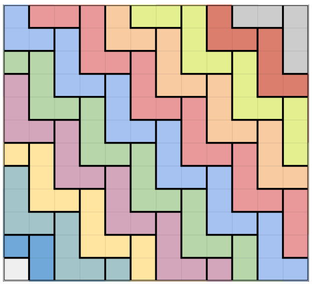
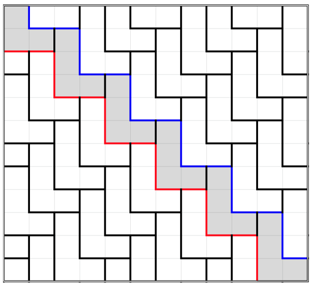
Problema Pavare Infinita

Fișier de intrare	`stdin`
Fișier de ieșire	`stdout`

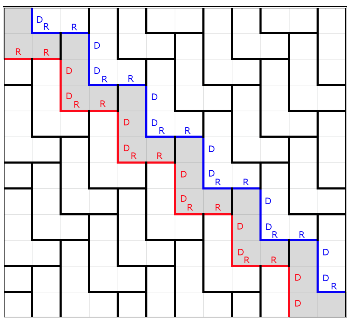
Începem prin a face niște observații despre pavările infinite. Considerați două dale adiacente A și B (care au cel puțin un segment unitar comun). Fie v vectorul de translație dintre cele două ($B = A + v$). Folosim această translație ca să determinăm “fâșia” care conține dalele A și B. Formal, fâșia este mulțimea de celule $S = \{A + v \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dalele consecutive din fâșie sunt adiacente, așa că fâșia este conexă și împarte planul infinit în două părți. Următoarea imagine reprezintă grafic împărțirea planului în fâșii. Din păcate însă, nu toate fâșiile au această proprietate.



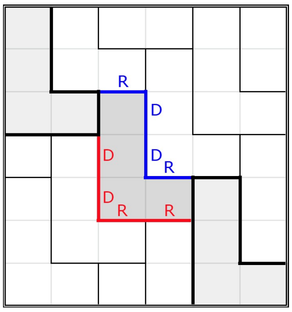
Fâșia împarte planul în două părți și este localizată între cele două. Asta înseamnă că două margini infinită există. O pavare a planului folosind aceste fâșii ar însemna că există o translație u astfel încât $\mathbb{R}^2 = \{S + u \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Această translație u se aplică și celor două margini, Pentru că marginea dreaptă (albastru) a unei fâșii este marginea stângă (roșu) a fâșiei precedente. Așadar, translația u exișstă doar atunci când cele două margini sunt identice.



Alegem un punct laticeal de pe margine și traversăm marginea, notând la fiecare pas ‘U’, ‘D’, ‘L’ sau ‘R’. De asemenea, pentru că există două direcții în care putem parcurge marginea, pentru una dintre ele interschimbăm ‘U’ cu ‘D’, ‘D’ cu ‘U’, ‘L’ cu ‘R’ și ‘R’ cu ‘L’, apoi inversăm direcția și le concatenăm. Acest șir de caractere nu depinde de punctul de plecare și determină marginea în mod unic.



Tot ce rămâne de făcut este să comparăm cele două șiruri de caractere infinite. Le vom folosi periodicitatea pentru a le reduce la șiruri de caractere finite. Considerăm 3 dale consecutive A, B și C din fâșie, apoi găsim cele două subsecvențe din margini determinată de dala B. Cele două șiruri finite reprezintă perioada.



În acest exemplu, avem două șiruri: unul de perioadă "RDDR" și unul de perioadă "DDRR". Cele două șiruri generate de aceste perioade sunt egale. Putem verifica asta comparând prima perioadă cu toate permutările ciclice celei de a doua perioade:

$$\text{“RDDR”} \neq \text{“DDRR”}$$

$$\text{“RDDR”} \neq \text{“DRRD”}$$

$$\text{“RDDR”} \neq \text{“RRDD”}$$

$$\text{“RDDR”} = \text{“RDDR”}$$

Totuși, ce facem dacă lungimile celor două perioade sunt diferite? Poate fi demonstrat că în contextul acestei probleme, în acest caz pavarea nu ar fi posibilă.

Iată întreaga soluție pe pași:

1. Iterează prin toate modurile de a pune două dale una lângă cealaltă (sunt $O(n^2)$ moduri);
2. Pentru fiecare mod posibil de a pune dalele A și B, generează a treia dală C folosind aceeași translație.
3. Determină segmentele unitare a dalei B care nu ating A sau C, apoi traversează cele două margini, formând totodată perioada (dacă există mai mult de 2 margini, atunci fâșia conține găuri);
4. Dacă perioadele au lungimi diferite, această translație nu funcționează. Altfel, compară toate permutările circulare a primei perioade cu a doua perioadă (folosind rolling hashes sau KMP). Sunt $O(n)$ permutări circulare.

Pentru a optimiza această soluție, reducem numărul de verificări ce trebuie făcute la $O(n)$.

Alegem un anumit segment unitar al unei anumite celule ca fiind marcat. Evident, sunt maxim $O(n)$ moduri de a translata dala astfel încât acest segment să fie între dala originală și dala translatată, dar asta nu determină toate modurile în care putem pune două dale una lângă cealaltă.

Considerați o pavare a planului și o anumită dală din pavare. Există o dală unică care atinge dala noastră prin segmentul marcat (și posibil altele), așa că determinăm translația v dintre această dală și dala originală. Am demonstrat că dacă o soluție există, atunci căutarea mai eficientă din paragraful anterior este suficientă.

Așadar, pentru o complexitate timp totală de $O(n^2)$ vom proceda în felul următor. La pasul 1, iterăm prin toate segmentele ale marginii dalei care au aceeași orientare cu segmentul marcat (în sensul de orizontală sau verticală). Apoi, considerăm translația v dintre acest segment și segmentul marcat și aplicăm verificarea (întâi asigurându-ne că dalele A și $B = A + v$ nu se intersectează).

Complexitate timp: $O(n^2)$ sau $O(n^2 \log n)$.