

*Solutions MP/MP\**

*Séries Entières*

## Solution 1.

1. On pose, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} > 0$ . On va chercher un équivalent. On a  $u_n = e^{n^\alpha \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$ . Comme  $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ , on a

$$\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right), \quad (1)$$

$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (2)$$

Ainsi,  $u_n \underset{+\infty}{=} e^{\frac{n^{\alpha-2}}{2} + O(n^{\alpha-4})}$ . Donc :

- si  $\alpha < 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  et  $R = 1$ ,
- si  $\alpha = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}}$  et  $R = 1$ ,
- si  $\alpha > 2$ , on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} e^{\left(\frac{(n+1)^{\alpha-2}}{2}\right) - \frac{n^{\alpha-2}}{2} + O(n^{\alpha-4})}. \quad (3)$$

Or

$$(n+1)^{\alpha-2} - n^{\alpha-2} = n^{\alpha-2} \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-2} - 1 \right), \quad (4)$$

$$\underset{+\infty}{=} n^{-2} \left( \frac{\alpha-2}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right), \quad (5)$$

$$\underset{+\infty}{=} (\alpha-2)n^{\alpha-3} + O(n^{\alpha-4}). \quad (6)$$

Donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} e^{\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O(n^{\alpha-4})}$ . Ainsi,

- si  $\alpha < 3$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  et  $R = 1$ ,
- si  $\alpha = 3$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\frac{1}{2}}$  et  $R = e^{-\frac{1}{2}}$ ,
- si  $\alpha > 3$ , comme  $\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O(n^{\alpha-4}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\alpha-2)}{2}n^{\alpha-3}$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O(n^{\alpha-4}) \geq \frac{\alpha-2}{4}n^{\alpha-3} \xrightarrow{+\infty} +\infty. \quad (7)$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$  et  $R = 0$ .

2. On note  $u_n = e^{n^2 \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)} > 0$ . Comme  $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ , on a  $u_n \underset{+\infty}{=} e^{(-1)^n n + O\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{(-1)^n n} = v_n$ . On ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert à  $v_n$ , ça ne va pas converger. Mais on peut encadrer  $v_n$  :  $0 < v_n \leq e^n$  et donc  $R \geq \frac{1}{e}$ . On a  $\frac{u_n}{e^n} \underset{+\infty}{=} e^{n((-1)^n - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right)}$  et  $\frac{u_{2n}}{e^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  donc  $\sum \frac{u_n}{e^n}$  diverge. Ainsi,  $R = \frac{1}{e}$ .

■

### Solution 2.

1. On remarque

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_p \\ m_1 e^{i\theta_1} & \dots & m_p e^{i\theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_1 e^{i(p-1)\theta_1} & \dots & m_p e^{i(p-1)\theta_p} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} e^{in\theta_1} \\ \vdots \\ e^{in\theta_p} \end{pmatrix}}_{Y_n}. \quad (8)$$

$A$  est inversible car  $\det(A) = (\prod_{i=1}^p m_i) \times \text{VdM}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p}) \neq 0$ . Donc si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on a  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $Y_n = A^{-1}X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  ce qui n'est pas car  $\|Y_n\|_\infty = 1$ .

2. On pose  $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ . Si  $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$  avec  $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_j| = \rho(A)$  et  $|\lambda_i| < \rho(A)$  pour tout  $i \in \{j+1, \dots, p\}$ . On écrit  $a_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n = \sum_{i=1}^j \lambda_i^n + \sum_{i=j+1}^p \lambda_i^n$ . D'après la règle de d'Alembert, on a  $R \geq \frac{1}{\rho(A)}$  (et  $R = +\infty$  si  $\rho(A) = 0$  et  $A$  est nilpotente).

