B \begin{pmatrix} v_{Ix} \\ v_{Iy} \\ v_{Iz} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad H_2^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Dado que las matrices que se definen en la ecuación 3.2 son matrices de rotaciones, es fácil ver que sus inversas se obtienen efectuando rotaciones opuestas, es decir en vez de rotar (φ, θ, ψ) se rota $(-\varphi, -\theta, -\psi)$. Esto último habilita a obtener las inversas a estas matrices de rotación sustituyendo los senos por -senos. Utilizando dichas matrices es que se obtiene finalmente la matriz de cambio de base del SI al SB como $H_I^B = H_2^B H_1^2 H_I^1$.

$$H_I^B = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \sin\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi & \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\psi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Procediendo de la forma que se explicó en el párrafo anterior, con respecto a la obtención de la matriz inversa, se puede obtener $(H_I^B)^{-1} = H_B^I = H_1^I H_2^1 H_B^2$ simplemente haciendo la sustitución de los senos por -senos y multiplicando las matrices en el orden inverso al que fueron compuestas originalmente. La matriz de rotación queda entonces como se muestra en la ecuación 3.4.

$$H_B^I = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Una vez obtenido el cambio de base H_B^I, podemos expresar la relación entre las velocidades absolutas expresadas en las bases de ambos sistemas de referencia como se muestra en la ecuación 3.5.

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -\dot{z} \end{pmatrix} = H_B^I \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{pmatrix}} \tag{3.5}$$

Siguiendo con un enfoque cinemático en el análisis, ya que hallamos una relación entre las velocidades lineales absolutas medidas en ambas bases, pasaremos ahora a obtener la relación existente entre la velocidad angular absoluta expresada en la base del SB y los ángulos de *Euler* (φ, θ, ψ) que propusimos para expresar las diferentes rotaciones que llevan de un sistema de medida al otro.

Dado como se definió párrafos más arriba las diferentes rotaciones de ángulos φ ,θ y ψ, se puede notar que la velocidad angular del avión se puede escribir en términos de los versores intervinientes en el proceso de cambio de base según las rotaciones que se definieron como: $\vec{w} = \dot{\psi}\hat{k_I} + \dot{\theta}\hat{j_1} + \dot{\varphi}\hat{x_B}$ [d]. La intención ahora es expresar esta velocidad angular en términos de la base del SB. Esto se puede lograr observando que conocemos la relación existente entre los versores $\hat{k_I}$ y $\hat{j_1}$ con la base $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$. Utilizando la matriz de cambio de base de la ecuación 3.3 se puede obtener fácilmente que $\hat{k_I} = -\sin\theta\hat{i_B} + \cos\theta\sin\varphi\hat{j_B} + \cos\theta\cos\varphi\hat{k_B}$. Para el caso del otro versor $(\hat{j_1})$ tenemos que trabajar un poco más. Una forma de hacerlo es hallar la matriz H_1^B utilizando

[d] Esto es posible debido a que las velocidades angulares se pueden sumar vectorialmente sin necesidad de establecer un orden en las rotaciones.

las matrices definidas en la ecuación 3.2.

$$H_1^B = H_2^B H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{j_1} = \cos\varphi\hat{j_B} - \sin\varphi\hat{k_B}$$

Resultado que es razonable dado que una vez hecha la primer rotación, la única rotación que influye sobre el versor $\hat{j_1}$ es la tercera rotación de ángulo φ. Habiendo obtenido estas relaciones y recordando que $\vec{w} = \dot{\psi}\hat{k_I} + \dot{\theta}\hat{j_1} + \dot{\varphi}\hat{x_B}$ estamos en condiciones de expresar el resultado final como se muestra en la ecuación 3.6.

$$\begin{aligned} \vec{w} = \vec{w_B} &= (\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta)\hat{i_B} + (\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)\hat{j_B} + (\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)\hat{k_B} \\ &= w_{Bx}\hat{i_B} + w_{By}\hat{j_B} + w_{Bz}\hat{k_B} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Esta última relación se puede más amigablemente en forma matricial, como se ve muestra en la ecuación 3.8. La matriz en cuestión será llamada matriz L y su correspondiente inversa M. Ambas matrices se muestran en la ecuación 3.7, y relacionan la velocidad angular medida en la base del SB con la derivada temporal de los ángulos de *Euler*.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & \sin\varphi\tan\theta & \cos\varphi\tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi/\cos\theta & \cos\varphi/\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}} \tag{3.8}$$

Finalmente la relación que estábamos buscando queda expresada según la ecuación 3.9.

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix}} \tag{3.9}$$

Hasta ahora se hizo un análisis principalmente cinemático del sistema a controlar. Las ecuaciones que se dedujeron hasta el momento no nos dicen nada sobre la dinámica del sistema, sino que sólo nos aportan relaciones cinemáticas entre distintas magnitudes físicas involucradas en el modelo. A efectos de modelar esta dinámica las herramientas utilizadas fueron las cardinales [e]. En las siguientes ecuaciones se hará uso de la regla de derivación que se muestra en la ecuación 3.10. Notar que recién aquí se hace explícito que el sistema SB rota con el avión. Esta ecuación vincula las derivadas temporales medidas desde dos distintos referenciales, con la velocidad angular con la que se mueve uno respecto al otro. Un detalle importante a notar es que esta ecuación es vectorial, y por lo tanto completamente independiente de la base en que se expresen todas los vectores allí presentes.

$$\left(\frac{d\vec{q}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{q}}{dt}\right)_B + \vec{w_B} \times \vec{q} \tag{3.10}$$

Una vez obtenidas estas ecuaciones, que son las referidas al modelado de la dinámica del sistema,

[e] Es claro que la física ofrece otras herramientas para realizar este modelado. Para este caso en particular las ecuaciones son fácilmente obtenibles utilizando las cardinales.

estamos en condiciones de afirmar que tenemos modelado el sistema. El conjunto de ecuaciones que aparecen encuadradas en esta sección son las ecuaciones que utilizamos como MVE.

▷ **Primera cardinal:**

$$\vec{F}_{Neta} = \left(\frac{d(m\vec{v_I})}{dt}\right)_I = {}^{\mathrm{f}}m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_I = m[\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B + \vec{w}\times\vec{v}]^{\mathrm{g}} \tag{3.11}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{v_{Bx}} \\ \dot{v_{By}} \\ \dot{v_{Bz}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\left[F_B^{\vec{N}eta} - m\begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{pmatrix}\right]} \tag{3.12}$$

▷ **Segunda cardinal:**

$$\vec{T}_{Neto} = \left(\frac{d(\vec{L_O})}{dt}\right)_I = \left(\frac{d(I_O\vec{w})}{dt}\right)_I = {}^{\mathrm{f}}I_O\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_B + \vec{w}\times I_O\vec{w}^{\mathrm{g}} \tag{3.13}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{w_{Bx}} \\ \dot{w_{By}} \\ \dot{w_{Bz}} \end{pmatrix} = I_{OB}^{-1}\left[T_B^{\vec{N}eto} - \begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix} \times I_{OB}\begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix}\right]} \tag{3.14}$$

Es importante en este punto hacer notar la trascendencia de las ecuaciones 3.12 y 3.14. Estas son las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema. La comprensión y resolución de estas ecuaciones es fundamental a efectos de los objetivos de este proyecto. Se trata sin duda de un sistema no lineal, el cual es complejo de analizar y controlar. Hasta este momento hemos obtenido un sistema de ecuaciones de la forma $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{F_{Neta}}, \vec{T_{Neto}})$, usando como vector de estados $\vec{x} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi, v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}, w_{Bx}, w_{By}, w_{Bz})$. Es claro que aún no tenemos un modelo utilizable para controlar el sistema. Es necesario para esto saber como son $\vec{F_{Neta}}$ y $\vec{T_{Neto}}$, y como varían en situación de vuelo. Este problema merece una consideración especial y se tratará en una de las próximas secciones.

▷

y será tratado en próximas secciones.

3.2. Modelado de la atmósfera y superficie terrestre

A continuación nos plantearemos el modelado de la atmósfera terrestre. Como se explicó en el capítulo anterior, el avión que se tomó como base para este modelado es el *BEAVER*. Dicho avión tiene una altura típica de vuelo de $1800m$. En esta sección pretendemos obtener las correcciones necesarias para un avión volando a alturas de este orden. Sin embargo, las ecuaciones que obtendremos serán válidas independientemente del avión que se utilice, con lo cual si se desea trabajar con otro avión a otra altura de vuelo, las herramientas que se mostrarán seguirán siendo válidas y se podrán hacer sencillamente los arreglos correspondientes, siempre y cuando no se excedan los $11000m$ de altura, que es la altura donde se considera que el modelo propuesto deja de ser válido.

El modelo de la atmósfera que se utilizó es un modelo completamente estándar, que utilizan todas las

[f] Aquí hemos hecho dos suposiciones: que la masa y tensor de inercia del avión son constantes, cosas que no son del todo ciertas dado que existe una pérdida de masa debido al consumo de nafta; y que el sistema SI sea efectivamente inercial. En principio deespreciamos estos efectos y los consideramos modelables dentro de las perturbaciones al sistema.

[g] Cabe notar que a los efectos de computar el modelo, esta ecuación será utilizada expresando todas las cantidades presentes en el SB, pues de este modo es más fácil calcular las fuerzas y torques externos.

agencias aeronáuticas alrededor del globo, con diferencias más bien leves. El mismo corresponde al modelado de la atmósfera como un gas ideal, donde se tomarán ciertos valores a nivel del mar para la presión y la temperatura. Es de destacar, que estamos sobre hipótesis más que suficientes para que el modelo de gas ideal sea extremadamente adecuado [f]. Otra hipótesis importante es que consideraremos el aire en estado estacionario, es decir, con las presiones definidas por la fluido-estática y no consideraremos posibles variaciones de presión por velocidad del viento en este modelado de la atmósfera. Así mismo se utilizará un valor estándar para la masa molar del aire $\overline{M}_a$, donde de ahora en más nos referiremos a las variables con base molar (magnitudes expresadas por mol de sustancia) de la forma $\overline{q}$. Recordamos que la constante universal de los gases $\overline{R}$ tiene un valor de $\overline{R} = 8{,}3145 kJ/kMolK$, y que se puede obtener el R de cada gas como $R = \frac{\overline{R}}{\overline{M}}$. De esta manera, los valores utilizados para los parámetros mencionados son los siguientes:

- $P_0 = 101{,}312 kPa$
- $T_0 = 15^oC = 288{,}15K$
- $\overline{M}_a = 28{,}97 kg/kMol \Rightarrow R_a \approx 0{,}287 kJ/kgK$

Estos son los valores estándar que se utilizan para el modelado de la atmósfera. Finalmente, la última hipótesis que se realizará es que la temperatura de la atmósfera disminuya a razón de $6{,}5K$ por km de altura, linealmente. Esta hipótesis también forma parte del modelado estándar realizado para la atmósfera.

Empezando con la explicación del modelado, nos tomamos un pequeño diferencial de aire de altura dz y base de área A arbitraria, el cual se encuentra a una altura z de la forma que se muestra en la figura 3.3. Las fuerzas sobre este diferencial de aire serían: el propio peso del diferencial, sobre la cara inferior del mismo habría un presión $P(z)$ generado una fuerza hacia arriba, y sobre la cara superior de dicho diferencial una presión $P(z + dz)$ imponiendo una fuerza hacia abajo. Dado que estamos en condiciones de fluido-estática el diferencial no se mueve, en particular interesa que no tiene aceleración según la dirección que define la coordenada z.

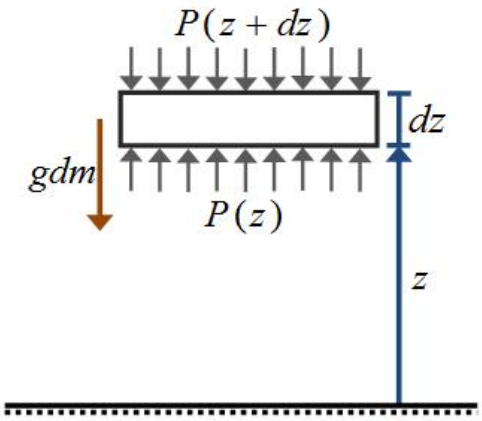


Figura 3.3: Modelado de la atmósfera.

$$P(z)A - P(z+dz)A - gdm = 0$$

$$A[P(z+dz) - P(z)] = AdP(z) = -gdm$$

$$\begin{aligned} AdP(z) &= -gdm \\ &= -g\rho(z)dV \\ &= -g\rho(z)Adz \end{aligned}$$

$$\boxed{dP(z) = -g\rho(z)dz} \qquad (3.15)$$

La ecuación 3.15 es un resultado clásico de la fluido-estática. Para obtener el resultado final debemos sumarle a este resultado la ecuación derivada del modelo de gas ideal (ecuación de estado) y la ecuación referida a la variación de la temperatura con la altura.

[f] El aire se trata de un gas, y en los rangos de presiones y temperaturas en los que trabajaremos el modelo es adecuado. En particular trabajaremos a presiones muy por debajo de la presión crítica del aire lo cual sería ya suficiente, pero de todos modos también las temperaturas involucradas son mayores que la temperatura crítica, y por lo tanto hace más válido aún el modelo. [Wyl99].

▷ **Modelo de gas ideal:**

$$\boxed{\frac{P(z)}{\rho(z)} = R_a T(z)} \tag{3.16}$$

▷ **Variación de la temperatura con la altura z:**

$$\boxed{T(z) = T_0 - \lambda z} \tag{3.17}$$

Donde λ es tal que, $\lambda = 0{,}0065K/m$. Sustituyendo $\rho(z)$ de la ecuación 3.16 y $T(z)$ de la ecuación 3.17, en la ecuación 3.15 e integrando se obtiene que:

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{g}{R_a}\int_0^z \frac{dz}{T_0 - \lambda z} = \frac{g}{\lambda R_a}\int_{T_0}^{T_0-\lambda z} \frac{dq}{q}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{g}{\lambda R_a}\ln\left(\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right) \tag{3.18}$$

De ahora en mas al cociente $\frac{g}{\lambda R_a}$ lo llamaremos γ. Cabe destacar que γ es un parámetro adimensionado. Para el valor de la gravedad terrestre g adoptamos en esta cuenta el valor estándar de dicha constante, el cual corresponde a $g = 9{,}80665m/s^2$.

$$\left.\begin{array}{c} g = 9{,}80665m/s^2 \\ \lambda = 0{,}0065K/m \\ R_a \approx 0{,}287kJ/kgK \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \frac{g}{\lambda R_a} \approx 5{,}2568$$

Habiendo obtenido el valor de γ, podemos despejar de la ecuación 3.18 una expresión para la variación de la presión con la altura, $P(z)$, la cual se muestra en la ecuación 3.19.

$$\boxed{P(z) = P_0\left(\frac{T_0-\lambda z}{T_0}\right)^{\gamma}} \tag{3.19}$$

Y, utilizando la ecuación 3.16, se puede obtener para la variación de la densidad con la altura, $\rho(z)$, resultado que se muestra en la ecuación 3.20.

$$\boxed{\rho(z) = \frac{P_0}{RT_0^{\gamma}}\left(T_0 - \lambda z\right)^{\gamma-1}} \tag{3.20}$$

Las ecuaciones 3.17, 3.19 y 3.20 nos permiten hallar una buena estimación para la temperatura, la presión y la densidad del aire a una altura z genérica respectivamente[g]. Se utilizarán estas dependencias con las variable z para la construcción del simulador del lazo abierto (modelo *simulink*), es decir, para la construcción del 'bloque' correspondiente al sistema en lazo abierto. Sin embargo, para el diseño del controlador se despreciará este efecto (variación con z) y se trabajará con valores constantes de estas propiedades termodinámicas a $1800m$ de altura, por esto interesa obtener los valores de éstas magnitudes a

[g]Siempre que no se excedan determinados límites, para alturas menores a 11000m las relaciones siguen siendo válidas. [Ros101].

dicha altura.

- $P_{1800} \approx 81{,}476kPa$
- $T_{1800} \approx 276{,}45K$
- $\rho_{1800} = \rho \approx 1{,}0269kg/m^3$

De ahora en más nos referiremos al valor de $\rho(z)$ simplemente como ρ. Otro valor que será necesario obtener para utilizar posteriormente es el valor de la densidad del aire a nivel del mar ρ_0, el cual se muestra a continuación en la ecuación 3.21.

$$\rho_0 = \frac{P_0}{R_a T_0} \approx 1{,}2251kg/m^3 \tag{3.21}$$

El valor de ρ y de ρ_0 serán importantes a la hora de definir las fuerzas y momentos aerodinámicos y del motor. Otro valor que es importante de esta sección es el valor adjudicado a g.

3.3. Definición de los subconjuntos de variables

Es importante definir en este momento los subconjuntos de distintas variables a utilizar. Ya se definió en una sección anterior el vector de estados que se utilizará, el cual se muestra nuevamente en la ecuación 3.22. Por otro lado, interesa definir el vector de entradas $\vec{u}(t)$ que representará el subconjunto de entradas al sistemas que podemos controlar mediante la computadora de a bordo, a saber, la deflexión de las superficies de vuelo y el giro en revoluciones por minuto de la hélice[h] . Este vector se puede apreciar en la ecuación 3.23. Además, existen determinadas variables que representan entradas al sistema y que no podemos controlar como por ejemplo la velocidad del viento v_v que expresaremos indistintamente en la base del sistema SI o del SB. A este vector de entradas que no podemos controlar lo llamaremos $\vec{h}(t)$ y se muestra en la ecuación 3.24. Finalmente, existen determinados parámetros del sistema dentro de los que se encuentran parámetros propios del avión y de la atmósfera, los cuales creemos conveniente agrupar en el vector $\vec{p}$ de modo de hacer más compacta la nomenclatura. El vector $\vec{p}$ se puede observar en la ecuación 3.25.

$$\vec{x} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi, v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}, w_{Bx}, w_{By}, w_{Bz}) \tag{3.22}$$

$$\vec{u} = (\delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_f, n) \tag{3.23}$$

$$\vec{h} = (v_{vIx}, v_{vIy}, v_{vIz}) = (v_{vBx}, v_{vBy}, v_{vBz}) \tag{3.24}$$

$$\vec{p} = (P_0, T_0, R, \lambda, g, \bar{c}, S, b) \tag{3.25}$$

De ahora en más en este trabajo, al hacer referencia al vector de estados x prescindiremos de la notación $\vec{x}$. Obraremos de manera similar al referirnos a los vectores $\vec{u}$, $\vec{h}$ y $\vec{p}$ que se definieron anteriormente, a los cuales nos referiremos simplemente como u, h y p respectivamente. También omitiremos la dependencia explícita con el tiempo (t) de ahora en adelante.

3.4. Fuerzas y momentos involucrados

Como se mencionó anteriormente, falta abordar el tema de como son $\vec{F_{Neta}}$ y $\vec{T_{Neto}}$ para un avión en situación de vuelo; esta problemática será tratada a lo largo de esta sección. Las fuerzas involucradas en este

[h]Estrictamente hablando, lo que controlamos con la computadora de abordo es la posición de los servomotores. Esto se traduce directamente en la deflexión de las superficies de vuelo, pero no en las RPM del motor.

modelo son el propio peso del avión $\vec{P}$, las fuerzas aerodinámicas $\vec{F_a}$ que actúan sobre las superficies de vuelo, y la fuerza que ejerce el motor - o visto de otra manera, la hélice - $\vec{F_p}$. Éstas son las fuerzas que aportan a los términos $\vec{F_{Neta}}$ y $\vec{T_{Neto}}$ que aparecen en las ecuaciones 3.12 y 3.14 y que dependen de las distintas variables que componen los vectores x, u, h y p definidos anteriormente. Cabe destacar que éste es un problema de mecánica de los fluidos de alta complejidad [Mul88] [Kun02]. La forma más general para la $\vec{F_{Neta}}$ y $\vec{T_{Neto}}$ es la que se puede observar a continuación en las ecuaciones 3.26 y 3.27 respectivamente.

$$\vec{F}_{Neta} = \vec{F_a}(x, u, h, p) + \vec{F_p}(x, u, h, p) + \vec{P} \tag{3.26}$$

$$\vec{T}_{Neto} = \vec{T_a}(x, u, h, p) + \vec{T_p}(x, u, h, p) \tag{3.27}$$

En las sub-secciones siguientes se explicará el modelado realizado para los términos que componen a $\vec{F}_{Neta}$ y $\vec{T}_{Neto}$.

3.4.1. Peso del avión

Para comenzar el análisis de las fuerzas involucradas en el modelo empezaremos con la más sencilla de expresar y evaluar; el peso. Como se mostró párrafos anteriores nos referiremos a él como $\vec{P}$. Dado que nuestro análisis no considera curvatura alguna de la tierra ni variaciones de g con la altura, es claro que el peso del avión es de la forma que aparece en la ecuación 3.28.

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\hat{k_I} \tag{3.28}$$

Como ya hemos mencionado, es nuestro interés expresar las fuerzas en la base del SB. Para esto podemos utilizar la matriz H_I^B que se definió en la ecuación 3.3 para rotar el versor $\hat{k_I}$. Haciendo esto se obtiene el resultado de la ecuación 3.29.

$$H_I^B\hat{k_I} = -\sin\theta\hat{i_B} + \cos\theta\sin\varphi\hat{j_B} + \cos\theta\cos\varphi\hat{k_B} \tag{3.29}$$

Y finalmente podemos obtener la expresión que utilizaremos para expresar el peso del avión, resultado que se muestra en la ecuación 3.30.

$$\boxed{\vec{P}(\theta, \varphi, m, g) = -mg\sin\theta\hat{i_B} + mg\cos\theta\sin\varphi\hat{j_B} + mg\cos\theta\cos\varphi\hat{k_B}} \tag{3.30}$$

Un comentario importante que cabe realizar en este punto es que el peso es una fuerza cuyo punto de aplicación es O, razón por la cual no ejerce torque alguno respecto a dicho punto. Como la ecuación 3.14 es obtenida de la segunda cardinal aplicada desde el punto O, el peso no tiene ninguna contribución a la ecuación de T_{Neto}.

3.4.2. Fuerzas y momentos aerodinámicos

Concentrándonos únicamente en los términos correspondientes a las fuerzas aerodinámicas, $\vec{F_a}$ y $\vec{T_a}$, los mismos tienen la forma que se muestra en las ecuaciones 3.31 y 3.32.

$$\vec{F_a} \propto \frac{\rho|\vec{v_r}|^2}{2}\vec{C_F}(x, u, h, p) \tag{3.31}$$

$$\vec{T_a} \propto \frac{\rho|\vec{v_r}|^2}{2}\vec{C_T}(x, u, h, p) \tag{3.32}$$

Es claro por motivos dimensionales que se debe multiplicar dicha expresión por un factor con dimensiones de superficie o de volumen para los distintos casos, según sea lo que se está calculando una fuerza o un momento. A su vez, las funciones $\vec{C_F}$ y $\vec{C_T}$ serán en cada caso distintas funciones de los elementos de los vectores x, u, h y p, definidos anteriormente en las ecuaciones 3.22, 3.23, 3.24 y 3.25.

Es importante destaca

▷

r que la dependencia de las funciones $\vec{C_F}$ y $\vec{C_T}$ en dichas variables diferirá según el avión en consideración dependiendo mayormente de su geometría. Es común en la bibliografía referida al tema encontrar como aproximación de esta dependencia un desarrollo de *Taylor*, y es ésta la formulación que se ha adoptado en este proyecto. Por supuesto, los coeficientes de la expansión polinomial (desarrollo de *Taylor*) dependerán del avión bajo consideración. A efectos de este proyecto, se asumió una expansión polinomial para un modelo de avión en particular que se explicará en párrafos siguientes. Cabe mencionar que el trabajo realizado durante este proyecto es independiente del avión escogido para su realización, pues es posible realizar un relevamiento de un avión de modo de obtener las magnitudes necesarias para poder aplicar los resultados que se obtuvieron.

Volviendo a un análisis más general de la fuerzas aerodinámicas, observamos que los vectores $\vec{F_a}$ y $\vec{T_a}$ se pueden escribir en términos de la base del SB de la forma que se muestra en las ecuaciones 3.33 y 3.34 respectivamente.

$$\vec{F_a}(x,u,h,p) = F_{ax}\hat{i_B} + F_{ay}\hat{j_B} + F_{az}\hat{k_B} \tag{3.33}$$

$$\vec{T_a}(x,u,h,p) = T_{ax}\hat{i_B} + T_{ay}\hat{j_B} + T_{az}\hat{k_B} \tag{3.34}$$

Para todas las fuerzas y torques aerodinámicos se debió adoptar un modelo, a saber, para las magnitudes F_{ax}, F_{ay}, F_{az}, T_{ax}, T_{ay} y T_{az}, que se definieron en las ecuaciones anteriores. El modelo para estas magnitudes se extrajo de la bibliografía [Mul88] [Rau01]. Éste corresponde a expansiones polinomiales a las cuales ya hemos hecho referencia párrafos atrás, la idea básica es la de aproximar las funciones por polinomios de cierto grado en la distintas variables pudiendo aceptar términos cruzados entre ellas.

Enfocándonos enteramente en como será el modelo para las fuerzas aerodinámicas, se muestra a continuación la forma que tendrán en nuestro modelado las magnitudes F_{ax}, F_{ay}, F_{az}, T_{ax}, T_{ay} y T_{az} en las ecuaciones 3.35, 3.36, 3.37, 3.38, 3.39 y 3.40 respectivamente. Como ya se ha mencionado en este trabajo, éstas dependen fuertemente de la velocidad del avión relativa al viento que hemos llamado $\vec{v_r}$, y que se define como $\vec{v_r} = \vec{v} - \vec{v_v}$ siendo $\vec{v}$ la velocidad lineal del avión y $\vec{v_v}$ la velocidad del viento.

$$F_{ax} = \frac{\rho S\|\vec{v_r}\|^2}{2} C_{ax}(w_{By}, \vec{v_r}, \alpha, \delta_r, \delta_f, c) \tag{3.35}$$

$$F_{ay} = \frac{\rho S\|\vec{v_r}\|^2}{2} C_{ay}(w_{Bx}, w_{Bz}, \vec{v_r}, \beta, \delta_a, \delta_r, b) \tag{3.36}$$

$$F_{az} = \frac{\rho S\|\vec{v_r}\|^2}{2} C_{az}(w_{Bx}, \vec{v_r}, \alpha, \beta, \delta_e, \delta_f, c) \tag{3.37}$$

$$T_{ax} = \frac{\rho Sb\|\vec{v_r}\|^2}{2} C_{al}(w_{Bx}, w_{Bz}, \vec{v_r}, \alpha, \beta, \delta_a, \delta_r, b) \tag{3.38}$$

$$T_{ay} = \frac{\rho S\bar{c}\|\vec{v_r}\|^2}{2} C_{am}(w_{Bx}, w_{Bz}, \vec{v_r}, \alpha, \beta, \delta_a, \delta_r, \delta_f, b) \tag{3.39}$$

$$T_{az} = \frac{\rho Sb\|\vec{v_r}\|^2}{2} C_{an}(w_{Bx}, \vec{v_r}, \alpha, \beta, \delta_e, c) \tag{3.40}$$

Siendo C_{ax}, C_{ay}, C_{az}, C_{al}, C_{am} y C_{an} de la forma:

$$
\begin{aligned}
C_{ax} &= C_{xo} + C_{x\alpha}\alpha + C_{x\alpha^2}\alpha^2 + C_{x\alpha^3}\alpha^3 + C_{xw_{By}}\frac{cw_{By}}{\|\vec{v_r}\|} + C_{x\delta_r}\delta_r + C_{x\delta_f}\delta_f + C_{x\alpha\delta_f}\alpha\delta_f \\
C_{ay} &= C_{yo} + C_{y\beta}\beta + C_{yw_{Bx}}\frac{bw_{Bx}}{2\|\vec{v_r}\|} + C_{yw_{Bz}}\frac{bw_{Bz}}{2\|\vec{v_r}\|} + C_{y\delta_a}\delta_a + C_{y\delta_r}\delta_r + C_{y\alpha\delta_r}\alpha\delta_r \\
C_{az} &= C_{zo} + C_{z\alpha}\alpha + C_{z\alpha^3}\alpha^3 + C_{zw_{By}}\frac{cw_{By}}{\|\vec{v_r}\|} + C_{z\delta_e}\delta_e + C_{z\delta_e\beta^2}\beta^2\delta_e + C_{z\delta_f}\delta_f + C_{z\alpha\delta_f}\alpha\delta_f \\
C_{al} &= C_{lo} + C_{l\beta}\beta + C_{lw_{Bx}}\frac{bw_{Bx}}{2\|\vec{v_r}\|} + C_{lw_{Bz}}\frac{bw_{Bz}}{2\|\vec{v_r}\|} + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r + C_{l\alpha\delta_a}\alpha\delta_a \\
C_{am} &= C_{mo} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\alpha^2}\alpha^2 + C_{mw_{By}}\frac{cw_{By}}{\|\vec{v_r}\|} + C_{m\delta_e}\delta_e + C_{m\beta^2}\beta^2 + C_{mw_{Bz}}\frac{bw_{Bz}}{2\|\vec{v_r}\|} + C_{m\delta_f}\delta_f \\
C_{an} &= C_{no} + C_{n\beta}\beta + C_{nw_{Bx}}\frac{bw_{Bx}}{2\|\vec{v_r}\|} + C_{nw_{Bz}}\frac{bw_{Bz}}{2\|\vec{v_r}\|} + C_{n\delta_a}\delta_a + C_{n\delta_r}\delta_r + C_{nw_{By}}\frac{cw_{By}}{\|\vec{v_r}\|} + C_{n\beta^3}\beta^3
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Donde se conocen los valores para los parámetros C_{xo}, $C_{x\alpha}$, $C_{x\alpha^2}$, $C_{x\alpha^3}$, $C_{xw_{By}}$, $C_{x\delta_r}$, $C_{x\delta_f}$, $C_{x\alpha\delta_f}$, C_{yo}, $C_{y\beta}$, $C_{yw_{Bx}}$, $C_{yw_{Bz}}$, $C_{y\delta_a}$, $C_{y\delta_r}$, $C_{y\alpha\delta_r}$, C_{zo}, $C_{z\alpha}$, $C_{z\alpha^3}$, $C_{zw_{By}}$, $C_{z\delta_e}$, $C_{z\delta_e\beta^2}$, $C_{x\delta_f}$, $C_{x\alpha\delta_f}$, C_{lo}, $C_{l\beta}$, $C_{lw_{Bx}}$, $C_{lw_{Bz}}$, $C_{l\delta_a}$, $C_{l\delta_r}$, $C_{l\alpha\delta_a}$, C_{mo}, $C_{m\alpha}$, $C_{m\alpha^2}$, $C_{mw_{By}}$, $C_{m\delta_e}$, $C_{m\beta^2}$, $C_{mw_{Bz}}$, $C_{m\delta_f}$, C_{no}, $C_{n\beta}$, $C_{nw_{Bx}}$, $C_{nw_{Bz}}$, $C_{n\delta_a}$, $C_{n\delta_r}$, $C_{nw_{By}}$ y $C_{n\beta^3}$ [Mul88] [Rau01]. Es de notar que todos los coeficientes C son adimensionados.

Debe destacarse además que para que este modelo sea válido, se asume que la velocidad del viento es constante respecto de un referencial inercial. Es por esto que es posible realizar ensayos estáticos para determinar dichas fuerzas. La corrección necesaria para generalizar las fuerzas y momentos aerodinámicos a casos donde la hipótesis antedicha no se cumple, es detallada en una sección posterior.

3.4.3. Fuerzas y momentos del motor

Finalmente, debemos hacer un análisis similar pero para la fuerza y el torque del motor. En este caso se puede también escribir estos términos, $\vec{F_p}$ y $\vec{T_p}$, en términos de la base del SB de la misma forma que se hizo en la sub-sección anterior como se muestra en las ecuaciones 3.33 y 3.34 respectivamente.

$$\vec{F_p}(x,u,h,p) = F_{px}\hat{i_B} + F_{py}\hat{j_B} + F_{pz}\hat{k_B} \tag{3.42}$$

$$\vec{T_p}(x,u,h,p) = T_{px}\hat{i_B} + T_{py}\hat{j_B} + T_{pz}\hat{k_B} \tag{3.43}$$

Nuevamente se debió asumir un modelo para las magnitudes F_{px}, F_{py}, F_{pz}, T_{px}, T_{py} y T_{pz}. Siendo consistentes con el modelado obtenido para las fuerzas y momentos aerodinámicos, decidimos extraer el modelo para éstas otras fuerzas y momentos de la misma bibliografía [Mul88] [Rau01]. Básicamente, queremos asegurarnos que el modelado entre la geometría del avión y su motor fuese consistente. Esta decisión hace que esto último necesariamente se cumpla, dado que el modelado extraído se hizo en base a un avión existente. La forma que tendrán entonces las magnitudes de interés se muestran en las ecuaciones 3.44, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48 y 3.49.

$$F_{px} = \frac{\rho S\|\vec{v_r}\|^2}{2}C_{px}(\alpha,\kappa) \tag{3.44}$$

$$F_{ay} = 0 \tag{3.45}$$

$$F_{az} = \frac{\rho S\|\vec{v_r}\|^2}{2}C_{pz}(\kappa) \tag{3.46}$$

$$T_{px} = \frac{\rho Sb\|\vec{v_r}\|^2}{2}C_{pl}(\alpha,\kappa) \tag{3.47}$$

$$T_{py} = \frac{\rho S\bar{c}\|\vec{v_r}\|^2}{2}C_{pm}(\kappa) \tag{3.48}$$

$$T_{pz} = \frac{\rho S b \|\vec{v_r}\|^2}{2} C_{pn}(\kappa) \tag{3.49}$$

Siendo C_{px}, C_{pz}, C_{pl}, C_{pm} y C_{pn} de la forma:

$$\begin{aligned} C_{px} &= C_{x\kappa}\kappa + C_{x\alpha\kappa^2}\alpha\kappa^2 \\ C_{pz} &= C_{z\kappa}\kappa \\ C_{pl} &= C_{l\kappa\alpha^2}\kappa\alpha^2 \\ C_{pm} &= C_{m\kappa}\kappa \\ C_{pn} &= C_{n\kappa^3}\kappa^3 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Donde se conocen los valores para los parámetros $C_{x\kappa}$, $C_{x\alpha\kappa^2}$, $C_{z\kappa}$, $C_{l\kappa\alpha^2}$, $C_{m\kappa}$ y $C_{x\kappa^3}$. Nuevamente, es de notar que todos los coeficientes C son adimensionados.

Como se puede apreciar, las fuerzas y momentos del motor depender fuertemente del parámetro κ el cual se define en la ecuación 3.51.

$$\kappa(n, \vec{v_r}, \rho) = C_1 + C_2 \left[\frac{a + b(\frac{n}{n_0} + 1) + (cn + d)(1 - \frac{\rho}{\rho_o})}{\rho \|\vec{v_r}\|^3/2} \right] \tag{3.51}$$

Donde κ es un parámetro adimensionado el cual es directamente proporcional a la potencia del motor y se obtiene observando el cambio de presión total debido al efecto de la hélice. Es de observar que este modelo es válido para un motor de pistones con el cual se mueve una hélice, lo cual representa una situación igual al avión del que disponemos. [Rau01].

De esta forma quedan descriptas entonces las relaciones funcionales que utilizaremos para las fuerzas y momentos aerodinámicos y del motor en el modelado. Éstas corresponden al modelo de avión que estamos utilizando, el *BEAVER* y están sujetas a los comentarios realizados en la sección 2.3.

3.4.4. Resumen de coeficientes

Siguiendo en la misma línea de la sub-sección anterior, expondremos en ésta los valores para los coeficientes necesarios para definir las expansiones polinomiales correspondientes a las fuerzas y momentos aerodinámicos y del motor, los cuales se pueden observar en las tablas 3.1 y 3.2.

Coeficientes para las fuerzas aerodinámicas			
F_{ax}	$C_{xo} = -0{,}03554$ $C_{x\alpha^3} = -5{,}162$ $C_{x\delta_f} = -0{,}09447$	$C_{x\alpha} = 0{,}00292$ $C_{xw_{By}} = -0{,}6748$ $C_{x\alpha\delta_f} = 1{,}106$	$C_{x\alpha^2} = 5{,}459$ $C_{x\delta_r} = 0{,}03412$
F_{ay}	$C_{yo} = -0{,}002226$ $C_{yw_{Bz}} = 0{,}3666$ $C_{y\alpha\delta_r}$ = 0.5238	$C_{x\beta} = -0{,}7678$ $C_{y\delta_a} = -0{,}02956$	$C_{yw_{Bx}} = -0{,}124$ $C_{y\delta_r} = 0{,}1158$
F_{az}	C_{zo} = -0.05504 $C_{zw_{By}} = -2{,}988$ $C_{z\delta_f} = -1{,}377$	$C_{z\alpha}$ = -5.578 $C_{z\delta_e} = -0{,}398$ $C_{z\alpha\delta_f} = -1{,}261$	$C_{z\alpha^3} = 3{,}442$ $C_{z\delta_e\beta^2} = -15{,}93$
Coeficientes para los momentos aerodinámicos			
T_{ax}	$C_{lo} = 0{,}000591$ $C_{lw_{Bz}} = 0{,}1695$	$C_{l\beta} = 0{,}0618$ $C_{l\delta_a} = -0{,}09917$	$C_{lw_{Bx}} = -0{,}5045$ $C_{l\delta_r} = 0{,}006934$

	$C_{l\alpha\delta_a} = -0{,}08269$		
T_{ay}	$C_{mo} = 0{,}09448$ $C_{mw_{By}} = -15{,}56$ $C_{mw_{Bz}} = -0{,}3118$	$C_{m\alpha} = -0{,}6028$ $C_{m\delta_e} = -1{,}921$ $C_{m\delta_f} = 0{,}4072$	$C_{m\alpha^2} = -2{,}14$ $C_{m\beta^2} = 0{,}6921$
T_{az}	$C_{no} = -0{,}003117$ $C_{nw_{Bz}} = -0{,}1112$ $C_{nw_{By}} = 0{,}1595$	$C_{n\beta} = 0{,}006719$ $C_{n\delta_a} = -0{,}003872$ $C_{n\beta^3} = 0{,}1373$	$C_{nw_{Bx}} = -0{,}1585$ $C_{n\delta_r} = -0{,}08265$

Cuadro 3.1: Tabla de coeficientes para las fuerzas y momentos aerodinámicos. [Mul88] [Rau01].

Coeficientes para las fuerzas y momentos del motor		
κ	$C_1 = 0{,}08696$ $a \backsimeq -240{,}14kW$ $c \backsimeq -0{,}071kW/rpm$ $n_0 = 2010rpm$	$C_2 = 191{,}18kg/kWs^3$ $b \backsimeq 203{,}43kW$ $d \backsimeq 300{,}08kW$
F_{px}	$C_{x\kappa} = 0{,}1161$	$C_{x\alpha\kappa^2} = 0{,}1453$
F_{pz}	$C_{z\kappa} = -0{,}1563$	
T_{px}	$C_{l\kappa\alpha^2} = -0{,}01406$	
T_{py}	$C_{m\kappa} = -0{,}07895$	
T_{pz}	$C_{n\kappa^3} = -0{,}003026$	

Cuadro 3.2: Tabla de coeficientes para las fuerzas y momentos del motor. [Mul88] [Rau01].

3.4.5. Comentarios sobre el modelado de las fuerzas y momentos

Para finalizar con esta descripción de las fuerzas, expondremos a continuación algunos comentarios respecto al modelo que utilizaremos para las mismas que son de interés en esta etapa de modelado. Esto es a modo de chequeo del modelo, dado que debemos observar la correcta correspondencia entre las ecuaciones que son utilizadas en el MVE y el sistema físico a modelar.

Si observamos las expresiones para las fuerzas y momentos aerodinámicos, podemos notar que éstas tienen una fuerte dependencia de los ángulos α y β, y las variables de control δ_a, δ_e, δ_r y δ_f. Un primer elemento a chequear es que los sentidos positivos utilizados para las variables de control δ, que se pueden observar en la figura 2.5, sean consistentes con los sentidos positivos definidos para los momentos aerodinámicos T_{ax}, T_{ay} y T_{az}, el momento de *roll*, el momento de *pitch* y el momento de *yaw* respectivamente, que están definidos sus sentidos positivos según la regla de mano derecha utilizando la base $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$ del SB, así como con los sentidos las fuerzas aerodinámicas definidos positivos según los versores de dicha base. En la figura 2.2 se puede apreciar el sentido positivo para estos momentos. Otros elementos que analizamos de este modelo son: la variación del coeficiente de *lift* en función del ángulo α y la relación típica entre dicho coeficiente de *lift* y el coeficiente de *drag*, de forma de compararlos contra los resultados teóricos ideales de la bibliografía.

Si observamos la figura 2.5, intuitivamente podemos notar que una variación positiva del ángulo del alerón ($\delta_a > 0$) implica la generación de un momento según $-x_B$, es decir en el sentido opuesto al definido positivo para el momento T_{ax}. En menor medida, aparecería un momento según la dirección $-k_B$. En cuanto a su efecto en las fuerzas aerodinámicas, las fuerzas que aparecen en los alerones debido a este movimiento son tales que generan momentos según lo comentado en las oraciones anteriores pero a efectos de la primera cardinal se anulan, con lo cual sería de esperar que debido a esta simetría (y el movimiento conjugado) no aparecieran variaciones en las componentes F_{ax} y F_{az}. Lo dicho anteriormente se refleja en el modelo que se obtuvo. El movimiento de los alerones no afectan en las componentes de la fuerza aerodinámica F_{ax} y

F_{az}, si bien aparece una pequeña componente según F_{ay}. En cuanto a los momentos, también es modelo es compatible pues los coeficientes $C_{l\delta_a}$, $C_{l\alpha\delta_a}$ y $C_{m\delta_a}$ son negativos, reflejando así lo referido respecto a los sentidos escogidos positivos.

Si analizamos ahora el movimiento del elevador, siguiendo con razonamientos similares a los aplicados en el párrafo anterior una variación positiva de δ_e implicaría una aparición de una fuerza hacia arriba según el eje vertical del avión (según $-k_B$), esto implica una aparición de un momento según $-j_B$, es decir, ambas contribuciones (a fuerzas y momentos) serían en el sentido opuesto al definido positivo para dichas fuerzas y momentos. Esto también es consistente con las ecuaciones del modelado dado que los coeficientes $C_{z\delta_e}$ y $C_{m\delta_e}$ son en ambos casos negativos.

Por otro lado, ante una variación de los *flaps* (positiva por definición) debería aparecer una fuerza según $-k_B$ (los *flaps* se utilizan para aumentar el *lift*), también es de esperar una pequeña fuerza según $-i_B$. Éstas dos conjeturas también se verifican dado que los coeficientes $C_{z\delta_f}$ y $C_{z\alpha\delta_f}$ son ambos negativos, y $C_{x\delta_f}$ es negativo y pequeño.

Finalmente, analizando una variación positiva en el movimiento del timón del cola ($\delta_r > 0$), podríamos esperar que aparezca una fuerza según j_B con su correspondiente momento respecto al versor $-k_B$. Nuevamente, en este caso, esto se refleja en el MVE dado que el coeficiente $C_{y\delta_r}$ es positivo y el coeficiente $C_{n\delta_r}$ es negativo. Además en el modelo aparece una componente debido al movimiento del timón en la componente F_{ax} de la fuerza aerodinámica.

Para realizar las comparaciones del modelo obtenido para las fuerzas y momentos aerodinámicos con el coeficiente de *lift*, que denotaremos con C_L de ahora en más, y el coeficiente de *drag*, que llamaremos C_D de ahora en adelante, debemos primero definir estos coeficientes.

Los coeficientes C_L y C_D se definen en base a un sistema dado por el vector $\vec{v_r}$. Este vector, $\vec{v_r} = \vec{v} - \vec{v_v}$, de velocidad del avión relativa al viento define un nuevo sistema de referencia al que denotaremos con la sigla SR[i], el cual tendrá una base de medida $(\hat{i_R}, \hat{j_R}, \hat{k_R})$. El *lift* L y el *drag* D están definidos en los sentidos definidos por la base del sistema SR, esto es así pues éstas son las fuerzas que aparecen sobre el avión cuando se lo deja quieto y se considera como que es el aire que se mueve a una cierta velocidad $\vec{v_r}$, lo cual representa una situación análoga a la de un avión en situación de vuelo pero es más sencilla de analizar desde el punto de vista de la mecánica de los fluidos. Siguiendo con este análisis se puede encontrar que el vector fuerza de *lift* $\vec{L}$ y el vector fuerza de *drag* $\vec{D}$ son de la forma [Kun02] [Abb59]:

$$\vec{L} = \frac{\rho S |\vec{v_r}|^2}{2} C_L(-\hat{k_R}) \tag{3.52}$$

$$\vec{D} = \frac{\rho S |\vec{v_r}|^2}{2} C_D(-\hat{i_R}) \tag{3.53}$$

Dado que disponemos de la forma de las fuerzas expresadas en la base del sistema SB (F_{ax}, F_{ay} y F_{az}), debemos encontrar el cambio de base que lleva la base del sistema SB en la base del sistema SR. Procediendo de manera análoga a la que se expuso en la sección 3.1, para ir del sistema SR al sistema SB se debe efectuar primero una rotación ángulo de $-\beta$ respecto al versor $\hat{k_R}$ lo cual define un set de versores que llamaremos $(\hat{i_1}, \hat{j_1}, \hat{k_R})$. Luego se debe realizar una rotación de ángulo $-\alpha$ respecto al versor $\hat{j_1}$ - que definió la rotación anterior - para finalmente llegar a la base $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$, culminando así el procedimiento para el cambio de base. Este procedimiento se puede apreciar más claramente ayudado por la figura 2.6. Matricialmente lo explicado se puede sintetizar según la ecuación 3.54 que se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} \hat{i_B} \\ \hat{j_B} \\ \hat{k_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i_R} \\ \hat{j_R} \\ \hat{k_R} \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

Con lo cual la matriz de cambio de base H_R^B que se obtiene queda de la manera que se puede observar

[i]En la bibliografía este sistema de referencia es llamado *stability system* y se denota según la sigla SS.

en la ecuación 3.55.

$$H_R^B = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\beta\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

Dado que lo que realmente nos interesa es la matriz de rotación H_B^R, procederemos análogamente a lo explicado en la sección 3.1 respecto a cambiar los $\sin$ por $-\sin$ e invertir el orden de las rotaciones para hallar dicha matriz. Con lo cual el resultado final para H_B^R es el que se muestra en la ecuación 3.56.

$$\boxed{H_B^R = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}} \tag{3.56}$$

Utilizando esta matriz es que podemos hallar la relación entre las fuerzas $\vec{L}$ y $\vec{D}$ con las componentes de la fuerzas expresadas en la base del SB F_{ax} F_{ay} y F_{az}. Realizando esta transformación para el caso particular de $\beta = 0$, pues interesa comparar contra las variaciones teóricas de C_L y C_D como función solamente de α, se obtiene que:

$$\vec{L} = (-F_{ax}\sin\alpha + F_{az}\cos\alpha)(-\hat{k_R}) \tag{3.57}$$

$$\vec{D} = (F_{ax}\cos\alpha + F_{az}\sin\alpha)(-\hat{i_R}) \tag{3.58}$$

Observando que según las ecuaciones 3.52, 3.53, 3.35 y 3.37 las fuerzas $\vec{L}$, $\vec{D}$, F_{ax} y F_{az} comparten el término $\frac{\rho S|\vec{v_r}|^2}{2}$, se puede obtener finalmente las ecuaciones que vinculan los coeficientes C_L y C_D con F_{ax} y F_{az}. Estas relaciones son las que se muestran a continuación en las ecuaciones 3.59 y 3.60.

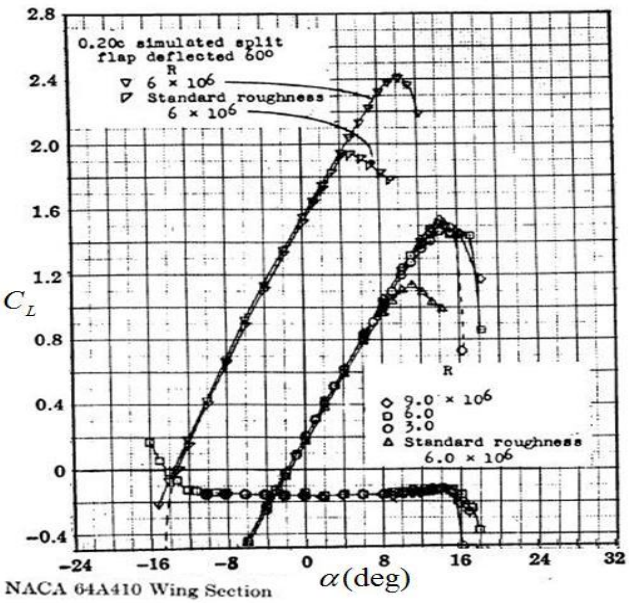
$$\boxed{C_L = -(-C_x\sin\alpha + C_z\cos\alpha)} \tag{3.59}$$

$$\boxed{C_D = -(C_x\cos\alpha + C_z\sin\alpha)} \tag{3.60}$$

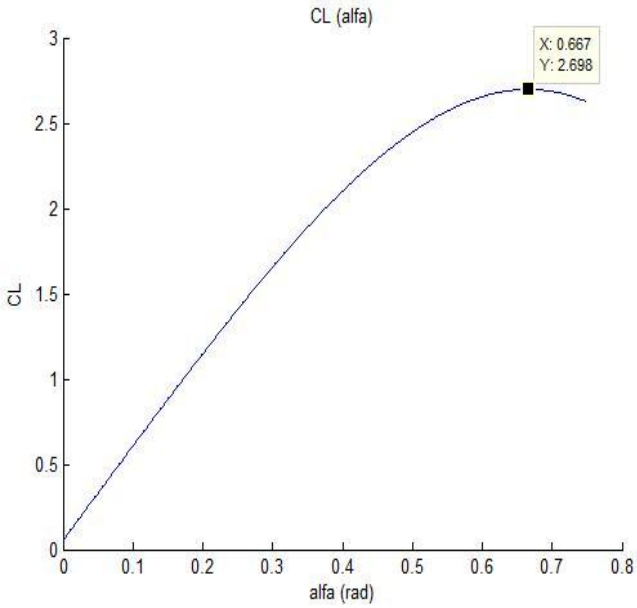
Según éstas dos últimas ecuaciones tenemos una expresión para los coeficientes C_L y C_D como función de los parámetros x, u, h y p. Nos interesa en particular analizar el comportamiento de estas magnitudes como función del ángulo α, pues disponemos de ciertas gráficas teóricas ideales para el comportamiento cuantitativo de las mismas. En lo que sigue, trabajaremos sólo con la dependencia en α tomando todas las variables como constantes o directamente nulas (como por ejemplo para los gráficos que se mostraran a continuación). Debe notarse que poner los valores de dichas variables como constantes sólo trasladaría los gráficos, sin afectar de gran manera la forma de las curvas involucradas.

A continuación se muestran en las figuras 3.4 y 3.5 los gráficos obtenidos para el modelo utilizado y los gráficos teóricos para un perfil NACA 64 A 410 [Abb59] (el perfil de ala del *BEAVER* es el NACA 64 A 416). El primer gráfico, la figura 3.4, se corresponde con la evolución del coeficiente de *lift* como función del ángulo de ataque α ($C_L(\alpha)$). Mientras que en la segunda figura, la figura 3.5, se muestra un gráfico comparativo de la evolución del coeficiente de *drag* contra la evolución del coeficiente de *lift*, es decir, un gráfico de $C_D(C_L)$.

Como se puede desprender de estas ambas imágenes mencionadas, las dependencias funcionales observadas para el modelo obtenido para el *BEAVER* respetan la forma de las funciones teóricas en ambos casos. Evidentemente, varían algunos valores respecto a los teóricos dado que se trata de un relevamiento de un avión existente en la realidad. A saber, las posibles diferencias vienen dadas por: efecto de ala finita, cierta

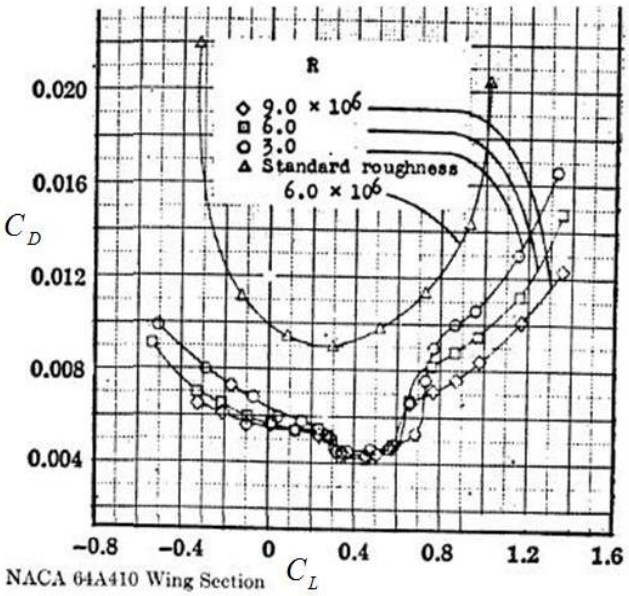


(a) $C_L(\alpha)$ para el perfil NACA 64 A 410.

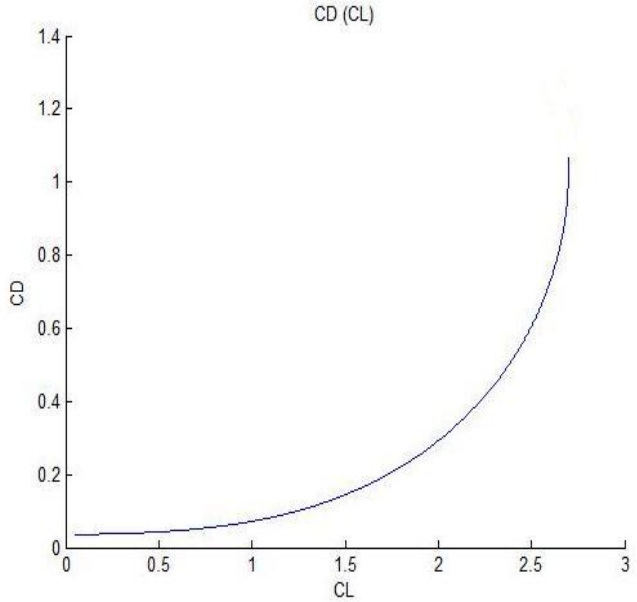


(b) $C_L(\alpha)$ para el modelo del *BEAVER*.

Figura 3.4: Relación funcional entre C_L y α para el modelo del *BEAVER* y el perfil NACA 64 A 410.



(a) $C_D(C_L)$ para el perfil NACA 64 A 410.



(b) $C_D(C_L)$ para el modelo del *BEAVER*.

Figura 3.5: Relación entre C_D y C_L para el modelo del *BEAVER* y el perfil NACA 64 A 410.

rugosidad de la superficie, perfil no homogéneo en el ala, alguna modificación del perfil estándar para obtener mejores resultados (por ejemplo variando el ángulo de diedro), y también el hecho de que el perfil NACA 64 A 410 no es exactamente el mismo que el del *BEAVER*, aunque en todos los distintos perfiles de ala se observan gráficas muy parecidas entre si, con la misma forma y variando levemente algunos aspectos cuantitativos. En ambos gráficos de la figura 3.4 se tiene la misma forma, se tiene que C_L crece al crecer α hasta que se llega a un cierto ángulo α_S donde se encuentra un máximo de C_L, luego si se sigue aumentando α el avión entra en pérdida[j] y el coeficiente de *lift* empieza a disminuir conforme siga aumentado α. Este ángulo α_S es el denominado ángulo de *stall* y es una magnitud bien importante en el vuelo de un avión. En ambos gráficos, el correspondiente al modelo y a la gráfica teórica, se puede apreciar dicho fenómeno de *stall*. Observando ahora cualitativamente los gráficos de la figura 3.5, se puede observar que sobre el semiplano $C_L > 0, C_D > 0$ la

[j]Se empiezan a apreciar turbulencias sobre la parte superior trasera de las alas. [Kun02].

forma de ambas gráficas es esencialmente la misma, es decir, ambas tienen forma parabólica.

Respecto a los aspectos cuantitativos de esta comparación, es de destacar que los ordenes de magnitud en los ejes de ambas figuras son muy parecidos. Para ejemplificar esto, observando las gráficas correspondientes a $C_L(\alpha)$ de la figura 3.4, en la gráfica teórica se puede apreciar un coeficiente de *lift* máximo de $\approx 2{,}4$, mientras que para el modelo del *BEAVER* el coeficiente de *lift* máximo es $\approx 2{,}7$. Por otro lado, si observamos la figura 3.5 se puede apreciar que el coeficiente C_D crece más rápido para la gráfica del modelo del *BEAVER* que para el modelo teórico, es decir, para un coeficiente de *lift* de $C_L \approx 0{,}8$ se tiene para el modelo teórico un coeficiente de *drag* de $C_{D_{teorico}} \approx 0{,}012$ mientras que para el modelo del *BEAVER* el mismo es de $C_{D_{BEAVER}} \approx 0{,}06$, lo cual representa un crecimiento más rápido de la parábola aunque los órdenes de magnitud de los resultados son similares. Este fenómeno es en cierta medida razonable dado que es esperable tener un *drag* mayor en la realidad que en el modelo teórico. Esto se debe a que en un caso se considera el *drag* asociado a una superficie alar únicamente y en el otro nos referimos a un avión completo, que por tener un fuselaje principal ya agrega una cantidad no despreciable de resistencia en vuelo. En lo que respecta al ángulo de *stall* α_S, podemos ver que para el caso del modelo teórico ideal dicho ángulo se encuentra en el entorno de los $\approx 15^o$ como máximo, en cambio para nuestro avión modelo el mismo se encuentra en los $\approx 38^o$ lo cual representa una distancia importante respecto al marco teórico. Como posible explicación para esta diferencia se puede argumentar una vez más las diferencias existentes entre la geometría de un ala solamente y la geometría de todo un avión. De todas formas el ángulo de trabajo será bastante menor que 38° de modo de cuidarnos de esta inexactitud.

3.4.6. Corrección de las fuerzas aerodinámicas en presencia de una atmósfera no estable

El modelo para las fuerzas aerodinámicas que se presentó hasta ahora asume que dichas fuerzas se pueden determinar experimentalmente mediante la medición en un conjunto de situaciones estacionarias. Esto es, se asume una velocidad constante para el avión y una velocidad constante del viento. El problema con este modelo es que no toma en cuenta una posible dinámica en el viento, que puede estar acelerando respecto de la tierra o, aún con velocidad constante, tiene una interacción cambiante con el avión debido a una velocidad angular relativa entre ambos.

En resumen, el desarrollo hecho para las fuerzas y momentos aerodinámicos implicaba que un referencial solidario al fluido que rodea al avión pudiera considerarse como un referencial inercial. Para hacer un tratamiento más general se debe hacer la corrección $F_a^\star$ al vector de fuerzas aerodinámicas F_a, que se muestra a continuación en la ecuación 3.61. Dicha corrección fue extraída de [Rau01].

$$\boxed{\vec{F_a^\star} = \vec{F_a} - m.(\dot{\vec{v_v}} + \vec{w_v} \times \vec{v_v})} \tag{3.61}$$

Por motivos que quedaran claros en los capítulos siguientes, esta corrección fue utilizada para la simulación y las pruebas del sistema de control diseñado, pero no fue considerada a la hora del diseño de dicho sistema.

3.4.7. Modelado del viento

Hasta ahora modelamos las fuerzas aerodinámicas y como éstas se relacionan con las variables de nuestro vector de estados y la entrada. Sin embargo hemos omitido hablar de las entradas que no son controlables y que denominamos h que, por no ser necesariamente estáticas, debemos de modelar de alguna manera a efectos de las simulaciones.

En nuestro caso, h es simplemente la velocidad del viento respecto de la tierra ($\vec{v_v}$). A efectos del diseño del controlador, se asumió que dicha cantidad era constante en el espacio y en el tiempo, y además, conocida (medible o estimable). Si bien esto era práctico y conveniente para dicho diseño, no era realista y por lo tanto no permitía hacer un testeo exhaustivo de la robustez del controlador diseñado. Procedimos entonces a

realizar un modelo más completo del viento, que se separará en dos grandes partes: el comportamiento 'medio' como función del espacio o del tiempo y el comportamiento turbulento que se puede modelar como un proceso estocástico.

Para el comportamiento 'medio' se puede adoptar el estándar de la *International Civil Aviation Organization* (ICAO de ahora en adelante) que modela la velocidad del viento como una función de la altura ($-z$ en nuestro modelo) y que tiene un único grado de libertad, que es la velocidad del viento medida a una altura dada respecto de la tierra. Esto se puede ver en la siguiente ecuación 3.62 [Rau01]:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \|\vec{v_v}\| = \|\vec{v_v}|_{(z=6m)}\|.\left(\frac{-z^{0,2545}-0,4097}{1,3470}\right) & si\|z\| < 300m \\ \|\vec{v_v}\| = 2{,}86585.\|\vec{v_v}|_{(z=6m)}\| & si\|z\| \geq 300m \end{array}} \tag{3.62}$$

Para nuestra aplicación, este comportamiento medio no era de interés, pues en la altura de vuelo del *BEAVER* ($1800m$) este modelo pronostica una velocidad del viento independiente de todo parámetro (constante), lo cual era precisamente lo que se venía utilizando. Otra es la realidad para el modelo de turbulencias, que implica cambios a lo que fue nuestro planteo inicial.

Por turbulencias se entiende a las fluctuaciones rápidas en la velocidad del viento y que se caracterizan por ser más bien aleatorias[k] y que usualmente se modela como un proceso estocástico.

En la bibliografía [Rau01] se presentan dos modelos comúnmente usados para este modelado estocástico, el de *Von Karman* y el de *Dryden*. El primero de estos modelos suele considerarse como el más preciso, pero es el segundo el más utilizado, pues es más simple de implementar y no difiere tanto del primero. En ambos casos se modelan las perturbaciones como un ruido coloreado, que está caracterizado por su espectro de potencia, por lo que se puede generar fácilmente partiendo de ruido blanco y filtrándolo mediante un filtro adecuado.

En el caso del modelo de *Dryden* (que es el que utilizamos), dicho filtro tiene la particularidad de tener una transferencia racional que no es más que un pasabajos de primer o segundo orden dependiendo del modo (longitudinal, lateral o vertical) de la turbulencia. Para llegar a la expresión dada por *Dryden*, es necesario asumir algunas hipótesis sobre las turbulencias que se pueden encontrar en la bibliografía [Rau01]. Los parámetros libres para estos filtros son solamente dos para cada uno de los tres modos, y en nuestro caso tomamos la ganancia de continua y la ubicación del polo (en el caso de los filtros de segundo orden el polo es doble). Procedimos entonces a hacer una implementación propia, generando ruido blanco y filtrándolo, donde la transferencia de los filtros usados se puede escribir como se muestra en las ecuaciones 3.63 que aparecen a continuación.

$$\boxed{\begin{array}{c} H_u(s) = \frac{K_u}{\frac{s}{p_u}+1} \\ H_v(s) = \frac{K_v}{(\frac{s}{p_v}+1)^2} \\ H_w(s) = \frac{K_w}{(\frac{s}{p_w}+1)^2} \end{array}} \tag{3.63}$$

La transferencia $H_u(s)$ es el filtro para las turbulencias longitudinales, $H_v(s)$ es el filtro para las turbulencias laterales y finalmente $H_w(s)$ es el filtro para las turbulencias verticales. Y los conjuntos $\{K_u, K_v, K_w\}$ y $\{p_u, p_v, p_w\}$ son las ganancias y las ubicaciones de los polos de los filtros antedichos. Estos tres filtros serán alimentados con una señal de ruido blanco a efectos de la generación del fenómeno de turbulencia. Los valores adecuados para los distintos parámetros libres pueden calcularse -según la bibliografía- tomando en cuenta ciertas propiedades medidas experimentalmente, tales como la longitud

[k] Obviamente por ser un sistema físico real, el proceso es en realidad determinístico, pero dada la complejidad del proceso y sus consecuencias en la velocidad del viento es posible caracterizarlo como aleatorio.

característica de cada modo, el módulo de la velocidad del viento y una potencia estimada para el ruido que es función de la velocidad media del viento. En nuestro caso tomamos de allí valores razonables para realizar las pruebas, pero dejamos abierta la posibilidad de modificar dichos valores en el *software*. Por más detalles ver [Rau01].

Antes de terminar es necesario notar que al modelar perturbaciones estocásticas nos salimos un poco del objetivo de buscar un modelo en variables de estado, pues claramente los procesos estocásticos no caben dentro de esa definición. Estrictamente, dicho ruido se utilizó solamente a la hora de las pruebas con el controlador diseñado y se dejó por fuera para el diseño propiamente dicho.

3.5. Corrección por rotación de la tierra

En el desarrollo anterior se habló de un sistema de referencia inercial (SI), que se usó durante todo el desarrollo, pero particularmente para llegar a la ecuación 3.12. Para esta ecuación se usa la segunda ley de *Newton*, aplicable únicamente en referenciales inerciales. Sin embargo, debido a que la tierra tiene un movimiento acelerado (rotacional sobre sí misma y de traslación en el espacio) se debería hacer una corrección. En nuestro caso haremos la corrección correspondiente a la rotación de la tierra pero no la correspondiente al movimiento de traslación alrededor del sol[1].

Para las ecuaciones que siguen, se utilizará el subíndice J para referirnos a las derivadas respecto de un sistema verdaderamente inercial y el subíndice I para referirnos a las derivadas respecto del referencial solidario a la tierra (de modo de respetar la nomenclatura actual), que es el que hasta ahora se venía llamando inercial. Para las velocidades angulares, se utiliza el subíndice B para denotar la rotación del SB respecto de la tierra y el subíndice T para la rotación de la tierra respecto de un referencial inercial. Entonces, por un lado tenemos la segunda ley de *Newton*, o primera cardinal:

$$\vec{F} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_J \tag{3.64}$$

Donde se deriva la posición respecto de un sistema verdaderamente inercial, y se asume constante la masa. Por otro lado, de aplicar dos veces la ecuación 3.10, obtenemos la siguiente relación entre las derivadas segundas en dos sistemas de referencia que rotan respecto del otro:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{d^2t}\right)_J = \left(\frac{d^2\vec{r}}{d^2t}\right)_I + 2\vec{w_T} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I + \vec{w_T} \times (\vec{w_T} \times \vec{r}) \tag{3.65}$$

Donde $\vec{w_T}$ es el vector velocidad angular de la tierra respecto a un referencial inercial verdadero. Utilizando nuevamente la regla de derivación definida por 3.10, se deduce la versión modificada para la ecuación 3.12 utilizada en el MVE, la cual se puede observar a continuación en la ecuación 3.66.

$$\boxed{\dot{\vec{v}} = \frac{1}{m}\left[\vec{F_{Neta}} - m\left(\vec{w} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_B + 2\vec{w_T} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I + \vec{w_T} \times (\vec{w_T} \times \vec{r})\right)\right]} \tag{3.66}$$

Donde todos los vectores involucrados (o por lo menos los resultados de las operaciones término a término) deben ser expresados en términos de las base del SB para ser correctamente computados según la ecuación precedente. Debe destacarse que este efecto si bien fue considerado a la hora de hacer pruebas con el sistema, fue dejado de lado en el modelo que se tomó para el desarrollo del controlador para simplificar el mismo.

[1]Es fácil ver que dicho movimiento, por tener una frecuencia anual, es absolutamente despreciable para los tiempos de vuelo autónomo del avión.

3.6. Resumen de efectos no considerados en el modelado

Como todo modelado, el modelo realizado está sujeto a errores ya sean por errores intrínsecos a las mediciones necesarias para la determinación del modelo, así como por efectos que no fueron tomados en cuenta en la elaboración del mismo. El saber qué efectos son relevantes y cuáles pueden ser considerados como perturbación al sistema es donde entra en juego el arte del modelado. En esta sección haremos un listado de los fenómenos existentes y que no fueron considerados a la hora de la obtención del MVE, con una breve explicación de por qué se considera que puede ser despreciable su efecto, y razón por la cual dicho efecto será incluido como una perturbación al sistema, problema a ser resuelto por la lógica de control.

▷ **Superficie terrestre no plana.**

En todo momento se consideró en la obtención de la ecuaciones de movimiento que la tierra era plana. Por ejemplo, en nuestro modelo una trayectoria recta en el plano xy con $z = cte$ es una trayectoria en línea recta, pero en la realidad tener $z = cte$ es en verdad una curva que tiene curvatura igual a la curvatura de la tierra. El avión del que se dispone cuenta con una autonomía de vuelo de media hora aproximadamente, suponiendo una velocidad de $70m/s$, este avión sería capaz de alejarse a lo sumo a una distancia de $126km$. Es claro que en comparación al perímetro y la curvatura terrestre estos $126km$ son completamente despreciables. Este efecto debe ser considerado a efectos de vuelos de alta duración donde se recorran largas distancias. Incluso en este caso no tendría porque ser considerado en el modelado del sistema, dado que las correcciones a realizar podrían solucionarse por el sistema de control, más específicamente, lo que llamaremos el segundo lazo de control.

▷ **Variación de la aceleración g.**

La aceleración gravitatoria g varía en efecto con la altura z, además se debe hacer notar que dicha aceleración varía también con la latitud y la longitud que uno se encuentre. Estos efectos no fueron considerados ni en el cálculo del peso propiamente dicho del avión ni en el modelado de la atmósfera. El avión del que se dispone está pensado para volar a una altura de $100m$. El modelo del avión que se utilizó en este proyecto fue utilizado como altura de régimen el valor de $1800m$. En ambos casos las alturas involucradas son despreciables frente al radio terrestre de $\approx 6370km$, lo cual hace despreciable el efecto de la variación de g para dichas alturas de vuelo. En cuanto al cambio del valor de g con la latitud y longitud, el mismo no es significativo respecto al valor usado para g.

▷ **Masa del sistema no constante.**

Este es un efecto que si bien hicimos referencia en el modelado, asumimos en dicho momento que sería despreciable. En efecto, lo es. La variación de masa en el sistema viene por el hecho de que el avión para volar debe consumir combustible, la pérdida total de masa durante el transcurso de una sesión de vuelo es a lo sumo igual a la cantidad de masa del tanque de combustible lleno. Esto afecta tanto el valor de la masa del avión como su tensor de inercia, este último por el doble efecto de la variación de la masa total y de la distribución de la misma en el avión.

El avión del que se dispone tiene un tanque de combustible de $750ml$ y se recomienda utilizar para su funcionamiento una mezcla de nafta super con aceite lubricante en relación $40/1$ respectivamente, dadas estas proporciones, la densidad del combustible será esencialmente igual que la densidad de la nafta super, la cual es de $\rho_{NS} \approx 0{,}745kg/l$ [Www03]. En este caso tenemos una masa total de combustible para el avión de $m_c \approx 558{,}75g$, dicha pérdida de masa es completamente despreciable frente a la masa total del avión que es de $12kg$. Para el caso del *BEAVER* esta diferencia es un tanto mayor. El volumen total de los tanques de combustible del *BEAVER* es $521l$, asumiendo el mismo tipo de combustible[m], se tiene que la pérdida de

[m]Utilizando nafta común, la diferencia de densidad no modifica sustancialmente el cálculo, pues $\rho_{NC} \approx 0{,}725kg/l$, muy similar al valor utilizado. [Www03].

masa total para el avión que se utiliza como modelo es de $m_c \approx 388kg$, de la misma manera esta pérdida de masa fue despreciada frente a la masa total del *BEAVER* con combustible de $\approx 2669{,}671kg$ en este modelado (aunque representa el $\approx 13\,\%$). Despreciar esta pérdida de masa es práctica estándar en el modelado del vuelo de aviones. En el caso del tensor de inercia, es posible tomarlo como constante si aceptamos adicionalmente que el tanque de nafta se sitúa cercano al baricentro del avión (lo que es cierto para el avión de la UdelaR).

Es claro que estas aproximaciones son siempre válidas en recorridos cortos. Si el error por hacer esta aproximación fuese demasiado grande se podría ir actualizando el modelo cada determinada cantidad de tiempo (o de longitud recorrida) mediante alguna estimación de la masa en cada momento y considerar el modelo con dicha masa válido para un rango de tiempo (o de distancia a recorrer) determinado. Este tipo de estrategias no se consideraron en el transcurso de este proyecto pues esta aproximación no representa una complicación mayor, las trayectoria recorridas son reajustadas por la lógica de control.

▷ **Variación de la temperatura de forma más compleja.**

En el modelado de la atmósfera se asumió que la temperatura decrecía linealmente con la altura z. Es claro que la temperatura de la atmósfera no es únicamente función de la variable z, depende también de muchos otros aspectos, por ejemplo velocidad del viento, latitud y longitud, constitución atmosférica, etc. Dado las alturas a las que estamos trabajando se considera este modelo como aceptable. De todas formas se considera un modelo estándar de la atmósferas para alturas menores a $11000m$, y en este proyecto se trabajará a altura mucho menores.

▷ **Velocidad angular del viento nula.**

Si modeláramos el viento y sus interacciones en la dinámica del avión de forma completa, correspondería describir al mismo no sólo en función de su velocidad respecto de la tierra sino también en función de su velocidad angular. Al igual que pasa con las fuerzas y momentos aerodinámicos que dependen de la velocidad relativa entre el avión y el aire, las dependencias con la velocidad angular son relativas entre el avión y el aire. Para todo el trabajo descrito anteriormente se asumió que la velocidad relativa entre el aire y la tierra era nula, de modo que la velocidad angular entre avión y aire coincide con la velocidad angular entre el avión y la tierra. En principio despreciar esto no es grave pues a menos que estemos en presencia de fenómenos climáticos extremos, la rotación del viento respecto de la tierra es casi imperceptible.

3.7. Modelo en variables de estado para el diseño

Por último, y para finalizar este capítulo, cabe discernir entre dos modelos del sistema que se utilizarán en lo que sigue. Por un lado está el modelo completo que se ha descrito hasta ahora. Por otro lado está el MVE que se utilizó para el diseño del controlador y que no incluye algunos de los elementos expuestos anteriormente como la variación de la densidad del aire con la altura, las correcciones correspondientes a que ni la atmósfera ni la tierra son referenciales inerciales, etc. La justificación para trabajar con un modelo 'reducido' a la hora del diseño radica en minimizar la complejidad del desarrollo y, como se verá, tratar de que dicho modelo sea compatible con un conjunto de hipótesis necesarias para la aplicación de alguna herramientas.

