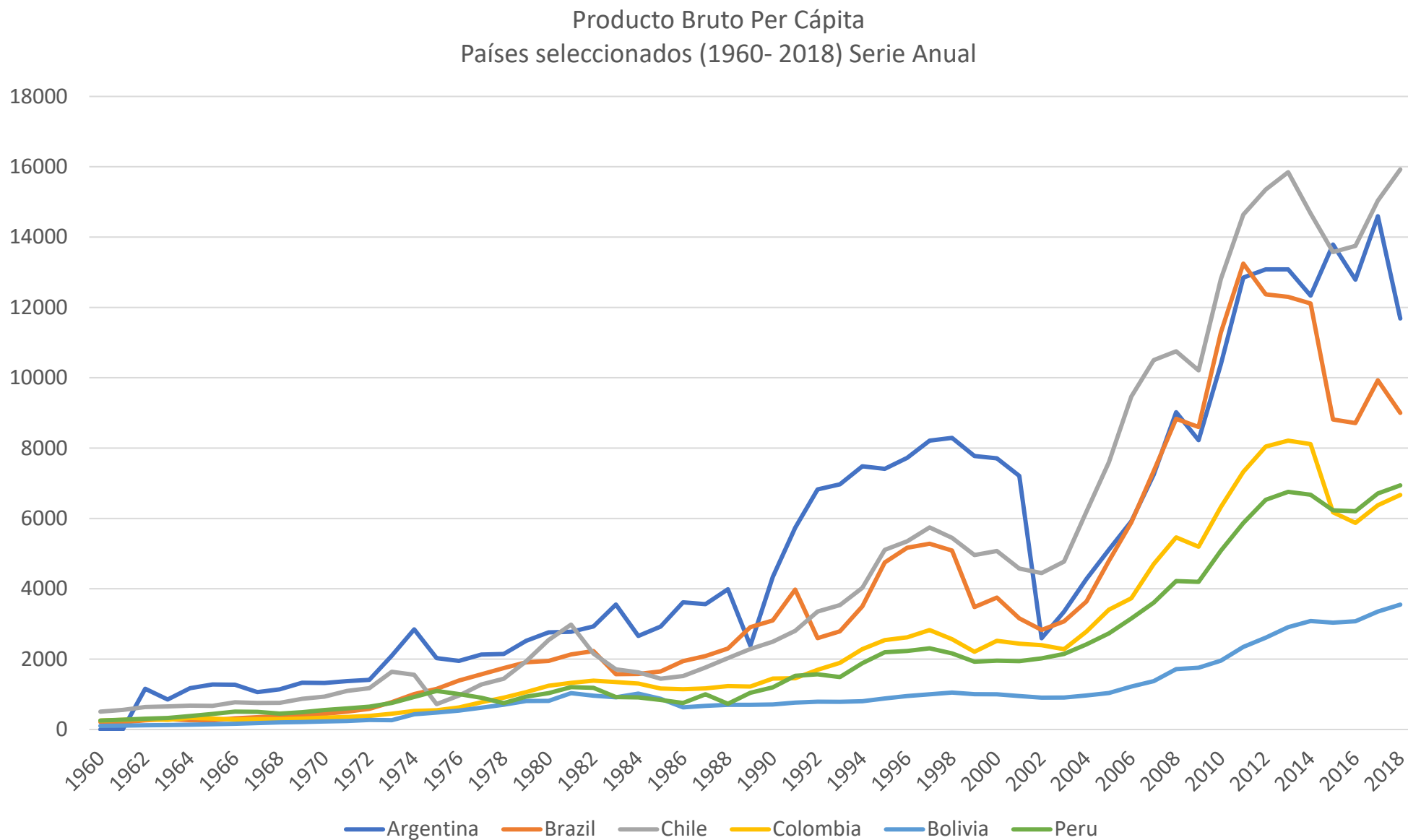


Series de Tiempo

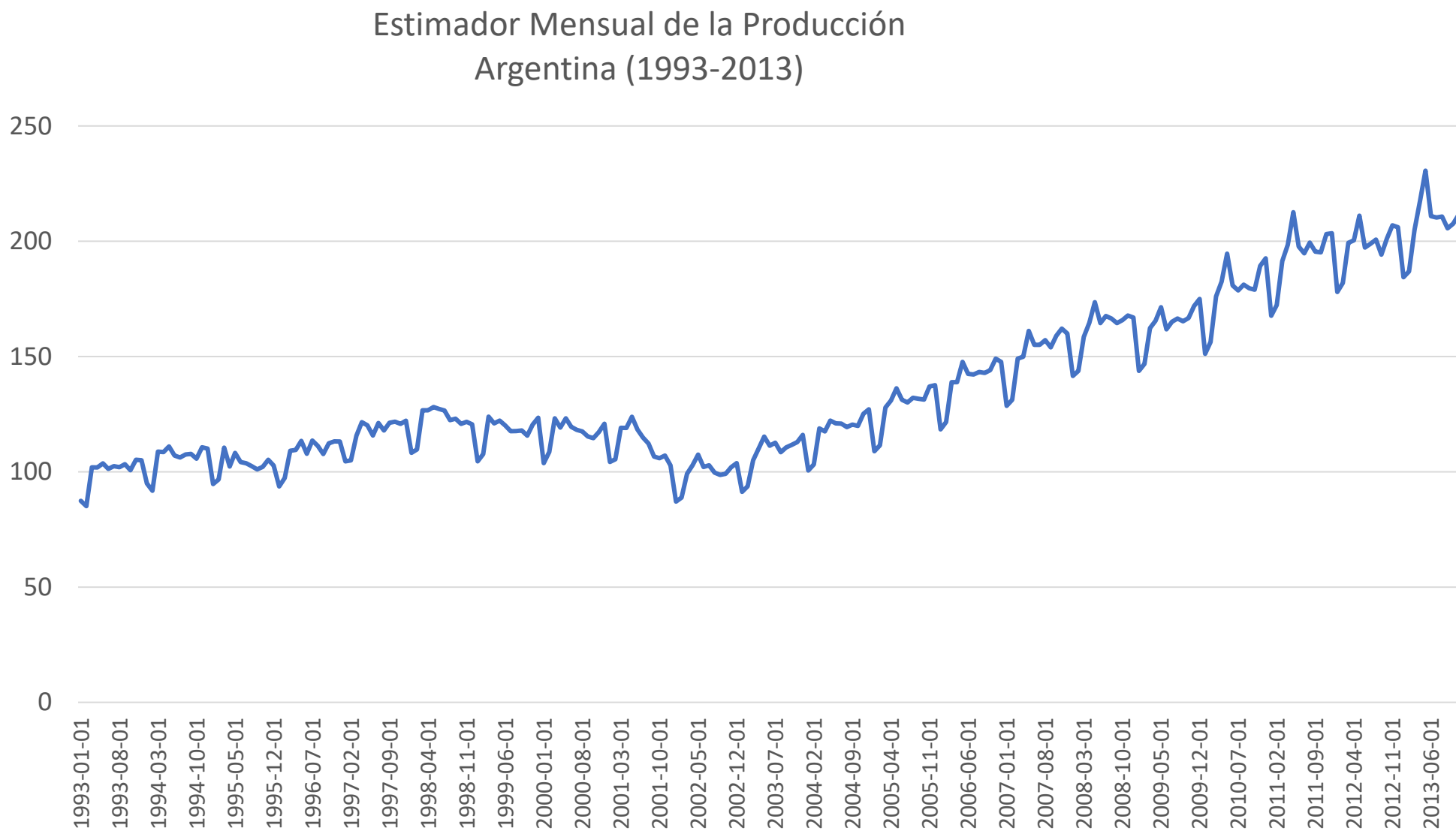
Herramientas Econométricas

Profesor Ricardo Pasquini

Ejemplos de series de tiempo



Ejemplos de series de tiempo



Ejemplos de series de tiempo



Ejemplos de series de tiempo

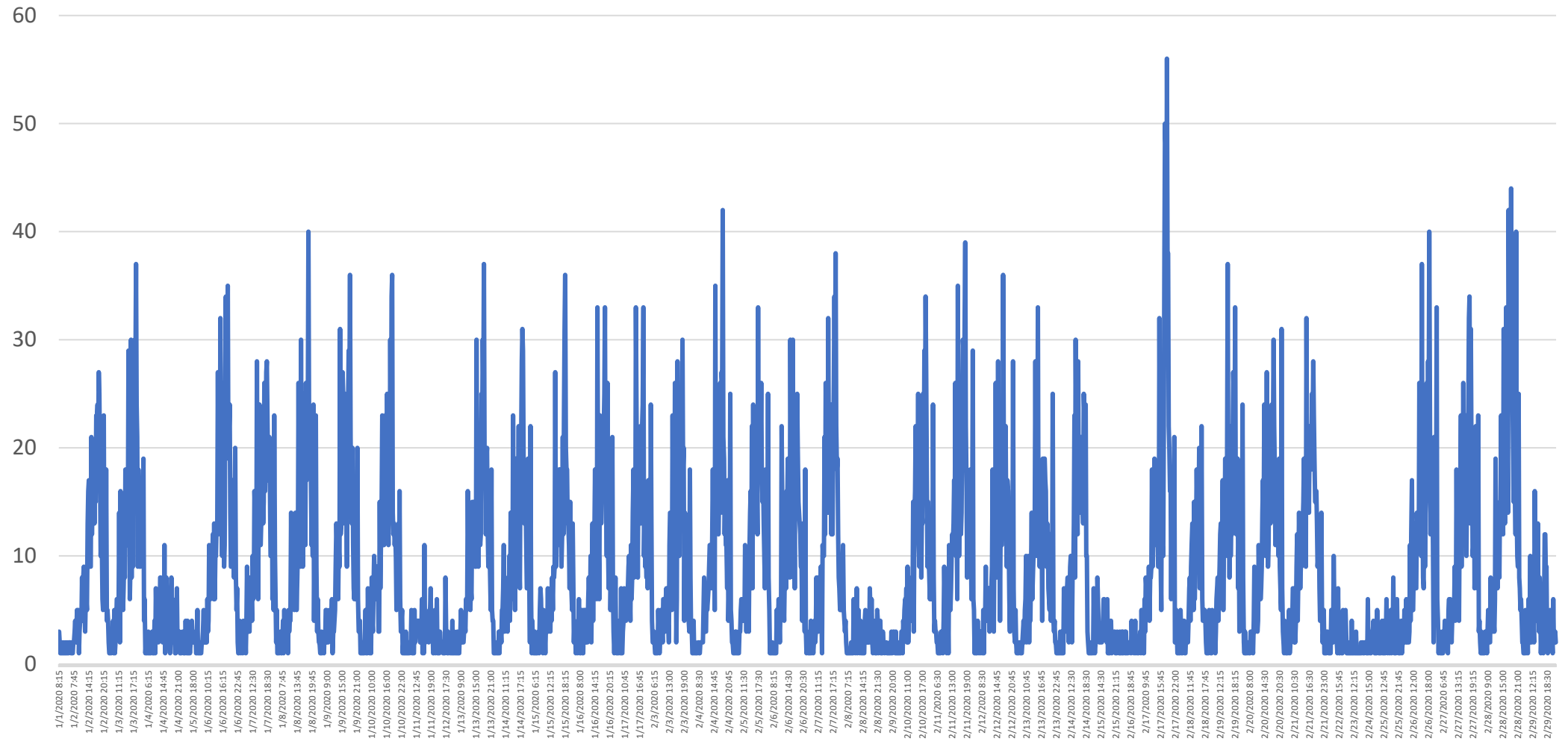


Ejemplos de series de tiempo



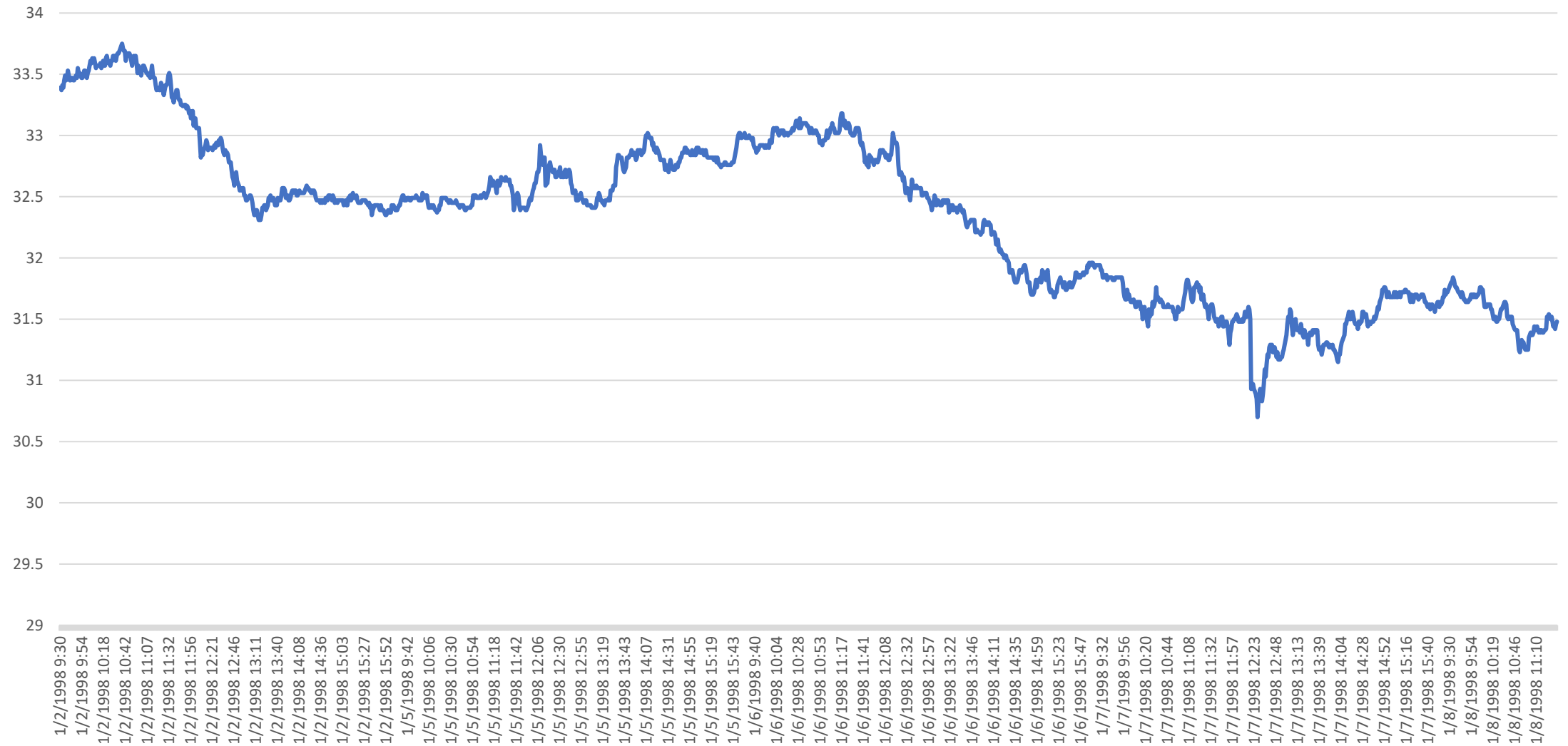
Ejemplos de series de tiempo

Pasajeros molinete línea de Subte
(Ene-Feb 2020) Serie cada 15 minutos



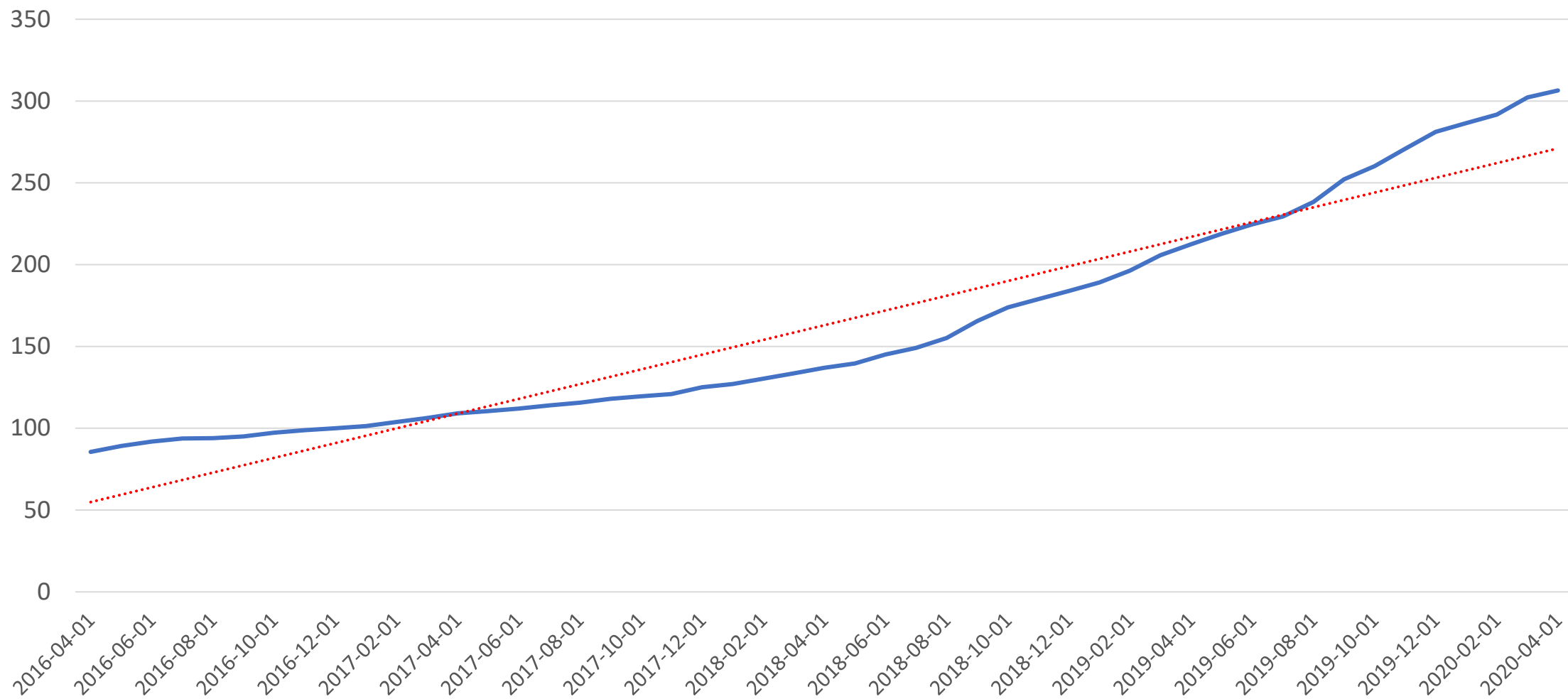
Ejemplos de series de tiempo

Cotización acción IBM
por minuto (2-8/1 1998)



