Cours de Calcul Matriciel

Yann Morère

Mai 2001

Contents

Chapter 1

Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. une matrice sur le corps $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire de scalaires a_{ij} de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A\,(m \times n) = (a_{ij})$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}\,\langle\lambda\rangle$polynôme en λ....

Les m n-uplets $(a_{i1} \ \dots \ a_{in}) \quad i \in \{1 \dots m\}$ sont appelés *lignes* de A.

Les n m-uplets $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad j \in \{1 \dots n\}$ sont appelés *colonnes* de A.

Le couple (m, n) est appelé la *dimension* de la matrice.

C'est un formalisme simple qui permet de généraliser les manipulations des scalaires (Attention : avec la perte de la commutativité) et de manipuler avec un seul langage des scalaires, des vecteurs et des tableaux.

1.2 Exemples

1. Soit f une fonction réelle de plusieurs variables $f\,(x_1, \dots, x_n) \quad (x = (x_1 \ \dots x_n))$ on définit le gradient :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

matrice ligne du vecteur des dérivées partielles.
Le Hessien ou matrice Hessienne est définie par :

$$H_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}$$

matrice carrée symétrique des dérivées secondes.

2. Soit f une fonction vectorielles de plusieurs variables $f(x_1, \dots, x_n)$ $\begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

   on peut alors définir le Jacobien ou matrice Jacobienne :

$$F_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

1.3 Opérations élémentaires

1.3.1 Égalité

$$A = B \Leftrightarrow \forall (i,j) \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

1.3.2 Somme

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

avec A et B de même dimension.

1.3.3 Multiplication par un scalaire

$$kA = (k\, a_{ij})$$

1.3.4 Multiplication

$$A\,(m \times p) = (a_{ik}) \quad B\,(p \times n) = (b_{kj})$$
$$A \cdot B\,(m \times n) = (c_{ij})$$

avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Propriétés :

- ▷ $(AB)\,C = A\,(CB)$
- ▷ $A\,(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)\,C = AC + BC$
- ▷ $k\,(AB) = (kA)\,B = A\,(kB)$
- ▷ $A0 = 0A = 0$ zéro est la matrice nulle
- ▷ evidement $AB \neq BA$
- ▷ Si $m = n = 1$ le résultat du produit est un scalaire
- ▷ Si $p = 1$ le produit est une matrice pleine $m \times n$

1.3.5 Transposée d'une matrice

$$A^T = A$$

Les lignes de A sont les colonnes de A^T.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$A_{(m \times n)} = (a_{ij}) \to A^T_{(n \times m)} = \left(a^T_{ij}\right)$ avec $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Pour les vecteurs :

$$(x_1 \;\dots\; x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Propriétés :

- ▷ $(A+B)^T = A^T + B^T$
- ▷ $\left(A^T\right)^T = A$
- ▷ $(AB)^T = B^T A^T$
- ▷ $(kA)^T = kA^T$

1.3.6 Dérivation

$A_{(m\times n)} = (a_{ij})$ avec a_{ij} dépendant de α.

$$A(\alpha) = (a_{ij}(\alpha)) \qquad \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \left(\frac{da_{ij}(\alpha)}{d\alpha}\right)$$

1.3.7 Intégration

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} A(\alpha)\,d\alpha = \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a_{ij}(\alpha)\,d\alpha\right)$$

1.3.8 Tranconjugée

Si A est une matrice définie dans un corps opérant sur $\mathbb{C}$:

$$A^H = \overline{A}^T \text{ transpose de la conjuge,}$$

avec $A_{(m\times n)} = (a_{ij})$, $\overline{A}_{(m\times n)} = (\overline{a}_{ij})$ et $A^H_{(m\times n)} = \left(\overline{a}^T_{ij}\right) = \left(a^H_{ij}\right)$ avec $a^H_{ij} = \overline{a}_{ij}$.

Propriétés :

▷ $(A+B)^H = A^H + B^H$
▷ $\left(A^H\right)^H = A$
▷ $\left(A^H\right)^T = \left(A^T\right)^H = \overline{A}$

1.3.9 Trace d'une matrice $A_{(m\times n)} = (a_{ij})$

$$\text{trace}(A) = \sum_{\text{i}=1}^{min(m,n)} a_{ii}$$

Propriétés :

▷ $\text{trace}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{trace}(A) + \beta \text{trace}(B)$
▷ $\text{trace}\left(A^T\right) = \text{trace}(A)$
▷ $\text{trace}\left(A^H\right) = \overline{\text{trace}(A)}$

1.3.10 Matrice décomposées en blocs (ou partitionnement)

$A_{(m\times n)} = \left(A_{ij_{(m\times n)}}\right)$ avec $\sum_{i=1}^{I} m_i = m$ et $\sum_{i=1}^{I} n_i = n$ ce qui est intéressant lorsque la matrice contient des blocs nuls.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 & 5 \\ 3 & 4 & | & 2 & 2 \\ - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & | & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & 2 & | & 3 & 5 \\ 3 & | & 4 & | & 2 & 2 \\ - & | & - & | & - & - \\ 1 & | & 1 & | & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple de partitionnement important :

$A_{(m\times n)} = (a_{ij}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ avec a_i colonnes de

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}, \quad \alpha_j^T \text{ lignes de } A$$

La transposée est utile dans le sens où un vecteur est une matrice colonne, donc une ligne est un covecteur et

$$A_{(m\times p)} \cdot B_{(p\times n)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \times b_1 & \alpha_1^T \times b_2 & \ldots & \alpha_1^T \times b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_m^T \times b_1 & \alpha_m^T \times b_2 & \ldots & \alpha_m^T \times b_n \end{pmatrix} = \left(\alpha_i^T b_j\right)$$

L'intérêt est quie si l'on dispose de 2 matrices A et B partitionnées telles que les sommes et les produits aient un sens :

- ▷ $A = (A_{ij})\,, \quad B = (B_{ij}) \quad A + B = (A_{ij} + B_{ij})$
- ▷ $C = AB = \sum_{k=1}^{\nu} A_{ik}B_{kj}$ avec ν le nombre de blocs en ligne de A et le nombre de blocs en ligne de B

Exemples :

$$A_{(4\times 5)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{(5\times 4)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB_{(4\times 4)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & 0_{(2\times 2)} \\ 0_{(2\times 2)} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

trace $(A) = \sum_{i=1}^{\min(4,5)} a_{ii} = 1 + 4 + 5 + 4 = 14$**,** trace $(B) = \sum_{i=1}^{\min(4,5)} a_{ii} = 3 + 4 + 1 - 1 = 7$

$$AB_{(5\times5)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 0_{(2\times2)} \\ 0_{(2\times2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$AB_{(5\times5)} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -17 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Montrer que si A possède une ligne nulle, alors AB possède une ligne nulle aussi :

$$A_{(m\times p)} = (a_1, \ldots, a_p) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} B_{(p\times n)} = (b_1, \ldots, b_n) = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$$

