

FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA



PROYECTO DE FIN DE CARRERA DE INGENIERÍA  
ELÉCTRICA

---

## Implementación de un UAV con arquitectura de cuadricóptero

---

*Autores:*

Santiago PATERNAIN  
Rodrigo ROSA  
Matías TAILANIÁN

*Tutor:*  
Ing. Rafael CANETTI



19 de mayo de 2012

---

# INTRODUCCIÓN

Existe actualmente en el Instituto de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República una línea de investigación orientada a la robótica móvil y a técnicas de control. En este marco, se han desarrollado diversas plataformas experimentales tanto por docentes del Departamento de Control como por estudiantes durante los proyectos de fin de carrera. En particular, dos proyectos de fin de carrera se orientaron al diseño de un UAV<sup>1</sup> con arquitectura de avión. El primero de ellos, *AMFO1-Bobby*, se avocó al diseño y construcción de un avión de dimensiones reducidas con capacidad de vuelo relativamente prolongada. Dicha plataforma fue diseñada para ser volada gracias a un control remoto. El proyecto AUION, continuó el trabajo resolviendo el diseño del controlador del avión en la situación de vuelo, quedando excluido el despegue y el aterrizaje del vehículo.

En el presente proyecto se continúa trabajando en la línea presentada, diseñando e integrando un sistema de control a un vehículo aéreo comercial con arquitectura de cuadricóptero de forma de lograr el vuelo autónomo del mismo. Por vuelo autónomo se entiende la capacidad de seguir una trayectoria autogenerada a partir de puntos del espacio introducidos por un usuario por los cuales se desea “pasar”, de ahora en más *waypoints*.

La arquitectura escogida ofrece una gran variedad de aplicaciones entre las cuales se puede nombrar la fotografía y el cine, el relevamiento de zonas peligrosas o contaminadas, la vigilancia y la navegación bajo techo.

No es el objetivo de este proyecto desarrollar un producto final, sino que por el contrario lo que se plantea es desarrollar una plataforma experimental sobre la cual otros grupos puedan trabajar, profundizando en diversas áreas como la estimación de estados, técnicas de control más avanzadas, la generación de rutas óptimas y la cooperación entre varias plataformas idénticas.

El objetivo del presente proyecto incluye instrumentar dos cuadricópteros de forma de poder obtener todas las variables de estado con las que se elige representar al sistema. La comprensión del comando de los motores y la caracterización de los mismos son parte fundamental para realizar el control del sistema. Se de-

---

<sup>1</sup>Unmanned aerial vehicle

sarrollará una primer versión de un generador de rutas que defina la trayectoria a seguir a partir de waypoints introducidos por el usuario. Se desarrollará un controlador que permita seguir la trayectoria generada por el generador de rutas. Se deberá programar e integrar una CPU a cada cuadricóptero para realizar las tareas hasta aquí planteadas, manteniendo la posibilidad de trabajar en modo automático y manual.

Como ya fue explicitado, es de interés que este proyecto sea la plataforma para el desarrollo de proyectos que permitan una profundización en las líneas de trabajo planteadas, por dicho motivo se incluye dentro del alcance el diseño de un simulador que permita, a lo largo de este y de futuros proyectos, testear los algoritmos de control en desarrollo.

# **Parte I**

## **Descripción del sistema**

---

# CAPÍTULO 1

---

## VISIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Consideramos importante explicar superficialmente las distintas partes que componen el proyecto de forma de que el lector se haga una idea general de los distintos bloques que componen al sistema para luego ir profundizando sobre cada uno de ellos en los siguientes capítulos.

El esquema general de un cuadricóptero es el que se puede apreciar en la figura 1.1, el mismo se compone de dos ejes perpendiculares, en cuyos extremos se ubican los propulsores ( motores y hélices). Las velocidades angulares de dichos motores ( $\omega$ ), así como las fuerzas ( $T$ ) y torques ( $M$ ) producidos por ellos se presentan también en la figura 1.1. Tanto los torques como las fuerzas de los propulsores dependen de la velocidad angular de las hélices. Por dicho motivo, lo que se busca es actuar sobre los motores variando la velocidad angular de los mismos para realizar las distintas acciones de control.

### 1.1. Acciones de control básicas

Existe una velocidad angular de los motores para la cual la fuerza total producida es igual al peso, esa velocidad angular permite que el cuadricóptero permanezca suspendido con velocidad nula, esta situación es conocida como *hovering*.

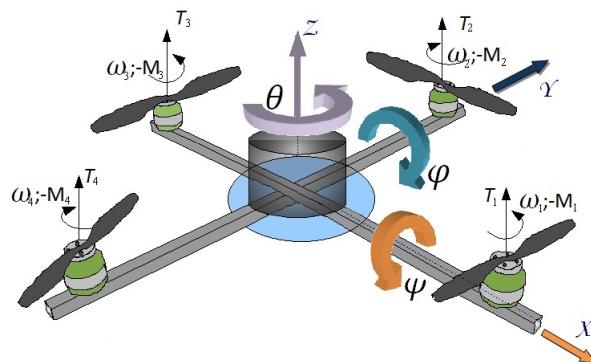


Figura 1.1: Esquema general de un cuadricóptero

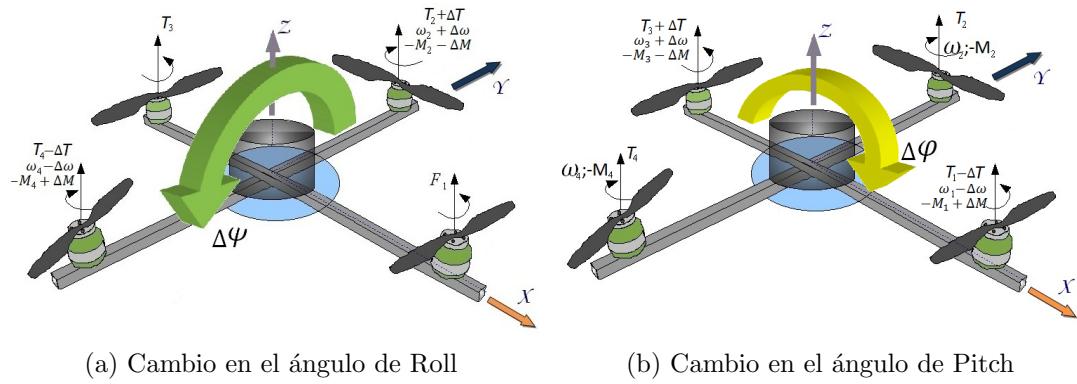


Figura 1.2

Si aumentamos uniformemente la velocidad angular de los motores la fuerza producida por los mismos supera al peso y el sistema se acelera hacia arriba. Por el contrario si la velocidad angular es inferior a la velocidad angular de hovering el sistema se acelera hacia el centro de la Tierra.

Para realizar una rotación se debe crear un desbalance entre los torques producidos por los motores. Si se desea realizar aumentar el ángulo de Roll ( $\psi$ ), debe disminuirse la velocidad angular del motor 4 y aumentar la del motor 2 manteniendo la fuerza neta igual a la fuerza necesaria para lograr el hovering. Esta situación se encuentra representada en la figura 1.2a. Del mismo modo, como se observa en la figura 1.2b para aumentar el ángulo de Pitch debe aumentarse la velocidad angular del motor 3 y disminuir la velocidad angular del motor 1. Finalmente si se desea aumentar el ángulo de Yaw se debe disminuir la velocidad de la velocidad de los motores 1 y 3 y aumentar la de los motores 2 y 4, manteniendo la fuerza neta igual a la fuerza de hovering. Esta última situación es la presentada en la figura 1.3.

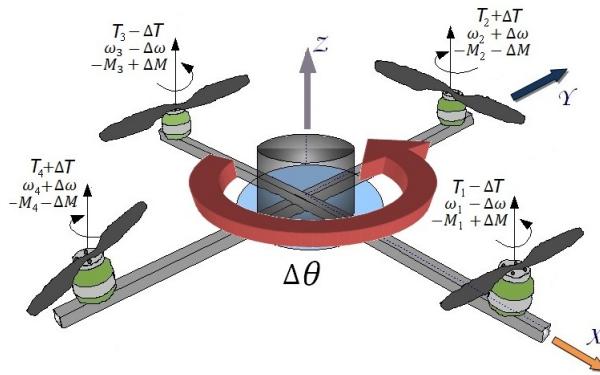


Figura 1.3: Cambio en el ángulo de Yaw

Las acciones de control descriptas anteriormente pueden ser combinadas de forma de lograr trayectorias más complejas, gran parte de los capítulos siguientes intentan explicar que acción debe realizarse sobre cada motor para lograr el objetivo planteado.

## 1.2. Componentes del sistema y su interacción

En la proxima sección se verá en detalle el hardware utilizado durante el presente proyecto, sin embargo daremos una visión general del sistema que se desea implementar. En la figura 4.3 se presenta un diagrama de bloques del sistema.

La plataforma elegida es un cuadricóptero comercial radio controlado, por dicho motivo una parte del sistema se encuentra ya diseñada, esta incluye los elementos indispensables para poder volar manualmente el cuadricóptero, es decir transmisor, receptor, CPU1, motores y ESCs<sup>1</sup>.

Una de las señales del receptor será utilizada para definir si el control de los motores estará comandado por la CPU1 o por la CPU2 (piloto automático). Esta última es el centro del sistema de control que se desea implementar. Para determinar las acciones a realizar sobre los motores es imprescindible contar con cierta instrumentación (IMU<sup>2</sup> y GPS) que permita estimar las variables de interés.

Se desea además que la CPU2 tenga una comunicación con el mundo exterior de forma de facilitar la programación de los algoritmos y de modificar o agregar waypoints durante el vuelo.

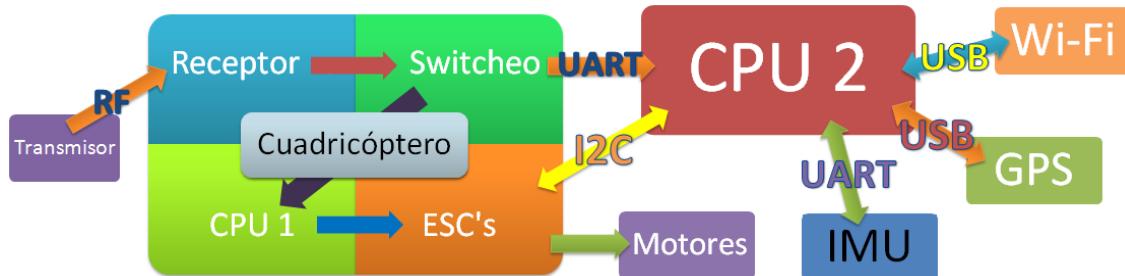


Figura 1.4: Esquema general de interconexión

<sup>1</sup>Electronic speed controllers

<sup>2</sup>Inertial Measurement Unit

---

# CAPÍTULO 2

---

## HARDWARE

La elección del Hardware significa una parte muy importante del Proyecto, ya que las decisiones tomadas condicionan el resto del mismo. Una mala elección de alguno de los componentes puede resultar en complicaciones no previstas a la hora de la ejecución, causando contratiempos inesperados y trabajo excesivo. Es necesario, entonces, el estudio detallado de cada uno de los componentes a utilizar, comparando características, rendimientos y utilidades.

### 2.1. Plataforma física: Cuadricópteros

A la hora de la planificación del Proyecto se plantean la opción de partir de cero diseñando completamente el cuadricóptero. Si bien esta opción tiene la ventaja de que se puede conocer completamente su funcionamiento incluye desafíos de ingeniería mecánica, conocimientos de resistencia, flexibilidad y peso de materiales, así como también diversas complicaciones adicionales a la hora de fabricar y armar los distintos componentes.

Teniendo en cuenta que se trata de un proyecto con tiempo acotado y su objetivo se centra en el control del vehículo, la necesidad de partir de hardware ya construido resulta imperiosa. La plataforma escogida es el cuadricóptero Turbo Ace X720, este mismo cuadricóptero es conocido además como LotusRc 850.

Esta plataforma es controlada por un usuario a través de un control remoto



Figura 2.1: Turbo Ace X720

(Walkera 2801). El sistema receptor - CPU se encarga de setear la velocidad angular de cada motor en función de la señal recibida.

## Motores

Los motores de la plataforma son *Brushless*, estos son motores eléctricos alimentados con corriente continua. Tienen un sistema de conmutación eléctrico y presentan relaciones lineales entre *Corriente* y *Torque* y entre *Frecuencia* y *velocidad*. Son comúnmente utilizados en vehículos radio-controlados por su gran eficiencia, potencia, durabilidad y su bajo peso en comparación con los tradicionales motores *Brushed*. Sin embargo, los motores de CC *Brushless* son mucho más complicados de controlar, ya que la fase varía con la rotación del motor. Para controlarlos debe utilizarse un dispositivo llamado *Controlador eléctrico de velocidad*, o **ESCs**. Comúnmente los ESCs se clasifican según su corriente máxima, por ejemplo 10 ampéres o 10A.

El comando de los motores se basa en el protocolo  $I^2C$  de frecuencia 400kHz.

## Peso

La carga útil que el dispositivo pueda soportar juega un papel fundamental. Vale recordar que, además de toda la instrumentación que incluye el cuadricóptero, se incorporará un microprocesador, una batería independiente para su alimentación, un giróscopo, un acelerómetro, un GPS y alguna interfaz para la comunicación. A su vez es interesante conservar la posibilidad de integrar una cámara fotográfica convencional ya que puede ser de gran utilidad para numerosas aplicaciones. La fuerza que los motores pueden realizar es acotada, por lo que el peso del dispositivo influye directamente en la carga útil del mismo. Para esta plataforma la carga adicional que puede agregarse es de 1300g incluyendo batería.

## Tiempo de vuelo

El tiempo de vuelo puede resultar crítico según la aplicación considerada, en este caso no será posible superar los 20 minutos de vuelo utilizando una batería de LiPo de 5300mAh.

## Instrumentación

La instrumentación que el dispositivo brinda está destinada al manejo mediante el control remoto. La misma incluye un acelerómetro y un giróscopo de 3 ejes, un barómetro y poseen algún sistema de estabilización incluido, de forma de facilitar el control.

Lamentablemente el software presente en la CPU es privativo por lo tanto reutilizarlo parece una tarea muy difícil, del mismo modo obtener la lectura de los sensores presentes tampoco parece una tarea sencilla. Por dicho motivo se opta por dotar al sistema de instrumentación adicional.

## 2.2. Inteligencia

Además de la plataforma física, deben seleccionarse componentes electrónicos capaces de procesar la información proveniente de los sensores, computar y ejecutar los algoritmos de control y generar las señales necesarias para transmitir las instrucciones a los motores.

La solución implementada se basa en la plataforma de desarrollo *Beagleboard*. Esta plataforma posee un microprocesador TI ARM Cortex A8 de 1GHz y un DSP TMS320C64x+ de 800MHz, la memoria RAM de la misma es de 512 Mb y si bien no tiene memoria no volatil soporta tarjetas SD de hasta 4GB. Ver figura 2.2.



Figura 2.2: Beagleboard

### Dimensiones y peso

Si bien no resulta una característica determinante, es conveniente que las dimensiones y peso de la placa elegida sean lo menores posibles, de forma de no ocupar gran parte de la carga útil del cuadricóptero con electrónica asociada a la inteligencia implementada. El peso de la Beagleboard y una batería asociada diseñada especialmente para esta plataforma es de 76 gramos y sus dimensiones son  $10\text{cm} \times 8,5\text{cm} \times 2\text{cm}$ . La autonomía de la batería es de aproximadamente 2 horas.

### Programación y Sistema Operativo

Es importante tener en cuenta como será realizada la programación de los sistemas considerados (dónde se almacena el programa, hardware necesario para la programación, etc.) En particular, es conveniente poder contar con algún sistema operativo que facilite la tareas de programación, testeo y debugging.

La BeagleBoard ofrece la posibilidad de cargar un kernel de *Linux* desde una tarjeta SD. Esto ofrece una amplia gama de posibilidades. A modo de ejemplo podemos nombrar las facilidades que implica en cuanto a la comunicación. La plataforma dispone de una interfaz ethernet y cuatro puertos USB. Al disponer de un sistema operativo, los *drivers* de dichas interfaces se pueden utilizar obteniendo así la posibilidad de realizar ajustes sobre el sistema a través de la interfaz ethernet o de una

interfaz WiFi agregando el módulo USB (Belkin wireless G). Además se dispone de un puerto serie.

## Puertos e I/Os

Las posibilidades que ofrece la Beagleboard en cuanto a puertos de entrada y salida son muy considerables. A modo de ejemplo se tienen cuatro puertos USB, una interfaz ethernet un puerto de expansión de 28 pines de propósito general y un puerto serie. En lo que respecta a la solución implementada es importante destacar que los pines 23 y 24 pueden ser programados para comunicarse a través del protocolo  $I^2C$  fundamental para enviar comandos a los motores. Los pines 23 y 24 corresponden a las líneas de datos y al reloj respectivamente. Por otra parte, los pines 8 y 6 pueden ser configurados para funcionar como pines de transmisión y recepción de un puerto serie. Esto será fundamental para la comunicación con algunos de los sensores.

## 2.3. Instrumentación

Para poder controlar el sistema es importante poder conocer los valores que toman las variables del mismo. Como se verá en el capítulo sobre el desarrollo del modelo físico del cuadricóptero, las variables que es necesario conocer son:

- La orientación del cuadricóptero
- La posición del cuadricóptero
- La velocidad del cuadricóptero
- La velocidad angular

Por dicho motivo parece imprescindible dotar al sistema de sensores capaces de medir dichas magnitudes directa o indirectamente.

### 2.3.1. IMU

#### Acelerómetro

Un acelerómetro es un dispositivo capaz de medir su aceleración propia en el marco de referencia de la caída libre. Esto implica que el dispositivo no mide siempre su cambio de velocidad en el espacio. Por ejemplo, la medida de un acelerómetro en caída libre será cero a pesar de que su velocidad crezca, de la misma forma se puede observar que un acelerómetro en reposo respecto de la Tierra, no dará una medida nula, sino que por el contrario medirá como aceleración g.

Existen diversos tipos de acelerómetro, en este caso se eligió trabajar con un acelerómetro contenido en un circuito integrado (tecnología MEMS). Las razones de esta elección son fundamentalmente tamaño y peso (críticos en la aplicación) y económicos. Los mismos son más pequeños, livianos y baratos que otras tecnologías. Dicho acelerómetro procesa las medidas y las convierte a una salida eléctrica; la forma de dicha salida depende si el integrado es analógico o digital.

Los acelerómetros basados en tecnologías MEMS miden cambios internos de la transferencia de calor causada por la aceleración, ofreciendo ventajas significativas sobre el empleo de una estructura tradicional sólida de masas de prueba.

Un acelerómetro de tres ejes no es otra cosa que un acelerómetro capaz de medir su aceleración propia en tres ejes de coordenadas.

El acelerómetro cumple dos roles fundamentales. El primero es que, bajo el supuesto que las aceleraciones a las cuales se verá sometido el sistema no son comparables con  $g$  el mismo sirve para determinar con gran precisión los ángulos de Pitch y de Roll. El segundo, es que nos permite obtener una estimación de la velocidad al integrar su medida.

## Giróscopo

Un giróscopo es un instrumento que mide la velocidad angular del sistema en un sistema de referencia solidario a si mismo. Las mismas restricciones sobre tamaño, peso y costos que se aplicaban para el acelerómetro se aplican aquí. Por dicho motivo se vuelve a optar por un instrumento de tecnología MEMS.

Desde el punto de vista teórico, procesando la información obtenida a partir del acelerómetro y del giróscopo se puede conocer en todo momento la posición del sistema y su orientación a partir de las condiciones iniciales.

En la práctica, sin embargo, esto no sucede así. Todas las medidas realizadas tienen un cierto error. Para obtener la orientación y la posición a cada instante se deben integrar las medidas obtenidas, por lo tanto, se integra también el error cometido. Esto produce una acumulación de errores que afecta de forma considerable el resultado final luego de cierta cantidad de muestras.

Parece razonable, entonces, poder cotejar los datos que se obtienen mediante este método con datos obtenidos mediante otras fuentes. Es a partir de esta problemática que surge la necesidad de contar con un GPS. Se puede, cada cierto intervalo de tiempo, observar en cuanto difieren los resultados obtenidos integrando las medidas de los sensores con los datos que aporta el GPS, logrando de esta forma corregir los errores debido al *integration drift*.

## Sensor de presión

Si bien un dispositivo GPS provee una estimación de la altura a la que se encuentra, la misma resulta ser poco exacta y confiable, por depender fuertemente de la cantidad de satélites vistos por el GPS así como por el efecto del rebote de las ondas en estructuras cercanas (resulta particularmente crítico el efecto de los rebotes en el piso, los cuales dan poca precisión a la medida de altura al estar muy cerca del suelo). Por este motivo es necesario contar con un sensor de presión absoluta que nos permita determinar la altura del cuadricóptero en forma independiente al resto de los sensores. La medida de presión debe ser absoluta pues es este tipo de medidas las que pueden ser traducidas a altura en forma rápida y confiable.

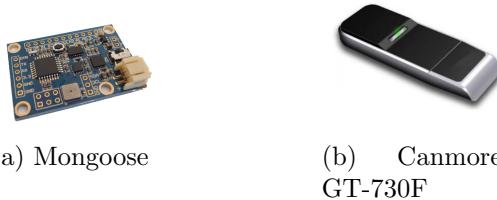


Figura 2.3: Instrumentación

## Magnetómetro

Si bien el sistema contará con giróscopos que permitirán, a través de integración, estimar la orientación del cuadricóptero, dicha estimación está sujeta a los errores asociados a este tipo de sensores (errores de drift e integración, entre otros), siendo además dicha medida una medida diferencial, teniendo como única referencia la orientación inicial del cuadricóptero. Eso por ello que resulta conveniente contar con un magnetómetro que permita tener una medida absoluta y confiable del ángulo de Yaw, la cual puede ser entonces complementada y corregida mediante la información obtenida mediante la integración de la información generada por el giróscopo.

## Sensor de temperatura

Si bien el control del sistema no depende directamente de la temperatura, los instrumentos a utilizarse están construidos con cierta tecnología que presenta dependencia con (y por ende tendrá errores asociados a) la temperatura. El contar con un sensor de temperatura permitirá sensar la misma y realizar correcciones en tiempo real que permitan minimizar dicho errores.

La Mongoose 9DoF IMU posee todos los sensores que se han nombrado hasta aquí excepto el GPS. La misma posee además un micropresador con facilidades para ser programado, pudiendo así realizar un preprocesamiento de los datos antes de realizar la estimación del estado. Entre las modificaciones realizadas las más importantes son un aumento y una estabilización de la frecuencia de muestreo y la conversión de los datos de salida de formato ASCII a binario. Esto último permite una mayor velocidad de transmisión de los mismos a través del puerto serie de la Mongoose. En la figura 2.3a se puede observar dicha placa de instrumentación. Las características de dicha placa pueden consultarse en el anexo A.

### 2.3.2. GPS

La elección del GPS se basó casi totalmente en lograr la simplicidad del sistema. Existían muchas opciones, placas de diversos tamaños, con diversos tamaños de antenas, pero todas con similares especificaciones.

Las placas candidatas a estar a cargo de la inteligencia contaban con interfaces USB, por lo que se optó por comprar un dongle GPS, cuyas especificaciones son similares a las del resto de las opciones, y se puede comunicar vía USB gracias a drivers ya existentes para linux. Se optó por utilizar un GPS *Canmore GT-730F*.

## **2.4. Consideraciones adicionales sobre el hardware utilizado**

Si bien entendemos que en lo que respecta a la instrumentación la elección es la adecuada para la primer versión de la plataforma en el futuro puede ser de interés añadir al sistema la posibilidad de obtener la posición mediante el procesamiento de imágenes, para lograr una mayor exactitud en la estimación de la posición . Para esto, la capacidad de procesamiento, las bibliotecas existentes de *computer vision* y los módulos de cámaras VGA diseñados para trabajar con la Beagleboard permiten aprovechar al máximo la capacidad de esta plataforma la cual supera ampliamente los requerimientos de este proyecto.

## **Parte II**

# **Modelado del sistema**

---

# CAPÍTULO 3

---

## MODELO FÍSICO

Resulta imprescindible para controlar el cuadricóptero comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de este capítulo es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo en Variables de Estado, de ahora en más MVE. Lo que se busca es obtener una representación del sistema de la forma  $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ , donde  $\vec{x}$  es el vector de estados del sistema,  $\vec{u}$  es el vector que representa las entradas del sistema y  $t$  es el tiempo.

Al tratarse de una plataforma comercial no se dispone de todos los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo, a modo de ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores ni el tensor de inercia del sistema. La obtención de dichos parámetros se detalla en el capítulo 6 y en el anexo B respectivamente. En el presente análisis nos limitaremos a obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del cuadricóptero.

### 3.1. Hipótesis de trabajo

No debe perderse de vista que el cuadricóptero con el que se trabaja fue diseñado para ser comandado a través de un control remoto. Por dicho motivo es razonable que sus características sean tales que le permitan a una persona volarlo desde el suelo. Parece perfectamente razonable que se haya diseñado el sistema para volar por tiempos limitados, distancias relativamente cortas y a bajas velocidades. Estas consideraciones permiten introducir diversas simplificaciones en el modelado.

#### 3.1.1. La Tierra como sistema de referencia inercial

La Tierra **no** es un sistema de referencia inercial ya que la misma se encuentra sometida a la traslación en torno al Sol y a una rotación en sobre su eje. Supongamos una partícula que se encuentra en movimiento relativo a la Tierra. Su aceleración respecto de un sistema verdaderamente inercial puede escribirse como:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C \quad (3.1)$$

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.2)$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (3.3)$$

En las ecuaciones anteriores  $\vec{a}$  es la aceleración de la partícula en el sistema relativo,  $\vec{v}$  es la velocidad relativa de la partícula,  $\vec{r}$  la posición relativa,  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular de la Tierra y  $\vec{a}_{O'}$  es la aceleración del centro de masa de la Tierra. A  $a_T$  se le llama aceleración de transporte, y a  $a_C$  aceleración de Coriolis. El objetivo es ahora analizar si es posible considerar  $\vec{a} \approx \vec{a}_T$ . Si esto último se cumple se puede aproximar a la Tierra como un sistema inercial.

El radio promedio de la órbita Heliocéntrica( $R_H$ ) es de  $1,5 \times 10^8 \text{ Km}$ , dicha órbita se recorre en 365 días lo que nos da una velocidad promedio de:

$$V_T = \frac{2\pi \times 1,5 \times 10^{11} \text{ m}}{365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s}} \approx 29,89 \times 10^3 \text{ ms}^{-1} \quad (3.4)$$

Esta velocidad implica que la aceleración del centro de masa de la Tierra( $\vec{a}_{O'}$ ) es de aproximadamente:

$$a_{O'} = \frac{V_T^2}{R_H} \approx 5,95 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-2} \quad (3.5)$$

Por otra parte sabemos que la Tierra rota sobre su eje una vez cada 24 horas con velocidad angular constante, tenemos así que:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60 \text{ s}} \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} \quad (3.6)$$

Finalmente debemos considerar el radio promedio de la Tierra( $R_T = 6,731 \times 10^6 \text{ m}$ ), y notar que las alturas que alcanzará nuestro sistema son despreciables respecto del radio de la Tierra. Por lo tanto,

$$a_T \approx 4,18 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2} \quad (3.7)$$

Para que el término de la aceleración de Coriolis sea comparable con la aceleración de transporte las velocidades del cuadricóptero relativas a la Tierra deberían ser del orden de cientos de metros por segundo, condición que evidentemente no se cumple, por lo tanto este término puede ser despreciado.

La aceleración relativa al sistema de la Tierra difiere de aproximadamente  $4,18 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$  de la aceleración medida en un sistema verdaderamente inercial. Por otra parte la resolución del acelerómetro utilizado es de  $4mg \approx 4,81 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$ . Con el sensor elegido para trabajar es imposible distinguir entre ambas aceleraciones, por dicho motivo parece razonable despreciar el término de la aceleración que corresponde a la aceleración de transporte. Esto nos permite afirmar que la Tierra puede aproximarse como un sistema de referencia inercial y por lo tanto se cumple que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \approx m\vec{a}_T \quad (3.8)$$

### 3.1.2. Curvatura de la Tierra

El cuadricóptero no se desplazara una distancia superior a una centena de metros paralelo a la superficie de la Tierra. Consideremos un caso extremo en el cual el cuadricóptero se desplaza  $1\text{km}$  en una dirección. Esto corresponde a recorrer un arco de círculo de  $\theta = \frac{1\text{km}}{6,731 \times 10^3 \text{km}} \approx 1,5 \times 10^{-4} \text{rad}$ . Si consideramos la superficie terrestre como un plano, la distancia recorrida es:

$$d = R_T \sin(\theta) \approx 0,999999996\text{km} \quad (3.9)$$

Como era de esperar, la diferencia entre la distancia recorrida como arco de círculo y asumiendo una aproximación local de la Tierra por un plano es despreciable. Por lo tanto trabajaremos con un sistema de coordenadas cartesiano.

### 3.1.3. Atracción gravitacional

Todos los objetos se encuentran relacionados entre sí por medio de la Fuerza de atracción gravitacional. Sin embargo en las cercanías de la Tierra la atracción gravitacional con el resto de los objetos es completamente despreciable. Dicha fuerza vale:

$$F_G = G \frac{M_T m}{d^2} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \quad (3.10)$$

Donde  $G$  es la constante gravitacional y  $h$  la altura a la cual se encuentra una partícula. Como ya se analizo anteriormente las alturas a las cuales se desenvolverá el cuadricóptero son despreciables respecto del radio de la Tierra. Por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$F_G \approx \frac{M_T m}{R_T^2} = gm \quad (3.11)$$

donde  $g$  es la constante gravitacional de la Tierra, su valor es aproximadamente  $9,81\text{m}^{-2}$

### 3.1.4. Fuerzas aerodinámicas

Debido a las bajas velocidades que logrará el cuadricóptero se decidió despreciar las fuerzas de tipo aerodinámicas, salvo aquellas responsables de las fuerzas y momentos de las hélices. Estas fuerzas serán analizadas con mayor profundidad en la sección 3.5.

## 3.2. Sistema de referencia

A lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia: uno inercial<sup>1</sup> solidario a la tierra ( $S_I$ ) y otro solidario al cuadrcóptero ( $S_q$ ) como se muestra en la figura 3.1. El sistema  $S_I$  es un sistema local donde la dirección  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  corresponden a las direcciones Norte, Oeste y hacia arriba y el origen es la posición inicial del cuadricóptero. En la figura 3.1 se pueden apreciar ambos sistemas de referencia. El sistema  $S_q$  se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas

---

<sup>1</sup>De acuerdo a la aproximación realizada

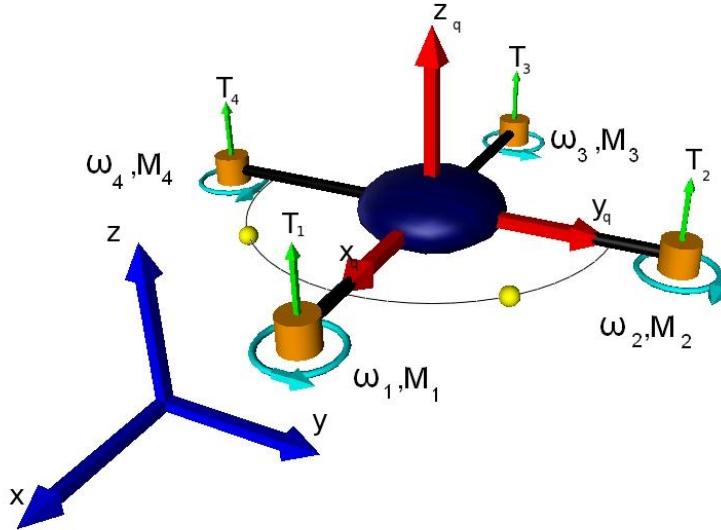


Figura 3.1: Modelo del cuadcóptero

del sistema  $S_I$ , dichas rotaciones se muestran en la figura 3.2. Los ángulos  $\theta$ ,  $\varphi$  y  $\psi$  son conocidos como ángulos de Euler.

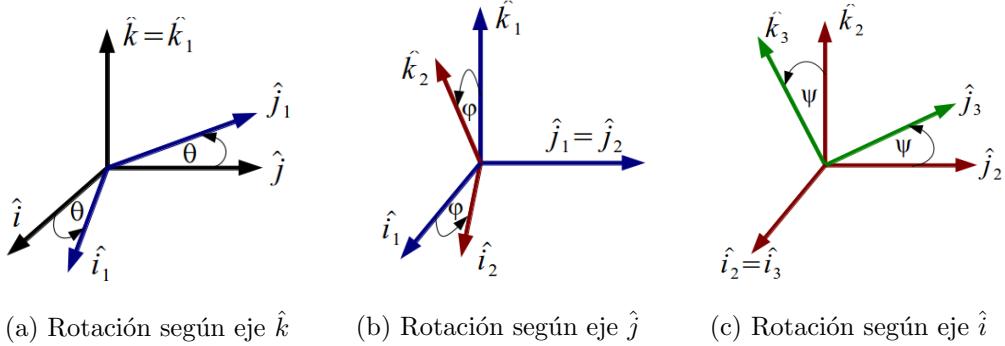


Figura 3.2: Rotaciones

La importancia del sistema  $S_q$  radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema las direcciones del empuje de las hélices, de los torques que introducen y de las velocidades angulares de los motores del cuadricóptero son constantes. Asimismo, algunos de los sensores del sistema de navegación (acelerómetro, giroscopio y magnetómetro) realizan medidas referenciadas al sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero, es decir en el sistema  $S_q$ . Considerar este sistema resulta en una simplificación del procesamiento de los datos obtenidos por la IMU.

Las tres transformaciones pueden representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

La transformación de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al cuadricóptero se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotación definidas.

$$H_I^q = H_2^q \cdot H_1^2 \cdot H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta & \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

A su vez, la transformación inversa puede obtenerse multiplicando las coordenadas del sistema  $S_q$  por la matriz  $H_q^I$ . Dicha matriz puede obtenerse de la siguiente forma:

$$H_q^I = (H_2^q \cdot H_1^2 \cdot H_I^1)^{-1} = (H_I^1)^{-1} \cdot (H_1^2)^{-1} \cdot (H_2^q)^{-1} = H_1^I \cdot H_2^1 \cdot H_q^2 \quad (3.14)$$

Los tres ángulos  $\psi$ ,  $\varphi$  y  $\theta$  serán llamados a lo largo del presente trabajo Roll, Pitch y Yaw respectivamente.

### 3.3. Cinemática

En primer lugar nos enfocaremos en comprender la relación que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas de los ángulos de Euler. Sea  $\vec{\omega}$  la velocidad angular del cuadricóptero (y por ende la del sistema  $S_q$ ). La expresión de la velocidad angular en el sistema de referencia del cuadricóptero es la siguiente:

$$\vec{\omega} = w_{qx} \vec{i}_q + w_{qy} \vec{j}_q + w_{qz} \vec{k}_q \quad (3.15)$$

Donde  $w_{qx}$ ,  $w_{qy}$  y  $w_{qz}$  son las proyecciones ortogonales de la velocidad angular en el sistema  $S_q$ . Por como fue construido el sistema de referencia solidario al cuadricóptero y utilizando el teorema de adición de velocidades angulares, se deduce trivialmente que la velocidad angular del cuadricóptero puede escribirse como:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} + \dot{\varphi} \vec{j}_1 + \dot{\psi} \vec{i}_2 \quad (3.16)$$

El vector  $\vec{i}_2$  es invariante respecto de la tercera rotación, es decir que  $\vec{i}_2 = \vec{i}_q$ . Por otra parte, multiplicando los vectores  $\vec{k}$  y  $\vec{j}_1$  por las matrices  $H_1^2 \cdot H_2^q$  y  $H_2^q$  respectivamente se puede obtener la velocidad angular del cuadricóptero en el sistema de coordenadas referido a él. Operando se obtiene:

$$w_{qx} \vec{i}_q + w_{qy} \vec{j}_q + w_{qz} \vec{k}_q = (\dot{\psi} + \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{i}_q + (\dot{\varphi} \cos \psi + \dot{\theta} \cos \varphi \sin \psi) \vec{j}_q + (\dot{\theta} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi) \vec{k}_q \quad (3.17)$$

De esta ecuación se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero y las derivadas de los ángulos de Euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{qx} + \omega_{qz} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{qy} \tan \varphi \sin \psi \\ \omega_{qy} \cos \psi - \omega_{qz} \sin \psi \\ \omega_{qz} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{qy} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Realizando un razonamiento similar se deduce la relación que existe entre la velocidad del sistema expresada en el marco de referencia inercial con la velocidad

expresada en el sistema de referencia solidario al cuadricóptero. Sea  $\vec{r}$  la posición del centro de masa del cuadricóptero en el sistema  $S_I$ . La velocidad en dicho sistema es:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})' = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (3.19)$$

Al igual que con la velocidad angular se puede escribir la velocidad absoluta del cuadricóptero en el sistema  $S_q$ . Lo que se tiene es que  $\vec{v} = v_{q_x}\vec{i}_q + v_{q_y}\vec{j}_q + v_{q_z}\vec{k}_q$ . Donde  $v_{q_x}, v_{q_y}$  y  $v_{q_z}$  son las proyecciones ortogonales de la velocidad absoluta en el sistema solidario al cuadricóptero. Igualando ambas expresiones de la velocidad se obtiene:

$$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_{q_x}\vec{i}_q + v_{q_y}\vec{j}_q + v_{q_z}\vec{k}_q \quad (3.20)$$

Para transformar las coordenadas de un sistema de referencia al otro alcanza con multiplicar por una de las matrices de cambio de base definidas previamente. En particular nos interesa tener una expresión para las derivadas de la posición en el sistema  $S_I$ , por esta razón se multiplica la expresión de la velocidad en el sistema  $S_q$  por la matriz  $H_q^I$  definida en la ecuación 3.14.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_x} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\ v_{q_x} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\ -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Hasta aquí hemos obtenido simplemente relaciones cinemáticas; por un lado entre la velocidad angular del sistema  $S_q$  y las derivadas de los ángulos de Euler, por el otro se tiene el vínculo entre las derivadas de la posición expresadas en el sistema  $S_I$  y la velocidad absoluta expresada en el sistema  $S_q$  y los ángulos de Euler. Sin embargo aún no conocemos cuales son las Fuerzas y Momentos presentes en el sistema, ni que efectos producen sobre el mismo. Es aquí que nos detendremos en el análisis cinemático para considerar la dinámica del sistema.

## 3.4. Dinámica del Sistema

Existen diversas formas de atacar el problema de la dinámica de un sistema, en particular se puede encarar el problema desde la mecánica analítica o realizando consideraciones energéticas, sin embargo en este caso se elige trabajar con las ecuaciones cardinales.

### 3.4.1. Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema de referencia inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleración. Esto se puede escribir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a} \quad (3.22)$$

Anteriormente fue expresado el interés de trabajar en el sistema solidario al cuadricóptero. El vector aceleración se puede obtener derivando la velocidad. Para realizar la derivada de un vector expresado en un sistema móvil puede utilizarse la siguiente formula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (3.23)$$

En la ecuación anterior  $\frac{d}{dt}$  representa la derivada temporal, mientras que  $\frac{d'}{dt}$  representa la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial.

$$\vec{a} = (\dot{v}_{q_x} + v_{q_z}\omega_{q_y} - v_{q_y}\omega_{q_z})\vec{i}_q + (\dot{v}_{q_y} + v_{q_x}\omega_{q_z} - v_{q_z}\omega_{q_x})\vec{j}_q + (\dot{v}_{q_z} + v_{q_y}\omega_{q_x} - v_{q_x}\omega_{q_y})\vec{k}_q \quad (3.24)$$

Operando se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{q_x} \\ \dot{v}_{q_y} \\ \dot{v}_{q_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_y}\omega_{q_z} - v_{q_z}\omega_{q_y} \\ v_{q_z}\omega_{q_x} - v_{q_x}\omega_{q_z} \\ v_{q_x}\omega_{q_y} - v_{q_y}\omega_{q_x} \end{pmatrix} + \frac{\vec{F}_{ext}}{M} \quad (3.25)$$

### 3.4.2. Segunda Cardinal

La segunda cardinal para un sistema de partículas toma la forma:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M_Q^{ext} + M\vec{v}_G \times \dot{\vec{r}_Q} \quad (3.26)$$

Donde  $L_Q$  y  $M_Q$  son el momento angular y el torque respecto del punto Q. Asumiendo simetría del sistema, se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de la esfera principal del mismo. Esto no es completamente cierto ya que existen algunas asimetrías en el sistema, a modo de ejemplo se puede nombrar que la batería del UAV queda por fuera de la esfera y los apoyos también, sin embargo en una primera aproximación del modelo se asume la simetría respecto al plano que intersecta la esfera en el ecuador. Realizada dicha suposición y planteando la segunda cardinal en el centro de masa obtenemos una expresión más sencilla:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = M_G^{ext} \quad (3.27)$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del cuadricóptero y el momento angular de cada motor. Consideraremos el cuadricóptero sin los motores como un primer rígido y los motores como cuatro rígidos independientes.

El momento angular de un rígido respecto a un punto Q del mismo puede calcularse como:

$$\vec{L}_Q = M_i(G_i \vec{-} Q) \times \vec{V}_Q + \Pi_Q \vec{\Omega}_i \quad (3.28)$$

donde  $M_i$ ,  $G_i$ ,  $\Pi_Q$  y  $\vec{\Omega}_i$  son la masa de cada rígido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir el momento angular del cuadricóptero sin los motores como:

$$\vec{L}_{O'} = (M - 4M_m)(O' \vec{-} O') \times \vec{V}_{O'} + \Pi_{O'q}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{w}_q = \Pi_{O'q}^{\{i_q, j_q, k_q\}} \vec{\omega}_q \quad (3.29)$$

Para el cálculo del momento angular del motor 1 respecto del punto  $O'$  supondremos por simplicidad que el motor se compone de elementos de masa discretos. En este caso, por definición de momento angular tenemos que:

$$\vec{L}_{O'm_1} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (3.30)$$

Donde  $\vec{r}_i$  corresponde a la posición de cada elemento de masa ( $m_i$ ) respecto de  $O'$  y  $\vec{v}_i$  es la velocidad absoluta de cada elemento de masa. Del Teorema de Roverbal se puede expresar dicha velocidad como:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_i'' \quad (3.31)$$

En la ecuación anterior  $\vec{r}_i''$  es la posición de cada elemento de masa expresada desde el centro de masa de cada motor y  $\vec{v}_{O'}$  la velocidad del punto  $O'$  (el centro de masa del cuadricóptero) Operando con las ecuaciones anteriores se concluye que:

$$\vec{L}_{O'm_1} = M_m d_v \vec{i}_q \times \vec{v}_{O'} + \Pi_{O'm}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{Gm_1}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_1 \quad (3.32)$$

Donde  $d_v$  es la distancia entre el centro de masa del cuadricóptero y el eje del motor 1, Al considerar los cuatro motores el primer término del momento angular del motor 1 se anula con el primer término del momento angular del motor 3. Sigue lo mismo con los motores 2 y 4. Calculando en forma análoga los momentos angulares de los restantes motores se obtiene:

$$\vec{L}_{O'motores} = 4\Pi_{O'm}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{Gm_m}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4) \quad (3.33)$$

Adicionando el momento angular de los motores al del cuadricóptero y teniendo en cuenta que el punto  $O'$  coincide con el centro de masa del sistema ( $G$ ) se obtiene:

$$\vec{L}_G = \Pi_G^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{Gm_m}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4) \quad (3.34)$$

Tanto las velocidades angulares como los tensores de inercia que componen la ecuación anterior se encuentran expresados en la base solidaria al cuadricóptero. Para realizar dicha derivada se utiliza nuevamente la fórmula de la derivada de un vector:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (3.35)$$

Lo que se obtiene de dicha derivada es:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \Pi_G^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \frac{d'\vec{\omega}_q}{dt} + \Pi_{Gm_m}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\dot{\vec{\omega}}_1 - \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3 - \dot{\vec{\omega}}_4) + \vec{\omega}_q \times (\Pi_G^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{Gm_m}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4)) \quad (3.36)$$

A partir del cálculo de esta derivada podemos reescribir la segunda cardinal:

$$\Pi_G^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx} \\ \dot{\omega}_{qy} \\ \dot{\omega}_{qz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{qy}\omega_{qz}(I_{yy} - I_{zz}) - \omega_{qy}I_{zzm}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ \omega_{qx}\omega_{qz}(-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{qx}I_{zzm}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ -I_{zzm}(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) \end{pmatrix} + M_G^{ext} \quad (3.37)$$

### 3.5. Fuerzas y momentos involucrados

Para completar el análisis del sistema es fundamental conocer las expresiones de las fuerzas y los momentos involucrados. Por un lado se debe considerar la acción del peso en el sistema. Además debemos conocer con precisión las fuerzas y momentos que introducen las hélices del cuadricóptero ya que son estos los elementos sobre los cuales se pueden realizar las acciones de control. Recordamos que las bajas velocidades a las que el sistema se mueve nos permiten despreciar las fuerzas aerodinámicas, a excepción de aquellas que tienen como origen el giro de las hélices.

