Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Intégration **2**

1 Intégration

Solution 1.1. S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $S' = f > 0$. Donc S définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a,b]$ dans $[S(a) = 0, S(b)]$. COmme pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\frac{S(b)}{n} \in [0, S(b)]$, il existe un unique $x_k \in [a,b]$ tel que $S(x_k) = k\frac{S(b)}{n}$ qui est simplement donné par

$$\boxed{x_k = S^{-1}\left(k\frac{S(b)}{n}\right).} \tag{1.1}$$

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{S(b)}\left(\frac{S(b)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(S^{-1}\left(\frac{k}{n}S(b)\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{S(b)}\int_0^{S(b)} f\left(S^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t = I. \tag{1.2}$$

On effectue le changement de variable $u = S^{-1}(t)$ pour obtenir

$$\boxed{I = \frac{1}{S(b)}\int_0^b f(u)^2\mathrm{d}u.} \tag{1.3}$$

■

Remarque 1.1. *On peut se demander si cela reste vrai si $f \geqslant 0$. On définit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0, S(b)] & \to & [a,b] \\ & y & \mapsto & \min\left(\{x \in [a,b] | y = S(x)\}\right) \end{array} \tag{1.4}$$

On a $x_k = \varphi\left(k\frac{S(b)}{n}\right)$, $f\circ\varphi$ continue par morceaux sur $[0, S(b)]$ et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\varphi\left(k\frac{S(b)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{S(b)}\int_0^{S(b)} (f\circ\varphi)(t)\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

Solution 1.2.

1. Pour tout $x > 0$, on a $g(x) \leqslant \|f\|_\infty$. Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $|f|$, il existe $[a,b] \subset [0,1]$ avec $a < b$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $0 < |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} < |f(t)|$.

   D'où

   $$\left(\int_0^1 |f(t)|^x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant \left(\int_a^b |f(t)|^x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant (b-a)^{\frac{1}{x}}\left(|f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

   Alors il existe $X_1 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant X_1$, $|f(t0)| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant g(x)$. D'où le résultat.

2. On pose $h_x(t) = \exp(x\ln(|f(t)|))$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lim_{x\to 0} h_x(t) = 1$ et pour tout $x > 0$, pour tout $t \in [0,1]$ $h_x(t) \leqslant \max(1, \|f\|_\infty)$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t = 1. \tag{1.7}$$

Malheureusement, ce n'est pas suffisant.

Posons donc $k_x(t) = \frac{|f(t)|^x - 1}{x}$. Pour t fixé, on a $\lim_{x\to 0} k_x(t) = \ln(|f(t)|)$. De plus, pour tout $0 < x \leqslant 1$, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$||f(t)|^x - 1| = \left|\mathrm{e}^{x\ln(|f(t)|)} - \mathrm{e}^0\right| \begin{cases} \leqslant x\ln(|f(t)|), & \text{si } |f(t)| \leqslant 1, \\ \hline \leqslant x\ln(|f(t)|)\mathrm{e}^{x\ln(|f(t)|)} & \\ \leqslant x\ln(|f(t)|)\mathrm{e}^{\ln(|f(t)|)}, & \text{si } |f(t)| > 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ainsi $k_x(t) \leqslant \max(\ln(\|f\|_\infty), \|f\|_\infty \ln(\|f\|_\infty))$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{f(t)^x - 1}{x}\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(|f(t)|)\,\mathrm{d}t. \tag{1.9}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1 + x\int_0^1 k_x(t)\mathrm{d}t\right)\right), && (1.10)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\left(x\int_0^1 \ln(|f(t)|) + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\right), && (1.11)\\ &= \exp\left(\int_0^1 \ln(|f(t)|)\,\mathrm{d}t + \underset{x\to 0}{o}(1)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp\left(\int_0^1 \ln(|f(t)|)\,\mathrm{d}t\right). && (1.12) \end{aligned}$$

■

Solution 1.3. On fixe $y \in [0, f(a)]$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,a] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x f + \int_0^y g - xy \end{array} \tag{1.13}$$

φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = f(x) - y$ donc φ décroît de 0 à $g(y)$ puis croît jusqu'en $x = a$. Son minimum vaut alors $\varphi(g(y)) = \int_0^x + \int_0^{f(x)} g - xf(x)$ avec $x = g(y)$.