Soit α_i^T la ligne nulle de A, alors la i^{me} ligne de AB

$$\left(\alpha_i^T \times b_1, \ldots, \alpha_i^T \times b_n\right) = (0, \ldots, 0)$$

de même si B a une colonne nulle, AB à une colonne nulle.
Soit b_j la colonne nulle de B, la j^{me} colonne de AB est :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \times b_j \\ \vdots \\ \alpha_m^T \times b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chapter 2

Opérations élémentaires, application aux équations linéaires

2.1 Matrices échelonnées et canonique ligne

Une matrice A est dite *ligne-équivalente* à une matrice B ($A \sim B$) si B peut être obtenue à partir de A en effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires :

▷ (E1) : échanger la i^{me} ligne et la j^{me} ligne : $\alpha_i^T \leftrightarrow \alpha_j^T$
▷ (E2) : multiplier la i^{me} ligne par un scalaire non nul k : $k\alpha_i^T \to \alpha_i^T$ $(k \neq 0)$
▷ (E3) : remplacer la i^{me} ligne par k fois la j^{me} ligne plus la i^{me} ligne : $k\alpha_j^T + \alpha_i^T \to \alpha_i^T$ que l'on peut regroupé en une étape
▷ (E) : remplacer la i^{me} ligne par k' fois la j^{me} ligne plus k fois la i^{me} ligne : $k'\alpha_j^T + k\alpha_i^T \to \alpha_i^T$

Une matrice est dite échelonnée (est sous forme échelonnée) si :

1. toutes les lignes nulles sont en bas de la matrice
2. chaque élément distingué (premier élément non nulle d'une ligne α^T) est à droite de l'élément distingué de la ligne précédente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice échelonnée A est dite sous forme canonique ligne si :

1. chaque élément distingué est égal à 1
2. chaque élément distingué est l'unique élément non nul dans toute sa colonne

2.1.1 Algorithme de passage à la forme échelonnée

$A = (a_{ij})$ matrice quelconque

1. Appeler j_1 la 1$^{\text{re}}$ colonne contenant un élément non nul
2. Échange les lignes pour que le premier élément différent de 0 soit dans la 1$^{\text{re}}$ ligne, j_i^{me} colonne ($a_{1j_1} \neq 0$)
3. Utiliser a_{1j_1} comme pivot pour obtenir des zéros sous a_{1j_1} , i.e. : pour $i > 1$ appliquer (E) : $-a_{ij_1}\alpha_1^T + a_{1j_1}\alpha_i^T$ ou $-\left(\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}}\right)\alpha_1^T + \alpha_i^T \longrightarrow \alpha_i^T$
4. Recommencer avec la sous-matrice formée de toutes les lignes sauf la 1$^{\text{re}}$
5. Arrêter quand la matrice est mise sous forme échelonnée.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1$, pivot $-2\alpha_1^T + \alpha_2^T \to \alpha_2^T$, $-3\alpha_1^T + \alpha_3^T \to \alpha_3^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{23} = 4$, pivot $-5\alpha_2^T + 4\alpha_3^T \to \alpha_3^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ forme echelonnée.}$$

2.1.2 Algorithme de passage d'une forme echelonnée à une forme canonique ligne

$A = (a_{ij})$ matrice echelonnée avec $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{ij_i}$ éléments distingués

1. multiplier la dernière ligne non nulle par $\frac{1}{a_{rjr}}$ pour avoir l'élément distingués
2. utiliser $a_{rj_r} = 1$ comme pivot pour obtenir des zéros au dessus de a_{rj_r}, i.e., pour $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ appliquer : $a_{ir_i}\alpha_i^T + \alpha_i^T \to \alpha_i^T$
3. répéter les étapes 1 et 2 sur les lignes α_{r-1}^T à α_2^T
4. multiplier la ligne α_1^T par $\frac{1}{a_{rjr}}$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_2^T \to -2\alpha_3^T + \alpha_2^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; a_{23} = 4 \text{ nouveau pivot } \to A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ forme canonique ligne.}$$

2.2 Système d'équations linéaires et matrices

Soit le système d'équations linéaire à m équations et n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que l'on peut réécrire de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

avec $A_{(m\times n)}$ matrice des coefficients, $B_{(m\times 1)}$ matrice colonne des constantes et $X_{(n\times 1)}$ matrice des inconnues.

La matrice M augmentée du système d'équations linéaires s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & b_1 \\ a_{21} & \ldots & \ldots & b_2 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Résoudre le système d'équations linéaires revient à utiliser la matrice M augmentée et à en la réduire à sa forme échelonnée (permet de dire si le système est consistant) puis à la réduire à la forme canonique ligne (donne la solution).

1. le système admet une solution si et seulement si la forme échelonnée de M ne contient pas de ligne $(0, 0, \ldots, 0, b)$ avec $b \neq 0$ (revient à l'équation dégénérée $0x_1 + \ldots + 0x_n = b$)
2. dans la forme canonique ligne de la matrice augmentée (sauf les lignes nulles), chaque élément distingué est le coefficient de l'inconnu principale correspondante dans le système. Les variables constantes sont les variables libres.

Théorème 2.2.1. *Un système d'équation admet ou une solution, ou une infinité (système consistant), ou aucune (système inconsistant).*

Exemple 1 :

$$\begin{cases} x + y - 2z + 4t = 5 \\ 2x + 2y + -3z + t = 3 \\ 3x + 3y - 4z - 2t = 1 \end{cases} \text{ on a donc } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{pmatrix}$$

puis $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \end{pmatrix}$, les variables libres sont y et t, les inconnues principales :

$$\begin{cases} x = -y + 10t - 9 \\ z = 7t - 7 \end{cases}$$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \text{ qui donne :}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Le système n'a aucune solution.

Exemple 3 :

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+5y+-z=-4 \\ 3x-2y-z=1 \end{cases} \text{ qui donne : } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne la solution unique : $x = 2$, $y = -1$ et $z = 3$ ou $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Chapter 3

Espaces vectoriels

Notations :

$\mathbb{K}$ corps des scalaires, $a, b, c, k \in \mathbb{K}$ (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
V l'espace vectoriel $u, v, w \in V$.

