

*Solutions MP/MP^**

Séries Entières

Solution 1.

1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} > 0$. On va chercher un équivalent. On a $u_n = e^{n^\alpha \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$. Comme $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$, on a

$$\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right), \quad (1)$$

$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (2)$$

Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} e^{\frac{n^{\alpha-2}}{2} + O(n^{\alpha-4})}$. Donc :

- si $\alpha < 2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $R = 1$,
- si $\alpha = 2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}}$ et $R = 1$,
- si $\alpha > 2$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} e^{\left(\frac{(n+1)^{\alpha-2}}{2}\right) - \frac{n^{\alpha-2}}{2} + O(n^{\alpha-4})}. \quad (3)$$

Or

$$(n+1)^{\alpha-2} - n^{\alpha-2} = n^{\alpha-2} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-2} - 1 \right), \quad (4)$$

$$\underset{+\infty}{=} n^{-2} \left(\frac{\alpha-2}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right), \quad (5)$$

$$\underset{+\infty}{=} (\alpha-2)n^{\alpha-3} + O(n^{\alpha-4}). \quad (6)$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} e^{\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O(n^{\alpha-4})}$. Ainsi,

- si $\alpha < 3$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $R = 1$,
- si $\alpha = 3$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\frac{1}{2}}$ et $R = e^{-\frac{1}{2}}$,
- si $\alpha > 3$, comme $\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O(n^{\alpha-4}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\alpha-2)}{2}n^{\alpha-3}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O(n^{\alpha-4}) \geq \frac{\alpha-2}{4}n^{\alpha-3} \xrightarrow{+\infty} +\infty. \quad (7)$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ et $R = 0$.

2. On note $u_n = e^{n^2 \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)} > 0$. Comme $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} e^{(-1)^n n + O\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{(-1)^n n} = v_n$. On ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert à v_n , ça ne va pas converger. Mais on peut encadrer v_n : $0 < v_n \leq e^n$ et donc $R \geq \frac{1}{e}$. On a $\frac{u_n}{e^n} \underset{+\infty}{=} e^{n((-1)^n - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right)}$ et $\frac{u_{2n}}{e^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\sum \frac{u_n}{e^n}$ diverge. Ainsi, $R = \frac{1}{e}$.

■

Solution 2.

1. On remarque

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_p \\ m_1 e^{i\theta_1} & \dots & m_p e^{i\theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_1 e^{i(p-1)\theta_1} & \dots & m_p e^{i(p-1)\theta_p} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} e^{in\theta_1} \\ \vdots \\ e^{in\theta_p} \end{pmatrix}}_{Y_n}. \quad (8)$$

A est inversible car $\det(A) = (\prod_{i=1}^p m_i) \times \text{VdM}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p}) \neq 0$. Donc si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $Y_n = A^{-1}X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui n'est pas car $\|Y_n\|_\infty = 1$.

2. On pose $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$. Si $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ avec $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_j| = \rho(A)$ et $|\lambda_i| < \rho(A)$ pour tout $i \in \{j+1, \dots, p\}$. On écrit $a_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n = \sum_{i=1}^j \lambda_i^n + \sum_{i=j+1}^p \lambda_i^n$. D'après la règle de d'Alembert, on a $R \geq \frac{1}{\rho(A)}$ (et $R = +\infty$ si $\rho(A) = 0$ et A est nilpotente).

De plus, on a

$$\frac{a_n}{\rho(A)^n} = \sum_{k=1}^j m_k e^{in\theta_k} + \sum_{i=j+1}^p \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)} \right)^n, \quad (9)$$

et le premier terme ne tend pas vers 0 d'après ce qui précède tandis que le deuxième tend vers 0. Donc $\sum \frac{a_n}{\rho(A)^n}$ diverge grossièrement, donc $R = \frac{1}{\rho(A)}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \frac{1}{\rho(A)}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_i^n z^n \right), \quad (10)$$

$$= \sum_{i=1}^p \frac{1}{1 - \lambda_i z}, \quad (11)$$

$$= \text{Tr} (I_p - zA)^{-1}, \quad (12)$$

car pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|\lambda_i z| < 1$ et on peut trigonaliser dans la même base A et $I_p - zA$.

■

Solution 3. D'après la règle de d'Alembert, on a $R = 1$. De plus, $|a_n| = O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right)$ donc il y a convergence uniforme sur $\overline{D(0,1)}$. Ainsi, la somme S est continue sur $\overline{D(0,1)}$. Soit $t \in]-1, 1[$,

comme $\frac{1}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1}$ avec $a = b = 1$ et $c = 4$, on a

$$\frac{S(t)}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t^n}{n} + \frac{t^n}{n+1} - 4 \frac{t^n}{2n+1} \right) = -\ln(1-t) + \left(\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1 \right) - 4 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{2n+1}}_{g(t)}. \quad (13)$$

Si $t > 0$, on a $\sqrt{t}g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1}$. On pose $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1[$ et $h(0) = 0$. On a $h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$ donc $h(x) = -x - \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1)$ d'où $g(t) = -\sqrt{t} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{t}+1) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{t}-1)$.

Si $t < 0$, $\sqrt{-t}g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{-t}^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(\sqrt{-t}) - \sqrt{-t}$. Donc $g(t) = \frac{\arctan(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} - 1$. L'expression de S reste valable en -1 et 1 par continuité de S . ■

Solution 4. Soit $t \in]-1, 1[$, on a

$$I(t) = \int_0^1 e^{u \ln(1+t)} du, \quad (14)$$

$$= \left[\frac{1}{\ln(1+t)} e^{u \ln(1+t)} \right]_{u=0}^{u=1}, \quad (15)$$

$$= \frac{1+t}{\ln(1+t)} - \frac{1}{\ln(1+t)}, \quad (16)$$

$$= \frac{t}{\ln(1+t)} = f(t). \quad (17)$$

Soit $u \in [0, 1]$, on a $(1+t)^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(u)$. f_n est continue sur $[0, 1]$.

On a

$$|f_n(u)| = \frac{u(1-u)\dots(n-1-u)}{n!} |t|^n, \quad (18)$$

$$\leq \frac{(n-1)!}{n!} |t|^n, \quad (19)$$

$$= \frac{1}{n} |t|^n, \quad (20)$$

$$\leq |t|^n, \quad (21)$$

car pour tout $u \in [0, 1]$, $0 \leq k-u \leq k$. Comme $|t| < 1$, $|t|^n$ est le terme général d'une série convergente. Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ et on peut intervertir :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} du \right)}_{a_n} t^n, \quad (22)$$

encore vrai pour $t = 0$ car $a_0 = 1$. Donc f est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et f est \mathcal{C}^∞ sur $] - 1, 1[$. Par ailleurs, f est \mathcal{C}^∞ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, donc f est \mathcal{C}^∞ sur $] - 1, +\infty[$. ■

Remarque 1. On a

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 u(1-u) \dots (n-1-u) du. \quad (23)$$

De plus,

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 u(1-u) \dots (n-1-u) \underbrace{(n-u)}_{\leq n} du, \quad (24)$$

$$\leq \frac{1}{n!} \int_0^1 u(1-u) \dots (n-1-u) du = |a_n|. \quad (25)$$

Enfin, $|a_n| \leq \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum a_n$ converge. Puis $\sum a_n t^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ (majorer le reste par le critère spécial des séries alternées), donc il y a convergence et continuité en 1. On vérifie que $|a_n| = \frac{1}{n} \int_0^1 u e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1-\frac{u}{k})} du = \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-\ln(n)u + g_n(u)} du$, où $g_n(u)$ est majorée par M indépendant de n et de u . Ainsi, par convergence dominée, $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u}{n^u} du$, terme général d'une série divergente.

Solution 5. On a $a_n = e^{\ln(n) \ln(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})} \underset{+\infty}{=} e^{\ln(n) \ln(\ln(n) + \gamma + o(1))}$. On a

$$\ln(\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + \frac{\gamma}{\ln(n)} + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right), \quad (26)$$

$$= \ln(\ln(n)) + \frac{\gamma}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right). \quad (27)$$

Donc $a_n = e^{\ln(n) \ln(\ln(n) + \gamma + o(1))} \underset{+\infty}{\sim} e^\gamma \underbrace{e^{\ln(n) \ln(\ln(n))}}_{b_n}$. On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = e^{\ln(n+1) \ln(\ln(n+1)) - \ln(n) \ln(\ln(n))}, \quad (28)$$

mais

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (29)$$

et

$$\ln(n+1) \ln(\ln(n+1)) = \ln(n) \ln(\ln(n+1)) + O\left(\underbrace{\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}}_{=o(1) \xrightarrow{+\infty} 0}\right), \quad (30)$$

puis

$$\ln(\ln(n+1)) \underset{+\infty}{=} \ln \left(\ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (31)$$

$$\underset{+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right) \right), \quad (32)$$

$$\underset{+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + O\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right). \quad (33)$$

Donc $\ln(n+1) \ln(\ln(n+1)) - \ln(n) \ln(\ln(n)) = o(1)$, et $\frac{b_{n+1}}{b_n} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1$, d'où $R = 1$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ donc il y a divergence sur le cercle de convergence. ■

Remarque 2. On peut aussi écrire $a_n \leq n^{\ln(n)} = e^{(\ln(n))^2} = c_n$, et

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = e^{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2} \underset{+\infty}{=} e^{(\ln(n) + O(\frac{1}{n}))^2 - (\ln(n))^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \quad (34)$$

Donc $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R \geq 1$, et $\sum a_n$ diverge donc $R = 1$.

