

FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA



PROYECTO DE FIN DE CARRERA DE INGENIERÍA  
ELÉCTRICA

---

## Implementación de un UAV con arquitectura de cuadricóptero

---

*Autores:*

Santiago PATERNAIN  
Rodrigo ROSA  
Matías TAILANIÁN

*Tutor:*  
Ing. Rafael CANETTI



4 de abril de 2012

---

# INTRODUCCIÓN

Existe actualmente en el Instituto de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República una línea de investigación orientada a la robótica móvil y a técnicas de control. En este marco, se han desarrollado diversas plataformas experimentales tanto por docentes del Departamento de Control como por estudiantes durante los proyectos de fin de carrera. En particular, dos proyectos de fin de carrera se orientaron al diseño de un UAV<sup>1</sup> con arquitectura de avión. El primero de ellos, *AMFO1-Bobby*, se avocó al diseño y construcción de un avión de dimensiones reducidas capaz de vuelo relativamente prolongada. Dicha plataforma fue diseñada para ser volada gracias a un control remoto. El proyecto AUION, continua el trabajado desarrollado hasta aquí resolviendo el diseño del controlador del avión en la situación de vuelo, quedando excluido el despegue y el aterrizaje del vehículo.

En el presente proyecto se continua trabajando en la línea presentada, diseñando e integrando un sistema de control a un vehículo aéreo comercial con arquitectura de cuadricóptero de forma de lograr el vuelo autónomo del mismo. Por vuelo autónomo se entiende la capacidad de seguir una trayectoria autogenerada a partir de puntos del espacio introducidos por un usuario por los cuales se desea “pasar”, de ahora en más *waypoints*.

La arquitectura escogida ofrece una gran variedad de aplicaciones entre las cuales se puede nombrar la fotografía y el cine, el relevamiento de zonas peligrosas o contaminadas, la vigilancia y la navegación bajo techo.

No es el objetivo de este proyecto desarrollar un producto final, sino que por el contrario lo que se plantea es desarrollar una plataforma experimental sobre la cual otros grupos puedan trabajar, profundizando en diversas áreas como la estimación de estados, técnicas de control más avanzadas, la generación de rutas óptimas y la cooperación entre varias plataformas idénticas.

El objetivo del presente proyecto incluye instrumentar dos cuadricópteros de forma de poder obtener todas las variables de estado con las que se elige representar al sistema. La comprensión del comando de los motores y la caracterización

---

<sup>1</sup>Unmanned aerial vehicle

de los mismos son parte fundamental para realizar el control del sistema. Se desarrollará una primer versión de un generador de rutas que defina la trayectoría a seguir a partir de waypoints introducidos por el usuario. Se desarrollará un controlador que permita seguir la trayectoria generada por el generador de rutas. Se deberá programar e integrar una CPU a cada cuadricóptero para realizar las tareas hasta aquí planteadas, manteniendo la posibilidad de trabajar en modo automático y manual.

Como ya fue explicitado, es de interés que este proyecto sea la plataforma para el desarrollo de proyectos que permitan una profundización en las líneas de trabajo planteadas, por dicho motivo se incluye dentro del alcance el diseño de un simulador que permita, a lo largo de este y de futuros proyectos, testear los algoritmos de control en desarrollo.

# **Parte I**

## **Descripción del sistema**

---

# CAPÍTULO 1

---

## VISIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Consideramos importante explicar superficialmente las distintas partes que componen el proyecto de forma de que el lector se haga una idea general de los distintos bloques que componen al sistema para luego ir profundizando sobre cada uno de ellos en los siguientes capítulos.

El esquema general de un cuadricóptero es el que se puede apreciar en la figura 1.1, el mismo se compone de dos ejes perpendiculares, en cuyos extremos se ubican los propulsores ( motores y hélices). Las velocidades angulares de dichos motores, así como las fuerzas y torques producidos por ellos se presentan también en la figura 1.1. Tanto los torques como las fuerzas de los propulsores dependen de la velocidad angular de las hélices. Por dicho motivo, lo que se busca es actuar sobre los motores variando la velocidad angular de los mismos para realizar las distintas acciones de control.

### 1.1. Acciones de control básicas

Existe una velocidad angular de los motores para la cual la fuerza total producida es igual al peso, esa velocidad angular permite que el cuadricóptero permanezca suspendido con velocidad nula, esta situación es conocida como *hovering*.

Si aumentamos uniformemente la velocidad angular de los motores la fuerza producida por los mismos supera al peso y el sistema se acelera hacia arriba. Por el contrario si la velocidad angular es inferior a la velocidad angular de hovering el

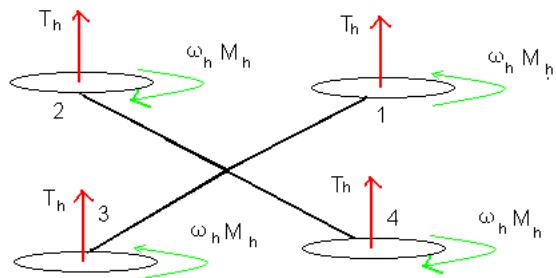


Figura 1.1: Esquema general de un cuadricóptero

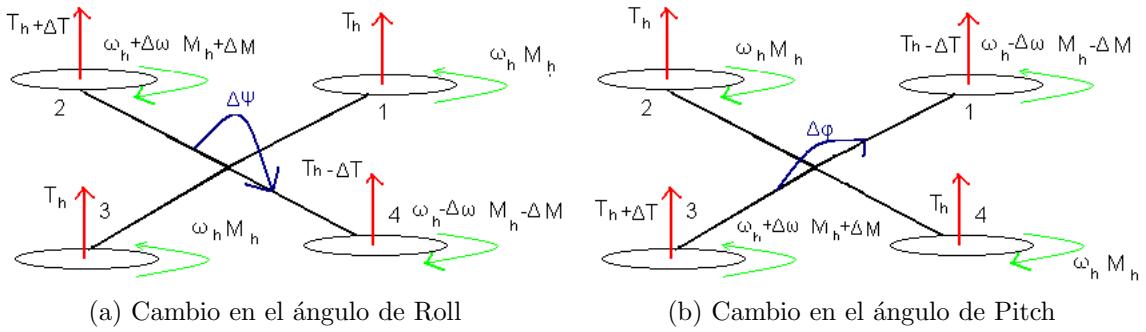


Figura 1.2

sistema se acelera hacia el centro de la Tierra.

Para realizar una rotación se debe crear un desbalance entre los torques producidos por los motores. Si se desea realizar aumentar el ángulo de Roll ( $\psi$ ), debe disminuirse la velocidad angular del motor 4 y aumentar la del motor 2 manteniendo la fuerza neta igual a la fuerza necesaria para lograr el hovering. Esta situación se encuentra representada en la figura 1.2a. Del mismo modo, como se observa en la figura 1.2b para aumentar el ángulo de Pitch debe aumentarse la velocidad angular del motor 3 y disminuir la velocidad angular del motor 1. Finalmente si se desea aumentar el ángulo de Yaw se debe disminuir la velocidad de la velocidad de los motores 1 y 3 y aumentar la de los motores 2 y 4, manteniendo la fuerza neta igual a la fuerza de hovering. Esta última situación es la presentada en la figura 1.3.

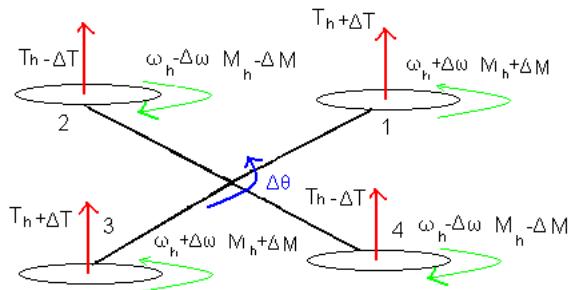


Figura 1.3: Cambio en el ángulo de Yaw

Las acciones de control descriptas anteriormente pueden ser combinadas de forma de lograr trayectorias más complejas, gran parte de los capítulos siguientes intentan explicar que acción debe realizarse sobre cada motor para lograr el objetivo planteado.

## 1.2. Componentes del sistema y su interacción

En la proxima sección se verá en detalle el hardware utilizado durante el presente proyecto, sin embargo daremos una visión general del sistema que se desea implementar. En la figura 4.3 se presenta un diagrama de bloques del sistema.

La plataforma elegida es un cuadricóptero comercial radio controlado, por dicho motivo una parte del sistema se encuentra ya diseñada, esta incluye los elementos

indispensables para poder volar manualmente el cuadricóptero, es decir transmisor, receptor, CPU1 y motores.

Una de las señales del receptor será utilizada para definir si el control de los motores estará comandado por la CPU1 o por la CPU2 (piloto automático). Esta última es el centro del sistema de control que se desea implementar. Para determinar las acciones a realizar sobre los motores es imprescindible contar con cierta instrumentación (IMU<sup>1</sup> y GPS) que permita estimar las variables de interés.

Se desea además que la CPU2 tenga una comunicación con el mundo exterior de forma de facilitar la programación de los algoritmos y de modificar o agregar waypoints durante el vuelo.

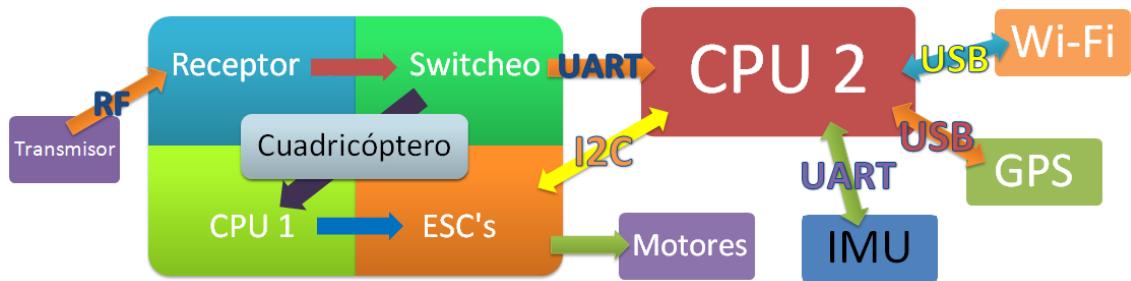


Figura 1.4: Esquema general de interconexión

---

<sup>1</sup>Inertial Measurement Unit

---

# CAPÍTULO 2

---

## HARDWARE

La elección del Hardware significa una parte muy importante del Proyecto, ya que las decisiones tomadas condicionan el resto del mismo. Una mala elección de alguno de los componentes puede resultar en complicaciones no previstas a la hora de la ejecución, causando contratiempos inesperados y trabajo excesivo. Es necesario, entonces, el estudio detallado de cada uno de los componentes a utilizar, comparando características, rendimientos y utilidades.

### 2.1. Plataforma física: Cuadricópteros

A la hora de la planificación del Proyecto se plantean la opción de partir de cero diseñando completamente el cuadricóptero. Si bien esta opción tiene la ventaja de que se puede conocer completamente su funcionamiento incluye desafíos de ingeniería mecánica, conocimientos de resistencia, flexibilidad y peso de materiales, así como también diversas complicaciones adicionales a la hora de fabricar y armar los distintos componentes.

Teniendo en cuenta que se trata de un proyecto con tiempo acotado y su objetivo se centra en el control del vehículo, la necesidad de partir de hardware ya construido resulta imperiosa. La plataforma escogida es el cuadricóptero Turbo Ace X720, este mismo cuadricóptero es conocido además como LotusRc 850.

Esta plataforma es controlada por un usuario a través de un control remoto



Figura 2.1: Turbo Ace X720

(Walkera 2801). El sistema receptor - CPU se encarga de setear la velocidad angular de cada motor en función de la señal recibida.

## Motores

Los motores de la plataforma son *Brushless*, estos son motores eléctricos alimentados con corriente continua. Tienen un sistema de commutación eléctrico y presentan relaciones lineales entre *Corriente* y *Torque* y entre *Frecuencia* y *velocidad*. Son comúnmente utilizados en vehículos radio-controlados por su gran eficiencia, potencia, durabilidad y su bajo peso en comparación con los tradicionales motores *Brushed*. Sin embargo, los motores de CC *Brushless* son mucho más complicados de controlar, ya que la fase varía con la rotación del motor. Para controlarlos debe utilizarse un dispositivo llamado *Controlador eléctrico de velocidad*, o **ESCs**. Comúnmente los ESCs se clasifican según su corriente máxima, por ejemplo 10 ampéres o 10A.

El comando de los motores se basa en el protocolo  $I^2C$  de frecuencia 400kHz.

## Peso

La carga útil que el dispositivo pueda soportar juega un papel fundamental. Vale recordar que, además de toda la instrumentación que incluye el cuadricóptero, se incorporará un microprocesador, una batería independiente para su alimentación, un giróscopo, un acelerómetro, un GPS y alguna interfaz para la comunicación. A su vez es interesante conservar la posibilidad de integrar una cámara fotográfica convencional ya que puede ser de gran utilidad para numerosas aplicaciones. La fuerza que los motores pueden realizar es acotada, por lo que el peso del dispositivo influye directamente en la carga útil del mismo. Para esta plataforma la carga adicional que puede agregarse es de 1300g incluyendo batería.

## Tiempo de vuelo

El tiempo de vuelo puede resultar crítico según la aplicación considerada, en este caso no será posible superar los 20 minutos de vuelo utilizando una batería de LiPo de 5300mAh.

## Instrumentación

La instrumentación que el dispositivo brinda está destinada al manejo mediante el control remoto. La misma incluye un acelerómetro y un giróscopo de 3 ejes, un barómetro y poseen algún sistema de estabilización incluido, de forma de facilitar el control.

Lamentablemente el software presente en la CPU es privativo por lo tanto reutilizarlo parece una tarea muy dificultosa, del mismo modo obtener la lectura de los sensores presentes tampoco parece una tarea sencilla. Por dicho motivo se opta por dotar al sistema de instrumentación adicional.

## 2.2. Inteligencia

Además de la plataforma física, deben seleccionarse componentes electrónicos capaces de procesar la información proveniente de los sensores, computar y ejecutar los algoritmos de control y generar las señales necesarias para transmitir las instrucciones a los motores.

La solución implementada se basa en la plataforma de desarrollo *Beagleboard*. Esta plataforma posee un microprocesador TI ARM Cortex A8 de 1GHz y un DSP TMS320C64x+ de 800MHz, la memoria RAM de la misma es de 512 Mb y si bien no tiene memoria no volatil soporta tarjetas SD de hasta 4GB. Ver figura 2.2.



Figura 2.2: Beagleboard

### Dimensiones y peso

Si bien no resulta una característica determinante, es conveniente que las dimensiones y peso de la placa elegida sean lo menores posibles, de forma de no ocupar gran parte de la carga útil del cuadricóptero con electrónica asociada a la inteligencia implementada. El peso de la Beagleboard y una batería asociada diseñada especialmente para esta plataforma es de 76 gramos y sus dimensiones son  $10\text{cm} \times 8.5\text{cm} \times 2\text{cm}$ . La autonomía de la batería es de aproximadamente 2 horas.

### Programación y Sistema Operativo

Es importante tener en cuenta como será realizada la programación de los sistemas considerados (dónde se almacena el programa, hardware necesario para la programación, etc.) En particular, es conveniente poder contar con algún sistema operativo que facilite la tareas de programación, testeo y debugging.

La BeagleBoard ofrece la posibilidad de cargar un kernel de *Linux* desde una tarjeta SD. Esto ofrece una amplia gama de posibilidades. A modo de ejemplo podemos nombrar las facilidades que implica en cuanto a la comunicación. La plataforma dispone de una interfaz ethernet y cuatro puertos USB. Al disponer de un sistema operativo, los *drivers* de dichas interfaces se pueden utilizar obteniendo así la posibilidad de realizar ajustes sobre el sistema a través de la interfaz ethernet o de una

interfaz WiFi agregando el módulo USB (Belkin wireless G). Además se dispone de un puerto serie.

## Puertos e I/Os

Las posibilidades que ofrece la Beagleboard en cuanto a puertos de entrada y salida son muy considerables. A modo de ejemplo se tienen cuatro puertos USB, una interfaz ethernet un puerto de expansión de 28 pines de propósito general y un puerto serie. En lo que respecta a la solución implementada es importante destacar que los pines 23 y 24 pueden ser programados para comunicarse a través del protocolo  $I^2C$  fundamental para enviar comandos a los motores. Los pines 23 y 24 corresponden a las líneas de datos y al reloj respectivamente. Por otra parte, los pines 8 y 6 pueden ser configurados para funcionar como pines de transmisión y recepción de un puerto serie. Esto será fundamental para la comunicación con algunos de los sensores.

## 2.3. Instrumentación

Para poder controlar el sistema es importante poder conocer los valores que toman las variables del mismo. Como se verá en el capítulo sobre el desarrollo del modelo físico del cuadricóptero, las variables que es necesario conocer son:

- La orientación del sistema en el sistema de coordenadas utilizado
- La altura del sistema en el sistema de coordenadas utilizado
- La aceleración en las tres coordenadas
- La velocidad angular del sistema según tres ejes de rotación

Por dicho motivo parece imprescindible dotar al sistema de sensores capaces de medir dichas magnitudes.

### 2.3.1. IMU

#### Acelerómetro

Un acelerómetro es un dispositivo capaz de medir su aceleración propia en el marco de referencia de la caída libre. Esto implica que el dispositivo no mide siempre su cambio de velocidad en el espacio.

Por ejemplo, la medida de un acelerómetro en caída libre será cero a pesar de que su velocidad crezca, de la misma forma se puede observar que un acelerómetro en reposo respecto de la Tierra, no dará una medida nula, sino que por el contrario medirá como aceleración g.

Existen diversos tipos de acelerómetro, en este caso se eligió trabajar con un acelerómetro contenido en un circuito integrado (tecnología MEMS). Las razones de esta elección son fundamentalmente tamaño y peso (críticos en la aplicación) y económicos. Los mismos son más pequeños, livianos y baratos que otras tecnologías. Dicho acelerómetro procesa las medidas y las convierte a una salida eléctrica; la

forma de dicha salida depende si el integrado es analógico o digital.

Los acelerómetros basados en tecnologías MEMS miden cambios internos de la transferencia de calor causada por la aceleración, ofreciendo ventajas significativas sobre el empleo de una estructura tradicional sólida de masas de prueba.

Un acelerómetro de tres ejes no es otra cosa que un acelerómetro capaz de medir su aceleración propia en tres ejes de coordenadas.

El acelerómetro cumple dos roles fundamentales. El primero es que, bajo el supuesto que las aceleraciones a las cuales se verá sometido el sistema no son comparables con  $g$  el mismo sirve para determinar con gran precisión los ángulos de Pitch y de Roll. El segundo, es que nos permite obtener una estimación de la velocidad al integrar su medida.

## Giróscopo

Un giróscopo es un instrumento que mide la velocidad angular del sistema en un sistema de referencia solidario a si mismo. Las mismas restricciones sobre tamaño, peso y costos que se aplicaban para el acelerómetro se aplican aquí. Por dicho motivo se vuelve a optar por un instrumento de tecnología MEMS.

Desde el punto de vista teórico, procesando la información obtenida a partir del acelerómetro y del giróscopo se puede conocer en todo momento la posición del sistema y su orientación a partir de las condiciones iniciales.

En la práctica, sin embargo, esto no sucede así. Todas las medidas realizadas tienen un cierto error. Para obtener la orientación y la posición a cada instante se deben integrar las medidas obtenidas, por lo tanto, se integra también el error cometido. Esto produce una acumulación de errores que afecta de forma considerable el resultado final luego de cierta cantidad de muestras.

Parece razonable, entonces, poder cotejar los datos que se obtienen mediante este método con datos obtenidos mediante otras fuentes. Es a partir de esta problemática que surge la necesidad de contar con un GPS. Se puede, cada cierto intervalo de tiempo, observar en cuanto difieren los resultados obtenidos integrando las medidas de los sensores con los datos que aporta el GPS, logrando de esta forma corregir los errores debido al *integration drift*.

## Sensor de presión

Si bien un dispositivo GPS provee una estimación de la altura a la que se encuentra, la misma resulta ser poco exacta y confiable, por depender fuertemente de la cantidad de satélites vistos por el GPS así como por el efecto del rebote de las ondas en estructuras cercanas (resulta particularmente crítico el efecto de los rebotes en el piso, los cuales dan poca precisión a la medida de altura al estar muy cerca del suelo). Por este motivo es necesario contar con un sensor de presión absoluta que nos permita determinar la altura del cuadricóptero en forma independiente al resto de los sensores. La medida de presión debe ser absoluta pues es este tipo de medidas las que pueden ser traducidas a altura en forma rápida y confiable.

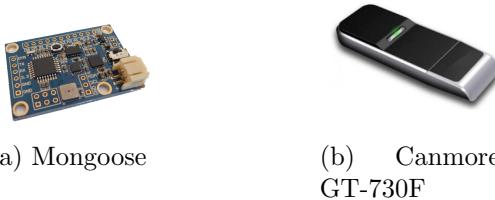


Figura 2.3: Instrumentación

## Magnetómetro

Si bien el sistema contará con giróscopos que permitirán, a través de integración, estimar la orientación del cuadricóptero, dicha estimación está sujeta a los errores asociados a este tipo de sensores (errores de drift e integración, entre otros), siendo además dicha medida una medida diferencial, teniendo como única referencia la orientación inicial del cuadricóptero. Eso por ello que resulta conveniente contar con un magnetómetro que permita tener una medida absoluta y confiable del ángulo de Yaw, la cual puede ser entonces complementada y corregida mediante la información obtenida mediante la integración de la información generada por el giróscopo.

## Sensor de temperatura

Si bien el control del sistema no depende directamente de la temperatura, los instrumentos a utilizarse están construidos con cierta tecnología que presenta dependencia con (y por ende tendrá errores asociados a) la temperatura. El contar con un sensor de temperatura permitirá sensar la misma y realizar correcciones en tiempo real que permitan minimizar dicho errores.

La Mongoose 9DoF IMU posee todos los sensores que se han nombrado hasta aquí excepto el GPS. La misma posee además un micropresador con facilidades para ser programado, pudiendo así realizar un preprocesamiento de los datos antes de realizar la estimación del estado. Entre las modificaciones realizadas las más importantes son un aumento y una estabilización de la frecuencia de muestreo y la conversión de los datos de salida de formato ASCII a binario. Esto último permite una mayor velocidad de transmisión de los mismos a través del puerto serie de la Mongoose. En la figura 2.3a se puede observar dicha placa de instrumentación. Las características de dicha placa pueden consultarse en ??.

### 2.3.2. GPS

La elección del GPS se basó casi totalmente en lograr la simplicidad del sistema. Existían muchas opciones, placas de diversos tamaños, con diversos tamaños de antenas, pero todas con similares especificaciones.

Las placas candidatas a estar a cargo de la inteligencia contaban con interfaces USB, por lo que se optó por comprar un dongle GPS, cuyas especificaciones son similares a las del resto de las opciones, y se puede comunicar vía USB. Existe drivers para dicho GPS en linux, por lo que la comunicación con el mismo no debería ser un problema.

Se optó por utilizar un GPS *Canmore GT-730F*.

## 2.4. Consideraciones adicionales sobre el hardware utilizado

Si bien entendemos que en lo que respecta a la instrumentación la elección es la adecuada para la primer versión de la plataforma en el futuro puede ser de interés añadir al sistema la posibilidad de obtener la posición mediante el procesamiento de imágenes, para lograr una mayor exactitud. Para esto, la capacidad de procesamiento, las bibliotecas existentes de *computer vision* y los módulos de cámaras VGA diseñados para trabajar con la Beagleboard permiten aprovechar al máximo la capacidad de esta plataforma la cual supera ampliamente los requerimientos de este proyecto.

## **Parte II**

# **Modelado del sistema**

---

# CAPÍTULO 3

---

## MODELO FÍSICO

Resulta imprescindible para controlar el cuadricóptero comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de este capítulo es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo en Variables de Estado, de ahora en más MVE. Lo que se busca es obtener una representación del sistema de la forma  $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ , donde  $\vec{x}$  es el vector de estados del sistema,  $\vec{u}$  es el vector que representa las entradas del sistema y  $t$  es el tiempo.

Al tratarse de una plataforma comercial no se dispone de todos los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo, a modo de ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores ni el tensor de inercia del sistema (ver los capítulos ?? y ?? respectivamente). En el presente análisis nos limitaremos a obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del cuadricóptero.

### 3.1. Hipótesis de trabajo

No debe perderse de vista que el cuadricóptero con el que se trabaja fue diseñado para ser comandado a través de un control remoto. Por dicho motivo es razonable que sus características sean tales que le permitan a una persona volarlo desde el suelo. Parece perfectamente razonable que se haya diseñado el sistema para volar por tiempos limitados, distancias relativamente cortas y a bajas velocidades. Estas consideraciones permiten introducir diversas simplificaciones en el modelado.

#### 3.1.1. La Tierra como sistema de referencia inercial

La Tierra **no** es un sistema de referencia inercial ya que la misma se encuentra sometida a la traslación en torno al Sol y a una rotación en sobre su eje. Supongamos una partícula que se encuentra en movimiento relativo a la Tierra. Su aceleración respecto de un sistema verdaderamente inercial puede escribirse como:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C \quad (3.1)$$

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.2)$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (3.3)$$

En las ecuaciones anteriores  $\vec{a}$  es la aceleración de la partícula en el sistema relativo,  $\vec{v}$  es la velocidad relativa de la partícula,  $\vec{r}$  la posición relativa,  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular de la Tierra y  $\vec{a}_{O'}$  es la aceleración del centro de masa de la Tierra.

El objetivo es ahora analizar si es posible considerar que  $\vec{a} \approx \vec{a}$ . Si esto último se cumple se puede aproximar a la Tierra como un sistema inercial. El radio promedio de la órbita Heliocéntrica( $R_H$ ) es de  $1,5 \times 10^8 \text{ Km}$ , dicha órbita se recorre en 365 días lo que nos da una velocidad promedio de:

$$V_T = \frac{1,5 \times 10^{11} \text{ m}}{365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s}} \approx 4,8 \times 10^3 \text{ ms}^{-1} \quad (3.4)$$

Esta velocidad implica que la aceleración del centro de masa de la Tierra( $\vec{a}_{O'}$ ) es de aproximadamente:

$$a_{O'} = \frac{V_T^2}{R_H} \approx 15,36 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2} \quad (3.5)$$

Por otra parte sabemos que la Tierra rota sobre su eje una vez cada 24 horas con velocidad angular constante, tenemos así que:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60 \text{ s}} \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rads}^{-1} \quad (3.6)$$

Finalmente debemos considerar el radio promedio de la Tierra( $R_T = 6,731 \times 10^6 \text{ m}$ ), ya que las alturas que alcanzará nuestro sistema son despreciables respecto del radio de la Tierra.

Por lo tanto

$$a_T \approx 3,6 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2} \quad (3.7)$$

Para que el término de la aceleración de Coreolis sea comparable con la aceleración de transporte las velocidades del cuadricóptero relativas a la Tierra deberían ser del orden de cientos de metros por segundo, condición que evidentemente no se cumple, por lo tanto este término puede ser despreciado.

La aceleración relativa al sistema de la Tierra difiere de aproximadamente  $3,6 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$  de la aceleración medida en un sistema verdaderamente inercial. Por otra parte la resolución del acelerómetro utilizado es de  $4mg \approx 4,81 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$ . Con el sensor elegido para trabajar es imposible distinguir entre ambas aceleraciones, por dicho motivo parece razonable despreciar el término de la aceleración que corresponde a la aceleración de transporte. Esto nos permite afirmar que la Tierra puede aproximarse como un sistema de referencia inercial y por lo tanto se cumple que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \approx m\vec{a} \quad (3.8)$$

### 3.1.2. Curvatura de la Tierra

El cuadricóptero no se desplazara una distancia superior a una centena de metros paralelo a la superficie de la Tierra. Consideremos un caso extremo en el cual el cuadricóptero se desplaza  $1\text{km}$  en una dirección. Esto corresponde a recorrer un arco de círculo de  $\theta = \frac{1\text{km}}{6,731 \times 10^3 \text{km}} \approx 1,5 \times 10^{-4} \text{rad}$ . Si consideramos la superficie terrestre como un plano, la distancia recorrida es:

$$d = R_T \sin(\theta) \approx 0,999999996\text{km} \quad (3.9)$$

Como era de esperar, la diferencia entre la distancia recorrida como arco de círculo y asumiendo una aproximación local de la Tierra por un plano es despreciable. Por lo tanto trabajaremos con un sistema de coordenadas cartesiano.

### 3.1.3. Atracción gravitacional

Todos los objetos se encuentran relacionados entre sí por medio de la Fuerza de atracción gravitacional. Sin embargo en las cercanías de la Tierra la atracción gravitacional con el resto de los objetos es completamente despreciable. Dicha fuerza vale:

$$F_G = G \frac{M_T m}{d^2} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \quad (3.10)$$

Donde  $G$  es la constante gravitacional y  $h$  la altura a la cual se encuentra una partícula. Como ya se analizo anteriormente las alturas a las cuales se desenvolverá el cuadricóptero son despreciables respecto del radio de la Tierra. Por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$F_G \approx \frac{M_T m}{R_T^2} = gm \quad (3.11)$$

donde  $g$  es la constante gravitacional de la Tierra, su valor es aproximadamente  $9,81\text{m s}^{-2}$

### 3.1.4. Fuerzas aerodinámicas

Debido a las bajas velocidades que logrará el cuadricóptero se decidió despreciar las fuerzas de tipo aerodinámicas, salvo aquellas responsables de las fuerzas y momentos de las hélices. Estas fuerzas serán analizadas con mayor profundidad en la sección 3.5.

## 3.2. Sistema de referencia

A lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia: uno inercial solidario a la tierra ( $S_I$ ) y otro solidario al cuadrcóptero ( $S_q$ ) como se muestra en la figura 3.1. El sistema  $S_I$  es un sistema local donde la dirección  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  corresponden a las direcciones Este, Norte y hacia arriba y el origen es la posición inicial del cuadricóptero. En la figura 3.1 se pueden apreciar ambos sistemas de referencia. El sistema  $S_q$  se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas del sistema  $S_I$ , dichas rotaciones se muestran en la figura 3.2. Los ángulos  $\theta$ ,  $\varphi$  y  $\psi$  son conocidos como ángulos de Euler.

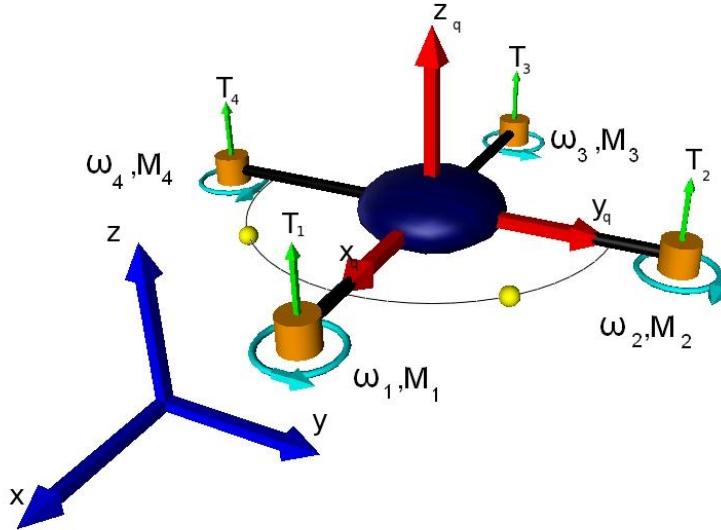


Figura 3.1: Modelo del cuadcóptero

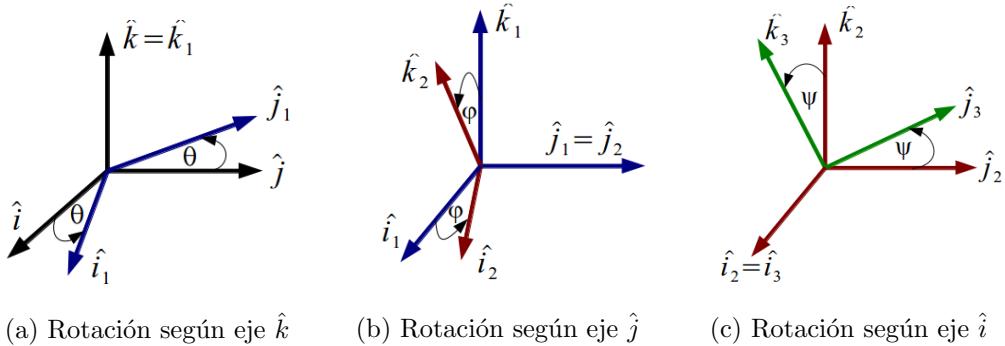


Figura 3.2: Rotaciones

La importancia del sistema  $S_q$  radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema las direcciones del empuje de las hélices, de los torques que introducen y de las velocidades angulares de los motores del cuadricóptero son constantes. Asimismo, algunos de los sensores del sistema de navegación (acelerómetro, giroscopio y magnetómetro) realizan medidas referenciadas al sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero, es decir en el sistema  $S_q$ . Considerar este sistema resulta en una simplificación del procesamiento de los datos obtenidos por la IMU.

Las tres transformaciones pueden representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

La transformación de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al cuadricóptero se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotación

definidas.

$$H_I^q = H_2^q \cdot H_1^2 \cdot H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta & \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

A su vez, la transformación inversa puede obtenerse multiplicando las coordenadas del sistema  $S_q$  por la matriz  $H_q^I$ . Dicha matriz puede obtenerse de la siguiente forma:

$$H_q^I = (H_2^q \cdot H_1^2 \cdot H_I^1)^{-1} = (H_I^1)^{-1} \cdot (H_1^2)^{-1} \cdot (H_2^q)^{-1} = H_1^I \cdot H_2^1 \cdot H_q^2 \quad (3.14)$$

### 3.3. Cinemática

En primer lugar nos enfocaremos en comprender la relación que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas de los ángulos de Euler. Sea  $\vec{\omega}$  la velocidad angular del cuadricóptero (y por ende la del sistema  $S_q$ ). La expresión de la velocidad angular en el sistema de referencia del cuadricóptero es la siguiente:

$$\vec{\omega} = w_{qx} \vec{i}_q + w_{qy} \vec{j}_q + w_{qz} \vec{k}_q \quad (3.15)$$

Donde  $w_{qx}$ ,  $w_{qy}$  y  $w_{qz}$  son las proyecciones ortogonales de la velocidad angular en el sistema  $S_q$ . Por como fue construido el sistema de referencia solidario al cuadricóptero y utilizando el teorema de adición de velocidades angulares, se deduce trivialmente que la velocidad angular del cuadricóptero puede escribirse como:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} + \dot{\varphi} \vec{j}_1 + \dot{\psi} \vec{i}_2 \quad (3.16)$$

El vector  $\vec{i}_2$  es invariante respecto de la tercera rotación, es decir que  $\vec{i}_2 = \vec{i}_q$ . Por otra parte, multiplicando los vectores  $\vec{k}$  y  $\vec{j}_1$  por las matrices  $H_1^2 \cdot H_2^q$  y  $H_2^q$  respectivamente se puede obtener la velocidad angular del cuadricóptero en el sistema de coordenadas referido a él. Operando se obtiene:

$$w_{qx} \vec{i}_q + w_{qy} \vec{j}_q + w_{qz} \vec{k}_q = (\dot{\psi} + \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{i}_q + (\dot{\varphi} \cos \psi + \dot{\theta} \cos \varphi \sin \psi) \vec{j}_q + (\dot{\theta} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi) \vec{k}_q \quad (3.17)$$

De esta ecuación se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero con las derivadas de los ángulos de Euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{qx} + \omega_{qz} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{qy} \tan \varphi \sin \psi \\ \omega_{qy} \cos \psi - \omega_{qz} \sin \psi \\ \omega_{qz} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{qy} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Realizando un razonamiento similar se deduce la relación que existe entre la velocidad del sistema expresada en el marco de referencia inercial con la velocidad expresada en el sistema de referencia solidario al cuadricóptero. Sea  $\vec{r}$  la posición del

centro de masa del cuadricóptero en el sistema  $S_I$ . La velocidad en dicho sistema es:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})' \quad (3.19)$$

Al igual que con la velocidad angular se puede escribir la velocidad absoluta del cuadricóptero en el sistema  $S_q$ . Lo que se tiene es que  $\vec{v} = v_{q_x}\vec{i}_q + v_{q_y}\vec{j}_q + v_{q_z}\vec{k}_q$ . Donde  $v_{q_x}, v_{q_y}$  y  $v_{q_z}$  son las proyecciones ortogonales de la velocidad absoluta en el sistema solidario al cuadricóptero. Igualando ambas expresiones de la velocidad se obtiene:

$$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_{q_x}\vec{i}_q + v_{q_y}\vec{j}_q + v_{q_z}\vec{k}_q \quad (3.20)$$

Para transformar las coordenadas de un sistema de referencia al otro alcanza con multiplicar por una de las matrices de cambio de base definidas previamente. En particular nos interesa tener una expresión para las derivadas de la posición en el sistema  $S_I$ , por esta razón se multiplica la expresión de la velocidad en el sistema  $S_q$  por la matriz  $H_q^I$  definida en la ecuación ??.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_x} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\ v_{q_x} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\ -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Hasta aquí hemos obtenido simplemente relaciones cinemáticas; por un lado entre la velocidad angular del sistema  $S_q$  y las derivadas de los ángulos de Euler, por el otro se tiene el vínculo entre la velocidad absoluta del sistema y la velocidad absoluta expresada en el sistema  $S_q$  y los ángulos de Euler. Sin embargo aún no conocemos cuales son las Fuerzas y Momentos presentes en el sistema, ni que efectos producen sobre el mismo. Es aquí que nos detendremos en el análisis cinemático para considerar la dinámica del sistema.

## 3.4. Dinámica del Sistema

Existen diversas formas de atacar el problema de la dinámica de un sistema, en particular se puede encarar el problema desde la mecánica analítica o realizando consideraciones energéticas, sin embargo en este caso se elige trabajar con las ecuaciones cardinales.

### 3.4.1. Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleración. Esto se puede escribir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a} \quad (3.22)$$

Anteriormente fue expresado el interés de trabajar en el sistema solidario al cuadricóptero. El vector aceleración se puede obtener derivando la velocidad. Para realizar la derivada de un vector expresado en un sistema móvil puede utilizarse la siguiente formula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (3.23)$$

En la ecuación anterior  $\frac{d}{dt}$  representa la derivada temporal, mientras que  $\frac{d'}{dt}$  representa la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial.

$$\vec{a} = (\dot{v}_{q_x} + v_{q_z}\omega_{q_y} - v_{q_y}\omega_{q_z})\vec{i}_q + (\dot{v}_{q_y} + v_{q_x}\omega_{q_z} - v_{q_z}\omega_{q_x})\vec{j}_q + (\dot{v}_{q_z} + v_{q_y}\omega_{q_x} - v_{q_x}\omega_{q_y})\vec{k}_q \quad (3.24)$$

Operando se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{q_x} \\ \dot{v}_{q_y} \\ \dot{v}_{q_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_y}\omega_{q_z} - v_{q_z}\omega_{q_y} \\ v_{q_z}\omega_{q_x} - v_{q_x}\omega_{q_z} \\ v_{q_x}\omega_{q_y} - v_{q_y}\omega_{q_x} \end{pmatrix} + \vec{F}_{ext} \quad (3.25)$$

### 3.4.2. Segunda Cardinal

La segunda cardinal para un sistema de partículas toma la forma:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M_Q^{ext} + M\vec{v}_G \times \dot{\vec{r}_Q} \quad (3.26)$$

Donde  $L_Q$  y  $M_Q$  son el momento angular y el torque respectivo del punto Q. Asumiendo simetría del sistema, se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de la esfera principal del mismo. Esto no es completamente cierto ya que existen algunas asimetrías en el sistema, a modo de ejemplo se puede nombrar que la batería del UAV queda por fuera de la esfera y los apoyos también, sin embargo en una primera aproximación del modelo se asume la simetría respecto al plano que intersecta la esfera en el ecuador. Realizada dicha suposición y planteando la segunda cardinal en el centro de masa obtenemos una expresión más sencilla:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = M_G^{ext} \quad (3.27)$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del cuadricóptero y el momento angular de cada motor. Consideraremos el cuadricóptero sin los motores como un primer rígido y los motores como cuatro rígidos independientes.

El momento angular de un rígido respecto a un punto Q del mismo puede calcularse como:

$$\vec{L}_Q = M_i(G_i - Q) \times \vec{V}_Q + \Pi_Q \vec{\Omega}_i \quad (3.28)$$

Donde  $M_i$ ,  $G_i$ ,  $\Pi_Q$  y  $\vec{\Omega}_i$  son la masa de cada rígido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir el momento angular del cuadricóptero sin los motores como:

$$\vec{L}_{O'} = (M - 4M_m)(O' - O') \times \vec{V}_{O'} + \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{w}_q = \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q \quad (3.29)$$

Para el cálculo del momento angular del motor 1 respecto del punto  $O'$  supondremos por simplicidad que el motor se compone de elementos de masa discretos. En este caso, por definición de momento angular tenemos que:

$$\vec{L}_{O'_{m_1}} = \sum m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i \quad (3.30)$$

Donde  $\vec{r}_i'$  corresponde a la posición de cada elemento de masa ( $m_i$ ) respecto de  $O'$  y  $\vec{v}_i$  es la velocidad absoluta de cada elemento de masa. Del Teorema de Roverbal se puede expresar dicha velocidad como:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_i'' \quad (3.31)$$

En la ecuación anterior  $\vec{r}_i''$  es la posición de cada elemento de masa expresada desde el centro de masa de cada motor y  $\vec{v}_{O'}$  la velocidad del punto  $O'$  (el centro de masa del cuadricóptero) Operando con las ecuaciones anteriores se concluye que:

$$\vec{L}_{O'_{m_1}} = M_m d_v \vec{i}_q \times \vec{v}_{O'} + \Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{Mm}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_1 \quad (3.32)$$

Donde  $d_v$  es la distancia entre el centro de masa del cuadricóptero y el eje del motor 1, Al considerar los cuatro motores el primer término del momento angular del motor 1 se anula con el segundo término del motor 3. Sucede lo mismo con los motores 2 y 4. Calculando en forma análoga los momentos angulares de los restantes motores se obtiene:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{Mm}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4) \quad (3.33)$$

Tanto las velocidades angulares como los tensores de inercia que componen la ecuación anterior se encuentran expresados en la base solidaria al cuadricóptero. Para realizar dicha derivada se utiliza nuevamente la fórmula de la derivada de un vector:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (3.34)$$

Lo que se obtiene de dicha derivada es:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \frac{d'\vec{\omega}_q}{dt} + \Pi_{G_{Mm}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\dot{\vec{\omega}}_1 - \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3 - \dot{\vec{\omega}}_4) + \vec{\omega}_q \times (\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{Mm}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4)) \quad (3.35)$$

A partir del cálculo de esta derivada podemos reescribir la segunda cardinal:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{q_x} \\ \dot{\omega}_{q_y} \\ \dot{\omega}_{q_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q_y} \omega_{q_z} (I_{yy} - I_{zz}) - \omega_{q_y} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ \omega_{q_x} \omega_{q_z} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q_x} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ -I_{zzm} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) \end{pmatrix} + M_G^{ext} \quad (3.36)$$

### 3.5. Fuerzas y momentos involucrados

Para completar el análisis del sistema es fundamental conocer las expresiones de las fuerzas y los momentos involucrados. Por un lado se debe considerar la acción del peso en el sistema. Además debemos conocer con precisión las fuerzas y momentos

que introducen las hélices del cuadricóptero ya que son estos los elementos sobre los cuales se pueden realizar las acciones de control. Finalmente consideraremos también el efecto del viento. Esta última es una fuerza que no puede conocerse a priori y será considerada como una perturbación en el sistema. Recordamos que las bajas velocidades a las que el sistema se mueve nos permiten despreciar las fuerzas aerodinámicas, a excepción de aquellas que tienen como origen el giro de las hélices.

### 3.5.1. Peso

Como ya se aclaró anteriormente, debido a la pequeña variación de la altura, el peso del cuadricóptero será considerado constante. Esta fuerza se aplica sobre el centro de masa del sistema, cabe recordar que en el presente análisis se considera la segunda cardinal en torno a dicho punto. Por lo tanto la distancia entre el eje en el cual se calculan los momentos y el punto de aplicación es cero. Recordando que:

$$M = \vec{d} \times \vec{F}$$

se deduce trivialmente que el momento del peso es cero. La expresión para el peso es:

$$\vec{P} = -mg\vec{k}_q$$

Insistimos en el hecho que nos interesa conocer las fuerzas en el sistema solidario al cuadricóptero. Para expresar esta fuerza en dicho sistema se multiplica el peso por la matriz  $H_I^q$ . Lo que se obtiene es:

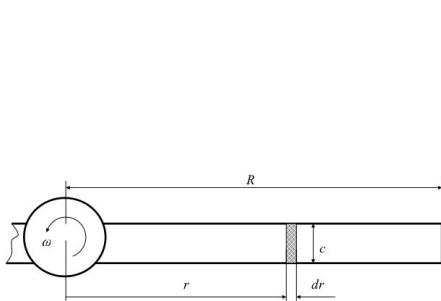
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} Mg$$

### 3.5.2. Fuerzas y momentos de las hélices

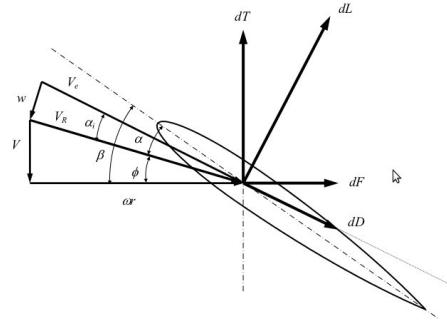
La teoría de fluidos que explica el comportamiento de las hélices es compleja y ampliamente difundida por lo que no es de interés desarrollarla en profundidad en este trabajo. Diversa bibliografía puede ser consultada en donde se explican adecuadamente los fenómenos involucrados en las fuerzas aerodinámicas presentes en una hélice. Sin embargo si parece pertinente realizar un breve resumen de dichas fuerzas. Para el presente análisis consideraremos una hélice rotando en sentido antihorario, el razonamiento para una hélice rotando en sentido opuesto es análogo. En la figura 3.3 se observan dos vistas de la misma hélice. En la figura 3.3a puede observarse una hoja de la hélice. En la figura 3.3b se representa una vista transversal de la hélice con las fuerzas aerodinámicas involucradas.

La *Blade Element Theory*(BET) intenta explicar las fuerzas presentes en la hélice considerando en primer lugar las fuerzas en un elemento de área infinitesimal de la hélice. Una vez halladas estas fuerzas se integra sobre el total de la superficie obteniendo así las fuerzas y momentos totales. Como se explica en ??, las fuerzas presentes sobre un elemento de área de la hélice son la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*, dichas fuerzas se encuentran representadas en la figura 3.3 como  $dL$  y  $dD$  respectivamente. La forma que tienen dichas fuerzas es:

$$dL = \frac{1}{2}\rho_A \omega_p^2 C_L c r^2 dr$$



(a) Vista superior de una hélice



(b) Fuerzas aerodinámicas presentes en una hélice

Figura 3.3: Vistas de una hélice y diagrama de fuerzas aerodinámicas presentes

$$dD = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_D c r^2 dr$$

Donde  $\rho_A$  es la densidad del aire,  $\omega_p$  la velocidad angular de la hélice,  $r$  la distancia del elemento de hélice al eje de la hélice,  $c$  es la longitud promedio de la cuerda de la hélice <sup>1</sup>,  $C_L$  y  $C_D$  son coeficientes adimensionados.

La fuerza infinitesimal de empuje ( $dT$ ) puede escribirse en función de las fuerzas de *lift* y de *drag* de la siguiente forma:

$$dT = dL \cos \varphi_I - dD \sin \varphi$$

Realizando la aproximación que  $\varphi$  es un ángulo pequeño y que la fuerza de *lift* es al menos un orden mayor que la de *drag* se puede afirmar que:

$$dT \approx dL$$

El empuje por lo tanto puede calcularse como la integral de  $dT$  respecto de  $r$ . Considerando que la hélice consta de dos hojas, se obtiene que:

$$T = \frac{1}{3} \rho_A C_L c R_P^3 \omega_p^2 \quad (3.37)$$

Donde  $R_P$  es el radio radio de la hélice. En todo momento tenemos dos fuerzas (una sobre cada hoja de la hélice) en dirección vertical y hacia arriba. Si nos referimos a la configuración de la figura 3.3b, el momento de las fuerzas  $dT$  es hacia la izquierda para la hoja considerada, sin embargo para la otra hoja este momento será hacia la derecha. Se puede concluir entonces que el torque neto que aporta esta fuerza en torno al eje de rotación de la hélice es nulo.