De plus, on a

$$\frac{a_n}{\rho(A)^n} = \sum_{k=1}^j m_k e^{in\theta_k} + \sum_{i=j+1}^p \left( \frac{\lambda_i}{\rho(A)} \right)^n, \quad (9)$$

et le premier terme ne tend pas vers 0 d'après ce qui précède tandis que le deuxième tend vers 0. Donc  $\sum \frac{a_n}{\rho(A)^n}$  diverge grossièrement, donc  $R = \frac{1}{\rho(A)}$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| < \frac{1}{\rho(A)}$ , on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_i^n z^n \right), \quad (10)$$

$$= \sum_{i=1}^p \frac{1}{1 - \lambda_i z}, \quad (11)$$

$$= \text{Tr} (I_p - zA)^{-1}, \quad (12)$$

car pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $|\lambda_i z| < 1$  et on peut trigonaliser dans la même base  $A$  et  $I_p - zA$ .

■

**Solution 3.** D'après la règle de d'Alembert, on a  $R = 1$ . De plus,  $|a_n| = O_{+\infty} \left( \frac{1}{n^3} \right)$  donc il y a convergence uniforme sur  $\overline{D(0,1)}$ . Ainsi, la somme  $S$  est continue sur  $\overline{D(0,1)}$ . Soit  $t \in ]-1, 1[$ ,

comme  $\frac{1}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1}$  avec  $a = b = 1$  et  $c = 4$ , on a

$$\frac{S(t)}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{t^n}{n} + \frac{t^n}{n+1} - 4 \frac{t^n}{2n+1} \right) = -\ln(1-t) + \left( \frac{-\ln(1-t)}{t} - 1 \right) - 4 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{2n+1}}_{g(t)}. \quad (13)$$

Si  $t > 0$ , on a  $\sqrt{t}g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1}$ . On pose  $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1[$  et  $h(0) = 0$ . On a  $h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$  donc  $h(x) = -x - \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1)$  d'où  $g(t) = -\sqrt{t} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{t}+1) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{t}-1)$ .

Si  $t < 0$ ,  $\sqrt{-t}g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{-t}^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(\sqrt{-t}) - \sqrt{-t}$ . Donc  $g(t) = \frac{\arctan(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} - 1$ . L'expression de  $S$  reste valable en -1 et 1 par continuité de  $S$ . ■

**Solution 4.** Soit  $t \in ]-1, 1[$ , on a

$$I(t) = \int_0^1 e^{u \ln(1+t)} du, \quad (14)$$

$$= \left[ \frac{1}{\ln(1+t)} e^{u \ln(1+t)} \right]_{u=0}^{u=1}, \quad (15)$$

$$= \frac{1+t}{\ln(1+t)} - \frac{1}{\ln(1+t)}, \quad (16)$$

$$= \frac{t}{\ln(1+t)} = f(t). \quad (17)$$

Soit  $u \in [0, 1]$ , on a  $(1+t)^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(u)$ .  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$ .

On a

$$|f_n(u)| = \frac{u(1-u)\dots(n-1-u)}{n!} |t|^n, \quad (18)$$

$$\leq \frac{(n-1)!}{n!} |t|^n, \quad (19)$$

$$= \frac{1}{n} |t|^n, \quad (20)$$

$$\leq |t|^n, \quad (21)$$

car pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $0 \leq k-u \leq k$ . Comme  $|t| < 1$ ,  $|t|^n$  est le terme général d'une série convergente. Donc  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, 1]$  et on peut intervertir :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left( \int_0^1 \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} du \right)}_{a_n} t^n, \quad (22)$$

encore vrai pour  $t = 0$  car  $a_0 = 1$ . Donc  $f$  est développable en série entière sur  $] - 1, 1[$  et  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, 1[$ . Par ailleurs,  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[\frac{1}{2}, +\infty[$ , donc  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, +\infty[$ . ■

**Remarque 1.** On a

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 u(1-u) \dots (n-1-u) du. \quad (23)$$

De plus,

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 u(1-u) \dots (n-1-u) \underbrace{(n-u)}_{\leq n} du, \quad (24)$$

$$\leq \frac{1}{n!} \int_0^1 u(1-u) \dots (n-1-u) du = |a_n|. \quad (25)$$

Enfin,  $|a_n| \leq \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ . D'après le critère spécial des séries alternées,  $\sum a_n$  converge. Puis  $\sum a_n t^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  (majorer le reste par le critère spécial des séries alternées), donc il y a convergence et continuité en 1. On vérifie que  $|a_n| = \frac{1}{n} \int_0^1 u e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1-\frac{u}{k})} du = \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-\ln(n)u + g_n(u)} du$ , où  $g_n(u)$  est majorée par  $M$  indépendant de  $n$  et de  $u$ . Ainsi, par convergence dominée,  $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u}{n^u} du$ , terme général d'une série divergente.