Dado que el modelo completo es precisamente todo lo que se ha venido describiendo hasta este momento, expondremos a continuación el MVE que se utilizará para los capítulos siguientes de linealización y desarrollo del controlador (para realizar las pruebas sí se considerará el modelo completo). El MVE queda entonces de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \cos\theta\cos\psi v_{Bx} + (\sin\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi)v_{By} + (\sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi)v_{Bz} \\
\dot{y} &= \cos\theta\sin\psi v_{Bx} + (\sin\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi)v_{By} + (\sin\theta\sin\psi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\psi)v_{Bz} \\
-\dot{z} &= -\sin\theta v_{Bx} + \cos\theta\sin\varphi v_{By} + \cos\theta\cos\varphi v_{Bz} \\
\dot{\varphi} &= w_{Bx} + \sin\varphi\tan\theta w_{By} + \cos\varphi\tan\theta w_{Bz} \\
\dot{\theta} &= \cos\varphi w_{By} - \sin\varphi w_{Bz} \\
\dot{\psi} &= (\sin\varphi/\cos\theta)\, w_{By} + (\cos\varphi/\cos\theta)\, w_{Bz} \\
\dot{v_{Bx}} &= \tfrac{1}{m}\left[F_{xa} + F_{xp} - mg\sin\theta\right] - v_{Bz}w_{By} + v_{By}w_{Bz} \\
\dot{v_{By}} &= \tfrac{1}{m}\left[F_{ya} + F_{yp} + mg\cos\theta\sin\varphi\right] - v_{Bx}w_{Bz} + v_{Bz}w_{Bx} \\
\dot{v_{Bz}} &= \tfrac{1}{m}\left[F_{za} + F_{zp} + mg\cos\theta\cos\varphi\right] - v_{By}w_{Bx} + v_{Bx}w_{By} \\
\begin{pmatrix} \dot{w_{Bx}} \\ \dot{w_{By}} \\ \dot{w_{Bz}} \end{pmatrix} &= I_{OB}^{-1}\left[\begin{pmatrix} T_{ax} \\ T_{ay} \\ T_{az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{px} \\ T_{py} \\ T_{pz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix} \times I_{OB}\begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Donde las magnitudes F_{xa}, F_{za}, T_{ya}, F_{xp}, F_{zp} y T_{yp} son funciones de los subconjuntos de variables y parámetros x, u, p y h. Éstas relaciones funcionales son las que se muestran en las ecuaciones 3.35, 3.36, 3.37, 3.38, 3.39, 3.40, 3.44, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48 y 3.49 respectivamente.

La matriz I_{OB} es la que se muestra en la ecuación 2.5, cuya inversa, la matriz I_{OB}^{-1} se muestra en la ecuación 2.6. Los demás parámetros de este MVE han sido definidos durante el transcurso de este capítulo es las distintas sub-secciones.

Con esto damos fin a la etapa de modelo, y procederemos de ahora en más a trabajar sobre los otros aspectos que fueron analizados durante el transcurso de este proyecto.

Capítulo 4
Simulación del lazo abierto

Luego de obtenido el MVE, se procedió a la construcción de un simulador. La principal función del simulador consiste en la resolución numérica de las ecuaciones del MVE para distintos valores de las condiciones iniciales y las entradas al sistema u y h definidas por la ecuaciones 3.23 y 3.24 respectivamente[a]. De esta manera, este simulador representa un modelo del comportamiento del sistema, es decir, lo que llamaremos el lazo abierto (sistema sin controlador).

Este simulador es esencial a fin de poder observar el comportamiento del sistema en lazo abierto, o sea, realizar distintas pruebas sobre la dinámica del sistema para distintos valores de las acciones u de control y para diferentes valores de las entradas no controlables h (distintas velocidades para el viento). También será importante a la hora de la validación del controlador a diseñar, es decir, para constatar el correcto funcionamiento del lazo cerrado. Este modelo del sistema será además muy útil para el propio diseño del controlador como se explicará en el capítulo 7. Por todas éstas utilidades, es fundamental que dicho simulador refleje de la manera más fiel al sistema real, y en particular que las trayectorias generadas por este simulador sean confiables, razón por la cual el simulador debió ser testeado exhaustivamente desde ejemplos sencillos hasta la realización de pruebas más complicadas. Dado que fue utilizado en otras etapas del proyecto, este *software* fue también probado indirectamente a medida que transcurrían las demás etapas del mismo. Cabe hacer notar que muchas de las pruebas realizadas (de las cuales sólo se muestra en este informe un grupo reducido) pueden escapan un poco a la intuición en el sentido '¿cuál sería la trayectoria razonable para el vuelo del avión dado el valor de los parámetros, las entradas, las condiciones iniciales, y las fuerzas y los momentos aplicados sobre el rígido?'. Esta complicación nace básicamente por la complejidad de las fuerzas y momentos aerodinámicos y del motor, por poner un ejemplo, un movimiento en el timón de cola δ_r afecta las componentes de la fuerza aerodinámica F_{ax} y F_{ay}, y también las componentes del momento aerodinámico T_{ax} y T_{az}.

Pero no sólo se debe tener en cuenta el hecho de que las trayectorias predichas por el simulador deben reflejar lo más fielmente la realidad física del sistema, sino que también hay que cuidarse de los errores numéricos. Estos errores numéricos deben ser tomados en cuenta de forma crítica, y sino se cuidan puede llegar a haber diferencias bastante grandes entre las soluciones exactas (si fuera posible obtenerlas) de las ecuaciones que dominan la dinámica del sistema y las trayectorias que se obtienen del simulador realizando la simulación numérica. A efectos de cuidar estos errores, se corroboró el simulador desarrollado contra algunos bloques que vienen en el *Aerospace Block Library* de las nuevas versiones de *Matlab*.

Es importante en este punto recalcar el hecho que el simulador entregado fue enteramente realizado por los integrantes de este equipo incluyendo todas los *scripts*, las funciones y los archivos *.mdl* (a los cuales nos referiremos de ahora en más simplemente como MDLs). En las próximas secciones se detallan los procesos de construcción del simulador del lazo abierto y se muestran algunas de las pruebas realizadas sobre el mismo.

[a]Recordamos que el vector u es el vector de entradas que podemos controlar desde la lógica de control y el vector h representa entradas al sistema de las cuales no tenemos control alguno, como por ejemplo, la velocidad del viento.

4.1. Desarrollo del simulador

El primer enfoque para el desarrollo del simulador fue claro, realizar un programa sobre la plataforma *Matlab* que resolviera $\dot{x} = f(x, u)$[b] utilizando un algoritmo estándar de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO de ahora en adelante) como puede ser el algoritmo de *Runge - Kutta*. La principal diferencia entre la primer versión del simulador que se intentó desarrollar con las versiones posteriores es que en esa primer versión no se utilizó el software *Simulink* de Matlab.

4.1.1. Primer versión del simulador

La primer versión del simulador prescindía por completo de la herramienta *Simulink* que proporciona *Matlab*, y simplemente utilizaba el método *ode45.m* (que implementa el método de resolución *Runge-Kutta*) de *Matlab* a los efectos de la resolución numérica. Esta implementación fue descartada dado que adolecía del defecto que detallamos a continuación: por la manera en que se debe invocar el método de resolución numérica *ode45*, el código precisaba que la función $f(x, u)$ fuera exclusivamente función de la variable x. Esta condición impone pues que la entrada u, estuviese definida como función de *Matlab*, y dependiera solamente de la variable tiempo y, en todo caso, del vector de estados x. Esto implica que la dependencia de la entrada en un determinado instante solamente pueda depender del valor del estado en ese mismo instante, limitando así la dinámica de futuros lazos de control a una dependencia únicamente algebraica sobre el estado. Es de observar que las simulaciones sobre esta primer versión (versión 1.0) del simulador eran parecidas a lo que se obtendría después con las versiones posteriores y, a pesar de que tenía un tiempo de espera apreciable, las simulaciones corrían razonablemente bien. Para subsanar esta dificultad se abandonó este enfoque por el abordaje de la creación del modelo en *Simulink*, que provee un entorno de desarrollo mucho mas afín a la resolución de lazos de control más complejos.

4.1.2. Versión del simulador en *Simulink*

Finalmente se adoptó la estrategia de elaborar un modelo *Simulink* basado en la ecuaciones del MVE. De esta manera se construyeron todos los bloques necesarios para su elaboración. En la figura 4.1 se puede apreciar dicho archivo *.mdl*.

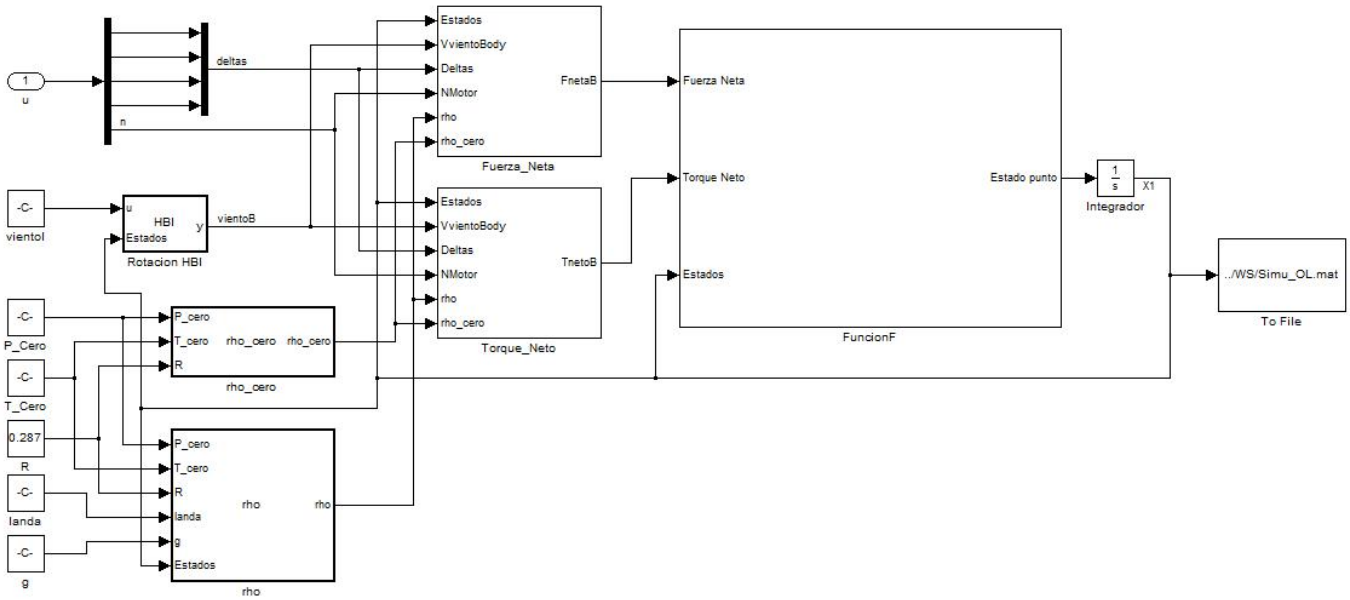


Figura 4.1: Modelo MDL elaborado en base a las ecuaciones del MVE.

[b]Omitimos el vector h por razones de compactidad y de delimitar las variables más relevantes de dicha ecuación, es claro que está ecuación también depende del vector p que se definió en la ecuación 3.25, el cual también omitimos.

En esta estructura se puede observar de forma clara que la dependencia de la función $f(x, u, h, p)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x, u, h, p) = f^{\star}(x, F, T) \qquad con \qquad \begin{cases} F = f_1(x, u, h, p) \\ T = f_2(x, u, h, p) \end{cases} \tag{4.1}$$

en términos de F y T, nuevas variables que representa la fuerza neta y el momento neto respectivamente. Es decir, la dependencia de f con las variables u, h y p entra al sistema por la forma de las fuerzas y momentos. Aunque claro está, de ahora en más nos referiremos a este sistema de la forma $\dot{x} = f(x, u)$ por razones de compactidad y relevancia.

Se puede observar en la figura 4.1 que se deben cargar al MDL los parámetros concernientes a h y p, a saber, los valores para la entrada $\vec{v_v}$ de velocidad del viento (en este caso expresado en términos de la base del SI) y también para las variables P_0, T_0, g, R y λ. También será importante fijar los datos relativos al modelo del avión dentro de los distintos bloques, en particular esto se debe hacer dentro de los bloques dedicados al cálculo de la fuerza neta y el momento neto como se explicará más adelante. Inicialmente dichos bloques se encuentran cargados con los datos correspondientes al modelo del *BEAVER*. Como se verá más adelante, el *software* integrado que se entrega con este proyecto tiene la posibilidad de cambiar fácilmente de modelo de avión siempre y cuando se sigan las especificaciones relativas a la ubicación de los parámetros necesarios que se encuentran en el manual de usuario. Además se deben fijar las condiciones iniciales para la simulación en el integrador, o sea, en el bloque integrador que se observa sobre la parte superior derecha de dicha figura.

El bloque funcionF es el encargado de representar las ecuaciones del MVE, y tiene la forma que tendría $f^{\star}$. La figura 4.2 muestra la implementación de dicho bloque, donde se pueden apreciar los sub-bloques que la componen. El primer bloque rotaciónHIB representa la ecuación 3.5, éste es el cambio de base entre el vector $\vec{v_B}$ y el vector $(\dot{x}, \dot{y}, -\dot{z})$. El segundo bloque es el encargado de realizar la rotación correspondiente a la ecuación 3.9 mediante la matriz M, este es el cambio de base entre el vector $\vec{w_B}$ y el vector $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ correspondiente a las derivadas temporales de los ángulos de *Euler*. Finalmente, los dos últimos sub-bloques, los bloques Primera Cardinal y Segunda Cardinal son los encargados de representar las ecuaciones 3.12 y 3.14 del MVE respectivamente, cuyas variables de entrada son F, T y x.

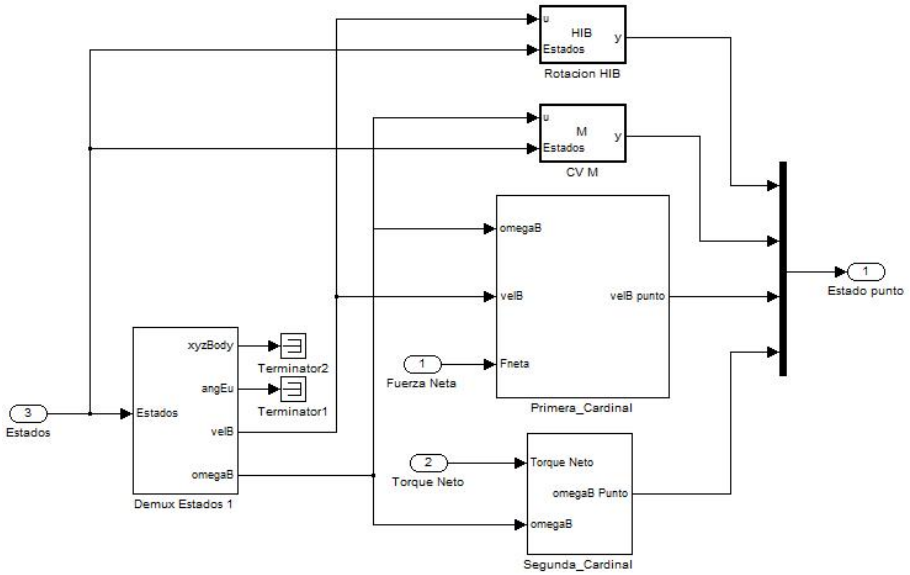
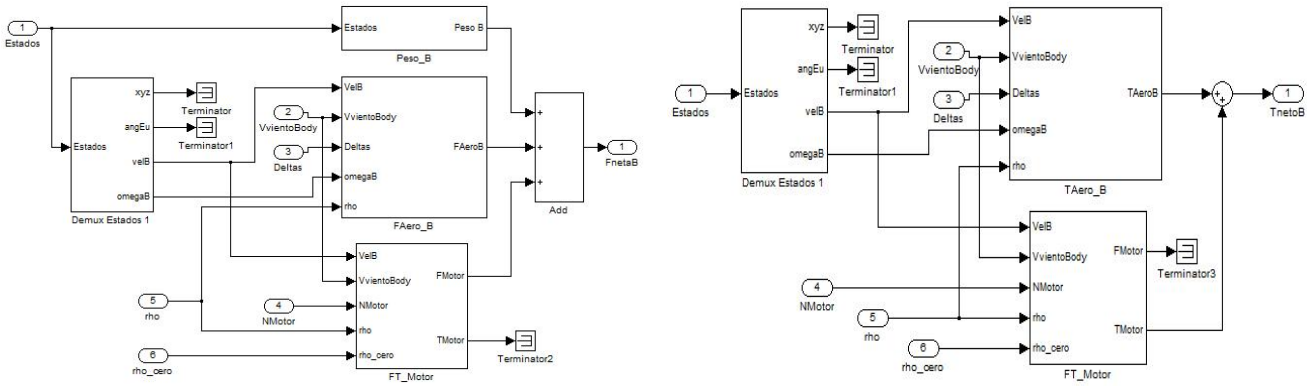


Figura 4.2: Modelo MDL elaborado para el bloque funcionF.

Continuando con los bloques de interés, se muestran a continuación en la figura 4.3 la forma de los bloques que implementan la fuerza neta y el momento neto. El bloque Fuerza Neta está compuesto por tres grandes sub-bloques, estos son: el bloque Peso B cuya misión es expresar el vector peso del avión en términos de la base del SB, el bloque FAero B representa las fuerzas aerodinámicas sobre las superficies de vuelo según se las describió en la sub-sección 3.4.2, y finalmente el bloque FT Motor que implementa la

fuerza y el momento ejercido por el motor según lo descripto en la sub-sección 3.4.3. Por otro lado, el bloque Torque Neto cuenta sólo de dos sub-bloques principales, dichos sub-bloques son: TAero B que representa a los momentos aerodinámicos y el sub-bloque FT Motor ya mencionado.



(a) Sub-bloque de fuerzas neta. (b) Sub-bloque de momento neto.

Figura 4.3: Modelos MDLs que implementan la fuerza neta y el momento neto sobre el sistema.

Estos dos bloques representan la suma vectorial de las fuerzas involucradas en el modelado según la sección 3.4. A continuación, en la siguientes figuras, se muestran los sub-bloques que se detallaron en el párrafo anterior.

▷ **Peso B:** Cambio de base del peso expresado en el SI como $mg\hat{k}_I$ a la base del SB. Ver ecuación 3.30.

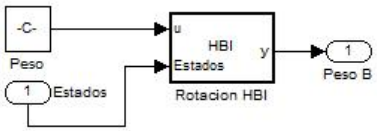


Figura 4.4: Modelo MDL elaborado para el bloque Peso B.

▷ **FAero B:** Genera el vector de fuerza aerodinámica. Ver sub-sección 3.4.2.

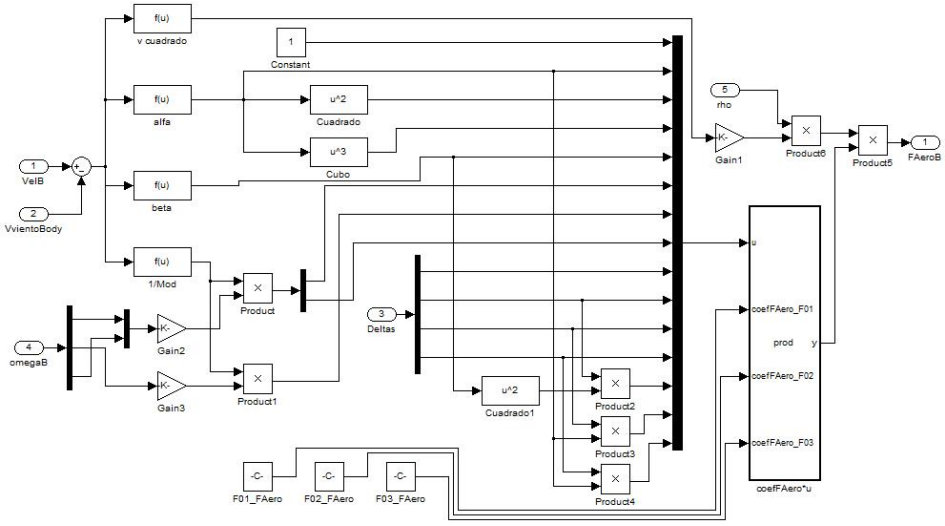


Figura 4.5: Modelo MDL elaborado para el bloque FAero B.

▷ **TAero B:** Genera el vector de momento aerodinámico. Ver sub-sección 3.4.2.

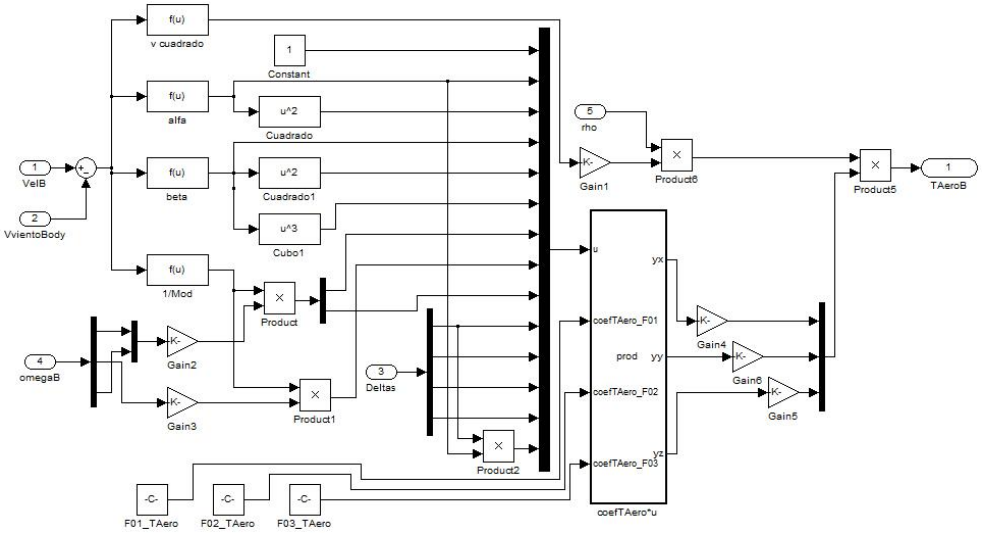


Figura 4.6: Modelo MDL elaborado para el bloque TAero B.

▷ **FT Motor:** Genera los vectores de fuerza y momento del motor. Ver sub-sección 3.4.3.

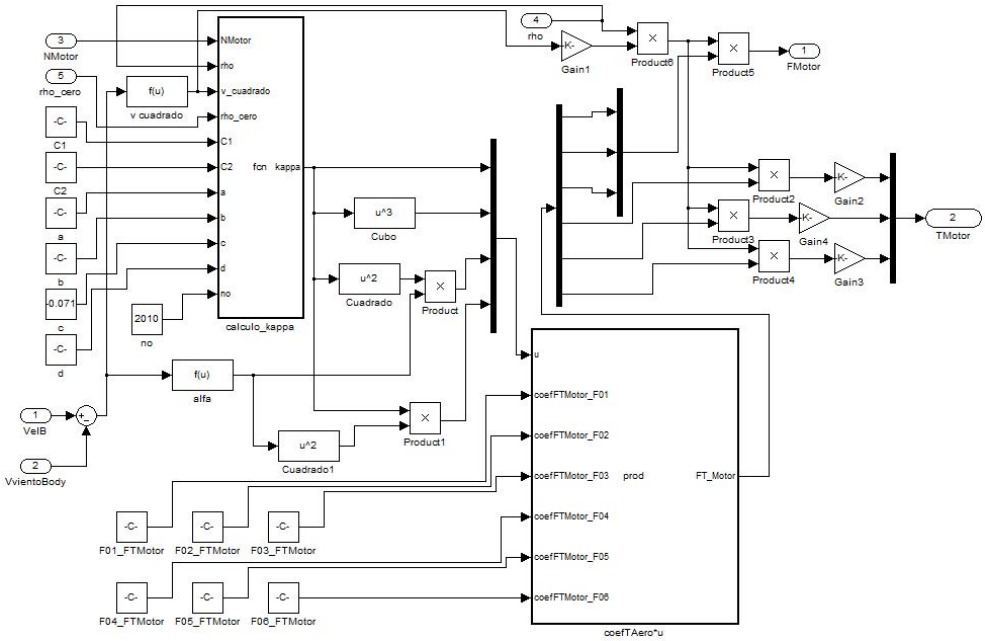


Figura 4.7: Modelo MDL elaborado para el bloque FT Motor.

Para correr los bloques que fueron mostrados en las figuras 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 se deben fijar algunas constantes. Tanto las funciones *.m* como el *software* integrado están pensados para tomar dichos datos desde distintos archivos *.txt* que deberán estar ubicados acordemente en la carpeta correspondiente, esto se explicará más en detalle en el manual de usuario y en el capítulo 10 de esta documentación.

La constante a ingresar en el bloque Peso B es el vector $(0, 0, mg)$ dentro de la caja Peso. En los bloques FAero B, TAero B y FT Motor se deben dar los valores a distintas ganancias (bloques de la forma Gain i) a los valores de b, $b/2$, $\bar{c}$ y $S/2$, y también se deben fijar las matrices de coeficientes para las fuerzas y momentos según sea el caso. Otras constantes que es necesitan cargar son los parámetros del motor, a saber, los parámetros $\{C_1, C_2, a, b, c, d, n_0\}$ correspondientes al modelado del motor y que son utilizados para el

cálculo de κ, la cual responde a la forma de la ecuación 3.51. Todos estos parámetros se encuentran fijados en los MDLs en los valores correspondientes el *BEAVER*, podrían cambiarse utilizando otros archivos *.txt* (lugar donde se encuentran los valores utilizados, dentro de la carpeta 'Beaver') o bien utilizando variables cargadas en el *workspace* de *Matlab*. Se entregan los MDLs para ambas modalidades. En el manual de usuario de profundizará más sobre los distintos tipos de utilización y sobre los archivos entregados.

Las matrices de cambio de base H_I^B y H_B^I, y la matriz de cambio de coordenadas M fueron implementadas como funciones embebidas y son representadas por lo bloques HIB, HBI y M que aparecen en las figuras mostradas durante la presente sección.

Finalmente, los últimos dos bloques que nos quedan por comentar son los bloques rho y rho cero. Estos bloques son simplemente funciones embebidas y su funcionalidad es clara; el bloque rho cero calcula el valor de ρ_0 según la ecuación 3.21, mientras que el bloque rho calcula la variación de la densidad del aire con la altura $\rho(z)$ según el modelado realizado para la atmósfera, a saber, según la ecuación 3.20.

4.2. Modelos implementados para el lazo abierto

El modelo MDL que se describió en la sección anterior es uno de los modelos del sistema en lazo abierto que implementamos, el cual es bastante completo, pero sin embargo hay algunas correcciones que no tiene incluidas. Durante el transcurso de este proyecto se implementaron una cierta cantidad de modelos MDLs para el sistema. Algunos fueron creados durante la propia construcción del simulador, es decir, el enfoque constructivo con el que se encaró la implementación del mismo se presta para que paso a paso se vayan agregando fenómenos, detalles y efectos que se veían de fácil aplicación. Otros modelos fueron construidos ya no con un enfoque de simulación, sino durante el diseño y desarrollo del controlador. Y, finalmente, algunos otros fueron construidos para las etapas de testeo del controlador, en general, los más completos en cuanto a la cantidad de efectos que consideraban. De todos ellos, en particular nos interesa destacar tres de estos MDLs, pues fueron los más utilizados para sus funciones respectivas; un MDL que consideraremos estándar (cuya construcción fue la que se reflejó en la sección anterior), un MDL para el sistema construido básicamente para el chequeo de las linealizaciones que deben ser realizadas a efectos de la construcción del controlador (más específicamente, del cálculo de la realimentación de estados), y un último modelo del sistema en lazo abierto que básicamente considera todos los efectos que pudieron ser detallados en el capítulo 3, referente al modelado, el cual se utilizó como testeo del sistema final implementado. Cabe destacar que ninguno de estos modelos construidos considera los efectos detallados en la sub-sección 3.6.

4.2.1. MDL estandar

Éste es el MDL que utilizamos como simulación del sistema pues, entendimos que era un modelo suficientemente exacto y que podíamos construir sin incluir fenómenos que pudieran ser complejos de evaluar y con efectos apenas perceptibles en trayectorias de interés. El proceso de construcción de éste modelo es el que se detalló en la sección anterior.

Los fenómenos considerados por este modelo son los básicos, a saber, considera la ecuaciones de la sección 3.1 considerando para $\vec{F_{Neta}}$ y $\vec{T_{Neto}}$ las fuerzas aerodinámicas y del motor, además del propio peso del avión considerado constante. Este MDL considera las variaciones que tienen las propiedades termodinámicas con la altura z, es decir, considera las relaciones funcionales para $\rho(z)$, $T(z)$ y $P(z)$ obtenidas en la sección 3.2. En particular, el mayor interés esta dado por la inclusión de $\rho(z)$, dado que tanto las fuerzas y momentos aerodinámicos como los del motor son directamente proporcional a dicha magnitud.

Estos MDLs implementan básicamente las dependencias más generales posibles para las ecuaciones 3.67 de la sección 3.7. Las pruebas que se muestran a continuación en la sección 4.3 fueron realizadas es base a este modelo.

4.2.2. MDLs para el testeo de la linealización analítica

Dichos MDLs se construyeron básicamente a efectos del diseño y construcción del controlador lineal. Como se explicará en los capítulos 5 y 7, mediante un proceso de linealización de la ecuaciones del MVE se obtuvieron ecuaciones lineales en torno a dos trayectorias de interés; una trayectoria de vuelo rectilíneo a velocidad constante y una trayectoria de giro circular en el plano xy a velocidad angular constante, para luego proceder con el diseño del controlador lineal que se utilizará para seguir dichas trayectorias.

Para el diseño del controlador en el caso del primer tipo de trayectoria de las mencionadas en el párrafo anterior, se utilizó el MVE correspondiente a las ecuaciones 3.67 de la sección 3.7, con la simplificación de que el valor de $\rho(z)$ fuese constante con la altura e igual al valor que tendría ρ a $1800m$. De esta manera se uso para ρ el valor de ρ_{1800}. Esta hipótesis simplifica de gran manera la linealización del MVE para luego proceder al diseño del controlador. Como es natural, en la medida que no varíe mucho la altura de vuelo este modelo se parecerá más al modelo que se utilizó para el sistema real. En cuanto al diseño del controlador para lograr seguir trayectorias de giro circular en el plano a velocidad angular constante, se mantuvo la hipótesis sobre el $\rho(z)$ que se explicó anteriormente pero se tuvo que modificar tres de las ecuaciones del MVE a fin de obtener un sistema SLIT luego del proceso de linealización. Con lo cual, como se modificaron las primeras tres ecuaciones del MVE, cambia la linealización del mismo.

En ambos casos se construyeron MDLs que reflejaran los cambios efectuados sobre el MVE. Estos MDLs se utilizaron para poder comprobar las linealizaciones analíticas de los dos sistemas frente a la linealización numérica de *Matlab*. Es decir, dado que las ecuaciones involucradas son grandes y complejas, de alguna manera debíamos asegurarnos que todas las derivadas que realizamos estuvieran correctamente realizadas e implementadas. De esta manera, los MDLs construidos en esta instancia fueron a fin de poder cotejar el correcto cálculo de las linealizaciones para ambos casos. Como se explicará en el capítulo 5 los resultados obtenidos fueron ampliamente satisfactorios.

4.2.3. MDL para la validación del controlador

Finalmente, de los MDLs construidos, este MDL es el que toma en cuenta la mayor cantidad de fenómenos. Este MDL considera todos los efectos enumerados dentro del modelado en el capítulo 3. Esencialmente son todos los elementos incluidos en el MDL estándar, más el agregado de las correcciones y ruido en las entradas no controlables h. Particularmente, se tomaron en consideración las correcciones sobre las fuerzas aerodinámicas debido a la no estabilidad de viento explicado en la sub-sección 3.4.6. También se agregaron las correcciones debidas a la rotación de la tierra que no están incluidas en el MDL estándar, ya que en éste se tomó al SI como un referencial inercial cuando esto no es del todo cierto (entre otros fenómenos, por la rotación de la tierra). Finalmente se agregó ruido (según las ecuaciones que ya se presentaron) en las entradas no controlables, a forma de modelar las turbulencias en el aire.

Este MDL fue construido en particular para poder probar de alguna manera la robustez del controlador. Nótese, que con la versión del MDL explicada en la sub-sección anterior en principio sólo se podría comprobar el buen funcionamiento del controlador, dado que dicho controlador es construido a partir de las linealizaciones de la ecuaciones que emula dicho modelo. De todas formas se debe hacer notar que también de cierta manera se está testeando la robustez (y también con el MDL estándar), en cuanto a que el controlador, diseñado para las trayectorias linealizadas, es probado con el sistema en su totalidad, es decir, es su versión no lineal. La construcción de este MDL se enmarca en la línea de probar más exhaustivamente el sistema diseñado e implementado.

4.3. Pruebas del simulador

Las pruebas del simulador del lazo abierto se fueron efectuando durante el proceso de construcción del mismo. Es por esto que las primeras pruebas que mostraremos en esta sección son bastante básicas, incluso el proceso de testeo fue un aprendizaje en si mismo, dado que a medida que se iban realizando las pruebas

obteníamos una mayor comprensión e intuición sobre el sistema y el MVE. A continuación, en las siguiente sub-secciones enumeramos algunas de las pruebas hechas y las conclusiones obtenidas de las mismas.

4.3.1. Prueba 1: Caída libre

Esta fue la primer prueba realizada sobre la primer versión del simulador del lazo abierto que se construyó. Creemos que la misma representa una prueba bastante natural, razón por la cual la incluimos en esta documentación. De todas formas, está prueba no será útil para ilustrar algunas conclusiones que hemos obtenido sobre la performance de nuestro simulador para el lazo abierto.

La prueba que se realizó fue la siguiente: se consideró una esfera (para el tensor de inercia I_{OB} se utilizó el de una esfera), y se la dejó bajo la acción de su propio peso y de un momento constante según la dirección $\hat{i_B}$ (para esta prueba $\hat{i_B} = \hat{i_I}$). Las condiciones iniciales fueron todas nulas, salvo la velocidad lineal según $\hat{i_B}$ y la altura inicial. Las especificaciones para esta prueba serían entonces:

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 20m/s$	$F_{Neta} = cte = mg\hat{k_I}$
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	$T_{Neto} = cte = T_{Nx}\hat{i_B} = 5Nm\hat{i_B}$
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	Tiempo de simulación: $t = 10s$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	Tensor de inercia: $I_{OB} = 10Idkgm^2$
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$	

Cuadro 4.1: Tabla de especificaciones de la prueba 1.

Como se trata de un caso sencillo es fácil saber como debería reaccionar este sistema. Tomando en cuenta los primeros 6 elementos del vector de estados, la evolución de los estados x z y φ debería ser según las ecuaciones 4.2, 4.3 y 4.4 respectivamente, mientras que el resto de las variables deberían permanecer nulas.

$$x(t) = v_{Bx0}t \quad \Rightarrow \quad x(t)|_{t=10s} = 200m \tag{4.2}$$

$$z(t) = z_0 - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad z(t)|_{t=10s} \approx 509{,}675m \tag{4.3}$$

$$\varphi(t) = \frac{T_{Nx}t^2}{2I_{xx}} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t)|_{t=10s} = 25rad \tag{4.4}$$

Básicamente queremos observar que el modelo realizado sea consistente para casos sencillos, además de evaluar algún tipo de *performance* frente a los errores numéricos. Los resultado obtenidos para la simulación del lazo abierto en las condiciones de la tabla 4.1 son los que se exponen a continuación en la figura 4.8. Como se puede apreciar en dicha figura se obtuvieron las parábolas buscadas, tanto en el plano xz como para $\varphi(t)$. Además, se observan las rectas correspondiente en el plano xy e yz, y también para los demás ángulos de *Euler* θ y ψ donde se debería cumplir $\theta(t) = cte = 0$ y $\psi(t) = cte = 0$. Extrayendo datos de dicha figura tenemos que:

$$\begin{aligned} x(t = 10s)_{sim} &= 200m \\ z(t = 10s)_{sim} &= 509{,}5m \\ \varphi(t = 10s)_{sim} &= 25m \end{aligned} \tag{4.5}$$

Lo cual demuestra que las trayectorias son las adecuadas para esta prueba. También se puede notar amplificando las gráficas de la figura 4.8 una pequeña desviación sobre el final de las trayectorias de las trayectorias sobre $y = 0$, $\varphi = 0$ y $\psi = 0$. El orden de esta desviación es de $2x10^{-5}$ como se puede observar

mejor en la figura 4.9, dicha desviación la consideramos despreciable frente a los $200m$ de avance del avión según el eje x. Este error se lo adjudicamos a los errores numéricos.

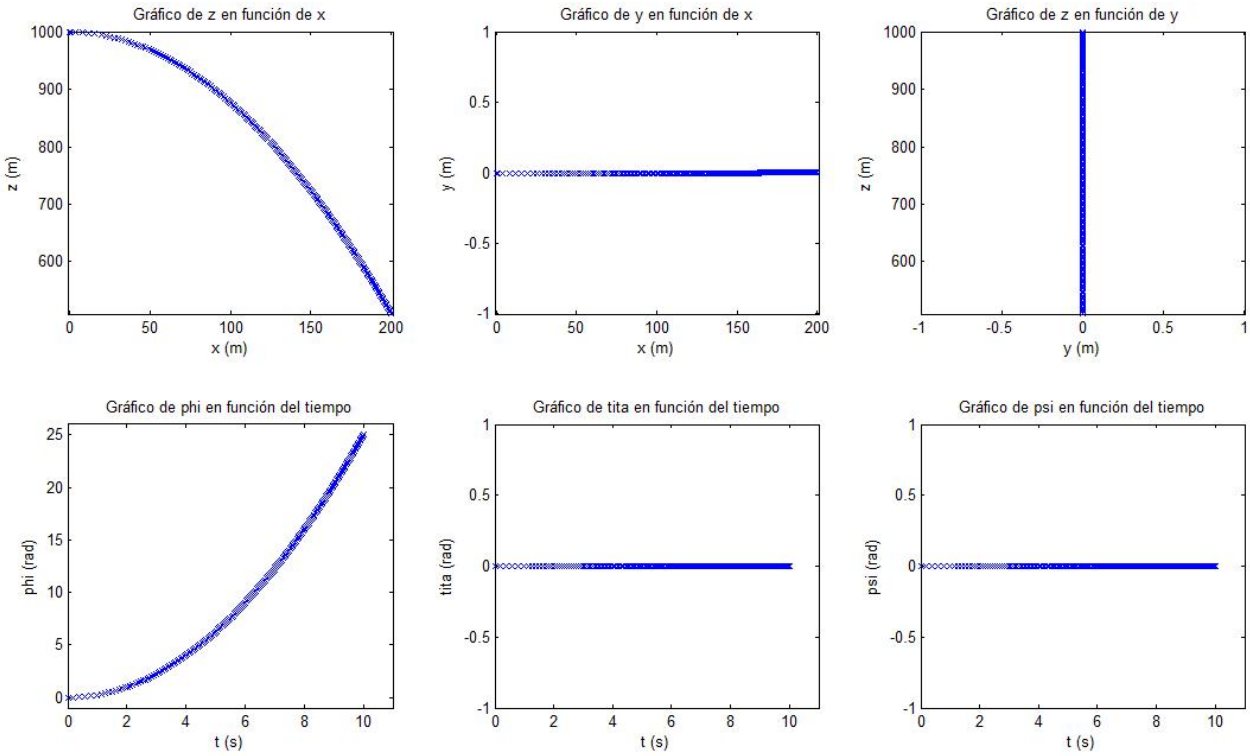


Figura 4.8: Trayectorias predichas por el simulador para la prueba 1.

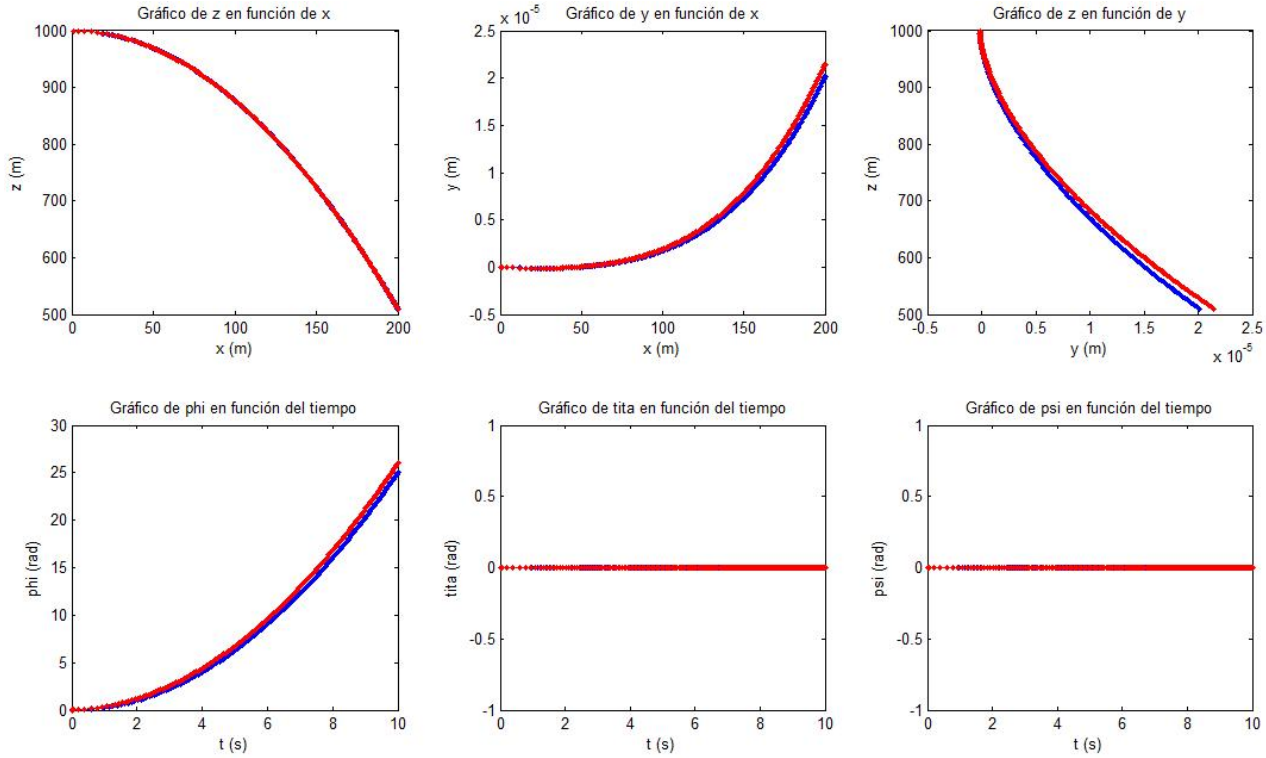


Figura 4.9: Trayectorias para la prueba 1. **Azul:** simulador implementado. **Rojo:** utilizando el sistema 6DoF de *Matlab*.

En esta última figura, la figura 4.9, se muestra una comparación de la *performance* de nuestro simulador y un MDL construido a partir del bloque 6DoF del *Aerospace Block Library* de *Simulink* para

esta prueba. Para el caso de las desviaciones referidas en el párrafo anterior, se puede notar que los resultados obtenidos por nuestro simulador son aparentemente menores, aunque claro está, ambos errores son del mismo orden. Los gráficos para los planos xz, xy e yz son esencialmente los mismo en ambos casos, así como los gráficos $\theta(t)$ y $\psi(t)$. Sin embargo, el gráfico para $\varphi(t)$ tiene alguna pequeña variación entre las dos versiones. Si observamos ahora la figura 4.10 donde se puede apreciar una ampliación de los gráficos para el plano xz y la evolución temporal de $\varphi(t)$, podemos notar efectivamente ambas simulaciones tienen el mismo valor para $z(t = 10s)$ pero que difieren para el caso de $\varphi(t = 10s)$. El simulador implementado por nosotros obtiene un valor final de $25rad$ como era lo esperado, mientras que el simulador que utiliza el bloque 6Dof obtiene un valor de $26rad$. En base a esto y a otros resultados encontrados durante el desarrollo del proyecto se puede concluir que el sistema tiene una sensibilidad fuerte hacia los ángulos de *Euler* (o de otra manera, hacia su inclinación en el espacio), es decir, pequeñas variaciones en el cálculo de dichos ángulos podían llevar a que las soluciones divergieran.

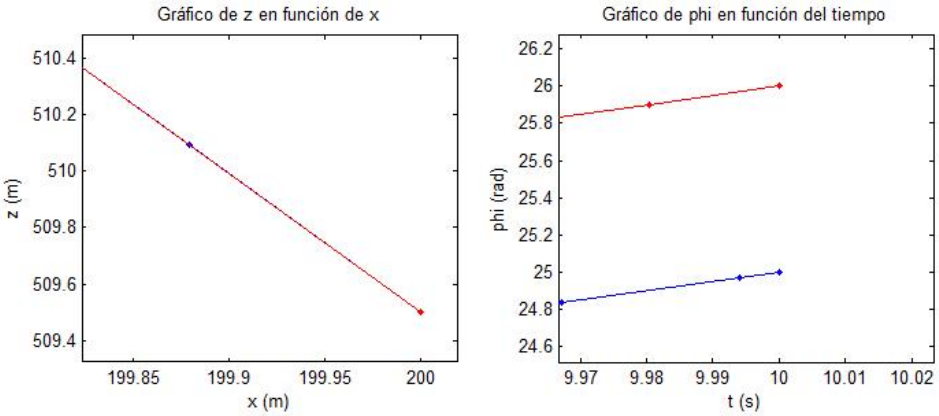


Figura 4.10: Trayectorias para la prueba 1, ampliación de los gráficos xz y $\varphi(t)$. **Azul:** simulador implementado. **Rojo:** utilizando el sistema 6DoF de *Matlab*.

4.3.2. Prueba 2: Planeo vs caída libre

Incluyendo en el MDL usado para la prueba anterior los bloques que implementan la fuerza neta y el torque neto (con las componentes aerodinámicas y del motor), cambiando el momento de inercia por el del avión e incluyendo los parámetros necesarios para dicho bloques, se pasa a tener el simulador para el sistema avión. Mostraremos a partir de esta sub-sección pruebas realizadas sobre el simulador del avión, lo que luego identificaremos como lazo abierto.

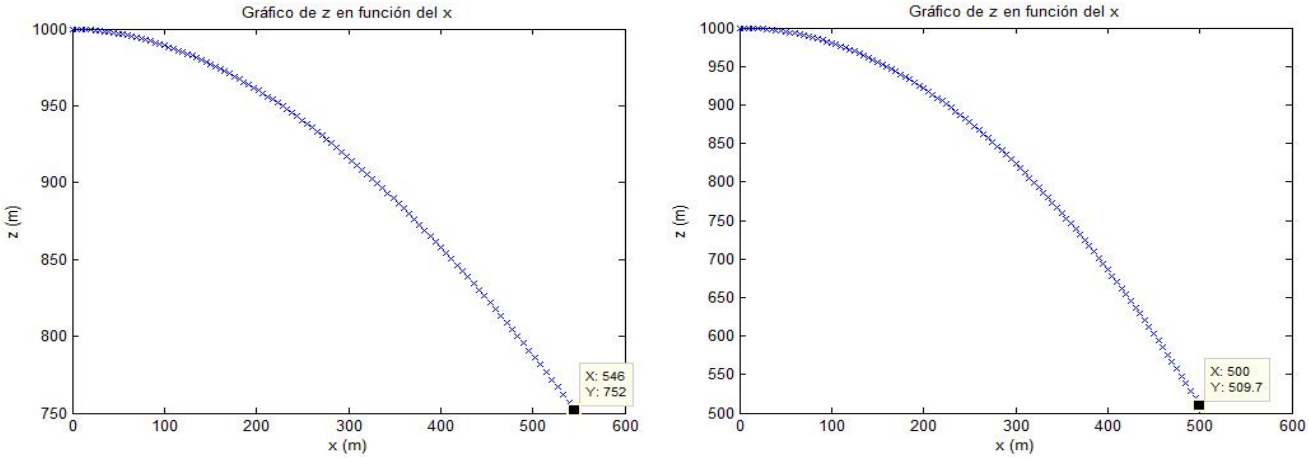
Para la prueba de planeo, la primera que se realizó sobre el sistema avión, se utilizaron los siguientes valores:

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**	
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}$	
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	Velocidad del viento: $\vec{v_v} = 0$	
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_a = 0$	$\delta_e = 0$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	$\delta_r = 0$	$\delta_f = 0$
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	$n = 0$	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$	$t = 10s$	

Cuadro 4.2: Tabla de especificaciones de la prueba de planeo.

Es interesante comparar esta situación donde el avión se encuentra planeando sin motor ($n = 0$) con la situación que tendría un cierto rígido que tenga el mismo tensor de inercia que el avión pero que no esté

sometido a la acción de las fuerzas y momentos aerodinámicos (y manteniendo $n = 0$). Esta comparación es la que se muestra a continuación en la figura 4.11, donde se puede ver que en el caso del avión sometido a las fuerzas aerodinámicas sobre sus superficies de vuelo la caída en el eje z es menor. La diferencia en este caso es de $242{,}3m$, con lo cual verificamos que el avión efectivamente planea.



(a) Trayectoria en el plano xz para la prueba de planeo.

(b) Trayectoria obtenida para la prueba sin acción de las fuerzas aerodinámicas.

Figura 4.11: Trayectorias obtenidas para la prueba 2, planeo vs caida libre.

Un efecto curioso que vale la pena comentar es sobre la distancia recorrida sobre el eje x. La prueba sin acción de las fuerzas aerodinámicas retorna el resultado esperado, al estar el motor apagado y sólo bajo la acción del peso termina recorriendo una distancia de $500m$ dado que tenemos una simulación de $10s$ con una velocidad inicial de $50m/s$ en el eje x. Sin embargo, podemos apreciar que en la prueba con las fuerzas aerodinámicas, contrario a la intuición, el avión avanza más sobre el eje x que en el otro caso para el mismo tiempo de simulación, llegando hasta $x = 546m$. Una posible explicación se puede encontar si notamos que el avión mueve su nariz hacia la tierra en el movimiento. Esto causa que la componente de la fuerza aerodinámica denominada *lift* tenga una componente positiva según el eje x, que es mayor a la componente del *drag* en el sentido opuesto y consecuentemente exista una fuerza neta positiva según x que impulsa al avión en dicha dirección.

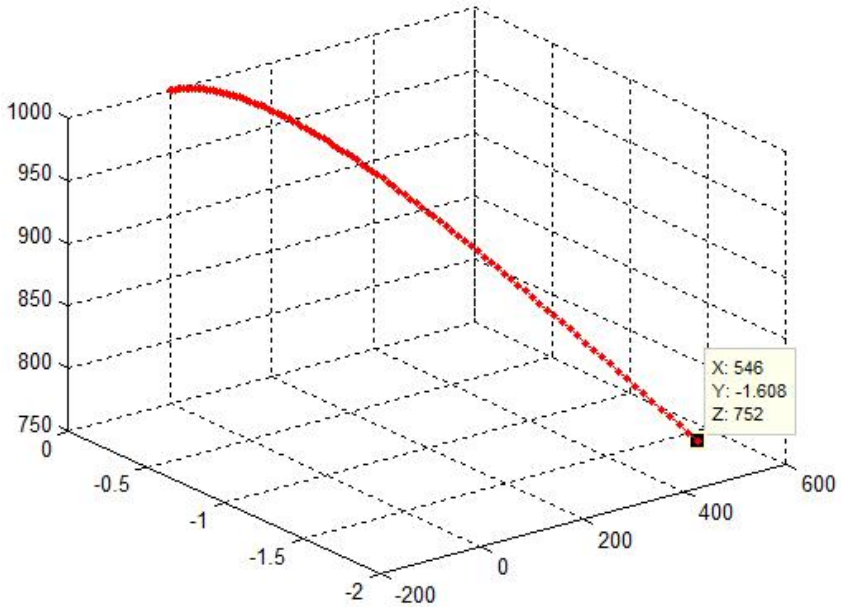


Figura 4.12: Trayectoria en el espacio para la prueba de planeo.

Si observamos la trayectoria 3D del avión para la prueba de planeo, vemos que el mismo presenta un caída de $248m$ sobre el eje z en $546m$ de avance. Por otro lado aparece sobre el eje y una desviación de $1{,}6m$ del ideal debido a asimetrías del modelo. Si observamos las ecuaciones 3.41 se puede ver que las fuerzas tienen un pequeña componente constante, en particular F_{ay} tiene un valor pequeño distinto de cero y negativo para C_{yo}, y por esto la desviación es de $-1{,}6m$.

4.3.3. Prueba 3: Efecto de los alerones

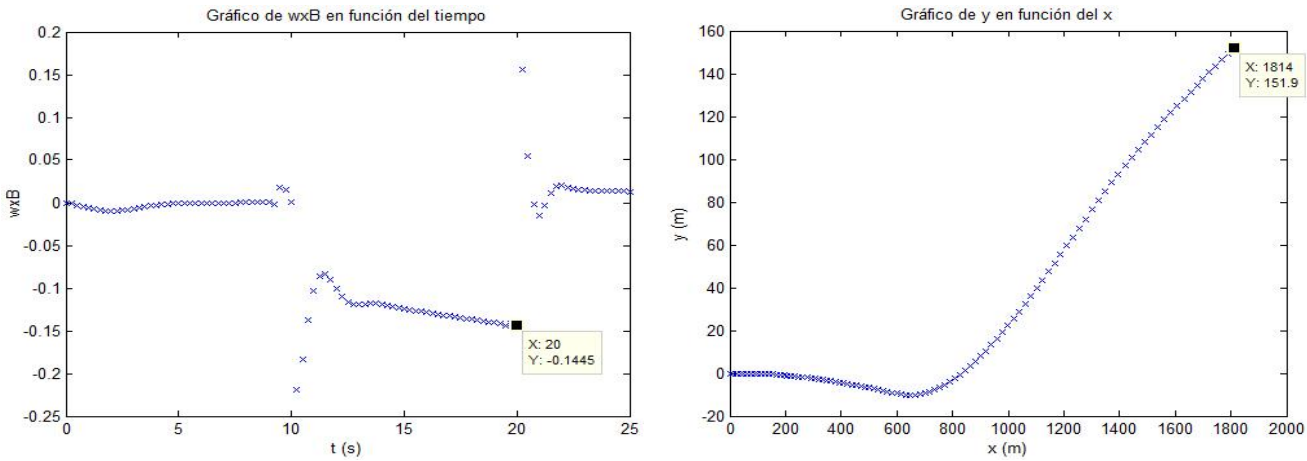
Como ya se ha visto las acciones de control disponible son $u = \{\delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_f, n\}$. Las siguientes pruebas tienen como objetivo testear el comportamiento del sistema frente a distintas señales u. En este caso veremos como reacciona el sistema al movimiento de los alerones.

Manteniendo las mismas condiciones iniciales que en los casos anteriores y con el avión sometido a todas las fuerzas y momentos explicados en la sección 3.4, se aplica una señal del tipo pulso en el movimiento de los alerones. El objetivo de esta prueba es observar el comportamiento del sistema frente a la variación de la posición de los alerones. Las condiciones para esta prueba serían las siguientes:

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**		
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}, \vec{F_{Motor}}, \vec{T_{Motor}}$		
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	Velocidad del viento: $\vec{v_v} = 0$		
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_e = 0$	$\delta_r = 0$	$\delta_f = 0$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	$n = 2000rpm$	$t = 25s$	
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	**Pulso en** δ_a	Altura del pulso: $0{,}1rad$	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$		$t_{subida} = 10s$	$t_{bajada} = 20s$

Cuadro 4.3: Tabla de especificaciones para la primer prueba del efecto de los alerones.

Dado que estamos aplicando en el pulso una valor para $\delta_a > 0$, el resultado esperado para esta prueba se comentó brevemente en la sub-sección 3.4.5. Según esto, sección debería observarse fundamentalmente un momento de *roll* según la regla de la mano derecha en la dirección $-\hat{i_B}$.



(a) Evolución temporal de w_{Bx} para la prueba 3.

(b) Trayectoria en el plano xy obtenida para la prueba 3.

Figura 4.13: Resultados obtenidos para la prueba de la tabla 4.3, prueba de los alerones.

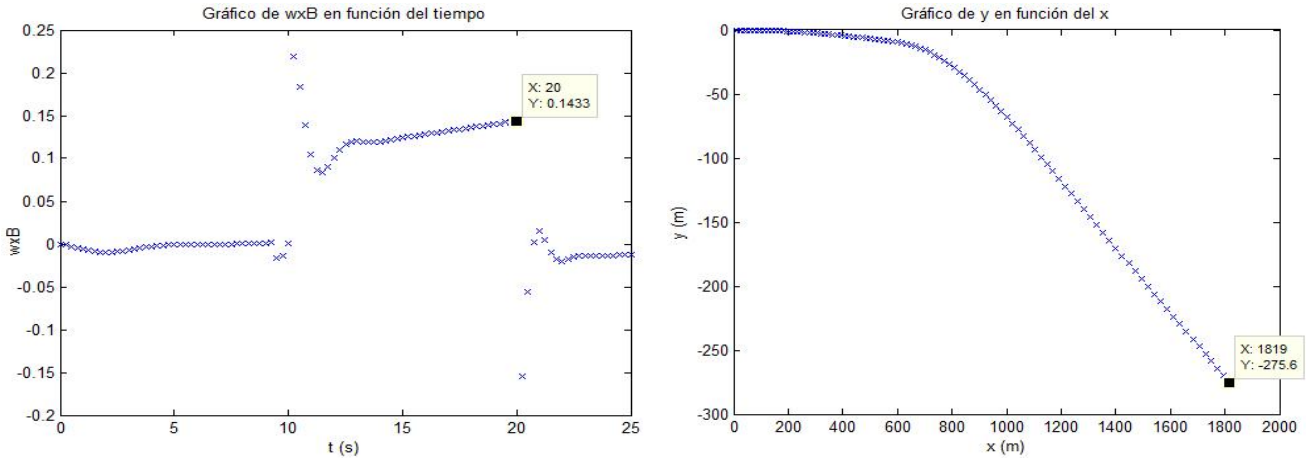
De la figura 4.13 caben observar varios aspectos. Apreciando la figura de la izquierda donde se grafica la evolución temporal de w_{Bx} vemos como en $t = 10s$ sufre una perturbación correspondiente al momento

de subida del pulso y otra en $t = 20s$ que se corresponde con el momento de bajada del pulso. Dado que la prueba mantiene δ_a mayor que cero en el intervalo de tiempo $I_t = [10s, 20s]$, se puede ver como se verifica la inclinación de avión en el sentido esperado dado que w_{Bx} se mantiene negativo en dicho intervalo de tiempo I_t. Otro aspecto a mencionar es que fuera del intervalo de tiempo I_t y a menos de las perturbaciones existentes en $t = 10s$ y $t = 20s$, w_{Bx} se mantiene aproximadamente nulo debido a la ausencia de acciones de control que logren variar dicha componente del vector de estados x.

Como consecuencia de inclinar el avión según una velocidad angular $w_{Bx} < 0$, se puede apreciar sobre el plano xy que el avión dobla hacia su izquierda, aunque continua su caída sobre el eje z. Si realizamos ahora la misma prueba pero con $\delta_a < 0$ en el intervalo I_t, es decir, si simplemente invertimos la acción del alerón, veremos que el avión dobla en la otra dirección en el plano xy.

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**		
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}, \vec{F_{Motor}}, \vec{T_{Motor}}$		
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	Velocidad del viento: $\vec{v_v} = 0$		
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_e = 0$	$\delta_r = 0$	$\delta_f = 0$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	$n = 2000rpm$	$t = 25s$	
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	**Pulso en** δ_a	Altura del pulso: $-0{,}1rad$	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$		$t_{subida} = 10s$	$t_{bajada} = 20s$

Cuadro 4.4: Tabla de especificaciones para la segunda prueba del efecto de los alerones.



(a) Evolución temporal de w_{Bx} para la prueba realizada.

(b) Trayectoria en el plano xy obtenida para la prueba realizada.

Figura 4.14: Resultados obtenidos para la prueba de la tabla 4.4, prueba de los alerones.

En este caso como era de esperar w_{Bx} es mayor que cero en el intervalo I_t, y además es del mismo orden que que en el caso de la prueba anterior $\approx 0{,}14rad$. El giro hacia la derecha se verifica como era de prever. Otra vez podemos verificar que las pequeñas asimetrías del modelo de las fuerzas y momentos tienen una pequeña preferencia hacia los $y < 0$, dado que en esta segunda prueba se logró alcanzar en los $25s$ de simulación un valor de y de $-275{,}6m$, mientras que en el caso anterior sólo se había alcanzado el $y = 151{,}9m$.

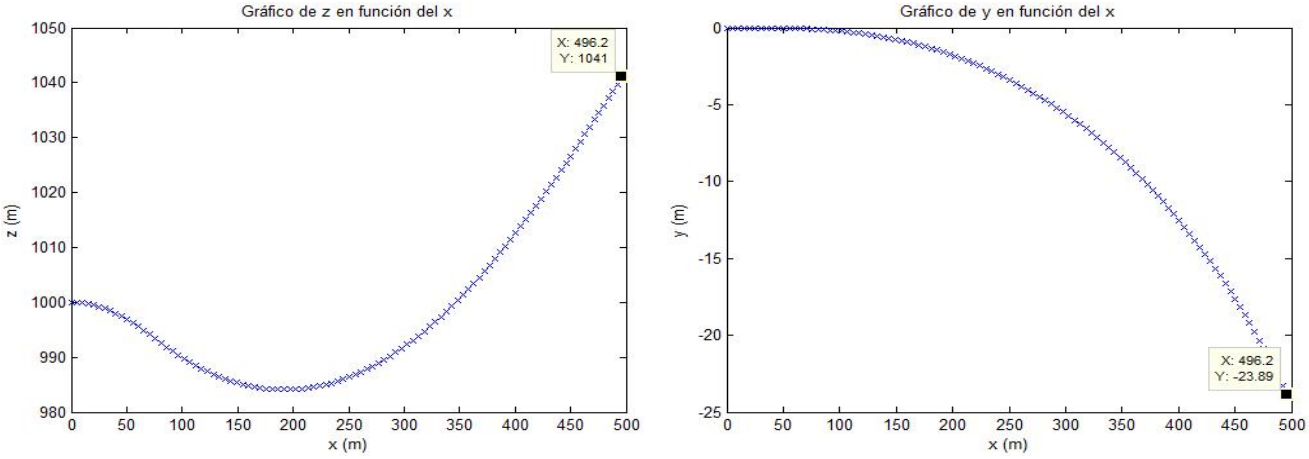
4.3.4. Prueba 4: Efecto de los elevadores

Pasaremos en esta sub-sección a probar la respuesta del sistema frente al movimiento de los elevadores. En la sub-sección anterior se pudo observar el efecto que produce un pulso sobre el sistema en

cuanto a las perturbaciones, se pudo ver que tanto al principio como al final de dicho pulso se generaban ciertos sobretiros en las variables que describen el sistema, esto es básicamente pues el sistema se intenta re-acomodar frente a la nueva condición de las entradas u. En este caso utilizaremos una señal para el elevador del tipo escalón de *Heaviside*, en particular para esta primer prueba que se describe en la tabla 4.5 se utilizó la función $\delta_e(t) = -(0{,}1).Y(t-1s)$; utilizando la nomenclatura usual para el escalón de *Heaviside* $Y(t)$ y δ_e medido en radianes.

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**		
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}, \vec{F_{Motor}}, \vec{T_{Motor}}$		
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	Velocidad del viento: $\vec{v_v} = 0$		
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_a = 0$	$\delta_r = 0$	$\delta_f = 0$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	$n = 2000rpm$	$t = 10s$	
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	**Escalón en** δ_e	Altura del escalón: $-0{,}1rad$	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$		$t_{bajada} = 1s$	

Cuadro 4.5: Tabla de especificaciones para la primer prueba del efecto de los elevadores.

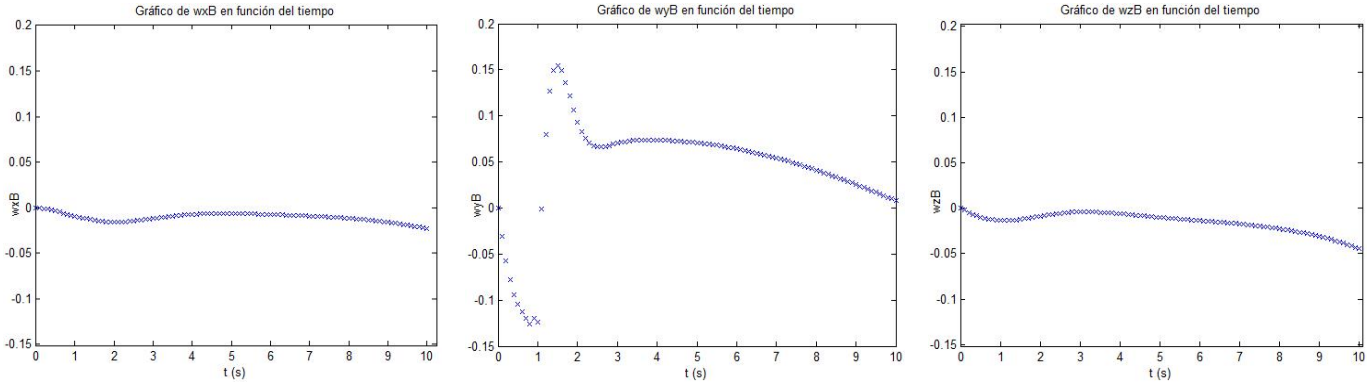


(a) Trayectoria en el plano xz obtenida para la prueba realizada.

(b) Trayectoria en el plano xy obtenida para la prueba realizada.

Figura 4.15: Trayectorias obtenidas para la prueba de la tabla 4.5, prueba del elevador.

En las figuras 4.15 y 4.16 se pueden ver los resultados obtenidos. Al aplicar una posición del elevador tal que $\delta_e < 0$ se logra un momento de *pitch* que genera un cabeceo del avión, este cabeceo hace posible que el avión ascienda según el eje z. Básicamente lo que ocurre es que dicho momento de *pitch* redunda en una variación de la velocidad angular según el eje lateral del avión w_{By} positiva, con lo cual el avión rota según la regla de la mano derecha en torno al versor $\hat{j_B}$. Si observamos la gráfica del plano xz de la figura 4.15, vemos que el avión logra ascender unos $41m$ respecto a su altura original al cabo de los $10s$, y además logra no descender más allá de $\approx 15m$. Respecto a la velocidad angular $\vec{w_B}$, se pueden observar las tres componentes en la sub-figuras de la figura 4.16. La velocidad angular w_{By} evoluciona conforme a lo esperado dado que se puedo notar una perturbación en $t = 1s$ y luego se mantiene positiva hasta el final de la simulación, en cuanto a las otras dos componentes de la velocidad angular w_{Bx} y w_{Bz} parecen no ser afectadas mayormente por la variación de la posición del elevador y ambas se mantienen prácticamente nulas durante los $10s$ de simulación. Estos resultados son consistentes con los comentarios vertidos en la sub-sección 3.4.5. De nuevo cabe destacar que el sistema tiene a desplazarse hacia las posiciones con $y < 0$, llegando en este caso a $y \approx -25m$ respecto a un avance en el eje x de $\approx 500m$.



(a) Evolución temporal de w_{Bx} para la prueba realizada.

(b) Evolución temporal de w_{By} para la prueba realizada.

(c) Evolución temporal de w_{Bz} para la prueba realizada.

Figura 4.16: Evolución en el tiempo de la velocidad angular $\vec{w_B}$ para la prueba de la tabla 4.5, prueba del elevador.

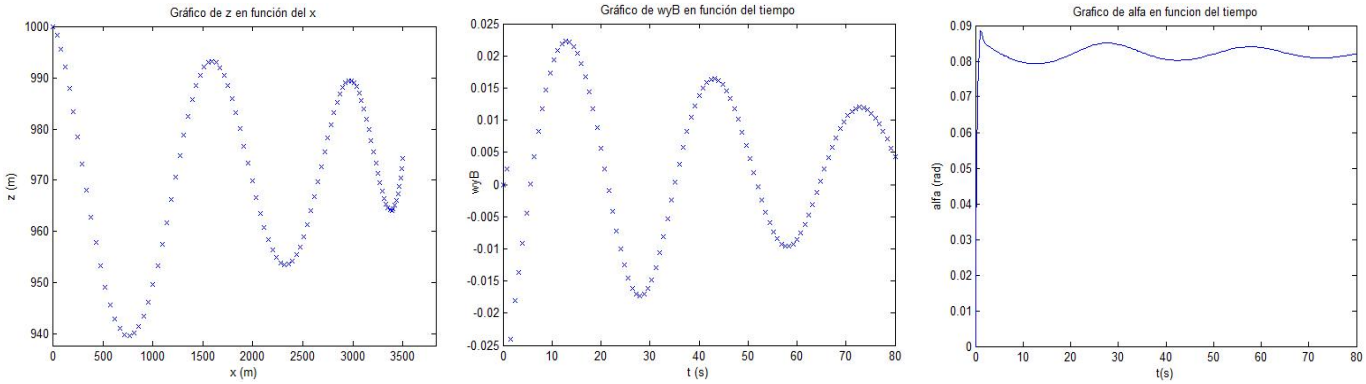
Referido al efecto de los elevadores, existe un fenómeno bien conocido en el ambiente de la aviación que es interesante comentar en este punto. Éste es el fenómeno de *phugoid*, y puede ser encontrado también como 'modo' *phugoid* [Coo07][Hul07]. Este modo se caracteriza principalmente por tener un trayectoria oscilante en el plano xz, la cual puede ser amortiguada o no. Durante el vuelo en movimiento *phugoid* el ángulo de ataque α se mantiene aproximadamente constante [c]. Si realizamos la simulación durante $80s$ manteniendo la posición del elevador fija podremos observar dicho fenómeno en nuestro simulador. Esta prueba se muestra a continuación y la tabla de especificaciones es la tabla 4.6.

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**		
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}, \vec{F_{Motor}}, \vec{T_{Motor}}$		
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	Velocidad del viento: $\vec{v_v} = 0$		
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_a = 0$	$\delta_r = 0$	$\delta_f = 0$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	$n = 1800rpm$	$t = 80s$	
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	**Valor constante para** δ_e**:** $-0{,}05rad$		
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$			

Cuadro 4.6: Tabla de especificaciones para la segunda prueba del efecto de los elevadores, prueba para el modo *phugoid*.

Al mantener la posición del elevador fija con $\delta_e < 0$ el avión cabecea de la manera que se mostró en la prueba anterior y comienza a elevarse hasta que llega un momento que la velocidad que tiene no es suficiente para mantener el *lift*, momento en el cual comienza a caer. En dicha caída el avión empieza a tomar velocidad hasta el momento en el cual la fuerza de *lift* es suficiente como para empezar a elevar nuevamente el avión, comenzando así nuevamente el proceso. Esta es una explicación intuitiva para el modo *phugoid*. En la referencia [Hul07] se demuestra analíticamente para el modelo restringido al plano xz (modelo reducido 3DoF del cual se puede encontrar una explicación detallada en la referencia [Alo09]) y trabajando con las ecuaciones lineales en torno a una trayectoria en línea recta, que el sistema bajo la hipótesis de funcionamiento en modo *phugoid* y realizando algunas aproximaciones como por ejemplo $\alpha \approx 0$, presenta un par de polos complejos conjugados cuya ubicación depende mayormente de la geometría del avión, los cuales dan origen a la oscilación (en principio, amortiguada).

Los resultados de dicha prueba se pueden observar en la figura 4.17. La trayectoria oscilante en el plano xz se puede ver en la sub-figura (a). En este caso, la trayectoria es amortiguada. En la sub-figura (b) se puede observar la oscilación de la velocidad angular según el versor $\hat{j_B}$, w_{By}, esto indica que el avión cabecea de un lado al otro según dicho versor como era de esperar. Éstas dos sub-figuras son además consistente entre ellas con la idea intuitiva respecto al ascenso, descenso y sentido de cabeceo del avión, dado que un mínimo de la trayectoria en el plano xz se corresponde con un máximo de w_{By} y con $w_{By} > 0$, y análogamente un máximo de la trayectoria en el plano xz se corresponde con un mínimo de w_{By} y con $w_{By} < 0$. Finalmente, se puede observar en la sub-figura (c) la evolución temporal del ángulo de ataque α, que inicialmente arranca nulo debido a las condiciones iniciales dadas y rápidamente se estabiliza a un valor aproximadamente constante y positivo, verificando entonces una de las condiciones del modo *phugoid*.



(a) Trayectoria en el plano xz obtenida para la prueba realizada.

(b) Evolución temporal de la velocidad angular w_{By} para la prueba realizada.

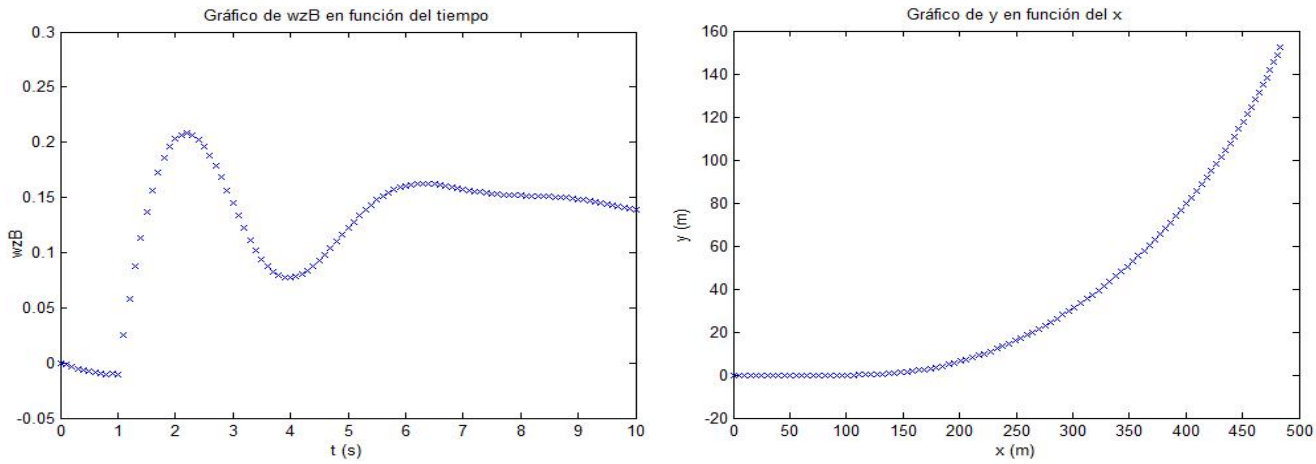
(c) Evolución temporal del ángulo de ataque α para la prueba realizada.

Figura 4.17: Resultados obtenidos para la prueba de la tabla 4.6, prueba del modo *phugoid*.

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**		
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}, \vec{F_{Motor}}, \vec{T_{Motor}}$		
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	Velocidad del viento: $\vec{v_v} = 0$		
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_a = 0$	$\delta_e = 0$	$\delta_f = 0$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	$n = 1800rpm$	$t = 10s$	
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	**Escalón en** δ_r	Altura del escalón: $-0{,}1rad$	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$		$t_{bajada} = 1s$	

Cuadro 4.7: Tabla de especificaciones para la prueba del efecto del timón de cola.

