

*Solutions MP/MP^**
Réduction des endomorphismes

Solution 1.

1. On a

$$\begin{aligned} f^k : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto A^k M \end{aligned} \quad (1)$$

donc pour tout polynôme P , on a $P(f) = P(A)M$ par combinaison linéaire. Si $P(A) = 0$, alors $P(f) = 0$. Donc si A est diagonalisable, f l'est aussi. Si $P(f) = 0$ alors avec $M = I_n$, on a $P(A) = 0$ et A est diagonalisable si f l'est.

Même résultat avec g et B .

2. Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \lambda_{i,j} X_i Y_j^\top = 0$. Alors on a

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_i \right) Y_j^\top = 0 \quad (2)$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la k -ième ligne de notre matrice est

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_{i,k} \right) Y_j^\top = 0 \quad (3)$$

Puisque $(Y_j^\top)_{1 \leq j \leq n}$ est libre, on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_{i,k} = 0 \quad (4)$$

Puisque $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\lambda_{i,j} = 0$, d'où le résultat.

3. Puisque B est diagonalisable, B^\top l'est aussi. On prend $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de vecteurs propres de A avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $AX_i = \lambda_i X_i$. Prenons $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de vecteurs propres de B^\top avec pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B^\top Y_j = \mu_j Y_j$ et $Y_j B^\top = \mu_j Y_j^\top$. Ainsi,

$$h(X_i Y_j^\top) = AX_i Y_j^\top B = \mu_j AX_i Y_j^\top = \mu_j \lambda_i X_i Y_j^\top \quad (5)$$

et les $(X_i Y_j^\top)_{1 \leq i,j \leq n}$ forment une base de E d'après ce qui précède. Donc h est diagonalisable.

Réciproquement, on a le contre-exemple $A = 0$ et B non diagonalisable : h est l'endomorphisme nul.

■

Remarque 1. Généralement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit

$$\begin{aligned} h_{A,B} : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AMB \end{aligned} \quad (6)$$

La matrice de $h_{A,B}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'appelle le produit tensoriel de A et B noté

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \quad (7)$$

On a toujours

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \text{Tr}(B) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) \quad (8)$$

Si A et B sont diagonalisables, $h_{A,B}$ l'est.

Solution 2. On pose $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$. Il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ telles que $UP_1 + VQ_1 = 1$. On a $MD = PQ$ donc $M = DP_1Q_1 = PQ_1 = P_1Q$.

1. Soit $x \in \ker(D(f))$. On a

$$P(f)(x) = DP_1(f)(x) = P_1(f) \circ D(f)(x) = 0 \quad (9)$$

De même pour $Q(f)(x) = 0$, donc

$$\ker(D(f)) \subset \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) \quad (10)$$

Soit $x \in \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f))$. On a

$$DUP_1 + DVQ_1 = 0 \quad (11)$$

d'où

$$UP + VQ = 0 \quad (12)$$

et

$$D(f)(x) = UP(f)(x) + VQ(f)(x) = 0 \quad (13)$$

Donc

$$\boxed{\ker(D(f)) = \ker(P(f)) \cap \ker(M(f))} \quad (14)$$

2. On a $P \mid M$ donc $\ker(P(f)) \subset \ker(M(f))$. De même, $\ker(Q(f)) \subset \ker(M(f))$ donc

$$\ker(P(f)) + \ker(Q(f)) \subset \ker(M(f)) \quad (15)$$

Si $x \in \ker(M(f))$, on a

$$x = \underbrace{UP_1(f)(x)}_{\in \ker(Q(f))} + \underbrace{VQ_1(f)(x)}_{\in \ker(P(f))} \quad (16)$$

car $M = P_1Q = Q_1P$. Donc

$$\boxed{\ker(M(f)) = \ker(P(f)) + \ker(Q(f))} \quad (17)$$

3. Si $i \in \text{Im}(P(f))$, il existe $x \in E$ tel que $y = P(f)(x) = D(f) \circ P_1(f)(x) \in \text{Im}(D(f))$.
De même pour $\text{Im}(Q(f)) \subset \text{Im}(D(f))$. Donc

$$\text{Im}(P(f)) + \text{Im}(Q(f)) \subset \text{Im}(D(f)) \quad (18)$$

Soit $y \in \text{Im}(D(f))$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = D(f)(x) = \underbrace{UP(f)(x)}_{\in \text{Im}(P(f))} + \underbrace{VQ(f)(x)}_{\in \text{Im}(Q(f))} \quad (19)$$

Donc

$$\boxed{\text{Im}(D(f)) = \text{Im}(P(f)) + \text{Im}(Q(f))} \quad (20)$$

4. On a $P \mid M$ d'où $\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}P(f)$ et $\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}Q(f)$. Ainsi,

$$\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}(Q(f)) \cap \text{Im}P(f) \quad (21)$$

Si $y \in \text{Im}(P(f)) \cap \text{Im}(Q(f))$ alors il existe $(x, x') \in E^2$ tels que

$$y = P(f)(x) = P(f)(x') \quad (22)$$

Or $M = P_1Q = PQ_1$ donc

$$y = UP_1(f)(y) + VQ_1(f)(y) = UP_1Q(f)(x') + VQ_1P(f)(x) \in \text{Im}(M(f)) \quad (23)$$

donc

$$\boxed{\text{Im}(M(f)) = \text{Im}(P(f)) \cap \text{Im}(Q(f))} \quad (24)$$

■

Solution 3. On a

$$A \left(\frac{-1}{5}A + \frac{4}{5}I_n \right) = I_n \quad (25)$$

donc A est inversible.

$$X^2 - 4X + 5 = (X - 2 + i)(X - 2 - i) \quad (26)$$

est scindé à racines simples sur \mathbb{C} . Donc A est diagonalisable sur \mathbb{C} , semblable sur \mathbb{C} à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{pmatrix} \quad (27)$$

où $\lambda_1 = 2 + i$ et $\lambda_2 = 2 - i$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\text{Tr}(A) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 \in \mathbb{R}$

Donc

$$\Im(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2) = 0 = n_1 - n_2 \quad (28)$$

Ainsi $n_1 = n_2$ donc n est pair.
 A est semblable sur \mathbb{C} à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Soit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (30)$$

On a $\chi_{A_0} = X^2 - 4X + 5$. A_0 est diagonalisable sur \mathbb{C} et est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Donc A est semblable sur \mathbb{C} à

$$\begin{pmatrix} A_0 & & \\ & \ddots & \\ & & A_0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

donc A est semblable sur \mathbb{R} à cette même matrice.

Soit $l \in \mathbb{N}$, on a

$$X^l = Q_p(X^2 - 4X + 5) + \alpha_l X + \beta_l \quad (33)$$

par division euclidienne. Donc

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \quad (34)$$

On a notamment

$$\begin{cases} (2 + i)^l = \alpha_l(2 + i) + \beta_l \\ (2 - i)^l = \alpha_l(2 - i) + \beta_l \end{cases} \quad (35)$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha_l = \frac{(2+i)^l - (2-i)^l}{2i} \\ \beta_l = (2+i)^l - \frac{(2+i)}{2i} [(2+i)^l - (2-i)^l] \end{cases} \quad (36)$$

■

Remarque 2. On a $2 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ avec $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in]0, \pi[$. Donc $\alpha_l = (\sqrt{5})^l \sin(l\theta)$.

Remarque 3. On a

$$I_n - 4A^{-1} + 5A^{-2} = 0 \quad (37)$$

De même, $(X - \frac{1}{2-i})(X - \frac{1}{2+i})$ annule A^{-1} et on a pour tout $l \in -\mathbb{N}^*$,

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \quad (38)$$

Remarque 4. $(A - 2I_n)^2 = -I_n$ donc $\det(-I_n) = (-1)^n > 0$ donc n est pair.

Solution 4.

1. On a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

et $(1 \ \dots \ 1)^T \neq 0$ donc

$$\boxed{1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} \quad (40)$$

2. Soit $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \neq 0$ associé à λ . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \quad (41)$$

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| > 0$ car $X \neq 0$. On a alors

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \right) |x_{i_0}| \quad (42)$$

donc

$$\boxed{|\lambda| \leq 1} \quad (43)$$

3. Soit $J_i = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_{i,j} > 0\}$. On a

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} |x_j| \leq \left(\sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} \right) |x_{i_0}| = |x_{i_0}| \quad (44)$$

On a égalité partout donc pour tout $j \in J_{i_0}$, $|x_j| = |x_{i_0}|$ et $x_j = |x_{i_0}| e^{i\theta}$. En reportant, on a

$$\lambda |x_{i_0}| = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} |x_{i_0}| \quad (45)$$

donc

$$\boxed{\lambda = 1} \quad (46)$$

4. Si $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$, on a $i_0 \notin J_{i_0}$ car sinon $\lambda = 1$. Donc il existe $i_1 \in J_{i_0} \setminus \{i_0\}$ tel que $x_{i_1} = |x_{i_0}| e^{i\theta} = \lambda x_{i_0}$. Ainsi, il existe $i_2 \neq i_1$ tel que $x_{i_2} = \lambda x_{i_1}$. De proche en proche, il existe $i_q \neq i_{q-1}$ tel que $x_{i_q} = \lambda x_{i_{q-1}}$ (avec $q \geq 1$) et $x_{i_q} = \lambda^q x_{i_0}$. Or

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ k &\mapsto i_k \end{aligned} \quad (47)$$

n'est pas injective. Donc il existe $k > l$ tel que $i_k = i_l$ et $x_{i_k} = \lambda^{k-l} x_{i_l}$ et $k - l > 1$ donc

$$\lambda \in \mathbb{U}_{k-l} \quad (48)$$

5. L'identité convient, les matrices de permutation aussi. En effet, si $\sigma \in \Sigma_n$, on a $P_\sigma^{n!} = I_n$ donc les valeurs propres sont racines de $X^{n!} - 1$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(P_\sigma) \subset \mathbb{U}_{n!}$.

