Herramientas Econométricas

Profesor Ricardo Pasquini

Octubre, 2020

Modelo Lineal Supuestos y Propiedades

Si las observaciones provienen de una muestra aleatoria y satisfacen la el modelo lineal

$$y_i = x_i' \beta + e_i$$

Vamos a considerar ambos casos homocedasticidad y heterocedasticidad.

El estimador de OLS es insesgado

- En promedio nuestro estimador obtiene el valor de β correcto.

$$E[\hat{\beta}] = \beta$$

Varianza del estimador de OLS

- En el caso de error homocedástico la varianza es

$$V_{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}\sigma^2$$

- Por ejemplo, en el caso del modelo $y = \beta_0 + \beta_1 X + e$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

Varianza del estimador de OLS

- En el caso de error heterocedastico la varianza es

$$V_{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'DX)(X'X)^{-1}\sigma^2$$

donde $D = E(\mathbf{ee}'|X)$ o dicho de otra forma la matriz que tiene $E(e_i^2|x_i) = \sigma_i^2$ en la diagonal y $E(e_i^2 e_j^2|X)$ fuera de la diagonal.

$$(X'DX) = \sum_i^n x_i x_i' \sigma_i^2$$

Estimador de la Varianza del Error

- El estimador del método de momentos es:

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i^2$$

(Recordemos que la varianza del error era el promedio del error al cuadrado)

- El estimador es sesgado cuando cuando tengo pocas observaciones

$$E(\hat{\sigma^2}) = (\frac{n-k}{n})\sigma^2$$

Estimador de la Varianza del Error

- Por eso se utiliza un estimador "bias-corrected", simplemente haciendo un rescaling

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum \hat{e_i^2}$$

Si conocieramos los errores tendríamos un estimador de la varianza insesgado

$$E(V_{\hat{\beta}}^{ideal}|X) = (X'X)^{-1}(\sum_{i}^{n} x_i x_i' E(e_i^2|X))(X'X)^{-1} = V_{\hat{\beta}}$$

Estimador *Robusto* de White

$$V_{\hat{\beta}}^{White} = (X'X)^{-1}(\sum_{i}^{n} x_i x_i' E(\hat{e}_i^2|X))(X'X)^{-1}$$

Scaled White

$$V_{\hat{\beta}}^{White} = \frac{n}{n-k}(X'X)^{-1}(\sum_{i}^{n} x_i x_i' E(\hat{e}_i^2|X))(X'X)^{-1}$$

Otras especificaciones Andrews heteroskedasticity consistent (prediction errors -leave one out), y Horn Horn Duncan heteroskcedasticity-robust (standarized residuals)

Bondad de Ajuste

Partiendo de la relación:

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

Se puede mostrar que se cumple:

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i^2$$

Es decir:

$$\text{SCTotales} = \text{SCExplicado} + \text{SCResiduos}$$

Bondad de Ajuste

Por lo tanto una medida de bondad de ajuste es:

$$R^2 = \frac{\text{SCExplicado}}{\text{SCTotales}} = 1 - \frac{\text{SCResiduos}}{\text{SCTotales}}$$

Bondad de Ajuste

Por definición:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \widehat{e_i^2}}{\sum (y_i - \bar{y_i})^2}$$

Pero cuando incluimos muchas variables esta medida pierde sentido.

Bondad de Ajuste: R^2 ajustado

La arreglamos ajustando por grados de libertad:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum \hat{e_i^2}/(n-k)}{\sum (y_i - \bar{y_i})^2/(n-1)}$$

Test de Hipótesis

- Un test hipótesis de especial interés será convalidar si en la población $\beta_2 = 0$
- Lo formalizamos con el test:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_2 = 0 \\ H_1 &: \beta_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Test de Hipótesis

- Podemos testearlo con:

$$t = \frac{b_2}{se_{b2}} \sim T_{n-k-1}$$

- donde se_{b2} es una medida del error de ajuste de la recta. Más precisamente es el error de ajuste del modelo en general, en relación a la dispersión de la variable que estamos considerando.

Modelo de Regresión *Normal*

Si los errores se distribuyen normalmente

$$\frac{\widehat{\beta}_j - \beta_j}{s(\hat{\beta}_j)} = \frac{\widehat{\beta}_j - \beta_j}{s\sqrt{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{jj}}} \sim \frac{\mathrm{N}\left(0, \sigma^2 \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{jj}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n-k}\chi^2_{n-k}}\sqrt{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{jj}}} = \frac{\mathrm{N}\left(0,1\right)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-k}}{n-k}}} \sim t_{n-k}$$

a t distribution with $n-k$ degrees of freedom.

Distribución T

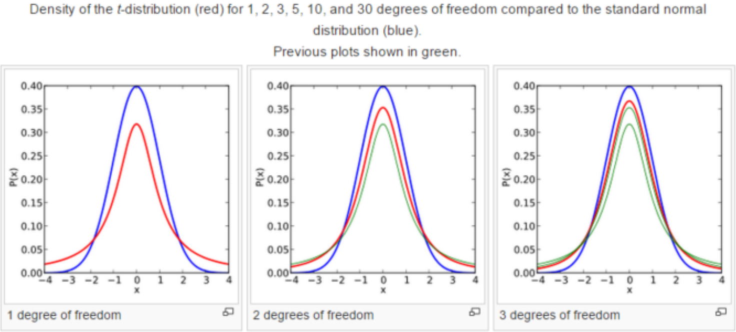

Figure 4: image-20201013200416590

Referencias

- Hansen, B. 2016, Econometrics