### 3.5.1. Peso

Como ya se aclaró anteriormente, debido a la pequeña variación de la altura, el peso del cuadricóptero será considerado constante. Esta fuerza se aplica sobre el centro de masa del sistema, cabe recordar que en el presente análisis se considera la segunda cardinal en torno a dicho punto. Por lo tanto la distancia entre el eje en el cual se calculan los momentos y el punto de aplicación es cero. Recordando que:

$$M = \vec{d} \times \vec{F}$$

se deduce trivialmente que el momento del peso es cero. La expresión para el peso es:

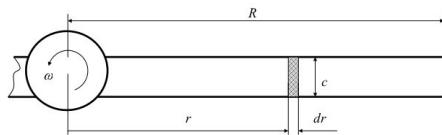
$$\vec{P} = -Mg\vec{k}$$

Insistimos en el hecho que nos interesa conocer las fuerzas en el sistema solidario al cuadricóptero. Para expresar esta fuerza en dicho sistema se multiplica el peso por la matriz  $H_I^q$ . Lo que se obtiene es:

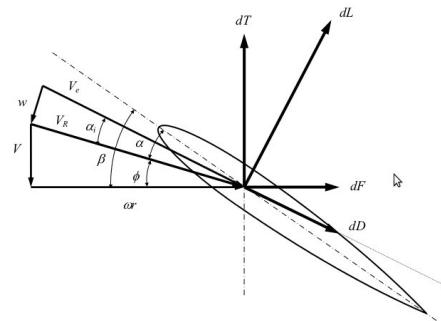
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} Mg$$

### 3.5.2. Fuerzas y momentos de las hélices

La teoría de fluidos que explica el comportamiento de las hélices es compleja y ampliamente difundida por lo que no es de interés desarrollarla en profundidad en este trabajo. Diversa bibliografía puede ser consultada en donde se explican adecuadamente los fenómenos involucrados en las fuerzas aerodinámicas presentes en una hélice. Sin embargo si parece pertinente realizar un breve resumen de dichas fuerzas. Para el presente análisis consideraremos una hélice rotando en sentido antihorario, el razonamiento para una hélice rotando en sentido opuesto es análogo. En la figura 3.3<sup>2</sup> se observan dos vistas de la misma hélice. En la figura 3.3a puede observarse una hoja de la hélice. En la figura 3.3b se representa una vista transversal de la hélice con las fuerzas aerodinámicas involucradas.



(a) Vista superior de una hélice



(b) Fuerzas aerodinámicas presentes en una hélice

Figura 3.3: Vistas de una hélice y diagrama de fuerzas aerodinámicas presentes

La *Blade Element Theory* (BET) intenta explicar las fuerzas presentes en la hélice considerando en primer lugar las fuerzas en un elemento de área infinitesimal

<sup>2</sup>Imagen tomada de ??

de la hélice. Una vez halladas estas fuerzas se integra sobre el total de la superficie obteniendo así las fuerzas y momentos totales. Como se explica en ??, las fuerzas presentes sobre un elemento de área de la hélice son la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*, dichas fuerzas se encuentran representadas en la figura 3.3 como  $dL$  y  $dD$  respectivamente. La forma que tienen dichas fuerzas es:

$$dL = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_L c r^2 dr \quad (3.38)$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_D c r^2 dr \quad (3.39)$$

Donde  $\rho_A$  es la densidad del aire,  $\omega_p$  la velocidad angular de la hélice,  $r$  la distancia del elemento de hélice al eje de la hélice,  $c$  es la longitud promedio de la cuerda de la hélice <sup>3</sup>,  $C_L$  y  $C_D$  son coeficientes adimensionados.

La fuerza infinitesimal de empuje ( $dT$ ) puede escribirse en función de las fuerzas de *lift* y de *drag* de la siguiente forma:

$$dT = dL \cos \varphi_I - dD \sin \varphi \quad (3.40)$$

Realizando la aproximación que  $\varphi$  es un ángulo pequeño y que la fuerza de *lift* es al menos un orden mayor que la de *drag* se puede afirmar que:

$$dT \approx dL \quad (3.41)$$

El empuje por lo tanto puede calcularse como la integral de  $dT$  respecto de  $r$ . Considerando que la hélice consta de dos hojas, se obtiene que:

$$T = \frac{1}{3} \rho_A C_L c R_P^3 \omega_p^2 \quad (3.42)$$

donde  $R_P$  es el radio radio de la hélice. En todo momento tenemos dos fuerzas (una sobre cada hoja de la hélice) en dirección vertical y hacia arriba. Si nos referimos a la configuración de la figura 3.3b, el momento de las fuerzas  $dT$  es hacia la derecha para la hoja considerada, sin embargo para la otra hoja este momento será hacia la izquierda. Se puede concluir entonces que el torque neto que aportan estas fuerzas en el plano perpendicular al eje de rotación de la hélice es nulo.

Intentaremos ahora obtener la resultante de las fuerzas horizontales sobre la hélice y el torque de dichas fuerzas. Comenzaremos por analizar que sucede con las sumas de las fuerzas, para luego proceder a calcular el momento de las mismas. Consideremos ahora la fuerza  $dF$  como la que se muestra en la figura 3.3b. Como se observa en la figura dicha fuerza es hacia la derecha. Si consideramos la fuerza horizontal sobre la otra hoja de la hélice, se obtiene una fuerza hacia la izquierda. Por lo tanto la suma de las fuerzas horizontales es nula. Sin embargo los momentos de las fuerzas en una y otra hoja de la hélice no se anulan, el momento que producen ambas es en la dirección de  $-\vec{k}_q$ . Por lo tanto el momento total será la suma de los momentos infinitesimales en toda la superficie de una hoja de la hélice multiplicado por la cantidad de hojas, es decir 2.

---

<sup>3</sup>segmento imaginario que une el borde de ataque con el borde de fuga

En primer lugar escribimos la fuerza horizontal como una composición de la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*.

$$dF = dD \cos \varphi + dL \sin \varphi \approx dD + dL \left( \frac{V}{\omega_p} \right) \quad (3.43)$$

En esta ecuación  $V$  y  $\omega_p r$  representan la velocidad del flujo de aire en las direcciones vertical y horizontal respectivamente. Operando se obtiene el momento total de la hélice en la dirección entrante:

$$Q = \frac{1}{4} \rho_A c R_P^4 (C_D + K) \omega_p^2 \quad (3.44)$$

En resumen, la teoría BET nos permite afirmar que sobre cada hélice del cuadricóptero que rota en sentido antihorario se aplicará una fuerza en la dirección  $\vec{k}_q$  cuyo módulo se expresó en la ecuación 3.42 y un momento en la dirección  $-\vec{k}_q$  cuyo módulo es lo expresado en la ecuación 3.44. Para una hélice rotando en sentido horario se obtiene exactamente los mismos resultados excepto que el momento es en sentido opuesto.

Hasta aquí sabemos que sucede las fuerzas y momentos aplicados sobre una hélice. Nos concentraremos ahora en estudiar como influyen estas fuerzas y momentos en el cuadricóptero. Para lo que sigue continuaremos trabajando con las convenciones adoptadas en 3.1.

A partir de lo estudiado anteriormente se deduce trivialmente que el empuje de las hélices puede expresarse en el sistema  $S_q$  como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{i=4} T_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Se determinó que las fuerzas de empuje no introducen un momento neto en el eje de las mismas. Sin embargo no debemos perder de vista que la segunda cardinal fue planteada en el centro de masa del sistema, por lo tanto respecto de dicho punto las fuerzas sí introducen un momento que puede calcularse como  $M_1 = L \vec{x} \times \vec{T}_1 \vec{k}_q$  para el motor 1.  $L$  es la distancia del centro de masa del cuadricóptero al eje del motor 1. La expresión del momento es análoga para los restantes motores.

Debemos considerar además el momento obtenido para cada hélice en la dirección  $\vec{k}_q$ . Cabe recordar que se dedujo que para hélices rotando en sentido anti-horario se tiene un momento negativo, mientras que para una hélice rotando en sentido horario el momento es positivo. Realizando estas consideraciones es posible afirmar que la suma total de los momentos es:

$$M_G^{ext} = \begin{pmatrix} L(T2 - T4) \\ L(T3 - T1) \\ -Q_1 + Q2 - Q3 + Q4 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

En base al estudio realizado se podrían conocer dichas relaciones calculando los parámetros que dependen de la geometría de la hélice, sin embargo este estudio resulta tedioso y la mayor parte de los métodos existentes para determinar dichos parámetros con buena precisión son destructivos. Por lo tanto se optó por obtener dichas respuestas en forma experimental. El proceso detallado puede consultarse en el capítulo 6. En dichos experimentos se obtuvo que:

$$T = 4,6016 \times 10^{-5} \omega^2 - 1,038 \times 10^{-3} \omega \quad (3.47)$$

$$Q = 3,4734 \times 10^{-6} \omega^2 - 1,3205 \times 10^{-4} \omega \quad (3.48)$$

Estos resultados parecen adecuados respecto de lo desarrollado teóricamente ya que ambas respuestas son cuadráticas.

### 3.6. Modelo en variables de Estado

Luego de realizados los estudios sobre la cinemática y dinámica del sistema y luego de comprender cabalmente las fuerzas y momentos involucrados se procede a construir el modelo en variables de estado.

Se debe aclarar que la elección realizada del vector de estados se debe exclusivamente a la conveniencia práctica que se encuentra al trabajar con las variables expresadas en el sistema del cuadricóptero. Esta conveniencia se ve reflejada en dos aspectos, en primer lugar las simplificaciones que introduce trabajar con estas variables en el marco de un desarrollo teórico de las ecuaciones que gobiernan al sistema, por otra parte, al disponer de sensores montados sobre el cuadricóptero, los mismos medirán las velocidades angulares y las aceleraciones lineales en el sistema  $S_q$ . Bajo esta elección parece razonable escoger el vector de estados de la siguiente manera:

$$X = \{x, y, z, \theta, \varphi, \psi, v_{q_x}, v_{q_y}, v_{q_z}, \omega_{q_x}, \omega_{q_y}, \omega_{q_z}\} \quad (3.49)$$

donde “ $x$ ”, “ $y$ ” y “ $z$ ” representan la posición en el espacio referenciado al sistema inercial  $S_I$ , los ángulos “ $\theta$ ”, “ $\varphi$ ”, “ $\psi$ ” son los ángulos de Euler mostrados anteriormente, “ $v_{q_x}$ ”, “ $v_{q_y}$ ” y “ $v_{q_z}$ ” las velocidades lineales en los 3 ejes referenciados a  $S_I$  y “ $w_{q_x}$ ”, “ $w_{q_y}$ ” y “ $w_{q_z}$ ” las velocidades angulares en los 3 ejes referenciados al cuadricóptero.

Las ecuaciones desarrolladas hasta ahora son las que gobiernan el comportamiento mecánico del sistema y son las que serán utilizadas para el desarrollo del simulador. Dichas ecuaciones dependen tanto de la velocidad angular de las hélices como de sus derivadas. Para realizar el control resulta más sencillo poder trabajar sin dichas derivadas. La razón es que las velocidades angulares y sus derivadas no son entradas independientes. Por lo tanto no se pueden imponer valores a unas sin considerar el comportamiento de las otras. En este sentido se realiza última aproximación. El término de las derivadas de las velocidades angulares se encuentra presente exclusivamente en la ecuación 3.37. Dicho término se encuentra multiplicado por el momento de inercia de los motores. En el capítulo ?? se obtiene el orden de la variación de la velocidad angular de los motores. Adelantando el resultado de esta variación de la velocidad angular y el valor del término del tensor de inercia de los motores (ver anexo B), se puede despreciar el término de las derivadas de las velocidades angulares respecto al término asociado a los torques en la ecuación 3.37.

Luego de realizada esta simplificación tenemos que la entrada está compuesta por el vector:

$$u = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \quad (3.50)$$

Cabe aclarar que esta última simplificación se toma simplemente para el desarrollo del control, pero la misma no se realiza en el simulador (ver capítulo 4), de modo

de poder verificar que efectivamente es despreciable.

El modelo en variables de estado resulta:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_{q_x} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\
\dot{y} &= v_{q_x} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\
\dot{z} &= -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \\
\dot{\psi} &= \omega_{q_x} + \omega_{q_z} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{q_y} \tan \varphi \sin \psi \\
\dot{\varphi} &= \omega_{q_y} \cos \psi - \omega_{q_z} \sin \psi \\
\dot{\theta} &= \omega_{q_z} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{q_y} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \\
\dot{v}_{q_x} &= v_{q_y} \omega_{q_z} - v_{q_z} \omega_{q_y} + g \sin \varphi \\
\dot{v}_{q_y} &= v_{q_z} \omega_{q_x} - v_{q_x} \omega_{q_z} - g \cos \varphi \sin \psi \\
\dot{v}_{q_z} &= v_{q_x} \omega_{q_y} - v_{q_y} \omega_{q_x} - g \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 T_i \\
\dot{\omega}_{q_x} &= \frac{\omega_{q_y} \omega_{q_z} (I_{yy} - I_{zz}) + \omega_{q_y} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{xx}} + \frac{L(T_2 - T_4)}{I_{xx}} \\
\dot{\omega}_{q_y} &= \frac{\omega_{q_x} \omega_{q_z} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q_x} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{yy}} + \frac{L(T_3 - T_1)}{I_{yy}} \\
\dot{\omega}_{q_z} &= \frac{-Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4}{I_{zz}}
\end{aligned}
\tag{3.51}$$

---

# CAPÍTULO 4

---

## SIMULACIONES DEL MODELO FÍSICO

Luego de desarrollado un modelo físico resulta fundamental disponer de un entorno para realizar simulaciones. Las razones para construir un simulador son evidentes. En primer lugar resulta fundamental para comprobar que el modelo realizado se comporta acorde a lo que uno espera a priori del sistema. Para este tipo de pruebas se trabajará con las situaciones más sencillas en las cuales se puede calcular la trayectoria trivialmente. El segundo objetivo del simulador es poder conocer el comportamiento de nuestro sistema frente a algunas acciones de control determinadas. Por ejemplo conocer la trayectoria que desarrolla el cuadricóptero si accionamos solamente uno de los motores o cualquier combinación que sea pertinente de estudio. Por último y fundamentalmente el simulador será clave para testear y mejorar los algoritmos de control desarrollados. Previo a testear con el sistema real y a fin de evitar daños sobre el mismo, se deben verificar dichos algoritmos en el simulador. Por los motivos expresados es necesario que el simulador represente fielmente el modelo físico y se comporte acorde a la realidad.

### 4.1. Estructura del Simulador

El simulador se compone de dos partes fundamentales. La primera es el lazo abierto, es decir las ecuaciones que gobiernan al cuadricóptero, donde se consideran como entradas las velocidades angulares del sistema sobre las cuales realizaremos las acciones de control y como salidas tenemos el vector de estados del sistema en todos los instantes desde el tiempo inicial establecido en la simulación hasta el tiempo final. La otra parte se encarga de simular las acciones de control.

#### 4.1.1. Lazo Abierto

La estructura que se eligió para desarrollar esta sección se corresponde en buena forma con el camino que se recorrió para determinar el modelo físico. El lazo abierto consta de tres bloques principales. En primer lugar tenemos un bloque encargado de generar las fuerzas y momentos a partir de las velocidades angulares de las hélices.

Luego tenemos un bloque que se encarga de resolver la dinámica del sistema y un cuarto bloque encargado de la cinemática. En la figura 4.1 se observa la estructura global del lazo abierto. En la figura 4.2 se observa una captura de pantalla que representa la vista general de la parte encargada de simular el lazo abierto.

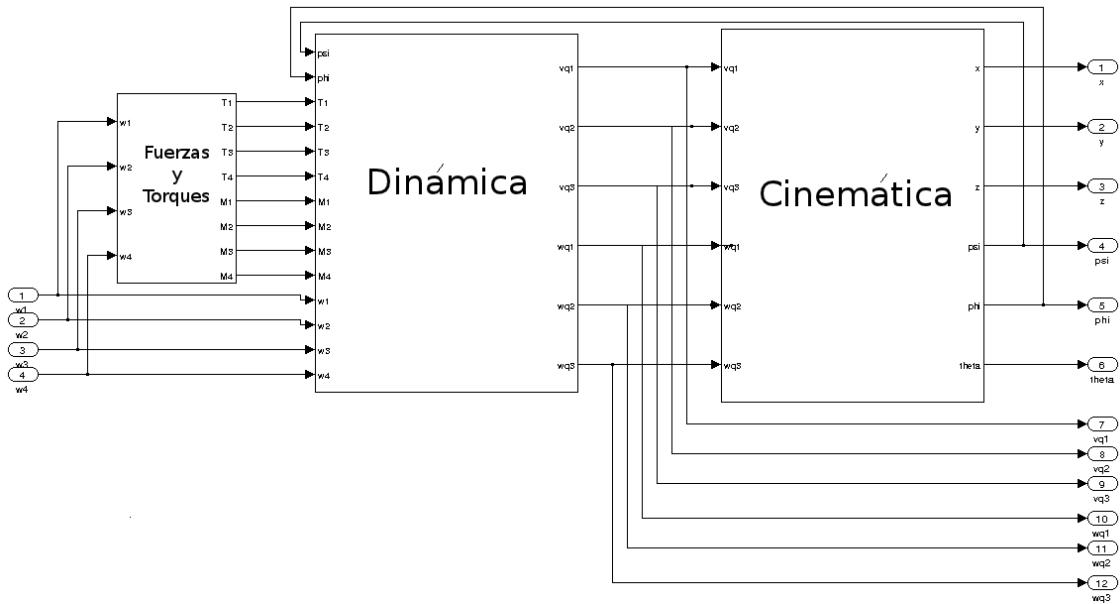


Figura 4.1: Bloque de lazo abierto

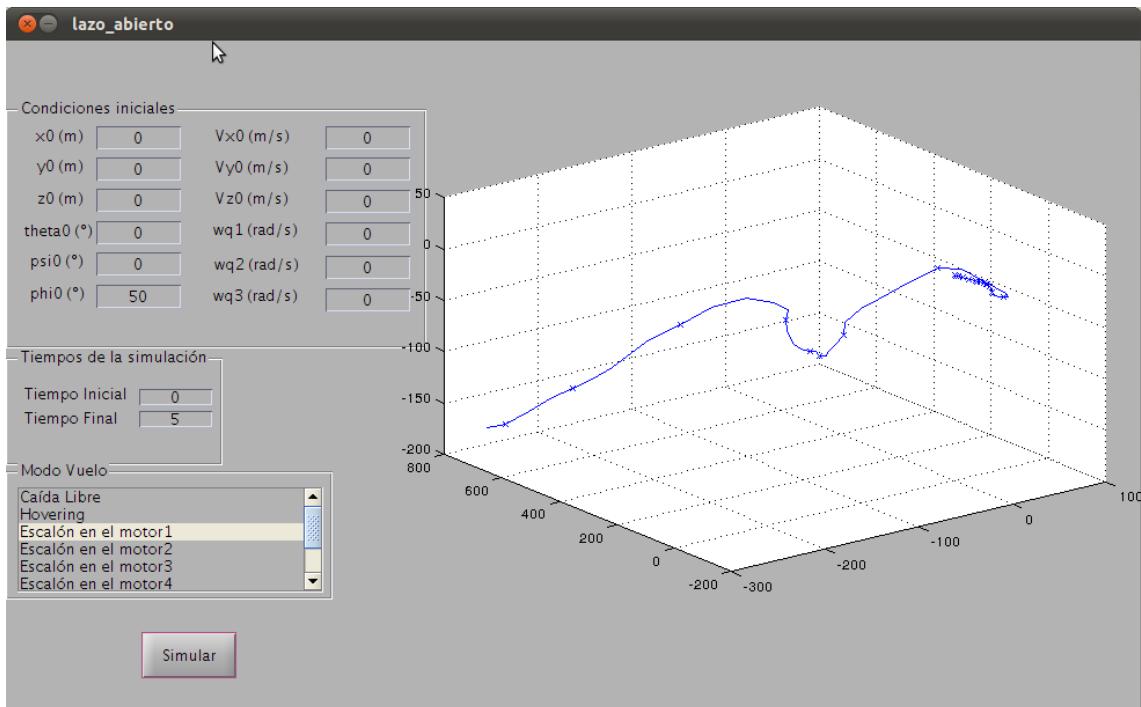


Figura 4.2: Interfaz del simulador de lazo abierto

### Cinemática

En la figura 4.3a se puede observar un diagrama de bloques de la parte del sistema que transforma las velocidades lineales y angulares en posiciones y ángulos

de Euler. Se distinguen dos sub-bloques principales, uno encargado de devolver la posición y otro encargado de devolver los ángulos de Euler

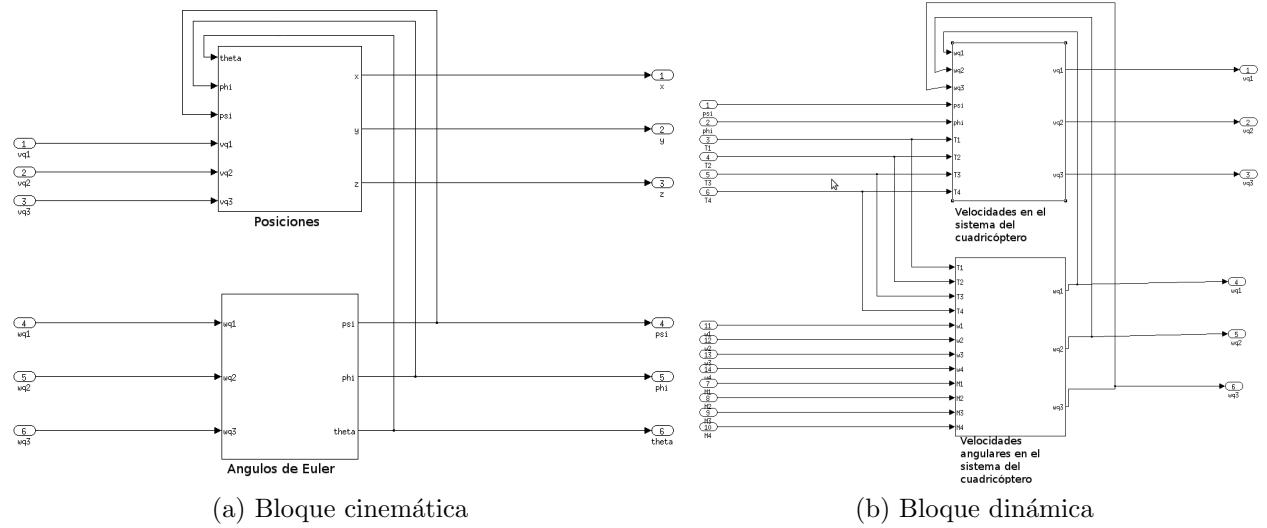


Figura 4.3: Bloques en mayor detalle

## Dinámica

Al igual que el bloque anterior, se divide este en dos sub-bloques más (ver figura 4.3b). Los bloques en este caso son el que devuelve las velocidades angulares y las lineales.

### 4.1.2. Lazo cerrado

Como se explica en el capítulo 13 para tratar las trayectorias circulares en el plano horizontal es necesario introducir un cambio de variables en el sistema, este cambio de variables consiste en expresar la posición del cuadricóptero en el sistema  $S_q$  solidario a él y considerando como origen el centro de la trayectoria circular, en lugar de expresar la posición en el sistema cartesiano inercial. Esta modificación implica realizar un cambio en el modelo para trabajar con dichas trayectorias, simplemente se agrega una matriz de rotación para trabajar con la posición expresada en el sistema solidario al cuadricóptero.

La estructura del lazo cerrado es la que se observa en la figura ???. Desde la interfaz gráfica se puede seleccionar el tipo de trayectoria que se desea realizar, los valores de las variables de estado con las que se desea realizar dicha trayectoria<sup>1</sup>. Las velocidades angulares objetivo para cada motor serán determinadas a partir de la información anterior. Al igual que en el simulador de lazo abierto se tiene la posibilidad de establecer tanto el tiempo inicial de la simulación y las condiciones iniciales. Asimismo estará determinada por la trayectoria la matriz de realimentación.

<sup>1</sup>Evidentemente existen restricciones a la hora de elegir las variables de estado, a modo de ejemplo no seremos capaces de controlar una trayectoria en linea recta si las velocidades angulares no son nulas

Fue necesario además acotar la velocidad angular de los motores ya que esta no puede tener cualquier valor, para esto se agregaron los bloques de saturación a la entrada del subsistema que representa la dinámica del cuadricóptero.

Como se explicó en la sección 1 el control será realizado con un microprocesador, esto implica que las acciones de control no podrán ser modificadas en forma continua, cada cierto período se indicará un nuevo valor de velocidad angular para cada motor. Del mismo modo, no se tiene conocimiento del estado en todo instante sino que se tienen datos cada un cierto intervalo de tiempo (no necesariamente igual al período con el cual se actúa sobre los motores). Estas consideraciones hacen necesaria una modificación en el sistema que hasta ahora había sido considerado como continuo, es necesario convertir el sistema de tiempo continuo desarrollado a un sistema de tiempo discreto. Dicha modificación se logra sustituyendo los bloques integradores y derivadores que formaban parte del sistema por integradores y derivadores discretos con un período de muestreo que también puede ser impuesto desde la interfaz gráfica. En la figura 4.4 se puede observar la misma trayectoria para tres tiempos de muestreo diferentes. En dicha trayectoria se muestra la subida del cuadricóptero desde la altura inicial  $z = 0m$  hasta  $z = 3m$ .

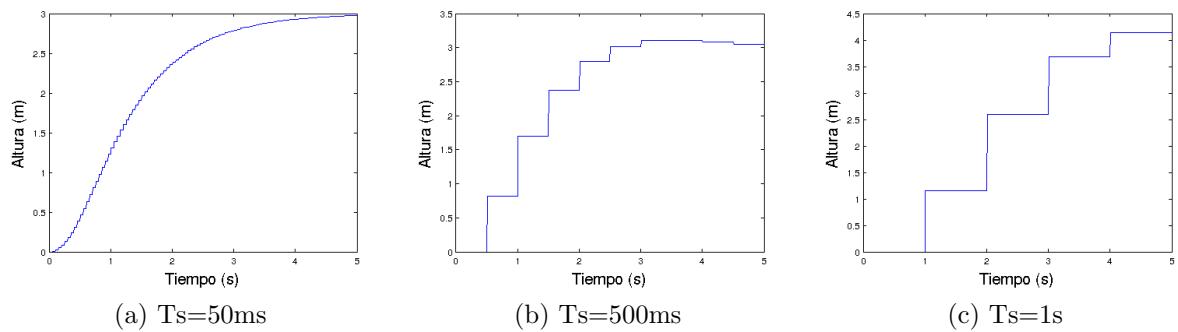


Figura 4.4: Trayectoria de ascenso del cuadricóptero desde  $z = 0$  a  $z = 3$

Se observa claramente un deterioro de la performance en la subida al aumentar el período de muestreo y de acción sobre los motores. Por dicho motivo es importante incluir esta variable a la hora de realizar diversas simulaciones ya que el sistema real debe realizar una gran cantidad de operaciones y si bien su capacidad es considerable no es infinita. Esto puede producir que se tenga acotado interiormente el período de muestreo.

Por último, se desea incluir la posibilidad de agregar ruido a los estados medidos y de perturbaciones en las velocidades angulares de los motores. Las medidas que se obtienen de los sensores no son exactas, por dicho motivo la posibilidad de agregar ruido es muy interesante de modo de testear la robustez del controlador implementado. Asimismo, la velocidad angular de los motores no es exactamente la que se espera de acuerdo a la caracterización de los motores realizada (ver capítulo 6), por el contrario, se producen variaciones en la velocidad angular de los mismos dada una velocidad angular objetivo.

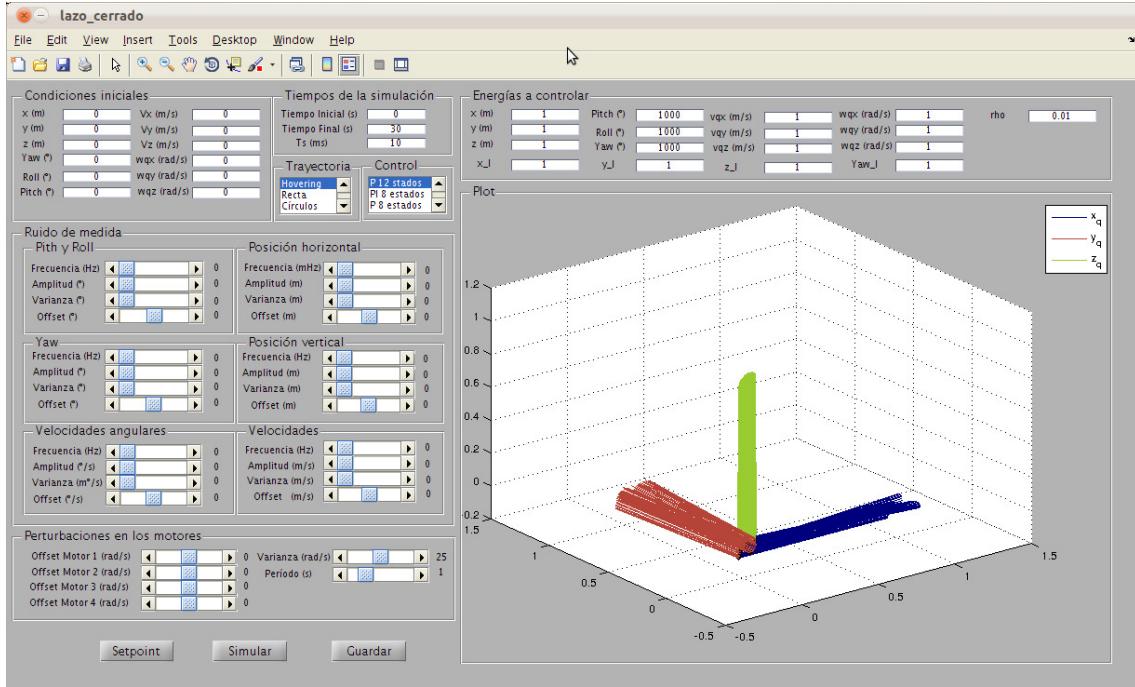


Figura 4.5: Interfaz del simulador de lazo cerrado

## 4.2. Simulaciones

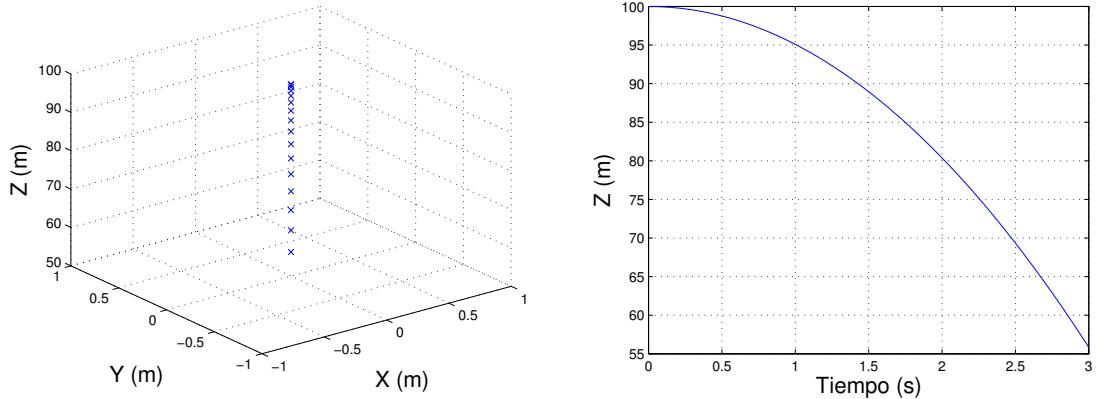
En esta sección procederemos a realizar algunas simulaciones a fin de verificar que los resultados arrojados se corresponden con lo esperado a priori.

### Caída libre con velocidad inicial nula

Se simula una caída libre con condiciones iniciales nulas excepto la altura que se fija a  $100m$ . El tiempo de simulación considerado es de tres segundos. En la figura 4.6a se observa la trayectoria obtenida. En este caso se grafica uno de cada veinte puntos obtenidos. La misma se corresponde con lo que se espera a priori: puntos equiespaciados en el tiempo se encuentran cada vez más apartados a medida que transcurre el tiempo. En la figura 4.6b se representa la altura en función del tiempo. La altura final es  $z_f = 55,855m$ . La altura en una caída libre puede calcularse como  $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + Z_0$ . En este caso se obtiene  $z(3) = 55,855m$ .

### Caída libre con velocidad inicial

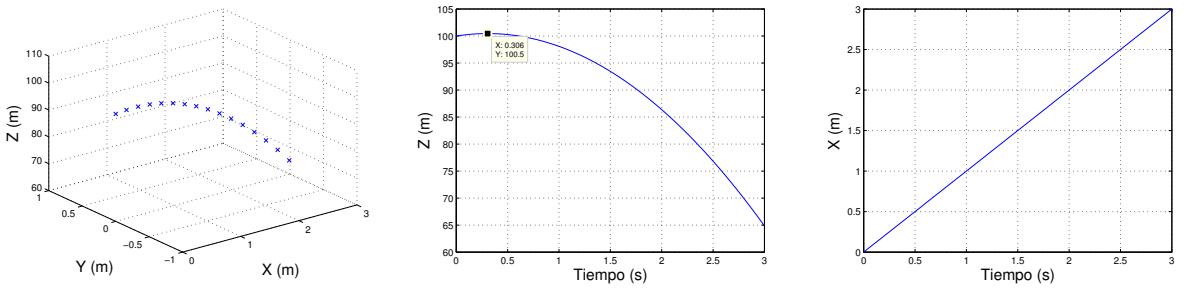
Se realiza la misma simulación que en la sección anterior excepto que se inicia el vuelo con  $V_0 = 1ms^{-1}\vec{i} + 3ms^{-1}\vec{k}$ . Los resultados de la simulación pueden encontrarse expresados graficamente en la figura 4.7. La coordenada de la posición según  $\vec{i}$  aumenta con el tiempo con pendiente igual a la velocidad inicial. La altura cumple que  $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + 3ms^{-1}t + Z_0$ . Por lo tanto la misma aumenta hasta un tiempo  $t_{max}/\dot{z}(t) = 0$ . Lo cual implica que  $t_{max} = \frac{3ms^{-1}}{g} \approx 0,31s$ . Por otra parte tiempo para el cual se da el máximo en la simulación es  $t_{max_{sim}} = 0,306s$ . Considerando que las simulaciones se realizan con un paso variable el cual puede ser de hasta  $0,01s$  se considera un resultado aceptable. El siguiente valor para el tiempo simulado es  $0,316s$ , por lo tanto es razonable que dicho valor se presente en  $t_{max_{sim}}$ . La altura



(a) Trayectoria de caida libre con velocidad inicial nula

(b) Altura en función del tiempo

Figura 4.6: Caida libre con velocidad inicial nula



(a) Trayectoria de caida libre con velocidad  $V_0 = 1ms^{-1}\vec{i} + 3ms^{-1}\vec{k}$

(b) Altura en función del tiempo

(c) Desplazamiento hacia el Norte en función del tiempo

Figura 4.7: Caida libre con velocidad inicial no nula

máxima teórica vale  $z_{max,teo} = 100,459m$ , la altura máxima obtenida a través de la simulación es igual<sup>2</sup>. A partir de este punto tenemos una caída libre como la que ya estudiamos en el caso anterior. Las alturas finales, tanto en la simulación como en la teoría valen  $64,885m$ .

### Condición de Hovering

Se aplica una fuerza constante en los cuatro motores tal que la resultante es igual al peso. Las condiciones iniciales son todas nulas, excepto  $Z_0 = 10m$ . Se logra el equilibrio mecánico. Todas las variables permanecen constantes. Se simula durante diez segundos

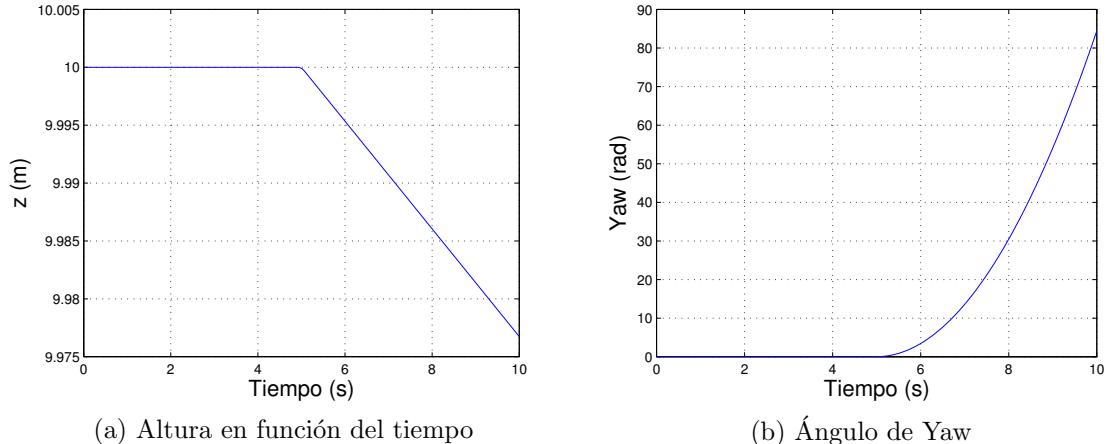
### Giro según el eje $\vec{k}$

En las mismas condiciones que la simulación anterior, en el tiempo  $t = 5s$  se aumenta repentinamente la velocidad angular de los motores que rotan en sentido horario con un valor tal que la fuerza de cada uno de esos motores aumenta en  $1N$ . Para los motores que rotan en sentido anti-horario se disminuye la velocidad angular

<sup>2</sup>Considerando tres cifras después de la coma

de forma que la fuerza de cada uno de ellos disminuye  $1N$ . Estas velocidades son  $349,88 rads^{-1}$  y  $278,09 rads^{-1}$  respectivamente. La fuerza neta permanece constante y el momento según los versores  $\vec{i}_q$  y  $\vec{j}_q$  es nulo. Sin embargo aparece un torque positivo según el versor  $\vec{k}_q$ .

En la figura 4.8a se presenta la altura en función del tiempo. La misma debería permanecer constante sin embargo se observa una pequeña diferencia en la altura de  $2,3cm$ . Esta diferencia es atribuida a la aproximación realizada al calcular las velocidades con las cuales deben girar los motores. Por otra parte en la figura 4.8b se observa como el ángulo aumenta hasta el valor de  $84,43 rad$ . El torque neto vale  $Q = 0,29 Nm$ . Por lo tanto en 5 segundos se debe rotar un ángulo de  $\theta_f = 84,16 rad$ . Nuevamente se percibe una pequeña diferencia entre el valor teórico y el simulado. Sin embargo dicho error es completamente aceptable.



(a) Altura en función del tiempo

(b) Ángulo de Yaw

Figura 4.8: Giro según el  $\vec{k}_q$

### Escalón en los cuatro motores

Con condiciones iniciales nulas, en condición de hovering se aumenta la velocidad angular de los motores en  $100 rads^{-1}$  en  $t = 5s$ . Se simula durante diez segundos. En la figura 4.9 se presentan gráficamente los resultados obtenidos en la simulación. La altura máxima alcanzada por el cuadricóptero en la simulación es de  $93,61m$  mientras que en la teoría dicha altura es de  $93,78m$ . Nuevamente la diferencia entre el valor simulado y el esperado difieren de manera despreciable y es atribuible a aproximaciones realizadas.

### Vuelo en linea recta

Con condiciones inicial nulas, excepto por  $Z_0 = 10m$  y  $\varphi = 30^\circ$ . Se simula durante diez segundos. En la figura 4.10 se observa un vuelo en linea recta en la dirección  $\vec{i}$ . Como es de esperar el vuelo será uniformemente acelerado ya que la fuerza es siempre en el sentido de  $\vec{k}_q$ . La simulación arroja que al cabo de diez segundos el desplazamiento es de  $293,19m$ , mientras que en la teoría se obtiene un desplazamiento de  $283,19m$ . Nuevamente se concluye que los resultados arrojados

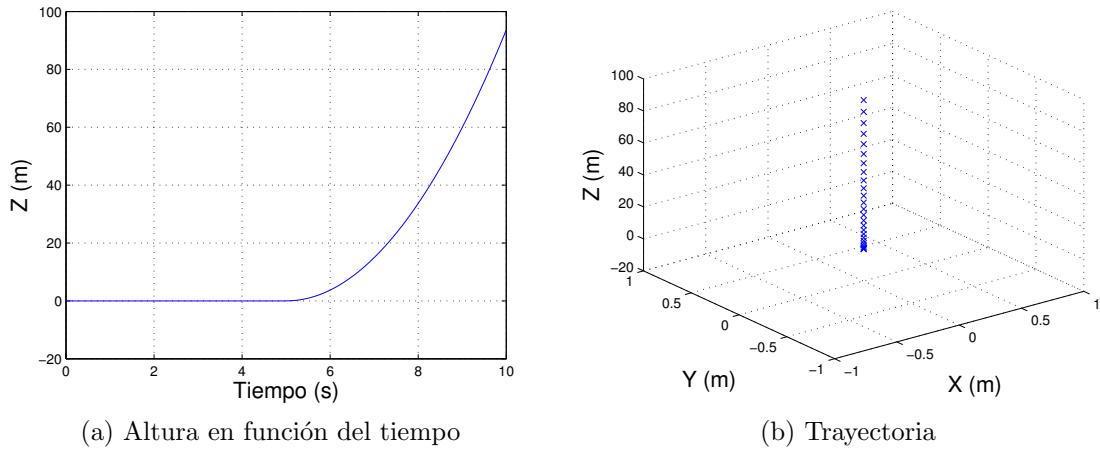


Figura 4.9: Escalón en los cuatro motores

por el simulador son satisfactorios.

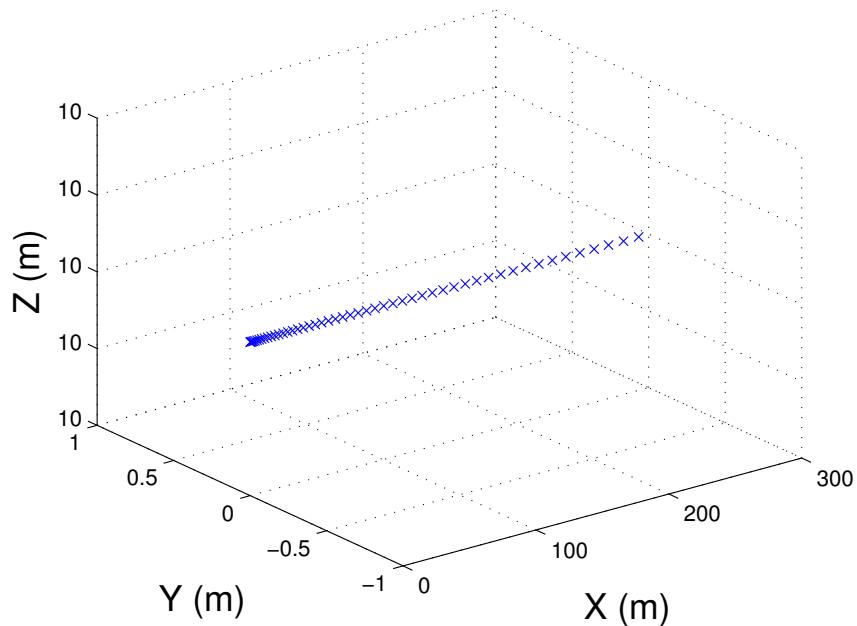


Figura 4.10: Vuelo en linea recta

Hasta aquí hemos testeado el simulador en situaciones conocidas. De acuerdo a las pruebas realizadas puede afirmarse que su funcionamiento es el adecuado ya que en ninguna prueba se obtuvieron errores considerables. Sin embargo, es fundamental aclarar que hasta aquí no es posible afirmar que el modelado del sistema sea adecuado, lo único que puede concluirse es que el simulador representa fielmente las ecuaciones que han sido deducidas hasta el momento. Un error en las ecuaciones no se reflejará hasta el momento de testear el cuadricóptero. Sin embargo el trabajo realizado a la hora del modelado y la comparación con diversas bibliografías nos permite a esta altura estar convencidos de que dichas ecuaciones son adecuadas para modelar el sistema.

## **Parte III**

### **Motores**

---

# CAPÍTULO 5

---

## INGENIERÍA INVERSA

El cuadricóptero adquirido resuelve la comunicación entre los controladores de los motores (**ESCs**) y el microprocesador mediante el protocolo **i<sup>2</sup>c**.

Para el presente proyecto resulta de vital importancia conocer dicho protocolo, ya que se utilizará otro microprocesador que deberá comandar a esos mismos ESCs, supliendo el trabajo del anterior. Es entonces imprescindible conocer al detalle el funcionamiento de este protocolo, para luego poder reproducirlo.

