Introduction to Progressively Finite Games

Romeo Rizzi

29 maggio 2020

Progressively finite games

Il presente documento tratta di una particolare classe di giochi combinatori a due giocatori, comunemente chiamati progressively finite games. Ai fini della nostra analisi, definiremo un *progressively finite game* come un qualsiasi gioco che possa essere visualizzato come un grafo diretto aciclico e finito, nel quale i giocatori percorrono a turno un arco del grafo. Se il giocatore che deve muovere non trova archi uscenti dal nodo corrente, perderà la partita. Nel corso dell'analisi, si supporrà che entrambi i giocatori scelgano la migliore mossa a loro disposizione.

Esempio. Due giocatori, A e B, avendo a disposizione solo monete da 1 e da 2 Euro, dovranno a turno metterne una in un piatto, inizialmente vuoto, che può contenere al più 10 Euro. Quando questo sarà pieno, il gioco terminerà con la vittoria del giocatore che ha messo l'ultima moneta.

Dopo aver giocato diverse partite, ci si renderà conto che, nell'ipotesi di gioco ottimo, il giocatore che dà inizio al gioco vince sempre. Questo fatto è maggiormente visibile modellando il gioco con un grafo orientato, in modo tale che ogni suo vertice corrisponda ad una posizione possibile del gioco, e ogni suo arco rappresenti una possibile mossa da una posizione ad un'altra. Il grafo del gioco considerato è quello in Figura .

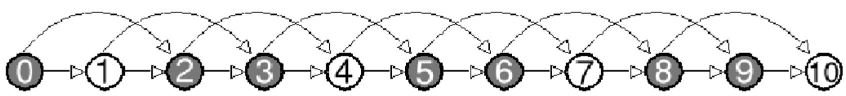

Figura 1: *Gioco delle monete.*

La strategia vincente (in questo caso unica) consiste nel porsi sempre in un nodo con etichetta x tale che $10 - x \equiv 0 \mod 3$. Il giocatore che arriva sull'ultimo vertice del grafo, quello con il numero 10, vince la partita, poiché tale vertice è un pozzo e perciò l'altro giocatore non ha più alcuna mossa a disposizione.

Se *pozzo* ti è un termine nuovo, e se non avevi mai incotrato proprietà dei grafi diretti e aciclici quali, ad esempio, la presenza necessaria di pozzi, ti suggeriamo di esplorare l'Appendice .1.1, prima di avventurarti nella teoria dei progressively finite games. Nell'appendice potrai trovare anche alcune definizioni, che ti saranno utili per comprendere meglio questa classe di giochi e confrontarti con la terminologia da noi adottata.

Il nostro scopo è individuare una strategia vincente, ossia una serie di mosse tali da portare un giocatore alla vittoria comunque giochi l'avversario. Ovviamente, solo uno dei due giocatori potrà avere una strategia vincente.

Esercizio. L' "ovviamente", nella frase di cui sopra, nasconde delle insidie. Infatti, per dimostrare ciò in modo informale, dovremmo per prima cosa fornire una nozione precisa di strategia vincente. Prova a fornirne una tu e poi controlla se essa corrisponde con quella da noi proposta qui sotto.

Definizione Informale (Strategia vincente)**.** Dire che un giocatore ha una strategia vincente significa affermare che, giocando in modo ottimo, egli è sempre in grado di aggiudicarsi la partita, trovando una contromossa per ogni possibile mossa dell'avversario.

Si noti ora come, in base alla nostra nozione "informale" di cui sopra, il fatto che il giocatore di turno possieda o meno una strategia vincente **non** dipende da come il giocatore conduca la partita (abbiamo fatto l'ipotesi di gioco ottimo), bensì dipende solamente dalla posizione (nodo del grafo) in cui ci si trova.

I nodi del grafo sono pertanto partizionati in due insiemi:

- L'insieme dei nodi in cui esiste una strategia vincente (nodi chi-tocca-vince);
- L'insieme dei nodi in cui non esiste alcuna strategia vincente (nodi chi-tocca-perde).

Definizione Formale (Strategia vincente)**.** Una data posizione (nodo del grafo) ammette una strategia vincente se offre una mossa che conduce ad una posizione "chi-tocca-perde". Una posizione è di tipo "chi-tocca-perde" se non ammette una strategia vincente.

Dubbio. Siete convinti della validità della definizione di cui sopra? Un pericolo è evidente: si è definito il concetto di strategia vincente in termini di posizioni "chi-tocca-perde", e viceversa. Il classico cane che si morde la coda! Questa situazione è rappresentata con un ciclo diretto in Figura .