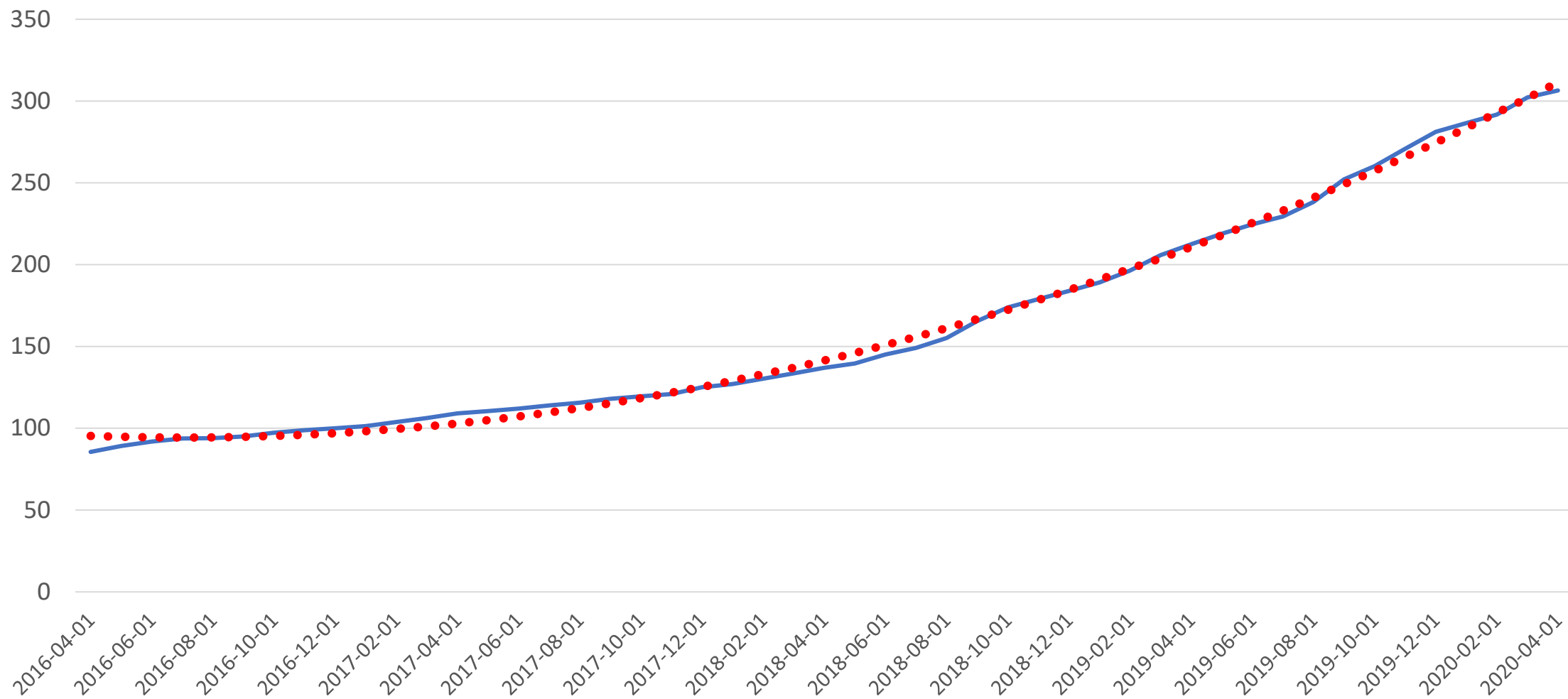
Componentes: Tendencia

Índice de Precios Argentina
(2016-2020) Serie Mensual



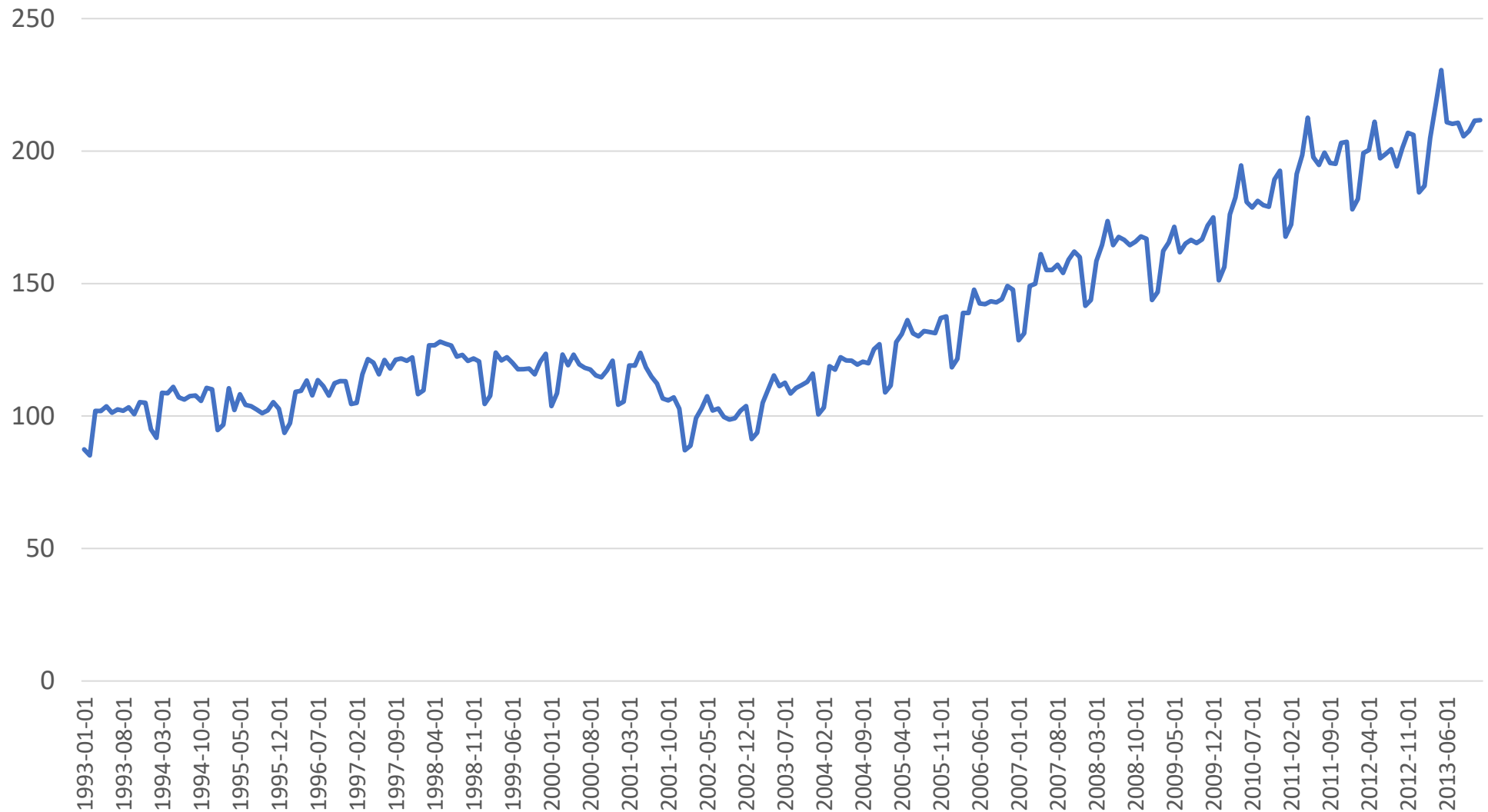
Componentes: Tendencia

Índice de Precios Argentina
(2016-2020) Serie Mensual



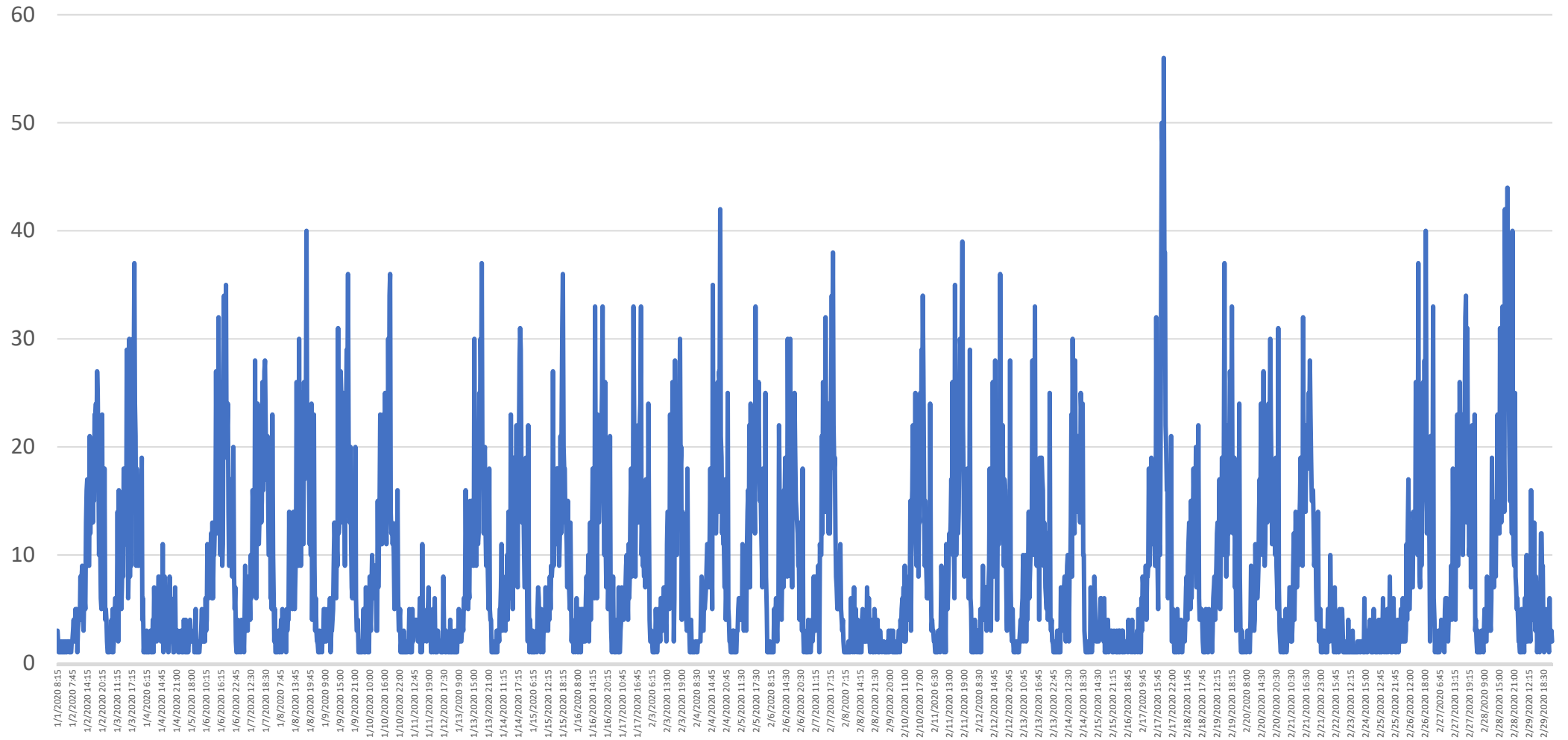
Componentes: Seasonality / Estacionalidad

Estimador Mensual de la Producción Argentina (EMAE)
(1993-2013)

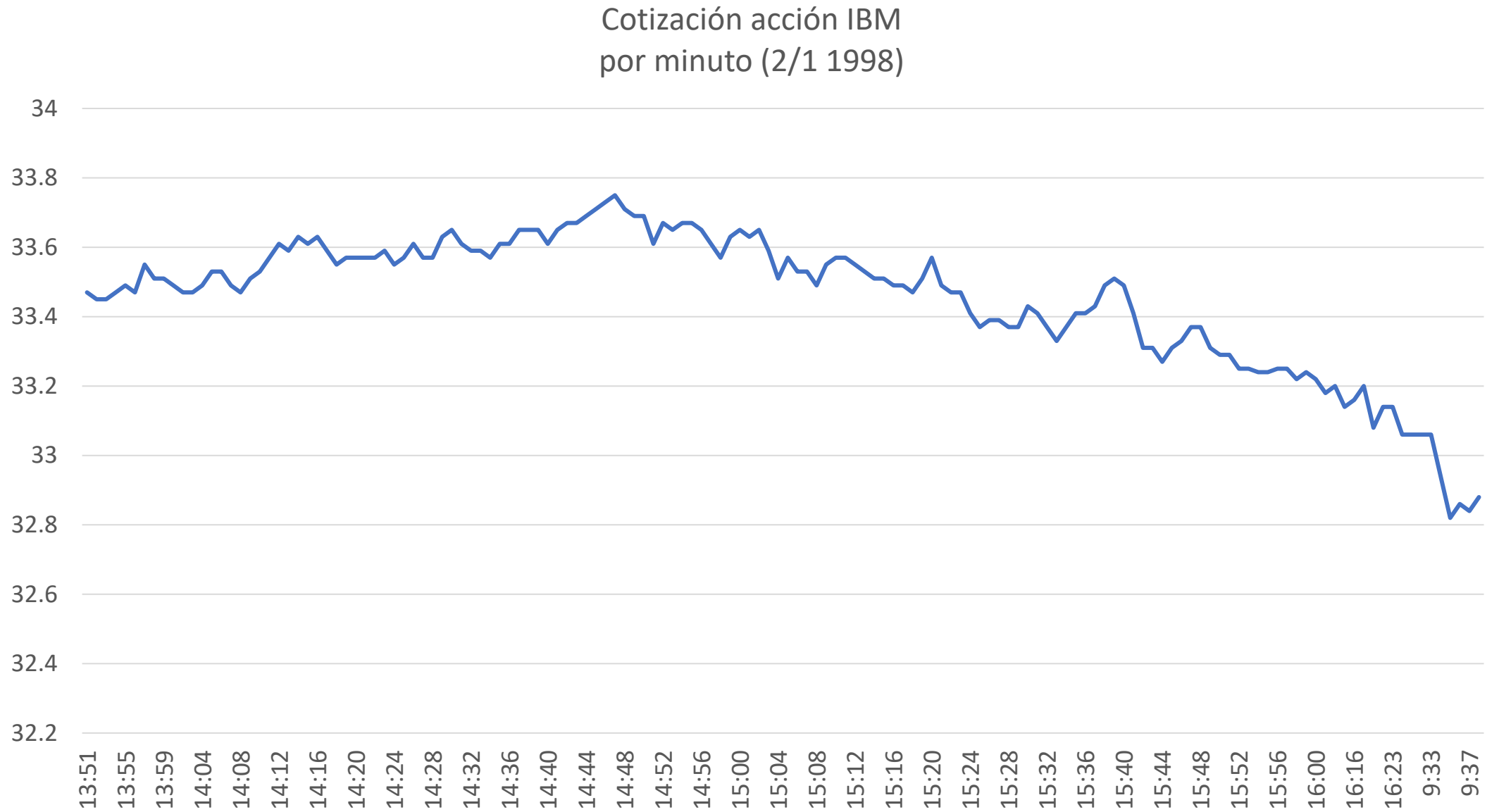


Componentes: Seasonality / Estacionalidad

Pasajeros molinete línea de Subte
(Ene-Feb 2020) Serie cada 15 minutos



Componentes: Autocorrelación



Simulando series

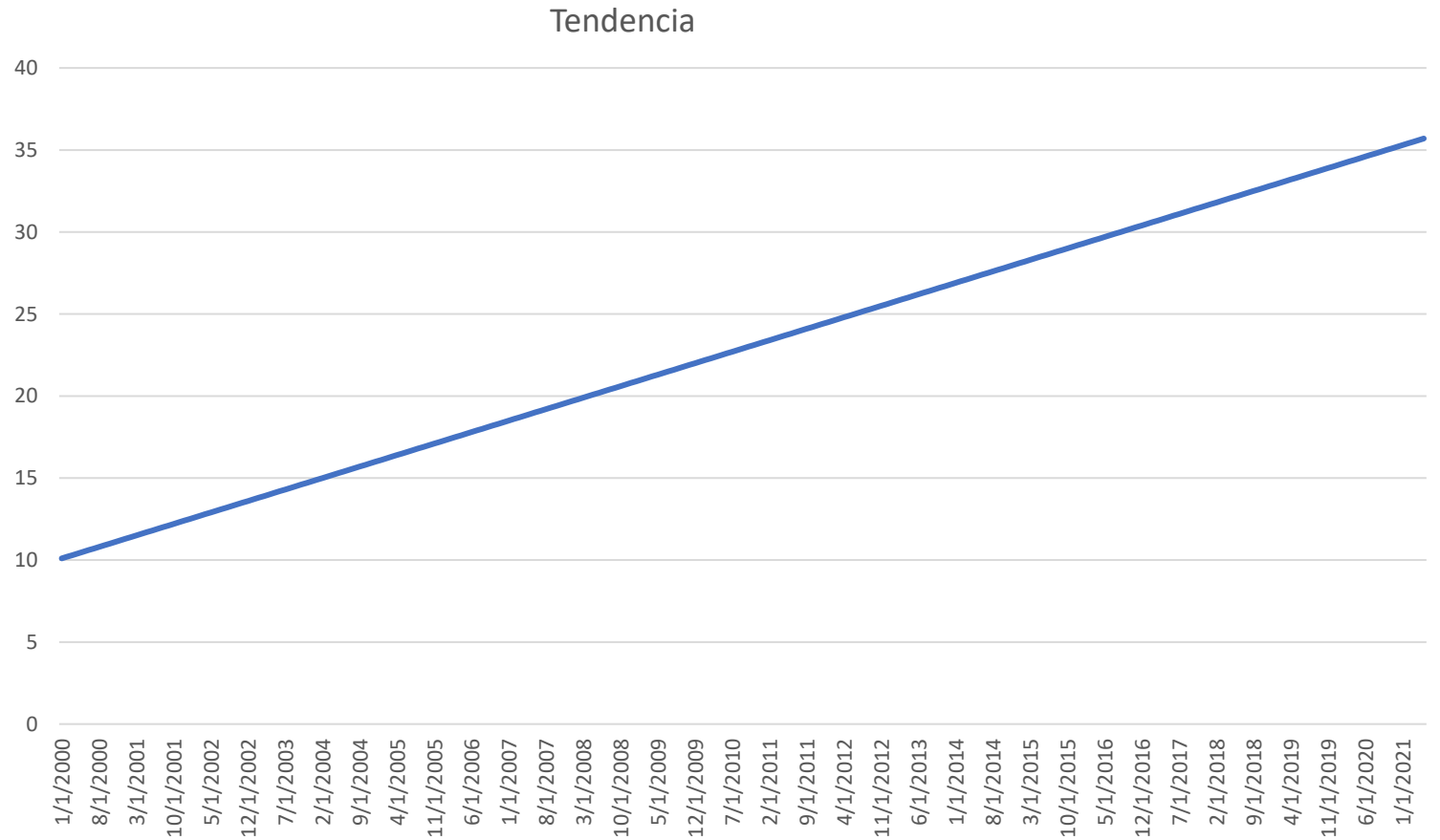
- Separamos las series de tiempo en componentes: tendencia, estacionalidad, autocorrelación, ruido
- Para poder ajustar los componentes respectivos con un modelo, es útil comenzar simulando modelos para entender mejor cómo funcionarán.

Tendencia

- Una tendencia lineal

$$tendencia = \alpha + \beta t$$

$$tendencia = 10 + 0.1t$$

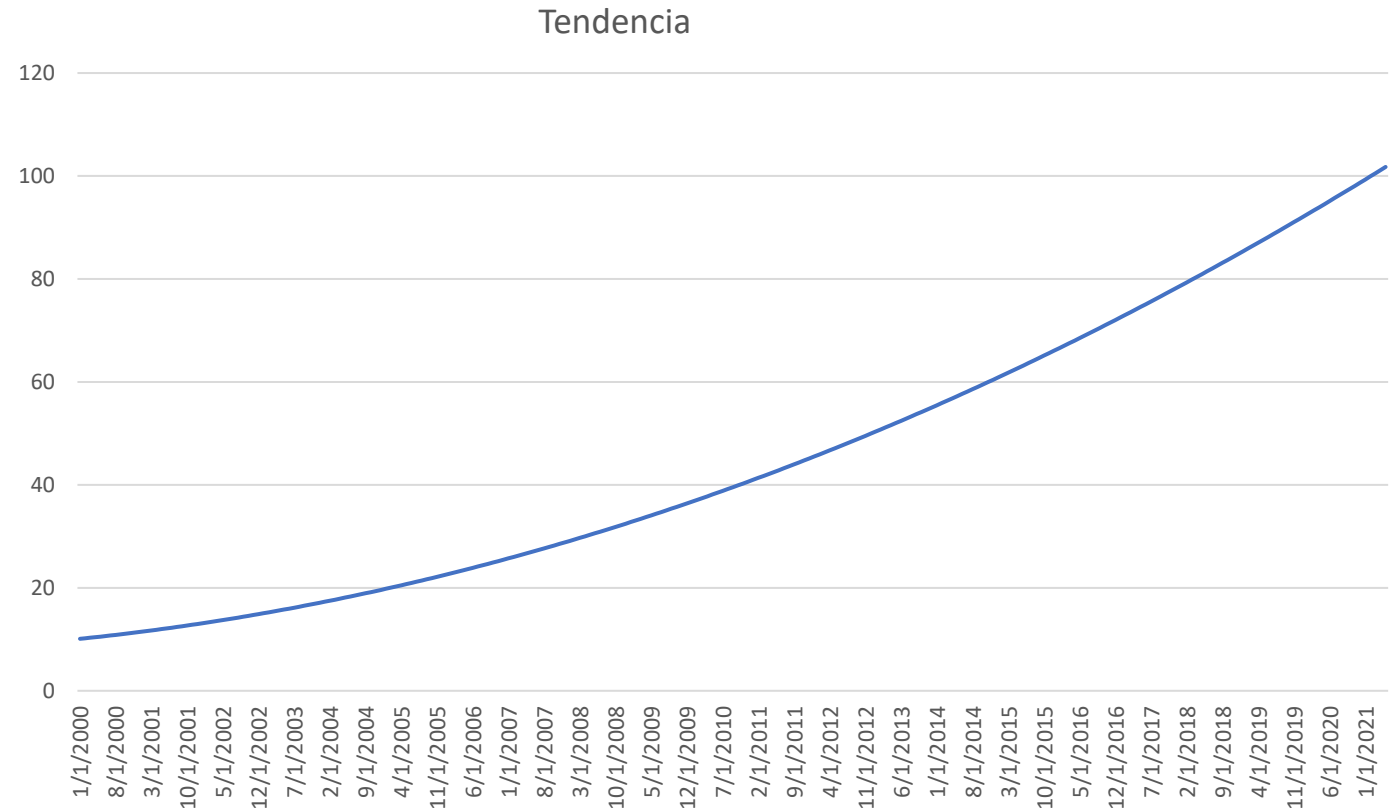


Tendencia

- Una tendencia cuadrática

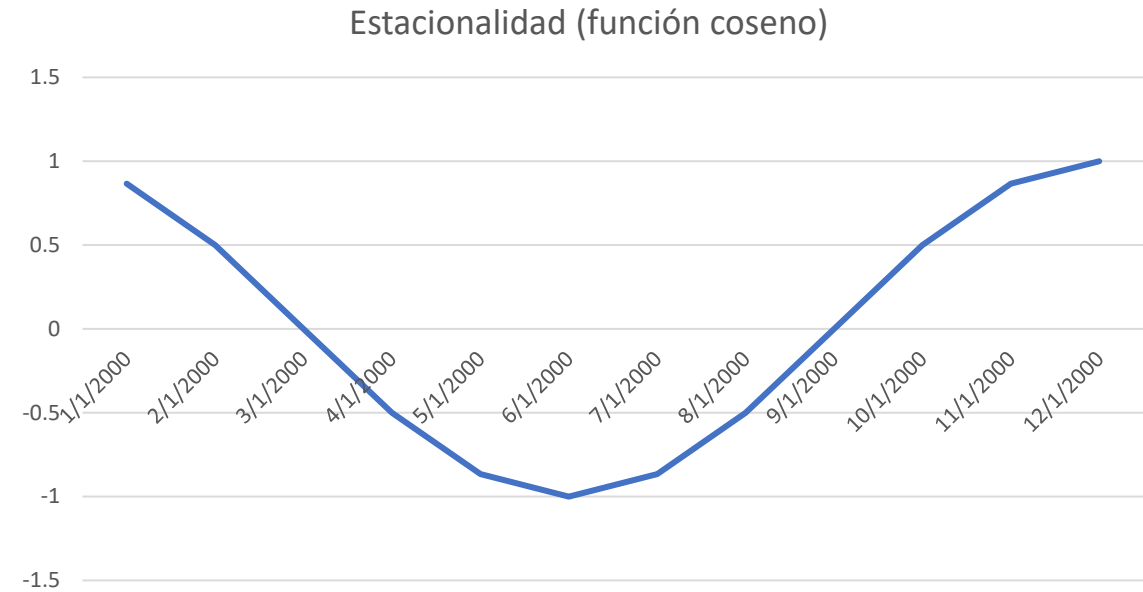
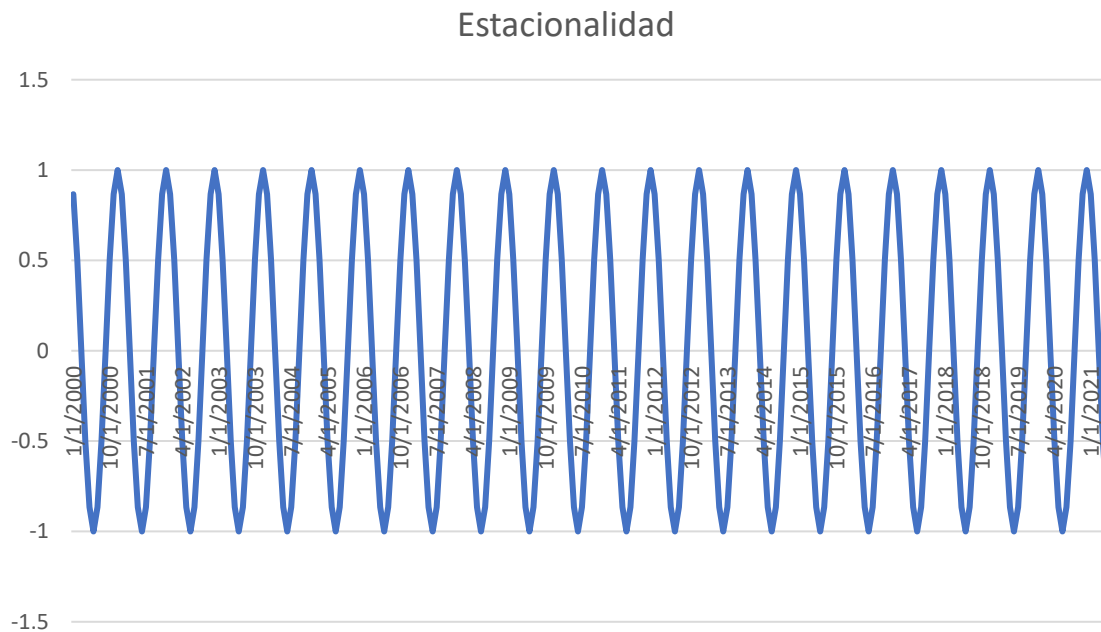
$$tendencia = \alpha + \beta t^2$$

$$tendencia = 10 + 0.001t^2$$



Estacionalidad

$$\text{estacionalidad} = \cos\left(2\pi \frac{\text{mes}}{12}\right)$$



Estacionalidad

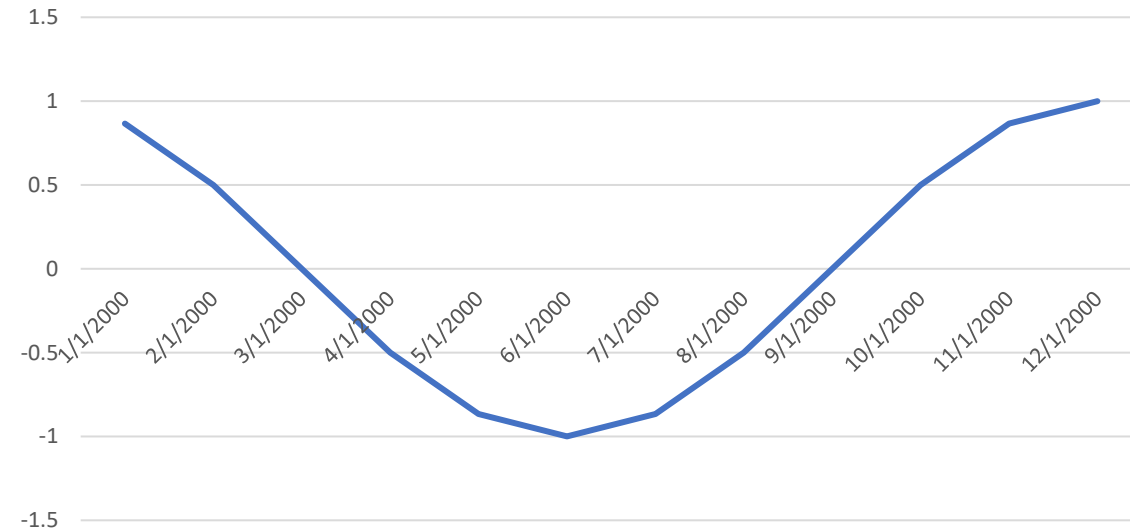
$$\text{estacionalidad} = \cos\left(2\pi \frac{\text{mes}}{12}\right)$$

$$\text{estacionalidad} = \sin\left(2\pi \frac{\text{mes}}{12}\right)$$

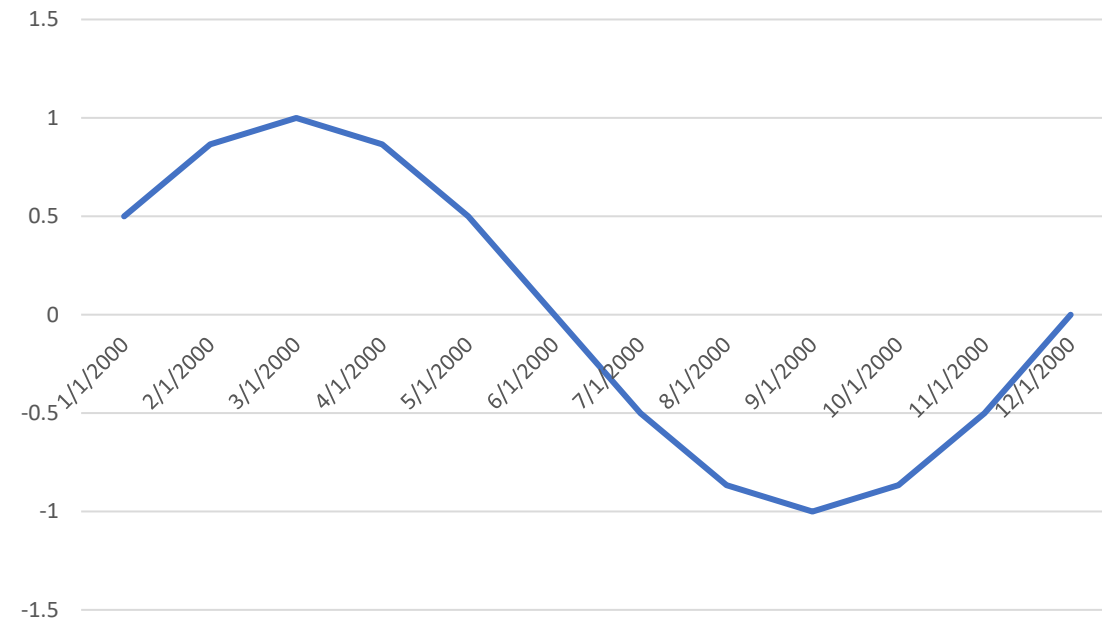
Una expresión más general:

$$\text{estacionalidad} = \gamma * \cos\left(2\pi \frac{\text{mes}}{12}\right) + \delta * \sin\left(2\pi \frac{\text{mes}}{12}\right)$$

Estacionalidad (función coseno)



Estacionalidad (función coseno)