Si f est $\mathcal{C}^1$, alors g l'est aussi car f définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0,a]$ dans $[0,f(a)]$. On effectue le changement de variable $u=f(t)$ et on obtient $\varphi(g(y))=\int_0^x (tf'(t)+f(t))\mathrm{d}t - xf(x) = [tf(t)]_0^x - xf(x)=0$. De même si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux (utiliser la relation de Chasles).

Plus généralement, on a le lemme

Lemme 1.1. *Soit pour $n\geqslant 1$, $f_n : [0,a]\to\mathbb{R}$ affine par morceaux continue telle que pour tout $k\in [\![0,n]\!]$, $f_n\left(\frac{k}{n}a\right)=f\left(\frac{k}{n}a\right)$. Alors $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$ et $(f_n^{-1})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,f(a)]$.*

Preuve du lemme. Soit $\varepsilon>0$. Par continuité uniforme de f, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_0$, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, pour tout $x\in\left[\frac{ka}{n},\frac{k+1}{n}a\right]$, on a $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}a\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\left|f(x)-f\left(\frac{ka}{n}\right)\right|+\left|f_n\left(\frac{k}{n}a\right)-f_n(x)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{1.14}$$

On fait de même pour $(f_n^{-1})_{n\geqslant 1}$. ■

f_n et f_n^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux continues et $g_n=f_n^{-1}$. On a $\int_0^x f_n+\int_0^{f_n(x)} f_n = xf_n(x)$. Quand $n\to+\infty$, par convergence uniforme, on a $\int_0^{f_n(x)} g_n=\int_0^{f(x)} g_n+\int_{f_n(x)}^{f(x)} g_n$ et le dernier terme est uniformément borné par $\|f^{-1}\|_\infty\,|f(x)-f_n(x)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Ainsi, le cas d'égalité est quand

$$\boxed{\int_0^x f+\int_0^{f(x)} g = xf(x).} \tag{1.15}$$

■

Solution 1.4. On pose $f(x)=\frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. f est continue sur $\left[\frac12,1\right[$ et $f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{x-1}{2\sqrt{2(1-x)}}\xrightarrow[x\to1^-]{}0$. On effectue le changement de variable $x=\cos(t)$ d'où $\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. On a alors

$$I=-\int_{\frac{\pi}{3}}^0\frac{\ln(\cos(t))}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\cos(t))}{2\cos^2\left(\frac t2\right)}\mathrm{d}t. \tag{1.16}$$

Or $\tan'\left(\frac t2\right)=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac t2\right)}$ donc par intégrations par parties,

$$I=\left[\ln(\cos(t))\tan\left(\frac t2\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\tan\left(\frac t2\right)\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

Le premier terme vaut $\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$. Pour le deuxième terme, on utilise la formule d'addition $\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\tan\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{1-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{1+u}, \tag{1.18}$$

en ayant effectué le changement de variables $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, d'où $\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Il ne reste plus qu'à faire une décomposition en éléments simples. ■

Solution 1.5.

1. I_n est bien définie. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x, \tag{1.19}$$

$$= [\tan^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x, \tag{1.20}$$

$$= 1 - n(I_n + I_{n+2}). \tag{1.21}$$

Donc $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. On a $I_0 = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - I_{2p-2} = \cdots = (-1)^p\left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p-1}\right). \tag{1.22}$$

On a $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln(2)$. Ainsi,

$$I_{2p+1} = (-1)^p\left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p}\right). \tag{1.23}$$

2. On pose $f_n(x) = \tan^n(x)$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Si $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 partout sauf en $\frac{\pi}{4}$ où elle vaut 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $|f_n(x)| \leqslant 1$ intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.} \tag{1.24}$$

3. D'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \\ \ln(2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}. \end{aligned}} \tag{1.25}$$

■

Remarque 1.2. *On peut donner un équivalent de I_n. Comme pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$, on a $I_{n+2} \leqslant I_n$. Ainsi,*

$$2I_{n+2} \leqslant I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n, \tag{1.26}$$

et donc

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}, \tag{1.27}$$

d'où

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.} \tag{1.28}$$

Solution 1.6.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$, on a

$$\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geqslant \left(\int_a^b 1\right)^2 = (b-a)^2. \tag{1.29}$$

$f\colon x \mapsto 1$ pour tout $x \in [a,b]$ donne l'égalité, et d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a égalité si et seulement si $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont proportionnelles, donc si et seulement si f est constante.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $c < a$. Soit

$$\begin{array}{rccl} f_{\alpha,c}: & [a,b] & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & t & \mapsto & (t-c)^\alpha \end{array} \tag{1.30}$$

On a

$$\phi(f_{\alpha,c}) = \frac{1}{\alpha^2-1}\left[(b-c)^{\alpha+1} - (a-c)^{\alpha+1}\right]\left[(a-c)^{-\alpha+1} - (b-c)^{-\alpha+1}\right], \tag{1.31}$$

$$\underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^2}\left[(b-c)^{\alpha+1} \times \frac{1}{(a-c)^{\alpha-1}}\right], \tag{1.32}$$

$$\underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{(b-a)(a-c)}{\alpha^2}\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} +\infty, \tag{1.33}$$

car $b-c > a-c$.