Dado que no se cuenta con la colaboración de los fabricantes, y toda la información parece ser privativa, no pudiendo conseguir dato alguno de su implementación, es necesario realizar un proceso de ingeniería inversa para poder analizar, decodificar, entender y reproducir el protocolo existente. Dicho proceso de ingeniería inversa se realiza utilizando el hardware existente del cuadricóptero comercial adquirido y un analizador lógico<sup>1</sup> que es capaz de leer e interpretar las líneas del bus  $i^2c$  sin intervenir en las mismas.

Antes de presentar los resultados obtenidos en el proceso, se realiza una breve introducción al protocolo  $i^2c$  y se presenta en la figura 5.1 la definición de los ejes a utilizar, lo cual será de utilidad más adelante.



Figura 5.1: Definición de ejes

---

<sup>1</sup>ChronoVu

## 5.1. Introducción al protocolo $i^2c$

El bus  $i^2c$  es un bus de comunicaciones serie. Su nombre viene de *Inter-Integrated Circuit* (Circuitos Inter-Integrados).

Utiliza dos líneas para transmitir la información: una para los datos y otra para la señal de reloj. Además será necesaria una tercera línea de tierra, como referencia.

En la imagen 5.2<sup>2</sup> se muestra un diagrama de un circuito equivalente simplificado de la conexión  $i^2c$  entre 2 dispositivos.

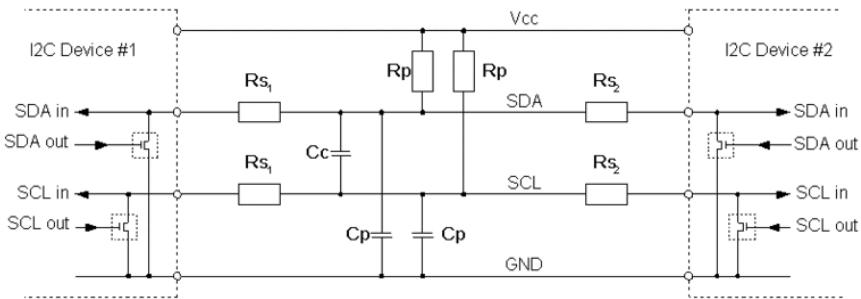


Figura 5.2: Conexión  $i^2c$ .

donde:

Vcc	Voltaje de entrada, típicamente varía entre 1.2 V y 5.5 V
GND	Tierra común
SDA	Línea serial de datos
SCL	Línea serial de reloj
Rp	Resistencia de "Pull-up"
Rs	Resistencia serie
Cp	Capacitancia del cable
Cc	Capacitancia de canal cruzado

Las líneas **SDA** y **SCL** son de drenador abierto, lo que significa que tanto el maestro como los esclavos solamente pueden conducir a nivel bajo estas líneas o dejarlos abiertos. Si ningún dispositivo  $i^2c$  está conduciendo hacia abajo la línea, la resistencia de *pull-up*  $R_p$  se encarga de conducir la línea a  $V_{cc}$ .

Cada dispositivo tiene asignada una dirección que lo identifica. Para establecer una comunicación la secuencia típica empieza por el maestro enviando una secuencia de comienzo de conexión, seguida de la dirección del esclavo con el cual desea comunicarse. Seguidamente el maestro envía un bit que determina si la acción que desea realizar es escritura o lectura, a lo que el esclavo correspondiente responde con un bit de *acknowledge* (**Ack**). Luego el maestro envía la dirección de memoria interna del esclavo donde debe ser almacenada la información enviada, y por último envía los datos. Para finalizar la conexión, el maestro envía una secuencia de fin de conexión.

<sup>2</sup>Imagen tomada de [www.i2c-bus.org](http://www.i2c-bus.org)

## 5.2. Pruebas en régimen

Como se dijo anteriormente, para realizar el proceso de ingeniería inversa se utilizó el cuadricóptero y un analizador lógico. La forma de operar es enviar comandos conocidos con el control remoto y analizar los datos que se cursan en las líneas del bus. En la figura 5.3 se muestra una foto del proceso descripto.



Figura 5.3: Proceso de lectura del bus.

Al realizar este proceso se puede observar que se repiten cada  $2ms$  bloques similares al mostrado en la figura 5.4.

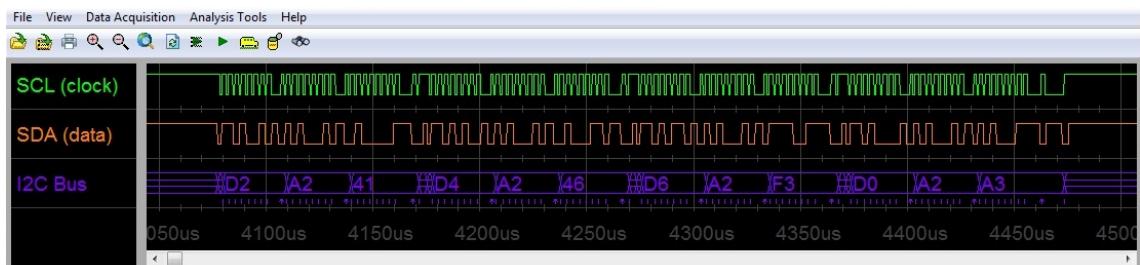


Figura 5.4: Bloque de transmisión  $i^2c$

Rápidamente, visto lo anterior, se puede deducir que hay 4 esclavos correspondientes a los 4 ESC's de los 4 motores, cuyas direcciones en hexadecimal son **D0**, **D2**, **D4** y **D6**. La dirección de la memoria interna de los esclavos donde se almacenan los datos que envía el maestro es, en todos los casos **A2**. Además el maestro envía un tercer conjunto de datos que refiere, de alguna manera, a la velocidad con la que debe girar cada motor. Este conjunto de órdenes, agrupadas por bloques como el que se muestra en la figura 5.4, se repite periódicamente, indicando la velocidad con la que debe girar cada motor.

Para comprender las pruebas realizadas es importante dejar en claro algunos aspectos previos. En la figura 5.5 se muestra el transmisor utilizado para enviar comandos al cuadricóptero, un **Walkera WK-2801** y se indican los nombres de los mandos más importantes del mismo.



Figura 5.5: Transmisor

Al mover el mando de la izquierda (**Elev/Rudder**) en la dirección vertical (**Elev**) se logra que el cuadricóptero se eleve verticalmente, dando igual potencia a todos los motores, mientras que al moverlo en la dirección horizontal, el cuadricóptero presenta un movimiento de rotación según su eje vertical (que pasa por el centro).

Al mover el mando de la derecha (**Throttle/Aile**) en la dirección horizontal (**Aile**) y vertical (**Throttle**), se logran movimientos de rotación según los ejes horizontales  $x$  e  $y$  del cuadricóptero. Las definiciones de los ejes se pueden ver en la figura 5.1.

Se analizan las siguientes situaciones:

<b>Id</b>	<b>Elev</b>	<b>Rudder</b>	<b>Aile</b>	<b>Throttle</b>	<b>Movimiento</b>
0	atrás	medio	medio	medio	idle
1	medio	medio	medio	medio	vertical hacia arriba con aceleración constante
2	adelante	medio	medio	medio	vertical hacia arriba con aceleración constante
3	medio	izquierda	medio	medio	giro según eje $z$
4	medio	derecha	medio	medio	giro según eje $-z$
5	medio	medio	izquierda	medio	giro según eje $-x$
6	medio	medio	derecha	medio	giro según eje $x$
7	medio	medio	medio	atrás	giro según eje $-y$
8	medio	medio	medio	adelante	giro según eje $y$

Cuadro 5.1: Pruebas realizadas

Se realiza un análisis de los resultados obtenidos para cada motor, graficando el contenido del byte de datos que se le transmite a cada motor. Se obtienen representaciones como la mostrada en la figura 5.6

En la figura 5.6 se puede observar que a los 4 motores les llega un byte con el valor promedio en 50, el cual corresponde a la mínima potencia entregada a los motores para encenderlos.

Haciendo un análisis similar con el resto de las pruebas detalladas en la tabla 5.1 se construye la tabla 5.2 donde se muestran los valores enviados a cada motor en promedio en todas las pruebas.

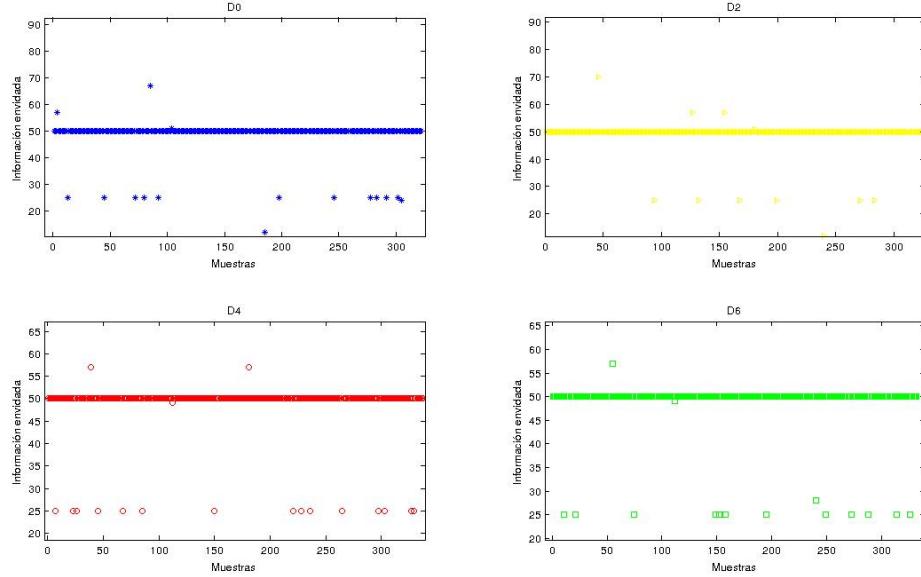


Figura 5.6: Prueba N° 0

Prueba	Valor promedio				Movimiento
	D0	D2	D4	D6	
0	50	50	50	50	Idle
1	80	140	180	140	$a_z = cte \neq 0$
2	180	220	250	240	$a_z = cte \neq 0$
3	160	70	60	250	giro según eje $z$
4	50	200	200	100	giro según eje $-z$
5	250	160	140	50	giro según eje $-x$
6	50	160	150	250	giro según eje $x$
7	90	50	250	160	giro según eje $-y$
8	110	250	50	100	giro según eje $y$

Cuadro 5.2: Resumen de los resultados obtenidos

De dicha tabla se pueden sacar algunas conclusiones que se analizarán en la sección 5.5;

### 5.3. Prueba de arranque

En esta sección se analiza la secuencia de arranque del cuadricóptero, para obtener conclusiones sobre la misma. Se parte con la palanca de elevación al mínimo y se procede a moverla para hacer arrancar los motores.

Mientras la palanca de elevación se mantiene al mínimo, se le envía el valor 0 a los cuatro motores. Al mover la palanca, luego de un *tiempo muerto* donde las líneas quedan inactivas, se les empieza a mandar el valor correspondiente a cada motor, como se puede ver en la figura 5.7.

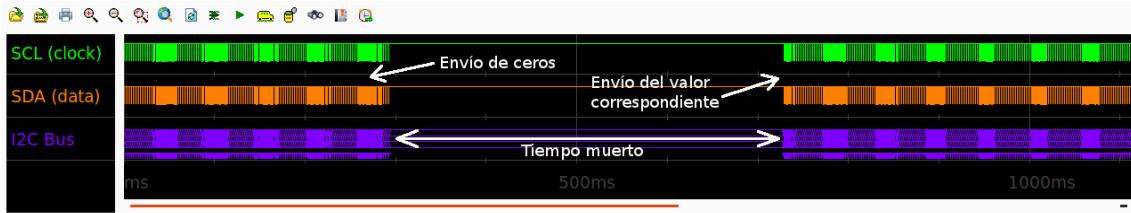
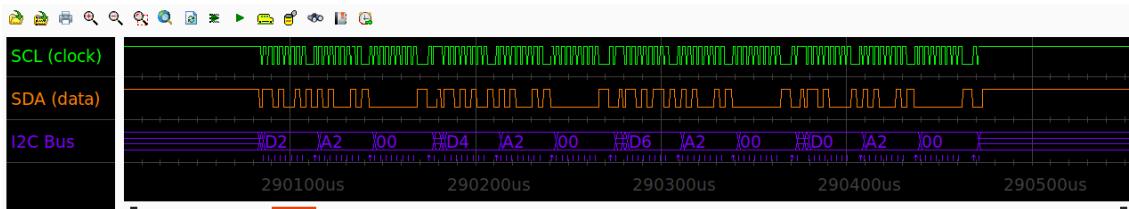
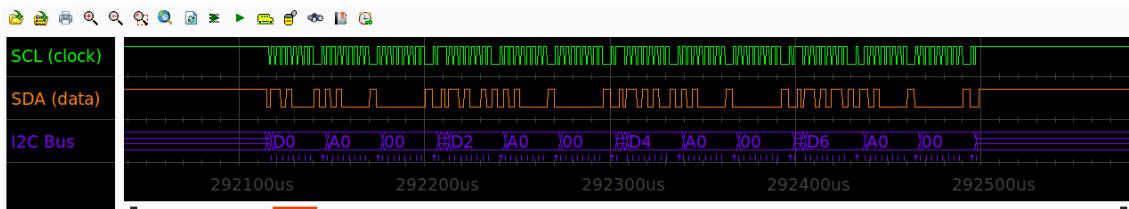


Figura 5.7: Arranque

Observando más detenidamente los comandos enviados se pueden sacar algunas conclusiones importantes. En la gran mayoría de los casos se envían los comandos en el orden  $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$  y se guardan en el registro 0xA2 del esclavo. Pero se puede observar una importante diferencia en la el último comando que se manda a cada motor antes de arrancar, es decir, el último comando en la tanda de ceros mostrada en la figura 5.7. En la figura 5.8a se muestra una tanda regular de ceros y en la figura 5.8b se muestra la última tanda de ceros mencionada.



(a) Tanda normal de ceros



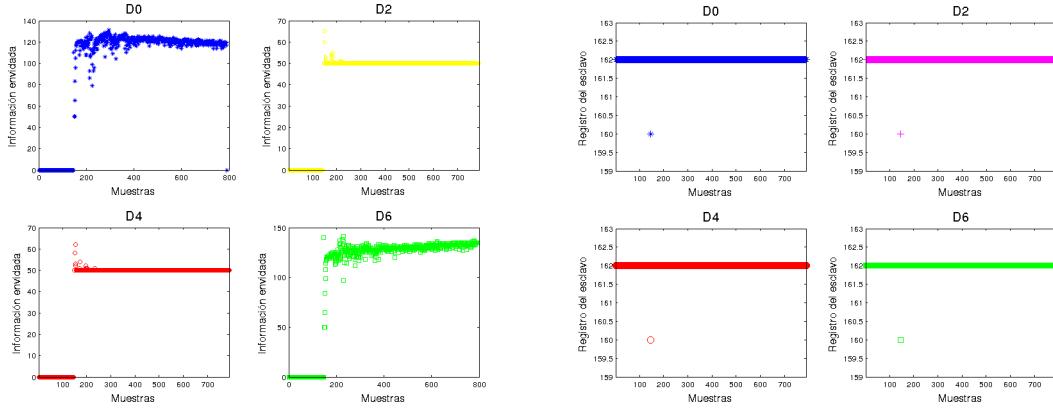
(b) Última tanda de ceros

Figura 5.8: Envío de ceros

Se observan 2 claras diferencias:

- **El orden en el que se envían datos a los motores no es mismo** que el anterior. En este caso el orden es:  $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$ .
- **El registro en el que se escriben los datos es 0xA0**

Dichas diferencias se pueden observar claramente al graficar todos los datos obtenidos, como se muestra en la figura 5.9. Se grafica para cada motor el valor que le llega (figura 5.9a) y el registro donde el valor es escrito (figura 5.9b). Al analizar los resultados gráficamente resulta evidente el cambio en el registro al terminar de mandar los ceros. En la figura 5.9a se puede observar que el último cero que se manda a los motores, se manda alrededor de la muestra 150. Analizando la figura 5.9b es clarísimo que alrededor de la muestra 150, el registro al que se envían los comandos cambia al valor 160 (0xA0), tal como se había observado anteriormente.



(a) Valores enviados a los motores

(b) Registro al que se envía el valor

Figura 5.9: Arranque

## 5.4. Prueba de frenado

Se procede del mismo modo que en la prueba anterior (sección 5.3), analizando los comandos enviados a los motores a la hora de apagarlos. Se realiza una prueba análoga a la anterior partiendo de los motores funcionando y bajando al mínimo la palanca de elevación, causando que estos se detengan.

Una vez que se lleva la palanca de elevación al mínimo, los motores se apagan y se permanece enviando ceros a los motores en el orden  $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$ . Se pueden sacar algunas conclusiones importantes de la última tanda de valores distintos de cero enviados, mostrada en la figura 5.10:

- El orden en el que se envían datos es  $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$
- El registro en el que se escriben los datos es 0xA1

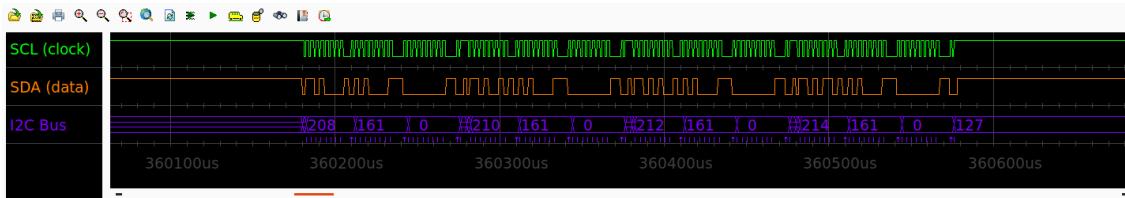


Figura 5.10: Frenado

Se presenta también un análisis gráfico en la figura 5.11. En este caso, a diferencia del de la sección 5.3, no es posible divisar con claridad el registro 0xA1 (161) en la figura 5.11b, ya que se escriben comandos a una cantidad importante de registros diferentes.

Avalados por la prueba realizada en la sección 5.6 que se verá luego, se afirma que en realidad la aparición de estos registros (por ejemplo los números 81, 145, etc) son causados por el proceso de *sniffing* y no son, de hecho, el comando mandado a los motores.

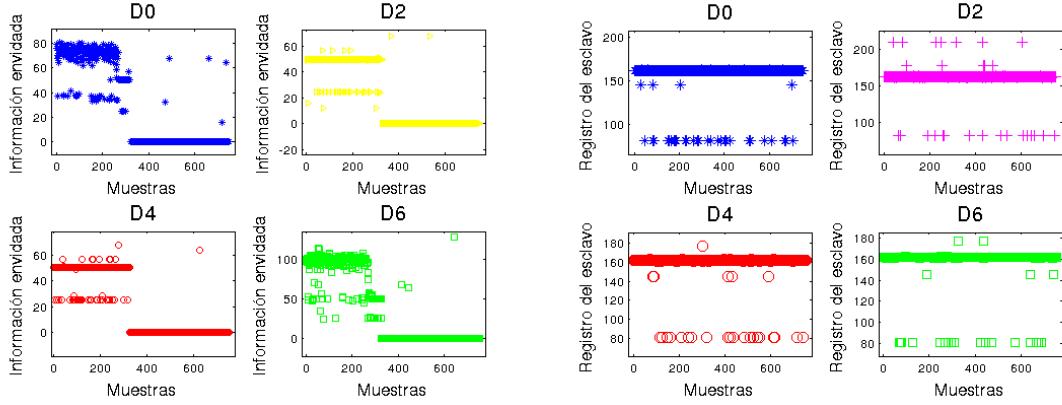


Figura 5.11: Frenado

Analicemos por ejemplo el valor 81. Es claro que el resultado de dividir el valor 162 (correspondiente al conocido registro 0xA2) es exactamente 81, por lo cual parece probable que haya sido generado por un error del *sniffer*, ya que un corrimiento hacia la derecha de un bit en una palabra binaria es equivalente a realizar una división entre 2. Es probable entonces que el sniffer haya incluido un bit en 0 antes de la verdadera palabra y haya descartado el último bit, causando una aparente división entre 2. Más graficamente:

$$162 = 10100010 \rightarrow \text{ verde } 01010001 \text{ rojo } 0 = 81$$

En verde se muestra el bit agregado y en rojo el eliminado.

## 5.5. Conclusiones

- La comunicación entre el amo y los esclavos por medio del protocolo  $i^2c$  se lleva a cabo mediante un formato del tipo

Dirección esclavo - Lugar de memoria donde guardar dato - dato

- Dicho formato se repite para todos los esclavos
- Cada esclavo recibe una actualización de estado (un dato nuevo) cada 2ms
- La velocidad mínima de funcionamiento se logra enviando el valor 50
- La velocidad máxima de funcionamiento se logra enviando el valor 250
- Cuando el mando de Elevación del control se encuentra al mínimo, se les envía el valor 0 a los cuatro motores periódicamente con el formato mencionado.
- La dirección de memoria interna de todos los esclavos donde se guardan los datos recibidos por el maestro es siempre 0xA2 (ó 162), a excepción del arranque y el frenado.

- El último comando enviado antes de arrancar se guarda en el registro 0xA0.
- El último comando enviado antes de frenar se guarda en el registro 0xA1.
- El orden normal en el que se envían los comandos es  $D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6 \rightarrow D0$ , menos en los casos descriptos en los 2 puntos anteriores donde el orden es  $D0 \rightarrow D2 \rightarrow D4 \rightarrow D6$ .
- La correspondencia entre las direcciones y los motores se muestra en la figura 5.12. El motor con dirección 0xD0 es el de adelante, el motor con dirección 0xD4 es el de atrás y mirándolo de frente el de la izquierda se corresponde con 0xD0, y el de la derecha con 0xD6
- Las direcciones 0xD0, 0xD2, 0xD4 y 0xD6 (de 8 bits) en realidad no refieren únicamente a direccionamiento, sino que incluyen además el bit de lectura/escritura, por lo cual cada esclavo tendrá una única dirección de 7 bits. Notar que las direcciones 0xD0 a 0xD6 al pasarlas a binario todas terminan en 0, lo cual implica que se tratan de comandos de escritura. Al omitir el último bit se obtienen las direcciones (sin incluir el bit de lectura/escritura) como se puede ver a continuación:

$$0xD0(11010000) \longrightarrow 0x68(1101000) \quad (5.1)$$

$$0xD2(11010010) \longrightarrow 0x69(1101001) \quad (5.2)$$

$$0xD4(11010100) \longrightarrow 0x6A(1101010) \quad (5.3)$$

$$0xD6(11010110) \longrightarrow 0x6B(1101011) \quad (5.4)$$

Las direcciones de los motores son entonces: **0x68, 0x69, 0x6A, 0x6B**.

- En las pruebas 0, 1, 2, 5, 6 y 7 se observa que la suma del valor promedio enviado al motor D0 más el enviado a la dirección D2 es similar a la suma de los valores entregados a los motores con dirección D4 y D6, lo cual implica un equilibrio en los pares realizados en ambos sentidos. Se infiere entonces que el movimiento según el eje “z” se logra desequilibrando los pares en ambos sentidos (según “z” y según “-z”)

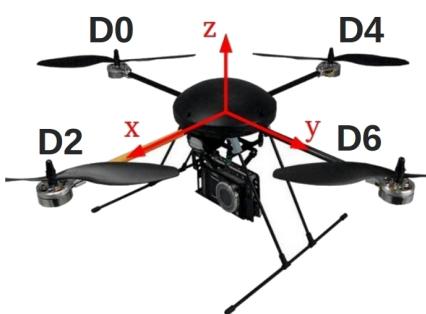


Figura 5.12: correspondencias

## 5.6. Verificaciones

Se presentan diversas verificaciones realizadas para corroborar la veracidad de las conclusiones sacadas, además de la corroboración experimental utilizando el puerto  $i^2c$  de la Beagleboard.