Autocorrelación

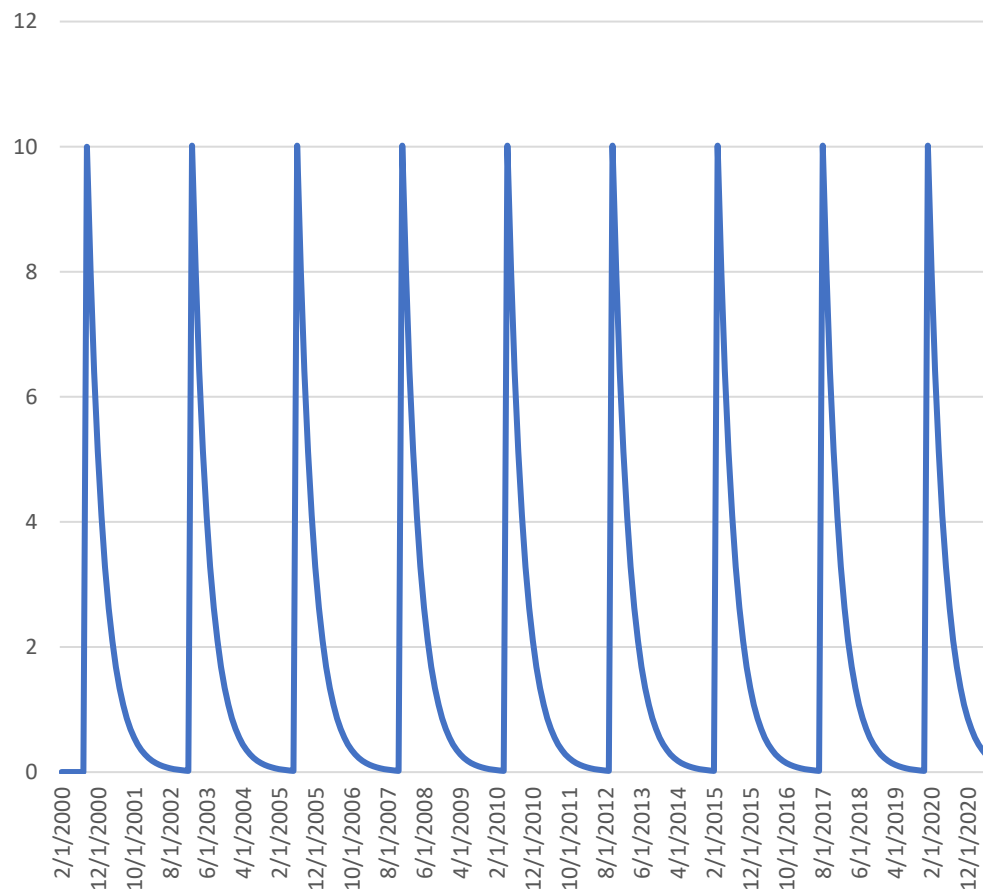
$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$



Autocorrelación

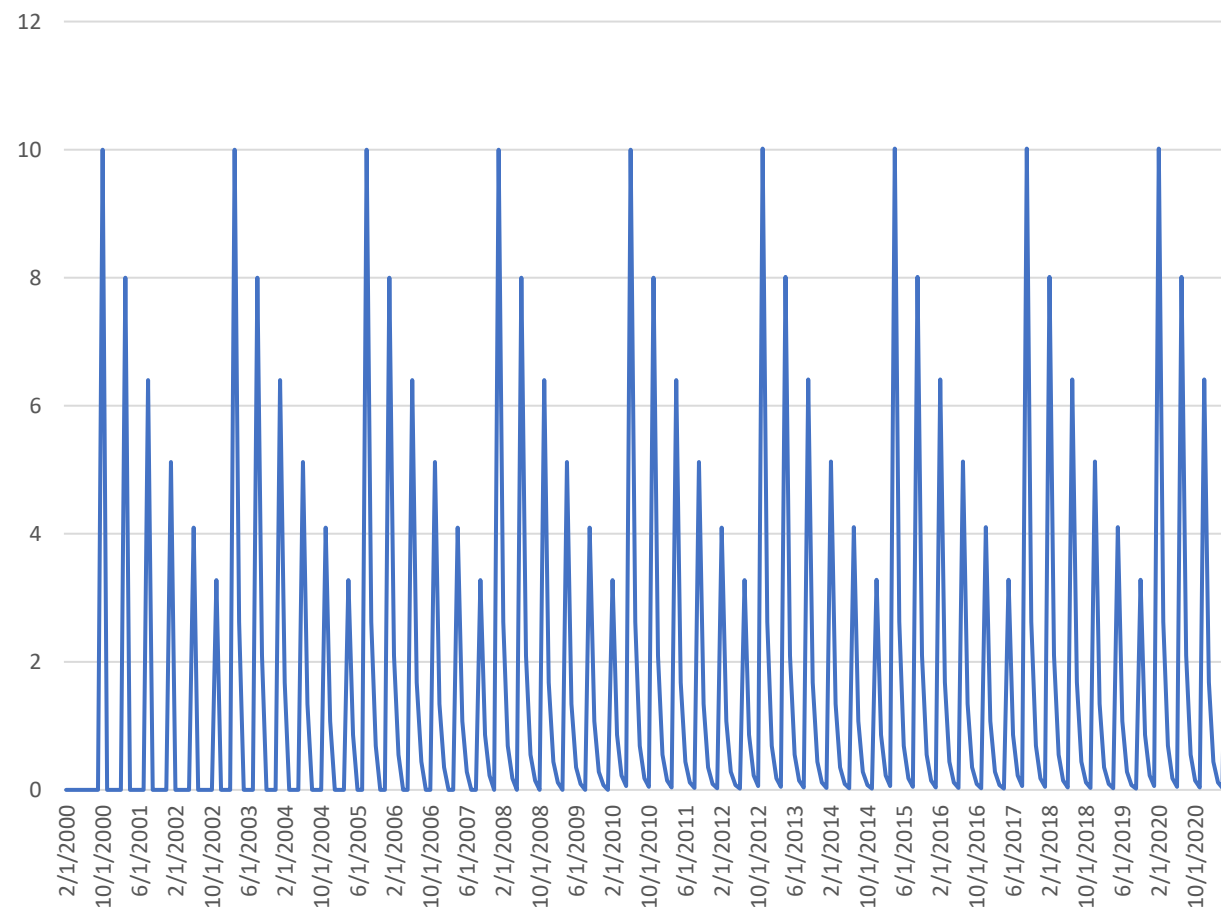
$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Shocks con autocorrelación orden 1



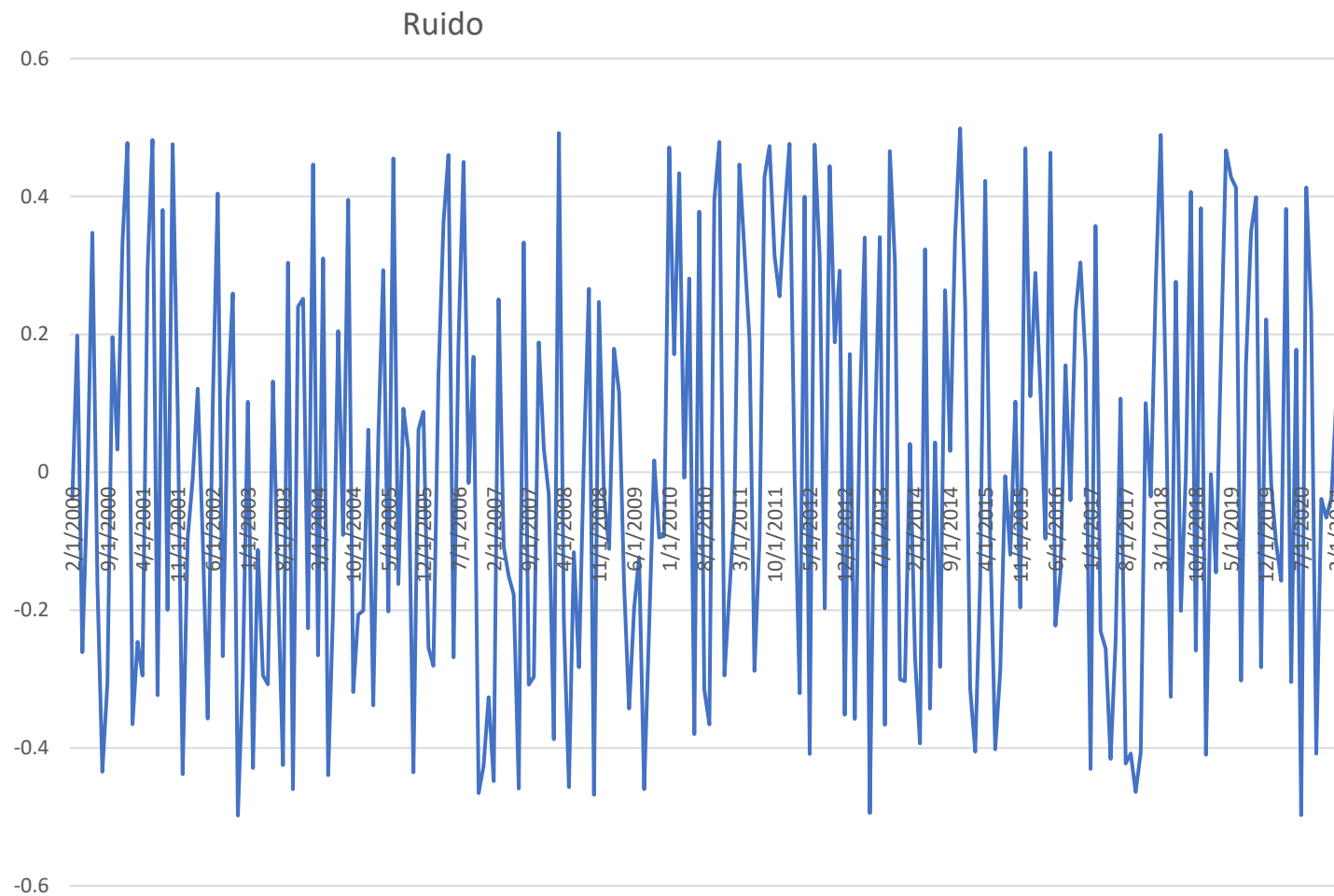
$$y_t = 0.8 * y_{t-5} + \varepsilon_t$$

Shocks con autocorrelación orden 5



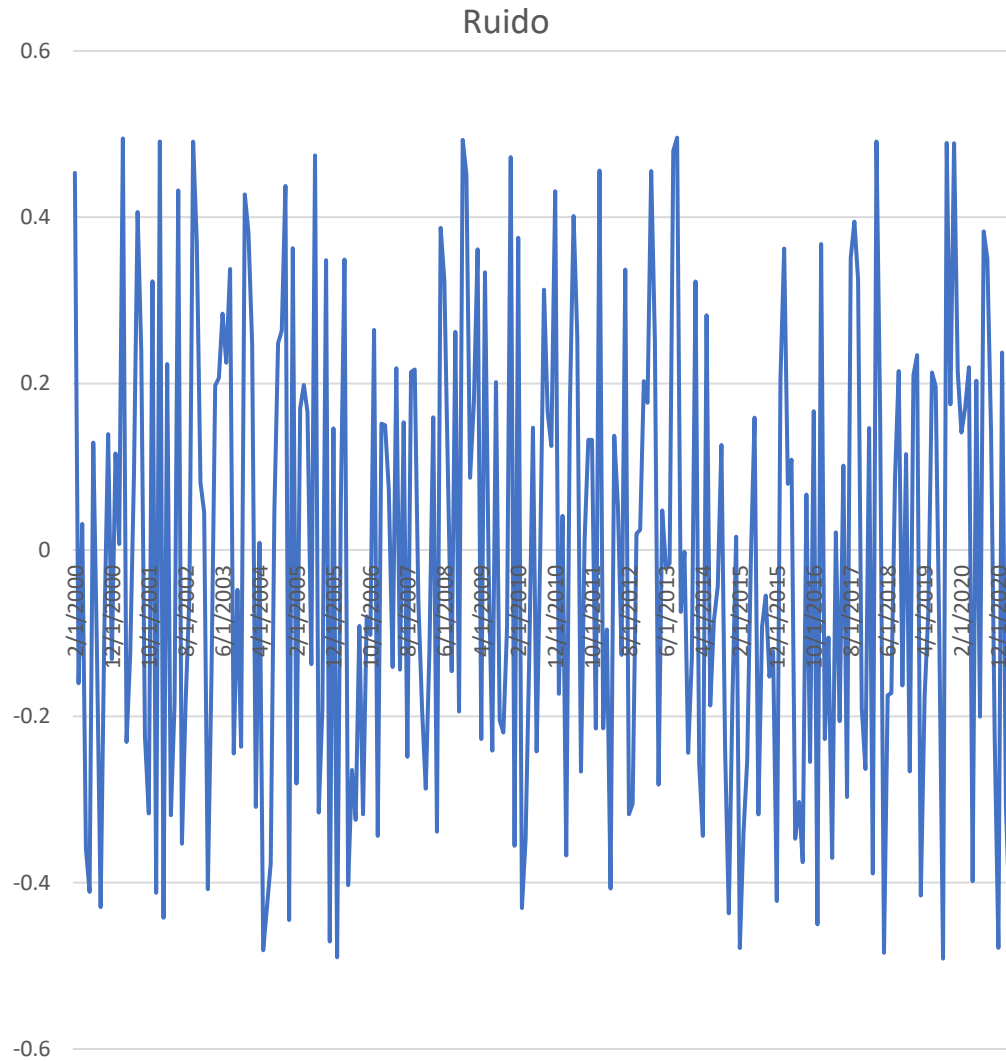
Ruido

$$ruido_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



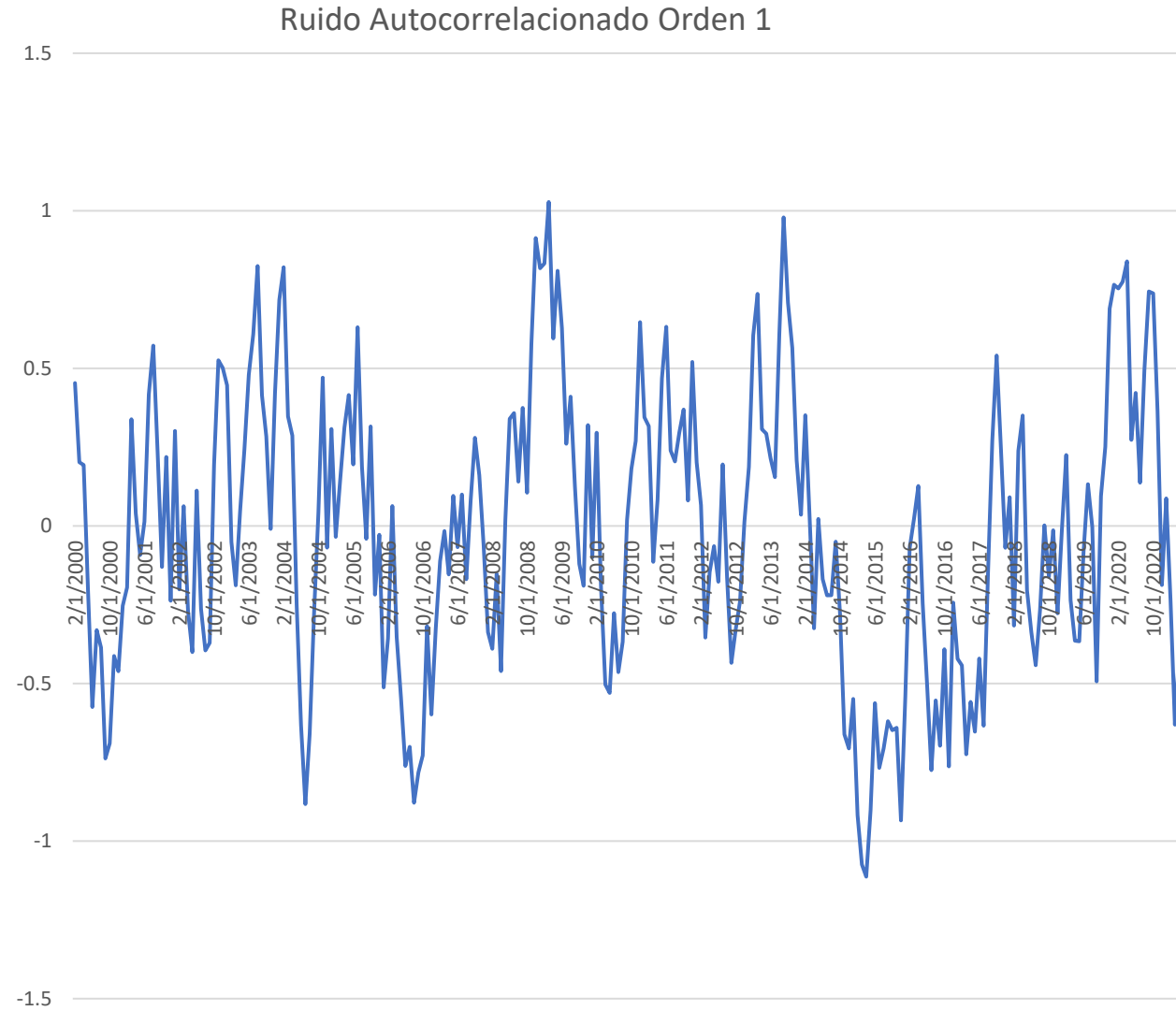
Autocorrelación

$$y_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

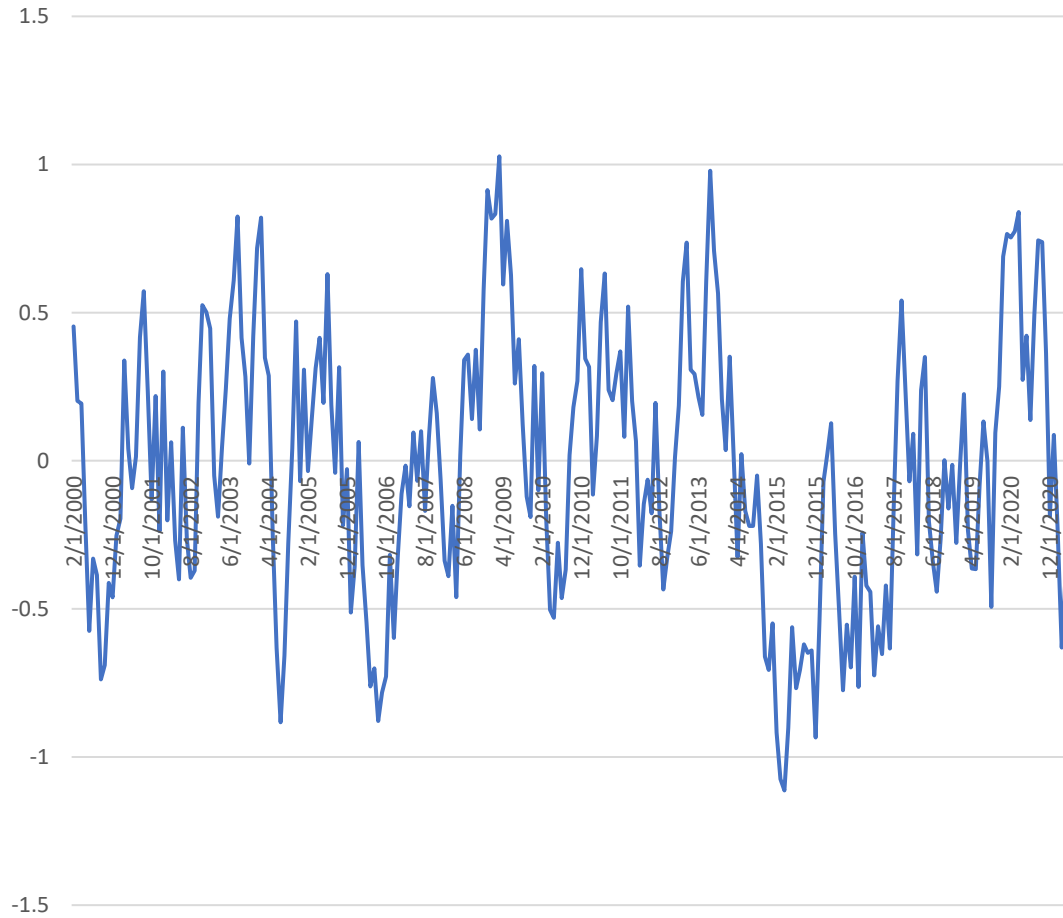


Autocorrelación

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

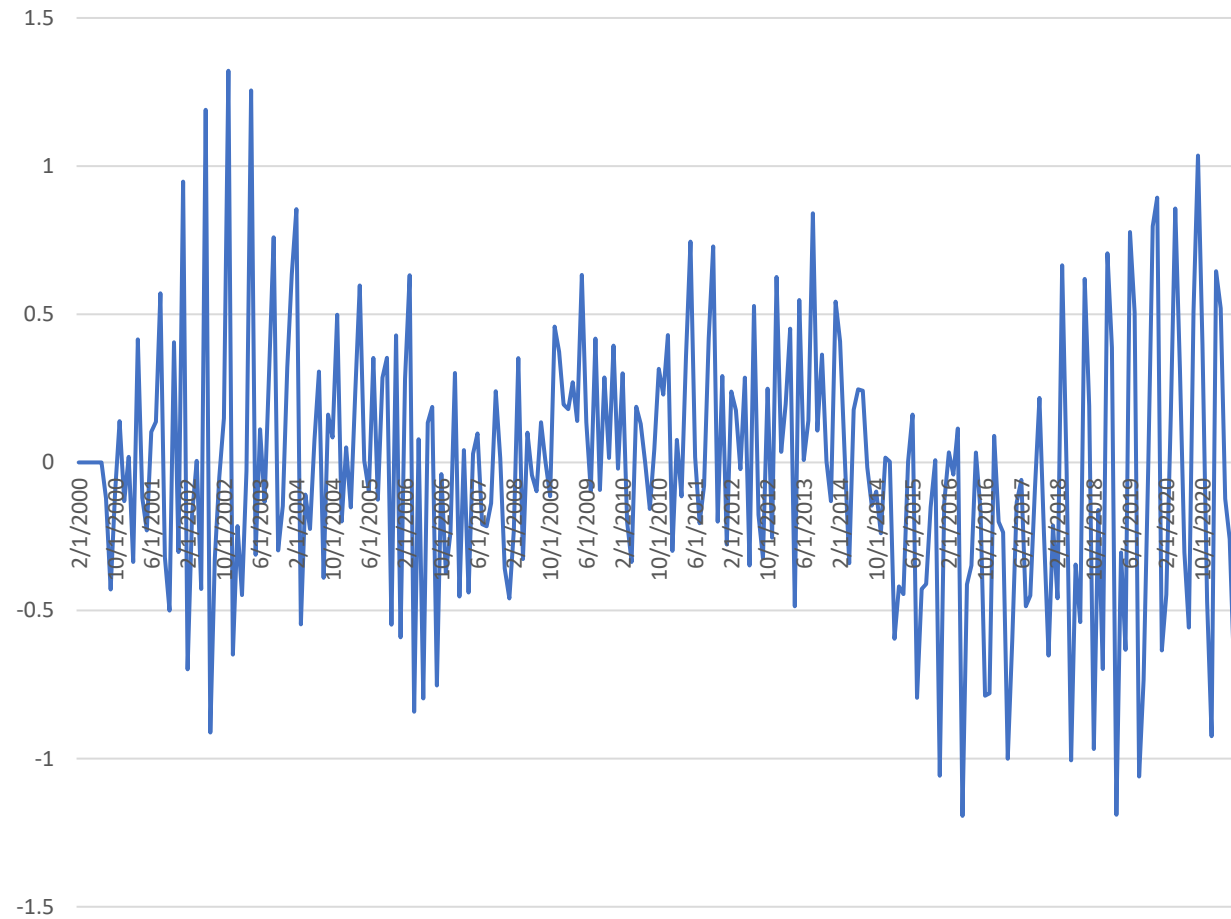
Ruido Autocorrelacionado Orden 1



$$y_t = 0.8 * y_{t-5} + \varepsilon_t$$

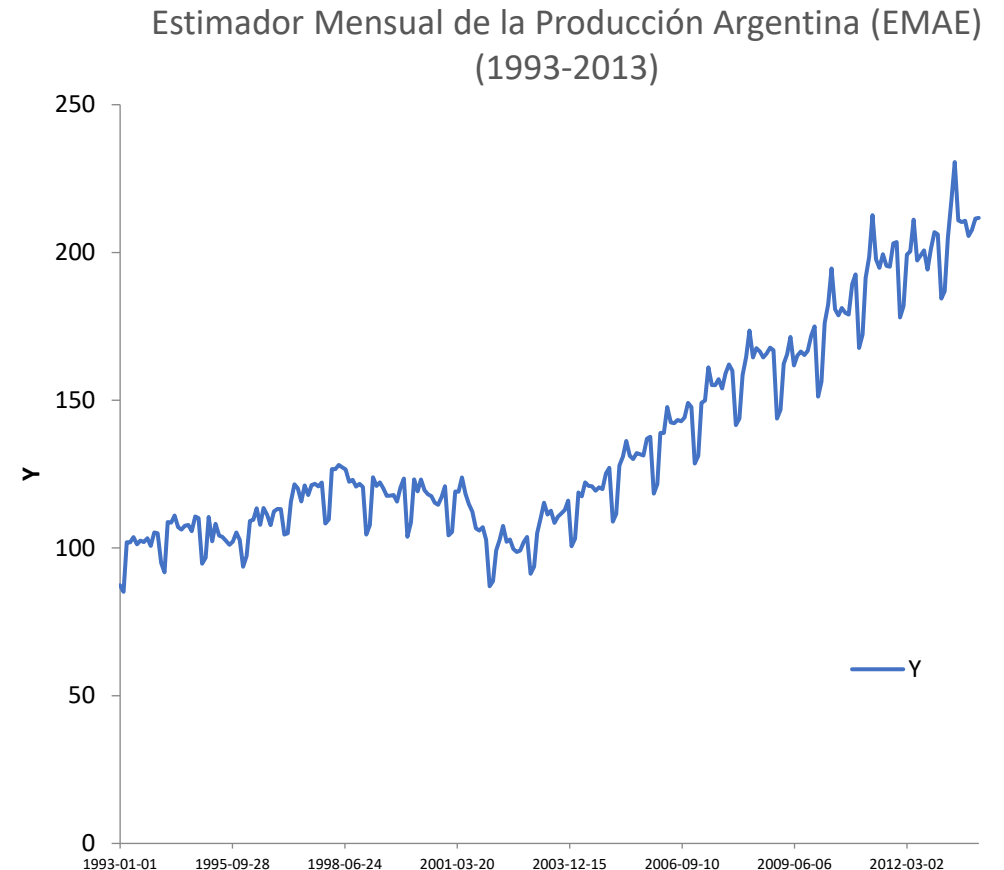
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

Ruido Autocorrelacionado Orden 5



Ajustando tendencia y estacionalidad

- Nuestro propósito es ajustar una serie de tiempo a un modelo.
- Modelamos a la **tendencia** y a la **estacionalidad** como componentes determinísticos (no-estocásticos).
- Vamos a tomar como ejemplo el caso del EMAE.



Tendencia

- Para estimar el modelo:

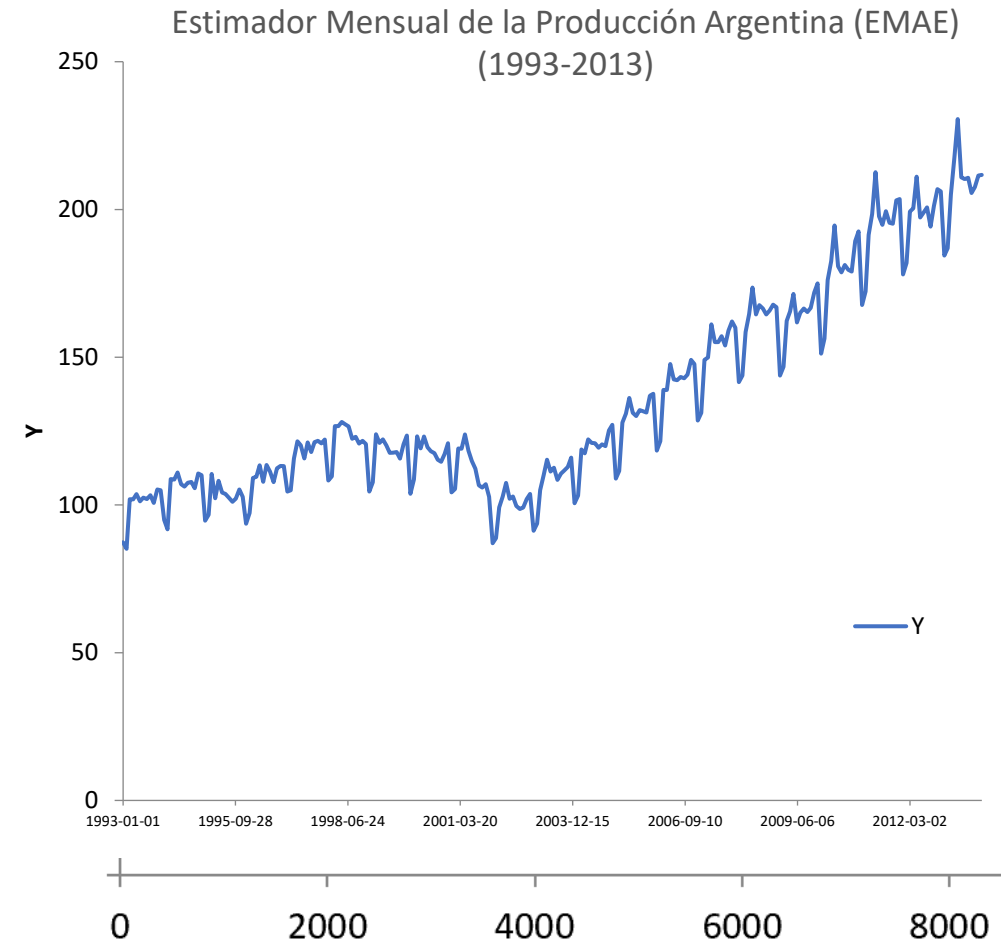
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

variable1 *variable2*

↙ ↘

- Necesitamos que el tiempo esté indexado por una variable.

indice_tiempo	EMAE	t	t^2
1993-01-01	87.3897906	1	1
1993-02-01	85.1416464	31	961
1993-03-01	101.928041	59	3,481
1993-04-01	101.89024	90	8,100
1993-05-01	103.674974	120	14,400
1993-06-01	101.242521	151	22,801
1993-07-01	102.478046	181	32,761
1993-08-01	102.003683	212	44,944
1993-09-01	103.307379	243	59,049
1993-10-01	100.702473	273	74,529
1993-11-01	105.246526	304	92,416
1993-12-01	104.99468	334	111,556
1994-01-01	94.9543818	365	133,225
1994-02-01	91.7632249	396	156,816



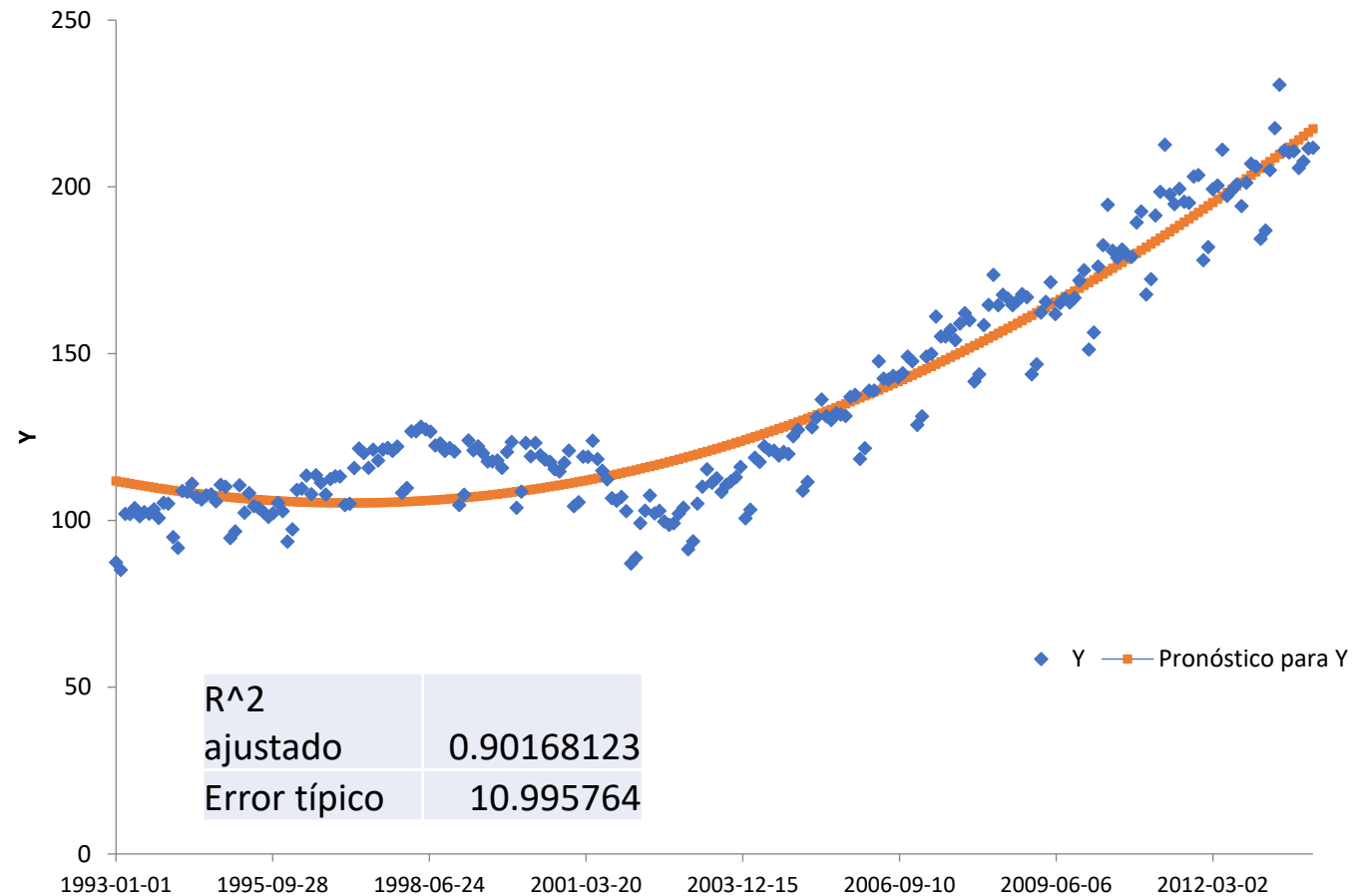
Tendencia

- Estimamos mediante MCO
- Predicción

$$y_t = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t + \widehat{\beta}_2 t^2$$

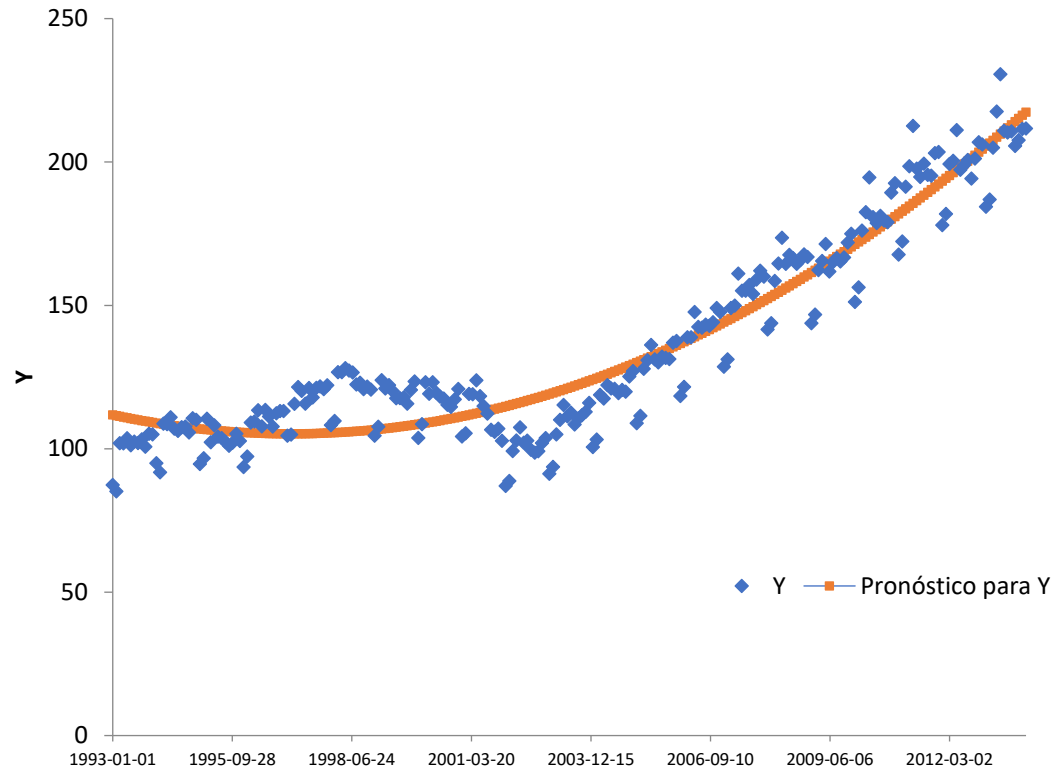
Resultados regresión

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	111.812063	2.06050197	54.2644777	5.81E-140
T	-0.0088488	0.00124639	-7.0995723	1.3029E-11
T^2	2.9677E-06	1.5796E-07	18.7871091	1.2279E-49



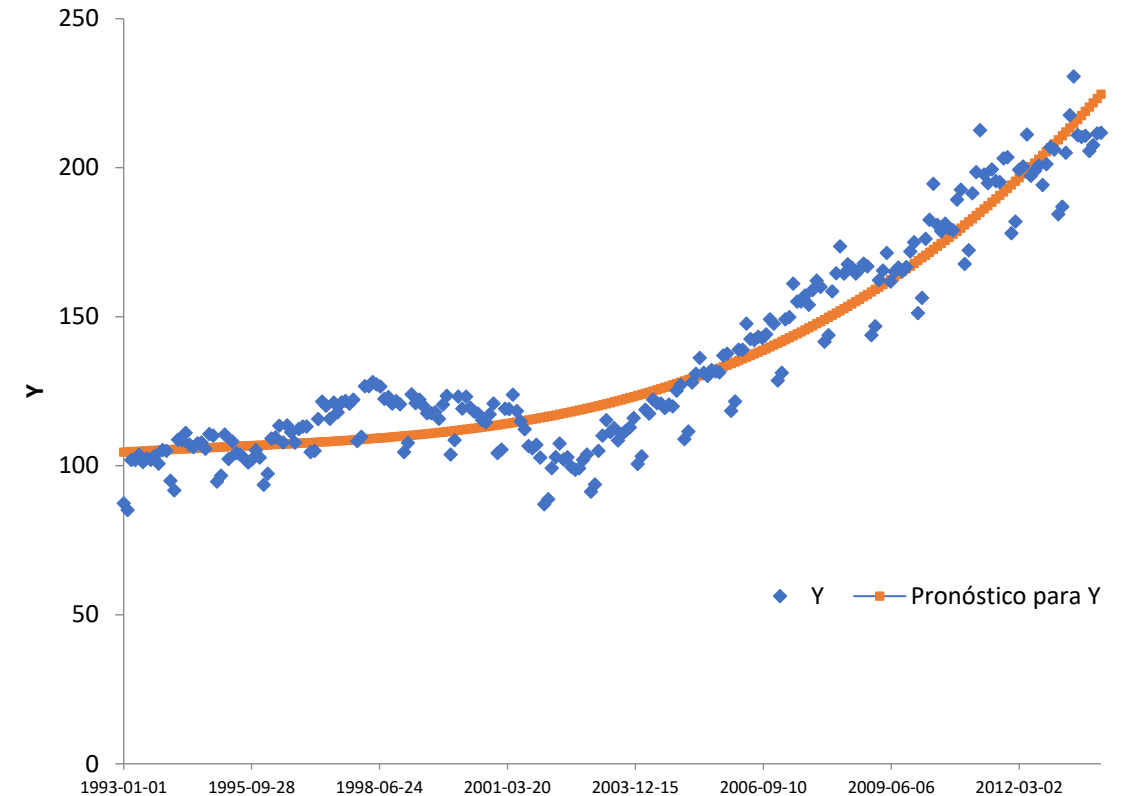
Tendencia

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$



R ² ajustado	0.90168123
Error típico	10.995764

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \varepsilon_t$$



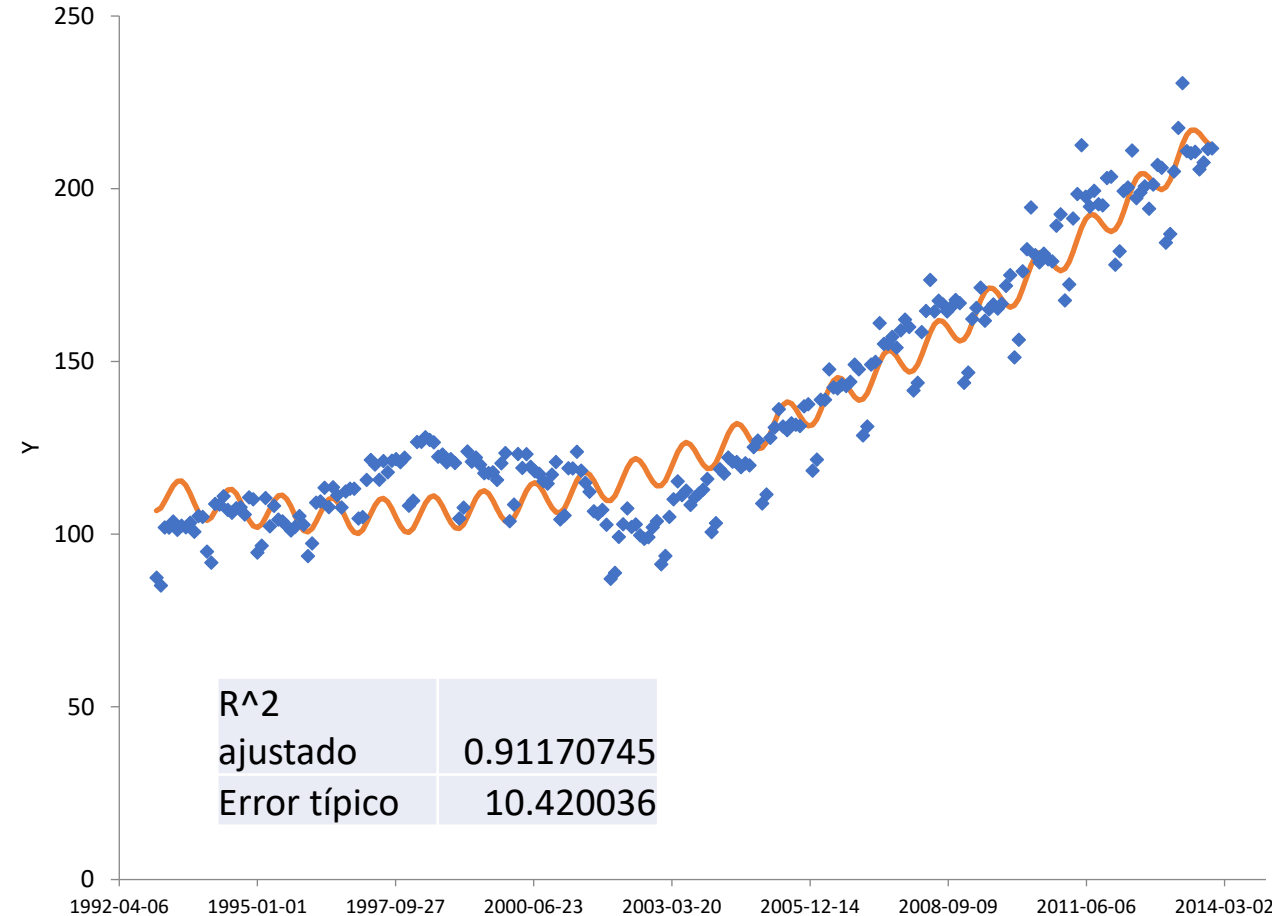
R ² ajustado	0.90782677
Error típico	10.6465671

Estacionalidad

- Como primera aproximación modelamos la **estacionalidad** *utilizando las funciones basadas en Seno y coseno*.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 \sin\left(\frac{2\pi}{12} \text{mes}\right) + \beta_4 \cos\left(\frac{2\pi}{12} \text{mes}\right) + \varepsilon_t$$

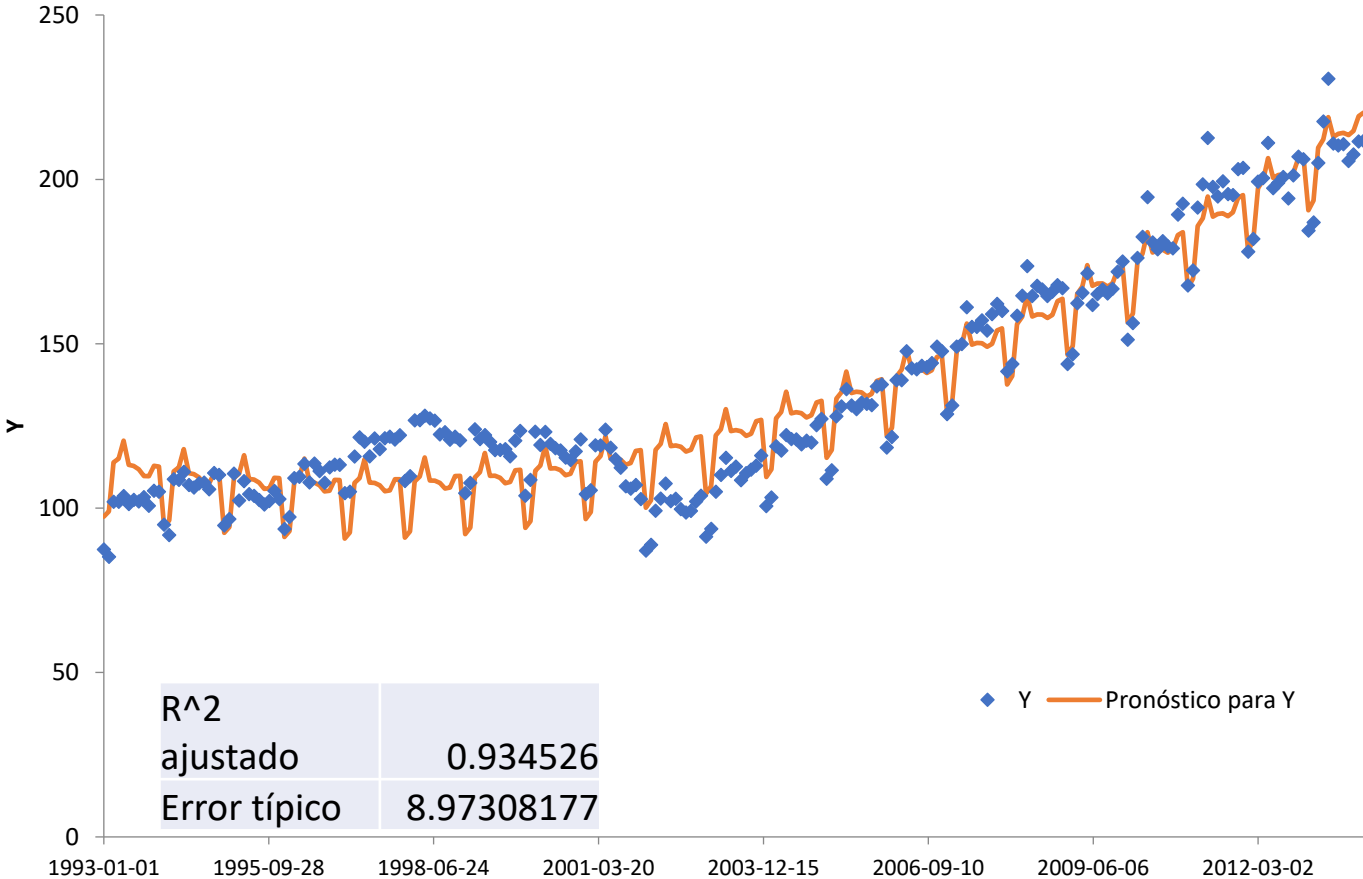
indice_tiempo	mes	EMAE	seno	coseno
1993-01-01	1	87.3897906	0.5	0.8660254
1993-02-01	2	85.1416464	0.8660254	0.5
1993-03-01	3	101.928041	1	6.1257E-17
1993-04-01	4	101.89024	0.8660254	-0.5
1993-05-01	5	103.674974	0.5	-0.8660254
1993-06-01	6	101.242521	1.2251E-16	-1
1993-07-01	7	102.478046	-0.5	-0.8660254



Estacionalidad

- Como alternativa usamos variables dummies para modelar efectos mes-específicos

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \sum_{j=1}^{11} \beta_{mes} d_{mes} + \varepsilon_t$$



indice_tiempo	mes	EMAE	t	t^2	d1	d2	d3	d4	d5	d6
1993-01-01	1	87.3897906	1	1	1	0	0	0	0	0
1993-02-01	2	85.1416464	31	961	0	1	0	0	0	0
1993-03-01	3	101.928041	59	3,481	0	0	1	0	0	0
1993-04-01	4	101.89024	90	8,100	0	0	0	1	0	0

Autocorrelación

- Definimos la autocorrelación como la correlación de una serie consigo misma cuando esta se presenta con un rezago.

$$Corr(y_t, y_{t-1}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{Var(y_t)Var(y_{t-1})}}$$

- El concepto se extiende a cualquier rezago l

$$Corr(y_t, y_{t-l}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-l})}{\sqrt{Var(y_t)Var(y_{t-l})}}$$