Intentaremos ahora obtener la resultante de las fuerzas horizontales sobre la hélice y el torque de dichas fuerzas. Comenzaremos por analizar que sucede con las sumas de las fuerzas, para luego proceder a calcular el momento de las mismas. Consideraremos ahora la fuerza  $dF$  como la que se muestra en la figura 3.3b. Como se observa en la figura dicha fuerza es hacia la derecha. Si consideramos la fuerza

<sup>1</sup>segmento imaginario que une el borde de ataque con el borde de fuga

horizontal sobre la otra hoja de la hélice, se obtiene una fuerza hacia la izquierda. Por lo tanto la suma de las fuerzas horizontales es nula. Sin embargo los momentos de las fuerzas en una y otra hoja de la hélice no se anulan, el momento que producen ambas es en la dirección de  $-\vec{k}_q$ . Por lo tanto el momento total será la suma de los momentos infinitesimales en toda la superficie de una hoja de la hélice multiplicado por la cantidad de hojas, es decir 2.

En primer lugar escribimos la fuerza horizontal como una composición de la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*.

$$dF = dD \cos \varphi + dL \sin \varphi \approx dD + dL \left( \frac{V}{\omega_p} \right)$$

En esta ecuación  $V$  y  $\omega_p r$  representan la velocidad del flujo de aire en las direcciones vertical y horizontal respectivamente. Operando se obtiene el momento total de la hélice en la dirección entrante:

$$Q = \frac{1}{4} \rho_A c R_P^4 (C_D + K) \omega_p^2 \quad (3.38)$$

En resumen, la teoría BET nos permite afirmar que sobre cada hélice del cuadricóptero que rota en sentido antihorario se aplicará una fuerza en la dirección  $\vec{k}_q$  cuyo módulo se expresó en la ecuación 3.10 y un momento en la dirección  $-\vec{k}_q$  cuyo módulo es lo expresado en la ecuación 3.11. Para una hélice rotando en sentido anti-horario se obtiene exactamente los mismos resultados excepto que el momento es en sentido opuesto.

Hasta aquí sabemos que sucede las fuerzas y momentos aplicados sobre una hélice. Nos concentraremos ahora en estudiar como influyen estas fuerzas y momentos en el cuadricóptero. Para lo que sigue continuaremos trabajando con las convenciones adoptadas en 3.1.

A partir de lo estudiado anteriormente se deduce trivialmente que el empuje de las hélices puede expresarse en el sistema  $S_q$  como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{i=4} T_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se determinó que las fuerzas de empuje no introducen un momento neto en el eje de las mismas. Sin embargo no debemos perder de vista que la segunda cardinal fue planteada en el centro de masa del sistema, por lo tanto respecto de dicho punto las fuerzas sí introducen un momento que puede calcularse como  $M1 = L \vec{x}_1 \times T1 \vec{k}_q$  para el motor 1.  $L$  es la distancia del centro de masa del cuadricóptero al eje del motor 1. La expresión del momento es análoga para los restantes motores.

Debemos considerar además el momento obtenido para cada hélice en la dirección  $\vec{k}_q$ . Cabe recordar que se dedujo que para hélices rotando en sentido anti- horario se tiene un momento positivo, mientras que para una hélice rotando en sentido horario el momento es negativo. Realizando estas consideraciones es posible afirmar que la suma total de los momentos es:

$$M_G^{ext} = \begin{pmatrix} L(T2 - T4) \\ L(T3 - T1) \\ -Q_1 + Q2 - Q3 + Q4 \end{pmatrix}$$

En base al estudio realizado se podrían conocer dichas relaciones calculando los parámetros que dependen de la geometría de la hélice, sin embargo este estudio resulta tedioso y la mayor parte de los métodos existentes para determinar dichos parámetros con buena precisión son destructivos. Por lo tanto se optó por obtener dichas respuestas en forma experimental. El proceso detallado puede consultarse en el anexo ???. En dichos experimentos se obtuvo que:

$$T = 3,5296 \times 10^{-5} \omega^2 - 4,9293 \times 10^{-4} \omega$$

$$Q = 3,4734 \times 10^{-6} \omega^2 - 1,3205 \times 10^{-4} \omega$$

Estos resultados parecen adecuados respecto de lo desarrollado teóricamente ya que ambas respuestas son cuadráticas.

### 3.6. Modelo en variables de Estado

Luego de realizados los estudios sobre la cinemática y dinámica del sistema y luego de comprender cabalmente las fuerzas y momentos involucrados se procede a construir el modelo en variables de estado.

Se debe aclarar que la elección realizada del vector de estados se debe exclusivamente a la conveniencia práctica que se encuentra al trabajar con las variables expresadas en el sistema del cuadricóptero. Esta conveniencia se ve reflejada en dos aspectos, en primer lugar las simplificaciones que introduce trabajar con estas variables en el marco de un desarrollo teórico de las ecuaciones que gobiernan al sistema, por otra parte, al disponer de sensores montados sobre el cuadricóptero, los mismos medirán las velocidades angulares y lineales en el sistema  $S_q$ . Bajo esta elección parece razonable escoger el vector de estados de la siguiente manera:

$$X = \{x, y, z, \theta, \varphi, \psi, v_{q_z}, v_{q_y}, v_{q_x}, \omega_{q_x}, \omega_{q_y}, \omega_{q_z}\}$$

Las ecuaciones desarrolladas hasta ahora son las que gobiernan el comportamiento mecánico del sistema y son las que serán utilizadas para el desarrollo del simulador. Dichas ecuaciones dependen tanto de la velocidad angular de las hélices como de sus derivadas. Para realizar el control resulta más sencillo poder trabajar sin dichas derivadas. La razón es que las velocidades angulares y sus derivadas no son entradas independientes. Por lo tanto no se pueden imponer valores a unas sin considerar el comportamiento de las otras. En este sentido se realiza última aproximación. El término de las derivadas de las velocidades angulares se encuentra presente exclusivamente en la ecuación 3.9. Dicho término se encuentra multiplicado por el momento de inercia de los motores. Considerando que la variación en la velocidad angular de los motores es inferior a la respuesta al escalón estudiada en 6, se puede despreciar el término de las derivadas de las velocidades angulares respecto al término asociado a los torques en la ecuación 3.9.

Luego de realizada esta simplificación tenemos que la entrada está compuesta por el vector:

$$u = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

El modelo en variables de estado es por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{q_x} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\ \dot{y} &= v_{q_x} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\ \dot{z} &= -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \\ \dot{\psi} &= \omega_{q_x} + \omega_{q_z} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{q_y} \tan \varphi \sin \psi \\ \dot{\varphi} &= \omega_{q_y} \cos \psi - \omega_{q_z} \sin \psi \\ \dot{\theta} &= \omega_{q_z} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{q_y} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \\ \dot{v}_{q_x} &= v_{q_y} \omega_{q_z} - v_{q_z} \omega_{q_y} + g \sin \varphi \\ \dot{v}_{q_y} &= v_{q_z} \omega_{q_x} - v_{q_x} \omega_{q_z} - g \cos \varphi \sin \psi \\ \dot{v}_{q_z} &= v_{q_x} \omega_{q_y} - v_{q_y} \omega_{q_x} - g \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 T_i \\ \dot{\omega}_{q_x} &= \frac{\omega_{q_y} \omega_{q_z} (I_{yy} - I_{zz}) + \omega_{q_y} I_{zz_m} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{xx}} + \frac{L(T_2 - T_4)}{I_{xx}} \\ \dot{\omega}_{q_y} &= \frac{\omega_{q_x} \omega_{q_z} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q_x} I_{zz_m} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{yy}} + \frac{L(T_3 - T_1)}{I_{yy}} \\ \dot{\omega}_{q_z} &= \frac{-Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4}{I_{zz}} \end{aligned}$$

(3.39)

---

# CAPÍTULO 4

---

## SIMULACIONES DEL MODELO FÍSICO

Luego de desarrollado un modelo físico resulta fundamental disponer de un entorno para realizar simulaciones. Las razones para construir un simulador son evidentes. En primer lugar resulta fundamental para comprobar que el modelo realizado se comporta acorde a lo que uno espera a priori del sistema. Para este tipo de pruebas se trabajará con las situaciones más sencillas en las cuales se puede calcular la trayectoria trivialmente. El segundo objetivo del simulador es poder conocer el comportamiento de nuestro sistema frente a algunas acciones de control determinadas. Por ejemplo conocer la trayectoria que desarrolla el cuadricóptero si accionamos solamente uno de los motores o cualquier combinación que sea pertinente de estudio. El simulador es utilizado también para verificar el funcionamiento del Filtro de Kalman Extendido realizado para la integración de los sensores (Ver capo tulo ??). Se puede generar una trayectoria a la cual se le agrega ruido que simule el ruido de medida de los sensores. Luego se puede comparar la trayectoria obtenida con el filtrado de Kalman con la generada inicialmente. Por último y fundamentalmente el simulador será clave para testear y mejorar los algoritmos de control desarrollados. Previo a testear con el sistema real y a fin de evitar daños sobre el mismo, se deben verificar dichos algoritmos en el simulador. Por los motivos expresados es necesario que el simulador represente fielmente el modelo físico y se comporte acorde a la realidad.

El diseño del simulador se realiza utilizando Simulink. Dado que se debe trabajar con entradas que no dependen exclusivamente del tiempo, no fue posible desarrollar un simulador que resolviera directamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan al sistema utilizando un método más directo, como por ejemplo *ODE45*.

### 4.1. Estructura del Simulador

El simulador se compone de tres elementos fundamentales. El lazo abierto, es decir las ecuaciones que gobiernan al cuadricóptero. En dicho sistema tenemos como entradas las velocidades angulares del sistema sobre las cuales realizaremos las acciones de control y como salidas tenemos el vector de estados del sistema en todos los instantes desde el tiempo inicial establecido en la simulación hasta el tiempo

final. Se compone además de un bloque encargado de generar las rutas a seguir por el cuadricóptero a partir de los *waypoints* que se ingresen. Finalmente una tercer parte que se encarga de simular el control. Este último bloque se vale de los dos anteriores.

#### 4.1.1. Lazo Abierto

La estructura que se eligió para desarrollar esta sección se corresponde en buena forma con el camino que se recorrió para determinar el modelo físico. El lazo abierto consta de tres bloques principales. En primer lugar tenemos un bloque encargado de generar las fuerzas y momentos a partir de las velocidades angulares de las hélices. Luego tenemos un bloque que se encarga de resolver la dinámica del sistema y un cuarto bloque encargado de la cinemática. En la figura 4.1 se observa la estructura global del lazo abierto. En la figura 4.2 se observa una captura de pantalla que representa la vista general de la parte encargada de simular el lazo abierto.

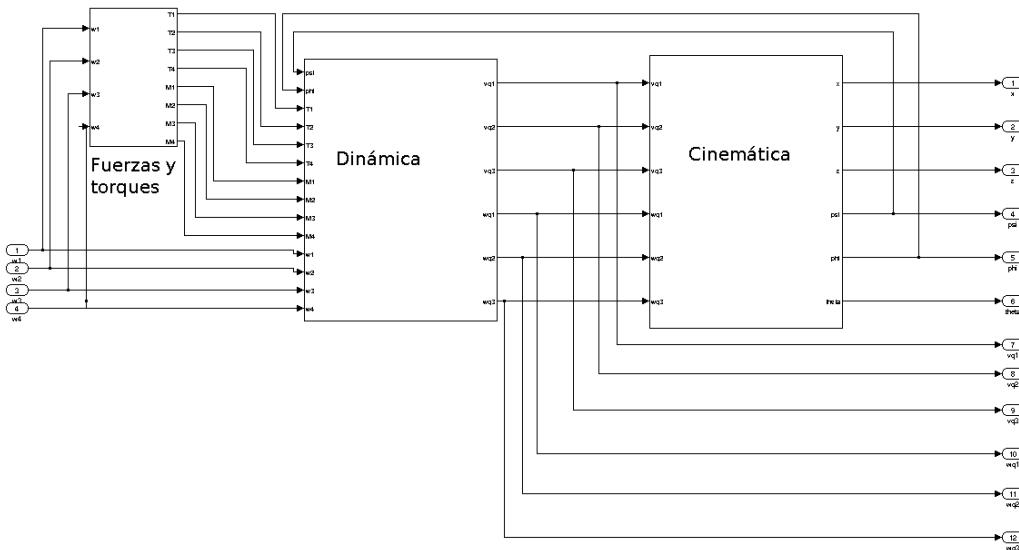


Figura 4.1: Bloque de lazo abierto

#### Cinemática

En la figura 4.3a se puede observar un diagrama de bloques de la parte del sistema que transforma las velocidades lineales y angulares en posiciones y ángulos de Euler. Se distinguen dos sub-bloques principales, uno encargado de devolver la posición y otro encargado de devolver los ángulos de Euler

#### Dinámica

Al igual que el bloque anterior, se divide este en dos sub-bloques más (ver figura 4.3b). Los bloques en este caso son el que devuelve las velocidades angulares y las lineales.

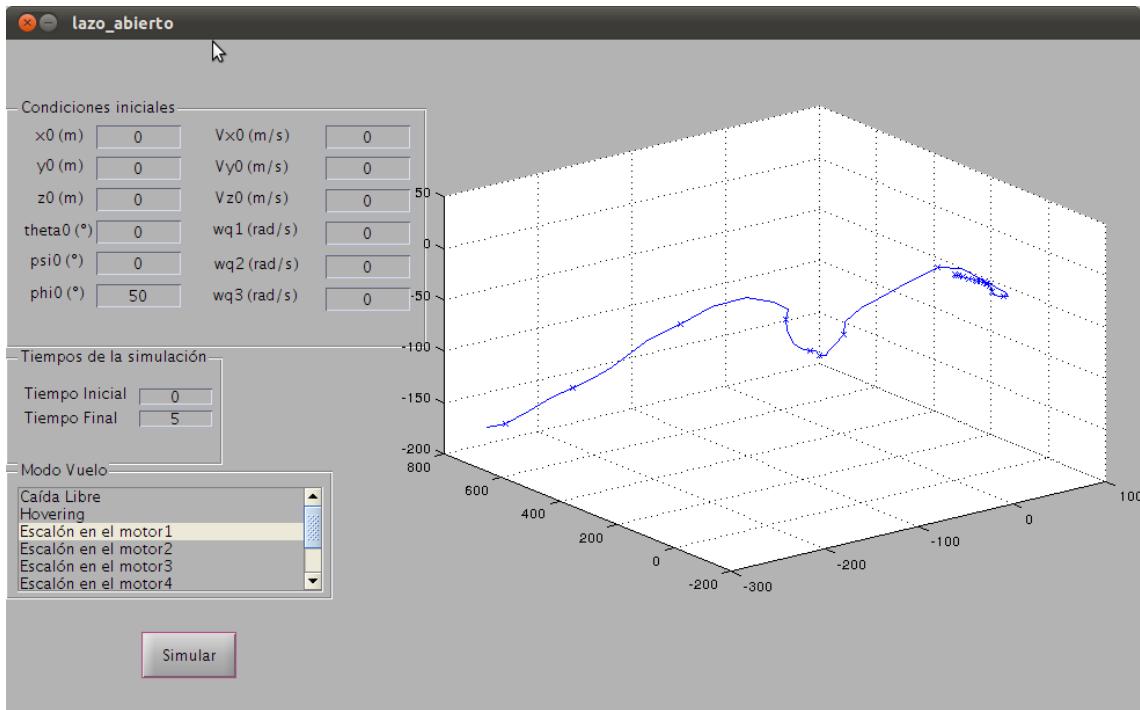


Figura 4.2: Interfaz del simulador de lazo abierto

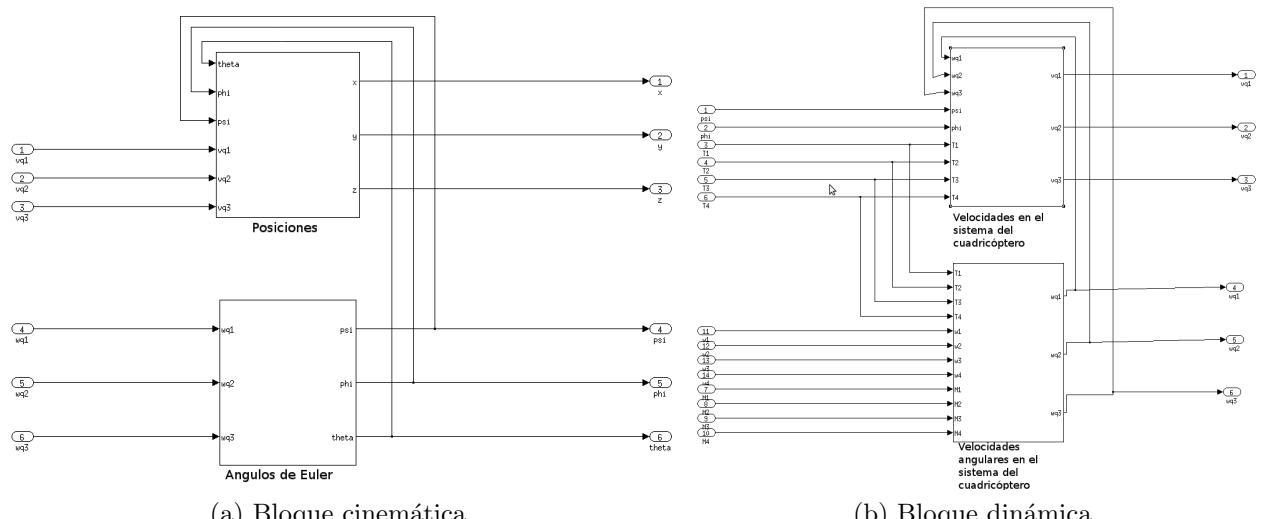


Figura 4.3: Bloques en mayor detalle

#### 4.1.2. Lazo cerrado

Como se explica en el capítulo 13 para tratar las trayectorias circulares en el plano horizontal es necesario introducir un cambio de variables en el sistema, este cambio de variables consiste en expresar la posición del cuadricóptero en el sistema  $S_q$  solidario a él y considerando como origen el centro de la trayectoria circular, en lugar de expresar la posición en el sistema cartesiano inercial. Esta modificación implica realizar un cambio en el modelo para trabajar con dichas trayectorias, simplemente se agrega una matriz de rotación para trabajar con la posición expresada en el sistema solidario al cuadricóptero.

La estructura del lazo cerrado es la que se observa en la figura ???. Desde la interfaz gráfica se puede seleccionar el tipo de trayectoria que se desea realizar, los valores de las variables de estado con las que se desea realizar dicha trayectoria<sup>1</sup>. Las velocidades angulares objetivo para cada motor serán determinadas a partir de la información anterior. Al igual que en el simulador de lazo abierto se tiene la posibilidad de establecer tanto el tiempo inicial de la simulación y las condiciones iniciales. Asimismo estará determinada por la trayectoria la matriz de realimentación.

Fue necesario además acotar la velocidad angular de los motores ya que esta no puede tener cualquier valor, para esto se agregaron los bloques de saturación a la entrada del subsistema que representa la dinámica del cuadricóptero.

Como se explicó en la sección ?? el control será realizado con un microprocesador, esto implica que las acciones de control no podrán ser modificadas en forma continua, cada cierto período se indicará un nuevo valor de velocidad angular para cada motor. Del mismo modo, no se tiene conocimiento del estado en todo instante sino que se tienen datos cada un cierto intervalo de tiempo (no necesariamente igual al período con el cual se actúa sobre los motores). Estas consideraciones hacen necesaria una modificación en el sistema que hasta ahora había sido considerado como continuo, es necesario convertir el sistema de tiempo continuo desarrollado a un sistema de tiempo discreto. Dicha modificación se logra sustituyendo los bloques integradores y derivadores que formaban parte del sistema por integradores y derivadores discretos con un período de muestreo que también puede ser impuesto desde la interfaz gráfica. En la figura 4.4 se puede observar la misma trayectoria para tres tiempos de muestreo diferentes. En dicha trayectoria se muestra la subida del cuadricóptero desde la altura inicial  $z = 0m$  hasta  $z = 3m$ .

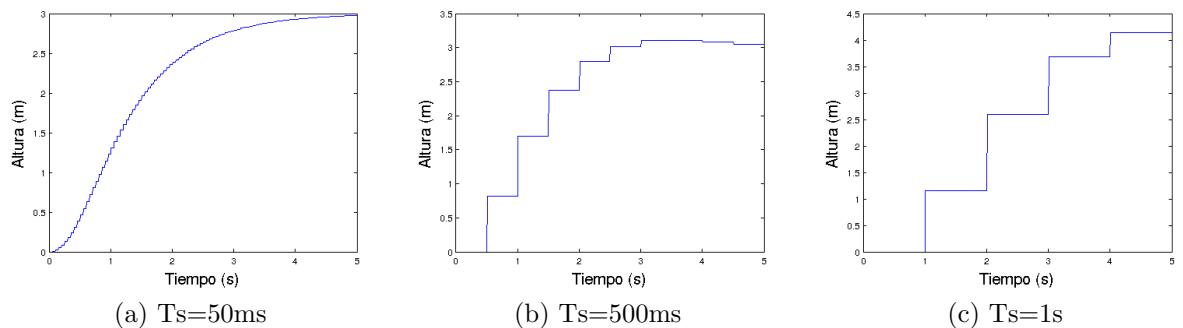


Figura 4.4: Trayectoria de ascenso del cuadricóptero desde  $z = 0$  a  $z = 3$

Se observa claramente un deterioro de la performance en la subida al aumentar el período de muestreo y de acción sobre los motores. Por dicho motivo es importante incluir esta variable a la hora de realizar diversas simulaciones ya que el sistema real debe realizar una gran cantidad de operaciones y si bien su capacidad es considerable no es infinita. Esto puede producir que se tenga acotado interiormente el período de muestreo.

---

<sup>1</sup>Evidentemente existen restricciones a la hora de elegir las variables de estado, a modo de ejemplo no seremos capaces de controlar una trayectoria en linea recta si las velocidades angulares no son nulas

Por último, se desea incluir la posibilidad de agregar ruido a los estados medidos. Las medidas que se obtienen de los sensores no son exactas, por dicho motivo la posibilidad de agregar ruido es muy interesante de modo de testear la robustez del controlador implementado.

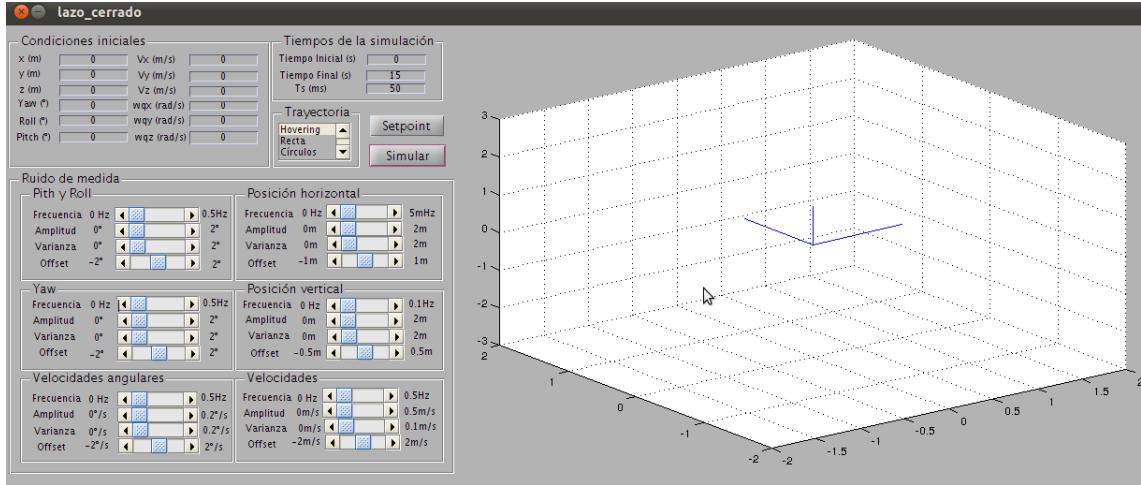


Figura 4.5: Interfaz del simulador de lazo cerrado

## 4.2. Simulaciones

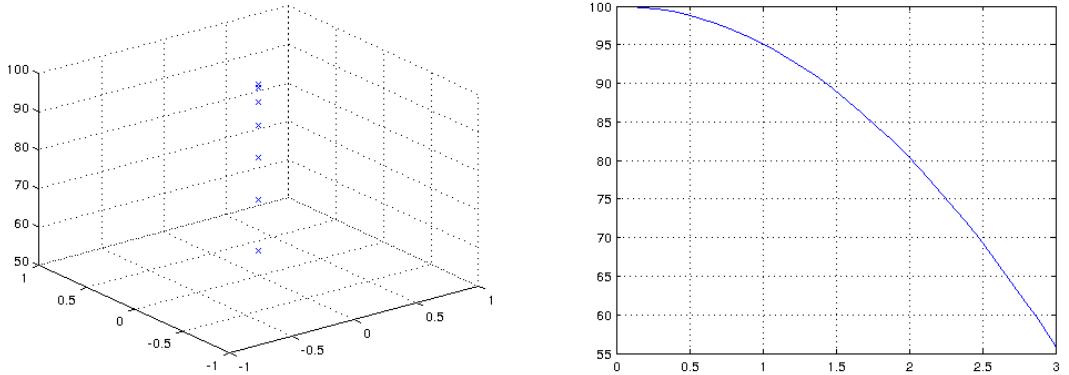
En esta sección procederemos a realizar algunas simulaciones a fin de verificar que los resultados arrojados se corresponden con lo esperado a priori.

### Caída libre con velocidad inicial nula

Se simula una caída libre con condiciones iniciales nulas excepto la altura que se fija a 100m. El tiempo de simulación considerado es de tres segundos. En la figura 4.6a se observa la trayectoria obtenida. En este caso se grafica uno de cada cinco puntos obtenidos. La misma se corresponde con lo que se espera a priori: puntos equiespaciados en el tiempo se encuentran cada vez más apartados a medida que transcurre el tiempo. En la figura 4.6b se representa la altura en función del tiempo. La altura final es  $z_f = 55,855m$ . La altura en una caída libre puede calcularse como  $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + Z_0$ . En este caso se obtiene  $z(3) = 55,855m$ .

### Caída libre con velocidad inicial

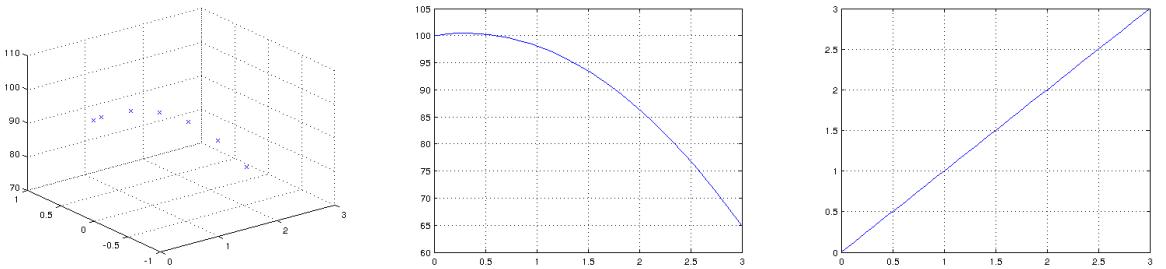
Se realiza la misma simulación que en la sección anterior excepto que se inicia el vuelo con  $V_0 = 1ms^{-1}\vec{i} + 3ms^{-1}\vec{k}$ . Los resultados de la simulación pueden encontrarse expresados graficamente en la figura 4.7. Tal como es de esperar en la posición según  $\vec{i}$  se tiene una posición que aumenta con el tiempo con pendiente igual a la velocidad inicial. La altura cumple que  $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + 3ms^{-1}t + Z_0$ . Por lo tanto la misma aumenta hasta un tiempo  $t^*/\dot{z}(t) = 0$ . Lo cual implica que  $t^* = \frac{3ms^{-1}}{g} \approx 0,31s$ . Por otra parte tiempo para el cual se da el máximo en la simulación es  $t_{max} \approx 0,33s$ . Considerando que las simulaciones se realizan con un paso variable el cual puede ser de hasta 0,1s se considera un resultado aceptable. Por otra parte la altura máxima en teoría vale  $z_{max,teo} = 100,459m$  mientras que la altura máxima obtenida a través



(a) Trayectoria de caida libre con velocidad inicial nula

(b) Altura en función del tiempo

Figura 4.6: Caida libre con velocidad inicial nula



(a) Trayectoria de caida libre con velocidad  $V_0 = 1\text{ms}^{-1}\vec{i} + 3\text{ms}^{-1}\vec{j}$

(b) Altura en función del tiempo

(c) Desplazamiento hacia el Este en función del tiempo

Figura 4.7: Caida libre con velocidad inicial no nula

de la simulación es de  $z_{max,sim} = 100,456m$ . Esta diferencia puede explicarse gracias a que estamos evaluando la trayectoria en tiempos distintos. A partir de este punto tenemos una caída libre como la que ya estudiamos en el caso anterior. Las alturas finales, tanto en la simulación como en la teoría valen  $64,885m$ .

### Condición de Hovering

Se aplica una fuerza constante en los cuatro motores tal que la resultante es igual al peso. Las condiciones iniciales son todas nulas. Excepto  $Z_0 = 10m$ . Se logra el equilibrio mecánico. Todas las variables permanecen constantes. Se simula durante diez segundos

### Giro según el eje $\vec{k}$

En las mismas condiciones que la simulación anterior, en el tiempo  $t = 5s$  se aumenta repentinamente la velocidad angular de los motores que rotan en sentido horario con un valor tal que la fuerza de cada uno de esos motores aumenta en  $1N$ . Para los motores que rotan en sentido anti-horario se disminuye la velocidad angular de forma que la fuerza de cada uno de ellos disminuye  $1N$ . Estas velocidades son  $375,03\text{rads}^{-1}$  y  $287,68\text{rad}^{-1}$ . La fuerza neta permanece constante y el momento segú

los versores  $\vec{i}_q$  y  $\vec{j}_q$  es nulo. Sin embargo aparece un torque negativo según el vedor  $\vec{k}_q$ .

En la figura 4.8a se presenta la altura en función del tiempo. La misma debería permanecer constante sin embargo se observa una pequeña diferencia en la altura de  $3cm$ . Esta diferencia es atribuida a un error numérico a la hora de calcular las velocidades con las cuales deben girar los motores. Por otra parte en la figura 4.8b se observa como el ángulo decrece hasta el valor de  $-108,77rad$ . El torque neto vale  $Q = -0,38Nm$ . Por lo tanto en 5 segundos se debe rotar un ángulo de  $\theta_f = -108,42rad$ . Nuevamente se percibe una pequeña diferencia entre el valor teórico y el simulado. Sin embargo dicho error es completamente aceptable.

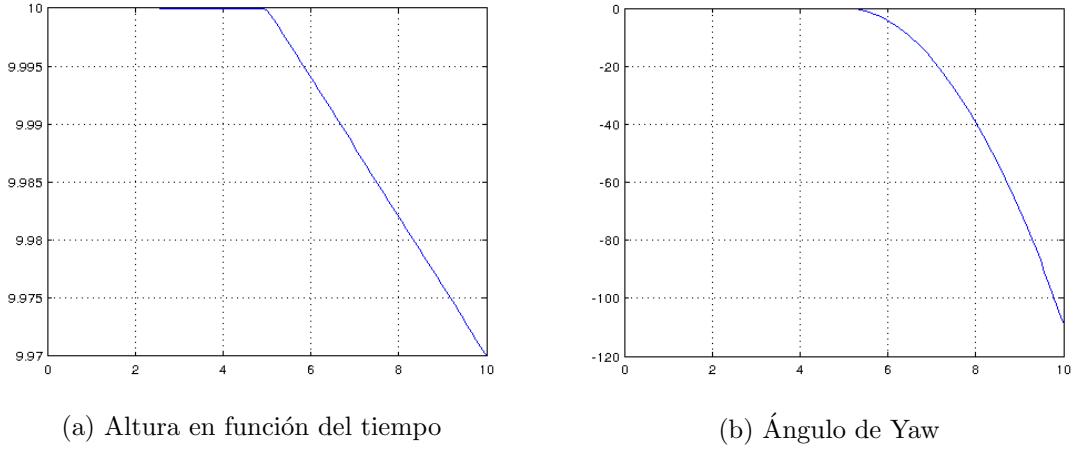


Figura 4.8: Giro según el  $\vec{k}_q$

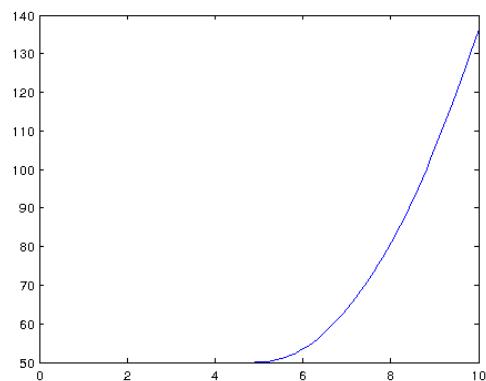
### Escalón en los cuatro motores

Con condiciones iniciales nulas, excepto que  $z_0 = 50m$  en condición de hovering se aumenta la velocidad angular de los motores en  $100rads^{-1}$  en  $t = 5s$ . Se simula durante diez segundos. En la figura 4.9 se presentan graficamente los resultados obtenidos en la simulación. La altura máxima alcanzada por el cuadricóptero en la simulación es de  $136,6m$  mientras que en la teoría dicha altura es de  $136,4m$ . Nuevamente la diferencia entre el valor simulado y el esperado difieren de manera despreciable.

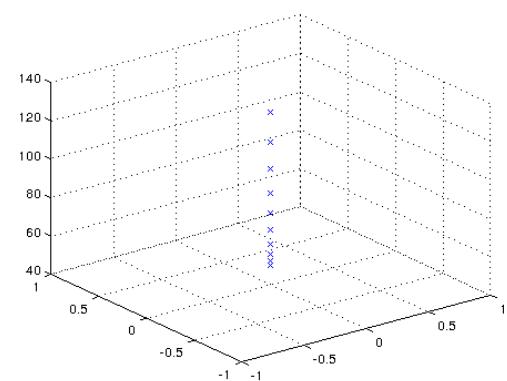
### Vuelo en linea recta

Con condiciones inicial nulas, excepto por  $Z_0 = 10m$  y  $\varphi = 30^\circ$ . Se simula durante diez segundos. En la figura 4.10 se observa un vuelo en linea recta en la dirección  $\vec{i}$ . Como es de esperar el vuelo será uniformemente acelerado ya que la fuerza es siempre en el sentido de  $\vec{k}_q$ . La simulación arroja que al cabo de diez segundos el desplazamiento es de  $283,19m$ , mientras que en la teoría se obtiene un desplazamiento de  $218,20m$ . Nuevamente se concluye que los resultados arrojados por el simulador son satisfactorios.

Hasta aquí hemos testeado el simulador en situaciones conocidas. De acuerdo a las pruebas realizadas puede afirmarse que su funcionamiento es el adecuado ya que



(a) Altura en función del tiempo



(b) Trayectoria

Figura 4.9: Escalón en los cuatro motores

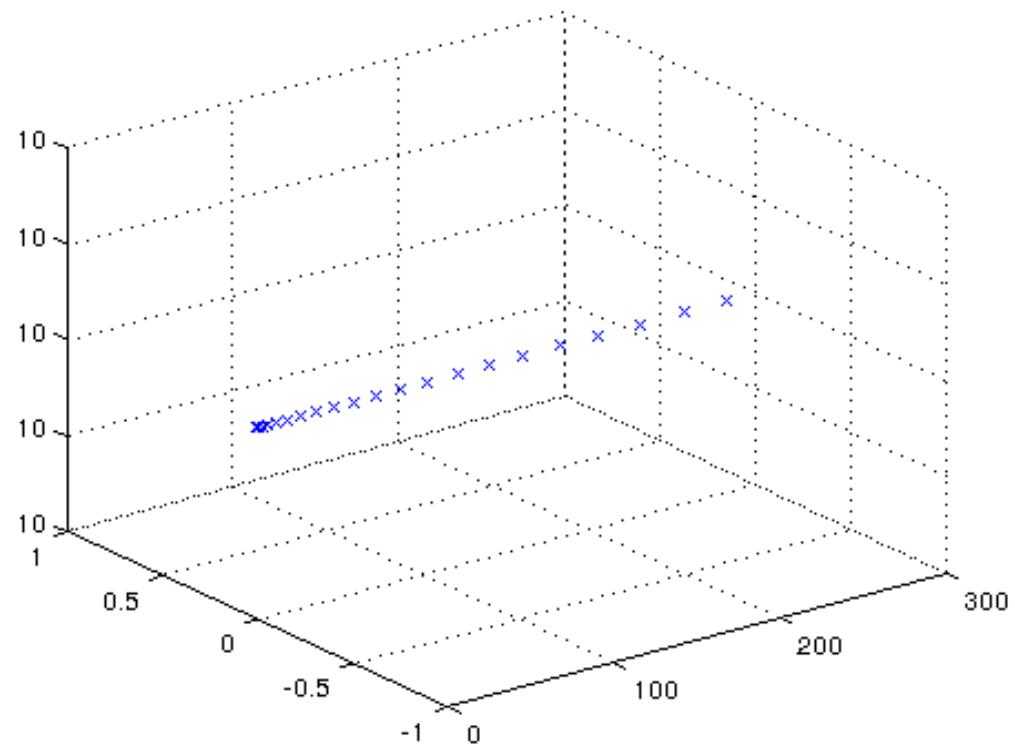


Figura 4.10: Vuelo en linea recta

en ninguna prueba se obtuvieron errores considerables.

# **Parte III**

## **Ingeniería inversa**

---

# CAPÍTULO 5

---

## INGENIERÍA INVERSA

El cuadricóptero adquirido resuelve la comunicación entre los controladores de los motores (**ESCs**) y el microprocesador mediante el protocolo **i<sup>2</sup>c**.

Para el presente proyecto resulta de vital importancia conocer dicho protocolo, ya que se utilizará otro microprocesador que deberá comandar a esos mismos ESCs, supliendo el trabajo del anterior. Es entonces imprescindible conocer al detalle el funcionamiento de este protocolo, para luego poder reproducirlo.

Dado que no se cuenta con la colaboración de los fabricantes, y toda la información parece ser privativa, no pudiendo conseguir dato alguno de su implementación, es necesario realizar un proceso de ingeniería inversa para poder analizar, decodificar, entender y reproducir el protocolo existente. Dicho proceso de ingeniería inversa se realiza utilizando el hardware existente del cuadricóptero comercial adquirido y un analizador lógico<sup>1</sup> que es capaz de leer e interpretar las líneas del bus  $i^2c$  sin intervenir en las mismas.

Antes de presentar los resultados obtenidos en el proceso, se realiza una breve introducción al protocolo  $i^2c$  y se presenta en la figura 5.1 la definición de los ejes a utilizar, lo cual será de utilidad más adelante.



Figura 5.1: Definición de ejes

---

<sup>1</sup>ChronoVu

## 5.1. Introducción al protocolo $i^2c$

El bus  $i^2c$  es un bus de comunicaciones serie. Su nombre viene de *Inter-Integrated Circuit* (Circuitos Inter-Integrados).

Utiliza dos líneas para transmitir la información: una para los datos y otra para la señal de reloj. Además será necesaria una tercera línea de tierra, como referencia.

En la imagen <sup>2</sup> se muestra un diagrama de un circuito equivalente simplificado de la conexión  $i^2c$  entre 2 dispositivos.

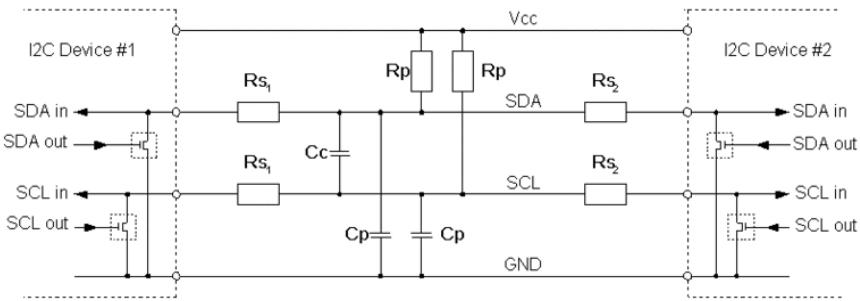


Figura 5.2: Conexión  $i^2c$ .

donde:

Vcc Voltaje de entrada, típicamente varía entre 1.2 V y 5.5 V

GND Tierra común

SDA Línea serial de datos

SCL Línea serial de reloj

$R_p$  Resistencia de "Pull-up"

$R_s$  Resistencia serie

$C_p$  Capacitancia del cable

$C_c$  Capacitancia de canal cruzado

Las líneas **SDA** y **SCL** son de drenador abierto, lo que significa que tanto el maestro como los esclavos solamente pueden conducir a nivel bajo estas líneas o dejarlos abiertos. Si ningún dispositivo  $i^2c$  está conduciendo hacia abajo la línea, la resistencia de *pull-up*  $R_p$  se encarga de conducir la línea a  $V_{cc}$ .

Cada dispositivo tiene asignada una dirección que lo identifica. Para establecer una comunicación la secuencia típica empieza por el maestro enviando una secuencia de comienzo de conexión, seguida de la dirección del esclavo con el cual desea comunicarse. Seguidamente el maestro envía un bit que determina si la acción que desea realizar es escritura o lectura, a lo que el esclavo correspondiente responde con un bit de *acknowledge* (**Ack**). Luego el maestro envía la dirección de memoria interna del esclavo donde debe ser almacenada la información enviada, y por último envía los datos. Para finalizar la conexión, el maestro envía una secuencia de fin de conexión.

<sup>2</sup>Imagen tomada de [www.i2c-bus.org](http://www.i2c-bus.org)

## 5.2. Pruebas en régimen

Como se dijo anteriormente, para realizar el proceso de ingeniería inversa se utilizó el cuadricóptero y un analizador lógico. La forma de operar es enviar comandos conocidos con el control remoto y analizar los datos que se cursan en las líneas del bus. En la figura 5.3 se muestra una foto del proceso descripto.



Figura 5.3: Proceso de lectura del bus.

Al realizar este proceso se puede observar que se repiten cada  $2ms$  bloques similares al mostrado en la figura 5.4.

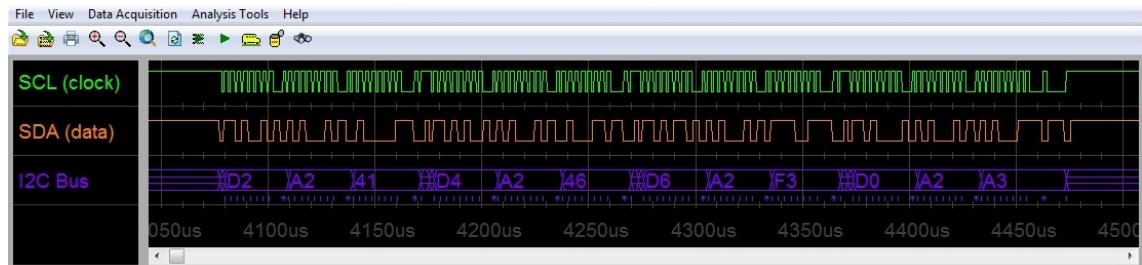


Figura 5.4: Bloque de transmisión  $i^2c$

Rápidamente, visto lo anterior, se puede deducir que hay 4 esclavos correspondientes a los 4 ESC's de los 4 motores, cuyas direcciones en hexadecimal son **D0**, **D2**, **D4** y **D6**. La dirección de la memoria interna de los esclavos donde se almacenan los datos que envía el maestro es, en todos los casos **A2**. Además el maestro envía un tercer conjunto de datos que refiere, de alguna manera, a la velocidad con la que debe girar cada motor. Este conjunto de órdenes, agrupadas por bloques como el que se muestra en la figura 5.4, se repite periódicamente, indicando la velocidad con la que debe girar cada motor.

Para comprender las pruebas realizadas es importante dejar en claro algunos aspectos previos. En la figura 5.5 se muestra el transmisor utilizado para enviar comandos al cuadricóptero, un **Walkera WK-2801** y se indican los nombres de los mandos más importantes del mismo.



Figura 5.5: Transmisor

Al mover el mando de la izquierda (**Elev/Rudder**) en la dirección vertical (**Elev**) se logra que el cuadricóptero se eleve verticalmente, dando igual potencia a todos los motores, mientras que al moverlo en la dirección horizontal, el cuadricóptero presenta un movimiento de rotación según su eje vertical (que pasa por el centro).

Al mover el mando de la derecha (**Throttle/Aile**) en la dirección horizontal (**Aile**) y vertical (**Throttle**), se logran movimientos de rotación según los ejes horizontales  $x$  e  $y$  del cuadricóptero. Las definiciones de los ejes se pueden ver en la figura 5.1.

Se analizan las siguientes situaciones:

<b>Id</b>	<b>Elev</b>	<b>Rudder</b>	<b>Aile</b>	<b>Throttle</b>	<b>Movimiento</b>
0	atrás <sup>3</sup>	medio	medio	medio	idle
1	medio	medio	medio	medio	vertical hacia arriba con aceleración constante
2	adelante	medio	medio	medio	vertical hacia arriba con aceleración constante
3	medio	izquierda	medio	medio	giro según eje $z$
4	medio	derecha	medio	medio	giro según eje $-z$
5	medio	medio	izquierda	medio	giro según eje $-x$
6	medio	medio	derecha	medio	giro según eje $x$
7	medio	medio	medio	atrás	giro según eje $-y$
8	medio	medio	medio	adelante	giro según eje $y$

Cuadro 5.1: Pruebas realizadas

Se realiza un análisis de los resultados obtenidos para cada motor, graficando el contenido del byte de datos que se le transmite a cada motor. Se obtienen representaciones como la mostrada en la figura 5.6

En la figura 5.6 se puede observar que a los 4 motores les llega un byte con el valor promedio en 50, el cual corresponde a la mínima potencia entregada a los motores para encenderlos.

Haciendo un análisis similar con el resto de las pruebas detalladas en la tabla 5.1 se construye la tabla 5.2 donde se muestran los valores enviados a cada motor en promedio en todas las pruebas.

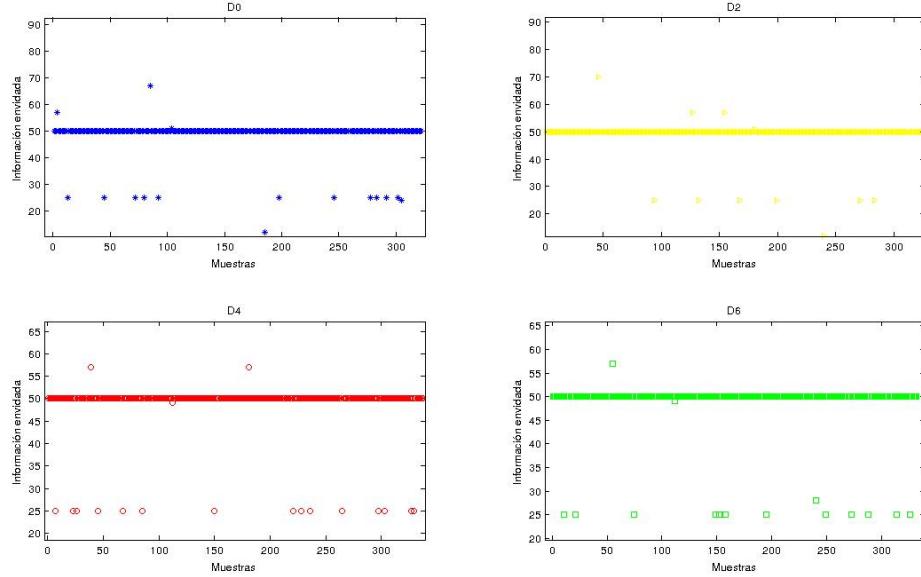


Figura 5.6: Prueba N° 0

Prueba	Valor promedio				Movimiento
	D0	D2	D4	D6	
0	50	50	50	50	Idle
1	80	140	180	140	$a_z = cte \neq 0$
2	180	220	250	240	$a_z = cte \neq 0$
3	160	70	60	250	giro según eje $z$
4	50	200	200	100	giro según eje $-z$
5	250	160	140	50	giro según eje $-x$
6	50	160	150	250	giro según eje $x$
7	90	50	250	160	giro según eje $-y$
8	110	250	50	100	giro según eje $y$

Cuadro 5.2: Resumen de los resultados obtenidos

De dicha tabla se pueden sacar algunas conclusiones que se analizarán en la sección 5.5;

### 5.3. Prueba de arranque

En esta sección se analiza la secuencia de arranque del cuadricóptero, para obtener conclusiones sobre la misma. Se parte con la palanca de elevación al mínimo y se procede a moverla para hacer arrancar los motores.

Mientras la palanca de elevación se mantiene al mínimo, se le envía el valor 0 a los cuatro motores. Al mover la palanca, luego de un *tiempo muerto* donde las líneas quedan inactivas, se les empieza a mandar el valor correspondiente a cada motor, como se puede ver en la figura 5.7.