Définition 3.0.1. $\mathbb{K}$, un corps, V un ensemble non vide muni de deux lois, $+$ et $\times$ par un scalaire ($u, v, w \in V$, $u+v \in V$), V est appelé espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ses éléments sont appelés des vecteurs), si les axiomes suivants sont vérifiés :

▷ $\forall u, v, w \in V \quad (u+v)+w = u+(v+w)$
▷ $\exists V$ noté 0 appelé vecteur nul tel que $u+0 = 0+u = u \quad \forall u \in V$
▷ $\forall u \in V$, il existe un vecteur de V, noté $-u$ tel que $u+(-u) = 0$
▷ $\forall u, v \in V$ $u+v = v+u$ (V est donc un espace commutatif par rapport à l'opérateur somme $+$)
▷ $\forall k \in \mathbb{K}$, $\forall (u, v) \in V$ $k(u+v) = ku+kv$
▷ $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$ $(a+b)u = au+bu$
▷ $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$ $(ab)u = a(bu)$
▷ pour le scalaire unité $1 \in \mathbb{K}$ $1u = u$ $\forall u \in V$

Exemples :

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ plus généralement $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}$ corps)

$M_{m,n}$ matrices de dimension $m \times n$ sur le corps $\mathbb{K}$

$\mathbb{P}(t)$ espace vectoriel des polynômes.

3.1 Dépendance et Indépendance Linéaire

Définition 3.1.1. Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, les vecteurs $v_1, \ldots, v_m \in V$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{K}$, ou dépendants (plus simplement) si $\exists a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ non nuls $\mid a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$, sinon ils sont indépendants.

Définition 3.1.2. Un ensemble $S = \{u, \ldots, u_n\}$ est une base de V si :
▷ $u, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants,

▷ $u, \ldots, u_n$ engendrent V (tout vecteur de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de S)

V est dit espace vectoriel de dimention n.

Exemple :

$(1,0,0,0)$ $(0,1,0,0)$ $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$ de façon évidente et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

$1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n$ forment une base de $\mathbb{P}_n(t)$ et $\dim \mathbb{P}_n(t) = n + 1$.

3.2 Équation linéaire, matrices et espaces vectoriels

Théorème 3.2.1. *Les lignes non nulles d'une matrice mise sous forme échelonnée sont linéairement indépendantes.*

Rang d'une matrice :

Définition 3.2.1. rang en ligne = nombre maximum de lignes linéairement indépendantes,

rang en colonne = nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes.

Théorème 3.2.2. *rang en ligne de $A_{(m\times n)}$= rang en colonne.*

Pour déterminer le rang d'une matrice, on peut utiliser sa forme échelonnée.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a deux lignes différentes de 0 donc rang$A = 2$.

On repart de :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ et la matrice augmentée

$$M = (A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & b_1 \\ a_{21} & \dots & \dots & b_2 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.2.3. *Les trois propriétés sont équivalentes :*

1. $AX = B$ *admet une solution,*
2. B *est une combinaison linéaire des colonnes de* A
3. *La matrice* A *et la matrice augmentée* (A, B) *ont le même rang*
   - ▷ *si* $rang(A) = rang(A, B) = n$, *on a une solution unique,*
   - ▷ *si* $rang(A) = rang(A, B) < n$, *on a une infinité de solution,*
   - ▷ *si* $rang(A) < rang(A, B)$, *il n'y a pas de solution.*

Chapter 4

Matrices Carrées

4.1 Matrices carrées

Le nombre de lignes = le nombre de colonnes. $A_{(n\times n)}$ matrices carrées d'ordre n.

L'ensemble M_n des matrices carrées d'ordre n est un algèbre de matrices.

4.2 Matrices particulières

4.2.1 Matrice Unité

C'est une matrice carrée d'ordre n dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et les autres sont nuls. $a_{ii} = 1,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ et $a_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$. Cette matrice est notée $I_n$et possède le propriété suivante : $AI = IA = A\ \forall A$.

4.2.2 Matrice diagonale

$a_{ij} = 0\ \forall i \neq j\ \ A = \{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$

4.2.3 Puissance et polynôme de matrices

$A^2 = AA$, $A^{n+1} = A^n A$ et $A^0 = I$

si $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ alors $f(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$

Propriété 4.2.1. $f(x)$, $g(x)$ *deux polynômes,* A *matrice carrée d'ordre* n
$(f+g)(A) = f(A) + g(A)$
$(fg)(A) = f(A)\, g(A) = g(A)\, f(A)$

4.2.4 Matrices inversibles ou non singulières

A est dite non singulière si $\exists B \quad AB = BA = I$. B est unique et se note $B = A^{-1}$ et s'appelle l'inverse de A.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admet pour inverse si $ad - bc \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Théorème 4.2.1. *$A_{(n\times n)}$ est inversible si et seulement si $rangA = n$*

4.2.5 Matrice triangulaire

$A_{(n\times n)} = (a_{ij})$ triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$.

Propriété 4.2.2. *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est une algèbre de matrices :*

1. *$A + B$ triangulaire supérieure avec sur la diagonale $a_{ii} + b_{ii}$*
2. *kA triangulaire supérieure avec sur la diagonale ka_{ii}*
3. *AB triangulaire supérieure avec sur la diagonale $a_{ii}b_{ii}$*
4. *polynôme $f(x) \cdot f(A)$ triangulaire supérieure avec sur la diagonale $f(a_{ii})$*
5. *A est inversible si et seulement si $\forall i \ a_{ii} \neq 0$*

$A_{(n\times n)} = (a_{ij})$ triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$.

4.2.6 Matrice symétrique

$A = A^T \ (a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j)$

4.2.7 Matrice anti-symétrique

$A = -A^T \ (a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i, j)$ et donc $a_{ii} = 0, \ \forall i$.

Théorème 4.2.2. *Si A est une matrice carrée $A + A^T$ est symétrique, $A - A^T$ est anti-symétrique, $A = B + C$ ou B symétrique, C anti-symétrique.*

Il suffit de prendre $B = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$, $C = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$.

4.2.8 Matrice orthogonale

$AA^T = A^TA = I$ ou $A^{-1} = A^T$

4.2.9 Matrice normale

$A \cdot A^T = A^T \cdot A$ ce qui inclut les matrices symétriques, orthogonales et anti-symétriques.