Réciproquement, soit A stochastique telle que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset (\mathbb{U})$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, supposons $|J_{i_0}| \geq 2$. D'après la décomposition de Dunford, il existe D diagonale et N nilpotente qui commutent telles que $A = D + N$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Si N est nilpotente d'indice $r \geq 2$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq r$, on a

$$A^k = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} N^j D^{k-j} = \sum_{j=1}^r \binom{k}{j} N^j D^{k-j} \quad (49)$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1) \dots (k-j+1)}{j!} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^j}{j!} \quad (50)$$

Comme $N^{r-1} \neq 0$, on a

$$A^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \quad (51)$$

et les coefficients de D^{k-r+1} sont bornés car $\text{Sp}(D) \subset \mathbb{U}$.

Or, notons que si A et B sont stochastiques, AB l'est aussi ($\mathbf{1}$ est toujours valeur propre). Par récurrence, A^k l'est. Donc $A^k \in \mathcal{M}_n([0, 1])$, et l'équivalent est impossible si $r \geq 2$. Donc $r = 1$ donc $N = 0$ et $A = D$ est diagonalisable.

Les valeurs propres de A sont des racines de l'unité, soit m le ppcm des ordres de ces racines (dans (\mathbb{U}, \times)). On a alors

$$A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \quad (52)$$

d'où

$$A^m = P \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) P^{-1} \quad (53)$$

Notons $M = \max_{j \in J_{i_0}} |a_{i_0, j}| < 1$ (car $|J_{i_0}| \geq 2$ donc pour tout $j \in J_{i_0}$, $a_{i_0, j} \neq 1$). On

note $a_{i_0, i_0}^{(m)}$ le coefficient (i_0, i_0) de A^m . On a alors

$$a_{i_0, i_0}^{(m)} = 1 = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0, j} a_{j, i_0}^{(m-1)} \leq M \sum_{j \in J_{i_0}} a_{j, i_0}^{(m-1)} \leq M \sum_{j=1}^n a_{j, i_0}^{(m-1)} = M \quad (54)$$

car A^{m-1} est stochastique. Donc $M = 1$ ce qui n'est pas possible (par définition de M). Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|J_i| = 1$ donc il existe un unique $j_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $a_{i, j_i} = 1$ et pour tout $j \neq j_i$, $a_{i, j} = 0$.

$i \mapsto j_i$ est injective, sinon $\text{rg}(A) \leq n - 1$ et $0 \in \text{Sp}(A)$.

■

Remarque 5. On peut avoir $|\lambda| < 1$ pour la question 2, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (55)$$

On a $A^2 = A$ et $\text{rg}(A) = 1$, $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

Remarque 6. Par exemple, pour 4, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

On a $\chi_A = X^2 - 1$ et $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

Remarque 7. Si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} > 0$ (i.e. pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $J_i = \llbracket 1, n \rrbracket$). D'après 3, on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{U} = \{1\}$. De plus, si $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^{\top} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ vérifie $AX = X$, d'après ce qui précède, on a $x_1 = \dots = x_n$ et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1.

Solution 5.

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. On a $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B^{\top})$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ . On pose $M = XY^{\top}$. Alors

$$\Phi_{A,B}(M) = AXY^{\top} - XY^{\top}B = (\lambda - \mu)XY^{\top} = (\lambda - \mu)M \quad (57)$$

donc

$\lambda - \mu \in \text{Sp}(\Phi_{A,B})$

(58)

Réciproquement, soit $\alpha \in \text{Sp}(\Phi_{A,B})$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que l'on ait $AM - MB = \alpha M$ d'où $AM = M(\alpha I_n + B)$. Par récurrence, $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$ et par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ on a $P(A)M = MP(\alpha I_n + B)$. En particulier, on prend $P = \chi_A$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$0 = M\chi_A(\alpha I_n + B) \quad (59)$$

On a $M \neq 0$ donc $\chi_A(\alpha I_n + B)$ n'est pas inversible. On écrit

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \quad (60)$$

d'où

$$\chi_A(\alpha I_n + B) = \prod_{k=1}^n (B + (\alpha - \lambda_k)I_n) \quad (61)$$

donc il existe $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $B + (\alpha - \lambda_{k_0})I_n$ est non inversible. Donc $\lambda_{k_0} - \alpha \in \text{Sp}(B)$ et donc α est une différence d'un élément de $\text{Sp}(A)$ et de $\text{Sp}(B)$.

2. On forme

$$\begin{array}{ccc} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \quad (62)$$

et

$$\begin{array}{ccc} g_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & MB \end{array} \quad (63)$$

Toujours par récurrence et combinaison linéaires, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(f_A)M = P(A)M \quad (64)$$

Si $P(A) = 0$, on a $P(f_A) = 0$. Si $P(f_A) = 0$, pour $M = I_n$, on a $P(A) = 0$. De même pour B . Donc $\Pi_A = \Pi_{f_A}$ (polynômes minimaux) et A est diagonalisable si et seulement si $f_A(M)$ est diagonalisable. f_A et g_B commutent car

$$(f_A \circ g_B)(M) = AMB = (g_B \circ f_A)(M) \quad (65)$$

Donc f_A et g_B sont codiagonalisables et donc $\Phi_{A,B}$ l'est. ■

Remarque 8. Si (X_1, \dots, X_n) (respectivement (Y_1, \dots, Y_n)) est une base de vecteurs propres de A (respectivement de B^\top), alors $(X_i Y_j^\top)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de vecteurs propres pour $\Phi_{A,B}$.

Remarque 9. C'est faux sur \mathbb{R} , par exemple

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

On a $\text{Sp}_{\mathbb{R}} = \emptyset$ et $\Phi_{A,A}(I_2) = 0$ donc $0 \in \text{Sp}_{\Phi_{A,A}}$.

Remarque 10. Si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, soit $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $BX = \lambda X$. On a

$$AM_{i,j} = M_{i,j}(B + \lambda_{i,j}I_n) \quad (67)$$

avec $\Phi_{A,B}(M_{i,j}) = \lambda_{i,j}M_{i,j}$. Donc

$$AM_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})M_{i,j}X \quad (68)$$

Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $X_0 = MX$. $M \in \text{Vect}(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ donc

$$\text{Vect}(M_{i,j}X)_{1 \leq i, j \leq n} = M_{n,1}(\mathbb{C}) \quad (69)$$

On peut donc en extraire une base : c'est une base de vecteurs propres de A .

Solution 6.

1. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k M = \theta^k M A^k$, or F est un sous-espace vectoriel donc par combinaisons linéaires, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$.
2. Soit $X \in \ker(A - \lambda I_n)$. On a $AMX = \theta MAX = \lambda \theta MX$. On a donc $MX \in \ker(A - \lambda \theta I_n)$.

Si pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a $\theta \lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \ker(A - \lambda I_n)$, alors $\ker(A - \lambda \theta I_n) = \{0\}$. Donc $MX = 0$. Or les vecteurs propres forment une famille génératrice donc $M = 0$ et $F = \{0\}$.

S'il existe $\lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\theta \lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Soit X_1 un vecteur propre de A associé à λ_0 . On complète (X_1) en $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ base de \mathbb{C}^n formé de vecteurs propres de A . On définit $MX_1 = Y_1 \in \ker(A - \lambda_0 \theta I_n) \setminus \{0\}$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $MX_i = 0$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a

$$AMX_i = 0 = \theta MAX_i = \theta \lambda_i MX_i \quad (70)$$

et

$$AMX_1 = AY_1 = \lambda_0 \theta Y_1 = \theta MAX_1 = \theta \lambda_0 X_1 \quad (71)$$

Donc $M \neq 0$ et $M \in F$. Finalement, on a $F = \{0\}$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\theta \lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

3. On écrit $\chi_A = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{m_j}$ avec λ_j distincts et $m_j \geq 1$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (72)$$

Supposons $\theta \neq 0$. Si $M \in F$ et si $x \in \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$. On a

$$\left(\left(\frac{X}{\theta} - \lambda_j \right)^{m_j} \right) (A)(Mx) = M(A - \lambda_j I_n)^{m_j}(x) = 0 \quad (73)$$

Donc

$$Mx \in \ker \left(\frac{1}{\theta} A - \lambda_j I_n \right)^{m_j} = \ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (74)$$

car $\theta \neq 0$.

De plus, $\ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} \neq \{0\}$ si et seulement si $\ker(A - \theta \lambda_j I_n) \neq \{0\}$ car

$$\det[(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j}] = \det[(A - \theta \lambda_j I_n)]^{m_j} \quad (75)$$

Si pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\theta \lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, soit $x \in \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$. On a

$$Mx \in \ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} = \{0\} \quad (76)$$

donc $M = 0$ car $\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$.

S'il existe $\lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\lambda_0\theta \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, soit $x_1 \in \ker(A - \lambda_0 I_n) \neq \{0\}$. On pose

$$Mx_1 = y_1 \in \ker(A - \lambda_0\theta I_n) \setminus \{0\} \quad (77)$$

On complète (x_1) en $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ base de \mathbb{C}^n formée de vecteurs appartenant à

$$\bigcup_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (78)$$

On a pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $Mx_i = 0$. On a $M \neq 0$ et

$$AMx_1 = Ay_1 = \theta\lambda_0 y_1 = \theta\lambda_0 Mx_1 \quad (79)$$

Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $AMx_i = 0$ si $x_i \in \ker(A - \lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$ et si $\lambda_{j_i} \neq \lambda_0$. On a $Ax_i \in \ker(A - \lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$ donc

$$Ax_i \in \text{Vect}(x_2, \dots, x_n) \quad (80)$$

et $MAx_i = 0$ donc $AMx_i = \theta MAx_i$.

Si $F \neq \{0\}$, il existe $M \neq 0$ tel que $AM = \theta MA$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$. En particulier, pour $P = \chi_A$, on a

$$M\chi_A(\theta A) = 0 \quad (81)$$

$M \neq 0$ et donc $\chi_A(\theta A)$ n'est pas inversible. Si $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\theta A - \lambda_k I_n)$ est non inversible, d'où

$\lambda_k \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\theta A)$

(82)

■

Solution 7. On a

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (83)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (84)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (85)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (86)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 1 - \lambda & \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (87)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (88)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad (89)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \quad (90)$$

où l'on a fait successivement les opérations suivantes : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i \in \{2, 3, 4\}$, développement selon la première ligne, $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$, $L_i \leftarrow L_i + L_1$ pour $i \in \{2, 3\}$, développement selon la première colonne.

χ_A est scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc A est diagonalisable. On trouve ensuite un vecteur propre dans chaque sous-espace propre (qui sont de dimension un). ■

Solution 8.

1. On a $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $AX = \lambda X$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i \neq 1} a_i x_i = \lambda x_1 \\ \vdots \\ \sum_{i \neq j} a_i x_i = \lambda x_j \\ \vdots \\ \sum_{i \neq n} a_i x_i = \lambda x_n \end{cases} \quad (91)$$

Soit $S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Ce système équivaut à

$$S = (\lambda + a_1)x_1 = \dots = (\lambda + a_n)x_n \quad (92)$$

Si $S = 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\lambda = -a_i$ ou $x_i = 0$ (et $X \neq 0$). Les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, il existe un unique $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda = -a_{i_0}$ et pour tout $i \neq i_0$, on a $x_i = 0$. En reportant, on a $S = 0 = \lambda x_{i_0}$ donc $\lambda = 0$ ce qui est impossible car $0 = \lambda = -a_{i_0} > 0$. Donc $S \neq 0$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda + a_i \neq 0$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \frac{S}{\lambda + a_i}$. On a alors

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i S}{\lambda + a_i} \quad (93)$$

donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1} \quad (94)$$

Réciproquement, on prend $x_i = \frac{1}{\lambda + a_i}$ et on a bien $AX = \lambda X$.

2. On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-a_n, \dots, -a_1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x + a_i} \end{aligned} \quad (95)$$

3. Posons $-a_{n+1} = -\infty$ et $-a_0 = +\infty$. Sur $] -a_{k+1}, -a_k[$, on a

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{-a_i}{(x + a_i)^2} \quad (96)$$

Les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ étant positifs, on a $\lim_{x \rightarrow -a_{k+1}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -a_k^-} f(x) = -\infty$ (si $k \neq n$) (et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe un unique $\lambda_k \in] -a_{k+1}, -a_k[$ tel que $f(\lambda_k) = 1$. Donc A admet exactement n valeurs propres réelles distinctes. Donc A est diagonalisable sur \mathbb{R} . ■

Remarque 11. Soit

$$F(X) = - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X + a_k} + 1 = \frac{P(X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)} \quad (97)$$

avec $P = (X + a_1) \dots (X + a_n) - \sum_{k=1}^n a_k P_k$ où $P_k = \prod_{i \neq k} (X + a_i)$ de degré $n-1$. On a $\deg(P) = n$ et son coefficient dominant est 1. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$ si et seulement si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ donc $P = \chi_A$.

Solution 9. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \frac{\lambda}{j} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (98)$$

où le coefficient est à la i -ième ligne et la j -ième colonne. La matrice à gauche est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Donc les matrices de transvections sont dans G . De plus, les matrices de dilatations sont aussi dans G . Donc $G = GL_n(\mathbb{R})$. ■

Solution 10. Supposons u diagonalisable, il existe une base \mathcal{B} telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \quad (99)$$

avec $\lambda_i \neq 0$. Donc $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = A^p = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p)$ donc u^p est diagonalisable. On a toujours $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et la forme diagonale implique $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Supposons u^p diagonalisable, on écrit $\Pi_{u^p} = (X - \lambda_0) \dots (X - \lambda_r) = R$ (avec $\lambda_k \neq 0$ pour tout $k \geq k$) qui est scindé à racines simples. On a

$$P(u^p) = 0 = (u^p - \lambda_0 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u^p - \lambda_r \text{id}_E) = Q(u) \quad (100)$$

avec $Q(X) = P(X^p)$.

Si $\lambda_0 \neq 0$, chaque λ_k admet p racines p -ièmes distinctes et si μ_k est l'une de ses racines, on a

$$X^p - \lambda_k = \prod_{j=1}^p \left(X - \mu_k e^{i \frac{2j\pi}{p}} \right) \quad (101)$$

De plus, les racines p -ièmes des $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ sont deux à deux distinctes. Donc Q est scindé à racines simples, et donc u est diagonalisable.

Si $\lambda_0 = 0$, on a $Q = X^p A(X)$ avec A scindé à racines simples non nulles et $X^p \wedge A = 1$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker(Q(u)) = \mathbb{C}^n = \ker(u^p) \otimes \ker(A(u)) = \ker(u^p) \otimes_{i \in I} \ker(u - \mu_i \text{id}) \quad (102)$$

car A est scindé à racines simples. Montrons que $\ker(u) = \ker(u^p)$. L'inclusion directe est évidente. Réciproquement, montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$ et si $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$, alors $\ker(u^{k+1}) = \ker(u^{k+2})$. L'inclusion est évidente, et si on a l'égalité, si $x \in \ker(u^{k+2})$, on a $u(x) \in \ker(u^{k+1}) = \ker(u^k)$ donc $x \in \ker(u^{k+1})$. Comme $\ker(u) = \ker(u^2)$, d'après ce qui précède, par récurrence, on a $\ker(u) = \ker(u^p)$, donc u est diagonalisable. ■

Solution 11. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n , u canoniquement associée à

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (103)$$

. On a

$$\begin{cases} u(e_1) = e_n \\ u(e_2) = e_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = e_{n-1} \end{cases} \quad (104)$$

d'où

$$\begin{cases} u^k(e_1) = e_{n+1-k} \\ \vdots u^k(e_{k-1}) = e_{n-1} \\ \vdots \\ u^k(e_n) = e_{n-k} \end{cases} \quad (105)$$

et donc

$$J_n^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (106)$$

où les 1 commencent à la $k + 1$ -ième colonne sur la première ligne et à la $n - k + 1$ -ième ligne sur la première colonne. Notamment, le 1 sur la dernière colonne est à la $n - k$ -ième ligne.

On a $A(a_0, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k$. En développant par rapport à la première ligne, on a

$$\chi_{J_n}(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} \quad (107)$$

Le premier déterminant vaut X^{n-1} et le deuxième vaut $-(-1)^n \times (-1)^{n-2} = -1$ donc $\chi_{J_n}(X) = X^n - 1$. Ainsi, χ_{J_n} est scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc J_n est diagonalisable avec des sous-espaces propres de dimension 1. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a $\text{Sp}(J_n) = \{\omega^k, 0 \leq k \leq n-1\}$. On a $J_n X = \omega^k X$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases} \quad (108)$$

si et seulement si

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix} = x_1 X_k \quad (109)$$

avec X_k vecteur propre de J_n associé à ω^k . Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \omega & & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix} \quad (110)$$

et $P^{-1} J_n P = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. On a donc

$$P^{-1} A(a_0, \dots, a_n) P = \text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1})),$$

où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Donc A est diagonalisable de valeurs propres $Q(1), \dots, Q(\omega^{n-1})$ et donc

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k)$$

(111)

■

Remarque 12. On a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \quad (112)$$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ vérifient $a + b + c = 1$, on a

$$|a + jb + j^2c| = |a + j^2b + jc| \leq a + b + c = 1 \quad (113)$$

si et seulement si a, jb, j^2c ont même argument si et seulement si $\{a, b, c\} = \{1, 0, 0\}$.

Solution 12. On sait que $f^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^m)$ pour tout $m \geq k$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et

$$\begin{aligned} u : \ker(f^{k+1}) &\rightarrow \ker(f^k) \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned} \quad (114)$$

est bien définie car si $x \in \ker(f^{k+1})$, $f(x) \in \ker(f^k)$. Comme $\ker(f) \subset \ker(f^{k+1})$, $\ker(u) = \ker(f)$ et $\dim(\ker(u)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f^{k+1})) = \text{rg}(u) + 1 \leq \dim(\ker(f^k)) + 1$. Par récurrence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dim(\ker(f^k)) \leq k$ (car on ne peut croître au plus de 1 à chaque itération).

Si $f^{n-1} = 0$, on a $\dim(\ker(f^{n-1})) = n \leq n-1$ ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{f^{n-1} \neq 0} \quad (115)$$

Soit $x \notin \ker(f^{n-1})$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Si $\alpha_0 x + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$, en appliquant f^{n-1} , on a $\alpha_0 f^{n-1}(x) = 0$ donc $\alpha_0 = 0$. Puis on applique f^{n-2} , etc. De proche en proche, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Ainsi, $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre en dimension n , c'est donc une base et on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (116)$$

qui est une matrice nilpotente d'indice n . Matriciellement, on a

$$\ker(f^k) = \text{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n).$$

■

Solution 13. Supposons qu'il existe $x \in V$, $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de V . Notons $u^n(x) = a_0x + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x)$. Soit $y \in V$ tel que $u(y) = \lambda y$. Pour $y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^i(x)$. On a donc

$$u(y) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^{i+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda y_i u^i(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1} u^i(x) + y_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x) \quad (117)$$

Donc $u(y) = \sum_{i=1}^{n-1} u^i(x)(y_{i-1} + y_{n-1}a_i) + y_{n-1}a_0x$ donc

$$\begin{cases} \lambda y_0 &= y_{n-1}a_0 \\ \lambda y_1 &= y_0 + a_1 y_{n-1} \\ \vdots & \\ \lambda y_{n-2} &= y_{n-3} + a_{n-2} y_{n-1} \\ \lambda y_{n-1} &= y_{n-2} + a_{n-1} y_{n-1} \end{cases} \quad (118)$$

donc par récurrence

$$\begin{cases} \lambda y_{n-2} &= (\lambda - a_{n-1})y_{n-1} \\ \lambda y_{n-3} &= (\lambda(\lambda - a_{n-1}) - a_{n-2})y_{n-1} \\ \vdots & \\ \lambda y_0 &= (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - a_1)y_{n-1} \end{cases} \quad (119)$$

Donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Supposons que les sous-espaces propres de u sont de dimension 1. On écrit $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$V = \bigotimes_{i=1}^r \underbrace{\ker(u - \lambda_i \text{id}_V)^{n_i}}_{F_i} \quad (120)$$

et les sous-espaces caractéristiques F_i sont stables par u . Soit $v_i = u|_{F_i} - \lambda_i \text{id}_{F_i}$. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^r \chi_{u|_{F_i}}$ (matrice diagonale par blocs dans une base adaptée). $(X - \lambda_i)^n$ annule $u|_{F_i}$ et $\text{Sp}_{F_i}(u|_{F_i}) = \{\lambda_i\}$. Alors $\chi_{u|_{F_i}} = (X - \lambda_i)^{\dim(F_i)}$. En reportant, on a $\dim(F_i) = n_i$. De plus, $V_i^{n_i} = 0$ donc v_i est nilpotent. On a donc $\dim(\ker(v_i)) = \dim(\ker(u - \lambda_i \text{id}_E)) = 1$. Donc il existe $x_i \in F_i$ tel que $(x_i, v_i(x_i), \dots, v_i^{n_i-1}(x_i))$ soit une base de F_i .

On forme $x = \sum_{i=1}^r x_i$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$ tel que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x) = 0 = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i) \right).$$

Les F_i sont en somme directe donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i) = 0 \quad (121)$$

Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$. $I_{x_i} = \{A \in \mathbb{C}[X] \mid A(u)(x_i) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ donc est principal et il existe $\Pi_i \in I_{x_i}$ minimal et

$$\Pi_i \mid P \quad (122)$$

On a $(X - \lambda_i)^{n_i}(u)(x_i) = 0$ et $(x_i, u(x_i), \dots, u^{n_i-1}(x_i))$ est libre, donc si $P \in I_{x_i}$, $\deg(P) \geq n_i$ donc $\deg(\Pi_i) = n_i$ et $\Pi_i = (X - \lambda_i)^{n_i}$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\Pi_i \mid P$ et donc

$$\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i} \mid P \quad (123)$$

Mais P est de degré $\leq n - 1$, nécessairement $P = 0$ et $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre. ■

Remarque 13. Autre méthode pour le sens direct : on a

$$\text{mat}_{(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = A \quad (124)$$

Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a

$$A - \lambda I_n = \text{mat}_{(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \quad (125)$$

qui est non inversible, mais donc les $(n - 1)$ première colonnes sont libres, donc est de rang $n - 1$.

Solution 14.

1. On utilise le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(f^{k+1}) = \text{Im}(f^k)$ alors pour tout $l \geq k$, $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^l)$.

En effet, si $x = f^{k+1}(x') \in \text{Im}(f^{k+1})$, on a $x = f^k(f(x')) \in \text{Im}(f^k)$. Si on a égalité des espaces, soit $x = f^{k+1}(x') = f(f^k(x')) \in \text{Im}(f^{k+1})$. Alors $f^k(x') \in \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$ donc il existe x'' tel que $f^k(x') = f^{k+1}(x'')$, mais alors $x = f^{k+2}(x'') \in \text{Im}(f^{k+2})$. On a donc le résultat en itérant.

Ainsi, pour tout $n \geq d$, on a $\text{rg}(f^n) = \text{rg}(f^d)$ donc $(\text{rg}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire au moins à partir de d et $r(f) = \text{rg}(f^d)$.

2. Comme f et g commutent, on a

$$(f + g)^{2d} = \sum_{k=0}^{2d} \binom{2d}{k} f^k g^{2d-k} \quad (126)$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, 2d \rrbracket$, on a $k \geq d$ ou $2d - k \geq d$ donc

$$\begin{cases} \text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(f^d) \\ \text{ou} \\ \text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(g^d) \end{cases} \quad (127)$$

et donc $\text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)$. Finalement, $\text{Im}(f + g)^{2d} \subset \text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)$. On a donc

$$r(f + g) = \dim(\text{Im}(f + g)^{2d}) \quad (128)$$

$$\leq \dim(\text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)) \quad (129)$$

$$\leq \dim(\text{Im}(f^d)) + \dim(\text{Im}(g^d)) \quad (130)$$

$$\leq r(f) + r(g) \quad (131)$$

Pour un contre-exemple, on utilise $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^\top$. On a $A^2 = B^2$ donc $r(A^2) = r(B^2) = 0$ et $A + B$ inversible donc $r(A + B) = 2 > r(A) + r(B)$.

3. On a $\chi_f = X^{m_0}Q$ avec $\deg(Q) = d - m_0$ et $Q(0) = 0$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$V = \ker(f^{m_0}) \otimes \ker(Q(f)) \quad (132)$$

Dans une base adaptée \mathcal{B} , on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A^{m_0} = 0$ et B inversible.

Alors pour tout $k \geq m_0$, $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ et $\text{rg}(f^k) = \text{rg}(B^k) = d - m_0 = r(f)$. ■

Solution 15. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$. Notons que si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| \leq \|A\|$. En effet, si X est un vecteur propre associé à λ , on a

$$\|AX\|_\infty = |\lambda| \|X\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty \quad (133)$$

et $X \neq 0$ donc $\|X\|_\infty \neq 0$.

Soit $A = e^{\frac{2ik\pi}{q}} I_n$, soit $B \in \mathcal{G}_q$ telle que $\|B - A\| \leq \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$. Soit $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, on a $\mu \in \mathbb{U}_q$ car $B^q = I_n$. Donc $\mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B - A)$ et

$$\left| \mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right| \leq \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \quad (134)$$

Si $\mu = e^{\frac{2il\pi}{q}}$, on a

$$\left| \mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right| = 2 \left| \sin \left(\frac{(l-k)\pi}{q} \right) \right| > \sin \left(\frac{\pi}{q} \right) \quad (135)$$

si $l \neq k$. Nécessairement, on a $\mu = e^{\frac{2ik\pi}{q}}$, donc $B = A$ car B est diagonalisable et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right\}$. Donc A est un point isolé de \mathcal{G}_q .

Soit maintenant $A \in \mathcal{G}_q$, on suppose que A n'est pas une matrice scalaire, donc $|\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)| \geq 2$. Soit $\lambda \in (\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \mu_1, \dots, \mu_r),$$

avec $\mu_1, \dots, \mu_r \neq \lambda$. Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$A_\varepsilon = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \varepsilon & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu_r \end{pmatrix} P^{-1} \quad (136)$$

On a $A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A$ et $A_\varepsilon \neq A$. Montrons que $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$. On a $\chi_{A_\varepsilon} = \chi_A$, $\text{rg}(A_\varepsilon - \lambda I_n) = \text{rg}(A - \lambda I_n)$ (observer les colonnes) et pour $\mu_l \in \text{Sp}(A)$, $\mu_l \neq \lambda$, on a $\text{rg}(A_\varepsilon - \mu_l I_n) = \text{rg}(A - \mu_l I_n)$ (observer les lignes). La dimension des sous-espaces propres de A et A_ε sont les mêmes donc A_ε est diagonalisable. De plus, $\text{Sp}(A_\varepsilon) \subset \text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}_q$ donc $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$. Ainsi, A n'est pas isolé dans \mathcal{G}_q . ■

Solution 16. On a

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1) - ((\lambda - 1) - 1) = \lambda(\lambda - 2)^2 \quad (137)$$

Soit $X = (x \ y \ z)^\top$. On a $MX = 0$ si et seulement si $y = x$ et $z = -x$ donc $E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(\varepsilon_1)$.

On a $(M - 2I_3)X = 0$ si et seulement si $y = z = -x$ donc $E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(\varepsilon_2)$.

M n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} mais trigonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u) \otimes \ker(u - 2id)^2 \quad (138)$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \star \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (139)$$

avec $\varepsilon_3 \in \ker(u - 2id)^2$ et $\varepsilon_3 \notin \text{Vect}(\varepsilon_2)$. On a

$$(M - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (140)$$

donc $(M - 2I_3)^2 X = 0$ si et seulement si $2x - y + z = 0$. On pose $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a

$M\varepsilon_3 = -\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$ donc si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (141)$$

on a

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (142)$$

Les sous-espaces stables de dimension 0 : $\{0\}$. Les sous-espaces stables de dimension 1 : ils sont engendrés par les vecteurs propres, ce sont donc $\text{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\text{Vect}(\varepsilon_2)$. Si maintenant F est un sous-espace stable de dimension 2, montrons que l'on a

$$F = (F \cap \ker(u)) \otimes (F \cap \ker(u - 2id)^2) = F_0 \otimes F_2 \quad (143)$$

En effet, on a $F_0 \otimes F_2 \subset F$. Si maintenant $x \in F$, a priori on a $x = x_0 + x_2$ avec $x_0 \in \ker(u)$ et $x_2 \in \ker(u - 2id)^2$. On a $u(x) = u(x_2) \in F$ par stabilité, $u^2(x) = u^2(x_2) \in F$, et $(u - 2id)^2(x_2) = 0$ donc $x_2 = \frac{1}{4}(-u^2(x) + 4u(x_2)) \in F$ et $x_0 = x - x_2 \in F$.

On a $F_0 = \{0\}$ ou $\ker(u)$. Si $F_0 = \{0\}$, on a $F = F_2$. Si $F_0 = \ker(u)$, on a $\dim(F_2) = 1$ donc $F_2 = \text{Vect}(\varepsilon_2)$.

Donc les sous-espaces stables de dimension 2 sont $\ker(u - 2id)^2$ et $\text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Enfin, les sous-espaces stables de dimension 3 : \mathbb{R}^3 . ■

Remarque 14. Plus généralement, si $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$. On écrit

$$E = \bigotimes_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i id_E)^{m_i} = \bigotimes_{i=1}^r F_i \quad (144)$$

Si F est stable, on note Π_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r F_j \in \mathbb{K}[u]$. On a pour tout $x \in F$, $\Pi_i(x) \in F$ par stabilité, il s'ensuit que

$$F = \bigotimes_{i=1}^r (F \cap F_i) \quad (145)$$

Solution 17.

1. Si $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, on a

$$A - I_{n+1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & 0_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 0 \end{array} \right) \quad (146)$$

donc $\text{rg}(A - I_{n+1}) = 2$ et $\chi_{A - I_{n+1}} = X^{n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$ (sur \mathbb{C}). On a $\text{Tr}(A - I_{n+1}) = 0 = \mu + \lambda$ et $\text{Tr}(A - I_{n+1})^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda^2 + \mu^2$ donc $\{\lambda, \mu\} \in \left\{ \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\}$ et $A - I_{n+1}$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (147)$$

2. On note $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. Soit X tel que $A'X = \pm\lambda$ où $A' = A - I_{n+1}$. Alors en écrivant le système, on vérifie que l'on peut prendre

$$f_{\pm} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (148)$$

et si X est tel que $A'X = 0$, si i_0 est tel que $a_{i_0} \neq 0$, on récupère une bas de $\ker(A')$

avec

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (149)$$

où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}$. Le 1 est à la i -ième ligne, $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$ est à la ligne i_0 . ■

Solution 18. On pose $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$. On montre d'abord que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ $|\lambda| \leq \|A\|$. En effet, si X non nul est tel que $AX = \lambda X$, on a $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$ donc $|\lambda| \|X\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$, d'où le résultat.

Soit alors $m = \sup \{\|M\| \mid M \in G\}$. Soit $M \in G$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a $|\lambda| \leq m$. Comme $M^k \in G$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a aussi $|\lambda|^k \leq m$ donc $|\lambda| = 1$ (faire tendre k vers $-\infty$ et $+\infty$).

Grâce à la décomposition de Dunford, on a $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et D et N qui commutent. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^{r-1} \neq 0$ et $N^r = 0$. On a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$ donc $G \in GL_n(\mathbb{C})$ et $MD^{-1} = I_n + ND^{-1}$ avec ND^{-1} est nilpotente d'indice r . On a pour tout $k \geq r$, on a

$$(MD^{-1})^k = M^k (D^{-1})^k \quad (150)$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (ND^{-1})^i \quad (151)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{k}{i} (ND^{-1})^i \quad (152)$$

$$\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \quad (153)$$

Notons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si $\|X\|_\infty = 1$, on a

$$\|(AB)X\|_\infty \leq \|A\| \|BX\|_\infty \leq \|A\| \|B\| \quad (154)$$

donc $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

La suite $(MD^{-1})^k$ est bornée, donc $r = 1$ et $N = 0$, donc M est diagonalisable.

Prenons ensuite $\alpha = \sqrt{3}$. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on a $\lambda - 1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M - I_n)$. Si $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $|e^{i\theta} - 1| < \sqrt{3}$ si et seulement si $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < \sqrt{3}$ si et seulement si $\theta \in]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a $(e^{i\theta})^k \in \text{Sp}(M^k)$. Donc on a aussi $|\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Quitte à changer θ en $-\theta$, on peut supposer $\theta \in [0, \frac{2\pi}{3}[$. Si $\theta \geq 0$, posons l'unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\theta \geq \frac{2\pi}{3}$ et $(k-1)\theta \in [0, \frac{2\pi}{3}[$. On a alors

$$k\theta = (k-1)\theta + \theta < \frac{4\pi}{3} \quad (155)$$

ce qui est absurde si et seulement si $|\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $\theta = 0$ et $\text{Sp}(M) = \{1\}$, et puisque M est diagonalisable, $M = I_n$ et $G = \{I_n\}$. ■

Remarque 15. Soit $\alpha > \sqrt{3}$ et $G = \{I_n, jI_n, j^2I_n\}$. Pour tout $M \in G$, $\|M - I_n\| < \alpha$ et $G \neq \{I_n\}$.

Solution 19.

1. On vérifie que $\chi_A(\lambda) = \lambda^3$. On a $AX = 0$ si et seulement si $x_1 = x_3$ et $x_2 = -2x_1$.

On prend $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. u est nilpotente et $\dim(\ker(u)) = 1$. On a $u^3 = 0$ et on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (156)$$

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $u^2(e_1) \neq 0$ donc $(u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 . On a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (157)$$

$\dim(\ker(u^k)) = k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, notamment car $\text{rg}(u^2) = 1$ pour justifier que $\dim(\ker(u^2)) = 2$.

Soit F stable par u de dimension $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. $u|_F$ est nilpotente et $u|_F^i = 0$.

Donc $F \subset \ker(u^i)$ qui est de dimension i . Donc $F = \ker(u^i)$.

2. Si $B^2 = A$, $B^6 = 0$ donc $B^3 = 0$. Alors $B^4 = 0 = A^2$ ce qui n'est pas vrai. Donc il n'y a pas de B tel que $B^2 = A$. ■

Solution 20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A . On a $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u + id) \otimes \underbrace{\ker(u^2 + id)}_F \quad (158)$$

On a $F \neq \{0\}$ car $u \neq -id$. On note $v = u|_F$. On a $v^2 = -id_F$ et $\det(v^2) = (\det(v))^2 = (-1)^{\dim(F)} > 0$ donc $\dim(F)$ est pair. Nécessairement, on a $\dim(F) = 2$ et $\dim(\ker(u + id)) = 1$. Soit ε_3 vecteur propre associé à -1 . Soit $x \in F \setminus \{0\}$. Si $(x, u(x))$ est lié, x est vecteur propre de v et $v^2 + id_F = 0$ ce qui est impossible car il n'y a pas de valeur propre réelle. Donc on pose $\mathcal{B} = (x, u(x), \varepsilon_3)$ base de \mathbb{R}^3 . On a $u^2(x) = -x$, donc

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (159)$$

■

Remarque 16. Sur \mathbb{C} , on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (160)$$

ou iI_3 .

Solution 21.

1. $I_x = \{A \in \mathbb{K}[X] \mid A(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non vide car $\mu_f \in I_x$. Donc il existe un unique P_x unitaire tel que $I_x = P_x \mathbb{K}[X]$.
2. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, on a $A(f) = 0$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $P_x \mid A$ si et seulement si $\bigvee_{x \in E} P_x \mid A$ donc $\mu_f = \bigvee_{x \in E} P_x$.
3. On a

$$P_x P_y(f)(x + y) = P_x P_y(f)(x) + P_x P_y(f)(y) \quad (161)$$

$$= P_f(f)(P_x(f)(x)) + P_x(f)(P_y(f)(y)) \quad (162)$$

$$= 0 \quad (163)$$

Donc $P_{x+y} \mid P_x P_y$.

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Supposons $A(f)(x + y) = 0$. On a $P_x(f)(A(f)(x + y)) = 0$, $P_x(f)(A(f)(x)) = A(f)(P_x(f)(x)) = 0 = -AP_x(f)(y)$. Donc $P_y \mid AP_x$. D'après le théorème de Gauss, $P_y \mid A$. De même, $P_x \mid A$. On prend $A = P_{x+y}$. Comme $P_x \wedge P_y = 1$ et $P_x P_y \mid P_{x+y}$, on a

$$\boxed{P_x P_y = P_{x+y}} \quad (164)$$

4. On décompose $\mu_f = \prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, A_i irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_i \geq 1$. Comme $\mu_f = \bigvee_{x \in E} P_x$, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $y_i \in E$ tel que $P_{y_i} = A_i^{\alpha_i} Q_i$. On pose $x_i = Q_i(f)(y_i)$. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, on a $A(f)(x_i) = 0$ si et seulement si $AQ_i(f)(y_i) = 0$ si et seulement si $A_i^{\alpha_i} Q_i \mid AQ_i$ si et seulement si $A_i^{\alpha_i} \mid A$. Ainsi, $P_{x_i} = A_i^{\alpha_i}$. En utilisant le point précédent par récurrence, on a $\mu_f = P_{\sum_{i=1}^r x_i}$ et on pose donc $x = \sum_{i=1}^r x_i$.
5. Supposons que ce v existe. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\deg(\mu_f) \leq n$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Si $\alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$. En appliquant en v , comme la famille est libre, on a de proche en proche $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Donc pour tout $A \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, si $A(f) = 0$, alors $A = 0$. Donc $\deg(\mu_f) \geq n$, donc $\deg(\mu_f) = n$. Réciproquement, soit $v \in E$ tel que $P_v = \mu_f$ qui existe d'après le point précédent. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\alpha_0 v + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$. On forme $A = \alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$. On a $A(f)(v) = 0$, donc $P_v \mid A$ mais P_v est de degré n donc $A = 0$. Donc la famille est libre et de cardinal n : c'est une base. ■

Solution 22.

1. φ est linéaire, soit $(s, t) \in S^2$. On a $\varphi(s) = t$ si et seulement si $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = t_n$ pour tout $n \geq 1$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & t_1 \\ s_1 + s_2 & = & 2t_2 \\ \vdots & & \\ s_1 + \dots + s_{n-1} & = & (n-1)t_{n-1} \\ s_1 + \dots + s_n & = & nt_n \\ \vdots & & \end{array} \right. \quad (165)$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & t_1 \\ s_2 & = & 2t_2 - t_1 \\ \vdots & & \\ s_n = nt_n - (n-1)t_{n-1} & & \\ \vdots & & \end{array} \right. \quad (166)$$

donc φ est bijective.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(s) = \lambda s$ si et seulement si $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lambda s_n$ pour tout $n \geq 1$ si et seulement si $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $s = \lambda \varphi^{-1}(s)$ si et seulement si $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $s_1 = \lambda s_1$ et pour tout $n \geq 2$, $s_n = \lambda(ns_n - (n-1)s_{n-1})$ i.e. $(\lambda n - 1)s_n = \lambda(n-1)s_{n-1}$.

Si c'est le cas, si $s_1 \neq 0$, on a $\lambda = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $s_n = s_{n-1}$ donc s est constante.

Sinon, soit $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N}^* | s_{n_0} \neq 0\}$. On a $(\lambda n_0 - 1)s_{n_0} = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{n_0}$ et pour tout $n > n_0$, on a $s_n = \frac{\frac{1}{n_0}(n-1)}{\frac{n}{n_0}-1} s_{n-1} = \frac{n-1}{n-n_0} s_{n-1}$. Ainsi,

$$s_n = \frac{(n-1)!}{(n_0-1)!(n-n_0)!} s_{n_0} = \binom{n-1}{n_0-1} s_{n_0} \quad (167)$$

Réciproquement, en posant $s_{n_0} = 1$ et en définissant pour tout $n > n_0$, $s_n = \binom{n-1}{n_0-1}$ et pour tout $n \leq n_0 - 1$, $s_n = 0$, alors on a $\varphi(s) = \frac{1}{n_0} s$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(\varphi) = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}} \quad (168)$$

et les sous-espaces propres sont de dimension 1. ■

Remarque 17. Si on se limite à \mathbb{R}^p , en définissant

$$\varphi_p(s_1, \dots, s_p) = (s_1, \frac{s_1 + s_2}{2}, \dots, \frac{s_1 + \dots + s_p}{p}),$$

alors en écrivant la matrice de φ_p dans la base canonique, on a

$$\chi_{\varphi_p} = (X - 1)(X - \frac{1}{2}) \dots (X - \frac{1}{p}).$$

Solution 23.

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda - a_{i,i}| > L_i$. $\lambda I_n - A$ est une matrice à diagonale strictement dominante donc inversible : absurde. Donc il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda \in D_i$. Comme $\lambda \in \text{Sp}(A^\Gamma)$, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda \in S_i$. D'où le résultat.
2. Soit X non nul (dans \mathbb{C}^n) tel que $AX = \lambda X$. Soit $i_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_1}| = \|X\|_\infty > 0$. On a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$.
Soit $i_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_2}| = \max_{i \neq i_1} |x_i|$.
Si $x_{i_2} = 0$, on a $\lambda = a_{i_1, i_1}$ et $|\lambda - a_{i_1, i_1}| = 0$ et $|\lambda - a_{i_1, i_1}| |\lambda - a_{i_2, i_2}| = 0 \leq L_{i_1} L_{i_2}$.
Sinon, on a $|\lambda - a_{i_1, i_1}| |x_{i_1}| \leq |x_{i_2}| L_{i_1}$ et de même $|\lambda - a_{i_2, i_2}| |x_{i_2}| \leq |x_{i_1}| L_{i_2}$ d'où le résultat. ■

Remarque 18. On peut avoir égalité, par exemple avec la matrice nulle.

Solution 24. A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = 0$ alors $A = 0$.

Sinon, $\text{rg}(A) = 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ canoniquement associée à A . On a $\dim(\ker(u)) = n - 1$ et $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$ sur \mathbb{C} . On a $\text{Tr}(A) = \lambda + \mu = 0$ donc $\mu = -\lambda$ et $\text{Tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2$ donc

$$\{\lambda, \mu\} = \left\{ \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\} \quad (169)$$

Les deux valeurs propres sont de multiplicité 1 dans χ_A : les sous-espaces propres sont de dimension 1.

A est diagonalisable sur \mathbb{R} , semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, -\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2})$.

On a $AX = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 x_{n+1} & = 0 \\ \vdots & \\ a_n x_{n+1} & = 0 \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n & = 0 \end{cases} \quad (170)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_{n+1} & = 0 \\ x_{i_0} & = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n a_i x_i \end{cases} \quad (171)$$

avec i_0 indice tel que $a_{i_0} \neq 0$. Une base de $\ker(u)$ est donc

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (172)$$

où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}$. Le 1 est à la i -ième ligne, $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$ est à la ligne i_0 .

On a $AX = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} X = \alpha X$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 x_{n+1} & = \alpha x_1 \\ \vdots & \\ a_n x_{n+1} & = \alpha x_n \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i & = \alpha x_{n+1} \end{cases} \quad (173)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{a_1}{\alpha} x_{n+1} \\ \vdots & \\ x_n &= \frac{a_n}{\alpha} x_{n+1} \end{cases} \quad (174)$$

Une base de $\ker(u - \alpha id)$ est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\alpha} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (175)$$

De même pour $-\alpha$, on vérifie qu'une base de $\ker(u + \alpha id)$ est

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_1}{\alpha} \\ \vdots \\ -\frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (176)$$

■

Solution 25. Pour le sens direct, f et g ont les mêmes espaces propres distincts. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $E_i = \ker(f - \lambda_i id) = \ker(g - \mu_i id)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ valeurs propres distinctes deux à deux de f et μ_1, \dots, μ_r pour g .

On pose

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^r \mu_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \\ P &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{X - \mu_j}{\mu_i - \mu_j} \end{aligned} \quad (177)$$

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $x \in E_i$. On a $Q(f)(x) = Q(\lambda_i)x = \mu_i x = g(x)$. $Q(f)$ et g coïncident sur les vecteurs d'une base, donc ils sont égaux, donc $Q(f) = g$. De même, $f = P(g)$.

Réciproquement, s'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]^2$ tel que $f = P(g)$ et $g = Q(f)$. On prend $\lambda \in \text{Sp}(f)$, soit $x \in \ker(f - \lambda id)$. On a $g(x) = Q(f)(x) = Q(\lambda)x$ donc $x \in \ker(g - Q(\lambda)id)$.

On a

$$\ker(f - \lambda id) \subset \ker(g - Q(\lambda)id) \subset \ker(f - P(Q(\lambda))id) \quad (178)$$

Or $P(Q(\lambda)) = \lambda$ car pour $x \in \ker(f - \lambda id) \setminus \{0\}$, on a $\lambda x = P(Q(\lambda))x$. Donc $\ker(f - \lambda id) = \ker(g - Q(\lambda)id)$ donc f et g ont les mêmes sous-espaces propres. ■

Remarque 19. C'est faux si f et g ne sont pas diagonalisables, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (179)$$

A et B ont les mêmes sous-espaces propres (un seul : $\text{Vect}(e_1, e_4)$). On a $A^2 = 0$ donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,

$$P(A) = \alpha I_4 + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq B \quad (180)$$

Solution 26. Soit $m = |G|$. On a pour tout $M \in G$, on a $M^m = I_2$ donc M est diagonalisable sur \mathbb{C} et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_m$. Notons que G étant abélien, toutes les matrices sont co-diagonalisables.

Si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$, alors $M = I_2$. Si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1\}$, alors $M = -I_2$. Dans ces deux cas, on a $\det(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = \pm 2$. On note ce cas 1.

Si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1, 1\}$, M est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^2 = I_2$. Dans ce cas, on a $\det(M) = -1$ et $\text{Tr}(M) = 0$. On note ce cas 2.

Notons que l'on a $\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$ et $\Delta = (\text{Tr}(M))^2 - 4\det(M)$. Comme χ_M est un polynôme réel, si $\delta < 0$, on écrit $\chi_M(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$. Comme $\text{Tr}(M) = 2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$, on a $\theta \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$.

Si $\theta = \frac{2\pi}{3}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad (181)$$

et $M^3 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = -1$. On note ce cas 3.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \quad (182)$$

et $M^4 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = 0$. On note ce cas 4.

Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad (183)$$

et $M^6 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = 1$. On note ce cas 5.

Par ailleurs, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout $M \in G$, $P^{-1}MP = I_2$.

S'il existe $M \in G$ du type 2, alors les types 3 et 5 sont exclus car on obtiendrait par produit $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\theta} \end{pmatrix}$ avec $\text{Tr}(M) = 0$ car χ_m est un polynôme réel, et $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$, ce qui n'est pas.

Ainsi,

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\} \quad (184)$$

Ainsi,

$$G = \begin{cases} \{I_2\} & B \text{ matrice de type 2} \\ \{-I_2, I_2\} & A \text{ matrice de type 4} \\ \{I_2, B\} & A, B \text{ matrices de type 4, 2} \\ \{I_2, A, A^2, A^3\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & B \text{ matrice de type 2} \\ \{I_2, A, B, A^2, A^3, -B\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \\ \{I_2, B, -B, -I_2\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \end{cases} \quad (185)$$

S'il n'y a pas de matrice de type 2, on a

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j^2 & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \right\} \quad (186)$$

On ne peut pas avoir une matrice de type 3 ou 5 car $\pm ij$ et $\pm ij^2$ ne sont pas des valeurs propres possibles. Donc

$$G = \begin{cases} \{I_2, C, C^2\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & C \text{ matrice de type 3} \\ \{I_2, D, D^2, D^3, D^4, D^5\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & D \text{ matrice de type 5} \end{cases} \quad (187)$$

Notons que dans le deuxième cas, D^2 est de type 3.

On a donc bien $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. ■

Solution 27. Si u est diagonalisable, la famille des vecteurs propres est génératrice. En prenant un sous-espace de E de base \mathcal{B} , on complète avec des vecteurs propres, ce qui forme un sous-espace stable par u .

Réciproquement, soit

$$F = \bigotimes_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda id) \quad (188)$$

stable par u . F admet un supplémentaire stable qu'on nommera G . Si $G \neq \{0\}$, $u|_G$ admet nécessairement un vecteur propre, or les vecteurs propres sont dans $F \setminus \{0\}$; absurde. Donc $G = \{0\}$ et $E = F$ donc u est diagonalisable. ■

Solution 28. Plus généralement, soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{k,l}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit

$$M = B \otimes A = \begin{pmatrix} b_{1,1}A & \dots & b_{1,p}A \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1}A & \dots & b_{p,p}A \end{pmatrix} \quad (189)$$

Si B est diagonalisable, il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}BQ = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$. On note $Q = (q_{i,j})$ et $Q^{-1} = (q'_{i,j})$. Par produits par blocs, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q'_{1,1}I_n & \dots & q'_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q'_{p,1}I_n & \dots & q'_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{=Q^{-1} \otimes I_n = (Q \otimes I_n)^{-1}} M \underbrace{\begin{pmatrix} q_{1,1}I_n & \dots & q_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p,1}I_n & \dots & q_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{Q \otimes I_n} = \text{diag}(\mu_1 A, \dots, \mu_p A) = M_1 \quad (190)$$

Si de plus A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Alors

$$\text{diag}(P^{-1}, \dots, P^{-1})M_1 \text{diag}(P, \dots, P) = \text{diag}(\mu_1, \lambda_1, \dots, \mu_1, \lambda_n, \dots, \mu_p \lambda_1, \dots, \mu_p \lambda_n) \quad (191)$$

Donc $B \otimes A$ est diagonalisable et $\text{Sp}(B \otimes A) = \{\lambda_i \mu_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$. ■

Remarque 20. On a $\text{Tr}(B \otimes A) = \text{Tr}(B) \times \text{Tr}(A)$ et $\det(B \otimes A) = \det(B)^n \det(A)^p$.

Remarque 21. Si B est diagonalisable et non nulle, si $B \otimes A$ est diagonalisable, il existe $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\mu_i \neq 0$ et $\mu_i A$ est diagonalisable (restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable) donc A est diagonalisable.

Solution 29.

1. On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A .

Si $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $F_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_{n-k+1})$.
On a $u(e_k) = x_k e_{n-k+1}$ et $u(e_{n-k+1}) = x_{n-k+1} e_k$ donc F_k est stable par u . Ainsi,
 $\text{mat}_{(e_k, e_{n-k+1})}(u|_{F_k}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{n-k+1} \\ x_k & 0 \end{pmatrix}$.

Étudions, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_M = X^2 - ab$.

Si $ab \neq 0$, on note λ une racine carrée de ab sur \mathbb{C} . On a $\chi_M(X - \lambda)(X + \lambda)$ qui est scindé à racines simples donc M est diagonalisable et semblable à $\text{diag}(\lambda, -\lambda)$.

Si $ab = 0$: si $a = b = 0$ alors $M = 0$. Si a ou $b \neq 0$, alors M n'est pas diagonalisable puisque si elle l'était, comme sa seule valeur propre est 0, elle serait semblable donc égale à 0 ce qui n'est pas. Donc A est diagonalisable si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, x_k et x_{n-k+1} non nuls ou $x_k = 0 = x_{n-k+1}$.

Si $n = 2m + 1$, on fait le même raisonnement avec $u(e_m) = x_m e_m$.

2. $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $(u_{|F_k}^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Si $x_k x_{n+1-k} \neq 0$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda^2 = x_k x_{n+1-k}$. Dans une base de vecteurs propres \mathcal{B} , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u_{|F_k}^p) = \begin{pmatrix} \lambda^p & 0 \\ 0 & (-\lambda)^p \end{pmatrix} \quad (192)$$

Cela converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ si et seulement si $|x_k x_{n+1-k}| < 1$.

Si $x_k = x_{n+1-k} = 0$, alors pour tout $p \geq 2$, $u_{|F_k}^p = 0$ donc on a convergence. ■

Solution 30.

1. On a

$$\text{mat}_{(1,X,\dots,X^n)}(\varphi) = \text{diag}(-n, 1-n, \dots, 0) \quad (193)$$

donc les valeurs propres sont $(k-n)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. On a $n+1$ valeurs propres distinctes donc φ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les vecteurs propres sont les (X^k) pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. Si $\varphi(P) = kP$, alors $\deg(P) = k$. Si $P = \sum_{i=0}^k a_i X^i$ donc

$$XP' - nP'' - kP = 0 = \sum_{i=0}^{k-2} (ia_i - n(i+1)(i+2) - ka_i) X^i - a_{k-1} X^{k-1} \quad (194)$$

Ainsi, par récurrence, pour tout $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor\}$, $a_{k-(2p+1)} = 0$ et pour tout $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$,

$$a_{k-2p} = \frac{n^p(k-2p+1) \dots (k-1)k}{(-2p) \dots (-4)(-2)} a_k = \frac{n^p(-1)^p}{2^p p!} \times \frac{k!}{(k-2p)!} a_k \quad (195)$$

donc les vecteurs propres correspondent aux polynômes ayant ces coefficients. ■

Solution 31.

1. On a

$$A = aI_3 + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_C + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_B \quad (196)$$

avec $B = C^2$ et C est la matrice compagnon du polynôme $X^3 - 1$, donc $\chi_C = X^3 - 1$. Ainsi, C est diagonalisable sur \mathbb{C} et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \{1, j, j^2\}$. On a

$$\begin{aligned} C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} &= j \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} &= j^2 \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (197)$$

donc si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \quad (198)$$

alors on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a + bj^2 + cj & 0 \\ 0 & 0 & a + bj + cj^2 \end{pmatrix} \quad (199)$$

et

$$\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, a + cj + bj^2, a + bj + cj^2\}} \quad (200)$$

2. On a

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a + bj^2 + cj)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a + bj + cj^2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad (201)$$

Tout d'abord, on a $|a + cj + bj^2| \leq |a| + |b| + |c| = 1$ et on a égalité si et seulement si a, cj et bj^2 ont le même argument si et seulement si

$$\{a, b, c\} \in \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}.$$

Si $a = 1$ et $b = c = 0$, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Si $(b = 1 \text{ et } a = c = 0)$ ou $(c = 1 \text{ et } a = b = 0)$, $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Sinon,

$$\boxed{A^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}} \quad (202)$$

■

Solution 32.

1. On vérifie en calculant les premiers termes puis par récurrence que

$$\boxed{A^k = \begin{pmatrix} B^k & \sum_{i=1}^k B^{i-1}CD^{k-i} \\ 0 & D^k \end{pmatrix}} \quad (203)$$

2. On a

$$\mu_A(A) = 0 = \begin{pmatrix} \mu_A(B) & \star \\ 0 & \mu_A(D) \end{pmatrix} \quad (204)$$

donc $\mu_A(B) = \mu_A(D) = 0$. Ainsi, $\mu_B \mid \mu_A$ et $\mu_D \mid \mu_A$ donc $\mu_B \vee \mu_D \mid \mu_A$.

Si B et D sont de tailles 1, $\chi_A(X) = (X - b)(X - d)$ d'où $\mu_B = X - b$ et $\mu_D = X - d$.

Si $b \neq d$, $X - b$ et $X - d$ divise μ_A donc $\mu_A \mid \chi_A$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Si $b = d$, si $c = 0$ on a $\mu_A = X - b$ donc $\mu_A \mid \mu_B \mu_D = (X - b)^2$. Si $c \neq 0$, $\mu_A = X - b$ ou $\mu_A = (X - b)^2$ et $A - bI_n \neq 0$ donc $\mu_A = (X - b)^2$.

3. Si $C = 0$, on a $\mu_A = \mu_B \vee \mu_D$.
4. Si $B = D$ et $C = I_{n_1}$, on a $A^0 = I_{n_1+n_2}$ et pour $k \geq 1$,

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & kB^{k-1} \\ 0 & B^k \end{pmatrix} \quad (205)$$

Ainsi

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(B) & P'(B) \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = 0 \quad (206)$$

si et seulement si $P(B) = P'(B) = 0$ donc $\mu_B \mid P$ et $\mu_B \mid P'$ donc $\mu_B \mid P \vee P'$.

On a

$$\mu_B^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_B\mu'_B(B) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (207)$$

donc $\mu_A \mid \mu_B^2$.

On décompose $\mu_B = (X - \lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \lambda_r)^{m_r}$. On a $P(A) = 0$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, λ_i est racine de P d'ordre plus grand que $m_i + 1$.

5. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (208)$$

On a

$$B = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (209)$$

$\mu_B = \mu_D = X^2$, et $\mu_A \mid X^3$. Or $u^2(e_4) \neq 0$ donc $\mu_A = X^3 \neq X^2 = \mu_B \vee \mu_D \neq X^4 = \mu_B \mu_D$.

■

Solution 33. On décompose sur \mathbb{C} : $P(X) - \lambda = \alpha \prod_{i=1}^m (X - \mu_i)$ avec $\alpha \neq 0$. On a

$$\underbrace{g - \lambda id}_{\substack{\text{non inversible} \\ \text{(respectivement non injectif)}}} = \alpha \prod_{i=1}^m (f - \mu_i id) \quad (210)$$

donc il existe $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $f - \mu_i id$ est non inversible (respectivement non injectif), d'où le résultat. ■

Solution 34.

1. Soit (f_1, \dots, f_r) une base de V et $x \in E \setminus \{0\}$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ tels que $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_r f_r(x) = 0$. Or V est un sous-espace, donc $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r \in V$ et $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r \notin GL(E)$ car $x \neq 0$. D'où $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r = 0$ et donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ car (f_1, \dots, f_r) est une base de V .

Ainsi $(f_1(x), \dots, f_r(x))$ est libre donc $r = \dim(V) \leq \dim(E)$.

2. Si $\dim(V) = 1$, alors $V = \mathbb{C}f$ avec $f \in GL(E)$. Si $\dim(V) \geq 2$, soient $(f, g) \in V^2$ tels que (f, g) soit libre alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $f + \alpha g \neq 0$ et $f + \alpha g \in V \setminus \{0\}$. Or $f + \alpha g = g(g^{-1} \circ f + \alpha \text{id})$. Pour $\alpha \in \text{Sp}(-g^{-1} \circ f)$ (existe car on est dans \mathbb{C}), on obtient une contradiction. Donc de même, $V = \mathbb{C}f$ avec $f \in GL(E)$.
3. Comme $\dim(E) = 2$, on a $\dim(V) \leq 2$. Si $\dim(V) = 1$, comme précédemment, on a $V = \mathbb{R}f$ avec $f \in GL(E)$. Si $\dim(V) = 2$, soit (f, g) une base de V . D'après ce qui précède, on a $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(g^{-1} \circ f) = \emptyset$. Soit \mathcal{B} une base de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{mat}_{\mathcal{B}}(g)$. On écrit $\chi_{A^{-1}B} = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ avec $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$. $A^{-1}B$ est diagonalisable sur \mathbb{C} et semblable à $\text{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$ et $\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}$ est semblable sur \mathbb{C} à $\text{diag}(i, -i)$ semblable sur \mathbb{R} à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}$ est semblable sur \mathbb{R} à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A^{-1}B = P \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \quad (211)$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda A + \mu B = A(\lambda I_2 + \mu A^{-1}B) = \underbrace{AP}_{\in GL_2(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} \lambda + \alpha\mu & -\beta \\ \beta & \lambda + \alpha\mu \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1}}_{\in GL_2(\mathbb{R})} \quad (212)$$

avec $\beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

4. Avec les notations précédentes, si $(A, B) \in V^2$ est libre, on a

$$i \in \text{Sp}\left(\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}\right) = \text{Sp}((BA)^{-1}(B - \alpha A)) \quad (213)$$

et on pose $A' = \beta A \in V$ et $B' = B - \alpha A \in V$.

■

Solution 35.

1. En notant $c_{i,j}$ les cofacteurs d'indice (j, i) , on a

$$[\text{com}(\lambda I_n - A)^T]_{i,j} = (-1)^{i+j} c_{j,i}(\lambda - I_n) \quad (214)$$

En développant, on obtient des polynômes en λ de degré plus petit que $n - 1$. En regroupant selon les puissances de λ , on a

$$\boxed{\text{com}(\lambda I_n - A)^T = M_0 + M_1 \lambda + \cdots + \lambda^{n-1} M_{n-1}} \quad (215)$$

2. On a $(\lambda I_n - A) \text{com}(\lambda I_n - A)^\top = \det(\lambda I_n - A) I_n = \chi_A(\lambda) I_n$

En identifiant les coefficients, on a

$$\begin{cases} M_{n-1} &= I_n \\ M_{n-2} &= A + a_{n-1} I_n \\ M_{n-3} &= A^2 + a_{n-1} A + a_{n-2} I_n \\ \vdots & \\ M_{n-k} &= A^{k-1} + a_{n-1} A^{k-2} + \dots + a_{n-k+1} I_n \\ \vdots & \\ M_0 &= A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I_n \end{cases} \quad (216)$$

et $-AM_0 = a_0 I_n$. En reportant, on a bien $\chi_A(A) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$: on a une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On forme $\lambda I_n - A = (c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda))$ avec

$$c_j(\lambda) = \begin{pmatrix} -a_{1,j} \\ \dots \\ -a_{j-1,j} \\ \lambda - a_{j,j} \\ -a_{j+1,j} \\ \dots \\ -a_{n,j} \end{pmatrix} \quad (217)$$

On a $\chi_A(\lambda) = \det(c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda))$. \det étant une forme n -linéaire, on a

$$\chi'_A(\lambda) = \sum_{k=1}^n \det(c_1(\lambda), \dots, c_{k-1}(\lambda), c'_k(\lambda), c_{k+1}(\lambda), \dots, c_n(\lambda)) \quad (218)$$

En développant le terme k par rapport à la k -ième colonne, on trouve qu'il vaut $c_{k,k}(\lambda I_n - A)$. Ainsi,

$$\boxed{\chi'_A(\lambda) = \text{Tr}(\text{com}(\lambda I_n - A)^\top)} \quad (219)$$

4. On a donc $a_1 + 2a_2\lambda + \dots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + n\lambda^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \text{Tr}(M_k)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (par linéarité de Tr). Donc pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $\text{Tr}(M_k), \text{Tr}(M_k) = (k+1)a_{k+1}$ (et $\text{Tr}(M_{n-1}) = \text{Tr}(I_n) = n$). On a $\text{Tr}(M_{n-2}) = (n-1)a_{n-1} = \text{Tr}(A) + na_{n-1}$ donc $a_{n-1} = \text{Tr}(A)$. Puis $\text{Tr}(M_{n-3}) = (n-2)a_{n-2} = \text{Tr}(A^2) + a_{n-1} \text{Tr}(A) + a_{n-2}n$ donc $a_{n-2} = -\frac{\text{Tr}(A^2)}{2} + \frac{\text{Tr}(A)^2}{2}$. De proche en proche, on a $a_{n-k} = f_k(\text{Tr}(A), \dots, \text{Tr}(A^k))$ avec f_k indépendante de A .

5. D'après ce qui précède, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = b_k$ car f est indépendante de A . Donc $\chi_A = \chi_B$. ■

Remarque 22. Si $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^n) = 0$, alors $\chi_A = \chi_0 = X^n$ et A est nilpotente. On peut le vérifier à la main sur \mathbb{C} : si $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ sont les valeurs propres non nulles distinctes de A et m_i la multiplicité de λ_i dans χ_A , alors on a le système

$$\begin{cases} \text{Tr}(A) &= m_1\lambda_1 + \dots + m_r\lambda_r &= 0 \\ \text{Tr}(A^2) &= m_1\lambda_1^2 + \dots + m_r\lambda_r^2 &= 0 \\ \vdots & & \\ \text{Tr}(A^r) &= m_1\lambda_1^r + \dots + m_r\lambda_r^r &= 0 \end{cases} \quad (220)$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0 \quad (221)$$

et la matrice est inversible car les λ_i sont distincts non nuls. Donc $m_1 = \dots = m_r = 0$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$.

Solution 36. On définit, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\bar{A} = (\overline{a_{i,j}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Comme p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. On a $\chi_A \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ donc il existe \mathbb{L} un sur-corps de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où χ_A est scindé sur \mathbb{L} . On écrit $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{L}$. On peut trigonaliser \bar{A} sur \mathbb{L} et on a $\text{Tr}(\bar{A}^p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p$. Or la caractéristique de \mathbb{L} vaut p donc on a $(x + y)^p = x^p + y^p$ (binôme de Newton et utiliser le fait que $p \mid \binom{p}{k}$ pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$). Ainsi,

$$\text{Tr}(\bar{A}^p) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^p = \text{Tr}(\bar{A})^p \quad (222)$$

et on peut appliquer le petit théorème de Fermat : on a bien $\text{Tr}(\bar{A}^p) = \text{Tr}(\bar{A})$ et en remontant dans \mathbb{Z} ,

$\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A)[p]$

(223)

■

Solution 37. Si on a (i), soit x un vecteur propre associé à $\rho(u) = \rho e^{i\theta}$. On a $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$ et comme $x \neq 0$, on a $\rho(u) \leq \|\rho(u)\| < 1$ d'où (ii).

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford $u = n + d$ avec n nilpotent, d diagonalisable et $dn = nd$. Soit $m = \dim(E)$. Pour tout $p \geq m$, on a

$$u^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0} \quad (224)$$

En effet, on a $k \geq m-1$ fixé, il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\binom{p}{k} \text{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \quad (225)$$

car $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et

$$\binom{p}{k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{\rho(u)^p} \right) \quad (226)$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit x un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ donc en particulier, $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\rho(u)^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\rho(u) \geq 0$ donc $\rho(u) < 1$. Posons encore $u = d + n$ la décomposition de Dunford de u . Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ base de E dans laquelle les coefficients de $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$ sont en module $\leq \varepsilon$. Définissons sur E

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i e_i \right\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \quad (227)$$

Soit $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ triangulaire supérieure avec $m_{ii} = \lambda_i$ et pour tout $j \neq i$, $|m_{i,j}| < \varepsilon$. Soit donc $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathbb{C}^m$, on a

$$\|Mx\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^m m_{i,j} x_j \right|}_{(|\lambda_i| + (m-1)\varepsilon)\|x\|_{\infty}} \quad (228)$$

donc

$$\|u\| \leq \underbrace{\rho(u)}_{<1} + (m-1)\varepsilon \quad (229)$$

et on choisit

$$\varepsilon < \underbrace{\frac{1 - \rho(u)}{m-1}}_{>0} \quad (230)$$

d'où $\|u\| < 1$ et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence. ■

Remarque 23. $u \mapsto \rho(u)$ n'est pas une norme car pour u nilpotente non nulle, $\rho(u) = 0$.

Solution 38. Supposons (i), soit Y un vecteur propre de A avec $AY = \lambda Y$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $BA^k Y = \lambda^k BY$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^{k_0} BY \neq 0$ et $BY \neq 0$ donc on a (ii).

Si (ii), supposons qu'il existe $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\varphi = 0$. On note

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \quad (231)$$

avec les λ_i distincts. Alors $Y = \sum_{i=1}^r Y_i$ où $Y_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)$. Il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $Y_{i_0} \neq 0$ car $Y \neq 0$. On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$B \exp(tA)Y = \sum_{i=1}^r B \exp(t\lambda_i)Y_i = 0 \quad (232)$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, on a $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^r B\lambda_i^k \exp(t\lambda_i)Y_i = 0$. Pour $t = 0$ on a $\sum_{i=1}^r \lambda_i^k BY_i = 0$ ce qui, pour $t = 0$, donne le système

$$\begin{cases} BY_1 + \dots + BY_r & = 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \dots + \lambda_r BY_r & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} BY_1 + \dots + \lambda_r^{r-1} BY_r & = 0 \end{cases} \quad (233)$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$, on a donc $\sum_{i=1}^r P(\lambda_i)BY_i = 0$. Pour $i \in \{0, \dots, r-1\}$ et $P = \prod_{j \neq i} \frac{(X-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$, on obtient pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $BY_i = 0$. En particulier, $BY_{i_0} = 0$ et Y_{i_0} est un vecteur propre de A car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).

Soit $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, supposons que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $BA^k Y = 0$. Soit $k \geq n$, il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$X^k = Q_k \chi_A + R_k \quad (234)$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc $A^k = R_k(A)$ d'où $BA^k Y = BR_k(A)Y = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$B \exp(tA)Y = B \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} Y \quad (235)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (BA^k Y)}{k!} \quad (236)$$

$$= 0 \quad (237)$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence. ■

Solution 39. Noter d'abord que le résultat ne dépend pas de la norme (équivalente). Si $A = \lambda I_n$ on vérifie que $\|A^p\|^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} |\lambda|$. On choisit $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$ et on vérifie que si A est diagonalisable avec $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ ses valeurs propres (complexes), alors le résultat est $|\lambda_2|$. Si A est juste trigonalisable (son spectre contient juste $\lambda \in \mathbb{C}$), on écrit A comme somme d'une matrice scalaire et d'une matrice nilpotente, et on calcule explicitement $\|A^p\|$. Le résultat est alors $|\lambda|$, et de manière générale, il s'agit du rayon spectral. En dimension quelconque, on utilise la décomposition de Dunford. ■

Solution 40.

1. M est la matrice compagnon de P , donc $\chi_M = P$. Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$, $\text{rg}(M - \lambda I_n) = n - 1$ car les $n - 1$ premières lignes sont indépendantes. Ainsi, $\dim(E_\lambda) = 1$. Pour la condition nécessaire et suffisante, M est diagonalisable et si et seulement si P est scindé à racines simples.

2. On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y''' \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale est alors $Y(t) = e^{tA}Y_0$. $\chi_A = (X - 1)^2(X + 1)$, donc A n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} mais trigonalisable. On trigonalise, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et on a $P^{-1}AP = A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut alors calculer $\exp(tA_1)$.

■