Los resultados de esta prueba se pueden observar en la figura 4.18. Según la sub-sección 3.4.5, el efecto de mover el timón de cola con $\delta_r > 0$ sería la aparición de un momento según $-\hat{k_B}$ y una fuerza según la dirección $\hat{j_B}$. En este caso, como estamos aplicando la señal $\delta_r(t) = -(0{,}1).Y(t-1s)$ donde δ_r está medido en radianes y $\delta_r < 0$ para tiempo mayores que $1s$, estamos en el caso contrario al descripto en dicha sub-sección. Esto se corrobora en el comportamiento del simulador. Si observamos la sub-gráfica (a) podemos ver como la velocidad angular evoluciona inicialmente por valores cercanos a cero y presenta un salto en $t = 1s$ (momento en el cual se cambia la posición del timón de cola), estabilizándose para tiempos mayores a $6s$ en un valor aproximado de $\approx 0{,}15rad/s$. Éste comportamiento evidencia la presencia de un momento según el versor $\hat{k_B}$ como era esperado. Por otro lado, si observamos la trayectoria que describe el avión en el plano xy vemos que el avión avanza sobre el semiplano $y > 0$, es decir, que tomando en cuenta la variación de los ángulos de *Euler* (φ, θ, ψ) que hubo para esta prueba, el anterior comportamiento evidencia la existencia de una fuerza F_{ay} según $-\hat{j_B}$, según lo esperado.



(a) Evolución temporal de la velocidad angular w_{Bz} para la prueba realizada.

(b) Trayectoria en el plano xy obtenida para la prueba realizada.

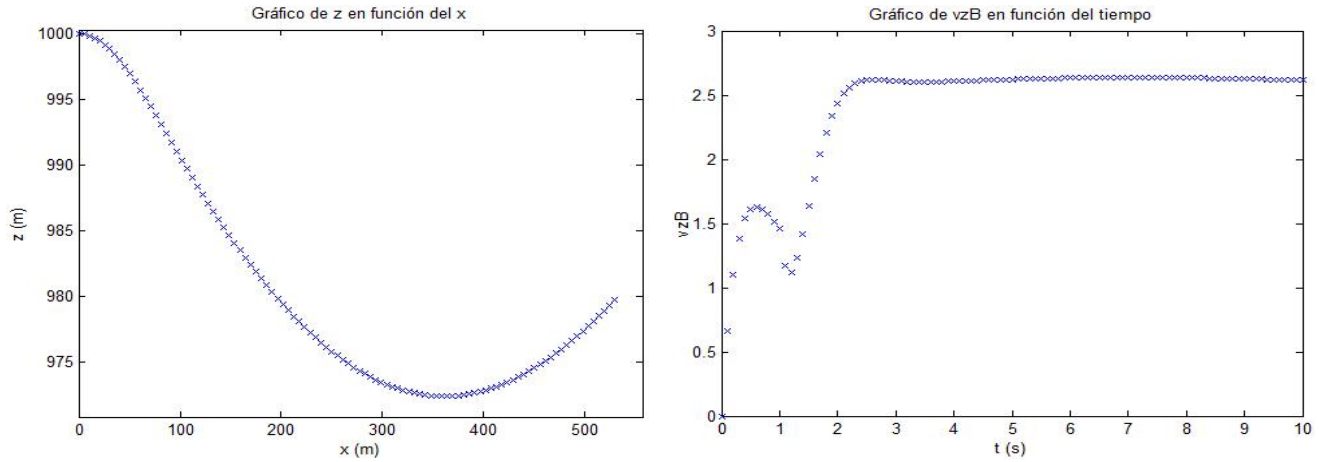
Figura 4.18: Resultados obtenidos para la prueba de la tabla 4.7, prueba del timón de cola.

Condiciones iniciales		Otras especificaciones		
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}, \vec{F_{Motor}}, \vec{T_{Motor}}$		
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	Velocidad del viento: $\vec{v_v} = 0$		
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_a = 0$	$\delta_e = 0$	$\delta_r = 0$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	$n = 1800rpm$	$t = 10s$	
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	**Escalón en** δ_f	Altura del escalón: $0{,}2rad$	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$		$t_{subida} = 1s$	

Cuadro 4.8: Tabla de especificaciones para la primer prueba del efecto de los *flaps*.

Como se puede apreciar en las figuras 4.19 y 4.20, los resultados para esta prueba son los que se esperaban. Si observamos primeramente la trayectoria descripta en el plano xz podemos ver que el avión desciende menos velozmente que en el caso del planeo e incluso logra ascender según el eje z, con lo cual podemos ratificar que aumenta el *lift* sobre el avión. Se debe hacer notar que la fuerza de *lift* no se corresponde con lo que llamamos F_{az}. La relación entre ambas fuerzas se puede apreciar en la ecuación 3.57, como estamos trabajando con ángulos α pequeños podemos asumir que $L \approx -F_{az}$ para esta prueba. Si observamos la gráfica correspondiente a la componente del vector de estados v_{Bz}, vemos que la misma es fuertemente afectada en $t = 1s$ aumentando al valor de $\approx 2{,}5m/s$, valor en el cual se estabiliza dicha magnitud. Este aumento de v_{Bz} es debido a un aumento de $-F_{az}$ y por lo tanto, dada la aproximación explicada, un aumento del *lift*.

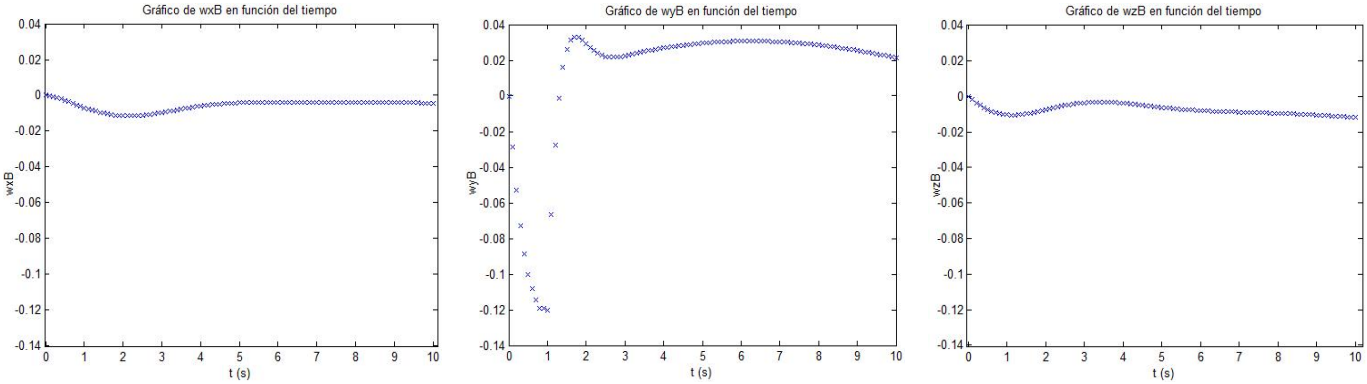
Si nos concentramos en las componentes de la velocidad angular $\vec{w_B}$, podemos ver que tanto w_{Bx} como w_{Bz} permanecen in-cambiadas frente a un movimiento de los *flaps*. Sin embargo, w_{By} es afectada por dicho movimiento, manteniéndose luego de la perturbación coincidente con el salto en la posición del *flap* en un valor de $\approx 0{,}02rad/s$. Los *flaps* son mayormente utilizados durante el aterrizaje o el despegue (es de aclarar que este modelo no es válido para dicha situación, es válido para situaciones de vuelo normales y tiene un optimalidad para velocidades de vuelo entre $35m/s$ y $55m/s$, como ya se ha mencionado). El fenómeno observado, donde w_{Bx} crece y se sitúa en un valor positivo hace crecer el ángulo de '*roll*', es típico de un aterrizaje o de un despegue donde los *flaps* son utilizados de forma de aumentar el *lift*, más específicamente para aumentar el *lift-to-drag ratio* [Hul07].



(a) Trayectoria en el plano xz obtenida para la prueba realizada.

(b) Evolución temporal de la velocidad angular v_{Bz} para la prueba realizada.

Figura 4.19: Trayectorias obtenidas para la prueba de la tabla 4.8, prueba de los *flaps*.



(a) Evolución temporal de w_{Bx} para la prueba realizada.

(b) Evolución temporal de w_{By} para la prueba realizada.

(c) Evolución temporal de w_{Bz} para la prueba realizada.

Figura 4.20: Evolución en el tiempo de la velocidad angular $\vec{w_B}$ para la prueba de la tabla 4.8, prueba de los *flaps*.

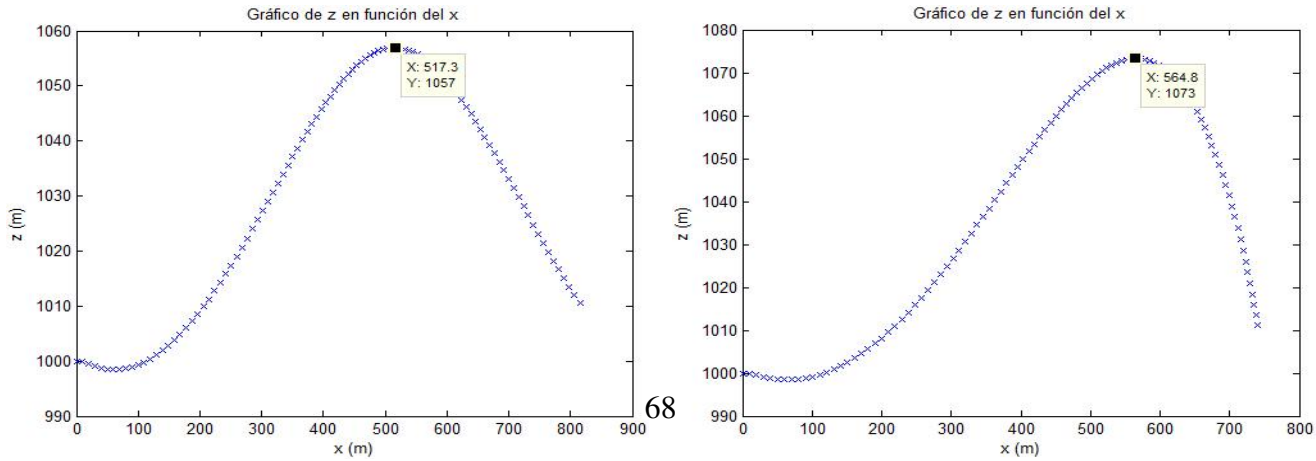
4.3.7. Prueba 7: Efecto del motor

Probaremos ahora el sistema para distintas velocidades del motor. Esta es la última acción de control u que nos falta testear. n afecta directamente el parámetro κ de las fuerzas y momentos del motor, de tal manera que si n aumenta entonces κ aumenta, incrementando entonces las fuerzas y momentos en las direcciones dadas. Es de mencionar que si bien una variación de n conlleva una variación de los momentos del motor, el mayor efecto se da sobre las fuerzas F_{ax} y F_{az}. Un aumento de n positivo genera un aumento de los módulos de las componentes F_{ax} y F_{az} según los versores $\hat{i_B}$ y $-\hat{k_B}$ respectivamente, debido a los signos de los coeficientes $C_{x\kappa}$, $C_{x\alpha\kappa^2}$ y $C_{z\kappa}$.

La prueba escogida en este caso es: con el avión funcionando en el modo *phugoid* aplicamos distintos valores constantes para la velocidad en rpm del giro de la hélice del motor. Es una simulación de tiempo corto para que se pueda apreciar sólo el primer máximo en la oscilación en la trayectoria en el plano xz. La tabla de especificaciones para esta prueba es la tabla 4.9 que se muestra a continuación.

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**		
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}, \vec{F_{Motor}}, \vec{T_{Motor}}$		
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	Velocidad del viento: $\vec{v_v} = 0$		
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_a = 0$	$\delta_e = 0$	$\delta_r = 0$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	$\delta_a = 0$	$t = 10s$	
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	**Prueba 7.1 :**	$n = 1000rpm$	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$	**Prueba 7.2 :**	$n = 2500rpm$	

Cuadro 4.9: Tabla de especificaciones para las pruebas del sistema con distintas velocidades del motor y en el modo *phugoid*.

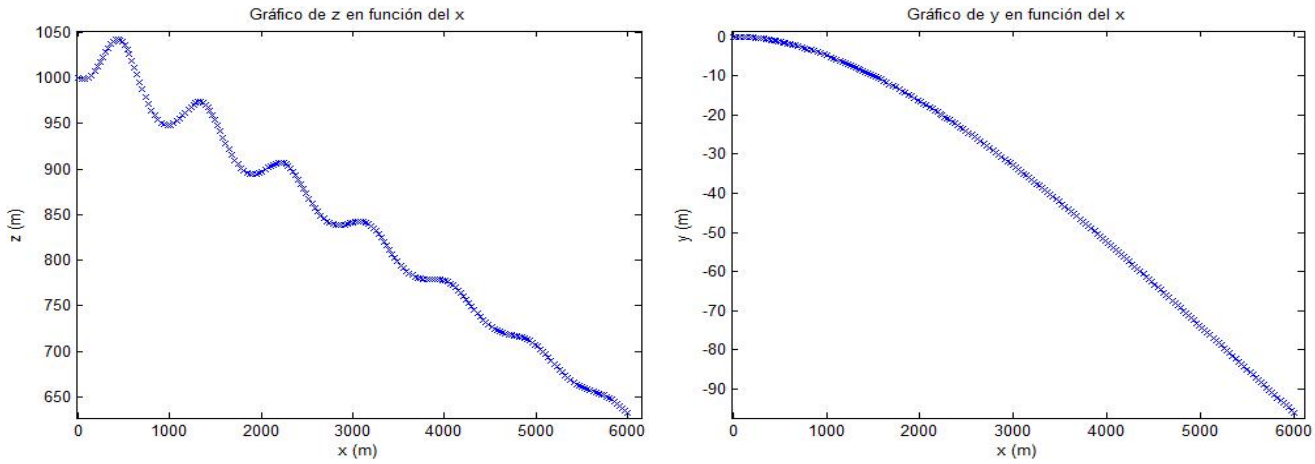


(a) Trayectoria en el plano xz obtenida para la prueba con $n = 1000rpm$, prueba 7.1

(b) Trayectoria en el plano xz obtenida para la prueba con $n = 2000rpm$, prueba 7.2

Estos no son los únicos efectos que se puede percibir, si aumentamos el tiempo total de simulación a $t = 150s$ podemos ver otro efecto debido a las distintas velocidades del motor. Probamos entonces con las mismas condiciones de la tabla 4.9, pero con una duración de $150s$ de simulación y velocidades de giro de la hélice de $n = 0$ (prueba 7.3), $n = 1000$ (prueba 7.4) y $n = 2000$ (prueba 7.5).

Si realizamos primero la prueba con $n = 0$ en modo *phugoid*, obtenemos los resultados que se muestran en la figura 4.22 [d]. El avión tiene una trayectoria oscilatoria en caída mientras que se va desviando levemente en el eje y, pues hay $\approx 90m$ de avance en el eje y contra $\approx 6000m$ en el eje x.



(a) Trayectoria en el plano xz obtenida para la prueba con $n = 0rpm$, prueba 7.3.

(b) Trayectoria en el plano xy obtenida para la prueba con $n = 0rpm$, prueba 7.3.

Figura 4.22: Trayectorias obtenidas para la prueba 7.3, prueba con $n = 0$ y $t = 150s$.

Sin embargo, cuándo hacemos girar la hélice del motor el comportamiento es bastante distinto. No sólo el avión mantiene el modo *phugoid* a lo largo de su trayectoria, sino que la caída es importantemente más lenta. En las figuras 4.23 y 4.25 se pueden observar los resultados obtenidos para los casos de las pruebas 7.4 y 7.5 donde se aplican $n = 1000rpm$ y $n = 2000rpm$ respectivamente. Para notar el efecto susodicho basta con comparar por ejemplo los valores de z_{min} para las pruebas 7.3, 7.4 y 7.5.

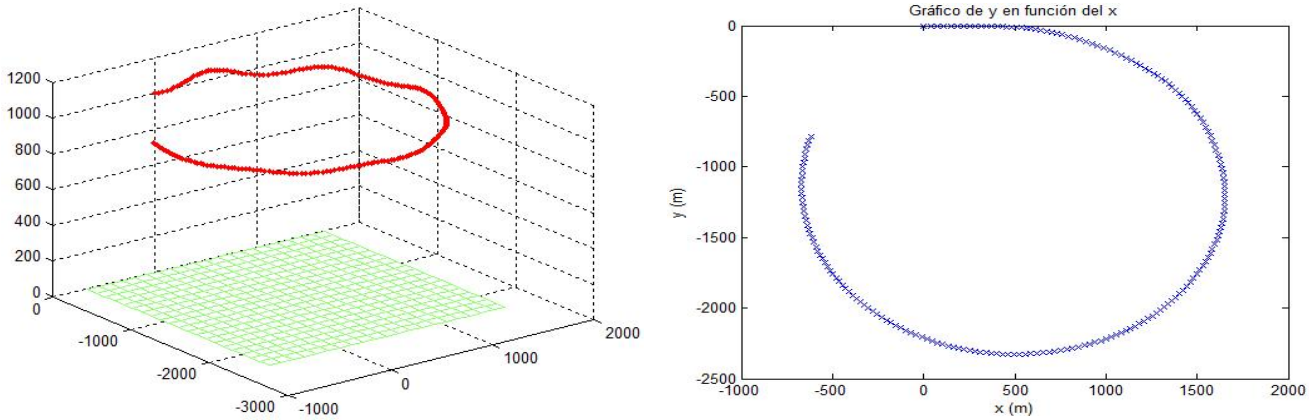
- $z_{min}|_{0rpm} = 632{,}3m$
- $z_{min}|_{1000rpm} = 952m$
- $z_{min}|_{2000rpm} = 987m$

Como demuestran estos valores de z_{min}, a medida que aumenta el valor de n la caída vertical es cada vez menor. Para las demás pruebas realizadas aumentando n se logró que el sistema oscilara en torno a un z creciente, se debe mencionar que se utilizaron valores de n mayores a los soportados por el sistema.

Otro fenómeno bien distinto que se presenta al aplicar velocidades de giro a la hélice no nulas, es que el avión empieza a describir círculos apreciables en el plano xy. Se puede observar en las figuras referenciadas como en el caso de aplicar $n = 1000rpm$ el avión casi llega a completar una vuelta y para el caso en que se aplica $n = 2000rpm$ la trayectoria recorrida es de aproximadamente dos vueltas y media.

El hecho que haya distinta cantidad de vueltas en estas pruebas, va de la mano con un cambio en el valor del radio de la trayectoria circular en el plano xy. Se puede notar como dicho radio va disminuyendo

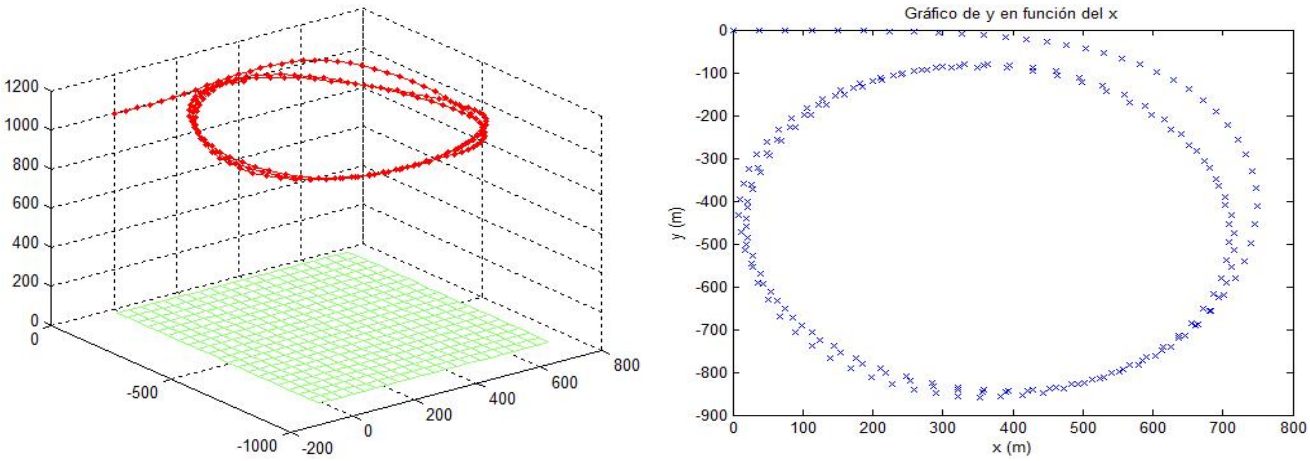
[d] Se sugiere al lector realizar esta prueba con un avión de papel desde una altura razonable ($\approx 8m$) simulando elevadores en la parte posterior.



(a) Trayectoria en el espacio obtenida para la prueba con $n = 1000rpm$, prueba 7.4.

(b) Trayectoria en el plano xy obtenida para la prueba con $n = 1000rpm$, prueba 7.4.

Figura 4.23: Trayectorias obtenidas para la prueba 7.4, prueba con $n = 1000$ y $t = 150s$.



(a) Trayectoria en el espacio obtenida para la prueba con $n = 2000rpm$, prueba 7.5.

(b) Trayectoria en el plano xy obtenida para la prueba con $n = 2000rpm$, prueba 7.5.

Figura 4.24: Trayectorias obtenidas para la prueba 7.5, prueba con $n = 2000$ y $t = 150s$.

conforme se aumenta el valor de n. Los radios descriptos en cada caso son aproximadamente:

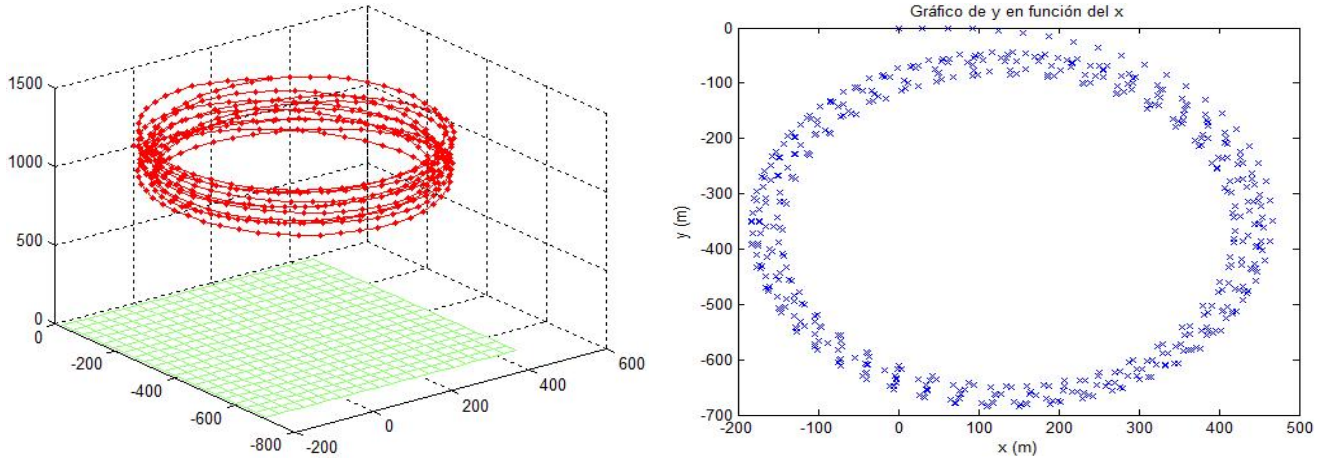
- $R|_{1000rpm} \approx 1160m$
- $R|_{2000rpm} \approx 365m$

Realizando una última prueba, la prueba 7.6, aumentamos la velocidad de giro de la hélice n por encima de los valores razonables para el avión a un valor de $5000rpm$ y utilizamos un tiempo de simulación de $t = 300s$. Vemos que el valor de radio R del círculo que se describe en el plano xy empieza a converger al valor de R_{min} para el modelo del avión. Para esta última prueba obtuvimos un valor de: $R \approx 300m = R_{min}$.

Se puede observar además que para este caso la trayectoria oscila en torno a un valor de z creciente.

4.3.8. Prueba 8: Efecto del viento

La última prueba que mostraremos en este capítulo es la relativa al efecto de la velocidad del viento. En este caso probaremos el planeo de la prueba 2 con distintas velocidades del viento según el eje y. Las pruebas realizadas se especifican en la siguiente tabla, la tabla 4.10.



(a) Trayectoria en el espacio obtenida para la prueba con $n = 5000rpm$, prueba 7.6.

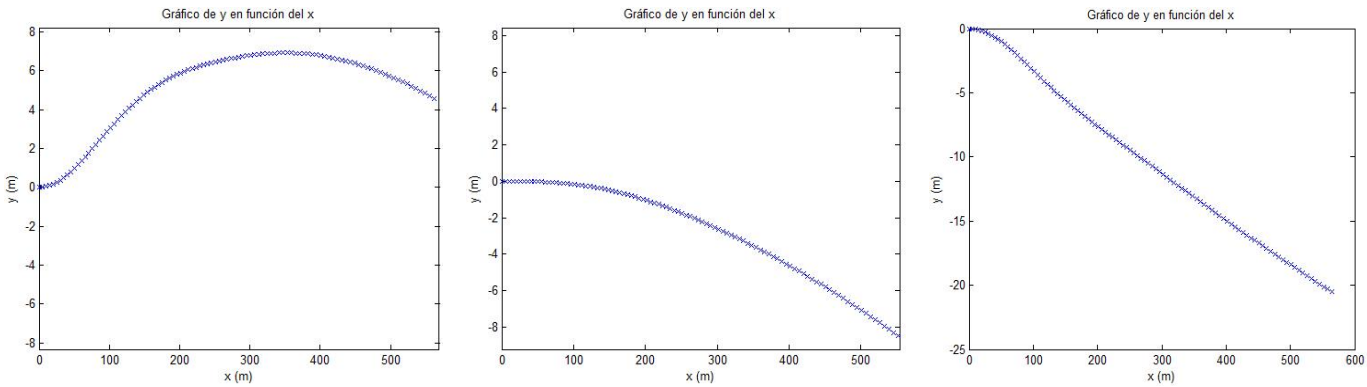
(b) Trayectoria en el plano xy obtenida para la prueba con $n = 2000rpm$, prueba 7.6.

Figura 4.25: Trayectorias obtenidas para la prueba 7.6, prueba con $n = 5000$ y $t = 300s$.

Condiciones iniciales		**Otras especificaciones**		
$x_0 = 0$	$v_{Bx0} = 50m/s$	Fuerzas y momentos: $\vec{P}, \vec{F_{Aero}}, \vec{T_{Aero}}, \vec{F_{Motor}}, \vec{T_{Motor}}$		
$y_0 = 0$	$v_{By0} = 0$	$\delta_a = 0$	$\delta_e = 0$	$\delta_r = 0$
$z_0 = 1000m$	$v_{Bz0} = 0$	$\delta_a = 0$	$n = 1800rpm$	$t = 10s$
$\varphi_0 = 0$	$w_{Bx0} = 0$	**Prueba 8.1 :**	$\vec{v_v} = 10(m/s)\hat{j}_I$	
$\theta_0 = 0$	$w_{By0} = 0$	**Prueba 8.2 :**	Sin viento	
$\psi_0 = 0$	$w_{Bz0} = 0$	**Prueba 8.3 :**	$\vec{v_v} = -10(m/s)\hat{j}_I$	

Cuadro 4.10: Tabla de especificaciones para las pruebas del sistema con distintas velocidades del viento.

Se puede observa en las sub-figuras de la figura 4.26 las trayectorias en el plano xy descriptas para cada prueba. En la prueba sin viento se puede apreciar una desviación pequeña según el eje y de $\approx 9m$ según el versor $-\hat{j}_I$. Cuando la velocidad del viento es según dicho versor, podemos ver como la trayectoria se desvía más aún en esa dirección llegando hasta un valor de $y \approx -20m$. Sin embargo, cuando la velocidad del viento es según el versor $\hat{j}_I$ la trayectoria a seguir en el plano xy es desviada hacia los $y > 0$, en este caso presenta un máximo en la trayectoria de $y \approx 7m$. Cabe destacar que estas perturbaciones son de un orden bastante menor al avance en el eje x el cual es del orden de los $\approx 550m$ en los tres casos.



(a) Trayectoria en el plano xy para la prueba con $\vec{v_v} = 10(m/s)\hat{j}_I$, prueba 8.1.

(b) Trayectoria en el plano xy para la prueba sin velocidad del viento, prueba 8.2.

(c) Trayectoria en el plano xy para la prueba con $\vec{v_v} = -10(m/s)\hat{j}_I$, prueba 8.3.

Figura 4.26: Trayectorias en el plano xy para distintas velocidades de viento sobre el eje y.

Capítulo 5
Linealización

En los capítulos anteriores se venía discutiendo sobre cómo es el MVE completo en el sentido de que no se aproximaba explícitamente de ninguna manera, aunque, claro está, con las salvedades de los efectos no considerados que se detallaron en la sección 3.6. El MVE que utilizaremos durante el transcurso de este capítulo será el mismo con el cual se construyó el MDL que se describió en la sub-sección 4.2.2. Como se puede desprender fácilmente de dicha sub-sección, este modelo se corresponde con las ecuaciones del resumen realizado en la sección 3.7, con la simplificación de utilizar $\rho(z) = cte = \rho_{1800}$. De todas formas, éste sigue siendo un sistema de difícil tratamiento en cuanto a que se trata de un sistema de orden doce (doce variables de estado o componentes del vector x) y no lineal. Sin embargo, a efectos del diseño y la construcción del controlador, encontramos que un primer abanico de herramientas a utilizar son las que nos brinda la teoría de control lineal. Pero, por cierto, para esto es necesaria la construcción de un nuevo sistema; un sistema linealizado. Por suerte no estamos trabajando con un sistema intrínsecamente no lineal, por lo cual podemos encontrar linealizaciones en torno a determinadas trayectorias. Para aclarar este último punto; no existe una linealización genérica del MVE presentado, y el mismo tampoco es linealizable para cualquier trayectoria, sólo para algunas trayectorias sencillas que se explicarán más adelante. De esta manera, para poder trabajar con el sistema buscaremos linealizar las ecuaciones halladas alrededor de una trayectoria estacionaria (más adelante se explicará el término), es decir, trabajaremos con las ecuaciones que cumplen las pequeñas perturbaciones alrededor de estas trayectorias.

Recordamos en este punto que la linealización jacobiana para un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{5.1}$$

Se obtiene realizando el desarrollo de *Taylor* alrededor de vectores x_0 y u_0 que determinan el punto de operación del sistema, o más genéricamente, la trayectoria de operación pues en principio tanto x_0 como u_0 podrían incluso ser funciones del tiempo, y que cumplen:

$$\dot{x_0} = f(x_0, u_0) \tag{5.2}$$

Derivando para los doce elementos del vector de estado x que denotaremos con los subíndice i y j, y derivando también para los cinco elementos del vector de entradas controlables u los cuales denotaremos con el subíndice k, y luego evaluando dichas derivadas en el punto de operación resulta que la linealización se obtiene de la siguiente manera:

$$\dot{\tilde{x}}_i \simeq \sum_{j=1}^{12} \left(\left. \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j} \right|_{(x_0,u_0)} \tilde{x}_j \right) + \sum_{k=1}^{5} \left(\left. \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_k} \right|_{(x_0,u_0)} \tilde{u}_k \right) \tag{5.3}$$

Siendo $\tilde{x}_j$ y $\tilde{u}_k$ pequeños apartamientos de la trayectoria de operación x_{j0} y u_{k0} respectivamente, y quedan definidos por $\tilde{x}_j = x_j - x_{j0}$ y $\tilde{u}_j = u_j - u_{j0}$. De modo de clarificar, el conjunto de los $\{x_i\}$ es de la forma $\{x_i\} = \{x, y, z, \varphi, \theta, \psi, v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}, w_{Bx}, w_{By}, w_{Bz}\}$, mientras que el conjunto de los $\{u_k\}$ es de la forma $\{u_k\} = \{\delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_f, n\}$. Aplicando este procedimiento se obtiene finalmente un sistema linealizado

de la forma que se muestra a continuación en la ecuación 5.4.

$$\boxed{\dot{\tilde{x}} = A|_{(x_0,u_0)}\,\tilde{x} + B|_{(x_0,u_0)}\,\tilde{u}} \tag{5.4}$$

Siendo nuevamente $\tilde{x}$ y $\tilde{u}$ pequeños apartamientos de la trayectoria de operación x_0 y u_0 respectivamente, y quedan definidos por $\tilde{x} = x - x_0$ y $\tilde{u} = u - u_0$. Usando este procedimiento para el MVE presentado en capítulos anteriores, se obtienen las matrices A y B de la ecuación precedente para la linealización de dicho modelo. Los cálculos relativos a las linealizaciones analíticas se pueden hallar en el apéndice A.

5.1. Trayectorias estacionarias y puntos de operación

Como se desprende de lo expresado anteriormente, otro concepto importante que aparece en esta instancia es el concepto de trayectoria estacionaria. Estrictamente lo que estamos buscando son trayectorias tales que si linealizamos alrededor de las mismas, nos quede un sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT de ahora en más). Dado que nuestro MVE no depende explícitamente del tiempo, para obtener un SLIT es necesario que las derivadas antes mencionadas en las variables de estado x y en las entradas u no varíen en el tiempo al ser evaluadas en las trayectorias de operación x_0 y u_0. Por lo tanto, llamamos trayectorias estacionarias, y denotaremos como x_d, a aquellas soluciones del MVE que hacen que las ecuaciones 3.5, 3.9, 3.12 y 3.14 sean invariantes en el tiempo. Se debe notar en este punto que para lograr este objetivo no alcanzará con obtener un valor para x_d, sino que necesariamente se tendrán que aplicar un cierto conjunto de entradas dadas al que llamaremos u_d.

Dada la dependencia de las ecuaciones con la velocidad lineal y la velocidad angular expresadas en la base del SB, se puede ver que para las trayectorias buscadas se deben anular las ecuaciones 3.12 y 3.14. Es claro que no buscamos puntos de equilibrio del sistema, es decir soluciones para las cuales la derivada del vector de estados se anule para todo tiempo, dado que para esto sería necesario anular las ecuaciones 3.5 y 3.9, obteniéndose por lo tanto la trayectoria trivial (e imposible para una situación real) en que el avión se mantiene en reposo para todo tiempo. Buscamos pues, trayectorias para las cuales la velocidad lineal y la velocidad angular se mantienen constantes en el SB[a].

Matemáticamente esto sería lo que se expone en las ecuaciones 5.5 y 5.6 que se muestran a continuación, lo cual constituye la característica fundamental de lo que llamaremos trayectorias estacionarias:

$$\boxed{\dot{\vec{v}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{v_{Bx}} = 0, \dot{v_{By}} = 0, \dot{v_{Bz}} = 0} \tag{5.5}$$

$$\boxed{\dot{\vec{w}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{w_{Bx}} = 0, \dot{w_{By}} = 0, \dot{w_{Bz}} = 0} \tag{5.6}$$

Si imponemos las restricción de las ecuaciones 5.5 y 5.6 sobre las ecuaciones 3.12 y 3.14, observamos que implica anular el lado izquierdo es estas últimas dos ecuaciones, con lo cual se obtiene que se debe cumplir el resultado que se muestra en las ecuaciones 5.7 y 5.8.

$$\vec{F_{Neta}} - m \begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{pmatrix} = 0 \tag{5.7}$$

$$\vec{T_{Neto}} - \begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix} \times I_{OB} \begin{pmatrix} w_{Bx} \\ w_{By} \\ w_{Bz} \end{pmatrix} = 0 \tag{5.8}$$

[a]Lo que si serían puntos de equilibrio para las ecuaciones 3.12 y 3.14, es decir, restringiéndonos a un subespacio del MVE

Con este criterio, las trayectorias estacionarias posibles para este sistema son las dos que se muestran a continuación:

- ▷ **Vuelo en línea recta velocidad constante**
- ▷ **Giro a velocidad angular constante**

Observamos que esto es posible debido a que las ecuaciones dinámicas 3.12 y 3.14 no dependen explícitamente de la posición en el sistema inercial (x, y, z) ni de los ángulos de *Euler* (φ, θ, ψ). En este punto, para que esta última afirmación sea correcta para todas las trayectorias estacionarias listadas, deberemos realizar algunas aproximaciones como por ejemplo despreciar la velocidad del viento respecto de la velocidad del avión para el segundo item, entre otros aspectos que se explicarán en detalle posteriormente en las secciones correspondientes.

Sin embargo, debe notarse que las ecuaciones cinemáticas 3.5 y 3.9 sí dependen explícitamente de los ángulos de *Euler* (no así de la posición en el SI) por lo que estas trayectorias no pueden ser calificadas todavía de estacionarias. Un estudio más detallado de la ecuación 3.9 permite ver que existe dependencia de solamente dos de los tres ángulos de *Euler*, por lo que si se tiene que $\theta = cte$ y $\varphi = cte$, entonces esta ecuación pasa a ser invariante en el tiempo. En lo que sigue haremos un estudio de las trayectorias mencionadas anteriormente y veremos en que casos se podrán considerar como trayectorias estacionarias.

Un último concepto que nos estaría faltando introducir es lo que entenderemos por punto de operación. Llamaremos punto de operación a un cierto valor constante de las entradas controlables u que, al aplicarse al sistema, hace que se pueda seguir una determinada trayectoria estacionaria. Denotaremos por u_d a este valor. Se debe hacer notar que cada trayectoria estacionaria tendrá asociada un punto de operación u_d constante. Muchas veces haremos un cierto abuso de notación refiriéndonos por punto de operación al conjunto $\{x_d, u_d\}$ que se obtiene para cada trayectoria estacionaria. Otro aspecto que se desea hacer notar es que, en rigor, este conjunto $\{x_d, u_d\}$ no tendría porque ser único dada una trayectoria estacionaria. Como veremos más adelante, algunos valores de este conjunto serán fijados y otros se obtendrán de resolver numéricamente el conjunto de ecuaciones 5.7 y 5.8, creando así una biyectividad entre la trayectoria estacionaria a seguir y el punto de operación $\{x_d, u_d\}$ que se hallará para la misma.

5.2. Vuelo en línea recta a velocidad constante

La primer trayectoria estacionaria que vamos a analizar es el vuelo en línea recta a velocidad constante en el SI. Dicha trayectoria estacionaria se caracteriza por las condiciones:

$$\boxed{\vec{w} = cte = 0 \qquad \Rightarrow \qquad w_{Bx} = 0, w_{By} = 0, w_{Bz} = 0} \tag{5.9}$$

$$\boxed{\vec{v} = cte \qquad \Rightarrow \qquad v_{Bx} = cte, v_{By} = cte, v_{Bz} = cte} \tag{5.10}$$

Estas condiciones, cumplen con las ecuaciones 5.5 y 5.6 correspondientes a la definición de una trayectoria estacionaria. Como estamos bajo las hipótesis de $w_{Bx} = w_{By} = w_{Bz} = 0$, las ecuaciones 3.12 y 3.14 se reducen a $\vec{F_{Neta}} = 0$ y $\vec{T_{Neto}} = 0$. Esta condición implica necesariamente que el vuelo rectilíneo nivelado no va a ser posible para un valor cualquiera de velocidad, ni tampoco para un valor cualquiera de giro de la hélice por ejemplo. Dado que tanto la fuerza de *lift* como la fuerza de *drag* dependen del módulo de la velocidad relativa al viento, va a ser necesario, por un lado suficiente velocidad como para que el *lift* pueda contrarrestar al peso así como una potencia del motor suficiente como para 'vencer' al *drag*, a lo que se deben tener en cuenta las limitaciones físicas del motor. Sin embargo, las magnitudes recién mencionadas no son las únicas involucradas en estas dos ecuaciones. Se tiene que las condiciones para poder describir esta trayectoria

estacionaria para la fuerza neta y el torque neto son las que se describen en las ecuaciones 5.11 y 5.12.

$$\vec{F_{Neta}} = \vec{F_a} + \vec{P} + \vec{F_p} = 0 \tag{5.11}$$

$$\vec{T_{Neto}} = \vec{T_a} + \vec{T_p} = 0 \tag{5.12}$$

Donde tenemos, para las distintas fuerzas y momentos, las relaciones funcionales dadas según las ecuaciones definidas en el capítulo 3, en la sección 3.4 de fuerzas y momentos involucrados. Otra cosa que cabe mencionar es que se debe recordar que los ángulos de *Euler* son necesarios para obtener la expresión de la velocidad del viento en el SB, con lo cual al introducir la velocidad del viento como variable en el problema se está introduciendo una dependencia con los ángulos de *Euler*. Sin embargo, en esta trayectoria estacionaria se verá que los ángulos de *Euler* son constantes, y por lo tanto esto no introducirá una dependencia en el tiempo. No se deberá entonces, hacer ninguna suposición sobre la velocidad del viento para esta trayectoria.

$$\vec{F_{Neta}} = \vec{F_{Neta}}(\varphi, \theta, \psi, \vec{v}|_B, \vec{w}|_B, \vec{v_v}|_B, \delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_f, n) \tag{5.13}$$

$$\vec{T_{Neto}} = \vec{T_{Neto}}(\varphi, \theta, \psi, \vec{v}|_B, \vec{w}|_B, \vec{v_v}|_B, \delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_f, n) \tag{5.14}$$

Respecto a la velocidad del viento medida en la base del SB $\vec{v_v}|_B$, se debe observar que se asumirá conocida dicha velocidad en la base del SI, es decir, se mide desde la tierra el valor de $\vec{v_v}$ y se la carga como parámetro. Se debe notar que en este caso se está cometiendo un cierto error dado que no se conoce instante a instante la forma de $\vec{v_v}|_I$. En las ecuaciones 5.13 y 5.14 se ha omitido la dependencia explícita con α y β, dado que ambos se pueden escribir como funciones de $(\varphi, \theta, \psi, \vec{v}|_B, \vec{v_v}|_I)$ según las ecuaciones 2.2 y 2.3, donde la dependencia con los ángulos de *Euler* viene dado por el hecho de que expresamos la velocidad del viento en la base del SI.

Las relaciones mostradas en las ecuaciones 5.13 y 5.14 son válidas en general, aunque en el caso que se está tratando, de movimiento rectilíneo nivelado, se impone que $w_{Bx} = w_{By} = w_{Bz} = 0$. Esto no será así para la otra trayectoria estacionaria que se tratará más adelante para la cuales también se utilizaran estas ecuaciones.

Si miramos las dependencias de las fuerzas, se puede ver claramente que las ecuaciones 5.13 y 5.14 para este caso involucran a las siguientes variables: los ángulos de *Euler* (φ, θ, ψ), las componentes de la velocidad del rígido en el SB $\{v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}\}$, las posiciones de las superficies de vuelo $\{\delta_a.\delta_e, \delta_r, \delta_f\}$, la velocidad de giro de la hélice n y la velocidad del viento $h = \vec{v_v}$.

En relación a la velocidad del viento, parece razonable que esta sea fija dado que es una característica ambiental externa al sistema. Si bien es posible que varie en el tiempo, es claro que no tiene sentido despejarla como si fuera una variable que podemos controlar. Como asumiremos conocido el valor del vector $\vec{v_v}|_I$, podemos ver que el valor de $\vec{v_v}|_B$, que es relevante a efecto de las ecuaciones 5.13 y 5.14, se puede escribir en términos de $(\varphi, \theta, \phi, \vec{v_v}|_I)$, siendo entonces función de los ángulos de *Euler* y un valor dado. Esto marca que el valor de $\vec{v_v}|_B$ es en cierta medida conocido a menos de los ángulos de *Euler*. En el conteo que se hace a continuación, las componentes de la velocidad del viento en el SB, serán consideradas como variables a despejar, pues en realidad no se puede saber el valor de $\vec{v_v}|_B$ sin antes conocer el valor que tendrá el conjunto $\{\varphi, \theta, \psi\}$.

Observamos pues, que para que pueda existir el vuelo recto nivelado, se deben cumplir dos ecuaciones vectoriales derivadas de las e cuaciones $\vec{F_{Neta}} = 0$ y $\vec{T_{Neto}} = 0$, y un vínculo vectorial explicado en el párrafo anterior que relaciona $\vec{v_v}|_B$ con los ángulos de *Euler*. Estas ecuaciones relacionan catorce variables distintas sin otros vínculos entre ellas. Resumiendo, tenemos tres ecuaciones vectoriales correspondiente a nueve ecuaciones algebraicas para un conjunto de catorce variables. Este conteo se puede observar a continuación en las ecuaciones 5.15, donde se recuerda que un vector representa tres variables.

$$\boxed{\begin{array}{c}\#\{Ecuaciones\ algebraicas\} = 9 \\ \\ \#\{Variables\} = \#\{\varphi, \theta, \psi, \vec{v}|_B, \vec{v_v}|_B, \delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_f, n\} = 14\end{array}} \tag{5.15}$$

Es claro que de este sistema de ecuaciones sólo será posible resolver si imponemos el valor para cinco ($14\ variables - 9\ ecuaciones = 5$) de estas catorce variables en función de las demás o fijándolas en un valor dado. Por otro lado, si quitamos las tres ecuaciones correspondiente al vínculo ya hallado entre $\vec{v_v}|_B$ y (φ, θ, ψ), y éstos otros cinco grados de libertad que eliminaremos según lo que mostraremos en los próximos párrafos, observamos que nos estarían quedando seis variables que se pueden despejar de las seis ecuaciones que quedarían correspondientes a las ecuaciones algebraicas $\vec{F_{Neta}} = 0$ y $\vec{T_{Neto}} = 0$. De esta maneara entonces es que se procederá a obtener los valores para $\{x_d, u_d\}$ correspondiente a la trayectoria estacionaria de vuelo a velocidad lineal constante, rectilíneo y nivelado.

Nuestro interés en particular es, dada una determinada situación de vuelo, hallar como deben ser las acciones de control para que esta sea posible, por lo cual las posiciones de las superficies de vuelo (δ) y la velocidad de giro de la hélice (n) serán variables que se despejarán de las ecuaciones $\vec{F_{Neta}} = 0$ y $\vec{T_{Neto}} = 0$ a partir de ciertas condiciones de vuelo fijas de antemano. A partir de este análisis, las condiciones de vuelo que se fijaran serán: la velocidad del avión expresada en el sistema inercial ($\vec{v}|_I$), la posición del *flap* (δ_f) y el ángulo de *Euler* (ψ), eliminando entonces los cinco grados de libertad que restaban y dejando seis variables para seis ecuaciones algebraicas.

Procederemos entonces a explicar cómo es que se eliminan los cinco grados de libertad restantes. Asumiremos que para la trayectoria estacionaria rectilínea que estamos tratando, el valor de la velocidad del avión en el sistema inercial $\vec{v}|_I$ será conocido, impuesto o dado por un agente externo o usuario. Podemos entonces, según la matriz H_B^I definida según la ecuación 3.4, agregar la ecuación de cambio de base entre la base del SI y la del SB, que vincula la $\vec{v}|_B$ con $\vec{v}|_I$ y los ángulos de *Euler*. Fijando esto, lo que estamos haciendo es escribir a $\vec{v}|_B$ como función de (φ, θ, ψ) y de un valor dado $\vec{v}|_I$, es decir, básicamente logramos escribir las tres componentes de $\vec{v}|_B$ en función de otras variables, en este caso, los ángulos de *Euler*. De esta manera bajamos tres grados de libertad al problema (agregamos tres ecuaciones al problema), quedando solamente en dos el total de grados de libertad .

Por otro lado, ya mencionamos que fijaremos una de las superficies de control, en este caso, la posición de los *flaps*. Recordaremos en este punto que los *flaps* son principalmente utilizados durante las maniobras de despegue y aterrizaje. El modelado realizado y para el cual está enfocado el proyecto fue para situaciones de vuelo normales con el avión ya en el aire y una velocidad de vuelo del avión en el intervalo $[35m/s, 55m/s]$, con lo cual, tanto el despegue como el aterrizaje no están considerados. En situaciones normales de vuelo los *flaps* no son utilizados, a menos que por alguna razón se debiera aumentar el *lift* (con el consecuente costo del aumento del *drag*). Por estas razones decidimos eliminar uno de los dos grados de libertad restantes imponiendo la posición del *flaps* en el valor nulo, es decir, $\delta_{fd} = 0$. Las situaciones donde, en situación de vuelo, se debiera aumentar el *lift* quedarán consideradas entonces en el valor de la pequeña señal del movimiento de los *flaps* ($\tilde{\delta_f}$).

Finalmente, de los ángulos de *Euler* (φ, θ, ψ) el ángulo ψ es el único que no aporta a la expresión del peso $\vec{P}$. El sistema es prácticamente indiferente sobre el ángulo ψ salvo a través de las relaciones entre las velocidades $\vec{v}|_B$ y $\vec{v_v}|_B$ con dichos ángulos, lo que de alguna manera sugiere que es razonable que este ángulo se pueda fijar de antemano. De hecho, procedimos a fijar el ángulo ψ en un valor razonable[b]. El valor de psi quedará entonces determinado a partir de la velocidad del avión expresada en la base del SI ($\vec{v}|_I$). Se debe notar que otro hecho que hace favorable que sea ψ el valor a fijar es que éste representa la primer rotación según la convención para los ángulos de *Euler*.

[b]Estrictamente el ángulo ψ no es una entrada conocida de antemano y bien podría dejarse libre a la hora hallar la solución al sistema de ecuaciones que por ser no lineal no necesariamente guarda una relación entre el número de ecuaciones necesarias para resolverlo y variables incógnita. Sin embargo hemos decidido fijarlo para simplificar la resolución del sistema.

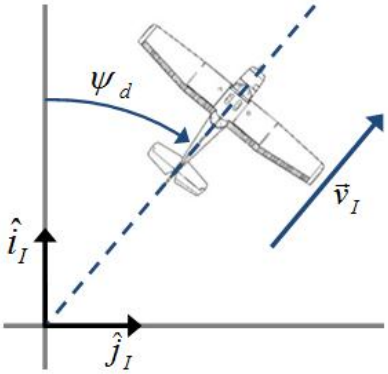


Figura 5.1: Determinación del valor de ψ_d.

En al figura de la izquierda se puede observar el modo en que determinaremos el ángulo ψ de modo de definir dicha componente del punto de operación. Este ángulo queda determinado por la proyección sobre el plano xy del vector $\vec{v}|_I$ según se muestra en la ecuación 5.16.

$$\blacktriangleright \quad \psi_d = \arctan\left(\frac{v_{Iy}}{v_{Ix}}\right) \tag{5.16}$$

En conclusión, una vez fijadas estas condiciones de vuelo y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraico no-lineal dado por las ecuaciones 5.11 y 5.12, obtenemos las seis restantes variables del vuelo: $\{\varphi, \theta, \delta_a, \delta_e, \delta_r, n\}$ que no fueron impuestas o expresadas en términos de otras variables. Éstas definirán el subconjunto faltante del punto de operación: $\{\varphi_d, \theta_d, \delta_{ad}, \delta_{ed}, \delta_{rd}, n_d\}$.

A modo de resumen, para esta trayectoria estacionaria de vuelo a velocidad lineal constante, rectilíneo y nivelado, el punto de operación $\{x_d, u_d\}$ queda determinado según se muestra en las siguientes ecuaciones.

$$\boxed{\begin{gathered}
\{\vec{v}|_I, \vec{v_v}|_I\} \ \ son\ conocidos. \\
w_{Bzd} = 0 \quad w_{Byd} = 0 \quad w_{Bzd} = 0 \\
(v_{Bzd}, v_{Byd}, v_{Bzd})^T = H_B^I \vec{v_I} = \vec{f}_1(\varphi_d, \theta_d, \psi_d, \vec{v}|_I) \\
\delta_{fd} = 0 \\
\psi_d = \arctan\left(\tfrac{v_{Iy}}{v_{Ix}}\right) \\
\left.\begin{array}{l} \vec{F_{Neta}}(\varphi_d, \theta_d, \delta_{ad}, \delta_{ed}, \delta_{rd}, n_d) = 0 \\ \vec{T_{Neto}}(\varphi_d, \theta_d, \delta_{ad}, \delta_{ed}, \delta_{rd}, n_d) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{\varphi_d, \theta_d, \delta_{ad}, \delta_{ed}, \delta_{rd}, n_d\}
\end{gathered}} \tag{5.17}$$

Donde hemos omitido de este recuadro la forma de hallar $\vec{v_v}|_B$ como $\vec{v_v}|_B = H_B^I \vec{v_v}|_I = \vec{f}_2(\varphi_d, \theta_d, \psi_d, \vec{v_v}|_I)$ pues no constituye una magnitud que nos interese despejar explícitamente. El superíndice T implica una transposición del vector.

Una vez obtenidos estos valores para x_d y u_d se procede a linealizar el sistema en torno a estos valores, utilizando las variables $\tilde{x}$ y $\tilde{u}$ para los pequeños apartamientos del punto de operación calculado. Al final del proceso se obtiene un sistema lineal de la forma de la ecuación 5.4, con las matrices A y B invariantes en el tiempo.

5.3. Giro a velocidad angular constante

Por giro a velocidad constante nos referimos a las trayectorias que admiten $\vec{w}|_B = cte$ y $\vec{v}|_B = cte$. Como ya se mencionó en secciones anteriores, para que el giro a velocidad constante pueda considerarse una trayectoria estacionaria se requiere de algunas hipótesis adicionales. A efectos de que las ecuaciones 3.12 y 3.14 sean independientes del tiempo, la velocidad del viento debe ser nula o despreciable respecto de $\vec{v}|_B$. También a efectos de que la ecuación 3.9 sea invariante en el tiempo, no puede haber variación temporal de θ o φ. Finalmente, para que 3.5 sea invariante en el tiempo, se debe pedir que ψ también sea constante. La primera

de estas hipótesis puede tomarse ya que, más allá de que sea una realidad, tomando la velocidad del viento como una entrada externa al sistema, contará como una perturbación en nuestro modelo. Sin embargo, las otras dos hipótesis juntas implican, usando 3.9, que $w_{Bx} = w_{By} = w_{Bz} = 0$, lo cual nos llevaría nuevamente a la situación de vuelo a velocidad constante, lo que es contrario a lo que se busca.

Quedamos entonces ante dos opciones: o bien restringimos las trayectorias de trabajo a vuelo a velocidad constante, lo cual limita fuertemente las posibilidades de vuelo controlado para el avión, o bien modificamos nuestro MVE para que admita otras linealizaciones invariantes en el tiempo. Optamos por la segunda opción ya que nos permite una mayor flexibilidad de trabajo, aunque trae sus complicaciones adicionales. En particular exploramos dos opciones cuyos resultados e implementación se detallan en capítulos posteriores pero cuyos detalles generales explicamos aquí.

La primera opción consiste en eliminar la ecuación 3.5 del MVE, lo que es posible pues en nuestro modelo ni las ecuaciones de cinemática ni las de dinámica dependen explícitamente de la posición del avión. Esto trae como consecuencia que renunciamos posteriormente a trabajar controlando directamente la posición como variable, y, siendo que en el mejor de los casos podríamos controlar su derivada (la velocidad), se obtiene un error integral en la posición. Esto no es completamente cierto pues usando control integral (es decir buscando controlar la integral de nuestro vector de estados) podríamos 'recuperar' las variables, pero esto volvería a traer el mismo problema: no es posible encontrar un sistema lineal invariante en el tiempo para realizar el control. Trabajando con una variante de la idea de control integral surge la segunda posibilidad: cambiar la posición por otra variable de similares características en el MVE, pero cuya cinemática sea invariante en el tiempo para esta trayectoria. Dependiendo de como se implemente esta segunda opción se pueden tener problemas más o menos similares a el caso anterior, los cuales se describen en el capítulo de control lineal junto con los resultados obtenidos. Procedimos entonces a sustituir la ecuación 3.5, pasando a medir la posición para el avión desde el centro del círculo que se encuentra recorriendo, y expresando dicha posición en el sistema solidario al avión. Pasaremos entonces a describir el proceso por el cual se obtendrán las nuevas ecuaciones que sustituirán a la ecuación 3.5.

Lo primero que se hace es pasar a medir la posición del avión desde el centro del círculo por el cual se quiere linealizar el MVE. Esto en realidad no es un paso muy crítico pues la posición del centro de dicho círculo es constante. Sin embargo, el cambio de variable resulta mucho más sencillo de visualizar y de explicar midiendo las magnitudes de interés (la posición) desde ese origen. En la figura 5.2 que se muestra a continuación se puede observar un ilustrativo de la nueva situación. Se debe recordar en este punto que los círculos que consideraremos para las trayectorias estarán contenidos en el plano xy. Denotaremos las coordenadas (x, y) del centro del círculo como (x_c, y_c). Se debe notar que estas coordenadas están medidas desde el origen de medición antedicho en el capítulo 3.

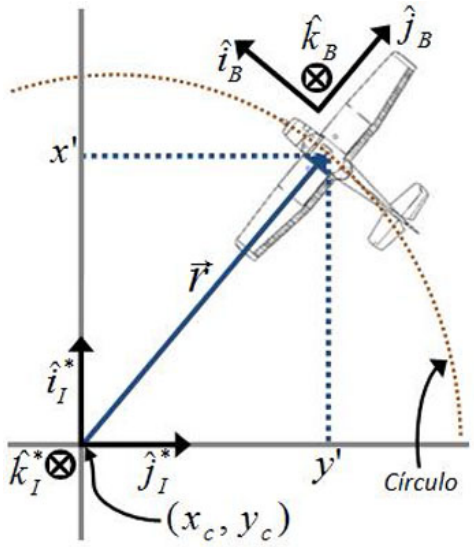


Figura 5.2: Explicativo para el cambio de variable utilizado para los círculos.

Se utilizará una base de versores $(\hat{i}_I^*, \hat{j}_I^*, \hat{k}_I^*)$, que de hecho es la misma base de versores $(\hat{i}_I, \hat{j}_I, \hat{k}_I)$ del SI, sólo que hemos introducido en caracter $*$ por un tema exclusivamente de notación. La coordenadas a utilizar serán x' e y', y estarán medidas desde el centro del círculo (x_c, y_c). De esta manera la posición del avión expresada en la base del SI, $\vec{r}|_I$ se puede escribir según se muestra en la ecuación 5.18. La base $(\hat{i}_B, \hat{j}_B, \hat{k}_B)$ es exactamente la misma que la explicada en el capítulo 3. Otro aspecto que merece ser mencionado es que no necesariamente $\hat{k}_B$ debe coincidir con $\hat{k}_I$ como podría malinterpretarse de la figura 5.2 que aparece sobre la izquierda del lector.

$$\vec{r}|_I = x'\hat{i}_I^* + y'\hat{j}_I^* = x'\hat{i}_I + y'\hat{j}_I \tag{5.18}$$

La modificación a realizar sobre el MVE consiste en, básicamente, en vez de utilizar la dinámica de $\dot{\vec{r}}|_I$ como en el MVE presentado en la ecuación 3.67 para las primeras tres ecuaciones según la ecuación 3.5, utilizar la dinámica de $\dot{\vec{r}}|_B$. $\vec{r}|_B$ es el vector $\vec{r}$ expresado en términos de la base del SB. La ventaja de este enfoque es que el vector $\vec{r}|_B$ se puede escribir únicamente como función de (φ, θ, R), siendo R el radio del círculo de interés. Esto se puede obtener fácilmente pues el vector $\vec{r}$ puede escribirse en términos de la base definida por la primer rotación correspondiente al orden de los ángulos de *Euler* (la rotación de ángulo ψ) como: $\vec{r_1} = R\hat{i_1}$ con R fijo para estas trayectorias. A continuación, en la ecuación 5.19, la forma de hallar el vector $\vec{r}|_B$.

$$\vec{r}|_B = f_1(R, \varphi, \theta) = H_2^B H_1^2 \vec{r_I} = H_2^B H_1^2 \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}|_B = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

Esto representa un avance fundamental respecto a la representación anterior pues, en la medida que $\{\varphi_d, \theta_d\}$ sean constantes, el vector de posición en torno al cual se linealiza $\vec{r_d}|_B$ será constante. Es decir, nos independizamos de la variable ψ. La dependencia con la variable ψ acarrea problemas debido a que ψ_d es función del tiempo para esta trayectoria estacionaria, impidiendo obtener un sistema SLIT luego del proceso de linealización.

Para obtener la dinámica de $\vec{r}|_B$ se debe derivar en el tiempo dicho vector teniendo en cuenta que este se encuentra medido desde (x_c, y_c) y se expresa en términos de la base del SB. La derivada en el tiempo de dicho vector se puede hallar como se muestra a continuación.

$$\vec{r}|_B = H_I^B \vec{r}|_I \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}|_B = \dot{\overline{H_I^B \vec{r}|_I}} = H_I^B \dot{\vec{r}}|_I + \dot{H}_I^B \vec{r}|_I = \vec{v}|_B + \dot{H}_I^B \vec{r}|_I$$

Donde ya hemos identificado que el término $H_I^B \dot{\vec{r}}|_I$ es igual a $\vec{v}|_B$. Resta entonces sustituir el término $\dot{H}_I^B \vec{r}|_I$ por una expresión más amigable. Este problema puede formularse abstractamente en términos de encontrar una forma de escribir $\dot{H}\vec{r}|_I$, siendo H una matriz de rotación que lleva la base del SI en la base del sistema SB. Identificando que H es una matriz de rotación y que por lo tanto cumple que $H^{-1} = H^T$, donde el superíndice T denota la transposición de la matriz, se pueden observar las siguientes igualdades.

$$\dot{H}\vec{r}|_I = \dot{H}H^{-1}\vec{r}|_B = \dot{H}H^T\vec{r}|_B \quad \Rightarrow \quad \dot{H}\vec{r_I} = \Omega\vec{r}|_B$$

A la matriz $\dot{H}H^T$ la hemos nombrado Ω por motivos que se explican a continuación. Al ser H una matriz de rotación se cumple que $HH^{-1} = HH^T = Id$. Derivando en el tiempo esta igualdad se obtiene que la matriz $\dot{H}H^T = \Omega$ es una matriz antisimétrica, como se muestra en las siguientes ecuaciones.

$$HH^T = Id \quad \Rightarrow \quad \dot{H}H^T + H\dot{H}^T = (\dot{H}H^T) + (\dot{H}H^T)^T = \Omega + \Omega^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = -\Omega^T$$

Dado que ya hemos demostrado que Ω es una matriz antisimétrica, podemos afirmar que esta matriz se puede escribir de una forma particular: el producto $\Omega\vec{q}$ puede expresarse como un producto vectorial, como se muestra a continuación.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{12} & 0 & -\Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & \Omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Omega \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{13} \\ \Omega_{12} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Donde se puede demostrar que el vector $(\Omega_{23}, \Omega_{13}, \Omega_{12})$ se corresponde con la velocidad angular $\vec{w}$ [Gol59]. De esta manera podemos escribir el término que nos faltaba identificar, $\dot{H}\vec{r}|_I$, de la forma:

$$\dot{H}\vec{r}|_I = \dot{H}H^{-1}\vec{r}|_B = \Omega\vec{r}|_B = \vec{w} \times \vec{r}|_B \quad \Rightarrow \quad \dot{H}_I^B \vec{r}|_I = \vec{w}|_B \times \vec{r}|_B$$

Donde hemos expresado $\vec{w}$ en la base del sistema SB como $\vec{w}|_B$ de modo de poder computar el producto vectorial con $\vec{r}|_B$. Hacemos notar que ambos vectores deben expresarse en la misma base para realizar este cálculo. Finalmente, podemos escribir la ecuación de la dinámica de $\vec{r}|_B$ según la expresión que se muestra a continuación en la ecuación 5.20.

$$\boxed{\dot{\vec{r}}|_B = \vec{v}|_B + \vec{w}|_B \times \vec{r}|_B} \tag{5.20}$$

Esta ecuación sustituye a 3.5 para la trayectoria en estudio y permite efectivamente lograr un sistema invariante en el tiempo cuando se linealiza. Cabe notar aquí que los nuevos elementos del vector de estados miden exactamente la misma cantidad que antes (la posición) pero desde un referencial distinto que da lugar a la invariancia temporal. Se debe destacar que esta ecuación es necesaria a efectos de linealizar el sistema, pero no tiene importancia alguna en el proceso de 'trimado' , es decir, el proceso por el cual se hallan los valores de régimen para las conjuntos $\{x_d, u_d\}$ para esta trayectoria estacionaria. Explicamos este término en detalle en una sección posterior.

Para cualquiera de los dos casos recién expuestos en los que se pretende obtener una expresión SLIT del sistema, ya sea ignorando la ecuación 3.5 o sustituyéndola por la ecuación 5.20, trabajamos en el marco de las primeras dos hipótesis que se mencionaron. Consideramos la velocidad del viento despreciable o modelable dentro de las perturbaciones al sistema y $\{\varphi_d, \theta_d\}$ constantes en el tiempo. Ignoramos temporalmente la tercera hipótesis planteada, en la que se requiere que ψ_d sea constante en el tiempo. Quedamos entonces con la necesidad de linealizar las ecuaciones 3.9, 3.12 y 3.14 para obtener el sistema SLIT deseado. El tratamiento de la ecuación 3.5 dependerá de las opciones mencionadas en el párrafo anterior, pero pasaremos a linealizar también la nueva ecuación 5.20 a efectos de contar con un modelo completo para poder realizar el control.

Aceptando que estamos buscando $\vec{w}|_B = cte$ y $\vec{v}|_B = cte$, las ecuaciones 5.7 y 5.8 se sostienen también para esta situación. Hasta aquí tenemos seis ecuaciones al igual que en el caso anterior, pero tenemos un conjunto inicial de diecisiete variables ya que $\vec{w}|_B$ es desconocida en este caso. Este conteo se muestra en la siguiente ecuación, la ecuación 5.21. Como se observará en breve, agregar ψ como variable es en realidad innecesario, pero en un primer análisis se podría considerar en el conteo. También consideramos en este conteo que θ_d y φ_d deben ser constantes en el tiempo, lo que elimina sus derivadas temporales como incógnitas, es decir, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\varphi} = 0$.

$$\boxed{\#\{Variables\ inicial\} = \#\{\varphi, \theta, \psi, \vec{v_B}, \vec{w}|_B, \vec{v_v}|_B, \delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_f, n\} = 17} \tag{5.21}$$

Como ya se vio en la sección anterior, dado que las ecuaciones 5.7 y 5.8 nos brindan seis ecuaciones algebraicas, debemos escribir varias de estas variables en términos de algunas que se despejarán o imponer un valor razonable para ellas, de modo de llegar a un total de seis variables libres a despejar. Muchas de estas variables estarán en general impuestas por el generador de trayectorias, aunque podrían estar impuestas alternativamente por un usuario. Éstos valores dados, no se encuentran incluidos dentro del conteo realizado por la ecuación 5.21 que, para el caso de esta trayectoria estacionaria, son: $\vec{v}|_I$ para un determinado valor de ψ (en próximos párrafos se esclarecerá este punto) y $\dot{\psi}$. Resumiendo, la condición de vuelo buscada queda determinada por la velocidad angular de giro $\dot{\psi}$ y la velocidad del avión en cualquier punto de dicho giro.

Al igual que en la situación descrita en la sección anterior, algunas de estas variables serán impuestas. En este caso la velocidad del viento debe ser considerada nula para que el sistema sea SLIT luego del proceso de linealización, por lo que tampoco es una incógnita. También en este caso utilizaremos $\delta_{fd} = 0$, con lo cual hemos eliminado cinco variables del conjunto anterior.

Debe considerarse también la ecuación 3.5 que vincula $\vec{v}|_I$ con $\vec{v}|_B$. Es por este motivo que podemos ver que es posible escribir $\vec{v}|_B$ como función de $(\varphi, \theta, \psi, \vec{v}|_I)$, aunque para eliminar la dependencia con ψ (que es una función del tiempo pues $\dot{\psi} \neq 0$) se evaluará dicha expresión para un valor de ψ en particular sin pérdida de información si se expresa el valor de $\vec{v}|_I$ de manera acorde. A dicho valor de ψ lo denotaremos por ψ_I

para diferenciarlo explícitamente de lo que podríamos identificar como ψ_d que es función del tiempo y que representa un concepto distinto.

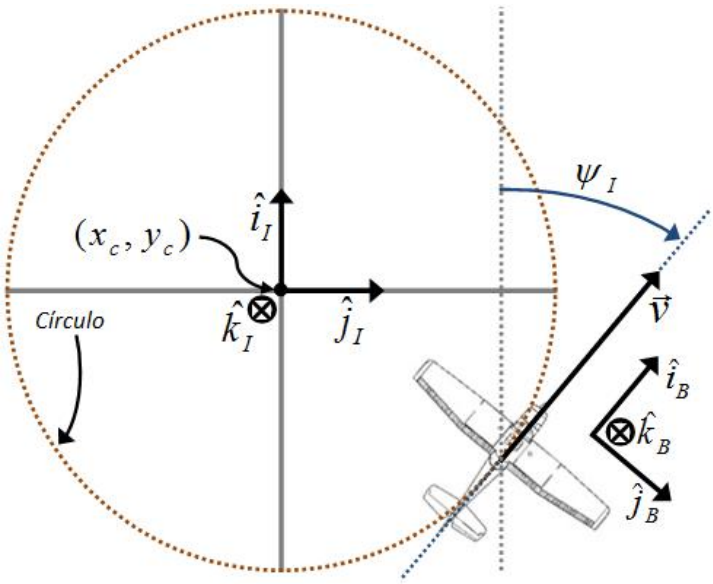


Figura 5.3: Explicativo para los valores de ψ_I y $\vec{v}|_I$.

Como se ve en la figura 5.3 se impondrá el movimiento del avión de forma que su posición vista en el plano xy (visto desde arriba por ejemplo) sea tangente al círculo, permitiéndosele inclinaciones según (φ_d, θ_d). En otras palabras, el versor $\hat{i_B}$ deberá ser tangente al círculo en cuestión, y para esto $\psi_d(t)$ tendrá que variar acordemente. En rigor, para que la trayectoria sea efectivamente estacionaria lo que se debe cumplir es que el ángulo entre $\hat{i_B}$ y la tangente al círculo sea al menos constante en el tiempo. La imposición radica en que imponemos ese ángulo en cero. De nuevo merece ser mencionado que no necesariamente $\hat{k_B}$ debe coincidir con $\hat{k_I}$ como podría malinterpretarse de la figura 5.3 que aparece sobre la izquierda del lector.

Como impondremos este movimiento para el avión -que resulta bastante natural- vemos que existe una correspondencia entre ψ y $\vec{v}$ para cualquier punto del círculo, para una trayectoria de vuelo a velocidad constante a lo largo de la trayectoria ($\|\vec{v}\| = cte$). En particular, como evaluaremos la ecuación 3.5 en un valor de ψ_I en particular, el valor de $\vec{v}|_I$ no puede ser cualquiera, sino que debe respetar esa relación. Por ejemplo, podríamos usar la velocidad cuando $\psi_I = 0$, en cuyo caso el valor de $\vec{v}|_I$ a utilizar sería $\vec{v}|_I = (\|\vec{v}|_I\|, 0, 0)$ como se puede observar en la figura 5.3. Como se dijo antes esto no conlleva pérdida de generalidad alguna[c]. Esto además es bastante razonable pues $\vec{v}|_B = cte$ (dado que estamos buscando soluciones con $\dot{\vec{v}}|_B = 0$), y como tanto ψ como $\vec{v}|_I$ son funciones del tiempo (la dirección de $\vec{v}|_I$ varía en el tiempo, no así su módulo), es razonable que $\vec{v}|_B$ sea indiferente a las variaciones temporales de estas variables. De esta manera logramos expresar $\vec{v}|_B$ únicamente como función de (φ, θ), que de hecho será constante a lo largo de esta trayectoria estacionaria dado que los valores que se obtendrán para $\{\varphi_d, \theta_d\}$ serán constantes en el tiempo. Esto implica que obtenemos tres ecuaciones algebraicas más para utilizar, $\vec{v}|_B = \vec{f_1}(\varphi, \theta)$.

Nos siguen faltando tres grados de libertad a fin de llegar a un sistema que pueda tener solución. Es decir, dónde la cantidad de ecuaciones iguale a la cantidad de incógnitas, en este caso doce. Para esto expresaremos $\vec{w}|_B$ en términos de variables que se despejarán, amparados en la ecuación 3.9 que relaciona $\vec{w}|_B$ con la derivada de los ángulos de *Euler*, $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$. Se recuerda en este momento que trabajamos en una trayectoria donde necesariamente $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\psi}$ es dado. En este caso se tienen las siguientes igualdades:

$$\vec{w}|_B = L \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{w}|_B = L \begin{pmatrix} \dot{\varphi} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{w}|_B = \vec{f_2}(\varphi, \theta, \dot{\psi}) \quad con\ \dot{\psi}\ dado.$$

[c]Cabe notar aquí que la velocidad del avión expresada en el sistema inercial para esta situación puede separarse en dos componentes claramente independientes: v_{Iz} que es constante en la trayectoria ya que la velocidad angular será según el eje k_I, y por otro lado la velocidad proyectada sobre el plano determinado por los versores i_I y j_I, donde la naturaleza de la trayectoria impone que tenga características de un vuelo circular uniforme, es decir, módulo constante.

Se debe notar que, como $\vec{w}|_B$ no depende de ψ, sólo depende de $(\varphi, \theta, \dot{\psi})$. Este hecho se puede ver analíticamente al hacer la cuenta correspondiente, pues la matriz L sólo depende de θ y φ. Esto también se puede visualizar intuitivamente pues ψ es la primer rotación de *Euler*. Cabe hacer notar que como los valores de $\{\varphi, \theta, \dot{\psi}\}$ son constantes, $\vec{w}|_B$ será también constante como estábamos buscando. Esto se debe a que, nuevamente, buscamos trayectorias con $\dot{\vec{w}}|_B = 0$. De esta manera, obtenemos las últimas tres ecuaciones que necesitábamos dadas por $\vec{w}|_B = \vec{f}_2(\varphi, \theta, \dot{\psi})$.

Como ninguna de las ecuaciones 5.7, 5.8 dependen de ψ, $\vec{v}|_B = \vec{f}_1(\varphi, \theta)$ y $\vec{v}|_B = \vec{f}_2(\varphi, \theta, \dot{\psi})$ no dependen de ψ. Es por este motivo que la variable ψ no tendría por qué haber sido considerada en el conteo inicial. Observamos que el valor de $\psi_d(t)$ deberá variar de manera tal de respetar el hecho de que el avión debe volar en dirección tangente a la trayectoria circular. En este caso, ψ_d será: $\psi_d(t) = \dot{\psi}t + \psi_0$, con ψ_0 el valor de ψ para $t = 0$. Para la linealización en particular este valor de ψ_0 es arbitrario, pues, dado que se linealiza en torno a un círculo entero, el punto donde se inicia el círculo es indiferente. En particular, se podría usar $\psi_0 = \psi_I$.

Se ha obtenido un sistema de doce ecuaciones y doce incógnitas para determinar la situación de vuelo deseada, pudiéndose despejar las variables $\{\theta_d, \varphi_d, \delta_{ad}, \delta_{ed}, \delta_{rd}, n_d, \vec{w_d}|_B, \vec{v_d}|_B\}$ y con ellas determinar completamente el sistema linealizado. Se debe notar que el valor de este conjunto de variables es constante en el tiempo.