### i2cdetect

Utilizando la librería *i2c Tools*<sup>3</sup> con la Beagleboard es posible mandar el comando **i2cdetect** que lo que hace es preguntar a todos los esclavos que estén presentes en el bus, por su dirección. El resultado en terminal es el siguiente

```
root@beagleboard:~# i2cdetect -r 2
WARNING! This program can confuse your I2C bus, cause data loss and worse!
I will probe file /dev/i2c-2 using read byte commands.
I will probe address range 0x03-0x77.
Continue? [Y/n] y
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
00:			--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
10:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
20:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
30:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
40:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
50:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
60:	--	--	--	--	--	--	--	--	68	69	6a	6b	--	--	--	--
70:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Puede verse claramente que las direcciones de los esclavos obtenidas por la función mencionada son: **0x68**, **0x69**, **0x6A**, **0x6B**.

### MSP430F5438

Se utiliza el chip **MSP430F5438**, que se muestra en la figura 5.13.

El MSP430F5438 posee un puerto  $i^2c$  habilitado para su utilización. Se configurara como esclavo y se guarda en una variable todos los comandos recibidos en el bus. De este modo se logra independizarse de los problemas que pueda introducir el sniffer y se obtiene exactamente el comando mandado a ese esclavo. Se le configura la dirección 0x68 para comunicarse con el maestro cuando éste mande comandos a esa dirección.



Figura 5.13: MSP430F5438

<sup>3</sup><http://www.lm-sensors.org/wiki/i2cToolsDocumentation>

Luego, analizando la variable donde se guardan los comandos, es posible obtener información más concluyente.

En la figura 5.14 se muestran los resultados obtenidos al adquirir datos en un arranque.

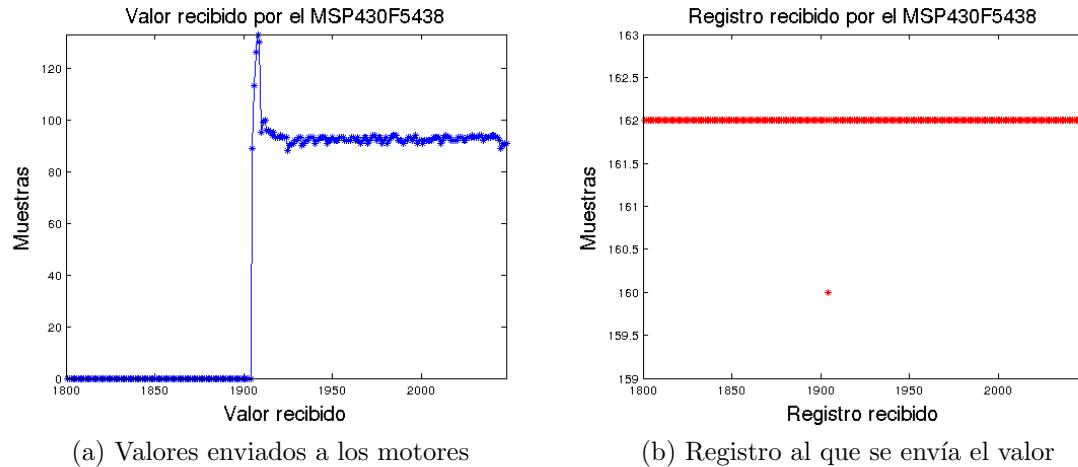


Figura 5.14: Arranque detectado por el MSP430F5438

En la figura 5.15 se muestran los resultados obtenidos al adquirir datos en un frenado.

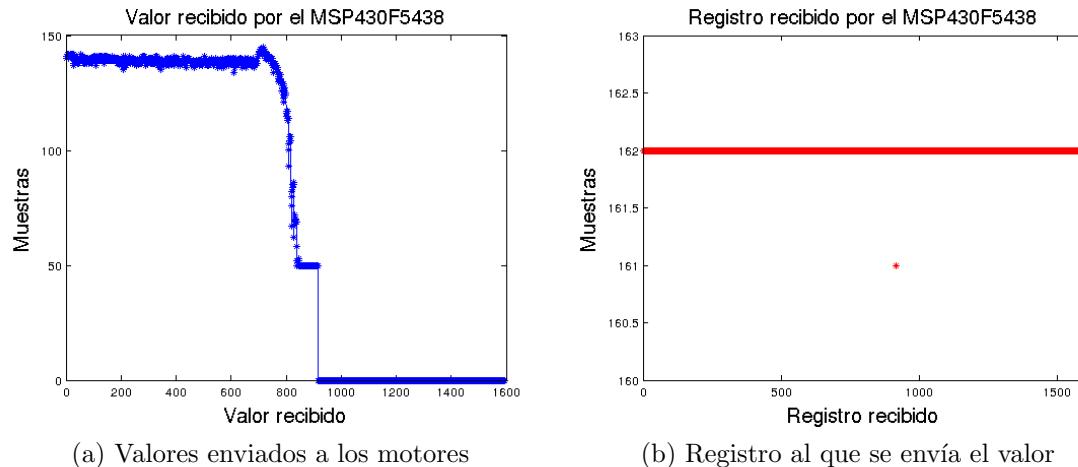


Figura 5.15: Frenado

Estas últimas dos figuras son las corroboraciones más concluyentes que se obtuvieron. Ratifica y deja bien en claro lo antes dicho sobre los registros: **para el arranque se escribe en la dirección 0xA0 del esclavo y para el frenado se escribe en la dirección 0xA1**.

A su vez sirve de confirmación para los errores del sniffreado detectados en la sección 5.4.

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## CARACTERIZACIÓN DE LOS MOTORES

### 6.1. Objetivo

El objetivo es el de caracterizar los motores del cuadricóptero Turbo Ace X720. Con dicho fin se busca:

- Analizar el comportamiento de los cuatro motores individualmente
- Determinar la relación entre velocidad angular y fuerza
- Determinar la relación entre comando  $I^2C$  y la velocidad angular.
- Determinar la relación entre velocidad angular y torque.
- Determinar la respuesta al escalón

Los algoritmos de control se encargan de definir la velocidad angular de los motores en cada instante, por dicho motivo es fundamental conocer la relación que existe entre esta última y la fuerza y el torque que se produce. La principal ventaja de esta elección es que el lazo de control implementado es independiente de la tecnología utilizada en el control de los motores ( $I^2C$ , PWM,etc) y por ende permite la reutilización del mismo. Dado que actualmente el control de los motores se establece mediante un comando  $I^2C$  es fundamental comprender la relación que existe entre este comando y la velocidad angular.

### 6.2. Materiales

- Cuadricóptero Turbo Ace X720
- LED IR TSAL6200
- Detector IR TSOP38256

- Resistencia de  $20\Omega$
- Generador de onda Tektronix CFG250
- Fuente de alimentación de  $5V_{DC}$
- Osciloscopio digital GwINSTEC GDS2062
- Balanza Presiser LK-15P presición media III
- Beagleboard XM rev C
- Analizador lógico ChronoVu
- Buffer Octal 74HC245

## 6.3. Procedimiento

### 6.3.1. Consideraciones previas

El detector IR TSOP38256 es sensible a radiaciones infrarrojas moduladas a una frecuencia de 56 KHz. Si se lo expone a una onda cuadrada de dicha frecuencia la salida del mismo es un “0” lógico. Si no recibe dicha radiación la salida es un “1” lógico



Figura 6.1: Dispositivo en forma de U

**velocidad angular será entonces la mitad de dicha frecuencia.**

Como explicamos anteriormente la LED debe ser conmutada con una frecuencia de 56kHz por lo tanto se la alimentará con un generador de señales funcionando como generador de onda cuadrada a dicha frecuencia. Para lograr un correcto funcionamiento de la LED se requiere una corriente superior a los  $100mA$ . La amplitud de la onda cuadrada se regulará a  $5V$  y se trabajará con una resistencia de  $20\Omega$  en serie. La salida del receptor IR se conecta directamente al osciloscopio digital.

El dispositivo de medida de velocidad angular se trata de un cuerpo en forma de “U”, de un lado se tiene la LED infrarroja y del otro el detector, tal como se puede ver en la figura 6.1. La idea del dispositivo de medida es sencilla. Se trata de hacer “pasar” la radiación infrarroja emitida por el LED a través de la hélice en funcionamiento de uno de los motores. Esta radiación es recogida del otro lado por el receptor IR. De este modo tendremos a la salida del detector, pulsos de frecuencia correspondientes a la velocidad con la que la hélice obstruye el camino entre el sensor y la LED. **La velocidad angular será entonces la mitad de dicha frecuencia.**

### 6.3.2. Relación entre comando $I^2C$ , velocidad angular y empuje

#### Objetivos particulares

Este experimento servirá para obtener las curvas:

- Diferencias en el comportamiento de los motores
- Relación entre velocidad angular y fuerza
- Relación entre comando  $I^2C$  y la velocidad angular.

#### Modelos de ajuste

Es claro que si no se envía ningún comando  $I^2C$  los motores no giran. También es evidente que si los motores no giran las hélices no realizan ningún empuje. Por lo tanto los modelos deben estar ajustados al cero.

- Para la relación entre velocidad angular y fuerza en base a la bibliografía consultada sobre el tema se proponen dos modelos de ajuste siguientes:
  - Modelo cuadrático  $T = a\omega^2 + b\omega$
  - Modelo cúbico  $T = a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega$
- Para la relación entre velocidad angular y comando  $I^2C$  se proponen también dos modelos de ajuste:
  - Modelo cuadrático  $x = a\omega^2 + b\omega$
  - Modelo cúbico  $x = a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega$

#### Desarrollo del experimento

El procedimiento consiste en enviar distintos comandos  $I^2C$  al cuadricóptero y registrar las diferentes lecturas de masa en la balanza para determinar el empuje de los motores y en registrar las diferentes medidas de frecuencia en el osciloscopio para determinar la velocidad angular de los cuatro motores. El setup experimental puede observarse en la figura 6.2 Se solidariza el cuadricóptero a una base de madera. Sobre esta última se añade peso suficiente para asegurar que el cuadricóptero no se eleve, se agregaron 3Kg de sobrepeso para asegurar completamente dicha condición.

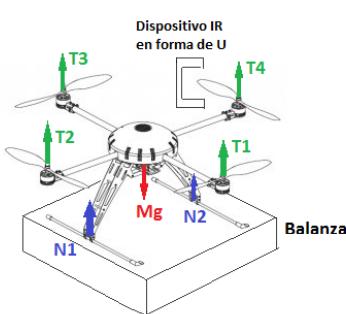
Al estar el sistema en equilibrio mecánico se cumple que:

$$\sum F_{ext} = 0 \quad (6.1)$$

En este caso las fuerzas presentes son el peso del sistema ( $M_{total}g$ ) la normal de la balanza sobre el sistema ( $N = N_1 + N_2$ ) y el empuje de los motores ( $T_{total} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ ). Por lo tanto:

$$T_{total} - M_{total}g + N = 0 \quad (6.2)$$

Figura 6.2: Primer set-up experimental



Por lo tanto el empuje de los motores puede calcularse como:

$$T_{total} = M_{total}g - N \quad (6.3)$$

La lectura de la balanza no es otra cosa que  $\frac{N}{g}$ . Una vez ubicado el cuadricóptero con el sobrepeso sobre la balanza se tara la balanza. Por lo tanto la lectura que indica la balanza( $M_{medida}$ ) luego de realizada esta acción es:

$$M_{medida} = \frac{N - M_{total}g}{g} \quad (6.4)$$

Por lo tanto el empuje de los cuatro motores puede calcularse como:

$$T_{total} = -M_{medida}g \quad (6.5)$$

Asumiendo que los cuatro motores se comportan en forma similar se tiene que:

$$T = -\frac{M_{medida}g}{4} \quad (6.6)$$

La medida de frecuencia se realiza con el dispositivo IR descrito en la sección anterior. La frecuencia medida ( $f_{medida}$ ) corresponde al inverso del tiempo que transcurre entre el pasaje de una hoja de la hélice y la otra. El período de la rotación de la hélice es el doble y por ende la frecuencia de la rotación es la mitad de la frecuencia medida. Por lo tanto se tiene que:

$$\omega = 2\pi f = \pi f_{medida} \quad (6.7)$$

Se mide la velocidad angular de los cuatro motores y se trabaja con el promedio. En la sección 6.4.1 se verá porqué es adecuado considerar el promedio.

### 6.3.3. Relación entre velocidad $I^2C$ , velocidad angular y torque

#### Objetivos específicos

El objetivo de este experimento es obtener la relación entre velocidad angular y torque

#### Modelos de ajuste

Nuevamente el modelo se fuerza para obtener un torque nulo a velocidad angular nula. De acuerdo al análisis realizado en ?? se propone un modelo cuadrático:

$$Q = a\omega^2 + b\omega$$

#### Desarrollo del experimento

Se ubica el cuadricóptero sobre la balanza. Se retiran tres de las cuatro hélices del cuadricóptero. La cuarta hélice se rota de forma que su eje principal sea paralelo al plano de la balanza. Se ubica el detector IR de forma de poder medir la velocidad angular de la hélice. El setup de medida puede verse en la figura 6.3. De acuerdo a lo estudiado la hélice presenta un torque ( $Q$ ) negativo respecto de su eje central si el motor rota en sentido anti-horario. Nos proponemos calcular el torque total respecto de

dicho eje. Las fuerzas presentes en el sistema son: el peso, la fuerza de empuje, la resultante de las normales ( $N = N_1 + N_2$ ) y las fuerzas de fricción en el plano del plato de la balanza. Estas últimas y el empuje no realizan ningún torque en la dirección de interés. Recordamos que el torque de una fuerza respecto de un eje se calcula como:

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.8)$$

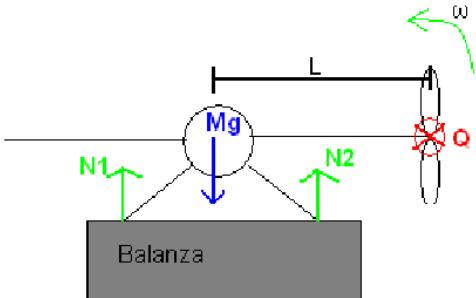


Figura 6.3: Segundo set-up experimental

Definimos el largo  $L = 29,3\text{cm}$  como la distancia entre el eje de la hélice y el centro de masa del cuadricóptero.

El peso se aplica en el centro de masa y se asume por simetría que la resultante de las normales se aplica sobre la recta que pasa por el centro de masa del cuadricóptero y es perpendicular a la balanza.

De esta forma se tiene que el torque total vale:

$$\tau = -Q + LM_{total}g - LN = -Q + L(M_{total}g - N) \quad (6.9)$$

Como se explico anteriormente luego de tarar la balanza la masa medida por la misma corresponde a  $M_{medida} = \frac{N - M_{total}g}{g}$ . De esta forma se puede escribir el torque total como:

$$\tau = -Q - LM_{medida}g \quad (6.10)$$

Al igual que en el experimento anterior el sistema se encuentra en equilibrio mecánico y por lo tanto:

$$\tau = 0 \quad (6.11)$$

De esta forma queda claro que el torque que nos interesa caracterizar puede calcularse como:

$$Q = -LM_{medida}g \quad (6.12)$$

### 6.3.4. Respuesta al Escalón

Se caracterizará al motor en lo que respecta a su respuesta al escalón. Se verá cuánto demora un motor en pasar de la velocidad angular en régimen correspondiente al valor de comando  $I^2C$  50 a la velocidad angular en régimen correspondiente al valor de comando  $I^2C$  150. El osciloscopio no resulta adecuado para observar las diferencias de velocidad angular obtenidas. Se procede a conectar la salida del sensor IR a un *buffer* octal y la salida de este último al analizador lógico<sup>1</sup>. El analizador lógico registra la salida del sensor R durante 5 segundos a una tasa de muestreo de 2kHz. Se obtendrán las diferencias de tiempos entre flancos de subida sucesivos( $t_f$ ).

<sup>1</sup> Esto fue necesario ya que la tensión de la salida del IR disminuía drásticamente al conectarlo directamente al analizador lógico a valores que este último no es capaz de identificar como “1” lógicos

Cada flanco de subida corresponde a una hoja de la hélice siendo detectada por el sensor IR. La velocidad angular de la hélice puede calcularse como:

$$\omega = 2\pi \frac{1}{2t_f} = \frac{\pi}{t_f} \quad (6.13)$$

## 6.4. Resultados y análisis

### 6.4.1. Comparación entre motores

En la tabla 6.1 todos los valores obtenidos experimentalmente de acuerdo al procedimiento descrito.

I <sup>2</sup> C	Peso medido (g)	Frecuencia (Hz)			
		Motor D0	Motor D2	Motor D4	Motor D6
0	0	0	0	0	0
50	-165	34.2	34.3	35.5	34.3
70	-360	49.2	49.5	49	48.4
90	-590	63.7	62.7	63.3	63.5
110	-865	76.7	74.4	75.5	73.4
130	-1120	87.3	86.3	86.2	84.7
150	-1395	97.5	95.4	96.2	94.2
170	-2030	104.7	104.2	106.2	105.5
200	-2535	115.5	113.4	119.9	117.3

Cuadro 6.1: Comando  $I^2C$  enviado y fuerza obtenida

En la figura 6.4a se presentan las velocidades angulares de los cuatro motores contra el comando  $I^2C$ , mientras que en la figura 6.4b se muestra la diferencia entre la velocidad angular de cada motor y el promedio de las mismas para cada comando  $I^2C$  enviado.

En la figura 6.4a se observa que el comportamiento de los motores es en todos los casos similar. Para velocidades angulares bajas los motores se comportan en forma idéntica, mientras que a medida que aumenta la misma se ve afectada esta característica

En la figura 6.4b puede observarse que la máxima diferencia entre las velocidades angulares de dos motores es de aproximadamente  $6,5 rad/s$ . Dicha diferencia se obtiene para un valor de comando  $I^2C$  igual a 200. Si observamos la velocidad angular a dicho valor de comando  $I^2C$  en la tabla 6.1 se observa que el menor valor corresponde a  $113,4 rad/s$ . El error relativo que se obtiene es inferior al 6 %

Se puede afirmar que:

- Es válido promediar las velocidades angulares de los 4 motores y trabajar con esos promedios como un motor típico. Además de este modo se reducen los posibles errores que se pueden haber causado a la hora de realizar las medidas.
- Por lo tanto la fuerza medida (de los 4 motores juntos) corresponde con el cuádruple de la fuerza ejercida por cada uno de ellos

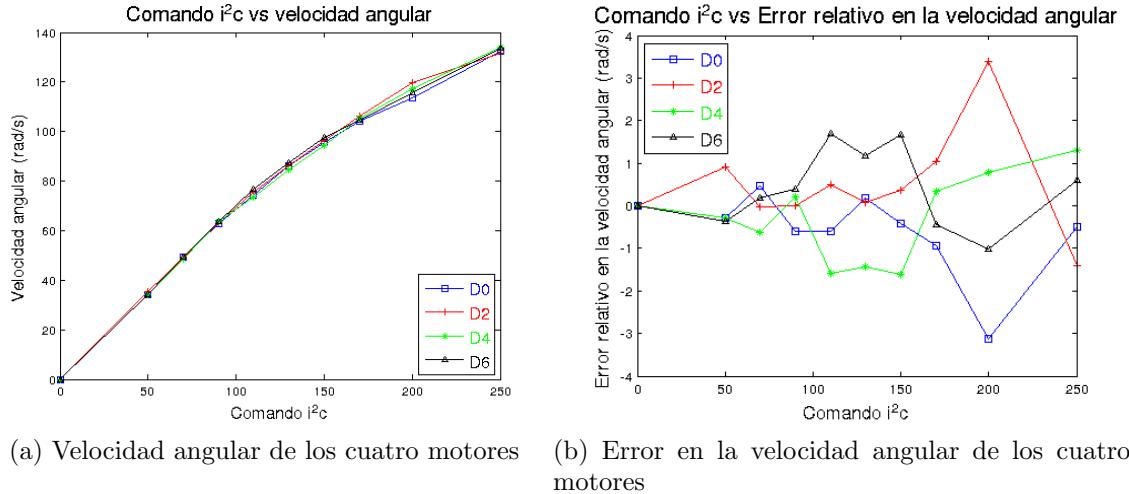


Figura 6.4: Curva  $I^2C$  vs. velocidad angular para los 4 motores

#### 6.4.2. Obtención de la curva fuerza contra velocidad angular

Se trabaja con la medida de peso presentada en la tabla 6.1 y con el promedio de las medidas de la frecuencia de dicha tabla.<sup>2</sup> En la figura 6.5 se observan los puntos obtenidos experimentalmente y las curvas obtenidas con los modelos de ajuste propuestos. En dicha figura se observa que ambos modelos aproximan adecuadamente los puntos obtenidos experimentalmente.

Para el modelo cuadrático se obtiene:

- Parámetros:  $a = 4,3031 \times 10^{-5} N s^2$ ,  $b = -6,1147 \times 10^{-4} N s$
- Error promedio:  $e = -3,9951 \times 10^{-4} N$
- Desviación estándar:  $\sigma = 2,3871 \times 10^{-2} N$

Para el modelo cúbico se obtiene:

- Parámetros:  $a' = 3,0619 \times 10^{-9} N s^3$ ,  $b' = 4,1319 \times 10^{-5} N s^2$ ,  $c' = -3,9160 \times 10^{-4} N s$
- Error:  $-1,4331 \times 10^{-4} N$
- Desviación estándar:  $\sigma = 2,3377 \times 10^{-2} N$

El cálculo del error promedio y la desviación estándar no presenta diferencias significativas para uno y otro modelo, por lo tanto se opta por trabajar con el modelo más sencillo, es decir el cuadrático. Se tiene entonces que:

$$T = 3,5296 \times 10^{-5} \omega^2 - 4,9293 \times 10^{-4} \omega \quad (6.14)$$

---

<sup>2</sup>De acuerdo a las justificaciones realizadas en la sección 6.4.1

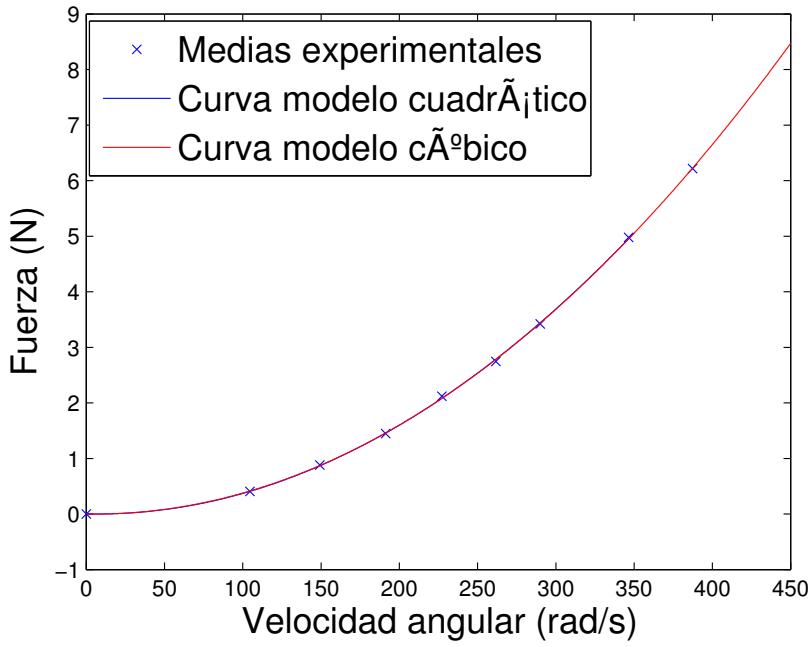


Figura 6.5: Curva experimental de Fuerza-Velocidad angular

#### 6.4.3. Obtención de la curva $I^2C$ contra velocidad angular

A partir de los resultados presentados en la tabla 6.1 y la ecuación 6.7 se intenta obtener la relación entre comando  $I^2C$  y velocidad angular. En la figura 6.6 se muestran los datos obtenidos experimentalmente y las curvas predichas por los modelos de ajuste considerados.

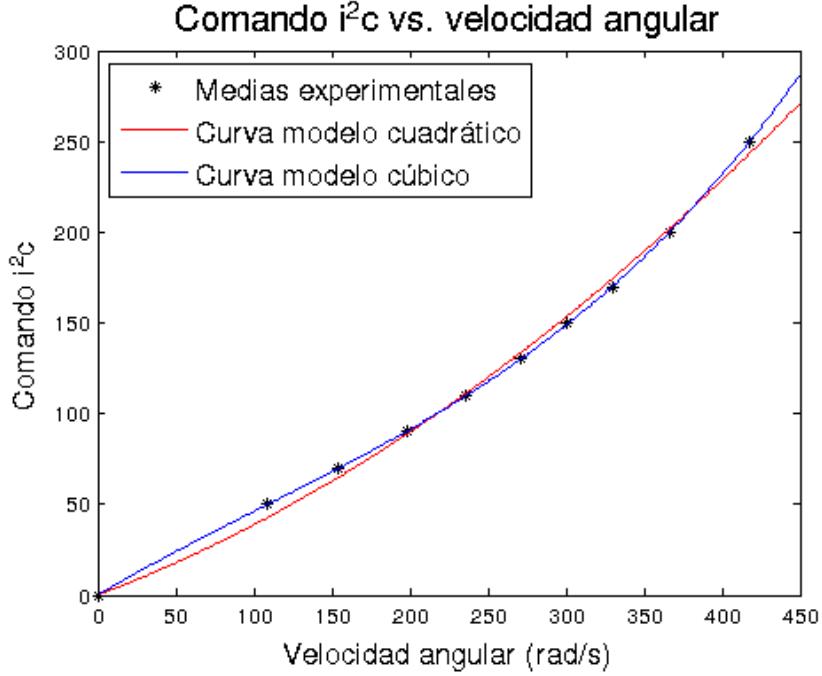


Figura 6.6: Curva  $I^2C$  en función de la velocidad angular

A simple vista en la figura ya puede observarse que el modelo cúbico aproxima mejor que el modelo cuadrático. Los resultados obtenidos para los modelos de ajuste propuesto vienen a confirmar dicha constatación.

Para el modelo cuadrático se obtiene:

- Parámetros:  $a = 6,1226 \times 10^{-4}s^2$ ,  $b = 0,3270 \times 10^{-4}s$
- Error promedio:  $e = 5,08 \times 10^{-1}$
- Desviación estándar:  $\sigma = 4,42$

Para el modelo cúbico se obtiene:

- Parámetros:  $a' = 2,2118 \times 10^{-6}s^3$ ,  $b' = -7,1258 \times 10^{-4}s^2$ ,  $c' = 0,5106s$
- Error promedio:  $2,04 \times 10^{-3}$
- Desviación estándar:  $\sigma = 4,01 \times 10^{-1}$

El error promedio obtenido con el modelo cúbico y la desviación estándar son menores que en el modelo cuadrático. Además se observa claramente que la curva del modelo cúbico ajusta mejor los puntos. Esta es evidencia suficiente para elegir dicho modelo. Tendremos entonces que:

$$x = 2,2118 \times 10^{-6}\omega^3 - 7,1258 \times 10^{-4}\omega^2 + 0,5106\omega \quad (6.15)$$

#### 6.4.4. Obtención de la curva velocidad angular contra torque

De acuerdo al procedimiento detallado en 6.3.3 se obtuvieron las siguientes medidas de velocidad angular y peso.

Comando $I^2C$	Frecuencia (Hz)	peso (g)
0	0	0
50	35.4	-10
55	39.6	-13
60	43.3	-16
65	47.1	-19
70	50.7	-24
75	54.8	-28
80	58.3	-32
85	62.1	-37
90	65.7	-42

Cuadro 6.2: Comando  $I^2C$  enviado, frecuencia y peso

Recordamos que para la caracterización de la respuesta velocidad angular - torque se propuso un modelo cuadrático. Los resultados obtenidos fueron:

- Parámetros:  $a = 3,4734 \times 10^{-6}Nms^2$ ;  $b = -1,3205 \times 10^{-4}Nms$
- Error promedio:  $\mu = 1,7824 \times 10^{-6}Nm$
- Desviación estándar:  $\sigma = 9,2686 \times 10^{-4}$

En la figura 6.7 pueden observarse las medidas experimentales obtenidas y la curva que corresponde al modelo elegido para realizar el ajuste. La observación gráfica de dicha curva confirma que el modelo elegido es un buen ajuste para los datos experimentales obtenidos.

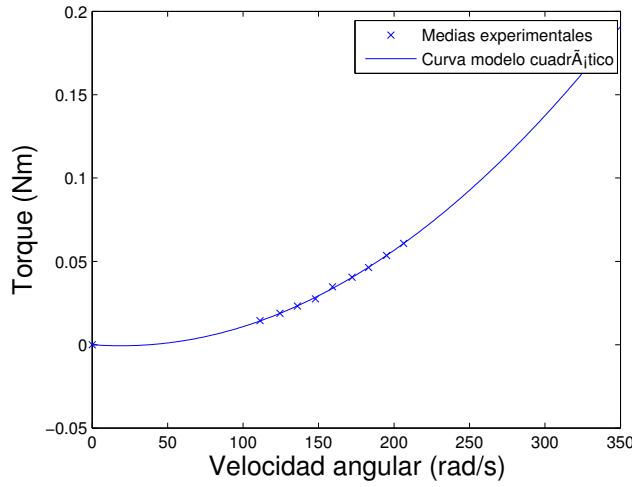


Figura 6.7: Curva torque contra velocidad angular

#### 6.4.5. Respuesta al escalón

En la figura 6.8 se muestran las velocidades angulares obtenidas. El tiempo de rise obtenido es de  $0,19\text{s}$  y la respuesta al escalón no presenta prácticamente sobretiro. Dado que siempre se trabajará en torno a un valor dado de velocidad angular (ver capítulo 13) no se producirán variaciones tan abruptas en la velocidad angular de los motores, por lo tanto podemos considerar que los tiempos de respuesta serán mejores que el obtenido en esta prueba, siendo suficientemente rápidos como para poder despreciar el transitorio de los motores.

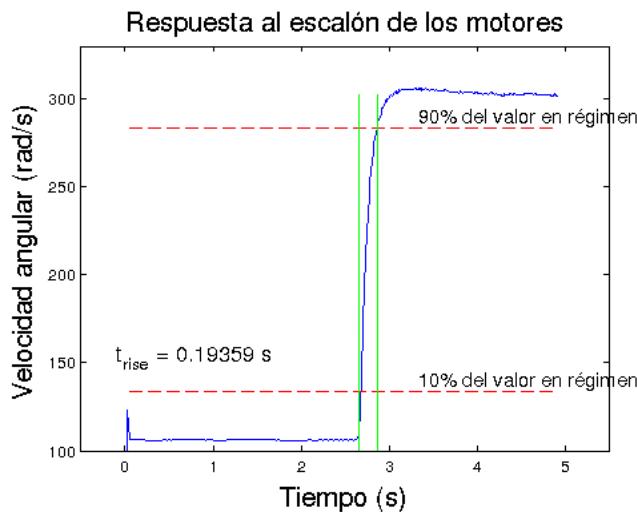


Figura 6.8: Curva  $I^2C$  contra fuerza

## **Parte IV**

# **Calibración y caracterización de los sensores**

---

---

# CAPÍTULO 7

---

## CARACTERIZACIÓN DEL ACELERÓMETRO

### 7.1. Objetivos

Realizar una serie de pruebas con el fin de caracterizar el acelerómetro de tres ejes de la unidad de medida inercial (IMU).

### 7.2. Materiales

- Mongoose 9DoF IMU de *Ckdevices*
- Prisma de madera
- Escuadra con ángulo de 45°
- Mesa nivelable con tapa móvil ajustable a distintos ángulos
- Nivel

### 7.3. Marco Teórico

Existen diversas no idealidades que afectan la lectura de los valores de aceleración registrados por el acelerómetro. Las no idealidades a considerar basados en lo desarrollado por [3] son:

- Ruido inherente
- Relación entre aceleración real y lectura del acelerómetro no lineal.
- No ortogonalidad de los ejes
- Drift aleatorio
- Variación de las medidas con la temperatura

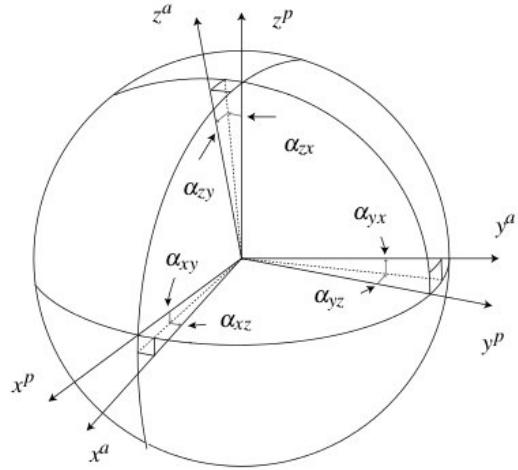


Figura 7.1: Rotaciones entre los ejes de la plataforma y del acelerómetro

### Ruido Inherente

Existe un ruido inherente del cual no nos preocuparemos en demasía ya que el mismo se modela como un proceso estocástico de distribución normal y media nula, como veremos luego. Por lo tanto, en esta etapa de calibración donde se tomarán muchas muestras y se promediarán se puede trabajar sin considerar este ruido.

### Relación no lineal

En la hoja de datos del acelerómetro ADXL345 de la *Mongoose 9DOF IMU* se declara que en cualquiera de los tres ejes los errores debido a una respuesta no lineal son, en el peor caso,  $\pm 0.5\%$  del valor de fondo de escala, por lo tanto se decide considerar para el acelerómetro una respuesta lineal.

### No ortogonalidad de los ejes

Debido a defectos de construcción los ejes de sensibilidad del dispositivo pueden no ser ortogonales. Evidentemente si no se considera este aspecto se tendrá un error que puede ser importante en las medidas de aceleración. Se modela esta no idealidad considerando la siguiente relación entre la aceleración medida en cada eje de sensibilidad del acelerómetro y la aceleración medida en un sistema solidario a la plataforma:

$$\mathbf{a}^p = T_a^p \mathbf{a}^a, \quad T_a^p = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{yz} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & 1 & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

- $\alpha_{ij}$  es la rotación del i-ésimo eje de sensibilidad del acelerómetro sobre el j-ésimo eje del sistema de la plataforma. Dichas rotaciones se ven representadas en la figura 7.1.
- $\mathbf{a}^a$  es el vector de aceleración medido por el acelerómetro.
- $\mathbf{a}^p$  es el vector de aceleración medido en el sistema solidario a la plataforma.

Estos parámetros son constantes ya que su origen es puramente de construcción y se puede asumir que las orientaciones se mantendrán durante la vida útil del sensor.

Asumiendo un modelo lineal, la relación entre la aceleración y la medida realizada se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{a}}^a = K_a \mathbf{a}^a + \mathbf{b}_a$$

donde  $K_a$  es una matriz diagonal que representa el factor de escala para convertir del valor digital a una aceleración correspondiente.  $\mathbf{b}_a$  no es otra cosa que un término independiente para corregir la posición del cero. Estos dos parámetros poseen algunas de las fuentes de error que resulta más difícil de corregir. Resulta que dichos parámetros varían con la temperatura, por lo tanto el resultado obtenido durante la calibración (temperatura ambiente) puede diferir de los valores obtenidos una vez instalado el acelerómetro dentro del cuadricóptero (temperaturas superiores a los  $30^\circ C$ ). A partir de la hoja de datos del fabricante se decide modelar el *offset* mediante una relación lineal con la temperatura. En una primera aproximación no se considera este último factor.

### Modelo del acelerómetro

A partir del análisis realizado se puede concluir que el modelo de acelerómetro que se considerará es el siguiente:

$$\tilde{\mathbf{a}}^a = K_a(T_a^p)^{-1} \mathbf{a}^p + b_a \quad (7.1)$$

## 7.4. Procedimiento

### 7.4.1. Caracterización de las no idealidades variables

Previo a la calibración de los parámetros estáticos parece interesante estudiar una serie de algunos minutos a una tasa de muestreo de 100Hz. Estos datos serán útiles para la determinación de dos no idealidades:

- Ruido inherente
- Drift aleatorio

Además se realizará una medida variando la temperatura ambiente a fin de determinar la magnitud del Drift térmico.

### 7.4.2. Determinación de parámetros estáticos

Como se desprende de la sección anterior, para poder calibrar el acelerómetro se deben determinar 12 parámetros. Por dicho motivo, se precisan obtener al menos 12 ecuaciones diferentes. Típicamente se trabaja con el doble o triple de ecuaciones que de parámetros a determinar. Para mejorar los resultados se trabajará con 27 medidas donde cada una de ellas aporta 3 ecuaciones (una por cada eje), logrando un total de 81 ecuaciones, y se procederá a determinar los parámetros que minimizan el error cuadrático medio entre los valores efectivamente medidos y los valores teóricos.

## Preparación

Para realizar una buena calibración es muy importante contar con una figura geométrica en forma de paralelepípedo de forma de poder solidarizar la IMU a dicho objeto. De esta forma nos aseguramos que no se introducen errores a la hora de orientar un eje en una dirección particular. Del mismo modo, es ideal disponer de una superficie perpendicular a la vertical y otra paralela, de modo que para rotar 90 grados la IMU, basta con rotar el paralelepípedo ese mismo ángulo, es decir, apoyar otra de las caras del mismo.

El prisma que se utilizó fue el cubo de lapacho que puede verse en la figura 7.2.

Los ángulos del mismo son prácticamente rectos difiriendo a lo sumo en medio grado.

Se construyó una plataforma de madera en forma de mesa con la tapa superior móvil, de modo que permite el giro sobre uno de sus lados (eje de giro). Se muestra en la figura 7.3. A su vez, es posible ajustar el dispositivo de forma de asegurar que dicho eje se encuentre en posición horizontal, por medio de 3 patas de altura regulable situadas en la parte inferior de la mesa. Para realizar las 27 medidas se irá modificando el ángulo de la tapa móvil de la plataforma y será medido con un semicírculo solidarizado a dicha tapa y un péndulo. En cada posición de la plataforma se tomarán medidas colocando el cubo en 3 posiciones distintas.

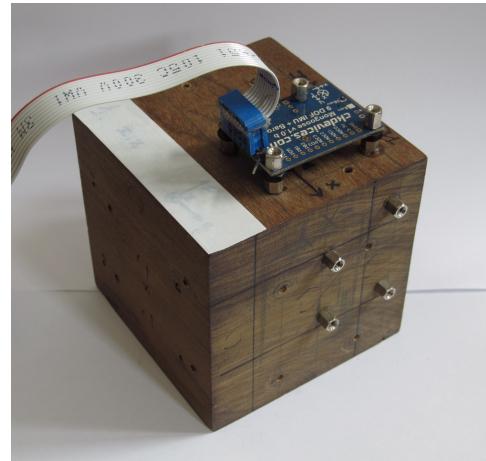


Figura 7.2: Cubo de lapacho



Figura 7.3: Mesa - Plano inclinado regulable

## Medidas a realizar

En reposo el acelerómetro medirá una fuerza igual a  $g$  en la dirección vertical y en el sentido radial saliente de la Tierra. En cada uno de los ejes de sensibilidad del acelerómetro se medirá la proyección ortogonal de dicho vector gravedad sobre cada eje. De esta forma, con distintas orientaciones se obtendrá una descomposición distinta.

### 7.4.3. Variación de la medida con la temperatura

Para obtener una serie de datos adecuada se debe variar la temperatura en un rango que incluya la temperatura interna del cuadricóptero en funcionamiento y la temperatura ambiente durante la calibración. Asimismo la variación de la temperatura no puede ser excesivamente rápida. Se procede a calentar la IMU con un secador, una vez alcanzados los grados se deja enfriar. Se utilizarán los datos en la zona en la cual la temperatura disminuye.

## 7.5. Resultados y análisis

### 7.5.1. Medida estática durante una hora

En la figura 7.4 pueden observarse los datos crudos obtenidos de las aceleraciones registradas en los tres ejes de la IMU durante un período de 3 minutos 45 segundos.

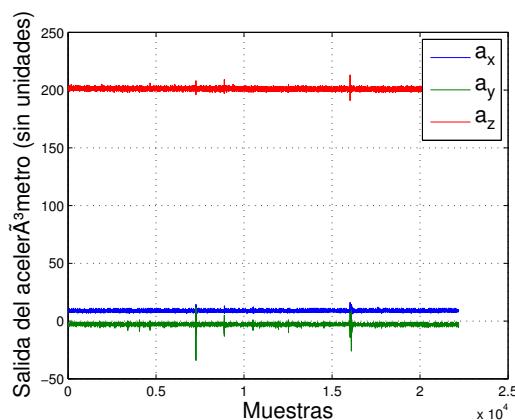


Figura 7.4: Aceleraciones registradas por la IMU orientada con el eje z verticalmente y en reposo

En la figura se observa lo que se espera a priori de acuerdo a la posición del acelerómetro, dos medidas cercanas al cero y una medida de valor positivo. Esta última corresponde a la medida de la aceleración vertical en el sistema de caída libre. De la observación de esta serie de datos relativamente extensa podemos afirmar que el ruido observado es asociable a un ruido blanco de media nula y que no existe derivación en las medidas realizadas. A partir de dichas constataciones se puede asegurar que es adecuado trabajar con el promedio de las muestras obtenidas en una posición.

### 7.5.2. Medias estáticas para el acelerómetro

Como se aclaró en la sección anterior se trabajará con el promedio de las aceleraciones medidas en una serie de datos. Cada serie de datos es de 20 segundos de duración. Además de variar el ángulo ( $\theta$ ) de la mesa, se rotará el prisma de forma de realizar una medida con cada eje perpendicular al plano de la mesa. Asimismo utilizando una escuadra se lograrán rotaciones de  $45^\circ$  respecto del eje perpendicular a la tapa ( $\phi$ ). Los resultados obtenidos se presentan en la tabla ???. Se utiliza la siguiente notación para las orientaciones utilizadas:

- Orientación “x”
  - Eje “x” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia abajo.
  - Giro de la tapa de la mesa según el eje “z”.
- Orientación “y”
  - Eje “y” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia arriba.
  - Giro de la tapa de la mesa según el eje “z”.
- Orientación “z”
  - Eje “z” perpendicular a la tapa de la mesa y hacia arriba.
  - Giro de la tapa de la mesa según el eje “-y”.

El tercer eje se deduce sabiendo que la base es directa. La aceleración medida es un número sin unidades.

Posición		Orientación x		Orientación y Aceleraciones		Orientación z	
$\theta^\circ$	$\phi^\circ$	Medida	Teórica ( $m s^{-2}$ )	Medida	Teórica ( $m s^{-2}$ )	Medida	Teórica ( $m s^{-2}$ )
0	0	-247.3172; 0.1591; -49.4095	-9.81; 0; 0	14.3760; 264.0399; -44.6882	0; 9.81; 0	12.1923; 0.2008; 207.5115	0; 0; 9.81
10	0	-242.5470; 50.0072; -48.7807	-9.6610; 1.7035; 0	15.3408; 259.7820; -91.4934	0; 9.661; -1.7035	62.8272; 0.0766; 203.3657	1.7035; 0; 9.661
10	45	-242.7077; 36.7365; -14.3685	-9.661; 1.2045; 1.2045	50.9558; 259.5086; -77.8004	1.2045; 9.661; -1.2045	48.5749; -35.4617; 203.0832	1.2045; -1.2045; -9.661
20	0	-229.2972; 95.2188; -48.4324	0; 9.2184; 3.3552	15.8545; 249.5544; -132.6116	0; 9.2184; 3.3552	108.2951; 0.0158; 191.7640	3.3552; 0; 9.2184
20	45	-229.6051; 68.0701; 15.6173	-9.2184; 2.3725; 2.3725	82.0560; 248.6061; -109.4629	2.3725; 9.2184; -2.3725	79.4781; -67.2837; 191.4327	2.3725; -2.3725; 9.2184
30	0	-209.4179; 134.6230; -47.5677	-8.4957; 4.905; 0	16.3148; 229.4927; -173.9674	0; 8.4957; -4.905	147.6114; -0.0215; 173.6084	4.905; 0; 8.4957
30	45	-209.7781; 97.1743; 43.9208	-8.4957; 3.4684; 3.4684	111.5630; 228.5963; -134.9143	3.4684; 8.4957; -3.4684	109.1504; -96.7951; 173.0896	3.4684; -3.4684; 8.4957
45	0	-166.6483; 191.3168; -46.3487	-6.9367; 6.9367; 0	17.0755; 186.6639; -226.5195	0; 6.9367; 6.9367	202.2578; -0.1806; 130.7166	6.9367; 0; 6.9367
45	45	-167.2223; 136.3814; 79.8707	6.9367; 4.905; 4.905;	150.2017; 185.5153; -172.5526	4.905; 6.9367; -4.905	147.2068; -135.3122; 130.4525	4.905; -4.905; 6.9367

Cuadro 7.1: Aceleraciones medidas y aceleraciones teóricas en los tres ejes de la plataforma

Para la calibración se consideran solamente 24 de las 27 medidas realizadas. Esto es útil ya que se tienen 3 medidas que no serán tenidas en cuenta en la calibración para realizar una verificación de qué tan buena es la calibración obtenida.

El problema de calibración consiste en encontrar el vector de parámetros  $\theta$  que mejor ajusta las medidas obtenidas a los valores teóricos de aceleración. El vector  $\theta$  se compone de los elementos de la diagonal de la matriz  $K_a$ , de los elementos de  $b_a$  y de los  $\alpha_{ij}$  de la matriz  $T_a^p$ . Es decir:

$$\theta = [k_{ax}, k_{ay}, k_{az}, b_{ax}, b_{ay}, b_{az}, \alpha_{yz}, \alpha_{zy}, \alpha_{xz}, \alpha_{zx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}]$$

Como criterio de ajuste se decide minimizar la suma de los cuadrados de las diferencia entre la aceleración teórica y la aceleración medida. Dicho problema se puede expresar matemáticamente como:

$$\theta : \min \left\{ \sum_{i=1}^M \| \tilde{\mathbf{a}}_i^p - T_a^p K_a^{-1} (\tilde{\mathbf{a}}_i^a - \mathbf{b}_a) \| \right\} \quad (7.2)$$

donde M es la cantidad de medidas realizadas,  $\tilde{\mathbf{a}}_i^p$  los valores de aceleración teóricos en cada eje de la plataforma según la posición y orientación de la IMU y  $\tilde{\mathbf{a}}_i^a$  los valores obtenidos de la IMU. Para resolver dicho problema se utiliza el algoritmo *lsqnonlin* de *MatLab*, este es capaz de encontrar los mínimos locales de la función 7.2 a partir de una semilla.

El rango de aceleraciones manejado en la prueba es de  $\pm 16g$ . Según la hoja de datos del acelerómetro, se tiene una ganancia de  $3,9mg/LDB$ . El valor de la semilla de los términos que corresponden a la ganancia debe ser entonces  $\frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}} = 26,1376$  para los tres ejes. La IMU expresa las aceleraciones obtenidas en complemento a dos, por lo que una aceleración de 0 equivale a una lectura de 0, por lo tanto el valor de la semilla de los términos que corresponden al offset debe ser 0. Finalmente, los ángulos se suponen pequeños, por lo tanto una semilla válida parece ser:

$$\theta_0 = \left[ \frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, \frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, \frac{1}{g \times 3,9 \times 10^{-3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]$$

Los parámetros que minimizan la suma de los errores al cuadrado son los siguientes:

$$\theta = [26,7572 \quad 27,0,0599 \quad 25,9838 \quad 16,9374 \quad -0,2446 \quad -47,7863 \quad 0,0005 \quad 0,0025 \quad 0,0149 \quad 0,0023 \quad 0,0000 \quad -0,0077 \quad ]$$

Luego de realizada la minimización se calcula la media del error cometido y la desviación estándar del error.

$$\mu = -2,0779 \times 10^{-10} ms^{-2}$$

$$\sigma = 0,0465 ms^{-2}$$

La media del error cometido es completamente despreciable, por lo tanto podemos afirmar que el 95 % de las medidas de aceleración realizadas tendrán un error inferior  $2\sigma = 0,0930 ms^{-2}$ .

Para verificar la calibración realizada se utilizan las medidas siguientes:

- $\theta = 0 \quad \phi = 0$  orientación x
- $\theta = 20 \quad \phi = 0$  orientación y
- $\theta = 10 \quad \phi = 45$  orientación z

Se presenta para las tres medidas la aceleración teórica, la medida convertida con los parámetros obtenidos y el error en la tabla 7.2.

Medida	Aceleración medida ( $ms^{-2}$ )	Aceleración teórica( $m^{-2}$ )	Error( $ms^{-2}$ )
1	-9.8762; -0.1323; -0.0622	-9.8100; 0.0000; 0.0000	-0.0662; -0.1323; -0.0622
2	-0.0534; 9.2382;-3.3743	0.0000; 9.2184; 3.3552	0.0534; 0.0198; -0.0191
3	1.2072;-1.3057; 9.6649	1.2045;-1.2045;-9.661	0.0027; -0.1012 0.0039

Cuadro 7.2: Medidas de verificación

### 7.5.3. Variación con la temperatura

La temperatura de funcionamiento normal de los sensores es mucho mayor a la temperatura ambiente, debido al calor emanado por la electrónica utilizada. Gracias al sensor de temperatura presente en la IMU es posible caracterizar la temperatura de funcionamiento normal de la IMU, que ronda los  $35^{\circ}C$ . Dado que la calibración fue realizada a una temperatura sensiblemente inferior, y para lograr robustez frente a eventuales cambios de temperatura, se realiza una compensación por temperatura de la lectura otorgada por el acelerómetro.

Para ello se calientan los sensores hasta una temperatura aproximada de  $48^{\circ}C$ , se lo deja enfriar hasta los  $35^{\circ}C$  y se analiza la variación de las medidas con la temperatura. Al realizar dicho experimento se obtienen los resultados mostrados en la figura 7.5.

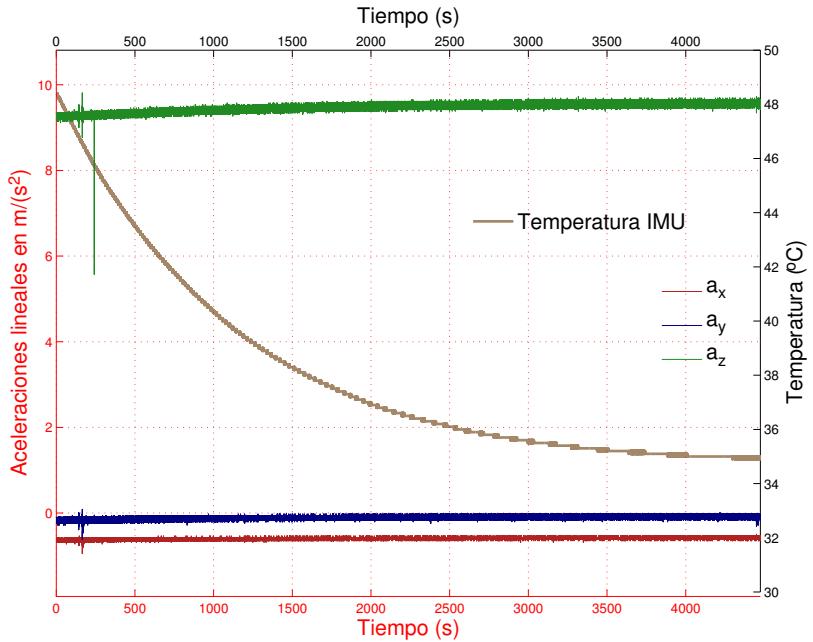


Figura 7.5: Variación de la medida del acelerómetro con la temperatura

En la misma gráfica se muestran las medidas obtenidas de los sensores y la temperatura en función del tiempo. Los ejes rojos corresponden a la aceleración mientras que los ejes en negro corresponden a la temperatura.

De la hoja de datos del acelerómetro se puede extraer la siguiente información:

**0 g Offset vs. Temperature for X-, Y-Axes:**  $\pm 0,4 \frac{mg}{^{\circ}C}$

**0 g Offset vs. Temperature for Z-Axis:**  $\pm 1,2 \frac{mg}{^{\circ}C}$

la cual indica que la variación con la temperatura de la medida otorgada en **z** es 3 veces superior que la variación en los otros dos ejes y se puede caracterizar fundamentalmente con un offset que depende de la temperatura. Por ello se propone una compensación por temperatura utilizando un offset solamente para el eje **z**, de la forma:

$$b = b_a + \alpha(t - t_o)$$

Recordando la ecuación 7.1, se puede actualizar el modelo del acelerómetro al siguiente modelo:

$$\tilde{\mathbf{a}}^a = K_a(T_a^p)^{-1}\mathbf{a}^p + b_a + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha(t - t_o) \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

donde  $t$  es la temperatura instantánea y  $t_0$  la temperatura para la cual el acelerómetro fue calibrado (aproximadamente  $27^{\circ}C$ ).

Los resultados obtenidos luego de la compensación por temperatura se muestran en la figura 7.6.

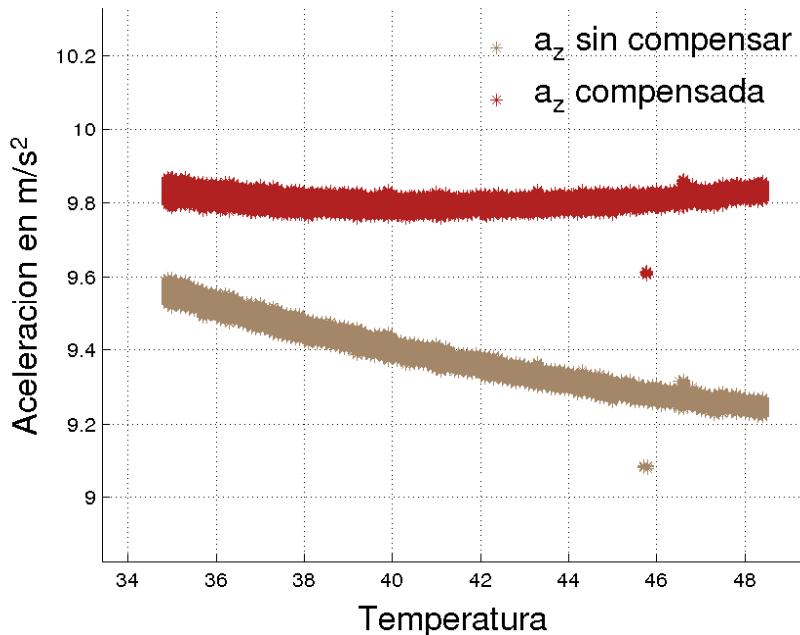


Figura 7.6: Resultado de la compensación por temperatura

En la prueba mostrada en dicha figura se coloca al acelerómetro en forma horizontal, por lo que debería arrojar una lectura cercana a  $9,81 \frac{m}{s^2}$ . En las medidas sin compensación se puede observar el carácter lineal de la dependencia con la temperatura. A su vez puede decirse que el error introducido por la temperatura en las medidas es corregido en buena forma por el modelo propuesto, ya que se obtienen valores de aceleración cercanos a los esperados en todo el rango de temperaturas estudiados.

---

---

# CAPÍTULO 8

---

## CALIBRACIÓN DE GIRÓSCOPO

### 8.1. Objetivos

- Realizar una serie de pruebas con el fin de calibrar el giróscopo de tres ejes de la IMU.
- Estudiar, proponer y validar un modelo posible para dicha calibración.
- Estimar las fuentes de error del mismo (ruido y bias).

### 8.2. Materiales

- Mongoose 9Dof IMU de *Ckdevices*
- Beagleboard xM
- Adaptador Wi-Fi
- Tocadiscos
- Cronómetro
- Cubo perfecto de madera
- 2 escuadras de 45°
- 2 escuadras de 30°
- Madera de 4 cm de ancho con lados paralelos

### 8.3. Marco teórico

Para la calibración del giróscopo se utiliza el mismo modelo que se utilizó para el acelerómetro en la sección 7.

$$\tilde{\mathbf{w}}^a = K_w (T_a^p)^{-1} \mathbf{w}^p + \mathbf{b}_w \quad (8.1)$$

con  $K_w$  matriz diagonal que representa el factor de escala para convertir del valor digital a la velocidad angular correspondiente,  $\mathbf{b}_w$  un término independiente para corregir la medida de velocidad angular nula y  $T_a^p$  una matriz que corrige la no ortogonalidad de los ejes:

$$T_a^p = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{yz} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & 1 & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

## 8.4. Procedimiento

### 8.4.1. Caracterización de las no idealidades variables

Para obtener más información sobre el *ruido inherente* y el *drift aleatorio* se toman datos durante una hora a una frecuencia de 100 Hz con el dispositivo quieto.

### 8.4.2. Determinación de parámetros estáticos

Para poder realizar la calibración pertinente es necesario determinar 12 parámetros: las ganancias y bias de los 3 ejes y los 6 ángulos de la matriz  $T_a^p$ . Para determinar dichos parámetros es conveniente obtener el doble o triple de medidas que de parámetros. Las medidas a realizar son las siguientes:

Eje de giro principal	Eje de giro secundario	Ángulo de giro
x	z	0
x	z	30
x	z	45
y	x	0
y	x	30
y	x	45
z	y	0
z	y	30
z	y	45

Cuadro 8.1: Configuraciones utilizadas para calibrar el giróscopo

Con un total de 9 configuraciones diferentes, donde cada una de ellas aporta 3 medidas (una por cada eje), se utilizarán un total de 27 medidas para determinar los 12 parámetros involucrados.

### Preparación

Las medidas consisten básicamente en dejar la IMU girar a la velocidad del tocadiscos en las posiciones listadas en la tabla 8.1.

La dirección de giro principal es la dirección de giro del tocadiscos cuando no hay giro en la dirección secundaria. Con el cubo de madera se resuelven las rotaciones de 90 grados para alinear los diferentes ejes de la IMU con el eje de giro del tocadiscos. Los giros en el eje secundario se realizan utilizando las escuadras y la madera de 4

cm de ancho y lados paralelos, como se muestra en la figura 8.1. Apoyando el cubo sobre la escuadra se logran los ángulos de  $30^\circ$  y  $45^\circ$  deseados en las direcciones de giro secundarias.



Figura 8.1: Escuadras  
calibración del girósopo se puede ver en la figura 8.2.

Si bien la velocidad de giro estándar del tocadiscos es 33.3 rpm, resulta conveniente medir la velocidad del tocadiscos para corroborarla. Se mide la velocidad con el dispositivo IR y se verifica el buen funcionamiento del tocadiscos.

Un esquema completo de la configuración utilizada para la

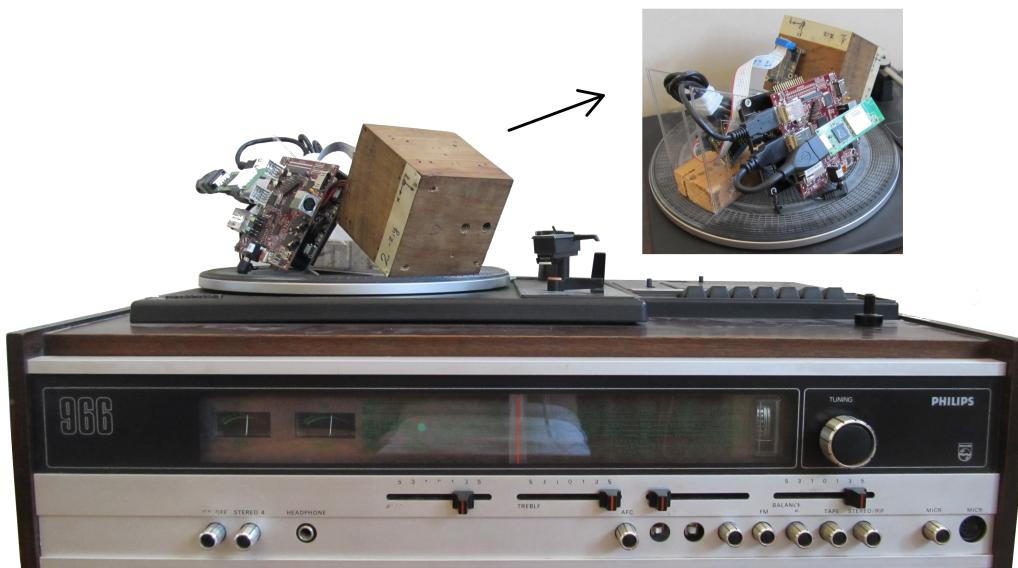


Figura 8.2: Tocadiscos

## 8.5. Resultados y análisis

### 8.5.1. Medias para la determinación de los parámetros estáticos del giróscopo

Se pone el tocadiscos a girar y mediante la conexión Wi-Fi se indica a la *BeagleBoard xM* que empiece y termine de logear los datos. Se trabaja con el promedio de las velocidades angulares obtenidas en series de datos de 20 segundos controlados por cronómetro. La velocidad del tocadiscos permanece constante en todas las pruebas y lo que se varía es el ángulo del plano donde se apoya el cubo, haciendo

uso de las escuadras (figura 8.1).

La IMU arroja datos enteros en complemento a dos. La hoja de datos del fabricante asegura que la relación entre bits y *grados/segundo* es:  $14,375 \text{ LDB}/(\text{°}/\text{s})$ . Como se desea trabajar con velocidades angulares en  $\text{rads}^{-1}$  se tiene que la ganancia será  $\approx 823,6$

Al igual que con la calibración del acelerómetro (capítulo ??), se utiliza la función *lsqnonlin* de *Matlab* para ajustar las medidas obtenidas contra los valores teóricos para cada configuración. Dado que las medidas ya vienen expresadas en  $(\text{°}/\text{s})$  y previamente pre-calibradas internamente a la IMU, se afirma que una buena semilla para las ganancias en los 3 ejes es el vector  $G = [823,6; 823,6; 823,6]$ . A su vez se supone que cada offset de cada eje será cercano a 0. Además suponiendo que los ángulos de no-ortogonalidad de los ejes es despreciable, se llega a que una buena semilla para la función *lsqnonlin* es la siguiente:

$$\theta_0 = (823,6, 823,6, 823,6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Los parámetros que minimizan la suma de los errores al cuadrado son los siguientes:

$$\theta = \begin{bmatrix} 796,6646; 808,2419; 803,4482; -25,3819; -15,7210; -1,8871; \\ 0,0093; 0,0659; 0,0093; 0,0128; -0,0250; 0,0552 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Es interesante destacar que el vector  $\theta$  hallado es similar a la semilla propuesta, por lo que podemos afirmar que el mínimo local encontrado por la función *lsqnonlin* es el deseado.

Una buena medida de los resultados obtenidos se puede obtener al analizar el promedio de los errores cometidos ( $\mu$ ) y la desviación estándar ( $\sigma$ ):

$$\mu = 0,01877 \text{ (rad/s)} \quad (8.3)$$

$$\sigma = 0,0231 \text{ (°/s)} \quad (8.4)$$

El error promedio corresponde a una velocidad angular de  $1,07^\circ/\text{s}$  y  $2\sigma$  corresponde a una velocidad angular de  $2,64^\circ/\text{s}$ . Estos valores son suficientemente pequeños en comparación con las velocidades angulares típicas a las cuales se encontrará sometido el cuadricóptero y por ende puede considerarse que la calibración realizada es aceptable.

### 8.5.2. Variación con la temperatura

Como fue explicado en el capítulo 7, la temperatura de trabajo de la IMU es ampliamente mayor que la temperatura para la cual fueron calibrados los sensores. Para realizar la compensación de la medida del giroscopio por temperatura, se utiliza un método idéntico al utilizado para el acelerómetro: se varía la temperatura desde una temperatura aproximada de  $48^\circ\text{C}$  hasta  $35^\circ\text{C}$  y se releva la curva de velocidad angular medida contra temperatura.

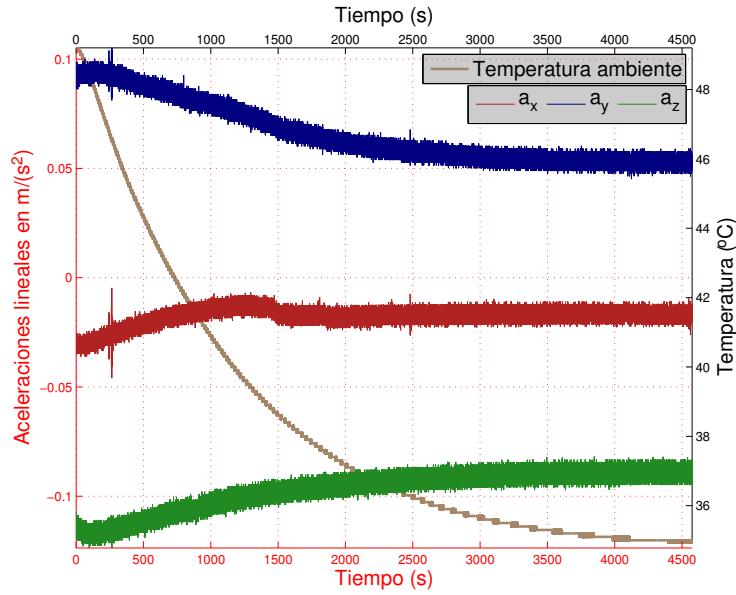


Figura 8.3: Variación de la velocidad angular con la temperatura

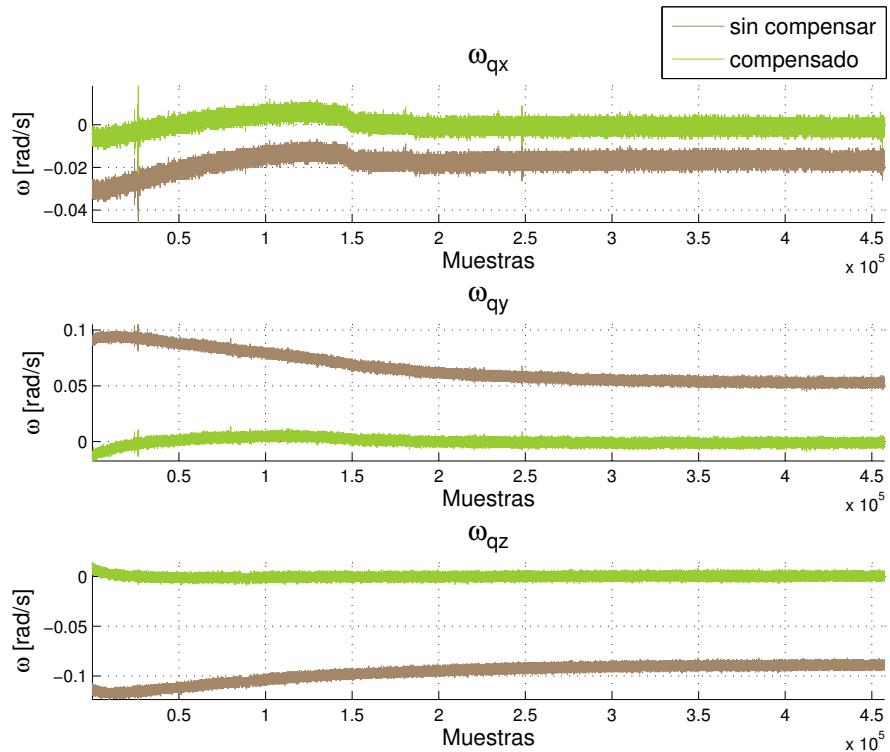


Figura 8.4: Velocidad angular compensada por temperatura

Aca decir como es el modelo q se usa para compensar la temperatura. tratar de explicar lo del offset que no depende de la temperatura

Recordando la ecuación 8.1, el nuevo modelo para la velocidad angular es el siguiente:

$$\tilde{\mathbf{w}}^a = K_w(T_a^p)^{-1} \mathbf{w}^p + \mathbf{b}_w + \mathbf{b}_1(t - t_0) + \mathbf{b}_0$$

simplemente definiendo  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_w + \mathbf{b}'_0$ :

$$\tilde{\mathbf{w}}^{\mathbf{a}} = K_w(T_a^p)^{-1}\mathbf{w}^{\mathbf{p}} + \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(t - t_0)$$

---

# CAPÍTULO 9

---

## MAGNETÓMETRO

### 9.1. Objetivos

El objetivo de estas pruebas es comprender y caracterizar el magnetómetro de 3 ejes Honeywell HMC5583, incorporado para asistir en la determinación de la orientación absoluta del cuadricóptero.

### 9.2. Procedimiento

El modelo adoptado para relacionar las medidas de campo magnético sin calibrar con las medidas calibradas es idéntico al utilizado a la hora de calibrar el acelerómetro y el giróscopo. Se trata de realizar una transformación lineal de las medidas obtenidas para transformarlas en los valores de campo magnético. Se propone un modelo de la forma:

$$\mathbf{C}^p = K_m(\tilde{\mathbf{C}}^m - \mathbf{b}_m)$$

Las principales distorsiones que sufre un magnetómetro son aquellas debidas a los efectos de *hard iron* y *soft iron*. El primero es debido a la presencia de imanes permanentes, mientras que el segundo se debe a la distorsión producida por elementos metálicos como por ejemplo tornillos o conectores. Idealmente el campo magnético terrestre medido en diferentes direcciones es constante, por lo tanto la representación de dichas medidas es una esfera centrada en el origen. Sin embargo, el resultado de los efectos mencionados es que la representación sea una elipsoide (debido al efecto de *soft iron*) centrada en un punto diferente al origen (debido al efecto de *hard iron*). Por esta razón la calibración del sensor, a diferencia de la realizada para el acelerómetro y el giróscopo debe ser dentro del cuadricóptero a fin de poder compensar dicho efecto.

El metodo de calibración propuesto en ?? consiste en tomar una serie de medidas de campo magnético terrestre en la mayor cantidad de orientaciones posibles. Para asegurar la calidad de los datos es recomendable tomar medidas distribuidas uniformemente en todas las direcciones. Se utilizó un algoritmo desarrollado por *Alain Barraud* para realizar la calibración, dicho algoritmo no es otra cosa que la

implementación de la minimización presente en el método propuesto por ???. El resultado que se obtiene es la matriz y el vector que hacen que las medidas tomadas aproximen una esfera de centro el origen y radio unitario.

Una vez calibrado el sensor se procede a verificar la exactitud que ofrece el mismo para determinar la orientación de la plataforma. Con dicho objetivo Cabe aclarar que el Norte magnético no se corresponde con el Norte geográfico en toda la Tierra, sino que por el contrario (dependiendo de la región del mundo) presenta una declinación. Es decir que tenemos una componente del campo magnético en la dirección Oeste-Este además de la componente Sur-Norte. La declinación es diferente en cada punto de la Tierra. En particular en Uruguay la misma es de  $-9,74^\circ$  según la convención mundial, es decir que el Norte magnético se encuentra  $9,74^\circ$  al Oeste del Norte geográfico.

### 9.3. Resultados y Análisis

Los parámetros obtenidos son los siguientes:

- $K_m = \begin{pmatrix} 4,08 \times 10^{-3} & 2,54 \times 10^{-5} & 5,36 \times 10^{-4} \\ 04,04 \times 10^{-3} - 1,13 \times 10^{-4} & \\ 004,77 \times 10^{-3} & \end{pmatrix}$
- $\mathbf{b}_m = (-63,16// - 209,61// - 38,62//)$

En la figura 9.1a se observan graficadas las medidas de campo magnético con el sensor descalibrado en los ejes solidarios a la plataforma. Como era de esperarse, debido a los efectos nombrados anteriormente, con el sensor descalibrado no se obtiene una esfera. En la figura 9.1b tenemos las medidas de campo magnético con el sensor calibrado. La magnitud que medimos luego del proceso de calibración se encuentra normalizada. Dado que utilizaremos dicho sensor para determinar una orientación, nos interesan simplemente las relaciones entre las componentes medidas en cada eje del sensor, por lo tanto trabajar con las medidas normalizadas arroja el mismo resultado que trabajar con las medidas de campo magnético expresadas en Teslas o Gauss.

Para verificar que la calibración es exitosa se debe analizar con mayor detalle las características de la “esfera” obtenida. Con los datos convertidos se procede a realizar una minimización gracias a los mínimos cuadrados para obtener las coordenadas del centro de la esfera y su radio.

Los resultados que se obtienen son:

- Centro de la esfera:  $(-3,65 \times 10^{-3}; -9,40 \times 10^{-3}; 1,67 \times 10^{-3})$
- Radio de la esfera: 0,996
- Desviación estándar de la medida del radio:  $\sigma = 1,54 \times 10^{-2}$

A partir de dichos resultados se puede concluir que el resultado de la calibración es exitoso, ya que la representación de las medidas es prácticamente una esfera de radio 1 centrada en el origen.

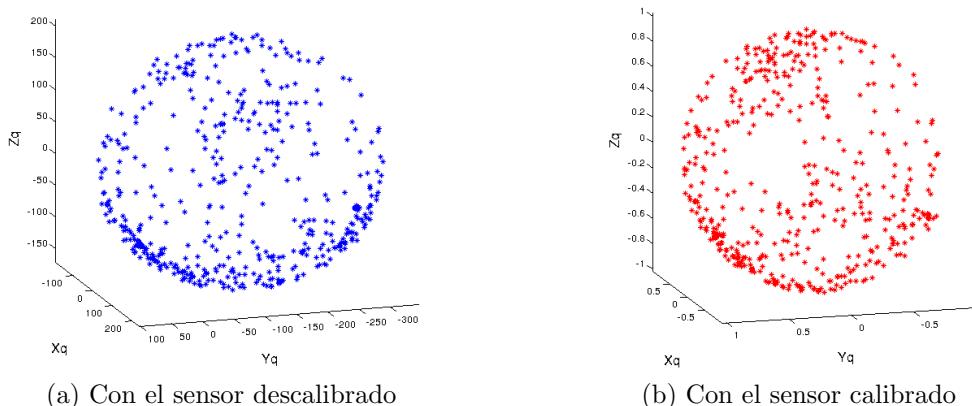


Figura 9.1: Medias de campo magnético Terrestre

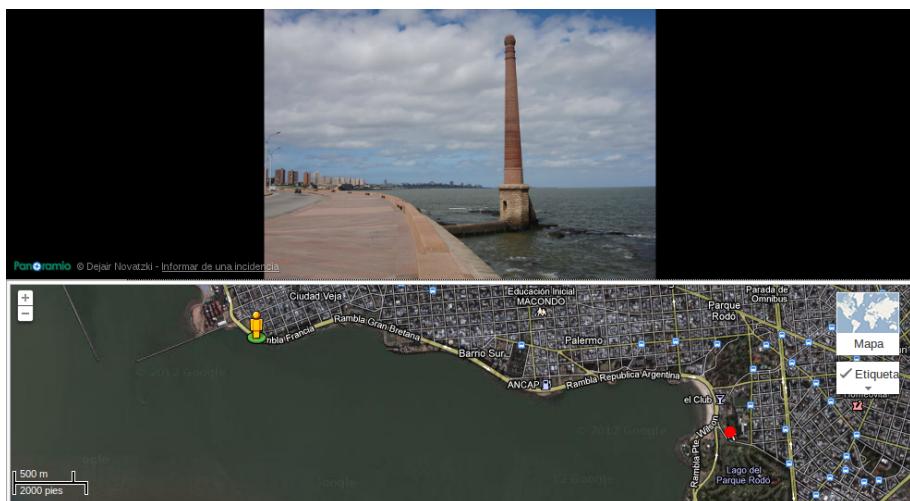


Figura 9.2: Mapa de la costa de Montevideo

### 9.3.1. Determinación de la orientación

Luego de calibrado el sensor se quiere determinar la capacidad que tiene el mismo de proporcionar una adecuada orientación. Con dicho fin se utiliza la tabla larga para alinear el sensor en una dirección en particular. La ubicación donde fue realizado el experimento se encuentra marcada aproximadamente con la marca roja en la figura 9.2. El objeto elegido para realizar la alineación es el que se muestra en la parte superior de la figura 9.2, su ubicación es la indicada por el “muñeco” en la figura 9.2.

Del mapa de la Intendencia de Montevideo <sup>1</sup> se obtienen las coordenadas de los puntos seleccionados. El punto en que fue realizado el experimento es el (576039,6135625) y el punto con el cual se alineó es el (572118,6136415). El ángulo de la recta que une los dos puntos medida respecto del eje Sur-Norte es de 78,6° al Oeste.

---

<sup>1</sup><http://sig.montevideo.gub.uy/mapas/mapa-principal>

---

# CAPÍTULO 10

---

## BARÓMETRO

Como instrumento para determinar la altura del cuadricóptero se pensaba utilizar un GPS. La frecuencia de muestreo del GPS y el error en los datos provenientes del mismo lo hacen insuficiente como medio para estimar la elevación del cuadricóptero. Esta fue la motivación para la incorporación de un barómetro.

Las características principales del GPS son:

- Permite obtener un valor para la altura absoluta, libre de bias, pero hace falta promediar muestras durante varios minutos antes de llegar a un dato confiable.
- La precisión del GPS es mala muy cerca del suelo, lo cual representa un problema al intentar despegar y/o aterrizar.

Se opta por incorporar un barómetro, ya que aparentemente dichos sensores padecen de *otros* problemas, y pueden complementar al GPS.

El sensor adquirido es un barómetro digital BOSCH BMP085. Permite medir presión absoluta, y, conociendo la presión y la temperatura a nivel del mar, permite calcular la altura absoluta.

Tiene varios modos de funcionamiento, habiendo un compromiso entre el consumo, la tasa de actualización, y la resolución.

### 10.1. Objetivos

El objetivo de estas pruebas es determinar como ha de usarse el barómetro BOSCH BMP085, incorporado para asistir en la determinación de la altura del cuadricóptero. Para ello se procede a caracterizar el sensor.

Se analizan las siguientes situaciones:

- Reposo: Se analizan períodos de distinta duración, para cumplir con distintos objetivos:
  - Decenas de minutos: Caracterizar el drift y el tiempo de *warm-up*.
  - Decenas de segundos: Caracterización del ruido de las medidas.
- Altura relativa: 3 experimentos variando el rango a analizar: Puntos que distan decenas de centímetros entre sí, 1m entre sí, y aproximadamente 5m entre sí.

## 10.2. Materiales

- Laptop.
- Tanza.
- Cinta métrica.
- Cubo de lapacho.
- IMU “Mongoose” de CKDevices (cuenta con un BMP085).

## 10.3. Consideraciones previas

El sensor de presión devuelve la presión absoluta. Si se conoce la presión y la temperatura a nivel del mar, es posible calcular la elevación. A nivel de la tropósfera, la capa más baja de la atmósfera, se puede calcular la altura a partir de la presión atmosférica mediante la siguiente fórmula[7]:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{L \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g \cdot M}{R \cdot L}} \quad (10.1)$$

Donde:

- $p_0$ : Presión atmosférica estándar a nivel del mar - 101325 Pa.
- $L$  : Gradiente de temperatura<sup>1</sup> - 0.0065 K/m
- $T_0$ : Temperatura estándar a nivel del mar - 288.15 K
- $g$  : Constante de gravitación universal - 9.80665 m/s<sup>2</sup>
- $M$  : Masa molar del aire seco - 0.0289644 kg/mol
- $R$  : Constante universal de los gases - 8.31447 J/(mol·K)

## 10.4. Procedimiento

- **Drift y *warm-up*:** En los datos tomados durante varios minutos, se observa lo que parecería ser un drift en las medidas obtenidas del barómetro. Se toman muestras durante 1 hora, con el barómetro quieto, comenzando con el circuito en frío<sup>2</sup>.
- **Caracterización del ruido:** Es de interés caracterizar el ruido en los datos provenientes del barómetro. Si se trata de un proceso estacionario, y de ruido blanco, entonces, promediando se puede reducir el error. Se analizan datos tomados durante diversos períodos de tiempo: 5 minutos, 2 minutos, 20 segundos y 15 segundos. Sobre estos datos se calcula la autocorrelación de las muestras, y se compara el ruido con los valores dados por la hoja de datos. La hoja de datos especifica ruido RMS típico para los distintos modos de funcionamiento.

<sup>1</sup>Tasa de incremento de la temperatura con la altura (es negativa).

<sup>2</sup>Habiendo estado apagado durante, por lo menos, los 30 minutos previos a la prueba.

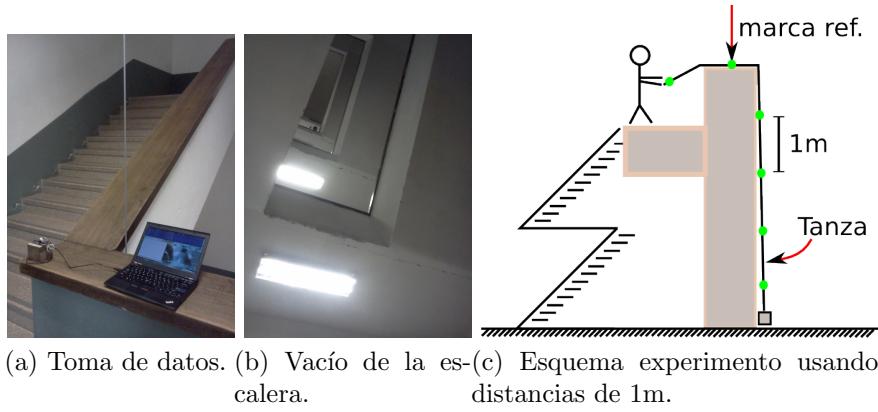


Figura 10.1

- **Medidas de altura absoluta:** Para analizar la performance del barómetro como instrumento para determinar la elevación absoluta, se toman puntos de altura conocida, y se comparan las lecturas contra los datos conocidos.
- **Distancias de varios metros:** Se despliega una cinta métrica en el vacío del centro de una escalera de 4 tramos. La cinta extendida cubre aproximadamente 25 metros. Se comparan las medidas dadas por el barómetro con las que se obtienen de la cinta.

Se utiliza una cinta de agrimensor, graduada cada 10 centímetros, para medir la distancia de un piso a otro. Luego se toman 1 minuto de datos en cada piso, recorriendo la escalera de un extremo a otro. Se repite este experimento 3 veces (se sube, se baja y se vuelve a subir) y luego se realiza un experimento similar, pero recorriendo la escalera de manera casi continua (Pausa por piso menor a 2 segundos).

- **Distancias de un metro:** Se realizan marcas cada un metro, en seis puntos distintos de una tanza. Se ata el cubo de lapacho en un extremo de la tanza, con la *Mongoose* atornillada a él. Se lo deja descender desde la escalera del IMERL<sup>3</sup>. Se suelta tanza hasta que el cubo se apoya contra el piso, de forma que la primer marca en la cuerda se encuentre junto a quien está realizando las medidas. Se hace una pequeña marca sobre la baranda, en el punto que coincide con la primer marca de la cuerda. Se mide la presión durante un minuto. Luego se sube el cubo hasta que la marca en la baranda coincida con la segunda marca de la cuerda ( $\Delta h = 1m$ ), etc. Al comenazar y al terminar se mide la presión a nivel del suelo, para tomar en cuentas cambios meteorológicos.
- **Distancias de decenas de centímetros:** Se ubica el cubo de lapacho siempre en la misma orientación sobre cada uno de los estantes de una estantería, se mide distancia al piso y se toman datos de la presión durante 5 segundos.

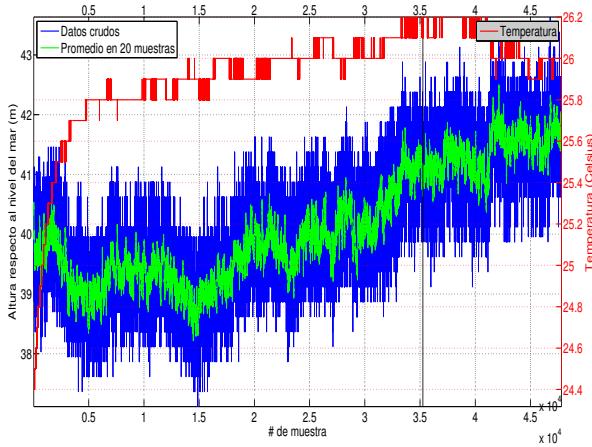
## 10.5. Análisis y resultados

### 10.5.1. Drift y *warm-up*

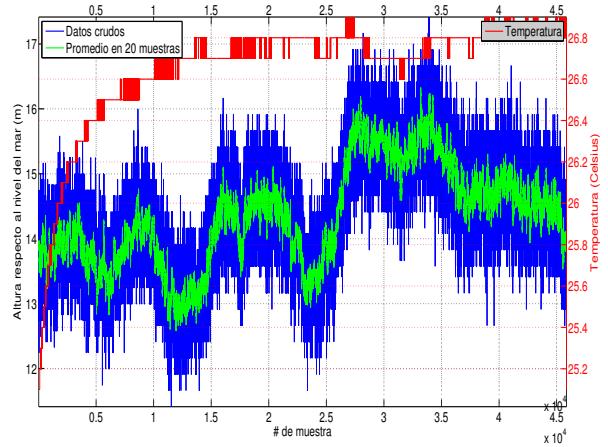
Para observar si hay un drift y/o tiempo de *warm-up* significativo, se procede a tomar muestras durante 1 hora, habiendo estado el dispositivo desenchufado durante por lo menos media hora (el circuito arranca en frío).

<sup>3</sup>Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia

Se repite este experimento varias veces. En las figuras 10.2b y 10.2a se observan los resultados característicos.



(a) Muestras durante una hora, experimento #1.



(b) Muestras durante una hora, experimento #4.

Figura 10.2

Se observa que existe un tiempo de *warm-up* bastante extenso, pero con un rango pequeño. La temperatura tarda entre 15 y 45 minutos en estabilizarse, y en el proceso varía menos de 2°C. Las muestras del barómetro no parecen estar directamente correlacionadas con la temperatura.

El barómetro no parece ser adecuado para medir la elevación absoluta. En los datos de las figuras 10.2a y 10.2b se observan variaciones de hasta 3 metros en la estimación de la altura en un período de 1 hora. Sin embargo, el error en el corto plazo es significativamente menor que en el largo plazo, parece viable el uso del barómetro como estimador de la altura en el corto plazo. Esto se analiza más adelante.

### 10.5.2. Caracterización del ruido

En los logs de la sección 10.5.1, se observa que:

- El comportamiento del ruido en intervalos extensos no es estacionario.
- La mayoría de los saltos en la medida de la altura son de aproximadamente 25cm. Esto no es coherente con las especificaciones dan una resolución de 1Pa, que corresponden a una variación en altura de aproximadamente 8cm.

#### Estacionariedad

Analizando el ruido en intervalos más pequeños, donde el proceso se puede considerar estacionario, el comportamiento del ruido es muy similar al del ruido blanco.

En la figura 10.6 se observa la autocorrelación de la muestras tomadas con el barómetro en intervalos de tiempo de 5 minutos, 2 minutos, y 15 segundos.

Cabe destacar que el ruido se puede considerar estacionario si se usan intervalos de tiempo menores a 15 segundos.

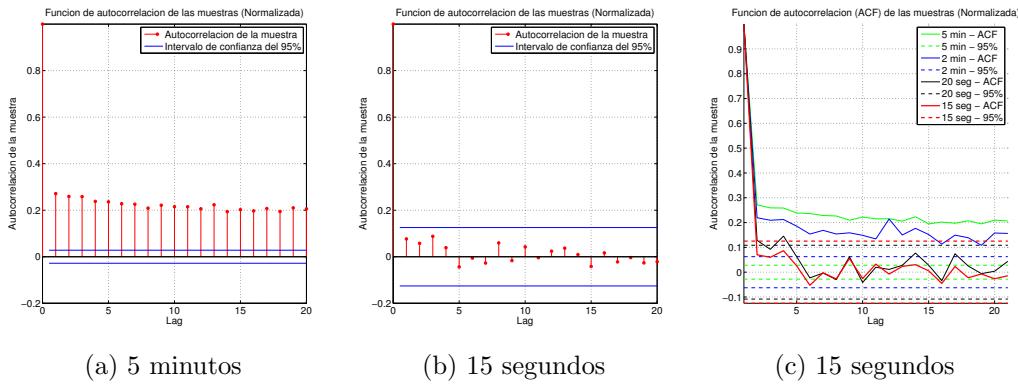


Figura 10.3: Autocorrelación de las muestras del barómetro.

### Modos de funcionamiento

El barómetro puede dar más resolución y menos ruido, a cambio de un incremento en el tiempo entre datos nuevos, y en el consumo de energía. Esto lo logra promediando datos internamente. En la tabla 10.3 se compara el ruido RMS en los distintos modos, con lo que se lograría usándolo en el modo básico (sin promediar internamente) y promediando en el microprocesador.

La resolución más atractiva parece ser la número 2, en la cual se promedian 4 datos.

Modo	Ruido RMS (m)		
	$\mu p$	Sensor	specs
0	0.52	0.52	0.50
1	0.37	0.45	0.40
2	0.25	0.37	0.30
3	0.63	0.35	0.25

Cuadro 10.1

### Resolución del instrumento

En la figura 10.5b se observa un histograma de las diferencias entre muestras sucesivas de los datos del barómetro. Se observa que la mayor parte de los datos saltan de a 25cm. Se esperaba una discretización en niveles de aproximadamente 8cm, correspondientes a variaciones de presión de 1Pa (la resolución del instrumento).

Puede resultar difícil ver que hay muestras en todos los bins, pero mirando con detalle se puede. Puede deberse a un problema del firmware del sensor, o la construcción del sensor en sí.

#### 10.5.3. Altura absoluta

Las figuras 10.2a y 10.2b se corresponden a datos tomados a la misma altura, pero en días distintos. Cabe destacar que la diferencia entre ambas curvas es de aproximadamente 25 metros. Se descarta la posibilidad de utilizar el barómetro para determinar la altura absoluta, ya que estando el barómetro a una altura fija, la elevación varía mucho de un día a otro, lo cual refleja una fuerte dependencia con factores externos, probablemente climáticos, que no interesa considerar.

#### 10.5.4. Distancias de varios metros

En las siguientes figuras se observan los resultados del experimento. Las líneas verticales (en negro) representan el comienzo y el fin de la toma de datos en cada piso. No se hace una medida de la altura absoluta, se miden las distancias entre piso

y piso (con la cinta métrica), y se usa como origen de coordenadas la altura dada por el promedio de algunas muestras al comienzo del experimento, ya sea en el piso de más arriba, o en el piso de más abajo (bajadas y subidas respectivamente). La coordenada Y de los segmentos en rojo representan la distancia entre el origen y el piso actual. Dicha distancia se mide con la cinta métrica.

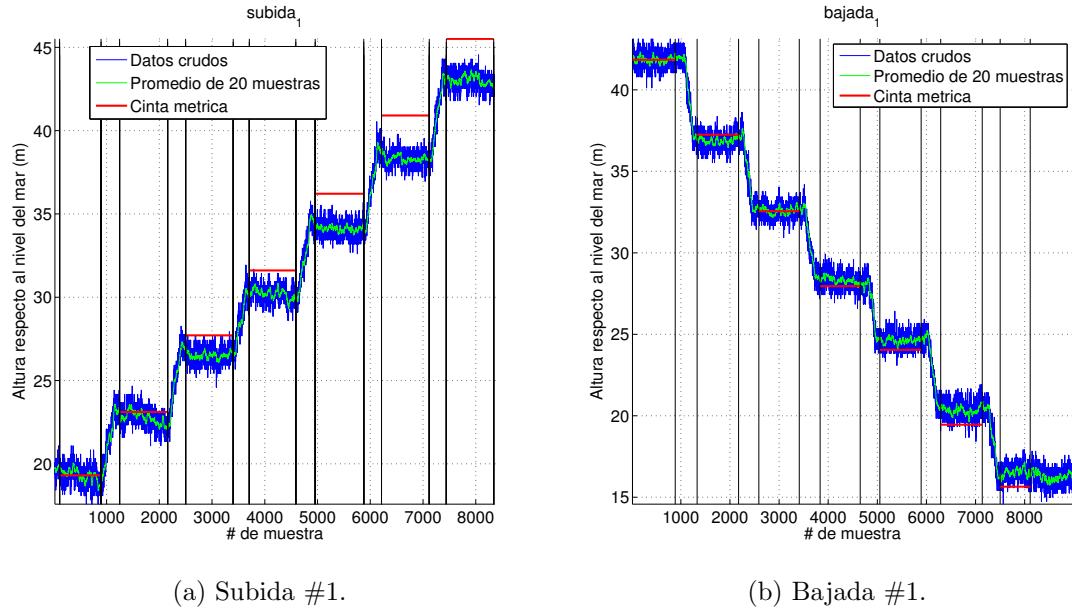


Figura 10.4: Subida/Bajada #1, 2 minutos de datos por piso.

En la figura 10.4a se observa que para cuando se termina de recorrer la escalera, el error acumulado se llega a los 3 metros. En la 10.4b se observan resultados mejores que en la figura 10.4a. Se repite la subida, y se obtienen resultados similares a los de la figura 10.4.

Cabe destacar que la performance durante la bajada rápida (figura 10.5a) es muy similar a la que se obtuvo tomando muestras durante 1 minuto, por lo que

En la figura 10.6a se observa la evolución del error acumulado para 2 subidas<sup>4</sup>, 1 bajada y una bajada rápida.

El error en la determinación de la distancia entre un piso y el siguiente se observa en la figura 10.6b. Dicho error es relativo a la altura de cada piso, que es de aproximadamente 4.3m. Analizando los números con cuidado, se llega a que el error es siempre menor al 10 %.

De las figuras 10.5a y 10.6a se desprende que utilizando promedios de 20 muestras<sup>5</sup>, se obtiene un error de aproximadamente 0.5m. El comportamiento del barómetro es aceptable, y se corresponde con las especificaciones de la hoja de datos.

### 10.5.5. Distancias de un metro

Las figuras 10.7a y 10.7b presentan las medidas obtenidas al realizar las medidas estáticas a alturas que difieren en 1 metro. La figura 10.9 muestra las medidas

<sup>4</sup>No se incluye una gráfica de la segunda subida, ya es muy similar, en cuanto al error, a la de la primera bajada, pero con un error del orden del de la primer bajada.

<sup>5</sup>Esta es la cantidad de muestras que se promediaron para determinar la altura cada vez en cada piso en el experimento “rápido”.

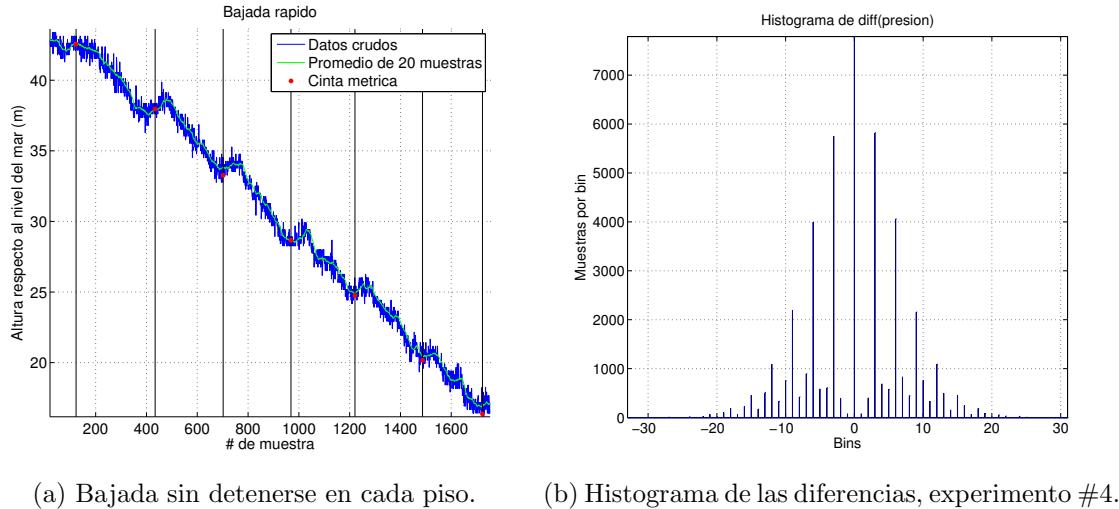


Figura 10.5

obtenidas durante el proceso de subir y bajar el barómetro. En las tres figuras se observan los datos obtenidos y la media móvil considerando 20 muestras.

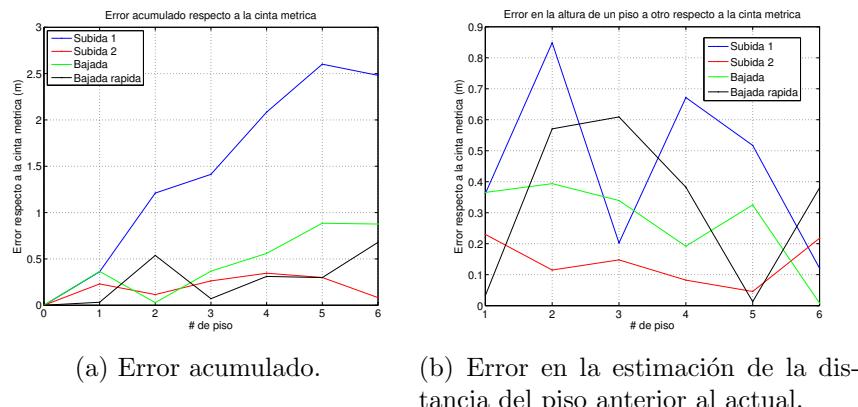
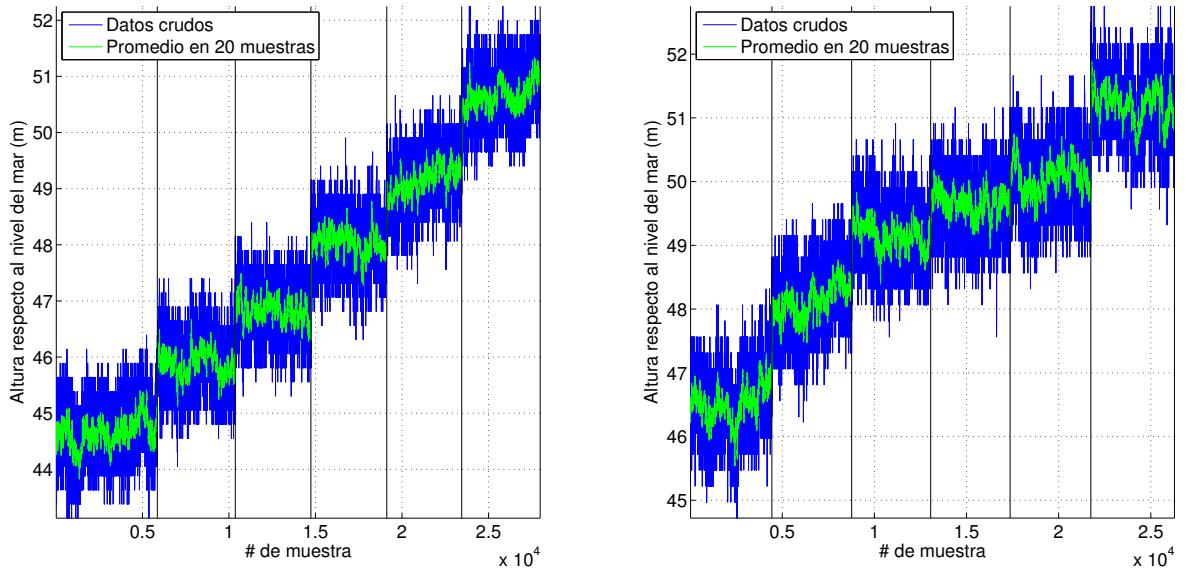


Figura 10.6: Evolución del error en distancias de varios metros.



(a) Primer serie de medidas cada 1 metro.

(b) Segunda serie de medidas cada 1 metro.

Figura 10.7: Distancias de 1 metro.

En la tabla 10.2 se muestran los valores de altura obtenidos en las distintas posiciones en las dos series de datos tomadas. La altura absoluta no es correcta, ya que no se usó la presión real a nivel del mar en la ecuación 10.1.

	Altura medida con el barómetro (m)	
Posición	Serie 1	Serie 2
1	44.66	46.52
2	45.87	48.12
3	46.82	49.15
4	48.04	49.66
5	49.15	50.05
6	50.66	51.21

Cuadro 10.2

La altura absoluta registrada por el barómetro cambia considerablemente de una serie a la otra. En la figura 10.7b las medidas están, en promedio, un metro más arriba que en la 10.7a. Los puntos que se consideraron fueron los mismos, sin embargo las medidas fueron realizadas un día de tormenta. La presión atmosférica es muy cambiante en esos días. Eso puede explicar dicha diferencia. Otra explicación puede ser el drift observado en secciones previas.

de los errores relativo y acumulado.

Del análisis de cada serie de manera independiente:

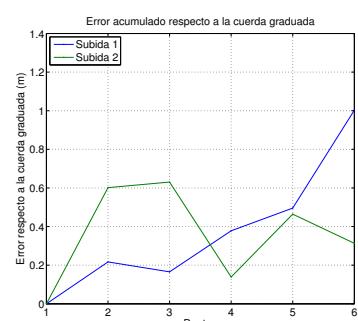
- Serie 1:

- Error promedio:  $0,20m$
- Desviación estándar:  $0,20m$

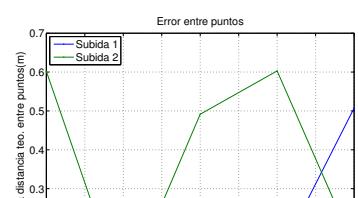
- Serie 2:

- Error promedio:  $-0,07m$
- Desviación estándar:  $0,49m$

Si se trabaja con las dos series de datos, se obtienen:



(a) Error acumulado.



- Error promedio:  $0,07m$
- Desviación estándar:  $0,38m$

Pese a tener pocas muestras, a partir de los datos anteriores se puede suponer que el 95,5 % de las veces se tendrán errores inferiores a  $0,76m$  en diferencias de un metro. El error se mantiene por debajo de  $1m$  al usar pocas (4 muestras, 8, 10, etc) muestras para cada punto. Este error depende del drift del barómetro, y se puede reducir incorporando, de manera periódica, información externa (GPS) sobre la altura absoluta.

En la figura 10.9 se observa la variación en la altura absoluta. Si bien cada tramo comienza y termina a una altura que cae dentro del error esperado, hay tramos del principio y del final del experimento (barómetro apoyado en el suelo) entre los que se observa una diferencia en altura de  $1.5m$ . Esto no cae dentro del error esperado. El problema se ve luego de transcurridos varios minutos, tiempo mucho mayor al sugerido en la sección 10.5.2. Puede ser causado por el drift y/o por cambios en las condiciones atmosféricas.

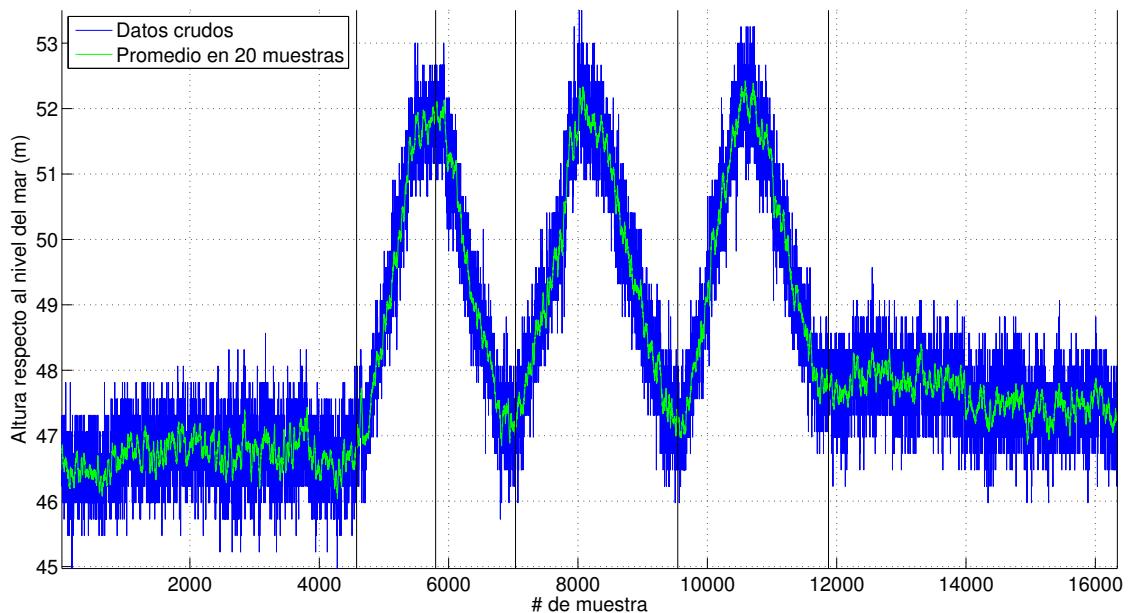


Figura 10.9: Medidas de altura subiendo y bajando.

### 10.5.6. Distancias de decenas de centímetros

#### 5 segundos por estante

Se toman datos durante 5 segundos en casa escalón. Repitiendo el análisis realizado en secciones anteriores, se obtiene:

- Error promedio: 2.0 cm
- Desviación estándar: 24.4 cm

**3m en aproximadamente 7 segundos**

	4.4	58.9
	10.7	49.0

Cuadro 10.3

Como prueba extra, se recorre 4 veces la estantería sin detenerse cada estante, completando el trayecto de bajar y volver a subir en aproximadamente 7 segundos. Se calcula la distancia recorrida al bajar, la distancia recorrida al subir, y la total, y se compara dichas distancias contra los valores medidos con la cinta métrica. Los resultados se muestran en la tabla 10.3. Solamente se hicieron 4 experimentos, por lo que los datos estadísticos son solamente para dar una idea de la performance frente a movimientos bruscos.

Cabe destacar que el error se mantiene por debajo de los 1.2m en el peor caso. La figura 10.10 muestra gráficamente los resultados del experimento.

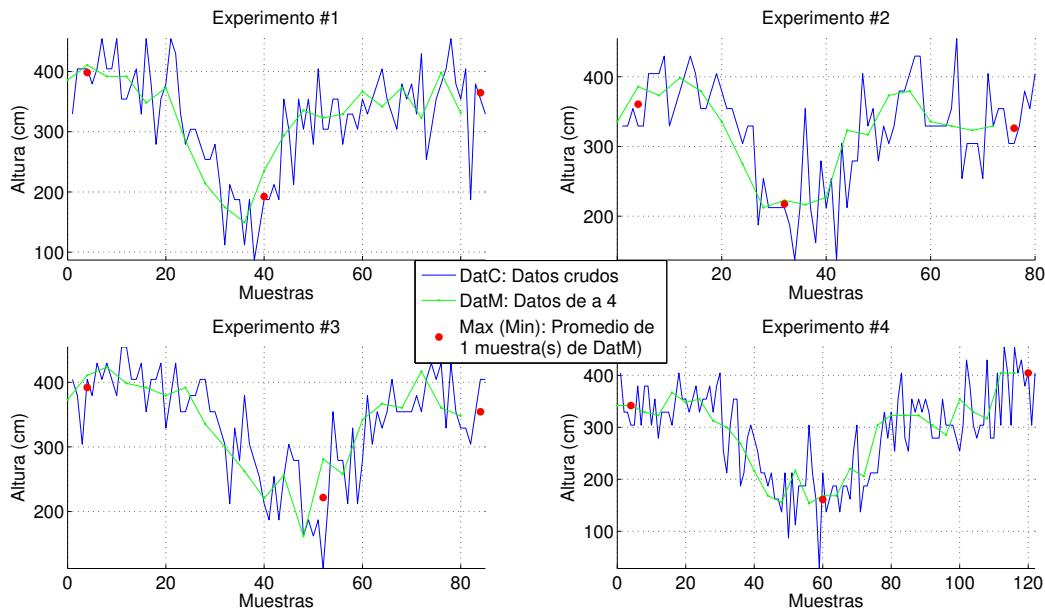


Figura 10.10: 3m metros en aproximadamente 7 segundos.

## 10.6. Conclusiones

Conclusiones más importante de las pruebas hechas con el barómetro:

- **Tiempo de *warm-up*:** El circuito tiene un tiempo de *warm-up* de aproximadamente 45 minutos, durante el cual la temperatura sube aproximadamente 1.5°C. De las especificaciones de los sensores se deduce que una variación de temperatura tan pequeña no debería afectar la performance. De cualquier forma, es de interés analizar experimentalmente, el efecto de la variación de la temperatura sobre las lecturas de la IMU.
- **Drift y Altura absoluta:** El drift y la sensibilidad a factores externos (clima, etc) hacen que el barómetro **no** sea adecuado para determinar la altura absoluta. No es posible obtener una mejor estimación de la altura tomando promedios durante períodos de tiempo mayores, ya que el drift introduciría errores en dicho estimador. Se observa un drift de hasta 0.5m en 1 minuto.
- **Altura relativa:** Estando en reposo, en períodos de tiempo menores a 1 minuto es posible conocer variaciones de altura con una error menor a 0.5m.

■ **Rol del barómetro:** Se concluye que el barómetro sirve para determinar variaciones de altura, suavizando la trayectoria, mientras se espera una altura absoluta proveniente del GPS. El barómetro y el GPS se complementan. El barómetro ha de utilizarse con los siguientes parámetros:

- Error promedio: 0.5m
- Desviación estándar: 0.25m
- Modo: 0, promediando 4 muestras en la IMU.
- Se observa un drift de hasta 0.5m por minuto. Se debe utilizar el GPS para corregirlo.

---

# CAPÍTULO 11

---

## GPS

### 11.1. Objetivos

En este capítulo se analiza la performance del GPS. Se intenta reconstruir un polígono, y se analiza el error al estimar la posición de un punto fijo.

### 11.2. Materiales

- GPS.
- Laptop.
- Trípode (de fotografía).
- Cinta métrica, pintura y cuerda.

### 11.3. Procedimiento

En esta prueba se busca caracterizar el error del GPS en latitud y longitud.

El experimento que se diseñó consiste en marcar un rectángulo sobre el suelo, utilizando 6 puntos, con la disposición de la figura 11.1. Todas líneas punteadas son de 6m de largo. Resulta en un rectángulo de 6m por 12m.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Construir el rectángulo sobre un superficie plana.

- Se utilizó pintura para marcar los vértices del triángulo.
- Para trazar uno de los lados de 12 metros (puntos 1,2 y 3), se fijó una cuerda de 12 metros (con el punto medio marcado) a un punto, y se la extendió (sin estirarla). El principio (1) y el final (3) de la cuerda son vértices del polígono, y el punto medio (2) es otro de los puntos de interés.

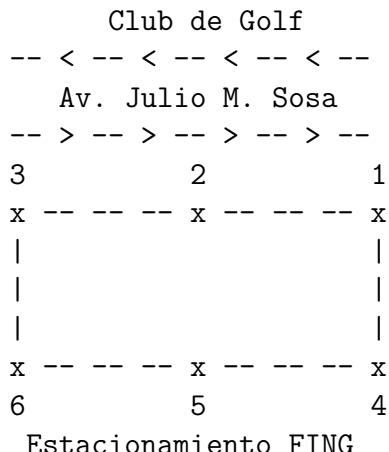


Figura 11.1: Polígono

- Para construir rectas perpendiculares se utilizó una cuerda de 6m, y otra de 8.5m<sup>1</sup>. Uno de los extremos de la cuerda de 6 metros se fijó al 1, y uno de los extremos de la cuerda de 8.5m se fijó a 2. El punto donde ambas se intersectan corresponde a 4. Un procedimiento similar se siguió para determinar la ubicación de 5 y 6.