3. Soit $f, g \in E^2$ et $\lambda \in [0,1]$. $\lambda f + (1-\alpha)g$ est continue et strictement positive. E est convexe dans $\left(\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ donc connexe par arcs.

Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions convergent uniformément vers f. Par convergence uniforme, on a $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$. De plus, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{f_n(x) \times f(x)} \leqslant \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\min_{y\in[a,b]f_n(y)\times f(y)}}. \tag{1.34}$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\min f}{2}$ et pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(x) \geqslant \frac{\min f}{2}$. Alors

$$\left\|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right\|_\infty \leqslant \frac{2\|f_n - f\|_\infty}{(\min f)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.35}$$

Ainsi, $\int_a^b \frac{1}{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \frac{1}{f}$ et $\phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(f)$. ϕ est donc continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc

$$\boxed{\phi(E) = [(b-a)^2, +\infty[.} \tag{1.36}$$

■

Solution 1.7. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2} \end{array} \tag{1.37}$$

f est continue. On a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\int_0^1 f$ converge. On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} f$ converge.

On pose $x = u^2$ et on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{2u^2\ln(u^2)}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u, &(1.38)\\ &= 4\int_0^{+\infty} \frac{u^2\ln(u)}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u, &(1.39)\\ &= 2\left(\left[-\frac{1}{(1+u^2)} \times u\ln(u)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\left(\ln(u) + 0\right)\mathrm{d}u\right), &(1.40)\\ &= 2\left(\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\right). &(1.41) \end{aligned}$$

Noter que l'intégration par parties faite en 1.40 est correcte car tout converge en 0 et $+\infty$ (passer à la limite $\alpha, \beta \to 0, +\infty$ pour être plus rigoureux).

La première intégrale est nulle. En effet, on pose $x = \frac{1}{u}$ d'où $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u = -\int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x. \tag{1.42}$$

La deuxième intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. Finalement, on a

$$\boxed{I = \pi.} \tag{1.43}$$

■

Solution 1.8. On note f la fonction intégrande. f est continue négative. On a $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \left|\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\right| = \underset{t\to 0}{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)$ donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f$ converge. On a $|f(t)| \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 f$ converge.

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}. \tag{1.44}$$

Comme $t(1-t) = -(t^2-t) = -\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-(2t-1)^2\right)$, on pose $2t-1 = \cos\theta$. On a alors $t = \frac{\cos\theta+1}{2}$ et $\mathrm{d}\theta = \frac{-2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. Ainsi,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\ln\left(\frac{\cos\theta+1}{2}\right)}{\frac{1-\cos\theta}{2}}\mathrm{d}\theta. \tag{1.45}$$

On a $\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. En posant $u = \frac{\theta}{2}$, on a donc

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos u)}{\sin^2 u}\mathrm{d}u. \tag{1.46}$$

En fixant $0 < \varepsilon < \alpha < 1$ et en posant $I_{\varepsilon,\alpha} = \int_\varepsilon^\alpha f$, on a en faisant une intégration par parties :

$$I_{\varepsilon,\alpha} = 4\left(\left[-\cot u \times \ln(\cos u)\right]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha 1\mathrm{d}u\right). \tag{1.47}$$

Le deuxième terme tend vers $\frac{\pi}{2}$,. Pour le premier, si $\alpha = \frac{\pi}{2} - h$, on a

$$-\cot\alpha\ln\cos\alpha = -\tan h\ln\sin h = -\tan h\left[\ln h + \underset{h\to 0}{o}(1)\right] \underset{h\to 0}{\sim} -h\ln(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \tag{1.48}$$

De même, on a

$$-\cot\varepsilon\ln\cos\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\frac{1}{\varepsilon}\times\frac{-\varepsilon^2}{2} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{1.49}$$

Ainsi,

$$\boxed{I = -2\pi.} \tag{1.50}$$

■

Solution 1.9. On note f la fonction intégrande. Si $h = \frac{\pi}{4} - t$, on a $\cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) = \sin(2h) \underset{h\to 0}{\sim} 2h$. Ainsi,

$$f(t) \underset{t\to\frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}}, \tag{1.51}$$

donc l'intégrale existe (critère de Riemann).