**Solution 5.** On a  $a_n = e^{\ln(n) \ln(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})} \underset{+\infty}{=} e^{\ln(n) \ln(\ln(n) + \gamma + o(1))}$ . On a

$$\ln(\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + \frac{\gamma}{\ln(n)} + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right), \quad (26)$$

$$= \ln(\ln(n)) + \frac{\gamma}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right). \quad (27)$$

Donc  $a_n = e^{\ln(n) \ln(\ln(n) + \gamma + o(1))} \underset{+\infty}{\sim} e^\gamma \underbrace{e^{\ln(n) \ln(\ln(n))}}_{b_n}$ . On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = e^{\ln(n+1) \ln(\ln(n+1)) - \ln(n) \ln(\ln(n))}, \quad (28)$$

mais

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (29)$$

et

$$\ln(n+1) \ln(\ln(n+1)) = \ln(n) \ln(\ln(n+1)) + O\left(\underbrace{\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}}_{=o(1) \xrightarrow{+\infty} 0}\right), \quad (30)$$

puis

$$\ln(\ln(n+1)) \underset{+\infty}{=} \ln \left( \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (31)$$

$$\underset{+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + \ln \left( 1 + O\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right) \right), \quad (32)$$

$$\underset{+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + O\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right). \quad (33)$$

Donc  $\ln(n+1) \ln(\ln(n+1)) - \ln(n) \ln(\ln(n)) = o(1)$ , et  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1$ , d'où  $R = 1$ .

De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  donc il y a divergence sur le cercle de convergence. ■

**Remarque 2.** On peut aussi écrire  $a_n \leq n^{\ln(n)} = e^{(\ln(n))^2} = c_n$ , et

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = e^{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2} \underset{+\infty}{=} e^{(\ln(n) + O(\frac{1}{n}))^2 - (\ln(n))^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \quad (34)$$

Donc  $\sum c_n z^n$  a pour rayon de convergence 1, donc  $R \geq 1$ , et  $\sum a_n$  diverge donc  $R = 1$ .

**Solution 6.** Le nombre de diviseurs est compris entre 1 et  $n$ . Comme  $\sum z^n$  et  $\sum n z^n$  ont un rayon de convergence égal à 1, on a  $R = 1$  par encadrement. ■

**Solution 7.** On pose  $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Alors  $\frac{a_{n-1} a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{u_n}{u_{n-1}}$ .

- Si  $l < 1$ , alors d'après la règle de d'Alembert,  $\sum u_n$  converge donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  donc  $R = +\infty$ .
- Si  $l > 1$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq \frac{l+1}{2}$  et pour tout  $n \geq N_0$ ,  $u_n \geq u_{N_0} \times \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $R = 0$ .
- Si  $l = 1$  : si  $a_n = n!$ , on a  $u_n = n+1$  donc  $R = 0$ , si  $a_n = \frac{1}{n!}$ , on a  $u_n = \frac{1}{n+1}$  donc  $R = +\infty$ , si  $a_n = \lambda^n$  avec  $\lambda > 0$ , on a  $u_n = \lambda$  et  $R = \frac{1}{\lambda}$ . Donc on ne peut rien dire. ■

**Solution 8.** D'après la règle de d'Alembert, avec  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , on a  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  donc le rayon de convergence de  $\phi$  est  $R = 1$  donc  $\phi$  est bien définie.