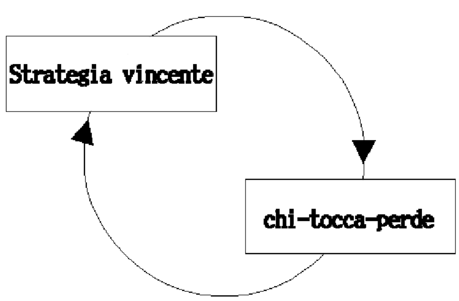

Figura 2: *Schema ciclico delle definizioni.*

Anche se un primo dubbio è pertanto legittimo, possiamo tuttavia dire che, la definizione data sopra, sebbene ricorsiva, risulta inequivocabile, poiché il grafo che rappresenta il gioco è aciclico; saranno pertanto i pozzi del grafo ad offrire un punto di partenza, o base, alla definizione stessa.

Esempio. Nel gioco delle monete, un pozzo è rappresentato dal nodo 10. Il giocatore di turno non ha una mossa valida e quindi, in base alla definizione (formale), non ha una strategia vincente.

Ne segue che 10 è una posizione "chi-tocca-perde". Quindi 9 ammette una strategia vincente, vista la presenza di un arco da 9 a 10. Lo stesso dicasi per 8. Di 7 possiamo nuovamente dire che esso rappresenta una posizione "chi-tocca-perde", poiché non offre una strategia vicente, visto che non vi sono archi uscenti verso nodi "chi-tocca-perde"; e così via per gli altri nodi. In questo gioco, tutte le posizioni "chi-tocca-perde" sono rappresentate dai vertici colorati di bianco in Figura .

Prima di approfondire la teoria dei progressively finite games, vorrai forse sperimentare quanti e quali giochi ricadono in questa categoria.

Esercizio 1. Data una scacchiera di 8x8 caselle, due giocatori devono muovere a turno un cavallo, seguendo le regole previste dal gioco degli scacchi. Il cavallo, partendo da una posizione fissata a priori, non deve mai tornare su una casella in cui è già stato. Quando un giocatore non ha più mosse a disposizione, perde la partita. Si invita il lettore a verificare che questo gioco rientra nella categoria dei progressively finite games. Riesci a disegnare il grafo che modella questo gioco? Quali difficoltà hai incontrato nel fare ciò?

Esercizio 2. Una scacchiera di 5x5 caselle viene coperta con delle monete, una per casella, in modo tale da formare un quadrato composto da 25 monete. A turno, due giocatori prendono un qualsiasi gruppo di monete, purché il primo giocatore ne prelevi una fila (o parte di una fila) in orizzontale, mentre il secondo giocatore compia la sua mossa prelevando una fila (o parte di una fila) posta verticalmente. Il gioco termina nel momento in cui non ci sono più monete sulla scacchiera. Il giocatore che ha prelevato l'ultimo gruppo di monete vince la partita. Sapresti disegnare il grafo che modella questo gioco? E sei in grado di individuare una strategia vincente?

Esercizio 3. Nel corso di una partita a scacchi il bianco si trova in una situazione di grande difficoltà: il nero ha la possibilità di concludere la partita con uno scacco matto forzato in 5 mosse. Vista la situazione favorevole, il nero considera persa la partita se non riesce a vincere nel corso delle 5 mosse successive. Possiamo dire, a questo punto, di essere in presenza di un progressively finite game?

Esercizio 4. Inventa tu un gioco che rientri nella categoria dei progressively finite games. Dei giochi che già conosci, sai individuarne qualcuno che ricade in questa categoria? Riguardo ai tuoi giochi combinatorici preferiti, sapresti proporre delle modifiche alle regole che riducano il gioco ad un progressively finite game?

Kernel

Un **kernel** in un grafo è un insieme di vertici con le seguenti proprietà:

(i) Non ci sono archi che congiungono due vertici nel kernel;

(ii) Ogni vertice che non è nel kernel ha almeno un successore nel kernel.

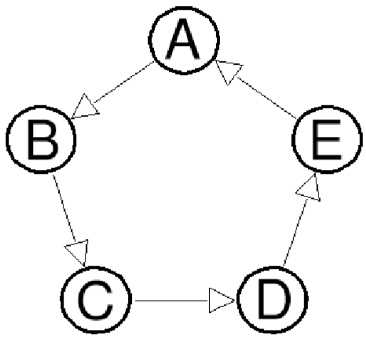

Figura 3: *Esempio di grafo che non ammette kernel.*

Nel gioco in Figura il kernel è formato dai vertici 1, 4, 7, 10.

Non tutti i grafi hanno un kernel. Si consideri ad esempio il grafo in Figura .

Per simmetria si può assumere che, se il grafo ammettesse un kernel K, il vertice a ne farebbe parte. Quindi $b \notin K$ per (i), $c \in K$ per (ii), $d \notin K$ per (i), $e \in K$ per (ii), allora $a \notin K$ per (i) - assurdo!