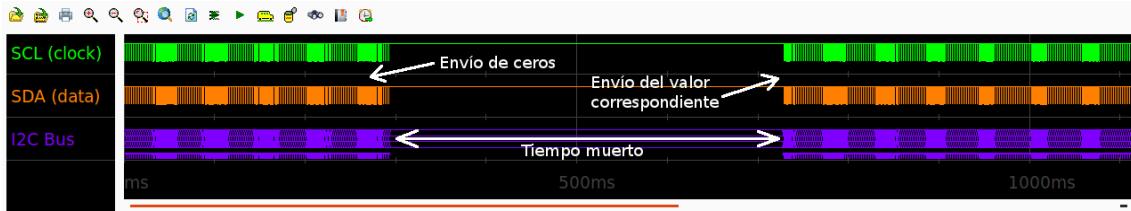
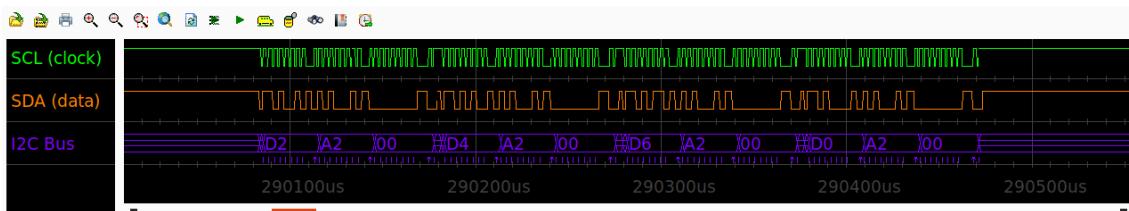
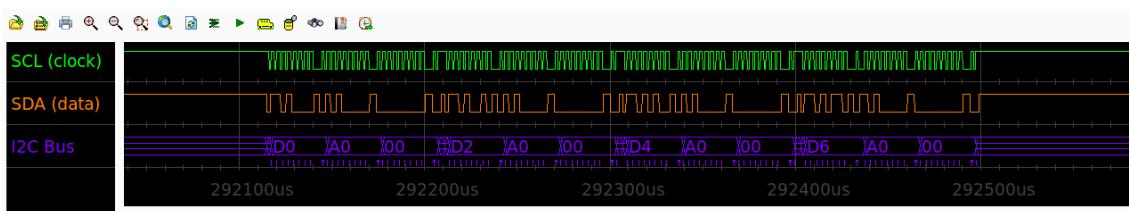


Figura 5.7: Arranque

Observando más detenidamente los comandos enviados se pueden sacar algunas conclusiones importantes. En la gran mayoría de los casos se envían los comandos en el orden  $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$  y se guardan en el registro 0xA2 del esclavo. Pero se puede observar una importante diferencia en la el último comando que se manda a cada motor antes de arrancar, es decir, el último comando en la tanda de ceros mostrada en la figura 5.7. En la figura 5.8a se muestra una tanda regular de ceros y en la figura 5.8b se muestra la última tanda de ceros mencionada.



(a) Tanda normal de ceros



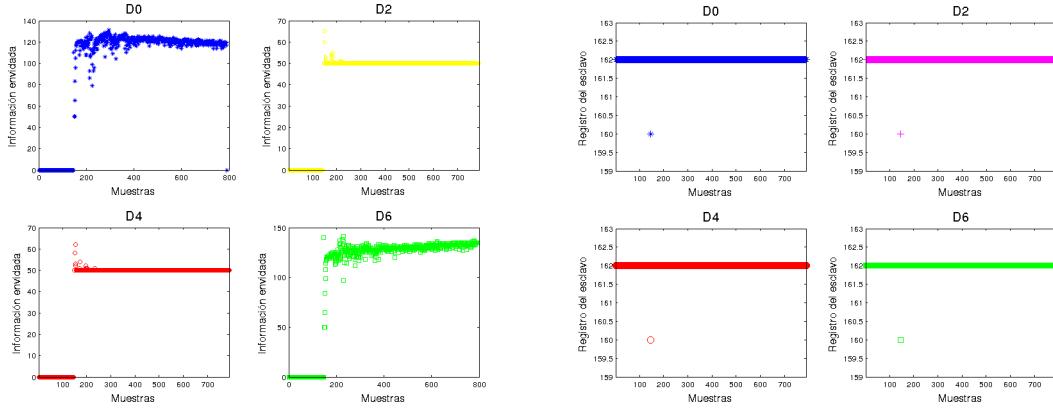
(b) Última tanda de ceros

Figura 5.8: Envío de ceros

Se observan 2 claras diferencias:

- **El orden en el que se envían datos a los motores no es mismo** que el anterior. En este caso el orden es:  $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$ .
- **El registro en el que se escriben los datos es 0xA0**

Dichas diferencias se pueden observar claramente al graficar todos los datos obtenidos, como se muestra en la figura 5.9. Se grafica para cada motor el valor que le llega (figura 5.9a) y el registro donde el valor es escrito (figura 5.9b). Al analizar los resultados gráficamente resulta evidente el cambio en el registro al terminar de mandar los ceros. En la figura 5.9a se puede observar que el último cero que se manda a los motores, se manda alrededor de la muestra 150. Analizando la figura 5.9b es clarísimo que alrededor de la muestra 150, el registro al que se envían los comandos cambia al valor 160 (0xA0), tal como se había observado anteriormente.



(a) Valores enviados a los motores

(b) Registro al que se envía el valor

Figura 5.9: Arranque

## 5.4. Prueba de frenado

Se procede del mismo modo que en la prueba anterior (sección 5.3), analizando los comandos enviados a los motores a la hora de apagarlos. Se realiza una prueba análoga a la anterior partiendo de los motores funcionando y bajando al mínimo la palanca de elevación, causando que estos se detengan.

Una vez que se lleva la palanca de elevación al mínimo, los motores se apagan y se permanece enviando ceros a los motores en el orden  $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$ . Se pueden sacar algunas conclusiones importantes de la última tanda de valores distintos de cero enviados, mostrada en la figura 5.10:

- El orden en el que se envían datos es  $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$
- El registro en el que se escriben los datos es 0xA1

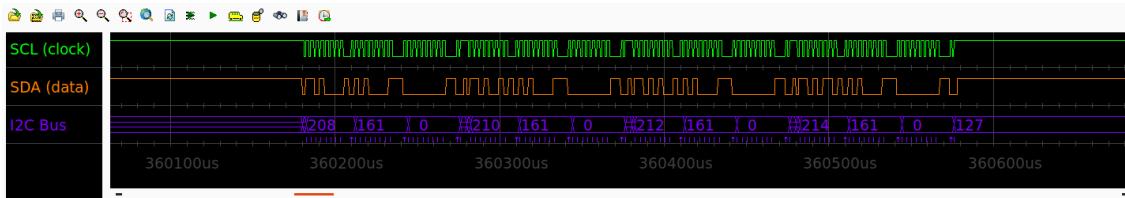


Figura 5.10: Frenado

Se presenta también un análisis gráfico en la figura 5.11. En este caso, a diferencia del de la sección 5.3, no es posible divisar con claridad el registro 0xA1 (161) en la figura 5.11b, ya que se escriben comandos a una cantidad importante de registros diferentes.

Avalados por la prueba realizada en la sección 5.6 que se verá luego, se afirma que en realidad la aparición de estos registros (por ejemplo los números 81, 145, etc) son causados por el proceso de *sniffing* y no son, de hecho, el comando mandado a los motores.

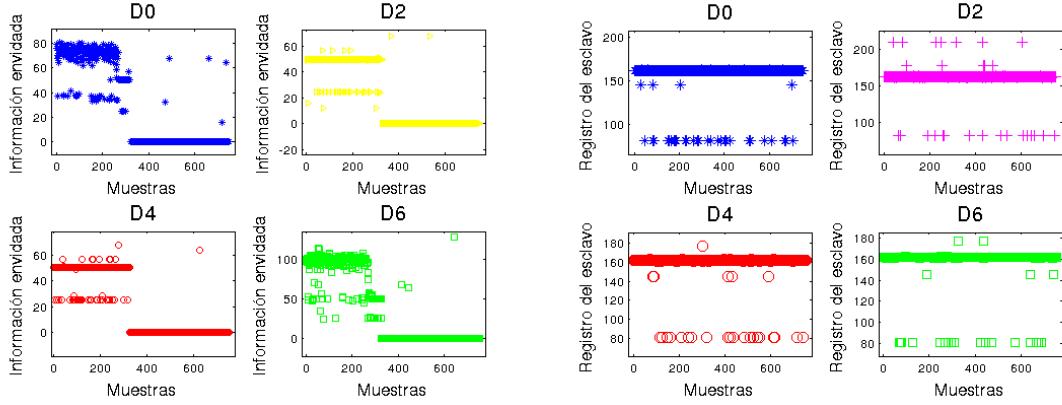


Figura 5.11: Frenado

Analicemos por ejemplo el valor 81. Es claro que el resultado de dividir el valor 162 (correspondiente al conocido registro 0xA2) es exactamente 81, por lo cual parece probable que haya sido generado por un error del *sniffer*, ya que un corrimiento hacia la derecha de un bit en una palabra binaria es equivalente a realizar una división entre 2. Es probable entonces que el sniffer haya incluido un bit en 0 antes de la verdadera palabra y haya descartado el último bit, causando una aparente división entre 2. Más graficamente:

$$162 = 10100010 \rightarrow \text{ verde } 01010001\text{ rojo }0 = 81$$

En verde se muestra el bit agregado y en rojo el eliminado.

## 5.5. Conclusiones

- La comunicación entre el amo y los esclavos por medio del protocolo  $i^2c$  se lleva a cabo mediante un formato del tipo

Dirección esclavo – Lugar de memoria donde guardar dato – dato

- Dicho formato se repite para todos los esclavos
- Cada esclavo recibe una actualización de estado (un dato nuevo) cada  $2ms$
- La velocidad mínima de funcionamiento se logra enviando el valor 50
- La velocidad máxima de funcionamiento se logra enviando el valor 250
- Cuando el mando de Elevación del control se encuentra al mínimo, se les envía el valor 0 a los cuatro motores periódicamente con el formato mencionado.
- La dirección de memoria interna de todos los esclavos donde se guardan los datos recibidos por el maestro es siempre 0xA2 (ó 162), a excepción del arranque y el frenado.

- El último comando enviado antes de arrancar se guarda en el registro 0xA0.
- El último comando enviado antes de frenar se guarda en el registro 0xA1.
- El orden normal en el que se envían los comandos es  $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$ , menos en los casos descriptos en los 2 puntos anteriores donde el orden es  $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$ .
- La correspondencia entre las direcciones y los motores se muestra en la figura 5.12. El motor con dirección 0xD0 es el de adelante, el motor con dirección 0xD4 es el de atrás y mirándolo de frente el de la izquierda se corresponde con 0xD0, y el de la derecha con 0xD6
- Las direcciones 0xD0, 0xD2, 0xD4 y 0xD6 (de 8 bits) en realidad no refieren únicamente a direccionamiento, sino que incluyen además el bit de lectura/escritura, por lo cual cada esclavo tendrá una única dirección de 7 bits. Notar que las direcciones 0xD0 a 0xD6 al pasarlas a binario todas terminan en 0, lo cual implica que se tratan de comandos de escritura. Al omitir el último bit se obtienen las direcciones (sin incluir el bit de lectura/escritura) como se puede ver a continuación:

$$0xD0(11010000) \longrightarrow 0x68(1101000) \quad (5.1)$$

$$0xD2(11010010) \longrightarrow 0x69(1101001) \quad (5.2)$$

$$0xD4(11010100) \longrightarrow 0x6A(1101010) \quad (5.3)$$

$$0xD6(11010110) \longrightarrow 0x6B(1101011) \quad (5.4)$$

Las direcciones de los motores son entonces: **0x68, 0x69, 0x6A, 0x6B**.

- En las pruebas 0, 1, 2, 5, 6 y 7 se observa que la suma del valor promedio enviado al motor D0 más el enviado a la dirección D2 es similar a la suma de los valores entregados a los motores con dirección D4 y D6, lo cual implica un equilibrio en los pares realizados en ambos sentidos. Se infiere entonces que el movimiento según el eje “z” se logra desequilibrando los pares en ambos sentidos (según “z” y según “-z”)

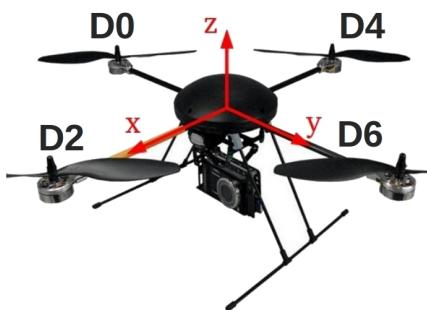


Figura 5.12: correspondencias

## 5.6. Verificaciones

Se presentan diversas verificaciones realizadas para corroborar la veracidad de las conclusiones sacadas, además de la corroboración experimental utilizando el puerto  $i^2c$  de la Beagleboard.