Se puede apreciar a partir del análisis anterior que las trayectorias a las que nos referimos como 'giro a velocidad constante' son en realidad trayectorias que comprenden situaciones de vuelo helicoidales, con $v_{Iz} = cte$ y $w_{Iz} = cte$ siendo el vuelo en círculos un caso especial de dicha trayectoria cuando $v_{Iz} = 0$.

A modo de conclusión resaltamos que, si bien trabajaremos con los dos tipos de trayectoria desarrollados en este capítulo para poder implementar las herramientas de control sobre sistemas lineales invariantes en el tiempo, la segunda trayectoria no puede considerarse estrictamente estacionaria (al menos no con el MVE completo como se planteó en el capítulo de Modelado) por lo que deberá prestarse especial atención al tratamiento dado para dichas trayectorias durante el capítulo de control.

Resumiendo, para esta trayectoria estacionaria de vuelo a velocidad constante en una trayectoria circular, el punto de operación $\{x_d, u_d\}$ queda fijado según se muestra en las siguientes ecuaciones.

$$\boxed{\begin{gathered}
\{\dot{\psi}, \psi_I, \vec{v}|_I\} \;\; son\ conocidos,\ \psi_I\ compatible\ con\ \vec{v}|_I. \\
\{\vec{v_v}, \delta_f\} \;\; son\ nulos. \\
(v_{Bzd}, v_{Byd}, v_{Bzd})^T = H_B^I \vec{v}|_I = \vec{f}_1(\varphi_d, \theta_d) \\
(w_{Bzd}, w_{Byd}, w_{Bzd})^T = L(0, 0, \dot{\psi})^T = \vec{f}_2(\varphi_d, \theta_d, \dot{\psi}) \\
\psi_d = \dot{\psi}t + \psi_I \\
\left.\begin{array}{r}
\vec{F_{Neta}}(\varphi_d, \theta_d, \delta_{ad}, \delta_{ed}, \delta_{rd}, n_d) - m\vec{w_d}|_B \times \vec{v_d}|_B(\varphi_d, \theta_d, \dot{\psi}) = 0 \\
\vec{T_{Neto}}(\varphi_d, \theta_d, \delta_{ad}, \delta_{ed}, \delta_{rd}, n_d) - \vec{w_{Bd}} \times I_{OB}\vec{w_d}|_B(\varphi_d, \theta_d, \dot{\psi}) = 0
\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \{\varphi_d, \theta_d, \delta_{ad}, \delta_{ed}, \delta_{rd}, n_d\}
\end{gathered}} \tag{5.22}$$

Donde el superíndice T implica una transposición del vector. Al igual que en el caso anterior, una vez obtenido estos valores para x_d y u_d se procede a linealizar el sistema en torno a estos valores, utilizando las variables $\tilde{x}$ y $\tilde{u}$ para los pequeños apartamientos del punto de operación calculado. En este caso, se utiliza para la linealización del MVE la ecuación 5.20 que se dedujo en esta sección. Al final del proceso nuevamente se obtiene un sistema lineal de la forma de la ecuación 5.4, con las matrices A y B invariantes en el tiempo.

5.4. *Software* de linealización y trimado

Llamamos trimado al proceso de resolver un sistema de ecuaciones, en general no lineal, para el cual se hallan las condiciones en las que sucede una trayectoria estacionaria. Básicamente esto se realiza mediante un programa de resolución del sistema de ecuaciones no lineales que queda planteado a partir de las condiciones que se describieron en las secciones anteriores, donde se detalla el sistema a resolver en cada caso junto con las ecuaciones que lo definen y las incógnitas a despejar. En términos del MVE, con este proceso de trimado se determinan completamente los vectores x_d y u_d para las situaciones de vuelo deseadas.

A modo de ejemplo, para el caso del vuelo a velocidad constante, el sistema de ecuaciones a resolver es atacado por la rutina *trimVcte.m*, que es una función de *Matlab* que toma como parámetros los valores de las variables que especifican las condiciones antes indicadas (la velocidad del viento, el módulo de la velocidad requerida y el ángulo ψ especificado) y devuelve los valores de las restantes variables de vuelo para las que sucede la trayectoria estacionaria (las entradas del sistema, los ángulos de *Euler* restantes, la expresión de la velocidad y velocidad angular en el SB). Dicha rutina utiliza la función *fsolve.m* de *Matlab* para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, que viene con el *optimization toolbox*. Cabe destacar que es necesario procurarle al método, una condición inicial de iteración razonablemente cercana a la solución para que este asegure la convergencia (en nuestro caso la semilla que se usa fue impuesta luego de resolver el sistema una vez para un conjunto de parámetros estándar).

De manera totalmente análoga funciona la rutina *trimWcte.m* para el caso de trayectorias circulares, y de manera general la rutina *trimTsv.m* que permite el ingreso de una sucesión de puntos de operación que deberán ser vuelos a velocidad constante o giros a velocidad angular constante, y devuelve la sucesión de entradas, ángulos de *Euler* y demás variables que deben ser determinadas. Una vez que se utilizan estas funciones para obtener los valores de x_d y u_d, corresponde pasar al proceso de linealización propiamente dicho.

La linealización en nuestro programa se implementó mediante la derivación analítica de las ecuaciones por parte nuestra y luego su programación en *Matlab*. El motivo principal para realizar la linealización en forma analítica a pesar de que se podrían haber hecho las derivaciones numéricas, radicaba en la futura implementación del controlador en un computador de capacidad más reducida. La derivación numérica, además de ser computacionalmente más cara que la evaluación directa de las funciones que se derivan analíticamente, requiere de conocer un modelo completo del sistema, que si bien llegamos a programar en *Matlab*, nunca fue la intención de portarlo al computador donde se fuera a eventualmente implementar el sistema de control.

Una vez hechas las derivaciones analíticas, lo que se programó fueron las funciones *linealizarMVE.m* y *linealizarMVE modif.m* que calculan dichas funciones derivadas para el MVE presentado en el capítulo de modelado, y para la versión modificada que se introdujo en este capítulo a efectos de obtener un sistema SLIT para las trayectorias con velocidad angular constante. Dichas funciones reciben como entradas los vectores x_d y u_d y retornan las matrices A y B correspondientes al sistema linealizado. A modo de verificar que las derivaciones estuvieran bien hechas, se contrastaron los resultados de estas funciones con lo que resulta de usar la linealización de *Matlab* correspondiente a los sistemas implementados en *simulink*.

Capítulo 6
Generador de trayectorias

La generación de trayectorias es una parte clave de cualquier sistema de navegación autónomo. El tipo de trayectorias generadas determinará, en última instancia, qué estrategias de control podrán utilizarse y la complejidad de las mismas. Por lo tanto, se requiere a la hora de construir el sistema generador de trayectorias, tomar en cuenta las consecuencias que éste tendrá sobre el sistema de control y evaluar todo el sistema como uno, en otras palabras, no se puede pensar independientemente el controlador y el generador de trayectorias pues están íntimamente ligados.

6.1. ¿Qué entendemos por generador de trayectorias?

En una primera instancia, el problema que debe resolver el generador de trayectorias es: dados N puntos en el espacio (x, y, z) (*waypoints* de ahora en más), generar una curva a seguir en el espacio de posiciones y velocidades, pasando suficientemente cerca de los *waypoints* especificados y en el orden especificado, según un cierto criterio de proximidad. Los puntos especificados a priori podrían - además del orden predeterminado para seguirlos - tener un requerimiento en cuanto al tiempo en que se desea llegar a ese punto, en cuyo caso la especificación de los *waypoints* sería de la forma (x_1, y_1, z_1, t_1), requiriendo así una parametrización explícita en el tiempo.

De manera aún más general, podemos entender por trayectoria a un conjunto de valores (curva) en el vector de estados (o algún sub-vector del mismo) que se desea que el sistema sea capaz de seguir. Otra vez, esta evolución puede estar explícitamente parametrizada en el tiempo o no. De esta definición surge una primera decisión clave para un sistema de generación de trayectorias: definir cuál es el sub-conjunto de variables del espacio de estados que se desea controlar y cuáles quedan libres para ser modificadas por el sistema de control.

6.2. Elementos a considerar para la construcción del generador de trayectorias

A efectos de diseñar un generador de trayectorias debemos poner previamente especial atención en los requerimientos que debe cumplir y en algunas características deseables para el mismo. Dentro de estos aspectos, observamos que hay algunos que son intrínsecos al generador de trayectorias y otros que tienen más que ver con la relación que éste tendrá con el controlador a diseñar y la capacidad computacional disponible.

Dentro de los aspectos relativos al generador de trayectorias propiamente dicho podemos mencionar que las especificaciones a tener en cuenta son las siguientes:

- ▷ **Tipo de recorrido que se busca del avión.** Por ejemplo, debe definirse si la navegación será bi o tridimensional. También debe decidirse cuales serán los *inputs* del usuario, si esto consistirá en un conjunto de *waypoints* ordenados o no, con un tiempo máximo de pasada o no, entre otros aspectos a definir.

- ▷ **Restricciones del sistema físico que impiden recorrer una trayectoria arbitraria.** Entre otros, hay que considerar un mínimo radio de giro que puede realizar el vehículo con acciones de control

aceptables, máxima y mínima velocidad de vuelo, máxima velocidad de ascenso (tasa de trepado), y otras especificaciones más básicas como por ejemplo si existirá continuidad de la posición y la velocidad del vehículo [a].

- ▷ **Criterio de trayectoria óptima.** A efectos de elegir una buena trayectoria entre varias posibles que cumplan con los objetivos trazados en los puntos anteriores, se puede definir o no qué variables del sistema se desean optimizar según algún criterio. Casos típicos serían los de elegir las trayectorias más cortas, las que consuman menos combustible, las que tengan menores acciones de control, o las que tengan los mayores radios de giro, por mencionar algunas de las posibles elecciones.

Como decíamos párrafos atrás, no sólo los items mencionados en el listado anterior son los que hay que tener en cuenta, sino que nace necesariamente una necesidad de estimar el costo computacional que tiene la generación de trayectorias (en especial si se desea hacer en la computadora de abordo, con prestaciones bastante más limitadas que la de un PC de escritorio) y también se debe considerar el costo que tendrá el sistema de control necesario para lograr seguir las trayectorias implementadas.

Entre los elementos relacionados con estos costos podemos identificar los siguientes:

- ▷ **La naturaleza del sistema a controlar.** El sistema a controlar es no lineal, y por lo tanto las estrategias de control sobre el sistema tienen un costo computacional mayor que las estrategias de control lineal. Sin embargo, existen trayectorias sobre las que se puede linealizar nuestro sistema; a saber, los vuelos en línea recta sobre el plano horizontal y vertical, y las trayectorias circulares a velocidad constante en el plano horizontal. Esto además de reducir el costo computacional permite el uso de un gran conjunto de herramientas de control lineal, que son de simple aplicación y con las que estamos más familiarizados.

- ▷ **Complejidad computacional.** Dado que los problemas de optimización con restricciones son problemas computacionalmente complejos, se pueden buscar soluciones con una menor cantidad de restricciones de las que tiene el problema real, dejando que el mismo sistema físico y el control sigan la trayectoria con las restricciones naturales que aparecen. Un ejemplo de esto podría ser no preocuparse por que exista continuidad en la velocidad de la trayectoria, y que cualquier discontinuidad (imposible en el sistema real debido a las leyes físicas) se resuelva con un control adecuado que adapte la velocidad suave pero rápidamente.

- ▷ **Compromiso optimalidad - complejidad computacional.** En la misma línea que el punto anterior, se pueden buscar optimizaciones casi sin restricciones, para luego imponer las restricciones en el mismo programa generador de trayectorias, sobre la trayectoria óptima previamente encontrada. Esto necesariamente conduce a soluciones que respetan todas las restricciones que se desee, pero que son sub-óptimas. En resumen, es posible hacer un *trade-off* entre optimalidad y complejidad computacional de la solución.

Otra observación que es pertinente mencionar es que es casi imprescindible contar con un sistema de re-generación de trayectorias, a utilizar para calcular nuevas trayectorias en los casos que el vehículo se aleja demasiado de una trayectoria a seguir. Esto último hace que el costo computacional de generar una trayectoria pase a ser un elemento crítico.

6.3. El generador de trayectorias implementado

Tomando en cuenta todas la consideraciones mencionadas en el punto anterior, procedimos a la construcción de un generador de trayectorias 3D que se ajuste a las especificaciones principales sobre la función del generador de trayectorias. Además, tuvimos que definir y resolver muchas de las interrogantes

[a] Esta continuidad es a efectos de la construcción de la trayectoria por parte del generador, las leyes de *Newton* ante la presencia de fuerzas y masas finitas necesariamente implican la continuidad espacial y temporal de las trayectorias reales del sistema.

que se plantearon también en la sección anterior.

En particular, el punto desarrollado sobre las trayectorias sobre las cuales se puede linealizar el sistema puede parecer en primera instancia algo limitador en cuanto a las posibles trayectorias a generar. Esto en realidad no es del todo cierto, ya que cualquier trayectoria podría aproximarse infinitesimalmente por una concatenación de las trayectorias mencionadas. Sin embargo, esta estrategia implicaría tener un punto de operación que varía permanentemente con el tiempo, con la consiguiente necesidad de re-calcular las posiciones de las superficies de vuelo y realizar otros cálculos relativos al sistema de control. Como se dice a continuación, finalmente optamos por hacer una concatenación finita de trayectorias linealizables, ya que representaban un bajo costo computacional y una manera más sencilla de realizar el control.

6.3.1. Especificación funcional del generador de trayectorias

Como resultado de todas estas consideraciones, en primera instancia decidimos proceder con un generador de trayectorias que concatenara rectas y círculos, y que operará según los puntos que se exponen a continuación.

▷ **1. Espacio para la generación de trayectorias.**

Las trayectorias generadas serán una curva en el sub-espacio del vector de estados x que consta de seis variables: posiciones y velocidades. Esto implica una dependencia implícita con el tiempo, pues se indica la velocidad del avión, pero no es absoluta en términos de que no existe una posición correcta para cada instante de tiempo. De este modo se toman únicamente seis de las doce variables que pertenecen al vector de estados, permitiéndose la manipulación de las otras seis variables por parte del sistema de control, y se elimina además la necesidad de hacer un control explícito en la variable tiempo.

A modo de resumen, la generación de trayectorias que decidimos implementar es en el espacio definido por: $(x, y, z, v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz})$, dejando el resto de las variables del vector de estados x, $(\varphi, \theta, \psi, w_{Bx}, w_{By}, w_{Bz})$, como variables manipulables por el sistema de control en el sentido que será éste el encargado de decidir que valor tendrán instante a instante y no la trayectoria generada.

▷ **2. Definición de los *inputs* de usuario.**

La navegación será tridimensional, y los *inputs* del usuario serán un conjunto ordenado de *waypoints* que deben respetar ciertas reglas. Entre otros, debe haber una distancia mínima -a definir- entre *waypoints* (de manera que no se exijan radios de curvatura excesivos) y la diferencia de altura entre *waypoints* sucesivos debe estar acotada debido a que no se puede obtener cualquier tasa de trepado. En una segunda instancia podría pensarse en la generación de trayectorias en los casos que los *waypoints* no cumplen con las restricciones necesarias, por ejemplo no pasando por algún o algunos de los *waypoints*, y obtener la trayectoria a utilizar mediante alguna minimización que permita encontrar una trayectoria aceptable según algún otro criterio.

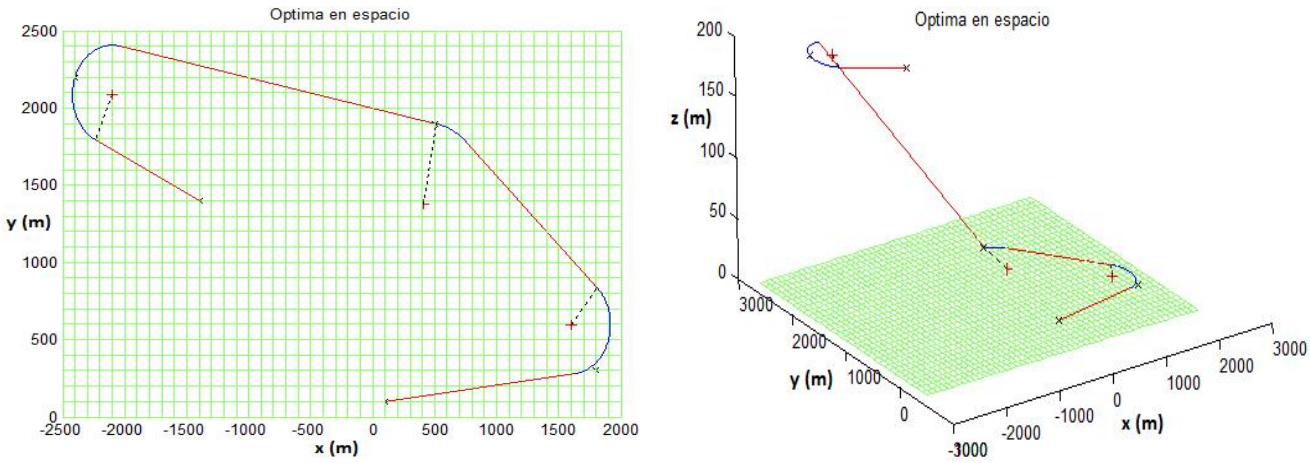
▷ **3. Especificaciones generales para las trayectorias.**

Se exigirá que la trayectoria tenga continuidad en las posiciones pero - en principio - no se considerarán restricciones de continuidad en las velocidades. Esta decisión se basó en que de este modo el problema de la generación se podría tratar únicamente como un problema geométrico, ignorando de momento el transcurso del tiempo como una variable del sistema. Sin embargo, sí se impondrá una máxima velocidad de vuelo. También habrá un interés explícito por buscar la continuidad en las derivadas espaciales en el espacio (x, y, z), es decir, que la curva generada en el sub-espacio (x, y, z) sea continua y con derivada continua. Como se explicará en el próximo punto, dada la forma que decidimos tratar el problema de la generación de trayectorias 3D, esta continuidad en las derivadas fue sólo impuesta para las trayectorias generadas según un

ciertos subconjunto de *waypoints* que se encuentran aproximadamente a la misma altura. Lo que sí aseguramos es continuidad en la posición, cosa que es natural para este problema.

▷ 4. Tratamiento de los *waypoints* a distinta altura.

El tratamiento de puntos a distinta altura se resolverá de la siguiente manera: se clasificarán los *waypoints* según subconjuntos de *waypoints* con alturas similares (esta tolerancia puede ser elegida), y se los tratará en esos subconjuntos como pertenecientes a un mismo plano horizontal. Los cambios de altura se agregarán sobre la solución 2D agregando tasas de trepado (dentro de los márgenes aceptables para dicha magnitud) a los segmentos rectos. Para ilustrar este punto podemos observar la figura 6.1, donde se puede apreciar la trayectoria 2D óptima para luego hacer el agregado de los cambios de altura en los tramos rectos siendo consistentes con las tasas de trepado admisibles.



(a) Trayectoria óptima 2D, vista en el plano xy.

(b) Trayectoria 3D generada.

Figura 6.1: Ilustrativa del agregado de las tasas de trepado en los tramos rectos.

En una primera implementación, se impondrá también que las trayectorias concatenadas sean tangentes en el sub-espacio de posiciones, o en el caso de la concatenación entre una trayectoria en el plano horizontal y otra en el plano vertical, se buscará que la concatenación respete la tangencia en la proyección de las trayectorias sobre el plano horizontal. De esta manera se evita la necesidad de minimizar en el conjunto de todas las trayectorias posibles, pero necesariamente se pierde optimalidad de la solución.

▷ 5. Resolución del problema 2D.

El conjunto de *waypoints* se proyectará sobre un plano horizontal para resolver en primera instancia un problema en 2D. Esto presenta muchas facilidades adicionales y resta parámetros libres, lo que permite minimizar la complejidad computacional.

Buscando respetar la restricción respecto a las trayectorias para las cuales es posible linealizar el MVE, utilizando la proyección 2D de los N *waypoints*, se creará una trayectoria que constará de $N-1$ rectas y $N-2$ círculos, de manera que la trayectoria final será una concatenación continua y derivable de la sucesión recta - círculo - recta - círculo -... ...- recta. Se debe destacar el hecho que la trayectoria a generar partirá de un primer tramo en línea recta y llegará al último *waypoint* en una recta. Los *waypoints* intermedios estarán contenidos en (o aproximados por) un tramo circular, siendo así el primer y el último *waypoint* los aproximados por tramos rectos.

Partiendo de la base de estas especificaciones, pasaremos entonces a la etapa de la construcción propiamente dicha del generador de trayectorias 3D, la cual se explica detalladamente en las siguientes secciones.

6.3.2. Análisis del problema geométrico en 2D

Para empezar a atacar el problema, nos concentramos en la generación de la trayectoria geométrica (es decir, la trayectoria solamente en el subespacio de posiciones), sin considerar de momento al tiempo t como variable (implícita o explícita). Estrictamente hablando no nos deshacemos de la cinemática de la situación ya que existen al menos dos elementos dinámicos que deben ser considerados: el sentido del recorrido - sería como la imposición de una 'flecha' de tiempo - ya que, por ejemplo, para una recta y un círculo tangentes existen dos posibles segmentos de recta a recorrer, por lo que es un requerimiento conocer en que sentido se están recorriendo dichas curvas. El otro elemento 'cinemático' a tener en cuenta es la restricción del radio mínimo de giro que puede describir el vehículo en cuestión (que surge de un análisis dinámico del vuelo, como una restricción sobre la mayor velocidad angular que puede existir en vuelo de crucero), ya que poco sentido tendría tratar de generar trayectorias que ignoraran por completo estas restricciones reales[b].

Con los elementos elegidos según la descripción funcional, la familia de trayectorias cuenta en principio con dos grados de libertad por recta y tres grados de libertad por círculo. Esto se puede ver sencillamente si se observa la primer representación que escogimos para el conjunto de rectas y círculos según las ecuaciones 6.3, donde los dos grados de libertad para las rectas estarían dados por el conjunto $\{m, C\}$ y los tres grados de libertad para las circunferencias estarían dados por el conjunto $\{x_c, y_c, R\}$. Dado que para N *waypoints* existen $N-1$ rectas y $N-2$ círculos se tiene que la cantidad total de grados de libertad está dada por:

$$\#\{Grados\ de\ libertad \mid Posibles\ rectas\ y\ circunferencias\}^{c} = 2(N-1) + 3(N-2) = 5N - 8$$

Con lo cual, siguiendo el método de concatenación propuesto, tenemos un total de $5N-8$ grados de libertad para la elección inicial de las rectas y círculos necesarios. Si queremos imponer sobre este conjunto las restricciones de tangencia y continuidad entre un círculo dado y la recta que le antecede y la que le precede, se obtienen dos ecuaciones por círculo. Esto es porque, en un caso general, el corte entre una circunferencia y una recta define dos, o uno, o ningún punto del espacio (x, y). Al imponer la tangencia y continuidad nos interesa el caso particular en que dicho corte define un solo punto del espacio, y con lo cual la tangencia que da dada necesariamente. Al imponer estas restricciones se pierden $2(N-2)$ grados de libertad (dos ecuaciones por cada círculo que haya en la trayectoria), quedando un total de $3N-4$ grados de libertad totales para la familia de trayectorias consideradas. En un segundo análisis podemos ver que existen dos parámetros libres adicionales, que determinan donde comienza la primera recta y donde termina la última, dando un total de $3N-2$ grados de libertad efectivos. A grandes rasgos, esto significa que se tiene la libertad de fijar tres parámetros por *waypoint* existente y encontrar una solución al problema. Cabe notar que estrictamente esto no es cierto, pues dependiendo de los parámetros que se fijen entre los $5N-8$ posibles, no siempre existirá una solución para el sistema de ecuaciones que queda planteado, pues el mismo no es lineal en todas las variables. Lo que podemos asegurar entonces es que la cantidad total de grados de libertad efectivos queda dada por el resultado de la ecuación 6.1 que se muestra a continuación.

$$\boxed{\#\{Grados\ de\ libertad \mid Efectivos\} = 3N - 2} \tag{6.1}$$

Si se fijan arbitrariamente los $3N-2$ parámetros, no existe ninguna garantía de que la solución encontrada - de existir - sea una 'buena' solución. Es por esto que entra en juego la idea de hacer una

[b]Como veremos más adelante, este dato se usa como insumo para esta etapa pero sin imponer la restricción estrictamente. Por más información referirse al manual de usuario.

[c]Siguiendo la notación estandar, el caracter # representa el cardinal de un conjunto.

optimización en el espacio de las soluciones posibles, por lo que es importante conocer cuantos son los parámetros independientes del sistema. Nótese que hasta ahora para el análisis de la trayectoria no se ha usado nunca la restricción de que la misma pase por los *waypoints*. Esto se debe a que no se hará esta exigencia sino que se contemplará la distancia a los *waypoints* entre los costos a minimizar en la optimización. Los motivos para esto son dos. El motivo principal es que el despeje analítico en el caso de exigir el paso por los *waypoints* es engorroso y no facilita la búsqueda del resultado óptimo en el espacio de soluciones. El otro motivo es que en ciertas circunstancias exigir pasar por un conjunto de puntos estrictamente puede resultar en una trayectoria 'mala' desde otros puntos de vista (como por ejemplo el largo total de la trayectoria) pero sin embargo no representar ninguna ganancia real, pues la precisión del sistema de seguimiento es mucho menor que la precisión que se exige de la trayectoria.

A partir del análisis desarrollado en esta sección pasaremos al planteo del problema, comenzando por la elección de la representación para hacer dicho planteo y continuando por los procesos de optimización, generalización a 3D y post-procesamiento de la solución.

6.3.3. Representación elegida

Luego de tener la decisión tomada en cuanto a los pasos a seguir según lo explicado en la sub-sección anterior, la primer tarea a desarrollar consiste en expresar de alguna manera los conjuntos de rectas y círculos en el plano xy con los que trabajaremos, y finalmente, construiremos la trayectoria final. La elección de la representación para caracterizar los elementos de esta trayectoria fue una tarea que subestimamos inicialmente. Al igual que nosotros en un comienzo, es posible que el lector se pregunte en este punto: ¿qué complicación puede surgir a la hora de elegir como representar un conjunto de rectas y otro de círculos? Ilustraremos algunas consideración que deben realizarse referidas a este punto y que fuimos encontrando durante el desarrollo mismo.

En primera instancia parecería que la opción natural sería caracterizar a las rectas y círculos según las ecuaciones 6.3 que se muestran a continuación.

$$Rectas \quad \Rightarrow \quad y = mx + C \tag{6.2}$$

$$Circunferencias \quad \Rightarrow \quad (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \tag{6.3}$$

Siendo m la pendiente de la recta, C una constante genérica que es este caso representa el término independiente, x_c y y_c definen el centro de círculo de coordenadas (x, y) y R el radio del círculo. Esta forma de expresar las conjuntos es sin duda la más simple y la primera que intentamos llevar a la práctica, sin embargo, contiene algunos problemas importantes que nos interesa detallar:

▷ **1. Resolución de un sistema no lineal.**

Los puntos de intersección (o de comienzo y fin de la sección que será considerada de cada recta y círculo), que son muy útiles y necesarios para evaluar la trayectoria dada y controlar al vehículo alrededor de la misma, deben ser despejados mediante la resolución de un sistema no lineal que, por lo general, es difícil de evaluar.

▷ **2. Carece de sentido y especificación del tramo a utilizar.**

Adicionalmente, no contienen explícitamente el sentido en que se deben recorrer los tramos. Esto, si bien no es un argumento de peso, es un elemento más en contra de esta representación. Él tener definido un sentido (dado por una parametrización dada) es un aspecto deseable que la parametrización tenga resuelto de

forma más explícita. Otro punto relacionado con esto es que el tramo utilizado no queda especificado por la representación, es decir, las rectas y circunferencias expresadas por las ecuaciones 6.3 definen toda la recta y todo el círculo, de ninguna manera queda explícito cual será el tramo utilizable de la circunferencia o la recta, atributo que también sería deseable de la parametrización.

▷ **3. No continua en el espacio de parámetros.**

Quizás la mayor de sus faltas es la no continuidad entre las rectas representadas y los parámetros que las describen. Un ejemplo claro de esto es la representación de rectas en el entorno de ser verticales, que necesariamente implican $m \to \infty$. Esto es un gran problema si se pretende hacer una búsqueda en el espacio de estos parámetros, pues no se puede buscar partiendo de la premisa de que rectas parecidas tienen representaciones parecidas, condición que es necesaria para cualquier algoritmo de optimización que se tuviera que utilizar usar.

Aspirando a elegir una representación que no tuviera ninguno de los inconvenientes anteriores, finalmente elegimos la forma de expresar las rectas y círculos que se explicará a continuación.

Las rectas fueron parametrizadas según el parámetro ν. En la ecuación 6.4 se muestra la forma en que se parametrizará la i-ésima recta. La variable parametrizadora ν deberá estar contenida en un cierto intervalo $I_\nu = [0, \nu_{f_i}]$ (el subíndice f denota $final$), donde el valor de ν_{f_i} es un parámetro a determinar según sea la trayectoria a recorrer a lo largo de la i-ésima recta.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{r_i} \\ y_{r_i} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \cos\phi_i \\ \sin\phi_i \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Las variables x_r y y_r representan el punto (x, y) de inicio de la recta (se debe notar que coincide con $\nu = 0$), mientras que el valor de ϕ define la inclinación de la recta. En realidad define más que eso, pues dado que los valores de ν considerados en esta parametrización son mayores que cero ($\nu \geq 0$) el parámetro ϕ define un versor $(\cos\phi, \sin\phi)$ que da el sentido de la recta. En otras palabras, el sentido en el cual la trayectoria deberá ser recorrida. Los parámetros x_{r_i}, y_{r_i} y ϕ_i se deben determinar para cada una de las i rectas.

En las mismas líneas de los párrafos anteriores se buscó una parametrización para los círculos. De esta manera, se escogió una representación para el j-ésimo círculo según un parámetro μ, estando la variable parametrizadora μ contenida en el intervalo $I_\mu = [0, \mu_{f_j}]$, donde nuevamente el valor de μ_{f_j} deberá ser fijado para cada uno de los j círculos. Cabe destacar que las circunferencias siempre son iniciadas en el valor $\mu = 0$ hasta el valor de μ_f, este valor de μ_f puede ser o bien positivo o bien negativo según se esté recorriendo la circunferencia en sentido anti-horario u horario respectivamente. La parametrización escogida se muestra a continuación en la ecuación 6.5.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{c_j} \\ y_{c_j} \end{pmatrix} + R_j \begin{pmatrix} \cos(\sigma_j + \mu) \\ \sin(\sigma_j + \mu) \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

En este caso, las variables x_c, y_c y R mantienen el significado explicado anteriormente, léase, x_c e y_c definen el punto (x, y) donde está ubicado el centro del círculo, mientras que R representa el radio de dicho círculo. En este caso el parámetro σ fija en cierta forma el punto inicial del recorrido en la circunferencia dado que es el encargado de definir el punto para $\mu = 0$, nuevamente el sentido en que se mueve la variable μ marca el sentido en el cual debe ser recorrida la trayectoria. Los parámetros x_{c_j}, y_{c_j}, R_j y σ_j se deben determinar para cada uno de los j círculos.

Si observamos la representación usada, podemos apreciar que queda planteado un sistema con cuatro variables por recta y cinco por círculo. Las cuatro variables por recta quedan dadas por el conjunto $\{x_r, y_r, \phi, \nu_f\}$ a determinar para cada recta, mientras que las cinco variables necesarias para definir un círculo están dadas por el otro conjunto de variables $\{x_c, y_c, R, \sigma, \mu_f\}$. De nuevo podemos contar la cantidad de grados

de libertad que en principio resultaría el uso de esta representación, que viene dado por: $4(N-1)+5(N-2)$, lo que serían $9N-14$ grados de libertad. De las restricciones que se imponen de tangencia y continuidad surgen, como resultado de aplicarlas a la representación escogida, las ecuaciones que se listan en los siguientes dos puntos. En dichas ecuaciones omitimos llamar con el subíndice i a las rectas y el subíndice j a los círculos dado que necesitamos vincular un círculo con sus rectas adyacentes, unificaremos la notación a solamente un subíndice, en este caso, el subíndice i. Sabiendo que tenemos las rectas numeradas desde 1 a $N-1$ y los círculos numerados de 1 a $N-2$, podemos identificar que la i-ésima circunferencia tiene como adyacentes a las i-ésima e $(i+1)$-ésima rectas.

- ▷ **Continuidad :** Son $4(N-2)$ ecuaciones de la forma que se muestra en la ecuación 6.6, a saber, cuatro ecuaciones por cada uno de los $N-2$ círculos.

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} x_{r_{i+1}} \\ y_{r_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{c_i} \\ y_{c_i} \end{pmatrix} + R_i \begin{pmatrix} \cos(\sigma_i + \mu_{f_i}) \\ \sin(\sigma_i + \mu_{f_i}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{r_i} \\ y_{r_i} \end{pmatrix} + \nu_{f_i} \begin{pmatrix} \cos\phi_i \\ \sin\phi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{c_i} \\ y_{c_i} \end{pmatrix} + R_i \begin{pmatrix} \cos\sigma_i \\ \sin\sigma_i \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{6.6}$$

- ▷ **Tangencia :** Son $2(N-2)$ ecuaciones de la forma que se muestra en la ecuación 6.7, de la misma manera que en el caso anterior, dos ecuaciones por cada uno de los $N-2$ círculos.

$$\begin{gathered}Sg(\mu_{f_i}) \begin{pmatrix} -\sin\sigma_i \\ \cos\sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_i \\ \sin\phi_i \end{pmatrix} \\ Sg(\mu_{f_i}) \begin{pmatrix} -\sin(\sigma_i + \mu_{f_i}) \\ \cos(\sigma_i + \mu_{f_i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_{i+1} \\ \sin\phi_{i+1} \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{6.7}$$

Donde la función $Sg(q)$ es la función signo que vale $Sg(q) = 1$ si $q > 0$, $Sg(q) = -1$ si $q < 0$ y $Sg(q) = 0$ si $q = 0$. Un rápido conteo permite ver que el número de grados de libertad efectivos se mantiene en $3N-2$ como se estimó en la sección anterior, como se puede apreciar en la ecuación 6.1.

6.3.4. Optimización de la solución

Como se dijo anteriormente, la etapa de optimización es clave en el proceso de hallar una trayectoria adecuada y en nuestro caso también es la etapa en la que se 'hace' que la misma cumpla una de sus especificaciones funcionales más importantes: la de pasar por los *waypoints*[d]. Antes de profundizar en como implementamos esta etapa, es necesario comprender como funciona el algoritmo de optimización con ecuaciones no lineales.

En particular el algoritmo con el que trabajamos hace una búsqueda lineal para minimizar una cantidad dada, pero los conceptos son extrapolables a otros algoritmos similares. En primera instancia, es necesario construir una función de costo - que depende de todas la variables del espacio de búsqueda en principio - y que representa el 'costo de' o 'cuán mala es' una solución dada. Luego, a partir de una semilla (valor inicial para las variables o simplemente una trayectoria inicial sub-óptima en el espacio de trayectorias posibles), se busca minimizar dicho costo, iterando de la siguiente forma: en cada paso se calcula numéricamente el gradiente de la función en ese punto y se calcula un nuevo punto hacia el cual moverse en función del resultado. Idealmente el proceso termina cuando el gradiente es tan pequeño (y por lo tanto lo son los movimientos en la búsqueda) que no tiene sentido seguir buscando[e]. De manera más general, distintos algoritmos de optimización utilizan distintos criterios para elegir la dirección de movimiento en

[d]Notar que esto no tiene que ser necesariamente así. Es posible, pero se descartó por motivos que ya se explicaron, hacer un despeje analítico de los parámetros de la trayectoria para forzar que la misma pase por los *waypoints* y recién luego buscar una optimización de acuerdo a algún conjunto de criterios.

[e]El criterio de parada para el algoritmo puede variar pero esencialmente siempre el concepto es este: las 'mejoras' en el costo son tan pocas que se asume que se ha llegado a un mínimo local. En términos numéricos dicho criterio se puede expresar en un tamaño mínimo para el módulo del gradiente, o en variaciones relativas de la función de costo o del vector de variables.

la búsqueda y no necesariamente la dirección del gradiente. En cualquier caso, este proceso es tanto más complejo computacionalmente cuanto más grande sea la dimensión del espacio de búsqueda.

Procedimos primeramente entonces a implementar directamente una minimización en el espacio de $9N - 14$ parámetros dado por la representación que se describió en la sección anterior, incluyendo las ecuaciones o vínculos entre parámetros como parte de lo que debe minimizarse (idealmente esas ecuaciones o vínculos deben respetarse estrictamente). Este acercamiento a la minimización tiene la ventaja de no requerir más programación que la del algoritmo de minimización y la función a minimizar, donde se pueden considerar directamente las ecuaciones vínculo sin necesidad de despejarlas analíticamente. Para ejemplificar esta situación, supongamos que queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es fácilmente despejable y coincide con $x = y = 3$. Este resultado se puede obtener como se dijo, despejando analíticamente el sistema, o mediante resolución de un sistema lineal de ecuaciones, lo cual es fácilmente programable y tiene un costo cuadrático en el número de variables (se requiere solamente invertir una matriz). Sin embargo, otra estrategia podría ser ingresar en el paradigma de un sistema iterativo, como el que usa para minimizar o hallar soluciones de sistemas que no se pueden despejar analíticamente. Para esto, podríamos considerar una función de costo J definida según:

$$J = (x + y - 6)^2 + (x - y)^2$$

Esta función $J(x, y)$ no es otra cosa que la suma de las ecuaciones vínculo al cuadrado. Además se necesita una semilla para iterar, por ejemplo, $x = 2$, $y = 1$. De acuerdo al proceso descrito anteriormente, se iteraría hasta llegar a una solución tan cercana a $x = y = 3$ como se quiera, pero no exactamente ésta. La mayor ventaja de este mecanismo de resolución es la posibilidad de resolver el sistema sin despejar analíticamente las ecuaciones, o sin siquiera contar con ecuaciones que sean despejables analíticamente. Sin embargo, como aprendimos durante el desarrollo de dicho método, este camino también tiene la desventaja de ser computacionalmente complejo, y de acuerdo a la bibliografía [Nie00], lo es exponencialmente en el número de variables.

En el problema que describíamos de minimizar en $9N - 14$ variables, se reflejaba en no poder manejar más de cinco *waypoints* (lo que serían treinta y un parámetros) en una computadora de escritorio con prestaciones bastante más generosas que las que pueden estar disponibles abordo del avión en este momento. Es necesario resaltar especialmente este punto, pues seguramente mediante una programación más eficiente sea posible lograr trabajar con un número mayor de *waypoints*. Sin embargo, consideramos que el hecho mismo de que con cinco *waypoints* el sistema fallara para una computadora de escritorio implicaba de alguna manera una intratabilidad del problema en un procesador como el que actualmente se posee en el avión de la UdelaR (si bien cabe la posibilidad de ampliar la capacidad de procesamiento de abordo pues la instalación de un microprocesador en el avión no refleja un costo elevado desde el punto de vista del peso del avión).

Intentando superar este problema, la **solución final** que se implementó consistió en tomar la parametrización que ya se presentó, y que tiene $9N - 14$ grados de libertad, pero optimizando sólo en un espacio de $3N - 2$ parámetros variables, que fueron los que determinamos como efectivamente libres en nuestro estudio anterior y despejando los otros $5N - 12$ de manera analítica, lo que minimiza significativamente el costo computacional del algoritmo optimizador.

En ambos casos, la estrategia para lograr una buena y rápida convergencia (y en este contexto rápida es sinónimo de computacionalmente barata) radicaba en la elección de la semilla para el algoritmo. Como criterio para esta semilla, construimos de manera 'ad hoc' una solución que si bien no pretendía ser óptima en ningún sentido, cumplía con todas las restricciones del problema y era, en principio, similar al tipo de solución que esperábamos fuera la devuelta por el generador. Es clave aquí hacer énfasis en la necesidad de que la semilla cumpliera con las restricciones básicas del problema (como que los radios de giro no fueran menores que el radio mínimo que es posible seguir por parte del avión), ya que de otra manera la convergencia quedaba

seriamente comprometida. En la siguiente sección ilustraremos el proceso de construcción de la semilla, el cual es importante para la construcción de la trayectoria final.

6.3.5. Construcción de la semilla

Con el objetivo que se desprende del párrafo anterior en mente, construimos una semilla para el problema. Esta semilla debe ser en sí una trayectoria sub-óptima que cumpla con algunas de las especificaciones de diseño. Debe notarse en este punto que la elección de la semilla es crucial en el sentido que debe ser una trayectoria que en principio sea posible pero no ideal. Esto se debe, básicamente, a que esta semilla será luego procesada por un algoritmo de optimización y se debe asegurar que la semilla se encuentre razonablemente cerca de un mínimo local de dicha función de optimización. El proceso de construcción de esta trayectoria sub-óptima se ilustra a continuación, se debe tener en cuenta también que se buscó generar una semilla considerando el costo computacional que pudiese tener su construcción, razón por la cual el algoritmo es interesantemente sencillo.

▷ **Paso 1: Segmentos de rectas.**

Como lo indica claramente el título de este paso, en primera instancia se unen todos los *waypoints* mediante segmentos de recta. Es decir, se genera la trayectoria rectilínea entre un *waypoint* y su antecesor, y el mismo *waypoint* y su predecesor. Una forma curiosa de visualizar esto, que tiene una relación más directa con la trayectoria final que se generará, es la de considerar a ésta primer trayectoria como una concatenación recta - círculo - recta - círculo -... ...- recta, sólo que en este caso los radios de los círculos serían nulos. Al culminar este paso se tendría un trayectoria para la semilla de la forma que se muestra en la figura 6.2.

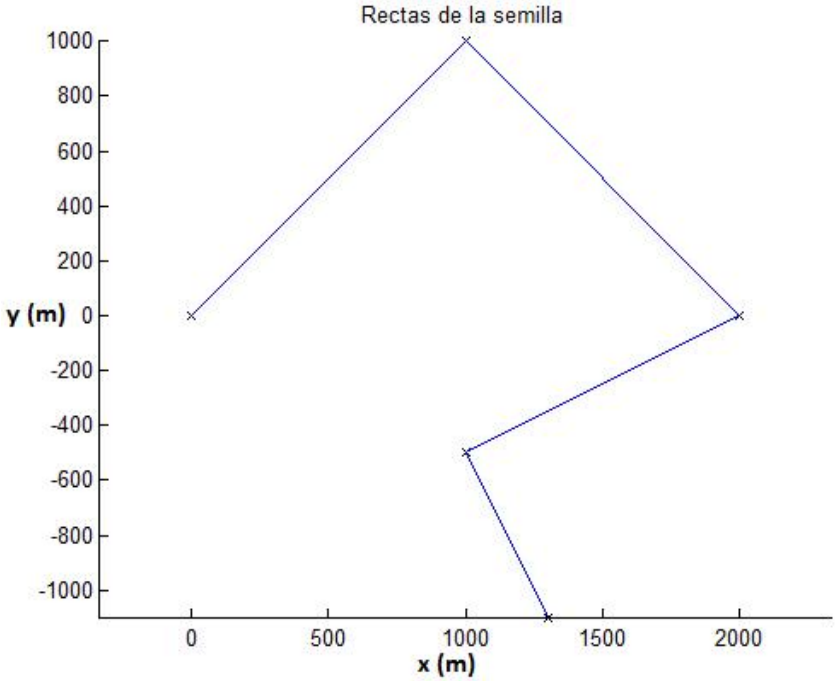


Figura 6.2: Trayectoria generada al finalizar el paso 1.

▷ **Paso 2: Elección de círculos tangentes.**

Luego de tener el paso anterior completado, se procede a la inclusión de los círculos entre cada una de la recta linderas. De modo que a cada par de rectas, unidas según la primer trayectoria generada en el paso 1, le corresponden sendos círculos. El proceso para generar dichos círculos lo describimos a continuación. En

primer lugar se debe hacer notar que obviamente el círculo a ser insertado debe ser tangente a ambas rectas, de esta manera, es fácil ver que como el centro de dicho círculo pertenecerá a la bisectriz de ambas rectas y el círculo debe ser tangente a ambas rectas, para determinar dicho círculo sólo se debe fijar un punto de alguna de las dos rectas. Otra forma de verlo, quizá más clara, es que de las condiciones anteriores se desprende el hecho de que el *waypoint* quedará a la misma distancia de los puntos que el círculo corte a las rectas.

Del análisis anterior queda entonces por definir cual será ese punto, sobre alguna de las dos rectas que corresponden a un *waypoint*, que definirá entonces el círculo a incluir. Lo que se decidió fue escoger, primeramente, los dos puntos sobre las rectas que se encontraban a un cierto porcentaje del tamaño total de las mismas medido desde el *waypoint* en consideración. A modo de clarificar, el i-ésimo *waypoint* tendrá adyacentes las rectas $(i-1)$ e i, los dos puntos escogidos se encontraran a unas distancias $d_{(i-1)}$ y d_i sobre las rectas $(i-1)$ e i. Finalmente el punto queda definido por $Min(d_{(i-1)}, d_i)$, donde la función $Min(q_1, q_2)$ devuelve el mínimo de los dos valores ingresados q_1 y q_2, para luego construir el círculo a ser insertado. En la figura 6.3 se puede apreciar las círculos construidos al finalizar este paso. A menos del paso 3 que se explicará a continuación, la trayectoria final para la semilla quedará definida por los círculos y los tramos de recta entre dichos círculos.

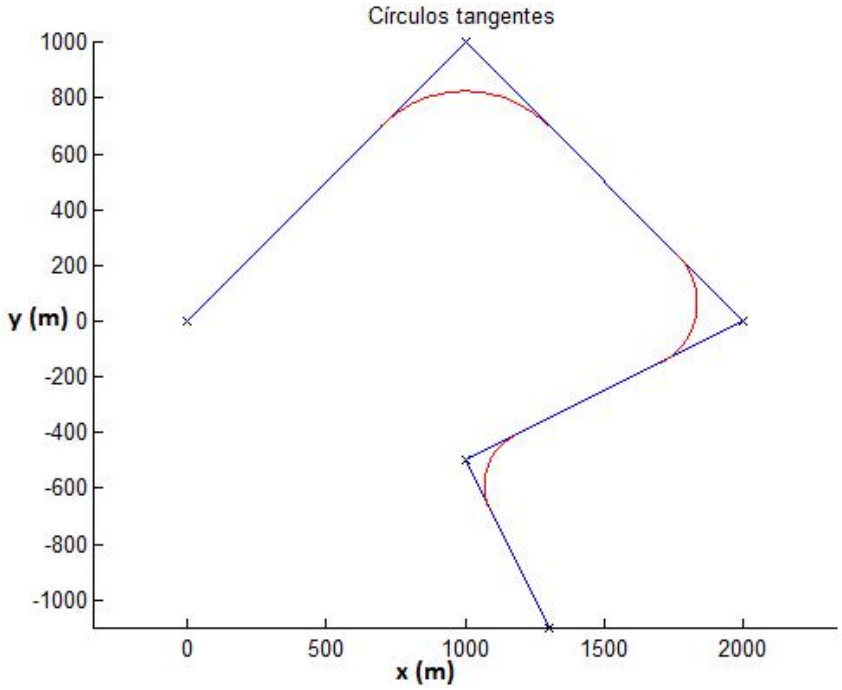


Figura 6.3: Trayectoria generada al finalizar el paso 1.

▷ **Paso 3: Restricción del radio mínimo.**

En este último paso, que es también un paso de chequeo, es donde se impone que la solución final cumpla con las restricciones sobre el radio mínimo de giro. En caso de que el resultado del paso 2 ya cumpla con esta especificación para todos los círculos construidos, simplemente se deja la trayectoria tal cual fue recibida y se la devuelve como trayectoria sub-óptima final para utilizar como semilla. Sin embargo, de la evidencia empírica que hemos acumulado del testeo de este sistema sabemos, que esto rara vez sucede para los valores de porcentajes para los cuales la trayectoria es una 'óptima' semilla. En el caso de que algún o algunos círculos no cumplan con la mencionada restricción, lo que se hace es simplemente agrandar los radios de las trayectorias circulares hasta que todos alcancen al menos el valor del radio mínimo al que puede girar el avión.

6.3.6. Función de costos a minimizar

La elección de la función de costos es en sí misma un elemento crítico para que las soluciones halladas sean adecuadas. Deben elegirse en principio dos grupos de elementos: las 'cantidades' a minimizar y la función

que las cuantifica, y los coeficientes de pesos relativos entre las distintas cantidades. Un simple ejemplo de esto sería: si deseamos maximizar los radios de giro (la 'cantidad'), podríamos minimizar la norma de $\frac{1}{R_v}$ (una posible función a modo de ejemplo), siendo R_v el vector de todos los radios de las sub-trayectorias circulares y $\frac{1}{R_v}$ un vector construido según el conjunto $\{\frac{1}{R_{v_i}}\}$, o bien, podríamos minimizar la función $\frac{1}{Min(R_v)}$ (otra posible función a modo de ejemplo). En cualquier caso la función escogida debería ser luego ponderada por un coeficiente α para darle un peso relativo adecuado a las otras cantidades que se desean minimizar.

A continuación se realiza un punteo de las cantidades elegidas para minimizar, junto con la función que las cuantificará. Finalmente se hace un análisis de la función conjunta (J) y de los coeficientes adecuados para lograr los resultados buscados.

▷ 1. El costo de distancia a los *waypoints*.

En primera instancia lo razonable sería minimizar la distancia entre la trayectoria planeada y los *waypoints* dados, de manera de asegurarnos que la trayectoria efectivamente pase por los mismos o razonablemente cerca de ellos. Una manera fácil de implementar esto es sumar a la función de costos J la ecuación definida por 6.8. El subíndice i es referido a los *waypoints*, es decir, la sumatoria propuesta es una sumatoria en los *waypoints*. Se debe notar en esta instancia que todos los *waypoints* intermedios deberían ser alcanzados (o aproximados) por una circunferencia.

$$\sum_{i=2}^{i=(N-1)} |(x_i - x_{c_{(i-1)}})^2 + (y_i - y_{c_{(i-1)}})^2 - R^2_{(i-1)}| \tag{6.8}$$

Donde x_i e y_i denotan la posición del i-ésimo *waypoint*, mientras que las magnitudes x_c, y_c y R son los parámetros relativos a los círculos de los que ya se ha hablado. Esta última ecuación mide la distancia al cuadrado desde el $(i-1)$-ésimo circulo al i-ésimo *waypoint*, pero no toma en cuenta el hecho de que no todo el círculo pueda estar comprendido en la trayectoria. En particular, tuvimos que modificar esta ecuación de manera de agregar un costo adicional a los puntos que cayeran fuera del arco comprendido por el círculo, o sea, por la parte del círculo que efectivamente es parte de la trayectoria total. Un ejemplo de esto se puede apreciar en la figura 6.4 donde se ejemplifica el caso que queremos poner a consideración del lector. Aprovechamos también esta imagen para mostrar otros conceptos que hemos venido desarrollando durante el transcurso de éstos párrafos.

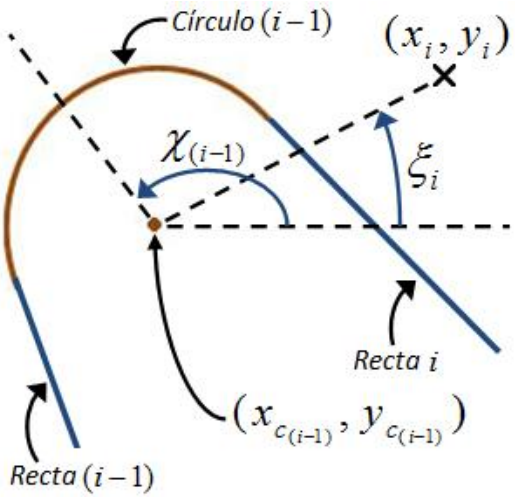


Figura 6.4: Ilustrativa de las magnitudes χ y ξ, y de los subíndices i utilizados.

Como se puede apreciar en la figura en este caso el *waypoint* queda por fuera del arco que define el tramo del círculo que efectivamente forma parte de la trayectoria. Para ponderar estos casos se agregó un

nuevo costo a la ecuación 6.8, para lo cual hubo que recurrir a los ángulos χ y ξ mostrados también en la figura. Ambos ángulos se miden arbitrariamente desde la semi-recta horizontal que pasa por el punto $(x_{c_{(i-1)}}, y_{c_{(i-1)}})$ (el centro del $(i-1)$-ésimo círculo) que se muestra en la figura. El ángulo χ es el ángulo comprendido entre dicha semi-recta y la recta que pasa por el centro del $(i-1)$-ésimo círculo y por el punto medio del segmento circular considerado en la trayectoria. Por otro lado, el ángulo ξ es el ángulo comprendido entre la recta que une el centro del círculo y el *waypoint* con la mencionada semi-recta. Es decir, se puede ver fácilmente de la figura que estos ángulos se pueden computar como:

$$\xi_i = \arctan\left(\frac{y_i - y_{c_{(i-1)}}}{x_i - x_{c_{(i-1)}}}\right)$$
$$\chi_{(i-1)} = \sigma_{(i-1)} + \frac{\mu_{f_{(i-1)}}}{2}$$

En realidad lo que nos interesa ponderar no es ni χ ni ξ en nuestra función de costo, sino que nos interesa ponderar la cantidad $(\chi - \xi)$. Esta cantidad da una idea de que tan lejos se encuentre el *waypoint* del tramo de círculo que en verdad forma de la trayectoria. Nos interesa en particular minimizar esta distancia dada por $|\chi - \xi|$, con lo cual se añadirá un término de la forma $(\chi - \xi)^2$. La ecuación resultante de agregar esta modificación es la que se puede apreciar a continuación con la referencia 6.9.

$$\boxed{J_{1_1} = \sum_{i=2}^{i=(N-1)} \left(\left|(x_i - x_{c_{(i-1)}})^2 + (y_i - y_{c_{(i-1)}})^2 - R^2_{(i-1)}\right| + C\left(\chi_{(i-1)} - \xi_i\right)^2 \right)} \tag{6.9}$$

Donde C una constante de unidades apropiadas que vincula el peso relativo entre la diferencia en el ángulo que nos interesa ponderar y la diferencia de distancia al *waypoint* dado por la ecuación 6.8.

Una última modificación a realizar tiene que ver con el hecho de que el primer y último punto no 'tienen' un círculo que pase por ellos. Se debe entonces sumar la contribución de la distancia de la primera y última recta al primer y último *waypoint* respectivamente:

$$\boxed{\begin{aligned} J_{1_2} = (x_1 - x_{r_1})^2 + (y_1 - y_{r_1})^2 + (x_{r_{(N-1)}} + \nu_{f_{(N-1)}} \cos(\phi_{(N-1)}) - x_N)^2 \\ +(y_{r_{(N-1)}} + \nu_{f_{(N-1)}} \sin(\phi_{(N-1)}) - y_N)^2 \end{aligned}} \tag{6.10}$$

Y las variables x_r, y_r, ϕ y ν_f son los parámetros referidos a las determinación de las rectas. En este caso la primer (subíndice 1) y última (subíndice $(N-1)$) recta. La función de costo J_1 relativa a esta ponderación queda definida entonces por la ecuación 6.11.

$$\boxed{J_1 = J_{1_1} + J_{1_2}} \tag{6.11}$$

▷ **2. El costo de largo de trayectoria.**

En nuestro sistema, dado los grados de libertad que tenemos, sería posible exigir que se pase por todos los *waypoints* y aún así tener $2N$ grados de libertad sobrantes. Es por esto que es necesario pensar en que la trayectoria sea la más corta posible de toda la familia de soluciones existentes. En realidad, dado que no exigimos pasar exactamente por todos los *waypoints*, el conjunto de trayectorias posibles es aún más grande. Para minimizar el largo de la trayectoria se incluye un costo asociado al mismo que, de acuerdo con nuestra parametrización, se puede calcular como se muestra en la ecuación 6.12.

$$\boxed{J_2 = Distancia\ total = \sum_{i=1}^{i=(N-1)} \nu_{f_i} + \sum_{j=1}^{j=(N-2)} |\mu_{f_j} R_j|} \tag{6.12}$$

▷ **3. El costo de los radios de giro.**

En nuestro sistema nunca se incluyó la restricción física de que los radios de giro fueran mayores que ciertas cantidades, mayoritariamente debido al costo computacional de resolver problemas de minimización con restricciones. Para evitar que el generador devolviera radios de giro por debajo de lo aceptable, se incluyó un costo asociado a los mismos que en realidad es inversamente proporcional a los radios que son menores a R_{min}. La cuantificación de este costo se hizo según la ecuación 6.13. Cabe destacar que si bien la semilla está pensada para cumplir con esta restricción, no necesariamente la trayectoria luego del proceso de minimización la cumple.

$$J_R(R) = R_{min}^2 - Min(R, R_{min})^2 \tag{6.13}$$

$$\boxed{J_3 = \sum_{i=1}^{i=(N-2)} J_R(R_i)} \tag{6.14}$$

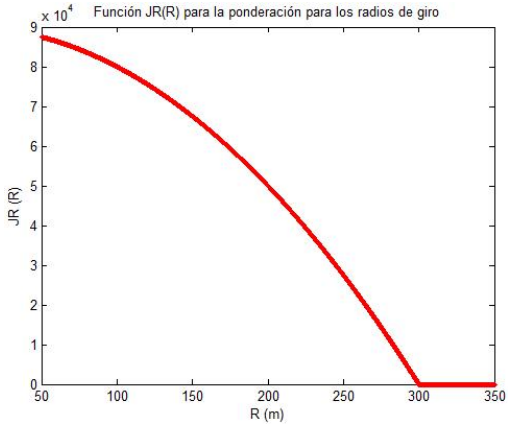


Figura 6.5: Función $J_R(R)$ que pondera los radios de giro.

Donde la función Min mantiene la relación funcional ya explicada (devuelve el mínimo de ambos valores). La forma de la función $J_R(R)$, que se utiliza como función ponderadora para la sumatoria según la ecuación 6.14, se puede apreciar en la figura 6.5. Se puede ver cómo los valores mínimos de esta función se encuentran todos para valores de R tales que $R \geq R_{min}$. Los resultados obtenidos utilizando esta función J_R fueron, a efectos de la evaluación del grupo, más que satisfactorios, con lo cual no se vio la necesidad de probar con otras funciones J_R. Esta función tiene la propiedad de lograr una convergencia bastante estable y veloz. De haber necesitado probar con alguna otra función se podría haber intentado con la función: $J_{R_{aux}} = (R_{min} - Min(R, R_{min}))^2$, que tiene la aparente ventaja de ser al menos una vez diferenciable (es continua, con derivada continua pero no diferenciable).

▷ **4. El costo de las tasas de trepado.**

De igual manera que con los radios de giro, existe una restricción real sobre el sistema físico en lo que respecta a la máxima tasa de trepado que se puede alcanzar. Si bien esto en principio no está contemplado en la resolución del problema bi-dimensional, cuando se generaliza a resolver problemas tridimensionales surge el requerimiento de hacer que estas tasas estén acotadas superiormente. Cabe notar que la posibilidad de que efectivamente estén acotadas las tasas de trepado dependerá de los *waypoints* ingresados, y el margen para manipular estos valores es en realidad limitado. Para lograr acotar las tasas de trepado, pero sin conocer

realmente la diferencia de alturas entre puntos consecutivos (al menos en la sección del programa que realiza la optimización en un plano), se asoció un peso que es proporcional al largo de los segmentos de recta en los que el avión deberá realizar un ascenso. Si ahora numeramos con el subíndice j las rectas donde se deberá realizar un ascenso, la función que se utilizará para esta ponderación es la que se muestra a continuación en la ecuación 6.15. Se debe notar que la intensión de esta función es maximizar los segmentos de recta en los que se debe hacer el trepado.

$$\boxed{J_4 = -\sum_j \nu_{f_j}} \tag{6.15}$$

Cabe notar que en el caso de que se trabaje con las segmentación en planos para *waypoints* a distinta altura, esta sumatoria se hace solo en los segmentos de recta que implican un cambio de altura. El gran debe de esta ponderación es que valora de igual manera todos los segmentos con cambio de altura, ya sea dicho cambio de $100m$ como de $10cm$.

▷ **5. El costo de tener $\nu_f > 0$.**

Nuevamente, al igual que con los radios de giro, para que la trayectoria sea coherente es necesario que se respete una desigualdad con los parámetros ν_f. Para garantizar esto, se agregó un costo asociado al valor de ν_f según la ecuación 6.16.

$$\boxed{J_5 = \sum_{i=1}^{i=(N-1)} Min(\nu_{f_i}, 0)^2} \tag{6.16}$$

De alguna manera es posible ver que esta función es redundante con el costo de las tasas de trepado y, si bien posiblemente nunca sea realmente un costo si el sistema funciona adecuadamente, parece razonable dejarlo como 'salvaguarda'. También es necesario notar que esta desigualdad -a diferencia de la de los radios- debe mantenerse siempre y es independiente del avión con el que se vuele.

Cabe destacar que tanto para las tasas de trepado como para los radios de giro y los ν_f, si bien se busca no superar ciertas cotas impuestas por el sistema físico, en realidad no se puede garantizar que la optimización cumpla con las desigualdades deseadas. Para lograr esto, una vez que se obtiene el resultado del generador de trayectorias se imponen las condiciones necesarias si estas no fueran cumplidas, sacrificando la optimalidad de la solución. En las secciones siguientes describimos algunos de los detalles referentes a este proceso.

▷ **6. La ponderación de los costos.**

Finalmente, para lograr una buena optimización es necesario hacer una ponderación de los distintos costos de manera de balancearlos adecuadamente. Este balanceo depende en particular de cual es el objetivo que se persigue al generar la trayectoria y básicamente lo que se decide con esto es la resolución de los compromisos entre los distintos objetivos de la minimización. Dependiendo del uso que quiera un usuario darle a cada trayectoria se deberán responder a algunas preguntas: ¿Es aceptable agrandar un radio de giro a costas de alargar la trayectoria? ¿Es aceptable acortar la trayectoria a costas de pasar más lejos de los *waypoints*? Este tipo de compromiso se cuantificará mediante coeficientes para cada uno de los items anteriores. a saber, Estos coeficientes son α, β, γ y δ correspondientes a las funciones J_1, J_2, J_3 y J_4 respectivamente. Para el caso del item 5, dado que es una restricción que si o si debe cumplirse para tener una trayectoria final consistente, se utilizó para la función J_5 un coeficiente C que fue fijado experimentalmente en un valor fijo. De esta manera la función de costo J final, que se utilizó para la optimización de la trayectoria, a partir de la semilla explicada

en la sección anterior, es la que se muestra a continuación en la ecuación 6.17.

$$\boxed{J = \alpha J_1 + \beta J_2 + \gamma J_3 + \delta J_4 + C J_5} \tag{6.17}$$

El valor adecuado para cada uno de los coeficientes variables depende de los objetivos que se busquen en la trayectoria a seguir. Siguiendo el objetivo de que la trayectoria final fuese lo más aceptable posible respecto a todos los criterios se hallaron, experimentando con distintas combinaciones, los valores que aparecen a continuación. Estos representan un conjunto de valores recomendados a utilizar, aunque no se consideran únicos ni óptimos según algún criterio matemático rígido establecido.

$$\alpha \approx 0{,}91 \qquad \beta \approx 0{,}03$$
$$\gamma \approx 0{,}03 \qquad \delta \approx 0{,}03$$

6.3.7. El algoritmo de minimización

La minimización, una vez obtenida la función de costos antedicha, se implementó usando una función de *Matlab* muy común, llamada *fminsearch.m*. Dicha función toma un conjunto de parámetros (condición de parada, máximo número de iteraciones, etc.) y la función de costos, e intenta hallar un mínimo mediante el algoritmo descrito en las secciones anteriores. Sin embargo, para lograr una buena convergencia fue necesario implementar el algoritmo de manera 'inteligente', ya sea eligiendo adecuadamente las variables en las que iterar, como aplicando el algoritmo sucesivas veces para lograr una fácil convergencia.

Respecto al conjunto de variables en las que se itera, la elección no es trivial y resultó ser un elemento fundamental para facilitar cierto procesamiento de la trayectoria. A modo de recuento, inicialmente se tomó como variables de iteración al conjunto $\{x_{r_i}, y_{r_i}, \phi_i, \nu_{f_{(N-1)}}\}$. Si bien este conjunto ofrece algunas propiedades deseables como el desacoplamiento entre distintos segmentos de la trayectoria (la recta i-ésima y el círculo i-ésimo quedan determinados con sólo conocer los valores para x_{r_i}, y_{r_i}, ϕ_i, $x_{r_{(i+1)}}$, $y_{r_{(i+1)}}$ y $\phi_{(i+1)}$), también tiene algunas desventajas. Por ejemplo, no es sencillo el despeje de las cantidades que figuran en la función de costos (distancias a los *waypoints*, radios de giro, largos de los segmentos de recta) y por lo tanto es difícil garantizar, entre otras cosas, que la semilla expresada en estas variables cumpliera con la restricción de los radios de giro. Se debe notar que la dificultad no radica en el chequeo de si cumple o no, sino en la construcción de la misma. El conjunto de variables que finalmente fue utilizado es$\{x_{r_1}, y_{r_1}, \phi_1, \nu_{f_i}, \mu_{f_i}, R_i\}$, que tiene una relación bastante más directa con las cantidades que aparecen en la función de costos y con la construcción de la trayectoria total. Sin embargo, se pierde la ventaja del desacoplamiento entre distintos tramos de la trayectoria. Por ejemplo, para conocer el último segmento de recta de la trayectoria es necesario conocer todo el conjunto de parámetros variables. Debe notarse que en cualquiera de los casos expuestos el número de parámetros para iterar es $3N - 2$.

Finalmente, para la llamada al propio algoritmo de minimización, ocurrió la idea de realizar una minimización por etapas: dados N *waypoints*, encontrar inicialmente (siempre a partir de la semilla) una trayectoria óptima para los tres primeros *waypoints*, y luego usar esa trayectoria encontrada como una semilla mejorada para optimizar con cuatro *waypoints* y así sucesivamente hasta encontrar la solución óptima para los N *waypoints* dados. Los motivos para esto fueron esencialmente dos: el primero es que la minimización en muchos parámetros puede tomar mucho tiempo e incluso converger a soluciones 'malas' -o al menos peores de lo que hace de otra manera- si la semilla no es suficientemente adecuada. El otro motivo surgió del conjunto de variables que se usaron para iterar: si dichas variables no permiten el desacople de la trayectoria en tramos, surge que, por ejemplo, el valor ν_{f_1} al modificarse altera toda la trayectoria y por lo tanto hace que el sistema sea desde el punto de vista numérico algo más inestable. Es necesario notar que esta minimización 'de a pasos' efectivamente mostró mejores resultados que la minimización en todos los *waypoints* juntos partiendo de la semilla que se tenía.

6.3.8. Tratamiento de los puntos a distinta altura

Como se dijo anteriormente, a pesar de habernos planteado la resolución de un generador de trayectorias en un espacio geométrico tridimensional, resolvimos inicialmente la generación de trayectorias en un espacio bidimensional. Se debe obtener ahora una generalización de este algoritmo para trayectorias 3D. La mayor ventaja de haber trabajado en este orden, consistió en librarnos de algunos parámetros y variables, reduciendo así la complejidad computacional. Adicionalmente, las trayectorias alrededor de las cuales se puede linealizar el sistema son rectas o círculos contenidos en un plano horizontal, lo que ya da una idea de la mayor simpleza que tiene el problema bidimensional.

Para lograr llevar el problema a tres dimensiones, se tomó la solución bidimensional, y se prestó particular atención al segmento de recta entre dos *waypoints* a distinta altura. A este segmento le asignamos la velocidad de ascenso necesaria para que el avión pase de la altura del *waypoint* anterior a la altura siguiente. De este modo logramos un manejo de las variaciones de altura que reutiliza toda la trayectoria generada para dos dimensiones con solo algunas modificaciones mínimas.

Para simplificar aún más esta etapa, no se consideraron todas las diferencias de altura entre *waypoints* consecutivos, sino que se clasificó a los mismos en grupos de *waypoints* consecutivos con altura similar (con una tolerancia en estas variaciones de altura) y se trató a cada uno de estos grupos como si estuvieran contenidos en un plano. De este modo se reduce aún más la complejidad computacional de la etapa, pero, más importantemente, se reducen los cambios de altura que implican trayectorias más exigentes del punto de vista de las entradas del sistema, en particular la velocidad de giro de la hélice. De todos modos la implementación se realizó de tal manera que es posible considerar la separación por planos o no, según un parámetro fijado por el usuario.

6.3.9. Post-procesamiento de la solución optimizada

Una consecuencia del desarrollo que se hace para obtener una trayectoria optimizada es que no necesariamente se respetan ciertas restricciones físicas del sistema. Las más relevantes de estas son los radios mínimos de giro, la tasa máxima de ascenso/descenso, y la continuidad de la velocidad en la trayectoria. Para solucionar este inconveniente, se procedió a hacer un post-procesamiento de la solución que se obtuvo hasta el momento, que denominaremos 'optimizada'.

Básicamente el post-procesamiento consiste en 'forzar' todas las cantidades anteriormente mencionadas para que sus valores queden dentro de los rangos aceptables para el sistema físico. Esto se hace con el costo de perder optimalidad en la solución, pues no aseguramos que mediante este forzamiento se siga pasando tan cerca de los *waypoints* como antes, o que la trayectoria no se alargue innecesariamente. La motivación para hacer esto a pesar de la pérdida de optimalidad radica en el costo computacional de los problemas de optimización con restricciones, un costo que consideramos excede largamente la optimalidad perdida en el proceso[f].

En el caso de los radios de giro, si alguno de los mismos no alcanzara el valor del radio mínimo, se fuerza su valor manteniendo los segmentos de las rectas tangentes al círculo en cuestión aunque cambiando su largo, y manteniendo todo el resto de la trayectoria incambiado.

Para el caso de las tasas de ascenso y descenso la cuestión no es tan trivial, pues disminuir una tasa de ascenso en particular y mantener el resto causa que se vea afectada toda la trayectoria que precede al segmento cuya tasa de ascenso es cambiada. Para ajustar esto es necesario entonces re-calcular todas las tasas de ascenso para que, sin obviar las restricciones, se llegue a las alturas de vuelo deseadas.

En cuanto a las discontinuidades en la velocidad del sistema, que surgen cuando se generaliza la trayectoria a 3D y por lo tanto necesariamente se pasa de velocidades contenidas en planos horizontales

[f]Se llegaron a probar incluso algunos algoritmos que realizan minimizaciones con restricciones y aunque los mismos daban resultados muy buenos y en muy poco tiempo, su código era propietario (no sólo el *software* que lo implementaba sino el código en sí) y el costo de adquirirlos no era particularmente bajo. Sin embargo el equipo del proyecto considera que los resultados obtenidos con el algoritmo que se utilizó - si bien no garantizan la optimalidad con restricciones - muestra resultados más que satisfactorios (B)

(cuando se recorren círculos) a velocidades con componente según $\hat{z}_I$ no se implementó ninguna solución. Esto tiene dos justificaciones. Por un lado, el controlador que terminó por implementarse mostró buena tolerancia a estas discontinuidades haciendo innecesario su tratamiento previo. Por otro lado, tampoco las discontinuidades podían eliminarse del todo, aunque si podrían haber sido suavizadas mediante el agregado de componentes según $\hat{z}_I$ para la velocidad en los círculos, lo que efectivamente los hubiera convertido en tramos helicoidales.

6.4. Análisis de los resultados

Luego de haber terminado con la construcción del generador de trayectorias surge la necesidad natural de medir su desempeño. En esta sección haremos un estudio de los resultados obtenidos con el generador implementado, haciendo énfasis en la definición de indicadores cuantitativos para la realización de las medidas.

6.4.1. Criterios de éxito.

En primera instancia se procedió a definir ciertos criterios de éxito, entendiendo a los mismos como el conjunto de magnitudes que se quiere cuantificar para comparar el resultado obtenido respecto al esperado. A continuación se enumeran las magnitudes elegidas (y no las funciones cuantificadoras de las mismas).

▷ **1. Distancias a los *waypoints* pequeñas.**

Quizás el más obvio de los criterios de éxito, para que la trayectoria sea aceptable debe pasar suficientemente cerca de los *waypoints* dados por el usuario.

▷ **2. Radios de giro suficientemente grandes.**

Un criterio de éxito que surge de la restricción física del sistema. Debe tenerse en cuenta que si los radios de giro quedan por debajo de cierta cota, se los fuerza a un valor mínimo, con lo que en realidad este se convierte en un criterio que siempre debe satisfacerse, posiblemente a expensas de otros. Sin embargo, nos interesa evaluar cuán lejos de estos valores mínimos estaba la solución optimizada devuelta por el programa antes de que dichos mínimos fueran forzados. De este modo se cuantifica la sub-optimalidad de la trayectoria final.

▷ **3. Largo de la trayectoria no excesivo.**

Lo deseable siempre será que la trayectoria sea de lo más corta posible. Surge por lo tanto el criterio de comparar contra el mínimo largo de la trayectoria dados los *waypoints*.

▷ **4. Tasas de trepado acotadas.**

Otra restricción física del sistema que debe cumplirse para que una trayectoria sea realizable por el sistema físico. Una vez más, esta condición se fuerza sobre la trayectoria resultante de ser necesario, a costas de obtener una trayectoria sub-óptima. Del mismo modo, nos interesa evaluar cuán lejanos eran los valores propuestos después de la optimización, con respecto a los valores mínimos aceptables. Al igual que en el caso de los radios de giro, esto es un indicador de la sub-optimalidad de la trayectoria final y no de que efectivamente estemos exigiendo tasas de ascenso/descenso por encima de lo posible.

▷ **5. La solución para $N+1$ puntos 'incluye' la solución para N puntos.**

Este criterio de éxito surge más como una prueba del buen comportamiento del programa que como una condición deseable del mismo. Con este criterio nos queremos referir a que, si la optimización es buena, el resultado de la trayectoria para pasar por los primeros N *waypoints*, cuando se dan $N+1$ *waypoints*, debería ser muy similar al resultado que se obtiene cuando simplemente se ingresan los primeros N *waypoints* como entrada al programa.

6.4.2. Indicadores cuantitativos.

En base a los criterios de éxito marcados se procedió entonces a definir de forma más concreta indicadores cuantitativos de dichos criterios, de forma de obtener una medida del desempeño del sistema propuesto, o por lo menos, algunos parámetros que nos permitan evaluar su *performace*.

▷ **1. Distancias a los *waypoints* pequeñas.**

En este caso simplemente consideramos la máxima distancia euclideana entre la trayectoria trazada y los *waypoints* dados por el usuario. Esta magnitud esperamos que nunca exceda los $5m$ para satisfacer las condiciones de diseño[g].

▷ **2. Radios de giro suficientemente grandes.**

Aquí consideramos una triple cuantificación; el radio mínimo de la solución 'óptima', el radio medio y la mediana del conjunto de radios. Su justificación radica en que nos interesa tanto tener una noción de cuan lejos están los radios en general respecto de lo deseado y, en particular, el peor caso. Valores aceptables para estas cantidades sería un $95\,\%$ de la cota para el radio mínimo y el $100\,\%$ de la cota para la media y mediana. Las cotas tan exigentes surgen de que en el sistema real se requiere que se respete una desigualdad estricta, y aunque las mismas se aseguran en el 'post-procesamiento', idealmente la trayectoria no debería alejarse mucho de la óptima.