- Medir, con un metro, las distancias entre todos los puntos.
  - Utilizar mínimos cuadrados para minimizar el error entre las distancias esperadas, y las experimentales. Esto puede llevar a trabajar con un polígono que **no** sea un rectángulo, pero el error será menor que el que resultaría de usar los valores teóricos.
  - Fijar la altura y la orientación del GPS, y tomar medidas en cada uno de los puntos [1,2,3,4,5,6].
  - Tomar un punto como origen, y comparar la figura que resulta de los datos provenientes del GPS con las medidas tomadas con el metro.

En la figura 11.2a se observa el trípode que sostiene al GPS. Se busca tener el GPS a una altura fija, y separado del piso. Al nivel del piso los rebotes degradan seriamente la performance del GPS. La cuerda que marca el lado del polígono, junto con las patas del trípode, se utilizaron para fijar la orientación del GPS durante el experimento.



(a) Trípode de fotografía, con el GPS amarrado atado en lugar de una cámara.  
(b) GPS amarrado al trípode.

Figura 11.2: GPS + Atril

### 11.3.1. Adquisición de datos

Para tomar datos se conectó el GPS, que manda información mediante USB-serie, al puerto USB de una computadora. En la computadora se utilizó el GPSD, un software open-source que hace de *daemon*, y se encarga de transformar lo que llega del GPS a una estructura de datos fácil de manejar en C.

El GPS emite sentencias NMEA a través de USB serie, a 38400bps. Trabaja con sentencias:

- GPGGA - Global Positioning System Fix Data:** Información sobre la fecha, posición y datos relevantes sobre el *fix*.
- GPGSV - Satellites in view:** Información sobre la cantidad de satélites detectados, y la calidad de la señal proveniente de cada uno.
- GPGSA - DOP and active satellites:** Información sobre DOP<sup>2</sup> y satélites activos.

<sup>1</sup> $8,5 \approx \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,4852\dots$

<sup>2</sup>Dilution of precision - Ver D.1.

- GPRMC - *Recommended minimum specific GPS/Transit data*: Sentencia mínima recomendada, trae suficiente información como para poder trabajar con el GPS.
- GPVTG - *Track Made Good and Ground Speed*: Información sobre la dirección y la velocidad (**no** sobre la posición absoluta).

### 11.3.2. Verificación del polígono

Una vez construido el polígono, es de interés medir todas las diagonales (con la cinta métrica) por dos motivos:

- Verificar que no se cometieron errores.
- Hacer mínimos cuadrados con las medidas, de manera de obtener un polígono, que no tiene porqué ser (y en general no será) un rectángulo, sino algo similar a un rectángulo, más ajustado a la realidad.

Las medidas tomadas se resumen en la tabla 11.1, donde D12 representa la medida de la recta que une el punto 1 con el punto 2, en cm.

El polígono resultante se observa en la figura 11.3. El error relativo, es decir, el cociente entre las medidas de cada recta DAB (distancia entre el punto A y el B) resultante de aplicar MC, y lo esperado en el polígono teórico, de 6m de lado, es:

- 9,51 % en el peor caso.
- 4,65 % en promedio.

Se considera que el error, siendo menor al 10 % en el peor caso, es aceptable.

Se podría hacer una figura irregular cualquiera, y tomarlo en cuanto en el resto del experimento, pero complicaría la interpretación intuitiva de los resultados.

D12	D13	D14	D15	D16
603	1205	606	855	1345
D23	D24	D25	D26	D34
603	853	608	853	1344
D35	D36	D45	D46	D56
850	602	602	1202	603

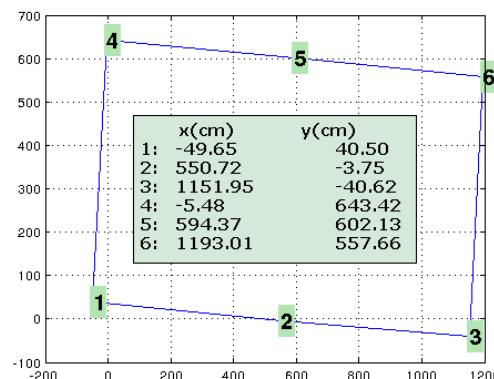


Figura 11.3: Polígono luego de MC.

### 11.3.3. Punto fijo - 2 minutos

Se tomaron datos durante aproximadamente 2 minutos ( $\approx 120$  muestras) en cada uno de los vértices del polígono, con el objetivo de observar la estabilidad de la información proveniente del GPS.

En las siguientes figuras se muestran los datos luego de restar el promedio, o sea que se muestra el error respecto al valor promedio. Si el GPS fuese perfecto, entonces todas las muestras coincidirían con el promedio, y estarían ubicadas en el punto  $[0, 0]$ . El círculo negro tiene 2.5m de radio, las muestras que caen fuera de él están a más de 2.5m del valor promedio. En la leyenda se muestra qué porcentaje de las muestras caen fuera del círculo.

Este experimento también se hizo tomando 10 minutos de muestras por punto, los resultados fueron muy similares.

Se orientó el GPS de 3 maneras distintas, siempre alineando el trípode con uno de los lados de 12m del rectángulo:

1. USB hacia la calle, LED hacia el estacionamiento, como en la figura 11.4b.
2. USB hacia la rambla, LED hacia el IIE (no hay figura)
3. Como en la figura 11.4a.
4. Nuevamente, USB hacia la calle, LED hacia el estacionamiento, como en la figura 11.4b.

### Punto fijo: Análisis - satélites disponibles

La teoría dice que con 4 satélites debería alcanzar para obtener un *fix 3D*, es decir, estimar la posición sobre la esfera terrestre, y la distancia (altura) a la misma. Se recomienda tener no menos de 6. Durante el experimento de la figura 11.5c, en un momento el GPS perdió señal, y el número de satélites disponibles, que usualmente anda por los 9 o 10, pasó a ser 4. Los datos correspondientes se muestran en la figura 11.6. El trazo naranja, con un error de hasta 23 metros, corresponde a instantes donde la cantidad de satélites era entre 4 y 5. Luego de volver a 9 o 10 satélites, los datos vuelven a ser más razonables.

En la figura 11.5c se observa el mismo log que en 11.6, pero luego de haber quitado las muestras correspondientes al período donde se deterioró la señal.

No se pudo encontrar una explicación para la mala calidad de las muestras correspondientes al punto 5 en la figura 11.5c. La cantidad de satélites disponibles se mantuvo estable en 9 o 10 durante la adquisición de esos datos. Figura 11.6: Datos con solamente 4 satélites. Orientación: 3.



(a) Orientación #3      (b) Orientación #1 y #4.

Figura 11.4: Orientaciones del GPS

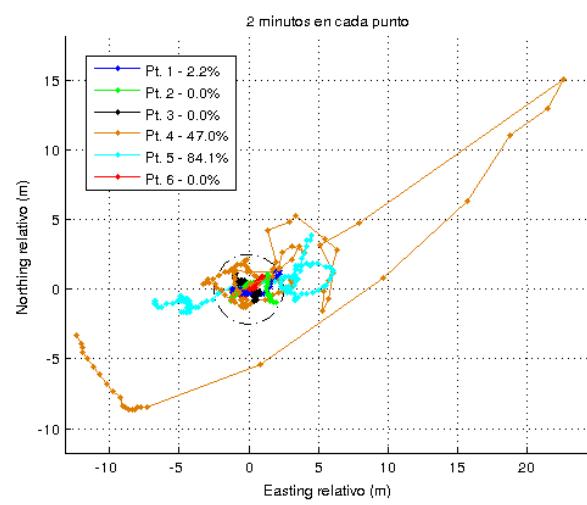
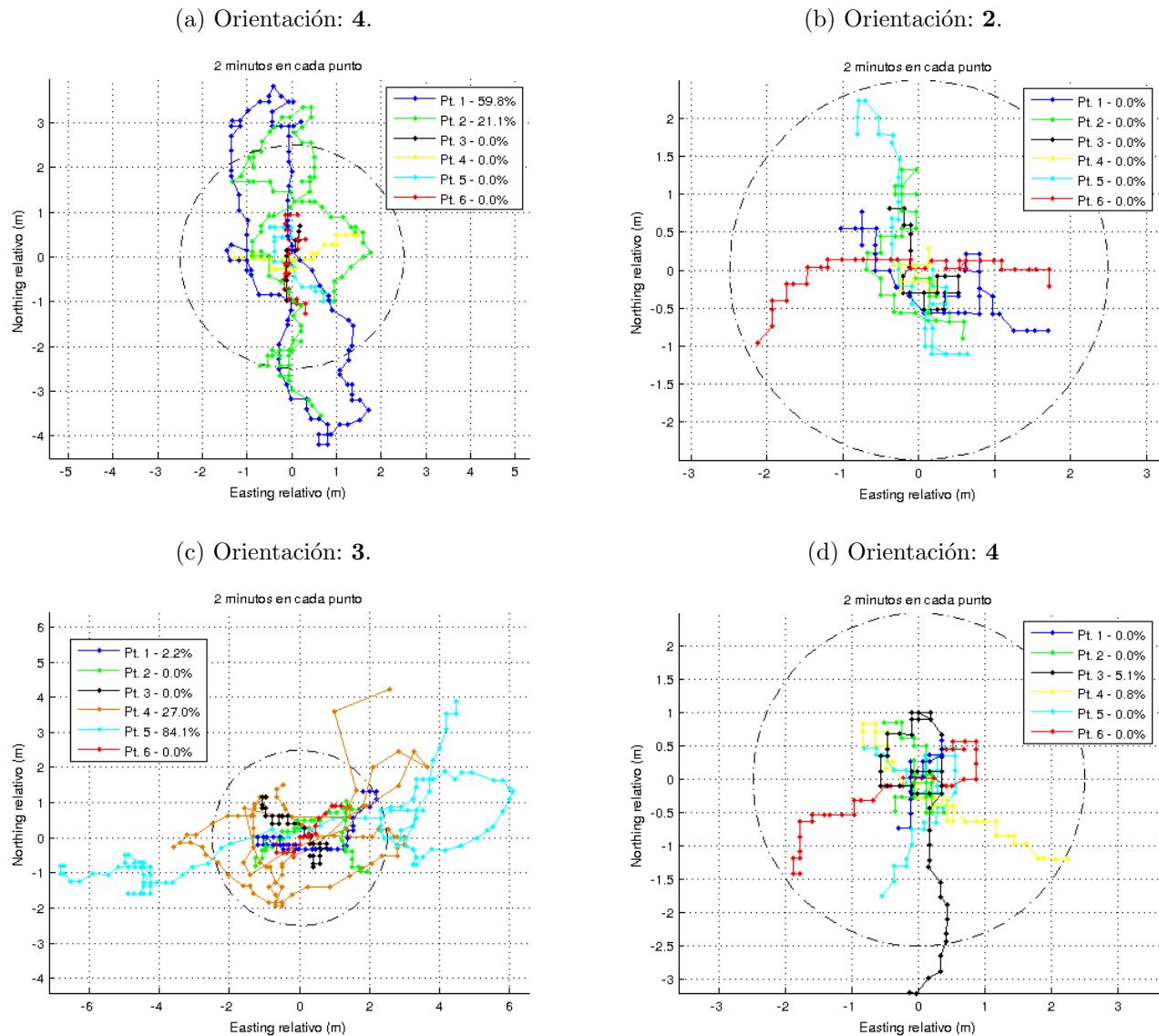


Figura 11.5: Punto fijo - 2 minutos



### Punto fijo: Análisis - Orientación

Para evaluar si existe una correlación entre la orientación y las medidas del GPS, se hizo el siguiente experimento:

1. Tomar datos durante 10 minutos con el GPS arriba del trípode, dos patas alineadas con una recta fija.
2. Rotar el trípode 120 grados en sentido horario (visto desde arriba), de manera que otro lado del triángulo que forman las patas del trípode quede alineado con la recta. Tomar datos durante 10 minutos.
3. Rotar y tomar datos nuevamente.

Los resultados del experimento se observan en la figura.

### Orientación - Conclusiones

No se encontró una correlación entre la orientación del GPS y el error en las medidas. El experimento se realizó con cielo abierto, con una buena geometría, en

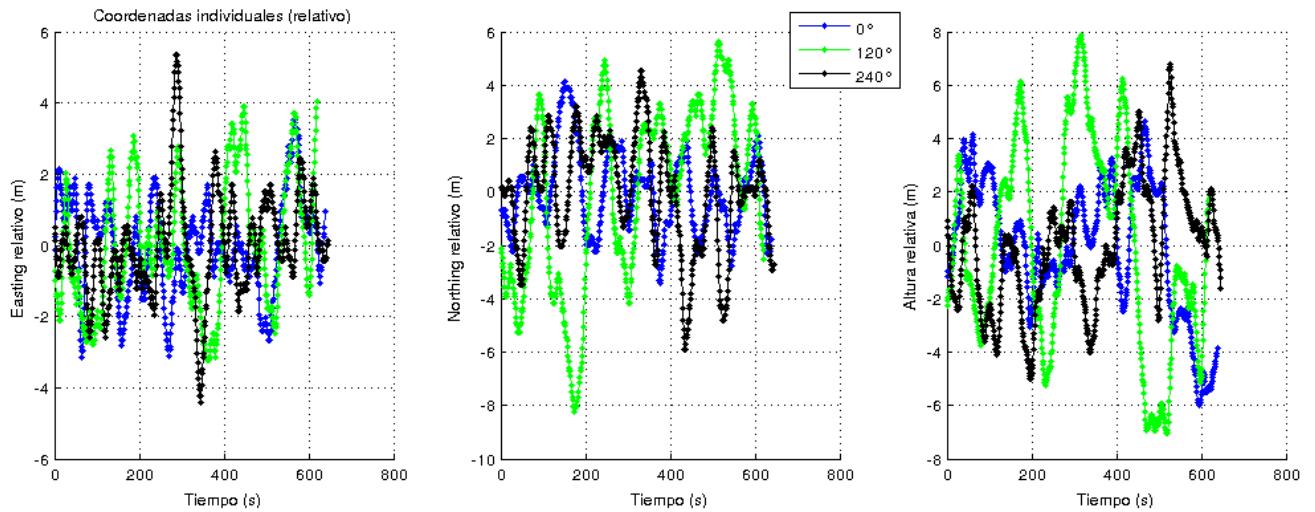


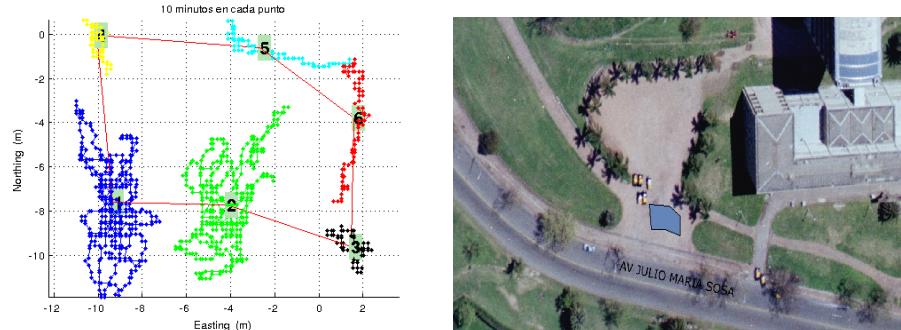
Figura 11.7: Datos rotando el GPS sobre un punto fijo.

términos de distribución de satélites. Tal vez en situaciones de visibilidad limitada se podría observar una correlación, ya que si la dirección en la que la antena recibe mejor coincide con el lugar donde hay pocos satélites, entonces la cantidad de información sería menor/peor que en otras orientaciones.

Tener visibilidad limitada por obstáculos, o tener una mala geometría deteriora la performance del GPS. No es el objetivo de este informe evaluar la performance en ambientes complicados.

### 11.3.4. Polígono

En la figura 11.8a, la línea en roja representa el polígono resultante de unir el promedio, en cada vértice, de las muestras tomadas durante un experimento de 10 minutos. En la figura 11.8b se dicho polígono, proyectado sobre una foto satelital<sup>3</sup>.

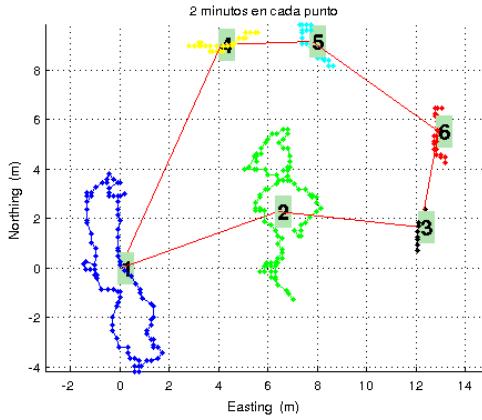


(a) Polígono formado por los promedios  
de 10 minutos.  
(b) Proyección del polígono sobre una fo-  
to satelital.

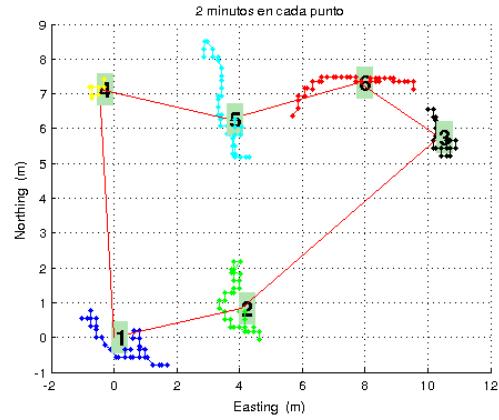
Figura 11.8: Polígono

En las siguientes figuras se observan los polígonos formados por los promedios de varias secuencias de 2 minutos por punto.

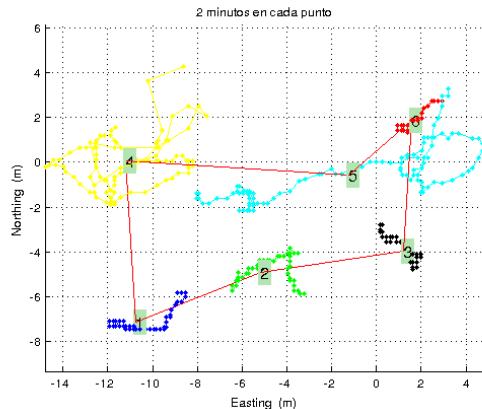
<sup>3</sup>El mapa y las fotos se obtuvieron de:  
<http://sig.montevideo.gub.uy/mapas/mapa-principal>



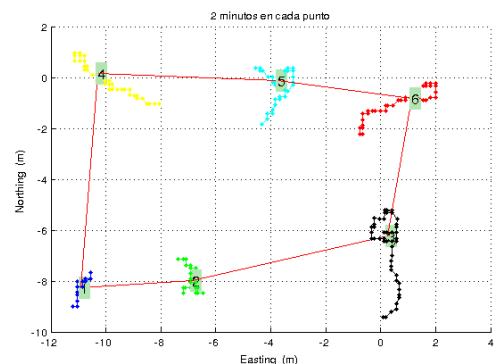
(a) Orientación: 4.



(b) Orientación: 2.



(c) Orientación: 3.



(d) Orientación: 4

Figura 11.9: Polígono - 2 minutos por punto

### 11.3.5. Polígono - Análisis

Dado que no se cuenta con una referencia absoluta, como podría serlo un GPS de alto nivel, no es posible hablar de error absoluto. De cualquier forma, con la información disponible es posible obtener un estimador del error típico en una distancia de X metros, donde X pertenece al conjunto de las medidas de las rectas en juego:  $\{6; 8.5; 12; 13.45\}$  metros. Se comparan las distancias entre los vértices del polígono experimental, con las distancias entre las coordenadas resultantes de la aplicación de mínimos cuadrados a las medidas efectuadas con el metro (ver la sección 11.3.2).

El error relativo para cada recta resulta:

$$E = \left| \|\hat{P}_i - \hat{P}_j\| - D_{ij} \right| \quad (11.1)$$

Donde:

- $\hat{P}_i$  es la dupla  $\{x, y\}$ , coordenadas experimentales del i-ésimo vértice del polígono.
- $D_{ij}$  es la distancia entre el i-ésimo y el j-ésimo vértice, resultado de la aplicación de MC en la sección 11.3.2.

Para cada set de estimaciones de la posición de los vértices del polígono<sup>4</sup>, se utilizó la fórmula 11.1, separando los datos según el largo esperado de la recta<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Un set de valores  $\hat{P}_1^1, \hat{P}_2^1, \hat{P}_3^1, \hat{P}_4^1, \hat{P}_5^1, \hat{P}_6^1$

<sup>5</sup>Valores posibles:  $\{6; 8.5; 12; 13.45\}$

Resulta un set de valores del “*error al estimar la distancia entre dos puntos que deberían estar a X metros*”, para cada valor de X.

Los resultados se resumen en la tabla 11.2.

Largo Teo. (cm)	$\mu$ (cm)	$\sigma$ (cm)	$\frac{\mu+2\sigma}{\text{Largo Teo.}}$	# Muestras
600	372.15	169.39	118 %	35
848	493.6	165.79	97 %	20
1200	429.67	212.81	71 %	10
1341	614.73	166.71	70 %	10

Cuadro 11.2

En la tabla 11.2 se observa, cómo es de esperarse, que el error relativo disminuye al intentar estimar distancias mayores. Asumiendo que el error en la estimación de la posición de cada punto A, B es similar, entonces para cometer un error de P% en la estimación de una distancia X (medida con el metro) entre A y B, el GPS debe equivocarse en  $\frac{P}{100}X\frac{1}{2}$  en la estimación de la posición de A y B.

Resulta que el error en la estimación de la posición de un punto es de aproximadamente 4.5m. Esto es coherente con los resultados sobre la estimación de un punto fijo. Si las medidas para la posición de un punto fijo en general caen dentro de un círculo de 2.5m de radio, entonces, asumiendo que la posición real cae dentro del círculo, en un peor caso se tendría un error de 5m.

Nuevamente, no se cuenta con información sobre la posición real, pero parece razonable asumir que la ubicación real es cercana al promedio de los datos provenientes del GPS. Evidencia a favor de esto se observa en la figura 11.8b. Se trata este tema un poco más en la sección 11.8.

## 11.4. Caminata por el borde del polígono

Para simular una situación más parecida a la que se tendrá con el GPS montado sobre el cuadricóptero, se colocó el trípode con el GPS en un mochila, y se procedió a recorrer el polígono con con la mochila puesta.

Los errores en la medida de un punto fijo hacen pensar que sería posible que la trayectoria determinada por el GPS luego de este experimento fuese algo parecido a un rectángulo.

En las figuras siguientes se observan los datos tomados durante 3 caminatas siguiendo el contorno del polígono, siguiendo la secuencia 1-2-3-6-5-4-1<sup>6</sup>. Se empezó a loguear datos en el punto 1, y se terminó nuevamente en el punto 1.

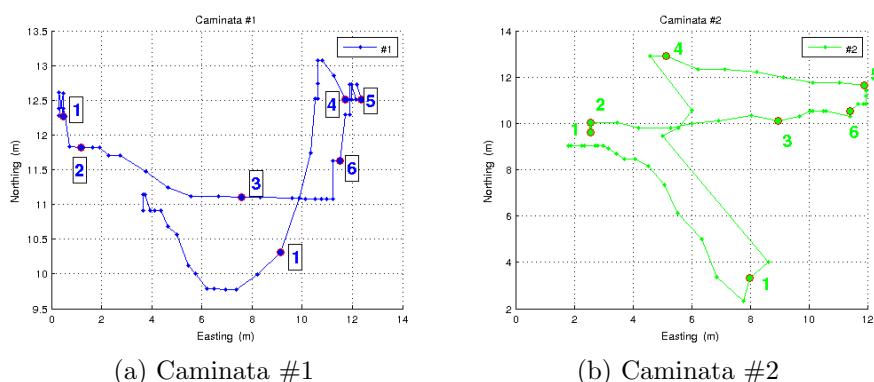


Figura 11.10: Caminatas por el borde del polígono

<sup>6</sup>Notar que **no** se recorre en el mismo orden en el que se numeran los puntos del rectángulo

### 11.4.1. Caminata - Análisis

Las gráficas de las caminatas a primera vista son muy desalentadoras. Se observa un error que parece ser muy significativo, la trayectoria no se parece en nada a un rectángulo. Un análisis más detallado de los resultados revela que la performance del GPS es acorde a los esperado según las pruebas de las secciones anteriores.

La posición parece tender a estabilizarse una vez que se llega al destino final, el punto 1. Ahí se continuó logueando datos por unos 20 segundos. En la figura 11.10b la posición final parece tener un drift que se aleja de la posición inicial, en lugar de acercarse. No se encontró una justificación para este comportamiento, pero es similar al observado para puntos fijos, por lo que no se le prestó especial atención.

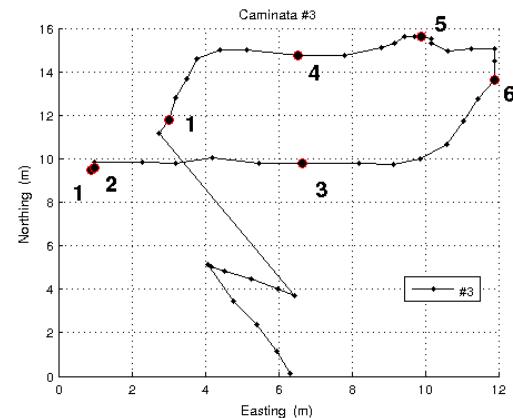


Figura 11.11: Caminata #3

## 11.5. Error en altura

Para determinar el error la información sobre la altura que provee el GPS, se diseñó un experimento, que consiste en tomar medidas en una perpendicular a la esfera terrestre, a 4 alturas diferentes: 0m, 1m, 2m y 3m respecto al suelo.

En la primera etapa del experimento, se mantuvo el GPS quieto en cada uno de los niveles, y se tomaron muestras durante aproximadamente 60 segundos. El objetivo de esta etapa era verificar si era viable el experimento.

Se colocó una escalera en el medio del estacionamiento de atrás de la Facultad de Ingeniería, se ató un piolín con marcas cada 1 metro, y una plomada en la punta para mantenerlo tenso y vertical.

En la figura 11.12 se observan los resultados del experimento. Es de esperarse que el error sea mayor al estar apoyado sobre el suelo,

ya que los rebotes (*multipath*) pueden deteriorar el sistema. El error a 1m de altura es mayor al que se obtuvo con el GPS en el suelo, una posible explicación para esto sería que el GPS estaba muy cerca de la escalera metálica, lo cual podría introducir una cantidad significativa de rebotes.

Los resultados de este experimento llevan a pensar que el GPS da información estable si se encuentra a al menos 2m del suelo. Esto no parece ser un problema, ya que el cuadricóptero volará a más de 2m de altura.

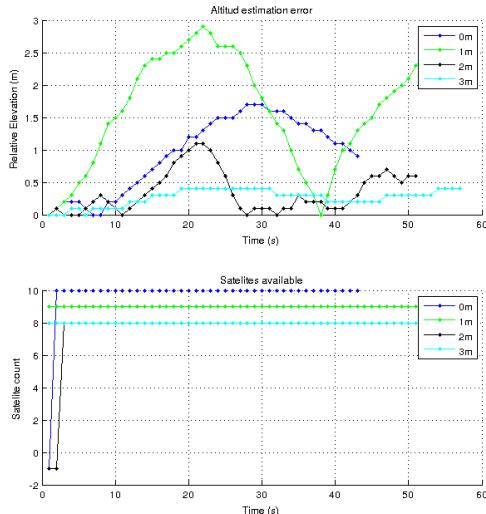


Figura 11.12: Variación de la altura determinada por el GPS a distintas alturas.

## 11.6. Tiempo de *warmup*

El tiempo que demora el GPS en adquirir un *fix* depende de si estaba frío, o si estaba andando previamente.

- **Frío:** Aproximadamente 40 segundos.
- **Caliente:** Entre 3 y 5 segundos.

Esto implicaría que al prender el cuadricóptero, habría que esperar unos 40 segundos para obtener señal del GPS, y que si por algún motivo se pierde la conexión con el GPS, habrá que esperar entre 3 y 5 segundo antes de contar con datos útiles nuevamente.

## 11.7. Tasa de muestreo

El GPS bajo funcionamiento normal trabaja a 1Hz. Se observó que estando quieto, a veces repite información, y la etiqueta como “válida”. Se observó este comportamiento durante los experimentos de punto fijo, llegando a pasar 30 segundos registrando exactamente la misma información.

Se compararon los datos crudos provenientes del GPS con los que devuelve el GPSD, y se concluyó que el GPSD **no** es responsable de la repetición de datos, es decir, no es un problema de software, sino que el GPS es el que a veces repite datos.

Al loguear trayectorias de movimiento permanente, como un recorrido en bicicleta de 15 minutos, no se observó más de 4 segundo de corrido de datos repetidos.

No parece razonable que el cálculo de la posición dé *exactamente* lo mismo durante varias medidas sucesivas, probablemente se trate de un problema interno del GPS.

Para enfrentar este problema, lo más razonable parece ser que el algoritmo que lee datos del GPS ignore datos repetidos.

## 11.8. Posición Absoluta

Se realizaron varios experimentos para analizar si la ubicación que daba el GPS se correspondía con la realidad, ya que algunos GPSs a veces dan un error constante de varios metros, y de ser el caso, se podría compensar este problema una vez detectado.

Sobre un mapa de Montevideo, se graficaron trayectorias conocidas, con el objetivo de verificar que los datos provenientes del GPS eran “razonables”.

No se observó un offset evidente y constante, por lo que se asume el GPS **no** introduce un offset, o por lo menos no una constante, que se pueda compensar corriendo todos los datos por una cantidad fija.



Figura 11.13: Recorrido en bicicleta.

En la figura 11.13 se observa una trayectoria realizada en bicicleta, con el GPS colocado sobre el trípode, asomando de una mochila. El recorrido fue hacia el sur-oeste, sobre la senda derecha, contra el lado derecho (cerca del cordón). No se observa un offset constante. Se analizaron otras figuras, y se llegaron a conclusiones similares.

## 11.9. Conclusiones

Los siguientes items servirán de guía para la utilización del GPS como instrumento de navegación:

- **Error en las medidas:** Bajo las condiciones anteriores, se concluye que es razonable asumir que las medidas del GPS tienen un **error menor a 5m**. Esto es un poco menor a las especificaciones dadas por el fabricante del GPS, 5m *CEP*<sup>7</sup>. Es de esperarse que la performance se reduzca al utilizar el GPS en un entorno más agresivo, como el que resultará al colocar el GPS sobre el cuadricóptero, donde estará sujeto a interferencia electromagnética de los motores, vibraciones, etc.
- **Visibilidad:** Es importante asegurar buena visibilidad, la performance del GPS se reduce drásticamente si pierde satélites.
- **Promedios:** Promedios de 2 minutos son suficientes para reducir el error a 2.5m, con una probabilidad del 75 %.
- **Resolución:** El GPS **no** es adecuado para tareas de navegación con restricciones del orden del metro, pero sí para distancias del orden de decenas de metros.
- **Tasa de muestreo:** El GPS normalmente muestrea a **1Hz**. Cabe destacar que debe ignorarse información repetida (muestras sucesivas que sea idénticas).
- **Error en altura:** El GPS **no** es adecuado para determinar la elevación durante el aterrizaje/despegue, ya que a menos de 2m del piso, la estimación de la elevación es muy mala. Será necesario otro sensor (sensor de presión, IR, etc) para asistir durante el despegue/aterrizaje.
- **Tiempo de fix:** En frío demora alrededor de 40 segundos, en caliente entre 3 y 5 segundos.

Por último, cabe destacar que los resultados de este informe dan una idea de la performance del GPS en condiciones “ideales”. Será importante analizar el efecto de las vibraciones y la interferencia electromagnética que introducirá la presencia del cuadricóptero, de manera de ajustar los márgenes de error al contexto en el que se utilizará el GPS.

---

<sup>7</sup>CEP de Xm: Garantiza que el 50 % de la muestras caerán en un círculo de radio X y centro el promedio de las muestras.

# **Parte V**

## **Estimación del estado**

---

# CAPÍTULO 12

---

## FILTRO DE KALMAN

Se desea implementar algún algoritmo de estimación de estados que, corriendo en tiempo real, mantenga una estimación del estado mejor que la que se obtendría utilizando solamente las medidas de los sensores, agregando robustez a las medidas obtenidas, y logrando estimar variables de estado que no se miden directamente de los sensores.

El filtro de Kalman es un algoritmo que usa una serie de medidas ruidosas observadas a lo largo del tiempo y produce una estimación de alguna variable desconocida que resulta ser más precisa que la observación llana de la medida. Opera recursivamente sobre el flujo de la entrada ruidosa y arroja la estimación estadísticamente óptima del estado.

Consiste básicamente en 2 etapas:

- Predicción
- Actualización

En la figura 12.1 se muestra un diagrama de flujo de la operación de un filtro de Kalman. Se parte de una estimación a priori del estado, la cual es utilizada como semilla para las posteriores iteraciones del filtro. En la etapa de **predicción**, el filtro produce una estimación del estado de las variables, junto con sus incertidumbres. Se hallan las variables  $P_{k|k-1}$  y  $\hat{x}_{k|k-1}$ , correspondientes a la predicción de la matriz de covarianza estimada y la predicción del estado estimado, respectivamente. La covarianza, en la teoría de la probabilidad, es una medida de cuán juntas cambian 2 variables aleatorias. Si presentan un comportamiento similar tendrán una covarianza elevada y positiva, si el comportamiento es opuesto la covarianza será negativa y elevada en valor absoluto. Si las variables aleatorias no presentan relación, la covarianza será 0. Es una magnitud que no es sencilla de interpretar pero cobra vital importancia a la hora de entender el comportamiento del filtro y resulta ser la herramienta más clara para regular la influencia de la predicción y de la corrección, como se verá más adelante.

Una vez que llega la siguiente medida de los sensores, necesariamente contaminada con ruido, las estimaciones son actualizadas en la etapa de **actualización**,

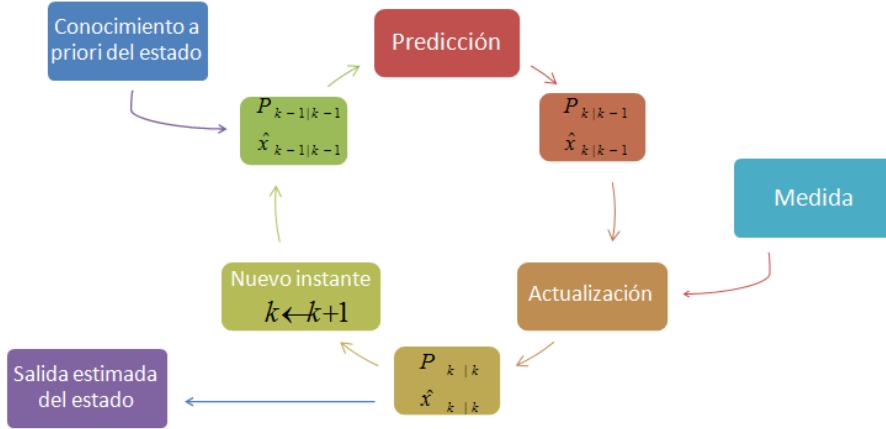


Figura 12.1: Diagrama de flujo del filtro de Kalman

mediante la utilización de un *promedio ponderado*, dándole mayor peso a las estimaciones con menor incertidumbre en cada paso, obteniendo la estimación del estado para el instante  $k$ :  $P_{k|k}$  y  $\hat{x}_{k|k}$ .

Por otro lado, las mayores restricciones que impone el filtro de Kalman son que el sistema dinámico subyacente debe ser lineal y que los ruidos presentes deben ser blancos y Gaussianos.

El sistema dinámico que queremos estimar, como se puede ver en el capítulo 3, es claramente **no lineal**, por lo que se debe buscar alguna alternativa al filtro de Kalman clásico. Al investigar en la literatura existente, basados en [9] y [5], se decide implementar un filtro de *Kalman extendido* para la estimación del vector de estados.

## 12.1. Filtro de Kalman Extendido (EKF)

El filtro de *Kalman extendido* (*EKF*) es la versión no lineal del filtro de Kalman. Linealiza en torno a una estimación de la media y la covarianza. En caso de conocer con exactitud el modelo de transición de estados, el EKF se considera el standard en la estimación no lineal de sistemas de navegación.

### 12.1.1. Modelo matemático

El sistema dinámico sigue el modelo:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

donde  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  son los ruidos de proceso y observación respectivamente. Se asume que son gaussianos y de media nula. Sus matrices de covarianza son  $\mathbf{Q}_k$  y  $\mathbf{R}_k$  respectivamente.

La función  $f$  es utilizada para hallar el estado predicho a partir del estado previo, y de forma análoga la función  $h$  se utiliza para hallar la medida predicha a partir del estado. Dicho de otro modo, la función  $f$  guarda información sobre la evolución del estado, mientras que la función  $h$  representa la transformación entre el vector de estados y la observación ideal (sin ruido). Dada la no linealidad del sistema, las funciones  $f$  y  $h$  no pueden ser aplicadas directamente a la covarianza. En su lugar se computa su **Jacobiano**, una matriz de derivadas parciales. Es importante destacar que el filtro de Kalman Extendido no tiene propiedades de optimalidad y su precisión dependerá en gran medida de la precisión de la linealización. Dado que se realiza una linealización dinámica, no hay manera de conocer su performance de antemano (por mayor detalles referirse a [4]).

Para la predicción del estado se utilizan las ecuaciones del modelo físico del cuadricóptero presentadas en el capítulo 3.

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del filtro de Kalman Extendido son:

- Predicción:

- Estimación de la predicción del estado

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, u_{k-1})$$

- Estimación de la predicción de la covarianza

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

- Actualización

- Residuo de medida

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

- Residuo de covarianza

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k$$

- Ganancia de Kalman

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1}$$

- Estimación actualizada del estado

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$$

- Estimación actualizada de la covarianza.

$$\mathbf{P}_{k|k} = (I - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

Las matrices de transición de estados y observación son los siguientes jacobianos:

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}}$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

### 12.1.2. Esquema general del estimador de estados

Los datos (en algunos casos redundantes) obtenidos de los diferentes sensores son combinados usando un filtro de Kalman Extendido para determinar el vector de estados, detallado en 3:

$$X = \{x, y, z, \theta, \varphi, \psi, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}, \omega_{qx}, \omega_{qy}, \omega_{qz}\} \quad (12.1)$$

De la caracterización de los motores, capítulo ??, se obtiene la relación matemática entre la fuerza realizada por cada uno de los motores contra la velocidad de giro del mismo y la relación entre el torque de *drag* realizado por cada motor y su velocidad de giro. Por lo tanto basta con controlar la velocidad de giro de los motores para poder determinar todas las entradas al sistema. Se considerará entonces como entrada al sistema las velocidades angulares  $w_1, w_2, w_3, w_4$  de los 4 motores.

El esquema general del integración de los sensores se puede ver en la figura 12.2, el cual se pasa a describir a continuación.

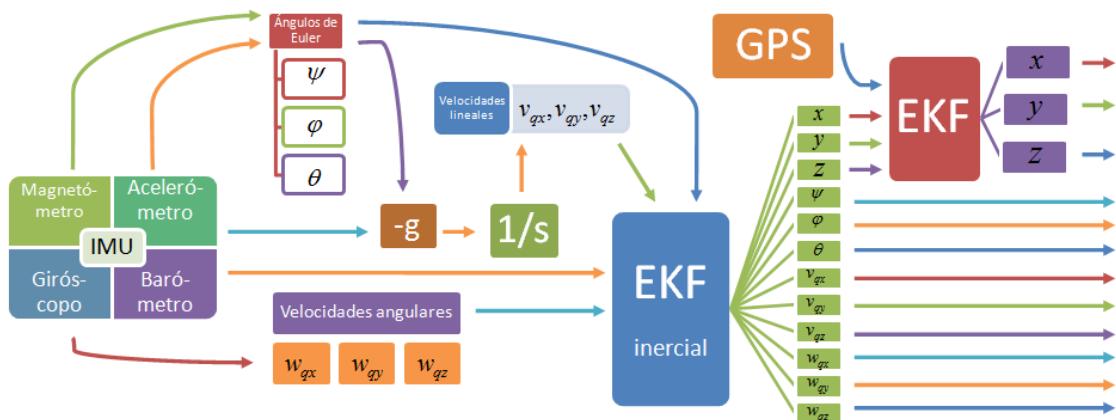


Figura 12.2: Esquema general de integración de sensores

Básicamente se utilizan 2 filtros de Kalman distintos.

El primero (Kalman inercial) se encarga de estimar los 12 estados del vector  $X$  considerando solamente las medidas obtenidas del sensor inercial (**IMU**): acelerómetros, giróscopos, magnetómetro, barómetro y termómetro. Para la estimación de los ángulos se utiliza una combinación entre las medidas obtenidas del acelerómetro y del magnetómetro, para la estimación de las velocidades angulares se utiliza directamente la medida arrojada por el giróscopo y para las velocidades lineales se trabaja con las medidas arrojadas por el acelerómetro. A su vez, al estar considerado el modelo físico dentro del filtro, se utilizan las estimaciones de todas las variables para determinar las predicciones del resto. Para la estimación de la posición en “x” y en “y” no se tiene ninguna medida de corrección, por lo que quedará determinado únicamente por la predicción del modelo físico, lo cual resulta en una acumulación significativa de error. El segundo se encarga de la integración de los datos recogidos por el GPS, logrando una corrección en las posiciones y velocidades lineales gracias a la realimentación de la posición entregada por el GPS. En este caso se resuelve el problema de acumulación de error del filtro inercial.

La separación en 2 filtros distintos otorga una interesante flexibilidad. Es posible utilizar una estimación del estado estando a puertas cerradas, sin la necesidad de

señal de GPS, a costas de una peor estimación de las posiciones y velocidades lineales en “x” e “y”. Además la frecuencia de muestreo del GPS es mucho más baja que la del resto de los sensores, por lo cual se hace imprescindible la utilización de un filtro meramente inercial. Los datos de la imu llegan cada  $10ms$ , mientras que los del GPS cada  $1s$ , entonces mientras no se tiene un dato nuevo de GPS, se utiliza la estimación inercial de las posiciones y cuando llega un dato nuevo de GPS es utilizado como corrección, dándole mucho más peso que a la estimación inercial, para evitar el *drift* mencionado.

## Orientación

En estado estático, los ángulos de *pitch* y *roll* pueden ser determinados proyectando el vector medido de aceleración gravitacional por el acelerómetro. A su vez, los cambios entre el sensor magnético y el vector geomagnético medido, representan al ángulo *yaw*. Por lo tanto, el conjunto del acelerómetro y magnetómetro son capaces de determinar la orientación del cuadricóptero mediante las medidas del vector de aceleración gravitatoria y el vector geomagnético. Dado que el magnetómetro digital no introduce acumulación de error, este sistema ha sido muy utilizado para la determinación estática de la posición, como se puede ver en [2]. Una observación no menor es que en el pasaje de estado estático al vuelo, lo antes dicho sobre los ángulos *pitch* y *roll* sigue siendo válido ya que las aceleraciones que puedan aparecer en vuelo resultan despreciables frente a la aceleración de la gravedad.

## Aceleración

Para poder obtener la transformación entre el vector de estados y la observación es necesario entender qué aceleración medirá el acelerómetro. Como se explica en 2.3.1, dicho dispositivo referencia su medida a un sistema en caída libre, por lo que por ejemplo al estar quieto se deberá medir la aceleración gravitatoria ( $g$ ).

Como se puede ver en el esquema mostrado en la figura 12.2, el acelerómetro es utilizado para estimar las variables de estado  $v_{qx}$ ,  $v_{qy}$  y  $v_{qz}$ , correspondientes a las velocidades lineales medidas en el sistema del cuadricóptero. No se debe confundir la derivada de estas variables con la aceleración medida por el acelerómetro. Por un lado se debe realizar el pasaje del sistema de referencia del cuadricóptero hasta un sistema de referencia inercial fijo en el mundo, y por otro lado se debe tener en cuenta el pasaje de este último hasta el sistema de referencia del acelerómetro (el sistema en caída libre), por ello es que se incluye el bloque “-g” en el diagrama de la figura 12.2.

## 12.2. Resultados: Kalman inercial

### 12.2.1. Simulación de vuelo

#### Hovering

La trayectoria de *Hovering* consiste en que el cuadricóptero permanezca suspendido en el aire en el lugar. Para simular esta situación se setea como entrada una velocidad angular en los motores calculada para equilibrar la fuerza del peso de cuadricóptero. Se presentan a continuación algunos resultados de la implementación

del filtro de Kalman como estimador del vector de estados.

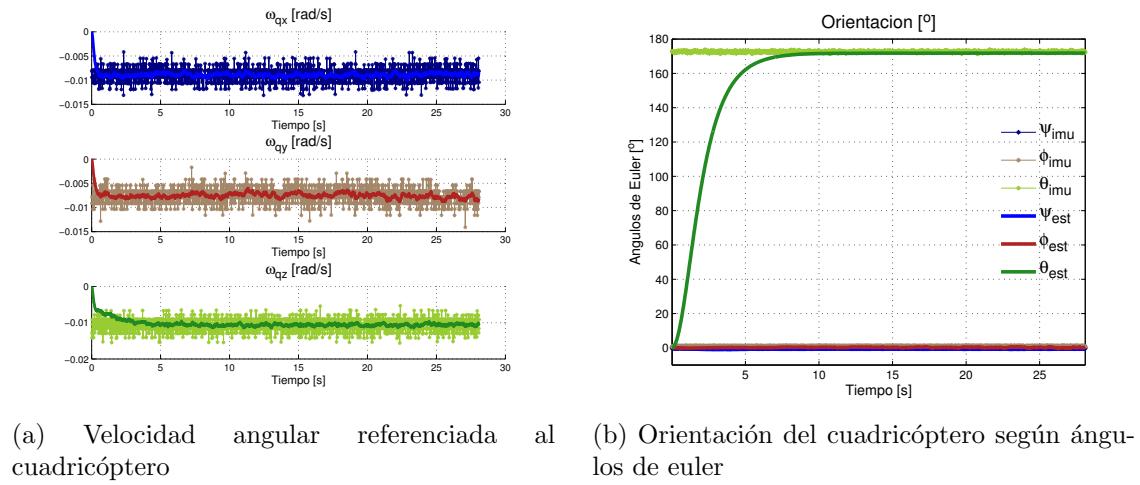


Figura 12.3

En la figura 12.3a se muestra la estimación de las velocidades angulares, junto con las medidas del giróscopo. Se puede ver claramente que la estimación del estado sigue a las medidas del giróscopo, suavizándolas y logrando robustez frente a ruidos inherentes al sensor.

Por otro lado en la figura 12.3b se muestra tanto la orientación estimada por el filtro de Kalman, como la deducida directamente a partir de las medidas de los acelerómetros y magnetómetros de la IMU. Nuevamente se puede apreciar el buen comportamiento del filtro, suavizando notoriamente las medidas otorgadas por la imu. Además resulta interesante analizar el transitorio de la estimación del estado, es decir, el tiempo que el filtro tarda en estimar al estado. En este caso el estimador tarda aproximadamente 7 segundos en pasar de  $\theta = 0$  hasta  $\theta = 170$ , lo cual sin duda es un tiempo totalmente inaceptable en vuelo. Este es uno de los casos más extremos ya que el ángulo  $\theta$  es cercano a 180 grados. De todas maneras es un problema muy fácilmente solucionable ya que esta etapa de *calentamiento* del filtro puede realizarse antes de que el cuadricóptero levante vuelo. A su vez, ajustando las matrices de covarianza  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$ , presentadas anteriormente, se puede lograr muy fácilmente que la estimación se acerque mucho más rápido a la medida del sensor.

Del resto de las variables de estado,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $v_{qx}$ ,  $v_{qy}$  y  $v_{qz}$ , la única que tiene realimentación, considerando una estimación de estado puramente inercial, es  $z$ . El resto quedan determinadas únicamente por el modelo físico, en el cual se basa la etapa de predicción del filtro de Kalman. Dicho de otro modo, la etapa de actualización/corrección del filtro no surte efecto sobre dichas variables de estado.

Como se puede ver en la figura 12.4, la estimación de los estados que no tienen realimentación directa resulta claramente peor que el resto. De hecho, lo que ocurre por ejemplo en las velocidades lineales según  $x$  e  $y$ , es que la observación (dato obtenido del sensor) es la derivada de la variable de estado, y por ello es que se observa el carácter creciente (en valor absoluto) en la estimación del estado, causado por la integración en el tiempo del valor de aceleración otorgado por la IMU. La posición según  $z$ , en cambio, tiene realimentación directa del barómetro. En la figura 12.4a

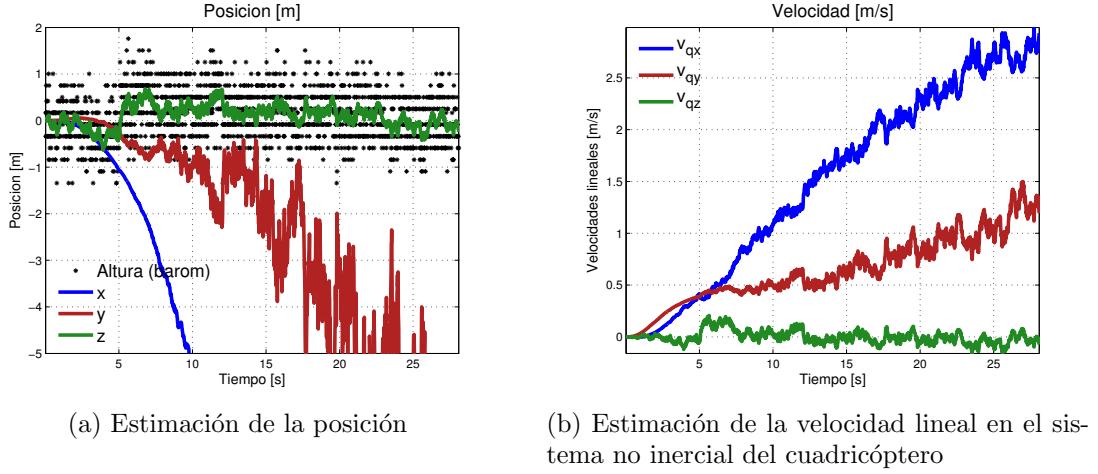


Figura 12.4

se muestra en negro los datos obtenidos de dicho sensor, y sobre ellos la estimación de la altura  $z$ .

### Situación imposible

Se simula una situación donde todos los motores se setean a una velocidad  $w_{hover}$ , como en el caso anterior, pero en esta oportunidad el cuadricóptero se dispone con un ángulo de  $\varphi = 45^\circ$ . Claramente es una situación de vuelo imposible ya que con esa velocidad en los motores el cuadricóptero no podría quedarse quieto en un lugar. Se puede analizar la estimación de la orientación obtenida por el filtro en la figura 12.5.

Lo que sucede en esta situación es que la predicción de la orientación realizada en el filtro de Kalman no coincide con las medidas otorgadas por los sensores. El desempeño del filtro en este caso estará determinado por la relación entre el peso que se le da a la observación y el que se le da a la predicción. En este caso el peso de la predicción es lo suficientemente grande como para que el filtro estime un estado distinto al que otorgan los sensores.

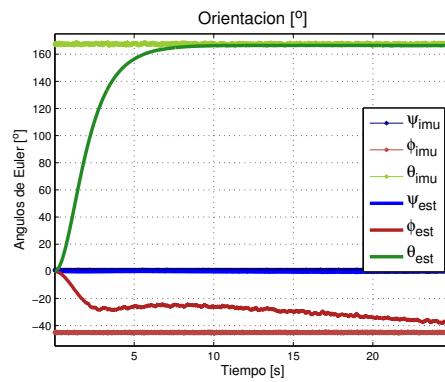


Figura 12.5: Ángulos de Euler -  $\phi = 45^\circ$

### 12.2.2. Vuelo real

Si bien las simulaciones resultan importantes para analizar el comportamiento del filtro en diferentes situaciones, se presenta la limitación de poder simular situaciones de vuelo real. Además al estar prendidos los motores se generan vibraciones e interferencias que provocan un aumento en el ruido de las medidas obtenidas mediante los sensores. Por estos motivos es de vital importancia analizar el comportamiento

del filtro sobre una situación real de vuelo.

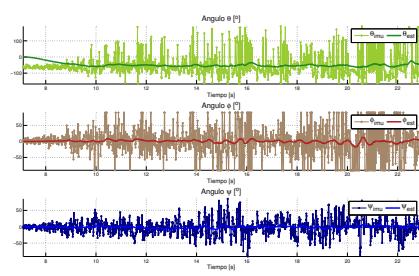


Figura 12.6: Estimación en vuelo real