Solution 6. Le nombre de diviseurs est compris entre 1 et n . Comme $\sum z^n$ et $\sum n z^n$ ont un rayon de convergence égal à 1, on a $R = 1$ par encadrement. ■

Solution 7. On pose $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Alors $\frac{a_{n-1} a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

- Si $l < 1$, alors d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ donc $R = +\infty$.
- Si $l > 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq \frac{l+1}{2}$ et pour tout $n \geq N_0$, $u_n \geq u_{N_0} \times \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $R = 0$.
- Si $l = 1$: si $a_n = n!$, on a $u_n = n+1$ donc $R = 0$, si $a_n = \frac{1}{n!}$, on a $u_n = \frac{1}{n+1}$ donc $R = +\infty$, si $a_n = \lambda^n$ avec $\lambda > 0$, on a $u_n = \lambda$ et $R = \frac{1}{\lambda}$. Donc on ne peut rien dire. ■

Solution 8. D'après la règle de d'Alembert, avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, on a $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc le rayon de convergence de ϕ est $R = 1$ donc ϕ est bien définie.

Fixons $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| < 1$, formons

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{\phi(tz)} \end{aligned} \quad (35)$$

z étant fixé, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{t^n z^n}{n} = \phi(tz)$ vaut $\frac{1}{|z|} > 1$, donc l'application $t \mapsto \phi(tz)$ est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1] \subset]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}[$. f est donc \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z^n t^{n-1} \times f(t) = \frac{z}{1+tz} f(t), \quad (36)$$

car $|zt| < 1$ et $f(0) = 1$. On pose $g(t) = 1 + tz$. Alors $g'(t) = z = \frac{z}{1+tz} g(t)$ et $g(0) = 1$. Ainsi, par unicité (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz), pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = g(t)$. En particulier, $f(1) = e^{\phi(z)} = 1 + z$. ■

Remarque 3. On vient de définir, pour $|z| < 1$, $\phi(z)$ qui est un logarithme complexe continue de $1 + z$. Si $1 + z = \rho e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, $\phi(z) = \ln(\rho) + i\theta$.

Solution 9. On a $a_n = \frac{1}{\cos(\frac{2n\pi}{3})}$ et $1 \leq |a_n| \leq 2$ donc $R = 1$. Si $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{3n} - 2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} -z^{3n+1} + z^{3n+2} \right) = \frac{1}{1-z^3} + \frac{2z}{1-z^3} - \frac{2z^2}{1-z^3} = \frac{1+2z-2z^2}{1-z^3}. \quad (37)$$

■

Solution 10.

1. On a $b_n \geq 0$ donc g est croissante sur $[0, 1[$. g admet donc une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ en 1^- . Pour tout $x < 1$, $g(x) \leq l$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1[$, comme $b_n x^n \geq 0$, on a $\sum_{n=0}^N b_n x^n \leq g(x) \leq l$. N étant fixé, quand $x \rightarrow 1$, on a $\sum_{n=0}^N b_n \leq l$ et quand $N \rightarrow +\infty$, on a $l = +\infty$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \times b_n$. Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n - b_n| x^n$. Le terme de gauche est en polynôme en x qui a une limite finie en 1^- , le terme de droite majoré par $\frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} g(x)$, car les b_n sont positifs. Ainsi, ce terme de droite est un $O_{x \rightarrow 1^-}(g(x))$ donc majoré par $\frac{\varepsilon}{2} g(x)$ pour x suffisamment proche de 1, d'où $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon g(x)$ et $f(x) \underset{1^-}{\sim} g(x)$.

3. On a $n^p \underset{+\infty}{\sim} n(n-1)\dots(n-p+1)$, donc

$$h_p(x) \underset{1}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^n, \quad (38)$$

et $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$. De proche en proche, on a $f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p}$, d'où

$$\boxed{h_p(x) \underset{1}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.} \quad (39)$$

■

Solution 11. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$. Alors si $S_n = \sum_{h=0}^n a_h$, on a

$$|S_n - S| \leq \left| S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S \right|. \quad (40)$$

Puisque $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Pour $n \geq N_0$, on a alors

$$\left| S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| \leq A_n + B_n + C_n, \quad (41)$$

avec $A_n = \sum_{h=0}^{N_0} |a_h| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et il existe N_1 pour tout $n \geq N_1$, $A_n \leq \frac{\varepsilon}{4}$. On a

$$B_n = \sum_{h=N_0+1}^n |a_h| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right), \quad (42)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h=N_0+1}^n \left(\frac{1}{h} \times h \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \right), \quad (43)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h=N_0}^n \frac{1}{n}, \quad (44)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \times \frac{n - N_0}{n}, \quad (45)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (46)$$

Cela est dû au fait que $x \mapsto 1 - x^h$ est concave sur $[0, 1]$ donc $\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right) \leq h \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ (ou

par accroissement fini). Enfin, on a

$$C_n = \sum_{h \geq n} a_h \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \quad (47)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h \geq n} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^h}{h}, \quad (48)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4n} \sum_{h \geq n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \quad (49)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4n} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \quad (50)$$

$$= \frac{\varepsilon}{4}. \quad (51)$$

Ainsi, on a $|S_n - S| \leq \varepsilon$ et donc $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$. ■

Remarque 4. C'est une réciproque du lemme d'Abel radial i.e. si $\sum a_n$ converge alors

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \quad (52)$$

Remarque 5. Ce n'est pas valable par exemple pour $a_n = (-1)^n$, car $f(x) = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge.

Solution 12. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = f(0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$. Alors

$$f(z) = f(0) \left(1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n}_{=g(z)} \right), \quad (53)$$

avec $g(z) \xrightarrow[z \rightarrow 0]{} 0$ car g est somme d'une série entière donc continue. Il existe $r > 0$, si $|z| < r$, $|g(z)| < 1$. Alors on a vu, d'après l'Exercice 8, que l'on a

$$f(z) = \exp \left(\ln \rho + i\theta + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{g(z)^p}{p} \right). \quad (54)$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on peut développer chaque terme $g(z)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} z^n$ (produit de Cauchy). On vérifie alors (théorème de Fubini) que l'on peut intervertir les sommations. ■

Remarque 6. Autre méthode : si T existe avec $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Pour $t \in]-r, r[$, on a $f(t) = e^{T(t)}$. En dérivant, on a $f'(t) = T'(t)f(t) = (\sum_n (n+1)b_{n+1}t^n)f(t)$. Par unicité de développement, et par produit de Cauchy, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{h=0}^n (h+1)b_{h+1}a_{n-h}, \quad (55)$$

$$= (n+1)b_{n+1} \underbrace{a_0}_{\neq 0} + \sum_{h=1}^n h b_h a_{n-h+1}. \quad (56)$$

On a $b_0 = T(0)$, on choisit b_0 tel que $e^{b_0} = a_0 \neq 0$ et on définit univoquement $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence. On vérifie alors, en majorant, que $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence $r > 0$ (montrer qu'il existe $M \geq 0, A \geq 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq AM^n$). Alors $f'(t) = T'(t)f(t)$ et en posant $g(t) = e^{T(t)}$, on a $g = f$ par unicité via le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Solution 13.

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $\left| \frac{1}{\sin(n\pi a)} \right| \geq 1$, donc $R_a \leq 1$.
2. On rappelle que si a est irrationnel algébrique de degré $d \geq 2$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi a - p\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a alors

$$|\sin(n\pi a)| = |\sin(n\pi a - p\pi)|, \quad (57)$$

$$\geq \frac{2}{\pi} |n\pi a - p\pi|, \quad (58)$$

$$\geq 2 |na - p|, \quad (59)$$

$$\geq 2n \frac{C}{n^d} = \frac{2C}{n^{d-1}}, \quad (60)$$

car par concavité, on a pour tout $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $|\sin(t)| \geq \frac{2}{\pi} |t|$. On a donc $|a_n| \leq \frac{n^{d-1}}{2C}$, et comme le rayon de convergence de $\sum \frac{n^{d-1}}{2C} z^{d-1}$ vaut 1, on a $R_a = 1$.