Fixons  $z \in \mathbb{C}^*$  avec  $|z| < 1$ , formons

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{\phi(tz)} \end{aligned} \quad (35)$$

$z$  étant fixé, le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{t^n z^n}{n} = \phi(tz)$  vaut  $\frac{1}{|z|} > 1$ , donc l'application  $t \mapsto \phi(tz)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1] \subset ]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}[$ .  $f$  est donc  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1]$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z^n t^{n-1} \times f(t) = \frac{z}{1+tz} f(t), \quad (36)$$

car  $|zt| < 1$  et  $f(0) = 1$ . On pose  $g(t) = 1 + tz$ . Alors  $g'(t) = z = \frac{z}{1+tz} g(t)$  et  $g(0) = 1$ . Ainsi, par unicité (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz), pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f(t) = g(t)$ . En particulier,  $f(1) = e^{\phi(z)} = 1 + z$ . ■

**Remarque 3.** On vient de définir, pour  $|z| < 1$ ,  $\phi(z)$  qui est un logarithme complexe continue de  $1 + z$ . Si  $1 + z = \rho e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ ,  $\phi(z) = \ln(\rho) + i\theta$ .

**Solution 9.** On a  $a_n = \frac{1}{\cos(\frac{2n\pi}{3})}$  et  $1 \leq |a_n| \leq 2$  donc  $R = 1$ . Si  $|z| < 1$ , on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{3n} - 2 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} -z^{3n+1} + z^{3n+2} \right) = \frac{1}{1-z^3} + \frac{2z}{1-z^3} - \frac{2z^2}{1-z^3} = \frac{1+2z-2z^2}{1-z^3}. \quad (37)$$

■

**Solution 10.**

1. On a  $b_n \geq 0$  donc  $g$  est croissante sur  $[0, 1[$ .  $g$  admet donc une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$  en  $1^-$ . Pour tout  $x < 1$ ,  $g(x) \leq l$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in [0, 1[$ , comme  $b_n x^n \geq 0$ , on a  $\sum_{n=0}^N b_n x^n \leq g(x) \leq l$ .  $N$  étant fixé, quand  $x \rightarrow 1$ , on a  $\sum_{n=0}^N b_n \leq l$  et quand  $N \rightarrow +\infty$ , on a  $l = +\infty$ .
2. Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \times b_n$ . Pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a  $|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n - b_n| x^n$ . Le terme de gauche est en polynôme en  $x$  qui a une limite finie en  $1^-$ , le terme de droite majoré par  $\frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} g(x)$ , car les  $b_n$  sont positifs. Ainsi, ce terme de droite est un  $O_{x \rightarrow 1^-}(g(x))$  donc majoré par  $\frac{\varepsilon}{2} g(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de 1, d'où  $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon g(x)$  et  $f(x) \underset{1^-}{\sim} g(x)$ .

3. On a  $n^p \underset{+\infty}{\sim} n(n-1)\dots(n-p+1)$ , donc

$$h_p(x) \underset{1}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^n, \quad (38)$$

et  $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ,  $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ . De proche en proche, on a  $f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p}$ , d'où

$$\boxed{h_p(x) \underset{1}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.} \quad (39)$$

■

**Solution 11.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ . Alors si  $S_n = \sum_{h=0}^n a_h$ , on a

$$|S_n - S| \leq \left| S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S \right|. \quad (40)$$

Puisque  $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ ,  $|f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Pour  $n \geq N_0$ , on a alors

$$\left| S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| \leq A_n + B_n + C_n, \quad (41)$$

avec  $A_n = \sum_{h=0}^{N_0} |a_h| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et il existe  $N_1$  pour tout  $n \geq N_1$ ,  $A_n \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . On a

$$B_n = \sum_{h=N_0+1}^n |a_h| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right), \quad (42)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h=N_0+1}^n \left( \frac{1}{h} \times h \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \right), \quad (43)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h=N_0}^n \frac{1}{n}, \quad (44)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \times \frac{n - N_0}{n}, \quad (45)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (46)$$