4.2.10 Matrice hermitienne

$A^H = A \ (\overline{A} = A) \ (a_{ij} = \overline{a_{ji}} \Rightarrow a_{ii} \in \mathbb{R})$

4.2.11 Matrice anti-hermitienne

$A^H = -A$ $(\overline{A} = -A)$ $(a_{ij} = -\overline{a_{ji}} \Rightarrow a_{ii} = 0)$

4.2.12 Matrice unitaire

$A^H = A^{-1}$

4.2.13 Matrice normale

$AA^H = A^H A$

4.3 Matrices élémentaires

Opérations élémentaires (Opérations E1, E2, E3)

- ▷ (E1) échange de lignes $\alpha_i^T \leftrightarrow \alpha_j^T$
- ▷ (E2) $k\alpha_i^T \rightarrow \alpha_i^T$ $(k \neq 0)$
- ▷ (E3) $k\alpha_j^T + \alpha_i^T \rightarrow \alpha_i^T$

Opérations inverses

- ▷ $\alpha_j^T \leftrightarrow \alpha_i^T$
- ▷ $\frac{1}{k}\alpha_i^T \rightarrow \alpha_i^T$
- ▷ $-k\alpha_j^T + \alpha_i^T \rightarrow \alpha_i^T$

B est dite ligne-équivalente à A $(A \sim B)$ si B peut être obtenue à partie de A en utilisant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes. Comme il est possible de refaire le chemin inverse, le ligne-équivalence est une relation d'équivalence($A \sim A$, $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$, $A \sim B$ et $B \sim C \Rightarrow A \sim C$).

Théorème 4.3.1. *Toute matrice A est ligne équivalente à une matrice unique sous forme conique ligne.*

Soit e une opération élémentaire sur les lignes, $e(A)$ son résulat sur A. Soit E la matrice obtenue en applicant e sur I : $E = e(I)$.

Exemple :

$\alpha_2^T \leftrightarrow \alpha_3^T$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $-6\alpha_2^T \leftrightarrow \alpha_2^T$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $-4\alpha_1^T + \alpha_3^T \leftrightarrow \alpha_3^T$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 4.3.2. *e, une opération élémentaire sur les lignes, E une matrice carrée élémentaire d'ordre m :* $E = e(I_m)$, $\forall A_{(m \times n)} \quad e(A) = EA$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_2^T \to \alpha_3^T$$

et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = E \cdot A$

Théorème 4.3.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible (non singulière)*
2. *A est ligne-équivalente à la matrice identité I*
3. *A est un produit de matrice élémentaire*

ce qui indique qu'on peut passer de A à I par une suite finie d'opérations.

Algorithme :

1. Former la matrice $n \times 2n$ (par blocs) $M = (A, I)$
2. Réduire M à la forme échelonnée, si dans la moitié gauche apparaissent des lignes nulles, A n'est pas inversible.
3. Réduire M à la forme canonique ligne (I, B) et $B = A^{-1}$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & | & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'ou $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4.4 Equivalence entre matrices

Théorème 4.4.1. *B est ligne équivalente à A si et seulement si il existe une matrice non singulière P telle que $B = PA$.*

On peut aussi travailler sur les colonnes et définir 3 opérations élémentaires sur les colonnes.

▷ (F1) $c_i \leftrightarrow c_j$
▷ (F2) $kc_i \rightarrow c_i$
▷ (F3) $kc_j + c_i \rightarrow c_i$

de la même façon que pour les lignes, ces opérations sont inversibles, et la matrice élémentaire associée à chaque opération élémentaire f est : $F = f(I)$.

Lemme 4.4.1. *A une matrice quelconque. $f(A) = \left(e\left(A^T\right)\right)^T$ et $f(A) = AF$ et $AF = f(A)$ puis $\left(e\left(A^T\right)\right)^T = \left(EA^T\right)^T = AE^T$ donc $F = E^T$.*

Théorème 4.4.2. *B est colonne équivalente à A si et seulement si il existe une matrice non-singulière Q telle que $B = AQ$.*

4.4.1 Equivalence entre deux matrices

Définition 4.4.1. une matrice B est dite équivalente à A si B peut être obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. B est donc équivalente à A si il existe deux matrices non singulières P et Q telles que : $B = PAQ$.

Théorème 4.4.3. *toute matrice $A_{(m\times n)}$ est équivalente à l'unique matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ appelée forme de SMITH où $I_r$est la matrice identité d'odre r et $r = rang(A)$.*

Théorème 4.4.4. *Deux matrices de mêmes dimensions sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Exemple : trouver P et Q $/PAQ = N$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ avec $(4\times4)\,(4\times3)\,(3\times3) = (4\times3)$, on peut alors écrire :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ - & - & - & - & & & & \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -7 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (*)$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -17/3 & 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow P$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q$$

évidemment P et Q ne sont pas uniques : au lieu d'échanger la ligne 4 avec la ligne 2on peut faire :

$$(*) \sim \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -17/5 & 0 & 3/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

et

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ -17/5 & 0 & 3/5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice est de rang 2.

Chapter 5

Déterminants

5.1 Propriétés

Soit une matrice carrée $A_{(m\times n)} = (a_{ij})$, soit $P = \{\text{des } n! \text{ permutations sur } n \text{ indices}\} = \{a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}\}$ $\varepsilon_{j_1\ldots j_n} = 1$ ou -1 suivant que la permutation est paire ou impaire (nombre d'intervention est pair ou impair 123 et 312 sont paires et 132 et 321 sont impaires) alors :

$$\det(A) = |A| = \sum_{p\in P} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \left|A_{\{ij\}}\right|$$

Développement suivant la i^{me} ligne :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \left|A_{\{ij\}}\right|$$

$A_{\{ij\}}$ étant la mineure (ou sous-matrice carrée) de A obtenue en éliminant la i^{me} ligne et la j^{me}colonne.

Développement suivant la j^{me}colonne :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \left|A_{\{ij\}}\right|$$

Exemple :

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ développement par rapport à la première ligne.

$= -6 + (-12) = -18.$

ou encore $4 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 21 \end{vmatrix} + (-1)^5\, 6 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = -36 + 18 = -18.$

Propriété 5.1.1.

- ▷ *Si B est obtenue à partir de A en echangeant deux de ses lignes (colonnes) alors* $|B| = -|A|$
- ▷ *Si B est obtenue à partir de A en miltipliant une ligne (colonne) par un scalaire k alors :* $|B| = k|A|$
- ▷ *Si B est obtenue à partir de A an ajoutant à la i^{me} ligne (colonne) le produit d'un scalaire par une autre ligne (colonne) alors :* $|B| = |A|$
- ▷ *Si A est une matrice diagonale ou triangulaire :* $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- ▷ $|A| = \left|A^T\right|$, $\left|A^H\right| = \overline{|A|}$ *et* $|kA| = k^n|A|$
- ▷ $|A||B| = |AB|$

Théorème 5.1.1. *Le determinant d'une matrice est proportionnel au determinant de sa forme de Smith car $PAQ = N$ avec P et Q régulières $|PQ||A| = |N|$.*

Corollaire 5.1.2. *A est régulière si et seulement si $|A| \neq 0$, A est régulière rang $A = n \Rightarrow N = I_n$ et $A = P^{-1}Q^{-1}$ et $|A| \neq 0$.*

Définition 5.1.1.