Teorema 1. Se G è il grafo di un progressively finite game, allora G ha un kernel ed esso è unico.

Dimostrazione. Preso il grafo G, consideriamo un suo pozzo p. Il Lemma 5 (vedi Appendice .1.1) ne garantisce l'esistenza. Sia G' il grafo ottenuto da G eliminando p e tutti i vertici in $N(p)$. Si noti che G' è un grafo diretto aciclico e finito più piccolo di G. Per induzione, G' ha un kernel K'. Dimostreremo che $K = K' \cup \{p\}$ è un kernel di G. La proprietà (i) del kernel è verificata, poiché nessun vertice appartenente a K' può essere adiacente a p. La proprietà (ii) è soddisfatta poiché tutti i vertici in $N(p)$ hanno un arco uscente verso p, e p è in K. Per l'unicità, si consideri un generico kernel H di G. Si noti che $p \in H$, poichè, se così non fosse, p, per la proprietà (ii) del kernel, dovrebbe avere un arco uscente verso un vertice nel kernel - ma p è un pozzo. Si noti anche che $N(p) \cap H = \emptyset$ (per la proprietá (i) del kernel). Da questo segue che $H - \{p\}$ è un kernel per G'. Poiché G' è più piccolo di G, per induzione ha un unico kernel, quindi $K' = H - \{p\}$. Siccome $K = K' \cup \{p\}$, ne segue che $K = H$. □

Teorema 2. In un progressively finite game, una strategia vincente consiste nel muovere ad ogni turno nei vertici del kernel.

Dimostrazione. Per la proprietà (i) del kernel, se il primo giocatore muove su un vertice del kernel, il secondo giocatore dovrà necessariamente muovere su un vertice che non è nel kernel. Per la proprietà (ii), il primo giocatore, quindi, potrà sempre muovere in un vertice nel kernel da un vertice che non è nel kernel. Poichè il gioco deve terminare e i pozzi si trovano tutti nel kernel, il primo giocatore si aggiudicherá la partita. □

I teoremi visti sopra sono costruttivi; dato un grafo diretto è possibile trovarne il kernel in tempo lineare.

Algoritmo 1. Sia G un grafo aciclico e V l'insieme dei suoi vertici e p un generico pozzo.

```
Find_Kernel(G)
if |V| = 1 then return V;
else return {p} ∪ Find_Kernel(G\N(p)\p).
```

Esercizio 5. Prova a implementare l'Algoritmo 1 e a verificare che è lineare.

In base all'Algoritmo 1, sembrerebbe che non ci sia alcuna difficoltà nell'individuare una strategia vincente in un qualsiasi progressively finite game. L'Algoritmo 1 è infatti lineare (meglio non si può!) nelle dimensioni del grafo associato al progressively finite game. Tuttavia, il generico gioco nella classe dei progressively finite game, non viene descritto in termini del grafo diretto da noi ad esso associato, ma fornendo un ambiente e delle regole di gioco che possono notevolmente variare.

All'interno di questa formulazione più colorita (piatto con gli Euro, cavallo sulla scacchiera), compaiono inoltre dei parametri (numero di **10** Euro, **dimensione** della scacchiera).

Una volta scelto il gioco di nostro interesse, la dimensione del grafo associato è spesso esponenziale nel parametro; era questo, ad esempio, il problema riscontrato nell'Esercizio 2.

Per meglio illustrare questo problema, e scoprire come talvolta esso possa essere superato, considereremo il gioco del Nim, ed introdurremo il concetto di somma di giochi e le Grundy functions.

Nim

Il Nim è probabilmente uno dei giochi più antichi e impegnativi che rientra nella categoria dei progressively finite games. Nato probabilmente in Cina, nella sua versione più popolare, ci sono 12 monete distribuite su tre righe come riportato in Figura .

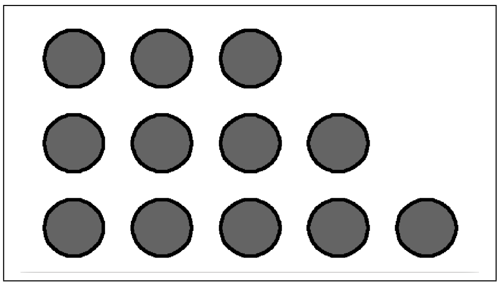

Figura 4: *Versione comune del Nim.*

Le regole del gioco sono piuttosto semplici: a turno, i due giocatori, prelevano una o più monete adiacenti da una riga a scelta, partendo sempre da uno degli estremi; il giocatore che prende l'ultima moneta vince. Si invita il lettore a provare che la strategia vincente, per il primo giocatore, consiste nel prendere due monete dalla riga superiore.