En posant $u = \sin(t)$, puis $v = \sqrt{2}u$, puis $\theta = \arcsin(v)$, on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 - \sin^2(t)\right)\cos(t)}{\sqrt{1 - 2\sin^2(t)}}\mathrm{d}t, && (1.52)\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - u^2}{\sqrt{1 - 2u^2}}\mathrm{d}u, && (1.53)\\
&= \int_0^1 \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}}, && (1.54)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \frac{\sin^2\theta}{2}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\theta, && (1.55)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2\theta)\mathrm{d}\theta\right), && (1.56)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right), && (1.57)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3\pi}{8}. && (1.58)
\end{aligned}$$

■

Solution 1.10. Si $f = c \in \mathbb{C}$ est constante, on a

$$\gamma = \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t = c\int_a^b g(\lambda t)\mathrm{d}t. \tag{1.59}$$

On pose $u = \lambda t$ et on pose $k(\lambda) = \left\lfloor \frac{\lambda b - \lambda a}{T} \right\rfloor \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda(b-a)}{T}$. Alors

$$\gamma = \frac{c}{\lambda}k(\lambda)\int_0^T g + \frac{c}{\lambda}\int_{\lambda a + k(\lambda)T}^{\lambda b} g. \tag{1.60}$$

Le deuxième terme est majoré par $\frac{|c|}{\lambda}T\,\|g\|_\infty \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$. Finalement,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\gamma = \frac{c(b-a)}{T}\int_0^T g = \frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b f. \tag{1.61}$$

C'est la même chose pour les fonctions en escalier (par combinaison linéaire).

Pour une fonction quelconque f continue par morceaux, soit $\varepsilon > 0$. Il existe f_ε une fonction en escalier telle que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On forme

$$\Gamma = \left| \int_a^b (f(t)g(\lambda t))\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f \right|. \tag{1.62}$$

On a

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t + \int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t))g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon - \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b (f - f_\varepsilon) \right|, \quad (1.63)\\ &\leqslant \left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon \right| + \left| \int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t))g(\lambda t)\mathrm{d}t \right| + \left| \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b (f - f_\varepsilon) \right|. \quad (1.64) \end{aligned}$$

Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$\left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T \int_a^b f_\varepsilon \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.65}$$

Ainsi, $\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \times 3 = \varepsilon$. Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f.} \tag{1.66}$$

Pour le cas particulier, on a $g(t) = \frac{1}{3+2\cos(t)}$. g est 2π-périodique, paire et strictement positive. On pose $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on a $\cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$. Par parité, on a $\int_0^{2\pi} g = 2\int_0^\pi g$, et

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}x}{(1+x^2)\left(3 + 2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)}, && (1.67)\\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}, && (1.68)\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}, && (1.69)\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{2}, && (1.70)\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{5}}. && (1.71) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)}{3+2\cos(nt)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}f.}\tag{1.72}$$

■

Remarque 1.3. *Pour calculer* $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(t)}$*, on peut écrire*

$$\frac{1}{3+2\cos(t)}=\frac{1}{3+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1}.\tag{1.73}$$

On décompose $F(X)=\frac{X}{X^2+3X+1}=\frac{\alpha}{X-\lambda}+\frac{\beta}{X-\mu}$ *avec* $\lambda=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\in]-1,0[$, $\mu=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\in]-\infty,-1[$, $\alpha=\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$, $\beta=\frac{\mu}{\mu-\lambda}$ *avec* $\lambda-\mu=\sqrt{5}$ *et* $\lambda=\frac{1}{\mu}$*. Ainsi,*

$$\frac{1}{3+2\cos(t)}=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\lambda}-\frac{\mu}{\sqrt{5}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mu},\tag{1.74}$$

$$=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{1-\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mu}},\tag{1.75}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},\tag{1.76}$$

car $\left|\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right|<1$ *et* $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mu}\right|<1$*. Comme on a* $\left|\lambda^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|\leqslant|\lambda|^n$*, on a convergence normale sur* $[0,2\pi]$ *car* $|\lambda|<1$*. Ainsi,*

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(nt)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}.\tag{1.77}$$

Solution 1.11.