3. On a $|\sin(n!\pi e)| = \left| \sin \left(n!\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) \right| = \left| \sin \left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$. Pour $x \in]0, 1]$, $\sum nx^{n!}$ converge. L'idée est donc de former a tel que pour tout $x \in]0, 1]$, on puisse extraire

$$\left(\frac{x^{\sigma(n)}}{\sin(\sigma(n)\pi a)} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (61)$$

qui ne tend pas vers 0.

Lemme 1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ strictement croissante, et

$$a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_n}. \quad (62)$$

On a

$$a - \sum_{k=0}^N \frac{1}{a_0 \dots a_k} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}}. \quad (63)$$

Preuve du Lemme 1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{a_0 \dots a_n} \leq \frac{1}{a_0 a_1^n}$ et $a_1 \geq 2$ donc $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_0 \dots a_n}$ converge. On a

$$\left| a - \sum_{n=0}^N \frac{1}{a_0 \dots a_n} \right| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_k}, \quad (64)$$

donc $\frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}} \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \leq \frac{1}{a_0 \dots a_N} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{N+1}^k} = \frac{1}{a_0 \dots a_N} \times \frac{1}{a_{N+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{N+1}}}$. Donc

$$a - \sum_{k=0}^N \frac{1}{a_0 \dots a_k} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}}. \quad (65)$$

■

On a donc $\underbrace{(a_0 \dots a_N)a - (a_0 \dots a_N) \sum_{k=0}^N \frac{1}{a_0 \dots a_k}}_{\in \mathbb{N}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_{N+1}}$. Ainsi,

$$\left| \sin \left(\underbrace{(a_0 \dots a_N)}_{=\sigma(N)} \pi a \right) \right| = \left| \sin \left((a_0 \dots a_N) \pi a - (a_0 \dots a_N) \sum_{k=0}^N \frac{\pi}{a_0 a_k} \right) \right| \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{a_{N+1}}. \quad (66)$$

Pour $x \in]0, 1]$, on a $\frac{x^{\sigma(N)}}{|\sin(\sigma(N)\pi a)|} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \exp(\sigma(N) \ln(x) + \ln(a_{N+1}))$. Il suffit de choisir a_{N+1} tel que $\ln(a_{N+1}) \geq N(a_0 \dots a_N)$, par exemple $a_{N+1} = \lfloor e^{N(a_0 \dots a_N)} \rfloor + 1$. Donc pour tout $x \in]0, 1]$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{x^{\sigma(N)}}{|\sin(\sigma(N)\pi a)|} = +\infty$. Ainsi, $R_a = 0$.

■

Solution 14. Pour $|z| < 1$, par produit de Cauchy, ces séries sont définies et absolument convergentes, par sommabilité,

$$\left(\sum_{p_1=0}^{+\infty} z^{a_1 p_1} \right) \times \dots \times \left(\sum_{p_N=0}^{+\infty} z^{a_N p_N} \right) - \frac{1}{(1 - z^{a_1}) \dots (1 - z^{a_N})} = \sum_{(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{N}^N} z^{a_1 p_1 + \dots + a_N p_N}. \quad (67)$$

Par associativité, on regroupe selon les valeurs de l'exposant et on note l'expression précédente $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. On factorise la fraction rationnelle [les pôles sont des racines de l'unité] :

$$\frac{1}{\prod_{\xi \in \mathbb{U}} (z - \xi)^{m(\xi)}}, \quad (68)$$

avec $m(1) = N$, $m(\xi) < N$ si $\xi \neq 1$ car $a_1 \wedge \dots \wedge a_N = 1$: si $\xi^{a_1} = \dots = \xi^{a_N} = 1$, l'ordre de ξ divise a_1, \dots, a_N donc divise $a_1 \wedge \dots \wedge a_N = 1$. Cette expression vaut alors $\sum_{k=1}^N \frac{\alpha_{1,k}}{(-z+1)^k} + \sum_{\xi \in \mathbb{U} \setminus \{1\}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_{\xi,k}}{(-z+\xi)^k} \right)$ (somme finie). Pour $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{(-z + \xi)^k} = \left(-\frac{1}{\xi} \right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-k+1) \dots (n+1)}{(k-1)!} \left(\frac{z}{\xi} \right)^n. \quad (69)$$

Ainsi, le coefficient en z^n et équivalent à $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \left(-\frac{1}{\xi} \right)^k$ en $+\infty$. Donc c_n est un polynôme en n , équivalent en $+\infty$ à $\alpha_{1,N} \times \frac{n^{N-1}}{(n-1)!}$.

Si $F = \frac{1}{(1-X^{a_1}) \dots (1-X^{a_N})}$, en évaluant $(1-X)^N F$ et en prenant la limite en $X \rightarrow 1$, on a $\frac{X^{a_k}-1}{X-1} = 1 + X + \dots + X^{a_k-1} \xrightarrow{X \rightarrow 1} a_k$. Finalement, $\alpha_{1,N} = \frac{1}{\prod_{k=1}^N a_k}$ et $c_n \geq 1$ pour n suffisamment grand. Ainsi,

$$c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{N-1}}{\left(\prod_{k=1}^N a_k \right) (N-1)!}. \quad (70)$$

■

Solution 15. f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} par somme et composée. Pour $x \neq 1$, on a

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}} = \sqrt{1-x^3} \times \sqrt{\frac{1}{1-x}}, \quad (71)$$

produit de deux fonctions développable en série entière sur $] -1, 1[$. Il existe donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a $f^2(x) = 1+x+x^2$ et $(f^2)'(x) = 2f'(x)f(x) = 1+2x$ d'où pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = 1+2x, \quad (72)$$

encore vrai pour $z \in D(0, 1)$ par unicité du développement en série entière.

Si $R > 1$, le rayon de convergence de $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ est R . On aurait alors pour tout $z \in D(0, R)$

$$2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) = 1 + 2z, \quad (73)$$

i.e. si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors $2S'(z)S(z) = 1 + 2z$. En j , on a $2S'(j)S(j) = 1 + 2j$. Comme pour tout $x \in]-1, 1[$, $S^2(x) = 1 + x + x^2$, par unicité, on a pour tout $z \in D(0, R)$, $S^2(z) = 1 + z + z^2$. Donc $S^2(j) = 1 + j + j^2 = 0$ d'où $S(j) = 0$: impossible car sinon $0 = 1 + 2j$. Ainsi, $R = 1$. ■

Solution 16.

1. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est une série à termes positifs, d'après la formule de Taylor reste intégral, on a

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{S_n(x)} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x) \geq 0}. \quad (74)$$

On a $0 \leq S_n(x) \leq f(x)$, donc la série converge et la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi.

2. On pose $t = xu$ et on a

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du. \quad (75)$$

Pour tout $t \in [0, A[$, $f^{(n+2)}(t) \geq 0$, $f^{(n+1)}$ est croissante. On a donc

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} y^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du, \quad (76)$$

d'où $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

3. $(R_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée d'après a), donc $R_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ d'où $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

4. On a $\tan \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan' = 1 + \tan^2 \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que pour tout $k \in [0, n]$, $\tan^{(k)} \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. On dérive n fois, d'après la formule de Leibniz, on a

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \geq 0. \quad (77)$$

Par imparité, on a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1}. \quad (78)$$

Par imparité, c'est aussi vrai sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Remarque 7. Si $\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, $\tan' = 1 + \tan^2$ fournit, pour tout $n \geq 1$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.

Solution 17.

1. D'après le critère spécial des séries alternées, a_n est du signe de $(-1)^n$, et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $|a_n| \leq M$. Donc par comparaison, $R \geq 1$.

D'autre part, on a $|a_n| + |a_{n+1}| = \frac{1}{n}$ et $|a_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2k)(n+1+2k)}$. On a $|a_{n+1}| \leq |a_n|$. On a alors $2|a_{n+1}| \leq \frac{1}{n} \leq 2|a_n|$, et $\frac{1}{2n} \leq |a_n| \leq \frac{1}{2(n-1)}$. D'où $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ et $R = 1$. $a_n(-1)^n = |a_n|$ est le terme général d'une série divergente.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta} \neq 1$, on a $a_n(-e^{i\theta})^n = |a_n|e^{in\theta}$. $n \mapsto |a_n|$ est décroissante tandis que $n \mapsto e^{in\theta}$ est bornée. D'après la règle d'Abel, $\sum a_n(-e^{i\theta})^n$ converge. On a convergence sur le cercle sauf en -1.

2. On a toujours $|a_n| \leq 3^{\frac{n-1}{3}}$. Si $b_n = 3^{\frac{n-1}{3}}$, $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence égal à $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Donc $R \geq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. De plus, $a_{3p+1} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3p+1} = 3^p \times \frac{1}{3^p} \times \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}$. Donc $\sum a_n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n \not\rightarrow 0$ quand $\rightarrow +\infty$. Donc $R = 3^{-\frac{1}{3}}$.

Sur le cercle, si $z = 3^{-\frac{1}{3}}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|a_{3p+1}z^{3p+1}| = 3^{-\frac{1}{3}}$ donc $a_n z^n \not\rightarrow 0$: il y a divergence.