Il gioco può comunque essere generalizzato ad un numero qualsiasi di righe contenenti un numero qualsiasi di monete. Nonostante una strategia vincente sia nota ai matematici, questa non è semplice e di immediata comprensione. Di fatto, molte persone continuano a giocare con interesse questo gioco. Un'altra versione molto comune ha 4 righe, la prima con una sola moneta, la seconda con 2, la terza con 3 e la quarta con 4, come mostra la Figura , dove abbiamo preferito utilizzare bastoncini in quanto eravamo a corto di monete.

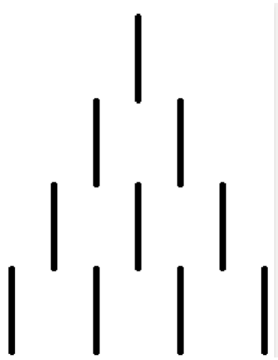

Figura 5: *Altra comune versione del Nim.*

Qualsiasi sia la versione del gioco preferita, e qualsiasi sia la posizione attuale, se c'è una sola riga la strategia vincente è ovvia, e consiste nell'eliminarla tutta. Se per esempio tale riga è formata da 3 monete, il grafo del gioco è quello in Figura .

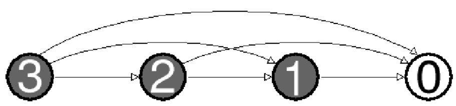

Figura 6: *Nim su una sola pila di 3 monete.*

Aumentando il numero delle righe, la dimensione del grafo aumenta in modo esponenziale, poiché il grafo di un Nim su k righe corrisponde alla somma diretta (vedi Appendice .1.1) dei grafi di ciascuna delle k righe prese singolarmente.

Ad esempio, il gioco del Nim formato semplicemente da due righe composte da due sole monete ciascuna, è mostrato in Figura .

Grundy Function

L'aumentare di complessità del gioco rende necessaria l'introduzione di un concetto più robusto rispetto a quello di kernel.

Definizione (Grundy function)**.** Una Grundy function $g(x)$ è una funzione che associa, ad ogni vertice x del grafo G, il più piccolo intero non negativo che non è stato assegnato ad alcuno dei successori di x.

Si vedrà che, se un grafo ammette Grundy function, allora esiste anche un unico kernel. Poiché i pozzi non hanno successori, questi avranno Grundy num-

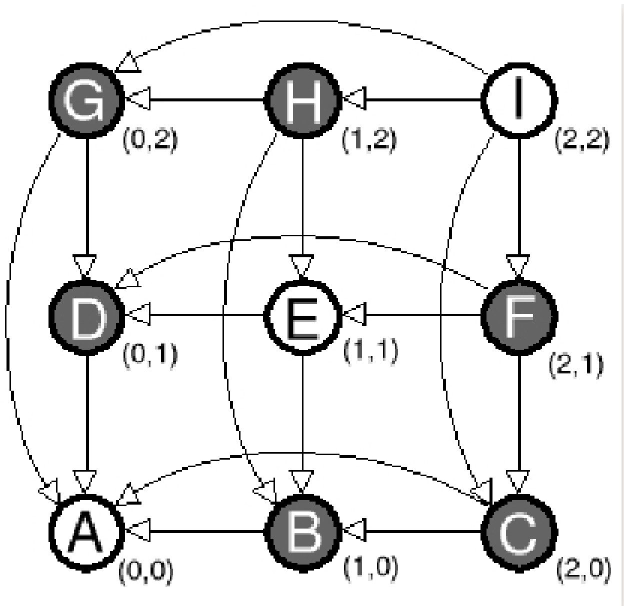

Figura 7: *Grafo del Nim con* 2 *pile da* 2 *monete ciascuna.*

ber 0 (il più piccolo intero non negativo). Quindi, ricorsivamente, si determina $g(x)$ prima per i vertici $v \in N(p)$, quindi per i vertici in $N(v)$, e così via. In pratica, ad ogni passo, possiamo determinare il valore della Grundy function per quei nodi x che sono pozzi nel grafo ottenuto da G rimuovendo p ed $N(p)$. Così facendo, tutti i vertici di cui x è successore, vengono processati prima di determinare il Grundy number di x.

Come esempio, costruiremo la Grundy function sul gioco delle monete nel piatto. Per prima cosa, assegnamo Grundy number 0 a tutti i pozzi, quindi passiamo ai vertici adiacenti. Consideriamo prima quello numerato con 9. Poiché al suo successore è stato assegnato Grundy number 0, a 9 verrà assegnato il valore 1. Consideriamo ora il vertice numerato con 8. Poiché i suoi due successori sono numerati con 0 ed 1, a lui assegnamo Grundy number 2. Al vertice 7 assegnamo Grundy number 0, poiché i suoi archi escono verso vertici i cui Grundy number sono 1 e 2; e così via per tutti gli altri vertici.