- ▷ Mineur : déterminant d'une mineure de A,
- ▷ Cofacteur de l'élément a_{ij} : $C_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{\{ij\}}\right|$. ($A_{\{ij\}}$ mineur de A obtenue en éliminant la i^{me} ligne et la j^{me} colonne),
- ▷ Comatrice : matrice des cofacteurs $\text{com}(\text{A}) = (C_{ij})$,
- ▷ Adjointe : transposée de la comatrice $\text{adj}(\text{A}) = (C_{ji}) = \text{com}(\text{A})^T$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ C_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

d'où :

$$\text{com}(\text{A}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix},\quad \text{adj}(\text{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemples d'utilisation de certaines propriétés

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Van der Monde

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 & \lambda_3 - \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2).$$

Matrice carrée d'ordre 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

5.2 Applications

5.2.1 Inverse d'une matrice

Soit A une matrice régulière (rang$A = n$, $\det \mathrm{A} \neq 0$), on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\mathrm{adj}\,(\mathrm{A}))$$

En reprenant : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 6 + 4 + 12 - 9 - 4 - 8 = 1$ d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5.2.2 Résolution d'un système d'équations linéaires

Règle de Cramer

Soit A une matrice carrée d'ordre n et K un vecteur colonne d'ordre n, si $|A| \neq 0$, le système d'équations linéaires $AX = K$ possède une solution unique : $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ donnée par $x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad i = 1, 2, \dots n$ avec A_i la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i^{me} colonn epar K.

Exemple : $\begin{cases} r + 2s + t = 4 \\ r - s + t = 5 \\ 2r + 3s - t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A

vaut : $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 9$. Les solution sont les suivantes :

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{20}{9}$$

$$s = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$t = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \frac{22}{9}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{22}{9} \end{pmatrix}$$

Si le déterminant $|A| = 0$ on ne peut pas résoudre, il faut alors utiliser la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

Matrices partitionnées : formule de Schur Si A est diagonale par blocs ou triangulaire par blocs.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(les matrices A_{ii} sont carrés, $i \in \{1, \ldots, n\}$), alors : $|A| = |A_{11}|\,|A_{22}|\ldots|A_{nn}|$.

Soit une matrice partitionnée de la forme : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec A_{11} et A_{22} carrées. Les résultats suivants constituent les formules de Schur :

▷ Si $A_{11} est$ régulière :

$$|A| = |\mathrm{A}_{11}|\left|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right|$$

(car avec $V = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$, $VA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-}A_{12} \end{pmatrix}$ puis $|VA| = |V|\,|A| = |A|$). □

▷ Si A_{22} est régulière :

$$|A| = |A_{22}|\left|A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right|$$

Application

Soient $A_{(m\times n)}$ et $B_{(n\times m)}$, $|I_m - AB| = |I_m - BA|$.

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} I_m & A_{(m\times n)} \\ B_{(n\times m)} & I_n \end{pmatrix}$ à l'aide de la forme de Schur :

$$|M| = |I_m|\,|I_n - BA| = |I_n|\,|I_m - AA|$$

□

Chapter 6

Inversions Matricielles

6.1 Définitions et Propriétés

Définition 6.1.1. $B/BA = BA = I$, $B = A^{-1}$, A est régulière et non singulière. A est inversible si $\text{rang}A = n$ ou $\det A \neq 0$.

Propriété 6.1.1. $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$, $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$, $(A^{-1})^H = \left(A^H\right)^{-1}$, $\frac{dA^{-1}(\alpha)}{d\alpha} = -A^{-1}(\alpha)\frac{dA(\alpha)}{d\alpha}A^{-1}(\alpha)$ *(car* $A(\alpha)A^{-1}(\alpha) = I \Rightarrow A(\alpha)\frac{dA^{-1}(\alpha)}{d\alpha} + \frac{dA(\alpha)}{d\alpha}A^{-1}(\alpha) = 0$*)*

Lemme 6.1.1. *d'inversion matricielle : soit une matrice* $A + BCD$ *régulière et* A *et* C *régulière :*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}.$$

Remarque 6.1.1. Si B matrice colonne, D matrice ligne et C scalaire $\neq 0$

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - \frac{C}{1 + CDA^{-1}B}A^{-1}BDA^{-1}$$

Inverse de matrices partitionnées

Soit A une matrice régulière

$$A = \begin{pmatrix} A_{11_{(p\times p)}} & A_{12_{(p\times q)}} \\ A_{21_{(q\times p)}} & A_{22_{(q\times q)}} \end{pmatrix}$$

avec A_{11} et A_{22} carrée et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11_{(p\times p)}} & X_{12_{(p\times q)}} \\ X_{21_{(q\times p)}} & X_{22_{(q\times q)}} \end{pmatrix}$$

avec $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$X_{11}A_{11} + X_{12}A_{21} = A_{11}X_{11} + A_{12}X_{21} = I$ si A est régulière.

$X_{11}A_{12} + X_{12}A_{22} = A_{11}X_{12} + A_{12}X_{22} = 0$

$X_{21}A_{11} + X_{22}A_{21} = A_{21}X_{11} + A_{22}X_{21} = 0$

$X_{21}A_{12} + X_{22}A_{22} = A_{21}X_{12} + A_{22}X_{22} = I \to X_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}X_{22}$, $X_{21} = -X_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$, $X_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}X_{21} \Rightarrow X_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}X_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$.

$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)X_{22} = I$ or X_{22} existe puisque A^{-1} existe donc :

$$X_{22} = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned} X_{11} &= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}X_{22}A_{21}A_{11}^{-1} \\ X_{12} &= -A_{11}^{-1}A_{12}X_{22} \\ X_{21} &= -X_{22}A_{21}A_{11}^{-1} \end{aligned}$$

Si A_{11} est singulière on utilise A_{22} en lieu et place de A_{11} et :

$$\begin{aligned} X_{11} &= \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} \\ X_{12} &= -X_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \\ X_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}X_{11} \\ X_{22} &= A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}X_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \end{aligned}$$

Formules permettant par recurrence décroissante de calculer l'inverse d'une matrice :

$$M_{((n+1)\times(n+1))} = \begin{pmatrix} A_{(n\times m)} & b_n \\ c_n^T & a_n \end{pmatrix}$$

avec $b_{n_{(n\times 1)}}$, $c^T_{n_{(1\times n)}}$ et $a_{n_{(1\times 1)}}$.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & -X\frac{b_m}{a_n} \\ -\frac{c_n^T}{a_n}X & \frac{1}{a_n^2}\left(a_n + c_n^T X b_n\right) \end{pmatrix}$$

et $X = \left(A - \frac{b_n c_n^T}{a_n}\right)^{-1}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = 4$.