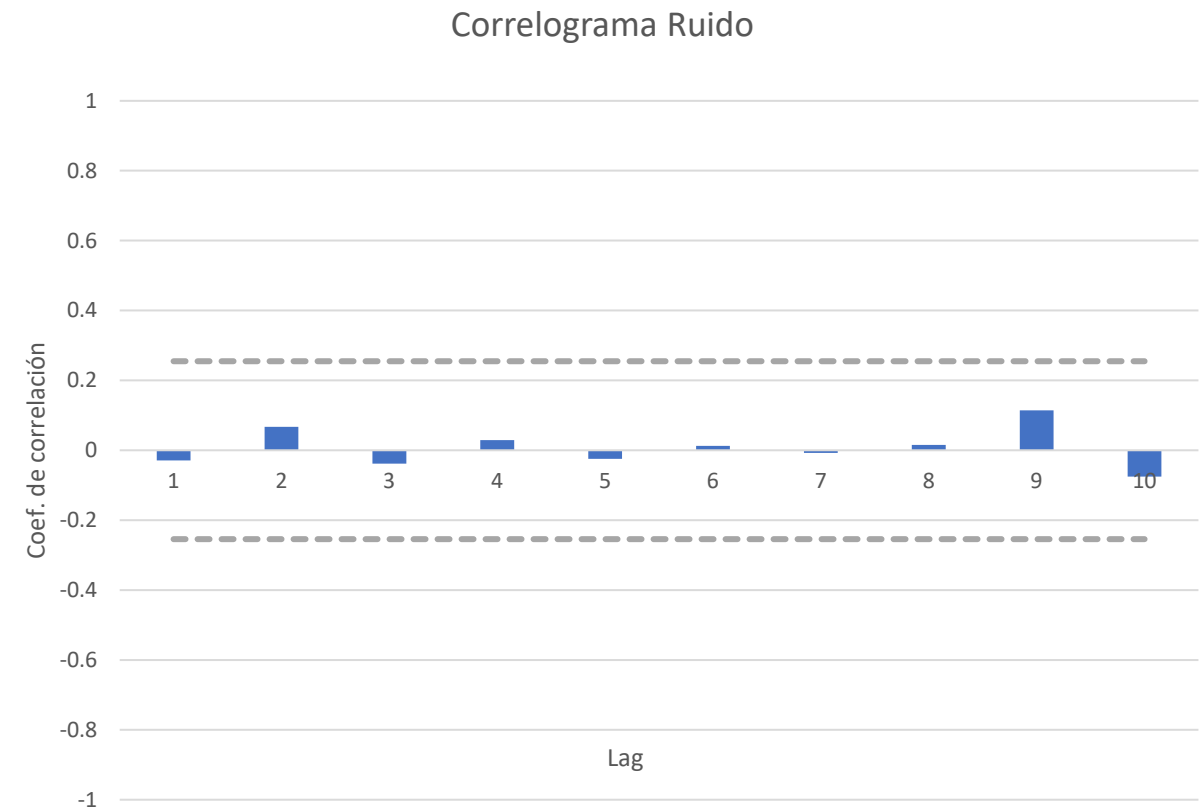
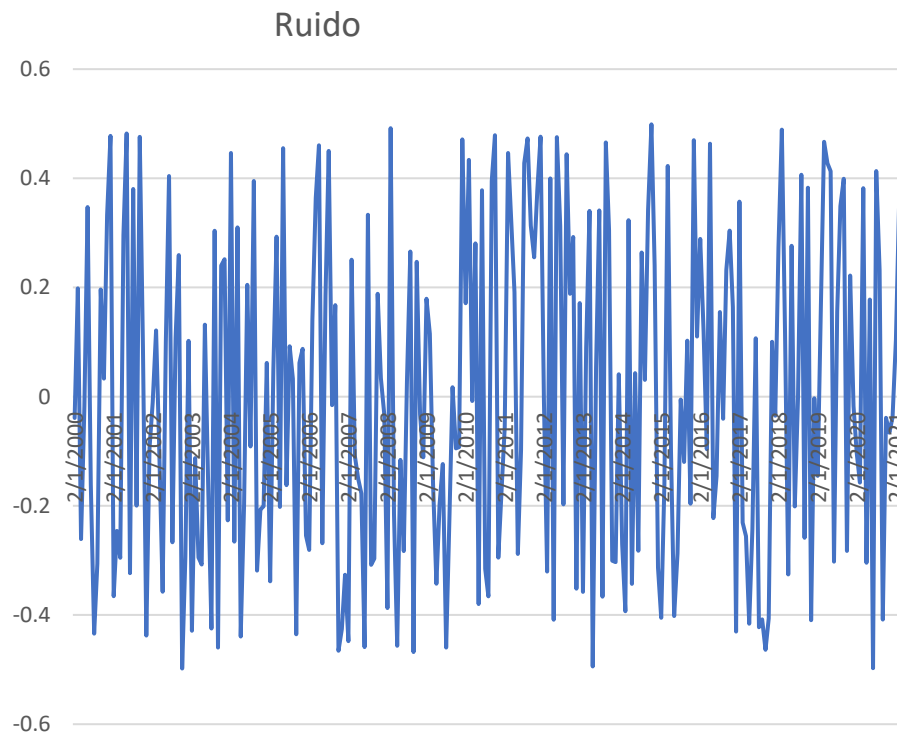
Calculando autocorrelación

	B	C
	Serie de datos (t)	Serie (t-1)
1/1/2000	0.10821413	-0.4478578
2/1/2000	-0.4478578	0.38615868
3/1/2000	0.38615868	0.12150953
4/1/2000	0.12150953	-0.2441563
5/1/2000	-0.2441563	0.31369721
6/1/2000	0.31369721	0.03354672
7/1/2000	0.03354672	-0.3516055
8/1/2000	-0.3516055	0.33887105
9/1/2000	0.33887105	0.19783315
10/1/2000	0.19783315	-0.2597335

=Coef.de.Correl(B2:B10, C2:C10)

Correlograma: Ejemplo simulado 1

$$ruido_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

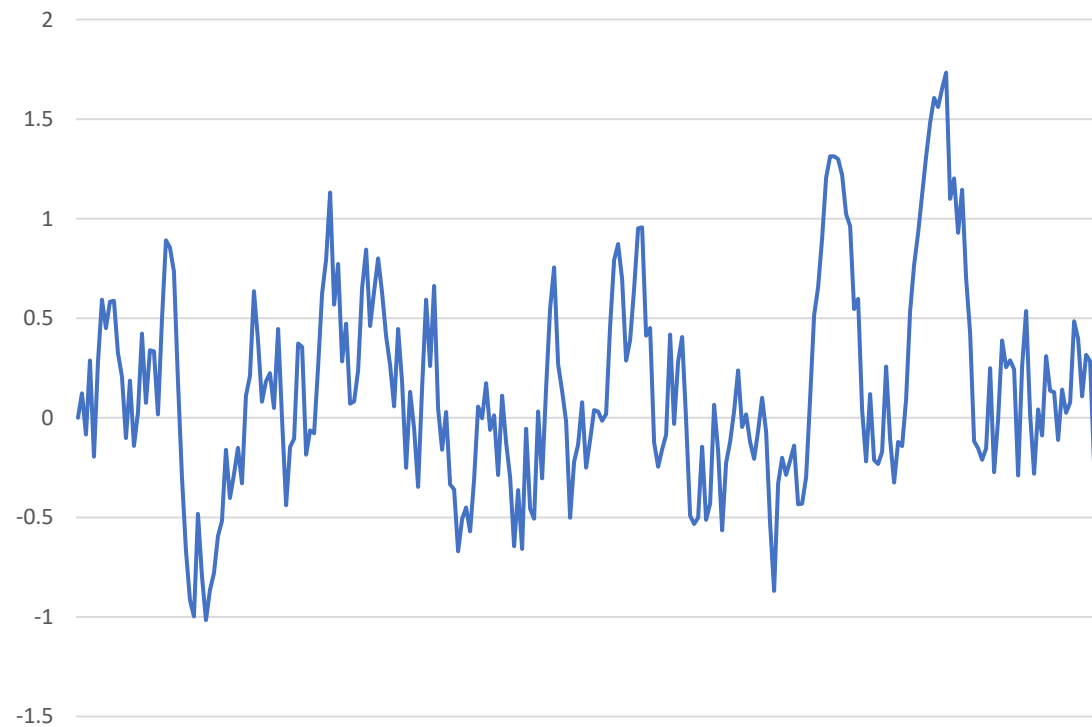


Correlograma: Ejemplo simulado 2

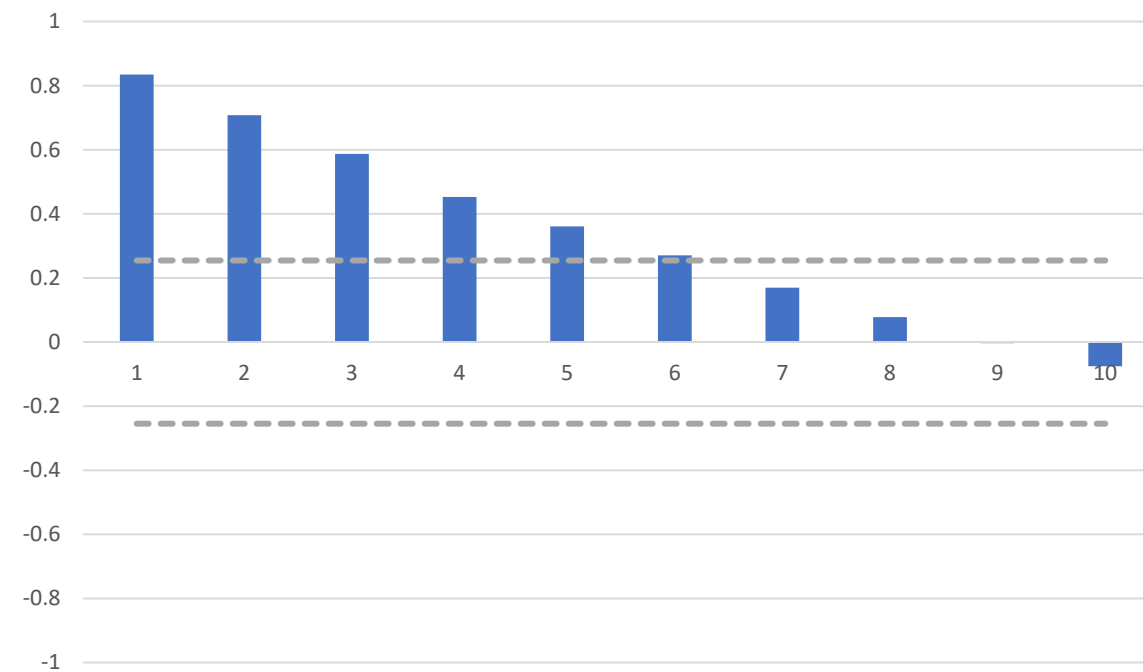
$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

Autocorrelacionado Orden 1 + Ruido



Correlograma Ruido

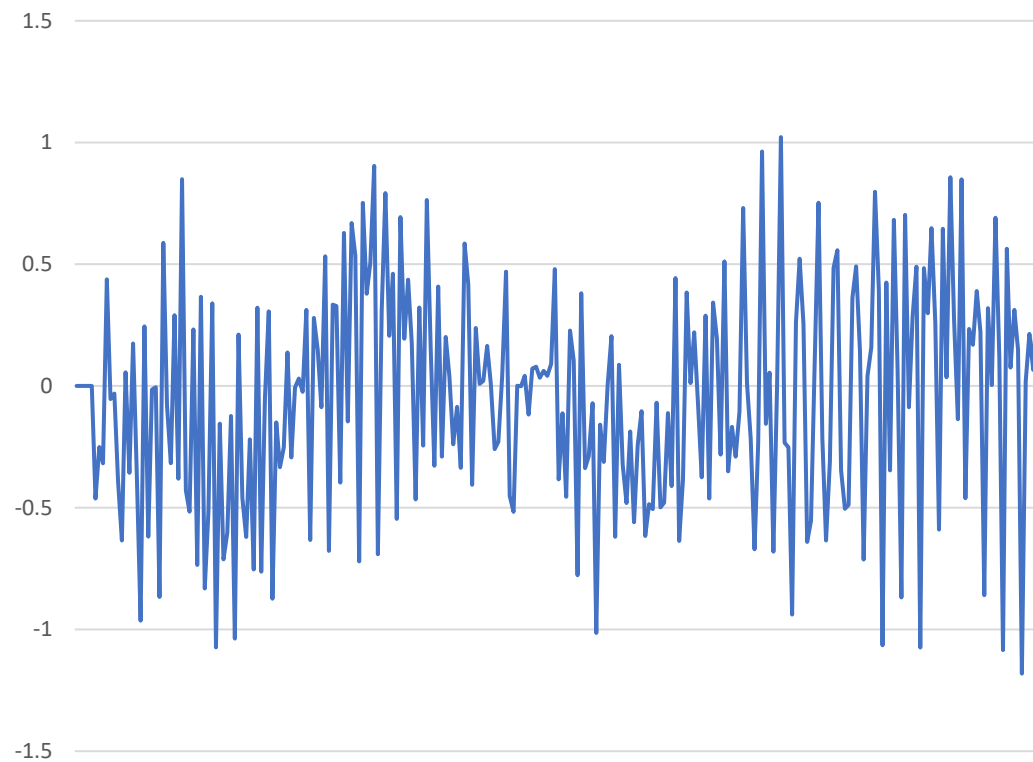


Correlograma: Ejemplo simulado 3

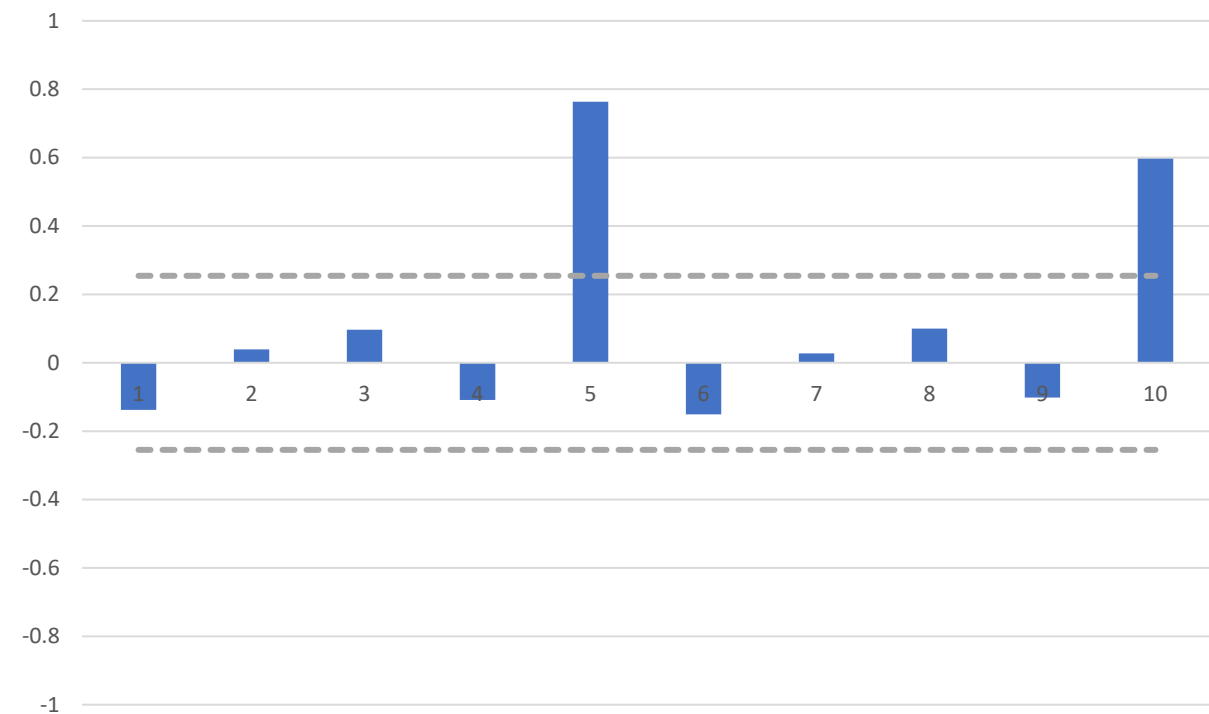
$$y_t = 0.8 * y_{t-5} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$

Autocorrelacionado Orden 5 + Ruido



Correlograma Ruido



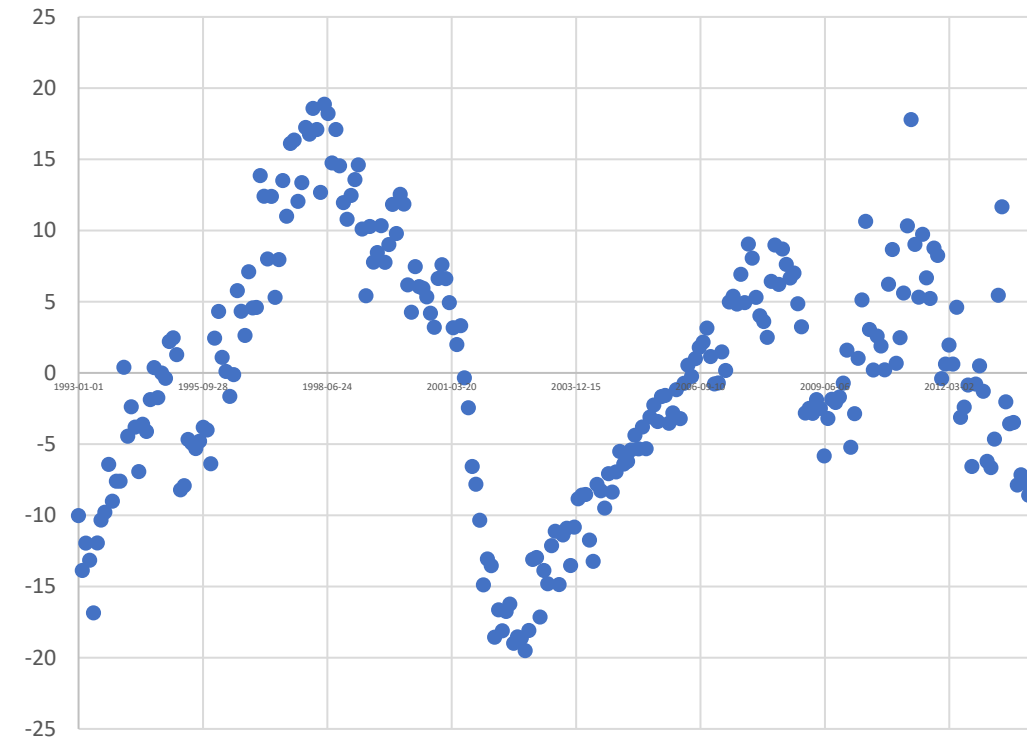
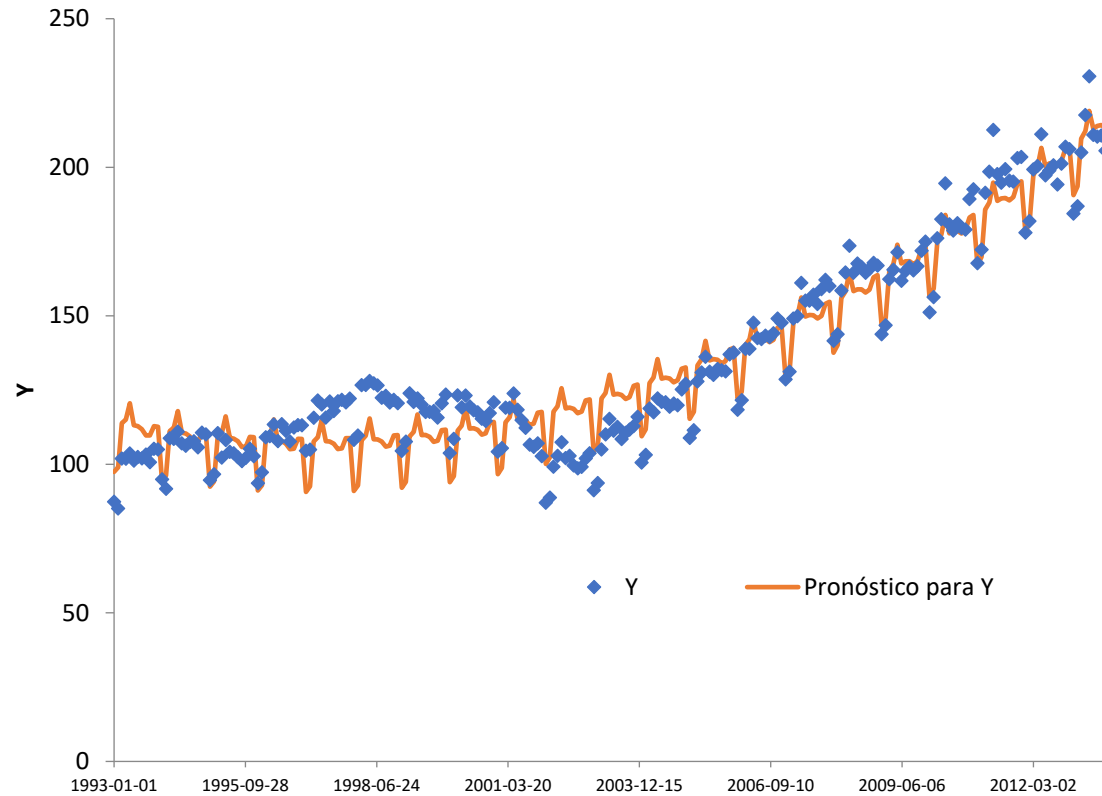
Caso EMAE: Paso 1. Removiendo tendencia y estacionalidad

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \sum_{j=1}^{11} \beta_{mes} d_{mes} + \varepsilon_t$$

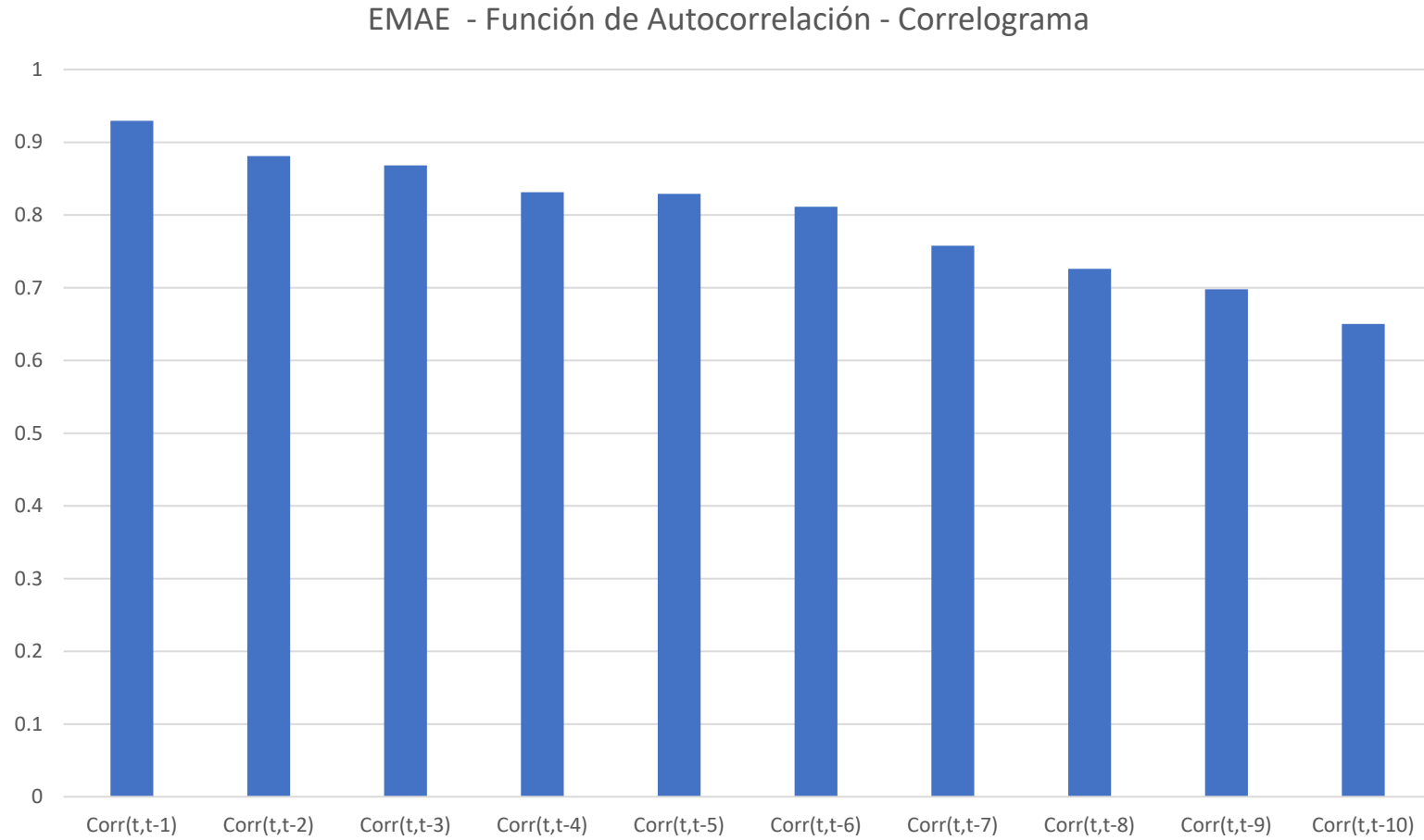


$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t = z_t$$

EMAE sin tendencia ni estacionalidad



Caso EMAE: Paso 2. Autocorrelación



Incluyendo Autocorrelación al Modelo: Modelo Autoregresivo Simple

- Modelo Autoregresivo de Orden 1. AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

indice_tiempo	EMAE	Zt	Z t-1
1993-01-01	87.3897906	-10.032786	
1993-02-01	85.1416464	-13.883853	-10.032786
1993-03-01	101.928041	-11.972484	-13.883853
1993-04-01	101.89024	-13.172196	-11.972484
1993-05-01	103.674974	-16.862718	-13.172196
1993-06-01	101.242521	-11.951195	-16.862718
1993-07-01	102.478046	-10.354031	-11.951195
1993-08-01	102.003683	-9.8009403	-10.354031
1993-09-01	103.307379	-6.4433674	-9.8009403
1993-10-01	100.702473	-9.0249648	-6.4433674
1993-11-01	105.246526	-7.6239132	-9.0249648
1993-12-01	104.99468	-7.6235741	-7.6239132
1994-01-01	94.9543818	0.38813921	-7.6235741

Incluyendo Autocorrelación al Modelo: Modelo Autoregresivo Simple

- Modelo Autoregresivo de Orden 1. AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0.929655416
Coefficiente de determinación R^2	0.864259193
R^2 ajustado	0.863714049
Error típico	3.223572627
Observaciones	251

ANÁLISIS DE VARIANZA					
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media de cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	16474.33322	16474.33322	1585.378366	5.7182E-110
Residuos	249	2587.463699	10.39142048		
Total	250	19061.79692			
	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%
Intercepción	0.008117531	0.203471673	0.03989514	0.968208695	-0.39262743
Z(t-1)	0.929005145	0.023331983	39.81681009	5.7182E-110	0.883051944