Pour le calcul effectif, si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 3^{-\frac{1}{3}}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} z^{3p} + \sum_{p=0}^{+\infty} 3^p z^{3p+1} = \frac{1}{1 + \frac{z^3}{2}} + \frac{z}{1 - 3z^3}. \quad (79)$$

3. Soit $n \geq 0$, on a $\frac{1}{3} \int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, on a $R = 1$.
4. Comme $a_n \geq \frac{1}{3} \frac{1}{n+1}$, en $x = R$, $\sum a_n x^n = \sum a_n$ est divergente.

$\sum a_n(-R)^n$ est alternée, et comme $t^{n+1} \leq t^n$ pour tout $t \in [0, 1]$, $n \mapsto |a_n|$ décroît vers 0. Donc $\sum a_n(-R)^n$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

Pour le calcul, soit $x \in]-1, 1[$. Soit

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{(tx)^n}{1+t+t^2} \end{aligned} \quad (80)$$

f_n est continue sur $[0, 1]$ et $|f_n(t)| \leq |x|^n$ terme général d'une série à termes positifs convergente. Donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$, on peut intervertir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2} dt x^n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} \times \frac{1}{1-tx} dt. \quad (81)$$

On pose $F(X) = \frac{1}{1+X+X^2} \times \frac{1}{1-Xx} = \frac{\alpha X + \beta}{1+X+X^2} + \frac{\gamma}{1-Xx}$. Si $x \neq 0$, on a $\gamma = \frac{x^2}{1+x+x^2}$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} XF(X) = 0 = \alpha - \frac{\gamma}{x}$ et $\alpha = \frac{x}{1+x+x^2}$. Enfin, $F(0) = 1 = \beta + \gamma$ donc $\beta = \frac{1}{1+x+x^2}$. Finalement, on a

$$S(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \times \left[\int_0^1 \frac{xt+1+x}{1+t+t^2} dt + x^2 \int_0^1 \frac{dt}{1-tx} \right]. \quad (82)$$

Le calcul est laissé aux soins du lecteur.

Pour la valeur en -1, on note que pour tout $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n = S(-x)$. D'après le critère spécial des séries alternées, le n -ième reste est majoré par $a_n \rightarrow 0$ donc on a convergence uniforme et $\lim_{x \rightarrow 1} S(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ (continuité en -1).

■

Solution 18.

1. On partitionne les relations d'équivalence sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ selon le cardinal de la classe de $n+1$, k . On a alors $\omega_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega_k$ (choisir les k éléments en relation avec $n+1$). On a $\omega_0 = 1 = 0^0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $k \leq n$, on ait $\omega_k \leq k^k$. Alors

$$\omega_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^k \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k = (1+n)^n \leq (n+1)^{n+1}. \quad (83)$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_n \leq n^n$.

On a $\frac{\omega_n}{n!} \leq \frac{n^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $R \geq \frac{1}{e} > 0$.

2. Pour tout $n \leq n_0$, $\frac{\omega_n r^n}{n!} \leq A$. Soit $n \geq n_0$, supposons que pour tout $k \leq n$, $\omega_k x^k \leq Ak!$. Alors on a

$$\omega_{n+1} r^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega_k r^k r^{n+1-k}, \quad (84)$$

$$\leq n! A r \sum_{k=0}^n \frac{r^{n-k}}{(n-k)!}, \quad (85)$$

$$\leq n! A r e^r \leq (n+1)! A. \quad (86)$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\omega_n}{n!} \leq \frac{A}{r^n}$. On a donc $R \geq r$ pour tout $r \geq 1$ donc $R = +\infty$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} z^n, \quad (87)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_{n+1}}{n!} z^n, \quad (88)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^n, \quad (89)$$

$$= e^x f(x). \quad (90)$$

Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K e^x$, et $K = \frac{f(0)}{e} = \frac{1}{e}$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{k!} \frac{(kx)^n}{n!}}_{a_{k,n}}. \quad (91)$$

On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{k,n}| = e^{e^{|x|}} < +\infty$. D'après le théorème de Fubini, on a donc

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k! n!}, \quad (92)$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\omega_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}}. \quad (93)$$

■

Solution 19.

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $p_n \leq \sum_{j=1}^n p_{n-j}$ (car p_{n-j} est le nombre maximal de possibilité si le premier terme vaut j , $t_1 = j$). On a $p_0 = 2^0$ et par récurrence forte, soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $p_k \leq 2^k$, alors

$$p_n \leq \sum_{j=0}^{n-1} p_j \leq \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2^n - 1. \quad (94)$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq 2^n$. D'après la règle de d'Alembert, $R \geq \frac{1}{2}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 1$ donc $R \leq 1$.

2. Soit $x \in [0, R[$, on a $x < 1$. Alors $0 \leq -\ln(1 - x^k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} x^k$, terme générale d'une série à termes positifs convergente car $x < 1$. Donc $\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - x^k}$ converge.

Soit $N \geq 1$, on a

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - x^k} = \prod_{k=1}^N \left(\sum_{n_k=0}^{+\infty} (x^k)^{n_k} \right), \quad (95)$$

$$= \sum_{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N} x^{n_1 + 2n_2 + \dots + Nn_N}, \quad (96)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n,N} x^n, \quad (97)$$

où $\alpha_{n,N} = |\{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N \mid n_1 + 2n_2 + \dots + Nn_N = n\}|$. Par sommabilité, on a $\alpha_{n,N} = |\{\text{partitions } (t_k)_{k \geq 1} \text{ de } n \mid t_1 \leq N\}| \leq p_n$, et si $n \leq N$, $\alpha_{n,N} = p_n$.

On a $f(x) = \sum_{n=0}^N p_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_{n,N} x^n$ d'où $\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - x^k} \leq f(x)$. Ainsi,

$$0 \leq f(x) - \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - x^k} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} (p_n - \alpha_{n,N}) x^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n x^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \quad (98)$$

reste d'une série convergente. Donc

$$f(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - x^k}. \quad (99)$$

Soit $z \in D(0, R)$,

$$\left| f(z) - \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - z^k} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} (p_n - \alpha_{n,N}) |z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (100)$$

Cela reste vrai sur $D(0, R)$.

3. Si $x \in [0, 1[$, on peut développer et on obtient

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - x^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad (101)$$

et par unicité, $a_n = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $R = 1$.

■

Solution 20.

1. On a $f(z_0 + re^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| = |a_n| r^n$, et comme $r < d(z_0, \partial U)$ donc $\sum |a_n| r^n$ converge. On a convergence normale des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 2\pi]$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt = 2\pi a_0 = 2\pi f(z_0). \quad (102)$$

Donc

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.} \quad (103)$$

2. \overline{U} est un compact donc $|f|$ atteint son maximum sur \overline{U} . De plus, pour tout $r \in [0, d(z_0, \partial U)]$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $|f(z_0 + re^{it})| \leq \|f\|_\infty$, intégrable sur $[0, 2\pi]$ et f continue. Donc d'après le théorème de continuité, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt$ où $R = d(z_0, \partial U)$.

Si $|f|$ atteint son maximum en $z_0 \in U$, on a

$$|f(z_0)| = \|f\|_\infty = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{it})| dt \leq \|f\|_\infty. \quad (104)$$

On a donc égalité partout : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\|f\|_\infty - |f(z_0 + Re^{it})|) dt = 0$. Comme l'intégrande est une fonction continue positive, donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\|f\|_\infty = |f(z_0 + Re^{it})|$. On a $d(C(0, R), \partial U) = 0$ et comme $C(0, R)$ est un compact la distance est atteinte : il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $z_0 + Re^{it_0} \in \partial U$, donc $|f|$ atteint son maximum et son minimum sur ∂U .

3. Si $f = 0$ sur ∂U , alors $f = 0$ sur \overline{U} . ■

Remarque 8. S'il existe $z_0 \in U$ tel que $|f(z_0)| = \|f\|_\infty$, on a pour tout $r \leq R$,

$$|f(z_0)| = \|f\|_\infty = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq \|f\|_\infty. \quad (105)$$

On en déduit que pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$, et on a aussi $\arg(f(z_0 + re^{it})) \equiv \arg(f(z_0)) \pmod{2\pi}$. Donc $f(z_0 + re^{it}) = f(z_0)$, et on peut vérifier que f est constante.

Solution 21.