▷ **3. Largo de la trayectoria no excesivo.**

Para esto consideramos el largo -mediante una norma euclideana- de la trayectoria, menos la sumatoria de la distancia entre un *waypoint* y el siguiente. Básicamente esto es el largo de la trayectoria dada menos el mínimo largo que la trayectoria debe tener para pasar por todos los *waypoints*[h]. Un valor aceptable para esta cantidad sería el $20\,\%$ del largo mínimo de la trayectoria. Esta cantidad surge de un análisis más bien arbitrario de cuán larga puede ser la trayectoria real.

▷ **4. Tasas de trepado acotadas.**

Al igual que en el caso de los radios, consideramos el valor mínimo, mediano y medio de la tasa de trepado en la solución 'óptima'. Los motivos para la elección y los valores aceptables también son los mismos. Cabe notar aquí que el valor de las tasas de trepado en la solución 'óptima' no es demasiado modificable en el proceso de optimización (depende fuertemente de los *waypoints*), pero se puede lograr algún tipo de minimización.

---

[g]Como se comenta en la sección de resultados, esta cantidad está algo comprometida (en particular la distancia a los dos primeros *waypoints*) por el punto de comienzo y la dirección inicial de la trayectoria, elementos que si bien pueden ser optimizables, fueron dejados fijos en la implementación usada a la hora del testeo.

[h]El largo mínimo aquí lo definimos como el largo de la trayectoria que va desde un *waypoint* al siguiente mediante un segmento de recta. Si bien este largo es mínimo en cierto sentido, pueden perfectamente existir trayectorias que sean más cortas, siempre y cuando no se exija a las mismas pasar estrictamente por todos los *waypoints*.

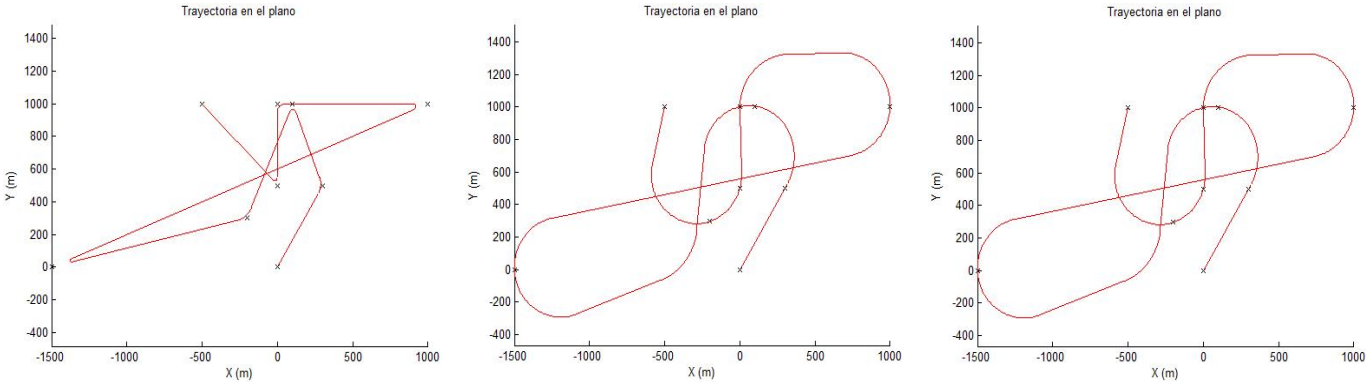
▷ **5. La solución para $N+1$ puntos 'incluye' la solución para N puntos.**

En la última implementación del software de generación de trayectorias este comportamiento casi que se impone sobre el sistema, pues se usa la solución para N *waypoints* como semilla para la solución de $N+1$ *waypoints*, con lo cual pierde sentido la cuantificación de este indicador.

6.4.3. Casos de prueba y resultados

Para evaluar los resultados del generador se construyeron conjuntos de *waypoints* bastante arbitrarios, que no siempre cumplían con las restricciones pretendidas para los mismos (distancia mínima entre puntos, etc.). También se evaluó el uso de distintos coeficientes de ponderación $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ para la función de costos, de modo de visualizar como se ven afectados los distintos 'equilibrios' que implica hallar una solución óptima. En lo que sigue se detallarán cualitativamente (y mínimamente de forma cuantitativa) los resultados obtenidos. En caso de querer indicadores más amplios o detalles particulares de las condiciones de testeo, se recomienda la lectura del apéndice B.

En las figuras que siguen se muestran algunos casos de prueba para el generador de trayectorias y la salida obtenida finalmente:

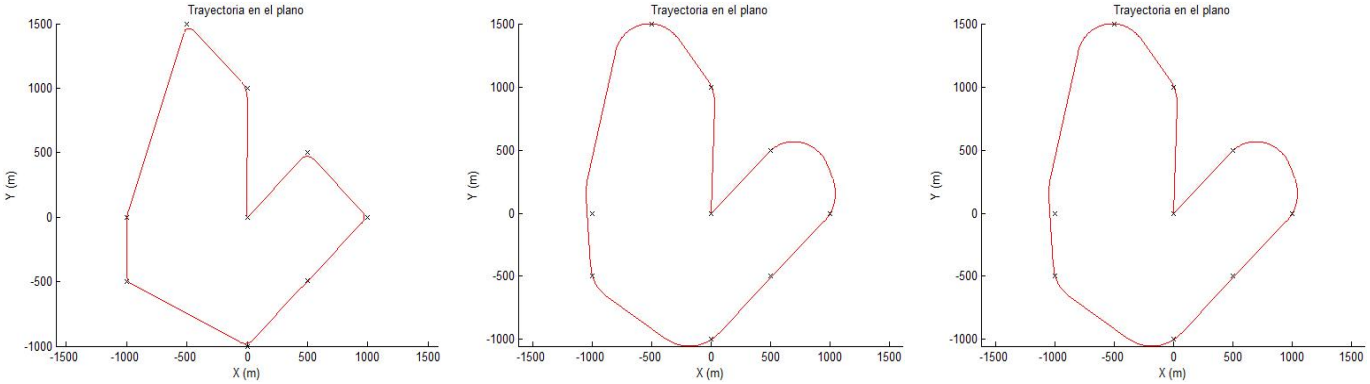


(a) Semilla generada para el *test* 1.

(b) Trayectoria luego del proceso de optimización para el *test* 1.

(c) Trayectoria final para el *test* 1.

Figura 6.6: Resultados obtenidos para el *test* 1.



(a) Semilla generada para el *test* 3.

(b) Trayectoria luego del proceso de optimización para el *test* 3.

(c) Trayectoria final para el *test* 3.

Figura 6.7: Resultados obtenidos para el *test* 3.

Como se aprecia en las figuras los resultados son cualitativamente satisfactorios, siendo las trayectorias muy similares a las esperadas. Por otro lado, de estos ensayos realizados se desprenden resultados que cumplen en general con los estándares cuantitativos fijados anteriormente. En cuanto a las distancias a

los *waypoints*, se lograron resultados que indican que la distancia media a los *waypoints* puede perfectamente mantenerse menor a los $20m$ para todos los *waypoints*. En general los mayores problemas surgen cuando se quiere imponer sobre la trayectoria la dirección inicial, pues esto condiciona fuertemente el paso por los dos primeros *waypoints*, o cuando los *waypoints* son muy cercanos entre sí.

En cuanto a los radios de giro, los resultados fueron más que satisfactorios, ya que la desigualdad deseada ($R > R_{min}$) se respetó casi sin excepciones, y cuando las hubo, las mismas no superaban el $1\,\%$. Es necesario indicar que estos resultados dependieron fuertemente de la implementación que finalmente se hizo para la optimización, donde los radios de giro en la 'semilla' se forzaron al valor de R_{min} antes de comenzar la minimización.

El largo total de las trayectorias generadas no siempre satisfizo el criterio fijado a priori de ser únicamente $20\,\%$ mayor que el largo mínimo, pero en todos los casos fue cercano al mismo. De todas maneras consideramos exitoso el criterio debido a la arbitrariedad con la que se había elegido el parámetro.

Las tasas de trepado fueron posiblemente el elemento más conflictivo en la generación de trayectorias. Por un lado, las tasas de trepado quedan casi dadas ya en el momento de ingresar los *waypoints* al generador, ya que en cierta forma estamos pidiendo, al pasar de un *waypoint* al siguiente, que el avión modifique su altura de vuelo según la altura de los distintos *waypoints*. Sin embargo, es posible afectar algo las tasas de trepado pues lo que sí es modificable es la distancia en la que el avión tiene que cambiar su altura de vuelo. En estas circunstancias consideramos que fue más que aceptable el comportamiento del generador durante los ensayos, que permitió afectar de cierta manera las tasas de trepado (y mantenerlas dentro de las cotas admisibles). Sin embargo todo el tratamiento que se hizo está basado en el hecho de que los cambios de altura solo se dan en los tramos rectos de la trayectoria, lo cual no tiene que ser necesariamente así. Queda pendiente para desarrollos futuros el hecho de trabajar con cambios de altura en los tramos circulares, que pasarían entonces a ser helicoidales. En principio, esto permitiría obtener mejores resultados; por ejemplo, trayectorias más suaves y tasas de trepado menores.

A modo de comentario final cabe destacar como una 'buena' trayectoria en general se obtiene mediante el compromiso entre todas las cantidades que se mencionaron, lo que hace necesario poner énfasis en la elección de los coeficientes de ponderación para la función de costos. Por ejemplo, agrandar el peso de la distancia a los *waypoints* necesariamente trae aparejado trayectorias más largas, así como tratar de minimizar las tasas de trepado reduce los radios de giro, y disminuir el largo de la trayectoria aleja a la misma de los *waypoints* y reduce también los radios.

6.4.4. Conclusiones referidas al generador de trayectorias

Los resultados que se han mostrado a lo largo de esta sección así como otros que pudimos ver durante la incontable cantidad de ejecuciones del generador de trayectorias que hemos hecho durante el proyecto, nos dejan la sensación de que el mismo es suficientemente robusto y provee soluciones más que adecuadas. En particular los pocos problemas que quedarían para solucionar vinculados con el mismo serían: mejorar los tiempos de ejecución para una implementación eficiente en un procesador de características más reducidas que las de un PC de escritorio, y agregar algún tipo de tratamiento o mejora del algoritmo cuando los *waypoints* que se dan son demasiado cercanos (este es uno de los pocos puntos en los que un algoritmo propietario probado resultó tener resultados evidentemente mejores que los del algoritmo que se terminó por usar).

Capítulo 7
Diseño del controlador

Este capítulo lo dedicaremos a estudiar las distintas estrategias de control probadas para el avión y los resultados obtenidos para las mismas. Las estrategias implementadas fueron diversas y algunas de ellas quedaron truncadas en su estudio debido principalmente a dos elementos: el éxito obtenido con otras estrategias y los límites de tiempo del proyecto. Para lo que sigue se asumirán los resultados de los capítulos 3 de modelado, 5 de linealización y 6 de generación de trayectorias.

7.1. *Gain Scheduling*

Como se adelantó en el capítulo precedente, la estrategia para trazar las mismas consiste en una concatenación de dos tipos de trayectorias simples y diferenciadas. Estas trayectorias son segmentos de recta y círculos en un plano horizontal, y fueron elegidas por la particularidad de ser trayectorias alrededor de las que la linealización queda invariante en el tiempo y obtener un sistema SLIT (salvando los cambios de modelo necesarios que fueron manifestados en el capítulo 5 referido a la linealización).

De aquí se deduce lo que va a ser una de las primeras hipótesis para la estrategia de control: realizar el control como una sucesión de controladores que van cambiando a lo largo de la trayectoria, junto con el tipo de trayectoria local deseada. Como ya dijimos, en una primera instancia este control se hace utilizando control lineal alrededor del punto de operación deseado y cambiando dicho punto a lo largo de la trayectoria en la sucesión antedicha. Esta estrategia de control se denomina *Gain Scheduling*, y de manera general consiste en, para un sistema no-lineal, linealizar alrededor de varias situaciones o puntos de operación y cambiar de un punto a otro en función del valor de algún conjunto de variables. Sin embargo dicha estrategia es generalizable a controladores no-lineales, pudiendo usar una estrategia tipo *Gain Scheduling* para separar el sistema en distintas situaciones (puntos de operación) y usar cualquier tipo de control -no necesariamente lineal- alrededor de los mismos.

En nuestro caso, los puntos de operación alrededor de los cuales se trabajará el sistema son infinitos, pero se pueden agrupar en dos conjuntos: los vuelos en línea recta (que quedan determinados por la velocidad del avión y la velocidad del viento) y los vuelos en círculos horizontales (que quedan determinados por la velocidad angular y la velocidad del avión en algún punto de la trayectoria, asumiendo velocidad del viento nula[a]). La variable que se eligió para determinar el paso de una trayectoria a otra es el tiempo, y dicha elección surge naturalmente de la evaluación de la trayectoria que se quiere seguir, ya que conociendo la velocidad angular y velocidad del avión, solo resta conocer el tiempo transcurrido para poder establecer los puntos de cambio de trayectoria.

Todos los puntos de operación se obtienen del generador de trayectorias y en lo que sigue nos dedicaremos a estudiar las distintas estrategias de control que se utilizaron para controlar alrededor de dicho conjunto de puntos de operación.

[a]Si bien asumir la velocidad del viento nula parece ser limitante en cuanto al tipo de trayectoria, esta hipótesis es necesaria para que se pueda realizar una linealización invariante en el tiempo alrededor de la trayectoria.

7.2. Control lineal

Como se dijo en el capítulo 5 que versa sobre la linealización del sistema, un conjunto de herramientas que poseíamos de antemano para aplicar al control del avión son las de que surgen del control lineal. Este conjunto de herramientas es bastante extenso y permitía sin mayor necesidad de profundizar conocimientos, intentar una primera implementación del controlador. Para lo que sigue se asumirá que, para los distintos puntos de operación del sistema, se cuenta con un modelo SLIT de la situación de vuelo de la forma que se expresa a continuación en la ecuación 7.1.

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \tag{7.1}$$

Recordando la forma que tomaban los vectores de estado $\vec{x}$ y de entradas controlables $\vec{u}$:

$$\vec{x} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi, v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}, w_{Bx}, w_{By}, w_{Bz})^T \tag{7.2}$$

$$\vec{u} = (\delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_f, n)^T \tag{7.3}$$

Siendo $\tilde{x} = x - x_d$ el desplazamiento en el vector de estados con respecto a su valor correspondiente a la trayectoria estacionaria considerada y $\tilde{u} = u - u_d$ el desplazamiento en las entradas alrededor de su punto de operación para dicha trayectoria. Observamos que de implementar un controlador que estabilice dicho sistema lineal alrededor del origen, se logrará un seguimiento estable de la trayectoria deseada dado que el origen de dicho sistema se corresponde a $x = x_d$. Se debe tener en cuenta, sin embargo, que dicha expresión lineal para la dinámica de los desplazamientos del vector de estados alrededor de su valor estacionario, será más representativa del comportamiento del modelo en variables de estado completo cuanto más pequeños sean dichos desplazamientos. Lo mismo es válido para los desplazamientos de la entrada alrededor de su punto de operación. Es de suponer entonces, que un controlador obtenido a partir de este modelo podrá asegurar la estabilidad del sistema sólo cuando dicha aproximación represente de manera suficientemente fidedigna el comportamiento del modelo completo.

Como ya se mostró en el referido capítulo 5, para cada una de las situaciones de vuelo, la existencia del modelo depende fuertemente de cómo se midan (desde que referencial) las variables de interés. Asumiendo que se harán las modificaciones pertinentes (que fueron indicadas en dicho capítulo en la sub-sección 5.3 cuando sea necesario, asumamos en adelante que el modelo SLIT existe para todas las condiciones de vuelo deseadas.

7.2.1. Realimentación de estados

En las condiciones de vuelo deseadas existe, a partir del generador de trayectorias, un vector de estados que se desea seguir. Es por esto que surge naturalmente la idea de realimentar la diferencia existente entre el vector de estados deseado y el vector de estados real, es decir, modificar levemente las acciones de control respecto del punto de operación para eliminar las perturbaciones en el vector de estados. Esto se puede expresar matemáticamente como muestra la siguiente ecuación, la ecuación 7.4.

$$\tilde{u} = -K\tilde{x} \tag{7.4}$$

En esta ecuación, K es la matriz de realimentación que tiene dimensiones tales que son transpuestas a B y que se le puede aplicar el producto con un vector de las dimensiones de $\tilde{x}$, o sea, $\in \mathcal{M}^{5\times 12}$. Para un sistema SLIT, si se asume una realimentación estática (K es una matriz de elementos constantes tramo a tramo), los polos del sistema realimentado pueden calcularse fácilmente como los valores propios de la matriz $A - BK$ [Oga98]. A partir de esto existen varios métodos para calcular la realimentación necesaria de un sistema de modo de colocar los polos del sistema total donde se deseen (*root locus*) o incluso existen métodos para darle más o menos peso a la realimentación de ciertas entradas, y también para darle más o menos peso a las

perturbaciones en ciertos elementos del vector de estados (LQR). En cualquier caso es importante considerar el hecho de que se busca el seguimiento de una señal de referencia que varía en el tiempo (más allá de los cambios de punto de operación, existe también una variación permanente de la posición, por ejemplo). Esto requiere entonces que el controlador, más allá de asegurar la estabilidad, pueda asegurar la convergencia de la señal de error a cero, es decir, pueda asegurar que se haga un seguimiento de la señal de referencia.

Para las trayectorias que consideramos en este trabajo, la mayoría de los elementos del vector de estado se mantienen constantes a lo largo de un punto de operación $\{v_{Bd}, w_{Bd}, \theta_d, \varphi_d\}$ y, en el caso de las rectas debe agregarse $\{\psi_d\}$, mientras que otras, como la posición expresada en el sistema inercial ($\vec{r_I} = x\hat{i_I} + y\hat{j_I} - z\hat{k_I}$) varían en el tiempo. Dichas variaciones serán siempre en forma de rampa (derivada constante), por lo que interesa evaluar que el sistema pueda seguir dichas señales sin error asintótico. Previamente al estudio de los distintos tipos de controladores y su diseño, es interesante hacer un análisis de la controlabilidad del sistema.

Por controlabilidad del sistema se entiende a la posibilidad de llevar el sistema desde un estado cualquiera a otro estado cualquiera en un tiempo finito. Sin perder generalidad, se puede ver que dicha condición es equivalente a la posibilidad de llevar el sistema desde un estado cualquiera al origen en un tiempo finito. Usando algunos resultados que se presentan en la bibliografía [Oga98] [Kal96], podemos ver que un sistema como el nuestro es completamente controlable si la matriz $[B, AB, A^2B, A^3B, ..., A^{11}B]$ que -en nuestro caso- es $\in \mathcal{M}^{12\times 60}$ tiene rango doce. Debido a la complejidad y tamaño de las matrices involucradas, no es posible probar esto analíticamente en términos de expresiones genéricas de dichas matrices. Se hicieron verificaciones mediante cálculos numéricos para la linealización alrededor de ciertos puntos de operación.

A continuación se detallan los mecanismos utilizados para obtener el controlador y se realiza un análisis de sus ventajas y desventajas.

▷ ***Root Loci***

Como se dijo anteriormente, por *root loci* nos referimos al procedimiento de calcular una realimentación para el sistema que coloque los polos del sistema realimentado en lugares pre-determinados. Este tipo de mecanismos permite realizar un diseño ajustando características tales como la respuesta en el tiempo, el sobretiro y otros parámetros de interés (considerando las salidas una por una). Una manera fácil de implementar dicho procedimiento en *Matlab* es mediante una función tal como *place.m*, y que en realidad no es otra cosa que una función que resuelve un sistema algebraico de ecuaciones no lineales donde hay más incógnitas que ecuaciones. En nuestro caso habría que determinar $5x12$ elementos de la matriz K (que corresponden a la realimentación de las cinco entradas en cada uno de los doce elementos del vector de estados), a partir de las doce ecuaciones que surgen de imponer la siguiente relación expresada en la ecuación 7.5.

$$|A - BK - \lambda.I| = 0 \tag{7.5}$$

Tomando en λ el valor de los doce polos que se quieren imponer. Si bien este es un mecanismo fácil de utilizar para lograr la estabilidad e incluso imponer algunas características más sobre el sistema como ya se dijo, no es intuitivo desde el punto de vista de 'observar' qué es lo que está pasando con el sistema real, qué variables de estado se están realimentando, cómo y cuál es la relación entre las distintas entradas que pueden moverse y cómo controlar la magnitud de las acciones de control. Si se quiere se puede pensar esto como un *root locus* en un sistema de doce salidas, lo que en sí complica bastante algún post-procesamiento de la solución, como puede ser intentar limitar las acciones de control (que necesariamente están limitadas en el sistema real), o intentar ajustar la velocidad de respuesta en ciertas variables de estado. A modo de ejemplo, podemos pensar que si exigimos polos tales que la respuesta del sistema sea muy rápida, necesariamente esto causará que se necesiten acciones de control muy grandes, lo que en el sistema real puede implicar que sean necesarios actuadores muy fuertes o que directamente el sistema se aleje del punto alrededor del cual fue linealizado, lo que claramente no es deseable.

Surge por lo tanto una necesidad de diseñar un controlador que pueda asegurar la convergencia y estabilidad del sistema, así como proveer de alguna forma una limitación al tamaño de las acciones de control. Dado que el mecanismo de ubicar los polos del sistema posee sesenta grados de libertad (correspondientes al número de elementos de la matriz K) y tan solo doce ecuaciones, se puede ver que sobran grados de libertad para agregar exigencias al sistema. Una solución sencilla que permite introducir este tipo de consideraciones entre otras es la metodología de control mediante la solución del problema del regulador cuadrático lineal (LQR).

Para completar un sistema de diseño por colocación de polos, falta definir los criterios con los cuales se ubicarán dichos polos. Esta tarea, que en principio puede parecer trivial (definir polos en el semiplano negativo, suficientemente rápidos y con pocas oscilaciones) es en realidad un desafío considerable. Por un lado, la ubicación en sí misma de los polos es difícil de decidir, pues debe de existir un equilibrio entre las exigencias que se hacen a la respuesta temporal del sistema y las limitaciones físicas que sabemos que existen. Por ejemplo, no es razonable exigirle al sistema controlado tiempos de respuesta que sabemos exceden largamente los tiempos característicos de respuesta para un sistema mecánico de nuestras dimensiones (polos en el orden de algunos Hz). De la misma manera, pretender que todos los polos sean reales negativos (no existan raíces complejas conjugadas al polinomio característico) también es algo exigente y en principio no es necesario para el sistema realimentado. Por otro lado, está la ambigüedad que surge al tener más grados de libertad que ecuaciones, lo que implica que la determinación de los polos mediante un algoritmo cualquiera está fijando implícitamente algunas otras características del sistema que pueden no ser deseables. A modo de ejemplo, se probó diseñar un controlador mediante LQR (ver siguiente item) y calcular los polos del sistema realimentado, para luego diseñar un controlador mediante la colocación de los polos del sistema en los mismos lugares. Los resultados mostraban dos controladores con características totalmente distintas (distintas matrices de realimentación), que si bien podrían haber sido igualmente útiles de haber estado en presencia de un sistema verdaderamente lineal y sin otras limitaciones físicas, terminaron por dar resultados bien diferentes. Esto prueba que la sola asignación de polos no es suficiente para el diseño de un controlador adecuado, al menos cuando el sistema dista bastante de ser el modelo SLIT para el cual se hace el diseño.

Como primer criterio para la asignación de polos se tomaron conjuntos de polos reales negativos, donde el polo dominante estuviera en el orden de $1Hz$, y el resto de los polos se mantuvieran entre 1 y 2 décadas por detrás de este. Luego, mediante ensayo y error se probaron otras configuraciones para los polos, con polos complejos conjugados, con respuestas de polo dominante más lentas y también más rápidas. En el próximo capítulo, el capítulo 8 sobre pruebas del controlador, se detallan más exhaustivamente las situaciones de prueba y sus resultados, pero nos interesa resaltar que para todos los resultados obtenidos -ya fueran buenos o malos-, colocar los polos se convertía más en un 'arte' que en un procedimiento sistemático que permitiera exportar el mecanismo a otras situaciones y/o plantas a controlar. El primer diagnóstico que hicimos para esta situación fue que, dado el alto número de grados de libertad que tiene el problema en comparación con las restricciones que estábamos imponiendo, la función *place.m* de *Matlab* necesariamente estaba 'tomando' algunas decisiones por nosotros que desembocaban en un controlador con características distintas a las deseables, más allá de la colocación de los polos en el sistema realimentado. Procedimos entonces a utilizar la ya mencionada metodología de LQR para diseñar el controlador.

▷ LQR - *Linear Quadratic Regulator*

El segundo procedimiento que utilizamos para hallar la realimentación de estados para el modelo SLIT fue el de LQR y consiste en encontrar también una matriz de realimentación K, pero mediante un mecanismo absolutamente distinto al anterior: se eligen dos matrices, las matrices $Q \in \mathcal{M}^{12\times 12}$ y $R \in \mathcal{M}^{5\times 5}$ (que deben ser definidas positivas), y se halla la realimentación de estados que minimiza el funcional J definido por la siguiente ecuación, la ecuación 7.6.

$$J = \int_0^{T_f} \left(\tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{u}^T R \tilde{u}\right) dt \tag{7.6}$$

Donde la minimización está sujeta a la dinámica del sistema dada por el MVE, que a los efectos de la resolución del problema LQR se sustituye por la aproximación lineal correspondiente a la ecuación 7.1.

De la resolución de este problema se obtiene un controlador óptimo desde el punto de vista de la función de costo definida anteriormente. Observamos que de lograr dicha minimización, eligiendo de manera apropiada las matrices Q y R, se logrará de la misma forma achicar $\tilde{x}$, que corresponde a la diferencia entre el valor real y el valor deseado del vector de estados. Se obtendría entonces un controlador que podría asegurar un seguimiento razonable de la trayectoria deseada. Una de las ventajas de este nuevo sistema es que el controlador así implementado permite considerar la minimización de las acciones de control utilizadas. También permite de alguna manera ponderar cuáles son las variables del vector de estado en las que se quiere tener más tolerancia, y cuáles son las entradas en las que se está dispuesto a tener acciones de control más grandes. Por ejemplo, si pensamos las matrices Q y R como diagonales, cada uno de los términos de la diagonal ponderaría el error cuadrático medio en una de las variables del vector de estado o en una de las entradas. De esta manera estaríamos, de hecho, haciendo una minimización del error cuadrático integral esperado en las variables de estado y entradas (de allí su nombre), ponderando los errores en cada variable más o menos que los errores en las restantes. Una consecuencia de una ponderación de ese estilo es que se pueden elegir variables de estado en las que los errores son menos tolerables y otras donde la convergencia puede ser más lenta. Algo similar ocurre con las entradas, donde ponderándolas de distinta forma se puede permitir que algunas varíen más y otras menos, o visto desde otro punto de vista, 'concentrar' la energía de la señal de realimentación en algunas variables de entrada y no en otras (algo que es muy útil, ya que por como se miden las deflexiones de las superficies de vuelo, nos interesa que las mismas no superen valores de fracciones de radian, mientras que para las RPM del motor las variaciones admisibles son del orden de cientos).

La minimización planteada anteriormente, sustituyendo $\tilde{u} = -K\tilde{x}$ y realizando algunas cuentas matriciales, puede replantearse como la solución de la siguiente ecuación diferencial matricial, que toma la forma de la ecuación de *Ricatti* que se muestra a continuación.

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = -\dot{P(t)} \tag{7.7}$$

Donde deben imponerse las condiciones finales para hallar la solución. A partir de aquí se puede hallar la realimentación de estados K a partir de la matriz solución P mediante la fórmula 7.8.

$$K = R^{-1}B^T P \tag{7.8}$$

Existe un caso particular para dicha solución, cuando el horizonte de tiempo es infinito (es decir, se integra en todo el tiempo). En ese caso la solución se obtiene a partir de la siguiente ecuación algebraica matricial, la ecuación 7.9.

$$A^t P + PA - PBR^{-1}B^t P + Q = 0 \tag{7.9}$$

Nuevamente la matriz de realimentación de estados se obtiene a partir de la solución P de esta ecuación (en este caso constante en el tiempo), mediante la relación 7.8. Se puede ver que, dentro de ciertas hipótesis, la realimentación de estados obtenida de esta manera, logra estabilizar el origen del sistema. Por otro lado vemos que el costo así definido, con el horizonte de tiempo en el origen, solamente puede converger a un valor finito si las dos señales involucradas, $\tilde{u}(t)$ y $\tilde{x}(t)$, tienden a cero.

Para el caso en estudio, dado que los puntos de operación se mantienen por un período finito de tiempo, correspondería trabajar con la primera solución. Sin embargo, dada la complejidad computacional adicional que requiere hallar dicha solución y el hecho de que, a los efectos prácticos, el tiempo de operación alrededor de un punto de operación es mucho mayor al tiempo característico asociado a los polos que queremos para el sistema realimentado (de otra manera no habría garantía de convergencia para cada punto de operación), consideramos más apropiado usar la segunda solución.

Como se desprende de lo anterior, el controlador que se diseñe mediante LQR depende fuertemente de las matrices Q y R que se elijan. Comenzaremos por la matriz Q, que cuantifica la minimización en términos del vector de estados. Por simpleza tomamos una matriz diagonal, ya que permite visualizar fácilmente como se ponderan las distintas variables de estado, aunque esto no tiene porque tomarse así (e implica una pérdida de generalidad). Haremos lo mismo para la matriz R, tomándola diagonal.

Partiendo de esta base, cabe hacer la pregunta: ¿Cuáles de las variables del vector de estado deben tener o es más importante que tengan errores menores? Surgen entonces dos tipos de respuesta: por un lado, está la escala en la que se miden las distintas variables del vector de estados. Por ejemplo, en términos de los ángulos de *Euler*, variaciones de pocas décimas de radian son errores significativos, mientras que para la posición, errores de algunos metros son tolerables y esperables. Por otro lado, debe considerarse qué variables afectan de mayor manera el sistema a controlar.

A modo de ilustrar este último punto, es necesario que volvamos a la perspectiva del MVE completo. Dicho modelo tiene dependencias no lineales en casi todas las variables del vector de estados y a la hora de realizar la linealización se asume una hipótesis clave, la de trabajar alrededor de un punto de operación sin 'alejarse demasiado' del mismo. Pero conceptos como 'alejarse demasiado' son relativos, no sólo en su cuantificación para el total del sistema, sino en su cuantificación para cada variable de estado. Otra vez a modo de ejemplo tomemos la posición y los ángulos de *Euler*. Mientras que perturbaciones de décimas de radianes en los ángulos de *Euler* alteran completamente el modelo (cambia toda la linealización del mismo, pues cambian las expresiones de w_B y v_B si asumimos que w_I y v_I se mantienen para el nuevo estado), perturbaciones en la posición, por grandes que sean, no cambian en absoluto el MVE completo o su linealización[b]. Esto nos arroja luz sobre un hecho clave para la elección de la matriz Q: los errores en la posición no son significativos para la linealización y por lo tanto tampoco lo son para que la realimentación sea adecuada; mientras que errores en las otras variables si lo son, y en especial en los ángulos de *Euler*. Casi que inmediatamente se deduce que las ponderaciones de los ángulos de *Euler* en la matriz Q son las que deben valer más, y las de la posición las que deben valer menos. Una receta en estas líneas que dio buenos resultados, es la de tomar la matriz Q como se muestra en la siguiente expresión.

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & Id & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & 100.Id & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & Id & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & Id & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & &
\end{array}\right) \tag{7.10}$$

Existen variantes a esta matriz que también dieron resultados aceptables, pero esta fue una de las más robustas en funcionamiento. Por ejemplo, aumentar la ponderación asignada a la posición aumenta la precisión en el seguimiento de dichas variables pero el sistema pierde en robustez. Se observó que perturbaciones demasiado grandes llevan a la inestabilidad.

Para la matriz R, las consideraciones a hacer son similares. En particular es relevante la escala de las distintas magnitudes y los órdenes de magnitud de las señales de realimentación que podemos considerar 'tolerables'. Físicamente, las señales para las superficies de vuelo deberían estar acotadas por algunas décimas de radian, y la señal del motor en algunos cientos de RPM, lo cual marca claramente los distintos órdenes

[b]Esto en realidad sucede para las variables x e y, mientras que para z el MVE completo -considerando variaciones de la densidad del aire con la altura por ejemplo- puede llegar a modificarse levemente.

de magnitud. Para lograr que efectivamente las señales se mantuvieran en dichos rangos, una matriz R que funcionó bien fue la que aparece en la siguiente ecuación.

$$R = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

Nuevamente esta matriz es solo un ejemplo de matrices posibles para el sistema. Observamos que buscar una señal de realimentación demasiado pequeña puede causar que los tiempos de respuesta sean bastante más lentos que los esperados. Si se acepta la posibilidad de que las señales 'saturen' en cierto valor (como es nuestro caso donde la saturación se implementó de hecho en el sistema a simular), entonces es posible trabajar con matrices que producen realimentaciones 'óptimas' que son más grandes que las aceptables pero que nunca llegan como tales a los actuadores.

Para cualquiera de los dos procedimientos anteriores (asignación de polos y LQR) el resultado es -a grandes rasgos- el mismo: un sistema con realimentación de estados estática que queda estable alrededor de la trayectoria deseada. Corresponde entonces hacer algún tipo de pruebas con la realimentación y ver bajo que error en las condiciones iniciales se alcanza la convergencia. Pero previo a eso cabe hacer una distinción entre las dos situaciones de vuelo que en principio deseamos controlar.

7.2.2. Comentarios sobre el cambio de variables de estado para el vuelo en círculos

Tal como se dijo en el capítulo 5 referente a la linealización, en la sección 5.3, el MVE presentado puede ser linealizado alrededor de ambas trayectorias (ya mencionadas exhaustivamente), pero es sólo sobre el vuelo a velocidad constante que el sistema que se obtiene es invariante en el tiempo y se puede por lo tanto implementar el control como se dice en los párrafos anteriores, considerando un subconjunto de ecuaciones del MVE. Para el caso de las trayectorias con velocidad angular constante (círculos), el sistema no queda invariante en el tiempo si se considera a la posición expresada en el sistema inercial como parte del vector de estados, por lo que para dar el tratamiento antes descripto es necesario dejar a la posición por fuera del sistema en principio. Esto trae aparejada la consecuencia de que, mediante una realimentación estática, no es posible controlar la posición (aunque si la velocidad) por lo que la misma podría en principio diverger durante la trayectoria (a menos que se haga control integral o que los polos del sistema sean tan rápidos que el error asintótico en los círculos sea despreciable). Éste fue el motivo del cambio de variables expresado en dicha sección y el que se utiliza para aplicar las técnicas de control que se desarrollaron párrafos atrás.

7.2.3. Agregado de dinámica para controlar errores grandes en la posición

Por la naturaleza de la trayectoria que queremos seguir (concatenación de segmentos de rectas y círculos), si bien es deseable que la posición sea una variable controlada en todo el trayecto, de poder garantizar que durante los tramos rectos la posición se corrige a su valor deseado -sin perjuicio de que durante los tramos circulares ésta se aleje de dicho valor-, podríamos garantizar que la posición es controlada a lo largo de la trayectoria. El problema aquí es que el cambio de punto de operación entre un círculo y una recta puede ser muy grande, en especial cuando no se realiza control de posición sobre el tramo de círculo, entonces cuando el punto de operación pasa a la recta, nos encontramos con un 'escalón' en la diferencia entre el estado real y el deseado, de un tamaño que puede ser considerable lo que puede llevar a que el sistema no sea controlable (recordemos que nuestro sistema es estable en su linealización, pero su condición de no lineal implica que perturbaciones muy grandes puedan hacer que el sistema diverja). Es por esto que es interesante notar una propiedad del MVE que tenemos: éste no depende explícitamente de la posición en el espacio, por lo que para cualquier valor de posición, si las otras nueve variables de estado se mantienen, el sistema es el mismo (y muy

particularmente su linealización[c]).

Esta particularidad del sistema permite hacer el siguiente análisis: si el vector de estados se encuentra en el punto de equilibrio para todas sus variables excepto la posición, el sistema linealizado se mantiene para este nuevo punto de operación sin importar la posición. Por lo tanto, buscar la convergencia primero en las nueve últimas variables del vector de estado y recién luego tratar de conciliar la posición real con la posición deseada puede funcionar adecuadamente como una estrategia de control si la diferencia de posición no es demasiado grande[d].

Procedimos entonces al agregado de cierta dinámica a la realimentación de estados, de modo de lograr simultáneamente dos objetivos: el primero es tratar de llegar con las últimas nueve variables del vector de estado al equilibrio antes que con la posición, y el segundo es que los errores en la posición aparezcan lentamente (y no como escalones) para evitar que esto cause un alejamiento del sistema de su punto de operación. Para esto una estrategia simple es el agregado de un bloque con un polo en el lazo de realimentación de la posición. De esta manera se evita que al pasar de un punto de operación a otro, los errores en la posición (y su realimentación) dominen en el sistema y eviten que las otras variables de estado lleguen al equilibrio.

7.3. Regeneración de trayectorias

El controlador detallado en la sección precedente se construye sobre la aproximación lineal para la dinámica de los pequeños desplazamientos alrededor de la trayectoria deseada. Se debe notar que esta aproximación es representativa de la dinámica del modelo completo sólo cuando los desplazamientos de las variables de estado alrededor de sus valores estacionarios y de las entradas alrededor de su punto de operación son lo suficientemente pequeños. Es posible que exista una perturbación sobre el avión que lo aleje lo suficiente de la trayectoria de vuelo deseada como para que esta aproximación deje de ser razonable. En este caso, no se puede asegurar que la realimentación de estados calculada en base al modelo lineal logre estabilizar al sistema. Por lo tanto, es necesario buscar alguna estrategia para compensar esta deficiencia.

Implementamos entonces un segundo lazo de control, de manera tal de lograr controlar al sistema y lograr los objetivos deseados en cuanto a lo que refiere al recorrido de los *waypoints*, cuando el avión se aleja lo suficiente de la trayectoria como para no poder asegurar que el control lineal funcione de manera adecuada. Este segundo bucle de control funciona en cierta forma por fuera de la realimentación de estados y consiste en realizar una regeneración de la trayectoria a seguir. Es decir, cuando el avión se aleja lo suficiente de la trayectoria original a seguir como para que se considere que difícilmente pueda retomarla, se genera una nueva trayectoria objetivo teniendo en cuenta la condición actual del avión y los restantes *waypoints* a seguir. La generación de esta nueva trayectoria se realiza aprovechando el algoritmo realizado para obtener la trayectoria a seguir originariamente.

7.3.1. Condición de salida

Lo primero a tener en cuenta para la implementación de este algoritmo de control es como ha de determinarse la condición por la cual se decide que el avión se alejó lo suficiente de la trayectoria deseada en el espacio de estados como para decidir regenerar. En principio podría decidirse regenerar teniendo en cuenta cuánto se aleja cualquiera de las variables de estado con respecto a su valor deseado, instante a instante en el tiempo. Debemos tener en cuenta, sin embargo, que la nueva trayectoria a seguir se generará de manera análoga a como es generada la original. Además, es deseable que esta nueva trayectoria contemple la condición actual del avión en el momento de la regeneración, de manera tal de que sea más fácil de seguir, dadas esas condiciones, que la original. Como se verá en la siguiente sub-sección, la regeneración de trayectorias utilizando el algoritmo original, a lo sumo podrá tener en cuenta la posición del avión al momento de la regeneración y su velocidad. No es posible, utilizando el algoritmo, regenerar de manera tal de poder asegurar

[c]Esto se puede ver claramente en la versión linealizada notando que las primeras tres columnas de la matriz A son nulas

[d]Esto se debe a que una diferencia de posición demasiado grande podría necesitar de acciones de control demasiado grandes que sacaran a las otras nueve variables de la zona lineal alrededor del punto de operación.

que la trayectoria a seguir obtenida sea mas fácil de seguir que la anterior en términos de los ángulos de *Euler*, por ejemplo. Es decir, difícilmente los valores deseados para los ángulos de *Euler* de la nueva trayectoria sean más cercanos a los valores al momento de regenerar que los correspondientes a la trayectoria que se debía seguir antes de regenerar. Lo mismo sucede la velocidad angular. Es por este motivo que tomamos como condición para la regeneración de la trayectoria que la posición en el espacio del centro de masa del avión se haya alejado de su valor deseado más que un determinado valor umbral mínimo. La condición entonces es de la forma que se muestra a continuación en la ecuación 7.12

$$\|(x(t), y(t), z(t)) - (x_d(t), y_d(t), z_d(t))\| > D_{MAX} \tag{7.12}$$

Donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ representan las coordenadas de la posición del centro de masa del avión G en el instante t, $x_d(t)$, $y_d(t)$ y $z_d(t)$ los valores deseados para las mismas magnitudes en ese instante y D_{MAX} la tolerancia máxima para el error espacial en el seguimiento de la trayectoria antes de regenerar.

7.3.2. Trayectoria regenerada

Para construir la nueva trayectoria de manera tal de que ésta sea más fácil de seguir que la que se está intentando recorrer, se deben de tener en cuenta, al momento de regenerar, la posición actual del centro de masa del avión y su velocidad. Además, se desea que esta nueva trayectoria recorra todos los *waypoints* restantes cumpliendo con la tolerancia exigida, de manera tal de cumplir el objetivo original. Como se expresó anteriormente, se usará el mismo algoritmo de generación de trayectorias que se utiliza para obtener la trayectoria original para regenerar. Este algoritmo recibe como entrada únicamente un conjunto de *waypoints* que se deberán recorrer y genera una trayectoria a seguir a partir de éstos. Se debe entonces elegir los *waypoints* que se introducen al algoritmo al regenerar de manera tal que la trayectoria obtenida cumpla con los requerimientos recién expuestos. Si tomamos como primer *waypoint* a introducir al algoritmo la posición actual del centro de masa, la trayectoria generada comenzará en el punto del espacio en que se encuentra el avión al regenerar. Esto es sumamente deseable, dado que de esta forma el error en la posición con respecto al nuevo valor deseado será cero en el instante inicial. Obtenemos una mejora substancial en el error en estas magnitudes del vector de estados con respecto a la situación antes de regenerar, dado que la norma de la diferencia antes de hacerlo debía ser por lo menos D_{MAX}, por la forma en que se eligió la condición de regeneración. Es de suponer que al disminuir este error, la tarea de controlar el sistema alrededor de la nueva trayectoria será bastante mas sencilla para el controlador lineal.

Ahora bien, no es solamente deseable que la nueva trayectoria a seguir parta del punto en que se encuentra el avión sino que también es de interés, a los efectos de lograr un mejor seguimiento de ésta, que la misma sea tangente a la dirección en la cual se está moviendo el avión en ese instante. La dirección de movimiento del avión en ese momento está especificada por su vector velocidad. Debemos entonces buscar una forma de utilizar el algoritmo de generación de trayectorias de manera tal que la obtenida sea lo más tangente posible al vector velocidad del avión al momento de regenerar. Para lograr este propósito, introducimos como segundo *waypoint* al algoritmo un *waypoint* auxiliar, que no corresponde con ninguno de los especificados previamente como *waypoint* a seguir para lograr el objetivo del *waypoint*. El único propósito de este *waypoint* es que la trayectoria obtenida por el algoritmo sea lo más tangente posible al vuelo del avión al momento de regenerar. Elegimos entonces su ubicación a una distancia predeterminada de la posición actual del avión en el instante de la regeneración (o primer *waypoint* de la nueva trayectoria) y en la dirección en la que apunta el vector velocidad en ese momento. es decir, según la relación que se muestra a continuación en la ecuación 7.13.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + D_R \hat{v} \tag{7.13}$$

Siendo x_1, y_1 y z_1 las coordenadas espaciales del primer *waypoint* de la nueva trayectoria, x_2, y_2 y

z_2 las de el segundo, $\hat{v}$ un versor colineal con el vector velocidad del avión en el instante en que se regenera, y D_R la distancia del primer *waypoint* a la cual se coloca el segundo. Este último parámetro es una de las variables que determinan el comportamiento del generador de trayectorias que es posible modificar, junto con el umbral de salida. Entre otras cosas, los valores asignados a estos parámetros deberán contemplar la escala del problema considerado. Debido a cómo funciona el algoritmo generador de trayectorias se puede ver que la proyección en un plano horizontal de la primer recta de la trayectoria obtenida es paralela a la proyección horizontal de la recta que une los primeros dos *waypoints*. Dado que el segundo *waypoint* se determina mediante la fórmula 7.13, la proyección horizontal de la primer recta de la trayectoria regenerada será paralela a la proyección horizontal del vector velocidad. Por lo tanto la componente en un plano horizontal del nuevo vector velocidad a seguir para la trayectoria regenerada será colineal con la velocidad que lleva el avión al momento de regenerar. Nuevamente es de suponer que en estas circunstancias será más fácil para el controlador lineal seguir la nueva trayectoria que la anterior. Se debe notar, sin embargo, que la trayectoria obtenida por este método no será tangente estrictamente a la velocidad del avión al momento de regenerar, dado que la primer recta de esta nueva trayectoria no coincidirá exactamente con la recta que une los dos primeros *waypoints*. Aun así, se obtiene una ventaja con respecto al caso en que se desea seguir la trayectoria original.

7.4. El algoritmo de control implementado

Resumimos en esta sección la totalidad del algoritmo de control automático implementado. El diagrama de flujo correspondiente se muestra en la figura 7.1.

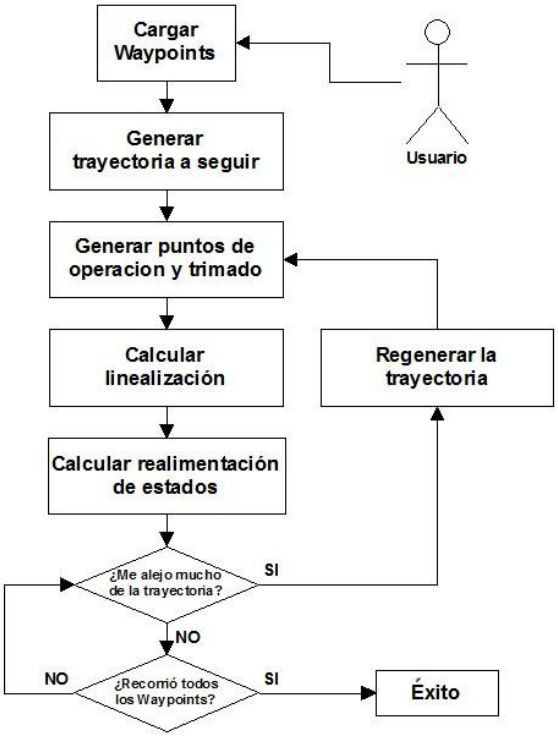


Figura 7.1: Diagrama de flujo del algoritmo de control automático.

Las entradas del usuario al algoritmo de control son simplemente las coordenadas espaciales del conjunto de *waypoints* ordenados a seguir. De querer modificar el funcionamiento del algoritmo, el usuario podría además introducir los parámetros que determinan el funcionamiento de los distintos bloques que constituyen el programa. Algunos de éstos son los pesos de la función costo para el generador de trayectorias, las matrices Q y R que determinan el costo en el problema del regulador cuadrático, o el umbral de salida para la regeneración de trayectorias (algunos de estos parámetros son efectivamente modificables según las opciones del *software* integrado diseñado, el cual se explica en el capítulo 10). En lo que respecta a la descripción del

funcionamiento del algoritmo suponemos que estos parámetros ya están debidamente especificados.

El primer paso del programa consiste en hallar la trayectoria a seguir que recorre todos estos *waypoints*. Para ésto, se utiliza el algoritmo de generación de trayectorias explicado en el capítulo correspondiente. Este algoritmo halla una trayectoria como una concatenación alternada de segmentos de recta y arcos de circunferencia contenidos en un plano horizontal, es decir una sucesión ordenada de trayectorias estacionarias. Los segmentos de recta se recorren a velocidad constante. Éstos se especifican por el vector velocidad con la que se recorren expresado en el SI y el tiempo en que se inicia su recorrido, tomando como origen para el tiempo el instante inicial en que se comienza a recorrer la trayectoria total. Los arcos de circunferencia se recorren a velocidad angular constante, siendo el vector velocidad angular vertical del punto de vista del SI (dado que los círculos se realizan en un plano horizontal), por lo que la velocidad angular queda especificada por un sólo número. Además, para que quede completamente determinada esta trayectoria es necesario especificar el vector velocidad expresado en el SI en el momento que se empieza a recorrer el círculo así como el tiempo en que se inicia este recorrido. Asignándole a los segmentos de recta un valor de velocidad angular nula, la salidas de la parte correspondiente a la generación de trayectorias para N *waypoints* son tres matrices T de $N \times 1$ elementos, V de $N \times 3$ elementos, y W de $N \times 1$ elementos de la forma que se muestra en la siguiente ecuación, la ecuación 7.14.

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ ... \\ T_i \\ ... \\ T_N \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_{1xI} & V_{1yI} & V_{1zI} \\ V_{2xI} & V_{2yI} & V_{2zI} \\ V_{3xI} & V_{3yI} & V_{3zI} \\ ... & ... & ... \\ V_{ixI} & V_{iyI} & V_{izI} \\ ... & ... & ... \\ V_{NxI} & V_{NyI} & V_{NzI} \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} w_{1zI} \\ w_{2zI} \\ w_{3zI} \\ ... \\ w_{izI} \\ ... \\ w_{NzI} \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

Donde T_i es el tiempo de comienzo de la i-ésima trayectoria estacionaria, $(V_{ixI}, V_{iyI}, V_{izI})$ las componentes en el SI de la velocidad (velocidad inicial en el caso del círculo) de la i-esima trayectoria y w_{izI} la velocidad angular de la i-esima trayectoria (que será cero en el caso de las rectas). Estos datos se ingresan al algoritmo de trimado.

El proceso de trimado consiste en, dada una trayectoria estacionaria especificada en los términos detallados precedentemente, hallar los valores de las variables de estados y los valores constantes de las entradas (punto de operación) para los cuales ésta es posible. El programa de trimado recibe como entradas las salidas del generador de trayectorias y para cada trayectoria estacionaria un valor deseado del vector de estados x_d y un punto de operación de las entradas u_d como se muestra esquemáticamente en la figura 7.2.

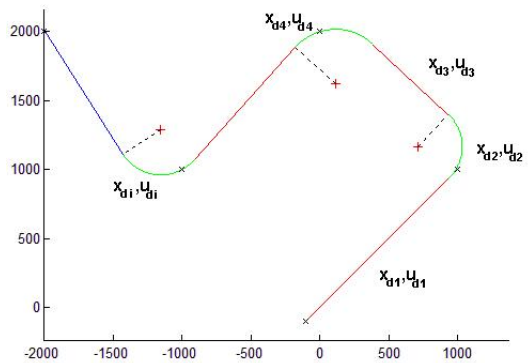


Figura 7.2: Esquema de la concatenación de puntos de operación.

Donde x_{di} e u_{di} representan el valor estacionario de las variables de estado y el punto de operación correspondientes a la i-ésima trayectoria estacionaria respectivamente. La salida de este bloque del programa es una sucesión de estos valores. Se debe notar que los primeros tres elementos del vector de estados deseado, correspondientes a la posición del sistema en el SI no van a ser constantes, así como tampoco lo será el sexto

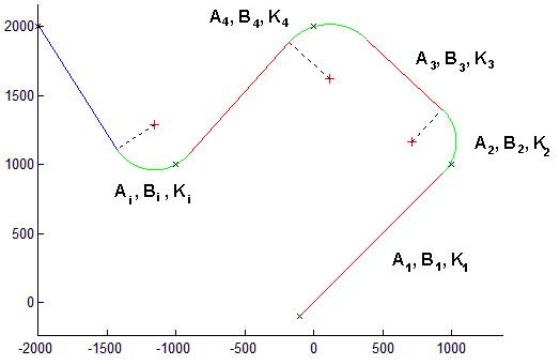


Figura 7.3: Esquema de la concatenación de modelos lineales y matrices de realimentación de estados.

elemento, correspondiente a la variable ψ, en el caso de los círculos. El objetivo del lazo de realimentación de estados del sistema de control consiste en estabilizar al sistema alrededor del valor de x_d correspondiente a la trayectoria estacionaria que se desea seguir en ese instante.

El próximo paso del algoritmo de control consiste en el cálculo de la linealización del sistema alrededor de la trayectoria que se desea seguir. Esto es necesario dado que el cálculo de la realimentación de estados requiere de la aproximación lineal de la dinámica del sistema. Dado que este modelo lineal depende de la trayectoria estacionara alrededor de la cual se realiza la aproximación lineal, existirá un modelo lineal distinto para cada una de las trayectorias estacionarias que componen la trayectoria total a seguir. La entrada al bloque de linealización es la salida del algoritmo de trimado, la sucesión de valores estacionarios de los estados y de puntos de operación. A partir de esto la rutina de linealización calcula las matrices A y B, correspondientes al modelo lineal de la forma $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$, para cada trayectoria estacionaria.

De tratarse de una trayectoria para N *waypoints*, la salida del bloque de linealización consiste en $2N - 3$ matrices A y B correspondientes a las $2N - 3$ trayectorias estacionarias que conforman la trayectoria total a seguir. Se debe notar que la linealización alrededor de cada punto de operación se calcula en base a una fórmula analítica para las derivadas pertinentes y no mediante una aproximación numérica de las derivadas pertinentes. Se debe notar que esto trae una mayor posibilidad de portabilidad del algoritmo de control al microprocesador del controlador un avión real en el futuro. Esta sucesión de matrices es la entrada a la rutina del algoritmo de control de estados que genera la realimentación de estados que es utilizada por el lazo de control lineal.

Este lazo de control utiliza una estrategia conocida como *Gain Scheduling*. Para una trayectoria estacionaria, se puede aproximar la dinámica de los desplazamientos del vector de estados alrededor del valor correspondiente a esta trayectoria como un sistema lineal de la forma $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$, siendo $\tilde{u}$ el desplazamiento de las entradas alrededor de su punto de operación correspondiente. Se puede ver que lograr un seguimiento exacto de la trayectoria estacionaria deseada corresponde a llevar el sistema lineal de la dinámica de los desplazamientos al origen. Además, si se implementa un controlador que estabilice el origen del sistema lineal, este controlador también estabilizará el seguimiento de la trayectoria estacionaria considerada. Se debe notar de que este resultado será válido siempre y cuando los apartamientos de la trayectoria deseada sean lo suficientemente pequeños como para que la aproximación lineal sea lo suficientemente representativa de la dinámica del sistema completo. Una forma de implementar un controlador que logre este objetivo es mediante una realimentación estática de estados $\tilde{u} = -K\tilde{x}$, siendo K una matriz de 4×12 elementos conocida como matriz de realimentación de estados. Se debe elegir entonces una matriz K de manera tal de que el sistema lineal realimentado sea estable alrededor del origen, es decir que los valores propios de la matriz $A - BK$ tengan parte real negativa. El algoritmo implementado elige esta matriz resolviendo el problema del regulador cuadrático lineal, como se explicó anteriormente en este capítulo. Esto se realiza utilizando la rutina *lqr.m* de *Matlab*, que halla la matriz de realimentación de estados que resuelve el problema LQR, a partir de las matrices de linealización A y B, y de las matrices Q y R de la función de costo J, que determinan dicho problema. El mecanismo de control lineal implementado se esquematiza en la figura 7.4.

Dado que la trayectoria total a seguir es una concatenación de trayectorias estacionarias, existirá para

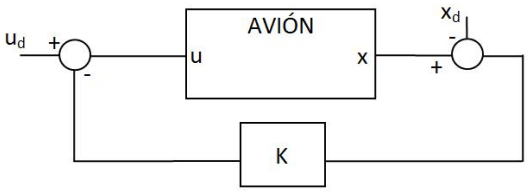


Figura 7.4: Diagrama de bloques del controlador lineal.

cada una de éstas un modelo lineal distinto y por lo tanto una realimentación estabilizante distinta. El algoritmo de control calcula a partir de las $2N-3$ matrices A y B, $2N-3$ matrices de realimentación K, cada una correspondiente a una de las trayectorias estacionarias que componen la trayectoria total. Esta situación se esquematiza en la figura . Durante el vuelo, el controlador va cambiando el valor del punto de operación y la matriz de realimentación según la trayectoria estacionaria que se esté recorriendo. Este cambio se hace por tiempo transcurrido, es decir, a cada trayectoria estacionaria se le asigna un intervalo temporal en el cual deberá suceder. Cumplido este intervalo, el controlador considera que ya no es razonable intentar controlar el sistema alrededor de dicha trayectoria sino que es necesario hacerlo para la siguiente que compone el recorrido total. En ese instante cambia el valor del punto de operación en la entrada y la matriz de realimentación de estados a los siguientes en la sucesión. Se debe notar que la concatenación de trayectorias recta-círculo hace que la condición final de vuelo de una trayectoria sea la condición inicial de la siguiente, condición inicial que en general no coincidirá con el valor estacionario asociado a esa nueva trayectoria. De esta forma se introduce una perturbación al sistema que amerita la inclusión de un mecanismo de control, aún bajo la suposición de la ausencia de perturbaciones externas.

Todos los cálculos detallados hasta aquí son realizados por el algoritmo antes de comenzar el vuelo. Una vez iniciado el vuelo, el controlador va intercambiando los valores del punto de operación en las entradas y de la matriz de realimentación de estados según la sucesión correspondiente a cada intervalo temporal asociado a cada trayectoria estacionaria.

Como se expresó anteriormente, dado que el controlador por realimentación de estados se realiza a partir de la linealización del sistema, sólo se puede asegurar que este sea estabilizante cuando las perturbaciones sean lo suficientemente pequeñas. Por otro lado, puede suceder que la realimentación de estados requiera de acciones de control por arriba del límite físico permisible en las entradas al sistema. Es decir, las entradas en efecto saturan en determinado valor correspondiente a ciertos límites que no pueden ser superados, por ejemplo el máximo ángulo de deflexión de las superficies de vuelo. Esta no-linealidad puede tener como consecuencia que no se logre estabilizar al sistema alrededor de la trayectoria deseada utilizando únicamente el lazo de control lineal. es por estos motivos que se implementa un segundo lazo de control que consiste en regenerar la trayectoria a seguir cuando el avión se aleja demasiado de la trayectoria deseada. Durante el vuelo, el algoritmo de control verifica cuanto se aleja el centro de masa del avión de su valor deseado. Si esta distancia supera un determinado valor umbral el algoritmo decide no continuar intentando seguir la trayectoria original y generar una nueva trayectoria a seguir. Esta nueva trayectoria se obtiene a partir del generador de trayectorias teniendo en cuenta las condiciones de vuelo en el instante de regenerar y los restantes *waypoints* por recorrer. Dado que se tienen en cuenta de manera apropiada las condiciones actuales de vuelo, la trayectoria regenerada será más fácil de seguir que la original. De aquí en adelante se repiten los pasos de trimado, linealización y cálculo de matrices de realimentación para la trayectoria regenerada, tal y como se muestra en el diagrama de flujo de la figura 7.1. Este procedimiento se itera hasta que se logran recorrer todos los *waypoints* en el orden correcto.

7.5. Otras posibilidades de control

En otro trabajo realizado por fuera de este proyecto [Alo09], se estudió para un modelo de avión bastante similar al aquí considerado, la aplicación de distintas técnicas de control automático. Nos parece

pertinente mencionar algunos de los resultados obtenidos es dicho trabajo a modo de justificar la utilización de las técnicas de control que fueron implementadas en este proyecto con respecto a otras de mayor complejidad.

En el trabajo al que nos referimos se estudió el mismo modelo de avión que presentamos restringiendo su vuelo a que suceda de manera simétrica sujeto a un plano vertical, obteniendo así el modelo de tres grados de libertad mencionado en el capítulo de modelado. Sobre este modelo se realizaron pruebas y comparaciones de tres estrategias distintas de control; realimentación estática de estados en base al modelo lineal, control mediante modelo de predicción (MPC) y linealización exacta. Todas estas estrategias fueron a su vez incorporadas dentro de un esquema *gain scheduling* con el propósito de realizar el control de una sucesión de trayectorias estacionarias.

En lo que respecta al control MPC, se observó que el resultado obtenido para el sistema de tres grados de libertad fue inferior al del controlador lineal, si nos limitamos a considerar el seguimiento estable de trayectorias. Sin embargo, la ventaja que presentó dicho método fue que en ninguna de las pruebas realizadas las entradas de control al sistema superaron ciertos valores predeterminados. Esto hace atractiva su aplicación debido a que el controlador realizado en estos términos tiene en cuenta de manera estricta las restricciones físicas pertinentes en las entradas de control al sistema.

El controlador obtenido mediante linealización exacta presentó un rendimiento levemente mejor al del controlador lineal en lo que respecta al seguimiento de trayectorias. Sin embargo, esto se dio a expensas de la aplicación en las entradas de control al sistema, durante la simulación, de señales cuyo valor superó por varios órdenes de magnitud los límites permitidos por el sistema físico real. Por otro lado, para que sea posible aplicar esta técnica a cualquiera de los dos modelos considerados, es necesario realizar una aproximación cuya hipótesis de validez deja de cumplirse bajo semejantes señales en las entradas. Es por estos motivos que consideramos el desempeño de esta estrategia de control sumamente in-satisfactorio en comparación con el obtenido por el lazo de control lineal.

Es de suponer que, dada la similitud de los modelos utilizados en ambos trabajos, el desempeño de cada uno de los controladores no cambiará sustancialmente al ser portados del modelo con tres grados de libertad al modelo completo. Sin embargo, éste último es sustancialmente más complejo que el primero, por lo que sí será significativamente más trabajosa la aplicación a este modelo de los métodos MPC y de linealización exacta.

En lo que respecta a MPC, vemos que la complejidad de portarlo al modelo completo es moderada. Sin embargo no se observó que presentara considerables ventajas con respecto al controlador lineal. Aún así consideramos que podría ser de interés hacer pruebas de este mecanismo de control con este modelo debido a que permite imponer de manera explícita las restricciones físicas en las entradas al sistema.

Considerando la metodología de control mediante linealización exacta, concluimos que la magnitud de las cuentas involucradas para su aplicación a nuestro modelo hace que su implementación sea casi imposible del punto de vista práctico. Por otro lado, este mecanismo de control implementado sin la ayuda de un lazo de control MPC lleva a entradas de control al sistema varios órdenes de magnitud por arriba de las permitidas físicamente lo que hace que pierda sentido su implementación en la realidad. La aplicación de un lazo de control MPC combinado con la linealización exacta lleva a un problema de minimización con restricciones no lineales en los estados, problema sumamente complejo de resolver, más aún teniendo en cuenta el MVE involucrado.

Capítulo 8
Pruebas del Controlador

En este capítulo presentamos algunas pruebas hechas sobre el algoritmo de control en base al modelo de realizado para las simulaciones. La simulación numérica se realiza mediante el modelo en *Simulink* implementado del sistema físico con el controlador. El resolvedor numérico utilizado para todas las pruebas fue el *ode45.m* proporcionado por *Matlab*. Se observó utilizando otros de los resolvedores provistos por *Matlab* que la simulación numérica no cambiaba sustancialmente al utilizar uno u otro.

8.1. Modelo utilizado para las simulaciones

Empezamos este capítulo definiendo exactamente sobre qué modelos realizamos las pruebas del algoritmo de control. El análisis realizado sobre el cual se construye la idea de descomponer las trayectorias en una concatenación de trayectorias estacionarias se hizo en base a un MVE que no considera un conjunto de efectos que bien pueden afectar al sistema físico real. La validez de algunos de los resultados obtenidos, así como los cálculos realizados por las rutinas de trimado y linealización (sobre las cuales se basa el resto del algoritmo de control), está supeditada a que estos efectos sean despreciables. El sistema de control se realizó con la idea de que estos efectos sean considerados como perturbaciones al sistema, frente a las cuales el controlador debe ser lo suficientemente robusto como para lograr que no afecten sensiblemente el seguimiento de la trayectoria deseada. Esquematizamos algunos de estos efectos a continuación a modo de resumen. Una descripción más a fondo de los mismos se encuentra en el capítulo de modelado de este documento.

▷ **1. Cambio de la densidad con la altura.**

Se considera la densidad el aire dependiente con la altura. La fórmula a partir de la cual se calcula esta dependencia se explica en el capítulo de modelado de este documento.

▷ **2. Sistema de referencia fijo en tierra como no inercial.**

Se considera que el sistema de referencia fijo en tierra no es un sistema inercial debido a la rotación del planeta. A causa de esto se agrega un término correspondiente a fuerzas ficticias en el planteo de la primera cardinal.

▷ **3. Saturación en las entradas.**

Se consideran los límites físicos en las entradas al sistema. Los ángulos de deflexión en la superficie de vuelo tienen un valor máximo, el cual se toma para este modelo en $0{,}9rad$. La velocidad del eje de giro se considera que puede variar entre $200rpm$ y $5000rpm$. Se introducen bloques de saturación en el MDL de manera acorde con estos valores.

▷ **4. Corrección sobre las fuerzas aerodinámicas debido a la velocidad angular del avión.**

Debido a que el avión rota con respecto al sistema de referencia en el cual se expresa la velocidad del viento, es necesario introducir una corrección en la expresión de las fuerzas aerodinámicas que no se considera en el modelo sobre el cual se realizan los cálculos de trimado y linealización.

▷ **5. Efecto de velocidad del viento no nula con respecto al sistema fijo en tierra.**

Al realizar el trimado para trayectorias circulares, se considera que la velocidad del viento es nula con respecto a la tierra. Se introduce un valor no nulo en el modelo de simulación para analizar el efecto de este fenómeno sobre el comportamiento del sistema.

Cabe destacar que siempre es posible, hilando un poco más fino, llegar a un modelo mas realista en lo que respecta a la representación de consideraciones físicas sobre el comportamiento del sistema. Se ha despreciado, por ejemplo, la variación de la masa total del avión debido al cambio en la cantidad de combustible durante el vuelo. Referimos al lector al capítulo de modelado para una breve discusión sobre esta aproximación. De todos modos, consideramos que el modelo de prueba utilizado es lo suficientemente representativo del sistema real.

En las consideraciones recién expuestas, sin embargo, se toma a la velocidad del viento como constante. Nos parece pertinente modelar de alguna manera un comportamiento de la atmósfera variable en el tiempo. Es por este motivo que introducimos, además de todas estas perturbaciones determinísticas, una perturbación estocástica al sistema. Introducimos entonces un ruido de banda acotada el cual sumamos al valor constante en la velocidad del viento. Esto resulta en un comportamiento un tanto más realista de las fuerzas a las cuales puede estar sujeto un avión en vuelo.

A partir de todo esto introducimos dos tipos de pruebas a realizar. Las denominadas pruebas sin ruido son aquellas en que se utiliza como modelo para las simulaciones aquel que incluye todas las perturbaciones determinísticas hasta aquí expuestas. Las denominadas pruebas con ruido son aquellas en las que se le aplica además una señal ruidosa al sistema completo de la forma recién descripta.

Finalmente, notamos que existe otra fuente de perturbaciones para la cual es de interés probar la robustez del controlador; la variación en las condiciones iniciales para una trayectoria estacionaria. El avión solamente podrá seguir de manera exacta una determinada trayectoria estacionaria sin la ayuda de un lazo de un lazo de realimentación (es decir, sólo imponiendo el punto de operación en las entradas), si las condiciones iniciales de vuelo coinciden con los valores correspondientes a la condición inicial de la trayectoria estacionaria. Además, al concatenar distintas trayectorias estacionarias el estado final de una no coincidirá con la condición inicial de la siguiente, introduciendo una perturbación. Por lo tanto, es inherente al procedimiento de concatenación de trayectorias la introducción de una perturbación al cambiar de un estado estacionario al siguiente. Es necesario verificar entonces mediante simulaciones que el controlador logra estabilizar el vuelo en presencia de dichas perturbaciones.

8.2. Pruebas del controlador lineal

Empezamos probando únicamente el controlador lineal alrededor de trayectorias estacionarias únicas. No activamos para estos casos la regeneración de trayectorias. Dejamos además para la siguiente sección el estudio de los efectos de la concatenación de trayectorias. Estudiamos el efecto de distintas perturbaciones sobre el sistema controlado por el lazo de control lineal para cuatro trayectorias particulares cuyo comportamiento nos parece puede ser representativo de una gama más amplia de situaciones.

8.2.1. Vuelo a velocidad constante horizontal

La primera trayectoria a analizar consiste en el vuelo horizontal a velocidad constante de $45m/s$. El vector de estados de la trayectoria a seguir, en el instante inicial, es de la siguiente manera:

$$\vec{x_0} = (0m, 0m, 0m, 0{,}0041rad, 0{,}125rad, 0rad, 44{,}65m/s, 0{,}0232m/s, 5{,}607m/s, 0rad/s, 0rad/s, 0rad/s)$$

Donde para la trayectoria a seguir, que consiste en una línea recta a velocidad constante, todos los valores del vector de estados se mantienen constantes en el tiempo salvo la posición en el sistema inercial.

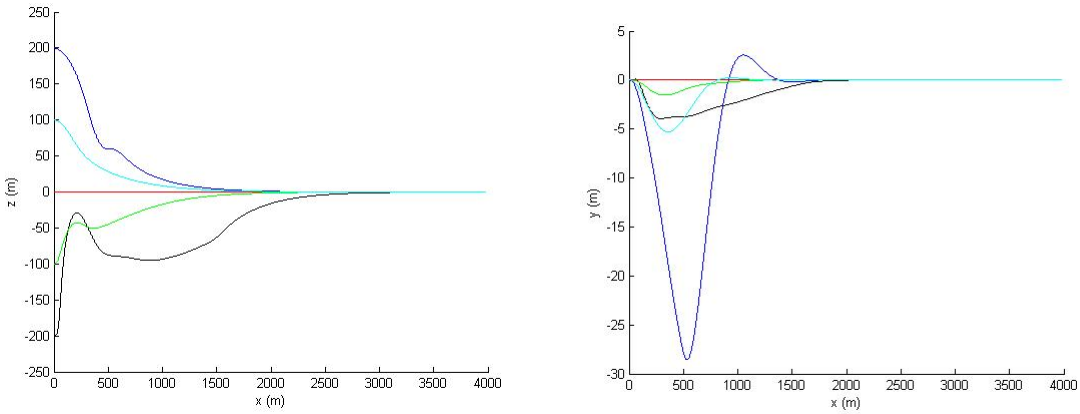
Presentamos los resultados correspondientes a tres tipos de pruebas; perturbando las condiciones iniciales del sistema, agregando una componente constante de viento en el SI y, finalmente, agregándole ruido al sistema. Las primeras dos pruebas se realizan sin ruido sobre el modelo completo del sistema (considerando las perturbaciones expuestas en la precedente sección).

▷ **1. Pruebas con perturbaciones en las condiciones iniciales - Modelo sin ruido.**

Presentamos aquí los resultados obtenidos de analizar mediante simulaciones el comportamiento del sistema controlado al introducir perturbaciones en las condiciones iniciales del sistema con respecto a las correspondientes a la trayectoria deseada.

Es relevante, sin embargo, simular el comportamiento del sistema cuando no se impone ninguna perturbación en las condiciones iniciales. Se debe notar que el trimado es calculado sobre un modelo que no incluye ninguno de los efectos mencionados en la primera sección de este capítulo, por lo que no es esperable que, bajo la influencia de estas perturbaciones, el avión logre seguir de manera exacta la trayectoria deseada bajo la ausencia de error en las condiciones iniciales. Sí se observó que el avión seguía exactamente la trayectoria deseada en ausencia de error en las condiciones iniciales al realizar pruebas sobre el modelo tal cual se usó para calcular el trimado. Este resultado es esperable y sólo sirve como validación del mecanismo de trimado realizado. No nos parece relevante presentar aquí gráficos de dicha situación dado que es menos representativa de la realidad física del sistema que el modelo aquí utilizado. Simulando el comportamiento del sistema entonces sin ningún error en las condiciones iniciales se verificó efectivamente que el sistema de control logra estabilizar las perturbaciones introducidas por los efectos no considerados al realizar el trimado.

Comenzamos realizando pruebas imponiendo un error únicamente en la posición inicial del avión en z. Los resultados obtenidos para algunos de los casos simulados se muestran en la figura 8.1, donde se puede apreciar la respuesta del sistema controlado a distintos errores en la condición inicial.



(a) Trayectorias del centro de masa en el plano xz (b) Trayectorias del centro de masa en el plano xy

Figura 8.1: Respuestas del sistema para distintas perturbaciones en las condiciones iniciales en z. La trayectoria roja es la que se desea seguir.

Como se puede apreciar en dicha figura, para un margen de errores en la condición inicial en z comprendido aproximadamente entre $(-150m, 150m)$, se pudo verificar mediante simulaciones que el controlador logra estabilizar el vuelo alrededor de la trayectoria deseada, logrando eventualmente un buen seguimiento de la misma. El comportamiento asimétrico observado en la proyección de la trayectoria en el plano xy suponemos se debe a la condición inicial en los ángulos de *Euler* que a su vez es consecuencia de la asimetría en las fuerzas aerodinámicas, asimetría que también puede ser causa de este fenómeno. Se puede apreciar también que el tiempo para el cual el sistema logra inmunizarse de la perturbación inicial depende de la magnitud de la misma, como era esperable. La convergencia a la trayectoria deseada es más rápida en los casos en que el error en la condición inicial es menor. En la tabla 8.1, presentamos los tiempos que demora el sistema en reducir a un décimo la perturbación en el módulo de la diferencia de la trayectoria real del centro de masa con respecto a la deseada.

$\tilde{z}(t=0)$	$t_{10\%}$
200 m	23 s
100 m	22 s
-100 m	28.5 s
-200 m	44 s

Cuadro 8.1: Tiempo a partir de los cual el módulo de la diferencia entre la posición del centro de masa real y su valor deseado se reduce a la décima parte de su valor en el instante inicial. Se muestran los resultados para distintos errores en la condición inicial en z

Es relevante también, para estos casos en que se logra estabilizar el vuelo frente a errores en las condiciones iniciales y lograr seguir la trayectoria deseada en términos de la posición del centro de masa, estudiar cómo es la evolución temporal de las restantes variables de estado que describen el comportamiento del sistema. En las figuras 8.2, 8.3 y 8.4 presentamos la evolución temporal de las restantes variables de estado para una perturbación en el instante inicial de $-150m$ en z.

En dichas figuras observamos que, a pesar de que la perturbación se introdujo en la variable z, todas las variables se apartan de sus valores de equilibrio, debido al acoplamiento que existe entre las mismas. Aún así, se puede apreciar que para este caso el controlador logra hacer que todas las variables converjan a sus valores deseados, efectivamente logrando estabilizar el vuelo alrededor de la trayectoria que se desea seguir.