Abbiamo visto che il kernel esiste ed è unico. Possiamo ora meglio individuarne i nodi in termini della Grundy function.

Lemma 1. Tutti e soli i vertici che hanno Grundy number 0 sono vertici del kernel.

Dimostrazione. Dalla definizione di Grundy function, un vertice x, con Grundy number 0, non può avere un arco uscente verso un altro vertice con Grundy number 0; altrimenti non sarebbe stato possibile etichettarlo con 0. In modo analogo, un vertice y, con Grundy number $k > 0$, deve avere un arco verso un vertice con Grundy number 0, altrimenti y sarebbe etichettato con 0. I vertici con Grundy number 0 soddisfano, pertanto, entrambe le proprietà del kernel. □

Mostreremo ora come calcolare il Grundy number di un vertice, in una somma diretta di grafi, partendo dai Grundy number dei singoli vertici di ogni grafo. Tale calcolo viene chiamato *somma digitale*.
La somma digitale c degli interi non negativi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si scrive:

$$c = c_1 \dot{+} c_2, \dot{+} \ldots \dot{+} c_n$$

Per calcolarla bisogna convertire in notazione binaria ogni numero c_i con $1 \leq i \leq n$;

$$c_i = c_i^{(0)} \cdot 2^0 + c_i^{(1)} \cdot 2^1 + c_i^{(2)} \cdot 2^2 + \ldots + c_i^{(n)} \cdot 2^n$$

A questo punto $c^{(k)}$, ossia la k-esima cifra binaria che compone il numero c, si calcola attraverso il seguente: $c^{(k)} = c_1^{(k)} + c_2^{(k)} + \ldots + c_n^{(k)}$ $(mod 2)$.

Ad esempio, la somma digitale per i numeri 3, 5, 8, 13, 15 è mostrata nella seguente tabella:

	2^3	2^2	2^1	2^0	
3=	0	0	1	1	+
5=	0	1	0	1	+
8=	1	0	0	0	+
13=	1	1	0	1	+
15=	1	1	1	1	=
	1	1	0	0	=12

Teorema 3. Se i grafi G_1 e G_2 hanno rispettivamente Grundy function $g_1(x)$ e $g_2(x)$ allora il grafo $G = G_1 + G_2$ ammette Grundy function $g(x)$ definita come segue:

$$g(x) = g((x_1, x_2)) := g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2). \tag{1}$$

Dimostrazione

Dobbiamo mostrare che, per ogni nodo $x = (x_1, x_2)$ di G, $g(x)$ sia definita come nell'equazione (1) di cui sopra. Per farlo dobbiamo mostrare che:

(i) Se $y \in s(x)$ allora $g(x) \neq g(y)$;

(ii) Per ogni intero non negativo $b < g(x)$, esiste un nodo y in $s(x)$ tale che $g(y) = b$.

(i) Si consideri un generico $y = (y_1, y_2) \in s((x_1, x_2))$. Dalla definizione di somma diretta, avremo che $y_1 = x_1$ o che $y_2 = x_2$. Senza perdita di generalità, si assuma $y_2 = x_2$ e quindi $y_1 \in s(x_1)$. Pertanto, $g_2(y_2) = g_2(x_2)$, mentre, essendo $y_1 \in s(x_1)$, $g_1(y_1) \neq g_1(x_1)$. In conclusione,

$$g(x) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(y_2) \neq g_1(y_1) \dot{+} g_2(y_2) = g(y).$$

(ii) Si consideri una generica posizione $x = (x_1, x_2)$ nel grafo G. Chiamiamo $a = g_1(x_1)$ e $b = g_2(x_2)$ e chiamiamo $c = g(x) = a \dot{+} b$. Dobbiamo mostrare che, per ogni intero non negativo $z < c$, esiste un successore y di x, con

$g(y) = z$. Sia $\Delta = c \dot{+} z$ e sia p_Δ la posizione della cifra binaria più significativa di Δ. Si noti ora che, in c, il bit in posizione p_Δ vale 1, pertanto a e b differiscono di valore in tale bit. Senza perdita di generalità, dei due sia a quello per cui $a[p_\Delta] = 1$. Sia quindi $a' = a \dot{+} \Delta$. Chiaramente $a' < a$, poiché $(a \dot{+} \Delta)[p_\Delta] = 0$. Per definizione di Grundy function, nel grafo G_1 è sempre possibile, quindi, muoversi dalla posizione x_1, con Grundy number a, ad una nuova posizione y_1 con Grundy number a'. Si consideri pertanto $y = (y_1, x_2)$. Ovviamente y è un successore di x. Inoltre,

$$g(y) = g(y_1, x_2) = g_1(y_1) + g_2(x_2) = a' \dot{+} b = a \dot{+} \Delta \dot{+} b = c \dot{+} \Delta = z.$$