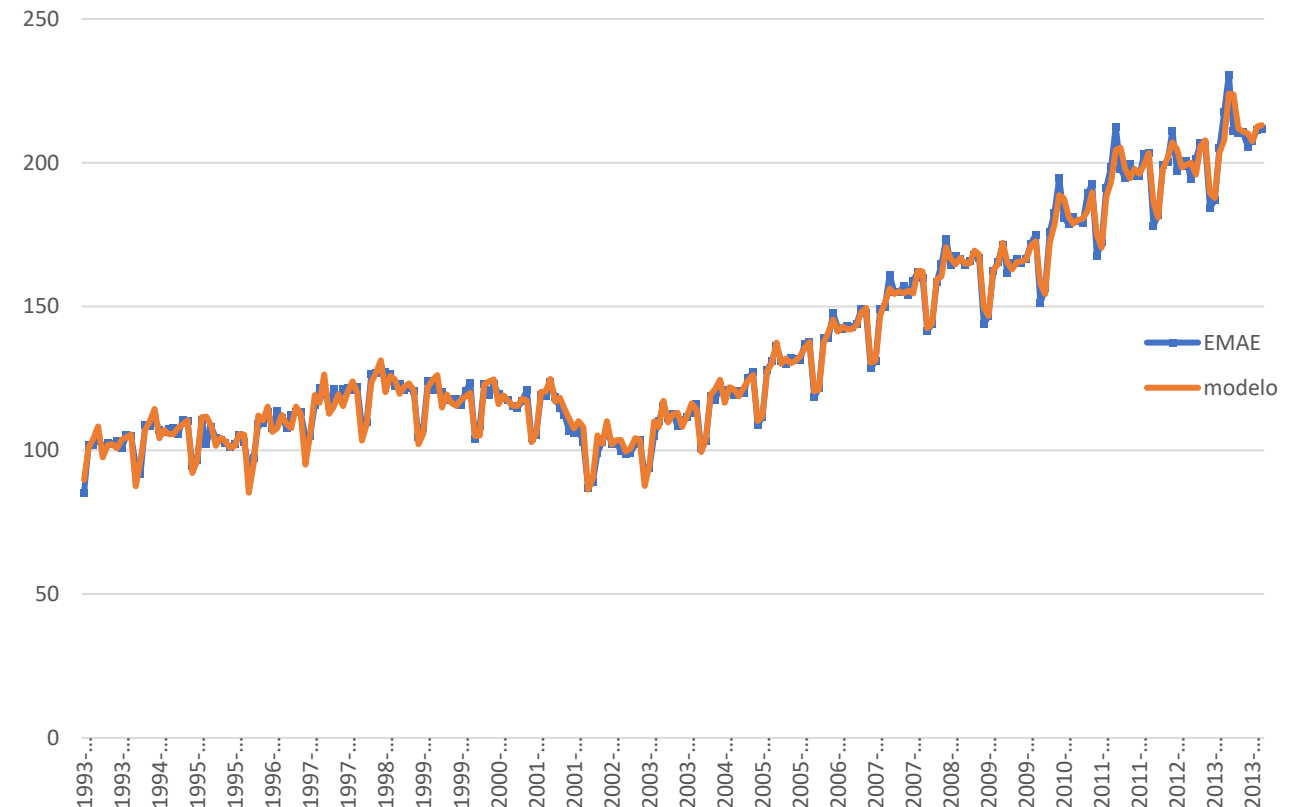
Caso EMAE: Predicción

$$y_t = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t + \widehat{\beta}_2 t^2 + \sum_{j=1}^{11} \widehat{\beta}_{mes} dm_{jes}$$

$$z_t = \widehat{\theta}_0 + \widehat{\theta}_1 z_{t-1}$$

Tendencia + Estacionalidad + AR1

Fecha	Prediccion tendencia + estacionalidad	Tendencia +estacionalid ad + AR(1)
1993-02-01	99.02549961	89.71310723
1993-03-01	113.900525	101.0104714
1993-04-01	115.0624368	103.948055
1993-05-01	120.5376918	108.3087712
1993-06-01	113.1937156	97.53628153
1993-07-01	112.8320775	101.7374736
1993-08-01	111.8046231	102.1937924
1993-09-01	109.7507463	100.6537399
1993-10-01	109.7274378	103.7496339
1993-11-01	112.870439	104.4943179
1993-12-01	112.618254	105.5437169
1994-01-01	94.56624262	87.49202058
1994-02-01	96.22743371	96.59613456
1994-03-01	111.163155	107.0228887



Función de Autocorrelación Parcial: Motivación

- Modelo Autoregresivo de Orden 1. AR(1)

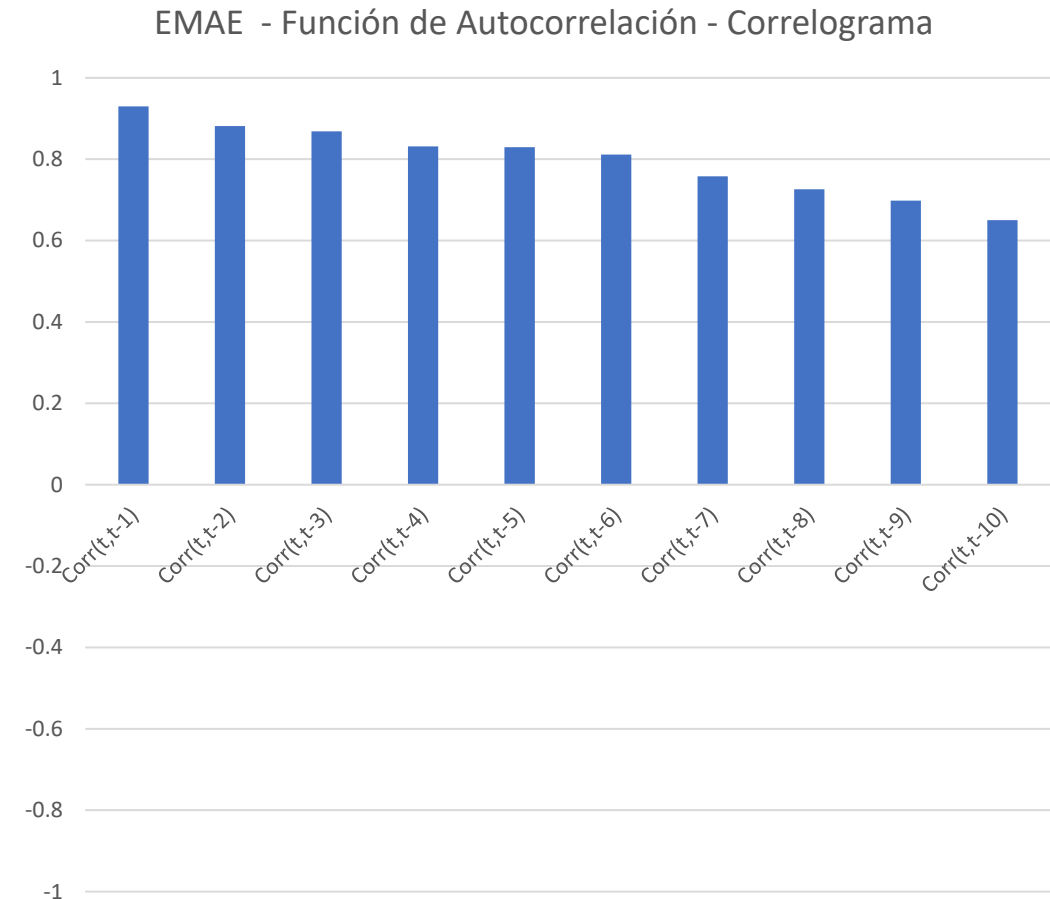
$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Modelo Autoregresivo de Orden 2. AR(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

- ¿Qué función usar?

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \theta_3 z_{t-3} + \dots + \varepsilon_t$$



Función de Autocorrelación Parcial: Motivación


- AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

 Efecto del período anterior sobre el contemporáneo.


- AR(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

 Efecto del rezago de dos períodos sobre el contemporáneo, pero cuando ya tuvo en cuenta el efecto del período anterior.

- AR(3)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \theta_3 z_{t-3} + \varepsilon_t$$

 Efecto del rezago de dos períodos sobre el contemporáneo, pero cuando ya tuvo en cuenta los dos primeros rezagos.

Función de Autocorrelación Parcial

- AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

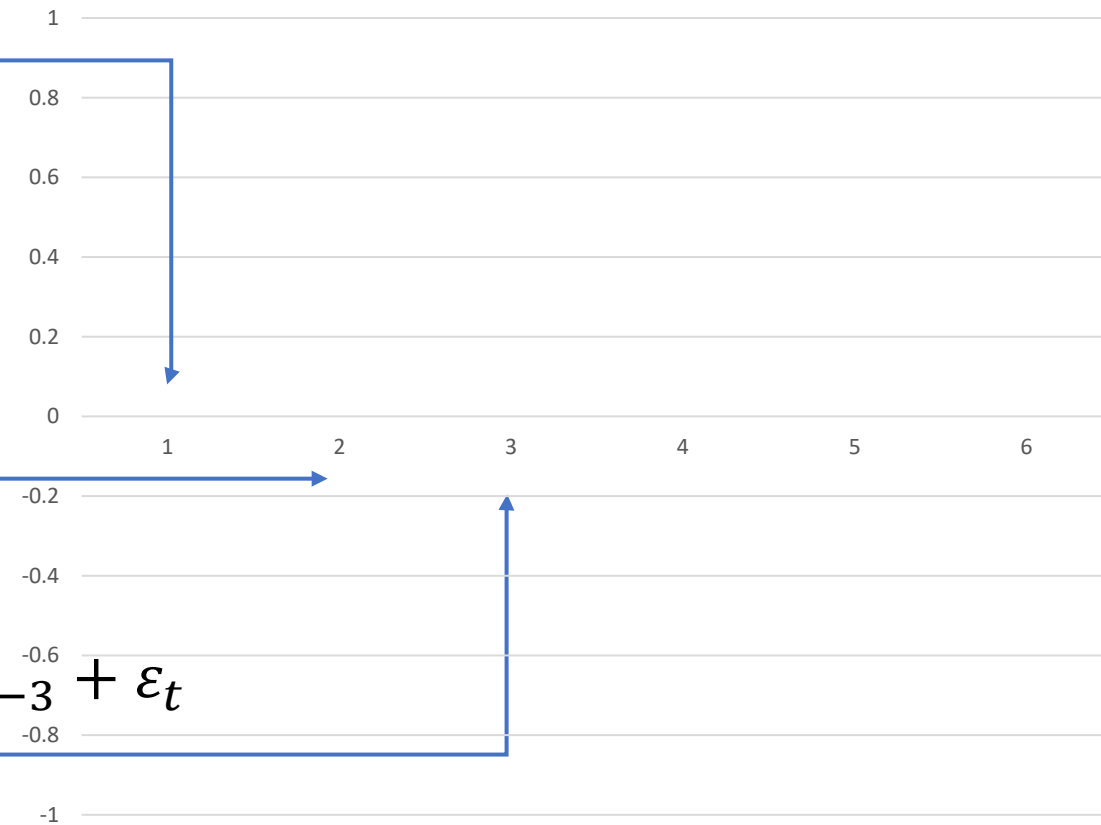
- AR(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

- AR(3)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \theta_3 z_{t-3} + \varepsilon_t$$

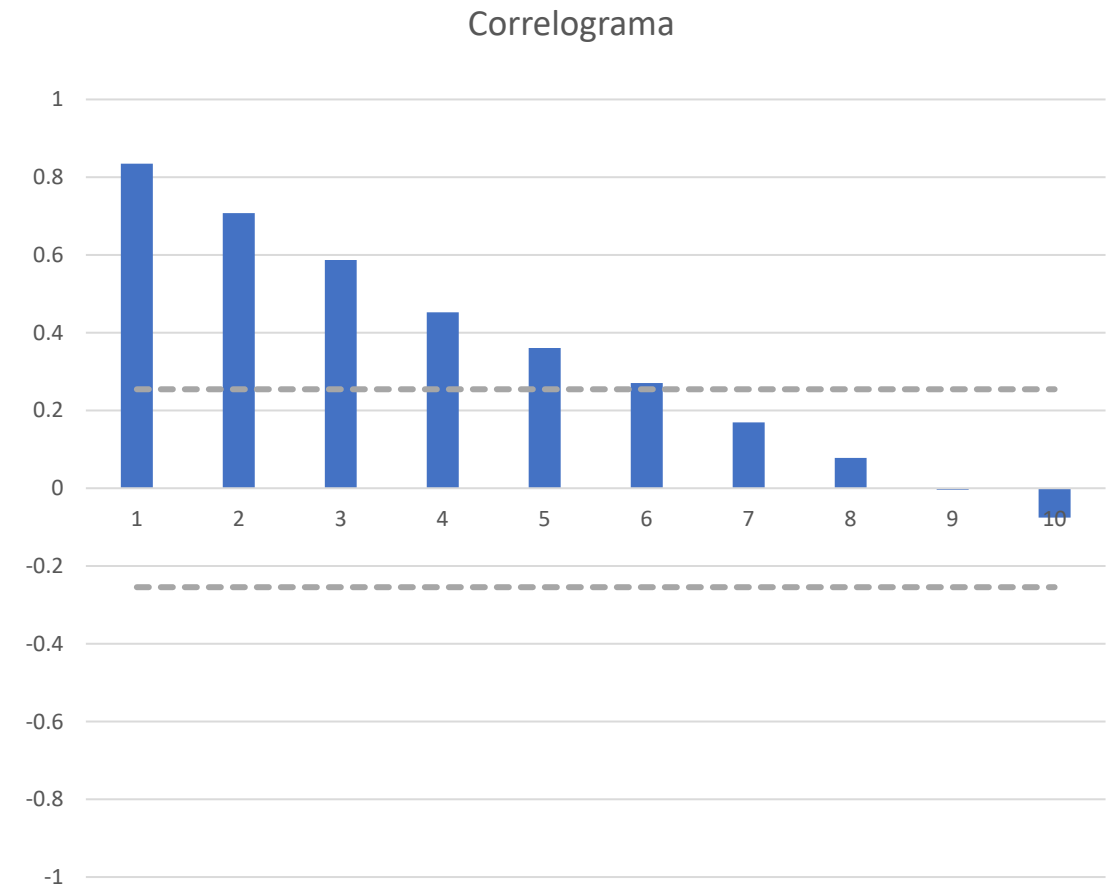
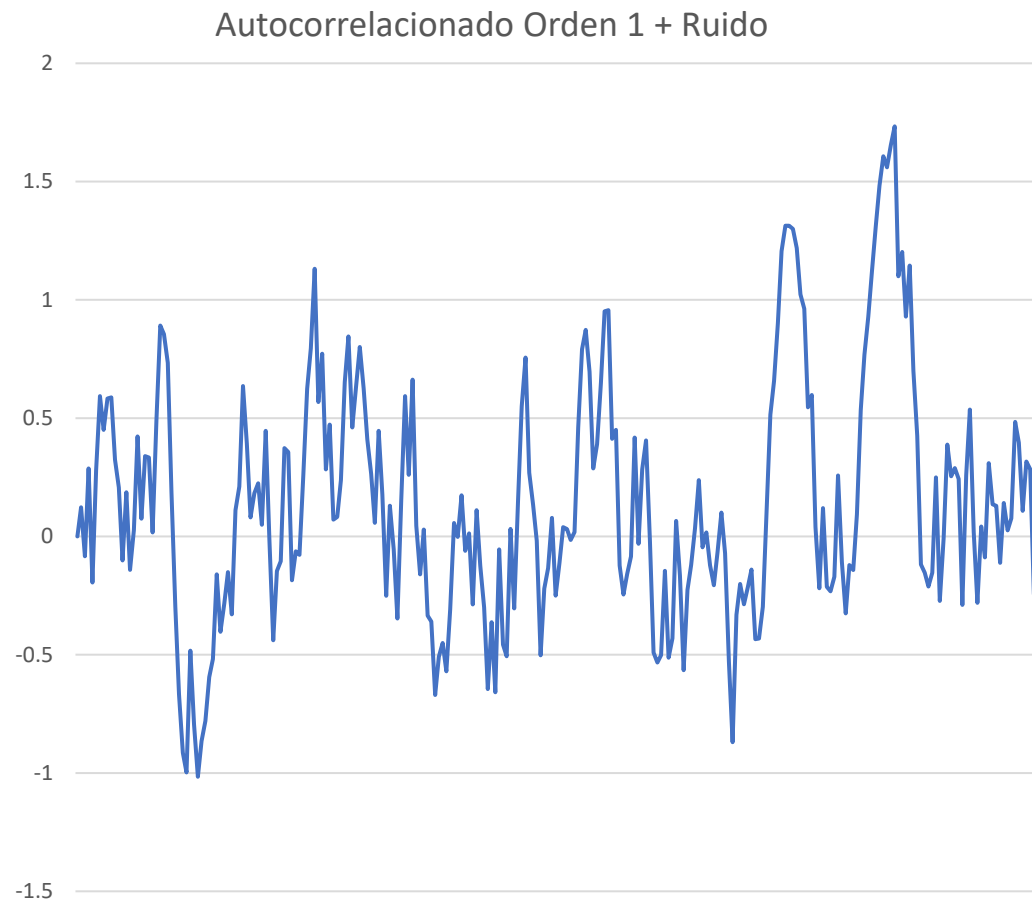
Función de Autocorrelación Parcial



Ejemplo simulado 1: AR(1)

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

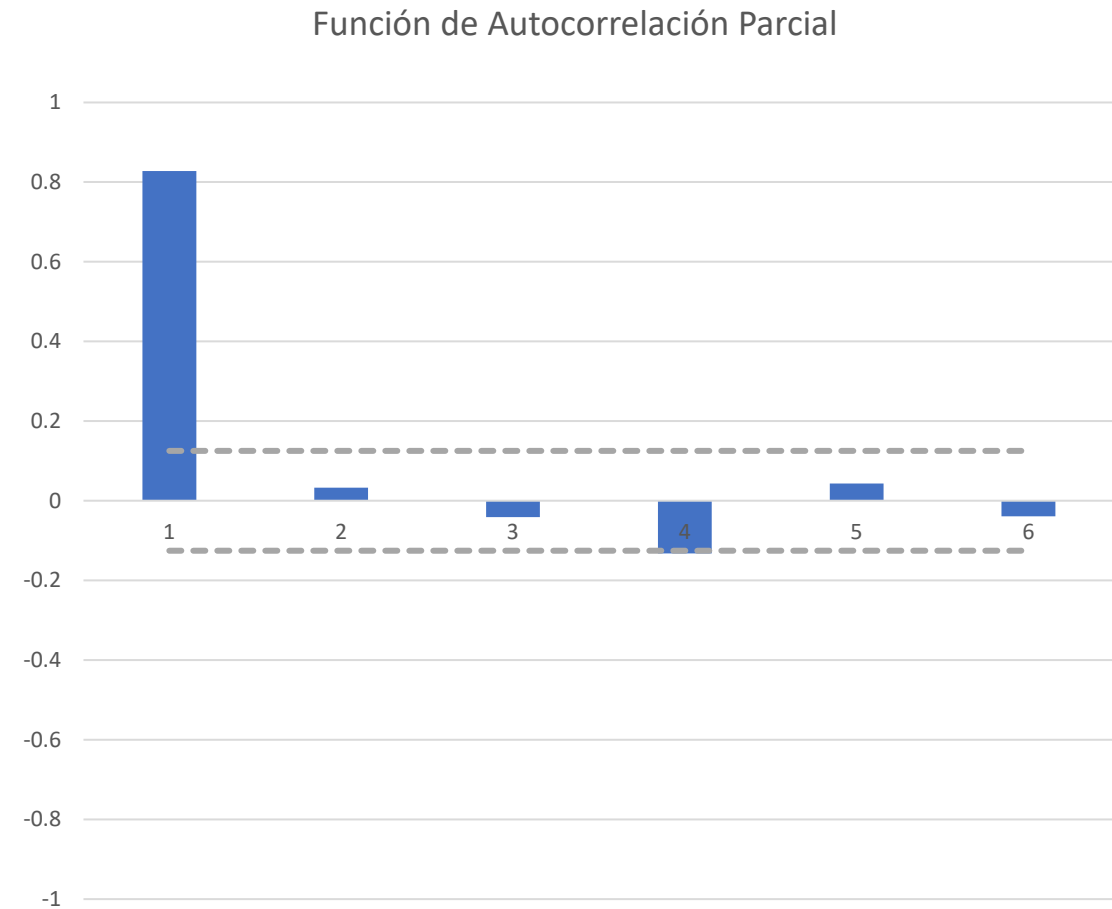
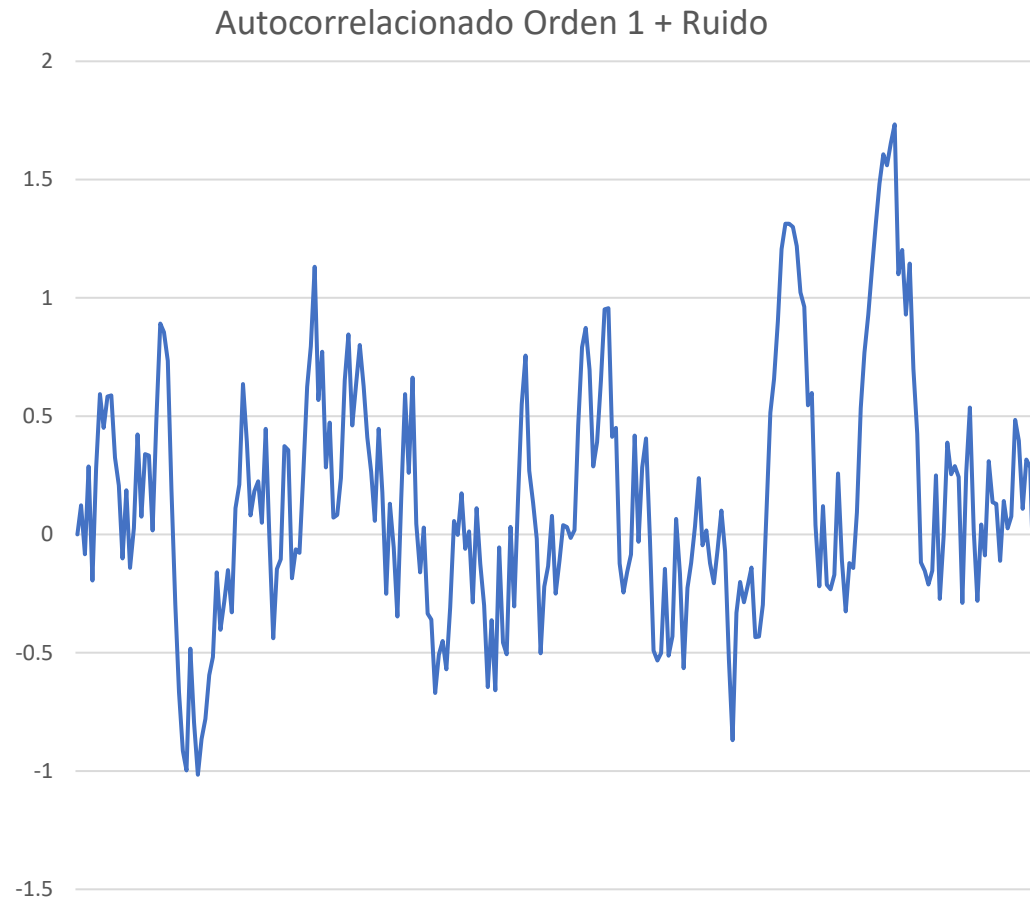
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



Ejemplo simulado 1: AR(1)