Cela est dû au fait que  $x \mapsto 1 - x^h$  est concave sur  $[0, 1]$  donc  $\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right) \leq h \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$  (ou



par accroissement fini). Enfin, on a

$$C_n = \sum_{h \geq n} a_h \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \quad (47)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h \geq n} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^h}{h}, \quad (48)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4n} \sum_{h \geq n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \quad (49)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4n} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \quad (50)$$

$$= \frac{\varepsilon}{4}. \quad (51)$$

Ainsi, on a  $|S_n - S| \leq \varepsilon$  et donc  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$ . ■

**Remarque 4.** C'est une réciproque du lemme d'Abel radial i.e. si  $\sum a_n$  converge alors

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \quad (52)$$

**Remarque 5.** Ce n'est pas valable par exemple pour  $a_n = (-1)^n$ , car  $f(x) = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \frac{1}{2}$  mais  $\sum (-1)^n$  diverge.

**Solution 12.** On note  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  avec  $a_0 = f(0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$ . Alors

$$f(z) = f(0) \left( 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n}_{=g(z)} \right), \quad (53)$$

avec  $g(z) \xrightarrow[z \rightarrow 0]{} 0$  car  $g$  est somme d'une série entière donc continue. Il existe  $r > 0$ , si  $|z| < r$ ,  $|g(z)| < 1$ . Alors on a vu, d'après l'Exercice 8, que l'on a

$$f(z) = \exp \left( \ln \rho + i\theta + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{g(z)^p}{p} \right). \quad (54)$$

Pour  $p \in \mathbb{N}$  fixé, on peut développer chaque terme  $g(z)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} z^n$  (produit de Cauchy). On vérifie alors (théorème de Fubini) que l'on peut intervertir les sommations. ■

**Remarque 6.** Autre méthode : si  $T$  existe avec  $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ . Pour  $t \in ]-r, r[$ , on a  $f(t) = e^{T(t)}$ . En dérivant, on a  $f'(t) = T'(t)f(t) = (\sum_n (n+1)b_{n+1}t^n)f(t)$ . Par unicité de développement, et par produit de Cauchy, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{h=0}^n (h+1)b_{h+1}a_{n-h}, \quad (55)$$

$$= (n+1)b_{n+1} \underbrace{a_0}_{\neq 0} + \sum_{h=1}^n h b_h a_{n-h+1}. \quad (56)$$

On a  $b_0 = T(0)$ , on choisit  $b_0$  tel que  $e^{b_0} = a_0 \neq 0$  et on définit univoquement  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence. On vérifie alors, en majorant, que  $\sum b_n z^n$  a un rayon de convergence  $r > 0$  (montrer qu'il existe  $M \geq 0, A \geq 0$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|b_n| \leq AM^n$ ). Alors  $f'(t) = T'(t)f(t)$  et en posant  $g(t) = e^{T(t)}$ , on a  $g = f$  par unicité via le théorème de Cauchy-Lipschitz.

### Solution 13.

1. Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\left| \frac{1}{\sin(n\pi a)} \right| \geq 1$ , donc  $R_a \leq 1$ .
2. On rappelle que si  $a$  est irrationnel algébrique de degré  $d \geq 2$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , on a  $\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On fixe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n\pi a - p\pi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On a alors

$$|\sin(n\pi a)| = |\sin(n\pi a - p\pi)|, \quad (57)$$

$$\geq \frac{2}{\pi} |n\pi a - p\pi|, \quad (58)$$

$$\geq 2 |na - p|, \quad (59)$$

$$\geq 2n \frac{C}{n^d} = \frac{2C}{n^{d-1}}, \quad (60)$$

car par concavité, on a pour tout  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $|\sin(t)| \geq \frac{2}{\pi} |t|$ . On a donc  $|a_n| \leq \frac{n^{d-1}}{2C}$ , et comme le rayon de convergence de  $\sum \frac{n^{d-1}}{2C} z^{d-1}$  vaut 1, on a  $R_a = 1$ .