$\square$

.1 Il teorema di Sprague-Grundy

Nella teoria dei giochi combinatorici, un gioco è detto *imparziale* se le configurazioni del gioco possono essere catalogate nelle due categorie "chi tocca vince" oppure "chi tocca perde" ($\heartsuit$-position oppure $\spadesuit$-position) prescindendo dall'identità del giocatore cui spetti la prossima mossa. Molti dei giochi combinatorici che conosciamo, come la dama e gli scacchi, NON sono imparziali secondo questa definizione dato che in una data configurazione la vittoria potrebbe spettare al bianco indipendentemente da chi debba muovere. Ad un gioco imparziale viene naturale associare un grafo diretto che ha per nodi le configurazioni e dove un arco da A a B rappresenta che è possibile muoversi dalla configurazione A alla configurazione B con una mossa. Quando questo grafo è aciclico (un DAG) allora il gioco è detto *progressivo finito* poichè ogni mossa ci fà avanzare rispetto ad un qualsiasi topological sort del DAG.

La *convenzione normale di gioco* è che la sconfitta spetti a quel giocatore che si ritrova impossibilitato a muovere, ossia in un pozzo del DAG. In altre parole: i pozzi sono tutte posizioni "chi tocca perde" e il valore delle altre posizioni può essere calcolato ricorsivamente così come è possibile calcolare ricorsivamente il kernel del DAG, che esiste sempre ed è unico.

In questo contesto, il teorema di Sprague-Grundy afferma che ogni gioco imparziale progressivo finito con convenzione normale di gioco è equivalente ad un gioco del Nim con un unico stack. Per equivalente intendiamo dire che ogni qual volta esso appaia come componente su un tavolo di somma di gioco può essere rimpiazzato con una copia di quel preciso stack del Nim senza che nulla cambi in alcun modo. Ovviamente un singolo stack del Nim trova codifica in un numero naturale che ne conti il numero di gettoni. È però uso chiamare *nimbers* questi numeri cardinali in quanto preferiamo corredarli con la somma definita in termini degli XOR bit-wise giustificata da quanto abbiamo visto in sezioni precedenti. Inoltre, per distinguerli dai numeri naturali, si appiccica loro un asterisco ($0*$, $1*$, $2*$, $\dots$). Anche se Sprague e Grundy non fecero mai riferimento esplicito a questa nozione di equivalenza nei loro studi indipendenti benchè contemporanei, questo concetto si autoafferma a sugello della loro teoria e trova ulteriori applicazioni nello sviluppo che Martin Gardner offrì nella più generale teoria dei games, in particolare nell'approccio sperimentale e di giocosa esplorazione che la contraddistingue.

In questa sezione vogliamo offrire un'esposizione astratta e moderna di questa teoria, tutta raccolta nel dare dimostrazione al teorema di Sprague-Grundy. Il teorema consente di definire il Grundy value (o nim-value) di un gioco imparziale come quell'unico nimber cui il gioco è equivalente. Prima di partire ricordiamo solo che i nimbers giocano un ruolo anche fuori dalla convenzione normale di gioco e persino fuori dai giochi imparziali (ad esempio nel Domineering) e che queste teorie traboccano ancora di problemi aperti e fecondi.

.1.1 Notazione

Una notazione opportuna non sempre è quella che ci appare più naturale di primo acchito, ma può aiutare molto nel rendere semplici le cose. Credo risalga a Gardner ed ai suoi coautori in Winning Ways, ed in parte alla definizione di numero naturale propugnata da Von Neumann, la convenzione di trascrivere una posizione di gioco come l'insieme delle mosse spendibili quando in essa.

Pertanto, la configurazione dove nessuna mossa può essere applicata corrisponde all'insieme vuoto $\{\}$ ossia allo 0 secondo Von Neumann. Nella più generale teoria dei games che contempla anche i giochi parziali, questo stesso gioco imparziale verrebbe rappresentato con $(\{\},\{\})$ per dire che entrambi i giocatori, ove chiamati a muovere per primi, non potrebbero farlo. In entrambi i contesti questa geniale scrittura consente di definire ricorsivamente le posizioni di gioco e consente una snella gestione algebrica delle dimostrazioni induttive in ultima coinvolte.