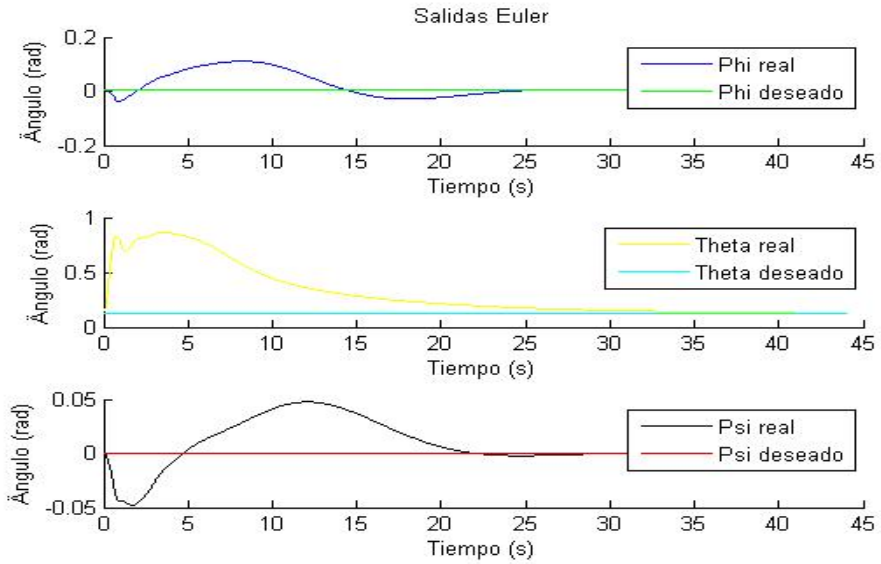


Figura 8.2: Evolución temporal de los ángulos de *Euler* a partir de una perturbación en la condición inicial en z de $150m$ con respecto a su valor valor deseado.

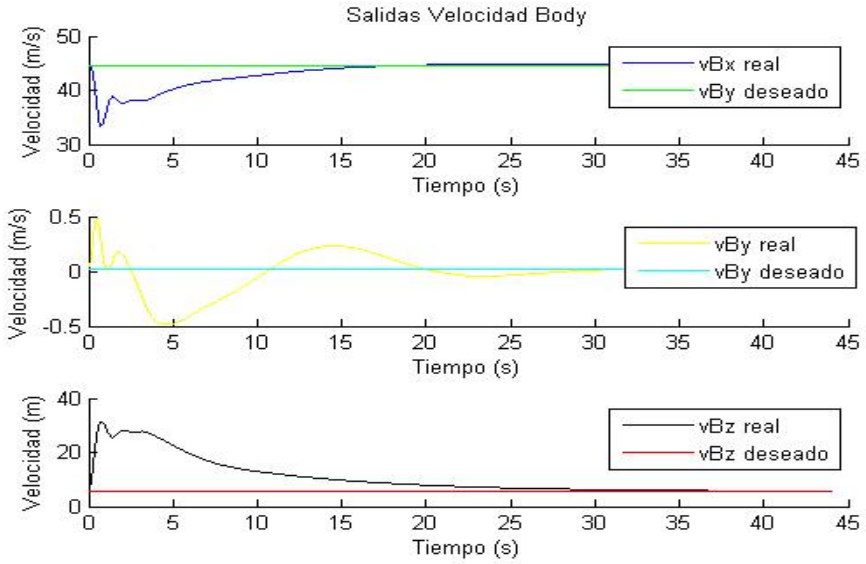


Figura 8.3: Evolución temporal de la velocidad en el SB a partir de una perturbación en la condición inicial en z de $150m$ con respecto a su valor valor deseado.

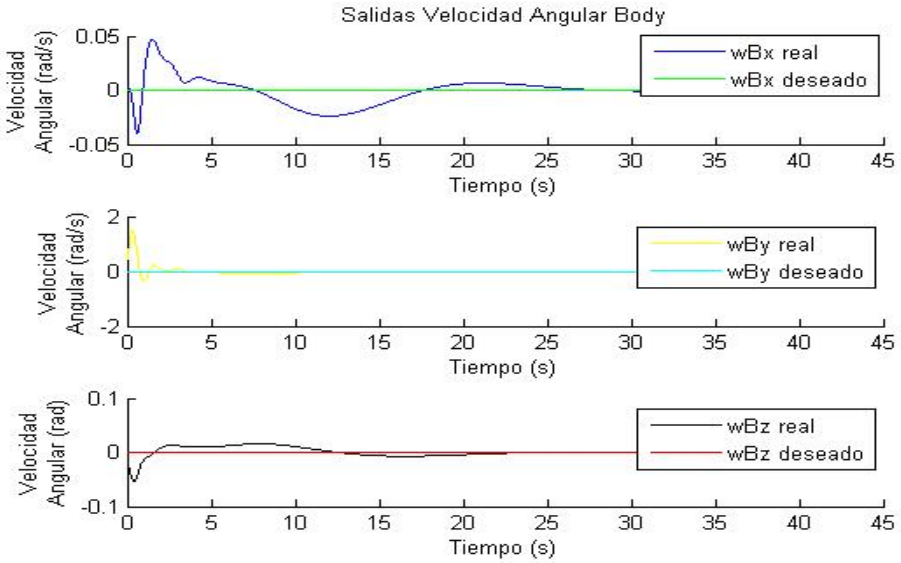


Figura 8.4: Evolución temporal de la velocidad angular a partir de una perturbación en la condición inicial en z de $150m$ con respecto a su valor valor deseado.

Se observó que a partir de valores de errores alrededor de $-210m$ en la condición inicial en z (dejando todo lo demás sin error) el controlador lineal no logra estabilizar al sistema, apreciándose un comportamiento divergente. Para un error de $-215m$ se observa un comportamiento al borde de lo que podría considerarse estable pero que difícilmente podría considerarse representativo de la realidad física del sistema. Para errores en z positivos el límite de la estabilidad también se encuentra alrededor de los errores de $280m$. No presentamos gráficos de estas trayectorias debido a que al ser divergentes no podemos asegurar que su comportamiento sea físicamente representativo de lo que sucedería en la realidad. El intervalo de valores para el error en z para los cuales el controlador estabiliza el sistema quedaría entonces en $(-210m, 280m)$. Se debe notar que este resultado es válido bajo la ausencia de error en las condiciones iniciales en el resto de las variables de estado.

Hasta aquí se consideró únicamente el comportamiento del sistema bajo la acción del controlador lineal al introducir errores en las condiciones iniciales en la variable z. Mediante simulaciones se observó

que el comportamiento al introducir una diferencia en el valor inicial de las restantes variables de estado con respecto al correspondiente a la trayectoria a seguir es análogo al descrito anteriormente para el caso particular de la variable z. Es decir, para ciertos intervalos de error se observó que el controlador logró estabilizar al sistema, y, al igual que en el caso anterior, se pudo apreciar que el tiempo de convergencia para cada caso depende de la magnitud de la perturbación introducida. Los intervalos de estabilidad relevados al perturbar en el instante inicial cada variable por separado se presentan en la tabla 8.2.

Variable de estado	Valor máximo	Valor mínimo
x	$-399m$	$198m$
y	$-457m$	$439m$
z	$-210m$	$280m$
ϕ	$-4{,}8rad$	$4{,}7rad$
θ	$-1{,}65rad$	$1{,}4rad$
ψ	$-1{,}45rad$	$1{,}45rad$
v_{Bx}	$-81m/s$	$125m/s$
v_{By}	$-69m/s$	$69m/s$
v_{Bz}	$-122m/s$	$153m/s$
w_{Bx}	$-35rad/s$	$35rad/s$
w_{By}	$-10rad/s$	$17rad/s$
w_{Bz}	$-5rad/s$	$19rad/s$

Cuadro 8.2: Intervalos en los que se perturban las variables de estado en el instante inicial (por separado) y el controlador logra convergencia a la trayectoria deseada.

Observando los valores de la tabla, se puede apreciar que el intervalo de estabilidad en muchos casos se extiende a valores de las magnitudes involucradas para los cuales no se puede asegurar que el modelo sea representativo del comportamiento real del sistema. Es de suponer que existen otros factores involucrados en la realidad que no permitan controlar el sistema a partir de por ejemplo, una perturbación de $4{,}7$ radianes en ϕ en el instante inicial, lo que si parecería ser posible en base a las simulaciones realizadas. Por otro lado, se observó que los límites de los intervalos de estabilidad dependen fuertemente de los valores en que se fije la saturación en las entradas. Para perturbaciones grandes, las entradas de control necesarias para estabilizar al sistema serán muy grandes en el instante inicial, saturando en alguno de los dos extremos. Esto se puede apreciar en la figura 8.5, dónde se grafica la velocidad del eje de giro en función del tiempo para una perturbación en las condiciones iniciales de $-350m$ en x. Es por este motivo que los límites del intervalo de estabilidad dependen de los valores en que se fije la saturación en las entradas, lo cual se observó simulando para distintos casos. Los valores presentados en la tabla corresponden a los obtenidos para los valores de saturación especificados anteriormente.

Se debe notar que a medida que las perturbaciones introducidas a las condiciones iniciales se acercan a los límites del intervalo de estabilidad, los tiempos de convergencia van creciendo, al punto que para observar la convergencia es necesario, en algunos casos, simular para tiempos muy largos. Este resultado pone en duda la eficacia del controlador para errores en las condiciones iniciales de tal magnitud al implementarse una estrategia *Gain Scheduling*, en la que idealmente se debería lograr la convergencia antes de pasar al siguiente punto de operación.

Por último, hacemos notar que la situación más realista es aquella en que todas las variables de estado difieren, en el instante inicial, del valor correspondiente al de la trayectoria que se desea seguir. Se realizaron simulaciones de casos en que se perturbó al sistema en todas las variables de estado en el momento inicial observando que para ciertos valores suficientemente pequeños de dichas perturbaciones el sistema de control lineal logró estabilizar el vuelo. Sin embargo, realizar un relevamiento de la región de estabilidad del sistema controlado en términos de todas las variables de estado, es decir, verificando la estabilidad para situaciones en que se perturban todas las variables de estado en el instante inicial, requiere de un número considerable de simulaciones. Notamos que el espacio de errores en las condiciones iniciales en el cual se desea encontrar una

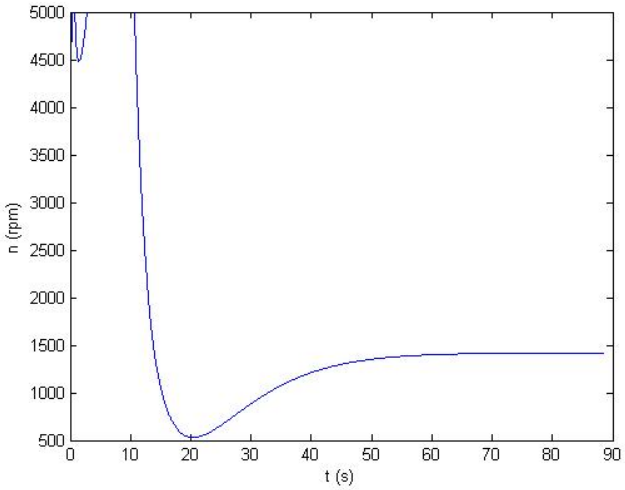


Figura 8.5: Velocidad del eje de giro (en rpm) en función del tiempo para una perturbación en las condiciones iniciales de $-350m$ en x. Notar la saturación en $5000rpm$ en los primeros instantes.

región de estabilidad, o mejor dicho, hallar una aproximación numérica de la misma, es de dimensión doce. Nos limitamos entonces a los resultados de intervalos de estabilidad para las variables por separado recién presentados, recalcando que se realizaron simulaciones en las que se verificó que el sistema de control lograba estabilizar el vuelo para casos en que se perturbaron todas las variables en el instante inicial.

▷ 2. Pruebas bajo la acción de una componente de viento constante - Modelo sin ruido.

En este apartado presentamos los resultados obtenidos de simular el comportamiento del sistema de control para la trayectoria especificada bajo la acción de viento de componentes constantes en el SI. Las pruebas se realizan tomando ahora error nulo en las condiciones iniciales.

El trimado del avión se puede realizar teniendo en cuenta una componente constante del viento. Es de interés entonces verificar hasta qué punto puede el trimado garantizar que el avión realice la trayectoria deseada a medida que se aumenta la magnitud del viento introducido. Por otro lado, una situación realista es aquella en la que el trimado se realiza desconociendo la existencia del viento (tomando la velocidad del aire nula a la hora de hacer los cálculos) pero existe una componente de viento que perturba al sistema. Es de interés entonces simular el comportamiento del sistema de control en los dos casos y comparar los resultados obtenidos.

La tabla 8.2.1 muestra los intervalos en el valor del viento introducido en cada componente en el SI para los cuales el sistema converge a la trayectoria deseada. Estos resultados corresponden al caso en que se toma en cuenta el valor exacto de la velocidad del viento en los cálculos que realizan el trimado. Se debe notar que las pruebas para las cuales se obtuvieron estos resultados se realizaron agregando viento en cada una de las componentes del SI por separado. Es decir, al agregar una componente de viento en x, se impusieron las componentes de la velocidad del aire en y y z en cero. Se debe notar que si se introduce al sistema una componente de viento en x que se encuentra dentro del intervalo de estabilidad correspondiente al mismo tiempo que una componente en y que cumpla con lo mismo, no se puede asegurar la estabilidad del sistema. Sin embargo, se realizaron pruebas en las que se observó que el sistema convergía a la trayectoria deseada con viento con componentes no nulas en las tres direcciones. No pretendemos hacer un relevamiento más a fondo de la región de estabilidad en el espacio de parámetros de velocidad del viento dado que requeriría una cantidad importante de simulaciones y meramente nos limitamos en este análisis a los resultados que se muestran en la tabla.

Observamos que a medida que se agranda la perturbación introducida al sistema debido al viento, el error asintótico entre la trayectoria real y la deseada se vuelve significativo. En la figura 8.6 se puede apreciar

	Vv_{MIN}	Vv_{MAX}
Vv_{xI} (m/s)	-59	20
Vv_{yI} (m/s)	-17	27
Vv_{zI} (m/s)	-8	9

Cuadro 8.3: Intervalos de los valores que puede tomar cada una de las componentes de la velocidad del viento (por separado) para los cuales el sistema converge a la trayectoria deseada. Estos valores corresponden al caso en que se tiene en cuenta el valor de la velocidad del viento al calcular el trimado.

	Vv_{MIN}	Vv_{MAX}
Vv_{xI} (m/s)	-73	21
Vv_{yI} (m/s)	-22	22
Vv_{zI} (m/s)	-5	17

Cuadro 8.4: Intervalos de los valores que puede tomar cada una de las componentes de la velocidad del viento (por separado) para los cuales el sistema converge a la trayectoria deseada. Estos valores corresponden al caso en que no se tiene en cuenta el valor de la velocidad del viento al calcular el trimado.

se puede apreciar cómo la trayectoria en el espacio seguida por el centro de masa del avión es paralela a la deseada. Este resultado se obtuvo introduciendo un viento de velocidad $25m/s$ en la dirección y.

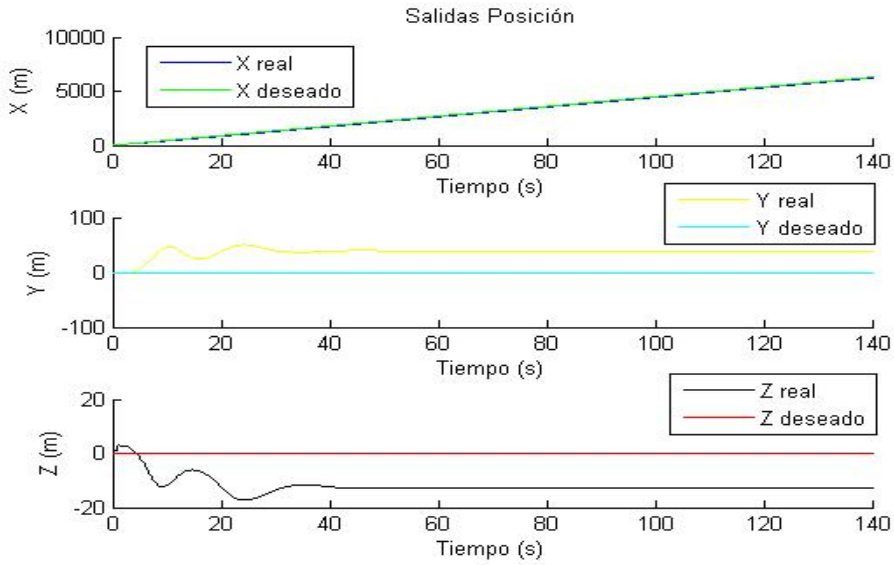


Figura 8.6: Posición del centro de masa en función del tiempo cuando se introduce viento de velocidad 25 m/s en y. Notar el error asintótico en y y z

Se debe notar que en muchos casos la inestabilidad se debió a que la rutina de trimado no logró converger a una solución del problema de trimado aceptable dentro de la tolerancia. Esto puede deberse a que para valores muy grandes de las perturbaciones, el problema de trimado no tenga solución.

Estudiamos ahora el caso en el que el trimado se calcula considerando velocidad del viento nula y el vuelo se simula bajo la acción de viento no nulo. En la tabla 8.2.1 se muestran los intervalos en el valor del viento introducido en cada componente en el SI para los cuales el sistema converge a la trayectoria deseada.

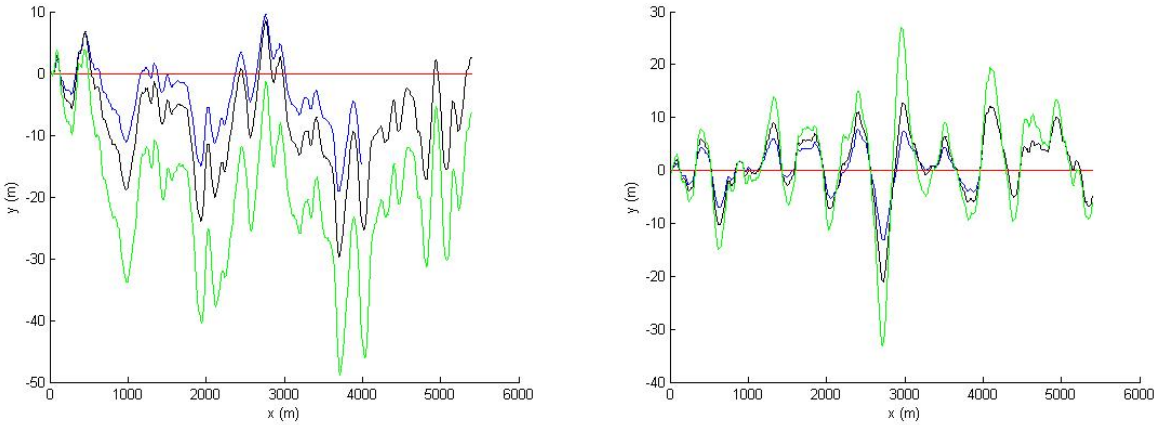
Observamos que en estos casos, a pesar de que no se tiene en cuenta la velocidad del viento a la hora de realizar el trimado, las acciones de control se acomodan alrededor de ciertos valores constantes logrando estabilizar el sistema alrededor de una trayectoria similar a la deseada, aunque con un error asintótico, en la posición del centro de masa, apreciable.

Es interesante notar que, en algunos casos, el intervalo de estabilidad es mayor cuando no se tiene en cuenta la velocidad del viento del trimado. Es decir, hay situaciones para las cuales el sistema de control logra estabilizar la trayectoria en el caso en que no se tiene en cuenta la velocidad del viento al realizar el trimado, pero no logra hacerlo cuando sí se tiene en cuenta. Se debe notar que esto sucede cuando la velocidad del viento es grande y la rutina de trimado no converge a una solución. En este caso no se puede asegurar como sea el punto de operación arrojado por la rutina de trimado, y por lo que puede resultar que no sea posible para el controlador estabilizar el sistema alrededor de la salida deseada en estas circunstancias. Es posible además que existan valores de viento para los cuales el problema de trimado no tiene solución, o que la solución está más allá de los límites impuestos por la saturación en las entradas. Por otro lado, el punto de operación obtenido al trimar la trayectoria sin viento puede ser similar al requerido para hacerlo bajo el viento considerado, posibilitando al sistema de control seguir la trayectoria deseada bajo esta perturbación.

▷ 3. Pruebas en el modelo con ruido.

Finalizamos esta sección presentando los resultados de simular el comportamiento del sistema bajo la influencia de una perturbación estocástica. Dicha perturbación aparece mediante la introducción de una señal ruidosa en la velocidad del viento, como se explicó en la primera sección de este capítulo. Para las pruebas realizadas se tomó nula la componente constante de la velocidad del viento. La señal ruidosa se introduce en las tres direcciones de la velocidad. Cada una de estas señales se obtiene de la misma forma, aunque no es la misma señal que se agrega en cada caso. Se toma una señal de ruido blanco y media nula y se la hace pasar por un filtro pasabajos de un polo en $1Hz$ y ganancia 1 en continua. Se simuló el comportamiento del sistema controlado para distintos casos, variando la potencia del ruido blanco que genera la señal.

En la figura 8.7 se muestra la respuesta del sistema para señales de ruido de distinta potencia cuando se toma el polo del filtro pasabajos en $1Hz$.



(a) Trayectorias del centro de masa en el plano xz (b) Trayectorias del centro de masa en el plano xy

Figura 8.7: Respuestas del sistema para distintas potencias en el ruido introducido a la entrada del filtro pasabajos cuando se coloca el polo de este en $1Hz$. La trayectoria roja es la que se desea seguir. Azul - ruido de potencia $5m^2/s^2$. Negro - ruido de potencia $10m^2/s^2$. Verde - ruido de potencia $20m^2/s^2$.

Observamos que el seguimiento de la trayectoria se realiza con menos error en los casos en que la potencia del ruido es más baja. Sin embargo, no se observa para ninguno de los casos expuestos una convergencia hacia el comportamiento deseado. Se verificó, además, para señales de ruido de alta potencia, un comportamiento divergente del sistema.

En las figuras se puede apreciar una cierta similitud o patrón en la respuesta del sistema ante las señales de distinta potencia. Esto se debe a la similitud existente en las señales ruidosas generadas por *Matlab* luego de pasar por el filtro, como se puede apreciar en la figura . En esta figura se muestra la evolución temporal

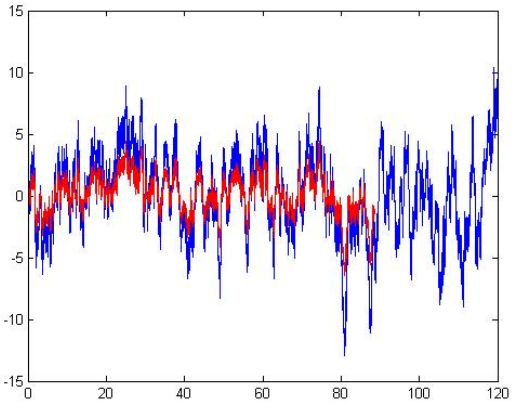
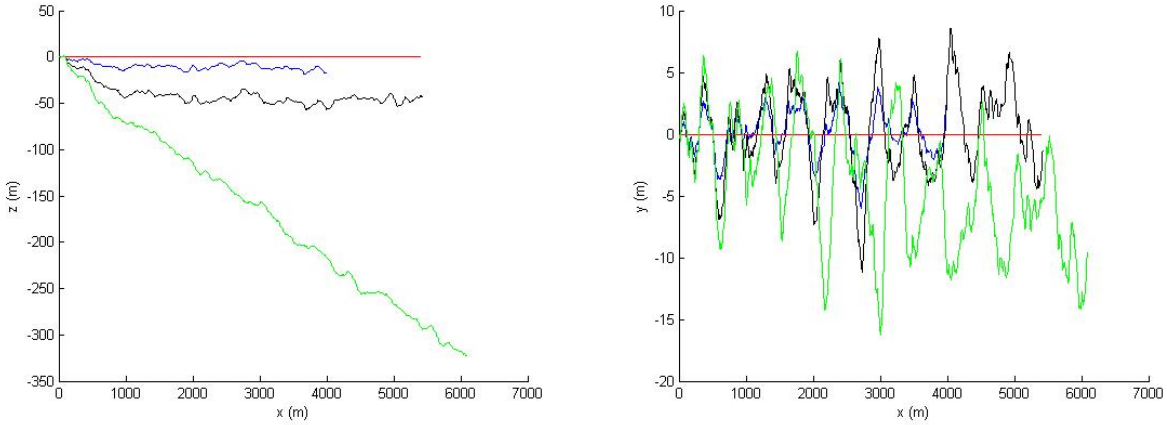


Figura 8.8: Evolución temporal de las señales ruidosas introducidas en la componente x de la velocidad en los casos que se utiliza ruido blanco de potencia $5m^2/s^2$ (rojo) y $20m^2/s^2$ (azul).

de la señal ruidosa introducida en la componente según x de la velocidad del viento para los casos en que se utiliza ruido blanco de potencia $5m^2/s^2$ (rojo) y $20m^2/s^2$ (azul).

En la figura 8.9 se muestra la respuesta del sistema para señales de ruido de distinta potencia cuando se toma el polo del filtro pasabajos en $5Hz$.



(a) Trayectorias del centro de masa en el plano xz

(b) Trayectorias del centro de masa en el plano xy

Figura 8.9: Respuestas del sistema para distintas potencias en el ruido introducido a la entrada del filtro pasabajos cuando se coloca el polo de este en $1Hz$. La trayectoria roja es la que se desea seguir. Azul - ruido de potencia $1m^2/s^2$. Negro - ruido de potencia $2m^2/s^2$. Verde - ruido de potencia $5m^2/s^2$.

Nuevamente observamos que el seguimiento de la trayectoria deseada es mejor cuanto más baja es la potencia del ruido. Se debe notar que un valor de potencia de $5m^2/s^2$ del ruido en este ejemplo no es lo mismo que un valor de $5m^2/s^2$ de potencia del ruido en el caso anterior. El valor de potencia refiere a la potencia del ruido blanco antes de pasar por el filtro, que no coincide con la potencia de la señal introducida al sistema. La potencia de la señal introducida al sistema será, a misma potencia de señal de ruido blanco, mayor para el caso en que el filtro tenga mayor ancho de banda. También en este caso se puede apreciar la ausencia de un comportamiento convergente a la trayectoria deseada debido a la presencia del ruido. Una vez más se observó que para señales de ruido de alta potencia el comportamiento del sistema es divergente.

Concluimos esta sección notando que se realizaron pruebas sobre el sistema bajo el efecto de los tres tipos de perturbaciones recién expuestas al mismo tiempo. El resultado de estas pruebas fue satisfactorio. Para perturbaciones suficientemente pequeñas en las magnitudes apropiadas, el controlador logró un buen seguimiento de la trayectoria deseada. Para perturbaciones grandes, sin embargo, se observó un

comportamiento divergente. Por lado, también es de interés estudiar trayectorias en que el vuelo rectilíneo a velocidad constante comprende situaciones de ascenso o de descenso. Realizando simulaciones se observó que los resultados obtenidos de realizar pruebas análogas a las descritas hasta ahora para trayectorias a velocidad constante en descenso o ascenso, son cualitativamente idénticos a los presentados para la trayectoria rectilínea horizontal considerada en la segunda sección de este capítulo.

8.2.2. Vuelo en trayectoria circular de radio máximo con velocidad angular constante

En esta sección estudiamos el comportamiento del sistema de control lineal al intentar controlar el vuelo alrededor de una trayectoria circular horizontal frente a distintas perturbaciones. La trayectoria circular considerada tiene radio $300m$ y se recorre a una velocidad de $45m/s$. Se simula la respuesta del sistema al imponer perturbaciones en las condiciones iniciales y bajo la introducción de componentes de viento tanto constantes como estocásticas. El vector de estados de la trayectoria a seguir, en el instante inicial, es de la siguiente manera:

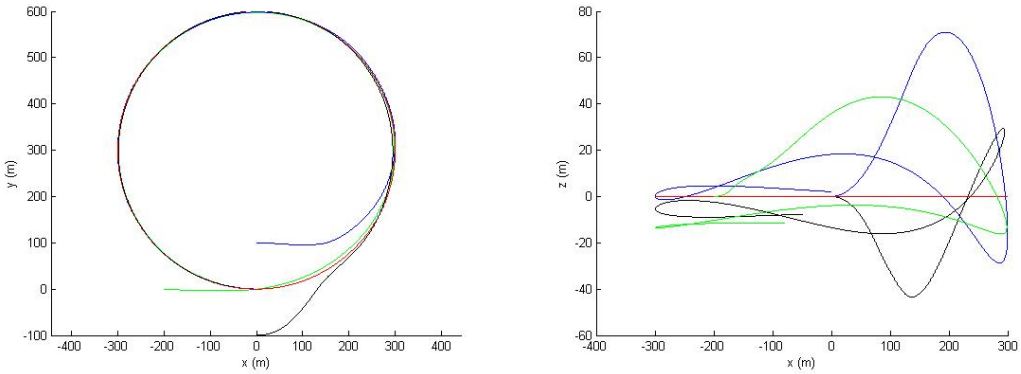
$$\begin{aligned}\vec{x_0} &= (0m, 0m, 0m, 0{,}719rad, 0{,}209rad, 0rad,\\ &\quad 44{,}03m/s, 6{,}13m/s, 7{,}01m/s, -0{,}031rad/s, 0{,}0967rad/s, 0{,}11rad/s)\end{aligned}$$

Todas las pruebas se realizan sobre el modelo completo del sistema, tal cual fue descrito en la primera sección de este capítulo.

▷ **1. Pruebas con perturbaciones en las condiciones iniciales - Modelo sin ruido.**

Presentamos en este apartado los resultados obtenidos de simular el comportamiento del sistema bajo el lazo de control lineal al perturbar el sistema imponiendo un error en las condiciones iniciales con respecto al valor correspondiente a la trayectoria que se desea seguir.

El primer resultado destacable dentro de esta serie de pruebas consiste en la verificación del seguimiento de la trayectoria deseada bajo la ausencia de perturbación en las condiciones iniciales. Dado que el modelo sobre el cual se realizan las simulaciones no coincide con el que se utiliza para realizar el trimado, es de importancia verificar este caso. Como se desarrolló en la primera sección de este capítulo, el modelo de prueba incluye consideraciones como la densidad variable del aire o saturación en las entradas. Estos efectos aparecen entonces como una perturbación al sistema y es relevante entonces verificar su influencia aún bajo la ausencia de error en las condiciones iniciales. Mediante simulaciones, se verificó que las pruebas realizadas con este propósito fueron satisfactorias; el seguimiento de la trayectoria se logró de manera muy exacta en estos casos.



(a) Trayectorias del centro de masa en el plano xy (b) Trayectorias del centro de masa en el plano xz

Figura 8.10: Respuestas del sistema para distintas perturbaciones e la posición inicial del centro de masa. La trayectoria roja es la que se desea seguir. Azul - error de $100m$ en y. Negro - error de $-100m$ en y. Verde - error de $-200m$ en x.

En la figura 8.10 se muestran los resultados de varias simulaciones en las cuales se impusieron distintas perturbaciones en la posición inicial del centro de masa con respecto a la correspondiente a la trayectoria que se desea seguir. La gráfica azul corresponde a la trayectoria del centro de masa cuando la posición inicial se encuentra a $100m$ según y de la trayectoria deseada. La gráfica negra corresponde a un error en la posición inicial de $-100m$ según y de la posición inicial y la gráfica verde a un error de $-200m$ en x.

Observamos que a pesar del error en las condiciones iniciales el sistema converge a la trayectoria deseada. Se puede apreciar además que, aunque las perturbaciones en todos los casos mantienen la posición en el mismo plano horizontal que la trayectoria deseada, la evolución del sistema perturbado lleva al sistema por fuera de este plano en todos los casos. Esto se debe a que todas las variables se encuentran acopladas, y las acciones de control tomadas para estabilizar al sistema generan un desplazamiento en la vertical a causa de esto. Incluso se observa que la convergencia en z es más lenta que en las otras variables de posición, aunque aún así se puede apreciar que efectivamente esta convergencia se da.

Además de verificar la convergencia en las variables que especifican la posición del centro de masa, es de interés verificar que esto también sucede para las restantes variables del vector de estados. Las figuras 8.11, 8.12 y 8.13 muestran la evolución temporal de estas variables para el caso de una perturbación de las condiciones iniciales de $100m$ en y con respecto al valor correspondiente al de la trayectoria que se desea seguir. Se puede apreciar que todas estas variables convergen a sus valores deseados.

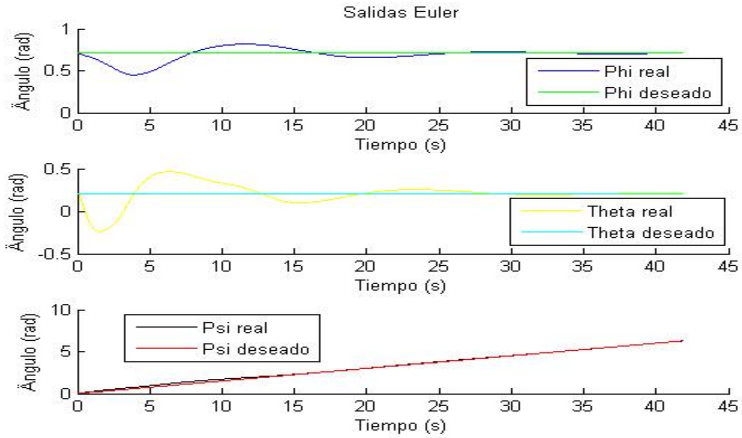


Figura 8.11: Evolución temporal de los ángulos de *Euler* a partir de una perturbación en la condición inicial en y de $100m$ con respecto a su valor valor deseado.

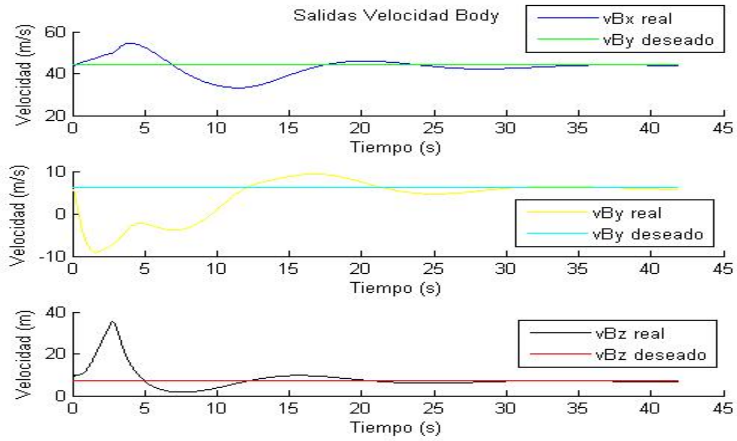


Figura 8.12: Evolución temporal de la velocidad en el SB a partir de una perturbación en la condición inicial en y de $100m$ con respecto a su valor valor deseado.

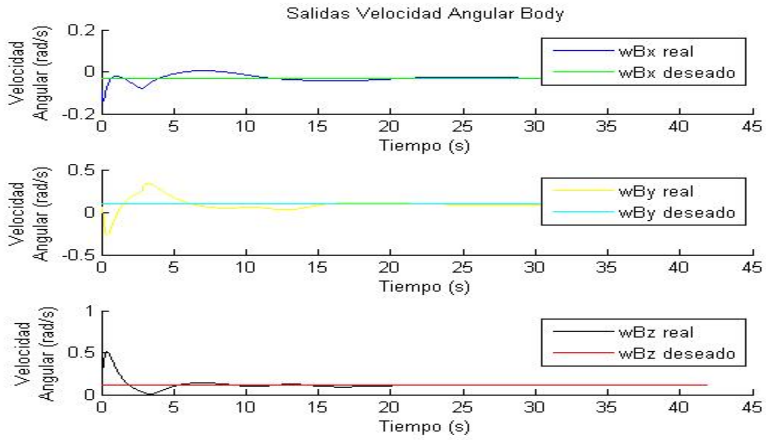


Figura 8.13: Evolución temporal de la velocidad angular a partir de una perturbación en la condición inicial en y de $100m$ con respecto a su valor valor deseado.

Al igual que en el caso descrito en la sección anterior, el tiempo de convergencia a la trayectoria deseada depende de la perturbación en la condición inicial. En la tabla 8.5, presentamos los tiempos que demora el sistema en reducir a un décimo la perturbación en el módulo de la diferencia de la trayectoria real del centro de masa con respecto a la deseada.

$\tilde{y}(t=0)$	$t_{10\,\%}$
$75m$	$31s$
$100m$	$27s$
$120m$	$24s$

Cuadro 8.5: Tiempo a partir de los cual el módulo de la diferencia entre la posición del centro de masa real y su valor deseado se reduce a la décima parte de su valor en el instante inicial. Se muestran los resultados para distintos errores en la condición inicial en y

Se debe notar que el tiempo decrece al aumentar la perturbación, sin embargo, el error real al tiempo especificado también será distinto dado que la medida refiere a un porcentaje con respecto a la perturbación inicial, que es distinta en cada caso.

Finalmente, presentamos en la tabla 8.6, los intervalos dentro de los cuales se puede perturbar la condición inicial en cada una de las variables que determinan la posición del centro de masa por separado y el sistema converge a la trayectoria deseada. Es importante destacar que los resultados correspondientes a cada variable se obtuvieron fijando el error inicial en todas las restantes en cero.

Variable de estado	Valor máximo	Valor mínimo
x	$-573m$	$155m$
y	$-320m$	$147m$
z	$-295m$	$99m$

Cuadro 8.6: Intervalos en los que se perturban (por separado)las variables de estado que determinan la posición del centro de masa en el SI y el controlador logra convergencia a la trayectoria deseada.

Una situación más realista sería aquella en que todas las variables de estado difieren, en el instante inicial, de los valores correspondientes a la trayectoria que se desea seguir. Además, de imponer al mismo tiempo perturbaciones en distintas variables, aunque el valor de cada una de ellas por separado esté dentro de la región de estabilidad, no se puede asegurar la convergencia del sistema. Relevar numéricamente la región de estabilidad del sistema controlado en el espacio de errores en la condición inicial tomaría una cantidad

considerable de simulaciones, dado que dicho espacio es de dimensión doce. Nos limitamos a los resultados recién expuestos y concluimos esta sección con la afirmación de que se simuló el comportamiento del sistema controlado para algunos casos en que había error en todas las variables y se verificó un comportamiento estable para perturbaciones suficientemente pequeñas.

▷ 2. Pruebas bajo la acción de una componente de viento constante - Modelo sin ruido.

En este apartado presentamos los resultados obtenidos de simular el comportamiento del sistema de control para la trayectoria especificada bajo la acción de viento de componentes constantes en el SI. Las pruebas se realizan tomando ahora error nulo en las condiciones iniciales. Se debe notar que para trayectorias circulares el trimado se debe realizar considerando viento nulo, por lo que la existencia de viento aparece como una perturbación al sistema. El lazo de control lineal se debe encargar de poder seguir la trayectoria deseada de manera satisfactoria a pesar de esto.

En la tabla 8.2.2 presentamos los intervalos para las distintas componentes de la velocidad del viento para los cuales el controlador logra que el avión siga la trayectoria de manera satisfactoria. Cada una de las simulaciones que llevó a la obtención del intervalo correspondiente a cada una de las componentes del viento se realizó tomando velocidad del viento nula en las restantes direcciones.

	Vv_{MIN}	Vv_{MAX}
Vv_{xI} (m/s)	-10	10
Vv_{yI} (m/s)	-10	10
Vv_{zI} (m/s)	-4	7

Cuadro 8.7: Intervalos de los valores que puede tomar cada una de las componentes de la velocidad del viento (por separado) para los cuales el sistema converge a la trayectoria deseada.

Es necesario aclarar que para los valores presentados la convergencia en x y en y es bastante buena, aunque con un leve error asintótico que crece con la magnitud de la perturbación considerada. Sin embargo, se observa un comportamiento oscilatorio en z. Para los valores límites presentados esa oscilación llevaba a la variable z a alejarse un máximo de alrededor de $50m$ de su valor deseado, como se muestra en la figura 8.14. Más allá de estos límites aún se observó un comportamiento que podría considerarse como un seguimiento satisfactorio de la trayectoria deseada en x e y, pero la oscilación en z es demasiado grande como para poder ser considerada un seguimiento aceptable de la trayectoria deseada.

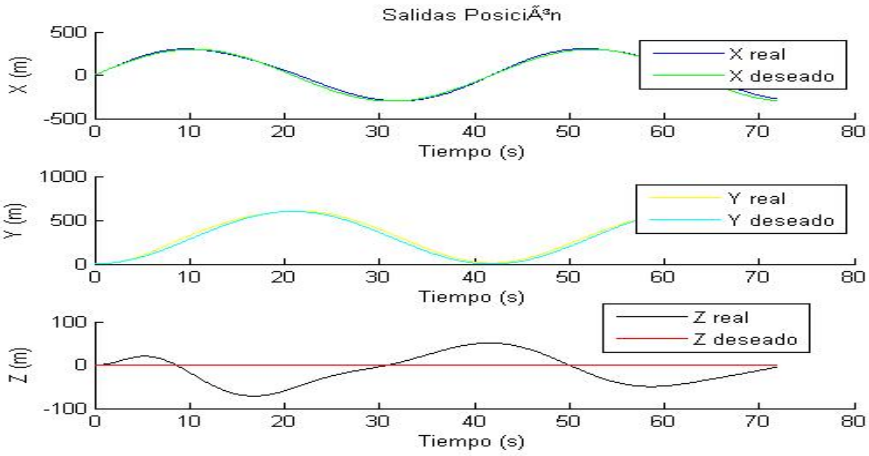


Figura 8.14: Evolución temporal de la posición del centro de masa para una trayectoria circular con viento de $10m/s$ en la dirección x. Notar el comportamiento oscilatorio en z

Concluimos esta sección agregando que se realizaron pruebas en la situación más general en que la velocidad del viento contiene valores no nulos en todas sus componentes. Se observó que para valores suficientemente pequeños de dichas magnitudes el sistema de control logró un buen seguimiento de la trayectoria deseada.

▷ **3. Pruebas en el modelo con ruido.**

En el último apartado de esta sección presentamos los resultados obtenidos de simular el comportamiento del sistema bajo la influencia de una perturbación estocástica. Las señales ruidosas consideradas aquí coinciden con las expuestas en el apartado correspondiente de la segunda sección de este capítulo.

En el caso de tomar el polo del filtro en $5Hz$, se observó que, para los mismos valores de potencia de ruido blanco considerados para la trayectoria rectilínea, el seguimiento de la trayectoria deseada en el plano xy es satisfactorio. Sin embargo, el efecto del ruido se observa en la evolución temporal en z. Esto se puede apreciar en la figura 8.15, donde se muestra la evolución temporal en z para valores de potencia del ruido blanco a la entrada del filtro de 1, 3 y $5m^2/s^2$. Se verificó, al igual que en el caso de una línea recta, que para valores muy grandes de la potencia el sistema diverge.

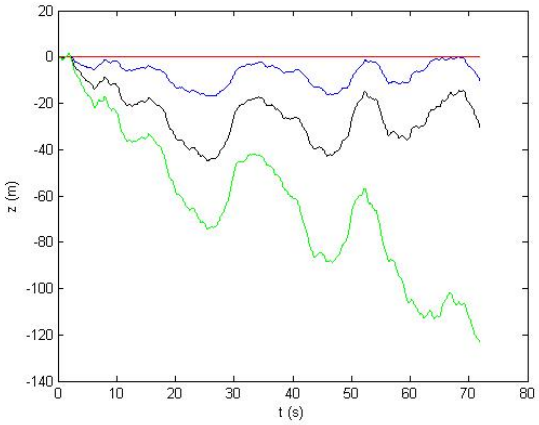


Figura 8.15: Evolución temporal de la posición z del centro de masa en presencia de señales ruidosas obtenidas con el filtro del pasabajos en $5Hz$. La curva roja es el valor deseado. Las potencias del ruido blanco en cada caso son: $1m^2/s^2$ (azul). $3m^2/s^2$ (negro). $5m^2/s^2$ (verde).

Observamos que para ninguno de los casos la respuesta del sistema converge a la deseada. Aún así, se puede apreciar que el seguimiento se realiza con menos error en el caso en que la potencia del ruido introducido es más baja.

Los resultados obtenidos para el caso en que el polo se ubica en $1Hz$ no difieren lo suficiente del caso sin ruido como para ser considerados en detalle.

Concluimos esta sección notando que se realizaron pruebas sobre el sistema bajo el efecto de los tres tipos de perturbaciones recién expuestas al mismo tiempo. El resultado de estas pruebas fue satisfactorio. Para perturbaciones suficientemente pequeñas en las magnitudes apropiadas, el controlador logró un buen seguimiento de la trayectoria deseada. Para perturbaciones grandes, sin embargo, se observó un comportamiento divergente.

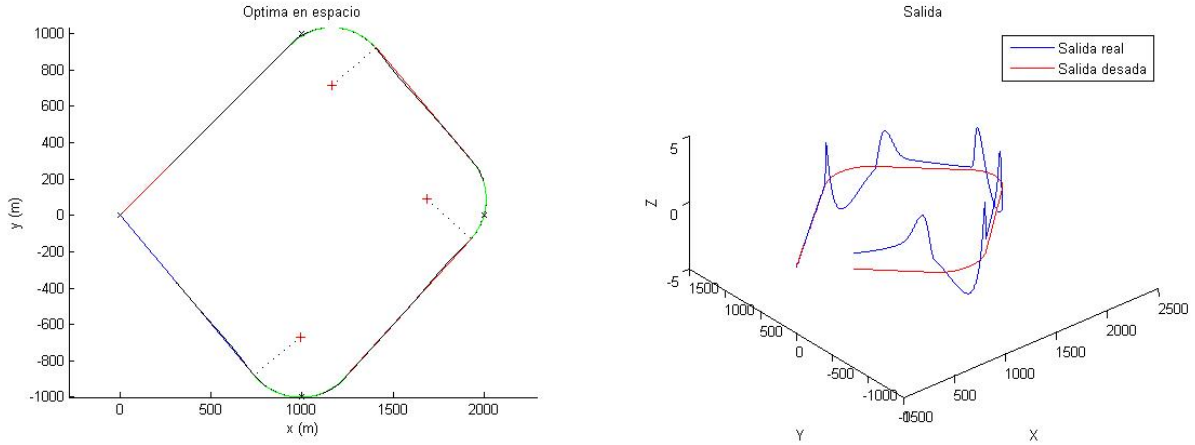
8.2.3. Pruebas con *Gain Scheduling*

La curva que se utiliza para recorrer un determinado conjunto de *waypoints* se construye como una concatenación de trayectorias estacionarias. Esta concatenación se arma alternando trayectorias a velocidad

constante con trayectorias circulares horizontales recorridas a velocidad constante. Alrededor de cada una de estas trayectorias estacionarias se calcula un punto de operación y un controlador lineal a partir de la linealización del sistema. La estrategia *Gain Scheduling* consiste en ir actualizando con el transcurso del tiempo el controlador lineal y el punto de operación según que trayectoria estacionaria de todas las que conforman el total se esté intentando recorrer. Se debe notar que la concatenación de trayectorias introduce una perturbación en cada cambio de punto de operación; el estado final de una no coincidirá con el estado inicial de la siguiente. Cada vez que se empieza a recorrer una nueva trayectoria se tiene una perturbación en las condiciones iniciales. El controlador lineal se debe encargar que esto no afecte de manera significativa el comportamiento deseado del sistema. Por otro lado, la concatenación se construye de manera tal que curvas consecutivas sean tangentes en lo posible y además, todas las trayectorias se recorren con la misma velocidad (en módulo). Es de esperar que de esta forma se minimiza el cambio abrupto de punto de operación.

En virtud de lo visto en las dos secciones precedentes, no es de gran interés estudiar la influencia del viento en la concatenación de rectas y arcos de circunferencia; el efecto será el mismo que el descrito anteriormente. Por otro lado, el cambio de punto de operación no es más que una perturbación en las condiciones iniciales, por lo que los efectos de esto tampoco difieren demasiado de lo estudiado anteriormente.

Simulando varias casos distintos de concatenación de trayectorias se verificó lo recién expuesto. El efecto del viento es esencialmente el mismo al esperado. Por otro lado, las perturbaciones introducidas al cambiar de punto de operación (si al generar la trayectoria se respetan ciertas restricciones), son lo suficientemente pequeñas como para no des-estabilizar la trayectoria siguiente. Esto se puede apreciar en la figura 8.16. En dicha figura se presenta el resultado de simular el sistema controlado intentando seguir una trayectoria compleja, en ausencia de perturbaciones en el viento o en las condiciones de vuelo en el instante inicial.



(a) Trayectorias reales (negro) y deseadas (colores)

(b) Visión tridimensional de las trayectorias reales y deseadas.

Figura 8.16: Trayectoria compleja en el espacio construida como concatenación de rectas y circunferencias. Trayectoria deseada y real bajo la ausencia de perturbaciones más que las propias de la concatenación

En la vista en el plano xy se puede apreciar para la trayectoria deseada el cambio de punto de operación con el cambio de color. El seguimiento en este plano es muy bueno, al punto que la trayectoria real en negro es difícil de distinguir de la deseada en colores. En la visión tridimensional se puede apreciar el cambio abrupto en z al cambiar de punto de operación. Observamos que este cambio es pequeño y no impide la convergencia a la altura deseada en las rectas. Es interesante observar este mismo fenómeno en las restantes variables de estado, para verificar si la convergencia es afectada por el cambio de punto de operación. Esto se puede apreciar en las figuras 8.17, 8.18 y 8.19.

Observamos en la figura como las variables de estado reales sufren un cambio abrupto al cambiar de punto de operación. Sin embargo, esto no impide la convergencia del cada una de ellas a su valor deseado, debido al controlador lineal.

Concluimos esta sección recalcando que los resultados aquí presentados se observaron para una

variedad de trayectorias construidas con este método.

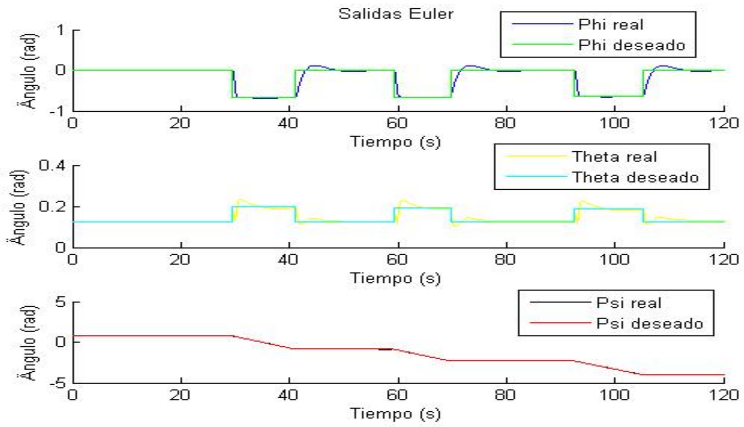


Figura 8.17: Evolución temporal de los ángulos de *Euler* para una concatenación de rectas y círculos bajo la ausencia de perturbaciones más que las propias de la concatenación. Se presenta el valor deseado y real.

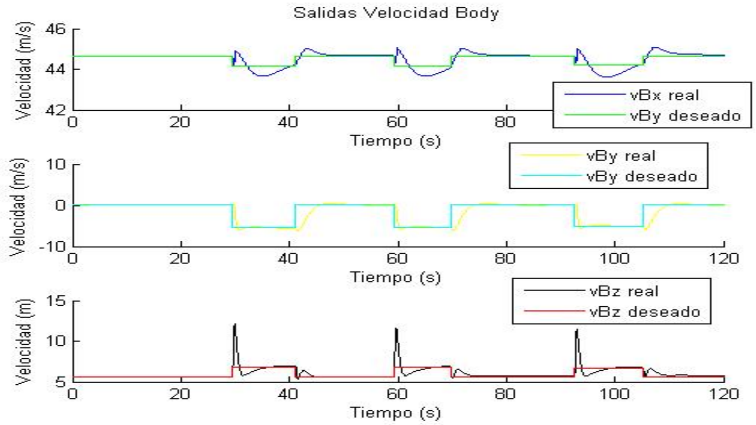


Figura 8.18: Evolución temporal de la velocidad en el SB para una concatenación de rectas y círculos bajo la ausencia de perturbaciones más que las propias de la concatenación. Se presenta el valor deseado y real.

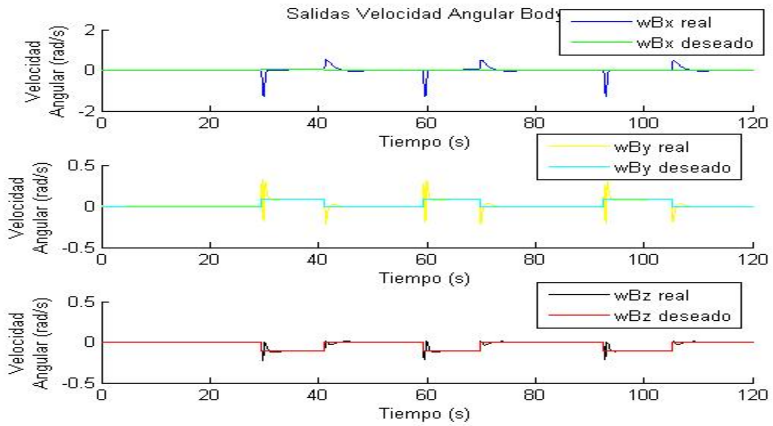


Figura 8.19: Evolución temporal de la velocidad angular para una concatenación de rectas y círculos bajo la ausencia de perturbaciones más que las propias de la concatenación. Se presenta el valor deseado y real.

8.3. Pruebas con regeneración de trayectorias

En esta sección presentamos el resultado de simular el comportamiento del sistema de control completo bajo distintas circunstancias. La diferencia sustancial con respecto a los casos considerados en las secciones anteriores radica en que ahora se agrega, al lazo de control lineal, el lazo de regeneración de trayectorias. Consideramos como trayectoria a seguir aquella detallada en la segunda sección de este capítulo e investigamos el comportamiento del sistema de regeneración de trayectorias en situaciones similares a las que se probó el controlador lineal en dicha sección. El recorrido contiene sólo dos *waypoints*, el segundo encontrándose a $4000m$ según x del punto de partida en el origen.

▷ **1. Pruebas con perturbaciones en las condiciones iniciales - Modelo sin ruido.**

En este apartado presentamos un ejemplo de un caso en los cual existen perturbaciones en las condiciones iniciales tales que el sistema de control lineal no es capaz de lograr estabilizar el vuelo y el lazo de regeneración de trayectorias interviene para lograr el objetivo logrado.

El ejemplo que presentamos consiste en introducir una perturbación en las condiciones iniciales de vuelo de $2rad$ en el ángulo ψ. Como se vio en la sección 2 de este capítulo (ver tabla 8.2) el sistema solamente bajo el lazo de control lineal es inestable frente a una perturbación en esta variable de esta magnitud. En la figura 8.20 se puede apreciar lo que sucede utilizando regeneración de trayectorias. Al fijar la tolerancia de regeneración en $20m$, la trayectoria se regenera casi instantáneamente. La nueva trayectoria a seguir se puede apreciar en la figura, donde se puede ver el *waypoint* extra generado el nuevo círculo (en verde) y la nueva recta (en azul) a seguir. En la misma figura también se puede apreciar el recorrido realizado luego de la regeneración en rojo, observándose que la nueva trayectoria es seguida prácticamente sin error.

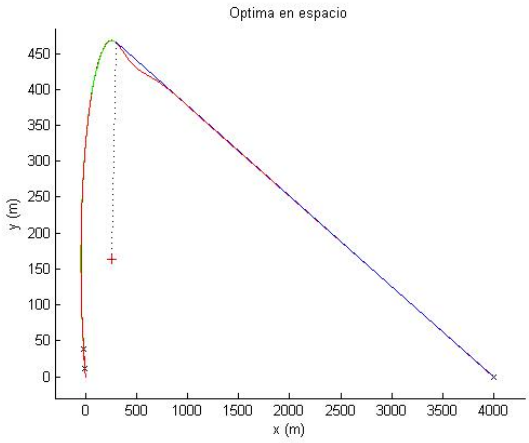


Figura 8.20: Trayectoria regenerada (verde y azul) y seguimiento de la misma (rojo) luego de una perturbación en las condiciones iniciales de $2rad$ en ψ.

Realizando simulaciones en formato *Gain Scheduling* se encontraron varios casos en los que la regeneración de trayectorias permitió corregir errores en la condición inicial al cambiar entre los tramos que componen la trayectoria total considerada. Sin embargo, existen situaciones en las que la regeneración de trayectorias no es útil para corregir un error en el vector de estados. Se debe notar que la regeneración de trayectorias elimina el error en la posición del centro de masa y provee una nueva trayectoria a seguir cuyo vector velocidad deseada puede ser más parecido al vector velocidad actual que el que se estaba intentando seguir antes de regenerar. Si existe un error significativo en alguna otra de las variables de estado, la regeneración no asegura que el nuevo valor a seguir en esta variable sea más fácil de seguir que el anterior a regenerar. Esto se verificó mediante simulaciones introduciendo errores grandes en las velocidades angulares. La regeneración no contempla la velocidad angular por lo que la regeneración fue infructífera en los casos en que la perturbación era tan grande que el controlador lineal no lograba estabilizar al sistema.

▷ **2. Pruebas con velocidad del viento no nula - casos determinístico y estocástico.**

En lo que respecta a los casos en que la velocidad del viento es no nula, tanto en situaciones determinísticas de valores de velocidad constantes en el tiempo como cuando se introducen señales ruidosas, se observó que la regeneración de trayectorias no supone una mejora significativa. En situaciones en que el controlador lineal es capaz de desenvolverse adecuadamente, la regeneración de trayectorias, cuando ocurre, en general no salva al sistema de una situación que el controlador lineal no hubiera podido resolver. Al regenerar, para seguir la nueva trayectoria todavía se depende de que tan bien se desenvuelva el controlador lineal frente a las perturbaciones atmosféricas presentes. Por el mismo motivo, cuando las perturbaciones debidas al viento son tales que el controlador lineal no es capaz de estabilizar el vuelo, regenerar la trayectoria no ayuda. Al regenerar una vez más se depende del controlador lineal frente al viento. De ser muy fuerte esta perturbación se corre el peligro, si el umbral de regeneración es muy bajo, de caer en una repetición casi instantánea de regeneración de trayectorias que en general no ayudará a lograr el objetivo en lo que respecta a recorrer los *waypoints* de manera adecuada.

Capítulo 9
Consideraciones generales para la implementación del sistema propuesto

Como ya se dijo, originalmente el alcance de este proyecto incluía la implementación del sistema de control diseñado en el avión de la UdelaR. Dado que por diversos motivos el proyecto redujo su alcance a solamente el diseño del sistema de vuelo autónomo, consideramos necesario dejar algunas pautas escritas sobre lo que puede ser una futura implementación del controlador, haciendo especial énfasis en una futura implementación en el avión de la UdelaR, que era el destinatario inicial de nuestros esfuerzos.

Los fundamentos para la existencia de este capítulo radica en que, por ser nosotros quienes desarrollamos el sistema, creemos tener un conocimiento del mismo, sus fortalezas y debilidades que ayudaría bastante a la hora de implementarlo y que no deseábamos que se perdiera por la falta de continuidad en el equipo de trabajo. Asimismo, dejar constancia de los pasos que creemos que habría que seguir para alcanzar los objetivos que inicialmente nos habíamos planteado para este proyecto.

9.1. El generador de trayectorias

El generador de trayectorias tal como fue pensado no necesariamente deberá implementarse en el computador de abordo del avión, ya que una posibilidad sencilla sería la de correr el programa en una PC de escritorio estándar y luego pasar la trayectoria generada al computador del avión. De no optarse por esta alternativa, posiblemente sea necesario re-pensar el algoritmo desde el punto de vista de su eficiencia computacional, que probablemente sea el punto más débil del mismo.

Una opción que podría ser viable sería la siguiente: utilizar el algoritmo actual de generación de trayectorias externamente (según lo sugerido el párrafo anterior) y tener otra versión de *software* generador de trayectorias que realizara operaciones sencilla y computacionalmente menos costosas. Esta versión más simple sería la que utilizaría el sistema al momento de regenerar la trayectoria, en caso de necesitarlo. Los desempeños del controlador lineal han sido buenos en general (primer capa de control), con lo cual no se ha visto la necesidad de que la trayectoria sea regenerada de forma muy repetida (disparo de la segunda capa de control) para tolerancias en el apartamiento de la trayectoria razonables, del orden de los $\approx 40m$.

9.2. Validación del modelo

Quizás la primera y más importante tarea que queda pendiente para la etapa de implementación es la de validación del modelo. Nuestro modelo se basó en un análisis mecánico de la situación, así como en modelos desarrollados en otros trabajos para las fuerzas aerodinámicas y del motor. En particular estos últimos no recibieron por parte nuestra ninguna verificación más que un análisis cualitativo de las características del modelo.

Más allá de eso, es necesario antes de pasar a la implementación de todo el sistema una adecuación del modelo al avión que se desee controlar. Ha sido una constante a lo largo de este proyecto los intentos por diseñar el sistema de la forma más general posible, de manera que se pudiera portar al uso con otros aviones distintos al *BEAVER*. En primera instancia entonces sería necesario hacer un relevamiento de los parámetros

del avión al que se le desea implementar el sistema (envergadura de alas b, cuerda aerodinámica media $\bar{c}$, perfil alar S y demás parámetros de interés), así como (y fundamentalmente) las fuerzas y momentos aerodinámicos representados por los coeficientes que las describen en términos de los polinomios que se presentaron en el capítulo 3 referente al modelado (asumiendo que los polinomios con los mismos términos son aplicables, cosa que en principio estimamos razonable), y las fuerzas y momentos ejercidos por el motor, también expresado en términos de los coeficientes del polinomio que lo modela. Estos últimos relevamientos necesariamente requerirían de experimentos en un túnel de viento o incluso en vuelo, aunque esta última posibilidad parece más difícil de lograr (aunque esto último podría usarse para hacer un ajuste del modelo una vez que esté disponible, mediante un filtro de *Kalman* o similares para ajustar la salida esperada por el modelo con la salida real del sistema).

9.3. Evaluación de necesidades en aviónica

Otro elemento clave para la implementación del sistema de control es la aviónica, o electrónica de abordo. Este punto está fuertemente relacionado con las secciones siguientes, en particular debido a que el adecuado dimensionamiento de la aviónica depende de cómo se implemente la observación de estados, los algoritmos de control, y las necesidades de actuadores más precisos.

A modo de listado no exhaustivo del dimensionamiento (relevamiento y medición de *performace*) de la aviónica necesario, presentamos aquí una primera versión resumiendo los puntos que consideramos importante destacar en el siguiente listado:

- ▷ **1. Capacidad de procesador de abordo :** Velocidad, memoria y consumo energético. Estimación sobre el agregado de microprocesadores o necesidad de los mismos.
- ▷ **2. Necesidad de conversores A/D y D/A :** Cantidad, rango dinámico y resolución. En particular este último punto, la resolución de los mismos podría ser una condicionante importante. Este hecho ya había sido notado por el grupo de proyecto de fin de carrera que construyó el avión e instaló la aviónica [Cha07].
- ▷ **3. Sensores de medida inercial :** Acelerómetros y giróscopos. Se encuentran instalados en la IMU. El relevamiento sobre su funcionamiento fue realizado por el grupo anterior [Cha07].
- ▷ **4. Otros sensores :** GPS y pitot. El GPS se encuentra instalado a bordo, según los integrantes del grupo anterior el mismo presenta un muy buen desempeño en esta zona del planeta. No hay pitot instalado y el mismo es crucial.
- ▷ **5. Otros elementos :** Generador de pulsos PWM para comandar los servomotores y baterías para la alimentación del conjunto. Las baterías son un elemento no trivial, de ellas depende el tiempo de procesamiento disponible en cada vuelo (comparar contra el tiempo de vuelo según la cantidad de nafta disponible) y su peso es un detalle no menor.
- ▷ **6. Comunicación con tierra :** Transmisores y receptores para la comunicación, envío de datos. No implementado, no existe *hardware* o *software* en este respecto.

En el caso del avión de la UdelaR muchos de estos elementos ya están presentes (GPS, acelerómetros, giróscopos, procesador, algunos conversores A/D y D/A, generador PWM) y otros que no. Sin embargo de los elementos presentes sería necesario una re-evaluación o re-dimensionamiento, por ejemplo en el caso de los conversores A/D y D/A ya había quedado claro para el grupo que desarrolló el avión que su resolución y rango dinámico era insuficiente. También es necesario re-evaluar la capacidad de procesamiento presente y necesario para la implementación del controlador propuesto.

Muy particularmente también recomendamos el estudio de las necesidades de energía que tiene el sistema actualmente y cómo satisfacerlas, ya que el avión tal como se encuentra carece de cualquier tipo de

alimentación. En nuestros primeros contactos con el mismo notamos que esto sería un tema crítico, pues para suministrar la energía necesaria con baterías de bajo costo la única solución disponible en el mercado consistía en baterías de gel que tienen un peso mayor a $0{,}5kg$, lo que consideramos excesivo para un avión cuya *payload* es del entorno de los $2kg$.

En cuanto a los sensores existen algunas carencias evidentes como lo es el pitot, pero el resto de los sensores - que ya están presentes - deberán ser evaluados en función de la capacidad que se tenga de hacer una correcta observación de estados a partir de los mismos. Algunas consideraciones adicionales sobre esto se hacen en la sección sobre observadores de estados de este capítulo.

El procesador que será necesario dependerá fuertemente de como se haga la implementación algorítmica del conjunto (complejidad computacional), los tiempos que efectivamente tome la ejecución de los distintos programas (programado en C y corriendo en dicho procesador) y los tiempos que efectivamente es razonable que tome su ejecución (por ejemplo, la regeneración de trayectorias no puede tomar $10s$ en ejecutarse pues volando a $30m/s$ eso implica que se habrá diseñado una trayectoria para una situación de vuelo que ya dista $300m$ de la situación real). En general no es posible evaluar las necesidades en términos del procesador hasta que se pase todo el *software* por un proceso serio de optimización en términos de eficiencia computacional, por lo que hacia esto deberían dirigirse los primeros esfuerzos en el tema.

Finalmente, el sistema de comunicación con tierra debe implementarse completamente (la única comunicación que existe actualmente es unidireccional desde el control remoto hacia el avión y no permite proveer más información que la posición deseada de los servo motores) y para esto primero debería hacerse un análisis de las características deseables para dicha comunicación. A modo de ejemplo, debería determinarse si se desea una comunicación permanente, la distancia de transmisión, el medio para la misma, qué se desea transmitir (estados, trayectorias, etc.), si la comunicación será unidireccional o bidireccional, etc. Entre los elementos importantes a decidirse se encuentra la definición de la frecuencia a utilizar y un protocolo robusto de transmisión de datos, los fenómenos de interferencia para una plataforma tal como lo es el avión en situación de vuelo puede llevar a problemas realmente graves (caída del avión) de los cuales existen ejemplos en el Uruguay.

9.4. Trimado y linealización

El trimado y la linealización del sistema alrededor de un punto de operación deberá poder hacerse abordo del avión si se desea implementar el controlador propuesto, debido a que el control mediante regeneración de trayectorias exige la posibilidad de 're-pensar' todos los puntos de operación y por lo tanto el control alrededor de los mismos.

Como ya se dijo, el trimado consiste esencialmente en resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante algún método numérico adecuado, pero debe destacarse que en su implementación actual la eficiencia del código no ha sido considerada exhaustivamente. Un elemento clave para todas las optimizaciones y resolución de ecuaciones no lineales es poseer un valor para comenzar a iterar suficientemente cercano a la solución. En el caso del trimado es fácil obtener puntos 'suficientemente cercanos' corriendo el *software* para un conjunto de casos estándar (por ejemplo:una recta horizontal a velocidad de crucero sin viento) y luego asociando estos puntos conocidos como 'semilla' para el proceso de trimar una trayectoria similar.

Una situación absolutamente distinta se sostiene para la linealización, pues se han derivado las ecuaciones analíticamente y luego se evalúan las mismas para cada caso en función de los resultados del *software* de trimado, lo que es computacionalmente mucho más eficiente que buscar programar el MVE completo y linealizarlo numéricamente entorno al punto de operación deseado. De mantenerse el MVE no sería necesario hacer más que codificar el programa para el nuevo procesador, ya que fue programado teniendo la portabilidad como objetivo[a].

[a]Por 'mantenerse' entendemos que las ecuaciones que describen la situación, en particular las de las fuerzas y momentos asociados a la aerodinámica y al motor, mantengan su forma pero no necesariamente su cuantificación. Por ejemplo, si se pueden describir las nuevas fuerzas en términos de los mismos polinomios usados en este trabajo aunque los valores numéricos de los coeficientes varíen, entonces el *software* de linealización se puede mantener incambiado.

9.5. Observación de estados

A la hora de desarrollar el controlador se asumió que se disponía en todo momento de una medida adecuada del vector de estados, hipótesis que nunca justificamos. Se desprende de esto que es necesario para implementar el sistema propuesto contar con dicha medida o estimar adecuadamente el vector de estados. En la realidad habrá que hacer una mezcla entre las cantidades que se pueden medir y las que habrá que 'observar', esto es, a partir de medidas que se pueden realizar deducir el valor de las magnitudes no mesurables. Entran en juego entonces el conjunto de los sensores y el procesamiento de las señales que los mismos brindan. Algunos sensores que serán muy útiles para esta etapa son los acelerómetros, giróscopos y GPS. Los giróscopos permiten - idealmente - conocer la velocidad angular del avión y eventualmente es posible, a partir de dichas medidas, conocer los ángulos de *Euler* o la inclinación del avión. De una manera análoga, los acelerómetros permiten conocer la aceleración instantánea del avión y es posible derivar a partir de ellos la velocidad y la posición del avión. En ambos casos para evitar errores integrales al obtener las nuevas magnitudes es necesario un procesamiento de las señales adquiridas.

De manera estándar, al tratar de derivar la posición desde un sistema de medida inercial (IMU) es necesario contar con una referencia adecuada que permita contrarrestar los errores integrales. Algunos pasos en este sentido fueron dados por el grupo que desarrolló el avión [Cha07], al implementar un filtro de *Kalman* para establecer una medida adecuada de la posición a partir de los acelerómetros y el GPS. Posiblemente sea necesario realizar un procedimiento similar para obtener la inclinación (ángulos de *Euler*) a partir de los giróscopos.

Hay además que obtener alguna estimación de la velocidad relativa del viento, lo que puede hacerse mediante la inclusión de nuevos sensores (pitot, anemómetro) o mediante la observación misma de estados.

Para todos los casos puede ser interesante implementar también un modelo de los sensores para incluir en el modelo total, de manera de poder hacer simulaciones más precisas de las situaciones de vuelo deseadas.

9.6. Entradas y actuadores

Otro elemento que no se consideró a la hora de diseñar el sistema de control es el hecho de que no es posible manejar directamente las 'entradas' del sistema sino que se actúa sobre actuadores (valga la redundancia) que en su lugar afectan a las distintas entradas. Es necesario entonces considerar la dinámica de estas relaciones y modelarlas de algún modo si se desea hacer simulaciones realmente completas del sistema.

En el caso del avión de la UdelaR, existen cuatro entradas que son controladas por servomotores en todos los casos. Para estos sería adecuado hacer dos estudios, el de la respuesta mecánica frente a las excitaciones eléctricas (pulsos PWM) y el de la dinámica del sistema, que determina la velocidad de respuesta de los actuadores sobre las entradas.

Estrictamente hablando, lo anterior alcanza para los actuadores de las superficies de vuelo (alerones, timón y elevadores) pero debe ser tratado con algo más de cuidado para el motor. En el caso del motor, el servomotor asociado controla el pasaje de nafta y no hay - a priori - una relación directa de esto con las RPM del mismo. Sería necesario entonces estudiar y hacer un modelado de la interacción entre el pasaje de nafta y las RPM o implementar quizás un mini-sistema regulador de las RPM que a su vez comande al servomotor.

9.7. Controlador lineal

Para la implementación del controlador lineal o de primera capa, existen esencialmente dos tipos de consideraciones para realizar. Las primeras están asociadas con el hecho de que el controlador debe implementarse en un sistema digital, lo que implica tener que discretizar el controlador y para esto es necesario primero determinar la frecuencia de muestreo necesaria. De alguna manera un proceso similar es el que se lleva a cabo para simular el controlador con el *software* diseñado, lo cual ya es prueba de la posibilidad de implementar el sistema discreto. La gran diferencia radica en que el simulador -tal como funciona actualmente-

utiliza mecanismos para resolver las ecuaciones diferenciales que tienen tasas de muestreo variables y no necesariamente realistas.

Surgen entonces las consideraciones del segundo tipo, que son las que están relacionadas con la posibilidad de ejecutar el sistema en tiempo real. La ejecución del sistema en tiempo real es condición *sine qua non* para la implementación del mismo. Necesariamente esto está fuertemente relacionado con la tasa de muestreo del sistema, la complejidad computacional del algoritmo programado y las prestaciones del procesador y electrónica de abordo. Repitiendo lo expresado en la sección dedicada a la aviónica, quizás esta sea la parte más delicada y crítica a la hora de implementar el sistema propuesto.

9.8. Regeneración de trayectorias

Para la regeneración de trayectorias rigen criterios similares a los anteriores. Si bien no es necesario que la regeneración de trayectorias se haga en tiempos comparables con el ciclo de control de primera capa, si es necesario - por los motivos que se expresaron en la sección de aviónica - que sea suficientemente rápida. Dado que el proceso de generar (y regenerar) trayectorias consiste esencialmente en optimizar una función, una sugerencia que puede ayudar a agilizar el proceso es la de utilizar una 'semilla' adecuada, al igual que lo que se sugirió para el trimado. En el caso de la regeneración de trayectorias, una 'semilla' adecuada puede ser la trayectoria que se estaba siguiendo en el momento que se decide regenerar, ya que dicha trayectoria tiene la característica de pasar por todos los *waypoints*, y probablemente no diste mucho de la nueva trayectoria buscada.

9.9. Comentarios finales sobre la implementación

Para concluir este capítulo nos gustaría reiterar que el énfasis de este proyecto estuvo puesto en la portabilidad, considerando siempre la mejor manera de dejar establecido el sistema de control de modo de que pudiera implementarse en un avión genérico. Esto implica entre otras cosas, que se ha intentado modularizar el sistema e independizarlo de las características del avión en cuestión, así como utilizar algoritmos cuya programación y ejecución fuera posible en un microprocesador genérico de manera sencilla. Un ejemplo de esto es que se usaron solo funciones de *Matlab* que implementan algoritmos conocidos y no propietarios que fueran posibles de reproducir para cualquier persona que tuviera nociones básicas de métodos numéricos.

Si bien no nos ilusionamos con haber logrado una portabilidad e independencia absoluta del avión en el que se desee implementar el sistema, esperamos sí haber avanzado en estas líneas lo suficiente como para que en un futuro, si alguien desea tomar el sistema propuesto para su implementación, no sea necesario revisar y rehacer grandes porciones del mismo.