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

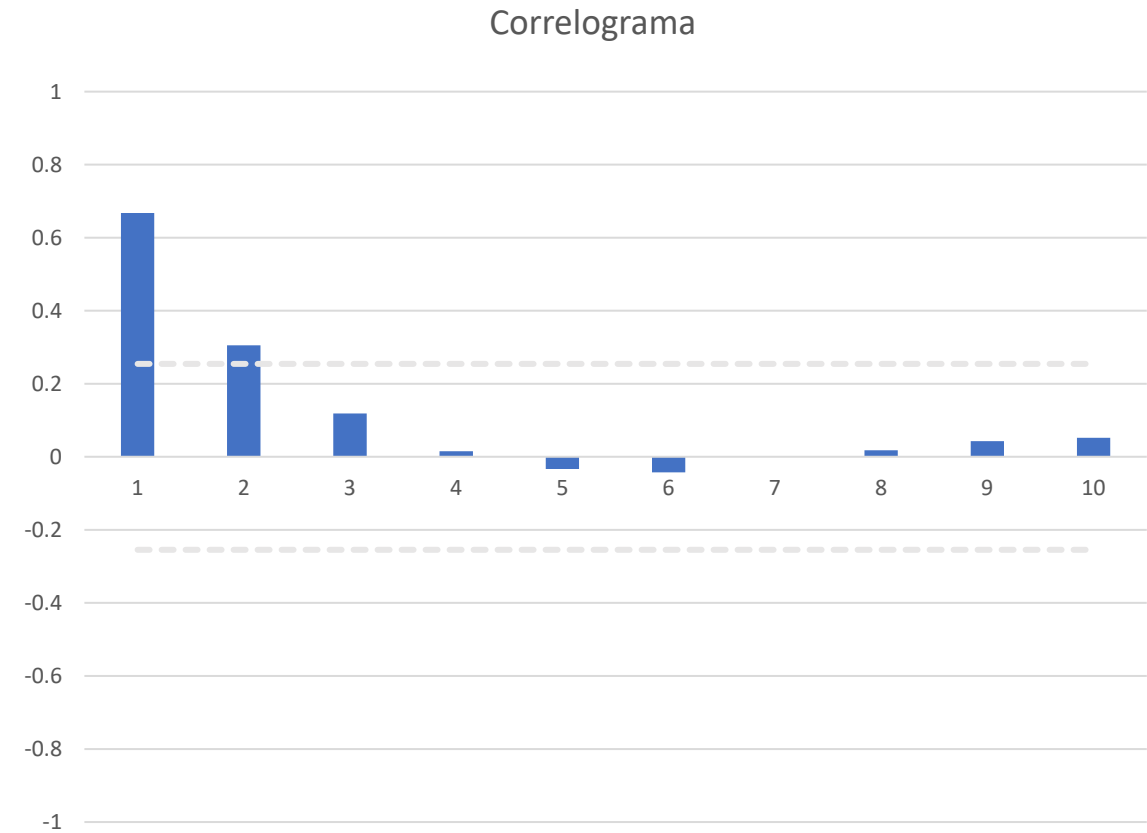
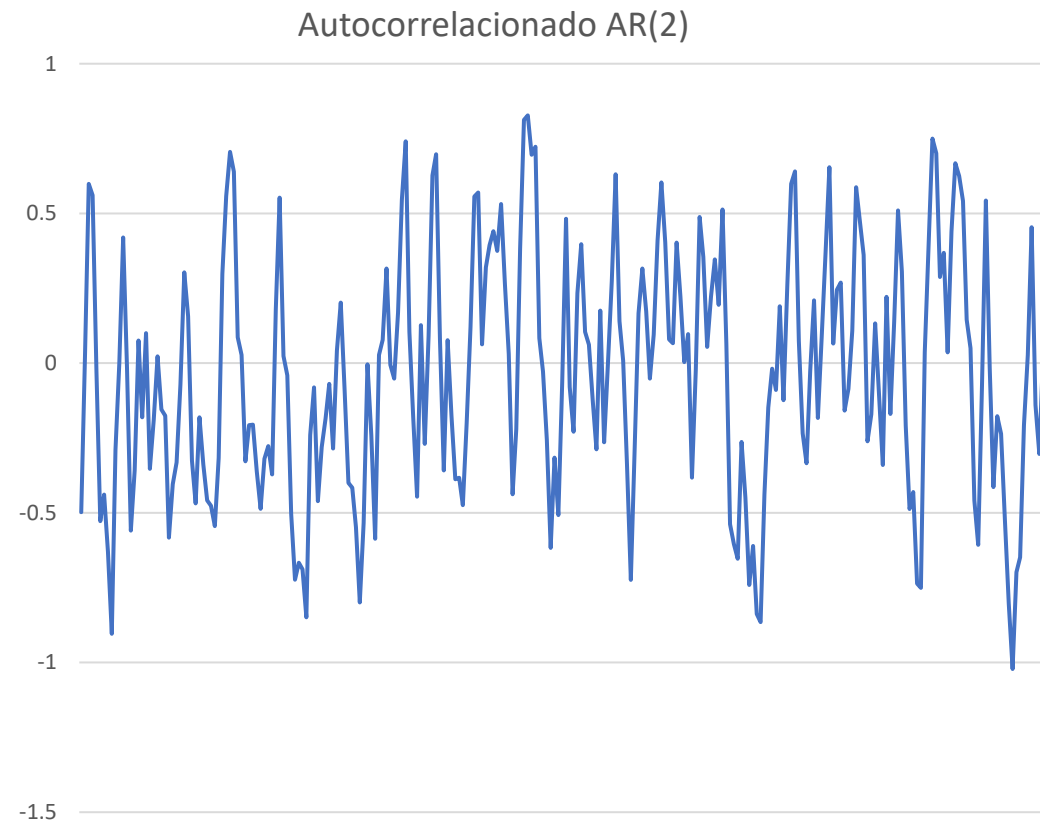
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



Ejemplo: AR(2)

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} - 0.2 * y_{t-2} + \varepsilon_t$$

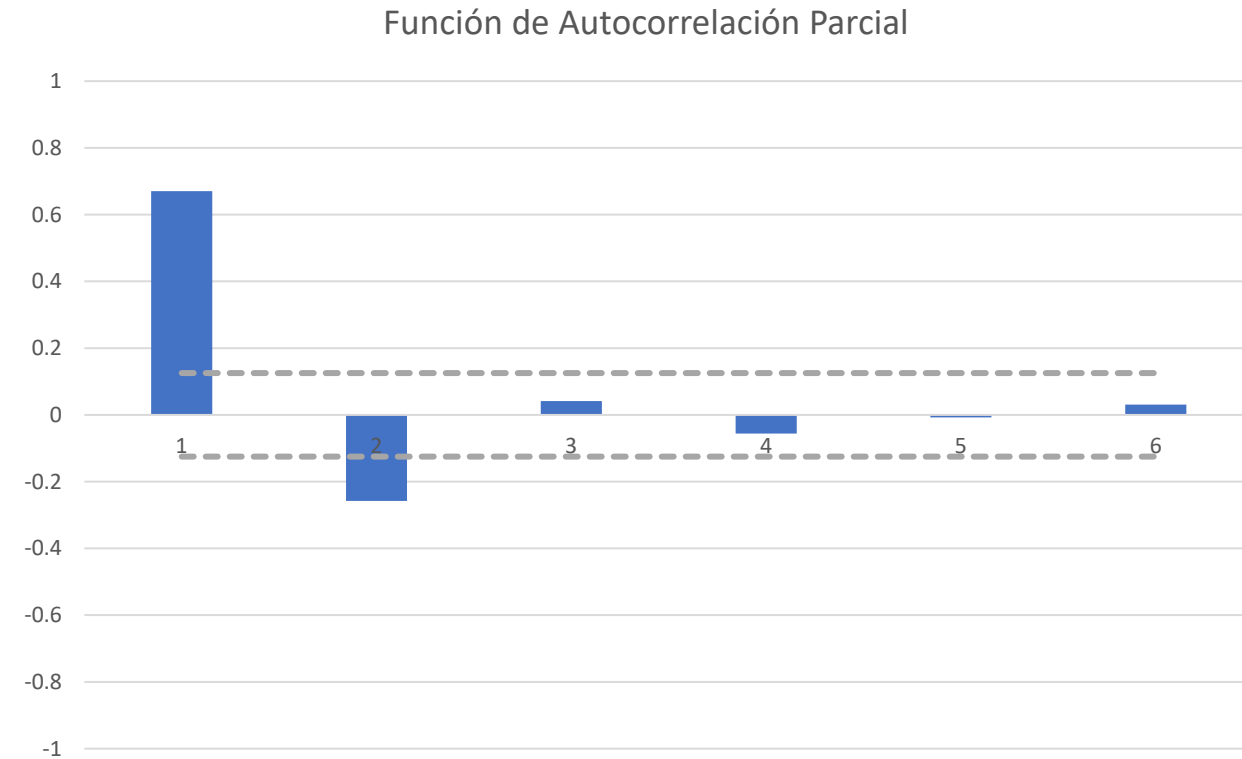
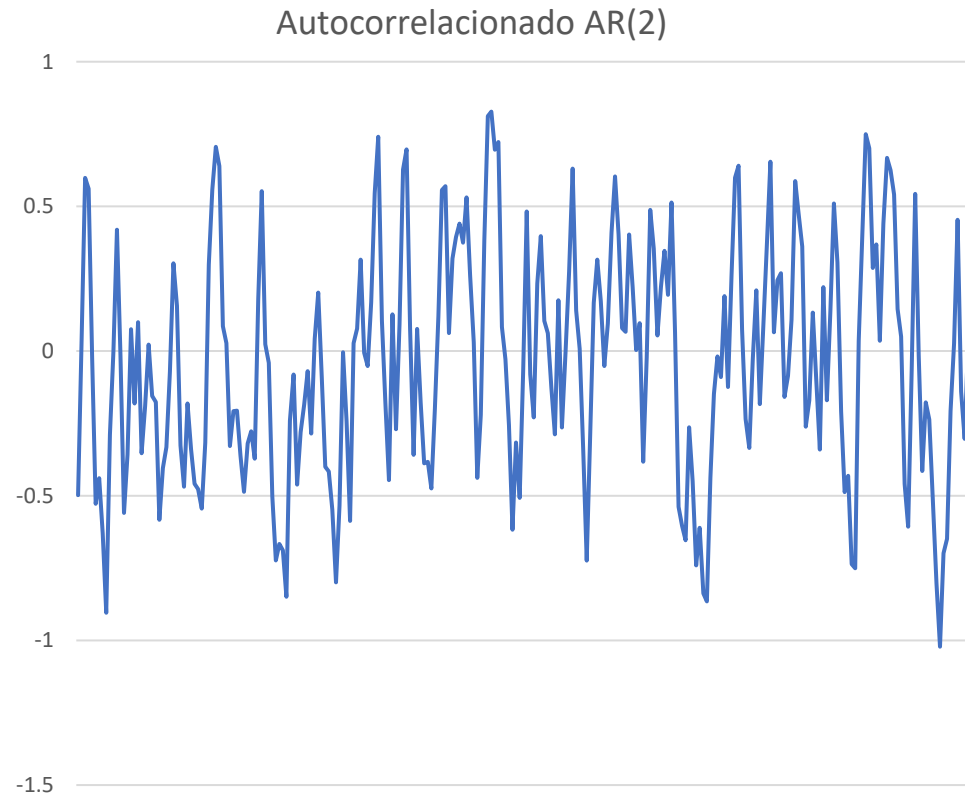
$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



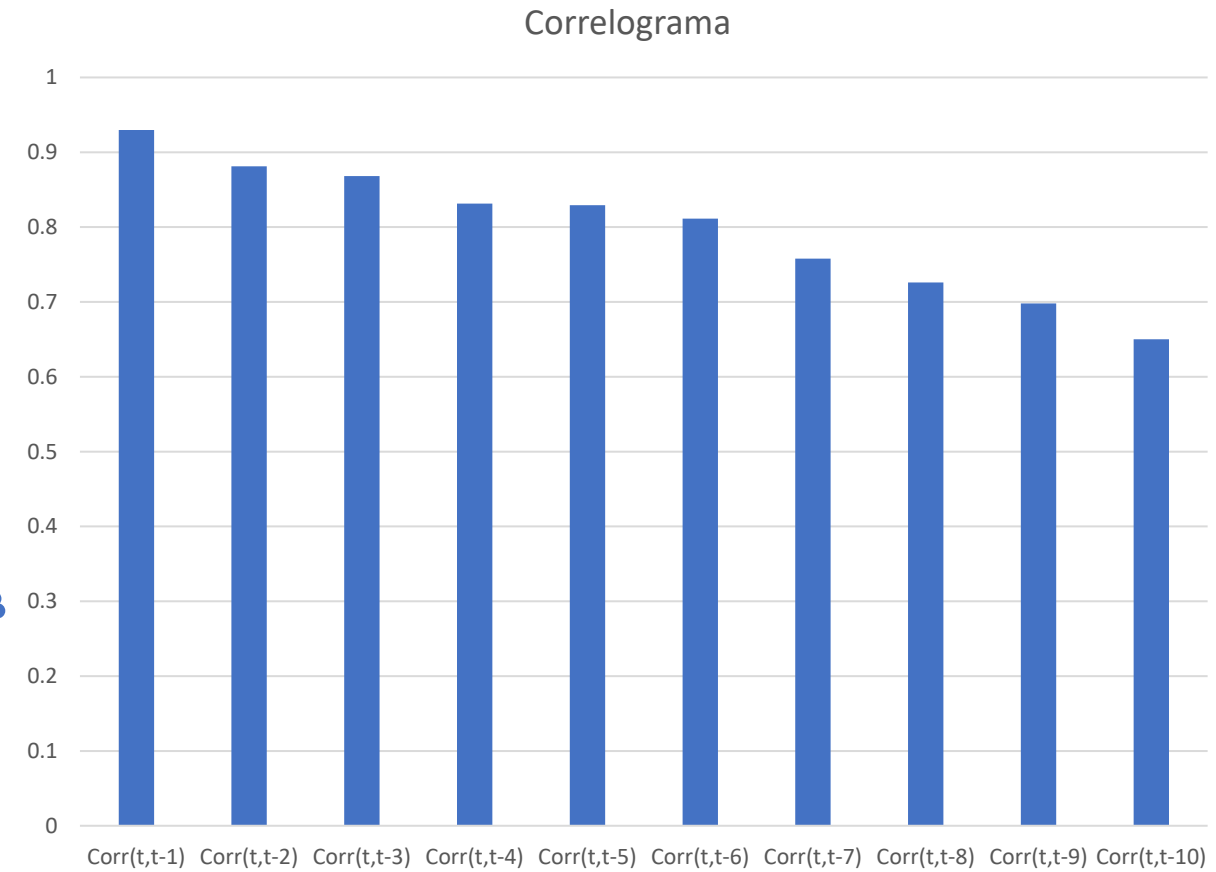
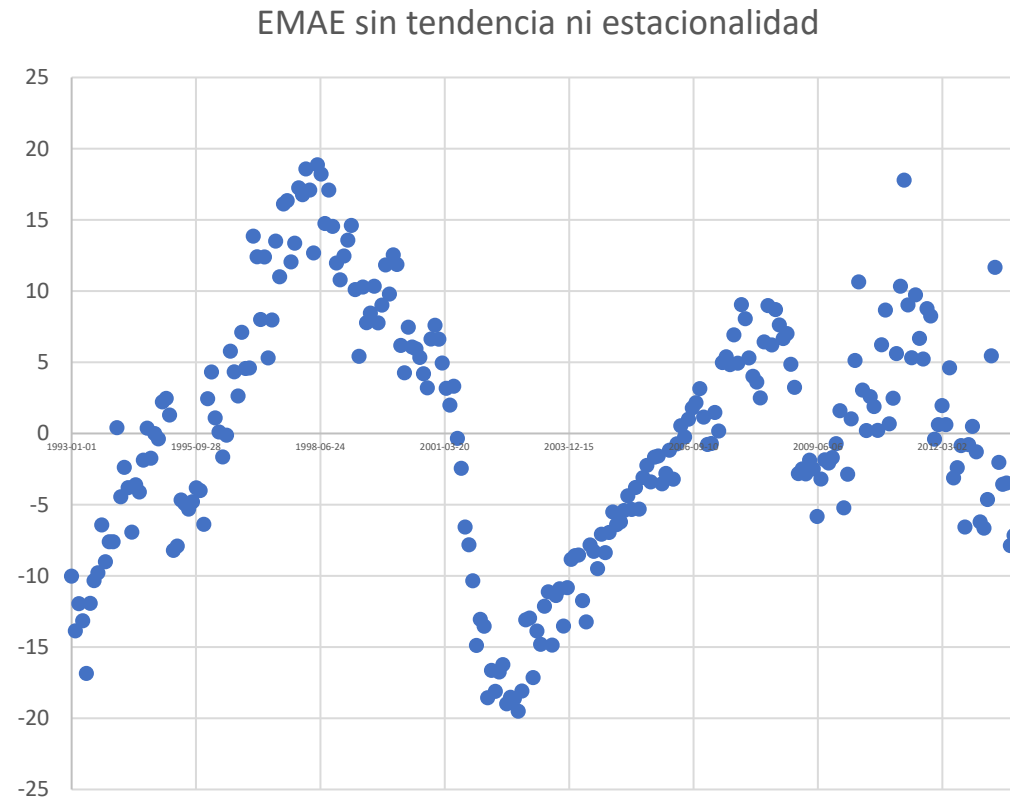
Ejemplo: AR(2)

$$y_t = 0.8 * y_{t-1} - 0.2 * y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



Caso real: EMAE



Caso real: EMAE. Modelo Autoregresivo ampliado

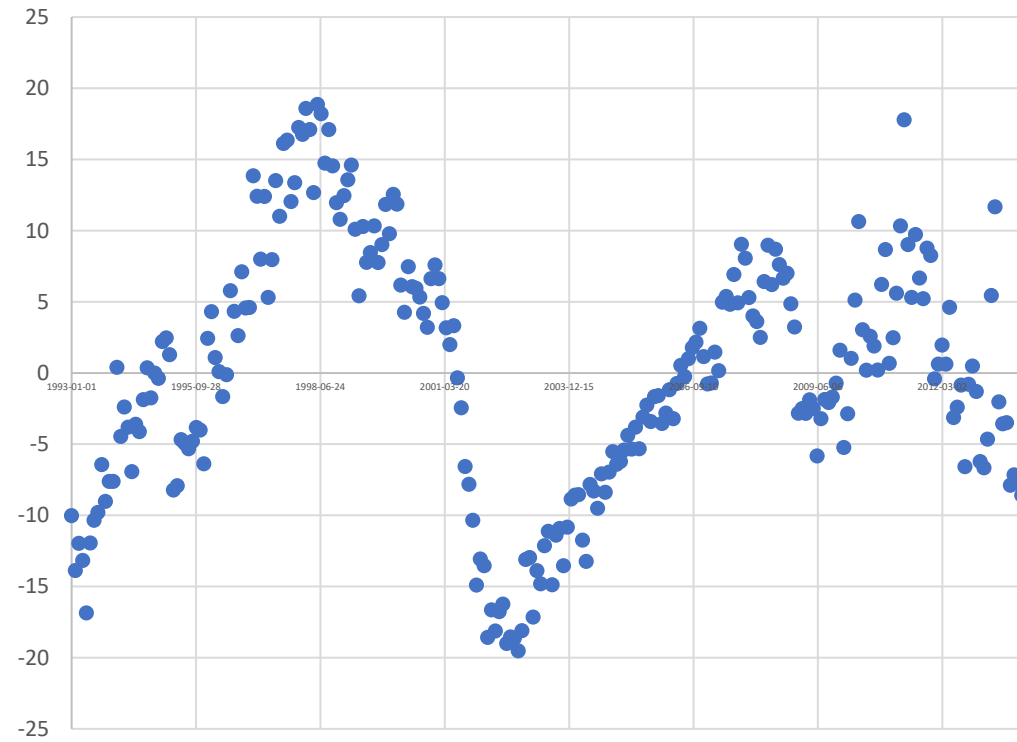
$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_3 z_{t-3} + \theta_5 z_{t-5} + \varepsilon_t$$

Resumen	
<i>Estadísticas de la regresión</i>	
Coeficiente de correlación múltiple	0.93687292
Coeficiente de determinación R ²	0.87773086
R ² ajustado	0.87622136
Error típico	3.08361793
Observaciones	247

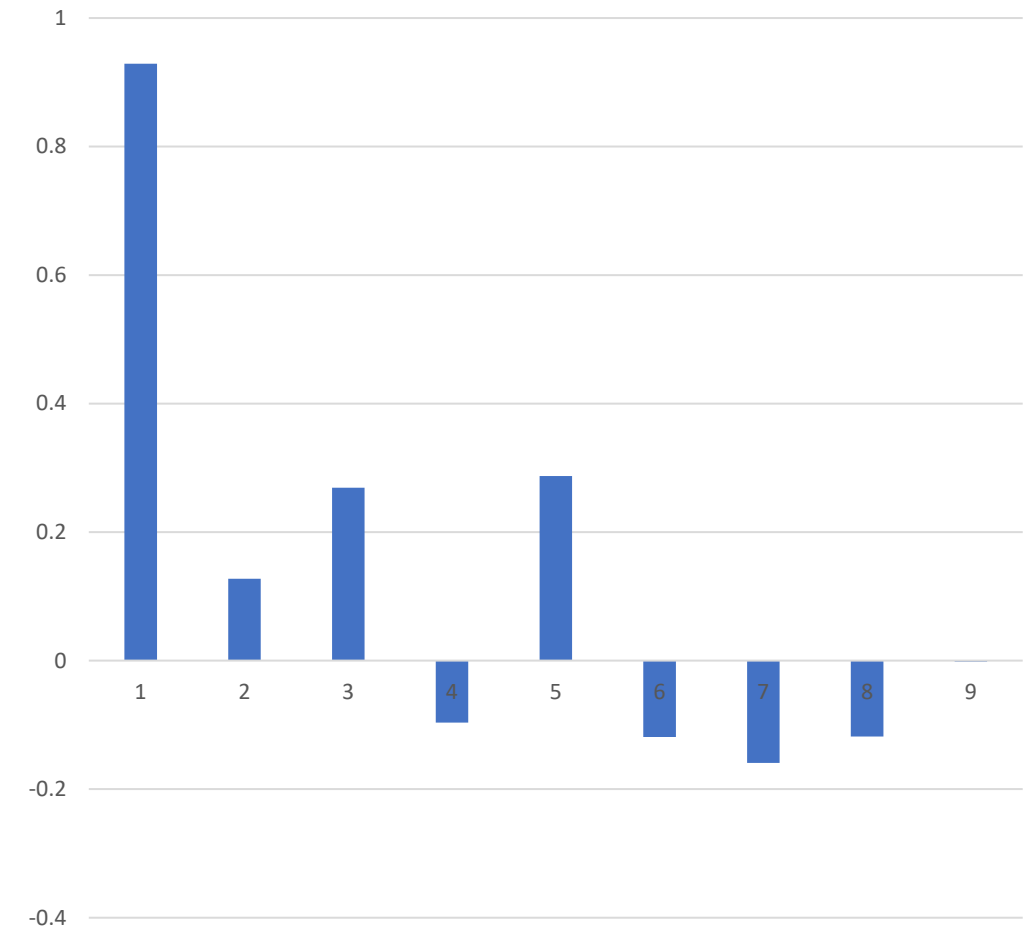
ANÁLISIS DE VARIANZA				
	<i>Grados de libertad</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Promedio de los cuadrados</i>	<i>F</i>
Regresión	3	16587.1552	5529.05173	581.472967
Residuos	243	2310.61399	9.50869953	
Total	246	18897.7692		
	<i>Coeficientes</i>	<i>Error típico</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>Probabilidad</i>
Intercepción	-0.0396264	0.19631415	-0.2018518	0.84020146
Z (t-1)	0.70588323	0.04890759	14.4329994	1.6099E-34
Z (t-3)	0.15043487	0.05732529	2.62423237	0.00923455
Z (t-5)	0.11508766	0.04942072	2.3287328	0.02069417

Caso real: EMAE

EMAE sin tendencia ni estacionalidad



Función de Autocorrelación Parcial



Caso real: EMAE. Modelo Autoregresivo ampliado

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_3 z_{t-3} + \theta_5 z_{t-5} + \varepsilon_t$$

Resumen	
Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0.93687292
Coefficiente de determinación R^2	0.87773086
R^2 ajustado	0.87622136
Error típico	3.08361793
Observaciones	247

Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0.929655416
Coefficiente de determinación R^2	0.864259193
R^2 ajustado	0.863714049
Error típico	3.223572627
Observaciones	251

← AR(1)

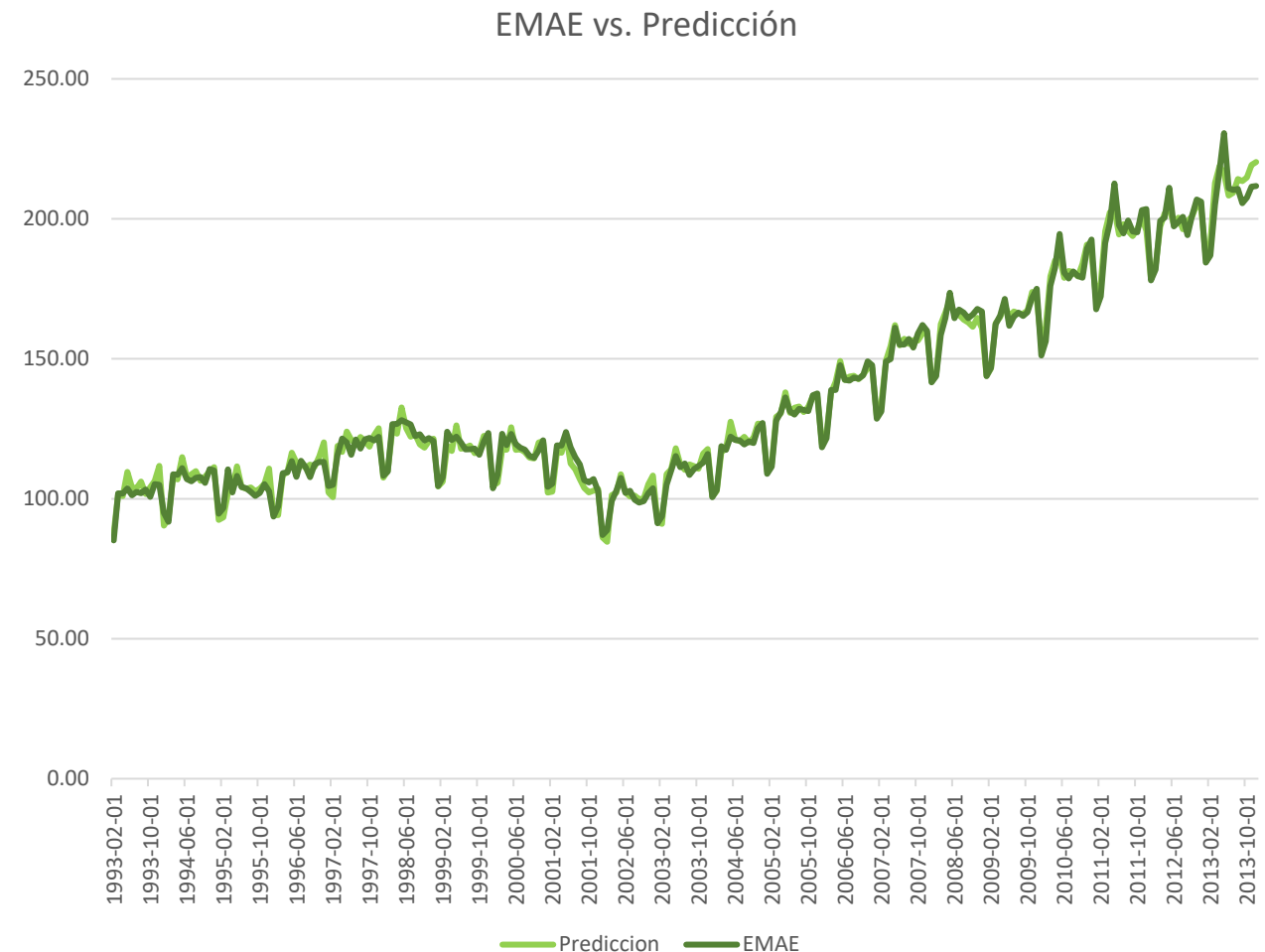
ANÁLISIS DE VARIANZA				
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F
Regresión	3	16587.1552	5529.05173	581.472967
Residuos	243	2310.61399	9.50869953	
Total	246	18897.7692		
	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	-0.0396264	0.19631415	-0.2018518	0.84020146
Z (t-1)	0.70588323	0.04890759	14.4329994	1.6099E-34
Z (t-3)	0.15043487	0.05732529	2.62423237	0.00923455
Z (t-5)	0.11508766	0.04942072	2.3287328	0.02069417