### i2cdetect

Utilizando la librería *i2c Tools*<sup>4</sup> con la Beagleboard es posible mandar el comando **i2cdetect** que lo que hace es preguntar a todos los esclavos que estén presentes en el bus, por su dirección. El resultado en terminal es el siguiente

```
root@beagleboard:~# i2cdetect -r 2
WARNING! This program can confuse your I2C bus, cause data loss and worse!
I will probe file /dev/i2c-2 using read byte commands.
I will probe address range 0x03-0x77.
Continue? [Y/n] y
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
00:			--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
10:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
20:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
30:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
40:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
50:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
60:	--	--	--	--	--	--	--	--	68	69	6a	6b	--	--	--	--
70:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Puede verse claramente que las direcciones de los esclavos obtenidas por la función mencionada son: **0x68**, **0x69**, **0x6A**, **0x6B**.

### MSP430F5438

Se utiliza el chip **MSP430F5438**, que se muestra en la figura 5.13.

El MSP430F5438 posee un puerto  $i^2c$  habilitado para su utilización. Se configurara como esclavo y se guarda en una variable todos los comandos recibidos en el bus. De este modo se logra independizarse de los problemas que pueda introducir el sniffer y se obtiene exactamente el comando mandado a ese esclavo. Se le configura la dirección 0x68 para comunicarse con el maestro cuando éste mande comandos a esa dirección.



Figura 5.13: MSP430F5438

<sup>4</sup><http://www.lm-sensors.org/wiki/i2cToolsDocumentation>

Luego, analizando la variable donde se guardan los comandos, es posible obtener información más concluyente.

En la figura 5.14 se muestran los resultados obtenidos al adquirir datos en un arranque.

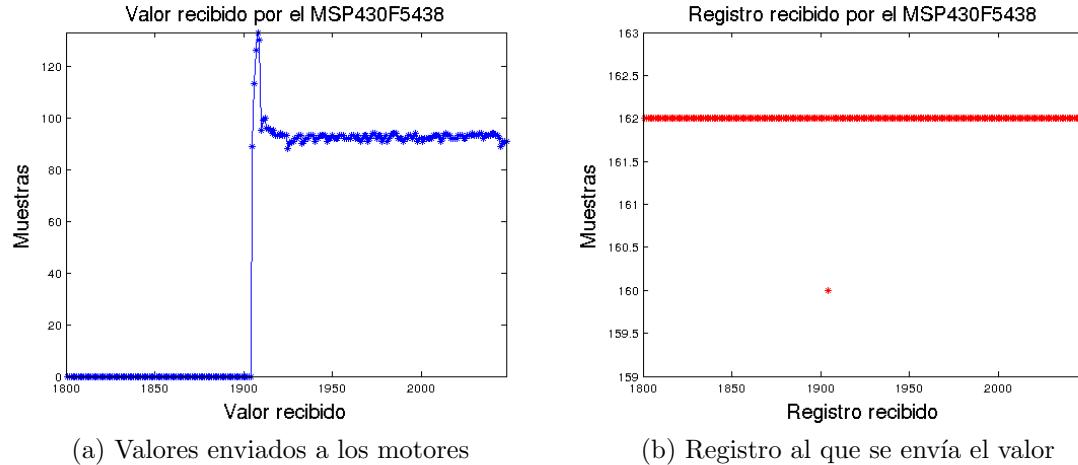


Figura 5.14: Arranque detectado por el MSP430F5438

En la figura 5.15 se muestran los resultados obtenidos al adquirir datos en un frenado.

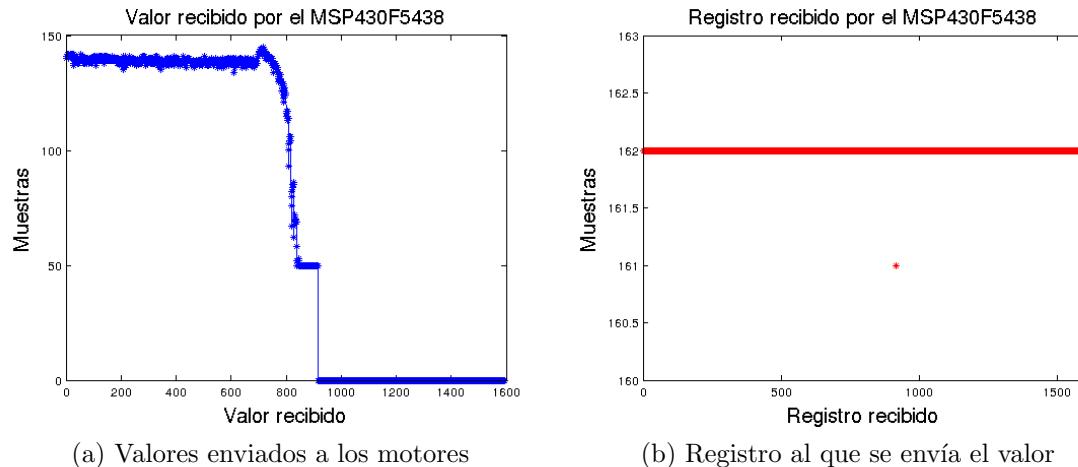


Figura 5.15: Frenado

Estas últimas dos figuras son las corroboraciones más concluyentes que se obtuvieron. Ratifica y deja bien en claro lo antes dicho sobre los registros: **para el arranque se escribe en la dirección 0xA0 del esclavo y para el frenado se escribe en la dirección 0xA1**.

A su vez sirve de confirmación para los errores del sniffreado detectados en la sección 5.4.

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## CARACTERIZACIÓN DE LOS MOTORES

### 6.1. Objetivo

El objetivo es el de caracterizar los motores del cuadricóptero Turbo Ace X720. Con dicho fin se busca:

- Analizar el comportamiento de los cuatro motores individualmente
- Determinar la relación entre velocidad angular y fuerza
- Determinar la relación entre comando  $I^2C$  y la velocidad angular.
- Determinar la relación entre comando  $I^2C$  y la fuerza.
- Determinar la relación entre velocidad angular y torque.
- Determinar la relación entre comando  $I^2C$  y torque.
- Determinar la respuesta al escalón

Los algoritmos de control se centraran o bien en la velocidad angular o bien en los comandos  $I^2C$ . Por dicho motivo es fundamental como se relacionan dichas magnitudes con la fuerza y el torque. Asimismo, si se decidiera que el control estuviera centrado en la velocidad angular se debe conocer la relación entre esta última y el comando  $I^2C$  ya que es sobre los comandos  $I^2C$  que se tiene real poder de actuar.

### 6.2. Materiales

- Cuadricóptero Turbo Ace X720
- LED IR TSAL6200
- Detector IR TSOP38256

- Resistencia de  $20\Omega$
- Generador de onda Tektronix CFG250
- Fuente de alimentación de  $5V_{DC}$
- Osciloscopio digital GwINSTEC GDS2062
- Balanza Presiser LK-15P presición media III
- Beagleboard XM rev C
- Analizador lógico ChronoVu
- Buffer Octal 74HC245

## 6.3. Procedimiento

### 6.3.1. Consideraciones previas

#### Funcionamiento del dispositivo IR

Es necesario entender el funcionamiento del *detector IR* para poder realizar un experimento adecuado. Dicho dispositivo es sensible a las *radiaciones infrarrojas* moduladas a una frecuencia de  $56KHz$ . Si se lo expone a una onda cuadrada de dicha frecuencia la salida del mismo es un “0” lógico. Si no recibe dicha radiación la salida es un “1” lógico

#### Diseño del circuito de medida de velocidad angular

La idea del dispositivo de medida es sencilla. Se trata de hacer “pasar” la radiación infrarroja emitida por el LED a través de la hélice en funcionamiento de uno de los motores. Esta radiación es recogida del otro lado por el receptor IR.

De este modo tendremos a la salida del detector, pulsos de frecuencia correspondientes a la velocidad con la que la hélice obstruye el camino entre el sensor y la LED. **La velocidad angular será entonces la mitad de dicha frecuencia.**



Figura 6.1: Dispositivo en forma de U funcionando como generador de onda cuadrada a dicha frecuencia. Para lograr un correcto funcionamiento de la LED se requiere una corriente superior a los  $100mA$ .

El dispositivo se trata de un cuerpo en forma de “U”, donde de un lado se tiene la LED infrarroja y del otro el detector, tal como se puede ver en la figura 6.1.

Como explicamos anteriormente la LED debe ser conmutada con una frecuencia de  $56kHz$  por lo tanto se la alimentará con un generador de señales

La amplitud de la onda cuadrada se regulará a 5V y se trabajará con una resistencia de  $20\Omega$  en serie. Midiendo la tensión en la resistencia se puede comprobar que dichos valores son adecuados para el propósito. La salida del receptor IR se conecta directamente al osciloscopio digital.

### 6.3.2. Relación entre comando $I^2C$ , velocidad angular y empuje

#### Objetivos particulares

Este experimento servirá para obtener las curvas:

- Diferencias en el comportamiento de los motores
- Relación entre velocidad angular y fuerza
- Relación entre comando  $I^2C$  y la velocidad angular.
- Relación entre comando  $I^2C$  y la fuerza.

#### Modelos de ajuste

Es claro que si no se envía ningún comando  $I^2C$  los motores no giran. También es evidente que si los motores no giran las hélices no realizan ningún empuje. Por lo tanto los modelos deben estar ajustados al cero.

- Para la relación entre velocidad angular y fuerza en base a la bibliografía consultada sobre el tema se proponen dos modelos de ajuste siguientes:
  - Modelo cuadrático  $T = a\omega^2 + b\omega$
  - Modelo cúbico  $T = a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega$
- Esta relación es interesante si el control se centra en determinar los valores de la velocidad angular de los motores para realizar una acción de control concreta. En este caso se determinará el valor de dicha velocidad angular y a partir del mismo se busca determinar el comando  $I^2C$  correspondiente, por lo tanto para la relación entre comando  $I^2C$  y la velocidad angular se propone un ajuste en base a los siguientes modelos:
  - Modelo cuadrático  $x = a\omega^2 + b\omega$
  - Modelo cúbico  $x = a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega$
- Para la relación entre comando  $I^2C$  y fuerza se propone un ajuste en base a los modelos:
  - Modelo cuadrático  $T = a\omega^2 + b\omega$
  - Modelo cúbico  $T = a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega$

## Desarrollo del experimento

El procedimiento consiste en enviar distintos comandos  $I^2C$  al cuadricóptero y registrar las diferentes lecturas de masa en la balanza para determinar el empuje de los motores y en registrar las diferentes medidas de frecuencia en el osciloscopio para determinar la velocidad angular de los cuatro motores. El setup experimental puede observarse en la figura 6.2. Se solidariza el cuadricóptero a una base de madera. Sobre esta última se añade peso suficiente para asegurar que el cuadricóptero no se eleve, se agregaron 3Kg de sobrepeso para asegurar completamente dicha condición. Al estar el sistema en equilibrio mecánico se cumple que:

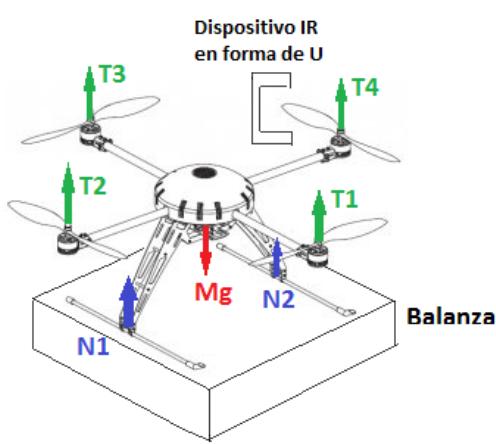


Figura 6.2: Primer set-up experimental

$$\sum F_{ext} = 0$$

En este caso las fuerzas presentes son el peso del sistema ( $M_{total}$ ) la normal de la balanza sobre el sistema ( $N = N_1 + N_2$ ) y el empuje de los motores ( $T_{total} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ ). Por lo tanto

$$T_{total} - M_{total}g + N = 0$$

Por lo tanto el empuje de los motores puede calcularse como:

$$T_{total} = M_{total}g - N$$

La lectura de la balanza no es otra cosa que  $\frac{N}{g}$ . Una vez ubicado el cuadricóptero con el sobrepeso sobre la balanza se tara la balanza. Por lo tanto la lectura que indica la balanza ( $M_{medida}$ ) luego de realizada esta acción es:

$$M_{medida} = \frac{N - M_{total}g}{g}$$

Por lo tanto el empuje de los cuatro motores puede calcularse como:

$$T_{total} = -M_{medida}g$$

Asumiendo que los cuatro motores se comportan en forma similar se tiene que:

$$T = -\frac{M_{medida}g}{4}$$

La medida de frecuencia se realiza con el dispositivo IR descrito en la sección anterior. La frecuencia medida ( $f_{medida}$ ) corresponde al inverso del tiempo que transcurre entre el pasaje de una hoja de la hélice y la otra. El período de la rotación de la hélice es el doble y por ende la frecuencia de la rotación es la mitad de la frecuencia medida. Por lo tanto se tiene que:

$$\omega = 2\pi f = \pi f_{medida}$$

Se mide la velocidad angular de los cuatro motores y se trabaja con el promedio. En la sección 6.4.1 se verá porqué es adecuado considerar el promedio.

### 6.3.3. Relación entre velocidad $I^2C$ , velocidad angular y torque

#### Objetivos específicos

Los objetivos de este experimento son:

- Obtener la relación entre velocidad angular y torque
- Obtener la relación entre comando  $I^2C$  y torque.

#### Modelos de ajuste

Al igual que en el experimento anterior se fuerzan los modelos para que pasen por el cero ya que sin comando  $I^2C$  no hay velocidad angular y por lo tanto no hay torque. Realizando esta consideración y los modelos estudiados para las fuerzas y momentos de las hélices se proponen los siguientes modelos de ajuste:

- Para la relación entre velocidad angular y torque se proponen un modelo cuadrático:

$$\bullet Q = a\omega^2 + b\omega$$

#### Desarrollo del experimento

Se ubica el cuadricóptero sobre la balanza. Se retiran tres de las cuatro hélices del cuadricóptero. La cuarta hélice se rota de forma que el eje en torno al cual rota sea paralelo respecto del plano del plato de la balanza. Se ubica el detector IR de forma de poder medir la velocidad angular de la hélice. El setup de medida puede verse en las figuras 6.3. De acuerdo a lo estudiado la hélice presenta un torque ( $Q$ ) positivo respecto de su eje central si el motor rota en sentido anti-horario. Nos proponemos calcular el torque total respecto de dicho eje. Las fuerzas presentes en el sistema son: la fuerza de empuje, la normal y las fuerzas reactivas en el plano del plato de la balanza. Estas últimas y el empuje no realizan ningún torque en la dirección de interés. Recordamos que el torque de una fuerza respecto de un eje se calcula como:

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$

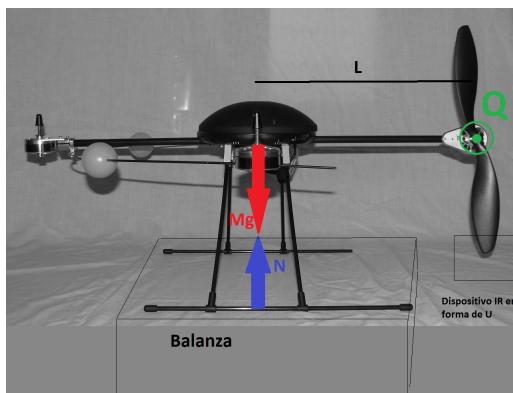


Figura 6.3: Segundo set-up experimental al plano del plato de la balanza.

Donde  $\vec{F}$  es la fuerza considerada y  $\vec{r}$  es vector distancia entre el eje y el punto de aplicación de la fuerza.

Definimos el largo  $L = 29,3cm$  como la distancia entre el eje de la hélice y el centro de masa del cuadricóptero. Asumimos que el peso aplica sobre el centro de masa y la normal sobre la recta que pasa por el centro de masa del cuadricóptero y es perpendicular

De esta forma se tiene que el torque total vale:

$$\tau = Q + LM_{total}g - LN = Q + L(M_{total}g - N)$$

Como se explico anteriormente luego de tarar la balanza la masa medida por la misma corresponde a  $M_{medida} = \frac{N - M_{total}g}{g}$ . De esta forma se puede escribir el torque total sobre el sistema como:

$$\tau = Q - LM_{medida}g$$

Al igual que en el experimento anterior el sistema se encuentra en equilibrio mecánico y por lo tanto:

$$\tau = 0$$

De esta forma queda claro que el torque que nos interesa caracterizar puede calcularse como:

$$Q = LM_{medida}g$$

#### 6.3.4. Respuesta al Escalón

Se caracterizará al motor en lo que respecta a su respuesta al escalón. Se verá cuánto demora un motor en pasar de la velocidad angular en régimen correspondiente al valor de comando  $i^2c$  50 a la velocidad angular en régimen correspondiente al valor de comando  $i^2c$  150. El osciloscopio no resulta adecuado para observar las diferencias de velocidad angular obtenida. Se procede a conectar la salida del sensor IR a un *buffer* octal y la salida de este último al analizador lógico<sup>1</sup>. El analizador lógico registrará la salida del sensor R durante 5 segundos a una tasa de muestreo de 2kHz. Se obtendrán las diferencias de tiempos entre flancos de subida sucesivos( $t_f$ ). Cada flanco de subida corresponde a una hoja de la hélice siendo detectada por el sensor IR. La velocidad angular de la hélice puede calcularse como:

$$\omega = 2\pi \frac{2}{t_f}$$

### 6.4. Resultados y análisis

#### 6.4.1. Comparación entre motores

En la tabla 6.1 todos los valores obtenidos experimentalmente de acuerdo al procedimiento descrito.

---

<sup>1</sup> Esto fue necesario ya que la tensión de la salida del IR disminuía drásticamente al conectarlo directamente al analizador lógico a valores que este último no es capaz de identificar como “1” lógicos

$i^2c$	Peso medido	Frecuencia (Hz)			
		Motor D0	Motor D2	Motor D4	Motor D6
0	0	0	0	0	0
50	-140	34.2	34.3	35.5	34.3
70	-300	49.2	49.5	49	48.4
90	-500	63.7	62.7	63.3	63.5
110	-765	76.7	74.4	75.5	73.4
130	-1010	87.3	86.3	86.2	84.7
150	-1250	97.5	95.4	96.2	94.2
170	-1520	104.7	104.2	106.2	105.5
200	-1870	115.5	113.4	119.9	117.3
250	-2400	133.5	132.4	131.5	134.2

Cuadro 6.1: Comando  $i^2c$  enviado y fuerza obtenida

En la figura 6.4a se presentan las velocidades angulares de los cuatro motores contra el comando  $i^2c$ , mientras que en la figura 6.4b se muestra la diferencia entre la velocidad angular de cada motor y el promedio de las mismas para cada comando  $i^2c$  enviado.

En la figura 6.4a se observa que el comportamiento de los motores es en todos los casos similar. Para velocidades angulares bajas los motores se comportan en forma idéntica, mientras que a medida que aumenta la misma se ve afectada esta característica

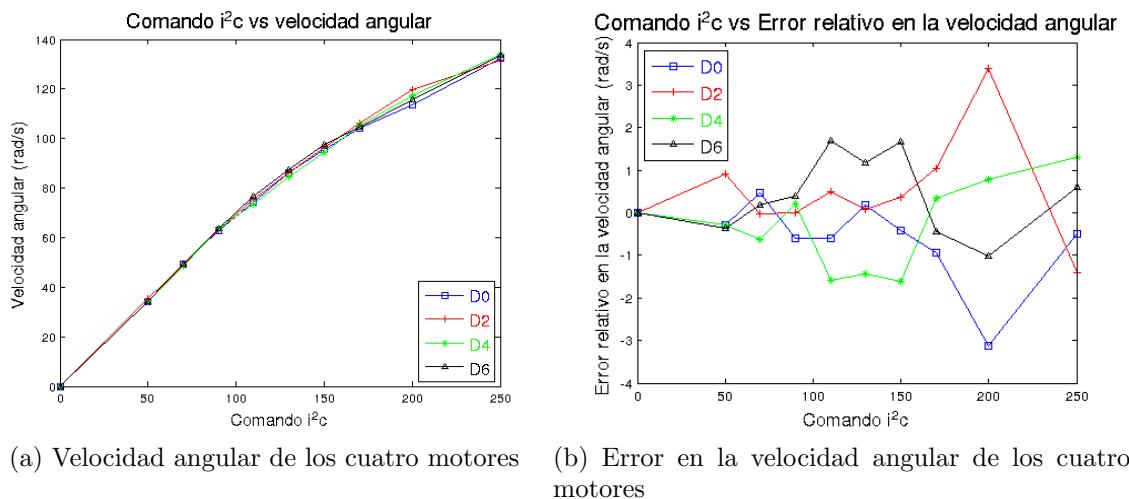


Figura 6.4: Curva  $i^2c$  vs. velocidad angular para los 4 motores

En la figura 6.4b puede observarse que la máxima diferencia entre las velocidades angulares de dos motores es de aproximadamente  $6.5\text{rad/s}$ . Dicha diferencia se obtiene para un valor de comando  $i^2c$  igual a 200. Si observamos la velocidad angular a dicho valor de comando  $i^2c$  en la tabla 6.1 se observa que el menor valor corresponde a  $113.4\text{rad/s}$ . El error relativo que se obtiene es inferior al 6%

Se puede afirmar que:

- Es válido promediar las velocidades angulares de los 4 motores y trabajar con esos promedios como un motor típico. Además de este modo se reducen los posibles errores que se pueden haber causado a la hora de realizar las medidas.
- Por lo tanto la fuerza medida (de los 4 motores juntos) corresponde con el cuádruple de la fuerza ejercida por cada uno de ellos

#### 6.4.2. Obtención de la curva fuerza contra velocidad angular

Los resultados obtenidos de frecuencia y medida en la balanza se presentan la tabla 6.2.

En la figura 6.5 se observan los puntos obtenidos experimentalmente ya las curvas obtenidas con los modelos de ajuste propuesto. En dicha figura se observa que cualquiera de los dos modelos aproxima adecuadamente los puntos obtenidos experimentalmente.

Para el modelo cuadrático se obtiene:

- Parámetros:  $a = 3,5296 \times 10^{-5} Ns^2$ ,  $b = -4,9293 \times 10^{-4} Ns$
- Error promedio:  $e = -2,76 \times 10^{-3} N$
- Desviación estándar:  $\sigma = 4,03 \times 10^{-2} N$

Para el modelo cúbico se obtiene:

- Parámetros:  $a' = -1,5197 \times 10^{-8} Ns^3$ ,  $b' = 4,4399 \times 10^{-5} Ns^2$ ,  $c' = 0,0018 Ns$
- Error:  $7,17 \times 10^{-4} N$
- Desviación estándar:  $\sigma = 2,66 \times 10^{-2} N$

Peso (g)	Frecuencia (Hz)	Peso (g)	Frecuencia (Hz)
0	0	-1010	86.13
-140	34.58	-1250	95.83
-300	49.03	-1520	105.15
-500	63.30	-1870	116.53
-765	75.00	-2400	132.9

Cuadro 6.2: Medidas obtenidas de peso y frecuencia medida por el dispositivo IR

Como es de esperar el modelo cúbico aproxima mejor los puntos que el modelo cuadrático, sin embargo cualquiera de los dos modelos ajusta adecuadamente los puntos. Esto fue observado gráficamente en una primera instancia y se comprobó realizando el estudio del error promedio y de la desviación estándar. Ya que ambos modelos parecen adecuados a partir de este momento se trabajará con el más sencillo de los dos, es decir con el modelo cuadrático. Por lo tanto:

$$T = 3,5296 \times 10^{-5} \omega^2 - 4,9293 \times 10^{-4} \omega$$

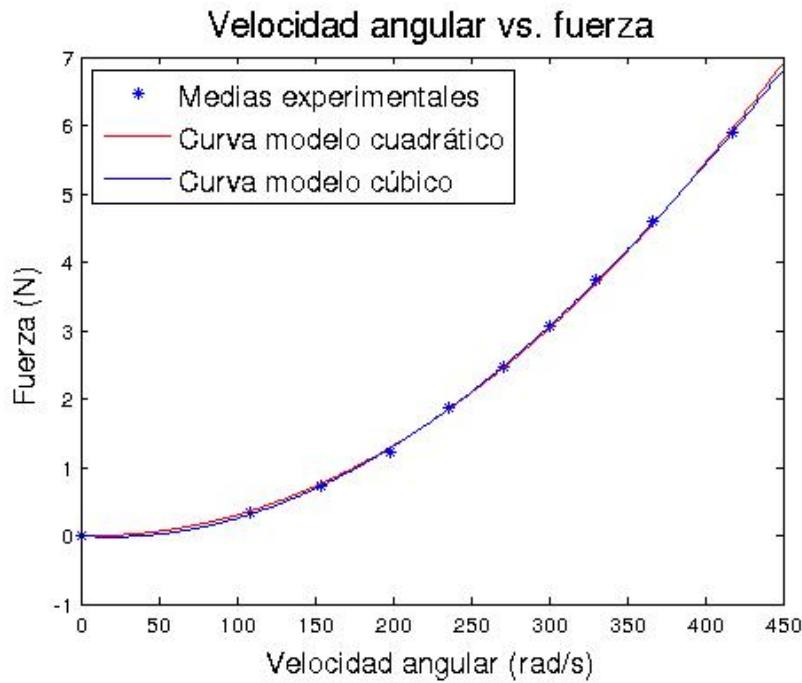


Figura 6.5: Curva experimental de Fuerza-Velocidad angular

#### 6.4.3. Obtención de la curva $i^2c$ contra velocidad angular

En la tabla 6.3 se presentan los resultados obtenidos de frecuencia para distintos valores del comando  $I^2C$ . En la figura 6.6 se muestran además de los datos obtenidos las curvas predichas por los modelos de ajuste por los que se optó.

Comando $i^2c$	Velocidad angular (rpm)	Velocidad angular (rad/s)
0	0	0
50	17.29	108.6206
70	24.51	154.0166
90	31.65	198.8628
110	37.50	235.6194
130	43.06	270.5697
150	47.91	301.0431
170	52.58	330.3385
200	58.26	366.0741
250	66.45	417.5177

Cuadro 6.3: Comando  $i^2c$  enviado y velocidad angular obtenida

A simple vista en la figura ya puede observarse que el modelo cúbico aproxima mejor que el modelo cuadrático. Los resultados obtenidos para los modelos de ajuste propuesto vienen a confirmar dicha constatación.

Para el modelo cuadrático se obtiene:

- Parámetros:  $a = 6,1226 \times 10^{-4} s^2$ ,  $b = 0,3270 \times 10^{-4} s$
- Error promedio:  $e = 5,08 \times 10^{-1}$
- Desviación estándar : $\sigma = 4,42$

Para el modelo cúbico se obtiene:

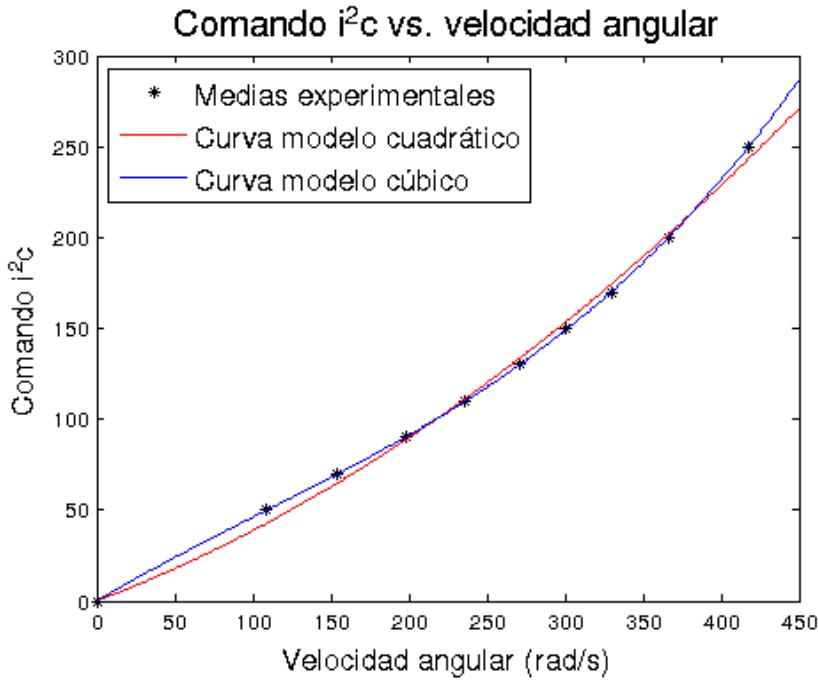


Figura 6.6: Curva  $i^2c$  en función de la velocidad angular

- Parámetros:  $a\tau = 2,2118 \times 10^{-6}s^3$ ,  $b\tau = -7,1258 \times 10^{-4}s^2$ ,  $c\tau = 0,5106s$
- Error promedio:  $2,04 \times 10^{-3}$
- Desviación estándar:  $\sigma = 4,01 \times 10^{-1}$

El error promedio obtenido con el modelo cúbico y la desviación estándar son menores que en el modelo cuadrático. Además se observa claramente que la curva del modelo cúbico ajusta mejor los puntos. Esta es evidencia suficiente para elegir dicho modelo. Tendremos entonces que:

$$x = 2,2118 \times 10^{-6}\omega^3 - 7,1258 \times 10^{-4}\omega^2 + 0,5106\omega$$

#### 6.4.4. Obtención de la curva $i^2c$ contra fuerza

Se presentan los datos obtenidos para la determinación de la curva de interés en la tabla 6.4.

Comando $i^2c$	peso (g)	Comando $i^2c$	peso (g)
0	0	130	-1010
50	-140	150	-1250
70	-300	170	-1520
90	-500	200	-1870
110	-765	250	-2400

Cuadro 6.4: Comando  $i^2c$  enviado y fuerza obtenida

Se desea ajustar la fuerza que realizan los motores con modelos cuadrático y cúbico, en función del comando  $i^2c$ . Los resultados experimentales y las curvas obtenidas con cada modelo se presentan en la figura 6.7.

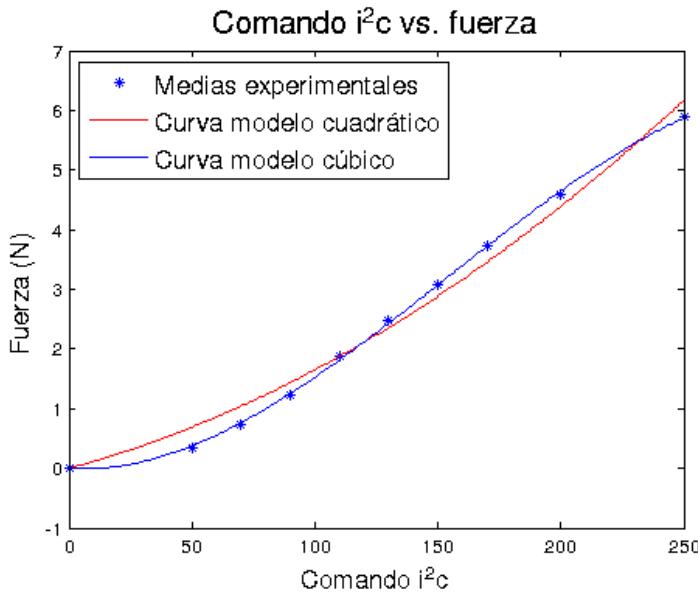


Figura 6.7: Curva  $i^2c$  contra fuerza

Los parámetros obtenidos para el modelo cuadrático son:

- Parámetros  $a = 5,4588 \times 10^{-5} N, b = 0,0110 N$
- Error promedio:  $e = -3,712158 \times -2 N$
- Desviación estándar:  $2,087 \times 10^{-1} N$

Los parámetros obtenidos para el modelo cúbico:

- Parámetros  $a' = -5,0,166 \times 10^{-7} N, b' = 2,3031 \times 10^{-4} N, c' = -0,0028 N$
- Error promedio:  $e = -1,78 \times 10^{-3} N$
- Desviación estándar:  $3,71 \times 10^{-2} N$

#### 6.4.5. Obtención de la curva velocidad angular contra torque

De acuerdo al procedimiento detallado en 6.3.3 se obtuvieron las siguientes medidas de velocidad angular y peso.

Recordamos que para la caracterización de la respuesta velocidad angular - torque se propuso un modelo cuadrático. Los resultados obtenidos fueron:

- Parámetros:  $a = 3,4734 \times 10^{-6} Nms^2; b = -1,3205 \times 10^{-4} Nms$
- Error promedio:  $\mu = 1,7824 \times 10^{-6} Nm$
- Desviación estándar:  $\sigma = 9,2686 \times 10^{-4}$

En la figura 6.8 pueden observarse las medidas experimentales obtenidas y la curva que corresponde al modelo elegido para realizar el ajuste. La observación gráfica de dicha curva confirma que el modelo elegido es un buen ajuste para los datos experimentales obtenidos.

Comando $i^2c$	Frecuencia (Hz)	peso (g)
0	0	0
50	35.4	10
55	39.6	13
60	43.3	16
65	47.1	19
70	50.7	24
75	54.8	28
80	58.3	32
85	62.1	37
90	65.7	42

Cuadro 6.5: Comando  $i^2c$  enviado, frecuencia y peso

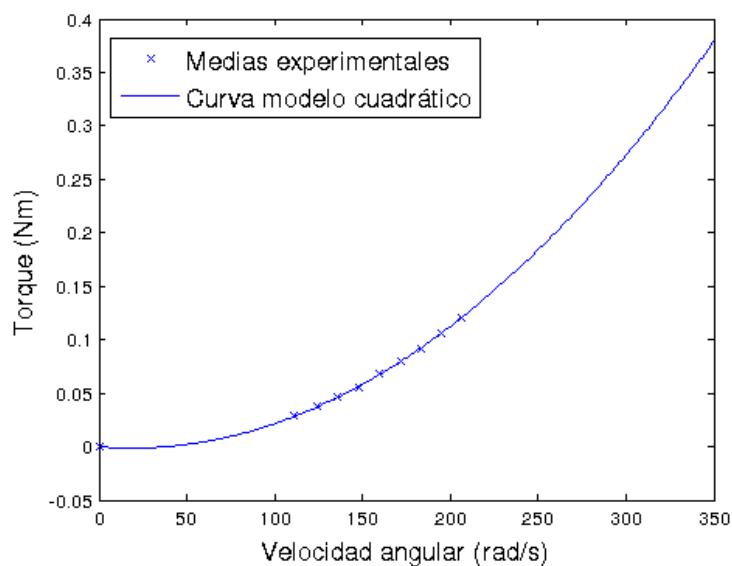


Figura 6.8: Curva torque contra velocidad angular

#### 6.4.6. Respuesta al escalón

En la figura 6.9 se muestran las velocidades angulares obtenidas. El tiempo de rise obtenido es de 0,19s y la respuesta al escalón no presenta prácticamente sobretiro.

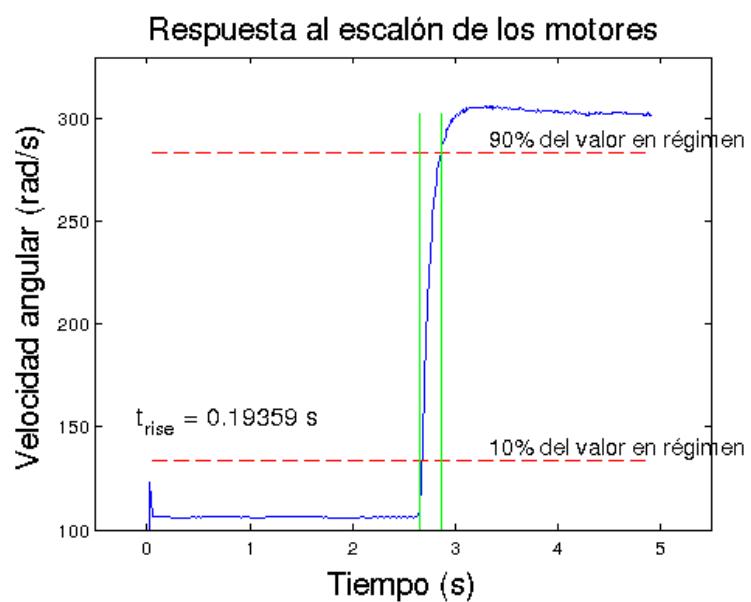


Figura 6.9: Curva  $i^2c$  contra fuerza

## **Parte IV**

# **Calibración y caracterización de los sensores**

---

---

# CAPÍTULO 7

---

## CARACTERIZACIÓN DEL ACELERÓMETRO

### 7.1. Objetivos

Realizar una serie de pruebas con el fin de caracterizar el acelerómetro de tres ejes de la unidad de medida inercial (IMU).

### 7.2. Materiales

- Mongoose 9DoF IMU de *Ckdevices*
- Prisma de madera
- Escuadra con ángulo de 45°
- Mesa nivelable con tapa móvil ajustable a distintos ángulos
- Nivel

### 7.3. Marco Teórico

Existen diversas no idealidades que afectan la lectura de los valores de aceleración registrados por el acelerómetro. Las no idealidades a considerar basados en lo desarrollado por [?] son:

- Ruido inherente
- Relación entre aceleración real y lectura del acelerómetro no lineal.
- No ortogonalidad de los ejes
- Drift aleatorio
- Variación de las medidas con la temperatura

## Ruido Inherente

Existe un ruido inherente del cual no nos preocuparemos en demasía ya que el mismo se modela como un proceso estocástico de distribución normal y media nula, como veremos luego. Por lo tanto, en esta etapa de calibración donde se tomarán muchas muestras y se promediarán se puede trabajar sin considerar este ruido.

## Relación no lineal

En la hoja de datos del acelerómetro ADXL345 de la *Mongoose 9DOF IMU* se declara que en cualquiera de los tres ejes los errores debido a una respuesta no lineal son, en el peor caso,  $\pm 0.5\%$  del valor de fondo de escala, por lo tanto se decide considerar para el acelerómetro una respuesta lineal.

## No ortogonalidad de los ejes

Debido a defectos de construcción los ejes de sensibilidad del dispositivo pueden no ser ortogonales. Evidentemente si no se considera este aspecto se tendrá un error que puede ser importante en las medidas de aceleración. A modo de ejemplo, el acelerómetro en reposo colocado horizontalmente debería medir una aceleración igual a  $g$  en el eje vertical y cero en los ejes perpendiculares al primero. Debido a la no ortogonalidad del dispositivo se pueden tener entonces medidas que no coincidan con la realidad. Se modela esta no idealidad considerando la siguiente relación entre la aceleración medida en cada eje de sensibilidad del acelerómetro y la aceleración medida en un sistema solidario a la plataforma:

$$\mathbf{a}^p = T_a^p \mathbf{a}^a, \quad T_a^p = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{yz} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & 1 & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

- $\alpha_{ij}$  es la rotación del  $i$ -ésimo eje de sensibilidad del acelerómetro sobre el  $j$ -ésimo eje del sistema de la plataforma. Dichas rotaciones se ven representadas en la figura 7.1.
- $\mathbf{a}^a$  es el vector de aceleración medido por el acelerómetro.
- $\mathbf{a}^p$  es el vector de aceleración medido en el sistema solidario a la plataforma.

Estos parámetros son constantes ya que su origen es puramente de construcción y se puede asumir que las orientaciones se mantendrán durante la vida útil del sensor.

## Drift aleatorio y variación de las medidas con la temperatura

La salida del acelerómetro es una tensión que luego es convertida a un nivel digital gracias a un conversor AD. Asumiendo un modelo lineal, la relación entre la aceleración y la medida realizada se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{a}}^a = K_a \mathbf{a}^a + \mathbf{b}_a$$

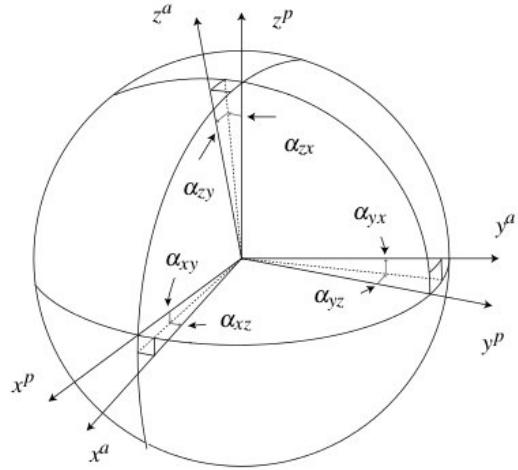


Figura 7.1: Rotaciones entre los ejes de la plataforma y del acelerómetro

donde  $K_a$  es una matriz diagonal que representa el factor de escala para convertir del valor digital a una aceleración correspondiente.  $\mathbf{b}_a$  no es otra cosa que un término independiente para corregir la posición del cero, que no necesariamente corresponde a la mitad de la escala digital. Estos dos parámetros poseen algunas de las fuentes de error que resulta más difícil de corregir. Resulta que dichos parámetros varían con la temperatura, por lo tanto se pueden observar algunas variaciones según la estación del año o el momento del día. A su vez, dichos parámetros poseen un drift aleatorio.

Podemos pensar estos parámetros como un valor estático más un valor relativamente pequeño que varía según estas descripciones. En una primera instancia intentaremos caracterizar los valores estáticos.

## Modelo del acelerómetro

A partir del análisis realizado se puede concluir que el modelo de acelerómetro que se considerará es el siguiente:

$$\tilde{\mathbf{a}}^a = K_a(T_a^p)^{-1}\mathbf{a}^p + \mathbf{b}_a$$

## 7.4. Procedimiento

### 7.4.1. Caracterización de las no idealidades variables

Previo a la calibración de los parámetros estáticos parece interesante estudiar una serie “larga” de muestras. En particular se tomará una hora de muestras a una tasa de muestreo de 50Hz. Estos datos serán útiles para la determinación de dos no idealidades:

- Ruido inherente
- Drift aleatorio

Además se realizará una medida variando la temperatura ambiente a fin de determinar la magnitud del Drift térmico.

### 7.4.2. Determinación de parámetros estáticos

Como se desprende de la sección anterior, para poder calibrar el acelerómetro se deben determinar 12 parámetros. Por dicho motivo, se precisan obtener al menos 12 ecuaciones diferentes. Típicamente se trabaja con el doble o triple de ecuaciones que de parámetros a determinar. Para mejorar los resultados se trabajará con 27 medidas donde cada una de ellas aporta 3 ecuaciones (una por cada eje), logrando un total de 81 ecuaciones, y se procederá a determinar los parámetros que minimizan el error cuadrático medio entre los valores efectivamente medidos y los valores teóricos.

#### Preparación

Para realizar una buena calibración es muy importante contar con una figura geométrica en forma de paralelepípedo de forma de poder solidarizar la IMU a dicho objeto. De esta forma nos aseguramos que no se introducen errores a la hora de orientar un eje en una dirección particular. Del mismo modo, es ideal disponer de una superficie perpendicular a la vertical y otra paralela, de modo que para rotar 90 grados la IMU, basta con rotar el paralelepípedo ese mismo ángulo, es decir, apoyar otra de las caras del mismo.

El prisma que se utilizó fue el cubo de lapacho que puede verse en la figura ??.

Los ángulos del mismo son prácticamente rectos difiriendo a lo sumo en medio grado.

Se construyó una plataforma de madera en forma de mesa con la tapa superior móvil, de modo que permite el giro sobre uno de sus lados (eje de giro). Se muestra en la figura ???. A su vez, es posible ajustar el dispositivo de forma de asegurar que dicho eje se encuentre en posición horizontal, por medio de 3 patas de altura regulable situadas en la parte inferior de la mesa. Para realizar las 27 medidas se irá modificando el ángulo de la tapa móvil de la plataforma y será medido con un semicírculo solidarizado a dicha tapa y un péndulo. En cada posición de la plataforma se tomarán medidas colocando el cubo en 3 posiciones distintas.

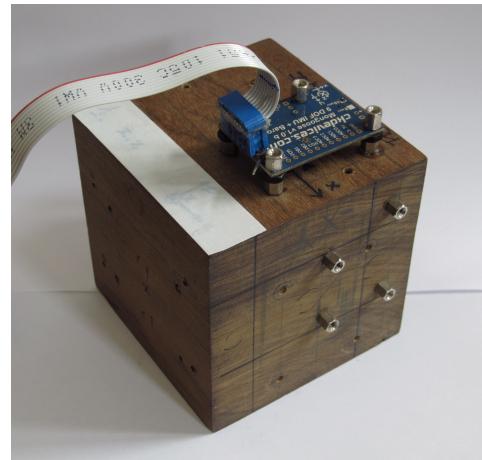


Figura 7.2: Cubo de lapacho

#### Medidas a realizar

En reposo el acelerómetro medirá una fuerza igual a  $g$  en la dirección vertical y en el sentido radial saliente de la Tierra. En cada uno de los ejes de sensibilidad del acelerómetro se medirá la proyección ortogonal de dicho vector gravedad sobre cada eje. De esta forma, con distintas orientaciones se obtendrá una descomposición distinta.

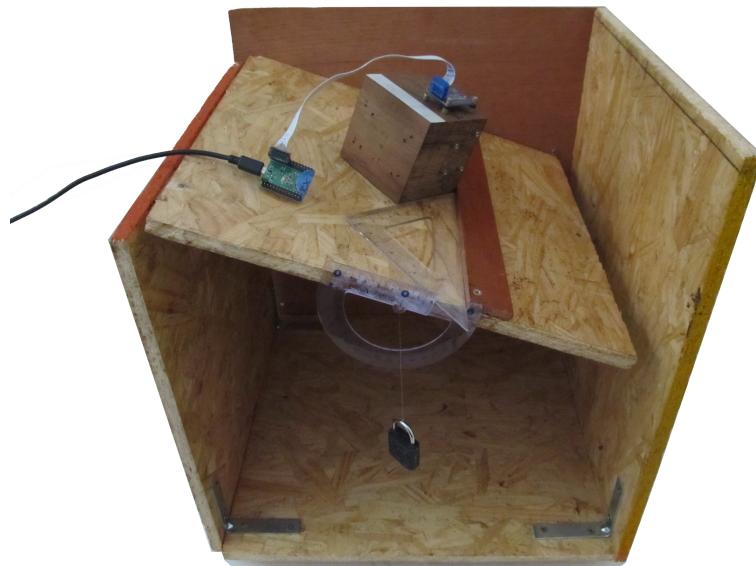


Figura 7.3: Mesa - Plano inclinado regulable

## 7.5. Resultados y análisis

### 7.5.1. Medida estática durante una hora

En la figura ?? pueden observarse los datos crudos obtenidos de las aceleraciones registradas en los tres ejes de la IMU durante un período de 1 hora.

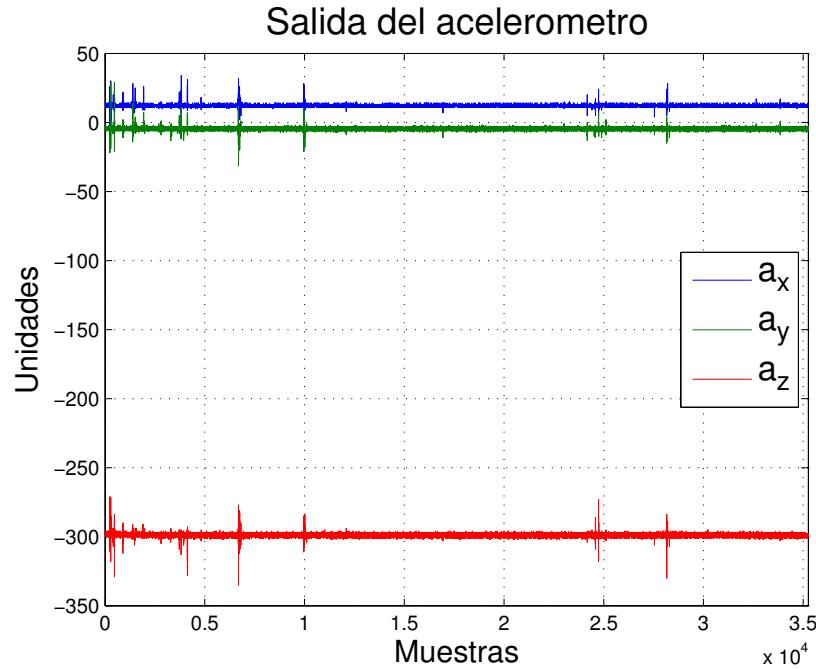


Figura 7.4: Aceleraciones y velocidades angulares registradas por la IMU orientada con el eje z verticalmente y en reposo

Se observa que dos medidas corresponden a un valor cercano a 0, mientras que la aceleración medida en z es cercana a -300. El eje z es el ubicado verticalmente hacia abajo, por lo tanto en dicha dirección se debería leer una medida equivalente a  $-g$ , mientras que en los otros dos ejes se debería leer un valor que corresponde

a aceleración cero. Más allá de estas consideraciones, que permiten simplemente demostrar cierta coherencia entre lo esperado y lo obtenido, podemos afirmar que el ruido observado es asociable a un ruido blanco de media nula. Por otra parte no parece haber una deriva en las medidas realizadas.

A partir de dichas constataciones se podrá afirmar que trabajar con el valor promedio de una tirada de medidas arrojará un resultado muy similar al que se obtendría trabajando con la tirada completa.

### 7.5.2. Medias estáticas para el acelerómetro

Como se aclaró en la sección anterior se trabajará con el promedio de las aceleraciones medidas en una serie de datos. Cada serie de datos es de 20 segundos de duración. Además de variar el ángulo ( $\theta$ ) de la mesa, se rotará el prisma de forma de realizar una medida con cada eje perpendicular al plano de la mesa. Asimismo utilizando una escuadra se lograrán rotaciones de  $45^\circ$  respecto del eje perpendicular a la tapa ( $\phi$ ). Los resultados obtenidos se presentan en la tabla ???. Se utiliza la siguiente notación para las orientaciones utilizadas:

- Orientación “z”
  - Eje “z” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia abajo.
  - Giro de la tapa de la mesa según el eje “x”.
- Orientación “y”
  - Eje “y” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia abajo.
  - Giro de la tapa de la mesa según el eje “-z”.
- Orientación “x”
  - Eje “x” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia arriba.
  - Giro de la tapa de la mesa según el eje “y”.

El tercer eje se deduce sabiendo que la base es directa. La aceleración medida es un número sin unidades.

Posición		Orientación z		Orientación x Aceleraciones		Orientación y	
$\theta(^{\circ})$	$\phi(^{\circ})$	Medida	Teórica ( $m s^{-2}$ )	Medida	Teórica ( $m s^{-2}$ )	Medida	Teórica ( $m s^{-2}$ )
0	0	16.18138; 0.3579454; -296.1701	0; 0; - 9.81	276.9511; -0.3572594; -46.29364	9.81; 0; 0	13.39179; -266.4408; -44.0221	0; -9.81; 0
10	0	16.27273; -49.02392; -292.201	0; 1.7035; -9.661	272.6542; -0.045677; 0.5318108	9.661; 0; 1.7035	61.69231; -262.3715; -44.1195	1.7035; -9.661; 0
10	45	-14.74318; -35.02247; -292.0225	-1.2045; -1.2045; -9.661	272.8368; -33.2294; -12.55412	9.661; -1.2045; 1.2045	48.10742; -262.3444; -11.9763	1.2045; -9.661; 1.2045
20	0	16.74718; -94.71498; -279.7955	0; 3.3552; -9.2184	260.3108; -0.01932367; 43.84863	9.2184; 0; 3.3552	107.4279; -251.4245; -44.0647	3.3552; -9.2184; 0
20	45	-48.512; -66.7136; -278.9184	-2.3725; -2.3725; -9.2184	260.2182; -65.37851; 18.87273	9.2184; -2.3725; 2.3725	79.13748; -251.2897; 19.3682	2.3725; -9.2184; 2.3725
30	0	16.37318; -136.5687; -259.0533	0; 4.905; -8.4957	242.0839; 0.004746835; 85.09968	8.4957; 0; 4.905	149.6053; -229.7778; -42.7181	4.905; -8.4957; 0
30	45	-76.82085; -96.91368; -259.6808	-3.4684; -3.4684; -8.4957	242.3039; -95.85131; 48.34477	8.4957; -3.4684; 3.4684	109.3377; -230.7721; 48.941	3.4684; -8.4957; 3.4684
45	0	15.07717; -190.8315; -220.3402	0; 6.9367; -6.9367	198.5261; 0.07394958; 136.558	6.9367; 0; 6.9367	200.7626; -189.0423; -42.6423	6.9367; -6.9367; 0
45	45	-117.0878; -134.7984; -219.9024	-4.905; - 4.905; - 6.9367	198.4038; -133.7997; 84.62754	6.9367; -4.905; 4.905	145.8022; -188.9018; 85.0561	4.905; -6.9367; 4.905

Cuadro 7.1: Aceleraciones medidas y aceleraciones teóricas en los tres ejes de la plataforma

Para la calibración se consideran solamente 24 de las 27 medidas realizadas a fin. Esto es útil ya que se tienen 3 medidas que no serán tenidas en cuenta en la calibración para realizar una verificación de qué tan buena es la calibración obtenida.

El problema de calibración consiste en encontrar el vector de parámetros  $\theta$  que mejor ajusta las medidas obtenidas a los valores teóricos de aceleración. El vector  $\theta$  se compone de los elementos de la diagonal de la matriz  $K_a$ , de los elementos de  $b_a$  y de los  $\alpha_{ij}$  de la matriz  $T_a^p$ . Es decir:

$$\theta = [k_{ax}, k_{ay}, k_{az}, b_{ax}, b_{ay}, b_{az}, \alpha_{yz}, \alpha_{zy}, \alpha_{xz}, \alpha_{zx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}]$$

Como criterio de ajuste se decide minimizar la suma de los cuadrados de las diferencia entre la aceleración teórica y la aceleración medida. Dicho problema se puede expresar matemáticamente como:

$$\theta : \min \left\{ \sum_{i=1}^M \| \tilde{\mathbf{a}}_i^p - T_a^p K_a^{-1} (\tilde{\mathbf{a}}_i^a - \mathbf{b}_a) \| \right\}$$

donde M es la cantidad de medidas realizadas,  $\tilde{\mathbf{a}}_i^p$  los valores de aceleración teóricos en cada eje de la plataforma según la posición y orientación de la IMU y  $\tilde{\mathbf{a}}_i^a$  los valores obtenidos de la IMU. Las relaciones entre los parámetros a determinar **no** es lineal, por lo tanto se utilizará para su determinación un algoritmo de mínimos cuadrados no lineales. *Matlab* provee un algoritmo con dicho fin: *lsqnonlin*. El algoritmo precisa además una semilla para comenzar, dicha semilla debe ser bien elegida de forma de que el mínimo encontrado por el algoritmo sea el deseado. Sucede que dicho algoritmo encuentra mínimos locales. Si la semilla proporcionada se encuentra muy lejos de la solución que en realidad interesa, se puede obtener una solución que no sirva.

El rango de aceleraciones manejado en la prueba es de  $\pm 16g$ . Según la hoja de datos del acelerómetro, se tiene una ganancia de  $3.9mg/LDB$ . La ganancia debe ser entonces  $\frac{1}{g \times 3.9 \times 10^{-3}} = 26,1376$  para los tres ejes. La IMU expresa las aceleraciones

obtenidas en complemento a2, por lo que una aceleración de 0 equivale a una lectura de 0. Finalmente, los ángulos se suponen pequeños, por lo tanto una semilla válida parece ser:

$$\theta_0 = \left[ \frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, \frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, \frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]$$

Los parámetros que minimizan la suma de los errores al cuadrado son los siguientes:

$$\theta = [26,9553 \quad 27,1044 \quad 25,9160 \quad 13,0717 \quad -1,0795 \quad -40,7236 \quad -0,0095 \quad 0,0096 \quad -0,0004 \quad 0,0068 \quad -0,0105 \quad -0,0046]$$

Luego de realizada la minimización se calcula la media del error cometido y la desviación estándar del error.

$$\mu = 6,88 \times 10^{-10} ms^{-2}$$

$$\sigma = 0,0397 ms^{-2}$$

La media del error cometido es completamente despreciable, por lo tanto podemos afirmar que el 95 % de las medidas de aceleración realizadas tendrán un error inferior  $2\sigma = 0,0794$ . Este error se integrará dos veces a la hora de obtener la posición del cuadricóptero, por lo tanto en el 95 % de los casos estaremos cometiendo un error inferior a los 5 metros al cabo de 10 segundos de navegación.

Para verificar la calibración realizada se utilizan las medidas siguientes:

- $\theta = 0 \quad \phi = 0 \quad$  orientación z
- $\theta = 20 \quad \phi = 0 \quad$  orientación x
- $\theta = 10 \quad \phi = 45 \quad$  orientación y

Se presenta para las tres medidas la aceleración teórica, la medida convertida con los parámetros obtenidos y el error en la tabla 7.1.

Medida	Aceleración medida ( $ms^{-2}$ )	Aceleración teórica( $m^{-2}$ )	Error( $ms^{-2}$ )
1	0.0217; 0.120; - 9.856	0.00;0.00;-9.810	0.0217; 0.120; - 0.0460
2	9.204;0.0136;3.359	9.218;0.00;3.355	-0.0140; 0.0136; 0.00400
3	1.218;- 9.647;1.167	1.204;- 9.660;1.205	0.0140; 0.0130 - 0.0380

Cuadro 7.2: Medidas de verificación

Si bien estos valores no son una buena muestra estadística, sirven como verificación ya que en la mayoría de los casos se obtiene un error inferior a  $\sigma$  y tenemos solamente un error superior a  $2\sigma$ .

### 7.5.3. Variación con la temperatura

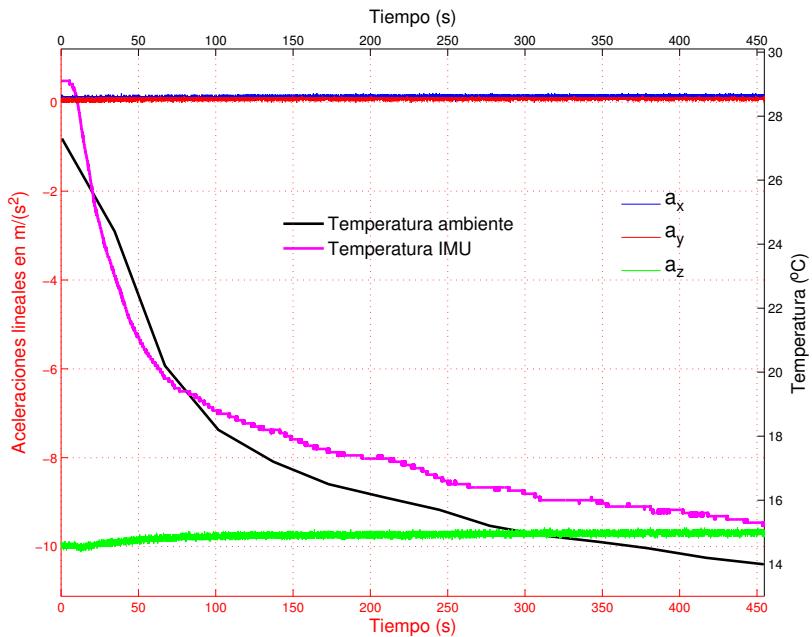


Figura 7.5: Variación de la medida del acelerómetro con la temperatura

### 7.5.4. Análisis de variación

A partir del análisis de los experimentos realizados es claro que la mínima variación existente en las señales procedentes de los acelerómetros es del orden de  $0,04m/s^2$ , tal como puede observarse en la siguiente gráfica:

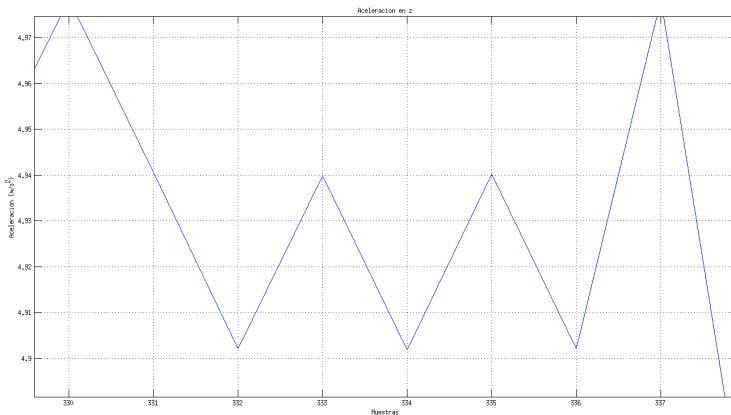


Figura 7.6: Variación de la medida del acelerómetro con la temperatura

Por otro lado, de los parámetros obtenidos de la calibración, se determina que  $\sigma = 0,0396798455378608$ , lo cual resulta coherente con el resultado anterior.

Finalmente, de la hoja de datos del acelerómetro se obtiene que el factor de escala para la señal es de  $3,9mg/LSB$ , lo cual nuevamente es coherente con los resultados obtenidos anteriormente.

De lo anterior puede concluirse que el procedimiento de calibración parecería ser correcto, obteniéndose valores similares para  $\sigma$  tanto en la teoría como en la realidad.

---

---

# CAPÍTULO 8

---

## CALIBRACIÓN DE GIRÓSCOPO

### 8.1. Objetivos

- Realizar una serie de pruebas con el fin de calibrar el giróscopo de tres ejes de la IMU.
- Estudiar, proponer y validar un modelo posible para dicha calibración.
- Estimar las fuentes de error del mismo (ruido y bias).

### 8.2. Materiales

- Mongoose 9Dof IMU de *Ckdevices*
- Beagleboard xM
- Adaptador Wi-Fi
- Tocadiscos
- Cronómetro
- Cubo perfecto de madera
- 2 escuadras de 45°
- 2 escuadras de 30°
- Madera de 4 cm de ancho con lados paralelos

### 8.3. Marco teórico

Para la calibración del giróscopo se utiliza el mismo modelo que se utilizó para el acelerómetro en la sección ??, se estudia las no idealidades que afectan la lectura de los valores de velocidad angular registrados en el dispositivo y se validan los resultados obtenidos. Las no idealidades a considerar basados en lo desarrollado por [?] son:

- Ruido inherente
- Relación entre aceleración real y lectura del acelerómetro no lineal.
- No ortogonalidad de los ejes
- Drift aleatorio
- Variación de las medidas con la temperatura

El modelo para la calibración del giróscopo, como puede verse con más detalle en el capítulo ??, es:

$$\tilde{\mathbf{w}}^a = K_w(T_a^p)^{-1}\mathbf{w}^p + b_w$$

con  $K_w$  matriz diagonal que representa el factor de escala para convertir del valor digital a la aceleración correspondiente,  $\mathbf{b}_w$  un término independiente para corregir la posición del cero y  $T_a^p$  una matriz que corrige la no perpendicularidad perfecta de los ejes:

$$T_a^p = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{yz} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & 1 & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

A su vez, estos parámetros varían con la temperatura, lo cual puede introducir errores significativos dependiendo del estado del tiempo, la estación del año, o la hora del día

## 8.4. Procedimiento

### 8.4.1. Caracterización de las no idealidades variables

Para obtener más información sobre el *ruido inherente* y el *drift aleatorio* se toman datos durante una hora a una frecuencia de 50 Hz con el dispositivo quieto.

### 8.4.2. Determinación de parámetros estáticos

Para poder realizar la calibración pertinente es necesario determinar 12 parámetros: las ganancias y bias de los 3 ejes y los 6 ángulos de la matriz  $T_a^p$ . Para determinar dichos parámetros es conveniente obtener el doble o triple de medidas que de parámetros. Las medidas a realizar son las siguientes:

Eje de giro principal	Eje de giro secundario	Ángulo de giro
x	z	0
x	z	30
x	z	45
y	x	0
y	x	30
y	x	45
z	y	0
z	y	30
z	y	45

Cuadro 8.1: Configuraciones utilizadas para calibrar el giróscopo

Con un total de 9 configuraciones diferentes, donde cada una de ellas aporta 3 medidas (una por cada eje), se utilizarán un total de 27 medidas para determinar los 12 parámetros involucrados.

## Preparación

Las medidas consisten básicamente en dejar la IMU girar a la velocidad del tocadiscos en las posiciones listadas en la tabla 8.1.

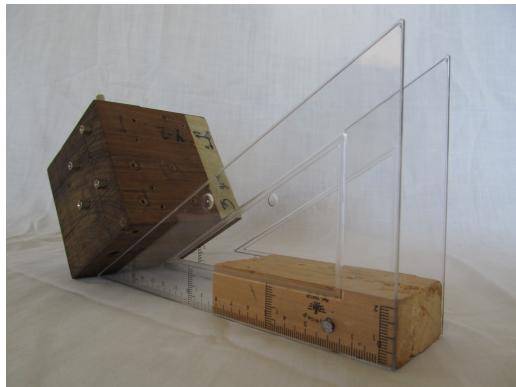


Figura 8.1: Escuadras

La dirección de giro principal es la dirección de giro del tocadiscos cuando no hay giro en la dirección secundaria. Con el cubo de madera se resuelven las rotaciones de 90 grados para alinear los diferentes ejes de la IMU con el eje de giro del tocadiscos. Los giros en el eje secundario se realizan utilizando las escuadras y la madera de 4 cm de ancho y lados paralelos, como se muestra en la figura 8.1. Apoyando el cubo sobre la escuadra se logran los ángulos de  $30^\circ$  y  $45^\circ$  deseados en las direcciones de giro secundarias.

figura 8.1. Apoyando el cubo sobre la escuadra se logran los ángulos de  $30^\circ$  y  $45^\circ$  deseados en las direcciones de giro secundarias.

Si bien la velocidad de giro estándar del tocadiscos es 33.3 rpm, resulta conveniente medir la velocidad del tocadiscos para corroborarla. Se mide la velocidad con el dispositivo IR y se verifica el buen funcionamiento del tocadiscos.

Un esquema completo de la configuración utilizada para la calibración del giróscopo se puede ver en la figura 8.2.



Figura 8.2: Tocadiscos

## 8.5. Resultados y análisis

### 8.5.1. Medias estáticas para el giróscopo

Se pone el tocadiscos a girar y mediante la conexión Wi-Fi se indica a la *BeagleBoard xM* que empiece y termine de logear los datos. Se trabaja con el promedio de las velocidades angulares obtenidas en series de datos de 20 segundos controlados por cronómetro. La velocidad del tocadiscos permanece constante en todas las pruebas y lo que se varía es el ángulo del plano donde se apoya el cubo, haciendo uso de las escuadras (figura 8.1).

La IMU arroja datos enteros en complemento A2 convertidos a *grados/segundo*. Dicha conversión se hace internamente a la IMU utilizando la siguiente ganancia asegurada en la hoja de datos:  $14,375 \text{ LDB}/(\text{°}/\text{s})$ .

Al igual que con la calibración del acelerómetro (capítulo ??), se utiliza la función *lsqnonlin* de *Matlab* para ajustar las medidas obtenidas contra los valores teóricos para cada configuración. Dado que las medidas ya vienen expresadas en  $(\text{°}/\text{s})$  y previamente pre-calibradas internamente a la IMU, se afirma que una buena semilla para las ganancias en los 3 ejes es el vector  $G = [1; 1; 1]$ . A su vez se supone que cada offset de cada eje será cercano a 0. Además suponiendo que los ángulos de no-ortogonalidad de los ejes es despreciable, se llega a que una buena semilla para la función *lsqnonlin* es la siguiente:

$$\theta_0 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Los parámetros que minimizan la suma de los errores al cuadrado son los siguientes:

$$\theta = [0,9900,9670,987 - 0,0792 - 0,0442 - 0,01250,006100,03280,0005220,0227 - 0,02180,0543]$$

Es interesante destacar que el vector  $\theta$  hallado es similar a la semilla propuesta, por lo que podemos afirmar que el mínimo local encontrado por la función *lsqnonlin* es el deseado.

Una buena medida de los resultados obtenidos se puede obtener al analizar el promedio de los errores cometidos ( $\mu$ ) y la desviación estándar ( $\sigma$ ):

$$\mu = -2,483 \times 10^{-11} \text{ } (\text{°}/\text{s}) \quad (8.1)$$

$$\sigma = 0,0276 \text{ } (\text{°}/\text{s}) \quad (8.2)$$

Como se mencionó anteriormente, en la hoja de datos del giróscopo se indica una ganancia de  $14,375 \text{ LDB}/(\text{°}/\text{s})$ , lo cual implica que un cambio en el bit menos significativo de la medida del giróscopo, se traduce en un cambio de:

$$r = 0,0696 \text{ } (\text{°}/\text{s}) \quad (8.3)$$

Es interesante comprar la resolución del instrumento ( $r$ ) con la desviación estándar obtenida. Se obtiene que la desviación estándar es 2 veces y media más chica que la resolución del instrumento, llegando a un resultado absurdo. Lo que sucede es que la desviación estándar fue calculada en base a las medidas tomadas para calibrar, por lo cual carece de sentido ya que la función *lsqnonlin* minimiza el error cuadrático medio de esas medidas. Para obtener una desviación estándar válida se deben realizar otras medidas distintas y basarse en ellas para hallar la desviación estándar.

### 8.5.2. Análisis de Resolución

Se analizan los resultados obtenidos para una configuración en particular: girando según “z” a la velocidad del tocadiscos ( $200^{\circ}/s$ ), a modo de ejemplo. Se obtiene la gráfica mostrada en la figura 8.3

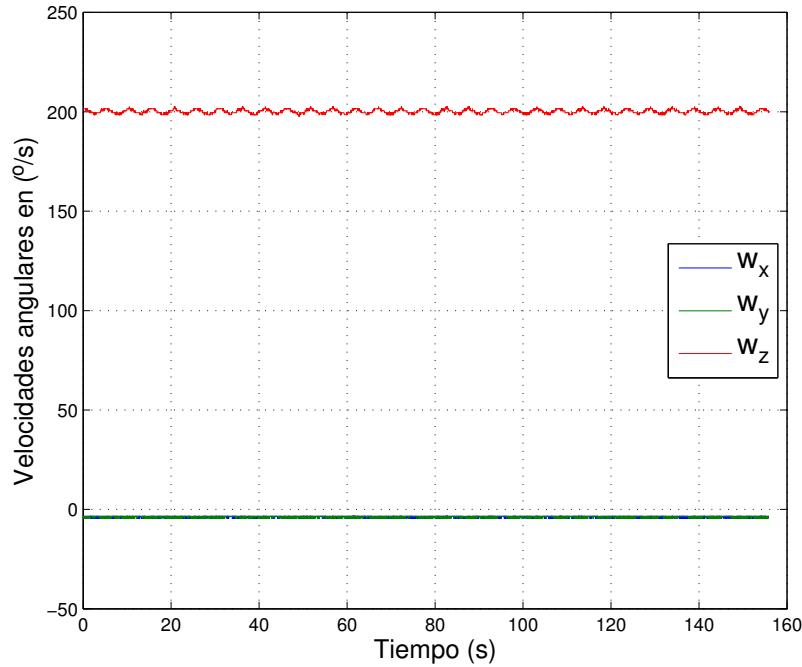


Figura 8.3: Resultados luego de calibrar

Se puede ver a simple vista que los resultados obtenidos son muy similares a los esperados, obteniendo los siguientes valores promedio:

Aceleración angular ( $^{\circ}/s$ )		
x	y	z
-3.80	-3.65	200.16

Cuadro 8.2: Resultados ejemplo luego de la calibración

Es posible notar una oscilación sobre todo en la medida de  $w_z$ . Dicha oscilación se da a 45 rpm aproximadamente. Si bien no se tiene certeza de su procedencia, es probable que provenga del propio tocadiscos. El mismo posee la posibilidad de girar a 2 velocidades distintas, 33.33rpm (la utilizada) y 45 rpm. Es viable pensar que dentro del tocadiscos hay un solo motor que gira a 45 rpm y se logran los 33.33 rpm mediante una reducción mecánica. De alguna manera el motor podría estar introduciendo una oscilación a su velocidad de giro.

Realizando un acercamiento a la velocidad angular obtenida en el eje “z” es posible divisar algunos fenómenos interesantes. Analizando la figura 8.4 se pueden divisar 2 saltos distintos, como si se contara con 2 resoluciones distintas.

Uno de ellos, el más grande, es de aproximadamente  $1^{\circ}/s$ , mientras que el otro, que se observa en el acercamiento realizado en dicha figura, es de aproximadamente

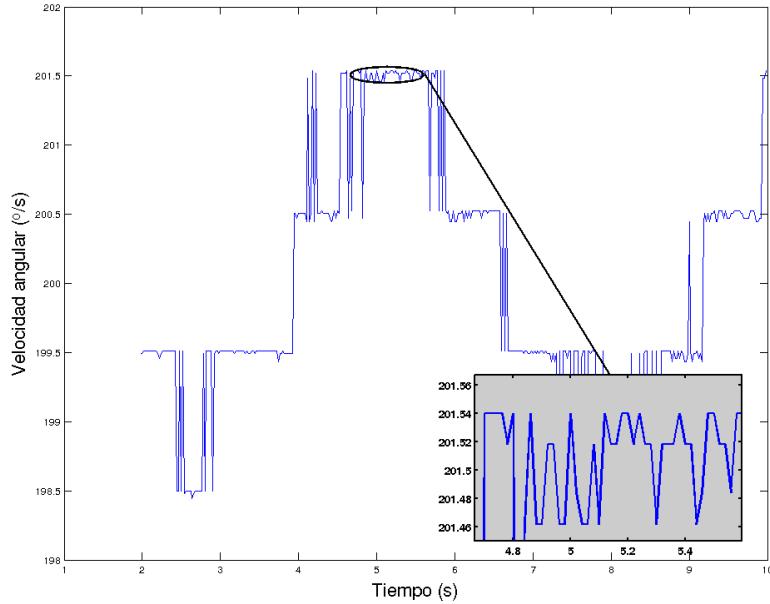


Figura 8.4: Acercamiento de los resultados luego de calibrar

$0,05^{\circ}/s$ . Éste último es comparable con el valor hallado de la desviación estándar por lo que puede pensarse como una verificación de la coherencia de los datos obtenidos y calibrados. Por otra parte, los saltos de  $1^{\circ}/s$  no parecen tener, a priori, un sentido claro. Analizando el código que corre internamente en la IMU se detectó el causante de dichos saltos. Resulta que a la hora de enviar los datos, la imu realiza un *cast* de los valores expresados en punto flotante a entero, lo cual se traduce en una pérdida aberrante de la resolución del instrumento de medida. Es evidente que el código será retocado para evitar esta pérdida de información en el futuro. Por otro lado es importante destacar que este error no afecta al proceso de calibración realizado, ya que se tomaron medidas de velocidades angulares constantes durante todo el tiempo de muestreo y se realizó un promedio de cada tirada, logrando valores más robustos ante dicho fenómeno.

---

---

# CAPÍTULO 9

---

## MAGNETÓMETRO

### 9.1. Objetivos

El objetivo de estas pruebas es comprender y caracterizar el magnetómetro de 3 ejes Honeywell HMC5583, incorporado para asistir en la determinación de la orientación absoluta del cuadricóptero.

### 9.2. Materiales

- Mesa de madera de 1.5m de largo.
- Laptop.
- Hilo y clavos.
- Mesa nivelable.
- Cubo de lapacho
- IMU “Mongoose” de CKDevices, con un HMC5583.
- Foto satelital, con información sobre coordenadas.
- Mesa nivelable, con una superficie que se pueda inclinar en ángulos conocidos.
- Escuadra

## 9.3. Procedimiento

El modelo adoptado para relacionar las medidas de campo magnético sin calibrar con las medidas calibradas es idéntico al utilizado a la hora de calibrar el acelerómetro y el giróscopo. Se trata de realizar una transformación lineal de las medidas obtenidas para transformarlas en los valores de campo magnético. Se propone un modelo de la forma:

$$\mathbf{C}^P = K_m(\tilde{\mathbf{C}}^m - \mathbf{b}_m)$$

Se proponen dos métodos de calibración. En primer lugar se toman medidas de campo magnético con la plataforma alineada en una dirección conocida, sobre una mesa nivelada (de forma que se encuentre paralela a la superficie de la Tierra). Se toman las medidas del campo magnético variando el ángulo de la mesa y rotando la plataforma ángulos conocidos. Finalmente realizando una minimización por mínimos cuadrados se determinan los parámetros de interés.

Por otra parte, se toma una serie de medidas de campo magnético terrestre en la mayor cantidad de orientaciones posibles. Para asegurar la calidad de los datos es recomendable tomar medidas distribuidas uniformemente en todas las direcciones. Dado que el campo es constante, la gráfica de las medidas anteriores debería resultar en una esfera con centro en el origen de radio igual al módulo del campo magnético de la Tierra. Al no tener un sensor calibrado el resultado será un elipsoide. Se utilizó un algoritmo desarrollado por *Alain Barraud* para realizar la calibración, dicho algoritmo no es otra cosa que la implementación de la minimización presente en el método propuesto por [??](#). El resultado que se obtiene es la matriz y el vector que hacen que las medidas tomadas aproximen una esfera de centro el origen.

Una vez calibrado el sensor se procede a verificar la exactitud que ofrece el mismo para determinar la orientación de la plataforma. Con dicho objetivo Cabe aclarar que el Norte magnético no se corresponde con el Norte geográfico en toda la Tierra, sino que por el contrario (dependiendo de la región del mundo) presenta una declinación. Es decir que tenemos una componente del campo magnético en la dirección Oeste-Este además de la componente Sur-Norte. La declinación es diferente en cada punto de la Tierra. En particular en Uruguay la misma es de  $-9,74^\circ$  según la convención mundial, es decir que el Norte magnético se encuentra  $9,74^\circ$  al Oeste del Norte geográfico.

## 9.4. Resultados y Análisis

### 9.4.1. Calibración con el primer método

Con el primer método propuesto se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\bullet K_m = \begin{pmatrix} 7,24 \times 10^{-4} & -2,79 \times 10^{-5} & -2,63 \times 10^{-5} \\ 8,03 \times 10^{-5} & 7,23 \times 10^{-4} & 1,89 \times 10^{-5} \\ 6,19 \times 10^{-5} & -5,07 \times 10^{-5} & 7,80 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{b}_m = \begin{pmatrix} 32,990198627287 \\ -120,1211527671 \\ 4,6285537022096 \end{pmatrix}$$

- Error promedio:  $\mu = -1,07 \times 10^8 G$

- Desviación estándar:  $\sigma = 0,014G$

Si bien el error promedio parece aceptable la desviación estándar no lo es. El valor del campo magnético en Uruguay en la dirección Norte es de  $0,175G$ . La desviación estándar corresponde al 8 % del valor del campo magnético. En las demás direcciones el error cometido será aún mayor.

#### 9.4.2. Calibración con el segundo método

Con el segundo método de calibración se obtienen los siguientes parámetros:

- $K_m = \begin{pmatrix} 4,73 \times 10^{-3} & -2,19 \times 10^{-5} & 3,09 \times 10^{-4} \\ 0 & 4,55 \times 10^{-3} & 7,83 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 5,35 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$
- $b_m = \begin{pmatrix} 23,32 \\ -126,62 \\ 19,04 \end{pmatrix}$

#### 9.4.3. Primera Comparación entre los métodos

En la figura 9.1a se observan graficadas las medidas de campo magnético con el sensor descalibrado en los ejes solidarios a la plataforma. Como era de esperarse en la medida con el sensor descalibrado no se obtiene una esfera, esto se debe a que las ganancias en cada eje no son las adecuadas. Por otra parte los ejes principales tampoco son colineales con  $X_q$ ,  $Y_q$  y  $Z_q$ . Debido a los *offset* en cada dirección el centro del elipsoide no concuerda con el origen. En la figura 9.1b tenemos las medidas de campo magnético con el sensor calibrado con el segundo método de calibración propuesto. En primer lugar es interesante destacar que se tiene una esfera centrada en el origen, por lo tanto la calibración puede calificarse de exitosa. La magnitud que medimos luego del proceso de calibración se encuentra normalizada. Dado que utilizaremos dicho sensor para determinar una orientación, nos interesan simplemente las relaciones entre las componentes medidas en cada eje del sensor, por lo tanto trabajar con las medidas normalizadas arroja el mismo resultado que trabajar con las medidas de campo en Teslas o Gauss.

En la figura 9.1c se transformaron las medidas utilizadas para realizar el segundo método de calibración utilizando los parámetros obtenidos gracias al primer método. Luego se normalizó el resultado obtenido a fin de poder compararlo con el resultado obtenido gracias al segundo método de calibración. Gráficamente no resulta evidente extraer una conclusión sobre cual de las dos medidas es más adecuada.

Con los datos convertidos se procede a realizar una minimización gracias a los mínimos cuadrados para obtener las coordenadas del centro de cada esfera y su radio.

Para el primer método de calibración utilizado se encuentra que:

- Centro de la esfera:  $C = (-3,86 \times 10^{-2}; -6,53 \times 10^{-3}; -5,99 \times 10^{-2})$

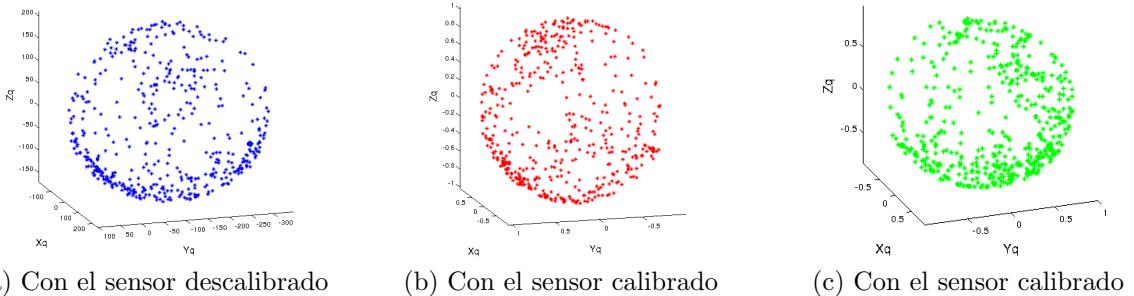


Figura 9.1: Medias de campo magnético Terrestre

- Radio de la esfera:  $R = 0,9389$
- Error promedio:  $\mu = -6,85 \times 10^{-4}$
- Desviación estándar de la medida del radio:  $\sigma = 3,55 \times 10^{-2}$

Para el segundo método de calibración utilizado se encuentra que:

- Centro de la esfera:  $(2,39 \times 10^{-3}; -2,63 \times 10^{-3}; -5,38 \times 10^{-4})$
- Radio de la esfera:  $0,9979$
- Error promedio:  $\mu = -3,00 \times 10^{-4}$
- Desviación estándar de la medida del radio:  $\sigma = 2,42 \times 10^{-2}$

Si bien la diferencia obtenida entre ambas calibraciones no es significativa en cuanto a los errores cometidos en el radio de las esferas, sí aparece una diferencia de un orden de magnitud en una de las coordenadas del centro de la esfera y de dos ordenes de magnitud en otro.

#### 9.4.4. Determinación de la orientación

Luego de calibrado el sensor se quiere determinar la capacidad que tiene el mismo de proporcionar una adecuada orientación. Con dicho fin se utiliza la tabla larga para alinear el sensor en una dirección en particular. La ubicación donde fue realizado el experimento se encuentra marcada aproximadamente con la marca roja en la figura 9.2. El objeto elegido para realizar la alineación es el que se muestra en la parte superior de la figura 9.2, su ubicación es la indicada por el “muñeco” en la figura 9.2.

Del mapa de la Intendencia de Montevideo <sup>1</sup> se obtienen las coordenadas de los puntos seleccionados. El punto en que fue realizado el experimento es el  $(576039, 6135625)$  y el punto con el cual se alineó es el  $(572118, 6136415)$ . El ángulo de la recta que une los dos puntos medido respecto del eje Sur-Norte es de  $78,6^\circ$  al Oeste.

Interesa determinar los tres ángulos de Euler ( $\theta$ ,  $\varphi$  y  $\psi$ ). En primer lugar se intenta utilizando exclusivamente el magnetómetro. En las tablas 9.2 se presentan

<sup>1</sup><http://sig.montevideo.gub.uy/mapas/mapa-principal>

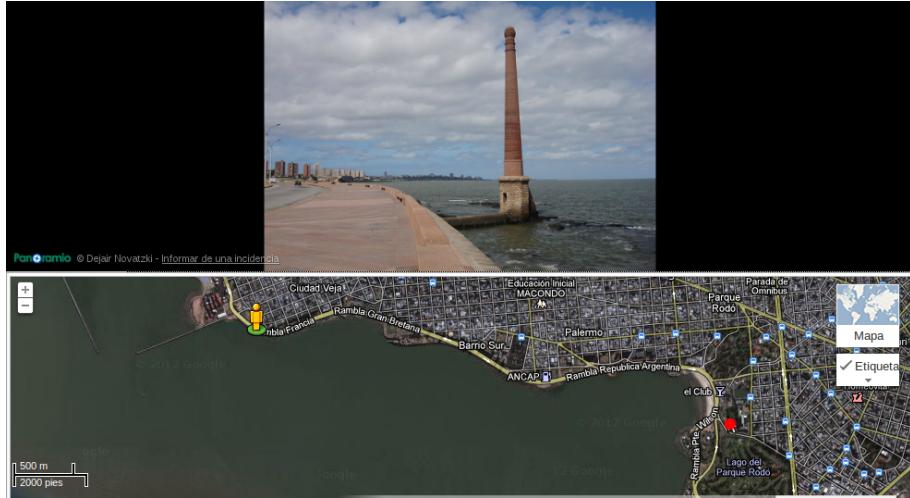


Figura 9.2: Mapa de la costa de Montevideo

los resultados obtenidos para cada método de calibración. En la tabla se observa claramente que los resultados difieren considerablemente de lo esperado. Se confirma que el magnetómetro por si solo, no es suficiente para determinar la orientación del cuadricóptero.

En reposo, los ángulos de pitch y roll, pueden determinarse fácilmente gracias a la medida de aceleración. Luego de determinados dichos ángulos se proyecta la lectura del campo magnético en la base  $S_1$  definida en ???. La orientación se calcula finalmente como:

$$\theta = \text{atan}(\vec{C}_{med} i_1 / \vec{C}_{med} j_1)$$

Donde  $C_{med}$  es el campo magnético medido luego de proyectado en la base  $S_1$ .

Los resultados obtenidos en este caso se presentan en la tabla ??.

En este caso los ángulos encontrados se asemejan en mayor medida a los resultados teóricos.

El error promedio obtenido con el primer método de calibración es  $\mu_1 = -61^\circ$ , la desviación estándar obtenida es  $\sigma_1 = 3,83^\circ$ , mientras que para el segundo método de calibración tenemos que  $\mu_2 = -7,10^\circ$ , la desviación estándar obtenida es  $\sigma_2 = 3,28^\circ$ .

Cabe aclarar que la exactitud de los resultados obtenidos para las seis primeras medidas en los ángulos de pitch y roll, se debe a un ajuste realizado para cubrirse frente a la situación de *gimbal lock*. El análisis del error cometido en la medida de los ángulos de pitch y roll puede encontrarse en el capítulo 7.

En ambos casos se obtiene un error promedio distinto de cero. Con cualquier método de ajuste que se elija se deberá restar a la medida realizada el error promedio. Lo más adecuado parece ser elegir el método que tiene una desviación estándar menor. Por dicho motivo volvemos a escoger el segundo método.

$\theta$		$\varphi$		$\psi$	
ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido
-90.20	16.17	-90.00	54.88	0.00	-54.23
-60.20	27.47	-90.00	43.92	0.00	-26.59
-45.20	31.96	-90.00	38.77	0.00	-13.86
-30.20	35.82	-90.00	33.57	0.00	-1.70
-0.20	43.41	-90.00	22.75	0.00	22.86
89.80	62.34	-90.00	-7.55	0.00	76.77
-90.20	-30.76	-0.00	-19.64	90.00	23.46
-60.20	-43.24	-0.00	-20.10	90.00	42.72
-45.20	-45.54	-0.00	-17.55	90.00	53.33
-30.20	-44.20	-0.00	-14.35	90.00	63.15
-0.20	-28.13	-0.00	-9.57	90.00	79.90
89.80	46.50	-0.00	0.62	90.00	61.21
179.80	24.61	-0.00	-11.21	180.00	84.50
-150.20	-3.43	-0.00	-9.98	180.00	84.68
-135.20	-18.96	-0.00	-9.27	180.00	85.06
-120.20	-33.05	-0.00	-8.56	180.00	85.22
-90.20	-63.76	-0.00	-6.57	180.00	85.84
-0.20	-156.62	-0.00	-15.41	180.00	77.69

Cuadro 9.1: Ángulos medidos con la primer calibración y teóricos en las distintas posiciones

$\theta$		$\varphi$		$\psi$	
ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido
-90.20	22.89	-90.00	62.86	0.00	-50.24
-60.20	34.83	-90.00	50.00	0.00	-22.52
-45.20	39.31	-90.00	44.14	0.00	-10.21
-30.20	43.11	-90.00	38.26	0.00	1.50
-0.20	50.58	-90.00	25.49	0.00	25.90
89.80	60.40	-90.00	-12.45	0.00	83.52
-90.20	-24.09	-0.00	-16.70	90.00	19.61
-60.20	-36.79	-0.00	-18.84	90.00	38.91
-45.20	-39.90	-0.00	-17.07	90.00	49.95
-30.20	-39.70	-0.00	-14.39	90.00	60.29
-0.20	-26.81	-0.00	-9.76	90.00	78.48
89.80	49.40	-0.00	-1.47	90.00	65.71
179.80	22.33	-0.00	-12.36	180.00	88.71
-150.20	-4.33	-0.00	-10.00	180.00	85.71
-135.20	-18.88	-0.00	-9.31	180.00	84.54
-120.20	-31.82	-0.00	-8.90	180.00	83.65
-90.20	-59.48	-0.00	-7.79	180.00	83.71
-0.20	-136.17	-0.00	0.59	180.00	84.91

Cuadro 9.2: Ángulos medidos con la segunda calibración y teóricos en las distintas posiciones

$\theta$		$\varphi$		$\psi$	
ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido
-101.39	-102.65	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-71.39	-72.79	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-56.39	-58.60	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-41.39	-44.64	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-11.39	-15.33	-90.00	-90.00	0.00	0.00
78.61	65.13	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-101.39	-100.11	-0.00	-2.21	90.00	92.22
-71.39	-75.67	-0.00	-1.86	90.00	92.02
-56.39	-63.05	-0.00	-1.72	90.00	91.97
-41.39	-50.65	-0.00	-1.63	90.00	91.96
-11.39	-23.03	-0.00	-1.55	90.00	92.24
78.61	70.92	-0.00	-1.41	90.00	93.40
168.61	165.02	-0.00	-0.11	180.00	-179.33
-161.39	-165.54	-0.00	-0.63	180.00	-179.59
-146.39	-149.33	-0.00	-0.73	180.00	-179.78
-131.39	-134.53	-0.00	-0.72	180.00	179.94
-101.39	-102.08	-0.00	-0.57	180.00	179.84
-11.39	-16.00	-0.00	-0.02	180.00	179.66

Cuadro 9.3: Ángulos medidos con la primer calibración y teóricos en las distintas posiciones, asistido por el acelerómetro

$\theta$		$\varphi$		$\psi$	
ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido	ángulo teórico	ángulo medido
-101.39	-110.21	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-71.39	-77.27	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-56.39	-62.03	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-41.39	-47.03	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-11.39	-14.40	-90.00	-90.00	0.00	0.00
78.61	73.61	-90.00	-90.00	0.00	0.00
-101.39	-108.27	-0.00	-2.21	90.00	92.22
-71.39	-80.63	-0.00	-1.86	90.00	92.02
-56.39	-66.41	-0.00	-1.72	90.00	91.97
-41.39	-52.67	-0.00	-1.63	90.00	91.96
-11.39	-23.42	-0.00	-1.55	90.00	92.24
78.61	66.18	-0.00	-1.41	90.00	93.40
168.61	165.14	-0.00	-0.11	180.00	-179.33
-161.39	-164.83	-0.00	-0.63	180.00	-179.59
-146.39	-149.40	-0.00	-0.73	180.00	-179.78
-131.39	-135.93	-0.00	-0.72	180.00	179.94
-101.39	-107.43	-0.00	-0.57	180.00	179.84
-11.39	-22.85	-0.00	-0.02	180.00	179.66

Cuadro 9.4: Ángulos medidos con la segunda calibración y teóricos en las distintas posiciones, asistido por el acelerómetro

---

# CAPÍTULO 10

---

## BARÓMETRO

Como instrumento para determinar la altura del cuadricóptero se pensaba utilizar un GPS. La frecuencia de muestreo del GPS y el error en los datos provenientes del mismo lo hacen insuficiente como medio para estimar la elevación del cuadricóptero. Esta fue la motivación para la incorporación de un barómetro.

Las características principales del GPS son:

- Permite obtener un valor para la altura absoluta, libre de bias, pero hace falta promediar muestras durante varios minutos antes de llegar a un dato confiable.
- La precisión del GPS es mala muy cerca del suelo, lo cual representa un problema al intentar despegar y/o aterrizar.

Se opta por incorporar un barómetro, ya que aparentemente dichos sensores padecen de *otros* problemas, y pueden complementar al GPS.

El sensor adquirido es un barómetro digital BOSCH BMP085. Permite medir presión absoluta, y, conociendo la presión y la temperatura a nivel del mar, permite calcular la altura absoluta.

Tiene varios modos de funcionamiento, habiendo un compromiso entre el consumo, la tasa de actualización, y la resolución.

### 10.1. Objetivos

El objetivo de estas pruebas es determinar como ha de usarse el barómetro BOSCH BMP085, incorporado para asistir en la determinación de la altura del cuadricóptero. Para ello se procede a caracterizar el sensor.

Se analizan las siguientes situaciones:

- Reposo: Se analizan períodos de distinta duración, para cumplir con distintos objetivos:
  - Decenas de minutos: Caracterizar el drift y el tiempo de *warm-up*.
  - Decenas de segundos: Caracterización del ruido de las medidas.
- Altura relativa: 3 experimentos variando el rango a analizar: Puntos que distan decenas de centímetros entre sí, 1m entre sí, y aproximadamente 5m entre sí.

## 10.2. Materiales

- Laptop.
- Tanza.
- Cinta métrica.
- Cubo de lapacho.
- IMU “Mongoose” de CKDevices (cuenta con un BMP085).

## 10.3. Consideraciones previas

El sensor de presión devuelve la presión absoluta. Si se conoce la presión y la temperatura a nivel del mar, es posible calcular la elevación.

A nivel de la tropósfera, la capa más baja de la atmósfera, se puede calcular la altura a partir de la presión atmosférica mediante la siguiente fórmula[?]:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{L \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g \cdot M}{R \cdot L}} \quad (10.1)$$

Donde:

- $p_0$ : Presión atmosférica estándar a nivel del mar - 101325 Pa.
- $L$  : Gradiente de temperatura<sup>1</sup> - 0.0065 K/m
- $T_0$ : Temperatura estándar a nivel del mar - 288.15 K
- $g$  : Constante de gravitación universal - 9.80665 m/s<sup>2</sup>
- $M$  : Masa molar del aire seco - 0.0289644 kg/mol
- $R$  : Constante universal de los gases - 8.31447 J/(mol·K)

---

<sup>1</sup>Tasa de incremento de la temperatura con la altura (es negativa).

## 10.4. Procedimiento

### 10.4.1. Drift y *warm-up*

En los datos tomados durante varios minutos, se observa lo que parecería ser un drift en las medidas obtenidas del barómetro. Se toman muestras durante 1 hora, con el barómetro quieto, comenzando con el circuito en frío<sup>2</sup>.

### 10.4.2. Caracterización del ruido

Es de interés caracterizar el ruido en los datos provenientes del barómetro. Si se trata de un proceso estacionario, y de ruido blanco, entonces, promediando se puede reducir el error.

Se analizan datos tomados durante diversos períodos de tiempo: 5 minutos, 2 minutos, 20 segundos y 15 segundos.

Se analiza la autocorrelación de las muestras, y se compara el ruido con los valores dados por la hoja de datos. La hoja de datos especifica ruido RMS típico para los distintos modos de funcionamiento.

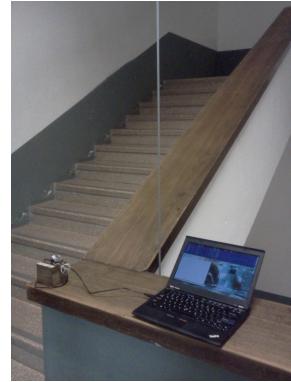
### 10.4.3. Medidas de altura absoluta

Para analizar la performance del barómetro como instrumento para determinar la elevación absoluta, se toman puntos de altura conocida, y se comparan las lecturas contra los datos conocidos.

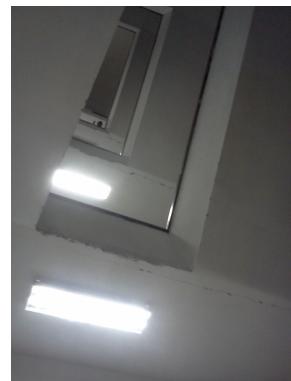
### 10.4.4. Distancias de varios metros

Se deja desplegada una cinta métrica en el vacío del centro de una escalera de 4 tramos en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. La cinta extendida cubre aproximadamente 25 metros. Se comparan las medidas dadas por el barómetro con las que se obtienen de la cinta.

Se utiliza una cinta de agrimensor, graduada cada 10 centímetros, para medir la distancia de un piso a otro. Luego se toman 1 minuto de datos en cada piso, recorriendo la escalera de un extremo a otro. Se repite este experimento 3 veces (se sube, se baja y se vuelve a subir) y luego se realiza un experimento similar, pero en lugar de detenerse a tomar muestras durante 1 minuto en cada piso, se apoya la IMU, se anota el tiempo (mediante software), y se sigue. La pausa en cada punto es menor a 2 segundos.



(a) Toma de datos.



(b) Vacío de la escalera.

<sup>2</sup>Habiendo estado apagado durante, por lo menos, los 30 minutos previos a la prueba.

#### 10.4.5. Distancias de un metro

Se toma una tanza de pesca resistente. Se realizan marcas cada un metro, en seis puntos distintos de la tanza. En un extremo de la tanza se ata el cubo de la pacho, con la *Mongoose* atornillada a él. Se lo deja descender desde la escalera del *IMERL*<sup>3</sup>. Se suelta tanza hasta que el cubo se apoya contra el piso, de forma que la primer marca en la cuerda se encuentre junto a quien está realizando las medidas. Se hace una pequeña marca sobre la baranda, en el punto que coincide con la primer marca de la cuerda. Se mide la presión durante un minuto. Luego se sube el cubo hasta que la marca en la baranda coincida con la segunda marca de la cuerda (y por lo tanto el cubo subió 1 metro).

Se vuelve a tomar la medida de presión.

Se repite el procedimiento hasta tener la medida de presión a 5 alturas distintas. Se repite el experimento dos veces. Luego se toma la medida de presión a nivel del suelo. Se toman medidas mientras se sube y se baja el barómetro dos veces, se vuelven a tomar medidas a nivel del suelo.

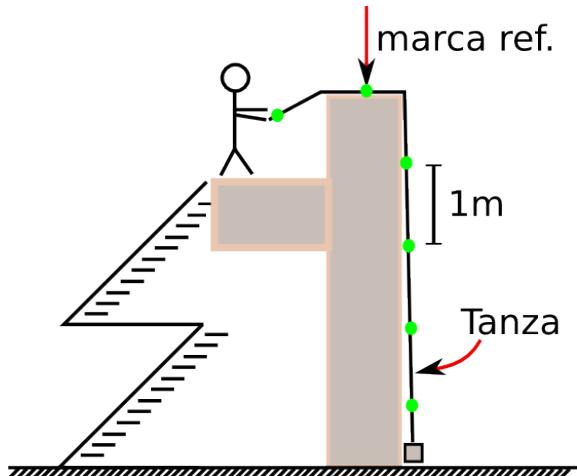


Figura 10.2: Esquema experimento usando distâncias de 1m.

#### 10.4.6. Distancias de decenas de centímetros

Se ubica el cubo de lapacho siempre en la misma orientación sobre cada uno de los estantes de una estantería. Se coloca el cubo sobre el primer estante. Se mide la altura desde el suelo a la cara del cubo sobre la cual se encuentra apoyada la IMU. Se mide la presión durante 8 minutos. Se mueve el cubo al estante siguiente. Se vuelve a medir la altura respecto del suelo con un metro y se mide la presión durante un minuto. Se repite el procedimiento para cada uno los cinco estantes que componen la estantería. Luego se repite el experimento, pero tomando solamente 5 segundos de datos por estante.

<sup>3</sup>Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia

## 10.5. Análisis y resultados

### 10.5.1. Drift y *warm-up*

Para observar si hay un drift y/o tiempo de *warm-up* significativo, se procede a tomar muestras durante 1 hora, habiendo estado el dispositivo desenchufado durante por lo menos media hora (el circuito arranca en frío).

Se repite este experimento varias veces. En las figuras 10.4 y 10.3 se observan los resultados característicos.

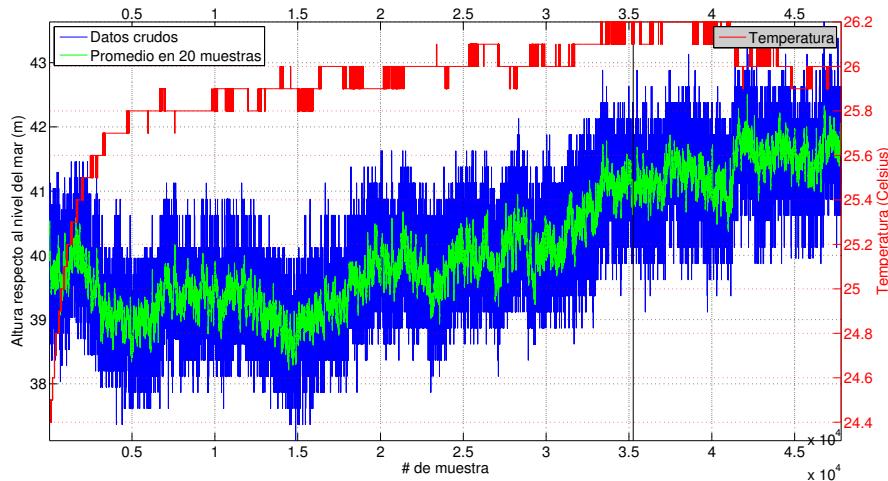


Figura 10.3: Muestras durante una hora, experimento #1.

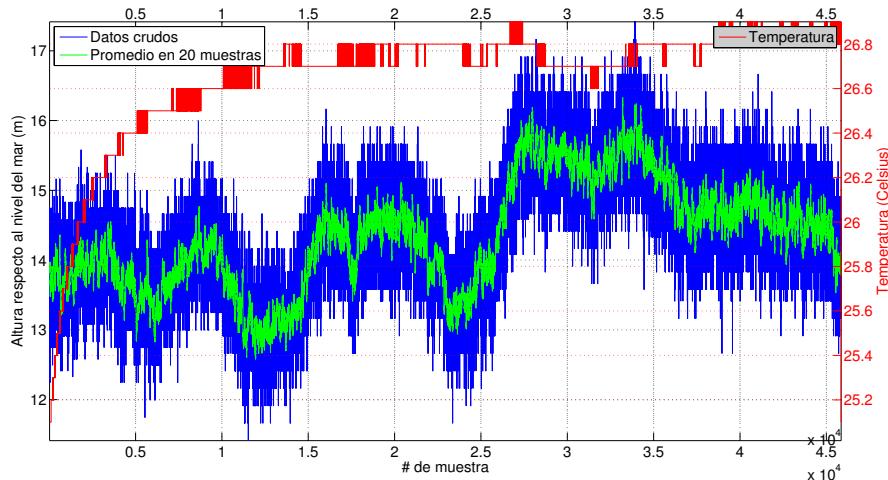


Figura 10.4: Muestras durante una hora, experimento #4.

Se observa que existe un tiempo de *warm-up* bastante extenso, pero con un rango pequeño. La temperatura tarda entre 15 y 45 minutos en estabilizarse, y en el proceso varía menos de 2°C. Las muestras del barómetro no parecen estar directamente correlacionadas con la temperatura.

El barómetro no parece ser adecuado para medir la elevación absoluta. En los datos de las figuras 10.3 y 10.4 se observan variaciones de hasta 3 metros en la estimación de la altura en un período de 1 hora. Sin embargo, el error en el corto plazo es significativamente menor que en el largo plazo, parece viable el uso del barómetro como estimador de la altura en el corto plazo. Esto se analiza más adelante.

### 10.5.2. Caracterización del ruido

En los logs de la sección 10.5.1, se observa que:

- El comportamiento del ruido en intervalos extensos no es estacionario.
- La mayoría de los saltos en la medida de la altura son de aproximadamente 25cm. Esto no es coherente con las especificaciones dan una resolución de 1Pa, que corresponden a una variación en altura de aproximadamente 8cm.

#### Estacionariedad

Analizando el ruido en intervalos más pequeños, donde el proceso se puede considerar estacionario, el comportamiento del ruido es muy similar al del ruido blanco.

En la figura 10.10 se observa la autocorrelación de la muestras tomadas del barómetro en intervalos de tiempo de 5 minutos, 2 minutos, y 15 segundos.

Cabe destacar que el ruido se puede considerar estacionario si se usan intervalos de tiempo menores a 15 segundos.

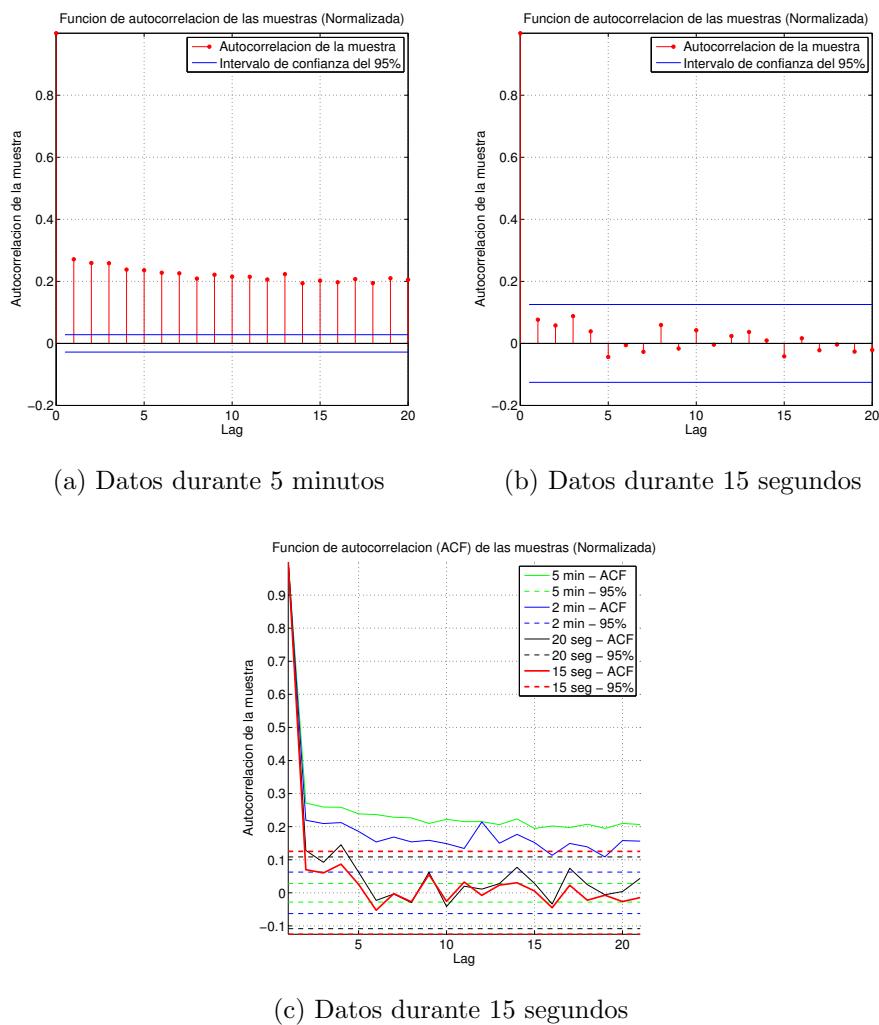


Figura 10.5: Autocorrelación de las muestras del barómetro.

## Modos de funcionamiento

El barómetro permite trabajar en varios modos. Básicamente, permite que se le exija más resolución, menos ruido, y a cambio aumenta el tiempo que tarda en tener un dato nuevo listo, y consume más energía. Esto lo logra promediando datos internamente. En la tabla 10.3 se compara el ruido RMS en los distintos modos, con lo que se lograría usándolo en el modo básico (sin promediar internamente) y promediando en el microprocesador.

Modo	Ruido RMS (m)		
	Microprocesador	Sensor	Especificaciones
0	0.52	0.52	0.50
1	0.37	0.45	0.40
2	0.25	0.37	0.30
3	0.63	0.35	0.25

Cuadro 10.1: Ruido RMS, 2 minutos de datos a 14Hz.

La resolución más atractiva parece ser la número 2, en la cual se promedian 4 datos. Se concluye que, si se dispone de procesador se optará por promediar datos en él, de lo contrario se usará el promedio calculado por el sensor.

## Resolución del instrumento

En la figura 10.6 se observa un histograma de las diferencias entre muestras sucesivas de los datos del barómetro. Se observa que la mayor parte de los datos saltan de a 25cm. Se esperaba una discretización en niveles de aproximadamente 8cm, correspondientes a variaciones de presión de 1Pa (la resolución del instrumento).

Puede resultar difícil ver que hay muestras en todos los bins, pero mirando con detalle se puede. Puede deberse a un problema de software, o la construcción del sensor en sí. Este problema no parece ser significativo.

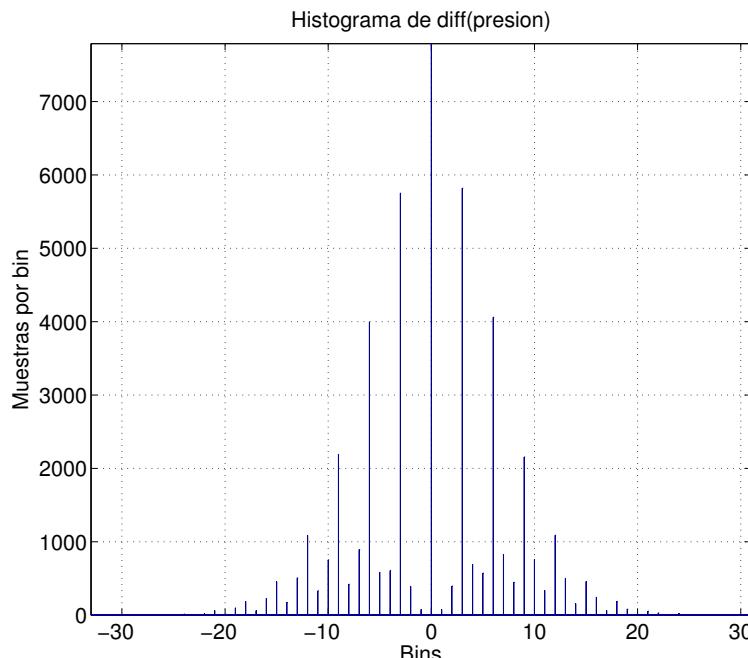


Figura 10.6: Histograma de las diferencias, experimento #4.

### 10.5.3. Altura absoluta

Las figuras 10.3 y 10.4 se corresponden a datos tomados a la misma altura, pero en días distintos. Cabe destacar que la diferencia entre ambas curvas llega es de aproximadamente 25 metros.

Se descarta la posibilidad de utilizar el barómetro para determinar la altura absoluta, ya que estando el barómetro a una altura fija, la elevación varía mucho de un día a otro, lo cual refleja una fuerte dependencia con factores externos, probablemente climáticos, que no interesa considerar.

### 10.5.4. Distancias de varios metros

En las siguientes figuras se observan los resultados del experimento. Las líneas verticales (en negro) representan el comienzo y el fin de la toma de datos en cada piso. No se hace una medida de la altura absoluta, se miden las distancias entre piso y piso (con la cinta métrica), y se usa como origen de coordenadas la altura dada por el promedio de algunas muestras al comienzo del experimento, ya sea en el piso de más arriba, o en el piso de más abajo (bajadas y subidas respectivamente). La coordenada Y de los segmentos en rojo que unen las rectas verticales representan la distancia entre el origen y el piso actual. Dicha distancia se mide con la cinta métrica.

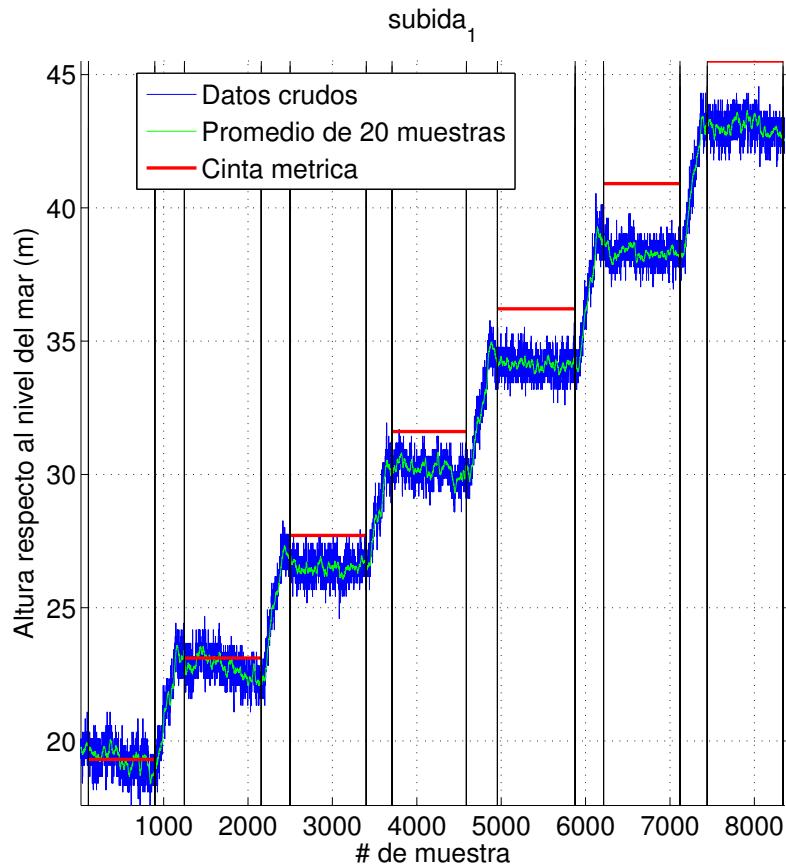


Figura 10.7: Subida #1.

En la figura 10.7 se observa que para cuando se termina de recorrer la escalera, el error acumulado se llega a los 3 metros.

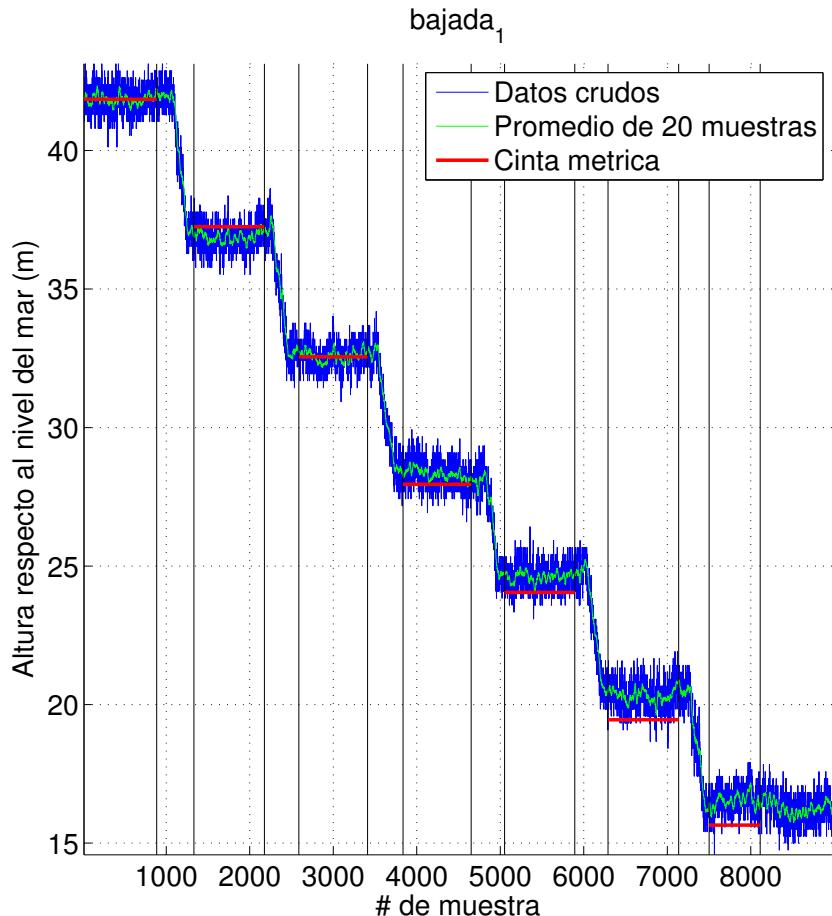


Figura 10.8: Bajada #1.

En la figura 10.8 se observan resultados mejores que en la figura 10.7. Se repite la subida, y se obtienen resultados similares a los de la figura 10.8, por este motivo no se incluye una figura de este último experimento.

Los errores en las medidas se analizan más adelante.

Cabe destacar que la performance en la figura 10.9 es muy similar a la que se obtuvo tomando muestras durante 1 minutos. Esto resulta alentador, ya que se pretende utilizar el barómetro para obtener medidas con una frecuencia mucho mayor 1Hz.

En la figura 10.10a se observa la evolución del error acumulado para 2 subidas<sup>4</sup>, 1 bajada y una bajada rápida.

El error en la determinación de la distancia entre un piso y el siguiente se observa en la figura 10.10b.

El error de la figura 10.10b es relativo a la altura de cada piso, que son de aproximadamente 4.3m. Analizando los números con cuidado, se llega a que el error es siempre menor al 10 %.

De las figuras 10.9 y 10.10a se desprende que utilizando promedios de 20 muestras<sup>5</sup>, se obtiene un error de aproximadamente 0.5m. El comportamiento del barómetro es aceptable, y se corresponde con las especificaciones de la hoja de datos.

<sup>4</sup>No se incluye una gráfica de la segunda subida, ya es muy similar, en cuanto al error, a la de la primera bajada, pero con un error del orden del de la primera bajada.

<sup>5</sup>Esta es la cantidad de muestras que se promediaron para determinar la altura cada vez en cada piso en el experimento “rápido”.

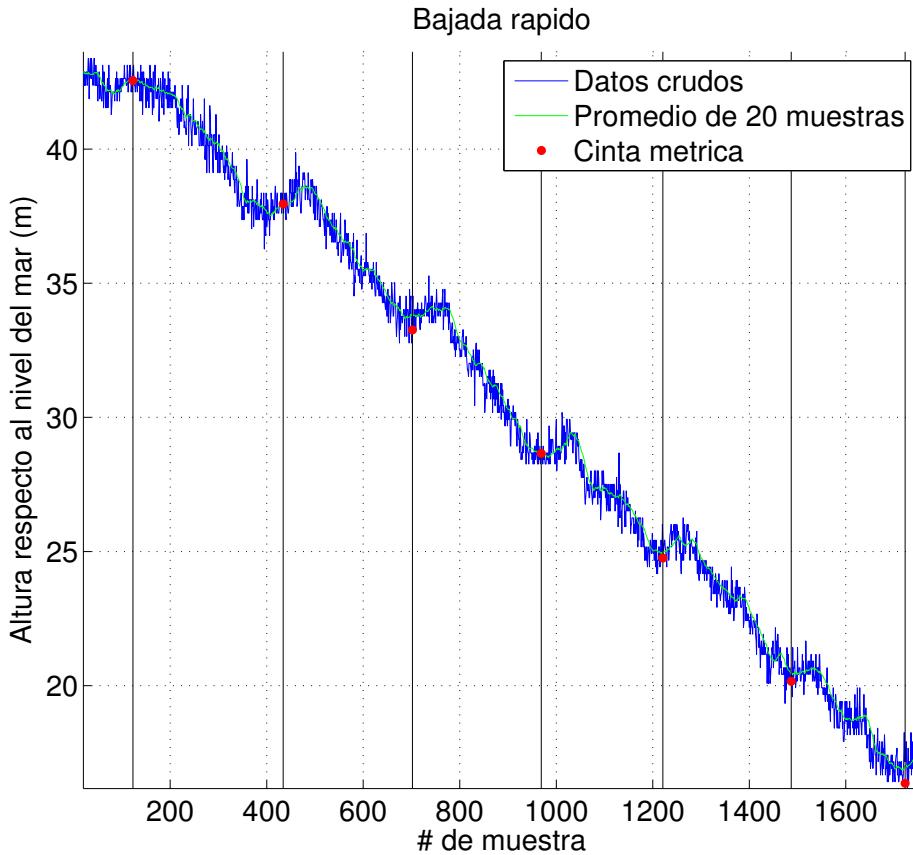


Figura 10.9: Bajada sin detenerse en cada piso.

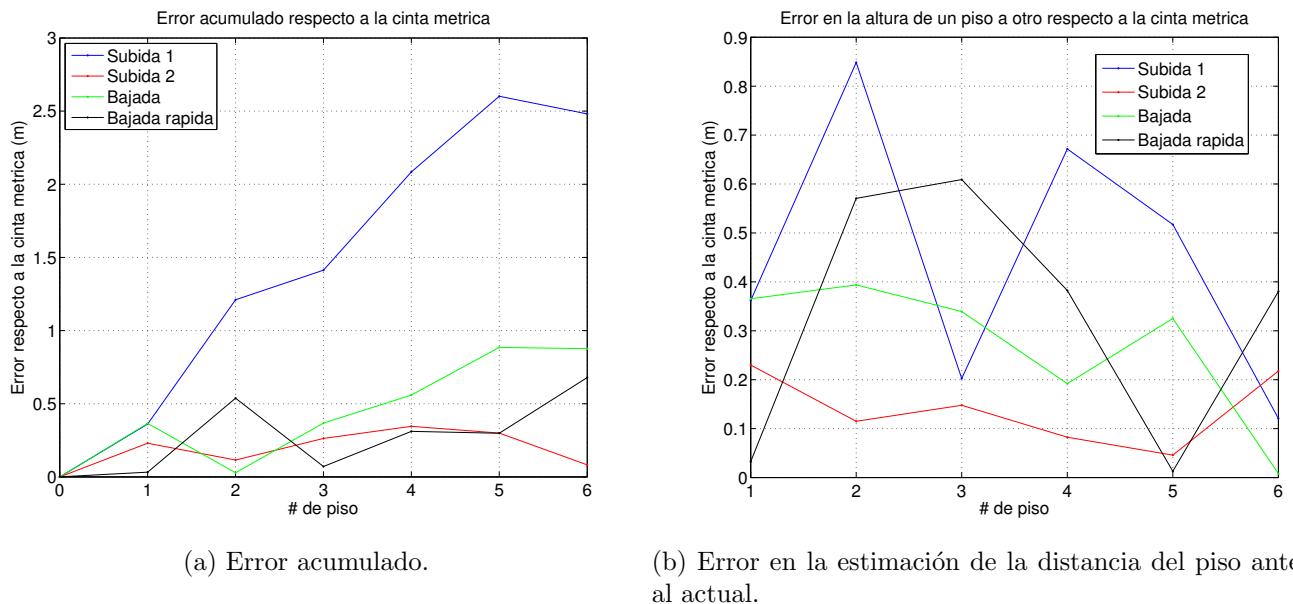


Figura 10.10: Evolución del error en distancias de varios metros.

### 10.5.5. Distancias de un metro

Las figuras 10.11a y 10.11b presentan las medidas obtenidas al realizar las medidas estáticas a alturas que difieren de un metro. La figura 10.13 muestra las medidas obtenidas durante el proceso de subir y bajar el barómetro. En las tres figuras se observan los datos obtenidos y la media móvil considerando 20 muestras.

Se aprecia que el comportamiento es acorde a lo esperado, corresponde a las acciones realizadas. Se analizan con mayor detenimiento los resultados para concluir que es lo que se puede esperar del barómetro.

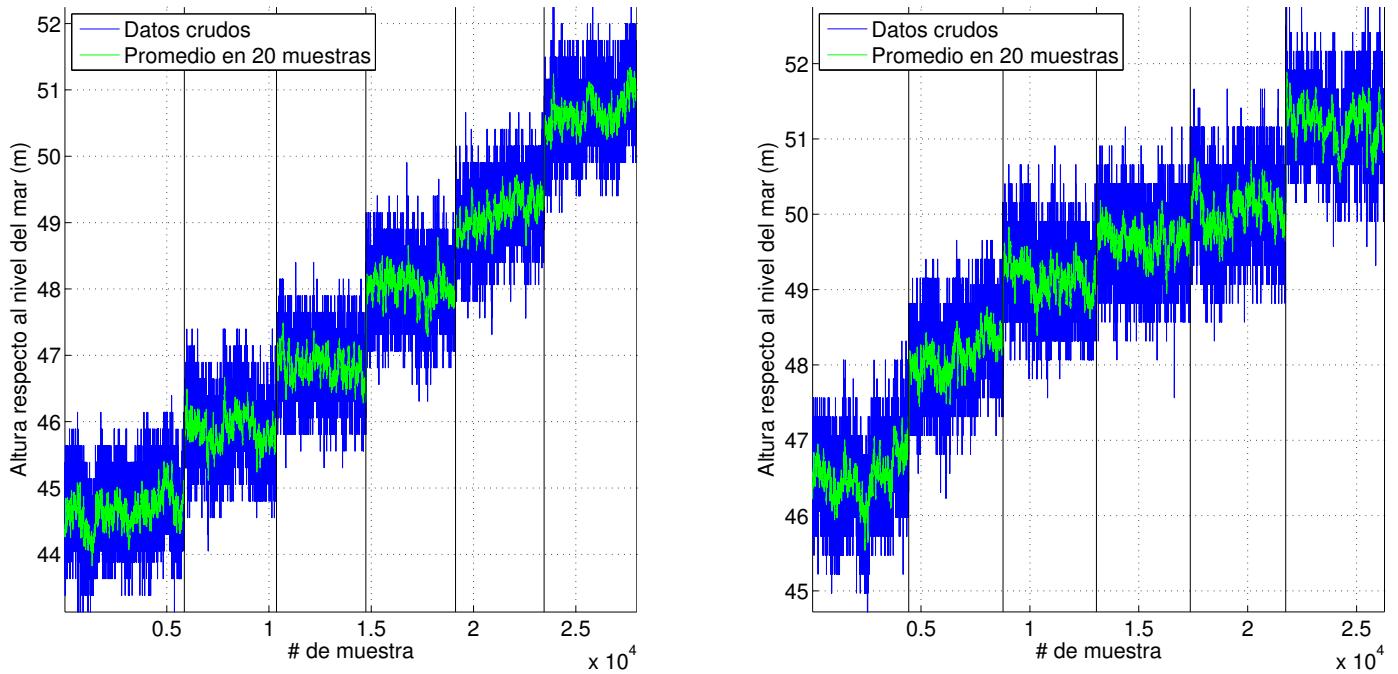


Figura 10.11: Experimento: Distancias de 1 metro.

En la tabla 10.2 se muestran los valores de altura obtenidos en las distintas posiciones en las dos series de datos tomadas. La altura absoluta no tiene sentido, ya que no se conoce la presión a nivel del mar en el momento de tomar las muestras, por lo tanto la ecuación 10.1 no dará el resultado correcto.

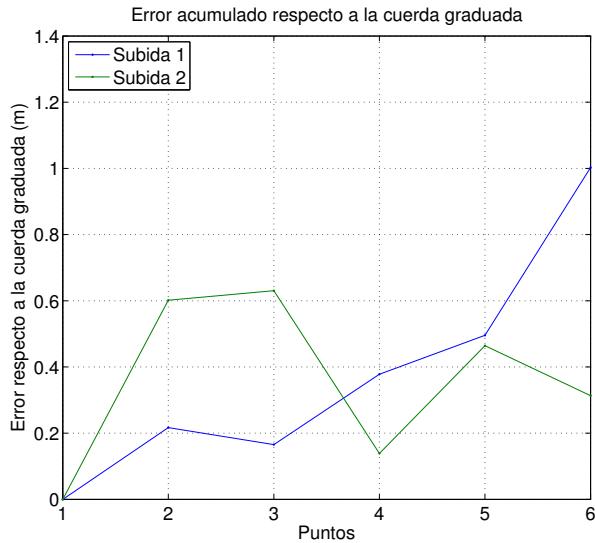
Posición	Altura medida con el barómetro (m)	
	Serie 1	Serie 2
1	44.66	46.52
2	45.87	48.12
3	46.82	49.15
4	48.04	49.66
5	49.15	50.05
6	50.66	51.21

Cuadro 10.2: Alturas obtenidas con el barómetro

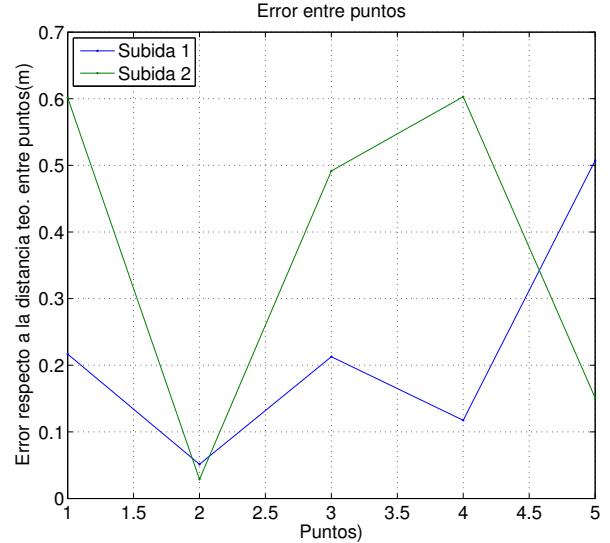
Se observa inmediatamente en las medidas de altura realizadas que la altura absoluta registrada por el barómetro cambia considerablemente de una serie a la otra.

En la segunda se observa que las medidas se encuentran en promedio un metro más arriba. Los puntos que se consideraron fueron los mismos, sin embargo las medidas fueron realizadas un día de tormenta. La presión atmosférica es muy cambiante en esos días. Eso puede explicar dicha diferencia. Otra explicación puede ser el drift observado en secciones previas.

En la figura 10.12 se muestra la evolución de los errores relativo y acumulado.



(a) Error acumulado.



(b) Error en la estimación de la distancia del piso anterior al actual.

Figura 10.12: Errores en las medidas a 1 metro entre sí.

Del análisis de cada serie de manera independiente:

■ Serie 1:

- Error promedio:  $0,20m$
- Desviación estándar:  $0,20m$

■ Serie 2:

- Error promedio:  $-0,07m$
- Desviación estándar:  $0,49m$

Al tener pocas muestras en cada una de las series es imposible considerarlas para armar estadísticas, de hecho ambas difieren mucho en cuanto al error promedio que presentan y la desviación estándar.

Si se trabaja con las dos series de datos, se obtienen:

- Error promedio:  $0,07m$
- Desviación estándar:  $0,38m$

A partir de los datos anteriores se puede concluir que el 95,5 % de las veces se tiene errores inferiores a  $0,76m$  en diferencias de un metro. El error se mantiene por

debajo de 1m al usar pocas (4 muestras, 8, 10, etc) muestras para cada punto. Esto es prometedor, ya que se piensa utilizar

Este error depende del drift del barómetro, y se puede reducir incorporando, de manera periódica, información externa (GPS) sobre la altura absoluta.

En la figura 10.13 se observa la variación en la altura absoluta. Si bien cada tramo comienza y termina a una altura que cae dentro del error esperado, hay tramos del principio y del final del experimento (barómetro apoyado en el suelo) entre los que se observa una diferencia en altura de 1.5m. Esto no cae dentro del error esperado. El problema se ve luego de transcurridos varios minutos, tiempo mucho mayor al sugerido en la sección 10.5.2, por lo que no parece ser un problema relevante, ya que puede ser causado por el drift y/o por cambios en las condiciones atmosféricas.

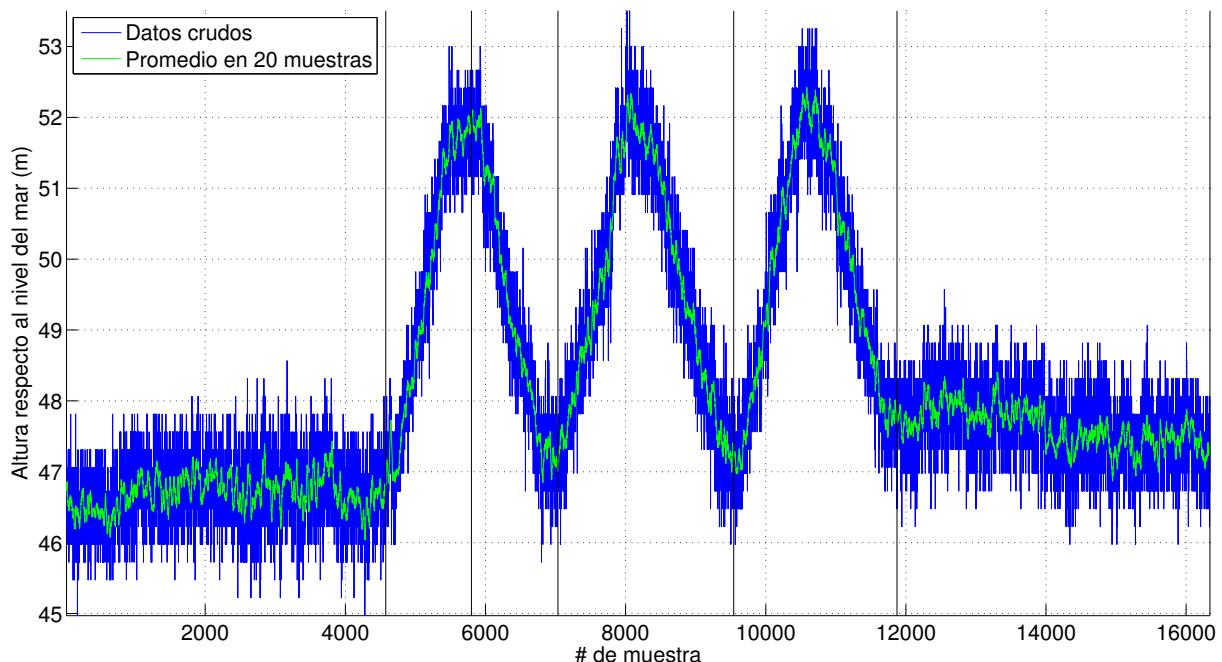


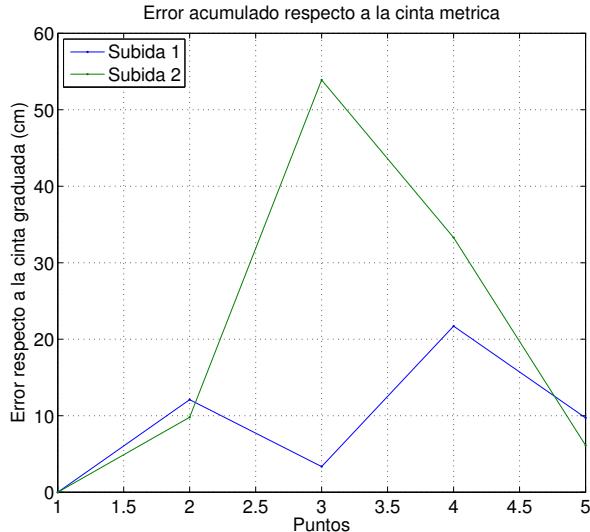
Figura 10.13: Medidas de altura subiendo y bajando.

### 10.5.6. Distancias de decenas de centímetros

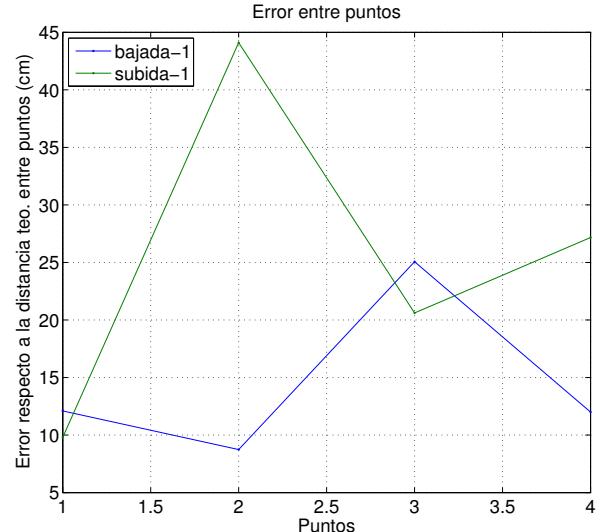
#### 5 segundos por estante

Se toman datos durante 5 segundos en casa escalón. Repitiendo el análisis realizado en secciones anteriores, se obtiene:

- Error promedio: 2.0 cm
- Desviación estándar: 24.4 cm



(a) Error acumulado.



(b) Error en la estimación de la distancia del estante anterior al actual.

Figura 10.14: Errores en las medidas a decenas de cm entre sí.

#### 8 minutos por estante

En la figura 10.15 se observan los datos capturados durante este experimento. El experimento se realiza un día de tormenta. Se toman 8 minutos de datos en cada estante, el experimento en su totalidad dura 40 minutos. El cambio de presión durante una tormenta es significativo. Se considera que esta fue la causa del drift observado en la figura 10.15. No se analiza el error en las medidas, ya que claramente está lejos de ser algo utilizable. Cabe destacar que no sirve tomar medidas durante tanto mucho tiempo con el barómetro, ya que el drift y/o factores externos introducen errores importantes.

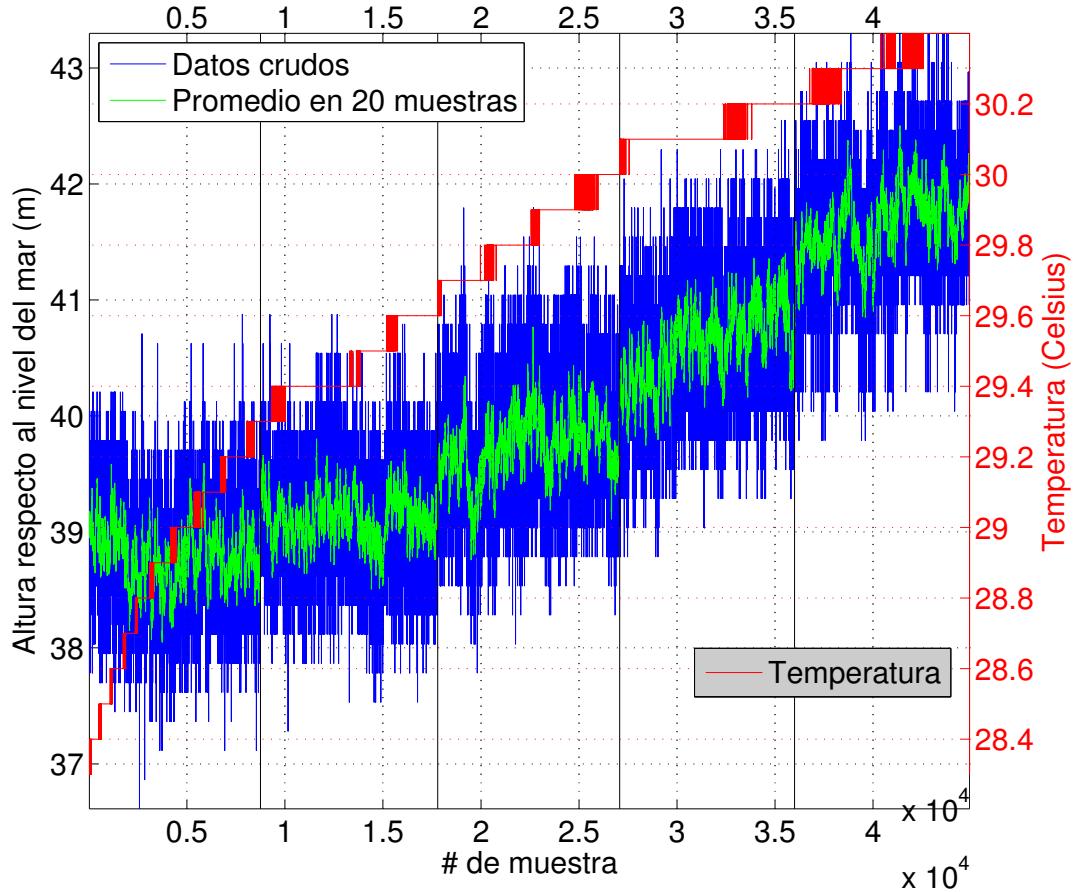


Figura 10.15: 8 minutos por estante durante una tormenta.

### 3m en aproximadamente 7 segundos

Como prueba extra, se recorre 4 veces la estantería sin detenerse cada estante, completando el trayecto de bajar y volver a subir en aproximadamente 7 segundos. Se calcula la distancia recorrida al bajar, la distancia recorrida al subir, y la total, y se compara dichas distancias contra los valores medidos con la cinta métrica. Los resultados se muestran en la tabla 10.3. Solamente se hicieron 4 experimentos, por lo que los datos estadísticos son solamente para dar una idea de la performance frente a movimientos bruscos.

	Error promedio (cm)	Desviación estándar (cm)
Bajada	15.1	25.9
Subida	4.4	58.9
Bajada+Subida	10.7	49.0

Cuadro 10.3: 3 metros en aproximadamente 7 segundos.

Cabe destacar que el error se mantiene por debajo de los 1.2m en el peor caso. La figura 10.16 muestra gráficamente los resultados del experimento.

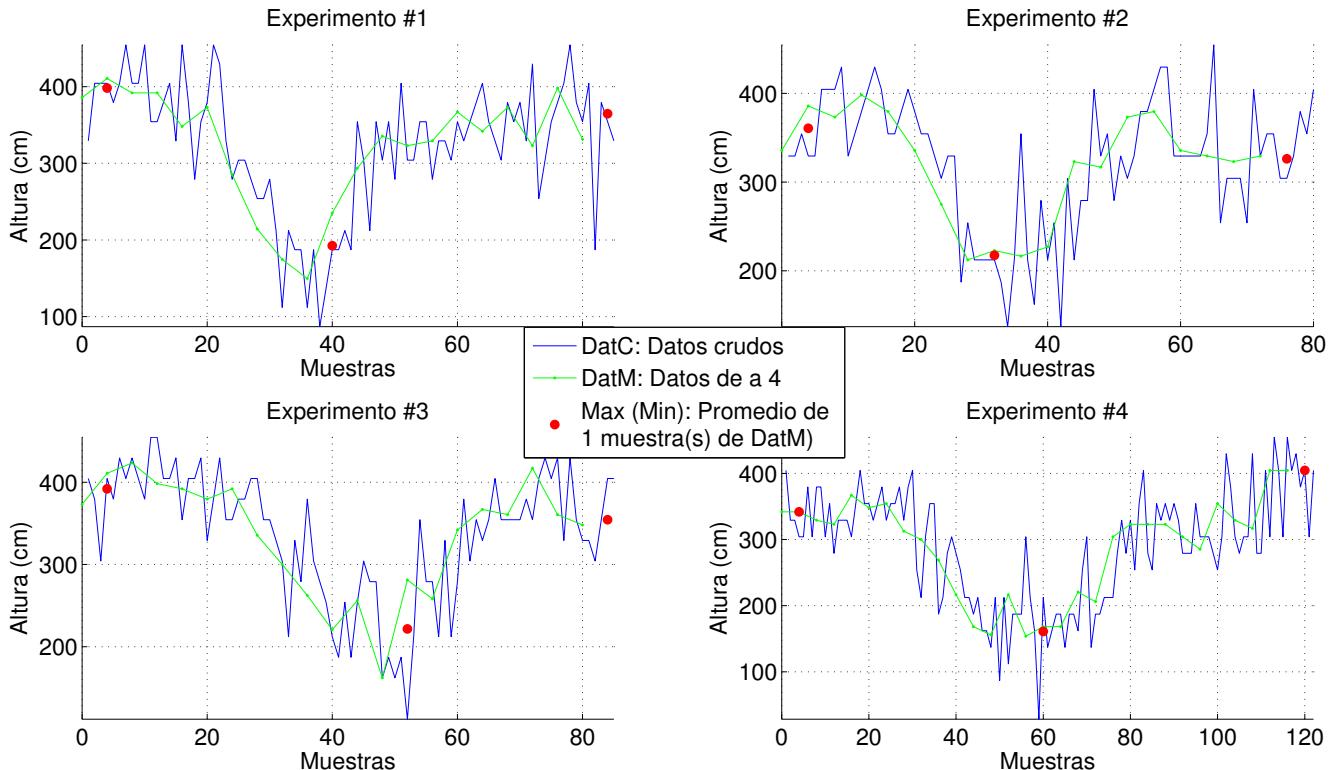


Figura 10.16: 3m metros en aproximadamente 7 segundos.

## 10.6. Conclusiones

Conclusiones más importante de las pruebas hechas con el barómetro:

- **Tiempo de *warm-up*:** El circuito tiene un tiempo de *warm-up* de aproximadamente 45 minutos, durante el cual la temperatura sube aproximadamente 1.5°C. De las especificaciones de los sensores se deduce que una variación de temperatura tan pequeña no debería afectar la performance. De cualquier forma, es de interés analizar experimentalmente, el efecto de la variación de la temperatura sobre las lecturas de la IMU.
- **Drift y Altura absoluta:** El drift y la sensibilidad a factores externos (clima, etc) hacen que el barómetro **no** sea adecuado para determinar la altura absoluta. No es posible obtener una mejor estimación de la altura tomando promedios durante períodos de tiempo mayores, ya que el drift introduciría errores en dicho estimador. Se observa un drift de hasta 0.5m en 1 minuto.
- **Altura relativa:** Estando en reposo, en períodos de tiempo menores a 1 minuto es posible conocer variaciones de altura con una error menor a 0.5m.
- **Rol del barómetro:** Se concluye que el barómetro sirve para determinar variaciones de altura, suavizando la trayectoria, mientras se espera una altura absoluta proveniente del GPS. El barómetro y el GPS se complementan. El barómetro ha de utilizarse con los siguientes parámetros:
  - Error promedio: 0.5m
  - Desviación estándar: 0.25m
  - Modo: 0, promediando 4 muestras en la IMU.
  - Se observa un drift de hasta 0.5m por minuto. Se debe utilizar el GPS para corregirlo.

---

---

# CAPÍTULO 11

---

## GPS - TEST 2

### 11.1. Objetivos

En el capítulo anterior se comenzó a analizar la performance del GPS. Se intentó reconstruir un polígono, y se analizó el error al estimar la posición de un punto fijo. En este capítulo se continúa dicho análisis, repitiendo el procedimiento, pero con un polígono más grande, y tiempo más largos para la estimación de la posición de un punto fijo.

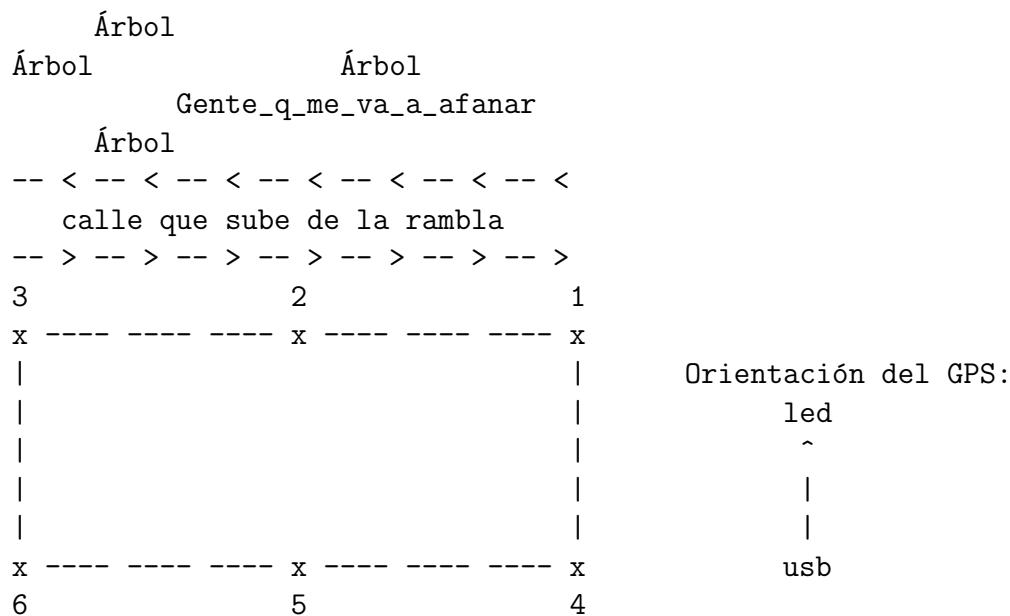
### 11.2. Materiales

- GPS.
- Laptop.
- Trípode (de fotografía).
- Cinta métrica, pintura y cuerda.

### 11.3. Procedimiento

En esta prueba se trata de obtener el error del GPS en el plano paralelo a la tierra, es decir, el error en latitud y longitud.

El experimento que se diseñó consiste en marcar un rectángulo sobre el suelo (pasto), utilizando 6 puntos, con la siguiente disposición:



Estacionamiento de la facultad

A diferencia del experimento de la sección 11.1, aquí todas líneas punteadas son de 6m de largo, en lugar de 1m. Resulta en un rectángulo de 6m por 12m.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Construir el rectángulo sobre un superficie plana.
    - Se utilizó pintura para marcar los vértices del triángulo.
    - Para trazar uno de los lados de 12 metros (puntos 1,2 y 3), se fijó una cuerda de 12 metros (con el punto medio marcado) a un punto, y se extendió (sin estirarla). El principio (1) y el final (3) de la cuerda son vértices del polígono, y el punto medio (2) es otro de los puntos de interés.
    - Para construir rectas perpendiculares se utilizó una cuerda de 6m, y otra de  $8.5m^1$ . Uno de los extremos de la cuerda de 6 metros se fijó al 1, y uno de los extremos de la cuerda de 8.5m se fijó a 2. El punto donde ambas se intersectan corresponde a 4. Un procedimiento similar se siguió para determinar la ubicación de 5 y 6.
  2. Medir, con un metro, las distancias entre todos los puntos.
  3. Utilizar mínimos cuadrados para minimizar el error entre las distancias esperadas, y las experimentales. Esto puede llevar a trabajar con un polígono que **no** sea un rectángulo, pero el error será menor que el que resultaría de usar los valores teóricos.

<sup>1</sup>Pitágoras:  $8,5 \approx \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,4852\dots$

4. Fijar la altura y la orientación del GPS, y tomar medidas en cada uno de los puntos [1,2,3,4,5,6].
5. Tomar un punto como origen, y comparar la figura que resulta de los datos provenientes del GPS con las medidas tomadas con el metro.

En la figura 11.1a se observa el trípode que sostiene al GPS. El objetivo era tener el GPS a una altura fija, y separado del piso. Al nivel del piso los rebotes degradan seriamente la performance del GPS. La cuerda que marca el lado del polígono, junto con las patas del trípode, se utilizaron para fijar la orientación del GPS durante el experimento.



(a) Trípode de fotografía, con el GPS atado en lugar de la cámara.. (b) GPS amarrado al trípode.

Figura 11.1: GPS + Atril

### 11.3.1. Adquisición de datos

Para tomar datos se conectó el GPS, que manda información mediante USB-serie, al puerto USB de una computadora. En la computadora se utilizó el GPSD, un software open-source que hace de *daemon*, y se encarga de transformar lo que llega del GPS en una estructura de datos fácil de manejar en C.

El GPS emite sentencias NMEA a través de USB serie, a 38400bps. Trabaja con sentencias:

- GPGGA - *Global Positioning System Fix Data*: Información sobre la fecha, posición y datos relevantes sobre el *fix*.
- GPGSV - *Satellites in view*: Información sobre la cantidad de satélites detectados, y la calidad de la señal proveniente de cada uno.
- GPGSA - *DOP and active satellites*: Información sobre DOP<sup>2</sup> y satélites activos.
- GPRMC - *Recommended minimum specific GPS/Transit data*: Sentencia mínima recomendada, trae suficiente información como para poder trabajar con el GPS.
- GPVTG - *Track Made Good and Ground Speed*: Información sobre la dirección y la velocidad (**no** sobre la posición absoluta).

### 11.4. Geometría: DOP - *Dilution of precision*

El método que utiliza el GPS para determinar su ubicación consiste básicamente en:

1. Determinar la distancia  $r_i$  a cada satélite  $S_i$ , cuya posición es  $P_i$ .
2. Repetir el paso anterior para cada satélite disponible.
3. Intersecciar las “cáscaras” de las esferas de centros  $P_i$  y radios  $r_i$ .

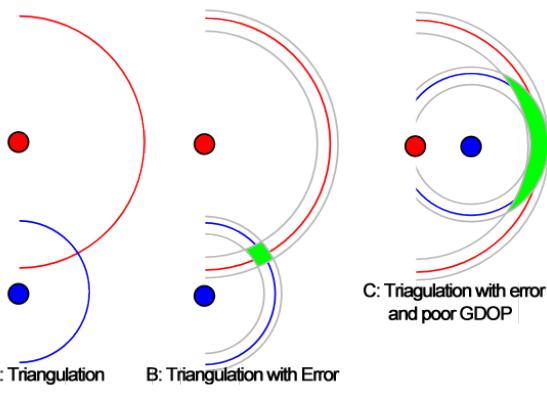


Figura 11.2: DOP en 2 dimensiones.

Las “cáscaras” de las esferas no serán de ancho despreciable, ya que hay un cierta incertidumbre asociado a los datos. Esto implica que la intersección será un volumen, en lugar de un punto. La geometría de la distribución de los satélites determinará el tamaño de este volumen, y por lo tanto la incertidumbre en la determinación de la posición. En la figura ??e muestra un ejemplo ilustrativo, en dos dimensiones.

El DOP es el cociente entre la exactitud de la ubicación y exactitud de la medida[?]:

$$\sigma = \sigma_o \cdot DOP$$

donde

- $\sigma$ : Exactitud de la medida.

---

<sup>2</sup>Dilution of precision.

- $\sigma_o$ : Exactitud de la posición.

Básicamente, el DOP representa la sensibilidad de localización frente a errores en las medidas, o sea, cuanto te vas a perder si te llega una medida equivocada. Cuanto más bajo sea el DOP, mejor. En la tabla 11.1 se muestra como interpretar valores típicos[?].

1	Ideal	Máxima exactitud posible.
1-2	Excelente	La exactitud a este nivel se considera suficiente para casi cualquier aplicación.
2-5	Bueno	Este nivel marca el mínimo apropiado para navegación.
5-10	Moderado	Las medidas se pueden utilizar, pero es recomendado buscar un lugar con cielo más abierto.
10-20	Regular	Solo se deben usar los datos para estimaciones de muy poca precisión.
>20	Malo	A este nivel, las exactitud de las medidas puede tener un error de hasta 300m, deben descartarse.

Cuadro 11.1: Interpretación de los valores de DOP.

El GPS envía información sobre:

- $HDOP$  - DOP horizontal:

$$HDOP = \sqrt{\sigma_{easting}^2 + \sigma_{northand}^2} \quad (11.1)$$

- $VDOP$  - DOP vertical:

$$VDOP = \sqrt{\sigma_{altitud}^2} \quad (11.2)$$

- $PDOP$  - DOP de la posición:

$$PDOP = \sqrt{\sigma_{easting}^2 + \sigma_{northand}^2 + \sigma_{altitud}^2} \quad (11.3)$$

Esta información se puede utilizar en el algoritmo de control, para ponderar los datos provenientes del GPS.

### 11.4.1. Verificación del polígono

Una vez construido el polígono, es de interés medir todas las diagonales (con la cinta métrica) por dos motivos:

- Verificar que no se cometieron errores.
- Hacer mínimos cuadrados con las medidas, de manera de obtener un polígono, que no tiene porqué ser (y en general no será) un rectángulo, sino algo similar a un rectángulo, más ajustado a la realidad.

Las medidas tomadas se resumen en la tabla 11.2, donde D12 representa la medida de la recta que une el punto 1 con el punto 2, en cm.

D12	D13	D14	D15	D16
603	1205	606	855	1345
D23	D24	D25	D26	D34
603	853	608	853	1344
D35	D36	D45	D46	D56
850	602	602	1202	603

Cuadro 11.2: Diagonales del polígono en cm.

**Lectura:** D24 representa la longitud (en cm) de la recta que une el punto 2 con el punto 4.

El polígono resultante se observa en la figura 11.3. El error relativo, es decir, el cociente entre las medidas de cada recta **D##** resultante de aplicar MC, y lo esperado en el polígono teórico, de 6m de lado, es:

- 9,51 % en el peor caso.
- 4,65 % en promedio.

Se considera que el error, siendo menor al 10 % en el peor caso, es aceptable.

En realidad se podría hacer una figura irregular cualquiera, y tomarlo en cuenta en el resto del experimento, pero complicaría la interpretación intuitiva de los resultados.

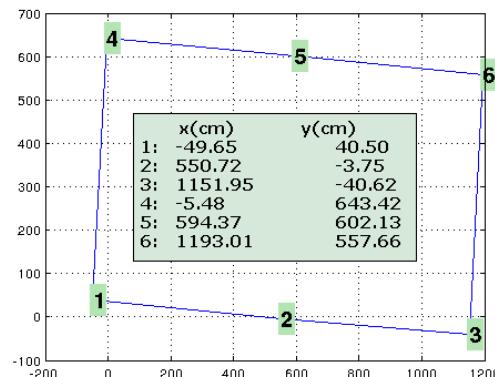


Figura 11.3: Polígono luego de MC.

### 11.4.2. Punto fijo - 10 minutos

Se tomaron datos durante 10 minutos ( $\approx 600$  muestras) en cada uno de los vértices del polígono, con el objetivo de observar la estabilidad de la información proveniente del GPS.

En la figura 11.4 se muestran los datos luego de restar el promedio, o sea que se muestra el error respecto al valor promedio.

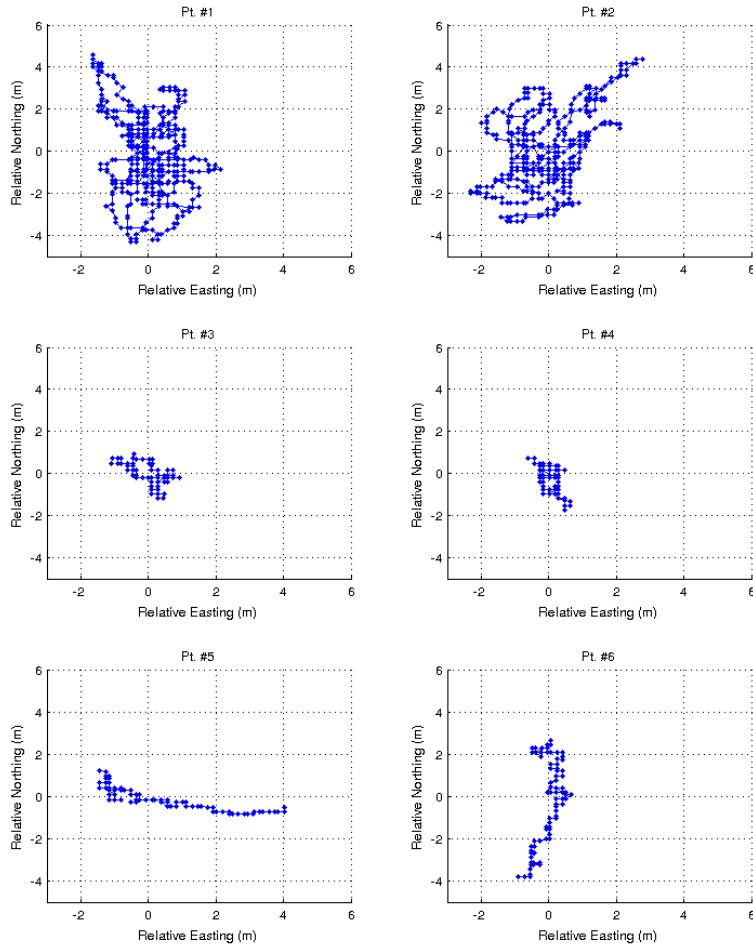


Figura 11.4: GPS quieto en cada punto del polígono, GPS orientado como se describe en 11.3 y se muestra en 11.1b.

Cabe destacar que en la figura 11.4 no parece haber la misma cantidad de muestras por punto, pese a que en el log habían aproximadamente la misma cantidad de datos por punto. Esto se debe a que a veces en el log se genera información repetida, es decir, el GPS envía sucesivamente la misma información, y la etiqueta como *información válida*. Esto se analiza con más detalle en la sección 11.8.

En la figura 11.5 se observan todas las gráficas de la figura 11.4, pero superpuestas.

Si el GPS fuese perfecto, entonces todas las muestras coincidirían con el promedio, y estarían ubicadas en el punto  $[0, 0]$ . El círculo negro tiene 2.5m de radio, las muestras que caen fuera de él están a más de 2.5m del valor promedio. En la leyenda se muestra qué porcentaje de las muestras caen fuera del círculo.

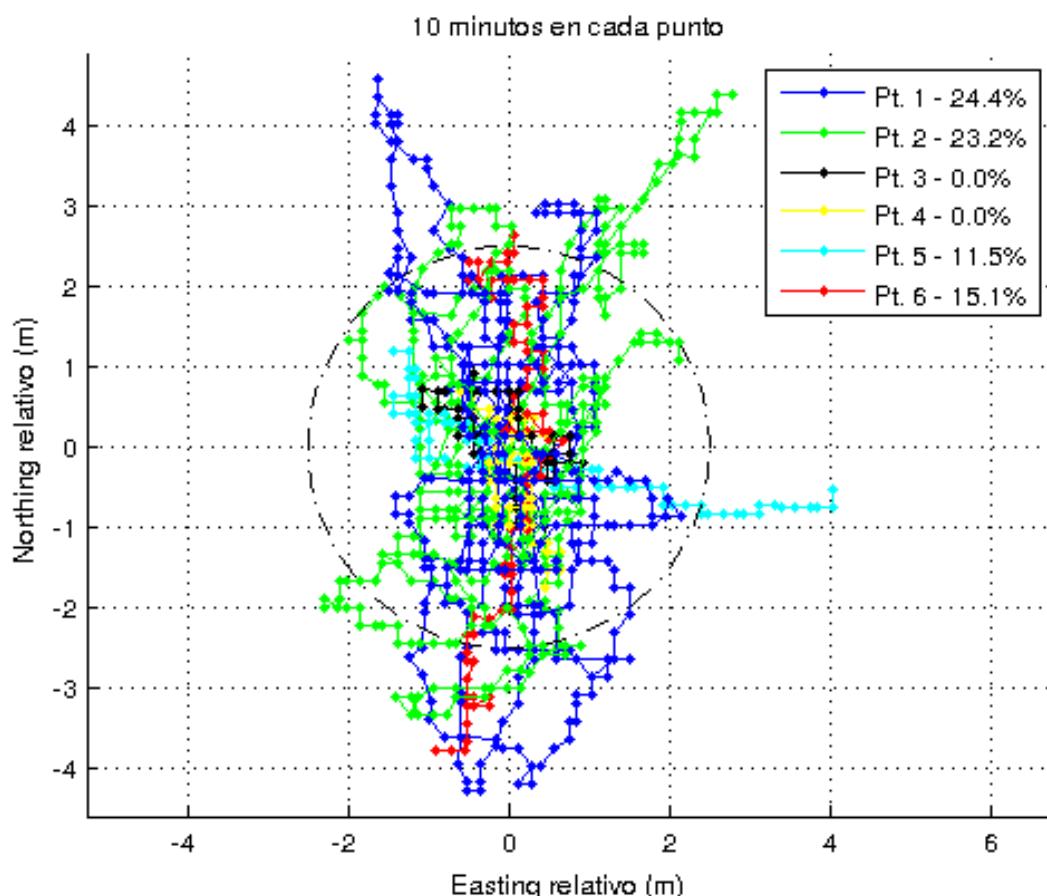


Figura 11.5: Error respecto al valor medio (Plots de 11.4 superpuestos). En la leyenda se muestran que porcentaje de muestras que caen a más de 2.5m del promedio.

#### 11.4.3. Punto fijo - 2 minutos

Se repitió el experimento, tomando 2 minutos de muestras por punto. Se optó por tomar datos durante solamente 2 minutos para agilizar el experimento, y acercarse más a un tiempo razonable. Los resultados fueron similares a los que se obtuvieron con el experimento de 10 minutos.

Se orientó el GPS de 3 maneras distintas, siempre alineando el trípode con uno de los lados de 12m del rectángulo:

1. USB hacia la calle, LED hacia el estacionamiento, como en la figura 11.6b.
  2. USB hacia la rambla, LED hacia el IIE (no hay figura)
  3. Como en la figura 11.6a.
  4. Nuevamente, USB hacia la calle, LED hacia el estacionamiento, como en la figura 11.6b.



Figura 11.6: Fotos de algunas de las orientaciones del GPS en las pruebas de 2

Los resultados se observan en las siguientes figuras. Nuevamente, en la leyenda se muestra qué **porcentaje de las muestras caen a más de 2.5m del valor promedio**.

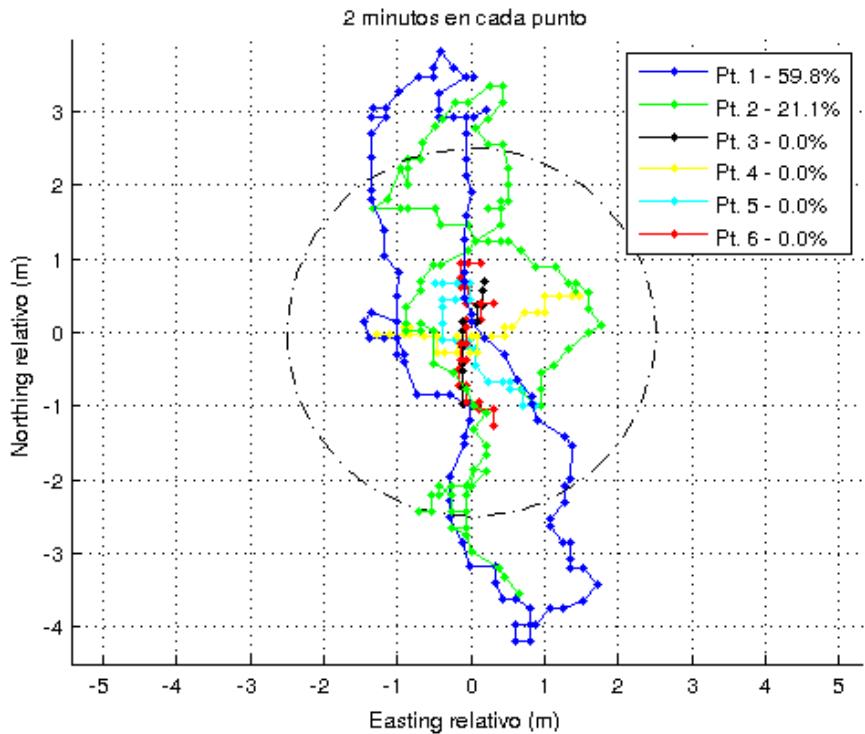


Figura 11.7: Orientación: 4.

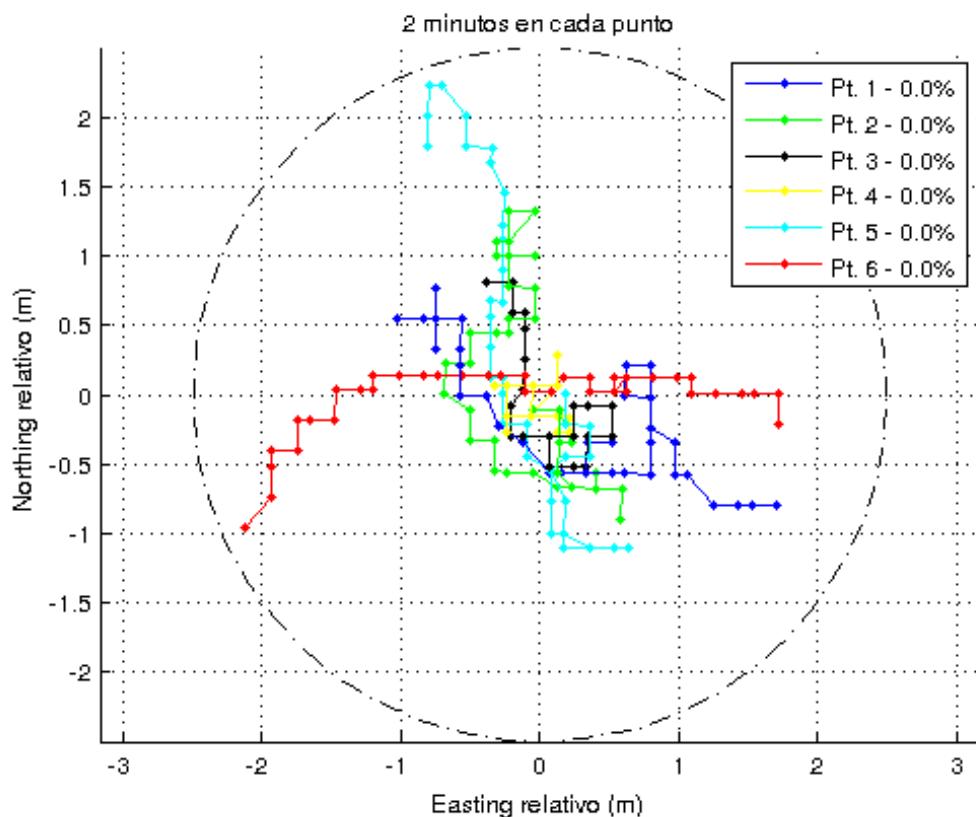


Figura 11.8: Orientación: 2.

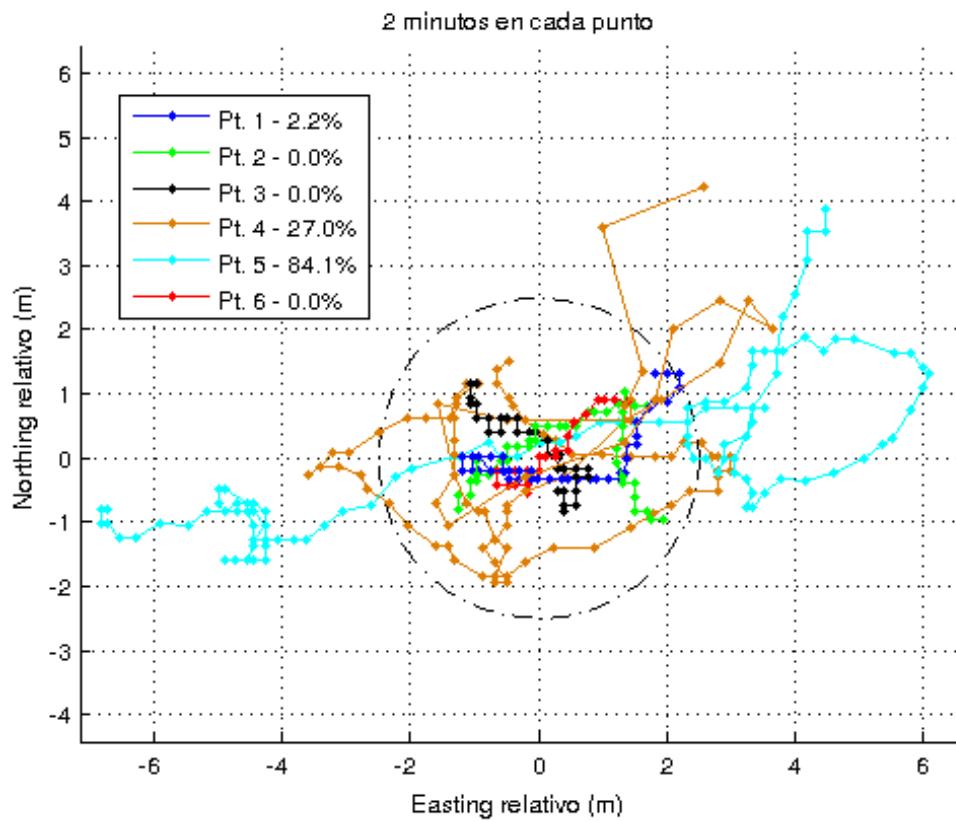


Figura 11.9: Orientación: 3.

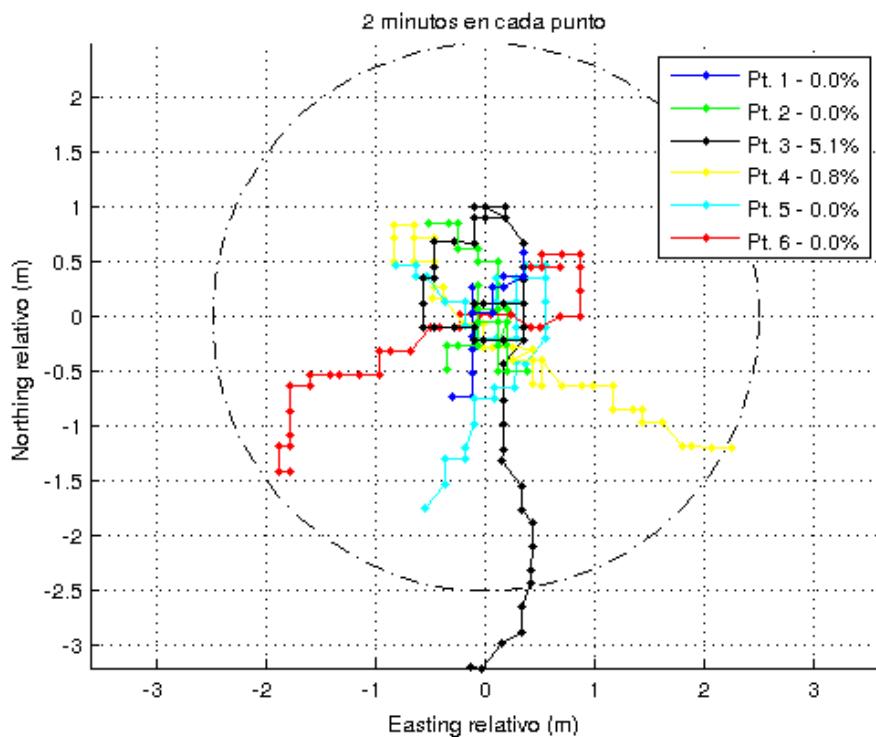


Figura 11.10: Orientación: 4

## Punto fijo: Análisis

- Influencia de la cantidad de satélites disponibles

La teoría dice que con 4 satélites debería alcanzar para obtener un *fix 3D*, es decir, estimar la posición sobre la esfera terrestre, y la distancia (altura) a la misma. Se recomienda tener no menos de 6. Durante el experimento de la figura 11.9, en un momento el GPS perdió señal, y el número de satélites disponibles, que usualmente anda por los 9 o 10, pasó a ser 4. Los datos correspondientes se muestran en la figura 11.11. El trazo naranja, con un error de hasta 23 metros, corresponde a instantes donde la cantidad de satélites era entre 4 y 5. Luego de volver a 9 o 10 satélites, los datos vuelven a ser más razonables.

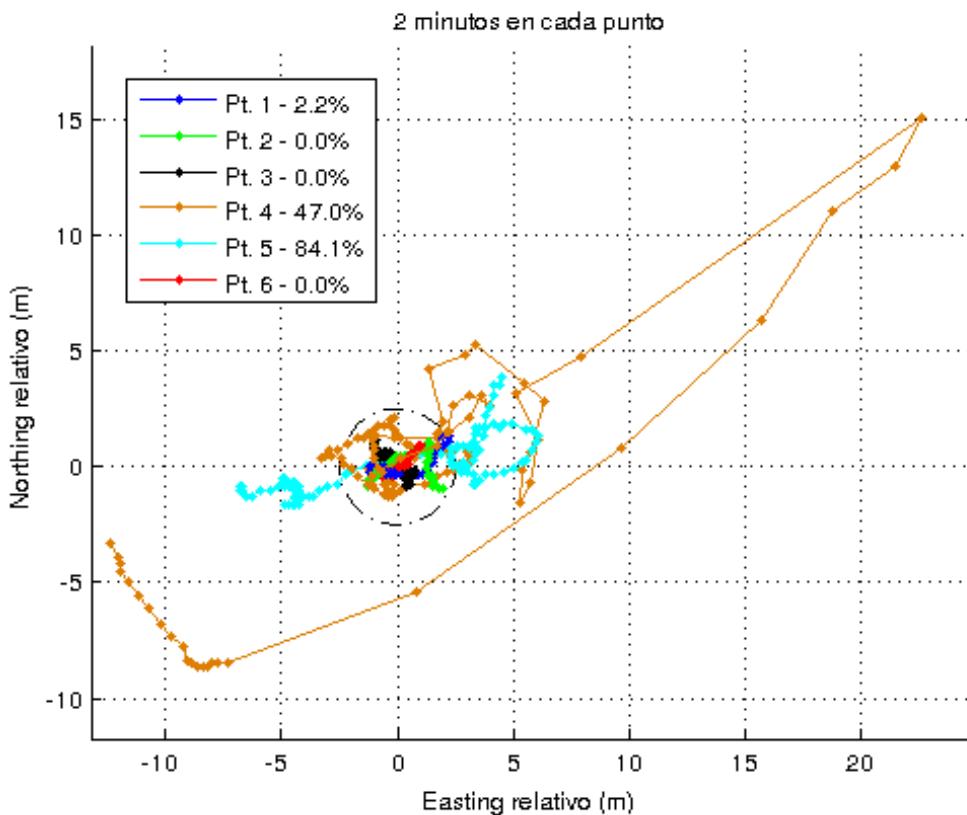


Figura 11.11: Datos con solamente 4 satélites. Orientación: 3.

En la figura 11.9 se observa el mismo log que en 11.11, pero luego de haber quitado las muestras correspondientes al período donde se deterioró la señal.

No se pudo encontrar una explicación para la mala calidad de las muestras correspondientes al punto 5 en la figura 11.9. La cantidad de satélites disponibles se mantuvo estable en 9 o 10 durante la adquisición de esos datos.

- Influencia de la orientación:

No parece haber una correlación directa entre resultados y la orientación del GPS, evidencia de esto son las figuras 11.10 y 11.7, que fueron tomadas con la misma orientación.

Resulta intuitivo suponer que existe, debido a que el GPS tiene una antena adentro. En la sección 11.4.3 se estudia un poco más este asunto.

## Orientación

Para evaluar si existe una correlación entre la orientación y las medidas del GPS, se hizo el siguiente experimento:

1. Tomar datos durante 10 minutos con el GPS arriba del trípode, dos patas alineadas con una recta fija.
2. Rotar el trípode 120 grados en sentido horario (visto desde arriba), de manera que otro lado del triángulo que forman las patas del trípode quede alineado con la recta. Tomar datos durante 10 minutos.
3. Rotar y tomar datos nuevamente.

Los resultados del experimento se observan en la figura.

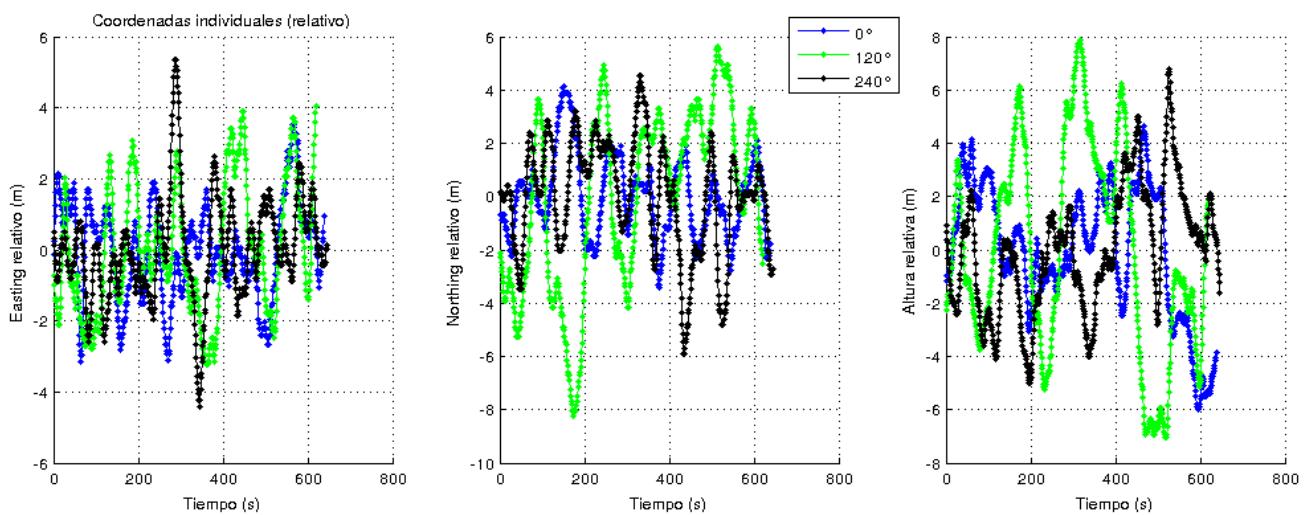


Figura 11.12: Datos rotando el GPS sobre un punto fijo.

## Orientación - Conclusiones

No se encontró una correlación entre la orientación del GPS y el error en las medidas. El experimento se realizó con cielo abierto, con una buena geometría, en términos de distribución de satélites. Tal vez en situaciones de visibilidad limitada se podría observar una correlación, ya que si la dirección en la que la antena recibe mejor coincide con el lugar donde hay pocos satélites, entonces la cantidad de información sería menor/peor que en otras orientaciones.

Tener visibilidad limitada por obstáculos, o tener una mala geometría deteriora la performance del GPS. No es el objetivo de este informe evaluar la performance en ambientes complicados.

#### 11.4.4. Polígono

En la figura 11.13, la línea en roja representa el polígono resultante de unir el promedio, en cada vértice, de las muestras tomadas durante de 10 minutos. En la figura 11.14 se dicho polígono, proyectado sobre una foto satelital<sup>3</sup>.

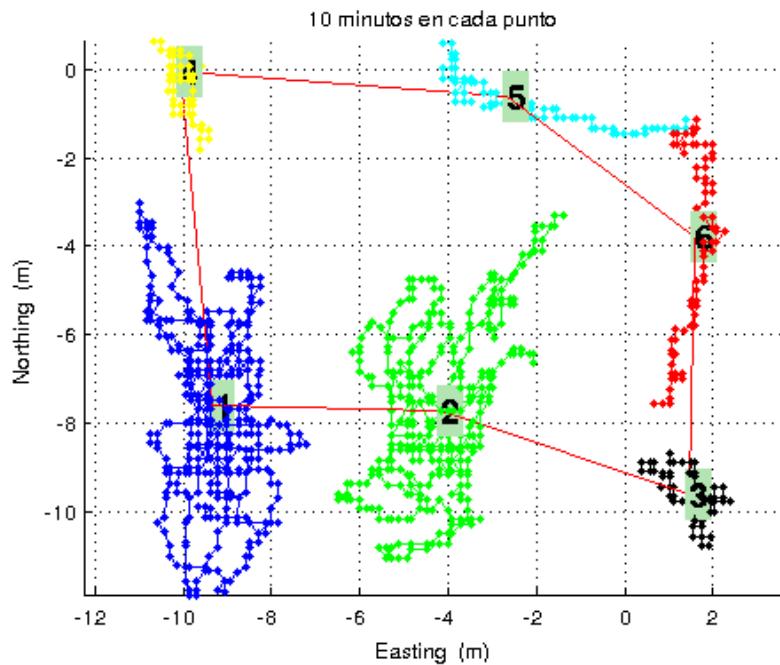


Figura 11.13: Polígono formado por los promedios de 10 minutos.

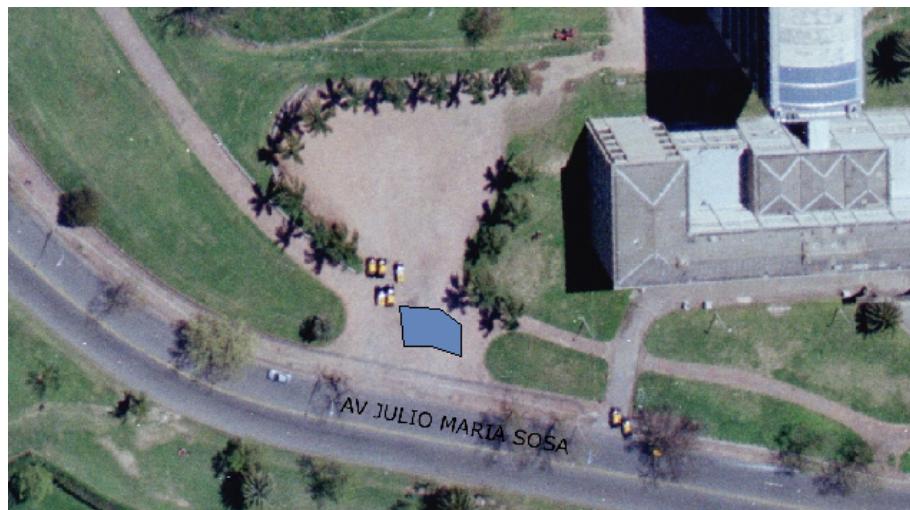


Figura 11.14: Proyección del polígono formado por los promedios de 10 minutos sobre una foto satelital.

En las siguientes figuras se observan los polígonos formados por los promedios de varias secuencias de 2 minutos por punto.

<sup>3</sup>El mapa y las fotos se obtuvieron de:  
<http://sig.montevideo.gub.uy/mapas/mapa-principal>

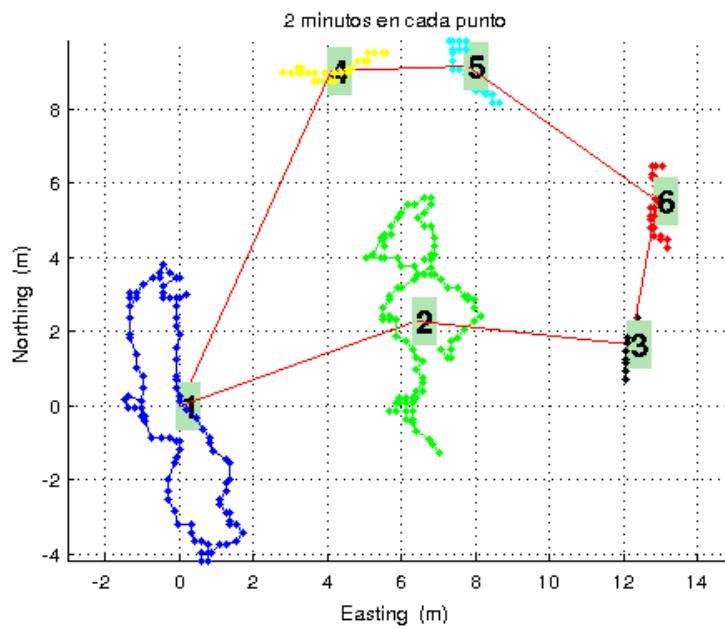


Figura 11.15: Orientación: 4.

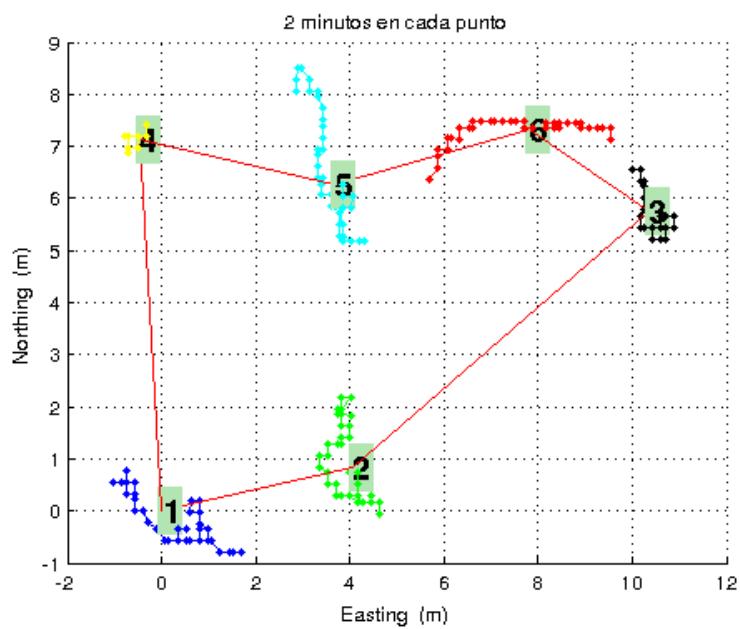


Figura 11.16: Orientación: 2.

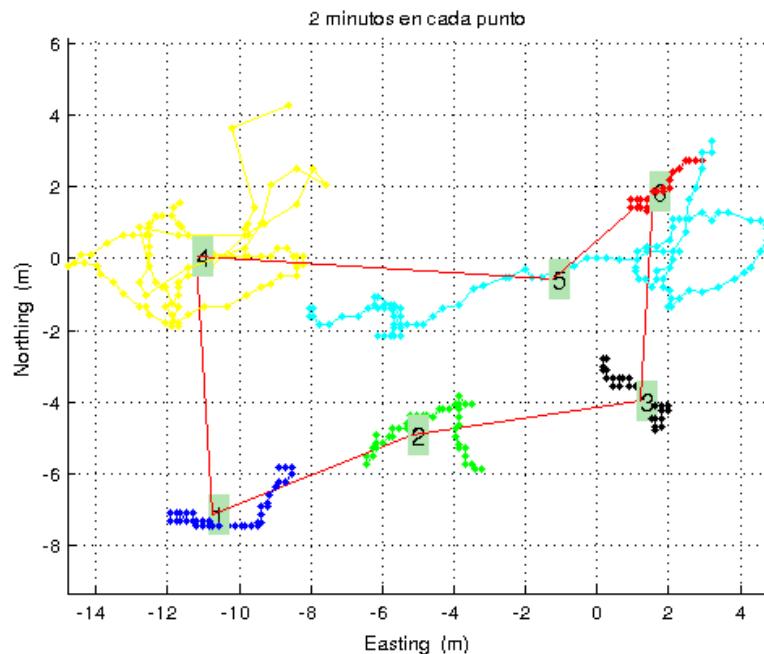


Figura 11.17: Orientación: 3.

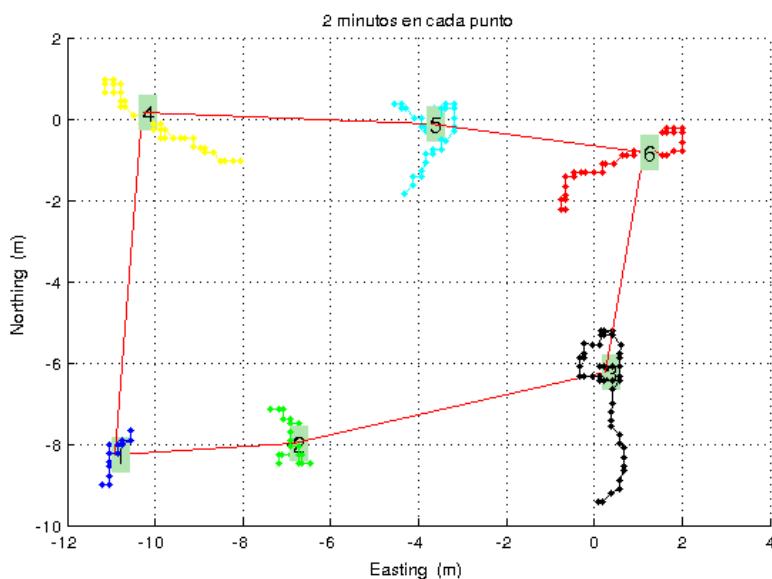


Figura 11.18: Orientación: 4

#### 11.4.5. Polígono - Análisis

Dado que no se cuenta con una referencia absoluta, como podría serlo un GPS de alto nivel, no es posible hablar de error absoluto. De cualquier forma, con la información disponible es posible obtener un estimador del error típico en una distancia de  $X$  metros, donde  $X$  pertenece al conjunto de las medidas de las rectas en juego:  $\{6; 8.5; 12; 13.45\}$  metros. Se comparan las distancias entre los vértices del polígono experimental, con las distancias entre las coordenadas resultantes de la aplicación de mínimos cuadrados a las medidas efectuadas con el metro (ver la sección 11.4.1).

El error relativo para cada recta resulta:

$$E = \left| \|\hat{P}_i - \hat{P}_j\| - D_{ij} \right| \quad (11.4)$$

Donde:

- $\hat{P}_i$  es la dupla  $\{x, y\}$ , coordenadas experimentales del i-ésimo vértice del polígono.
- $D_{ij}$  es la distancia entre el i-ésimo y el j-ésimo vértice, resultado de la aplicación de MC en la sección 11.4.1.

Para cada set de estimaciones de la posición de los vértices del polígono<sup>4</sup>, se utilizó la fórmula 11.4, separando los datos según el largo esperado de la recta<sup>5</sup>. Resulta un set de valores del “*error al estimar la distancia entre dos puntos que deberían estar a X metros*”, para cada valor de X.

Los resultados se resumen en la tabla 11.3.

Largo Teo. (cm)	$\mu$ (cm)	$\sigma$ (cm)	$\frac{\mu+2\sigma}{\text{Largo Teo.}}$	# Muestras
600	372.15	169.39	118 %	35
848	493.6	165.79	97 %	20
1200	429.67	212.81	71 %	10
1341	614.73	166.71	70 %	10

Cuadro 11.3

En la tabla 11.3 se observa, cómo es de esperarse, que el error relativo disminuye al intentar estimar distancias mayores. Asumiendo que el error en la estimación de la posición de cada punto A, B es similar, entonces para cometer un error de P % en la estimación de una distancia X (medida con el metro) entre A y B, el GPS debe equivocarse en  $\frac{P}{100}X\frac{1}{2}$  en la estimación de la posición de A y B.

Resulta que el error en la estimación de la posición de un punto es de aproximadamente 4.5m. Esto es coherente con los resultados sobre la estimación de un punto fijo. Si las medidas para la posición de un punto fijo en general caen dentro de un círculo de 2.5m de radio, entonces, asumiendo que la posición real cae dentro del círculo, en un peor caso se tendría un error de 5m.

Nuevamente, no se cuenta con información sobre la posición real, pero parece razonable asumir que la ubicación real es cercana al promedio de los datos provenientes del GPS. Evidencia a favor de esto se observa en la figura 11.14. Se trata este tema un poco más en la sección 11.9.

---

<sup>4</sup>Un set de valores  $\hat{P}_1^1, \hat{P}_2^1, \hat{P}_3^1, \hat{P}_4^1, \hat{P}_5^1, \hat{P}_6^1$

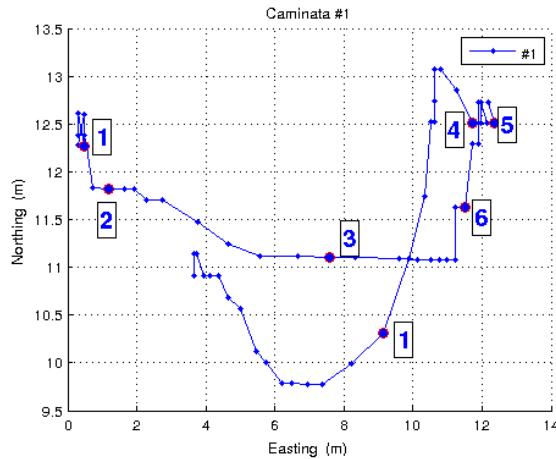
<sup>5</sup>Valores posibles: {6;8.5;12;13.45}

## 11.5. Caminata por el borde del polígono

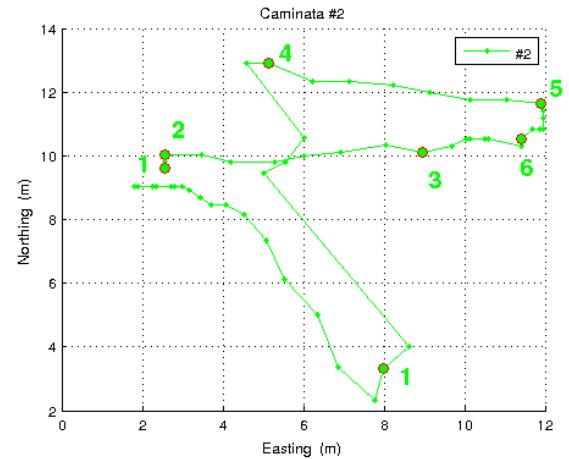
Para simular una situación más parecida a la que se tendrá con el GPS montado sobre el cuadricóptero, se colocó el trípode con el GPS en un mochila, y se procedió a recorrer el polígono con con la mochila puesta.

Los errores en la medida de un punto fijo hacen pensar que sería posible que la trayectoria determinada por el GPS luego de este experimento fuese algo parecido a un rectángulo.

En las figuras siguientes se observan los datos tomados durante 3 caminatas siguiendo el contorno del polígono, siguiendo la secuencia 1-2-3-6-5-4-1<sup>6</sup>. Se empezó a loguear datos en el punto 1, y se terminó nuevamente en el punto 1.



(a) Caminata #1



(b) Caminata #2

### 11.5.1. Caminata - Análisis

Las gráficas de las caminatas a primera vista son muy desalentadoras. Se observa un error que parece ser muy significativo, la trayectoria no se parece en nada a un rectángulo. Un análisis más detallado de los resultados revela que la performance del GPS es acorde a los esperado según las pruebas de las secciones anteriores.

La posición parece tender a estabilizarse una vez que se llega al destino final, el punto 1. Ahí se continuó logueando datos por unos 20 segundos. En la figura 11.19b la posición final parece tener un drift que se aleja de la posición inicial, en lugar de acercarse. No se encontró una justificación para este comportamiento, pero es similar al observado para puntos fijos, por lo que no se le prestó especial atención.

