

Devoir Maison d'Optimisation: Clustering

Romain Pascual et Adam Hotait

22 Janvier 2019

Présentation du problème

On considère l'île de Man. Le fichier proposé décrit son réseau routier sous forme de graphe orienté, dont les sommets sont les intersections et les arcs des routes entre deux intersections, pondérés par le temps de trajet. Afin de simplifier le projet, nous supposons que les routes sont navigables dans les deux sens et on se restreint aux sommets dont les coordonnées GPS sont entre 54.0790 et 54.1549 pour la longitude et entre -5 et -4.7364 pour la latitude. On obtient ainsi un graph composé de 345 sommets. Il décrit une métrique sur l'espace des sommets V telle que la distance $d_{u,v}$ entre les sommets u et v décrit la longueur du plus court chemin entre ces deux sommets. Le filtrage utilisé sépare le graphe en différentes composantes connexes. Ainsi on définit arbitrairement $1e9$ comme la distance entre deux sommets non connectés. Cette valeur est très grande devant toutes les distances considérées et peut donc être considérée comme ∞ . Les distances ont été précalculées et sont donc fournies.

Il s'agit de résoudre trois problèmes : le problème k -médiane, le problème k -moyenne et le problème k -centre. Il s'agit de trois problèmes de clustering pour lesquels on cherche k sommets $\{c_1, \dots, c_k\}$ qui minimize une fonction cible liée aux distances entre les points et le centre de leur cluster.

k -médiane On cherche la liste des k sommets qui minimise :

$$k_median(G) = \sum_{v \in V} \min_i d_{c_i, v}$$

.

k -moyenne On cherche la liste des k sommets qui minimise :

$$k_mean(G) = \sum_{v \in V} \min_i d_{c_i, v}^2$$

.

k -centre On cherche la liste des k sommets qui minimise :

$$k_center(G) = \max_{v \in V} \min_i d_{c_i, v}$$

.

Résolution

Etant donné que les trois problèmes sont essentiellement identiques, la formulation sous la forme d'un programme linéaire est la même, seule la fonction à minimiser diffère.

Tout d'abord, reformulons le problème linéaire. Sans perte de généralité, on s'intéresse à la fonction de coût du problème k -médiane. On dispose en entrée d'un graphe $G = (V, E)$ non orienté, $d : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ et on cherche :

$$\min \sum_{e=uv \in E} d(e) * x(e) * y(v)$$

tel que

$$\sum_v y(v) \leq k \tag{1}$$

$$x(e) \leq y(v) \quad \forall e = uv \in E \tag{2}$$

$$\sum_{c \in V} x(uc) = 1 \quad \forall v \in V \tag{3}$$

Dans une telle modélisation, x et y sont des variables de décisions. Ainsi $y(v) = 1$ si v est un centre d'un cluster et $x(uv) = 1$ si u appartient au cluster défini par v , autrement dit v est le centre le plus proche de u .

Alors la première contrainte signifie qu'il y a au plus k clusters, la deuxième signifie que u ne peut être dans le cluster de v que si v est un centre, et la dernière assure que chaque sommet est effectivement dans un cluster. Comme on cherche à minimiser les fonctions objectifs dans chacun des cas, chaque point est bien ajouté au cluster correspondant au centre le plus proche.

Les codes des différents problèmes sont respectivement présents dans les fichiers :

- `kmedian.mod`,
- `kmean.mod`,
- `kcenter.mod`.

Resultats

Voici un tableau récapitulatif des résultats obtenus pour les trois problèmes:

Problème	Nombre d'itération du simplexe	Objectif	Centres
k -median	22771	1.147e7	283492107, 283514108, 283517728, 283523670, 456478782, 746331291
k -mean	21417	5.268e11	283492107, 283502786, 283504611, 283514108, 283517728, 283523670
k -center	220020	91044	283480267, 283484091, 283484618, 283508716, 283513388, 283520425

Analyse des résultats Il est à noter que pour le problème k -centre, la non-linéarité du max nécessite une approche légèrement différente. Au lieu de chercher à minimiser

$$\max_{v \in V} \min_i d_{c_i, v},$$

on crée une variable d pour laquelle on impose la contrainte

$$\forall v \in V \min_i d_{c_i, v} \leq d.$$

On minimise alors d . Cela agrandi l'espace de recherche, on obtient donc un nombre d'itération du simplexe $\simeq 10$ fois supérieur. Par ailleurs, le nombre d'itération du simplexe est accompagné de "1 simplex iteration for intbasis", ce qui veut dire qu'une itération supplémentaire a été nécessaire pour obtenir une solution point extrême et donc une solution entière.

On remarquera que les solutions aux problèmes k -médiane et k -moyennne possèdent 3 centres en commun : 283492107, 283517728 et 283523670 mais ne partagent aucun centres communs avec le problème k -centre. En effet, les deux premiers problèmes s'intéressent à une minimisation globale à l'intérieur d'un cluster puisque que l'on somme les contributions de tous les points, tandis que le troisième problème ne s'intéresse qu'à la contribution des points extrémaux.