En la figura 12.6 se muestran los resultados de la estimación de la orientación del cuadricóptero. Se observa claramente un aumento del ruido de las medidas respecto a los casos simulados, llegando a picos de hasta 50 grados. De todas maneras se puede corroborar el buen funcionamiento del filtro.

## 12.3. Resultados Kalman inercial + GPS

Se realiza una simulación de trayectoria de *Hovering*, introduciendo el filtro EKF que integra los datos del GPS. Éstos son simulados como si el cuadricóptero no se moviera (que es lo que efectivamente ocurre), de modo que se entrega el valor 0 a todas las posiciones

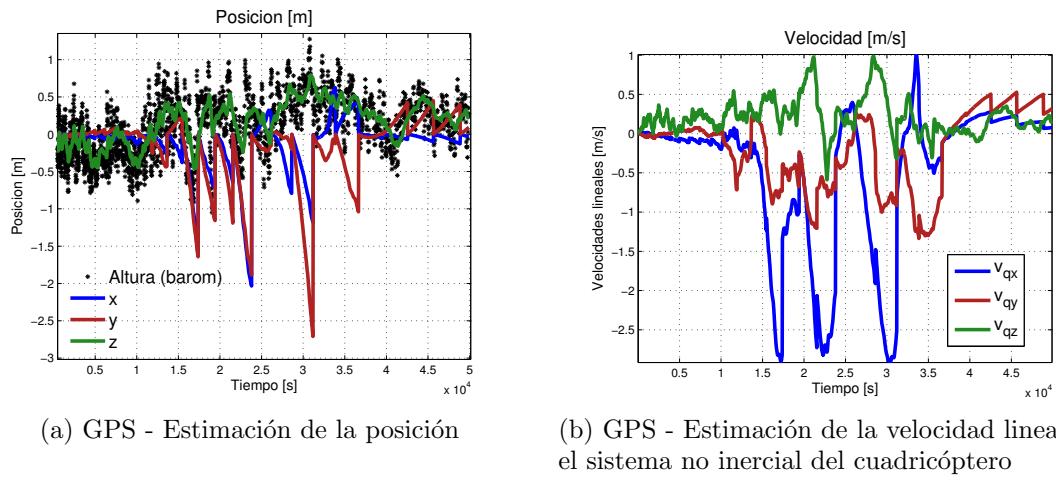


Figura 12.7: Posición y velocidad al introducir datos de GPS

Como se puede ver en la figura 12.7, se actualiza la posición en “x” e “y” cada 1 segundo gracias al GPS, corrigiendo el *drift* observado en la figura 12.4a. A su vez, las velocidades lineales se acotan notoriamente gracias a la influencia de la re-alimentación de la posición en el filtro de Kalman.

Se obtienen resultados muy satisfactorios para la estimación de estados, logrando suavizar el ruido presente en los sensores, que es mayormente mecánico (y magnético en el magnetómetro), sin retrasar la señal. A su vez la información de todos los sensores es combinada para mejorar la estimación de cada una de las variables de estado, logrando resultados ampliamente mejores que lo que se lograrían utilizando la información de cada sensor por separado.

## **Parte VI**

# **Desarrollo del controlador**

---

# CAPÍTULO 13

---

## LINELIZACIÓN Y PUNTOS DE OPERACIÓN

Independientemente del sistema bajo estudio, a la hora de elegir la técnica de control a utilizar se plantean diversas posibilidades. Parece razonable intentar resolver el problema planteado utilizando las técnicas más sencillas que se disponen, al menos en una primera aproximación. En caso de que dicha solución no fuese satisfactoria se puede optar por una técnica con un mayor grado de complejidad.

Las técnicas de control más sencillas y con las que se tiene mayor experiencia se basan en el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLIT). Sin embargo el MVE obtenido en el capítulo 3 es no lineal. Se propone entonces resolver el problema del control del cuadricóptero aproximando el sistema por un sistema lineal invariante en el tiempo. Dado que el sistema no puede ser linealizado en torno a cualquier trayectoria o punto de operación nos concentraremos en determinar bajo qué condiciones es posible aproximar el sistema por un SLIT.

### 13.1. Concepto general

Consideremos un sistema que se rige por la siguiente evolución de su vector de estados.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (13.1)$$

Donde  $x(t)$  es el vector de estados del sistema y  $u(t)$  el vector de las entradas. Supongamos en una primera instancia que tanto  $x(t)$  como  $u(t)$  son de dimensión uno. Consideremos además el punto de operación definido por  $x^*(t)$  y  $u^*(t)$ . Si realizamos un desarrollo de Taylor de orden uno en torno al punto de operación se tiene que:

$$x(t) = f(x(t), u(t)) = f(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{u=u^*}^{x=x^*}(x(t) - x^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{u=u^*}^{x=x^*}(u(t) - u^*) \quad (13.2)$$

Si definimos  $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$  y  $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$  tenemos que:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{u=u^*}^{x=x^*}\tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{u=u^*}^{x=x^*}\tilde{u}(t) \quad (13.3)$$

Este mismo concepto puede generalizarse en caso en el cual el vector de estados y el vector de entradas tienen dimension n y m respectivamente.

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{U}(t) \quad (13.4)$$

Donde  $A(t)$  es una matriz de  $n \times n$  y  $B(t)$  es de  $n \times m$ , tales que  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}|_{U=U^*}^{X=X^*}$  y  $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial U_j}|_{U=U^*}^{X=X^*}$ .

En el caso en que todos los coeficientes de las matrices A y B son constantes podemos afirmar que estamos en presencia de un sistema lineal invariante en el tiempo.

## 13.2. Puntos de operación

Lo que buscamos ahora es encontrar las trayectorias que permiten que la linealización de nuestro sistema en torno a estas resulte en un sistema lineal invariante en el tiempo.

Para lograr este cometido, se debe cumplir que todos los elementos de las matrices C.2 y C.3 sean constantes. Dichas matrices corresponden a la linealización del MVE en torno a una trayectoria genérica. Se desprende del análisis de dichas matrices que los puntos de operación que cumplen esta condición quedan restrictos a un subconjunto tal que:

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = \dot{v}_{qx} = \dot{v}_{qy} = \dot{v}_{qz} = \dot{\omega}_{qx} = \dot{\omega}_{qy} = \dot{\omega}_{qz} = \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_4 = 0 \quad (13.5)$$

Veremos luego que, realizando un cambio de variable como se explica en ??, se puede ampliar el conjunto de trayectorias posibles, pudiendo agregar aquellas para las cuales  $\dot{\theta} \neq 0$ . Estas consideraciones nos llevan a concluir que el conjunto de trayectorias permitidas<sup>1</sup> es aquel en el cual tanto la velocidad del centro de masa, como la velocidad angular son constantes en el tiempo. Las trayectorias que cumplen con estas condiciones son tres:

- Hovering
- Vuelo en linea recta a velocidad constante
- Vuelo en círculo a velocidad constante

En los tres casos se tienen que cumplir las restricciones siguientes:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{qx} \\ \dot{v}_{qy} \\ \dot{v}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx} \\ \dot{\omega}_{qy} \\ \dot{\omega}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (13.6)$$

Cada una de las trayectorias posibles tiene además sus particularidades, a continuación nos encargaremos justamente de determinar las restricciones específicas de cada una de ellas.

---

<sup>1</sup>por las restricciones que hemos impuesto de trabajar con un sistema lineal invariante en el tiempo

### 13.2.1. Hovering

En el caso del reposo mecánico no solo debe cumplirse las condiciones establecidas en 13.6 si no que además las velocidades del centro de masa y las velocidades angulares deben ser iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (13.7)$$

Dado que la velocidad y velocidad angular del sistema fue definida como cero tenemos por despejar 7 variables: los ángulos de Euler, y las velocidades angulares de los motores.

Al imponer las condiciones de 13.7 las ecuaciones 3.18 y 3.21 del MVE se cumplen trivialmente. La restricción establecida en 13.6 consta de seis ecuaciones. Estas no dependen de  $\theta$ , obteniendo entonces un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas que debe ser resuelto a fin de determinar las condiciones que permiten el hovering. Ninguna de las seis ecuaciones depende la posición, esto sumado a la independencia de la condición de hovering respecto de  $\theta$ , nos permite confirmar un resultado evidente: el hovering puede lograrse en cualquier punto del espacio con cualquier ángulo de Yaw

Del análisis de las ecuaciones 13.6 se obtiene rápidamente que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad (13.8)$$

Se deduce además que:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 316,10 \text{ rad/s} \quad (13.9)$$

### 13.2.2. Vuelo en linea recta a velocidad constante

Para lograr el vuelo en linea recta a velocidad constante se tienen que cumplir las condiciones de 13.6 al igual que en el caso anterior. La particularidad del vuelo en linea recta es que la velocidad del centro de masa es una constante distinta de cero.

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = cte \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (13.10)$$

Al imponer que  $\vec{\omega}_q = 0$  la ecuación 3.18 se verifica trivialmente y las ecuaciones 3.25 y 3.37 quedan idénticas al caso del sistema en reposo. Por lo tanto, tendremos también para el movimiento en linea recta que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 334,28 \text{ rad/s} \quad (13.11)$$

Hasta aquí no hemos considerado la ecuación que relaciona las velocidades lineales en el sistema inercial con las velocidades lineales expresadas en el sistema del cuadricóptero. Teniendo presente el resultado obtenido sobre  $\varphi$  y  $\psi$  dichas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ \dot{y} &= v_{qy} \sin \theta + v_{qx} \cos \theta \\ \dot{z} &= v_{qz} \end{aligned} \quad (13.12)$$

El vuelo en linea recta nos ofrece la posibilidad de fijar los restantes 4 parámetros de la trayectoria. Estos parámetros serán determinados por el generador de trayectorias con el objetivo de realizar una recta en particular con una orientación determinada.

### 13.2.3. Vuelo en círculos

Con las ecuaciones desarrolladas hasta este instante nos es imposible realizar movimientos con velocidades angulares distintas de cero sin que el sistema resultante sea variante en el tiempo. Si imponemos que la velocidad angular del sistema sea distinta a cero se tiene que al menos alguno de las derivadas de los ángulos de Euler es distinta de cero. Por lo tanto tenemos al menos algún ángulo de Euler variante en el tiempo. Para poder obtener un movimiento circular se realiza el cambio de variable en el MVE en lo que respecta a las ecuaciones de la derivada de la posición propuesto en ??.

El cambio de variables en cuestión consiste en expresar la posición (exclusivamente para los movimientos circulares) en la base del cuadricóptero. Supongamos que el cuadricóptero se encuentra realizando un movimiento tal, que su proyección sobre el plano horizontal ( $z = 0$ ) es circular. Podemos describir la posición en todo momento tomando como origen el centro de dicho círculo. Como se observa en la figura ?? la posición en dicho plano se puede expresar como  $-R\vec{j}_1$ <sup>2</sup>. Donde  $R$ , es el radio del círculo y  $\vec{j}_1$  es un vector de la base que se obtiene al realizar la primera rotación de Euler definida en 3.12. Multiplicando el vector  $-R\vec{j}_1$  por la matriz cambio de base  $H_2^q H_1^2$  definida en 3.12 se obtiene la posición expresada en el sistema  $S_q$ . Como  $\vec{j}_1$  es invariante frente a la rotación  $H_1^2$ , alcanza con multiplicar dicho vector por  $H_2^q$  obteniendo así:

$$\vec{r}_q = -H_2^q \vec{i}_1 = -R \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix} \quad (13.13)$$

Al expresar la posición con este cambio de variables se obtiene la independencia de la misma respecto de dos de los tres ángulos de Euler:  $\varphi$  y  $\theta$ . En lo que respecta al ángulo  $\varphi$  la independencia de esta variable no nos aporta absolutamente nada ya que para que el movimiento circular a velocidad constante sea posible dicho ángulo debe ser cero. La razón es que si el ángulo fuese diferente a cero tendríamos una componente de la fuerza en la dirección tangencial al círculo, por lo tanto una aceleración en dicha dirección.

Sin embargo, la independencia respecto de  $\theta$  en la posición es un paso fundamental para lograr el vuelo en círculos ya que las únicas ecuaciones del MVE 3.51 que dependen de esta variable son las que refieren a la derivada de la posición. Por lo tanto, seremos capaces de desarrollar un nuevo MVE independiente del ángulo de Yaw.

---

<sup>2</sup>Esto es debido a que se elige que el vector  $\vec{i}_q$  sea tangente a los círculos descriptos. El razonamiento es análogo si se desea que el vector  $\vec{j}_q$  sea tangente al círculo, en este caso debe expresarse la posición del sistema como  $R\vec{i}_1$

Nos interesa ahora derivar la posición para terminar de completar el modelo del sistema. Dado que la posición se encuentra expresada en el sistema del cuadricóptero tendremos que:

$$\vec{v}_q = \frac{d\vec{r}_q}{dt} = \frac{d\ell\vec{r}_q}{dt} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q \quad (13.14)$$

Por lo tanto tendremos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{y}_q \\ \dot{z}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{qx} - \omega_{qy} z_q + \omega_{qz} y_q \\ v_{qy} - \omega_{qz} x_q + \omega_{qx} z_q \\ v_{qz} - \omega_{qx} y_q + \omega_{qy} x_q \end{pmatrix} \quad (13.15)$$

Este modelo nos permitirá realizar el control basándonos en técnicas de control lineal para trayectorias circulares en planos tales que  $z = cte$ .

Es fundamental aclarar que las ecuaciones derivadas hasta aquí serán utilizadas exclusivamente para la linealización del sistema y no para determinar los valores de los parámetros a controlar. Para esto último continuaremos utilizando el modelo de 3.51. El movimiento circular queda determinado exclusivamente por dos parámetros la velocidad ( $V_I$ ) y la velocidad angular ( $\dot{\theta}$ ), estos serán considerados conocidos ya que es trabajo del generador de rutas o del usuario determinar que movimiento se desea realizar. Se desea determinar once parámetros, siete de las doce variables de estado (No nos interesa fijar ni ángulo de Yaw ni la posición y ya fue determinado que  $\varphi = 0$ ) y las cuatro velocidades angulares de los motores. Se deben tener en cuenta evidentemente las restricciones establecidas en 13.6 sobre las derivadas de las velocidades del centro de masa y de las velocidades angulares. En lo que respecta a las derivadas de los ángulos de Euler se debe cumplir que  $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$  además  $\dot{\theta}$  debe ser igual al valor impuesto. De  $\dot{\psi} = 0$  se deduce trivialmente que  $\omega_{qx} = 0$

Para cada instante tendremos un ángulo de Yaw distinto, por lo tanto la velocidad horizontal a cada instante tendrá una dirección distinta, sin embargo su módulo será constante. Sin pérdida de generalidad podemos considerar la situación evaluando  $\theta = 0$

$$\begin{pmatrix} v_{qx} + v_{qy} \sin \psi \\ v_{qy} \cos \psi - v_{qz} \sin \psi \\ v_{qy} \sin \psi + v_{qz} \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.16)$$

De la imposición de dicha condición surge:

$$v_{qy} = -\tan^2 \psi \quad v_{qy} \quad (13.17)$$

La solución de dicha ecuación es:  $v_{qy} = 0$ , y por lo tanto  $v_{qz} = 0$  y  $v_{qx} = V_I$ .

A esta altura nos resta por determinar simplemente tres de las variables de estado que permiten realizar un movimiento en circular ( $\psi, \omega_{qy}$  y  $\omega_{qz}$ ) además de las velocidades angulares de los motores. Hasta aquí hemos utilizado cinco de las doce ecuaciones del modelo físico, por lo tanto tenemos aún siete ecuaciones. El sistema a resolver no será resuelto en forma analítica, por el contrario se resolverá en forma numérica a la hora de planificar la trayectoria.

Se ha dado un paso fundamental en camino de lograr controlar el cuadricóptero, se han definido tres tipos de trayectorias las cuales es posible tratar desde el “mundo”

del control lineal. Las trayectorías definidas ofrecen una amplia gama de posibilidades, ya que concatenando las mismas se pueden obtener prácticamente cualquier movimiento, a excepción de maniobras que involucren variaciones en más de un ángulo de Euler a la vez. El subconjunto de trayectorias con el que se puede trabajar es considerado ampliamente satisfactorio y por ende se da por concluido el análisis sobre los puntos de operaciones y la linealización del sistema.

---

# CAPÍTULO 14

---

## DISEÑO DEL CONTROLADOR

Dentro del “mundo” del control lineal, existen diversas técnicas que nos permiten alcanzar el objetivo trazado de lograr que el cuadricóptero siga alguna de las trayectorias específicas en el capítulo 13. Algunas de las técnicas más utilizadas se centran en el diseño de controladores PID<sup>1</sup> o LQR<sup>2</sup>. Ambas técnicas presentan ventajas y desventajas. En el trabajo realizado en ?? se propone el control de un cuadricóptero utilizando un controlador PID. La gran mayoría de controladores en aplicaciones industriales son de este tipo, la principal ventaja que presentan es que se trata de un diseño que tiene una estructura simple y es adecuado para la gran mayoría de procesadores ya que el costo computacional del mismo es prácticamente nulo. El concepto principal es que la señal de entrada a la planta es una función del error entre el estado deseado y el estado estimado.

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (14.1)$$

donde  $e(t) = X_d - \hat{X}$ .

Es fundamental en esta técnica de control la determinación de las constantes. En ?? se limitan las trayectorias a trayectorias de hovering. En ese supuesto, se realizan algunas aproximaciones que permiten reducir el sistema físico a las siguientes ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g + (\cos \varphi \cos \psi) \frac{U_1}{M} \\ \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \frac{U_4}{I_{zz}} \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

Donde  $U_1, U_2, U_3$  y  $U_4$  son combinaciones lineales de los cuadrados de las velocidades angulares de cada motor. En este caso se puede tratar cada variable por separado, ya que cada variable es afectada por una sola entrada, siendo relativamente sencillo determinar las constantes  $K_p, K_I$  y  $K_d$  en función de donde se desea ubicar los polos del sistema realimentado. Con esta estrategia se pierde la posibilidad de controlar las otras 8 variables de estado, limitándose entonces a un cuadricóptero que puede realizar exclusivamente movimientos en la dirección vertical y giros en

<sup>1</sup>Proporcional, integral y derivativo

<sup>2</sup>Linear quadratic regulator

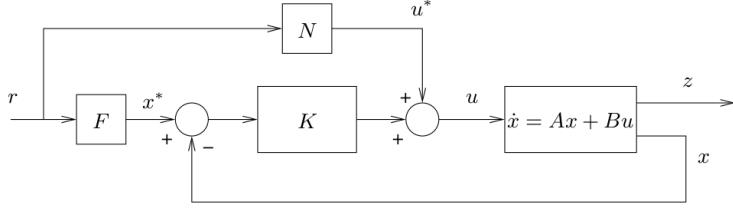


Figura 14.1: Sistema realimentado

torno a su eje vertical.

Si se intenta controlar el sistema de interés en este trabajo utilizando esta técnica, nos enfrentaríamos al problema de determinar al menos una matriz de realimentación (si trabajamos solamente con un controlador proporcional). Dicha matriz, debe ser de  $12 \times 4$ , es decir que se deben determinar los 48 elementos de la matriz de forma de lograr que la respuesta del sistema sea la deseada. Esta tarea no resulta sencilla, ya que es extremadamente difícil comprender exactamente la influencia de cada parámetro de la matriz de realimentación en la ubicación de los polos en el sistema realimentado incluso para asegurar algo elemental y necesario como la estabilidad del sistema.

Por dicho motivo se optó por explorar el camino propuesto por otros trabajos como ??, donde la técnica elegida para realizar el control del cuadricóptero es LQR.

## 14.1. Conceptos generales sobre LQR

Consideremos el sistema realimentado de la figura 14.1, con  $X(t) \in \mathcal{M}_{n \times 1}$  el vector de estados del sistema y  $u(t) \in \mathcal{M}_{m \times 1}$  las entradas.  $r$  es el setpoint del cual, multiplicando por dos matrices adecuadas pueden obtenerse los valores deseados de entrada  $U^*$  y de las variables de estado  $X^*$ . El objetivo que nos planteamos es el de obtener una matriz de realimentación  $K$  para el sistema utilizando la técnica de LQR.

El problema de encontrar un regulador óptimo de horizonte infinito puede plantearse de la siguiente forma; se trata de encontrar la matriz de transferencia  $C(s)$  que minimice la siguiente función de costo:

$$J_{LQR} = \int_0^\infty X'(t)QX(t) + U'(t)RU(t)dt \quad (14.3)$$

Donde  $Q$  y  $R$  son matrices simétricas definidas positivas de dimensiones  $n \times n$  y  $m \times m$  respectivamente.

El primer término de la integral corresponde a la energía de los estados controlados y el segundo a la energía de la señal de control. En función de como se escogen las matrices  $Q$  y  $R$ , se obtienen resultados distintos. Por ejemplo si la norma de  $Q$  es pequeña la forma más efectiva de reducir  $J_{LQR}$  es utilizar señales de control de norma pequeña a expensas de tener grandes variaciones en los estados controlados. Si bien existen diversos métodos para determinar las matrices  $Q$  y  $R$ , gran parte del trabajo es iterativo y se realiza a ensayo y error

En la versión de realimentación de estados del problema LQR se asume que se disponen de medidas de todas las variables del vector de estados. En este caso, el controlador óptimo LQR es una matriz de ganancia K tal que:

$$U(t) - U^*(t) = -K(X(t) - X^*(t)) \quad (14.4)$$

Donde  $K \in \mathcal{M}_{m \times n}$ . Para el caso bajo análisis se tiene que:

$$K = R^{-1}B^TP \quad (14.5)$$

Donde P es la solución a la ecuación algebraica de Riccati.

La propiedad escencial del controlador LQR es que la respuesta del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, es decir que la parte real de los valores propios de la matriz  $A - BK$  es negativa, mientras se cumplan las siguientes condiciones:

- El sistema es controlable
- El sistema es observable

## 14.2. Consideraciones particulares respecto del sistema a controlar

Como se explico en capítulos anteriores, se tienen una nueva estimación del vector de estados cada  $10ms$  esto nos permite realizar acciones de control con esta misma tasa de muestreo. De acuerdo a las constantes de tiempo que involucra el sistema físico se puede afirmar que es un tiempo de acción adecuado para trabajar.

Al tener un tiempo de respuesta rápido (en relación a las constantes del sistema) se podría resolver el problema utilizando la técnica de control LQR pensando en un sistema continuo, por más que nuestro sistema sea un sistema discreto. Sin embargo los algoritmos de determinación de la solución a la ecuación algebraica de Riccati más sencillos que se encontraron corresponden a la solución de la formulación discreta del problema planteado en 14.3. Por otra parte, dicha formulación corresponde al caso en el cual se trabaja con un horizonte infinito, es decir se busca alcanzar un determinado punto de operación y el setpoint no será modificado. Estrictamente, esta no es la situación en la cual nos encontramos dado que es de interés concatenar diversas trayectorias, por ende el punto de operación sí debe ser modificado, sin embargo se puede suponer que cada trayectoria se realizará por un tiempo ampliamente superior al tiempo del transitorio entre dos trayectorias. Por dicho motivo, aproximar el problema a un problema de horizonte infinito es acertado ya que simplifica enormemente la formulación del problema.

### 14.2.1. Discretización del sistema

Como se explicó en el capítulo 13 se trabajará con tres tipos de trayectoria: hovering, vuelos en linea recta y círculos. En cada uno de estos casos tenemos un sistema lineal de la forma

$$\dot{X} = AX + BU \quad (14.6)$$

La forma que toma el sistema continuo al ser convertido a tiempo discreto es:

$$X_{k+1} = \Phi X_k + \Gamma U_k \quad (14.7)$$

Donde:

$$\Phi = e^{AT_s} \quad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{As} ds B \quad (14.8)$$

Estas relaciones surgen de discretizar el sistema considerando muestreadores de orden cero. Por más detalles de este proceso puede consultarse ??.

El problema de encontrar un regulador óptimo también puede ser planteado en un sistema discreto si reescribimos la ecuación 14.3.

$$J_{DLQR} = \sum_0^{\infty} X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k \quad (14.9)$$

En el trabajo realizado en ?? se propone un algoritmo iterativo para obtener la matriz de realimentación que minimiza  $J_{DLQR}$ . Debido a las pequeñas diferencias encontradas entre este algoritmo y la función *lqr* de *MatLab* se optó por reproducir exactamente dicho algoritmo.

### 14.2.2. Agregado de integradores

El esquema de la figura 14.1 funciona a la perfección solamente en el caso en que la caracterización del sistema sea perfecta. Los valores de setpoint fueron determinados analíticamente en función de los parámetros determinados, de forma que por ejemplo, para la trayectoria de hovering la velocidad angular de los motores es aquella que produce una fuerza igual al peso del sistema. Errores en la caracterización del sistema llevan a que el punto (o trayectoria) de equilibrio no sea posible. Supongamos que el valor de  $\omega^*$  para la trayectoria de hovering es inferior al realmente necesario para mantener al sistema en un punto. Supongamos además que inicialmente  $X = X^*$ . En este caso la entrada al sistema es la velocidad angular  $\omega^*$ , sin embargo estamos suponiendo que esta fuerza no es suficiente para mantener al sistema en equilibrio, por lo tanto la posición vertical disminuye. La realimentación proporcional produce un aumento en la velocidad angular de los motores hasta que para cierto valor de altura la entrada al sistema es aquella que produce el equilibrio. En este caso se obtiene un nuevo punto de equilibrio distinto al deseado. En el ejemplo considerado se obtiene una altura inferior a la deseada.

Realizando diversas pruebas se ha comprobado que según el nivel de batería disponible un mismo comando  $I^2C$  corresponde a distintos valores de velocidad angular. Para resolver este problema se plantea el camino de medir el voltaje en la batería durante el vuelo, sin embargo este camino no parece práctico ya que se debería caracterizar la relación entre velocidad angular y comando  $I^2C$  para todo el rango de voltajes en que la batería puede operar. Este camino no parece pertinente, quedando incluso sujeto a la exactitud con la cual se realizan las medidas.

Surge entonces la necesidad de agregar al controlador cierta robustez frente a errores de caracterización del sistema o frente a variaciones del mismo, por ejemplo

la tensión de la batería o un cambio en la masa del sistema<sup>3</sup>. Esto último es fundamental si se planea utilizar el cuadricóptero por ejemplo para transportar alguna carga útil.

El camino a explorar es el de agregar un bloque integrador. El esquema de controlador es ahora el de la figura ???. Para explicar la utilidad del mismo, continuaremos trabajando con el ejemplo de una trayectoria de hovering en la cual  $\omega^*$  está subestimado. En dichas condiciones se obtiene un nuevo punto de equilibrio con altura inferior a la deseada. Si realimentamos la integral de la diferencia de altura tenemos una entrada que aumenta con el tiempo hasta que la diferencia de altura sea cero. En este punto el término correspondiente a la integral de la diferencia de altura se mantiene constante en un valor positivo y el término correspondiente a la realimentación proporcional es cero, compensando el error en el modelado.

El agregado de un bloque integrador lo podemos entender como una ampliación del vector de estados. La salida del bloque integrador verifica que  $\dot{X}_I = X$ . Donde  $X_I$  corresponde a los estados integrados. La dinámica del sistema puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} U \quad (14.10)$$

En la ecuación 14.10 lo que se obtiene es un nuevo sistema lineal de mayor dimensión. Lo que buscaremos ahora es encontrar una matriz de realimentación para el sistema 14.10 buscando minimizar la función de costos definida en 14.9.

### 14.3. Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad son fundamentales para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado controlado con la técnica de LQR.

Sea el sistema lineal representado por la ecuación 14.11

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (14.11)$$

Donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{p \times n}$  y  $D \in \mathcal{M}_{p \times m}$ .

Consideremos la matrices  $S \in \mathcal{M}_{n \times nm}$  definida como:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (14.12)$$

El sistema es controlable si y solo si el rango de S es n.

---

<sup>3</sup>Para realizar pruebas se disponen de baterías de diverso tamaño (y peso), no parece práctico modificar constantemente la masa del sistema según la batería con la que se realiza una determinada prueba.

Consideremos la matriz  $V \in \mathcal{M}_{pn \times n}$  definida como:

$$V = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (14.13)$$

El sistema es observable si y solo si el rango de V es n.

El sistema bajo estudio es originalmente no lineal, en el capítulo 13 se estudió en torno a que tipos de trayectorias se puede aproximar el problema de controlar el cuadricóptero por el problema de controlar un sistema lineal invariante en el tiempo. Si bien no todas las trayectorias son posibles, el conjunto de trayectorias es infinito. Es imposible evaluar las condiciones de controlabilidad y observabilidad para todos los casos. Sin embargo, se puede evaluar en distintas trayectorias y confiar en que para las trayectorias no testeadas el resultado sea el mismo.

En una primer aproximación se analizaron diversas trayectorias para el sistema lineal sin los estados agregados correspondientes a la inclusión de integradores. Las matrices de controlabilidad y observabilidad para todas las trayectorias testeadas son de rango 12. Esto implica que los controladores que surgen de la técnica de control LQR son estables. Sin embargo es de interés, por los motivos presentados en la sección anterior, poder agregar al controlador una dependencia del pasado (integradores), esto nos lleva a cuestionarnos que estados integrados pueden ser incluidos en el sistema manteniendo la condición de controlabilidad. La condición de observabilidad se cumple trivialmente ya que siempre se tiene una estimación de las integrales de los estados.

Los únicos estados que pueden integrarse sin perder la controlabilidad del sistema son las tres posiciones ( $x, y, z$ ) y el ángulo de Yaw ( $\theta$ ). En resumen, el vector de estados controlados es el siguiente:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \\ \varphi \\ \theta \\ v_{q_x} \\ v_{q_y} \\ v_{q_z} \\ \omega_{q_x} \\ \omega_{q_y} \\ \omega_{q_z} \\ x_I \\ y_I \\ z_I \\ \theta_I \end{pmatrix} \quad (14.14)$$

## 14.4. Matriz de realimentación

Como se explicó anteriormente, la matriz de realimentación es obtenida numéricamente gracias al algoritmo presentado en ??, dicha matriz depende del sistema lineal con el cual se representa cada trayectoria. Por lo tanto para cada trayectoria tendremos que calcular una nueva matriz de realimentación. Lo fundamental es entonces determinar adecuadamente las matrices Q y R definidas en 14.9 de forma de obtener trayectorias adecuadas. Estas matrices fueron determinadas en forma iterativa, modificando los parámetros hasta obtener un comportamiento satisfactorio en cuanto a tiempos de respuesta y robustez.

Se entiende que los parámetros fundamentales a controlar son los ángulos de Euler, si el control sobre estos no se hace en forma rápida la performance del sistema puede verse afectada. Las condiciones de vuelo determinadas dependen de que los ángulos de Pitch y de Roll se encuentren perfectamente ajustados. Consideremos la condición de hovering a modo de ejemplo, si estos ángulos no son nulos se tiene un sistema que acelera indefinidamente en alguna dirección. Por lo tanto parece importante darle un peso superior al control de estas variables de estado respecto a las restantes. Las matrices de realimentación se construyen a partir de:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.15)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} \quad (14.16)$$

---

---

# CAPÍTULO 15

---

## SIMULACIONES REALIZADAS SOBRE EL CONTROLADOR

El objetivo de la presente sección es el de analizar el desempeño del controlador. En primer lugar realizaremos un estudio en lo que respecta a la respuesta al escalón para las tres trayectorias definidas en el capítulo 13, luego analizaremos como es el comportamiento del sistema frente a medidas con ruido para finalmente estudiar el desempeño del controlador frente a errores y no idealidades en el modelado del sistema.

En lo que respecta al análisis de la respuesta del controlador ante la presencia de ruido en las medidas se utilizará la función del simulador desarrollado que nos permite agregar a cada estado un ruido que cumple con el siguiente modelo:

$$\eta_i = A_i \cos(\omega t) + \varepsilon(\mu_i, \sigma_i) \quad (15.1)$$

Donde  $\varepsilon(\mu_i, \sigma_i)$  es un ruido gaussiano de media  $\mu_i$  y de desviación estándar  $\sigma_i$ .

### 15.1. Respuesta al escalón

Nos centraremos en estudiar las respuestas al escalón de los tres tipos de trayectorias. En esta sección no se consideran medidas con ruido, es decir que se conoce el estado a la perfección.

#### 15.1.1. Trayectoria de hovering

##### Desplazamientos en la dirección vertical

Se consideran condiciones iniciales nulas. Se fija como setpoint:

- Prueba 1:  $x_s = 0m; \quad y_s = 0m; \quad z_s = 1m; \quad \theta = 0^\circ_s$
- Prueba 2:  $x_s = 0m; \quad y_s = 0m; \quad z_s = 7m; \quad \theta = 0^\circ_s$

No se aprecian variaciones en ninguna de las variables de estado excepto en la posición vertical ( $z$ ) y en la velocidad  $v_{qz}$ . La respuesta al escalón para las pruebas uno y dos se muestran en la figura 15.1.

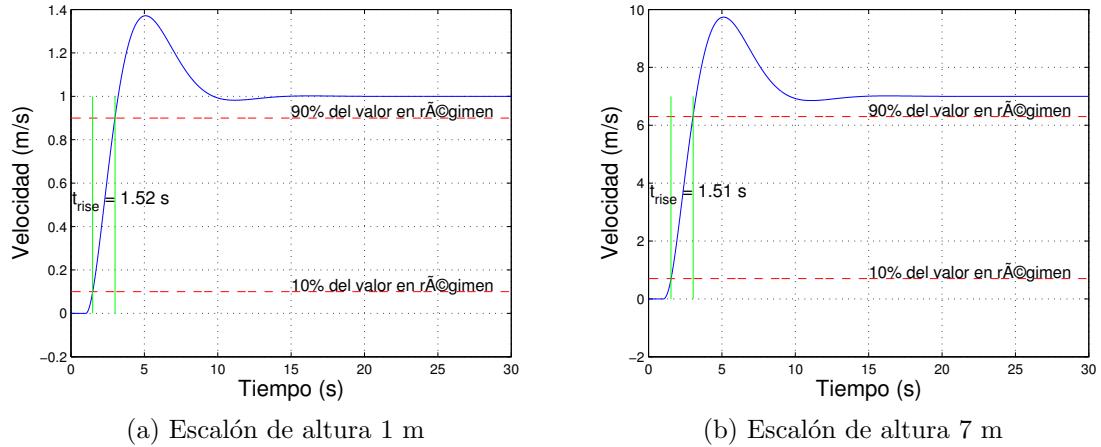


Figura 15.1: Respuesta al escalón en la altura

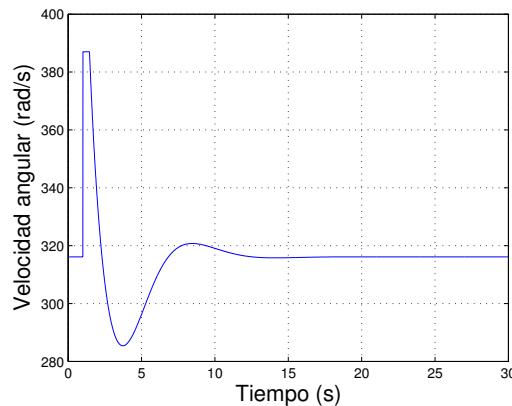


Figura 15.2: Velocidad angular del motor 1 durante un escalón de altura 7m

El tiempo de *rise* de ambas respuestas al escalón es considerado ampliamente satisfactorio. El sobretiro obtenido es superior a lo deseable, siendo aproximadamente un 40 % del valor en régimen. El mismo puede reducirse otorgando un peso menor en la matriz 14.15 a los términos asociados al estado integrado de la altura. Esta modificación produce a la vez que el controlador se comporte considerablemente peor frente a variaciones en el sistema. Esto será analizado con mayor detalle en la sección ???. Existe un compromiso entre los fenómenos descriptos, la matriz de realimentación escogida busca contemplarlos a ambos determinando un valor considerado como óptimo.

En la figura 15.2 se observa la velocidad angular de uno de los motores para el escalón de altura 7m. Se observa que en los instantes iniciales la velocidad angular de uno de los motores alcanza su valor máximo ( $387\text{rad}\text{s}^{-1}$ ), por lo tanto no se puede asegurar el perfecto funcionamiento para escalones de mayor altura. Por otra parte se observa en ambas pruebas que una vez alcanzado el valor objetivo se mantiene perfectamente.

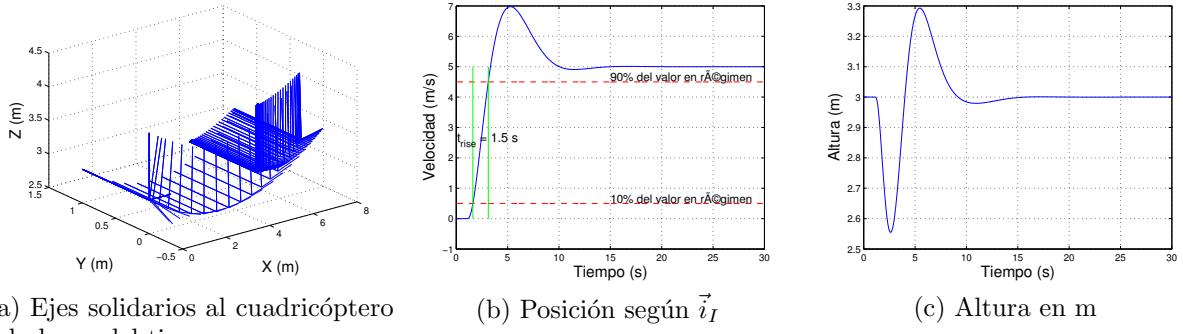


Figura 15.3: Escalón de 2m en la dirección horizontal

### Desplazamientos en la dirección horizontal

Partiendo de condiciones iniciales nulas excepto la altura donde se considera  $z = 3m$ , se fija el siguiente setpoint:

- $x_s = 5m; \quad y_s = 0m; \quad z_s = 3m; \quad \theta = 0^\circ$