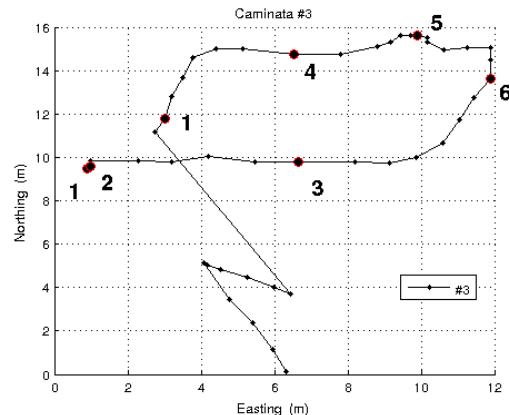


Figura 11.19: Caminata #3

<sup>6</sup>Notar que **no** se recorre en el mismo orden en el que se numeran los puntos del rectángulo

## 11.6. Error en altura

Para determinar el error la información sobre la altura que provee el GPS, se diseñó un experimento, que consiste en tomar medidas en una perpendicular a la esfera terrestre, a 4 alturas diferentes: 0m, 1m, 2m y 3m respecto al suelo.

En la primera etapa del experimento, se mantuvo el GPS quieto en cada uno de los niveles, y se tomaron muestras durante aproximadamente 60 segundos. El objetivo de esta etapa era verificar si era viable el experimento.

Se colocó una escalera en el medio del estacionamiento de atrás de la Facultad de Ingeniería, se ató un piolín con marcas cada 1 metro, y una plomada en la punta para mantenerlo tenso y vertical.

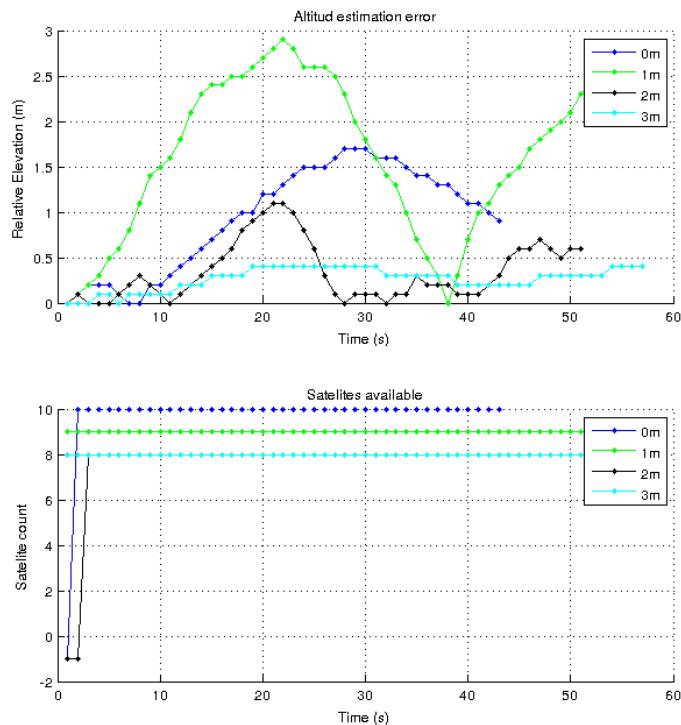


Figura 11.20: Variación de la altura determinada por el GPS a distintas alturas.

En la figura 11.20 se observan los resultados del experimento. Es de esperarse que el error sea mayor al estar apoyado sobre el suelo, ya que los rebotes (*multipath*) pueden deteriorar el sistema. El error a 1m de altura es mayor al que se obtuvo con el GPS en el suelo, una posible explicación para esto sería que el GPS estaba muy cerca de la escalera metálica, lo cual podría introducir una cantidad significativa de rebotes.

Los resultados de este experimento llevan a pensar que el GPS da información estable si se encuentra a al menos 2m del suelo. Esto no parece ser un problema, ya que el cuadricóptero volará a más de 2m de altura.

## 11.7. Tiempo de *warmup*

El tiempo que demora el GPS en adquirir un *fix* depende de si estaba frío, o si estaba andando previamente.

- **Frío:** Aproximadamente 40 segundos.
- **Caliente:** Entre 3 y 5 segundos.

Esto implicaría que al prender el cuadricóptero, habría que esperar unos 40 segundos para obtener señal del GPS, y que si por algún motivo se pierde la conexión con el GPS, habrá que esperar entre 3 y 5 segundo antes de contar con datos útiles nuevamente.

## 11.8. Tasa de muestreo

El GPS bajo funcionamiento normal trabaja a 1Hz. Se observó que estando quieto, a veces repite información, y la etiqueta como “válida”. Se observó este comportamiento durante los experimentos de punto fijo, llegando a pasar 30 segundos registrando exactamente la misma información.

Se compararon los datos crudos provenientes del GPS con los que devuelve el GPSD, y se concluyó que el GPSD **no** es responsable de la repetición de datos, es decir, no es un problema de software, sino que el GPS es el que a veces repite datos.

Al loguear trayectorias de movimiento permanente, como un recorrido en bicicleta de 15 minutos, no se observó más de 4 segundo de corrido de datos repetidos.

No parece razonable que el cálculo de la posición dé *exactamente* lo mismo durante varias medidas sucesivas, probablemente se trate de un problema interno del GPS.

Para enfrentar este problema, lo más razonable parece ser que el algoritmo que lee datos del GPS ignore datos repetidos.

## 11.9. Posición Absoluta

No se cuenta con fuente de información que nos permite saber exactamente donde estaba el GPS al momento de tomar datos. Se podría haber usado un GPS de mejor calidad como referencia, aunque la performance de los GPS comerciales de un costo razonable no suele ser mucho mejor que la que se obtuvo en los experimentos realizados.

Se realizaron varios experimentos para analizar si la ubicación que daba el GPS se correspondía con la realidad, ya que algunos GPSs a veces dan un error constante de varios metros, y de ser el caso, se podría compensar este problema una vez detectado.

Sobre un mapa de Montevideo, se graficaron trayectorias conocidas, con el objetivo de verificar que los datos provenientes del GPS eran “razonables”.

No se observó un offset evidente y constante, por lo que se asume el GPS **no** introduce un offset, o por lo menos no una constante, que se pueda compensar corriendo todos los datos por una cantidad fija.

En la figura 11.21 se observa una trayectoria realizada en bicicleta, con el GPS colocado sobre el trípode, asomando de una mochila. El recorrido fue hacia el sur-oeste, sobre la senda derecha, contra el lado derecho (cerca del cordón). No se observa un offset constante. Se analizaron otras figuras, y se llegaron a conclusiones similares.

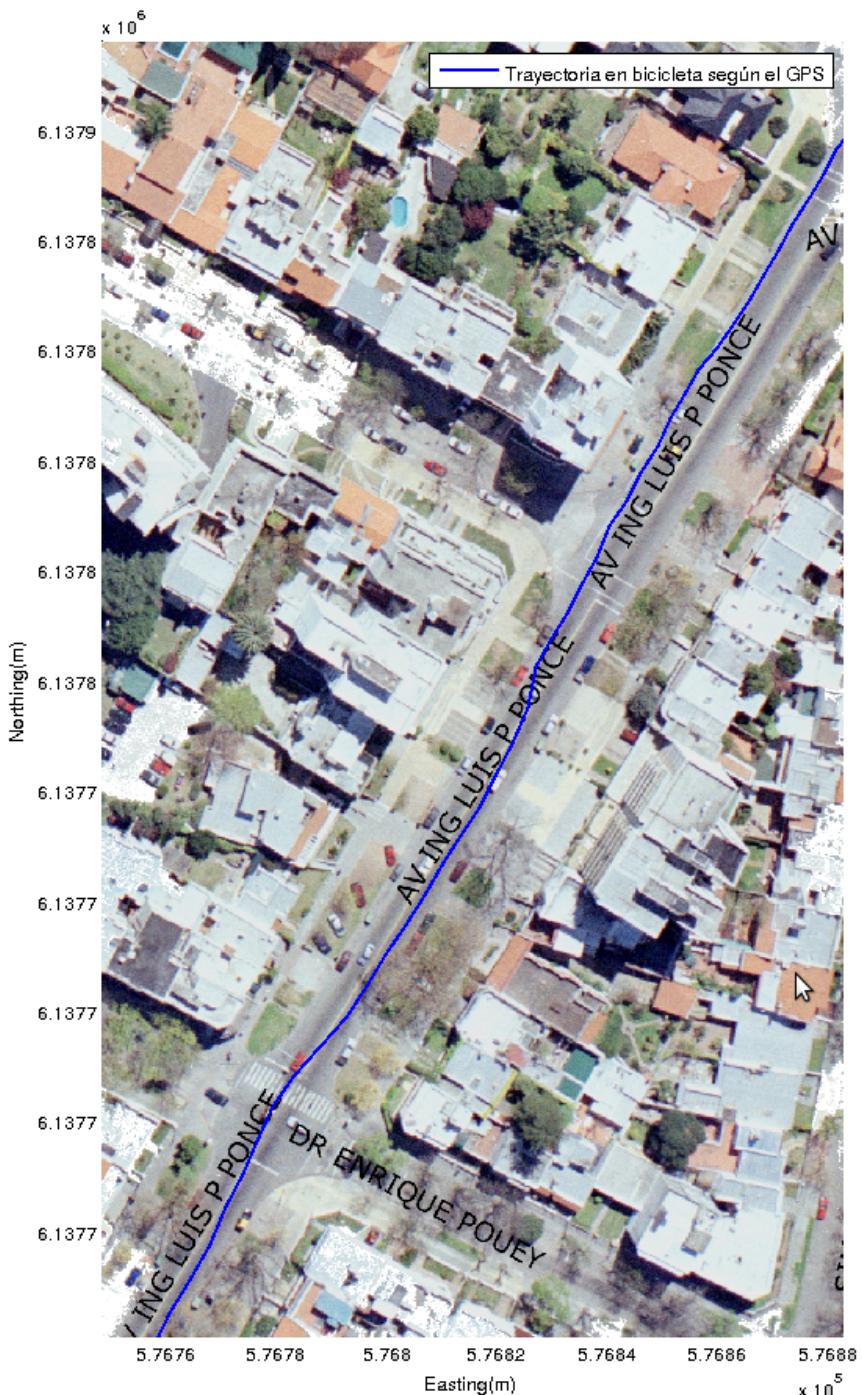


Figura 11.21: Recorrido en bicicleta.

## 11.10. Conclusiones

Los siguientes items servirán de guía para la utilización del GPS como instrumento de navegación:

- **Error en las medidas:** Bajo las condiciones anteriores, se concluye que es razonable asumir que las medidas del GPS tienen un **error menor a 5m**. Esto es un poco menor a las especificaciones dadas por el fabricante del GPS, 5m *CEP*<sup>7</sup>. Es de esperarse que la performance se reduzca al utilizar el GPS en un entorno más agresivo, como el que resultará al colocar el GPS sobre el cuadricóptero, donde estará sujeto a interferencia electromagnética de los motores, vibraciones, etc.
- **Visibilidad:** Es importante asegurar buena visibilidad, la performance del GPS se reduce drásticamente si pierde satélites.
- **Promedios:** Promedios de 2 minutos son suficientes para reducir el error a 2.5m, con una probabilidad del 75 %.
- **Resolución:** El GPS **no** es adecuado para tareas de navegación con restricciones del orden del metro, pero sí para distancias del orden de decenas de metros.
- **Tasa de muestreo:** El GPS normalmente muestrea a **1Hz**. Cabe destacar que debe ignorarse información repetida (muestras sucesivas que sea idénticas).
- **Error en altura:** El GPS **no** es adecuado para determinar la elevación durante el aterrizaje/despegue, ya que a menos de 2m del piso, la estimación de la elevación es muy mala. Será necesario otro sensor (sensor de presión, IR, etc) para asistir durante el despegue/aterrizaje.
- **Tiempo de fix:** En frío demora alrededor de 40 segundos, en caliente entre 3 y 5 segundos.

Por último, cabe destacar que los resultados de este informe dan una idea de la performance del GPS en condiciones “ideales”. Será importante analizar el efecto de las vibraciones y la interferencia electromagnética que introducirá la presencia del cuadricóptero, de manera de ajustar los márgenes de error al contexto en el que se utilizará el GPS.

---

<sup>7</sup>CEP de Xm: Garantiza que el 50 % de la muestras caerán en un círculo de radio X y centro el promedio de las muestras.

# **Parte V**

## **Estimación del estado**

---

# CAPÍTULO 12

---

## FILTRO DE KALMAN

Con el objetivo de agregar robustez a las medidas arrojadas por los sensores, se debe implementar algún algoritmo de estimación de estados que, corriendo en tiempo real, mantenga una estimación del estado mejor que la que se obtendría utilizando solamente las medidas de los sensores.

El filtro de Kalman es un algoritmo que usa una serie de medidas ruidosas observadas a lo largo del tiempo y produce una estimación de alguna variable desconocida que resulta ser más precisa que la observación llana de la medida. Opera recursivamente sobre el flujo de la entrada ruidosa y arroja la estimación estadísticamente óptima del estado.

Consiste básicamente en 2 etapas:

- Predicción
- Actualización

En la figura 12.1 se muestra un diagrama de flujo de la operación de un filtro de Kalman. Se parte de una estimación a priori del estado, la cual es utilizada como semilla para las posteriores iteraciones del filtro. En la etapa de **predicción**, el filtro produce una estimación del estado de las variables, junto con sus incertidumbres. Se hallan las variables  $P_{k|k-1}$  y  $\hat{x}_{k|k-1}$ , correspondientes a la predicción de la matriz de covarianza estimada y la predicción del estado estimado, respectivamente. La covarianza, en la teoría de la probabilidad, es una medida de cuán juntas cambian 2 variables aleatorias y si presentan un comportamiento similar tendrán una covarianza elevada y positiva, si el comportamiento es opuesto la covarianza será negativa y elevada en valor absoluto. Si las variables aleatorias no presentan relación, la covarianza será 0. Es una magnitud que no es sencilla de interpretar pero cobra vital importancia a la hora de entender el comportamiento del filtro.

Una vez que llega la siguiente medida de los sensores, contaminada necesariamente con ruido, las estimaciones son actualizadas en la etapa de **actualización**, mediante la utilización de un *promedio ponderado*, dándole mayor peso a las estimaciones con menor incertidumbre en cada paso, obteniendo la estimación del estado para el instante k:  $P_{k|k}$  y  $\hat{x}_{k|k}$ .

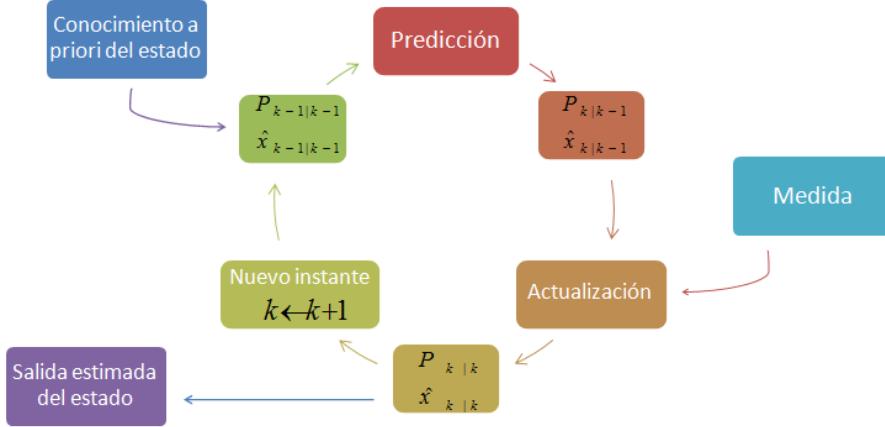


Figura 12.1: Diagrama de flujo del filtro de Kalman

Por otro lado, las mayores restricciones que impone el filtro de Kalman son que el sistema dinámico subyacente debe ser lineal y que los ruidos presentes deben ser blancos y Gaussianos.

El sistema dinámico que queremos estimar, como se puede ver en el capítulo 3, es claramente **no lineal**, por lo que se debe buscar alguna alternativa al filtro de Kalman clásico. Al investigar en la literatura existente, basados en [?] y [?], se decide implementar un filtro de Kalman extendido para la estimación del vector de estados.

## 12.1. Filtro de Kalman Extendido (EKF)

El filtro de *Kalman extendido (EKF)* es la versión no lineal del filtro de Kalman. Linealiza en torno a una estimación de la media y la covarianza. En caso de conocer con exactitud el modelo de transición de estados, el EKF se considera el standard en la estimación no lineal de sistemas de navegación.

### 12.1.1. Modelo matemático

El sistema dinámico sigue el modelo:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

donde  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  son los ruidos de proceso y observación respectivamente. Se asume que son gaussianos y de media nula. Sus matrices de covarianza son  $\mathbf{Q}_k$  y  $\mathbf{R}_k$  respectivamente.

La función  $f$  es utilizada para hallar el estado predicho a partir del estado previo, y de forma análoga la función  $h$  se utiliza para hallar la medida predicha a partir del estado. Dicho de otro modo, la función  $f$  guarda información sobre la evolución del estado, mientras que la función  $h$  representa la transformación entre el vector

de estados y la observación ideal (sin ruido). Dada la no linealidad del sistema, las funciones  $f$  y  $h$  no pueden ser aplicadas directamente a la covarianza. En su lugar se computa su **Jacobiano**, una matriz de derivadas parciales. Es importante destacar que el filtro de Kalman Extendido no tiene propiedades de optimalidad y su precisión dependerá en gran medida de la precisión de la linealización. Dado que se realiza una linealización dinámica, no hay manera de conocer su performance de antemano (por mayor detalles referirse a [?]).

Para la predicción del estado se utilizan las ecuaciones del modelo físico del cuadricóptero presentadas en el capítulo 3.

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del filtro de Kalman Extendido son:

- Predicción:

- Estimación de la predicción del estado

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, u_{k-1})$$

- Estimación de la predicción de la covarianza

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

- Actualización

- Residuo de medida

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

- Residuo de covarianza

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k$$

- Ganancia de Kalman

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1}$$

- Estimación actualizada del estado

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$$

- Estimación actualizada de la covarianza.

$$\mathbf{P}_{k|k} = (I - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

Las matrices de transición de estados y observación son los siguientes jacobianos:

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}}$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

### 12.1.2. Esquema general del estimador de estados

Los datos (en algunos casos redundantes) obtenidos de los diferentes sensores son combinados usando un filtro de Kalman Extendido para determinar el vector de estados, detallado en 3:

$$X = \{x, y, z, \theta, \varphi, \psi, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}, \omega_{qx}, \omega_{qy}, \omega_{qz}\} \quad (12.1)$$

De la caracterización de los motores, capítulo 6, se obtiene la relación matemática entre la fuerza realizada por cada uno de los motores contra la velocidad de giro del mismo y la relación entre el torque de *drag* realizado por cada motor y su velocidad de giro. Por lo tanto basta con controlar la velocidad de giro de los motores para poder determinar todas las entradas al sistema. Se considerará entonces como entrada al sistema las velocidades angulares  $w_1, w_2, w_3, w_4$  de los 4 motores.

El esquema general del integración de los sensores se puede ver en la figura 12.2, el cual se pasa a describir a continuación.

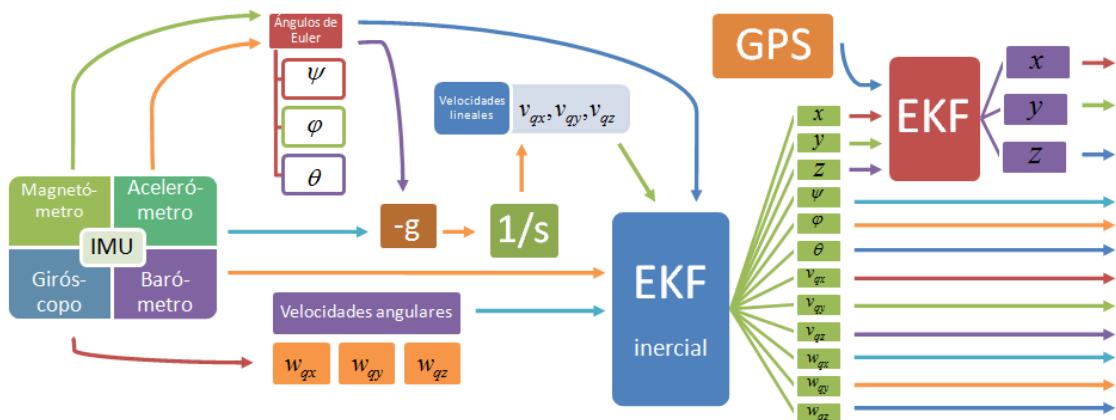


Figura 12.2: Esquema general de integración de sensores

Básicamente se utilizan 2 filtros de Kalman distintos.

El primero (Kalman inercial) se encarga de estimar los 12 estados del vector  $X$  considerando solamente las medidas obtenidas del sensor inercial (IMU). Para la estimación de los ángulos se utiliza una combinación entre las medidas obtenidas del acelerómetro y del magnetómetro, para la estimación de las velocidades angulares se utiliza directamente la medida arrojada por el giróscopo y para las velocidades lineales se trabaja con las medidas arrojadas por el acelerómetro. A su vez, al estar considerado el modelo físico dentro del filtro, se utilizan las estimaciones de todas las variables para determinar las predicciones del resto. Para la estimación de la posición en "x" y en "y" no se tiene ninguna medida de corrección, por lo que quedarán determinado únicamente por la predicción del modelo físico, lo cual resulta en una acumulación significativa de error. El segundo se encarga de la integración entre la salida del primero y los datos recogidos por el GPS. En este caso se tiene medida de corrección para la posición en todas las direcciones, resolviendo el problema de acumulación de error del filtro inercial.

La separación en 2 filtros distintos otorga una interesante flexibilidad. Es posible utilizar una estimación del estado estando a puertas cerradas, sin la necesidad de señal de GPS, a costas de una peor estimación de las posiciones y velocidades lineales en "x" e "y".

## Orientación

En estado estático, los ángulos de *pitch* y *roll* pueden ser determinados proyectando el vector medido de aceleración gravitacional por el acelerómetro. A su vez, los cambios entre el sensor magnético y el vector geomagnético medido, representan al ángulo *yaw*. Por lo tanto, el conjunto del acelerómetro y magnetómetro son capaces de determinar la orientación del cuadricóptero mediante las medidas del vector de aceleración gravitatoria y el vector geomagnético. Dado que el magnetómetro digital no introduce acumulación de error, este sistema ha sido muy utilizado para la determinación estática de la posición, como se puede ver en [?].

## Aceleración

Para poder obtener la transformación entre el vector de estados y la observación es necesario entender qué aceleración medirá el acelerómetro. Como se explica en 2.3.1, dicho dispositivo referencia su medida a un sistema en caída libre, por lo que por ejemplo al estar quieto se deberá medir la aceleración gravitatoria ( $g$ ).

Como se puede ver en el esquema mostrado en la figura 12.2, el acelerómetro es utilizado para estimar las variables de estado  $v_{qx}$ ,  $v_{qy}$  y  $v_{qz}$ , correspondientes a las velocidades lineales medidas en el sistema del cuadricóptero. No se debe confundir la derivada de estas variables con la aceleración medida por el acelerómetro. Por un lado se debe realizar el pasaje del sistema de referencia del cuadricóptero hasta un sistema de referencia inercial fijo en el mundo, y por otro lado se debe tener en cuenta el pasaje de este último hasta el sistema de referencia del acelerómetro (el sistema en caída libre), por ello es que se incluye el bloque “-g” en el diagrama de la figura 12.2.

## 12.2. Resultados

## **Parte VI**

# **Desarrollo del controlador**

---

# CAPÍTULO 13

---

## LINELIZACIÓN Y PUNTOS DE OPERACIÓN

Independientemente del sistema bajo estudio, a la hora de elegir la técnica de control a utilizar se plantean diversas posibilidades. Parece razonable intentar resolver el problema planteado utilizando las técnicas más sencillas que se disponen, al menos en una primera aproximación. En caso de que dicha solución no fuese satisfactoria se puede optar por una técnica con un mayor grado de complejidad.

Las técnicas de control más sencillas y con las que se tiene mayor experiencia se basan en el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLIT). Sin embargo el MVE obtenido en el capítulo 3 es no lineal. Se propone entonces resolver el problema del control del cuadricóptero aproximando el sistema por un sistema lineal invariante en el tiempo. Es claro que el sistema no puede ser linealizado en cualquier trayectoria o punto de operación. En este capítulo nos concentraremos en determinar bajo qué condiciones es posible aproximar el sistema por un modelo lineal.

### 13.1. Concepto general

Consideremos un sistema que se rige por la siguiente evolución de su vector de estados.

$$\dot{x}(t) = f(X(t), u(t)) \quad (13.1)$$

Donde  $x(t)$  es el vector de estados del sistema y  $u(t)$  el vector de las entradas. Supongamos en una primera instancia que tanto  $x(t)$  y  $u(t)$  son de dimensión uno. Consideremos además el punto de operación definido por  $x^*(t)$  y  $u^*(t)$ . Si realizamos un desarrollo de Taylor de orden uno en torno al punto de operación se tiene que:

$$x(t) = f(x(t), u(t)) = f(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} (x(t) - x^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} (u(t) - u^*) \quad (13.2)$$

Si definimos  $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$  y  $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$  tenemos que:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} \tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} \tilde{u}(t) \quad (13.3)$$

Este mismo concepto puede generalizarse en caso de que tanto el vector de estados como las entradas sean vectores de dimensión mayor a uno,  $n$  y  $m$  respectivamente. En este caso lo que se tiene es que:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \quad (13.4)$$

Donde  $A(t)$  es una matriz de  $n \times n$  y  $B(t)$  es de  $n \times m$ , tales que  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{x=x^*}|_{u=u^*}$  y  $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}|_{x=x^*}|_{u=u^*}$

En el caso en que todos los coeficientes de las matrices  $A$  y  $B$  son constantes podemos afirmar que estamos en presencia de un sistema lineal invariante en el tiempo.

## 13.2. Puntos de operación

Lo que buscamos ahora es encontrar las trayectorias que permiten que la linearización de nuestro sistema en torno a estas resulte en un sistema invariante en el tiempo.

Para lograr este cometido, se debe cumplir que todos los elementos de las matrices D.23 y ?? sean constantes. Se desprende del análisis de dichas matrices que los puntos de operación que cumplen esta condición quedan restrictos a un subconjunto tal que:

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = \dot{v}_{qx} = \dot{v}_{qy} = \dot{v}_{qz} = \dot{\omega}_{qx} = \dot{\omega}_{qy} = \dot{\omega}_{qz} = \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_4 = 0 \quad (13.5)$$

Veremos luego que, realizando un cambio de variable como se explica en ??, se puede ampliar el conjunto de trayectorias posibles, pudiendo agregar aquellas para las cuales  $\dot{\theta} \neq 0$ . Estas consideraciones nos llevan a concluir que el conjunto de trayectorias permitidas<sup>1</sup> es aquel en el cual tanto la velocidad del centro de masa, como la velocidad angular son constantes en el tiempo. Las trayectorias que cumplen con estas condiciones son tres:

- Hovering
- Vuelo en linea recta a velocidad constante
- Vuelo en círculo a velocidad constante

En los tres casos se tienen que cumplir las restricciones de 13.6.

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{qx} \\ \dot{v}_{qy} \\ \dot{v}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx} \\ \dot{\omega}_{qy} \\ \dot{\omega}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (13.6)$$

Cada una de las trayectorias posibles tiene además sus particularidades, a continuación nos encargaremos justamente de determinar las restricciones específicas de cada trayectoria posible.

---

<sup>1</sup>por las restricciones que hemos impuesto de trabajar con un sistema lineal invariante en el tiempo

## Hovering

En el caso del reposo mecánico no solo debe cumplirse las condiciones establecidas en 13.6 si no que además las velocidades del centro de masa y las velocidades angulares deben ser iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (13.7)$$

El sistema que tenemos es independiente de la posición, lo cual es razonable ya que el reposo puede lograrse en cualquier punto del espacio. Dado que la velocidad y velocidad angular del sistema fue definida como cero tenemos por despejar 7 variables: los ángulos de Euler, y las velocidades angulares de los motores.

Al imponer las condiciones de 13.7 las ecuaciones 3.5 y 3.6 del MVE se cumplen trivialmente. Por lo tanto tenemos solamente las seis ecuaciones correspondientes a las derivadas de las velocidades y de las velocidades angulares. Estas últimas no dependen de  $\theta$ , por lo tanto podemos afirmar que el reposo también se da para cualquier ángulo de Yaw. Lo cual también parece razonable ya que el sistema presenta simetría respecto del eje  $\vec{k}_q$ . Del análisis de las ecuaciones 13.7 se obtiene rápidamente que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad (13.8)$$

Se deduce además que:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 334,28 rad/s \quad (13.9)$$

## Vuelo en linea recta a velocidad constante

Para lograr el vuelo en linea recta a velocidad constante se tienen que cumplir las condiciones de 13.6 al igual que en el caso anterior. La particularidad del vuelo en linea recta es que la velocidad del centro de masa es una constante distinta de cero. Queda claro que lo que tenemos es que:

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = cte \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (13.10)$$

Al imponer que  $\vec{\omega} = 0$  la ecuación 3.5 se verifica trivialmente y las ecuaciones ?? y 3.9 quedan idénticas al caso del sistema en reposo. Por lo tanto, tendremos también para el movimiento en linea recta que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 334,28 rad/s \quad (13.11)$$

Hasta aquí no hemos considerado la ecuación que relaciona las velocidades lineales en el sistema inercial con las velocidades lineales expresadas en el sistema del cuadricóptero. Al considerando el resultado obtenido sobre  $\varphi$  y  $\psi$  dichas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ \dot{y} &= v_{qy} \sin \theta + v_{qx} \cos \theta \\ \dot{z} &= v_{qz} \end{aligned} \quad (13.12)$$

El vuelo en linea recta nos ofrece la posibilidad de fijar los restantes 4 parámetros de la trayectoria. Estos parámetros serán determinados por el generador de trayectorias con el objetivo de realizar alguna maniobra en particular.

### 13.2.1. Vuelo en círculos

Dado que queremos un sistema invariante en el tiempo para poder trabajar con el no nos es posible, con las ecuaciones desarrolladas hasta este instante realizar movimientos con velocidades angulares distintas de cero. Si se viola esta condición se tiene que al menos alguno de  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\varphi}$  o  $\dot{\theta}$  es distinto de cero. Por lo tanto tenemos al menos algún ángulo de Euler variante en el tiempo. Para poder obtener un movimiento circular se debe realizar el cambio de variable en el MVE en lo que respecta a las ecuaciones de la derivada de la posición propuesto en ??.

El cambio de variables en cuestión consiste en expresar la posición (exclusivamente para los movimientos circulares) en la base del cuadricóptero. Supongamos que el cuadricóptero se encuentra realizando un movimiento tal, que su proyección sobre el plano horizontal ( $Z = 0$ ) es circular. Podemos describir la posición en todo momento tomando como origen el centro de dicho círculo. Como se observa en la figura ?? la posición en dicho plano se puede expresar como  $R\vec{i}_1$ . Donde  $R$ , es el radio del círculo e  $\vec{i}_1$  es el primer vector de la base que se obtiene al realizar la primera rotación de Euler. A continuación expresaremos la posición en la base solidaria al cuadricóptero. Para lograr dicho objetivo se debe multiplicar  $R\vec{i}_1$  por la matriz cambio de base  $H_2^q H_1^2$ . Estas matrices son las definidas en 3.4. La posición ( $\vec{r}_q$ ) expresada en dicha base es entonces:

$$\vec{r}_q = H_2^q H_1^2 R \vec{i}_1 = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (13.13)$$

La ventaja que se obtiene con esta forma de expresar la posición es que la misma es independiente de uno de los tres ángulos de Euler:  $\theta$ . Este cambio es una gran ventaja ya que bajo este modelo de variables de estado se puede lograr la invariancia temporal a pesar de que este ángulo no sea constante.

Nos interesa ahora derivar la posición para terminar de completar el modelo del sistema. Dado que la posición se encuentra expresada en el sistema del cuadricóptero tendremos que:

$$\frac{d\vec{r}_q}{dt} = \frac{dR\vec{i}_1}{dt} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q = \vec{v}_q + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q \quad (13.14)$$

Por lo tanto tendremos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{y}_q \\ \dot{z}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{qx} + \omega_{qy} z_q - \omega_{qz} y_q \\ v_{qy} + \omega_{qz} x_q - \omega_{qx} z_q \\ v_{qz} + \omega_{qx} y_q - \omega_{qy} x_q \end{pmatrix} \quad (13.15)$$

Este modelo nos permitirá realizar el control basándonos en técnicas de control lineal para una trayectoria circular en el plano  $z = 0$ .

Es fundamental aclarar que las ecuaciones derivadas hasta aquí serán utilizadas exclusivamente para la linealización del sistema y no para determinar los valores de los parámetros a controlar. Para esto último continuaremos utilizando el modelo de 3.12. El movimiento circular queda determinado exclusivamente por dos parámetros la velocidad ( $V_I$ ) y la velocidad angular ( $\dot{\theta}$ ), estos serán considerados conocidos ya que es trabajo del generador de rutas o del usuario determinar que movimiento se desea realizar. Se desea determinar 12 parámetros, ocho de las doce variables de

estado (No nos interesa fijar ni ángulo de Yaw ni la posición) y las cuatro velocidades angulares de los motores. Se deben tener en cuenta evidentemente las restricciones establecidas en 13.6 sobre las derivadas de las velocidades del centro de masa y de las velocidades angulares. En lo que respecta a las derivadas de los ángulos de Euler se debe cumplir que  $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$  además  $\dot{\theta}$  debe ser igual al valor impuesto.

Dado que la velocidad debe ser de módulo constante, podemos considerar por ejemplo las tres primeras ecuaciones del MVE asumiendo  $\theta = 0$ . Dado que estamos considerando movimientos circulares con la proyección sobre el plano horizontal del vector  $\vec{j}_q$  tangente al círculo, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} v_{q_x} \cos \varphi + v_{q_y} \sin \varphi \sin \psi + v_{q_z} \sin \varphi \cos \psi \\ v_{q_y} \cos \psi - v_{q_z} \sin \psi \\ -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_{I_{hor}} \\ V_{I_{vert}} \end{pmatrix} \quad (13.16)$$

Tenemos entonces un sistema donde se desean determinar doce incógnitas y se dispone de doce ecuaciones. Dicho sistema no será resuelto en forma analítica, por el contrario se resolverá en forma numérica a la hora de planificar la trayectoria.

Es importante aclarar que no será posible obtener una trayectoria circular en la cual la altura varíe. La razón es que si queremos agregar esta característica la posición del cuadricóptero debe ser expresada como  $\vec{r} = R\vec{i}_1 + z\vec{k}$ . Luego al transformar la posición a las coordenadas del cuadricóptero la altura continua estando presente en las ecuaciones quedando entonces un sistema que no es invariante en el tiempo.

Se ha dado un paso fundamental en camino de lograr controlar el cuadricóptero, se han definido tres tipos de trayectorias las cuales es posible tratar desde el “mundo” del control lineal. Las trayectorías definidas ofrecen una amplia gama de posibilidades, ya que concatenando las mismas se pueden obtener prácticamente cualquier movimiento, a excepción de maniobras que involucren variaciones en más de un ángulo de Euler a la vez. El subconjunto de trayectorias con el que se puede trabajar es considerado ampliamente satisfactorio y por ende se da por concluido el análisis sobre los puntos de operaciones y la linealización del sistema.

---

# CAPÍTULO 14

---

## DISEÑO DEL CONTROLADOR

Diversas técnicas de control nos permiten alcanzar el objetivo trazado de lograr que el cuadricóptero siga alguna de las trayectorias especificadas en el capítulo 13. En lo que respecta al control lineal y de acuerdo a la bibliografía estudiada, dos técnicas son principalmente utilizadas, control PID<sup>1</sup> y LQR<sup>2</sup>. Ambas técnicas presentan ventajas y desventajas. En el trabajo realizado en ?? se propone el control de un cuadricóptero utilizando un controlador PID. La gran mayoría de controladores en aplicaciones industriales son de este tipo, la principal ventaja que presentan es que se trata de un diseño que tiene una estructura simple y es adecuado para la gran mayoría de procesadores ya que el costo computacional del mismo es prácticamente nulo. En dicho técnica de control la señal de entrada a la planta es una función del error entre el estado deseado y el estado estimado.

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (14.1)$$

donde  $e(t) = X_d - \hat{X}$ .

Es fundamental en esta técnica de control la determinación de las constantes. En ?? se limitan las trayectorias a trayectorias de hovering. En ese supuesto, se realizan algunas aproximaciones que permiten reducir el sistema físico a las siguientes ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g + (\cos \varphi \cos \psi) \frac{U_1}{M} \\ \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \frac{U_4}{I_{zz}} \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

Donde  $U_1, U_2, U_3$  y  $U_4$  son combinaciones lineales de los cuadrados de las velocidades angulares de cada motor. En este caso se puede tratar cada variable por separado, ya que cada variable es afectada por una sola entrada, siendo relativamente sencillo determinar las constantes  $K_p, K_I$  y  $K_d$  en función de donde se desea ubicar los polos del sistema realimentado. Con esta estrategia se pierde la posibilidad de controlar las otras 8 variables de estado, limitándose entonces a un cuadricóptero que puede realizar exclusivamente movimientos en la dirección vertical y giros en

<sup>1</sup>Proporcional, integral y derivativo

<sup>2</sup>Linear quadratic regulator

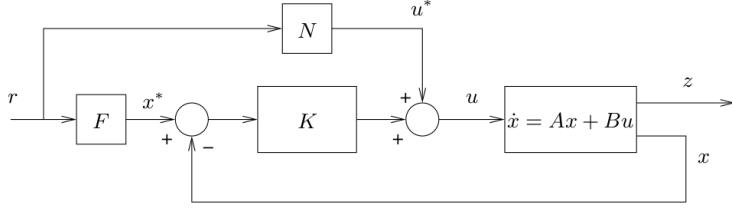


Figura 14.1: Sistema realimentado

torno a su eje vertical.

Si se intenta controlar el sistema de interés en este trabajo utilizando esta técnica, nos enfrentaríamos al problema de determinar al menos una matriz de realimentación (si trabajamos solamente con un controlador proporcional). Dicha matriz, debe ser de  $12 \times 4$ , es decir que se deben determinar los 48 elementos de la matriz de forma de lograr que la respuesta del sistema sea la deseada. Esta tarea no resulta sencilla, ya que es extremadamente difícil comprender exactamente la influencia de cada parámetro de la matriz de realimentación en la ubicación de los polos en el sistema realimentado incluso para asegurar algo elemental y necesario como la estabilidad del sistema.

Por dicho motivo se optó por explorar el camino propuesto por otros trabajos como ??, donde la técnica elegida para realizar el control del cuadricóptero es LQR.

## 14.1. Conceptos generales sobre LQR

Consideremos el sistema realimentado de la figura 14.1, con  $X(t) \in \mathcal{M}_{n \times 1}$  el vector de estados del sistema y  $u(t) \in \mathcal{M}_{m \times 1}$  las entradas.  $r$  es el setpoint del cual, multiplicando por dos matrices adecuadas pueden obtenerse los valores deseados de entrada  $u^*$  y de las variables de estado  $X^*$ . El objetivo que nos planteamos es el de obtener una matriz de realimentación  $K$  para el sistema utilizando la técnica de LQR.

El problema de encontrar un regulador óptimo puede plantearse de la siguiente forma; se trata de encontrar la matriz de transferencia  $C(s)$  que minimice la siguiente función de costo:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} X'(t) Q X(t) + u'(t) R u(t) dt \quad (14.3)$$

Donde  $Q$  y  $R$  son matrices simétricas definidas positivas de dimensiones  $n \times n$  y  $m \times m$  respectivamente. Cabe aclarar que esta es la formulación para el problema LQR continuo y de horizonte infinito.

El primer término de la integral corresponde a la energía de los estados controlados y el segundo a la energía de la señal de control. En función de como se escogen las matrices  $Q$  y  $R$ , se obtienen resultados distintos. Por ejemplo si la norma de  $Q$  es pequeña la forma más efectiva de reducir  $J_{LQR}$  es utilizar señales de control de norma pequeña a expensas de tener grandes variaciones en los estados controlados. Si bien existen diversos métodos para determinar las matrices  $Q$  y  $R$ , gran parte del