Caso EMAE: Sumando predicciones

$$y_t = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t + \widehat{\beta}_2 t^2 + \sum_{j=1}^{11} \widehat{\beta}_{mes} dm_{es}$$

$$z_t = \widehat{\theta}_0 + \widehat{\theta}_1 z_{t-1} + \widehat{\theta}_3 z_{t-3} + \widehat{\theta}_5 z_{t-5}$$

Fecha	Prediccion tendencia + estacionalidad	Tendencia +estacionalidad + Modelo AR(2)
1993-02-01	99.03	87.55
1993-03-01	113.90	101.83
1993-04-01	115.06	100.98
1993-05-01	120.54	109.59
1993-06-01	113.19	104.04
1993-07-01	112.83	103.68
1993-08-01	111.80	106.15
1993-09-01	109.75	101.72
1993-10-01	109.73	104.13



Modelos de Media Móvil: Motivación

- Modelo MA(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

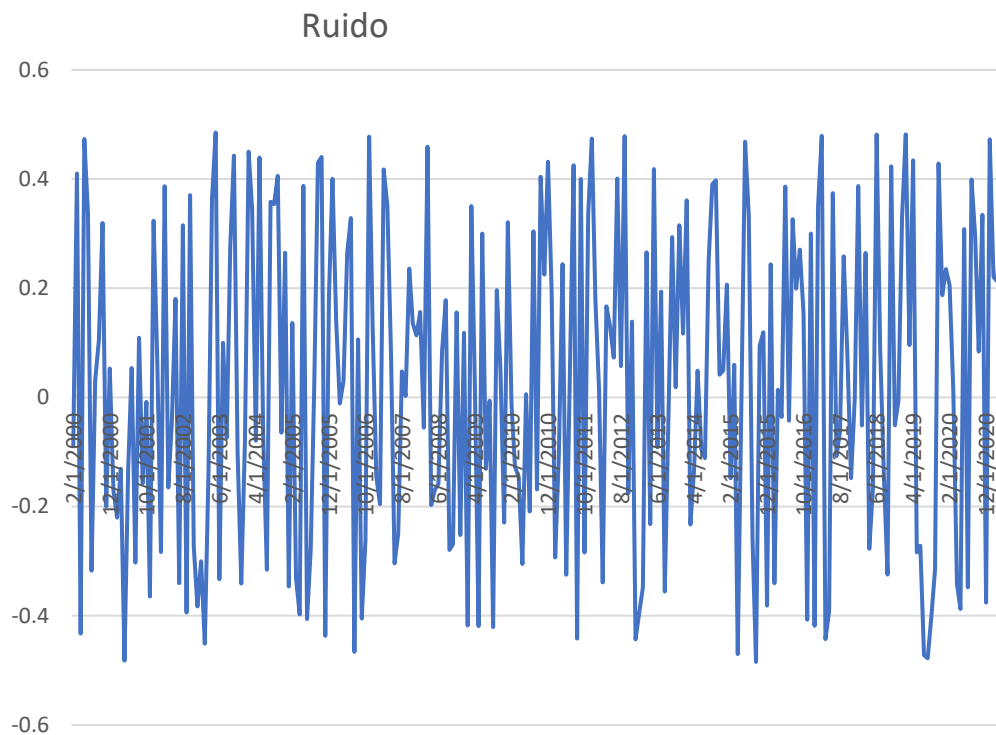
- Modelo MA(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Equivale a un AR con infinitos rezagos

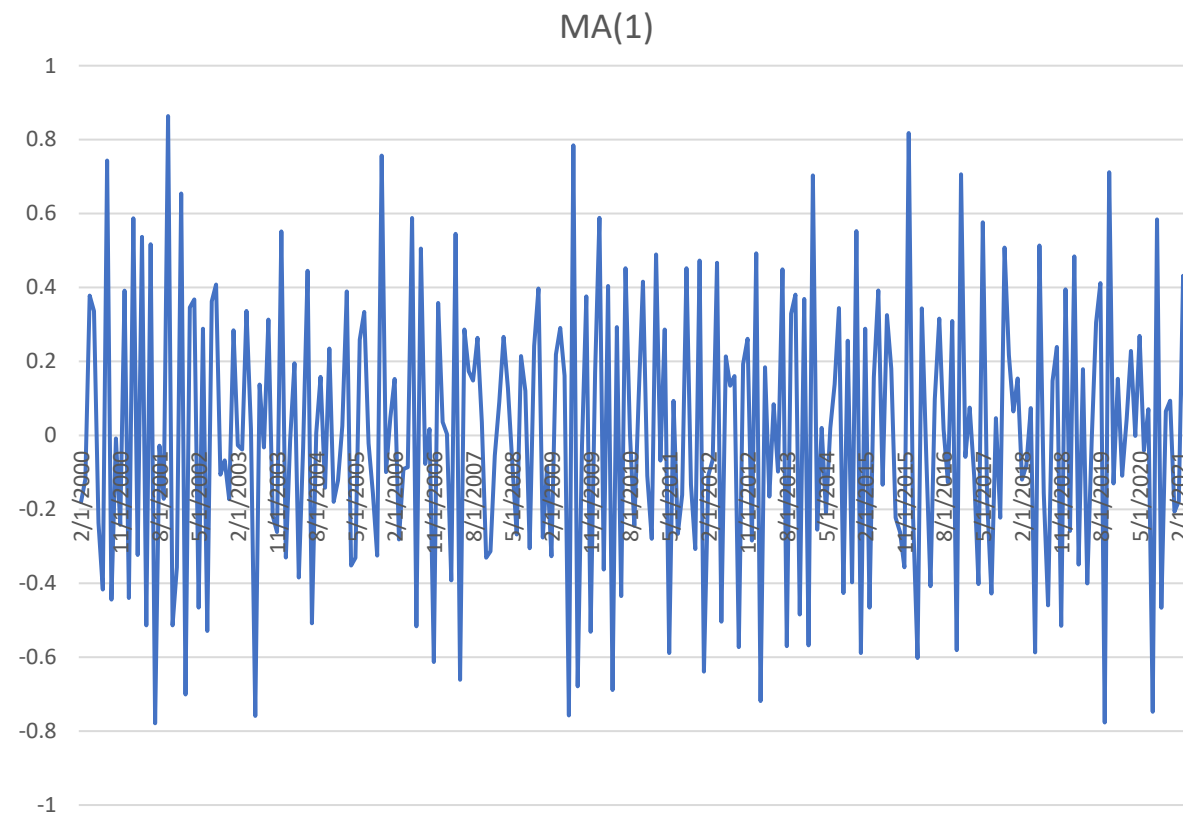
Ejemplo simulado 1: MA(1)

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



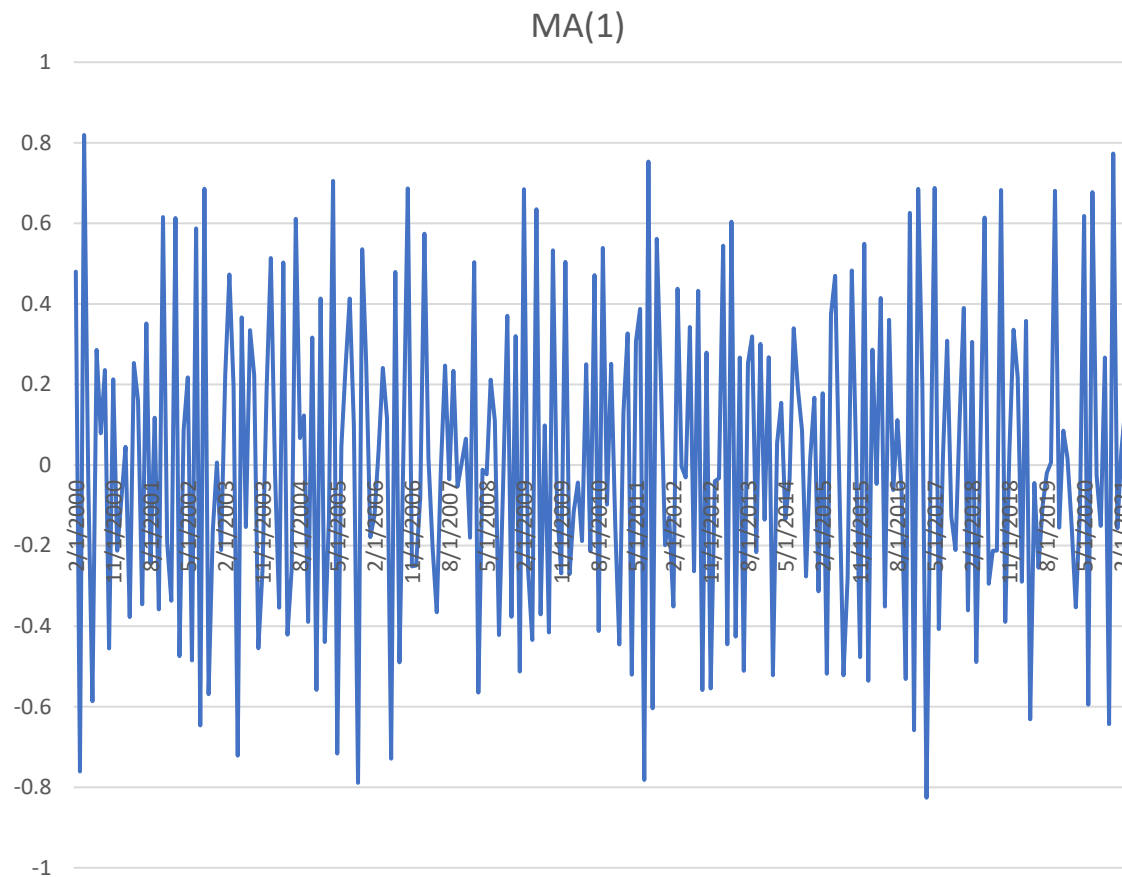
$$z_t = 0 - 0.8 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim U[-0.5, 0.5]$$



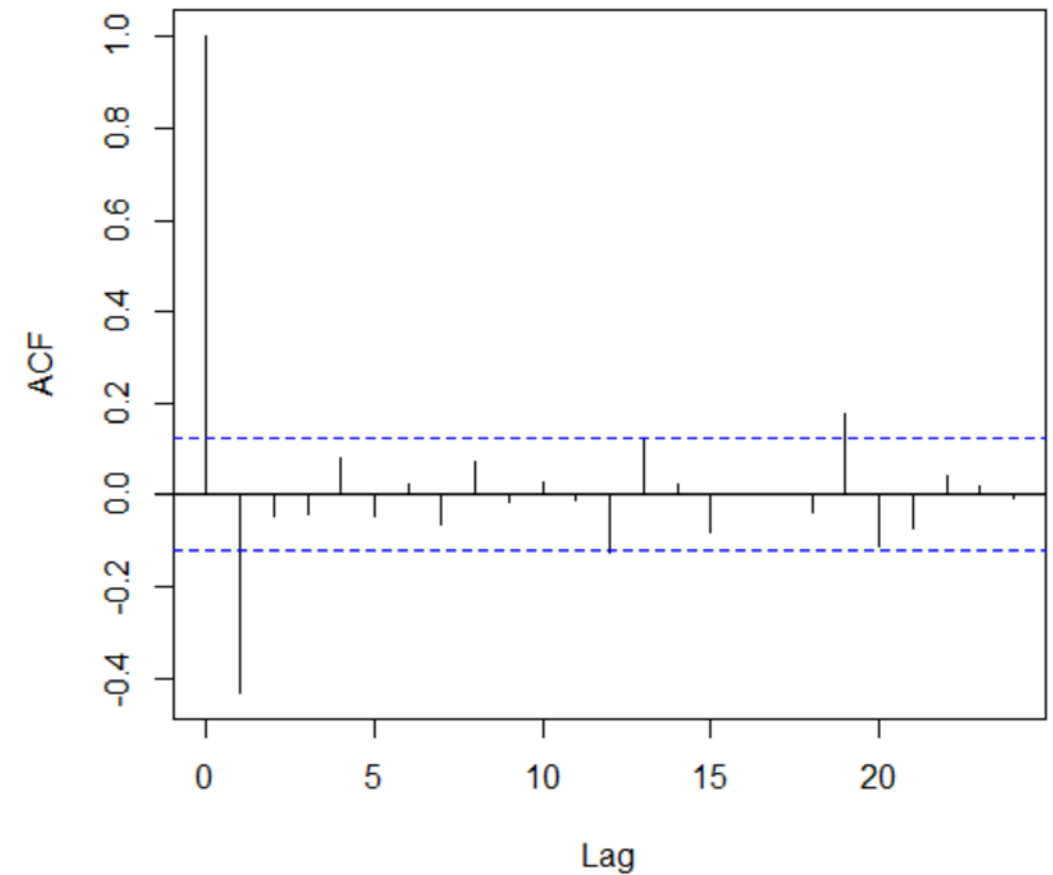
Ejemplo simulado 1: MA(1)

$$z_t = 0 - 0.8 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$



Correlograma

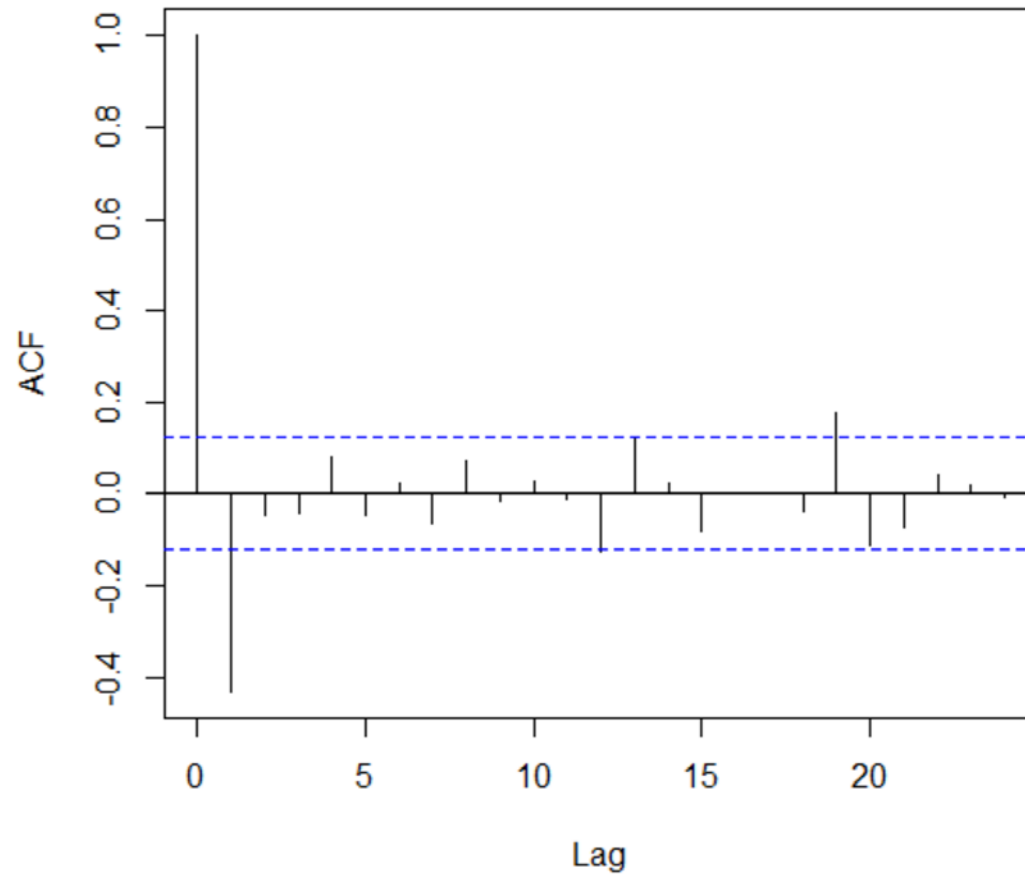
ACF



Ejemplo simulado 1: MA(1)

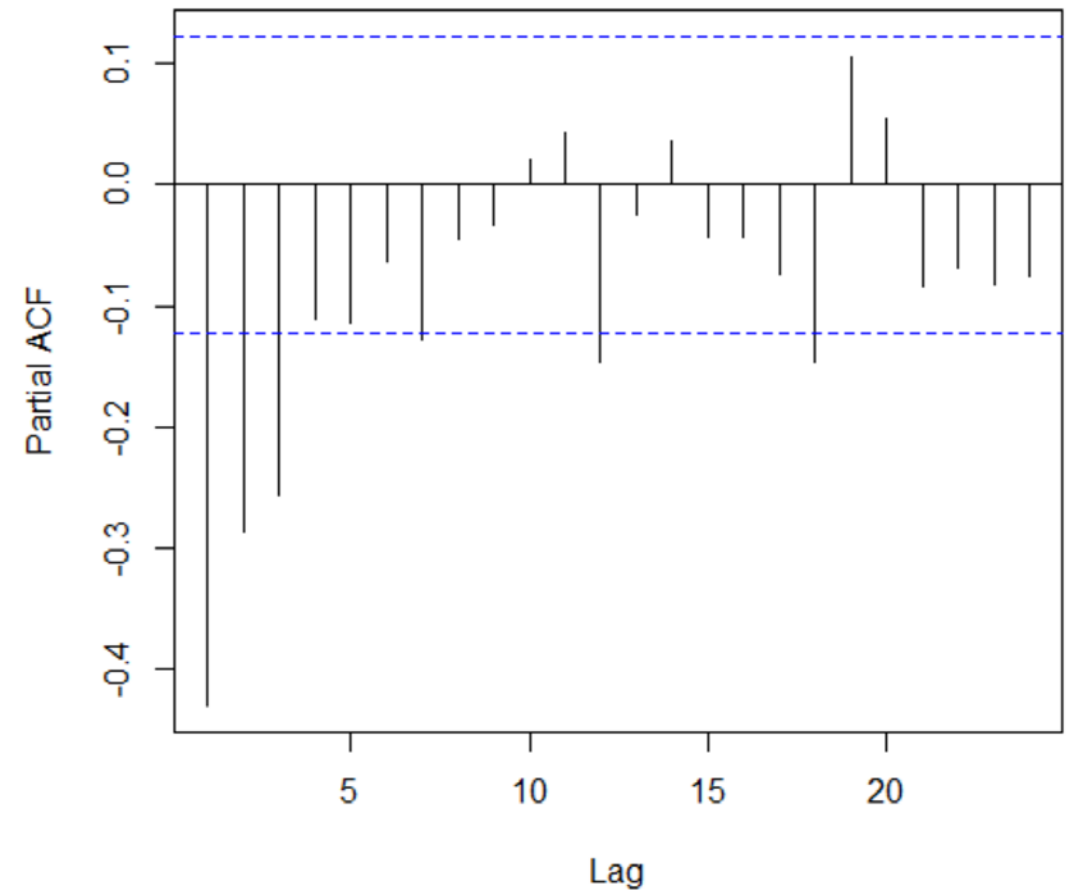
Correlograma

ACF

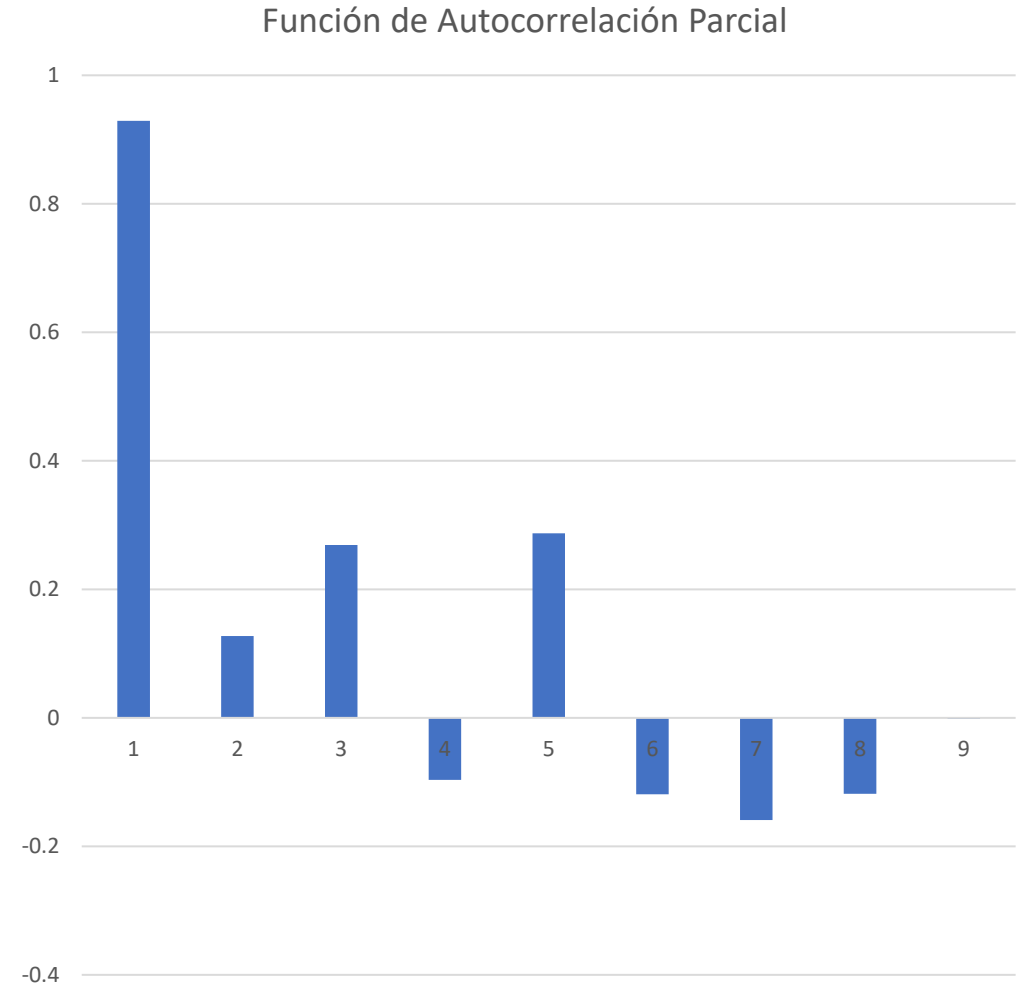
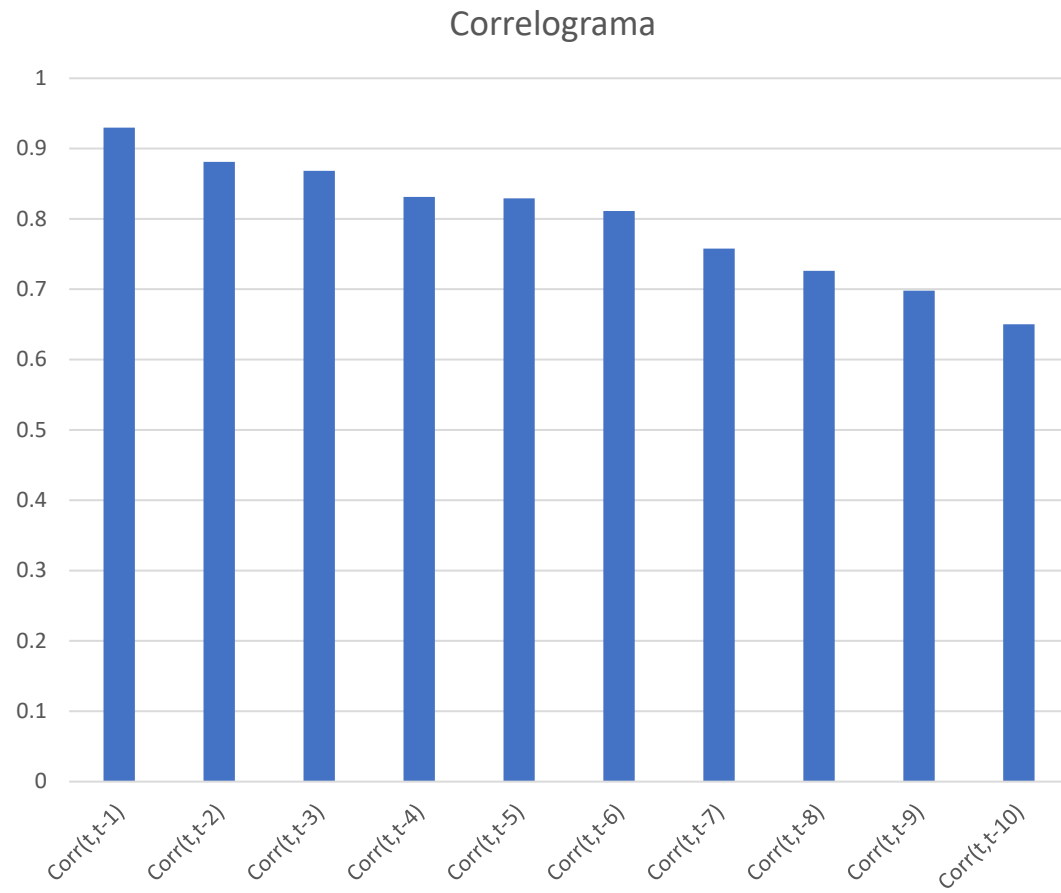


Función de Autocorrelación Parcial

PACF



Caso real: EMAE



Modelos ARMA

- ARMA(1,0) = AR(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

- ARMA(2,0) = AR(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

- ARMA(0,1) = Modelo MA(1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- ARMA(0,2) = Modelo MA(2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

- ARMA(1,1)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_3 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- ARMA(2,2)

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-1} + \theta_4 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$