*Exercices MP/MP**
Probabilités sur un univers dénombrable

Exercice 1. *On lance une seule fois une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages avec remise dans une urne contenant initialement 1 boule noire et 1 boule blanche : si la pièce a donné pile (respectivement face), on rajoute à chaque fois une boule blanche (respectivement noire).*

1. *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage ?*
2. *Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k-ième tirage, quelle est la probabilité p_k d'avoir obtenu pile au lancer initial de la pièce ?*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir k boules blanches au cours des k premiers tirages ?*
4. *On note B_k l'évènement où la k-ième boule est blanche. B_k et B_{k+1} sont-ils indépendants ?*

Exercice 2. *A et B s'affrontent dans une partie de pile ou face : $\mathbb{P}(P) = p$, $\mathbb{P}(F) = 1 - p = q$ avec $p \in]0, 1[$. Au départ, ils possèdent un total de N euros. Après chaque lancer, le perdant donne un euro au gagnant. A gagne si pile, perd si face. Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs est ruiné (ou s'ils avaient 0 au départ).*

On note p_a (respectivement q_a) la probabilité que A (respectivement B) soit ruiné (en temps fini) si A a a euros au départ.

1. *Évaluer p_0, p_N, q_0, q_N.*
2. *Montrer que pour tout $a \in \{1, \ldots, N-1\}$, $p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$. En déduire l'expression de p_a.*
3. *Calculer de même q_a, puis $p_a + q_a$. Qu'en déduit-on ?*

Exercice 3. *Deux archers tirent alternativement sur une cible, jusqu'à ce que l'un des deux la touche. A commence. Il touche la cible avec une probabilité $a \in]0, 1[$. B touche la cible avec une probabilité $b \in]0, 1[$. On note G_A (respectivement G_B) l'évènement où A (respectivement B) l'emporte.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité pour que A (respectivement B) l'emporte au rang $2n + 1$ (respectivement $2n + 2$). On note A_n (respectivement B_n) l'évènement correspondant.*
2. *En déduire $\mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_B)$. Que vaut $\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B)$?*
3. *A quelle condition a-t-on $\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_B)$?*

Exercice 4. *Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers pour l'obtenir, on lui fait tirer un billet de loterie parmi n (un seul billet gagnant).*

1. *Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne ?*
2. *Sachant qu'il a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu pile au n-ième lancer ? Et qu'il ait obtenu pile ?*

Exercice 5. *Dans une famille donnée, la probabilité pour qu'il y ait k enfants est p_k ($k \in \mathbb{N}$) avec $p_0 = p_1 = \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et pour tout $k \geqslant 2$, $p_k = \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}}$. La probabilité qu'il y ait un garçon ou une fille est la même.*

1. *Vérifier que c'est une probabilité sur* $\mathbb{N}$.
2. *Quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement deux garçons ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'une famille au au moins deux filles sachant qu'elle a au moins deux garçons ?*

Exercice 6. *Deux joueurs jouent avec deux dés non pipés. A (respectivement) gagne s'il obtient un total de 6 (respectivement 7). A commence. On s'arrête lorsqu'un des deux joueurs gagne. Quelle est la probabilité de succès des deux joueurs ?*

Exercice 7. *Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire successivement n au hasard avec remise. Quelle est la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit pair ?*

Exercice 8. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *calculer la probabilité* p_n *pour qu'une bijection de* $\{1, \ldots, n\}$ *possède au moins un point fixe. Donner la limite de* p_n *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 9. *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ *et* $q = 1-p$. *On joue à pile ou face avec une probabilité p d'obtenir pile. On gagne 1 euro si on tombe sur face, on perd un euro sinon. Le jeu s'arrête lorsque l'on a 0 ou N euros. Pour* $n \in \{0, \ldots, N\}$, *on note* $p_N(n)$ *la probabilité de gagner (respectivement de perdre) si on dispose au départ de n euros.*

1. *Calculer* $p_N(0)$ *et* $p_N(N)$.
2. *Calculer* $p_N(n)$, $q_N(n)$ *et* $\lim\limits_{N \to +\infty} p_N(n)$ *à n fixé.*

Exercice 10. *Soit* $c \in \mathbb{N}^*$. *Soit une urne contenant initialement une boule blanche et une noire. Après tirage, la boule tirée est remise avec c autres boules de sa couleur. Soit, pour* $n \geqslant 1$, p_n *la probabilité pour que la première boule blanche apparaisse au n-ième tirage. Calculer* p_n *et* $\sum_{n \geqslant 1} p_n$ *lorsque*

1. $c = 1$
2. *c quelconque.*

Exercice 11. *Soit* $p \in]0,1[$ *et* $q = 1-p$. *Une bactérie vit un seul jour. À l'issue de cette journée, elle peut se diviser en deux avec la probabilité p ou bien disparaître tristement sans laisser de traces avec la probabilité q. Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on désigne par* U_n *l'évènement indiquant que la lignée d'une bactérie donnée est éteinte au n-ième jour. On note* $u_n = \mathbb{P}(U_n)$. *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \min(1, \frac{p}{q})$. *Interpréter. Dans le cas* $p = \frac{1}{2}$, *chercher un développement asymptotique en* $o\left(\frac{1}{n}\right)$ *de* u_n.