trabajo es iterativo y se realiza a ensayo y error

En la versión de realimentación de estados del problema LQR se asume que se disponen de medidas de todas las variables del vector de estados. En este caso, el controlador óptimo LQR es una matriz de ganancia K tal que:

$$u(t) - u^*(t) = -K(X(t) - X^*(t)) \quad (14.4)$$

Donde  $K \in \mathcal{M}_{m \times n}$ . Para el caso bajo análisis se tiene que:

$$K = R^{-1}B^TP \quad (14.5)$$

Donde P es la solución a la ecuación algebraica de Riccati.

La propiedad escencial del controlador LQR es que la respuesta del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, es decir que la parte real de los valores propios de la matriz  $A - BK$  es negativa, mientras se cumplan las siguientes condiciones:

- El sistema es controlable
- El sistema es observable

## 14.2. Consideraciones particulares respecto del sistema a controlar

Como se explico en capítulos anteriores, se tienen una nueva estimación del vector de estados cada  $10ms$  esto nos permite realizar acciones de control con esta misma tasa de muestreo. De acuerdo a las constantes de tiempo que involucra el sistema físico se puede afirmar que es un tiempo de acción adecuado para trabajar. A modo de ejemplo consideremos la variable  $\omega_{qz}$ . De acuerdo a las velocidades angulares de los motores que se utilizarán ( $109rads^{-1} < w_i < 387rads^{-1}$ ) y suponiendo que nos encontramos trabajando a la velocidad angular de equilibrio ( $334,28rads^{-1}$ ) La aceleración angular máxima que puede darse es de  $20,2rads^{-2}$ . En el tiempo de muestreo implica un cambio en la velocidad angular de  $11,5^\circ s^{-1}$  y un cambio en el ángulo de Yaw de  $0,058^\circ$ . Estas pequeñas variaciones nos indican que el tiempo de acción escogido es adecuado. Esto será confirmado posteriormente con las simulaciones realizadas.

Al tener un tiempo de respuesta rápido (en relación a las constantes del sistema) se podría resolver el problema utilizando la técnica de control LQR pensando en un sistema continuo, por más que nuestro sistema sea un sistema discreto. Sin embargo los métodos más sencillos para determinar la matriz de realimentación se encontraron utilizando algoritmos basados en LQR discreto. Esto fue determinante a la hora de escoger la técnica de control.

Por otra parte, el problema LQR tiene una versión de horizonte finito y una versión de horizonte infinito. A lo largo del tiempo iremos cambiando el setpoint del sistema cada ciertos intervalos de tiempo. Por dicho motivo, el horizonte de nuestro

sistema es en sentido estricto de horizonte finito. Sin embargo, las constantes de tiempo involucradas nos permiten asumir que se trata de un sistema de horizonte infinito, lo cual nos permite simplificar las ecuaciones con las que se trabaja.

### 14.3. Discretización del sistema

Como se explicó en el capítulo 13 se trabajará con tres tipos de trayectoria: hovering, vuelos en linea recta y círculos. En cada uno de estos casos tenemos un sistema lineal de la forma

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (14.6)$$

La forma que toma el sistema continuo al ser convertido a tiempo discreto es:

$$X_{k+1} = \Phi X_k + \Gamma u_k \quad (14.7)$$

Donde:

$$\Phi = e^{AT_s} \quad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{As} ds B \quad (14.8)$$

Estas relaciones surgen de discretizar el sistema considerando muestreadores de orden cero. Por más detalles de este proceso puede consultarse ??.

El problema de encontrar un regulador óptimo también puede ser planteado en un sistema discreto si reescribimos la ecuación 14.3.

$$J_{dlqr} = \sum_0^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \quad (14.9)$$

En el trabajo realizado en ?? se propone un algoritmo iterativo para obtener la matriz de realimentación que minimiza  $J_{dlqr}$ . Debido a las pequeñas diferencias encontradas entre este algoritmo y la función *lqr* de *MatLab* se optó por reproducir exactamente dicho algoritmo.

### 14.4. Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad son fundamentales para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado controlado con la técnica de LQR.

Sea el sistema lineal representado por la ecuación 14.10

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du \end{aligned} \quad (14.10)$$

Donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{p \times n}$  y  $D \in \mathcal{M}_{p \times m}$ .

Consideremos la matrices  $S \in \mathcal{M}_{n \times nm}$  definida como:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (14.11)$$

El sistema es controlable si y solo si el rango de S es n.

Consideremos la matriz  $V \in \mathcal{M}_{pn \times n}$  definida como:

$$V = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (14.12)$$

El sistema es observable si y solo si el rango de V es n.

El sistema bajo estudio es originalmente no lineal, en el capítulo 13 se estudió en torno a que tipos de trayectorias se puede aproximar el problema de controlar el cuadricóptero por el problema de controlar un sistema lineal invariante en el tiempo. Si bien no todas las trayectorias son posibles el conjunto de trayectorias es infinito ya que por ejemplo para cada trayectoria en linea recta las velocidades que se pueden manejar si bien se encuentran en un rango acotado son continuas y por ende infinitas.

En resumen, es imposible evaluar las condiciones de controlabilidad y observabilidad para todos los casos. Sin embargo, se evaluar en distintas trayectorias y confiar en que para las trayectorias no testeadas el resultado sea el mismo. En las trayectorias en las cuales se decidió verificar estas dos propiedades los resultados fueron los deseados.

Podemos afirmar que el sistema linealizado es controlable y observable en algunas de las trayectorias definidas. Asumiremos que este comportamiento es replicable para las restantes trayectorias. En diversos trabajos, por ejemplo en ??, se utiliza como técnica de control una matriz de realimentación obtenida gracias al LQR. Los resultados obtenidos en dicho trabajo son correctos y no se reportan comportamientos inestables, por lo tanto parece razonable asumir que nuestro sistema se encuentra en las mismas condiciones.

## 14.5. Matriz de realimentación

Como se explicó anteriormente, la matriz de realimentación es obtenida numéricamente gracias al algoritmo presentado en ??, dicha matriz depende del sistema lineal con el cual se representa cada trayectoria. Por lo tanto para cada trayectoria tendremos que calcular una nueva matriz de realimentación. Lo fundamental es entonces determinar adecuadamente las matrices Q y R definidas en 14.9 de forma de obtener trayectorias adecuadas. Estas matrices fueron determinadas en forma iterativa, modificando los parámetros hasta obtener un comportamiento satisfactorio en cuanto a tiempos de respuesta y robustez.

---

# CAPÍTULO 15

---

## PRUEBAS SOBRE EL CONTROLADOR

El objetivo de la presente sección es el de analizar el desempeño del controlador. Nos concentraremos entonces en analizar algunos parámetros fundamentales del mismo, es de particular interés conocer la respuesta al escalón del sistema para los tres tipos de trayectoria definidos. Modificando la altura del escalón se puede determinar la aceleración máxima a la cual podemos someter al sistema en cada trayectoria, esto resulta fundamental a la hora de imponer restricciones sobre la ruta que se desea seguir. Se analizará además la robustez del controlador implementado, para esto se añade un ruido a los estados realimentados, dicho ruido intenta representar el ruido asociado a las medidas de los sensores. El simulador desarrollado nos permite agregar a cada estado un ruido que cumple con el siguiente modelo:

$$\eta_i = A_i \cos(\omega t) + \varepsilon(\mu_i, \sigma_i) \quad (15.1)$$

Donde  $\varepsilon(\mu_i, \sigma_i)$  es un ruido gaussiano de media  $\mu_i$  y de desviación estándar  $\sigma_i$ .

### 15.1. Respuesta al escalón

Nos centraremos en estudiar las respuestas al escalón de los tres tipos de trayectorias. En esta sección no se consideran medidas con ruido, es decir que se conoce el estado a la perfección.

#### 15.1.1. Trayectoria de hovering

##### Desplazamientos en la dirección vertical

Se consideran condiciones iniciales nulas. Se fija como setpoint:

- Prueba 1:  $x_s = 0m; y_s = 0m; z_s = 1m; \theta = 0^\circ$
- Prueba 2:  $x_s = 0m; y_s = 0m; z_s = 100m; \theta = 0^\circ$

No se aprecian variaciones en ninguna de las variables de estado excepto en la posición vertical ( $z$ ) y en la velocidad  $v_{q_z}$ . Este resultado es perfectamente esperable ya que todas las variables excepto  $z$  son iguales al setpoint inicialmente. Para modificar la altura es necesario modificar la velocidad  $v_{q_z}$ , lo cual explica su variación. La respuesta al escalón para las pruebas uno y dos se muestran en la figura 15.1.

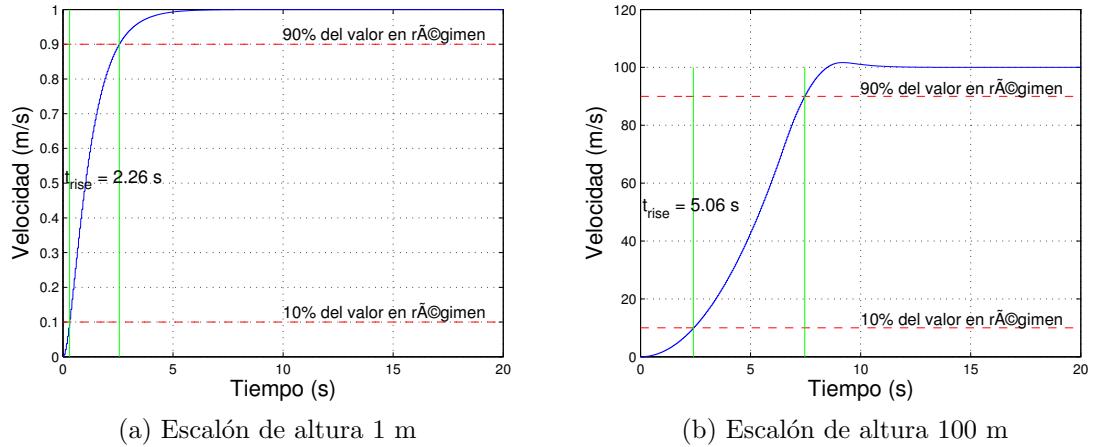


Figura 15.1: Respuesta al escalón en la altura

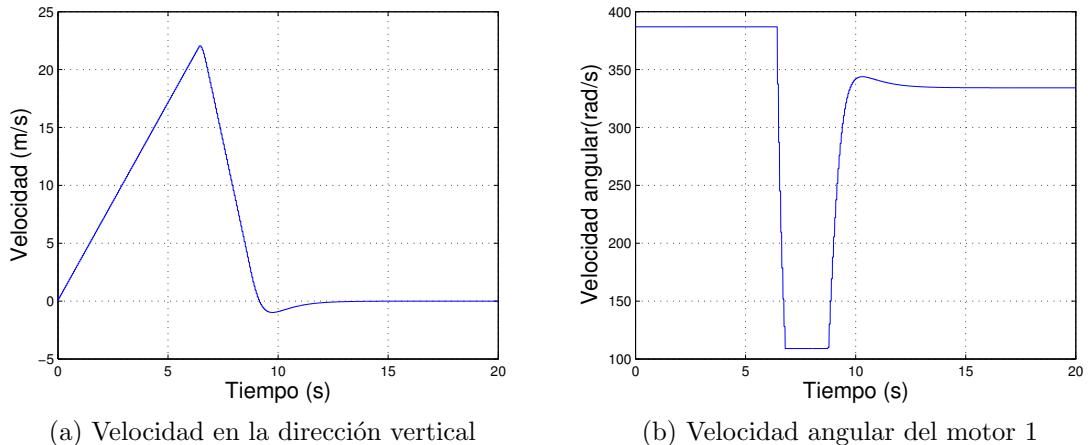


Figura 15.2: Respuestas de la velocidad vertical y la velocidad angular de los motores para el escalón de 100m

Tanto el tiempo de *rise* como el sobretiro presentado por la respuesta al escalón son considerados ampliamente satisfactorios. Para la primera prueba se obtiene un tiempo de *rise* de  $2,26\text{s}$  y no hay sobretiro. Para el escalón de  $100\text{m}$  el tiempo de *rise* es de  $5,06\text{s}$ . En esta prueba aparece un sobretiro inferior a los dos metros.

Los resultados obtenidos en la simulación son ampliamente satisfactorios ya que nos indican que se puede alcanzar un rango de alturas muy amplio en pocos segundos sin que el sistema presente comportamientos que impliquen inestabilidad. Por otra parte se observa en ambas pruebas que una vez alcanzado el valor objetivo se mantiene perfectamente.

Si estudiamos la velocidad vertical del sistema en la segunda prueba nos encontramos con que se alcanza la velocidad máxima ( $22,05\text{ms}^{-1}$ ) en  $6,46\text{s}$ . Lo cual implica una aceleración de  $3,41\text{ms}^{-2}$ . Por otra parte, luego de alcanzada la velocidad máxima esta comienza a disminuir, la aceleración el tramo en cuestión es de  $-7,09\text{ms}^{-2}$ . Estas aceleraciones son la máxima y mínima posible en la dirección

vertical ya que, como puede observarse en la figura 15.2b la velocidad angular de los motores satura, llegando tanto a su velocidad máxima y mínima.

### Desplazamientos en la dirección horizontal

Partiendo de condiciones iniciales nulas excepto la altura donde se considera  $z = 3m$ , se fija el siguiente setpoint:

- $x_s = 5m; \quad y_s = 0m; \quad z_s = 3m; \quad \theta = 0^\circ$

En la figura 15.3a se observa la trayectoria del sistema solidario al cuadricóptero a lo largo del tiempo. El comportamiento es acorde a lo esperado. Se observa que el cuadricóptero tiende a descender inicialmente para luego recuperar su posición inicial. Esto se debe a que en el instante en el cual se produce el escalón en el setpoint, se tiene que  $z - z_s = 0$ , por lo tanto, los términos de K que dependen de las diferencias no se hacen presentes en la realimentación, a diferencia de lo que sucede con los términos que dependen de  $x - x_s$ . Todo sucede como si inicialmente el controlador no controlara la altura. En la figura 15.3c puede apreciarse que la variación de la altura es cercana a los  $0,3m$ . Se realizaron simulaciones para valores de  $x_s > 5m$ , pero los resultados en cuanto a la variación de las restantes variables de estado no fueron considerados satisfactorios. Por otra parte la aceleración máxima a la cual debería ser sometido el cuadricóptero en la dirección horizontal debes ser menor a los  $2ms^{-2}$ . Estos últimos aspectos no implican que el control para la condición de hovering sea defectuoso, el controlador fue diseñado linealizando en torno a una trayectoria en la cual  $\vec{V} = 0$ , por lo tanto es razonable suponer que para no sea adecuado para controlar desplazamientos importantes. En el caso del eje  $z$  se obtuvo un desplazamiento importante ya que solamente es necesario modificar la variable  $v_{q_z}$  la cual, al tener  $\vec{\omega} = 0$  no implica variaciones en ninguna otra variable de estado. Para realizar un desplazamiento según la dirección horizontal deben modificarse o bien el ángulo de Roll o bien el ángulo de Pitch. Sigue que tanto, las velocidades como las posiciones dependen de dichos ángulos, por lo tanto variaciones importantes en los mismos nos alejan de la condición para la cual se linealizó el sistema.

En resumen, se desarrolló un controlador que nos permite grandes desplazamientos en la dirección vertical ( $\approx 100m$ ) y desplazamientos inferiores a los  $5m$  en la horizontal, con tiempos de respuesta inferiores a los  $5,06s$  y  $2,16s$  respectivamente, al menos sin presencia de ruido de medición.

## 15.2. Robustez frente a la presencia de ruido de medición

Hasta aquí hemos evaluado las características del controlador diseñado en situaciones en las cuales se conoce exactamente el vector de estados, evidentemente la situación de vuelo real no se corresponde con esta idealidad. Las medidas realizadas tienen ruido intrínseco, muy superior a los considerados en las pruebas de calibración y caracterización de los sensores. El aumento de este ruido se debe principalmente a las vibraciones mecánicas que introducen las hélices.

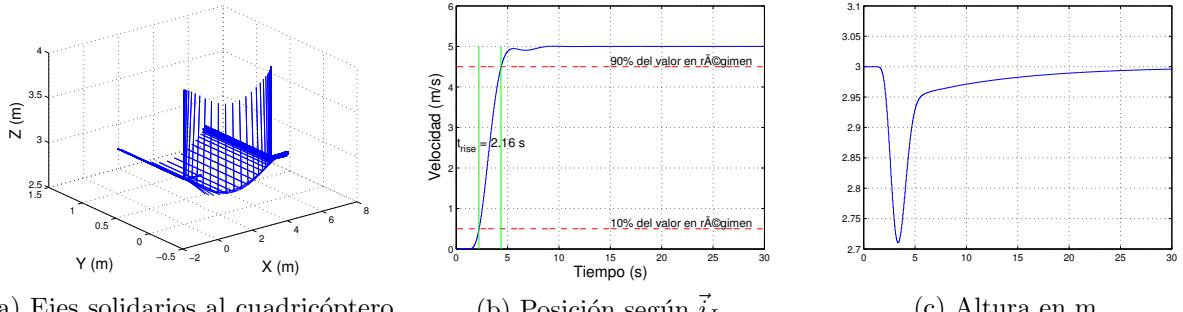


Figura 15.3: Escalón de 2m en la dirección horizontal

Resulta fundamental conocer en forma aproximada el comportamiento de los ruidos de medida. Con dicho fin se realizó una prueba de vuelo en la cual el cuadricóptero estaba sujeto por arriba y por debajo quedando imposibilitado de realizar movimientos. Se comandaron los motores a la velocidad de hovering. En la presente sección se presentan los parámetros de la ecuación 15.1 que mejor ajustan el ruido. Si bien se podría haber realizado dicho ajuste utilizando mínimos cuadrados, al menos para la parte del ruido no aleatorio, se optó por realizar dicho ajuste en forma iterativa.

Dado que los ángulos de pitch y de roll se obtienen directamente con los acelerómetros los ruidos asociados a ambas medidas son idénticas. Por dicho motivo consideraremos un solo ruido replicado en ambas variables. En el caso de las velocidades angulares y de la posición horizontal (medida con el GPS), trabajaremos de la misma forma.

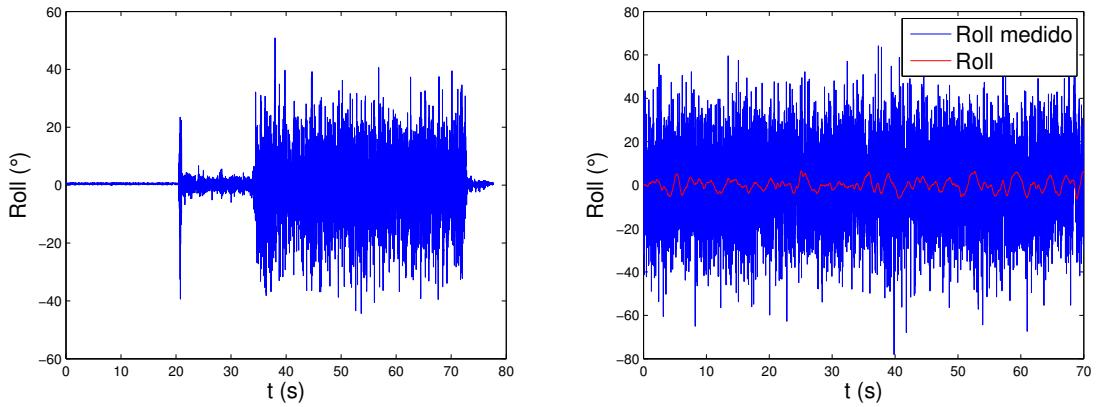
Finalmente cabe aclarar que se espera que los ruidos obtenidos sean independientes del tipo de trayectoria realizada, por lo tanto los ruidos obtenidos para la trayectoria de hovering serán los utilizados para las restantes.

### 15.2.1. Hovering

Para el ruido asociado a las medidas de los ángulos de pitch y de roll se escogieron los siguientes parámetros:

- $A_{roll} = 0,05^\circ$
- $\omega_{i_{roll}} = 2\pi 0,03 \text{ rads}^{-1}$
- $\sigma_{roll} = 6,05^\circ$
- $\mu_{roll} = 0,27^\circ$

En la figura ?? pueden compararse los ruidos obtenidos en la “situación de vuelo” descripta anteriormente y el ruido en la simulación. Asimismo puede observarse como, a pesar de la gran presencia de ruido la variable de estado de interés se mantiene controlada muy cercana al valor deseado. El valor máximo y mínimo de



(a) Medida del ángulo de Roll en “situación de vuelo”      (b) Ruido de Roll simulado y Roll efectivo

Figura 15.4: Ruidos de Roll

roll alcanzados son  $6,48^\circ$  y  $-6,41^\circ$ .

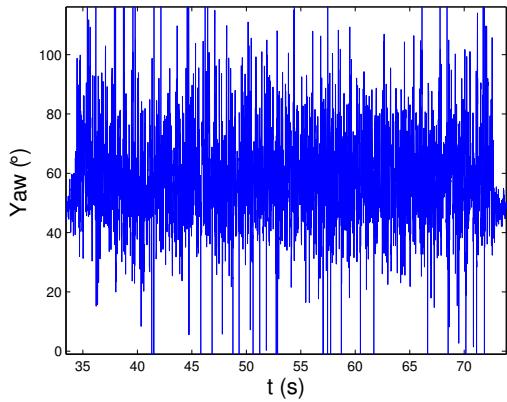
En la figura 15.4a se observan tres amplitudes de ruido bien marcadas. La primera corresponde a las medidas con los motores apagados, la segunda a partir del segundo 20.5 donde los motores operan a velocidad mínima ( $109\text{revs}^{-1}$ ) y la tercera a partir del segundo 34 donde la velocidad angular de los motores es igual a la velocidad de hovering. En lo que sigue del análisis nos concentraremos exclusivamente en esta tercer etapa.

El ángulo de Yaw se determina además utilizando la lectura del magnetómetro, por dicho motivo se separa el análisis de su ruido de los restantes ángulos de Euler. En este caso los parámetros de ruido utilizados son:

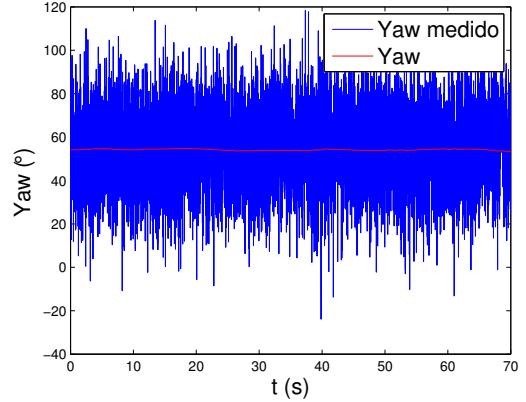
- $A_{yaw} = 0,23^\circ$
- $\omega_{yaw} = 2\pi 0,07 \text{rads}^{-1}$
- $\sigma_{yaw} = 2^\circ$
- $\mu_{yaw} = 0$

En la figura 15.5 puede observarse como, a pesar del ruido en la medida el controlador se mantiene robusto apartándose del valor objetivo  $0,96^\circ$  en el peor de los casos. El resultado en lo que respecta al control de la velocidad angular del sistema es similar. En la figura 15.6 pueden observarse las gráficas de los ruidos medido y simulado, además de la velocidad angular “real”. Se trabaja en este caso con la velocidad angular  $\omega_{qx}$ . Los parámetros de ruido escogidos son:

- $A_{\omega_{qx}} = 0,03^\circ \text{s}^{-1}$
- $\omega_{\omega_{qx}} = 2\pi 0,03 \text{rads}^{-1}$
- $\sigma_{\omega_{qx}} = 0,64^\circ \text{s}^{-1}$
- $\mu_{\omega_{qx}} = 0$

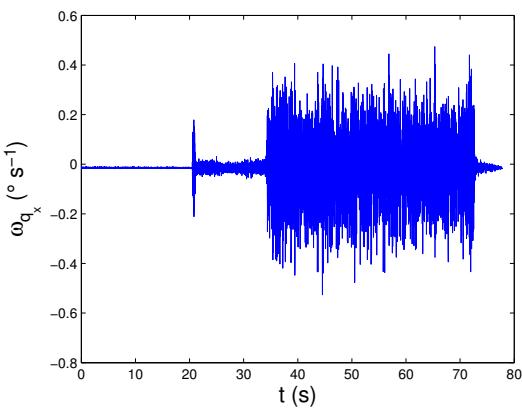


(a) Medida del ángulo de Yaw en “situación de vuelo”

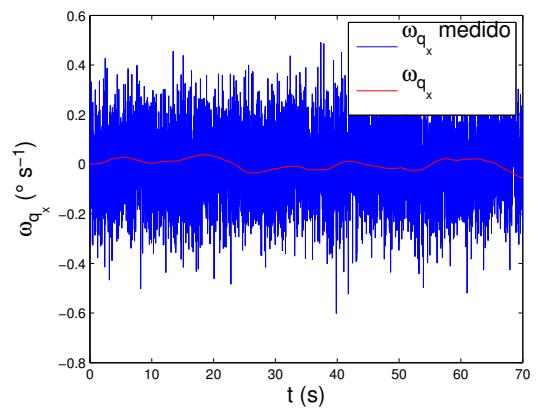


(b) Ruido de Yaw simulado y Yaw efectivo

Figura 15.5: Ruidos de Yaw

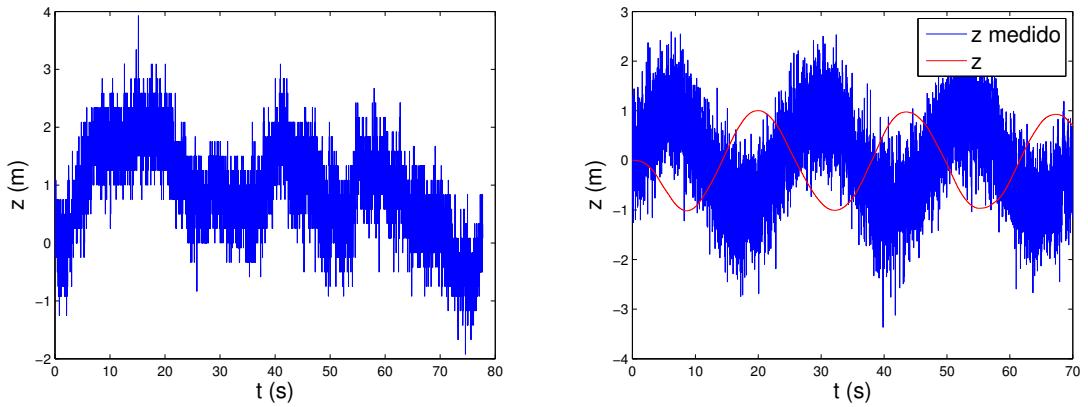


(a) Medida de  $\omega_{q_x}$  en “situación de vuelo”



(b) Ruido de  $\omega_{q_x}$  simulado y  $\omega_{q_x}$  efectivo

Figura 15.6: Ruidos de  $\omega_{q_x}$



(a) Medida de  $z$  en “situación de vuelo”

(b) Ruido de  $z$  simulado y  $z$  efectivo

Figura 15.7: Ruidos de  $z$

Los ruidos observados hasta el momento son preponderamente blancos. Por dicho motivo es prácticamente imposible observar la respuesta del control más allá de afirmar que efectivamente no nos alejamos sustancialmente de la posición deseada. En el caso del ruido en la altura la situación es distinta ya que quien juega el papel más importante en el ruido es una oscilación de baja frecuencia. Los parámetros elegidos para representar dicho ruido son:

- $A_z = 1m$
- $\omega_z = 2\pi 0,04 rads^{-1}$
- $\sigma_z = 0,34m$
- $\mu_z = 0,94m$

En la figura 15.7b se aprecia claramente la acción del control ya que para medidas que superan el valor deseado de *setpoint* el control actúa en sentido contrario, sucede lo mismo para las medidas que son inferiores al *setpoint*.

Los ruidos que se han mencionado hasta aquí corresponden a las medidas directa de los sensores. Al someter estas medidas al filtro de Kalman (ver capítulo ??) tendremos ruidos muy inferiores. Por lo tanto podemos asumir que el sistema se comportará aún mejor que lo que se evaluó en esta sección.

En lo que respecta al ruido de la velocidad no se puede trabajar simplemente con las medidas de los sensores ya que no se tiene ninguna medida directa de la velocidad. La única medida que se tiene es la aceleración, se podría integrar dicha medida para obtener valores de velocidad, pero el error introducido en la aceleración lleva a que la velocidad tenga una deriva, no tiene sentido en pensar esta magnitud con un ruido asociado, excepto que trabajemos en este caso con las estimaciones del vector de estados.

# Appendices

---

---

## ANEXO A

---

### ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DE LA MONGOOSE 9DOF IMU

#### A.1. Acelerómetro

Rango	$\pm 16g$
Resolución	10-13 bits (siempre 4mg/LSB)
Datos nuevos	0.1 a 800 Hz
Ruído XY	0.75@100Hz - 3@3200Hz LSB-rms
Ruído Z	1.1@100Hz - 4.5@3200Hz LSB-rms
Cross Axis	$\pm 1\%$

#### NOTAS:

- Output data rate puede llegar a 3200Hz, pero usando SPI. Con I<sup>2</sup>C a 400kHz solamente se puede llegar a 800Hz.
- Ancho de banda = *Datos\_nuevos*/2

#### A.2. Giróscopo

Rango	$\pm 2000^\circ/s$
Resolución	14.475 LSB/(°/s)
Datos nuevos	3.9Hz a 8kHz
Ancho de banda	256Hz
Cross Axis	$\pm 2\%$
Ruído	0.38 °/s-rms

#### NOTAS:

- Datos nuevos: La muestras pasan por un LPF digital de 256 a 5Hz, esto limita el ancho de banda.

### A.3. Magnetómetro

Rango	$\pm 8$ Ga
Resolución	5mGa@GN=2
Datos nuevos	0.75 - 75Hz
Ancho de banda	37Hz
Cross Axis	$\pm 0.2\%$ FS/Ga
Ruído	-

#### **NOTAS:**

- El rango queda determinado por la ganancia, que se configura con 3 bits:

GN	0	1	2	3	4	5	6	7
Rango (Ga)	$\pm 0.88$	$\pm 1.3$	$\pm 1.9$	$\pm 2.5$	$\pm 4.0$	$\pm 4.7$	$\pm 5.6$	$\pm 8.1$

- Se puede configurar para que el dato que muestre sea el promedio de hasta 8 muestras.

### **A.4. Sensor de presión**

Rango	300 a 1100 hPa (9000 a -500m)
Resolución	1Pa
Precisión. Abs.	typ/max $\pm 1.0/\pm 3.0$ hPa
Precisión Rel.	$\pm 0.5$ hPa
Datos nuevos	typ/max: 3/4.5ms - 17/25ms
Ancho de banda	333/40Hz
Ruído (hPa)	0.06 - 0.03
Ruído (m)	0.5 - 0.25

#### **NOTAS:**

- El rango, en altura, se refiere a la altura sobre el nivel del mar.
- El modo de operación (cantidad de muestras promediadas) afecta:
  - El tiempo de conversión.
  - El ancho de banda.
  - La resolución.
  - El ruído.
- Es necesario hacer una medida de temperatura de vez en cuando (1Hz) para mejorar la lectura del sensor de presión.

### **A.5. Sensor de temperatura**

Rango	0 a 65 °C
Resolución	0.1 °C
Precisión Abs.	typ/max $\pm 1.0/\pm 2.0$ °C
Datos nuevos	typ/max: 3/4.5ms
Ruído	-

#### **NOTAS:**

- El sensor de temperatura está incorporado al sensor de presión.

---

---

## ANEXO B

---

### CÁLCULO DE LOS TENSORES

#### B.1. Magnitudes a considerar

Según el modelo considerado explicado en 3 dividiremos el sistema en una esfera central, cuatro cilindros y cuatro varillas (también cilíndricas). Las magnitudes que debemos conocer para calcular los momentos de inercia del sistema son:

- Radio de la esfera central  $R = 8 \times 10^{-2}m$
- Largo de las varillas  $L = 26 \times 10^{-2}m$
- Radio de los motores  $r = 1,65 \times 10^{-2}m$
- Altura de los motores  $h = 3,5 \times 10^{-2}m$

Además nos interesa conocer las distancias de cada uno de los elementos del sistema al centro de masa del cuadricóptero.

- Distancia entre el centro de masa de la varilla y el centro de masa del cuadricóptero  $d_v = 14 \times 10^{-2}m$
- Distancia del eje de los motores al centro de masa del cuadricóptero  $d_m = 0,29m$

Por último las masas de los elementos en cuestión son:

- Masa de la esfera central  $M_E = 1,037kg$
- Masa de las varillas  $M_v = 0,013kg$
- Masa de los motores  $M_m = 0,113kg$

## B.2. Tensor de inercia del sistema

El tensor de inercia del sistema puede calcularse como la suma de los tensores de inercia de los rígidos que lo componen. Se considera como fue expresado anteriormente el centro del cuadricóptero como una esfera maciza. El tensor de inercia de dicha esfera puede calcularse a partir de la definición misma de tensor de inercia, sin embargo por ser una forma geométrica de vasto uso en el campo de la mecánica su tensor de inercia se encuentra ya tabulado. Sucede lo mismo con las restantes formas geométricas que componen al sistema. Los tensores utilizados pueden obtenerse en ?? En el caso de la esfera se tiene que el tensor de inercia respecto de su centro de masa es:

$$\Pi_{G_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_E \begin{pmatrix} \frac{2R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R^2}{5} \end{pmatrix}$$

En este caso el centro de masa del sistema corresponde al centro de masa de la esfera a partir de ciertas suposiciones que se realizan sobre la simetría del sistema. Por dicho motivo podemos afirmar que  $\Pi_{G_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \Pi_{O'E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$ , siendo  $O'$  el centro de la esfera.

Por otra parte el tensor de inercia de una varilla, cuya longitud coincide con el versor  $\vec{i}_q$ , respecto a su centro de masa tiene la forma:

$$\Pi_{G_{Vx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}$$

Sin embargo resulta mucho más interesante obtener el tensor de inercia expresado respecto del centro de masa del sistema. Para realizar dicho cambio se utiliza el Teorema de Steiner. Dicho teorema afirma que:  $\Pi_Q = \Pi_G + J_Q^{M,G}$ , donde los términos de  $J_Q^{M,G}$  pueden calcularse como:  $(J_Q^{M,G})_{\alpha\beta} = M(G-Q)^2\delta_{\alpha\beta} - M(G-Q)_\alpha M(G-Q)_\beta$ . El término  $\delta_{\alpha\beta}$  es conocido como Delta de Kronecker. Su valor es uno si  $\alpha = \beta$  y cero si  $\alpha \neq \beta$ . En el caso en consideración dicha matriz resulta en:

$$J_{O'}^{M_{Vx},G} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{L}{2} + d_v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{L}{2} + d_v)^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el momento de inercia total de dicha varilla es:

$$\Pi_{O'Vx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 \end{pmatrix}$$

Análogamente, el tensor de inercia de una varilla cuya longitud se encuentra respecto de la dirección  $\vec{j}_q$  respecto del centro de masa del sistema es:

$$\Pi_{O'Vy}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 \end{pmatrix}$$

Sucede algo similar en lo que respecta a los motores. Tendremos un tensor de inercia para los motores que se encuentran sobre la dirección  $\vec{i}_q$  y otro para los

motores que se encuentran sobre la dirección  $\vec{j}_q$ . El momento de inercia de un cilindro en su centro de masa es:

$$\Pi_{G_M}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La entrada (3, 3) de la matriz de la ecuación B.1 la pasaremos a llamar  $I_{zmm}$

Por lo tanto el momento de inercia respecto del centro de masa del sistema para un cilindro que se encuentra en la dirección  $\vec{i}_q$  es:

$$\Pi_{O'M_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} + d_m^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + d_m^2 \end{pmatrix}$$

En el caso de un cilindro que se encuentra en la dirección  $\vec{j}_q$  se tiene que::

$$\Pi_{O'M_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} + d_m^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + d_m^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el tensor de inercia del sistema, se calcula como la suma de los tensores de inercia de las partes que lo componen:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \Pi_{O'E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'V_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'V_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'M_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'M_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$$

Dado que todos los tensores de inercia considerados hasta el momento son diagonales, podemos escribir el tensor de inercia del sistema como:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

### B.3. Resultados

En base al análisis realizado hasta el momento se tiene que:

$$I_{zmm} = 1,54 \times 10^{-5} \text{kgm}^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 2,32 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$$

$$I_{zz} = 4,37 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$$

---

## ANEXO C

---

# CÁLCULOS NECESARIOS PARA LA LINEALIZACIÓN DEL SISTEMA

Tal como se explica en el capítulo 13 se linealiza el MVE obtenido en 3, esto es, expresar el sistema no lineal bajo la forma:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \quad (\text{C.1})$$

Donde  $A(t)$  y  $B(t)$  son tales que  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$  y  $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$

### C.1. Linealización para cualquier trayectoria

Para una trayectoria genérica al linealizar el sistema se obtienen las matrices:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Las entradas de la matriz de D.23 representan matrices de  $3 \times 3$  mientras que las entradas de la matriz ?? representan matrices de  $3 \times 4$ . Es importante conocer las entradas de las matrices anteriores, al menos en lo que respecta a las dependencias de cada una de ellas con las variables de estado.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} f_{A_{12_1}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_2}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_3}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_4}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_5}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_6}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_7}}(\psi, \varphi, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_8}}(\psi, \varphi, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} f_{A_{13_1}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_2}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_3}}(\psi, \varphi, \theta) \\ f_{A_{13_4}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_5}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_6}}(\psi, \varphi, \theta) \\ f_{A_{13_7}}(\varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi, \varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi, \varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} f_{A_{22_1}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & f_{A_{22_2}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 \\ f_{A_{22_4}}(\psi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 & 0 \\ f_{A_{22_7}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & f_{A_{22_8}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$A_{24} = \begin{pmatrix} 1 & f_{A_{24_2}}(\psi, \varphi) & f_{A_{24_3}}(\psi, \varphi) \\ 0 & f_{A_{24_5}}(\psi) & f_{A_{24_6}}(\psi) \\ 0 & f_{A_{24_8}}(\psi, \varphi) & f_{A_{24_9}}(\psi, \varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & g \cos \varphi & 0 \\ -g \cos \varphi \cos \psi & g \sin \varphi \sin \psi & 0 \\ g \cos \varphi \sin \psi & g \sin \varphi \cos \psi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{qz} & -\omega_{qy} \\ -\omega_{qz} & 0 & \omega_{qx} \\ \omega_{qy} & -\omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_{zzm}}{I_{xx}}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qz} & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qy} \\ \frac{I_{zzm}}{I_{yy}}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + \frac{-I_{xx} + I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qz} & \frac{-I_{xx} + I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{B_{31_9}}(\omega_1) & f_{B_{31_10}}(\omega_2) & f_{B_{31_11}}(\omega_3) & f_{B_{31_12}}(\omega_4) \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$B_{41} = \begin{pmatrix} 0 & f_{B_{41_2}}(\omega_2) & 0 & f_{B_{41_4}}(\omega_4) \\ f_{B_{41_5}}(\omega_1) & 0 & f_{B_{41_6}}(\omega_3) & 0 \\ f_{B_{41_9}}(\omega_1) & f_{B_{41_{10}}}(\omega_2) & f_{B_{41_{11}}}(\omega_3) & f_{B_{41_{11}}}(\omega_4) \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

## C.2. Linealización para la condición de hovering

Con las condiciones 13.6 y 13.7 obtenidas en el capítulo 13 se pueden obtener las matrices A y B en el caso particular de hovering. Además puede verificarse que todas las entradas de dichas matrices son constantes y que por lo tanto estamos frente a un sistema lineal invariante en el tiempo.

$$A_{hov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{hov_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{hov_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$B_{hov} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{hov_{31}} \\ B_{hov_{41}} \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

Donde  $Id$  es la matriz identidad y las matrices  $A_{hov_{13}}, A_{hov_{32}}, B_{hov_{31}}$  y  $A_{hov_{41}}$  son:

$$A_{hov_{13}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{hov_{32}} = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$B_{hov_{31}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

$$B_{hov_{41}} = \begin{pmatrix} 0 & 2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 & -2,9 \times 10^{-1} s^{-2} \\ -2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 & 2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 \\ 5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & -5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & 5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & -5,0 \times 10^{-2} s^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Dado que fue impuesto que  $\theta$  fuese constante para este movimiento, tenemos efectivamente un sistema lineal invariante en el tiempo.

### C.3. Vuelo en linea recta a velocidad constante

Las matrices A y B obtenidas para esta situación de vuelo son:

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 0 & A_{rec12} & A_{rec13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{rec32} & 0 & A_{rec34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (C.19)$$

$$B_{rec} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{rec31} \\ B_{rec41} \end{pmatrix} \quad (C.20)$$

Donde  $A_{rec13} = A_{hov13}$ ,  $A_{rec32} = A_{hov32}$ ,  $B_{rec} = B_{hov}$  y

$$A_{rec12} = \begin{pmatrix} v_{qz} \sin \theta & v_{qz} \cos \theta & -v_{qy} \cos \theta - v_{qx} \sin \theta \\ -v_{qz} \cos \theta & v_{qz} \sin \theta & v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ v_{qy} & -v_{qz} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{hov32} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (C.21)$$

### C.4. Vuelo a velocidad angular constante

Luego de las modificaciones introducidas en el MVE en la sección 13 se procede a linealizar el sistema obtenido.

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{cir11} & 0 & Id & A_{cir14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad (C.22)$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \quad (C.23)$$

Las matrices obtenidas son todas idénticas a las obtenidas en la linealización del MVE original a excepción de las matrices  $A_{cir11}$  y  $A_{cir14}$ . Estas tienen la forma:

$$A_{cir11} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{qz} & -\omega_{qy} \\ -\omega_{qz} & 0 & \omega_{qx} \\ \omega_{qy} & -\omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{cir14} = \begin{pmatrix} 0 & -z_z & y_q \\ z_q & 0 & -x_q \\ -y_q & x_q & 0 \end{pmatrix} \quad (C.24)$$