3. On a  $|\sin(n!\pi e)| = \left| \sin \left( n!\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) \right| = \left| \sin \left( \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$ . Pour  $x \in ]0, 1]$ ,  $\sum nx^{n!}$  converge. L'idée est donc de former  $a$  tel que pour tout  $x \in ]0, 1]$ , on puisse extraire

$$\left( \frac{x^{\sigma(n)}}{\sin(\sigma(n)\pi a)} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (61)$$

qui ne tend pas vers 0.

**Lemme 1.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$  strictement croissante, et

$$a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_n}. \quad (62)$$

On a

$$a - \sum_{k=0}^N \frac{1}{a_0 \dots a_k} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}}. \quad (63)$$

*Preuve du Lemme 1.* On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{a_0 \dots a_n} \leq \frac{1}{a_0 a_1^n}$  et  $a_1 \geq 2$  donc  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_0 \dots a_n}$  converge. On a

$$\left| a - \sum_{n=0}^N \frac{1}{a_0 \dots a_n} \right| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_k}, \quad (64)$$

donc  $\frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}} \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \leq \frac{1}{a_0 \dots a_N} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{N+1}^k} = \frac{1}{a_0 \dots a_N} \times \frac{1}{a_{N+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{N+1}}}$ . Donc

$$a - \sum_{k=0}^N \frac{1}{a_0 \dots a_k} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}}. \quad (65)$$

■

On a donc  $\underbrace{(a_0 \dots a_N)a - (a_0 \dots a_N) \sum_{k=0}^N \frac{1}{a_0 \dots a_k}}_{\in \mathbb{N}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_{N+1}}$ . Ainsi,

$$\left| \sin \left( \underbrace{(a_0 \dots a_N)}_{=\sigma(N)} \pi a \right) \right| = \left| \sin \left( (a_0 \dots a_N) \pi a - (a_0 \dots a_N) \sum_{k=0}^N \frac{\pi}{a_0 a_k} \right) \right| \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{a_{N+1}}. \quad (66)$$

Pour  $x \in ]0, 1]$ , on a  $\frac{x^{\sigma(N)}}{|\sin(\sigma(N)\pi a)|} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \exp(\sigma(N) \ln(x) + \ln(a_{N+1}))$ . Il suffit de choisir  $a_{N+1}$  tel que  $\ln(a_{N+1}) \geq N(a_0 \dots a_N)$ , par exemple  $a_{N+1} = \lfloor e^{N(a_0 \dots a_N)} \rfloor + 1$ . Donc pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{x^{\sigma(N)}}{|\sin(\sigma(N)\pi a)|} = +\infty$ . Ainsi,  $R_a = 0$ .

■

**Solution 14.** Pour  $|z| < 1$ , par produit de Cauchy, ces séries sont définies et absolument convergentes, par sommabilité,

$$\left( \sum_{p_1=0}^{+\infty} z^{a_1 p_1} \right) \times \dots \times \left( \sum_{p_N=0}^{+\infty} z^{a_N p_N} \right) - \frac{1}{(1 - z^{a_1}) \dots (1 - z^{a_N})} = \sum_{(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{N}^N} z^{a_1 p_1 + \dots + a_N p_N}. \quad (67)$$

Par associativité, on regroupe selon les valeurs de l'exposant et on note l'expression précédente  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ . On factorise la fraction rationnelle [les pôles sont des racines de l'unité] :

$$\frac{1}{\prod_{\xi \in \mathbb{U}} (z - \xi)^{m(\xi)}}, \quad (68)$$

avec  $m(1) = N$ ,  $m(\xi) < N$  si  $\xi \neq 1$  car  $a_1 \wedge \dots \wedge a_N = 1$  : si  $\xi^{a_1} = \dots = \xi^{a_N} = 1$ , l'ordre de  $\xi$  divise  $a_1, \dots, a_N$  donc divise  $a_1 \wedge \dots \wedge a_N = 1$ . Cette expression vaut alors  $\sum_{k=1}^N \frac{\alpha_{1,k}}{(-z+1)^k} + \sum_{\xi \in \mathbb{U} \setminus \{1\}} \left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_{\xi,k}}{(-z+\xi)^k} \right)$  (somme finie). Pour  $|z| < 1$ , on a

$$\frac{1}{(-z + \xi)^k} = \left( -\frac{1}{\xi} \right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-k+1) \dots (n+1)}{(k-1)!} \left( \frac{z}{\xi} \right)^n. \quad (69)$$