En la figura 15.3 se observan las características más importantes de la trayectoria. Para lograr un desplazamiento en alguna dirección horizontal el cuadricóptero debe realizar al menos un giro según los ángulos de pitch o roll. Esto se observa claramente en la figura 15.3a. Este giro produce una variación en la altura. Para el caso considerado, dicha variación es inferior a los 25cm, valor que se considera aceptable. Para mayores escalones en la dirección horizontal se observan variaciones de altura no deseables. Por otra parte en lo que respecta a la respuesta al escalón en la dirección  $\vec{i}_I$  se tiene un tiempo de *rise* y un sobretiro muy similar que en el caso del escalón vertical.

En resumen, el controlador diseñado se comporta adecuadamente para la condición de hovering, cabe recordar que la linealización realizada para dicha trayectoria supone el reposo del sistema y los desplazamientos no se encuentran a priori contemplados en dicha trayectoria. El controlador diseñado nos permite algunos desplazamientos con un buen tiempo de respuesta, para desplazamientos de mayores distancias se debe trabajar o bien con rectas o círculos.

#### 15.1.2. Vuelo en linea recta

Se realizan dos pruebas para testear el desempeño del controlador en vuelos en linea recta, partiendo de condiciones nulas se impone un escalón de  $5ms^{-1}$  según  $\vec{i}_q$  en la primera prueba y un escalón de misma amplitud en la dirección  $\vec{k}_q$ .

##### Escalón en la dirección $\vec{i}_q$

Para alcanzar una velocidad superior a la inicial en la dirección  $\vec{i}_q$  es necesario que el cuadricóptero modifique su ángulo de pitch. Esto produce que la fuerza neta en la dirección vertical sea inicialmente inferior a la necesaria para mantener el equilibrio, produciendo así un descenso en la altura. Para que el resultado obtenido sea aceptable dicha modificación no puede ser significativa. Del mismo modo se busca

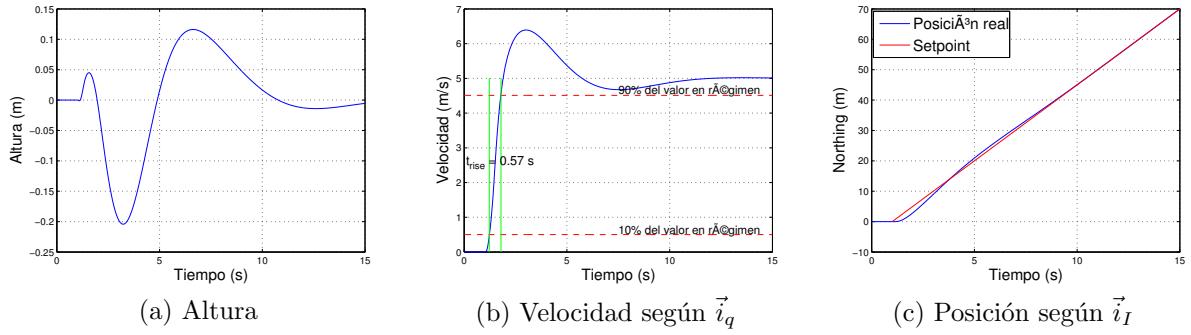


Figura 15.4: Escalón de  $5ms^{-1}$  en la dirección  $\vec{i}_q$

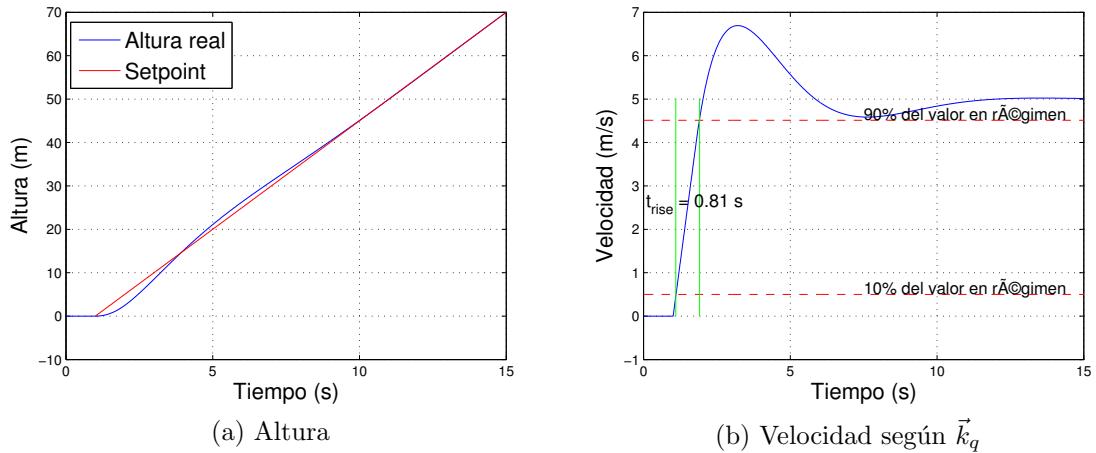


Figura 15.5: Escalón de  $5ms^{-1}$  en la dirección  $\vec{k}_q$

que el valor de velocidad en régimen se alcance en un tiempo razonable, así como se busca que el sistema sea capaz de seguir en posición a la integral de la velocidad de setpoint. En la figura 15.4 se observa la altura del sistema, la velocidad en la dirección  $\vec{i}_q$  y la posición del cuadricóptero según  $\vec{i}_I$ .

La respuesta del sistema es rápida, alcanzando el 90 % del valor de régimen en  $0,57s$ , asimismo como puede observarse en 15.4c la posición se sigue de forma muy acertada. Finalmente cabe observar que la máxima variación en la altura es cercana a los  $20cm$ . Para poder seguir la posición es necesaria la presencia de un sobretiro en la velocidad, en caso contrario la velocidad es siempre inferior a la velocidad objetivo y por ende la posición real no puede alcanzar la posición de setpoint.

### Escalón en la dirección $\vec{k}_q$

En la figura 15.5 se puede observar la respuesta al escalón para la velocidad según  $\vec{k}_q$  y la altura. Nuevamente los tiempos de rise resultan satisfactorios, así como el seguimiento de la posición también, alcanzando nuevamente un error igual a cero.

## 15.2. Robustez frente a la presencia de ruido de medición

Hasta aquí hemos evaluado las características del controlador diseñado en situaciones en las cuales se conoce exactamente el vector de estados, evidentemente la situación de vuelo real no se corresponde con esta idealidad. Las medidas realizadas tienen ruido intrínseco, muy superior a los considerados en las pruebas de calibración y caracterización de los sensores. El aumento de este ruido se debe principalmente a las vibraciones mecánicas que introducen las hélices.

Resulta fundamental conocer en forma aproximada el comportamiento de los ruidos de medida. Con dicho fin se realizó una prueba de vuelo en la cual el cuadricóptero estaba sujeto por arriba y por debajo quedando imposibilitado de realizar movimientos. Se comandaron los motores a la velocidad de hovering. En la presente sección se presentan los parámetros de la ecuación 15.1 que mejor ajustan el ruido. Si bien se podría haber realizado dicho ajuste utilizando mínimos cuadrados, al menos para la parte del ruido no aleatorio, se optó por realizar dicho ajuste en forma iterativa.

Dado que los ángulos de pitch y de roll se obtienen directamente con los acelerómetros los ruidos asociados a ambas medidas son idénticas. Por dicho motivo consideraremos un solo ruido replicado en ambas variables. En el caso de las velocidades angulares y de la posición horizontal (medida con el GPS), trabajaremos de la misma forma.

Finalmente cabe aclarar que se espera que los ruidos obtenidos sean independientes del tipo de trayectoria realizada, por lo tanto los ruidos obtenidos para la trayectoria de hovering serán los utilizados para las restantes.

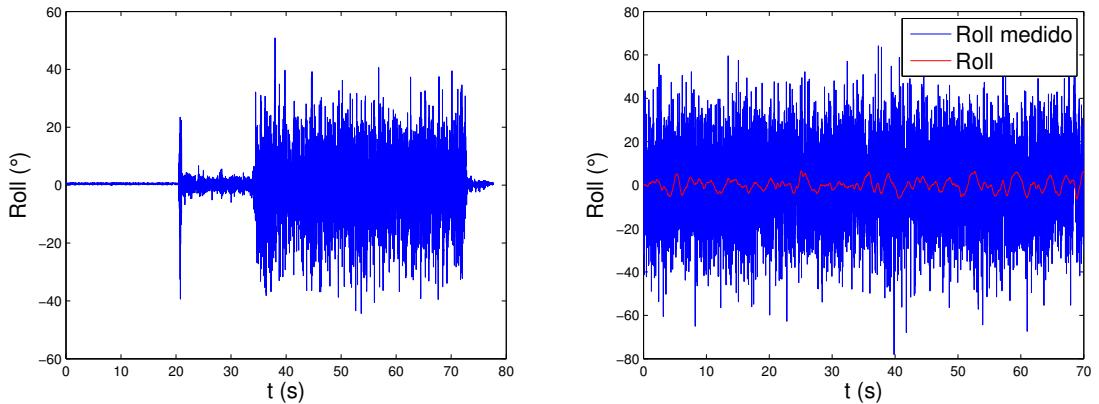
### 15.2.1. Hovering

Para el ruido asociado a las medidas de los ángulos de pitch y de roll se escogieron los siguientes parámetros:

- $A_{roll} = 0,05^\circ$
- $\omega_{i_{roll}} = 2\pi 0,03 \text{rads}^{-1}$
- $\sigma_{roll} = 6,05^\circ$
- $\mu_{roll} = 0,27^\circ$

En la figura ?? pueden compararse los ruidos obtenidos en la “situación de vuelo” descripta anteriormente y el ruido en la simulación. Asimismo puede observarse como, a pesar de la gran presencia de ruido la variable de estado de interés se mantiene controlada muy cercana al valor deseado. El valor máximo y mínimo de roll alcanzados son  $6,48^\circ$  y  $-6,41^\circ$ .

En la figura 15.6a se observan tres amplitudes de ruido bien marcadas. La primera corresponde a las medidas con los motores apagados, la segunda a partir del segundo



(a) Medida del ángulo de Roll en “situación de vuelo”      (b) Ruido de Roll simulado y Roll efectivo

Figura 15.6: Ruidos de Roll

20.5 donde los motores operan a velocidad mínima ( $109revs^{-1}$ ) y la tercera a partir del segundo 34 donde la velocidad angular de los motores es igual a la velocidad de hovering. En lo que sigue del análisis nos concentraremos exclusivamente en esta tercera etapa.

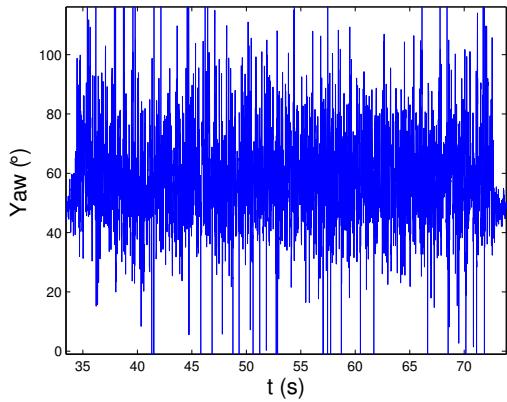
El ángulo de Yaw se determina además utilizando la lectura del magnetómetro, por dicho motivo se separa el análisis de su ruido de los restantes ángulos de Euler. En este caso los parámetros de ruido utilizados son:

- $A_{yaw} = 0,23^\circ$
- $\omega_{yaw} = 2\pi0,07rads^{-1}$
- $\sigma_{yaw} = 2^\circ$
- $\mu_{yaw} = 0$

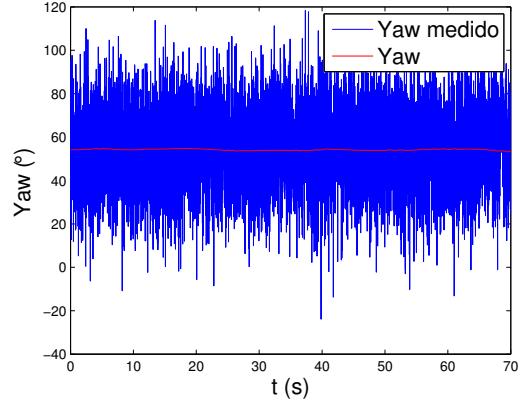
En la figura 15.7 puede observarse como, a pesar del ruido en la medida el controlador se mantiene robusto apartándose del valor objetivo  $0,96^\circ$  en el peor de los casos. El resultado en lo que respecta al control de la velocidad angular del sistema es similar. En la figura 15.8 pueden observarse las gráficas de los ruidos medido y simulado, además de la velocidad angular “real”. Se trabaja en este caso con la velocidad angular  $\omega_{qx}$ . Los parámetros de ruido escogidos son:

- $A_{\omega_{qx}} = 0,03^\circ s^{-1}$
- $\omega_{\omega_{qx}} = 2\pi0,03rads^{-1}$
- $\sigma_{\omega_{qx}} = 0,64^\circ s^{-1}$
- $\mu_{\omega_{qx}} = 0$

Los ruidos observados hasta el momento son preponderamente blancos. Por dicho motivo es prácticamente imposible observar la respuesta del control más allá de afirmar que efectivamente no nos alejamos sustancialmente de la posición deseada.

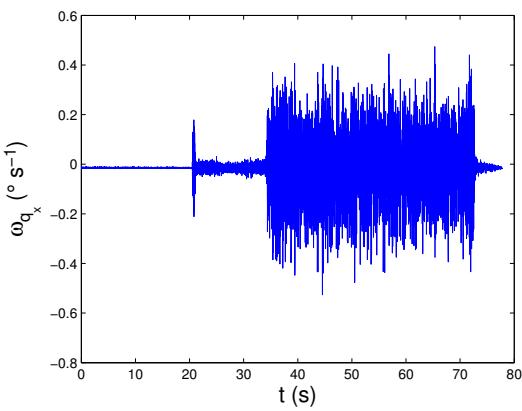


(a) Medida del ángulo de Yaw en “situación de vuelo”

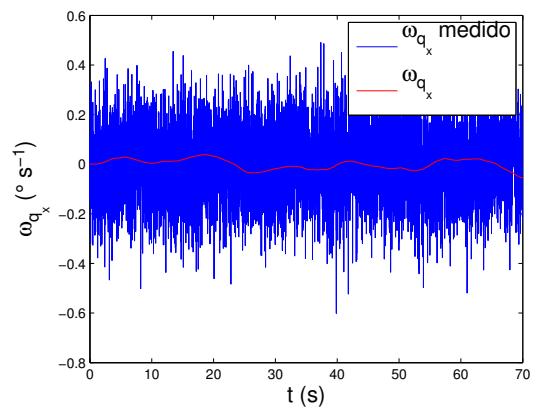


(b) Ruido de Yaw simulado y Yaw efectivo

Figura 15.7: Ruidos de Yaw

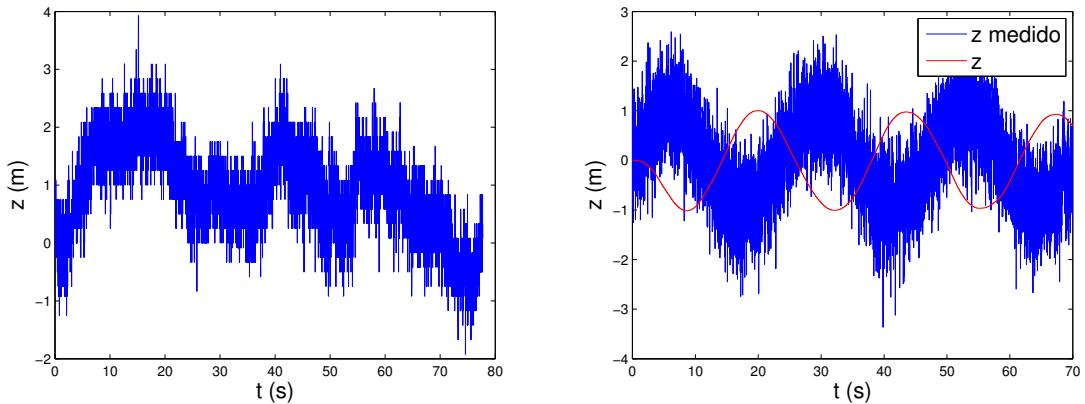


(a) Medida de  $\omega_{q_x}$  en “situación de vuelo”



(b) Ruido de  $\omega_{q_x}$  simulado y  $\omega_{q_x}$  efectivo

Figura 15.8: Ruidos de  $\omega_{q_x}$



(a) Medida de  $z$  en “situación de vuelo”

(b) Ruido de  $z$  simulado y  $z$  efectivo

Figura 15.9: Ruidos de  $z$

En el caso del ruido en la altura la situación es distinta ya que quien juega el papel más importante en el ruido es una oscilación de baja frecuencia. Los parámetros elegidos para representar dicho ruido son:

- $A_z = 1m$
- $\omega_z = 2\pi 0,04 rads^{-1}$
- $\sigma_z = 0,34m$
- $\mu_z = 0,94m$

En la figura 15.9b se aprecia claramente la acción del control ya que para medidas que superan el valor deseado de *setpoint* el control actúa en sentido contrario, sucede lo mismo para las medidas que son inferiores al *setpoint*.

Los ruidos que se han menejado hasta aquí corresponden a las medidas directa de los sensores. Al someter estas medidas al filtro de Kalman (ver capítulo ??) tendremos ruidos muy inferiores. Por lo tanto podemos asumir que el sistema se comportará aún mejor de lo que se evaluó en esta sección.

En lo que respecta al ruido de la velocidad no se puede trabajar simplemente con las medidas de los sensores ya que no se tiene ninguna medida directa de la velocidad. La única medida que se tiene es la aceleración, se podría integrar dicha medida para obtener valores de velocidad, pero el error introducido en la aceleración lleva a que la velocidad tenga una deriva, no tiene sentido en pensar esta magnitud con un ruido asociado, excepto que trabajemos en este caso con las estimaciones del vector de estados.

### 15.3. Robustez frente a variaciones en el modelo

En este punto nos concentraremos en analizar el comportamiento del sistema reimplantado frente a algunas variaciones en el mismo. Trabajaremos con la trayectoria de hovering, imponiendo como setpoint el reposo y partiendo de esta misma situación.

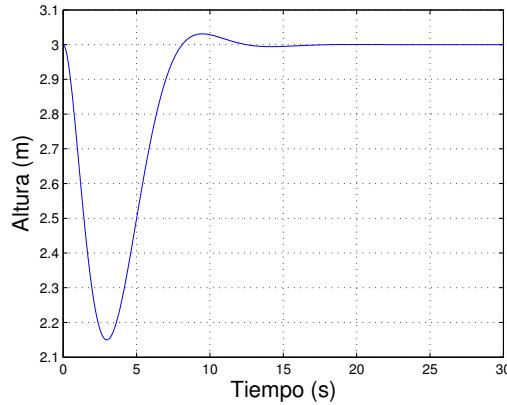


Figura 15.10: Variación de la altura al agregar una masa adicional de 200g

Analizaremos los dos casos que tienen más importancia práctica: la variación de la masa y el hecho de que las velocidades angulares de los motores no son idénticas.

## Variación de la masa

Con condiciones iniciales nulas excepto por la altura que se fija a 3m, se aumenta la masa del sistema (1,541kg) en 200g. En la figura 15.10 se observa la variación de la altura por el agregado de masa.

La respuesta frente a la variación de la masa es buena, en menos de diez segundos se vuelve a obtener la altura inicial, adicionalmente la variación de la altura es inferior a los 90cm.

## Diferencias entre las velocidades angulares de los motores

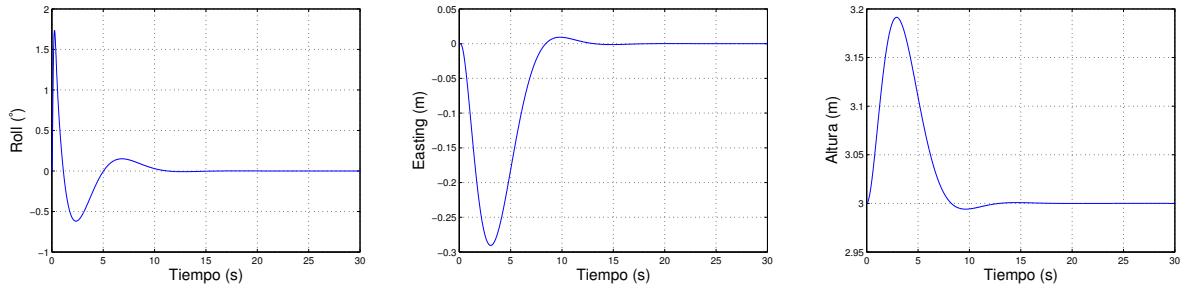
En las mismas condiciones que en la situación anterior se impone que la velocidad angular del motor 2 cumpla:

$$\omega_2 = \omega_4 + 15,2 \text{rads}^{-1} \quad (15.2)$$

La diferencia de  $15,2 \text{rads}^{-1}$  corresponde a la máxima diferencia entre las velocidades angulares de los motores. A priori se espera que esta diferencia produzca un giro positivo en el ángulo de Roll y un desplazamiento en la dirección  $-\vec{j}_I$ . Se espera también un desplazamiento en la dirección vertical debido a que la fuerza neta es mayor, ya que continuamos asumiendo que  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_{\text{hovering}}$ .

En la figura 15.11 se observa la variación de estas tres variables en función del tiempo. La inclusión del bloque integrador es fundamental para poder controlar el sistema frente a esta variación en las velocidades angulares de los motores. Sin dicho bloque el sistema se estabiliza, pero en una posición diferente de la deseada.

En resumen el controlador diseñado se presenta como satisfactorio ya que permite seguir las trayectorias deseadas con buenos tiempos de respuesta. Por otra parte, su respuesta frente a medidas extremadamente ruidosas (en la práctica se trabaja con



(a) Ángulo de roll en función del tiempo

(b) Posición según  $\vec{j}_I$

(c) Altura en m

Figura 15.11: Diferencia de  $15,2 \text{rads}^{-1}$  entre las velocidades angulares de los motores 2 y 4.

estados mejor estimados) es muy buena, ya que mantiene al sistema en torno al valor objetivo evidentemente presenta algunas variaciones debidas al error en la medida. Finalmente cabe señalar la robustez del mismo frente a variaciones en el sistema como ser la masa y una diferencia entre las velocidades angulares de los motores.

El sobretiro en la respuesta al escalón parece superior a lo deseado y es un punto que debe mejorarse en el futuro si se desea un control más preciso del sistema. En esta primer aproximación al problema los sobretiros presentados son aceptables. La mayor dificultad que se encontró al intentar reducir el sobretiro es que el sistema presenta mayores variaciones frente a variaciones de masa o de las velocidades angulares de los motores. Una posibilidad es la de imponer valores mayores en la diagonal de la matriz R definida en 14.16. Sin embargo esta solución implica que el sistema tenga tiempos de respuesta más lentos.

La posibilidad de agregar control sobre las derivadas del vector de estados es una linea que no se llegó a investigar debido al tiempo acotado del proyecto.

---

# CAPÍTULO 16

---

## PRUEBAS DEL CONTROLADOR

El controlador diseñado se comporta adecuadamente en lo que respecta a las simulaciones, sin embargo debido a que la caracterización del sistema puede contener errores se proceden a realizar algunas pruebas sobre los subsistemas que componen al cuadricóptero. Estas pruebas son de utilidad para verificar el correcto funcionamiento del controlador diseñado y/o para realizar los ajustes que sean necesarios en el mismo.

### 16.1. Control del subsistema del Roll

Para lograr el correcto funcionamiento del cuadricóptero es fundamental que el control sobre los ángulos de Pitch y de Roll se comporte de buena forma. Estos ángulos son claves, a modo de ejemplo, es imposible lograr el equilibrio mecánico si dichos ángulos difieren de cero. Por dicha razón previo a realizar pruebas sobre el sistema completo es necesario asegurarnos que los subsistemas del Roll y del Pitch funcionan correctamente. De acuerdo al modelo físico del sistema desarrollado en ?? ni el Roll ni el Pitch son subsistemas independientes entre sí, además ambos dependen de la velocidad angular según  $\vec{k}_q$ . Sin embargo, dichos ángulos toman valores cercanos a cero en las trayectorias de interés, en este caso se puede realizar la aproximación de que ambos sistemas son independientes.

A partir de esta consideración se procede a fijar al cuadricóptero sobre dos guías como se muestra en la figura 16.1, de forma de eliminar todos los grados de libertad del sistema excepto el ángulo de Roll y la velocidad angular correspondiente al eje de rotación del Roll. Se realizan dos pruebas: la primera consiste en que el sistema alcance la posición de equilibrio ( $\psi = 0$ ), la segunda consiste en alejar al sistema del equilibrio y lograr que vuelva



Figura 16.1: Dispositivo de prueba de  $\psi$

al punto de equilibrio.

## 16.2. Control del subsistema del $\theta$

De manera análoga al caso anterior, es importante verificar el buen funcionamiento del control sobre el giro en “z”, para lo cual se utiliza un dispositivo de prueba que restringe los grados de libertad del cuadricóptero. En este caso se lo sujetado con una cuerda desde arriba de los cuatro brazos de modo de realizar la fuerza lo más pareja posible. El cuadricóptero queda sujetado colgando horizontal y conserva el libre giro según “x” ( $\theta$ ). Se setea una velocidad de *hovering* inferior a la necesaria para levantar vuelo, de modo que el cuadricóptero no se eleve y la cuerda quede siempre tensa. Para el giro bajo estudio no es relevante el valor absoluto de la velocidad de giro de cada motor, ya que depende exclusivamente de la diferencia de velocidades angulares. Por ello los resultados de realizar las pruebas con una velocidad de *hovering* inferior a la real son extrapolables a la situación de vuelo libre, sin pérdida de generalidad.

El giro en  $\theta$  es generado por un desequilibrio entre los pares ejercidos por las hélices. Si el par neto de todas las hélices resulta por ejemplo positivo, el cuadricóptero realizará un movimiento hacia los negativos, equilibrando el par, como se explica en el capítulo 1.

Para la estimación de  $\theta$  se utiliza por un lado la integral de la velocidad angular en el eje “z” y por otro la proyección del vector del campo magnético medido sobre el plano horizontal, medidas que son combinadas en el filtro de Kalman. El dato obtenido del magnetómetro no distingue entre giros de  $360^\circ$ , limitando el valor al rango  $[-180^\circ - 180^\circ]$ . Es necesario entonces realizar un reajuste de la medida deducida del campo magnético para lograr la continuidad en el ángulo estimado.

TODO: FOTO



Figura 16.2: Dispositivo de prueba de  $\theta$

## **Anexos**

---

---

## ANEXO A

---

### ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DE LA MONGOOSE 9DOF IMU

#### A.1. Acelerómetro

Rango	$\pm 16g$
Resolución	10-13 bits (siempre 4mg/LSB)
Datos nuevos	0.1 a 800 Hz
Ruído XY	0.75@100Hz - 3@3200Hz LSB-rms
Ruído Z	1.1@100Hz - 4.5@3200Hz LSB-rms
Cross Axis	$\pm 1\%$

#### NOTAS:

- Output data rate puede llegar a 3200Hz, pero usando SPI. Con I<sup>2</sup>C a 400kHz solamente se puede llegar a 800Hz.
- Ancho de banda = *Datos\_nuevos*/2

#### A.2. Giróscopo

Rango	$\pm 2000^\circ/s$
Resolución	14.475 LSB/(°/s)
Datos nuevos	3.9Hz a 8kHz
Ancho de banda	256Hz
Cross Axis	$\pm 2\%$
Ruído	0.38 °/s-rms

#### NOTAS:

- Datos nuevos: La muestras pasan por un LPF digital de 256 a 5Hz, esto limita el ancho de banda.

### A.3. Magnetómetro

Rango	$\pm 8$ Ga
Resolución	5mGa@GN=2
Datos nuevos	0.75 - 75Hz
Ancho de banda	37Hz
Cross Axis	$\pm 0.2\%$ FS/Ga
Ruído	-

#### NOTAS:

- El rango queda determinado por la ganancia, que se configura con 3 bits:

GN	0	1	2	3	4	5	6	7
Rango (Ga)	$\pm 0.88$	$\pm 1.3$	$\pm 1.9$	$\pm 2.5$	$\pm 4.0$	$\pm 4.7$	$\pm 5.6$	$\pm 8.1$

- Se puede configurar para que el dato que muestre sea el promedio de hasta 8 muestras.

### A.4. Sensor de presión

Rango	300 a 1100 hPa (9000 a -500m)
Resolución	1Pa
Precisión. Abs.	typ/max $\pm 1.0/\pm 3.0$ hPa
Precisión Rel.	$\pm 0.5$ hPa
Datos nuevos	typ/max: 3/4.5ms - 17/25ms
Ancho de banda	333/40Hz
Ruído (hPa)	0.06 - 0.03
Ruído (m)	0.5 - 0.25

#### NOTAS:

- El rango, en altura, se refiere a la altura sobre el nivel del mar.
- El modo de operación (cantidad de muestras promediadas) afecta:
  - El tiempo de conversión.
  - El ancho de banda.
  - La resolución.
  - El ruído.
- Es necesario hacer una medida de temperatura de vez en cuando (1Hz) para mejorar la lectura del sensor de presión.

### A.5. Sensor de temperatura

Rango	0 a 65 °C
Resolución	0.1 °C
Precisión Abs.	typ/max $\pm 1.0/\pm 2.0$ °C
Datos nuevos	typ/max: 3/4.5ms
Ruído	-

#### NOTAS:

- El sensor de temperatura está incorporado al sensor de presión.

---

---

## ANEXO B

---

### CÁLCULO DE LOS TENSORES

#### B.1. Magnitudes a considerar

Según el modelo considerado explicado en 3 dividiremos el sistema en una esfera central, cuatro cilindros y cuatro varillas (también cilíndricas). Las magnitudes que debemos conocer para calcular los momentos de inercia del sistema son:

- Radio de la esfera central  $R = 8 \times 10^{-2}m$
- Largo de las varillas  $L = 26 \times 10^{-2}m$
- Radio de los motores  $r = 1,65 \times 10^{-2}m$
- Altura de los motores  $h = 3,5 \times 10^{-2}m$

Además nos interesa conocer las distancias de cada uno de los elementos del sistema al centro de masa del cuadricóptero.

- Distancia entre el centro de masa de la varilla y el centro de masa del cuadricóptero  $d_v = 14 \times 10^{-2}m$
- Distancia del eje de los motores al centro de masa del cuadricóptero  $d_m = 0,29m$

Por último las masas de los elementos en cuestión son:

- Masa de la esfera central  $M_E = 1,037kg$
- Masa de las varillas  $M_v = 0,013kg$
- Masa de los motores  $M_m = 0,113kg$

## B.2. Tensor de inercia del sistema

El tensor de inercia del sistema puede calcularse como la suma de los tensores de inercia de los rígidos que lo componen. Se considera como fue expresado anteriormente el centro del cuadricóptero como una esfera maciza. El tensor de inercia de dicha esfera puede calcularse a partir de la definición misma de tensor de inercia, sin embargo por ser una forma geométrica de vasto uso en el campo de la mecánica su tensor de inercia se encuentra ya tabulado. Sucede lo mismo con las restantes formas geométricas que componen al sistema. Los tensores utilizados pueden obtenerse en ?? En el caso de la esfera se tiene que el tensor de inercia respecto de su centro de masa es:

$$\Pi_{G_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_E \begin{pmatrix} \frac{2R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R^2}{5} \end{pmatrix}$$

En este caso el centro de masa del sistema corresponde al centro de masa de la esfera a partir de ciertas suposiciones que se realizan sobre la simetría del sistema. Por dicho motivo podemos afirmar que  $\Pi_{G_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \Pi_{O'E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$ , siendo  $O'$  el centro de la esfera.

Por otra parte el tensor de inercia de una varilla, cuya longitud coincide con el versor  $\vec{i}_q$ , respecto a su centro de masa tiene la forma:

$$\Pi_{G_{Vx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}$$

Sin embargo resulta mucho más interesante obtener el tensor de inercia expresado respecto del centro de masa del sistema. Para realizar dicho cambio se utiliza el Teorema de Steiner. Dicho teorema afirma que:  $\Pi_Q = \Pi_G + J_Q^{M,G}$ , donde los términos de  $J_Q^{M,G}$  pueden calcularse como:  $(J_Q^{M,G})_{\alpha\beta} = M(G-Q)^2\delta_{\alpha\beta} - M(G-Q)_\alpha M(G-Q)_\beta$ . El término  $\delta_{\alpha\beta}$  es conocido como Delta de Kronecker. Su valor es uno si  $\alpha = \beta$  y cero si  $\alpha \neq \beta$ . En el caso en consideración dicha matriz resulta en:

$$J_{O'}^{M_{Vx},G} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{L}{2} + d_v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{L}{2} + d_v)^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el momento de inercia total de dicha varilla es:

$$\Pi_{O'Vx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 \end{pmatrix}$$

Análogamente, el tensor de inercia de una varilla cuya longitud se encuentra respecto de la dirección  $\vec{j}_q$  respecto del centro de masa del sistema es:

$$\Pi_{O'Vy}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 \end{pmatrix}$$

Sucede algo similar en lo que respecta a los motores. Tendremos un tensor de inercia para los motores que se encuentran sobre la dirección  $\vec{i}_q$  y otro para los

motores que se encuentran sobre la dirección  $\vec{j}_q$ . El momento de inercia de un cilindro en su centro de masa es:

$$\Pi_{G_M}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La entrada (3, 3) de la matriz de la ecuación B.1 la pasaremos a llamar  $I_{zmm}$

Por lo tanto el momento de inercia respecto del centro de masa del sistema para un cilindro que se encuentra en la dirección  $\vec{i}_q$  es:

$$\Pi_{O'M_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} + d_m^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + d_m^2 \end{pmatrix}$$

En el caso de un cilindro que se encuentra en la dirección  $\vec{j}_q$  se tiene que::

$$\Pi_{O'M_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} + d_m^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + d_m^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el tensor de inercia del sistema, se calcula como la suma de los tensores de inercia de las partes que lo componen:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \Pi_{O'E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'V_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'V_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'M_x}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'M_y}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$$

Dado que todos los tensores de inercia considerados hasta el momento son diagonales, podemos escribir el tensor de inercia del sistema como:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

### B.3. Resultados

En base al análisis realizado hasta el momento se tiene que:

$$I_{zmm} = 1,54 \times 10^{-5} \text{kgm}^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 2,32 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$$

$$I_{zz} = 4,37 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$$

---

## ANEXO C

---

# CÁLCULOS NECESARIOS PARA LA LINEALIZACIÓN DEL SISTEMA

Tal como se explica en el capítulo 13 se linealiza el MVE obtenido en 3, esto es, expresar el sistema no lineal bajo la forma:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \quad (\text{C.1})$$

Donde  $A(t)$  y  $B(t)$  son tales que  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$  y  $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$

### C.1. Linealización para cualquier trayectoria

Para una trayectoria genérica al linealizar el sistema se obtienen las matrices:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Las entradas de la matriz de C.2 representan matrices de  $3 \times 3$  mientras que las entradas de la matriz C.3 representan matrices de  $3 \times 4$ . Es importante conocer las entradas de las matrices anteriores, al menos en lo que respecta a las dependencias de cada una de ellas con las variables de estado.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} f_{A_{12_1}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_2}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_3}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_4}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_5}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_6}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_7}}(\psi, \varphi, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_8}}(\psi, \varphi, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} f_{A_{13_1}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_2}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_3}}(\psi, \varphi, \theta) \\ f_{A_{13_4}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_5}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_6}}(\psi, \varphi, \theta) \\ f_{A_{13_7}}(\varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi, \varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi, \varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} f_{A_{22_1}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & f_{A_{22_2}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 \\ f_{A_{22_4}}(\psi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 & 0 \\ f_{A_{22_7}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & f_{A_{22_8}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$A_{24} = \begin{pmatrix} 1 & f_{A_{24_2}}(\psi, \varphi) & f_{A_{24_3}}(\psi, \varphi) \\ 0 & f_{A_{24_5}}(\psi) & f_{A_{24_6}}(\psi) \\ 0 & f_{A_{24_8}}(\psi, \varphi) & f_{A_{24_9}}(\psi, \varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & g \cos \varphi & 0 \\ -g \cos \varphi \cos \psi & g \sin \varphi \sin \psi & 0 \\ g \cos \varphi \sin \psi & g \sin \varphi \cos \psi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{qz} & -\omega_{qy} \\ -\omega_{qz} & 0 & \omega_{qx} \\ \omega_{qy} & -\omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_{zzm}}{I_{xx}}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qz} & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qy} \\ \frac{I_{zzm}}{I_{yy}}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + \frac{-I_{xx} + I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qz} & \frac{-I_{xx} + I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{B_{31_9}}(\omega_1) & f_{B_{31_10}}(\omega_2) & f_{B_{31_11}}(\omega_3) & f_{B_{31_12}}(\omega_4) \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$B_{41} = \begin{pmatrix} 0 & f_{B_{41_2}}(\omega_2) & 0 & f_{B_{41_4}}(\omega_4) \\ f_{B_{41_5}}(\omega_1) & 0 & f_{B_{41_6}}(\omega_3) & 0 \\ f_{B_{41_9}}(\omega_1) & f_{B_{41_{10}}}(\omega_2) & f_{B_{41_{11}}}(\omega_3) & f_{B_{41_{11}}}(\omega_4) \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

## C.2. Linealización para la condición de hovering

Con las condiciones 13.6 y 13.7 obtenidas en el capítulo 13 se pueden obtener las matrices A y B en el caso particular de hovering. Además puede verificarse que todas las entradas de dichas matrices son constantes y que por lo tanto estamos frente a un sistema lineal invariante en el tiempo.

$$A_{hov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{hov_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{hov_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$B_{hov} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{hov_{31}} \\ B_{hov_{41}} \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

Donde  $Id$  es la matriz identidad y las matrices  $A_{hov_{13}}, A_{hov_{32}}, B_{hov_{31}}$  y  $A_{hov_{41}}$  son:

$$A_{hov_{13}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{hov_{32}} = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$B_{hov_{31}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

$$B_{hov_{41}} = \begin{pmatrix} 0 & 2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 & -2,9 \times 10^{-1} s^{-2} \\ -2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 & 2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 \\ 5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & -5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & 5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & -5,0 \times 10^{-2} s^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Dado que fue impuesto que  $\theta$  fuese constante para este movimiento, tenemos efectivamente un sistema lineal invariante en el tiempo.

### C.3. Vuelo en linea recta a velocidad constante

Las matrices A y B obtenidas para esta situación de vuelo son:

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 0 & A_{rec12} & A_{rec13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{rec32} & 0 & A_{rec34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

$$B_{rec} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{rec31} \\ B_{rec41} \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

Donde  $A_{rec13} = A_{hov13}$ ,  $A_{rec32} = A_{hov32}$ ,  $B_{rec} = B_{hov}$  y

$$A_{rec12} = \begin{pmatrix} v_{qz} \sin \theta & v_{qz} \cos \theta & -v_{qy} \cos \theta - v_{qx} \sin \theta \\ -v_{qz} \cos \theta & v_{qz} \sin \theta & v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ v_{qy} & -v_{qz} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{hov32} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

### C.4. Vuelo a velocidad angular constante

Luego de las modificaciones introducidas en el MVE en la sección 13 se procede a linealizar el sistema obtenido.

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{cir11} & 0 & Id & A_{cir14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

Las matrices obtenidas son todas idénticas a las obtenidas en la linealización del MVE original a excepción de las matrices  $A_{cir11}$  y  $A_{cir14}$ . Estas tienen la forma:

$$A_{circ11} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{qz} & \omega_{qy} \\ \omega_{qz} & 0 & -\omega_{qx} \\ omega_{qy} & \omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{cir14} = \begin{pmatrix} 0 & z_z & -y_q \\ -z_q & 0 & x_q \\ y_q & -x_q & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24})$$

---

## ANEXO D

---

### GPS - INFORMACIÓN ADICIONAL

#### D.1. Geometría: DOP - *Dilution of precision*

El método que utiliza el GPS para determinar su ubicación consiste básicamente en:

1. Determinar la distancia  $r_i$  a cada satélite  $S_i$ , cuya posición es  $P_i$ .
2. Repetir el paso anterior para cada satélite disponible.
3. Intersecciar las “cáscaras” de las esferas de centros  $P_i$  y radios  $r_i$ .

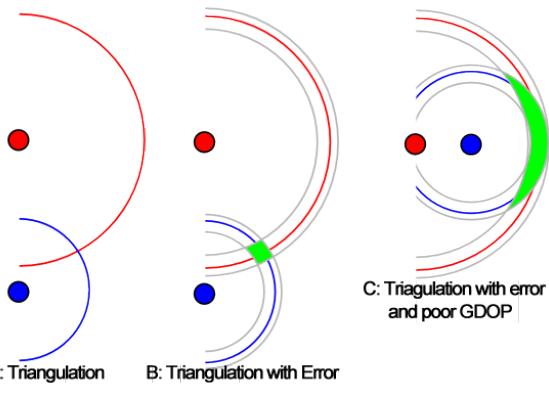


Figura D.1: DOP en 2 dimensiones.

Las “cáscaras” de las esferas no serán de ancho despreciable, ya que hay un cierta incertidumbre asociado a los datos. Esto implica que la intersección será un volumen, en lugar de un punto. La geometría de la distribución de los satélites determinará el tamaño de este volumen, y por lo tanto la incertidumbre en la determinación de la posición. En la figura ??e muestra un ejemplo ilustrativo, en dos dimensiones.

El DOP es el cociente entre la exactitud de la ubicación y exactitud de la medida[6]:

$$\sigma = \sigma_o \cdot DOP$$

donde

- $\sigma$ : Exactitud de la medida.
- $\sigma_o$ : Exactitud de la posición.

Básicamente, el DOP representa la sensibilidad de localización frente a errores en las medidas, o sea, cuanto te vas a perder si te llegó una medida equivocada. Cuanto más bajo sea el DOP, mejor. En la tabla D.1 se muestra como interpretar valores típicos[8].

1 1-2	Ideal Excelente	Máxima exactitud posible. La exactitud a este nivel se considera suficiente para casi cualquier aplicación.
2-5	Bueno	Este nivel marca el mínimo apropiado para navegación.
5-10	Moderado	Las medidas se pueden utilizar, pero es recomendado buscar un lugar con cielo más abierto.
10-20	Regular	Solo se deben usar los datos para estimaciones de muy poca precisión.
>20	Malo	A este nivel, las exactitud de las medidas puede tener un error de hasta 300m, deben descartarse.

Cuadro D.1: Interpretación de los valores de DOP.

El GPS envía información sobre:

- *HDOP* - DOP horizontal:

$$HDOP = \sqrt{\sigma_{east}^2 + \sigma_{north}^2} \quad (\text{D.1})$$

- *VDOP* - DOP vertical:

$$VDOP = \sqrt{\sigma_{altitud}^2} \quad (\text{D.2})$$

- *PDOP* - DOP de la posición:

$$PDOP = \sqrt{\sigma_{east}^2 + \sigma_{north}^2 + \sigma_{altitud}^2} \quad (\text{D.3})$$

Esta información se puede utilizar en el algoritmo de control, para ponderar los datos provenientes del GPS.

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, chapter Kalman Filters. 2011.
- [2] Bor-Chin Chang Chirag Jagadish. Diversified redundancy in the measurement of euler angles using accelerometers and magnetometers, 2007.
- [3] Peter Händel Isaac Skog. Calibration of a mems inertial measurment unit, 2006.
- [4] Steven M. Kay. Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory - volume 1, 2011.
- [5] R. Robotin C. Marcu S. Herle Z. Szekely L. Tamás, Gh. Lazea. State estimation based on kalman filtering techniques in navigation, 2008.
- [6] Satellite Navigation and Positioning Lab UNSW. The impact of satellite geometry, 1999.
- [7] Portland State Aerospace Society. A quick derivation relating altitude to air pressure, 2004.
- [8] Wikipedia. Meaning of dop values, 2012.
- [9] He Zhao and Zheyao Wang. Motion measurement using inertial sensors, ultra-sonic sensors, and magnetometers with extended kalman filter for data fusion, 2011.