1. Passer au ln de la valeur absolue, équivalent, convergence géométrique.

2. On cherche une équation fonctionnelle satisfaite par f . On a $f(qz) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^{k+1}z) = \prod_{k=2}^{+\infty} (1 - q^k z)$ donc $(1 - qz)f(qz) = f(z)$. Si f est développable en série entière avec $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0, R)$ avec $R > 0$, on a par unicité du développement, $a_n(q^n - 1) = a_{n-1}q^n$ et comme $|q| < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q^n \neq 1$ d'où $a_n = a_{n-1} \frac{q^n}{q^n - 1} = \prod_{i=1}^n \frac{q^i}{q^i - 1}$.
- Réciproquement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \prod_{i=1}^n \frac{q^i}{q^i - 1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et par la règle de d'Alembert, $R = +\infty$. Si $S: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $\S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, en reportant les calculs, S vérifie la même équation fonctionnelle que f . En itérant, on a $S(z) = \prod_{i=1}^n (1 - q^i z) S(q^n z)$. S étant continue en 0 (car développable en série entière sur \mathbb{C}), on a $S(q^n z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(0) = a_0 = 1$. En passant à la limite, on a donc $S(z) = f(z)$ et f est développable en série entière.
3. Si $f(z) \neq 0$ et $f(qz) \neq 0$, on pose $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. On a alors $g(qz) = (1 - qz)g(z)$, et on procède de même façon qu'à la question précédente. On trouve alors $R = \frac{1}{|q|}$.

■

Solution 22.

1. Par continuité, $a_0 = f(z_0) = 0$. Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $a_n \neq 0$. Soit $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\}$. Il vient, si $|h| < r_0$,

$$f(z_0 + h) = \sum_{k \geq n_0} a_k h^k = a_{n_0} h^{n_0} \left(1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k+n_0}}{a_{n_0}} h^k}_{g(h)} \right). \quad (106)$$

g est continue (série entière de rayon de convergence plus grand que $r_0 > 0$) et $g(0) = 0$ donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $|h| \leq \alpha_0$, alors $|g(h)| \leq \frac{1}{2}$. Alors $1 + g(h) \neq 0$ et si $h \neq 0$, $f(z_0 + h) = a_{n_0} h^{n_0} (1 + g(h)) \neq 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|\xi_k - z_0| \leq \alpha_0$, d'où pour tout $k \geq N$, $f(\xi_k) \neq 0$, ce qui est absurde. Les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc tous non nuls.

2. Soit $z_1 \in U$. Il existe $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ continue telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Soit $t_0 = \sup \{t \in [0, 1] | \forall x \in [0, t], f(\gamma(x)) = 0\}$. Supposons $t_0 \neq 1$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $x \in [0, t_0[$, $f(\gamma(x)) = 0$. On peut appliquer ce qui précède à $\gamma(t_0)$ à la place de z_0 : il existe α_0 tel que pour tout $z \in D(\gamma(t_0), \alpha_0)$ tel que $f(z) = 0$. Par continuité

de γ , il existe $\beta > 0$ tel que si $|t - t_0| < \beta$, alors $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq \alpha_1/2$. Pour $t = t_0 + \frac{\beta}{2}$, on a $f(\gamma(t)) = 0$ pour tout $x \in [0, t]$. C'est absurde. Donc $t_0 = 1$ et $f(z_1) = 0$.

■

Remarque 9. Deux fonctions analytiques définies sur un ouvert connexe par arcs et qui coïncident sur une suite injective convergente sont égales.

Solution 23.

1. On a $f(x) = \ln((x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta))$. L'argument est positif et égal à 0 si et seulement si $x = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta) = 0$, ce qui est absurde car $\theta \in]0, \pi[$. f est définie sur \mathbb{R} et est \mathcal{C}^∞ . On a

$$f'(x) = \frac{2(x - \cos(\theta))}{1 - 2x \cos(\theta) + x^2} = \frac{2(x - \cos(\theta))}{(x - e^{i\theta})(x + e^{i\theta})} = \frac{a}{x - e^{i\theta}} + \frac{b}{x - e^{-i\theta}}. \quad (107)$$

, où $a = \frac{2(e^{i\theta} - \cos(\theta))}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{2i \sin(\theta)}{2i \sin(\theta)} = 1$ et $b = \bar{a} = 1$.

On sait alors que $f'(x) = \frac{1}{x - e^{i\theta}} + \frac{1}{x - e^{-i\theta}}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1 (fonction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle). Soit $x \in]-1, 1[$, on a

$$f'(x) = -e^{-i\theta} \times \frac{1}{1 - xe^{-i\theta}} - e^{i\theta} \times \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}, \quad (108)$$

$$= -e^{-i\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} (xe^{-i\theta})^k - e^{i\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^k, \quad (109)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-(e^{-i\theta})^{k+1} - (e^{i\theta})^{k+1} \right) x^k, \quad (110)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-2 \cos((k+1)\theta)) x^k. \quad (111)$$

On a $f(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \times (-2 \cos(k\theta))$.

2. D'après la règle d'Abel, on a convergence pour $x = 1$ donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge, et on a convergence uniforme sur $[0, 1]$. f est alors continue en 1 et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\frac{1}{2} f(1) = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos(\theta)). \quad (112)$$

3. Pour $x \in]-1, 1[$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $x^2 - 2x \cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$ qui est égal à 0 si et seulement si $x = \cos(\theta)$ et $\theta \in \{0, \pi\}$: impossible car $x \in]-1, 1[$. On a

$$I(x) = \int_0^\pi \left(-2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \cos(k\theta) \right) d\theta = \int_0^\pi f_k(\theta) d\theta. \quad (113)$$

On pose $u_k = \int_0^\pi |f_k(\theta)| d\theta \leq \frac{x^k}{k} \times \pi$, terme général d'une série convergente car $|x| < 1$, donc $\sum u_k$ converge. On peut donc intervertir :

$$I(x) = -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \int_0^\pi \cos(k\theta) d\theta = 0. \quad (114)$$

Pour $|x| > 1$, on a

$$I(x) = \int_0^\pi \left(\ln(x^2) + \ln \left(1 - \frac{2 \cos(\theta)}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right) d\theta = 2\pi \ln(|x|). \quad (115)$$

■

Remarque 10. Pour $x = 1$, on a

$$\ln(2 - 2 \cos(\theta)) = \ln(2) + \ln(1 - \cos(\theta)), \quad (116)$$

$$\stackrel{\theta \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \ln \left(\frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) \right), \quad (117)$$

$$\stackrel{\theta \rightarrow 0}{=} 2 \ln(\theta) + O(1) + \ln(2), \quad (118)$$

$$\stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln(\theta), \quad (119)$$

$$\stackrel{\theta \rightarrow 0}{O} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \right). \quad (120)$$

$I(1)$ est donc bien définie et $I(1) = \pi \ln(2) + \int_0^\pi \ln(2 \sin^2(\frac{\theta}{2})) d\theta$. On se ramène à $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta)) d\theta$.

Solution 24.

1. On pose $a_k = 0$ si $k \notin \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $a_k = 1$ sinon. On a toujours $|a_k| \leq 1$, donc $R \geq 1$. De plus, $\sum_{n \geq 1} 1^{p_n} = +\infty$, donc $R = 1$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $\frac{n}{p_n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $p_n \geq \frac{2n}{\varepsilon}$. Soit $x \in [0, 1[$.

Pour tout $n \geq N_0$, on a $x^{p_n} \leq x^{\frac{2n}{\varepsilon}}$. Ainsi,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} + \sum_{n=N_0}^{+\infty} x^{p_n} \leq \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} + \sum_{n=N_0}^{+\infty} x^{\frac{2n}{\varepsilon}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} + \frac{1}{1 - x^{\frac{2}{\varepsilon}}}. \quad (121)$$

On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} = 0$, donc il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [1 - \alpha_1[,$
 $(1-x) \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, et

$$\frac{1-x}{1-x^{\frac{2}{\varepsilon}}} = \frac{u}{1 - \left(1 - \frac{2u}{\varepsilon} + o_{u \rightarrow 0}(u) \right)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{2}, \quad (122)$$

en posant $u = 1 - x$. Ainsi, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $x \in [1 - \alpha_2, 1[$, $\frac{1-x}{1+x^{\frac{2}{\varepsilon}}} \leq \frac{2\varepsilon}{3}$.

Ainsi, en posant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, si $x \in [1 - \alpha, 1[$, alors $f(x)(1 - x) \leq \varepsilon$.

3. On suppose $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)f(x) = 0$. On pose, pour tout $k \geq 1$, $x_k = 1 - \frac{1}{k}$. Alors on a

$$(1 - x_k)f(x_k) = \frac{1}{k} \left(\sum_{n=0}^{N_0-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n} \right) + \sum_{n=k}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n}, \quad (123)$$

$$\geq \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n}, \quad (124)$$

$$\geq \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n}. \quad (125)$$

Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n} = 0$.

■

Solution 25. On suppose que R_1 et R_2 , les rayons de convergence de $U(z)$ et $V(z)$ sont strictement positifs. Soit $R = \min(R_1, R_2) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in D(0, R)$, on a $u_{n+1}z^{n+1} = (u_n z^n - v_n z^n)z$ et $v_{n+1}z^{n+1} = (u_n z^n - 2v_n z^n)z$. On somme sur \mathbb{N} et on obtient

$$\begin{aligned} U(z) - u_0 &= z(U(z) - V(z)), \\ V(z) - v_0 &= z(U(z) - 2V(z)). \end{aligned} \quad (126)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} U(z)(z - 1) - zV(z) &= -U_0, \\ zU(z) - V(z)(2z + 1) &= -V_0. \end{aligned} \quad (127)$$

Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} z - 1 & -z \\ z - (2z + 1) & \end{vmatrix} = -z^2 + z + 1. \quad (128)$$

Le discriminant est $\Delta = 5$. Soit $z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a $|z_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < |z_2|$.

Si $z \notin \{z_1, z_2\}$, on peut utiliser les formules de Cramer. Ainsi,

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{\begin{vmatrix} -u_0 & -z \\ -v_0 & -(2z+1) \end{vmatrix}}{-z^2+z+1} = \frac{(2z+1)u_0-v_0z}{-z^2+z+1}, \\ V(z) &= \frac{\begin{vmatrix} z-1 & -u_0 \\ z & -v_0 \end{vmatrix}}{-z^2+z+1} = \frac{-v_0(z-1)+u_0z}{-z^2+z+1}. \end{aligned} \quad (129)$$

Réciproquement, en définissant ainsi U et V , ce sont des fractions rationnelles de z_1 et z_2 donc développable en séries entières avec un rayon de convergence à $|z_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. En remontant les calculs, les coefficients vérifient les relations de récurrence. ■

Solution 26.

1. Si $\theta \in \{0, \pi\}$, $f(z) = 0$. Sinon, on a $f(z) = \frac{\sin(\theta)}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})} \in \mathbb{R}(z)$. On prend $|z| < 1$. Il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f(z) = \frac{A}{z-e^{i\theta}} + \frac{B}{z-e^{-i\theta}}$. On trouve $A = -\frac{i}{2}$ et $B = \bar{A} = \frac{i}{2}$. En remplaçant, on a

$$f(z) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z-e^{-i\theta}} - \frac{1}{z-e^{i\theta}} \right), \quad (130)$$

$$= \frac{i}{2} \left(-\frac{e^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}} + \frac{e^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}} \right), \quad (131)$$

$$= \frac{i}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{i\theta} (ze^{i\theta})^n + e^{-i\theta} (ze^{-i\theta})^n) \right), \quad (132)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\theta) z^n. \quad (133)$$

2. Pour $|z| < 1$, défini car $z \notin \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$, on a

$$I(z) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\sin((n+1)\theta)}_{f_n(\theta)} z^n d\theta. \quad (134)$$

Comme $|f_n(\theta)| \leq |z|^n$, terme général d'une série à termes positifs convergentes car $|z| < 1$, $\sum f_n$ convergent normalement sur $[0, \pi]$. On peut donc intervertir, et on a

$$I(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \sin((n+1)\theta) d\theta = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{2k+1}. \quad (135)$$

Pour $x \in]-1, 1[$, soit $g(x) = xI(x) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$. On a $g'(x) = \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$. On a $g(0) = 0$, donc $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $I(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

■

Remarque 11. Si $|x| > 1$, on a $I(x) = \frac{1}{x^2} I\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Solution 27.

1. On a $\mathbb{E}(Y^k) = \sum_{p=1}^n p^k \mathbb{P}(Y = p)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y^n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & 2^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^n & \dots & n^n \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y = 1) \\ \dots \\ \mathbb{P}(Y = n) \end{pmatrix}. \quad (136)$$

On a $\det(A) = n! \text{VdM}(1, \dots, n) \neq 0$. A est inversible puis

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y = 1) \\ \dots \\ \mathbb{P}(Y = n) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y^n) \end{pmatrix}. \quad (137)$$

Donc $(\mathbb{E}(Y^k))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ caractérise la loi de Y .

2. Soit $n \geq 1$. On a $k^n \mathbb{P}(Y = k) = O_{K \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ (car $a < 1$). Donc Y possède un moment à tout ordre. Formons la série génératrice de Y : $G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) t^k$ de rayon R supérieur à $\frac{1}{a}$. G_Y est \mathcal{C}^∞ sur $[0, \frac{1}{a}[$. Ainsi,

$$\begin{aligned} G'_Y(1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}(Y), \\ G''_Y(1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y), \\ &\vdots \\ G_Y^{(n)}(1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1) \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}(Y^n) + \sum_{k=0}^{+\infty} A(k) \mathbb{P}(Y = k), \end{aligned} \quad (138)$$

avec $A \in \mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$. Donc $(\mathbb{E}(Y^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ déterminent $(G_Y(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Lemme 2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R . Soit $z_0 \in D(0, R)$, alors il existe $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $h \in D(0, R - |z_0|)$, $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$.

Preuve du lemme 2. Soit $h \in D(0, R - |z_0|)$, on a $|z_0 + h| \leq |z_0| + |h| < R$. On a donc

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} h^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{n,k} h^k, \quad (139)$$

avec $\alpha_{n,k} = \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k}$ si $k \leq n$ et 0 sinon. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_{n,k}| |h|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} |h|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|h| + |z_0|)^n < +\infty, \quad (140)$$

car $|h| + |z_0| < R$. D'après le théorème de Fubini, on a $f(z_0 + h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n,k} \right)}_{b_k} h^k$. ■

On a pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \frac{1}{a} - 1$. On a $G_Y(1 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$ et $b_n = \frac{G_Y^{(n)}(1)}{n!}$. Or $\mathbb{P}(Y = k) = k! G_Y^{(k)}(0)$. On peut encore développer G_Y au voisinage de $2 - \frac{1}{a}$, et de proche en proche, au voisinage de $1 - 2^k \left(\frac{1}{a} - 1 \right)$, jusqu'à 0. On retrouve ainsi la loi de Y . ■

Solution 28.

1. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $|re^{it}| > |z|$, donc $re^{it} - z \neq 0$ et g est bien définie. Soit

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, t) &\mapsto \frac{f((1-\lambda)z + \lambda re^{it}) - f(z)}{re^{it} - z} re^{it} \end{aligned} \quad (141)$$

F est continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ et $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ est compact donc F est bornée. Ainsi, g est continue (théorème de continuité des intégrales à paramètres).

On a $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t) = f'((1-\lambda)z + \lambda re^{it}) re^{it}$. C'est une fonction continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$, donc bornée. D'après le théorème de Leibniz, g est de classe \mathcal{C}^1 . Ainsi, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on a

$$g'(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'((1-\lambda)z + \lambda re^{it}) re^{it} dt = \left[\frac{1}{i\lambda} f((1-\lambda)z + \lambda re^{it}) \right]_0^{2\pi} = 0, \quad (142)$$

par continuité de g' , c'est aussi vrai en $\lambda = 0$. Donc g est constante sur $[0, 1]$. De plus, $g(0) = 0 = g(1) = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}) - f(z)}{re^{it} - z} re^{it} dt$. Donc

$$f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}) - f(z)}{re^{it} - z} re^{it} dt. \quad (143)$$

Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $\frac{re^{it}}{re^{it}-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{r}e^{it}}$. Comme $|\frac{z}{r}| < 1$, on a

$$\frac{re^{it}}{re^{it}-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{ze^{-it}}{r} \right)^n. \quad (144)$$

De plus, $\left| \frac{ze^{-it}}{r} \right|^n = \left| \frac{z}{r} \right|^n$, terme général d'une série à termes positifs convergente indépendante de t , et on a

$$\left| f(re^{it}) \frac{ze^{-it}}{r} \right|^n \leq \|f\|_{\infty, \mathcal{C}(0,r)} \left| \frac{z}{r} \right|^n. \quad (145)$$

Ainsi, on a

$$f(z) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{ze^{-it}}{r} \right)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(f(re^{it}) \frac{ze^{-it}}{r} \right)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{r} \right)^n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-int} dt}_{2\pi\delta_{n,0}}. \quad (146)$$

Ainsi,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{r} \right)^n \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt. \quad (147)$$

Ceci valant pour $t \in]0, R[$ fixé, pour tout $z \in D(0, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, qui ne dépend pas de r . Ainsi, f est développable en série entière sur tout $D(0, R)$.

2. On applique ce qui précède à $h \mapsto f(z_0 + h)$.

■

Remarque 12. f est \mathcal{C}^1 au sens complexe si et seulement si f est développable en série entière au voisinage de tout point $z_0 \in U$ (avec un rayon de convergence plus grand que $d(z_0, \partial U)$) si et seulement si f est \mathcal{C}^∞ au sens complexe.

Remarque 13 (Théorème de Liouville). Si f est \mathcal{C}^1 au sens complexe de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, alors il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (rayon de convergence $+\infty$) et pour tout $r > 0$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt. \quad (148)$$

Si de plus f est bornée sur \mathbb{C} et pour tout $n \geq 1$, pour tout $r > 0$, on a $|a_n| \leq \frac{\|f\|_\infty}{r^n}$. Quand $r \rightarrow +\infty$, on a $a_n = 0$ donc f est constante.