1. Si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $A>0$, il existe $x_A\geqslant A$ tel que $|f(x_A)|>\varepsilon_0$. On sait qu'il existe $\alpha_0>0$ tel que pour tout $(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_+)^2$, si $|x_1-x_2|\leqslant\alpha_0$ alors $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $A\geqslant 0$, pour tout $x\in[x_A-\alpha_0,x_A+\alpha_0]$, on a $|f(x)-f(x_A)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Donc $f(x)$ est du signe de $f(x_A)$ et $|f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors on a

$$\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}f(x)\mathrm{d}x\right|=\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x>\varepsilon_0\alpha_0>0.\tag{1.78}$$

Or

$$\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x-\int_{x_A+\alpha_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\xrightarrow[A\to+\infty]{}0.\tag{1.79}$$

C'est absurde, donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}\tag{1.80}$$

2. Il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$, on ait $|f(x)| < 1$. Donc pour tout $x > x_0$, on a $|f^2(x_0)| \leqslant |f(x)|$ d'où $f^2 = \underset{+\infty}{O}(f)$ et f^2 est intégrable.

■

Remarque 1.4. *Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors il faut raisonner sur $\Im(f)$ et $\Re(f)$ et le résultat reste vrai.*

Solution 1.12.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Si $x \neq 0$, alors f_n converge simplement vers 0. On n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car on pourrait intervertir les limites en 0. Soit $a > 0$, soit $x \in [a, +\infty[$. f étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $|f_n(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

   Notons que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrable vaut 1. Enfin, pour tout $a > 0$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (reste d'intégrale convergente).

2. Notons $g_n(u) = \frac{g\left(\frac{u}{n}\right)}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2}$ de telle sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{n}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-n^2t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\mathrm{d}u$.

   Soit u fixé dans $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \frac{g(0)}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2}$ par continuité de g, et pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|g_n(u)| \leqslant \frac{\|g\|_\infty}{\sqrt{5}} \mathrm{e}^{-u^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de converge dominée, on peut intervertir limite et intégrale, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t) f_n(t)\mathrm{d}t = g(0)} \tag{1.81}$$

■

Remarque 1.5. *Généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_n \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$ par théorème de convergence dominée.*

Remarque 1.6. *Si g est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que si $|t| \leqslant \alpha$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x-t) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors*

$$|(f_n \star g)(x) - g(x)| \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |g(x-t) - g(x)|\, f_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} 2\,\|g\|_\infty\, f_n(t)\mathrm{d}t. \tag{1.82}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $(f_n \star g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.7. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Soit pour $n \geqslant 1$,*

$$\begin{array}{rccl} f_n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & t & \mapsto & nf(nt) \end{array} \tag{1.83}$$

Par changement de variable, on a $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\alpha^{+\infty} f = 0$ pour $\alpha > 0$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Solution 1.13. Si $x \geqslant 2$, on a $\frac{1}{x} \in]0,1]$ donc on peut définir

$$\begin{array}{rccl} f: & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \tag{1.84}$$

f est continue et $\arcsin(t) \underset{t\to 0}{=} t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ implique $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{6x^3}$, donc d'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Soit $A \geqslant 1$, on pose $I_A = \int_1^A \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \ln(A) - \int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$. On a

$$\int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = [x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)]_1^A + \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x, \tag{1.85}$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{A}\right) + \ln(A + \sqrt{A^2-1}) - \frac{\pi}{2}, \tag{1.86}$$

$$\underset{A\to+\infty}{=} 1 + \ln(A) + \ln(2) - \frac{\pi}{2} + o(1), \tag{1.87}$$

donc

$$\boxed{I = \lim_{A\to+\infty} = -1 + \frac{\pi}{2} - \ln(2).} \tag{1.88}$$

■

Solution 1.14. On a $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t) \underset{t\to 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc I existe, et en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on a $I = J$. On a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) \mathrm{d}t, \tag{1.89}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\mathrm{d}t, \tag{1.90}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2), \tag{1.91}$$

$$= I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2). \tag{1.92}$$

On a

$$I+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin(u))\mathrm{d}u=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(v))\mathrm{d}v=I. \tag{1.93}$$

Finalement, on a $I+J=I-\frac{\pi}{2}\ln(2)$ donc

$$\boxed{I=J=-\frac{\pi}{2}\ln(2).} \tag{1.94}$$

■

Table des figures