Per impratichirti con questa notazionecontrolla le trascrizioni equivalenti per le seguenti configurazion di un Nim a 3 stacks.

```
Nim          conf=set of possible moves    Von Neumann   naturale  nimber
0 0 0                                {}              0          0      0*
1 0 0                              {{}}            {0}          1      1*
2 0 0                          {{},{{}}}         {0,1}          2      2*     Von Neumann
3 0 0                 {{},{{}},{{},{{}}}}       {0,1,2}          3      3*________________
1 1 0                        {{{}},{{}}}         {1,1}          -      0*
2 1 0     {{{}},{{{}},{{}}},{{},{{}}}}       {1,0,2}          -      3*  Martin Gardner
```

Abbiamo detto insieme e non multi-insieme (inutile avere due mosse che conducono allo stesso identico risultato). Pertanto, alla configurazione $(1,1,0)$ resta invero associato l'insieme di mosse $\{\{\{\}\}\}$ che trova codifica in $\{1*\}$ ed affermiamo essere equivalente a $0*$. Nella codifica della configurazione $(2,1,0)$ abbiamo considerato che, nell'ordine, o togliamo 2 al primo stack, o 1 al primo stack, o 1 al secondo. La codifica è pertanto $\{*1,\{*1\},*2\}$, e secondo il teorema sarà poi equivalente ad un unico nimber.

In questa notazione la somma di due giochi G_1 e G_2 (ossia dispongo i due giochi sul tavolo ed ad ogni turno il giocatore sceglie su quale fare la sua mossa) è definita ricorsivamente da:

$$G_1 + G_2 = \{G_1 + g' \mid g' \in G_2\} \cup \{g' + G_2 \mid g' \in G_1\}.$$

Si noti che la somma è sia commutativa che associativa. Si faccia inoltre l'abitudine al fatto che ormai usiamo le parole, configurazione, gioco, e posizione, in modo del tutto intercambiabile.

Definizione 1 (Equivalenza)**.** Due posizioni G_1 e G_2 sono dette *equivalenti* iff per ogni posizione P vale che $G_1 + P$ è una $\heartsuit$-position iff $G_2 + P$ è una $\heartsuit$-position. Se così è scriviamo $G_1 \equiv G_2$.

dimostrazione

Lemma 2. Per ogni posizione G, il doppio tavolo $G + G$ è una $\spadesuit$-position.

Dimostrazione. La strategia che mostra che $G+G$ è una $\spadesuit$-position consiste nel ricopiare ogni mossa dell'avversario replicandola sull'altro tavolo. L'avversario resta così confinato nel kernel fatto di due posizione sempre identiche, da cui non riesce a uscire. $\square$

Lemma 3. Assume H is a $\spadesuit$-position. Then $G + H \equiv G$ for every position G.

Dimostrazione. Mostreremo che $G+H+P$ e $G+P$ hanno lo stesso esito per ogni P. Infatti, se $G+P$ è una ♠-position allora la strategia che mostra che $G+H+P$ è una ♠-position consiste nel rispondere sul tavolo di H ogni qual volta l'avversario gioca su H, e controbattere sul tavolo di $G+P$ altrimenti. Il secondo a giocare porge cioè la sua attenzione al tavolo tirato in campo dal primo giocatore, sapendo di detenere strategia vincente su entrambi i tavoli. Invece, se $G+P$ è una ♡-position, allora la strategia che mostra che $G+H+P$ è una ♠-position fà la prima mossa sul tavolo di $G+P$, ed in pratica ci siamo ricondotti al caso precedente. □

Il prossimo lemma ci fornisce di uno "strumento di confronto" di valenza quasi sperimentale tra due posizioni.

Lemma 4. Vale che $G_1 \equiv G_2$ se e solo se $G_1 + G_2$ è una ♠-position.

Dimostrazione. Assumiamo che $G_1 \equiv G_2$. Allora, in base alla Definizione 1 in cui si impieghi $P = G_2$, otteniamo che $G_1 + G_2 \equiv G_2 + G_2$. Inoltre $G_2 + G_2$ è una ♠-position per il Lemma 2. Pertanto $G_1 + G_2$ è una ♠-position.

Per la direzione contraria, si assuma che $G_1 + G_2$ sia una ♠-position. Per il Lemma 3, $G_1 \equiv G_1 + (G_1 + G_2)$. Poichè anche $G_1 + G_1$ è una ♠-position per il Lemma 2, allora, di nuovo per il Lemma 3, $G_2 \equiv G_2 + (G_1 + G_1)$. Per le proprietà associativa e commutativa i due termini a destra di queste due scritture coincidono, e, dalla proprietà transitiva della relazione di equivalenza, otteniamo che $G_1 \equiv G_2$. □

Siamo ora pronti per offrire una dimostrazione induttiva del teorema di Sprague-Grundy.