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} \cdot 4$$

$X = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Xb_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2^T X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$ d'où :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapter 7

Équation caractéristique d'une matrice

7.1 Définitions, propriétés

Soit $A_{(n\times n)}$ une matrice carrée, on appelle valeurs propres les valeurs complexes qui rendent singulières sa matrice caractéristique $\lambda I_m - A$.

Elles sont donc racines de $|\lambda I_m - A| = 0$.

Elles vérifient : $AX = XA$.

Tout vecteur X non nul vérifiant cette égalité est appelé vecteur propre. L'espace engendré par les vecteurs propres s'appelle l'espace propre.

$P(\lambda) = |\lambda I_m - A|$ s'appelle le polynôme caractéristique de A, il est de degré n en λ :

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda$$

En écrivant : $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_m)$ avec λ_i les vecteurs propres alors :

$$\alpha_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\mathrm{trace}(A)$$

$$\alpha_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n |A|$$

Si $n = 2$ on a donc :

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 - \mathrm{trace}(A)\,\lambda + |A|$$

Exemple : Trouver les valeurs et vecteurs propres associés à $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 \underbrace{-7}_{-\mathrm{trace}(A)} \lambda^2 + 11\lambda \underbrace{-5}_{(-1)^3\det(A)} = (\lambda - 5)(\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = 5$ valeur propre simple.

$\lambda_2 = 1$ valeur propre double. Pour $\lambda = 5$ on a donc $(5I - A)\,X = 0$ ce qui donne donc :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5I - A \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5I - A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$x_2 = x_3$, $x_1 = x_3$ et $(1\ 1\ 1)^T$ vecteur propre.

Tout vecteur $(k\ k\ k)^T$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 5$.

$$A = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

$$I - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

par exemple : $X_1 = (1\ 0\ -1)^T$ et $X_2 = (-1\ 1\ -1)^T$ sont des vecteurs popres indépendants, et donc $\forall X = k_1X_1 + k_2X_2$, X est vecteur propre associé à la valeur 1. $X = (k - k\ k\ -k - k)^T$ espace propre.

Théorème 7.1.1. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres disctinctes, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des vecteurs propres respectivement associés à ces valeurs propres alors les vecteurs propres sont linéairement indépendants.*

Théorème 7.1.2. *de Cauchy-Hamilton, Toute matrice est solution de son polynôme caractéristique :* $P(A) = 0$ *ou :* $-A^n = \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$

Chapter 8

Matrices semblables

8.1 Définitions et Propriétés

Définition 8.1.1. Deux matrices A et B d'ordre n sont semblables s'il existe une matrice non-singulière R telle que : $B = R^{-1}AR$.

Propriété 8.1.1.
▷ *deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres*

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= \left|R^{-1}\right| |\lambda I - A| \, |R| \\ &= |\lambda I - A| \end{aligned}$$

(car $\lambda I - B = \lambda R^{-1}R - R^{-1}AR = R^{-1}(\lambda I - A)\, R$)
▷ *Si Y est un vecteur propre de $B = R^{-1}AR$ associé à λ_i de B, alors $X = RY$ est un vecteur propre de A associé à λ_i de A :*

$$BY = R^{-1}ARY = \lambda Y \Leftrightarrow ARY = \lambda RY \Leftrightarrow AX = \lambda X \;\; avec \; X = RY$$

8.2 Matrices diagonales

Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont les éléments diagonaux. Une matrice diagonale a toujours n vecteurs propres linéairement indépendants quand elle est d'ordre n et les E_i de la base canonique sont vecteurs propres :

$$DE_i = a_iE_i \qquad \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & a_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 8.2.1. *Une matrice A est semblable à une matrice diagonale si et seulement si elle a n vecteurs propres linéairement dépendants.*

Ce qui revient à

Théorème 8.2.2. *Dans un corps $\mathbb{R}$, une matrice A d'ordre n est semblable à une matrice diagonale si et seulement si $\lambda I - A$ se factorise complètement sur $\mathbb{K}$ et si l'ordre de toute racine λ_i est égal à la dimension de l'espace propre associé.*

Si l'on reprend l'exemple précédent : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ on a : $A_1 = 5$, $X_1 = (1\ 1\ 1)^T$, $A_2 = 1$, $X_2 = (1\ 0\ -1)^T$, $X_3 = (-1\ 1\ -1)^T$espace propre de dimension 2 qui est diagonalisable avec :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = (X_1\ X_2\ X_3) \quad R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

$$R^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier : $AR = RD$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Démonstration de $R^{-1}AR = D$: $AR = RD$, $AR = A(X_1 \dots X_n) = (AX_1 \dots AX_n)$, $RD = (X_1 \dots X_n)\,D$ comme D diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $RD = (\lambda_1 X_1, \dots, \lambda_n X_n)$ d'où $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ AX_i = \lambda_i X_i$.

Théorème 8.2.3. *toute matrice A d'ordre n est semblable à une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.*

8.3 Matrices symétriques réelles

Théorème 8.3.1. *Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.*

Théorème 8.3.2. *Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors $\exists P$ orthogonale $/ P^T AP = P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*

Pour trouver P, il faut trouver des veteurs propres orthogonaux puis les normer.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^3 - (\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) =$ $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

$\lambda = 1 : I - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$, $V_1 = (1\ 0\ 1)^T$

$\lambda = 2 : 2I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_1 = x_3 = 0$, $V_2 = (0\ 1\ 0)^T$, $V_2^T V_1 = 0$ (othogonaux)

$\lambda = 3 : 3I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = -x_3 = 0, x_2 = 0, V_3 = (1\ 0\ -1)^T, V_3^T V_1 = V_3^T V_2 = 0$ (orthogonaux)

d'où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et normalisée : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$ $P^{-1}AP = P^T AP$.

Chapter 9

Formes quadratiques

9.1 Définition et propriétés

$A = (a_{ij})$ matrice carrée d'ordre n.

$$f_A : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ / \ f_A(X,Y) = X^T A Y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

avec $X^T = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y^T = (y_1, \ldots, y_n)$.

Définition 9.1.1. La fonction f_A est appelée forme bilinéaire d'ordre n associée à A. Elle est symétrique si A est symétrique.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $f_A(x,y) = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $f_A(x,y) = a_{11}x_1y_1 +$ $a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$.

9.2 Forme quadratique

Une forme quadratique d'ordre n est une fonction du type :

$$q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad q_A(X) = X^T A X$$

avec A matrice symétrique d'ordre n.

Remarque 9.2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $q_A(X) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$ avec $X^T = (x_1\ x_2)$ on aurait pu prendre : $A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ mais on choisit le seul représentant des matrices qui soit symétrique.

On peut donc très facilement passer de la forme quadratique à la matrice et inversement. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad q_A(X) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

$$q_A(X) = -x_1^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - 5x_1x_3 \; A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Par définition, le rang d'une forme bilinéaire ou d'une forme quadratique associée à A est le rang de A.