Exercice 12. *Une puce se déplace sur une droite. Elle part de 0 et fait des sauts successifs de longueur 1. A chaque saut, elle avec avec la probabilité* $p \in]0,1[$ *et recule avec la probabilité* $q = 1-p$. *Quelle est la probabilité pour que la puce repasse en 0 ? Montrer que si* $p \neq \frac{1}{2}$, *le nombre de retours à l'origine est presque sûrement fini.*

Exercice 13. *Soit un lancer infini d'une pièce donnant pile avec la probabilité* $p \in]0,1[$ *et face avec la probabilité* $q = 1-p$. *On désigne, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, A_n *l'évènement qu'après le n-ième lancer, on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs (donc au* $n-1$*-ième et au n-ième). On note* $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. *Calculer* a_1, a_2, a_3.
2. *Calculer* a_n *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. *Interpréter.*

Exercice 14. *On dispose de* $N+1$ *urnes numérotées de* 0 *à* N. *Pour tout* $k \in \{0, \dots, N\}$, *la k-ième urne possède* k *boules blanches et* $N-k$ *boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire* n *fois une boule avec remise.*

Quelle est la probabilité qu'au $n+1$*-ième tirage, on ait obtenu une blanche sachant qu'au cours des* n *premiers lancers on a obtenu des blanches ? On note cette probabilité* $\mathbb{P}_N(n)$. *Que vaut* $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}_N(n)$ *à* n *fixé ?*

Exercice 15. *Quelle est la probabilité pour que deux entiers naturels soient premiers entre eux ?*

Exercice 16. *A écrit à B avec une probabilité* p_1 *s'il lui a écrit la veille,* p_2 *sinon (avec* $(p_1, p_2) \in [0,1]^2$*). Soit, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, X_n *qui vaut 1 si A a écrit à B le jour* n *et 0 sinon. Déterminer la loi et l'espérance (sous réserve d'existence) de* X_n.

Exercice 17. *On lance deux dés non pipés. On note* D_i *le résultat du i-ième dé,* $X = \max(D_1, D_2)$ *et* $Y = \min(D_1, D_2)$.

1. *Déterminer les lois de* X *et* Y *ainsi que leurs espérances et variances.*
2. X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
3. *Et si* $\mathbb{P}(D_i = k) = p_{k,i}$ *avec* $\sum_{k=1}^{6} p_{k,i} = 1$ *?*

Exercice 18. *Soit* $(a,b) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^*$, X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *dont la loi conjointe est*

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i < j \\ \frac{b^i e^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & si\ i \geqslant j \end{cases}$$

1. *Vérifier que cette définition est cohérente.*
2. *Déterminer les lois marginales.* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
3. *Déterminer la loi de* $Z = X - Y$. Y *et* Z *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 19. *Soit* $x \in]0,1[$. *Soit une succession d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, de probabilité d'échec* x. *On définit deux suites de variables aléatoires : pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, S_n *est la nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n-ième succès, et* $T_1 = S_1$ *et pour* $n \geqslant 2$, T_n *est le nombre d'épreuves séparant le n-ième succès du* $n-1$*-ième.*

1. *Exprimer, pour tout* $n \geqslant 1$, S_n *en fonction des* $(T_i)_{i \geqslant 1}$.

2. *Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_n.*
3. *Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S_n.*
4. *Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Exercice 20. *Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. Montrer que X possède une espérance si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge, et qu'on a alors*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Exercice 21. *Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de Poisson) avec $\lambda > 0$. Quelle est la valeur que prend X avec la plus grande probabilité ? Évaluer la limite de cette valeur quand $\lambda \to +\infty$.*

Exercice 22. *Un veilleur de nuit doit ouvrir une porte, ils possède un trousseau de 10 clés indiscernables dont une seule ouvre la porte. S'il est sobre, après chaque échec, il met de côté la mauvaise clé et poursuit avec les autres. S'il est ivre, il remet la clé dans le trousseau après chaque échec. Soit X (respectivement Y) la nombre d'essais au bout desquels il ouvre la porte s'il est sobre (respectivement ivre).*

1. *Donner les lois de X et Y, leurs espérances et variances (si définies).*
2. *Le gardien est ivre un jour sur 3. Sachant qu'un jour il a essayé au moins 9 clés, quelle est la probabilité qu'il ait été sobre ce jour-là ?*

Exercice 23. *Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient N jetons à deux faces. L'une porte un numéro bleu, l'autre un rouge. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$, un seul jeton porte i bleu et j rouge. On tire au hasard un jeton. On note B (respectivement R) le numéro bleu (respectivement rouge) tiré et $G = B - R$.*

1. *Déterminer N en fonction de n.*
2. *Donner les lois conjointes et marginales de B et R.*
3. *Déterminer les espérances et variances de B, R et G.*

Exercice 24. *Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières (naturelles) d'un axe d'origine 0. Au départ, le mobile est en 0. S'il est au point d'abscisse k à l'instant n, à l'instant $n+1$ il est au point $k+1$ avec une probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ et 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$. On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n et $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{k}{k+1}\mathbb{P}(X_n = k-1)$.*
2. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(x_n = k) = \frac{1}{k+1}u_{n-k}$.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} \frac{u_n}{n-j+1} = 1$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.*

4. *Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + u_{n+1}$. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
5. *On note T l'instant auquel le mobile revient pour la première fois à l'origine ($T = 0$ s'il ne repasse pas par l'origine). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$. En déduire $\mathbb{P}(T = 0)$.*
6. *T admet-elle une espérance ?*

Exercice 25. *Le nombre N de clients arrivant dans un magasin au cours d'une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces clients se répartissent de manière équiprobable entre les m caisses du magasin ($m \in \mathbb{N}^*$). Soit X_1 le nombre de clients qui arrivent à la caisse 1 au cours d'une journée.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $N = n$.*
2. *En déduire la loi de X_1.*

Exercice 26. *Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.*

1. *Quelle est la conjointe de (U, V) ?*
2. *Déterminer la covariance de X, Y ?*
3. *U et V sont-elles indépendantes ?*

Exercice 27. *On tire indéfiniment à pile ou face, avec une probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir pile, $q = 1-p$ d'obtenir face. On note P (respectivement F) le rang d'apparition du premier pile (respectivement du premier face) et on note X (respectivement Y) la longueur de la première (respectivement deuxième) suite de tirages égaux (ex : (pile, pile, face, pile,...) donne $X = 2$ et $Y = 1$).*

1. *Donner les lois de P et F et leurs espérances et variances.*
2. *P et F sont-elles indépendantes ?*
3. *Donner les lois conjointes et marginales de X et Y. Sont-elles indépendantes ?*
4. *Montrer que $\mathbb{E}(X) \geqslant 2$.*
5. *Quelle est la probabilité que $X = Y$?*
6. *Donner la loi de $X + Y$ lorsque $p = \frac{1}{2}$.*

Exercice 28. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes de même loi, centrées à valeurs dans $[-1, 1]$.*

1. *Montrer que pour tout $\lambda \geqslant 0, \forall x \in [-1, 1]$, $\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} + x \sinh(\lambda)$.*
2. *En déduire que si X est une variable aléatoire discrète centrée à valeurs dans $[-1, 1]$, alors pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$ et $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda X}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$.*
3. *Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})$.*
4. *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $a \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant a\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}$.*

Exercice 29.

1. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérances finies. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit*

$$\mathbb{E}_{(X=k)}(Y) = \sum_{l=0}^{+\infty} l\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = l)$$

Montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X=k)}(Y) \times \mathbb{P}(X = k)$$

2. *Soit $\lambda \geqslant 0$, on suppose que le nombre de descendants poules à la première génération d'une poule donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Soit X_n le nombre de poules à la n-ième génération avec $X_0 = N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$.*

Exercice 30. *Au cours de sa vie, une poule pond N œufs où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Chaque œuf éclot avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On note K le nombre de poussins. Donner la loi et l'espérance de K.*

Exercice 31. *Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements indépendants de Ω (où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé) telle que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}$ (indicatrice de l'ensemble).*

1. *Évaluer l'espérance et variance de S_n, et en donner des équivalents.*
2. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé, montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Exercice 32. *Soit $n \geqslant 1$, $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes discrètes telles que $X_i \sim \mathcal{G}(p)$ (loi géométrique) avec $p \in]0, 1[$. On note $q = 1-p$ et $U = \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ et $V = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.*

1. *Donner la loi de U et son espérance (dont on justifiera l'existence).*
2. *Donner la loi de V, montrer que*

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1 - q^i}$$

Exercice 33. *Un joueur arrive au casino avec une fortune $k \in \{0, \ldots, N\}$ où N est la "banque", c'est-à-dire la limite que paiera le casino. A chaque étape, il gagne 1 avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et perd 1 avec une probabilité $q = 1 - p$. Il s'arrête lorsqu'il a 0 (ruine) ou N (banque). On sait que l'arrêt en temps fini est presque sûr. On note t_k le temps d'arrêt du joueur (le nombre de fois où il joue avant de s'arrêter).*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(t_k > N(n+1)) \leqslant \mathbb{P}(t_k > Nn) \times (1 - p^N)$$

   En déduire que t_k possède une espérance notée T_k.

2. *Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, $T_k = p(1 + T_{k+1}) + q(1 + T_{k-1})$.*
3. *En déduire que*

$$T_k = \begin{cases} \dfrac{1}{q-p}\left[k - N\left(\dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^n}\right)\right] & \text{si } p \neq \dfrac{1}{2} \\ k(N-k) & \text{si } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 34. *Soit $s > 1$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la probabilité :*

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$$

1. *Vérifier que c'est une probabilité sur $\mathbb{N}^*$. On forme, pour $n \geqslant 1$, $A_n = n\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.*
2. *Montrer que si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, alors $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants.*
3. *En déduire que*

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

   puis que

$$\zeta(s) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right)^{-1}$$

Exercice 35. *On dispose de deux pièces de monnaie. La pièce A (respectivement B) amène pile avec la probabilité $a \in]0,1[$ (respectivement $b \in]0,1[$). On choisit au départ de façon équiprobable une des deux pièces et on effectue le premier lancer avec celle là. Si on obtient pile, on garde la même, sinon on change. Soit, pour $n \geqslant 1$, E_n l'évènement désignant le fait que l'on utilise pour la première fois la pièce A au n-ième lancer. On indique de même par U_n l'évènement désignant le fait que l'on obtient n piles au cours des n premiers lancers.*

Calculer $\mathbb{P}(E_n), \mathbb{P}(U_n), \mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n), \mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}} U_n)$.

Exercice 36. *Soit N pièces de monnaie, dont chacune amène pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. A chaque lancer, on laisse de côté les pièces tombées sur pile, et on relance les autres jusqu'à que toutes arrivent sur pile.*

1. *Pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'évènement $A_{i,n}$ désignant le fait que la pièce numéro i est lancée au plus n fois.*

2. *Soit B_n l'évènement indiquant que l'on effectue au plus n relances. Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.*
3. *Pour $n \geqslant 1$, quelle est la probabilité d'effectuer exactement n relances ?*

Exercice 37. *Soit p premier et $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (en tant que corps). Soit $n \geqslant 1$. On définit $\mathbb{K}_{<n}[X] = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(Q) < n\}$ et $\mathbb{K}_{=n}[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) = n\}$. Ces espaces sont munis de la probabilité uniforme. On forme $\Omega = \mathbb{K}_{<n}[X] \times \mathbb{K}_{=n}[X]$ muni de la probabilité uniforme.*

1. *Quelle est la loi de $\deg(Q)$?*
2. *Quelle est la probabilité pour que $Q \mid P$? On pourra poser $A = \{(Q,P) \in \Omega | Q \mid P\}$ et $B = \{(Q,A) \in \mathbb{K}_{<n}[X] \times \mathbb{K}_{=n}[X] | \deg(Q) + \deg(A) = n\}$ et montrer que*

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ (Q,P) & \mapsto & (Q, \frac{P}{Q}) \end{array} \tag{1}$$

   est définie et bijective.
3. *Soit $R \in \mathbb{K}_{<n-1}[X]$, on pose pour $(Q,P) \in \Omega$ avec $Q \neq 0$, R_1 le reste de la division euclidienne de P par Q. Calculer $\mathbb{P}(R_1 = R)$ et $\mathbb{P}_{\deg(Q)=k}(R_1 = R)$.*

Exercice 38. *On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note X_1 le premier tirage et X_2 le deuxième.*

1. *Donner la loi conjointe de (X_1, X_2).*
2. *Donner la loi de X_2 puis la loi de $X_{1_{|X_2=j}}$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.*
3. *X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?*
4. *Généraliser à k tirages sans remise pour $1 \leqslant k \leqslant n$.*
5. *Quelle est l'espérance de (X_1, X_2) ?*

Exercice 39. *Une urne contient une boule blanche et une rouge. On effectue des tirages successifs avec remise, selon la règle : si on tire une rouge (resp. blanche), on la remet dans l'urne avec deux autres boules rouges (resp. blanches).*

1. *Quelle est la probabilité que les n premiers tirages soient rouges ?*
2. *De ne tirer que des boules rouges ?*
3. *De tirer une rouge au n-ième tirage ?*
4. *Et si après le n-ième tirage, on rajoute $(n+1)$ boules ?*