Ainsi, le coefficient en  $z^n$  et équivalent à  $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \left( -\frac{1}{\xi} \right)^k$  en  $+\infty$ . Donc  $c_n$  est un polynôme en  $n$ , équivalent en  $+\infty$  à  $\alpha_{1,N} \times \frac{n^{N-1}}{(n-1)!}$ .

Si  $F = \frac{1}{(1-X^{a_1}) \dots (1-X^{a_N})}$ , en évaluant  $(1-X)^N F$  et en prenant la limite en  $X \rightarrow 1$ , on a  $\frac{X^{a_k}-1}{X-1} = 1 + X + \dots + X^{a_k-1} \xrightarrow{X \rightarrow 1} a_k$ . Finalement,  $\alpha_{1,N} = \frac{1}{\prod_{k=1}^N a_k}$  et  $c_n \geq 1$  pour  $n$  suffisamment grand. Ainsi,

$$c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{N-1}}{\left( \prod_{k=1}^N a_k \right) (N-1)!}. \quad (70)$$

■

**Solution 15.**  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  par somme et composée. Pour  $x \neq 1$ , on a

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}} = \sqrt{1-x^3} \times \sqrt{\frac{1}{1-x}}, \quad (71)$$

produit de deux fonctions développable en série entière sur  $] -1, 1[$ . Il existe donc  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . On a  $f^2(x) = 1+x+x^2$  et  $(f^2)'(x) = 2f'(x)f(x) = 1+2x$  d'où pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$2 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = 1+2x, \quad (72)$$

encore vrai pour  $z \in D(0, 1)$  par unicité du développement en série entière.

Si  $R > 1$ , le rayon de convergence de  $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$  est  $R$ . On aurait alors pour tout  $z \in D(0, R)$

$$2 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) = 1 + 2z, \quad (73)$$

i.e. si  $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ , alors  $2S'(z)S(z) = 1 + 2z$ . En  $j$ , on a  $2S'(j)S(j) = 1 + 2j$ . Comme pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $S^2(x) = 1 + x + x^2$ , par unicité, on a pour tout  $z \in D(0, R)$ ,  $S^2(z) = 1 + z + z^2$ . Donc  $S^2(j) = 1 + j + j^2 = 0$  d'où  $S(j) = 0$  : impossible car sinon  $0 = 1 + 2j$ . Ainsi,  $R = 1$ . ■

### Solution 16.

1.  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  est une série à termes positifs, d'après la formule de Taylor reste intégral, on a

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{S_n(x)} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x) \geq 0}. \quad (74)$$

On a  $0 \leq S_n(x) \leq f(x)$ , donc la série converge et la suite  $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi.

2. On pose  $t = xu$  et on a

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du. \quad (75)$$

Pour tout  $t \in [0, A[$ ,  $f^{(n+2)}(t) \geq 0$ ,  $f^{(n+1)}$  est croissante. On a donc

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} y^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du, \quad (76)$$

d'où  $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$ .

3.  $(R_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée d'après a), donc  $R_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  d'où  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .
4. On a  $\tan \geq 0$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan' = 1 + \tan^2 \geq 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que pour tout  $k \in [0, n]$ ,  $\tan^{(k)} \geq 0$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ . On dérive  $n$  fois, d'après la formule de Leibniz, on a

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \geq 0. \quad (77)$$

Par imparité, on a pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1}. \quad (78)$$

Par imparité, c'est aussi vrai sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

■

**Remarque 7.** Si  $\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ ,  $\tan' = 1 + \tan^2$  fournit, pour tout  $n \geq 1$ ,  $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ .