

# Problemas de Valor de Contorno

Rodrigo Dal Ri (00244936)

ENG04010 – Teoria Eletromagnética e Ondas – Departamento de Engenharia Elétrica  
Escola de Engenharia - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Correio eletrônico: rodrigo.dalri@inf.ufrgs.br

**Resumo.** O objetivo principal deste trabalho foi implementar o método dos elementos finitos (FDM) em um software matemático, MATLAB, de modo a visualizar o potencial eletrostático e as linhas de campo de cada um dos problemas e compara-los com a resolução analítica se possível.

**Palavras chave:** FDM, Matlab, Potencial Eletrostático, Campo Elétrico.

## Introdução

Neste trabalho foi implementado o método dos elementos finitos, FDM, para calcular numericamente o potencial eletrostático e as linhas de campo em cada um dos três problemas abordados. Também foi calculado uma solução analítica para o problema um e para o problema dois, afim de comparar os resultados obtidos. As soluções analíticas estão anexadas ao fim deste relatório.

## Apresentação do problema

Três problemas foram abordados neste trabalho:

Problema 1, considera-se um capacitor de placas plano-paralelas quadradas com uma largura de 10mm, espaçados de 100µm. A resolução analítica foi feita sob a aproximação para um capacitor infinito, e numericamente foram obtidos o Campo Elétrico e a Distribuição de Potencial.

Problema 2, considera-se um cabo coaxial com condutor interno de raio  $a = 1\text{mm}$ , maciço e um condutor externo de raio  $b = 3\text{mm}$ , casca, separados por um dielétrico com  $\epsilon = 4\epsilon_0$ , o condutor interno possui potencial de 5 V, enquanto que o condutor externo está aterrado. Também considera-se que esse dielétrico possua comprimento  $L = 1\text{m}$  e uma densidade de cargas  $\rho = 4/r$ . Também foi feita a resolução analítica e numérica.

Problema 3, foi considerado um comb-drive tendo como dielétrico o ar, com uma diferença de potencial e 10V entre os eletrodos. Foi calculado numericamente o Campo Elétrico e Potencial em duas situações físicas diferentes.

## Metodologia

### Problema 1:

A *solução analítica* foi feita da seguinte forma:

Tomando o capacitor posicionado como na imagem abaixo percebe-se que, não há variação do

potencial nas direções x e z. Portanto a equação de Laplace se reduz a,  $(d^2V)/(dy^2) = 0$

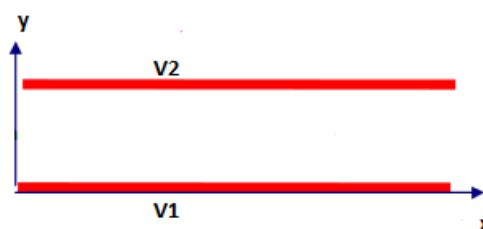


Figura 1: Capacitor Considerado

Para a segunda derivada de V em relação a y ser zero, a primeira derivada deve ser uma constante. Logo  $V = C1*y + C2$ . As condições de contorno, V1 e V2 foram utilizadas para o cálculo das duas constantes. O campo elétrico é o seguinte:  $E' = -\nabla V$

A *solução numérica* foi feita da seguinte forma:

Foram utilizadas duas superfícies quadradas modeladas com largura de 10mm cada, distantes uma da outra de 100 µm. O potencial da placa superior, da placa inferior e das bordas do quadrado foram os limites de Dirichlet fixados em  $V_0 = 0\text{V}$  e  $V_i = 10\text{V}$ .

Já que o potencial satisfaz a equação de Poisson, uma grade uniforme de pontos foi considerada nas direções x e y. A equação de Laplace foi resolvida numericamente usando FDM para potenciais, em todos os pontos de grade livres dentro do quadrado, variando os tamanhos da grade da largura d ao comprimento a, do capacitor

### Problema 2:

A *solução analítica* foi feita da seguinte forma:

Foi considerado o raio interno  $R_i$ , o raio externo  $R_e$  e o comprimento axial h, logo vemos que a solução analítica pode ser formulada em termos desses parâmetros e da variação do raio r.

Tendo  $V_0$  como o potencial elétrico na superfície cilíndrica interna de raio  $R_i$ , e tendo a superfície externa de raio  $R_e$  submetida a um

potencial de zero volt, a variação do potencial elétrico no espaço entre os condutores, em volts, pode ser calculada por,

$$V(r) = (V_o / (\ln(R_e R_i))) * \ln(R_e r)$$

E a variação do campo elétrico radial, também no espaço entre os condutores, pode ser calculada por,  $E(r) = (V_o / \ln(R_e R_i)) * (1/r)$

A *solução numérica* foi feita da seguinte forma:

Foram utilizadas duas superfícies cilíndricas modeladas utilizando-se dois segmentos de reta verticais de 1 m de altura, distantes 1,0 e 3,0 mm do eixo axial z.

Nos dois segmentos verticais da estrutura retangular, o valor do potencial elétrico é imposto como condição de contorno. Neste problema, os valores atribuídos aos potenciais das superfícies condutoras, interna e externa, são 5V e 0V.

### Problema 3:

A *solução numérica* foi feita da seguinte forma:

Para a realização do experimento foi considerado que entre os “dedos” o dielétrico é o ar, foi aplicada uma diferença de potencial de 10V entre os eletrodos.

Primeiro foi considerado que cada retângulo da imagem apresentada na descrição representa uma área de 5 um x 5 um, foi calculado numericamente o  $E(x,y)$  e  $V(x,y)$ . Logo após deslocamos o eletrodo móvel de 2,5um para a direita e recalculamos  $E(x,y)$  e  $V(x,y)$ .

## Resultados

### Problema 1:

O campo elétrico devido às placas é uniforme na região central entre as placas, e não-uniforme nas bordas das placas. Nas bordas as linhas de campo apresentam uma deformação para fora das placas, conhecida como efeito de borda. Este efeito pode ser diminuído fazendo com que a distância entre as placas seja muito menor em relação ao comprimento das placas. De fato, este efeito é ignorado na maioria das aplicações práticas supondo que as placas têm comprimento infinito.

O efeito de borda pode ser atenuados diminuindo a distância entre as placas. Para uma distância  $d$  muito pequena, em confronto com a extensão das placas o capacitor real se aproxima de ideal.

Aproximando-se do centro das placas, “dando um zoom”, percebe-se que as linhas de campo elétrico se tornam uniformes, logo as linhas equipotenciais entre as placas são retas, e a distribuição de potencial também se torna uniforme. Estes resultados se aproximam com os resultados

teóricos que obtemos fazendo simplificações no modelo. A resolução analítica se encontra anexada ao final deste relatório.

Como vemos neste gráfico abaixo fica evidente o efeito de borda quando analisamos o capacitor por completo.

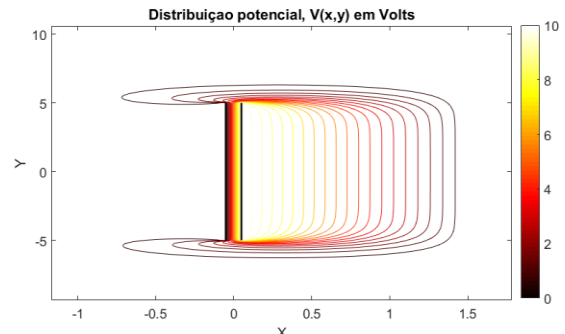


Figura 2: Distribuição do Potencial

Aproximando-se do capacitor percebe-se que a distribuição do potencial entre as placas é uniforme.

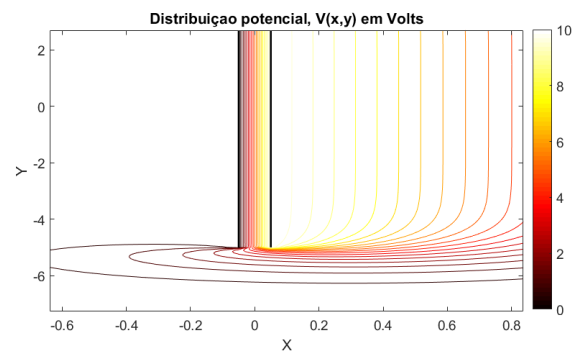


Figura 3: Distribuição do Potencial

Analisando as linhas de Campo Elétrico percebe-se uma distribuição uniforme.

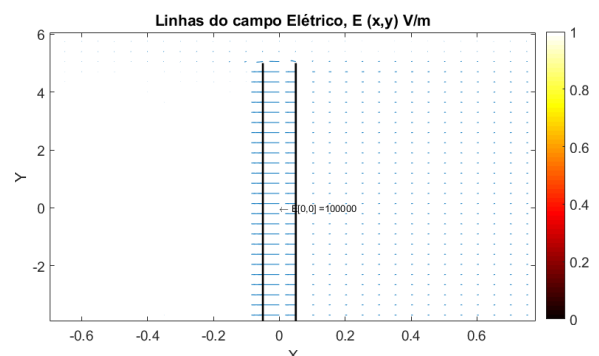


Figura 4: Linhas do Campo Elétrico

Dando um “zoom” no capacitor, na região das bordas, percebe-se uma deformação já esperada, como vemos no gráfico abaixo.

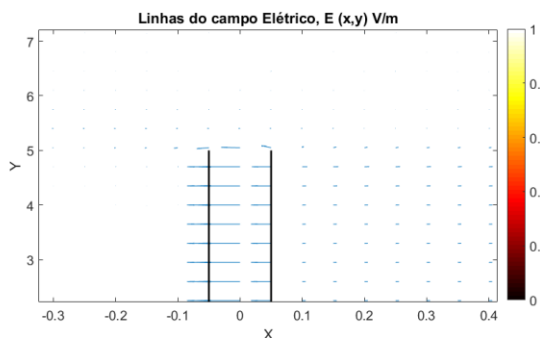


Figura 5: Linhas de Campo Elétrico

## Problema 2:

Para solucionar problemas que envolvem fronteiras cilíndricas se torna mais fácil resolver situações onde o comprimento axial é suficientemente grande em relação ao raio. Neste caso, os potenciais e campos da linha coaxial são considerados aproximadamente independentes em relação ao comprimento  $z$ .

Se a estrutura também apresenta simetria circular, as distribuições de potenciais e de campo elétrico não apresentam variações na direção circunferencial, e podem ser expressas em função da variação do raio. Essas distribuições podem ser vistas através das imagens geradas, mostradas abaixo.

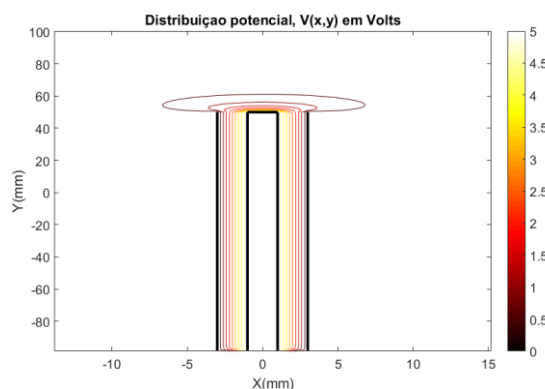


Figura 6: Distribuição Potencial

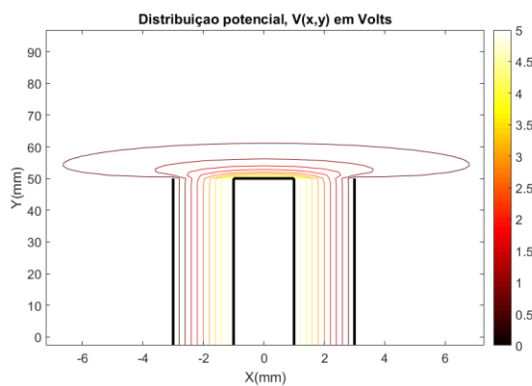


Figura 7: Distribuição Potencial

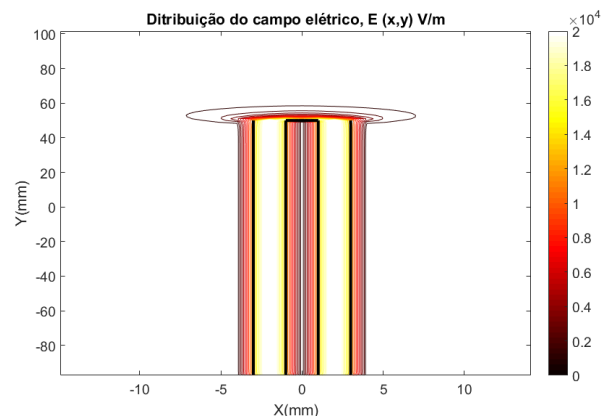


Figura 8: Distribuição do Campo Elétrico

Nas ilustrações abaixo, observa-se que, ao longo de quase toda extensão do cabo coaxial, a distribuição do campo elétrico é homogênea, com o campo presente no espaço entre as superfícies condutoras.

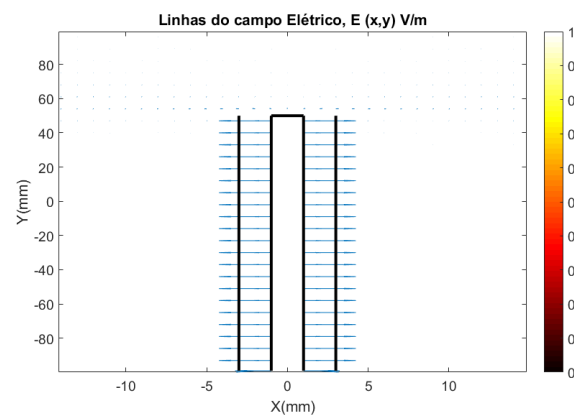


Figura 9: Linhas do Campo Elétrico

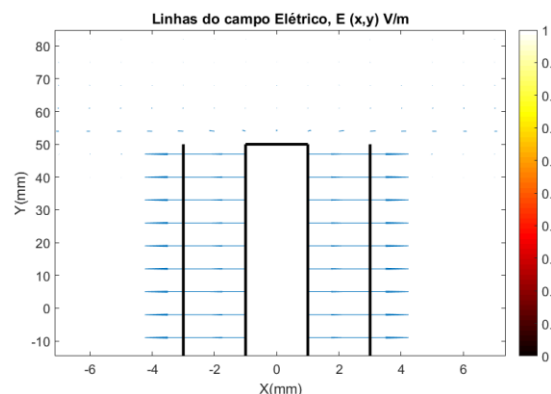


Figura 10: Linhas do Campo Elétrico

A distribuição do campo começa a se tornar não homogênea a uns poucos centímetros da borda superior.

Os campos elétricos mais intensos ocorrem na borda interna e em suas imediações e trata-se da região mais suscetível à ocorrência de descargas elétricas.

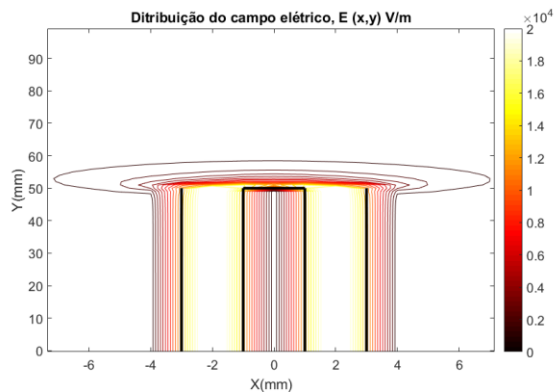


Figura 11: Distribuição do Campo Elétrico

Nos gráficos abaixo vemos um corte transversal do cabo coaxial, onde vemos a distribuição do potencial e do campo elétrico.

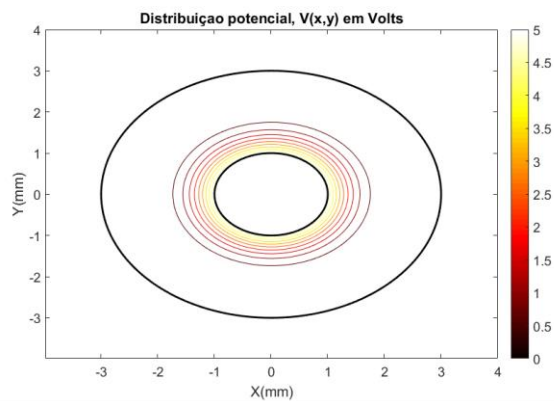


Figura 12: Distribuição do Potencial

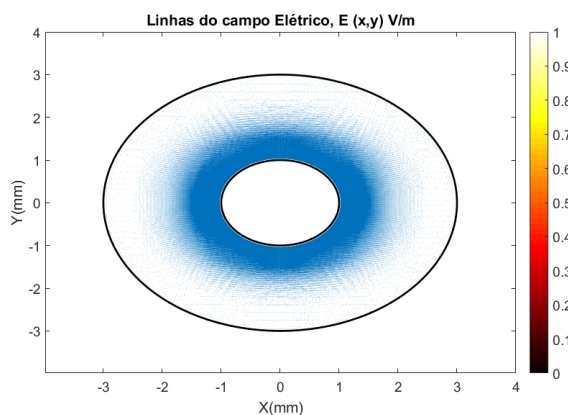


Figura 13: Distribuição do Campo Elétrico

### Problema 3:

Os “comb-drivers” de pente consistem em duas estruturas de “dedos” interligadas, onde uma é um pente é fixo e a outra está conectada a uma mola.

A aplicação de uma diferença de tensão entre as estruturas do pente resultará em uma deflexão da estrutura do pente móvel causada por forças eletrostáticas. Os “comb-drivers” são utilizados como ressonadores, filtros eletromecânicos, persianas ópticas, microgrippers e voltímetros.

Eles também são usados como elemento de direção em vibro motores e engrenagens micro mecânicas.

As forças eletrostáticas aumentam com a diminuição do espaçamento das fendas e com um aumento do número de “dedos” do pente.

Primeiro veremos as imagens onde os eletrodos estão separados por uma área de 5µm x 5µm.

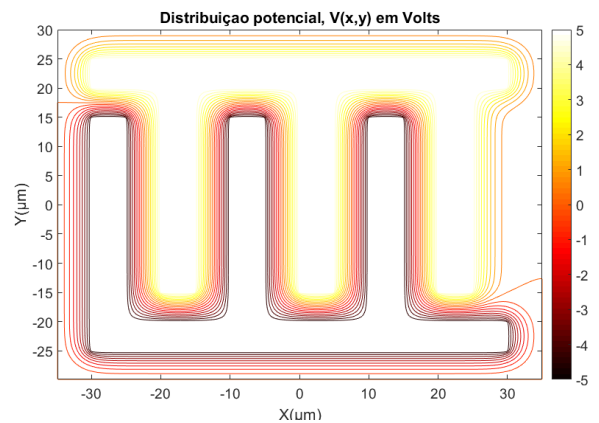


Figura 14: Distribuição Potencial

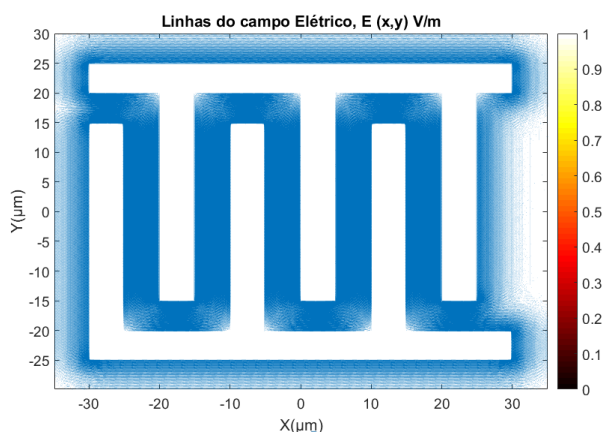


Figura 15: Linhas do Campo Elétrico

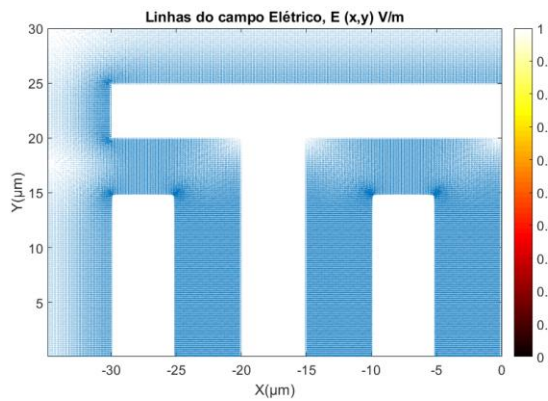


Figura 16: Linhas do Campo Elétrico

Nestes gráficos ficam nítidas as deformações da distribuição e do campo elétrico causada pelas bordas dos eletrodos.

A seguir vemos os mesmos gráficos para a situação onde os eletrodos estão mais aproximados, e fica evidente um aumento da intensidade do campo e das deformações.

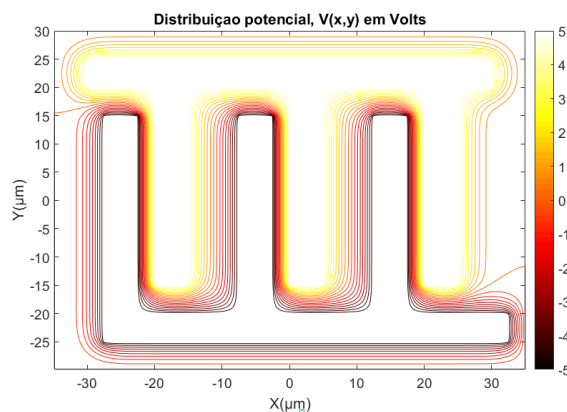


Figura 17: Distribuição Potencial

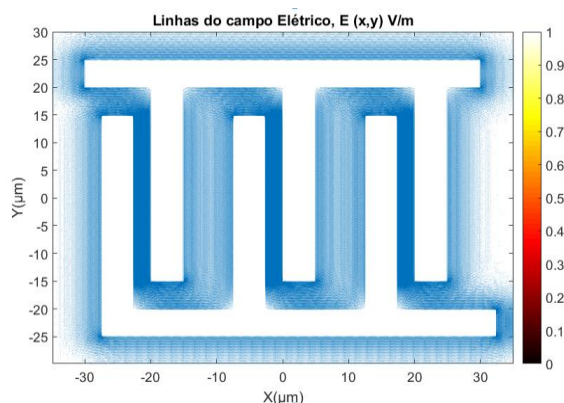


Figura 18: Linhas do Campo Elétrico

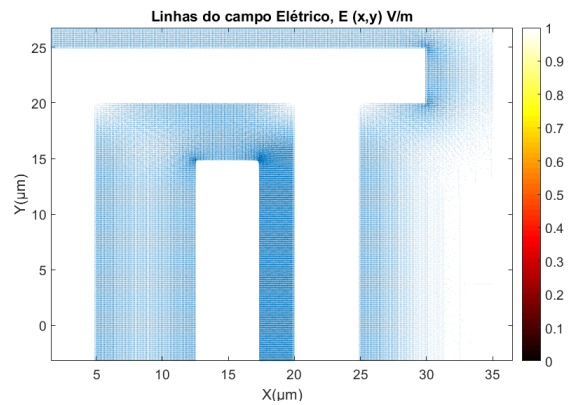


Figura 19: Linhas do Campo Elétrico

## Conclusão

Fica evidente que as possibilidades de soluções numéricas nos trazem uma gama absurda de problemas possíveis de analisar, que são extremamente complicados de resolver analiticamente, mas os resultados obtidos numericamente quando comparados ao modelo analítico são sempre coerentes, quando desprezamos alguns efeitos, como por exemplo efeitos de borda.

Também é uma vantagem da solução numérica, que podemos visualizar os resultados obtidos através de gráficos, o que torna o entendimento dos resultados mais fácil.

## Referências bibliográficas

**Rob Legtenberg, A W Groeneveld and M Elwenspoek.** *Comb-drive actuators for large displacements*. 1996.

**Chao-Min Chang, Shao-Yu Wang, Rongshun Chen, J. Andrew Yeh and Max T. Hou.** *A Comb Drive Actuator Driven by Capacitively-Coupled Power*. 2012.

**Else Gallagher and Walied Moussa.** *A Study of the Effect of the Fringe Fields on the Electrostatic Force in Vertical Comb Drives*. 2014.

**D.A. Lowther and P.P. Silvester.** *Computer-Aided Design in Magnetics*. 1986.

**Luís Alberto Pereira.** *Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Eletromagnetismo*.

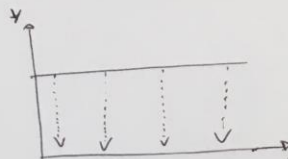
**Jack Chessa.** *Programing the Finite Element Method with Matlab*. 2002.

**James R. Nagel.** *Solving the Generalized Poisson Equation Using the Finite-Difference Method (FDM)*. 2012



## Anexos

①



$\eta = 100 \text{ n/m}$   
 $L = 10 \text{ mm}$

$\rho_v = 0 \rightarrow \text{Laplace} \quad \nabla^2 V = 0$

$V(x, 0) = V_0$   
 $V(x, h) = V_1$

$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$   
 $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$   
 $V = A_y + B$


$Ah + B = V_1$   
 $B = V_0$   
 $A = \frac{V_1 - V_0}{h}$   
 $V(y) = \left( \frac{V_1 - V_0}{h} \right) y + V_0$

$\vec{E} = -\nabla V$   
 $\vec{E} = -\frac{(V_1 - V_0)}{h} \hat{a}_y$

$V_0 = 0 \text{ V}$   
 $V_1 = 10 \text{ V}$

$V(y) = \frac{10 - 0}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot y + 0 = 10^5 y$   
 $V(y) = 10^5 y$   
 $\vec{E} = -10^5 \hat{a}_y$

②



$V_0 = 5 \text{ V}$   
 $V_1 = 0 \text{ V}$   
 $\rho_v = \frac{4}{r}$   
 $\epsilon_r = 4$

$V(r, \phi)$  for  $a < r < b$   
 $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$

$\nabla^2 V(r) = \frac{-1}{\epsilon} \cdot \rho(r) \Rightarrow \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{-1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{4}{r} \Rightarrow r \cdot \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{4}{4 \epsilon_0} \left( r \cdot \frac{1}{r} \right) dr$

$r \cdot \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{\epsilon_0} (r + c) \Rightarrow V = \frac{-1}{\epsilon_0} \int \frac{1}{r} (r + c) dr \Rightarrow V = \frac{-1}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{c}{r} \right) dr$

$V = -\frac{1}{\epsilon_0} r - \frac{1}{\epsilon_0} C \cdot \ln(r) - \frac{1}{\epsilon_0} D$ ,  $V(a) = V_0$ ,  $V(b) = V_1$

$-a - C \ln(a) - D = \epsilon_0 \cdot V_0 \Rightarrow -10^3 \cdot C \ln(10^{-3}) - D = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-3} \cdot 5$   
 $-b - C \ln(b) - D = \epsilon_0 \cdot V_1 \Rightarrow -3 \cdot 10^{-3} - C \ln(3 \cdot 10^{-3}) - D = 0$