Capítulo 10
Software implementado

Del software implementado durante el transcurso de este proyecto se pueden identificar tres grandes categorías; el software de simulación, el *software* para el generador de trayectorias y la lógica de control propiamente dicha. La primera de ellas, el *software* de simulación, fue el primer programa que se implementó y cuyo primer objetivo fue tener el MVE funcionando en un ambiente simulado. El generador de trayectorias es el que tiene la misión de, dado los puntos por los cuales se deba pasar (*waypoints*), generar una trayectoria continua con derivada espacial continua que pase suficientemente cerca de los puntos especificados. Finalmente, el controlador, cuya primer capa está dedicada a lograr que el sistema siga una determinada trayectoria (x, y, z) dada, y la segunda capa es la encargada de interactuar con el generador de trayectorias para regenerar la trayectoria a seguir en caso de apartarse mucho de la original (cuando ya no tiene mucho sentido que la primer capa siga intentando seguir a la trayectoria original).

Es de mencionar en este punto que no todo el software disponible se engloba con estas tres categorías, por ejemplo, el software de linealización y trimado que se discutió en el capítulo 5 podría considerarse como dentro de la lógica de control pues es necesario utilizar dicho software para el cálculo de los controladores. Sin embargo, en realidad es un *software* completamente independiente y no corresponde concretamente a ninguna de las tres categorías. Otro ejemplo de esto podría ser el *software* de adquisición de señales y datos elaborado por el proyecto de fin de carrera anterior, los cuales se encuentra detallados en la referencia [Cha07].

Todos los programas que se implementaron durante el transcurso de este proyecto fueron entregados en dos modalidades, que hemos dado a llamar por:

- ▷ **Paquete de aplicaciones**
- ▷ ***Software* integrado**

La modalidad de paquete de aplicación apunta hacia un usuario 'informado', es decir, un usuario que tenga conocimientos sólidos sobre las herramientas *Matlab* y *Simulink*. Se entregaron entonces todos los *scripts*, las funciones *.m* y los MDLs construidos. La documentación de los mismos se encuentra en el manual de usuario entregado. Estos programas se corresponden a la implementación sobre la plataforma *Matlab* de todo lo referido a lo que se discutió en los capítulos anteriores, y representan el núcleo en si mismo del proyecto.

Por otro lado, todo este *software* implementado lo presentamos también en la modalidad *software* integrado, donde se encuentran disponibles todas las funcionalidades correspondientes a los programas construidos y disponibles en el paquete de aplicación, pero unificadas en un solo programa con interfaz gráfica que llamaremos de ahora en más UI (del inglés *User Interface*). Es claro que esta otra modalidad apunta hacia un usuario cuyo único objetivo es utilizar las funcionalidades sin necesidad de tener que acceder al código o a la línea de comandos de forma exhaustiva.

A continuación procederemos a describir brevemente el proceso por el cual se generó este *software*.

10.1. *Software* integrado

El objetivo de esta aplicación es brindar la posibilidad de utilizar las herramientas desarrolladas durante el transcurso del proyecto sin necesidad de tener que acceder al código o de comprender fuertemente

la lógica con que fueron desarrolladas las distintas herramientas. Se debieron integrar entonces los distintos tipos de programas y de datos que se encuentran disponibles en el paquete de aplicación. Básicamente este *software* debía integrar los siguientes elementos: las funciones *.m*, varios *scripts* de ejecución, datos a ser levantados desde archivos de texto *.txt*, datos que se almacenaban en el *workspace* de *Matlab* y la interfaz gráfica propiamente dicha, que debía ser diseñada e implementada.

10.1.1. Criterios para la construcción del *software*

En este sub-sección detallaremos las funcionalidades que cubre el *software* integrado, si se quiere, una especificación funcional del mismo. Muchas de ellas nacieron desde la especificación inicial con la que nos planteamos la construcción de esta aplicación. Otras, sin embargo, fueron apareciendo naturalmente durante el desarrollo del programa.

▷ **Concentrador de herramientas.**

Una de las primeras ideas en torno al desarrollo de este *software* y que, indudablemente, motivó desde el inicio el desarrollo del mismo, fue el objetivo de tener todas las funcionalidades agrupadas desde un único punto de acceso. Es decir, que un usuario de dichas herramientas no tuviera que estar ejecutando varios *scripts*, inicializando distintas variables y corriendo desde *Simulink* los MDLs. Por eso su carácter de 'integrado'. Por otro lado, se debía tratar de hacer lo más amplia posible la visualización de los resultados, es claro que nunca va a ser más versátil que lo que uno puede generar desde consola, pero se intentó dar una variedad importante a las opciones que pueda tener un usuario. Naturalmente, un usuario que sepa utilizar el paquete de aplicación puede visualizar todo lo que desee o crea pertinente. Referido a este último punto, se debe hacer notar, que los resultados de las simulaciones del *software* integrado, se encuentran disponible para el usuario y accesible desde la consola de *Matlab*, con lo cual un usuario con conocimiento del entorno *Matlab* puede conseguir una basta cantidad de visualizaciones de todo aquello que considere de interés y no se encuentre dentro de la gama de posibilidades que brinda la UI.

▷ **Integrar todas las funcionalidades.**

El más importante de todos los aspectos que debían ser cubiertos por la aplicación a construir es, sin duda, que permitiera utilizar las herramientas implementadas durante el desarrollo del proyecto. A saber, la simulación del lazo abierto, el algoritmo de generación de trayectorias y la performance del controlador diseñado. En la figura 10.1 se puede ver un *screenshot* del menú principal de la aplicación, el cual da acceso a estas funcionalidades de forma separada, aunque, claro está, el controlador final integra todas las etapas del proyecto.

Figura 10.1: Menú principal del *software* integrado.

En este sentido, este *software* es una muestra significativa de todo el trabajo realizado. En el paquete de aplicación se encuentran algunas otras funcionalidades, como por ejemplo, permite ver la evolución del

sistema de controlado, observando los momentos en que la segunda capa de control decide regenerar la trayectoria seguir, es decir, se puede ver más de cerca el funcionamiento del sistema. Esta aplicación está diseñada a efectos de mostrar los resultados finales y la performance del sistema, en algunos casos de poder ajustar algunos parámetros al óptimo del objetivo que se persiga (por ejemplo, en el generador de trayectorias) y realizar diversas pruebas sobre el sistema.

▷ **Independiente del modelo de avión.**

Este es un objetivo que se acompañó a lo largo de todo el proyecto y, como no podía ser de otra manera, también se buscó para el *software* integrado. En este respecto la aplicación permite fácilmente cambiar el modelo de avión a utilizar, simplemente se deben cargar los parámetros conque se desea trabajar en un archivo *.txt* en una carpeta dada (que se explica en el manual de usuario) e indicarle al programa que se desea trabajar con ese *set* de parámetros. Cuando hablamos de esta especificación del modelo del avión nos referimos a: los coeficientes de las fuerzas y momentos aerodinámicos, los parámetros referidos a la geometría del avión b, $\bar{c}$ y S por ejemplo, y las restricciones del avión respecto a radios mínimos de giro, tasas de trepado, etc.

También existe independencia respecto a otro tipos de datos, los datos referidos al modelado de la atmósfera. En los archivos *.txt* se puede especificar distintos valores para P_0, T_0, g, λ y R_a.

▷ **Maximizar la versatilidad.**

En este punto se deben distinguir dos puntos; la versatilidad en los *inputs* del usuario y la versatilidad en las visualizaciones de los resultados. Como ya se comentó, es muy difícil - sino, imposible - brindar la misma capacidad en estos aspectos que podría tener un usuario conocedor e 'informado' desde la consola de *Matlab*. No obstante el programa implementado brinda una amplia cantidad de opciones.

En cuanto a los *inputs* del usuario, en todas las pantallas el usuario tiene capacidad casi total de modificar todos los parámetros relevantes, a saber, condiciones iniciales, velocidad del viento, parámetros de la generación de trayectorias, *waypoints*, parámetros del controlador, entradas al sistema, etc. El único punto donde esta versatibilidad se ve disminuida es en la ventana de simulación del lazo abierto, donde el usuario debe especificar las entradas $u(t)$ para la simulación (recordar en este punto que el lazo abierto es de la forma: $\dot{x} = f(x, u)$ y también afectan los subconjuntos de variables h y p, y las condiciones iniciales x_0. De todas formas, se intento ampliar la gama disponible de entradas, la disponibilidad actual de entradas para este *input* engloba las siguientes funciones:

1. **Valor constante :** Se puede colocar un valor constante para el valor de las entradas. Si se elige alguna otra evolución temporal dentro de las demás opciones será sumada a este valor. Así mismo, si se selecciona más de una opción de cualquiera de las que aparecen listadas en este enumerado, la señal total será la suma de las seleccionadas.

2. **Escalón de *Heavyside* :** De la forma $C.Y(t - \tau)$, utilizando la nomenclatura usual para dicha señal.

3. **Rampa :** De la forma $Rampa(m, t-\tau)$. Donde m denota la pendiente de la rampa que puede ser positiva o negativa, y τ el instante de tiempo donde se inicia la rampa.

4. **Pulso :** Construido de la forma $C.(Y(t - \tau_1) - Y(t - \tau_2))$ con $\tau_1 > \tau_2$, utilizando la nomenclatura usual para el escalón de *Heavyside*. Se debe tener en cuenta al ingreso de dicha señal que si $\tau_1 < \tau_2$ y $C > 0$, el pulso tendrá altura negativa por el hecho de no respetar la condición $\tau_1 > \tau_2$.

5. **Onda cuadrada :** Es básicamente una señal del tipo *clock*, de la cual se puede especificar el ancho del pulso, la altura del pulso y el período.

6. **Entrada personalizada :** Para no acotar tanto el conjunto de entradas posibles, se cuenta también con la posibilidad de generar una entrada personalizada se la siguiente manera: sumando cuatro escalones de *Heavyside* de los cuales se puede elegir el valor de C y τ para cada uno por separado.

Para recurrir a entradas más complejas que las construibles con este abanico de posibilidades, se debe hacer uso de la modalidad paquete de aplicación y modificar directamente los MDLs realizados. Para la generación de trayectorias y simulación del controlador, se permiten algunas opciones sobre la forma en que se realizarán y se calcularan los elementos correspondiente a cada funcionalidad.

En cuanto a la visualización de los resultados, La ventana de simulación del lazo abierto es la que brinda mayores posibilidades. La misma cuenta con la posibilidad de observar una simulación 3D de la trayectoria de avión y su inclinación, también permite grabar un video en el disco duro (en formato *.avi*) el cual es el tiempo real, con esto queremos decir que diez segundos de simulación se corresponderían con diez segundos de video. También permite ver las distintas gráficas de la evolución del vector de estados a lo largo de la simulación. Estas gráficas pueden verse también como figuras externas a la interfaz de modo de poder trabajar más extensamente con ellas, por ejemplo, hacer ampliaciones y relevar datos de cada punto graficado. También está la funcionalidad de ver la trayectoria 3D en el espacio (x, y, z) que fue descripta por el avión durante la simulación. La ventana de generación de trayectorias permite observar la trayectoria generada en el espacio (x, y, z) en distintos modos de visualización, con esto queremos hacer énfasis en el hecho que no permite visualizar la trayectoria generada en el espacio de velocidades. Por último, en la ventana de simulación del sistema controlado, se pueden apreciar la evolución del vector de estados en distintas visualizaciones y la trayectoria 3D recorrida en el espacio (x, y, z).

Nuevamente, queremos aclarar en este punto, que los resultados de la simulación quedan grabados en disco duro y accesibles desde la consola de *Matlab*. De modo que se podrían observar la evolución de otras variables de interés, por ejemplo, en ángulo de ataque α en función del tiempo o el ángulo de *sideslip* β en función del tiempo, o cualquier otra magnitud que pueda ser deducida de la evolución del vector de estados x y los valores ingresados como *inputs* por el usuario.

10.1.2. Diseño de la integración

Como ya se mencionó anteriormente, para poder construir este programa se debieron integrar varios elementos que se encuentran incluidos en el paquete de aplicación, y en algunos casos incluir modificaciones, no siempre muy leves, a las funciones *.m* y MDLs existentes en dicho paquete.

El primer paso para lograr esta integración fue erradicar la necesidad del *workspace* de *Matlab*, dado que se encontró dificultoso acceder a la modificaciones de los datos allí presentes desde la *UI* y las funciones *.m*. E incluso la dependencia sobre el *workspace* puede tener el efecto nefasto de sobreescribir intencionalmente alguna de la variables que se están utilizando, con lo cual no se consideró aceptable depender del mismo. Además, este tipo de cosas deberían ser transparentes para un usuario poco interiorizado con el funcionamiento del sistema, incluso el mismo usuario podría ocasionar esta sobre-escritura de los datos sin quererlo ingresando por consola algún tipo de comando no debido. Otra desventaja es que al borrar el *workspace* o reiniciarlo, se pierde el trabajo realizado.

Este *workspace* fue reemplazado entonces por una carpeta a la cual se accede de forma relativa (por medio de *paths* relativos), el nombre de la carpeta es: WS. Los datos relevantes que antes eran cargados como variables en el *worspace* son ahora cargados como archivos *.mat* en dicha carpeta. Por ejemplo, cuando un usuario desea cambiar el avión de trabajo, lo ingresa adecuadamente en la interfaz y siguiendo el procedimiento descripto en el manual de usuario, el sistema carga internamente un archivo *Datos Actual.mat* en dicha carpeta que tiene todos los datos relativos al modelado del avión y del motor, así como algunas condiciones atmosféricas que ya se han mencionado párrafos atrás en la sub-sección en la especificación de 'Independiente del modelo del avión'. Por otro lado, los resultados de las simulaciones quedan grabados permanentemente en dicha carpeta también en archivos *.mat*. Dado que hay dos tipos de simulaciones, *open loop* y *close loop*, los archivos *.mat* que se guardan en la carpeta WS son identificados por las siglas OL y CL respectivamente.

Otro elemento que se eliminó fueron los *scripts*. En el paquete de aplicación estos *scripts* eran mayormente utilizados para inicializar variables en el *workspace* o para automatizar visualizaciones y procesos. Al eliminar estos *scripts* el ambiente *Matlab* puro queda sólo reducido a las funciones *.m*, cosa que no se debe menospreciar, dado que siguen siendo el corazón de la aplicación propiamente dicha.

Lo último que falta mencionar es que se utilizaron dos MDLs (de los tantos MDLs construidos) para el funcionamiento de la aplicación. Estos son: *Sistema OL.mdl* y *Sistema CL.mdl* que son los utilizados para la simulación del sistema en lazo abierto y la simulación del sistema controlado respectivamente. Ambos MDLs debían ser integrados a funcionamiento de la aplicación de forma de que fueran transparentes para el usuario final.

En la figura 10.2 a continuación se muestra un diagrama del esquema final utilizado para la implementación del *software* integrado. En la misma se intentó respetar la modularización y los objetivos de cada elemento dentro del esquema.

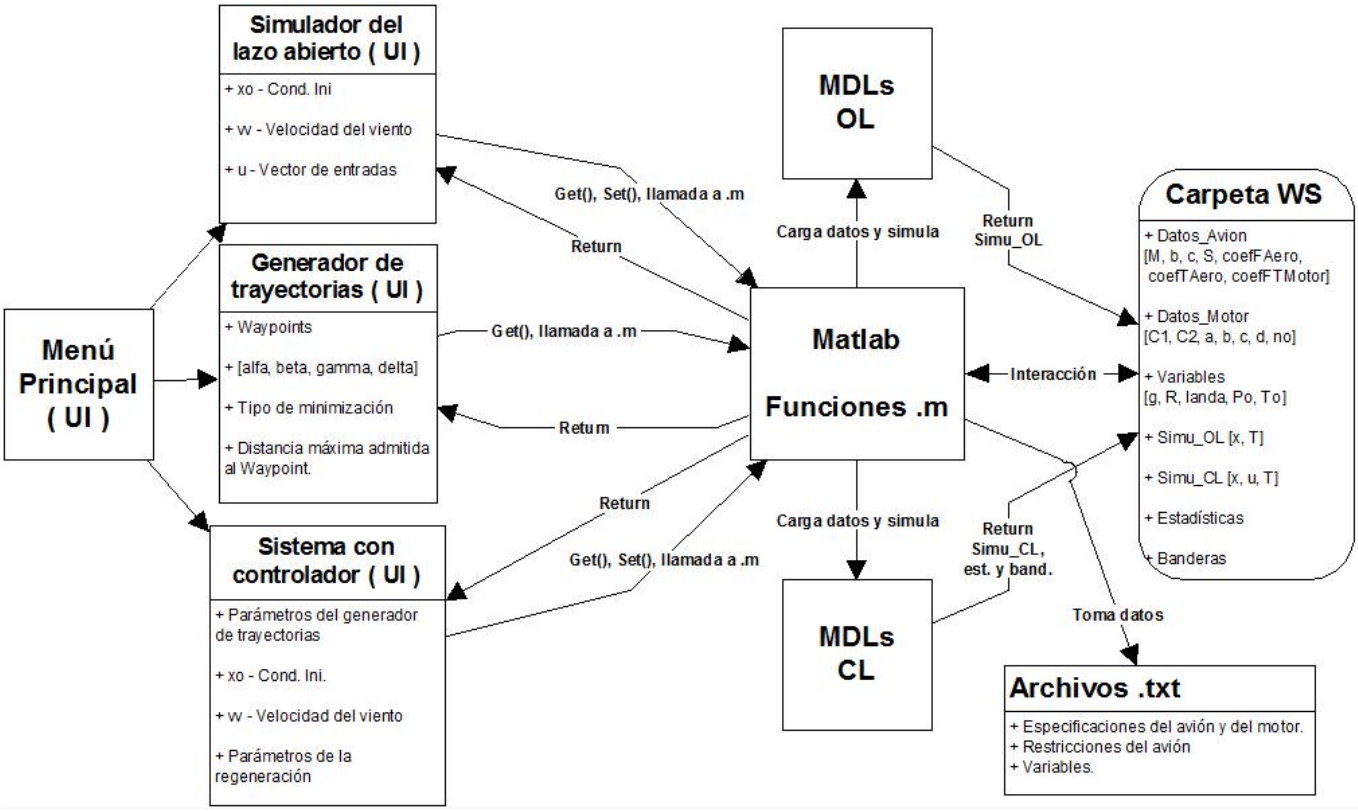


Figura 10.2: Diseño de la integración del *software*.

Es claro que las funciones *.m* cumplen un rol fundamental en este diseño. Las funciones *.m* cumplen un rol concentrador, los demás elementos que componen a la solución propuesta están aislados entre sí y todas las interacciones entre ellos se realizan a través de funciones *.m*. A excepción de la carga de los resultados de las simulaciones donde los propios MDLs son los encargados de dejar guardados los archivos *.mat* con los datos correspondientes.

10.1.3. Interfaz gráfica

La UI consta de cuatro ventanas principales y algunas ventanas diseñadas de importancia menor. Las cuatro ventanas principales son: el *main*, una ventana para la simulación del lazo abierto, otra ventana para el generador de trayectorias y una última ventana para la simulación del sistema controlado, es decir, del lazo cerrado. Existen otra ventanas que se despliegan y que fueron diseñadas como puede ser la ventana para el ingreso de entradas para la simulación del lazo abierto, la ventana para desplegar posibles errores y la barra de evolución (*progress bar*).

▷ **Ventana para la simulación del lazo abierto.**

En la figura 10.3 se puede observar un *screenshot* de la ventana principal para la simulación del sistema avión sin el controlador. En esta ventana el usuario tiene la posibilidad de realizar simulaciones del

sistema a controlar ingresando los valores para las condiciones iniciales x_0, la velocidad del viento medida en la base del sistema SI h, algunos parámetros de la simulación como los son el tiempo inicial y el tiempo final (quedaría para una próxima versión la posibilidad de elegir el algoritmo de resolución numérica a utilizar, en este caso el *ode45*), valores constantes para las entradas y alguna otra evolución temporal y la cantidad de puntos que se desea que sean mostrados en las distintas visualizaciones. Así mismo, aparecen una gran variedad de opciones de visualización de los resultados de las simulaciones. Un detalle de las opciones disponibles y como acceder a ellas se puede obtener en el manual de usuario.

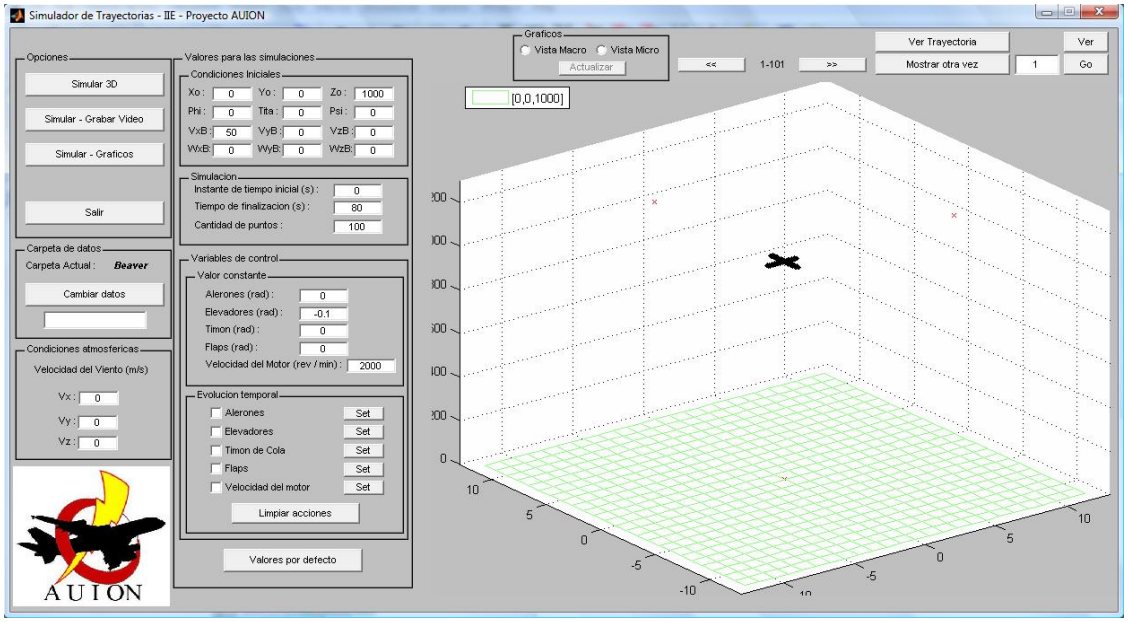


Figura 10.3: Menú para el simulador del lazo abierto del *software* integrado.

▷ **Ventana para el generador de trayectorias.**

Este menú se puede apreciar en la figura 10.4 que se muestra a continuación.

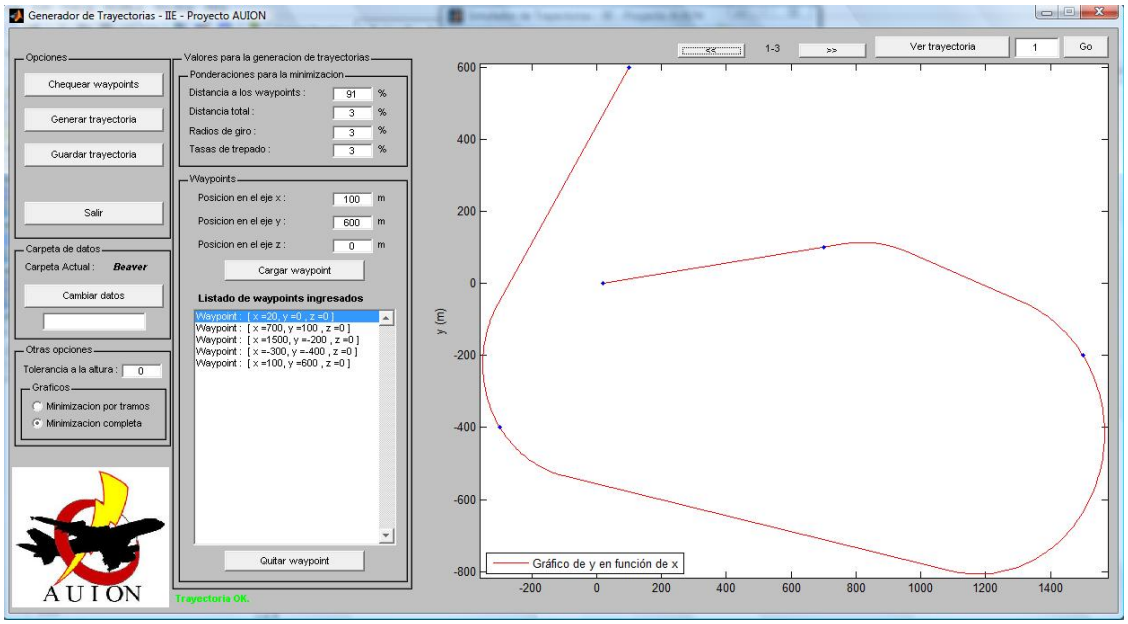


Figura 10.4: Menú para el generador de trayectorias del *software* integrado.

La ventana correspondiente al generador de trayectorias permite el ingreso de todos los parámetros relevantes para el propio generador de trayectorias, a saber, los coeficientes α, β, γ y δ. Se pueden ingresar

y quitar los *waypoints* por los que se desea pasar a la lista, los *waypoints* que queden ingresados dentro de la lista serán los considerados para la generación de la trayectoria al oprimir Generar trayectoria. Finalmente está la opción de que la generación de trayectoria se haga por tramos o utilizando todos los *waypoints*, esto es, si las minimizaciones involucradas en el proceso de generación de trayectorias se hace de a subconjuntos de *waypoints* o si se hace con todos los *waypoints* en una sola minimización.

▷ **Ventana para la simulación del sistema controlado.**

Finalmente, la última ventana principal que nos queda por describir es la correspondiente a la simulación del lazo cerrado. Básicamente en esta ventana se deben ingresar los *inputs* relativos a las dos ventanas anteriores, más los parámetros y las opciones específicas del diseño del controlador. Dentro de los parámetros que son necesarios ingresar se encuentran: la tolerancia máxima que se tendrá antes de que actúe la segunda capa de control regenerando la trayectoria a seguir, la distancia a la cual se considera que un *waypoint* ha sido alcanzado, y la distancia que se utilizará a un *waypoint* ficticio que se utilizará como primer *waypoint* en una eventual regeneración. Por otro lado, se debe escoger un par de opciones para la regeneración de trayectorias, estas son: si se regenerará la trayectoria tanto en círculos como en rectas o si sólo se regenerará la trayectoria al estar intentando seguir una trayectoria en línea recta. La última opción que se debe elegir es si el *waypoint* ficticio utilizado en la regeneración se encontrará en el mismo plano xy que el último punto de la trayectoria real donde se decidió regenerar la trayectoria, o si dicho punto podrá encontrarse a distinta altura (siguiendo el vector tangente en el espacio). En la figura 10.5 que se muestra a continuación se puede apreciar un *screenshot* del menú principal para la simulación para el sistema con controlador.

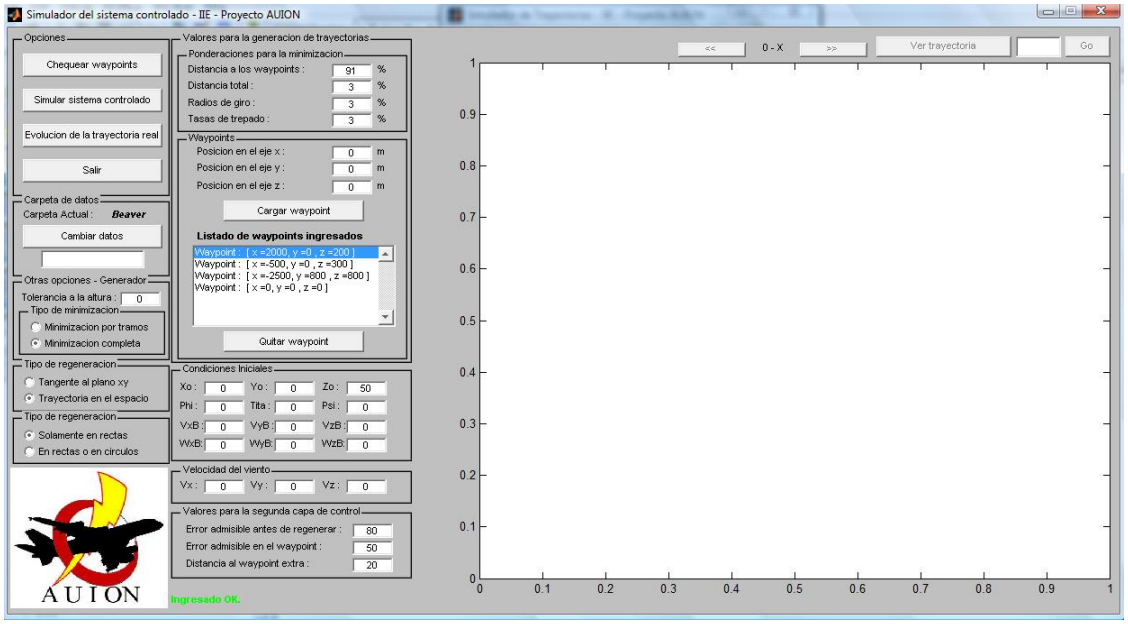


Figura 10.5: Menú para el simulador del lazo cerrado del *software* integrado.

En todas las ventanas mostradas, se puede ver como en el cuadro Carpeta de datos, se puede cambiar fácilmente de avión actual, datos del motor y demás parámetros según lo explicados secciones atrás. Esta carpeta aparece inicializada por defecto a la carpeta del *BEAVER*, avión que se utilizó durante el transcurso de este proyecto.

Capítulo 11
Conclusión Final

En este capítulo presentamos las conclusiones del trabajo realizado y una evaluación de los resultados obtenidos en términos de los objetivos propuestos al inicio del proyecto. Finalmente, concluimos este capítulo con una exposición de algunas posibilidades de trabajo a futuro a partir de lo aquí realizado.

La estructura de este capítulo se separa en distintas secciones correspondientes a los distintos temas abordados, de manera más o menos cronológica, a lo largo del desarrollo de este proyecto. Al final de este capítulo se presenta una sección que pretende resumir lo que fue la gestión del proyecto, en lo referente a los tiempos de ejecución, modalidades de trabajo y objetivos cumplidos respecto de la formulación original.

11.1. Modelado

El primer paso del proyecto consistió en la realización de un modelo físico matemático del sistema a controlar, sobre el cual se construiría el mecanismo de control automático. En los términos en que se planteó el proyecto previamente a su reformulación, se preveía realizar este modelo en base al avión sobre el cual eventualmente se programaría el algoritmo de control automático a construir. Hubiera sido necesario entonces, relevar mediante experimentos sobre este avión las características físicas necesarias para describir su comportamiento utilizando un modelo de este tipo. Luego de la reformulación del proyecto, se decidió realizar el controlador en base a un modelo matemático genérico de avión. Quedaron entonces por fuera del alcance del proyecto las etapas de relevamiento del avión real, así como el acondicionamiento de la electrónica de abordo del mismo y la implementación del programa de control en la plataforma correspondiente. Se planteó por lo tanto realizar un modelo físico genérico que fuera representativo de una gama razonablemente amplia de aviones, en función del cual eventualmente se podría expresar el avión que se propone controlar, una vez realizados los ensayos correspondientes.

Se obtuvo entonces un modelo en variables de estado, a partir de un estudio de la bibliografía existente, que representa el comportamiento físico una avión en situación de vuelo. Este consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales que describe la evolución temporal de un conjunto de variables de estado y un conjunto de variables de control. Todo este modelo depende de un conjunto de parámetros cuyo valor numérico está sujeto al avión particular considerado. Dado que para poder realizar pruebas sobre el modelo es necesario contar con valores numéricos para estos parámetros, se tomaron valores existentes en la bibliografía correspondientes al *BEAVER* de *De Havilland*. Es necesario destacar que todo el trabajo realizado durante el proyecto se hizo sin que ninguno de los resultados obtenidos dependiera del valor numérico de estos parámetros, es decir, del avión particular considerado. Esto se hizo así de manera tal que lo aquí desarrollado pudiera ser aplicado posteriormente al avión con el que se cuente.

El modelo matemático se programó en la plataforma *Simulink* de *Matlab* para realizar simulaciones numéricas del comportamiento del sistema bajo los efectos del controlador. Se condujeron pruebas en esta etapa (antes de la implementación de dicho controlador) para probar la validez de este modelo. Hacemos notar que la validación real del modelo se debe obtener mediante el contraste de los resultados obtenidos a partir de las simulaciones con lo observado a través de experimentos. Dado que no contamos con la plataforma experimental necesaria, esta validación se obtuvo mediante la comparación de estos resultados con los que presentan otros simuladores de características similares, así como del contraste con los resultados esperados

del análisis de la bibliografía. Queda pendiente entonces una etapa de validación final del modelo sobre una plataforma experimental. Las comparación con los resultados esperados de acuerdo con la bibliografía o otras plataformas de simulación resultó favorable.

11.2. Generador de trayectorias

El primer paso del algoritmo de control consiste en la generación de una trayectoria a seguir por el avión que recorra el conjunto de *waypoints* ordenados especificados por el usuario. Se decidió generar dicha trayectoria de manera tal que el seguimiento de la misma por parte del avión fuera sencillo de controlar.

El mecanismo elegido consiste en la obtención de la trayectoria como la concatenación de segmentos de recta recorridas a velocidad constante y segmentos de circunferencia recorridos a velocidad angular constante. El problema de generación de trayectorias se redujo entonces a elegir de todas las posibles trayectorias expresadas en estos términos la que recorra de manera más eficiente el conjunto de *waypoints* especificados por el usuario, respetando ciertas restricciones existentes debido a lo que es físicamente realizable por un avión en vuelo en la realidad. La medida de eficiencia considerada se define en términos de qué tan cerca pasa la trayectoria por los *waypoints* especificados y qué tan corta es la distancia total recorrida. Este problema se resolvió asignándole un costo a cada una de las trayectorias posibles expresadas en términos de rectas y circunferencias, eligiendo la función costo de manera tal que su valor mínimo este asociado a aquella trayectoria óptima desde el punto de vista recién definido. Se implementó entonces en *Matlab* un algoritmo de minimización que encuentra, dada una serie de *waypoints* especificados por el usuario, la trayectoria óptima minimizando este costo. El algoritmo de generación de trayectorias genera por último la trayectoria a seguir expresada en función de las variables de estado del modelo físico del sistema.

Este algoritmo de generación de trayectorias se probó para una gran variedad de casos obteniéndose resultados muy satisfactorios, en términos de los objetivos deseados en cuanto a cercanía del recorrido a los *waypoints*, distancia total recorrida, o restricciones físicas, incluso para una cantidad de *waypoints* considerable.

11.3. Sistema de Control

Obtenida la trayectoria a seguir, el problema de control consiste en lograr un seguimiento de la misma de manera estable frente a perturbaciones debidas, o bien a fuentes externas como pueden ser variación en las condiciones atmosféricas o aspectos no considerados en el modelo, o bien variaciones en las condiciones iniciales del sistema con respecto a las esperadas. Se implementó a tales efectos un controlador por realimentación de estados utilizando un algoritmo *Gain Scheduling*, de manera de actualizar el controlador con cada cambio de punto de operación que sucede al pasar de recorrer una recta o una circunferencia.

El algoritmo de control implementado cumple con dos características fundamentales. La primera es que su funcionamiento no depende del avión particular considerado, sino que en principio es válido mientras el modelo utilizado represente lo suficientemente bien la realidad física del sistema bajo consideración. Todos los cálculos se realizan en función de los parámetros del modelo que definen dicho sistema y funcionará de la misma manera para distintos valores numéricos de dichos parámetros. Esto es fundamental para que el sistema aquí propuesto pueda ser utilizado en el futuro para el avión del que se dispone. La segunda es que puede utilizarse para controlar el sistema alrededor de cualquier trayectoria especificada en los mismos términos en que es obtenida por el generador.

El *software* se programó utilizando *Matlab*. Este recibe la trayectoria a seguir a partir del generador de trayectorias y debe obtener la sucesión de controladores lineales para cada punto de operación especificado en dicha trayectoria. El primer paso para la implementación de dicho controlador consistió en la obtención de un modelo lineal para el comportamiento del sistema alrededor de los puntos de operación que se consideran. Este modelo lineal se implementó en *Matlab* a partir de cálculos analíticos sobre el MVE, por lo que se tiene la flexibilidad necesaria para la aplicación futura en otra plataforma. A partir de este modelo lineal se realizó

el algoritmo de control *Gain Scheduling* resolviendo para cada punto de operación el problema del regulador cuadrático lineal utilizando para esto un paquete de *Matlab* que provee la solución de este problema.

Además del lazo de control lineal, se agregó al algoritmo un segundo lazo de control mediante regeneración de trayectorias. Dado que la aproximación lineal sobre la cual se construye la realimentación de estados es válida sólo para pequeños entornos del punto de operación, el sistema de control decide regenerar la trayectoria cuando el vuelo se aleja demasiado de la trayectoria deseada. Este segundo lazo funciona en paralelo con el lazo de control lineal y regenera la trayectoria, utilizando el mismo algoritmo que se usa para generarla originariamente, cuando el sistema se aleja demasiado de su punto de operación.

El algoritmo de control completo se implementó entonces utilizando rutinas de *Matlab* y modelos de *Simulik*, y se integró al modelo físico del sistema, a los efectos de simular numéricamente el comportamiento del vuelo bajo el efecto del sistema de control automático. Los resultados obtenidos a partir de estas pruebas resultan satisfactorios en cuanto al seguimiento estable de la trayectoria deseada. Sin embargo, para la verdadera validación del sistema de control es necesaria su implementación en el sistema físico real a controlar. Nuevamente, esto será posible una vez se tenga pronta la plataforma experimental necesaria a tales efectos, sus características relevadas e instauradas en este modelo y el algoritmo de control programado en la computadora de abordo. Aún así, nos encontramos satisfechos con los resultados obtenidos a partir de las simulaciones.

11.4. Paquete de *Software* - Interfase Gráfica

Todas la rutinas de *Matlab* y modelos de *Simulink* utilizados se integran en un paquete de *software* junto con un manual que documenta cada uno de estos componentes minuciosamente. Se implementó además, sobre *Matlab*, una interfase gráfica que permite al usuario utilizar las prestaciones implementadas de simulación, generación de trayectorias, y control simulado sin tener que lidiar directamente con el código.

Creemos que el trabajo realizado constituye, además de una posible solución del problema de control propuesto, una plataforma de prueba para la realización de futuras investigaciones en el área.

11.5. Trabajo a futuro

El trabajo realizado constituye parte de un proyecto más ambicioso dentro del área de control. El primer paso para poner en práctica lo aquí expuesto debe ser la realización de un relevamiento experimental del avión con el que se cuenta para poder describirlo en términos del modelo aquí propuesto. Se podrían entonces realizar pruebas mediante las cuales sería posible obtener una validación experimental de dicho modelo. Una vez acondicionados los sensores y actuadores con los que cuenta la plataforma de vuelo sería posible implementar el algoritmo de control en el microprocesador del que se dispone. Se debe entonces estudiar la viabilidad computacional de portar el *software* implementado dentro de este proyecto a dicha plataforma.

En lo que respecta a la estrategia de control utilizadas, existen muchas posibilidades para explorar. Una de estas consiste en evaluar la utilización de observadores de estados. En el trabajo realizado, se supuso que es posible medir de manera exacta la totalidad del vector de estados instante a instante. Difícilmente sea posible lograr esto en la realidad. Esta deficiencia debe ser considerada dentro de la estrategia de control a partir de un estudio de cómo se realiza la medición de las variables de estado en el modelo físico real.

11.6. Gestión del Proyecto

En su formulación original el proyecto trazado era bastante más abarcativo que el proyecto finalmente llevado a cabo. Esto es adjudicable a varias causas, siendo la principal de ellas la reformulación que se hizo en setiembre de 2008 debido a la caída de algunos supuestos hechos al comienzo del proyecto. Sin embargo deben considerarse también otros factores influyentes, como que se subestimaron en varias ocasiones los tiempos para ejecutar ciertas tareas. Un ejemplo paradigmático de esto fue la formulación original del proyecto que, aún si no hubieran fallado los supuestos realizados, hubiera tomado al menos 2 años en su ejecución.

A pesar de lo dicho en el párrafo anterior, el grupo logró encontrar una dinámica de funcionamiento que se adaptó a los tiempos disponibles y que conformó a todos los integrantes del grupo. Se logró mantener así un ritmo de trabajo que llevó al proyecto que se presenta en este documento, y cuyos resultados satisficieron ampliamente las expectativas aunque no se hayan alcanzado todos los objetivos incialmente planteados.

A modo de autocrítica y conclusión, el grupo considera que podría haberse afrontado desde una etapa más temprana del proyecto los aspectos referentes a la coordinación y gestión del mismo, lo que hubiera permitido un diagnóstico más diligente de los problemas de tiempos y supuestos que eventualmente surgieron.

Apéndice A
Cálculos realizados

Apéndice destinado al detalle sobre los cálculos realizados para la obtención de algunos de los resultados que se consideran de importancia para este trabajo.

A.1. Cálculos relativos a las linealizaciones

En esta sección se enumeran los cálculos relativos a la obtención de las linealizaciones jacobianas del MVE. Dado que dicho MVE es de tamaño considerable y que además las ecuaciones involucradas son bastante complicadas y no lineales, se debió realizar estas linealizaciones de manera que incluyeran la menor cantidad de cuentas posibles, o por lo menos, pudiera hacerse parte por parte.

En las líneas de lo anterior debimos buscar la manera más convenientes de obtener las derivadas necesarias de $\dot{x}$ de la manera más conveniente. Observando un poco la forma del MVE podemos ver que si bien se cumple $\dot{x} = f(x, u)$ existe una forma más conveniente de expresar esta dependencia como:

$$\dot{x} = f(x, u) = f^{\star}(x, F, T) \qquad con \qquad \begin{cases} F = f_1(x, u) \\ T = f_2(x, u) \end{cases} \tag{A.1}$$

Donde hemos hecho incapié en que la dependencia en u entra a la ecuación por las nuevas variables F y T que claramente representan a los vectores de la fuerza y el torque neto sobre el sistema, y también depende del vector de estados x. Como se desprende de la ecuación 5.3, para calcular las linealizaciones deberemos calcular los términos:

$$\left.\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j}\right|_{(x_0, u_0)} \qquad \left.\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial u_k}\right|_{(x_0, u_0)} \tag{A.2}$$

Donde f_i es la i-ésima componente del vector f, x_j es el j-ésimo elemento del vector de estado x y u_k es el k-ésimo elemento del vector de entradas u. Para después poder evaluarlos en las trayectorias de operación x_0 y u_0. El cálculo de estas derivadas lo haremos de ahora en adelante utilizando las siguientes ecuaciones A.3 y A.4, las cuales tienen su origen en la regla de la cadena.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i^{\star}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial f_i^{\star}}{\partial F_i}\right)\left(\frac{\partial f_{1i}}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial f_i^{\star}}{\partial T_i}\right)\left(\frac{\partial f_{2i}^{\star}}{\partial x_j}\right) \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial f_i^{\star}}{\partial F_i}\right)\left(\frac{\partial f_{1i}}{\partial u_k}\right) + \left(\frac{\partial f_i^{\star}}{\partial T_i}\right)\left(\frac{\partial f_{2i}^{\star}}{\partial u_k}\right) \tag{A.4}$$

Derivadas que se deben hacer para todas las f_i y para cada x_j y u_k. Se debe notar en este punto que estas derivadas definen dos matrices, una por $\{\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j}\}$ con $i, j = 1\, a\, 12$ y la otra por $\{\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_k}\}$ con $i = 1\, a\, 12$ y $k = 1\, a\, 5$. Estas matrices son las matrices A y B de la ecuación 5.4.

A.1.1. Linealización del MVE en torno a una trayectoria de operación

El MVE aparece sintetizado en la ecuación 3.67. Basados en estas ecuaciones y el procedimiento explicado expondremos a continuación la forma de la matriz A y B para la linealización en torno a una trayectoria de operación genérica.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & A_{12} & A_{13} & \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & A_{22} & \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & A_{24} \\ \hline
\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \hline
\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & A_{43} & A_{44}
\end{array}\right) \tag{A.5}$$

$$B = \left(\begin{array}{c}
\begin{matrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{matrix} \\ \hline
B_{31} \\ \hline
B_{41}
\end{array}\right) \tag{A.6}$$

A continuación mostramos las matrices A_{ij} y B_{ij} relevantes.

▷ **Matriz** $A_{12} \longrightarrow A_{12} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$A_{12} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{12}^{(1)} & A_{12}^{(2)} & A_{12}^{(3)} \end{array}\right) \tag{A.7}$$

Siendo $A_{12}^{(1)}$, $A_{12}^{(2)}$ y $A_{12}^{(3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$A_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} (\sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi)v_{By} + (-\sin\theta\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi)v_{Bz} \\ (\sin\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi)v_{By} - (\sin\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi)v_{Bz} \\ \cos\theta\cos\varphi v_{By} - \cos\theta\sin\varphi v_{Bz} \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

$$A_{12}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\psi v_{Bx} + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi v_{By} + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi v_{Bz} \\ -\sin\theta\sin\psi v_{Bx} + \cos\theta\sin\psi\sin\varphi v_{By} + \cos\theta\sin\psi\cos\varphi v_{Bz} \\ -\cos\theta v_{Bx} - \sin\theta\sin\varphi v_{By} - \sin\theta\cos\varphi v_{Bz} \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

$$A_{12}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi v_{Bx} - (\sin\theta\sin\varphi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi)v_{By} - (\sin\theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi)v_{Bz} \\ \cos\theta\cos\psi v_{Bx} + (\sin\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi)v_{By} + (\sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi)v_{Bz} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

▷ **Matriz** $A_{13} \longrightarrow A_{13} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$A_{13} = H_B^I = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

▷ **Matriz** $A_{22} \longrightarrow A_{22} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\tan\theta w_{By} - \sin\varphi\tan\theta w_{Bz} & (\sin\varphi/\cos^2\theta)w_{By} + (\cos\varphi/\cos^2\theta)w_{Bz} & 0 \\ -\sin\varphi w_{By} - \cos\varphi w_{Bz} & 0 & 0 \\ (\cos\varphi/\cos\theta)w_{By} - (\sin\varphi/\cos\theta)w_{Bz} & (\sin\varphi\tan\theta/\cos\theta)w_{By} + (\cos\varphi\tan\theta/\cos\theta)w_{Bz} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

▷ **Matriz** $A_{24} \longrightarrow A_{24} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$A_{24} = M = \begin{pmatrix} 1 & \sin\varphi\tan\theta & \cos\varphi\tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi/\cos\theta & \cos\varphi/\cos\theta \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

Para terminar este desarrollo, es necesario linealizar las ecuaciones 3.12 y 3.14 en términos de $\vec{u}$ y $\vec{x}$. A su vez, para esto es necesario referirnos a las ecuaciones que describen a las fuerzas y momentos en términos de $\vec{u}$ y $\vec{x}$. Estas ecuaciones son las que se desarrollaron en la sección 3.4. Antes de empezar dicho desarrollo, presentaremos la forma de las matrices A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{43}, A_{44}, B_{31} y B_{41} cuando asumimos $F\vec{neto} = 0$ y $T\vec{neto} = 0$. A estas matrices las denominaremos A^*_{32}, A^*_{33}, A^*_{34}, A^*_{43}, A^*_{44}, B^*_{31} y B^*_{41} respectivamente.

▷ **Matrices** A^*_{32}**,** A^*_{43}**,** B^*_{31} **y** $B^*_{41} \longrightarrow A^*_{32}, A^*_{43}, B^*_{31}, A^*_{22} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$A^*_{32} = A^*_{43} = B^*_{31} = B^*_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

▷ **Matrices** A^*_{33} **y** $A^*_{34} \longrightarrow A^*_{33}, A^*_{34} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$A^*_{33} = \begin{pmatrix} 0 & -w_{Bz} & w_{By} \\ w_{Bz} & 0 & -w_{Bx} \\ -w_{By} & w_{Bx} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

$$A^*_{34} = \begin{pmatrix} 0 & v_{Bz} & -v_{By} \\ -v_{Bz} & 0 & v_{Bx} \\ v_{By} & -v_{Bx} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

▷ **Matriz** $A^*_{44} \longrightarrow A^*_{44} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$A^*_{44} = I^{-1}_{GB} \left(\begin{array}{c|c|c} A^{*(1)}_{44} & A^{(*2)}_{44} & A^{(*3)}_{44} \end{array} \right) \tag{A.17}$$

Siendo $A_{44}^{(*1)}$, $A_{44}^{(*2)}$ y $A_{44}^{(*3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$A_{44}^{(*1)} = \begin{pmatrix} -(w_{By}I_{xz} - w_{Bz}I_{xy}) \\ -(w_{Bz}(I_{xx} - I_{zz})) - 2w_{Bx}I_{xz} - w_{By}I_{yz}) \\ -(w_{By}(I_{yy} - I_{xx}) + 2w_{Bx}I_{xy} + w_{Bz}I_{yz}) \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

$$A_{44}^{(*2)} = \begin{pmatrix} -(w_{Bx}I_{xz} + 2w_{By}I_{yz} + w_{Bz}(I_{zz} - I_{yy})) \\ -(w_{Bz}I_{xy} - w_{Bx}I_{yz}) \\ -(w_{Bx}(I_{yy} - I_{xx}) - 2w_{By}I_{xy} - w_{Bz}I_{xz}) \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

$$A_{44}^{(*3)} = \begin{pmatrix} -(w_{By}(I_{zz} - I_{yy}) - 2w_{Bz}I_{yz} - w_{Bx}I_{xy}) \\ -(2w_{Bz}I_{xz} + w_{By}I_{xy} + w_{Bx}(I_{xx} - I_{zz})) \\ -(w_{Bx}I_{yz} - w_{By}I_{xz}) \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

Resta para hallar la forma completa de dichas matrices linealizar la dependencia de la fuerza y momento neto respecto de los distintos elementos de $\vec{x}$ y $\vec{u}$. Refiriéndonos nuevamente a la sección 3.4, podemos ver que esencialmente tenemos tres contribuciones a dichas magnitudes: el peso, las fuerzas aerodinámicas y el motor.

Dejando momentáneamente de lado la influencia de dichas fuerzas en la matriz B, y a efectos de clarificar las cuentas definiremos las matrices P_{ij}, F_{ij} y M_{ij}, que representarán las linealizaciones de las tres contribuciones a la fuerza y momento neto, respecto de las variables de $\vec{x}$. El subíndice $i = \{3, 4\}$ representa si nos referimos a la contribución en la fuerza ($i = 3$) o momento ($i = 4$), y el subíndice $j = \{2, 3, 4\}$ refiere a la linealización respecto de los ángulos de Euler ($j = 2$), la velocidad ($j = 3$) o la velocidad angular ($j = 4$). De este modo podemos luego calcular las matrices necesarias para la linealización de la forma que se muestra a continuación en las ecuaciones A.21.

$$\boxed{\begin{aligned} A_{3j} &= A_{3j}^{*} + (P_{3j} + F_{3j} + M_{3j})/M_{tot} \\ A_{4j} &= A_{4j}^{*} + I_{GB}^{-1}(P_{4j} + F_{4j} + M_{4j}) \end{aligned}} \tag{A.21}$$

▷ **Matrices P_{3j} y P_{4j} $\longrightarrow P_{3j}, P_{4j} \in \mathcal{M}^{3x3}$:**

Las matrices P_{3j} y P_{4j} son de fácil cálculo, pues el peso no tiene contribución al momento neto y su contribución a la fuerza expresada en el SB es una función únicamente de los ángulos de Euler. Usando la ecuación 3.30 obtenemos:

$$P_{33} = P_{34} = P_{42} = P_{43} = P_{44} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.22}$$

$$P_{32} = \begin{pmatrix} 0 & -mgcos(\theta) & 0 \\ mgcos(\theta).cos(\phi) & -mgsen(\theta).sen(\phi) & 0 \\ -cos(\theta).sen(\phi) & -sen(\theta).cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \tag{A.23}$$

Para calcular las matrices faltantes, es bueno recordar que tanto la fuerza aerodinámica como la del motor se pueden expresar como un polinomio de las variables $\{\alpha, \beta, \kappa, P_{Din}\}$ siendo P_{Din} la presión dinámica que es de la forma $P_{Din} = \frac{\rho|\vec{v_r}|^2}{2}$, además de las componentes de los vectores $\vec{x}$ y $\vec{u}$. Por lo tanto, derivar respecto de estas variables es una tarea simple y para llegar a las matrices buscadas es necesario ver como dependen dichas variables de las componentes del vector $\vec{x}$.

Las derivadas relevantes (no nulas) de las variables expresadas anteriormente respecto de las componentes de $\vec{x}$ se presentan a continuación (donde se usa $\vec{v_R} = \vec{v_v} - \vec{v_B}$):

- $\dfrac{\partial \alpha}{\partial v_{Bx}} = -cos(\alpha)^2.(v_{Rz}/v_{Rx}^2)$
- $\dfrac{\partial \alpha}{\partial v_{Bz}} = -cos(\alpha)^2.(1/v_{Rx})$
- $\dfrac{\partial \beta}{\partial v_{Bx}} = -cos(\beta)^2.(v_{Ry}.v_{Rx}/(v_{Rx}^2 + v_{Rz}^2)^{3/2})$
- $\dfrac{\partial \beta}{\partial v_{By}} = -cos(\beta)^2/(v_{Rx}^2 + v_{Rz}^2)^{1/2})$
- $\dfrac{\partial \beta}{\partial v_{Bz}} = -cos(\beta)^2.(v_{Ry}.v_{Rz}/(v_{Rx}^2 + v_{Rz}^2)^{3/2})$
- $\dfrac{\partial P_{Din}}{\partial v_{Bx}} = \rho.v_{Bx}$
- $\dfrac{\partial P_{Din}}{\partial v_{By}} = \rho.v_{By}$
- $\dfrac{\partial P_{Din}}{\partial v_{Bz}} = \rho.v_{Bz}$
- $\dfrac{\partial \kappa}{\partial v_{Bx}} = -3C_2 v_{Bx} P(z)/(P_{Din}|v_r|^3)$
- $\dfrac{\partial \kappa}{\partial v_{By}} = -3C_2 v_{By} P(z)/(P_{Din}|v_r|^3)$
- $\dfrac{\partial \kappa}{\partial v_{Bz}} = -3C_2 v_{Bz} P(z)/(P_{Din}|v_r|^3)$

Como todas las fuerzas y momentos no dependen explícitamente de $\vec{v_B}$ sino de $\vec{v_r}$, se cumple la siguiente relación para cualquier fuerza o momento (representada en la ecuación A.24 por la función q):

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial v_{Bj}} = -\frac{\partial q}{\delta v_{vj}}} \tag{A.24}$$

Siguiendo con las derivadas relevante, el resto de las derivadas se pueden obtener aplicando la regla mostrada en la ecuación A.24. En lo siguiente las matrices C_F y C_T son las matrices de coeficientes para las fuerzas y los momentos aerodinámicos respectivamente, mientras que la matriz C_M es la matriz de coeficientes para fuerzas y momentos del motor. Estas matrices tienen el formato con el cual se deben ingresar los datos en los archivos *.txt*.

- $\dfrac{\partial F_{ax}}{\partial |\vec{v_r}|} = (\frac{2F_{ax}}{|\vec{v_r}|} + P_{Din} S(\frac{-C_F(1,7)\bar{c} w_{By}}{|\vec{v_r}|^2}))$
- $\dfrac{\partial F_{ax}}{\partial \alpha} = -(P_{Din} S(C_F(1,2) + 2C_F(1,3)\alpha + 3\alpha^2 C_F(1,4) + C_F(1,15)\delta_f))$
- $\dfrac{\partial F_{ay}}{\partial |\vec{v_r}|} = (\frac{2F_{ay}}{|\vec{v_r}|} + P_{Din} S b((-C_F(2,6) w_{Bx} - C_F(2,8) w_{Bz})/(2|\vec{v_r}|^2))$
- $\dfrac{\partial F_{ay}}{\partial \alpha} = P_{Din} S C_F(2,14)\delta_r$

- $\frac{\partial F_{ay}}{\partial \beta} = P_{Din} S C_F(2,5)$
- $\frac{\partial F_{az}}{\partial |\vec{v_r}|} = (\frac{2F_{az}}{|\vec{v_r}|} + P_{Din} S(-C_F(3,7)\bar{c} w_{By}/|\vec{v_r}|^2)$
- $\frac{\partial F_{az}}{\partial \alpha} = P_{Din} S(C_F(3,2) + 3\alpha^2 C_F(3,4) + C_F(3,15)\delta_f)$
- $\frac{\partial F_{az}}{\partial \beta} = 2\beta P_{Din} S C_F(3,13)\delta_e$
- $\frac{\partial T_{ax}}{\partial |\vec{v_r}|} = (\frac{2T_{ax}}{|\vec{v_r}|} - P_{Din} S(b/2)(w_{Bz} b/(2|\vec{v_r}|^2) C_T(1,9) - w_{Bx} b/(2|\vec{v_r}|^2) C_T(1,7)$
- $\frac{\partial T_{ax}}{\partial \alpha} = P_{Din} S(b/2) C_T(1,14)\delta_a$
- $\frac{\partial T_{ax}}{\partial \beta} = P_{Din} S(b/2) C_T(1,4)$
- $\frac{\partial T_{ay}}{\partial |\vec{v_r}|} = (\frac{2T_{ax}}{|\vec{v_r}|} - P_{Din} S\bar{c}(w_{Bz} b/(2 * |\vec{v_R}|^2) C_T(2,9) - w_{By}\bar{c}/(|\vec{v_r}|^2) C_T(2,8))$
- $\frac{\partial T_{ay}}{\partial \alpha} = P_{Din} S\bar{c}(C_T(2,2) + C_T(2,3)2\alpha)$
- $\frac{\partial T_{ay}}{\partial \beta} = P_{Din} S\bar{c} C_T(2,5)2\beta$
- $\frac{\partial T_{az}}{\partial |\vec{v_r}|} = (\frac{2T_{ax}}{|\vec{v_r}|} - PDinS\bar{c}(w_{Bz} b/(2|\vec{v_r}|^2) C_T(2,9) - w_{By}\bar{c}/(|\vec{v_r}|^2) C_T(2,8))$
- $\frac{\partial T_{az}}{\partial \beta} = P_{Din} S(b/2)(C_T(3,4) + C_T(3,6)3\beta^2)$
- $\frac{\partial F_{px}}{\partial |\vec{v_r}|} = (\frac{2F_{ax}}{|\vec{v_r}|} + P_{Din} S(\frac{-C_F(1,7)\bar{c} w_{By}}{|\vec{v_r}|^2}))$
- $\frac{\partial F_{px}}{\partial \alpha} = -(P_{Din} S(C_F(1,2) + 2C_F(1,3)\alpha + 3\alpha^2 C_F(1,4) + C_F(1,15)\delta_F))$
- $\frac{\partial F_{pz}}{\partial |\vec{v_r}|} = 2P_{Din} S C_M(3,1)\kappa/|\vec{v_r}|$
- $\frac{\partial F_{px}}{\partial \kappa} = P_{Din} S(C_M(1,1) + C_M(1,3)\alpha 2\kappa)$
- $\frac{\partial F_{pz}}{\partial \kappa} = P_{Din} S C_M(3,1)$
- $\frac{\partial \kappa}{\partial n} = 0{,}09975 C_2/(P_{Din}|\vec{v_r}|)$
- $\frac{\partial \kappa}{\partial |\vec{v_r}|} = -3C_2 P(z)/(P_{Din}|\vec{v_r}|^2)$
- $\frac{\partial T_{px}}{\partial \kappa} = P_{Din} S(b/2) C_M(4,4)\alpha^2$

$$
\begin{aligned}
\blacktriangleright \quad \frac{\partial T_{px}}{\partial \alpha} &= P_{Din} S (b/2) C_M(4,4) 2\alpha\kappa \\
\blacktriangleright \quad \frac{\partial T_{px}}{\partial |\vec{v_r}|} &= 2 P_{Din} S (b/2) C_M(4,4) \alpha^2 \kappa / |\vec{v_r}| \\
\blacktriangleright \quad \frac{\partial T_{py}}{\partial \kappa} &= P_{Din} S \bar{c} C_M(5,1) \\
\blacktriangleright \quad \frac{\partial T_{py}}{\partial |\vec{v_r}|} &= 2 P_{Din} S \bar{c} C_M(5,1) \kappa / |\vec{v_r}| \\
\blacktriangleright \quad \frac{\partial T_{pz}}{\partial \kappa} &= 3 P_{Din} S (b/2) C_M(6,2) \kappa^2 \\
\blacktriangleright \quad \frac{\partial T_{pz}}{\partial |\vec{v_r}|} &= 2 P_{Din} S (b/2) C_M(6,2) \kappa^3 / |\vec{v_r}|
\end{aligned}
$$

De las derivadas calculadas podemos deducir las siguientes formulaciones para las matrices buscadas.

▷ **Matrices** F_{32}**,** M_{32}**,** M_{34} **y** $M_{44} \longrightarrow F_{32}, M_{32}, M_{34}, M_{44} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$
F_{32} = M_{32} = M_{34} = M_{44} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.25}
$$

▷ **Matriz** $F_{34} \longrightarrow F_{34} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$
F_{34} = \frac{P_{Din} S}{|v_r|} \begin{pmatrix} 0 & C_F(1,7)\bar{c} & 0 \\ C_F(2,6) b/2 & 0 & C_F(2,8) b/2 \\ 0 & C_F(3,7)\bar{c} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.26}
$$

▷ **Matriz** $F_{44} \longrightarrow F_{44} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$
F_{44} = \frac{P_{Din} S}{|v_r|} \begin{pmatrix} C_T(1,7) b^2/4 & 0 & C_T(1,9) b^2/4 \\ 0 & C_T(2,8)\bar{c}^2 & C_T(2,9)\bar{c} b/2 \\ C_T(3,7) b^2/4 & C_T(3,8) b\bar{c}/2 & C_T(3,9) b^2/4 \end{pmatrix} \tag{A.27}
$$

▷ **Matriz** $F_{33} \longrightarrow F_{33} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$
F_{33} = \begin{pmatrix} & | & & | & \\ F_{33}^{(1)} & | & F_{33}^{(2)} & | & F_{33}^{(3)} \\ & | & & | & \end{pmatrix} \tag{A.28}
$$

Siendo $F_{33}^{(1)}$, $F_{33}^{(2)}$ y $F_{33}^{(3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$F_{33}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{ax}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}} \\ \frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{ay}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}} + \frac{\partial F_{ay}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bx}} \\ \frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{az}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{az}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}} + \frac{\partial F_{az}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bx}} \end{pmatrix} \tag{A.29}$$

$$F_{33}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{ax}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{By}} \\ \frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{ay}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{By}} + \frac{\partial F_{ay}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{By}} \\ \frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{az}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{az}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{By}} + \frac{\partial F_{az}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{By}} \end{pmatrix} \tag{A.30}$$

$$F_{33}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{ay}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bz}} \\ \frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{ay}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bz}} + \frac{\partial F_{ay}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bz}} \\ \frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{az}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{az}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bz}} + \frac{\partial F_{az}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bz}} \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

▷ **Matriz** $M_{33} \longrightarrow M_{33} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$M_{33} = \begin{pmatrix} \frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{px}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{px}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}} & \frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{py}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{py}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{By}} & \frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{pz}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|} & \frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|} & \frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial F_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

▷ **Matriz** $F_{34} \longrightarrow F_{34} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$F_{34} = \begin{pmatrix} F_{34}^{(1)} & \Big| & F_{34}^{(2)} & \Big| & F_{34}^{(3)} \end{pmatrix} \tag{A.33}$$

Siendo $F_{34}^{(1)}$, $F_{34}^{(2)}$ y $F_{34}^{(3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$F_{34}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bx}} \\ \frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bx}} \\ \frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{az}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{az}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bx}} \end{pmatrix} \tag{A.34}$$

$$F_{34}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{By}} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{By}} \\ \frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{By}} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{By}} \\ \frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{az}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{az}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{By}} \end{pmatrix} \tag{A.35}$$

$$F_{34}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bz}} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bz}} \\ \frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bz}} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bz}} \\ \frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\frac{\partial T_{az}}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{az}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{Bz}} \end{pmatrix} \tag{A.36}$$

▷ **Matriz** $M_{34} \longrightarrow M_{34} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$M_{34} = \begin{pmatrix} M_{34}^{(1)} & \vdots & M_{34}^{(2)} & \vdots & M_{34}^{(3)} \end{pmatrix} \tag{A.37}$$

Siendo $M_{34}^{(1)}$, $M_{34}^{(2)}$ y $M_{34}^{(3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$M_{34}^{(1)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T_{px}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}} \\ \left(\frac{\partial T_{py}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{py}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|} \\ \left(\frac{\partial T_{pz}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{rx}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.38}$$

$$M_{34}^{(2)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T_{px}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{By}} \\ \left(\frac{\partial T_{py}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{py}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|} \\ \left(\frac{\partial T_{pz}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{ry}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.39}$$

$$M_{34}^{(3)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T_{px}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bz}} \\ \left(\frac{\partial T_{py}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{py}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|} \\ \left(\frac{\partial T_{pz}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{v_{rz}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.40}$$

Finalmente, nos queda calcular las matrices B_{ij}. Definiremos para esto las matrices M_{ij}^* y F_{ij}^*, con

$i = \{3,4\}$ y $j = \{1,2\}$ de modo de calcular B_{ij} de la forma que se muestra a continuación en la ecuación A.41. Donde el sub-índice $j = 1$ implica linealización frente a las entradas controlables y el sub-índice $j = 2$ la linealización frente a las entradas no controlables.

$$\boxed{B_{ij} = B^*_{ij} + F^*_{ij} + M^*_{ij}} \tag{A.41}$$

En este caso, la dependencia de las fuerzas y momentos respecto de las entradas es polinomial, por lo que la derivación de las matrices de interés se puede hacer de forma veloz.

▷ **Matriz** $F^*_{31} \longrightarrow F^*_{31} \in \mathcal{M}^{3x5}$**:**

$$F^*_{31} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} F^{(*1)}_{31} & F^{(*2)}_{31} & F^{(*3)}_{31} & F^{(*4)}_{31} & F^{(*5)}_{31} \end{array} \right) \tag{A.42}$$

Siendo $F^{(*1)}_{31}$, $F^{(*2)}_{31}$, $F^{(*3)}_{31}$, $F^{(*4)}_{31}$ y $F^{(*5)}_{31}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$F^{(*1)}_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_{Din} S C_F(2,9) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.43}$$

$$F^{(*2)}_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{Din} S \left(C_F(3,10) + C_F(3,13)\beta^2 \right) \end{pmatrix} \tag{A.44}$$

$$F^{(*3)}_{31} = \begin{pmatrix} P_{Din} S C_F(1,11) \\ P_{Din} S \left(C_F(2,11) + C_F(2,14)\alpha \right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.45}$$

$$F^{(*4)}_{31} = \begin{pmatrix} P_{Din} S \left(C_F(1,12) + C_F(1,15)\alpha \right) \\ 0 \\ P_{Din} S \left(C_F(3,12) + C_F(3,15)\alpha \right) \end{pmatrix} \tag{A.46}$$

$$F^{(*5)}_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.47}$$

▷ **Matriz** $F^*_{32} \longrightarrow F^*_{32} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$F^*_{32} = \left(\begin{array}{c|c|c} F^{(*1)}_{32} & F^{(*2)}_{32} & F^{(*3)}_{32} \end{array} \right) \tag{A.48}$$

Siendo $F_{32}^{(*1)}$, $F_{32}^{(*2)}$ y $F_{32}^{(*3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$F_{32}^{(*1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \dfrac{\partial F_{ax}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v_{vx}}\right) v_{Bx} \\ \dfrac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \dfrac{\partial F_{ay}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}}\right) + \dfrac{\partial F_{ay}}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v_{vx}}\right) \\ \dfrac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{az}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \dfrac{\partial F_{az}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v_{vx}}\right) + \dfrac{\partial F_{az}}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v_{vx}}\right) \end{pmatrix} \tag{A.49}$$

$$F_{32}^{(*2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) v_{By} \\ \dfrac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \dfrac{\partial F_{ay}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v_{vy}}\right) + \dfrac{\partial F_{ay}}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v_{Vy}}\right) \\ \dfrac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{az}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \dfrac{\partial F_{az}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v_{vy}}\right) + \dfrac{\partial F_{az}}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v_{vy}}\right) \end{pmatrix} \tag{A.50}$$

$$F_{32}^{(*3)} = \begin{pmatrix} \dfrac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \dfrac{\partial F_{ax}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v_{vz}}\right) v_{Bz} \\ \dfrac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \dfrac{\partial F_{ay}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v_{vz}}\right) + \dfrac{\partial F_{ay}}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v_{vz}}\right) \\ \dfrac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\left(\dfrac{\partial F_{az}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \dfrac{\partial F_{az}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v_{vz}}\right) + \dfrac{\partial F_{az}}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v_{vz}}\right) \end{pmatrix} \tag{A.51}$$

▷ **Matriz** $M_{31}^{*} \longrightarrow M_{31}^{*} \in \mathcal{M}^{3x5}$**:**

$$M_{31}^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial F_{px}}{\partial\kappa}\dfrac{\partial\kappa}{\partial n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial F_{pz}}{\partial\kappa}\dfrac{\partial\kappa}{\partial n} \end{pmatrix} \tag{A.52}$$

▷ **Matriz** $M_{32}^{*} \longrightarrow M_{32}^{*} \in \mathcal{M}^{3x3}$**:**

$$M_{32}^{*} = \begin{pmatrix} M_{32}^{(*1)} & \Big| & M_{32}^{(*2)} & \Big| & M_{32}^{(*3)} \end{pmatrix} \tag{A.53}$$

Siendo $M_{32}^{(*1)}$, $M_{32}^{(*2)}$ y $M_{32}^{(*3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$M_{32}^{(*1)} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial F_{px}}{\partial\kappa}\dfrac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \dfrac{\partial F_{px}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\dfrac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|} \\ 0 \\ \left(\dfrac{\partial F_{pz}}{\partial\kappa}\dfrac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \dfrac{\partial F_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\dfrac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.54}$$

$$M_{32}^{(*2)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_{px}}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial |\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{px}}{\partial |\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|} \\ 0 \\ \left(\frac{\partial F_{pz}}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial |\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{pz}}{\partial |\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.55}$$

$$M_{32}^{(*3)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_{px}}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial |\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{px}}{\partial |\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|} \\ 0 \\ \left(\frac{\partial F_{pz}}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial |\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{pz}}{\partial |\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.56}$$

▷ **Matriz $F_{41}^{*} \longrightarrow F_{41}^{*} \in \mathcal{M}^{3x3}$:**

$$F_{41}^{*} = \begin{pmatrix} P_{Din}S(b/2)(C_T(1,10) + C_T(1,14)\alpha) & 0 & P_{Din}S(b/2)C_T(1,12) & 0 & 0 \\ 0 & P_{Din}S\bar{c}C_T(2,11) & 0 & P_{Din}S\bar{c}C_T(2,13) & 0 \\ P_{Din}S(b/2)C_T(3,10) & 0 & P_{Din}S(b/2)C_T(3,12) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.57}$$

▷ **Matriz $F_{42}^{*} \longrightarrow F_{42}^{*} \in \mathcal{M}^{3x3}$:**

$$F_{42}^{*} = \begin{pmatrix} F_{42}^{(*1)} & | & F_{42}^{(*2)} & | & F_{42}^{(*3)} \\ & | & & | & \end{pmatrix} \tag{A.58}$$

Siendo $F_{42}^{(*1)}$, $F_{42}^{(*2)}$ y $F_{42}^{(*3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$F_{42}^{(*1)} = \begin{pmatrix} \frac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{ax}}{\partial |\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{ax}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v_{vx}} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v_{vx}} \\ \frac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{ay}}{\partial |\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{ay}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v_{vx}} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v_{vx}} \\ \frac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{az}}{\partial |\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{az}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v_{vx}} + \frac{\partial T_{az}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v_{vx}} \end{pmatrix} \tag{A.59}$$

$$F_{42}^{(*2)} = \begin{pmatrix} \frac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{ax}}{\partial |\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{ax}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v_{vy}} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v_{vy}} \\ \frac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{ay}}{\partial |\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{ay}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v_{vy}} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v_{vy}} \\ \frac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{az}}{\partial |\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{az}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v_{vy}} + \frac{\partial T_{az}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v_{vy}} \end{pmatrix} \tag{A.60}$$

$$F_{42}^{(*3)} = \begin{pmatrix} \frac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{ax}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{ax}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{vz}} + \frac{\partial T_{ax}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{vz}} \\ \frac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{ay}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{ay}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{vz}} + \frac{\partial T_{ay}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{vz}} \\ \frac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|}\left(\frac{\partial T_{az}}{\partial|\vec{v_r}|}\right) + \frac{\partial T_{az}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{vz}} + \frac{\partial T_{az}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v_{vz}} \end{pmatrix} \tag{A.61}$$

▷ **Matriz** $M_{41}^{*} \longrightarrow M_{41}^{*} \in \mathcal{M}^{3x5}$**:**

$$M_{41}^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial T_{px}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial T_{py}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial T_{pz}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial n} \end{pmatrix} \tag{A.62}$$

▷ **Matriz** $M_{42}^{*} \longrightarrow M_{42}^{*} \in \mathcal{M}^{3x5}$**:**

$$M_{42}^{*} = \begin{pmatrix} M_{42}^{(*1)} & \Big| & M_{42}^{(*2)} & \Big| & M_{42}^{(*3)} \end{pmatrix} \tag{A.63}$$

Siendo $M_{42}^{(*1)}$, $M_{42}^{(*2)}$ y $M_{42}^{(*3)}$ vectores columna de tres elementos y de la forma:

$$M_{42}^{(*1)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T_{px}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bx}} \\ \left(\frac{\partial F_{pz}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial F_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|} \\ \left(\frac{\partial T_{pz}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{rx}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.64}$$

$$M_{42}^{(*2)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T_{px}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{By}} \\ \left(\frac{\partial T_{py}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{py}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|} \\ \left(\frac{\partial T_{pz}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{ry}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.65}$$

$$M_{42}^{(*3)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T_{px}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{px}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v_{Bz}} \\ \left(\frac{\partial T_{py}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{py}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|} \\ \left(\frac{\partial T_{pz}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial|\vec{v_r}|} + \frac{\partial T_{pz}}{\partial|\vec{v_r}|}\right)\frac{-v_{rz}}{|\vec{v_r}|} \end{pmatrix} \tag{A.66}$$

▷ **Matrices B^*_{32} y B^*_{42} $\longrightarrow B^*_{32}, B^*_{32} \in \mathcal{M}^{3x3}$:**

$$B^*_{32} = B^*_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.67}$$

▷ **Matriz B^*_{31} $\longrightarrow B^*_{31} \in \mathcal{M}^{3x5}$:**

$$B^*_{31} = P_{Din}S \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_F(1,11) & C_F(1,12) + C_F(1,15)\alpha & 0 \\ C_F(2,9) & 0 & C_F(2,11) + C_F(2,14)\alpha & 0 & 0 \\ 0 & C_F(3,10) + C_F(3,12)\beta^2 & 0 & C_F(3,12) + C_F(3,15)\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{A.68}$$

▷ **Matriz B^*_{41} $\longrightarrow B^*_{41} \in \mathcal{M}^{3x5}$:**

$$B^*_{41} = P_{Din}S \begin{pmatrix} \frac{b}{2}\left(C_T(1,10) + C_T(1,14)\alpha\right) & 0 & \frac{b}{2}\left(C_T(1,12)\right) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}C_T(2,11) & 0 & \bar{c}C_T(2,13) & 0 \\ \frac{b}{2}\left(C_T(3,10)\right) & 0 & \frac{b}{2}\left(C_T(3,12)\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.69}$$

A.1.2. Linealización en torno a una trayectoria de giro a velocidad angular constante

Como se explicó en el capítulo de linealización, en la sección relativa a la linealización en torno a un trayectoria de giro a velocidad angular constante, se debió realizar un cambio de variables para lograr que el sistema fuera SLIT en torno a dicha trayectoria. El cambio de variable fue el que se describe en la ecuación A.70 que se muestra a continuación.

$$\begin{pmatrix} \dot{x_B} \\ \dot{y_B} \\ \dot{z_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v_{Bx}} \\ \dot{v_{By}} \\ \dot{v_{Bz}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{w_{Bx}} \\ \dot{w_{By}} \\ \dot{w_{Bz}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \tag{A.70}$$

Al realizar este cambio de variable, la matriz A que se obtiene de la linealización es levemente distinta a la de los casos de las dos subsecciones anteriores, y la misma tiene la forma que se muestra en la ecuación A.71.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & Id & A_{14} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & A_{22} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & A_{24} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & A_{43} & A_{44} \end{array}\right) \tag{A.71}$$

Donde las submatrices A_{22}, A_{24}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{42} y A_{44} mantienen la forma de las ecuaciones de la sección anterior. La matriz B permanece incambiada frente a dicho cambio de variable. Falta entonces definir la matrices A_{11} y A_{14}, las cuales son de la siguiente forma:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & w_B z & -w_{By} \\ -w_{Bz} & 0 & w_{Bx} \\ w_{By} & -w_{Bz} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(A.72)} \qquad A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & -x_B z & x_{By} \\ x_{Bz} & 0 & -x_{Bx} \\ -x_{By} & x_{Bz} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(A.73)}$$

Con lo que se completan las matrices A y B para las trayectorias de interés y se puede proceder a utilizar el sistema de control descripto en el capítulo 7.

Apéndice B
Testeo del generador de trayectorias

Como se detalló en el capítulo 6, para las pruebas del generador de trayectorias se definieron algunos indicadores que utilizamos como referencia a la hora de realizar las pruebas. En este apéndice se presentarán algunos casos de prueba y sus especificaciones (*waypoints* utilizados, coeficientes para la optimización, etc.) y finalmente una tabla con los resultados cuantitativos obtenidos.

Para más detalles sobre los indicadores utilizados y un análisis de los resultados, referirse al capítulo 6.

B.1. Descripción de los casos de prueba

En esta primera sección se registran los valores utilizados para las distintas entradas del generador de trayectorias en cada uno de los casos de prueba. Para esto primeramente repasaremos las entradas relevantes para el mismo y su efecto sobre el algoritmo.

El primer conjunto de entradas que se usa para determinar la trayectoria son los *waypoints*. El conjunto de los puntos por los que idealmente debería pasar la trayectoria se constituyen por las 3 coordenadas cartesianas (x, y, z) para cada uno de los N puntos.

Otro conjunto de entradas muy relevante a la hora de usar el generador de trayectorias son los coeficientes de ponderación para la optimización de la trayectoria. Estos cuatro coeficientes son : α, que representa el peso de la distancia a los *waypoints*; β, que representa la ponderación dada al largo total de la trayectoria; γ, que representa la ponderación dada a los radios de giro y δ, que representa la ponderación de las tasas de trepado.

El tercer conjunto de entradas es el que cuantifica las restricciones necesarias en la trayectoria para que el avión pueda de hecho seguirlas. Este conjunto se compone de cuatro elementos: el radio mínimo de giro (R_{min}), la tasa máxima de ascenso (tangente del ángulo máximo que se puede formar con un plano horizontal, T_{max}), la tasa máxima de descenso (análogo al caso anterior, D_{max}) y la velocidad de vuelo ($|\vec{v_{crucero}}|$), que si bien no es una restricción del sistema físico en las mismas condiciones que lo son las anteriores, es una variable que se impone desde fuera del sistema respecto de las trayectorias.

El último conjunto de entradas agrupa dos opciones de funcionamiento del algoritmo: por un lado la tolerancia de los planos (es decir, cual es la máxima variación de altura entre dos *waypoints* que se considerará como inexistente, de acuerdo con lo expresado en el capítulo 6) y si la ejecución del algoritmo se hará mediante pasos sucesivos (se calcula la trayectoria para los primeros 3 *waypoints*, y luego a partir de ahí la de los primeros 4 y así sucesivamente hasta generar la trayectoria total) o si se intentará la generación para los N *waypoints* en un único paso (lo que por lo general conlleva peores resultados).

Los casos de prueba 1 al 4 representan distintos sets de *waypoints* con un conjunto estándar de coeficientes para la optimización. Las pruebas 5 al 13 (exceptuando la 7) consisten en variaciones del caso de prueba 4, modificando los coeficientes para la optimización. En estos casos se entiende al caso 4 como el ejemplo del óptimo funcionamiento del algoritmo (utilizando los coeficientes que probaron ser los más adecuados).

Se entendió conveniente no presentar casos comparativos variando las restricciones de vuelo (R_{min},

T_{max}, D_{max}) pues no ocurren resultados de interés. De forma análoga todas las pruebas están realizadas con el parámetro 'tolerancia de planos' seteado a 0m, pues el problema se simplifica al utilizar otros valores. La única prueba que realiza la minimización en un único paso es el caso 7, que por el resto de sus especificaciones es idéntico al caso 3.

Junto con la descripción de los casos 1 a 4 se presentan 2 imágenes de la trayectoria obtenida. La primera de estas imágenes representa la trayectoria óptima en el plano que se obtuvo, y la segunda una visión de la trayectoria tridimensional final, esto es, con las restricciones en los radios y tasas de ascenso/descenso ya impuestas, por lo que la trayectoria vista se puede alejar -en altura- de los waypoints dados.

B.1.1. Caso de prueba 1

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-900
500	500	-850
1000	0	-800
500	-495	-750
0	-1000	-700
-1000	-500	-750
-1000	0	-750
-500	1500	-700
0	1000	-700
0	0	-795

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

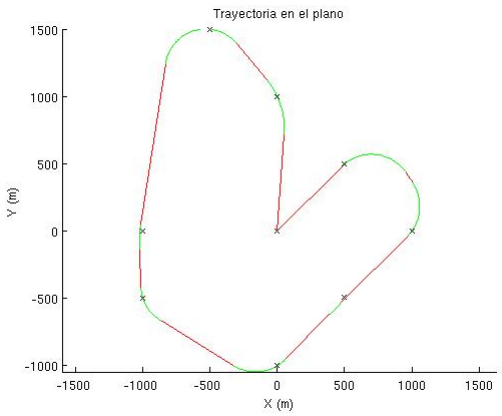


Figura B.1: Vista de la trayectoria generada en el plano para el caso de prueba 1.

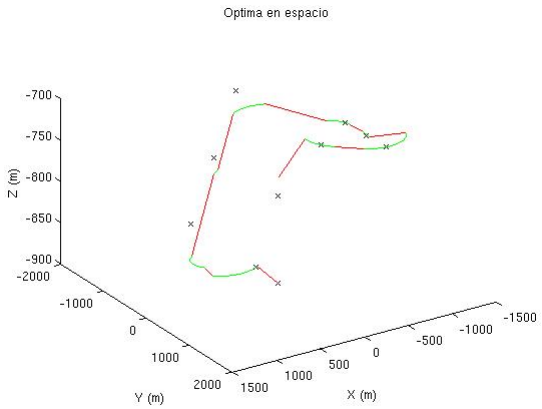


Figura B.2: Vista de la trayectoria generada en el espacio para el caso de prueba 1.

B.1.2. Caso de prueba 2

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-209
100	1000	-200
-200	300	-190
-1500	0	-210
1000	1000	-230
0	1000	-240
0	500	-250
-500	1000	-230
-700	900	-210
-300	500	-190
100	0	-170
-200	-300	-190
0	-700	-160
400	-650	-150
800	-100	-170

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

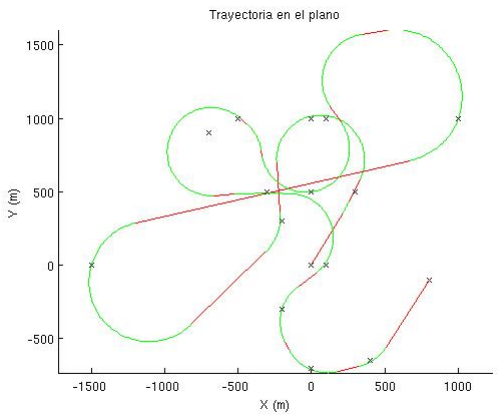


Figura B.3: Vista de la trayectoria generada en el plano para el caso de prueba 2.

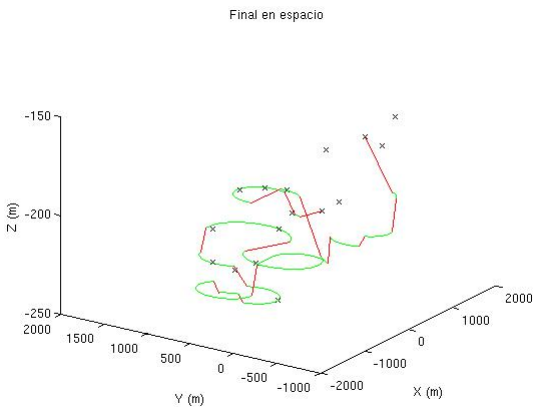


Figura B.4: Vista de la trayectoria generada en el espacio para el caso de prueba 2.

Debe notarse que a efectos de mostrar algunos resultados, los *waypoints* utilizados en este caso sobre-exigen al sistema, ya que la distancia entre los mismos es menor a la mínima requerida para el buen comportamiento del algoritmo.

B.1.3. Caso de prueba 3

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-1000
500	500	-600
1000	0	-200
500	-505	-750
0	-1000	500
-1000	-500	250
-1000	0	500
-500	1500	1000
0	1000	700
0	0	-1000

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

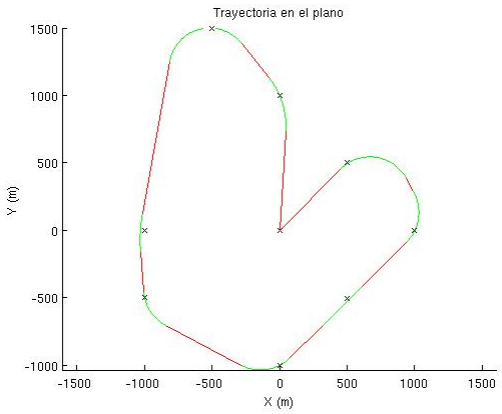


Figura B.5: Vista de la trayectoria generada en el plano para el caso de prueba 3.

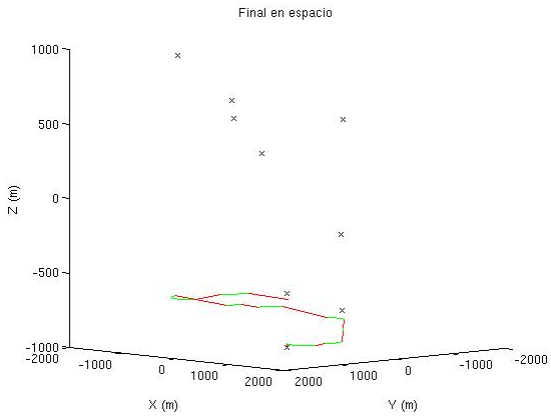


Figura B.6: Vista de la trayectoria generada en el espacio para el caso de prueba 3.

Debe notarse que a efectos de mostrar algunos resultados, los *waypoints* utilizados en este caso sobre-exigen al sistema, ya que requieren de cambios bruscos de altura por encima de las restricciones impuestas del vuelo.

B.1.4. Caso de prueba 4

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

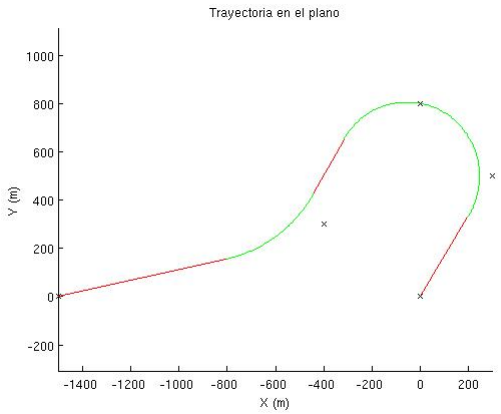


Figura B.7: Vista de la trayectoria generada en el plano para el caso de prueba 4.

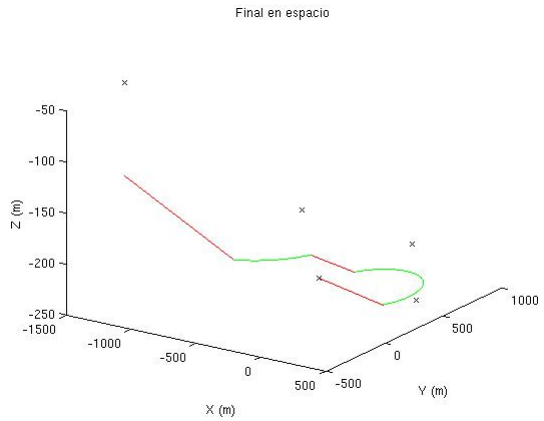


Figura B.8: Vista de la trayectoria generada en el espacio para el caso de prueba 4.

B.1.5. Caso de prueba 5

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	0.2	0.3

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

B.1.6. Caso de prueba 6

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	0.2	0.01

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

B.1.7. Caso de prueba 7

Debe notarse que este caso es el único que utiliza la opción de optimización iterativa desactivada, y

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-1000
500	500	-600
1000	0	-200
500	-505	-750
0	-1000	500
-1000	-500	250
-1000	0	500
-500	1500	1000
0	1000	700
0	0	-1000

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	0

que por el resto de sus características es idéntico al caso 3.

B.1.8. Caso de prueba 8

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.01	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

B.1.9. Caso de prueba 9

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	0.01	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

B.1.10. Caso de prueba 10

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
2	0.05	1	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

B.1.11. Caso de prueba 11

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
1	0.05	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

B.1.12. Caso de prueba 12

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
0.4	0.05	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

B.1.13. Caso de prueba 13

Waypoints		
$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$
0	0	-200
300	500	-240
0	800	-210
-400	300	-160
-1500	0	-50

Coeficientes			
α	β	γ	δ
20	0.05	0.2	0.1

Restricciones			
D_{max}	T_{max}	R_{min}	$\lvert\vec{v_{crucero}}\rvert$
$-0{,}1m/m$	$0{,}1m/m$	$300m$	$35m/s$

Parámetros	
Tolerancia planos	Optimización iterativa
$0m$	1

B.2. Resultados

En esta sección se presentarán los resultados más relevantes correspondientes a los casos de prueba que se introdujeron en la sección anterior, y en acuerdo con los indicadores definidos en el capítulo 6.

Para comenzar, se presenta una tabla con los datos referentes a la distancia entre la trayectoria propuesta y los *waypoints*:

Distancias a los waypoints (m)													
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Máxima	7.5	182.6	29.7	105.0	66.9	102.2	118.6	75.4	77.0	112.9	167.3	121.4	63.8
Media	2.1	23.1	5.1	32.0	30.2	30.0	32.0	25.8	18.6	33.4	46.8	40.4	13.7
Mediana	0.31	2.0	0.0	0.0	41.5	1.5	0.0	4.3	4.3	15.0	12.8	18.4	0.0

Como primera precisión, cabe notar que las distancias presentadas en la tabla anterior corresponden a las distancias 'planas', es decir, antes de considerar los cambios de altura en la trayectoria. Esto implica que dicha distancia coincidirá con la de distancia total si todos los *waypoints* estuvieran a una misma altura y por lo tanto la trayectoria pudiera estar contenida en un plano horizontal.

Se puede ver en los ejemplos 8 y 9 que, al bajar el peso relativo de β y γ, aumenta drásticamente la cercanía a los *waypoints* respecto de lo que se ve en el ejemplo 4. Algo parecido sucede al aumentar α (caso 13). Lo opuesto se ve en los casos 11 y 12, donde al disminuir el peso de α se aumenta la distancia máxima a los *waypoints*.

Adicionalmente, es posible ver que el caso 7, que es esencialmente el mismo que el caso 3 -salvo que la minimzación se realiza en una única búsqueda en el espacio de variables- reduce considerablemente su performance. Este resultado es esperable, ya que el algoritmo de búsqueda en sí mismo degrada la performance cuando el número de variables aumenta (mayor cantidad de *waypoints*) y dado que la versión iterativa suministra 'semillas' más adecuadas para la búsqueda.

Como referencia, es posible ver que son alcanzables precisiones del orden de las decenas de metros en particular si se está dispuesto a ser menos exigente en otros aspectos de la trayectoria. Adicionalmente, cabe comentar que las distancias máximas siempre son sustancialmente más grandes que la media pues por como está implementado el algoritmo el segundo *waypoint* siempre queda algo distante de la trayectoria.

A continuación se muestran los datos relevantes correspondientes a los radios de giro de las trayectorias propuestas:

Radio de giro (m)													
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Mínimo	300	300	300	300	300	300	300	300	290	300	300	300	300

Radio de giro (m)		
Caso	4	9
Mínimo	300	290
Medio	396	309
Mediano	337	299

Como se puede apreciar, todas las trayectorias 'óptimas' respetan la restricción dada del radio mínimo de giro. La única excepción a esto es el caso de prueba 9 donde precisamente se reduce el peso asociado a los

radios de giro a un valor particularmente bajo ($\gamma = 0{,}01$). Para este caso se presenta una tabla comparando contra el caso 4, que detalla la diferencia entre los radios de giro en ambas circunstancias.

Cabe notar que las cantidades que se presentan en esta tabla son las que surgen luego de la optimización de la trayectoria. Para aquellos radios que quedan por debajo del valor mínimo aceptable (R_{min}) se hace un forzamiento posterior de modo de lograr el valor mínimo aceptable.

La siguiente tabla contiene los resultados referentes al largo de las trayectorias obtenidas:

Largo de la trayectoria (adimensionado)													
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Largo	1.07	1.27	1.06	1.00	1.06	1.00	1.00	1.03	1.06	1.01	1.00	1.05	1.08

Como se desprende de las tablas anteriores, existe una correlación entre el peso relativo del largo de la trayectoria (peso relativo de β) y el largo de la trayectoria obtenida. Puede verse también que en el caso de prueba 2, donde los *waypoints* están puestos de forma muy cercana unos a otros, la *performance* del algoritmo decae y esto se refleja directamente en cuan larga es la trayectoria final. La justificación para esto radica en que si los radios de giro están acotados inferiormente, entonces es particularmente difícil tratar de pasar por varios puntos cuya distancia es significativamente menor al radio de giro mínimo permitido.
En el caso de prueba 8, donde se reduce el peso asociado al largo de la trayectoria (β) vemos que ésta se alarga respecto del caso 4. Si bien esto era esperable, sorprende de alguna manera que variaciones en otros coeficientes tengan efectos aún más grandes sobre el largo.

Para interpretar estos números de forma correcta es necesario notar que la normalización del largo de la trayectoria respecto de un largo 'mínimo' para cada caso (el largo que surge de unir todos los *waypoints* mediante segmentos de recta) es sólo a efectos de poder comparar distintos resultados, y por esto es que dichas cantidades pueden ser perfectamente menores a 1, ya que la trayectoria real no tiene porqué pasar por todos los *waypoints*.

Finalmente vemos los resultados en términos de las tasas de ascenso y descenso:

Tasas de ascenso/descenso máximas [en valor absoluto] (m/m)													
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Tasa máxima	0.58	61.5	3.7	8.4	7.6	9.7	4.6	9.1	0.6	36.8	32.9	0.2	1.4

En primera instancia cabe aclarar que las tasas que figuran en la tabla anterior son las que se desprenden del proceso de optimización. Al igual que con los radios, en los casos que dichas tasas excedan las cotas, el algoritmo 'fuerza' dichas restricciones causando necesariamente un alejamiento de los *waypoints* en términos de altura.

De un análisis cuantitativo, surge que el algoritmo tiene una 'tendencia' a no preocuparse mucho por las tasas de ascenso/descenso. Esto es cierto en parte, ya que para los casos 2 y 3 ya existían patologías en el conjunto de *waypoints* elegidos (en un caso los mismos eran muy cercanos y en el otro los cambios de altura exigidos eran muy bruscos). Por otro lado los casos con mejor funcionamiento (casos 9 y 12) corresponden a un aumento importante en el peso relativo de δ (en un caso por disminución del peso relativo asociado a la distancia a los *waypoints* y en otro caso por disminución del peso asociado a los radios de giro) lo que era previsible. La reducción de γ tiene una particular resonancia sobre las tasas de trepado, pues dichas tasas están fuertemente vinculadas a cuán largos son los tramos rectos entre *waypoints* consecutivos, y dicho largo entra en conflicto directo con cuan grandes deben ser los círculos, parámetro ponderado por γ.

Como conclusión de esta tabla se puede sacar que las tasas de trepado serán respetadas dependiendo

fuertemente de los *waypoints* ingresados y también de la ponderación que se haga de otras condiciones deseables de la trayectoria (por ejemplo los radios de giro). Posiblemente esta sea la deficiencia mayor que posee el generador de trayectorias, debiendo implementarse a futuro un mecanismo que funcione tan bien como la restricción de los círculos y el radio mínimo aceptable.

Apéndice C
Acrónimos utilizados

- ▷ CL - *Close Loop*.
- ▷ DHC - *De Havilland of Canada Ltd.*. Empresa que manufacturó el avión *BEAVER* que fue utilizado como modelo de avión durante este proyecto.
- ▷ EDO - Ecuación Diferencial Ordinaria.
- ▷ GPS - *Global Positioning System*.
- ▷ ICAO - *International Civil Aviation Organization*.
- ▷ IMFIA - Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- ▷ IIE - Instituto de Ingeniería Eléctrica. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- ▷ IMU - *Inercial Measurement Unit*. Referencia a los elementos de medición a bordo del avión.
- ▷ MAC - *Mean Aerodynamic Chord*. Referencia a la cuerda aerodinámica media.
- ▷ MPC - *Model Predictive Control*.
- ▷ MVE - Modelo en Variables de Estado.
- ▷ OL - *Open Loop*.
- ▷ PC - *Personal Computer*.
- ▷ PWM - *Pulse width modulation*.
- ▷ RPM o *rpm* - Revoluciones por minuto.
- ▷ SB - Sistema *Body*. Sistema de referencia con base $(\hat{i_B}, \hat{j_B}, \hat{k_B})$.
- ▷ SI - Sistema Inercial. Sistema de referencia con base $(\hat{i_I}, \hat{j_I}, \hat{k_I})$.
- ▷ SLIT - Sistema Lineal Invariante en el Tiempo.
- ▷ SR - Sistema Relativo al viento. Sistema de referencia definido por el vector $\vec{v_{rB}}$ cuya base es $(\hat{i_R}, \hat{j_R}, \hat{k_R})$.
- ▷ UAV - *Unmanned Aerial Vehicle*.
- ▷ UdelaR - Universidad de la República.
- ▷ UI - *User Interface*.

Apéndice D
Definición de la simbología utilizada

Parámetros y variables - Alfabeto

α	Según el contexto	1 - Ángulo de ataque. 2 - Coeficiente de ponderación del generador de trayectorias.
α_S	Valor del ángulo de ataque donde se da el fenómeno de *stall*.	
β	Según el contexto	1 - Ángulo de *sideslip*. 2 - Coeficiente de ponderación del generador de trayectorias.
γ	Según el contexto	1 - Parámetro del modelado de la atmósfera. $\gamma = \frac{g}{\lambda R_a}$. 2 - Coeficiente de ponderación del generador de trayectorias.
δ	Según el contexto	1 - Utilizado genéricamente como ángulo de desplazamiento de las partes móviles de las distintas superficies de vuelo. 2 - Coeficiente de ponderación del generador de trayectorias.
$\delta_a^{'}$	Ángulo de movimiento de los alerones.	
δ_a	Variable que representa el movimiento de los alerones en el MVE. $\delta_a = 2\delta_a^{'}$.	
δ_e	Ángulo de movimiento de los elevadores.	
δ_f	Ángulo de movimiento de los *flaps*.	
δ_r	Ángulo de movimiento del timón de cola.	
θ	Tercera rotación para definir los ángulos de *Euler*.	
κ	Parámetro importante en la determinación de las fuerzas y momentos del motor.	
λ	Según el contexto	1 - Parámetro del modelado de la atmósfera que representa la variación de la temperatura con la altura z. 2 - Toma uno a uno el valor de los doce polos que se quieren imponer al sistema realimentado.
ν	Variable parametrizadora de las rectas.	
ν_f	Parámetro que define el intervalo I_ν al cual pertenece la variable parametrizadora ν.	
ξ	Ángulo al punto medio de una trayectoria circular. Utilizado en la función de costo J_1.	
μ	Variable parametrizadora de los círculos.	
μ_f	Parámetro que define el intervalo I_μ al cual pertenece la variable parametrizadora μ.	
ρ	Densidad del aire a una altura genérica distinta de cero.	
ρ_0	Densidad del aire a nivel del mar.	
ρ_{NS}	Densidad de la nafta super a 15^oC.	
σ	Parámetro utilizado en la parametrización de los círculos.	
τ	Utilizado para designar un retardo genérico en el tiempo.	
Υ	Variable utilizada para definir la inversa de la matriz I_{OB}. $\Upsilon = \lvert I_{OB}\rvert / I_{yy}$.	
ϕ	Parámetro utilizado en la parametrización de las rectas.	
φ	Segunda rotación para definir los ángulos de *Euler*.	

χ	Ángulo al *waypoint* desde el centro de una trayectoria circular. Utilizado en la función de costo J_1.
ψ	Primera rotación para definir los ángulos de *Euler*.
ψ_0	Valor del ángulo ψ en $t = 0$.
ψ_I	Valor en particular de ψ utilizado para evaluar la expresión que lleva el vector $\vec{v_I}$ en $\vec{v_B}$ utilizado para el trimado en las trayectorias circulares. Esta evaluación en un punto en particular no conlleva una pérdida de información.

Parámetros y variables - Abecedario

a	Parámetro de la variable κ.
b	Según el contexto 1 - Envergadura del avión, largo total de una ala a la otra. *Wing span*. 2 - Parámetro de la variable κ.
C	Utilizado para designar una constante genérica.
C_1, C_2	Parámetro de la variable κ.
c	Según el contexto 1 - Cuerda aerodinámica. 2 - Parámetro de la variable κ.
$\bar{c}$	Cuerda aerodinámica media. MAC.
D	Módulo del vector fuerza de *drag* sobre el avión.
D_R	Distancia a la cual se coloca el *waypoint* extra de la posición actual del avión la momento de regenerar la trayectoria.
D_{MAX}	Tolerancia máxima admitida entre la trayectoria real y la trayectoria deseada. Al superarse esta distancia, se re-genera la trayectoria a seguir.
d	Según el contexto 1 - Parámetro de la variable κ. 2 - Utilizado para denotar una distancia genérica.
F	Función que representa la fuerza neta aplicada sobre el sistema.
f	Función que relaciona la derivada temporal del vector de estados con el vector de estado y las entradas al sistema. $\dot{x} = f(x, u)$.
f_1	Utilizada como función genérica.
f_2	Utilizada como función genérica.
g	Aceleración a nivel del mar debido a la gravedad terrestre.
h	Vector de entradas que no son controlables, también se lo puede encontrar como $\vec{h}$ o $\vec{h}(t)$.
I_t	Denota un intervalo de tiempo dado.
I_ν	Denota un intervalo al cual pertenece la variable parametrizadora ν.
I_μ	Denota un intervalo al cual pertenece la variable parametrizadora μ.
J	Según el contexto 1 - Función de costo a minimizar para la optimización del generador de trayectorias. 2 - Función de costo para el control óptimo según la técnica de control LQR.
J_1	Función de costo que pondera la distancia a los *waypoints*.
J_{1_1}	Sub-función de costo que pondera la distancia a los *waypoints*.
J_{1_1}	Sub-función de costo que pondera la distancia a todos los *waypoints*.
J_2	Función de costo que pondera la distancia total recorrida.
J_3	Función de costo que pondera todos los radios de giro.
J_4	Función de costo que pondera todas las tasas de trepado.
J_5	Función de costo que pondera el costo de tener los $\nu_f > 0$.
J_R	Función de costo que pondera un radios de giro R.
L	Módulo del vector fuerza de *lift* sobre el avión.

m	Según el contexto 1 - Masa total del avión sin combustible. 2 - Utilizado como pendiente genérica para una recta.
m_c	Masa total del combustible del avión.
N	Cantidad de *waypoints*.
n	Velocidad de giro de la hélice del avión medida en rpm.
n_0	Parámetro de la variable κ.
$\overline{M}_a$	Masa molar del aire.
O	Centro de gravedad o centro de masa del avión.
Ox_B	Eje longitudinal del avión.
Ox_Bz_B	Plano definido por el eje longitudinal del avión y el eje vertical del avión.
Ox_By_B	Plano definido por el eje longitudinal del avión y el eje lateral del avión.
Oy_B	Eje lateral del avión.
Oy_Bz_B	Plano definido por el eje lateral del avión y el eje vertical del avión.
Oz_B	Eje vertical del avión.
P_0	Presión a nivel del mar.
p	Vector de parámetros numéricos importantes para el modelado, también se lo puede encontrar como $\vec{p}$.
q	Usado como parámetro o variable genérica.
R	Según el contexto 1 - Radio de giro del avión. 2 - Radio de una circunferencia de centro (x_c, y_c).
R_v	Vector que contiene todos los radios de giro de las sub-trayectorias circulares.
R_{min}	Radio mínimo de giro del avión.
$\overline{R}$	Constante universal de los gases. $\overline{R} = 8{,}3145 kJ/kMolK$
R_a	Constante de gas para el aire.
S	Superficie alar.
T	Variable que representa el momento neto aplicada sobre el sistema.
T_0	Temperatura a nivel del mar.
T_f	Horizonte de tiempo para el cual se calcula la minimización de la técnica de control LQR genérico.
t	Variable utilizada para el tiempo.
$t_{10\,\%}$	Tiempo en que la perturbación introducida en las condiciones iniciales se reduce al $10\,\%$ de su valor inicial.
u	Vector de entradas que podemos controlar desde la computadora de a bordo, también se lo puede encontrar como $\vec{u}$ o $\vec{u}(t)$.
$\tilde{u}$	Pequeños apartamientos del vector u de un punto de operación u_d.
u_0	Punto de operación para un vector de entradas controlables u.
u_d	Punto de operación para un vector de entradas controlables u. Más relacionado al concepto de entradas necesarias para recorrer una trayectoria estacionaria dada.
v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}	Componentes en la dirección $\hat{i_B}$, $\hat{j_B}$ y $\hat{k_B}$ respectivamente de la velocidad lineal del avión.
v_{rBx}, v_{rBy}, v_{rBz}	Componente en la dirección $\hat{i_B}$, $\hat{j_B}$ y $\hat{k_B}$ respectivamente de la velocidad relativa al viento del avión.
v_{rBxz}	Módulo de la proyección del vector $\vec{v_{rB}}$ sobre el plano Ox_Bz_B.
v_{vBx}, v_{vBy}, v_{vBz}	Componente en la dirección $\hat{i_B}$, $\hat{j_B}$ y $\hat{k_B}$ respectivamente de la velocidad del viento.
w_{Bx}, w_{By}, w_{Bz}	Componente en la dirección $\hat{i_B}$, $\hat{j_B}$ y $\hat{k_B}$ respectivamente de la velocidad angular del avión.
x	Según el contexto: 1 - Coordenada x utilizada para la posición absoluta del avión desde el SI.

	2 - Vector de estados del MVE, también se lo puede encontrar como $\vec{x}$.
$\tilde{x}$	Pequeños apartamientos del vector x de una trayectoria estacionaria dada x_d.
x_0	Vector de condiciones iniciales para los estados x.
x_c	Coordenada x que ubica el punto (x_c, y_c) del centro de un círculo en el plano xy.
x_d	Valor del vector de estados x para una trayectoria estacionaria dada.
x_r	Coordenada x que ubica el punto (x_r, y_r) de inicio de un recta en el plano xy.
y	Coordenada y utilizada para la posición absoluta del avión desde el SI.
y_c	Coordenada y que ubica el punto (x_c, y_c) del centro de un círculo en el plano xy.
y_r	Coordenada y que ubica el punto (x_r, y_r) de inicio de un recta en el plano xy.
z	Coordenada z utilizada para la posición absoluta del avión desde el SI.

Coeficientes adimensionados

C_{al}, C_{am}, C_{an}	$C_{aj} = \frac{T_{ai}}{\rho S \lvert\vec{v_r}\rvert^2/2}$ con $i = x, y, z$ y $j = l, m, n$ respectivamente. Coeficientes para los momentos aerodinámicos T_{ax}, T_{ay} y T_{az} respectivamente, relaciones funcionales con las variables x, u, h y p
C_{ax}, C_{ay}, C_{az}	$C_{ai} = \frac{F_{ai}}{\rho S \lvert\vec{v_r}\rvert^2/2}$ con $i = x, y, z$. Coeficientes para las fuerzas aerodinámicas F_{ax}, F_{ay} y F_{az} respectivamente, relaciones funcionales con las variables x, u, h y p.
C_D	Coeficiente de *drag*.
C_L	Coeficiente de *lift*.
$C_{l\alpha\delta_a}$	Coeficiente para la variable $\alpha\delta_a$ del coeficiente del momento aerodinámico C_{al}.
$C_{l\kappa\alpha^2}$	Coeficiente para la variable $\kappa\alpha^2$ del coeficiente del momento del motor C_{pl}.
$C_{l\beta}$, $C_{n\beta}$	Coeficientes para la variable β de los coeficientes de los momentos aerodinámicos C_{al} y C_{an} respectivamente.
$C_{l\delta_a}$, $C_{n\delta_a}$	Coeficientes para la variable δ_a de los coeficientes de los momentos aerodinámicos C_{al} y C_{an} respectivamente.
$C_{l\delta_r}$, $C_{n\delta r}$	Coeficientes para la variable δ_r de los coeficientes de los momentos aerodinámicos C_{al} y C_{an} respectivamente.
C_{lo}, C_{mo}, C_{no}	Términos constantes de C_{al}, C_{am} y C_{al} respectivamente.
$C_{lw_{Bx}}$, $C_{nw_{Bx}}$	Coeficientes para la variable $\frac{bw_{Bx}}{2\lVert\vec{v_r}\rVert}$ de los coeficientes de los momentos aerodinámicos C_{al} y C_{an} respectivamente.
$C_{lw_{Bz}}$, $C_{mw_{Bz}}$, $C_{nw_{Bz}}$	Coeficientes para la variable $\frac{bw_{Bz}}{2\lVert\vec{v_r}\rVert}$ de los coeficientes de los momentos aerodinámicos C_{al} , C_{am} y C_{an} respectivamente.
$C_{m\alpha}$	Coeficiente para la variable α del coeficiente del momento aerodinámico C_{am}.
$C_{m\alpha^2}$	Coeficiente para la variable α^2 del coeficiente del momento aerodinámico C_{am}.
$C_{m\beta^2}$	Coeficiente para la variable β^2 del coeficiente del momento aerodinámico C_{am}.
$C_{m\delta_e}$	Coeficiente para la variable δ_e del coeficiente del momento aerodinámico C_{am}.
$C_{m\delta_f}$	Coeficiente para la variable δ_f del coeficiente del momento aerodinámico C_{am}.
$C_{m\kappa}$	Coeficiente para la variable κ del coeficiente del momento del motor C_{pm}.
$C_{mw_{By}}$, $C_{nw_{By}}$	Coeficientes para la variable $\frac{cw_{By}}{\lVert\vec{v_r}\rVert}$ de los coeficiente de los momentos aerodinámicos C_{am} y C_{an} respectivamente.
$C_{n\beta^3}$	Coeficiente para la variable β^3 del coeficiente del momento aerodinámico C_{an}.
$C_{n\kappa^3}$	Coeficiente para la variable κ^3 del coeficiente del momento del motor C_{pn}.
C_{pl}, C_{pm}, C_{pn}	$C_{pj} = \frac{T_{pi}}{\rho S \lvert\vec{v_r}\rvert^2/2}$ con $i = x, y, z$ y $j = l, m, n$ respectivamente. Coeficientes para los momentos generados por el motor T_{px}, T_{py} y T_z respectivamente, relaciones funcionales con las variables x, u, h y p.
C_{px}, C_{pz}	$C_{pi} = \frac{F_{pi}}{\rho S \lvert\vec{v_r}\rvert^2/2}$ con $i = x, z$. Coeficientes para las fuerzas debidas al motor F_{px} y F_{pz} respectivamente, relaciones funcionales con las variables x, u, h y p.

$C_{x\alpha}$, $C_{z\alpha}$	Coeficientes para la variable α de los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas C_{ax} y C_{az} respectivamente.
$C_{x\alpha\delta_f}$, $C_{z\alpha\delta_f}$	Coeficientes para la variable $\alpha\delta_f$ de los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas C_{ax} y C_{az} respectivamente.
$C_{x\alpha^2}$	Coeficiente para la variable α^2 del coeficiente de la fuerza aerodinámica C_{ax}.
$C_{x\alpha^3}$, $C_{z\alpha^3}$	Coeficientes para la variable α^3 de los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas C_{ax} y C_{az} respectivamente.
$C_{x\alpha\kappa^2}$	Coeficiente para la variable $\alpha\kappa^2$ del coeficiente de la fuerza del motor C_{px}.
$C_{x\delta_f}$, $C_{z\delta_f}$	Coeficientes para la variable δ_f de los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas C_{ax} y C_{az} respectivamente.
$C_{x\delta_r}$, $C_{y\delta_r}$	Coeficientes para la variable δ_r de los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas C_{ax} y C_{ay} respectivamente.
$C_{x\kappa}$, $C_{z\kappa}$	Coeficientes para la variable κ de los coeficientes de las fuerzas del motor C_{px} y C_{pz} respectivamente.
$C_{xw_{By}}$, $C_{zw_{By}}$	Coeficientes para la variable $\frac{cw_{By}}{\|\vec{v_r}\|}$ de los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas C_{ax} y C_{az} respectivamente.
C_{xo}, C_{yo}, C_{zo}	Términos constantes de C_{ax}, C_{ay} y C_{az} respectivamente.
$C_{y\alpha\delta_r}$	Coeficiente para la variable $\alpha\delta_r$ del coeficiente de la fuerza aerodinámica C_{ay}.
$C_{y\beta}$	Coeficiente para la variable β del coeficiente de la fuerza aerodinámica C_{ay}.
$C_{y\delta_a}$	Coeficiente para la variable δ_a del coeficiente de la fuerza aerodinámica C_{ay}.
$C_{yw_{Bx}}$	Coeficiente para la variable $\frac{bw_{By}}{2\|\vec{v_r}\|}$ del coeficiente de la fuerza aerodinámica C_{ay}.
$C_{yw_{Bz}}$	Coeficiente para la variable $\frac{bw_{Bz}}{2\|\vec{v_r}\|}$ del coeficiente de la fuerza aerodinámica C_{ay}.
$C_{z\delta_e}$	Coeficiente para la variable δ_e del coeficiente de la fuerza aerodinámica C_{az}.
$C_{z\delta_e\beta^2}$	Coeficiente para la variable $\delta_e\beta^2$ del coeficiente de la fuerza aerodinámica C_{az}.

Unidades utilizadas

^oC	Grados Celsius. Escala centígrada para la medida de temperatura cuyo cero está ubicado a la temperatura en Kelvin a la cual el agua entra en cambio de fase líquido - sólido, a presión P_0.
g	Gramo. Medida de cantidad masa.
Hz	Hertz. Medida de frecuencia.
K	Kelvin. Escala centígrada para la medida de temperatura cuyo cero es el cero absoluto.
l	Litro. Medida de volumen.
m	Metro. Medida de longitud.
m^2	Metro cuadrado. Medida de área.
m^3	Metro cúbico. Medida de volumen.
N	Newton. Medida de fuerza.
s	Segundo. Medida de tiempo.
T	Período. Medida de tiempo.
W	Watt. Medida de potencia.

Versores

$\hat{i_B}$, $\hat{j_B}$, $\hat{k_B}$	Versores con punto de aplicación en O según el eje longitudinal, lateral y vertical del avión respectivamente. Base del sistema de referencia SB.

$\hat{i_I}$, $\hat{j_I}$, $\hat{k_I}$	Versores con punto de aplicación en el origen que define la dirección de la coordenada x, y y z. Base del sistema de referencia SI.
$\hat{i_I^*}$, $\hat{j_I^*}$, $\hat{k_I^*}$	Versores con punto de aplicación en el centro de un círculo. Coincide con la base del sistema de referencia SI, aunque cambia el origen.
$\hat{i_R}$, $\hat{j_R}$, $\hat{k_R}$	Versores con punto de aplicación en O. Base del sistema de referencia SR que se define a partir del vector $\vec{v_{rB}}$.
$\hat{i_1}$	Versor que se obtiene después de efectuar la primera rotación de $-\beta$ correspondiente al cambio de base desde el SR al SB.
$\hat{j_1}$	Según el contexto: 1 - Versor que se obtiene después de efectuar la primera rotación de ψ correspondiente a los ángulos de *Euler*. 2 - Versor que se obtiene después de efectuar la primera rotación de $-\beta$ correspondiente al cambio de base desde el SR al SB.
$\hat{k_2}$	Versor que se obtiene después de efectuar la segunda rotación de θ correspondiente a los ángulos de *Euler*.
$\hat{v}$	Versor colineal con el vector velocidad del avión en el instante en que se regenera la trayectoria.

Vectores

$\vec{D}$	Vector fuerza de *drag* sobre el avión.
$\vec{F_a}$	Fuerza aerodinámica.
$\vec{F_{Neta}}$	Fuerza neta ejercida sobre el avión.
$\vec{F_p}$	Fuerza que ejerce el motor o la hélice.
$\vec{g}$	Vector aceleración a nivel del mar debido a la gravedad terrestre.
$\vec{h}$	Vector de entradas que no son controlables, también se lo puede encontrar como $\vec{h}(t)$ o h.
$\vec{L}$	Vector fuerza de *lift* sobre el avión.
$\vec{L_O}$	Momento angular del avión respecto al punto O.
$\vec{P}$	Vector peso del avión.
$\vec{p}$	Vector de parámetros numéricos importantes para el modelado, también se lo puede encontrar como p.
$\vec{q}$	Utilizado como vector genérico.
$\vec{r}$	Vector posición absoluta del avión.
$\vec{r}\|_B$	Matriz columna que representa la posición absoluta del avión expresado en la base del SB.
$\vec{r}\|_I$	Matriz columna que representa la posición absoluta del avión expresado en la base del SI.
$\vec{T_a}$	Momento debido a las fuerzas aerodinámicas.
$\vec{T_{Neto}}$	Momento neto ejercido sobre el avión.
$\vec{T_p}$	Momento que ejerce el motor o la hélice.
$\vec{u}$	Vector de entradas que podemos controlar desde la computadora de a bordo, también se lo puede encontrar como $\vec{u}(t)$ o u.
$\vec{v}$	Vector velocidad lineal del avión.
$\vec{v}\|_B$	Matriz columna que representa la velocidad lineal del avión expresada en la base del SB.
$\vec{v}\|_I$	Matriz columna que representa la velocidad lineal del avión expresada en la base del SI.

$\vec{v_r}$	Vector velocidad relativa al viento del avión. $\vec{v_r} = \vec{v} - \vec{v_v}$.
$\vec{v_r}\|_B$	Matriz columna que representa la velocidad relativa al viento del avión expresada en la base del SB.
$\vec{v_v}$	Vector velocidad del viento.
$\vec{v_v}\|_B$	Matriz columna que representa la velocidad del viento expresada en la base del SB.
$\vec{w}$	Vector velocidad angular del avión.
$\vec{w_B}$	Velocidad angular del avión respecto del SI.
$\vec{r}\|_B$	Matriz que representa la velocidad angular del avión expresada en la base del SB.
$\vec{x}$	Vector de estados del MVE, también se lo puede encontrar como x según el contexto.
$\vec{x_0}$	Vector de condiciones iniciales para el vector de estados del MVE, también se lo puede encontrar como x_0 según el contexto.

Matrices

Ω	Matriz cuyos elementos (i, j) tienen relación con la velocidad angular tal que $\Omega\vec{q} = \vec{w} \times \vec{q}$.
A	Hace referencia a las matrices de transición de estados de un sistema lineal. Matriz de transición de estado que se obtiene del proceso de linealización jacobiana. $A \in \mathcal{M}^{12x12}$. $\dot{x} = Ax + Bu$.
A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}	Sub-matrices $\in \mathcal{M}^{3x3}$ de la matriz A, correspondientes a la primer hilera de la matriz $A \in \mathcal{M}^{12x12}$ en un agrupamiento de submatrices $3x3$.
A_{22}, A_{24}	Sub-matrices $\in \mathcal{M}^{3x3}$ de la matriz A, correspondientes a la segunda hilera de la matriz $A \in \mathcal{M}^{12x12}$ en un agrupamiento de submatrices $3x3$.
A_{32}, A_{33}, A_{34}	Sub-matrices $\in \mathcal{M}^{3x3}$ de la matriz A, correspondientes a la tercer hilera de la matriz $A \in \mathcal{M}^{12x12}$ en un agrupamiento de submatrices $3x3$.
A_{33}, A_{34}	Sub-matrices $\in \mathcal{M}^{3x3}$ de la matriz A, correspondientes a la cuarta hilera de la matriz $A \in \mathcal{M}^{12x12}$ en un agrupamiento de submatrices $3x3$.
B	Hace referencia a las matrices de transición de entradas de un sistema lineal. Matriz de transición de entradas que se obtiene del proceso de linealización jacobiana. $B \in \mathcal{M}^{12x5}$. $\dot{x} = Ax + Bu$.
B_{31}, B_{41}	Sub-matrices $\in \mathcal{M}^{3x5}$ de la matriz B, correspondientes a la tercer y cuarta submatriz de la matriz $B \in \mathcal{M}^{12x5}$ en un agrupamiento de submatrices $3x5$.
H_1^2	Matriz que efectúa la segunda rotación de *Euler* de ángulo θ.
H_1^I	Matriz que deshace la primera rotación de *Euler* de ángulo ψ.
H_2^1	Matriz que deshace la segunda rotación de *Euler* de ángulo θ.
H_2^B	Matriz que efectúa la tercera rotación de *Euler* de ángulo φ.
H_B^2	Matriz que deshace la tercera rotación de *Euler* de ángulo φ.
H_B^I	Matriz que efectúa el cambio de base desde la base del SB a la base del SI.
H_B^R	Matriz que efectúa el cambio de base desde la base del SB a la base del SR.
H_I^1	Matriz que efectúa la primera rotación de *Euler* de ángulo ψ.
H_I^B	Matriz que efectúa el cambio de base desde la base del SI a la base del SB.
H_R^B	Matriz que efectúa el cambio de base desde la base del SR a la base del SB.
I_{OB}	Matriz de inercia del avión respecto al punto O expresada en la base del SB.
K	Matriz de realimentación de estados. $\tilde{x} = -K\tilde{u}$.
L	Matriz que efectúa el cambio de coordenadas desde el vector $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ hacia el vector (w_{Bx}, w_{By}, w_{Bz}).
M	Matriz que efectúa el cambio de coordenadas desde el vector (w_{Bx}, w_{By}, w_{Bz}) hacia el vector $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$.

P	Matriz solución de la ecuación de *Ricatti*.
Q	Matriz de ponderación de estados para el regular cuadrático lineal.
R	Matriz de ponderación de entradas para el regular cuadrático lineal.
T	Matriz de tiempos de operación. $T \in \mathcal{M}^{N\times 1}$.
V	Matriz de velocidades lineales de operación. $V \in \mathcal{M}^{N\times 3}$.
W	Matriz de velocidades angulares de operación. $W \in \mathcal{M}^{N\times 1}$.

Índice de figuras

2.1. Distintos elementos que componen la configuración estándar en un avión. Imagen modificada [Www01]. 14
2.2. Descriptivo de los ejes longitudinal, lateral y vertical. Se puede notar el sentido definido positivo para las rotaciones de *roll*, *pitch* y *yaw*. Imagen modificada [Www01]. 15
2.3. Descriptivo de las distintas superficies de vuelo. Imagen modificada [Www01]. 15
2.4. Forma de medir los ángulos para la deflexión de las superficies de vuelo. Imagen modificada [Kun02]. . 16
2.5. Descriptivo de los ángulos utilizados para medir los desplazamientos de los alerones, elevadores y timón. Se muestra en caso para valores de los parámetros tales que $\delta_a^{'}, \delta_e, \delta_r > 0$. Imagen modificada [Www01]. 17
2.6. Ángulo de ataque α y ángulo *sideslip* β. Imagen modificada [Www01]. 17
2.7. Triángulos involucrados en la determinación de α y β. 18
2.8. Cuerda aerodinámica para un perfil infinito y homogéneo. Imagen modificada [Kun02]. 19
2.9. *Wing Span* y ángulo de *sweepback*. Imagen modificada [Kun02]. 19
2.10. Fotos tomadas del avión al final de la semana en que fue entregado a nosotros. 21
2.11. Fotos tomadas del avión al final de la semana en que fue entregado a nosotros. 21
2.12. Fotos tomadas del avión al final de la semana en que fue entregado a nosotros. 21
2.13. Vista lateral del avión de la UdelaR. Dimensiones en mm. 22
2.14. Vista aérea del avión de la UdelaR. Dimensiones en mm. 23
2.15. Detalle del ala del avión de la UdelaR. Dimensiones en mm. 23
2.16. Diagrama de conexionado para el cable necesario para interactuar con el *Gumstix*. 24
2.17. Vista lateral del *BEAVER*. [Rau01]. 25

3.1. Ilustrativa de los distintos sistemas de referencia a utilizar y las coordenadas (x, y, z) 29
3.2. Esquema de las distintas rotaciones en base a los ángulos de *Euler*. Por convención desde SI a SB. . . . 29
3.3. Modelado de la atmósfera. 34
3.4. Relación funcional entre C_L y α para el modelo del *BEAVER* y el perfil NACA 64 A 410. 44
3.5. Relación entre C_D y C_L para el modelo del *BEAVER* y el perfil NACA 64 A 410. 44

4.1. Modelo MDL elaborado en base a las ecuaciones del MVE. 52
4.2. Modelo MDL elaborado para el bloque funcionF. 53
4.3. Modelos MDLs que implementan la fuerza neta y el momento neto sobre el sistema. 54
4.4. Modelo MDL elaborado para el bloque Peso B. 54
4.5. Modelo MDL elaborado para el bloque FAero B. 54
4.6. Modelo MDL elaborado para el bloque TAero B. 55
4.7. Modelo MDL elaborado para el bloque FT Motor. 55
4.8. Trayectorias predichas por el simulador para la prueba 1. 59
4.9. Trayectorias para la prueba 1. **Azul:** simulador implementado. **Rojo:** utilizando el sistema 6DoF de *Matlab*. 59
4.10. Trayectorias para la prueba 1, ampliación de los gráficos xz y $\varphi(t)$. **Azul:** simulador implementado. **Rojo:** utilizando el sistema 6DoF de *Matlab*. 60
4.11. Trayectorias obtenidas para la prueba 2, planeo vs caida libre. 61
4.12. Trayectoria en el espacio para la prueba de planeo. 61

4.13. Resultados obtenidos para la prueba de la tabla 4.3, prueba de los alerones. 62
4.14. Resultados obtenidos para la prueba de la tabla 4.4, prueba de los alerones. 63
4.15. Trayectorias obtenidas para la prueba de la tabla 4.5, prueba del elevador. 64
4.16. Evolución en el tiempo de la velocidad angular $\vec{w_B}$ para la prueba de la tabla 4.5, prueba del elevador. . 65
4.17. Resultados obtenidos para la prueba de la tabla 4.6, prueba del modo *phugoid*. 66
4.18. Resultados obtenidos para la prueba de la tabla 4.7, prueba del timón de cola. 66
4.19. Trayectorias obtenidas para la prueba de la tabla 4.8, prueba de los *flaps*. 67
4.20. Evolución en el tiempo de la velocidad angular $\vec{w_B}$ para la prueba de la tabla 4.8, prueba de los *flaps*. . 68
4.21. Trayectorias obtenidas para la prueba de la tabla 4.9, prueba del motor. 68
4.22. Trayectorias obtenidas para la prueba 7.3, prueba con $n = 0$ y $t = 150s$. 69
4.23. Trayectorias obtenidas para la prueba 7.4, prueba con $n = 1000$ y $t = 150s$. 70
4.24. Trayectorias obtenidas para la prueba 7.5, prueba con $n = 2000$ y $t = 150s$. 70
4.25. Trayectorias obtenidas para la prueba 7.6, prueba con $n = 5000$ y $t = 300s$. 71
4.26. Trayectorias en el plano xy para distintas velocidades de viento sobre el eje y. 71

5.1. Determinación del valor de ψ_d. 77
5.2. Explicativo para el cambio de variable utilizado para los círculos. 78
5.3. Explicativo para los valores de ψ_I y $\vec{v}|_I$. 81

6.1. Ilustrativa del agregado de las tasas de trepado en los tramos rectos. 87
6.2. Trayectoria generada al finalizar el paso 1. 93
6.3. Trayectoria generada al finalizar el paso 1. 94
6.4. Ilustrativa de las magnitudes χ y ξ, y de los subíndices i utilizados. 95
6.5. Función $J_R(R)$ que pondera los radios de giro. 97
6.6. Resultados obtenidos para el *test* 1. 103
6.7. Resultados obtenidos para el *test* 3. 103

7.1. Diagrama de flujo del algoritmo de control automático. 115
7.2. Esquema de la concatenación de puntos de operación. 116
7.3. Esquema de la concatenación de modelos lineales y matrices de realimentación de estados. 117
7.4. Diagrama de bloques del controlador lineal. 118

8.1. Respuestas del sistema para distintas perturbaciones en las condiciones iniciales en z. La trayectoria roja es la que se desea seguir. 122
8.2. Evolución temporal de los ángulos de *Euler* a partir de una perturbación en la condición inicial en z de $150m$ con respecto a su valor valor deseado. 123
8.3. Evolución temporal de la velocidad en el SB a partir de una perturbación en la condición inicial en z de $150m$ con respecto a su valor valor deseado. 124
8.4. Evolución temporal de la velocidad angular a partir de una perturbación en la condición inicial en z de $150m$ con respecto a su valor valor deseado. 124
8.5. Velocidad del eje de giro (en rpm) en función del tiempo para una perturbación en las condiciones iniciales de $-350m$ en x. Notar la saturación en $5000rpm$ en los primeros instantes. 126
8.6. Posición del centro de masa en función del tiempo cuando se introduce viento de velocidad 25 m/s en y. Notar el error asintótico en y y z 127
8.7. Respuestas del sistema para distintas potencias en el ruido introducido a la entrada del filtro pasabajos cuando se coloca el polo de este en $1Hz$. La trayectoria roja es la que se desea seguir. Azul - ruido de potencia $5m^2/s^2$. Negro - ruido de potencia $10m^2/s^2$. Verde - ruido de potencia $20m^2/s^2$. 128
8.8. Evolución temporal de las señales ruidosas introducidas en la componente x de la velocidad en los casos que se utiliza ruido blanco de potencia $5m^2/s^2$ (rojo) y $20m^2/s^2$ (azul). 129
8.9. Respuestas del sistema para distintas potencias en el ruido introducido a la entrada del filtro pasabajos cuando se coloca el polo de este en $1Hz$. La trayectoria roja es la que se desea seguir. Azul - ruido de potencia $1m^2/s^2$. Negro - ruido de potencia $2m^2/s^2$. Verde - ruido de potencia $5m^2/s^2$. 129

8.10. Respuestas del sistema para distintas perturbaciones e la posición inicial del centro de masa. La trayectoria roja es la que se desea seguir. Azul - error de $100m$ en y. Negro - error de $-100m$ en y. Verde - error de $-200m$ en x. 130
8.11. Evolución temporal de los ángulos de *Euler* a partir de una perturbación en la condición inicial en y de $100m$ con respecto a su valor valor deseado. 131
8.12. Evolución temporal de la velocidad en el SB a partir de una perturbación en la condición inicial en y de $100m$ con respecto a su valor valor deseado. 131
8.13. Evolución temporal de la velocidad angular a partir de una perturbación en la condición inicial en y de $100m$ con respecto a su valor valor deseado. 132
8.14. Evolución temporal de la posición del centro de masa para una trayectoria circular con viento de $10m/s$ en la dirección x. Notar el comportamiento oscilatorio en z 133
8.15. Evolución temporal de la posición z del centro de masa en presencia de señales ruidosas obtenidas con el filtro del pasabajos en $5Hz$. La curva roja es el valor deseado. Las potencias del ruido blanco en cada caso son: $1m^2/s^2$ (azul). $3m^2/s^2$ (negro). $5m^2/s^2$ (verde). 134
8.16. Trayectoria compleja en el espacio construida como concatenación de rectas y circunferencias. Trayectoria deseada y real bajo la ausencia de perturbaciones más que las propias de la concatenación . 135
8.17. Evolución temporal de los ángulos de *Euler* para una concatenación de rectas y círculos bajo la ausencia de perturbaciones más que las propias de la concatenación. Se presenta el valor deseado y real. 136
8.18. Evolución temporal de la velocidad en el SB para una concatenación de rectas y círculos bajo la ausencia de perturbaciones más que las propias de la concatenación. Se presenta el valor deseado y real. 136
8.19. Evolución temporal de la velocidad angular para una concatenación de rectas y círculos bajo la ausencia de perturbaciones más que las propias de la concatenación. Se presenta el valor deseado y real. 136
8.20. Trayectoria regenerada (verde y azul) y seguimiento de la misma (rojo) luego de una perturbación en las condiciones iniciales de $2rad$ en ψ. 137

10.1. Menú principal del *software* integrado. 147
10.2. Diseño de la integración del *software*. 150
10.3. Menú para el simulador del lazo abierto del *software* integrado. 151
10.4. Menú para el generador de trayectorias del *software* integrado. 151
10.5. Menú para el simulador del lazo cerrado del *software* integrado. 152

B.1. Vista de la trayectoria generada en el plano para el caso de prueba 1. 175
B.2. Vista de la trayectoria generada en el espacio para el caso de prueba 1. 175
B.3. Vista de la trayectoria generada en el plano para el caso de prueba 2. 176
B.4. Vista de la trayectoria generada en el espacio para el caso de prueba 2. 176
B.5. Vista de la trayectoria generada en el plano para el caso de prueba 3. 177
B.6. Vista de la trayectoria generada en el espacio para el caso de prueba 3. 177
B.7. Vista de la trayectoria generada en el plano para el caso de prueba 4. 178
B.8. Vista de la trayectoria generada en el espacio para el caso de prueba 4. 178

Índice alfabético

A,

Acciones de control, 76, 108–110, 118, 119, 125, 131
Aceleración
    gravitatoria, 37, 48
Agregado de dinámica, 112
Alas, 14
Alerón, 15, 62
Algoritmo
    de búsqueda, 91
    de control, 113, 116–118, 120
    de generación de trayectoria, 86–88, 113–116
    de minimización, 99
    de optimización, 92
    de optimización de trayectoria, 91, 99
    de regeneración, 114–116
Ángulo
    de ataque, 17, 41, 43, 61, 65, 75, 149
    de deflexión, 15, 118, 120
    de diedro, 19, 43
    de flecha, 19
    de *sideslip*, 17, 41, 75, 149
    de *sweepback*, 19
    del alerón, 16, 41
    del elevador, 16, 41
    del *flap*, 16, 41
    del timón de cola, 16, 41
Ángulos
    de *Euler*, 29, 74, 76, 79, 81, 111, 113, 123, 143
Aterrizaje, 25, 67
Atmósfera, 33, 49
Autonomía
    de vuelo, 48
Avión
    de UdelaR, 19
Aviónica, 22, 141, 144

B,

Base del SB, 17, 28, 42, 75, 78
Base del SI, 28, 75, 78
Base del SR, 42
Baterías, 141, 142
BEAVER, 140, 152
BEAVER, 25, 33, 53
Bloque MDL
    Cambio de coordenadas M, 53
    FAero B, 54
    FT Motor, 54
    Fuerza Neta, 54
    Función F, 53
    Peso B, 54
    Primera cardinal, 53
    Rotación HIB, 53
    saturación, 120
    Segunda cardinal, 53
    Sistema completo, 52
    TAero B, 54
    Torque Neto, 54
Búsqueda
    en el espacio de parámetros, 90

C,

Cable de comunicación, 24
Caída
    libre, 58
    vertical, 58, 69
Cantidad
    de ecuaciones, 75, 80
    de variables, 75, 80
Características geométricas
    del avión de UdelaR, 20
    del *BEAVER*, 26
Carga útil, 142
Centro
    de gravedad, 14, 114, 123, 127, 131, 132, 137
    del círculo, 90, 95
Círculo, 86–91, 93–95, 100, 106, 107, 115, 116, 130, 137
    inserción, 94
Coeficiente
    de *drag*, 41, 43

de *lift*, 41, 43
Coeficientes
adimensionados, 25, 38–41
de ponderación, 95, 98, 103, 104, 152
Comunicación con tierra, 142
Condición de re-generación, 114, 115
Conector
DB-9, 24
mini-din, 24
Constante de los gases, 34
Constante de tiempo, 122
Consumo energético, 141, 142
Continuidad
en la posición, 86
en la velocidad, 86
Control
lineal, 106, 107, 113–115, 117–119, 121, 125, 130, 133, 135, 137, 138, 140
LQR óptimo, 109
MPC, 118
no lineal, 106
Controlabilidad, 108
Controlador
óptimo, 109
Convergencia, 107, 108, 110, 112, 123, 125, 127, 129, 131, 132, 135
Conversores A/D y D/A, 141
Corrección al MVE, 46, 47
Costo computacional, 83, 85, 92, 93, 97, 100, 104, 110, 140, 142
Criterios de éxito
generador de trayectorias, 101
Cuerda aerodinámica, 18
Cuerda aerodinámica media, 18
Curvatura
de la tierra, 48

D,

Densidad
a nivel del mar, 35
de la nafta, 49
del aire, 35, 72, 120, 130
Derecha, 15
Derivación
analítica, 83, 117
numérica, 83
Desarrollo de *Taylor*, 37, 72
Despegue, 25, 67
DHC, *The De Havilland Aircraft of Canada Ltd.*, 25
Diagrama de bloques, 52
Distancia
a los *waypoints*, 95, 96, 101–103
Drag, 41, 42, 61, 67, 74, 76
Dryden, 46

E,

EDO, ecuación diferencial ordinaria, 52
Eje
lateral, 14
longitudinal, 14
vertical, 14
Elevador, 15, 64
Entradas
controlables, 36, 72, 118, 125
no controlables, 36
Envergadura, 19
Error
admitido, 111
asintótico, 107, 108, 112, 127, 133
cuadrático integral, 110
cuadrático medio, 110
en el vector de estados, 137
en la posición, 113–115
en las condiciones iniciales, 112, 122–125, 130, 132, 133, 135, 137
integral, 78
numérico, 51
Escalón de *Heavyside*, 64, 65, 112, 148
Estabilidad, 107, 108, 110, 112, 117–119, 121, 123–125, 128, 131, 133, 137, 138
Estabilizador
horizontal, 14
vertical, 14
Expansión polinomial, 38, 40

F,

Filtro de *Kalman*, 141, 143
Flaps, 15, 66, 76
Fluido-estática, 34
Fuerza
aerodinámica, 25, 36, 37, 41, 45, 121, 123, 141
del motor, 25, 36, 39, 141
neta, 36, 75
Función
a minimizar, 92
cuantificadora, 95
de costo, 91, 92, 95–99, 117
Fuselaje, 14

G,

Gain Scheduling, 106, 117, 119
Gain Schedulling, 125, 134, 135, 137

Gas ideal, 33, 34
Generador de trayectoria
    especificación funcional, 86, 91
Generador de trayectorias
    análisis de resultados, 101–104
    consideraciones, 84, 85
    desarrollo, 86
    espacio de generación, 86
    introducción, 84
    pasos a futuro, 140
    post-procesamiento, 100, 102
    salidas, 116
Gradiente, 91
Grados de libertad, 91, 92, 96, 109, 119
    círculo, 88
    efectivos, 88, 91
    familia de trayectorias, 88
    recta, 88
Gumstix, 22, 24

H,

Hélice, 14, 39, 40, 69, 100

I,

ICAO, *International Civil Aviation Organization*, 46
IMU, 143
Indicadores cuantitativos
    del generador de trayectorias, 102
Inestabilidad, 111, 112
Inputs de usuario, 84, 86, 98, 100, 114, 115, 147–149, 151, 152
Intervale
    de estabilidad, 128
Intervalo
    de estabilidad, 125, 126
    temporal, 117, 118
Invariante en el tiempo, 73, 78, 112
Izquierda, 15

L,

Largo de la trayectoria, 96, 101, 102, 104
Lazo
    de control, segunda capa, 113, 118
    de realimentación, 116, 117
Lazo abierto, 51, 56
Lift, 41, 42, 61, 66, 74, 76
Lift-to-drag ratio, 67
Linealización
    del MVE, 72, 80, 83, 111, 112, 116–118
    exacta, 118, 119
    jacobiana, 72
LQR, 107–109, 112, 117

M,

MAC, *Mean Aerodynamic Chord*, 18
Masa
    del avión, 49
    del avión de UdelaR, 20
    del *BEAVER*, 26
Matlab, 51, 83, 99, 108, 109, 117, 120, 128, 144, 146–149
Matriz
    antisimética, 79
    de cambio de base, 30
    de realimentación de estados, 107–110, 117, 118
    de rotación, 30, 79
MDL, 51, 56
Minimización, 86, 89, 92, 95
Modelado, 28, 34
Modificación al MVE, 78, 112
Momento
    aerodinámico, 25, 36, 37, 41
    de *pitch*, 41
    de *roll*, 41
    de *yaw*, 41
    del motor, 25, 36, 39
    neto, 36, 75
Motor, 67
    de pistones, 40
    del avión, 111
    del avión, 20
MPC, 119
MVE, modelo en variables de estado, 28, 49, 72, 120, 121

N,

Nafta
    Común, 49
    Super, 49
Navegación, 86

O,

Ode45, 52, 120
Optimización, 89, 91, 98
Origen
    del tiempo, 115
    del vector de estados, 107, 108, 110, 117
Origen de medición, 78

P,

Parametrización
    de la trayectoria, 90

Parámetros
del avión, 55
del avión de UdelaR, 20
del *BEAVER*, 26, 56
del motor, 55, 67
Parámetros libres, 88
Pequeños apartamientos, 72, 82, 107, 113, 117, 125
Perfil NACA, 20, 26, 43
Perturbación al sistema, 48, 80, 107, 111–113, 118, 121–123, 125–127, 130–134, 137, 138
Peso
del avión, 37
relativo para la ponderación, 95
Phugoid, 65, 69
Pitch, 14, 65
Planeo, 60, 71
Polos
complejos conjugados, 109
del sistema realimentado, 107–109
dominantes, 109
Portabilidad
del algoritmo de control, 117
del modelo de avión, 25, 144, 149
Posición del avión, 29
Posición del avión, 108, 122
Potencia del ruido blanco, 128, 129, 134
Presión
a nivel del mar, 34
concepto general, 33
Primera cardinal, 31, 47, 120
Proceso estocástico, 46
Producto vectorial, 79
Pruebas
del controlador, 120, 121
del lazo abierto, 58
del simulador, 58
Punto
de equilibrio, 73
de operación, 74, 77, 80, 82, 106–108, 110–112, 116–118, 128, 135, 142
en el espacio, 84

R,

Radio
de curvatura, 86
de giro, 70, 95, 101, 102
del círculo, 89, 90
mínimo de giro, 70, 84, 94, 97, 100, 103, 104
Realimentación
de estados, 107, 108, 110, 112, 113, 118
estática, 112, 117, 118
Recta, 86–91, 93, 94, 100, 106, 107, 115, 116, 122, 134, 137
primer y última, 96
Región de estabilidad, 126, 132
Regla de derivación, 31, 48
Representación de la trayectoria, 89, 90
Restricciones
continuidad, 88, 90, 91
de los *waypoints*, 86, 103
físicas, 84, 86, 92–94, 97, 100–102, 109, 118, 119, 128
tangencia, 88, 91, 93
Ricatti, 110
Robustez, 111, 112
Roll, 14, 62, 67
Root locus, 107, 108
Rotación
de la tierra, 47
Rotaciones de *Euler*, 29
Ruido, 121, 122
Runge Kutta, 52

S,

Señal
de entrada, 119
de error, 107
de realimentación, 110, 111
de referencia, 107
ruidosa, 121, 128, 129, 134, 138
Segunda cardinal, 33
Semilla, 83, 91–94, 97, 99, 104
Sensores, 141, 142
Sentido
anti-horario, 90
horario, 90
Sentido del recorrido, 88–90
Sentidos positivos, 16, 41
Simulación, 51
Simulador del MVE, 51
Simulink, 52, 83, 120, 146, 147
Sistema
de coordenadas, 28
de referencia, 28, 47
Sistema lineal, 72, 77
SLIT, 73, 79, 106, 107, 109
Software
de linealización, 83, 146
de trimado, 83
integrado, 53, 146–150
Stall, 45
Superficie alar, 18

Superficies
de control, 110, 111
de vuelo, 118
Superficies de control, 16, 36, 75
Superficies de vuelo, 16, 36, 75

T,

Tanque de nafta, 49
Tasas de trepado, 84, 86, 87, 97, 98, 100–102, 104
Temperatura
a nivel del mar, 34
concepto general, 33
Tensor de inercia
del avión de UdelaR, 21
del *BEAVER*, 26
Tensor de inercia, inversa
del *BEAVER*, 26
Tiempo de convergencia, 132
Timón de cola, 15, 65
Tipo de navegación, 84
Tracking, 106, 107, 109
Trayectoria
2D, 86–88, 97, 100
3D, 86, 87, 97, 100, 135, 149
circular, 69, 74, 77, 82, 83, 86
de operación, 72, 74, 107, 108
deseada, 113, 118, 120, 123, 125–134
en línea recta, 74, 77, 83, 86
estacionaria, 72, 73, 75, 82, 85, 107, 108, 115–118, 120, 121, 134, 135
generación, 84, 86
geométrica, 88
helicoidal, 101, 104
óptima, 85, 87, 89, 91, 99, 100, 102–104
re-generación, 85, 113, 114, 118, 137, 138
sub-óptima, 87, 91, 93, 94, 98, 100
Trimado, 80, 83, 116–118, 120–122, 126–128, 130, 133, 142, 144, 146
Turbulencias, 46

User Interface, 146, 150

V,

Valores recomendados, 99
Variables
de iteración, 99
de la linealización, 75
del re-generador, 114, 115
parametrizadoras, 90
Variación de la temperatura, 34
Vector
de entradas, 28, 36
de estados, 28, 33, 36, 72, 107–116, 122, 130, 149
de parámetros, 36
Velocidad
angular del avión, 30, 75, 79, 81, 106, 116
de ascenso, 100
de respuesta, 108
del avión, 17, 29, 76, 80, 106, 114, 116
del motor, 69, 120, 125
del viento, 17, 38, 41, 45, 46, 49, 71, 75, 80, 106, 121, 126–130, 133–135, 138
lineal absoluta, 29, 30, 38, 41
máxima de trepado, 84
máxima de vuelo, 84
mínima de vuelo, 84
relativa al viento, 17, 38, 41, 143
Von Karman, 46
Vuelo rectilíneo, 74

W,

Waypoint
auxiliar, 114, 115, 152
Waypoints, 84, 86–89, 92–104, 113–118, 134, 135, 137, 138, 144, 146, 148, 149, 152
a distinta altura, 87, 100
Wing span, 19

Y,

Yaw, 14

Bibliografía

[Abb59] Ira H. Abbot, Albert E. Von Doenhoff - *Theory of wing sections*. Segunda edición, 1959.

[Alo09] R. Alonso, G. Hernández - *Tracking del modelo reducido de un avión en situación de vuelo, distintas estrategias de control*. Monografía en control no lineal, 2009.

[Cha07] Andrés Chappe, Rodrigo Sosa, Andrés Suttner - *Diseño de un vehículo aéreo no tripulado: AMFO-1/Bobby*. Documentación de Proyecto de Fin de Carrera, 2007.

[Coo07] Michael V. Cook - *Flight Dynamics Principles, A linear systems approach to aircraft stability and control*. Segunda edición, 2007.

[Gol59] Herbert Goldstein, Ph.D. - *Classical mechanics*. Primera edición, sexta impresión, 1959.

[Hul07] D. Hull - *Fundamentals of airplane flight mechanics*. 2007.

[Kal96] Hassan K. Khalil - *Nonlinear systems*. Segunda edición, 1996.

[Kun02] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen - *Fluid Mechanics*. Segunda edición, 2002.

[Mul88] J. A. Mulder, R. T. H. Tjee - *Stability and control derivatives of the De Havilland 'BEAVER' aircraft*. Report LR-556, 1988.

[Nas74] NASA Technical Note - *Parameter estimation techniques and applications in aircraft flight testing*. NASA TN D-7647, 1974.

[Nie00] Micheal A. Nielsen, Isaac L. Chuang - *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2000.

[Oga98] Katsuhiko Ogata - *Ingeniería de Control Moderna*. Tercera edición, 1998.

[Rau01] Marc Rauw - *FDC 1.4 - A simulink toolbox for flight dynamics and control analysis*. Septima versión. 2005.

[Ros101] Jan Roskam - *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Control, Parte I*. Tercera edición, 2001.

[Ros201] Jan Roskam - *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Control, Parte II*. Tercera edición, 2001.

[Slo91] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li - *Applied Nonlinear Control*. 1991.

[Tal75] T. A. Talay - *Introduction to aerodynamics of flight*. NASA SP-367, 1975.

[Use07] Gabriel Usera - *caffa3d.MB, A fully implicit, finite volume, flow solver for the incompressible 3D Navier-Stokes equations with generic scalar transport, in block structured, non-orthogonal, body fitted grids*. Documentación de proyecto e investigación, 2007. *http://www.fing.edu.uy/imfia/caffa3d.MB/*.

[Wyl99] J. Van Wylen, R. E. Sonntag - *Fundamentos de termodinámica*. Segunda edición, 1999.

[Www01] *http://www.aviacion.cl*

[Www02] *http://www.wikipedia.com*

[Www03] *http://www.dapsa.com* - Hoja de especificación, nafta común. Hoja de especificación, nafta super. Especificaciones técnicas.