Si consideri una posizione $G = \{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$. Per ipotesi induttiva, ciascuna delle k opzioni sarà equivalente ad un qualche nimber, ossia $G_i \equiv *n_i$. Cominciamo allora col dimostrare che $G \equiv G'$ dove $G' = \{*n_1, *n_2, \ldots, *n_k\}$. Dopodichè verificheremo che $G' \equiv *m$, dove m è il più piccolo numero naturale che non compare nell'insieme $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.

Se $k = 0$ allora entrambi i passi sono ovvi. Per mostrare che $G \equiv G'$ quando $k > 0$ ci riferiamo al Lemma 4, ed esibiamo una strategia per il secondo giocatore a muovere nel gioco $G \equiv G'$: se il primo giocatore selezione un G_i del gioco G noi si seleziona l'opzione $*n_i$ del gioco G'; altrimenti, se il primo giocatore selezione un $*n_i$ del gioco G' noi si seleziona l'opzione G_i del gioco G. In entrambi i casi vinciamo data l'ipotesi induttiva che $G_i \equiv *n_i$.

Ci riferiamo sempre al Lemma 4 anche per mostrare che $G' \equiv *m$, facendoci una partitina come secondo giocatore per vincere sul tavolo $G' + *m$. Daremo uan strategia esplicita che non lasci scampo al primo giocatore. Se questi muove in $*m$ scegliendo l'opzione $*m'$, con $m' < m$, e considerato che m era il più piccolo numero naturale non contenuto nell'insieme $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, allora $m = n_i$ per qualche i e noi possiamo replicare muovendo in G' e selezionando l'opzione $*n_i$. Con questa prima mossa ci siamo assicurati la vittoria per via del Lemma 2.

Si assuma pertanto che la prima mossa del primo giocatore avvenga in G' scegliendo l'opzione $*n_i$. Se $n_i < m$ allora muoviamo sul tavolo di $*m$ dove è disponibile l'opzione $*n_i$. Altrimenti, se $n_i > m$, allora muoviamo sul tavolo $*n_i$ dove è disponibile l'opzione $*m$. In entrambi i casi la vittoria è ancora una volta assicurata dal Lemma 2.

Rimandiamo alla seguente pagina per ulteriori considerazioni su questo risultato ed il suo collocamento:

https://en.wikipedia.org/wiki/Sprague%E2%80%93Grundy_theorem#Proof

DAGs e somma diretta di grafi

In questa appendice daremo alcune nozioni sui grafi che interessano i progressively finite games.

Definizione 2 (Pozzo)**.** Un *pozzo*, in un grafo orientato, è un qualsiasi vertice con grado uscente zero.

Indicheremo con p un generico pozzo in un grafo ed indicheremo con $N(p)$ l'insieme dei vicini di un pozzo p.

Lemma 5. Poiché un progressively finite game è modellato come un grafo diretto aciclico e finito, esso ha necessariamente almeno un pozzo.

Definizione 3 (Successore)**.** Dato un vertice x, indicheremo con $s(x)$ l'insieme dei suoi *successori*, ossia l'insieme di tutti i vertici in cui entra un arco proveniente da x.

Definizione 4 (Somma diretta)**.** Siano G_1 e G_2 due grafi aventi rispettivamente X_1 e X_2 come insiemi di vertici. La somma diretta $G = G_1 + G_2$ è data dall'insieme di vertici $X = \{(x_1, x_2)|x_i \in X_i, i = 1, 2\}$ e dagli archi definiti dall'insieme dei successori $s((x_1, x_2)) = \{(y, x_2)|y \in s(x_1)\} \cup \{(x_1, y)|y \in s(x_2)\}$.

Si invita il lettore a verificare, od a convincersi, che la somma diretta possiede la proprietà associativa. Questo implica che il concetto di somma diretta è estendibile naturalmente ad un numero qualsiasi di grafi, tramite il "geroglifico"

$$G_1 + \ldots G_n = (G_1 + \ldots + G_{n-1}) + G_n$$

.

In pratica, la somma diretta $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$ dei grafi G_1, G_2, $\ldots G_n$ aventi rispettivamente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ come insiemi dei vertici è data dall'insieme di vertici $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)|x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\}$ e dagli archi definiti dall'insieme dei successori $s((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{(y, x_2, x_3, \ldots, x_n)|y \in s(x_1)\} \cup \{(x_1, y, x_3, \ldots x_n)|y \in s(x_2)\} \cup \ldots \cup \{(x_1, x_2, \ldots, \ x_{n-1}, y)|y \in s(x_n)\}$.

Bibliografia

[1] Tucker, A., *Applied combinatorics*, Wiley, 1994.

[2] Berge, C., *The theory of Graphs*, Methuen-Wiley, 1962.

[3] Gardner, M., *Mathematical puzzles and diversions*, Simon and Schuster Inc., 1959.