Application : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Comme $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$. On sait qu'il existe $m = \min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$, et si $m > 0$, $f = \frac{1}{P}$ est \mathcal{C}^1 au sens complexe et bornée sur \mathbb{C} donc constante : impossible. On vient de redémontrer le théorème de d'Alembert Gauss.

Solution 29. Soit $x \neq 0$. Si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = \left| \frac{x^{3p}}{(3p)!} \right| > 0$, on a

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{x^3}{(3p+1)(3p+2) - 3p+3} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0. \quad (149)$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Notons $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$ et $S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$. On a

$$\begin{aligned} S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \\ S_0(x) + jS_1(x) + j^2S_2(x) &= e^{jx}, \\ S_0(x) + j^2S_1(x) + jS_2(x) &= e^{j^2x}. \end{aligned} \quad (150)$$

En effet, $j = j^{3n+1}$ et $j^2 = j^{3n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En sommant, on a $3S_0(x) = e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.

Donc

$$\boxed{S_0(x) = \frac{1}{3} \left(e^x + e^{-\frac{1}{2}x} + 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right)}. \quad (151)$$

■

Remarque 14. Autre méthode possible : on a $S'_2(x) = S_1(x)$ et $S'_1(x) = S_0(x)$. Donc $S''_2(x) + S'_2(x) + S_2(x) = e^x$. L'équation homogène a pour solution générale $\lambda e^{jx} + \mu e^{j^2x}$, avec une solution particulière $P(x)e^x$, avec P constante car 1 n'est pas racine de $X^2 + X + 1$. On trouve $\frac{e^x}{3}$, donc $S_2(x) = \frac{e^x}{3} + \lambda e^{jx} + \mu e^{j^2x}$, on identifie $S_2(0) = 0$ et $S'_2(0) = 0$, puis $S_0 = S'_2$.

Solution 30.

1. Si

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (152)$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} \in \mathbb{R}$.

2. Soit $\theta \in [0, \pi]$, on a

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Im(r^m e^{i\theta n}), \quad (153)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \sin(n\theta), \quad (154)$$

car les $a_n \in \mathbb{R}$.

Pour $m \geq 1$ fixé, on a

$$v(re^{i\theta}) \sin(m\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \sin(n\theta) \sin(m\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\theta), \quad (155)$$

avec f_n continue sur $[0, \pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $|f_n(\theta)| \leq |a_n r^n|$, terme général d'une série à termes positifs convergente car $R = +\infty$. Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$, on peut intervertir

$$\int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin(m\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta, \quad (156)$$

$$= a_m r^m \frac{\pi}{2}. \quad (157)$$

3.

Lemme 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $|\sin(m\theta)| \leq m |\sin(\theta)|$.

Preuve du lemme 3. Par récurrence, car

$$|\sin((m+1)\theta)| = |\sin(m\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(m\theta)|, \quad (158)$$

$$\leq |\sin(m\theta)| + |\sin(\theta)|, \quad (159)$$

$$\leq (m+1) |\sin(\theta)|. \quad (160)$$

■

Donc

$$|r^m a_m| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| m |\sin(\theta)| d\theta. \quad (161)$$

\sin est positif sur $[0, \pi]$, et pour tout $\theta \in]0, \pi[$, si $v(re^{i\theta}) = 0$, $f(re^{i\theta}) \in \mathbb{R}$ donc $re^{i\theta} \in \mathbb{R}$ ce qui est exclu. Ainsi, $v(re^{i\theta})$ a un signe constant sur $[0, \pi]$, et

$$\left| \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin(m\theta) d\theta \right| = \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin(\theta) d\theta. \quad (162)$$

Finalement, on a $|r^m a_m| \leq m r |a_1|$, d'où $|a_m| \leq \frac{m}{r^{m-1}} |a_1|$. Pour $m \geq 2$, lorsque $r \rightarrow +\infty$, on obtient $a_m = 0$. Donc f est affine. ■

Solution 31.

1. On a

$$\int_0^{2\pi} r^{|k|} f(e^{i(x-t)}) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_n e^{in(x-t)+ikt}}_{r^{|k|} f_n(t)} dt. \quad (163)$$

f_n est continue sur $[0, 2\pi]$, avec $|f_n(t)| \leq |a_n r^{|k|}|$ terme général d'une série à termes positifs convergente. donc $\sum_{n \geq 0} f_n(t)$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} r^{|k|} e^{ikt} f(e^{i(x-t)}) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{inx} r^{|k|} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt, \quad (164)$$

$$= \begin{cases} 2\pi r^{|k|} a_k e^{ikx} & \text{si } k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (165)$$

Puis

$$\int_0^{+\infty} P_r(t) f(e^{i(x-t)}) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{r^{|k|} e^{ikt} f(e^{i(x-t)})}_{g_k(t)} dt. \quad (166)$$

g_k est continue sur $[0, 2\pi]$, et $|g_k(t)| \leq r^{|k|} \|f\|_{\infty, \overline{D(0,1)}}$ et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} < \infty$. On a donc convergence normale sur $[0, 2\pi]$, et

$$\int_0^{2\pi} P_r(t) f(e^{i(x-t)}) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} \int_0^{2\pi} e^{ikt} f(e^{i(x-t)}) dt, \quad (167)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2\pi r^k a_k e^{ikx}, \quad (168)$$

$$= 2\pi f(re^{ix}). \quad (169)$$

2. On a

$$P_r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} r^k e^{ikx} + \sum_{k=0}^{+\infty} r^k e^{-ikx} - 1, \quad (170)$$

$$= \frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{1}{1 - re^{-ix}} - 1, \quad (171)$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(x)}, \quad (172)$$

et $1 + r^2 - 2r \cos(x) = (1 - r \cos(x))^2 + r^2 \sin^2(x) > 0$, donc $P_r > 0$. On applique le résultat du a) pour $f = 1$ et on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) dt = 1. \quad (173)$$

3. Si $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, prenons $z \in D(0, 1)$, soit $z + re^{ix}$, $r \in [0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(re^{ix})| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) f(e^{i(x-t)}) dt \right|, \quad (174)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) |f(e^{i(x-t)})| dt, \quad (175)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) dt = 1. \quad (176)$$

Donc $f(z) \in \overline{D(0, 1)}$ et $f(\overline{D(0, 1)}) \subset \overline{D(0, 1)}$.

■

Solution 32.

1. L'espérance vaut la série harmonique $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ par linéarité. Par indépendance, la variance vaut $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. On a

$$\left(\left| \frac{R_n}{\ln(n)} - 1 \right| \right) \subset \underbrace{\left(\left| \frac{R_n}{\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(R_n)}{\ln(n)} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right)}_{B_n} \cup \underbrace{\left(\left| \frac{\mathbb{E}(R_n)}{\ln(n)} - 1 \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right)}_{C_n}. \quad (177)$$

C_n est nul à partir d'un certain rang car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(R_n)}{\ln(n)} = 1$. De plus,

$$B_n = \left(|R_n - \mathbb{E}(R_n)| \frac{\varepsilon}{2} \ln(n) \right), \quad (178)$$

donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $B_n < \frac{4\mathbb{V}(R_n)}{\varepsilon^2 \ln^2(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{\varepsilon^2 \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. On a

$$G_{R_n}(t) = \mathbb{E}(t^{R_n}), \quad (179)$$

$$= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(t^{\chi_{A_k}}), \quad (180)$$

$$= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{t}{k}\right), \quad (181)$$

$$= \frac{t}{n!} \prod_{k=1}^n (k - 1 + t), \quad (182)$$

car les $(\chi_{A_k})_{k \geq 1}$ sont indépendants. $\mathbb{P}(R_n = 1)$ est le coefficient en t de G_{R_n} , et vaut donc $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. De même, $\mathbb{P}(R_n = 2)$ est le coefficient en t^2 de G_{R_n} et vaut donc $\frac{1}{n!} \sum_{k=2}^n \frac{(n-1)!}{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

4. On a $T_n = \sum_{k=na+1}^{nb} \chi_{A_k}$, donc

$$G_{T_n}(t) = \prod_{k=na+1}^{nb} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{t}{k}\right). \quad (183)$$

Ainsi, $\ln(G_{T_n}(t)) = \sum_{k=na+1}^{nb} \ln\left(1 + \frac{t-1}{k}\right)$. Pour $x > 1$, soit $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. On a $g'(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ et $g(0) = 0$ donc $g \geq 0$.

On a

$$\sum_{k=na+1}^{nb} \frac{t-1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=na+1}^{nb} \left(\frac{t-1}{k}\right)^2 \leq \ln(G_{T_n}(t)) \leq \sum_{k=na+1}^{nb} \frac{t-1}{k}. \quad (184)$$

Comme $0 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=na+1}^{nb} \left(\frac{t-1}{k}\right)^2 \leq \frac{(t-1)^2}{2} \sum_{k=na+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $\sum_{k=na+1}^{nb} \frac{t-1}{k} = (t-1)(H_{nb} - H_{na}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (t-1) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{T_n}(t) = e^{\ln(\frac{b}{a})(t-1)}$. Il s'agit de la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$. ■

Solution 33.

1. (a) Soit $a_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On a $0 \leq a_n \leq 1$ donc le rayon de convergence de f est plus grand que 1 et f est définie et \mathcal{C}^∞ , de même pour g .
- (b) Soit $g_k(t) = \mathbb{P}(T = k)t^k$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|g_k(t)| \leq \mathbb{P}(T = k)$, terme général d'une série à termes positifs convergente indépendant de t , car $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = \pi \leq 1$, donc $\sum g_k$ converge normalement sur $[0, 1]$. Donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = \pi$.

2. On a $(S_{m+1} - S_m, \dots, S_{m+k} - S_m) = (X_{m+1}, X_{m+1} + X_{m+2}, \dots, X_{m+1} + \dots + X_{m+k})$. $X_{m+1} + \dots + X_{m+r}$ a pour loi la convoluée de la loi de X r fois par elle-même car $X_i \sim X$ et les $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont indépendants. Donc $X_m + \dots + X_{m+r} \sim X_1 + \dots + X_r$, d'où le résultat.

3. (a) $\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k) \mathbb{P}_{T=k}(S_n = 0)$ car si on revient à 0 à l'instant n , le 1er retour en 0 a eu lieu à un instant $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après ce qui précède, on a donc

$$\mathbb{P}_{T=k}(S_n = 0) = \mathbb{P}_{S_k=0}(S_n - S_k = 0) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0). \quad (185)$$

(b) Posons $P(T = 0) = 0$, d'où $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k)t^k$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T = k) \mathbb{P}(S_{n-k} = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0), \quad (186)$$

puis par produit de Cauchy,

$$f(t) = \mathbb{P}(S_0 = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)t^n = 1 + f(t)g(t). \quad (187)$$

4. (a) Soit $j = |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket | X_i = 1\}|$. On a $S_n = j - (n - j) = 2j - n$ (on est allé j fois à droite et $n - j$ fois à gauche). Si $n = 2p + 1$, $S_n = S_{2p+1} = 2j - 2p - 1 \neq 0$. Pour que $S_{2n} = 0$, il faut et il suffit que $j = n$, ce qui revient à une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$ d'où $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (pq)^n$.

(b) On a $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (pq)^n t^{2n}$. Comme $p \in]0, 1[$, $p(1-p) = pq \leq \frac{1}{4}$, et si $t \in [0, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 4pqt^2}} = (1 - 4pq^2)^{-1}, \quad (188)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} (4pqt^2)^n, \quad (189)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)}{n!} (4pqt^2)^n, \quad (190)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)}{2^n n!} (4pqt^2)^n, \quad (191)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (4pqt^2)^n, \quad (192)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n t^{2n} = f(t). \quad (193)$$

5. (a) Pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$g(t) = \frac{f(t) - 1}{f(t)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}, \quad (194)$$

car $f(t) \neq 0$. D'après 1.(b), on a

$$\pi = \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} = 1 - |2p - 1| = 1 - |p - q|, \quad (195)$$

et $\pi = 1$ si et seulement si $p = q = \frac{1}{2}$.

(b) Pour tout $t \in [0, 1]$, $g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2}$. Or $|pqt^2| < 1$ donc g est développable en série entière sur $[0, 1]$, et on a

$$g(t) = 1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} (-4pqt^2)^n \right), \quad (196)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!} (4pqt^2)^n, \quad (197)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!2^n n!} 4^n (pq)^n t^{2n}, \quad (198)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n(n-1)!^2} 4(pq)^n t^{2n}. \quad (199)$$

Par unicité du développement, on a $\mathbb{P}(T = 2n+1) = 0$ et $\mathbb{P}(T = 2n) = \binom{2n-2}{n-1} \frac{4(pq)^n}{n}$.

6. (a) Si $p = \frac{1}{2}$, on a $\pi = 1$ d'où $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. Donc

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{2n}{n4^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}. \quad (200)$$

Or $\binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \frac{1}{4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, terme général d'une série divergente, d'où le résultat.

(b) Si $p \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\mathbb{E}(T \times \mathbf{1}_{T < +\infty}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(T = k) = g'(1) = \frac{4pq}{\sqrt{1-4pq}}, \quad (201)$$

car $g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}$. On a $\mathbb{P}(T < +\infty) = \pi = 1 - |p - q|$ et comme $\sqrt{1 - 4pq} = |p - q|$, d'où

$$\mathbb{E}_{T < +\infty}(T) = \frac{4pq}{|p - q| (1 - |p - q|)}. \quad (202)$$

7. $\pi = 1$ si et seulement si $p = \frac{1}{2}$ d'après 6.

8. f est croissante sur $[0, 1[$ donc il existe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = l = \sup_{t < 1} f(t)$.

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$, soit $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_n = 0)t^n \leq f(t) \leq l$. N étant fixé, on peut faire tendre vers 1 d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \leq l$. Lorsque $N \rightarrow +\infty$, on obtient $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$.
- Si $(S_n)_{n \geq 0}$ n'est pas récurrente, alors $\pi \neq 1$ et $p \neq \frac{1}{2}$. Pour tout $t \in [0, 1[$,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqt^2}} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1 - 4pq}}, \quad (203)$$

défini car $4pq = 4p(1 - p) < 1$.

- Si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ d'après 4.(a), et $\mathbb{P}(S_n = 0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, terme général d'une série divergente donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$.

9. (a) On a

$$\mathbb{E}(N) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(N_n), \quad (204)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{S_n=0\}}), \quad (205)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = 0), \quad (206)$$

$$= f(1) - \mathbb{P}(S_0 = 0), \quad (207)$$

$$= f(1) - 1. \quad (208)$$

Or $f(1) = 1 + f(1)g(1)$ et $g(1) = \pi$, donc $f(1) = \frac{1}{1-\pi}$, d'où

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\pi}{1 - \pi}. \quad (209)$$

(b) Si $p = \frac{1}{2}$, $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ diverge donc $\mathbb{E}(N) = +\infty$.

10. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(S_k = x) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(T^x = j) \mathbb{P}_{T^x=j}(S_k = x). \quad (210)$$

Par produit de polynômes, $f_{n,x}(t) = \mathbb{P}(S_0 = x) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_k = x)t^k$ et $\mathbb{P}(S_0 = x) = 0$ car $x \neq 0$. Soit

$$f_{n,x}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T^x = j) \mathbb{P}(X_{k-j} = 0)t^k, \quad (211)$$

pour $t \in [0, 1]$. Soit $f_n(t) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0)t^k$, on a

$$f_n(t)g_{n,x}(t) = \left(\sum_{l=0}^n \mathbb{P}(S_l = 0)t^l \right) \left(\sum_{j=0}^n \mathbb{P}(T^x = j)t^j \right), \quad (212)$$

donc $f_{n,x}(t) \leq f_n(t)g_{n,x}(t)$. Or $N_{n,x} = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{S_j=x\}}$ et

$$\mathbb{E}(N_{n,x}) = f_{n,x}(1) \leq f_n(1)g_{n,x}(1) = \mathbb{E}(N_n) \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T^x = k) \leq \mathbb{E}(N_n), \quad (213)$$

donc $\mathbb{E}(N_{n,x}) \leq \mathbb{E}(N_n)$.

11.

$$\{(\|S_n\|)_{n \geq 1}\} = \{\exists A \geq 0 \mid \{n \in \mathbb{N} \mid \|S_n\| \leq A\} \text{ est fini}\} = \mathcal{A}. \quad (214)$$

Comme S_n est à valeur dans \mathbb{Z}^d , il y a un nombre fini de points dans $\overline{B(0, A)}$. On a

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = x\} \text{ est fini}\}. \quad (215)$$

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ fixé, et $\mathcal{A}^x = \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = x\}$ est infini, on a

$$\mathcal{A} \bigsqcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{A}^x, \quad (216)$$

(union disjointe) et $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\mathcal{A}^x)$ dénombrable.

Soit $N^x = |\{j \in \mathbb{N} \mid S_j = x\}|$ (à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$). $(N_n^x)_{n \geq 1}$ converge vers N^x en croissant. Or $(\mathbb{E}(N_n^x))_{n \geq 1}$ converge vers $\mathbb{E}(N^x)$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, et comme il s'agit d'une marche transitoire, on a

$$\mathbb{E}(N_n^x) \leq \mathbb{E}(N_n) \leq \mathbb{E}(N) < +\infty, \quad (217)$$

donc $\mathbb{E}(N^x)$ est fini et

$$\mathbb{E}(N^x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(N^x = k) + (+\infty) \underbrace{\mathbb{P}(N^x = +\infty)}_{\mathbb{P}(\mathcal{A}^x)}. \quad (218)$$

Nécessairement, $\mathbb{P}(\mathcal{A}^x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0$.

■