Définition 9.2.1. une forme quadratique q ou par extension la matrice A symétrique associée est dite :
▷ définie positive si $q(X) > 0 \; \forall X \in \mathbb{R}^n \quad (X \neq 0) \quad (A > 0)$
▷ semi-définie positive si $q(X) \geq 0 \; \forall X \in \mathbb{R}^n \quad (A \geq 0)$
▷ définie négative si $q(X) < 0 \; \forall X \in \mathbb{R}^n \quad (X \neq 0) \quad (A < 0)$
▷ semi-définie négative si $q(X) \leq 0 \; \forall X \in \mathbb{R}^n \quad (A \leq 0)$
▷ indéfinie si $\exists X / q(X) > 0$ et $\exists X' / q(X') < 0$

Exemple : $q(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2$ est > 0 puisque tous les termes sont > 0 donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} > 0$. $q(X) = x_1^2 + 2x_3^2$ est ≥ 0 puisque pour $x_2 \neq 0$, $q\left((0 \; x_2 \; 0)^T\right) = 0$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$. $q(X) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ est indéfinie car :$q\left((1 \; 0)^T\right) = 1 > 0$, $q\left((1 \; 1)^T\right) = -1 < 0$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \geq 0$ est indéfinie.

Remarque 9.2.2. $A > 0$ si et seulement $-A < 0$ ($A \geq 0$ si et seulement si $-A \leq 0$)
$q(X) = X^T A X > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \; X \neq 0$
$-q(X) = -X^T A X = X^T(-A)X < 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \; X \neq 0$ □

Correspond en fait à la généralisation de la notion de carré. Dans le cas scalaire : $q(X) = ax^2$ et donc $q(X) > 0 \Rightarrow a > 0$.

Ici on cherche les mêmes propriétés, sauf qu'il peut y avoir des cas où A n'est ni positive, ni négative.

Propriété 9.2.1. *Une forme quadratique diagonale, ou une matrice diagonale d'ordre n* $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$ *est :*
$\triangleright$ $A > 0$ *si* $\forall i$ $a_i > 0$,
$\triangleright$ $A < 0$ *si* $\forall i$ $a_i < 0$,
$\triangleright$ $A \geq 0$ *si* $\forall i$ $a_i \geq 0$,
$\triangleright$ $A \leq 0$ *si* $\forall i$ $a_i \leq 0$,
$\triangleright$ *indéfinie si il existe des éléments non nuls de signe opposé.*

L'application linéaire non singulière $X = BY$ transforme la forme quadratique X^TAX en la forme quadratique : $Y^T\left(B^TAB\right)Y$ et évidemment B^TAB est symétrique $(\left(B^TAB\right)^T = B^TA^TB = B^TAB)$, les matrices A et B sont dites congruentes si $\exists P \ / \ B = P^TAP$.

Une forme quadratique de rang r peut se réduire à la forme diagonale :

$$h_1x_1^2 + \cdots + h_rx_r^2 \ \ (h_i \neq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, r\})$$

Pour passer à la forme diagonale on utilise encore et toujours le même algorithme, cette fois-ci simplement comme la matrice A est symétrique les opérations élémentaires appliquées sur les lignes sont identiques à celles appliquées sur les colonnes et donc : $D = B^TAB$.

Exemple : $q_A = x_1^2+2x_2^2-7x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ $|A| = -14-32+28 \neq 0$

Rang $A = 3$.

$$(A \mid I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & -23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & -23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc les opérations sur les lignes suffisent puisque A étant symétrique les opérations sur les colonnes sont identiques.

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $D = B^TAB$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = BY$. D'où si

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \text{alors } q\,(Y) = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$$

donc la matrice A est indéfinie.
On peut continuer la réduction en gardant les matrices B et B^T avec :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ on a } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 9.2.1. *toute forme quadratique réelle peut être réduite par une application réelle non singulière à la forme canonique $\alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_r y_r^2$, où $\alpha_i = 1$ ou -1 et r est le rang de la forme quadratique.*

Théorème 9.2.2. *Une matrice $A_{(n\times n)}$ est définie positive si et seulement si :*
▷ $X^TAX > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \quad X \neq 0$,
▷ *Toutes les valeurs propres de A sont strictement positives,*
▷ *A^{-1} existe et elle est définie positive,*
▷ *tous les mineurs principaux successifs de la matrice A sont > 0,*
▷ *décomposition de Choleski :*
A possède une factorisation triangulaire $A = U^TU$, où U est une matrice triangulaire suupérieure à diagonale positive.

Remarque 9.2.3. Pour Cholesky :
$\Rightarrow$ si A est définie positive, elle est congruente à une matrice diagonale D qui a tous ses termes positifs. Par transformation $\frac{1}{\sqrt{\alpha_i}}$ sur chaque élément, elle est congruente à l'identité. Donc $\exists P$ triangulaire supérieure $/X - PY$ et : $I = P^TAP$ avec P triangulaire supérieure, d'où : $A = P^{-T}IP^{-1}$ et en prenant $U = P^{-1}$ on a :

$$A = U^TU \text{ et } T \text{ triengulaire infrieure.}$$

$\Leftarrow$ si on a $A = U^TU$ $q_A(X) = X^TU^TUX = (UX)^T UX = y^Ty = y_1^2 + \ldots + y_r^2 > 0$ et donc $q_A(X) = 0 \Rightarrow U^TX = 0 \Rightarrow X = 0$ (car U est inversible).

Mineurs principaux_successifs : $p_1 = a_{11}, p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots p_n =$ $|A|$.

Exemple : $q_A = x_1^2 + 3x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 8x_2x_3$ d'où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 11 \end{pmatrix}$ on a $p_1 = 1$,

$p_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$, $p_3 = |A| = 33 - 16 - 11 = 6$ donc A est définie positive.

Décomposition de Cholesky :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = B^T AB \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis : $D \cdot B^T \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Donc : $I = P^T AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ et $U = P^{-1}$

D'où $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ & & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $A = U^T U$.

Chapter 10

Systèmes différenciels

10.1 Propriétés et Définitions

$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$ avec $X(t) = (x_1(t) \ \ldots x_n(t))^T$ avec $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$
$A = (a_{ij})_{(n\times n)}$ et $t \in \mathbb{R}$.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t)$$

n équations différentielles du premier ordre.

10.2 Cas scalaire

$\dot{x}(t) = ax(t)$ la solution d'une telle équation différentielle est donnée par $x(t) = e^{at}x(0)$ avec $x(0)$ les conditions initiales (CI).

Le développement limité de e^{at} s'écrit $e^{at} = 1 + at + \frac{a^2}{2}t^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} t^i$.

10.3 Cas matriciel

Par ananlogie : soit $P(t) = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} t^i$. Soit $X(t) = P(t)X(0)$ ($\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right)$).

$\frac{dP(t)}{dt} = A + A^2 t + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} A^i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = A \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} = A \cdot P$ d'où : $\frac{dX(t)}{dt} = A \cdot P(t) A(0) = AX(t)$
donc $X(t) = P(t)X(0)$ est solution de l'équation différentielle matricielle.

On appelle donc exponentielle de matrice :

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} t^i.$$

10.4 Évaluation de e^{At}

10.4.1 Calcul numérique

Par calcul numérique avec arrêt quand les termes deviennent négligeables ou si A est nilpotente ($\exists k \in \mathbb{N} / A^k = 0$).

Exemple : $\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t)$ on fait correspondre à $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = 0 \Rightarrow x_2(t) =$

$x_2(0)$ et $x_1(t) = x_2(0)\,t + x_2(0) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0$.

$A^2 = 0$ d'où : $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la solution est : $X(t) =$

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0$

10.4.2 A diagonale

$A = \mathrm{diag}(\lambda_i) \quad i \in \{1, \ldots, n\}$ $e^{At} = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i t}\right)$ car $e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathrm{diag}(\lambda_i))^j \frac{t^j}{j!} = \mathrm{diag}\left(\sum_{\mathrm{j=0}}^{\infty} \lambda_i^j \frac{t^j}{j!}\right) =$ $\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i t}\right)$.

10.4.3 Utilisation de la formule de Sylverster

Soit $P_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + \lambda^n$ le polynôme caractéristique de A d'après Cauchy-Hamilton : $P_A(A) = 0$ donc $A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$ avec $e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j$, toute puissance de A, A^k avec $k \geq n$ peut donc s'écrire en fonction de $n-1$ premières matrices d'où :

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j A^j \text{ (Formule de Sylvester)}$$

Soit la fonction : $g(A) = e^{\lambda t} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\,\lambda^i$ on a : $g(A) = e^{At} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\,A^i$

Or si λ_j est une valeur propre de A d'ordre de multiplicité n_j, alors $g(\lambda_j)$ est une valeur propre de $g(A)$ d'ordre de multiplicité n_j (d'après : si λ valeur propre d'ordre n, $f(\lambda)$ valeur propre d'ordre n de $f(A)$ quelque soit f une fonction scalaire).

Or $g(A) = 0$ donc la matrice $g(A)$ a n valeurs propres nulles d'où $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $g(\lambda_j) = 0$ et donc $e^{\lambda_j t} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j(t)\,\lambda_j^i$.

λ_i valeur propre d'ordre $n_j \rightarrow g(\lambda_i)$ valeur propre de $g(A)$ d'ordre n_j or toutes les valeurs propres de $g(A)$ sont nulles donc $\lambda_{g(A)} = 0 = g(\lambda_i)$.

$\Rightarrow$ pour trouver e^{At} il suffit de travailler sur les $e^{\lambda_j t}$. Comme l'ordre de multiplicité est n_j par λ_j :

$$\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} g(\lambda)\right)_{\lambda=\lambda_j} = 0$$

ou

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(e^{\lambda t} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\lambda^i\right)_{\lambda=\lambda_j=0} \qquad \forall k \in \{0,\ldots,n_j-1\}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$ valeur propre : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda$ soit $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -10$ donc

e^{At} a comme valeur propre 1 et e^{-10t}.
$e^{0\cdot t} = \alpha_0(t) + 0 \cdot \alpha_1(t) \Rightarrow \alpha_0(t) = 1$
$e^{-10\cdot t} = \alpha_0(t) - 10 \cdot \alpha_1(t) \Rightarrow \alpha_1(t) = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-10t}\right)$ d'où

$$\begin{aligned} e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10}\left(1-e^{-10t}\right) \\ 0 & -1+e^{-10t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10}\left(1-e^{-10t}\right) \\ 0 & e^{-10t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ valeur propre $0, 0 \Rightarrow$ une valeur propre double de e^{At}. $e^{0\cdot t} = \alpha_0(t) + 0 \cdot \alpha_1(t)$ $\rightarrow \alpha_0(t) = 1$. $\frac{d}{d\lambda}\left(e^{\lambda t} - \alpha_0\left(t - \lambda\alpha_1(t)\right)\right)_{\lambda=0} = \left(te^{\lambda t} - \alpha_1(t)\right)_{\lambda=0} = 0$ d'où : $\alpha_1(t) = t$ et donc $e^{At} = I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

Chapter 11

Quelques extras

11.1 Forme de Jordan

Elle est formée de blocs.

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & & \\
& & \ddots & 1 & & & & 0 & & \\
& & & \lambda_1 & & & & & & \\
& & & & \lambda_2 & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & \lambda_p & 1 & & 0 \\
& & 0 & & & & & \ddots & \ddots & \\
& & & & & & & & \ddots & 1 \\
& & & & & & & & & \lambda_p
\end{pmatrix}$$

Toute matrice peut se mettre sous la forme de Jordan.

On appelle rayon spectral d'une matrice A, le plus grand module des valeurs propres de A.

$$\rho\left(A\right) = \sup_{i \in \{1 \ldots n\}} |\lambda_i|$$

11.2 Matrice compagne

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\lambda I - C| &= \begin{vmatrix} \lambda & & & & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & & & \alpha_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & & & -1 & \lambda + \alpha_{n-1} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & & 0 & \alpha_1 \\ -1 & \ddots & & \alpha_2 \\ & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & & -1 & \lambda + \alpha_{n-1} \end{vmatrix} + \alpha_0 \\ &= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & & 0 & \alpha_2 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & & -1 & \lambda + \alpha_{n-1} \end{vmatrix} + \lambda\alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

d'où $P_c(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ le polynôme caractéristique est immédiat.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ calculer e^{At} et le rayon spectral.

$P_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = 0$ valeur propre double, $\lambda = -1$. $e^{\lambda t} = \alpha_0(t) + \lambda\alpha_1(t) + \lambda^2\alpha_2(t)$.

$\frac{d}{dt} \rightarrow te^{\lambda t} = \alpha_1(t) + 2\lambda\alpha_2(t)$

$\lambda_1 = 0$: $\alpha_0(t) = 1$ et $\alpha_1(t) = t$

$\lambda_2 = -1$: $e^{-t} = 1 - t + \alpha_2$ et $\alpha_2(t) = t - 1 + e^{-t}$

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t-1+e^{-t} & -t+1-e^{-t} & t-1+e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t-1+e^{-t} & 1-e^{-t} & -e^{t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

et 1 est une valeur propre double et e^{-t} valeur propre simple de e^{At}.