*Solutions MP/MP**

Fonction d'une variable réelle

Solution 1. Tout d'abord, $\deg(L_n) = n$ et son coefficient dominant et $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. -1 et 1 sont racines d'ordre n de P_n donc pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$ $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$. Ainsi, on a par intégrations par parties successives :

$$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t) P_n(t) dt \tag{1}$$

Notamment, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P^{(n)} = 0$ et $(P|L_n) = 0$. En particulier, pour tout $m < n$, $\deg(L_m) \leqslant n-1$ et $(L_m|L_n) = 0$ donc $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de L_n grâce aux intégrales de Wallis :

$$\begin{aligned}
\|L_n\|_2^2 &= (L_n|L_n) &(2)\\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} L_n^{(n)} (t^2-1)^n dt &(3)\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt &(4)
\end{aligned}$$

On pose $t = \cos(\theta)$ d'où $dt = -\sin(\theta)d\theta$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt &= \int_0^{\pi} \sin(\theta)^{2n+1} d\theta &(5)\\
&= 2I_{2n+1} \text{ [Wallis]} &(6)
\end{aligned}$$

On a classiquement $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. D'où

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \underbrace{I_1}_{=1} &(7)\\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} &(8)
\end{aligned}$$

d'où

$$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2 \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \tag{9}$$

2. On utilise la formule de Leibniz en écrivant $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$.

3. On montre le résultat par récurrence sur $k \in \{0,\dots,n\}$ en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que $L_n = P_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]-1,1[$. Or $\deg(L_n) = n$, donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.

4. $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (étagée en degré). Donc il existe $(\alpha_{n,0},\dots,\alpha_{n,k})\in\mathbb{R}^{k+1}$ tel que $XL_{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}L_k$. Si $k\leqslant n-3$, on a

$$(XL_{n-1}L_k)=\alpha_{n,k}\|L_k\|_2^2=(L_{n-1}XL_k)=0 \tag{10}$$

car $\deg(XL_k)=k+1\leqslant n-2$. Donc

$$XL_{n-1}=\alpha_{n,n-2}L_{n-2}+\alpha_{n,n-1}L_{n-1}+\alpha_{n,n}L_n \tag{11}$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(Xl_{n-1}|L_{n-1})=\int_{-1}^{1}tL_{n-1}(t)^2dt \tag{12}$$

Or P_n est paire, donc L_n est de la parité de n et donc L_n^2 est paire puis XL_n^2 est impaire. Donc $\alpha_{n,n-1}=0$.

$$\begin{aligned}(XL_{n-1}|L_{n-2})&=\alpha_{n,n-2}\underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{=\frac{2}{2n-3}} &(13)\\ &=(-1)^n\int_{-1}^{1}P_{n-1}(t)\underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}} &(14)\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}(t)dt&=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\underbrace{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-1}dt}_{2I_{2n-1}} &(15)\\ &=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\times 2\times\frac{2^{2n-2}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} &(16)\\ &=\frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!} &(17)\end{aligned}$$

donc $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}}=\frac{n-1}{n}$. D'où le résultat.

■

Solution 2. On forme

$$\begin{array}{rccl} g: & [a,b] & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \underbrace{\Delta f(x_0,\dots,x_{n-1},x)}_{\varphi(x)}-\underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)A}_{P(x)}\end{array} \tag{18}$$

On a $g(x_n) = 0$. On suppose les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ distincts, et on pose

$$A = \frac{V(x_0, \dots, x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)} \tag{19}$$

g est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $g(x_i) = 0$. Donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g^{(n)}(\xi) = 0$ (théorème de Rolle appliqué n fois. $\deg(P) = n$ et son coefficient dominant est A donc $P^{(n)}(\xi) = An! = \varphi^{(n)}(\xi)$.

On développe maintenant $\varphi(x)$ par rapport à la dernière colonne :

$$\varphi(x) = f(x) \times V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + Q(X) \tag{20}$$

avec $\deg(Q) \leqslant n-1$ et $V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i - x_j)$ (déterminant de Vandermonde). On a donc

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_j - x_i) \tag{21}$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{A}{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j - x_i)} = \Delta f(x_0, \dots, x_n) \tag{22}$$

■

Solution 3. On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{0} -tf''(t)dt \tag{23}$$

et de même

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)f''(t)dt \tag{24}$$

D'où

$$\begin{aligned} A(f) &= f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) && (25)\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} tf''(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f''(t)dt && (26)\\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)dt && (27)\\ &= \frac{1}{4} && (28) \end{aligned}$$

Et c'est atteint pour $f(t) = \frac{t^2}{4}$. ■

Solution 4. Pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)$ donc

$$f'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1)) \tag{29}$$

donc f' est $\mathcal{C}^1$ et donc f est $\mathcal{C}^2$. On fixe alors x et on dérive deux fois (29) en fonction de h. On a alors

$$f''(x+h)=f''(x-h) \tag{30}$$

pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$ donc f'' est constante et f est polynômiale de degré 2.

Réciproquement, si $f(x)=ax^2+bx+c$, on a bien la relation de l'énoncé. ■

Solution 5.

1. Soit $a>0$,

$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & \mathbb{R} & \to &]a,+\infty[\\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \tag{31}$$

est croissante. Donc il existe $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_a(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. On écrit alors

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{x}+\frac{f(a)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} l \tag{32}$$

2. S'il existe $a<b\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $f(a)<f(b)$, alors $\tau_a(b)>0$. Comme τ_a est croissante, $l\geqslant\tau_a(b)>0$. Par contraposée, si $l\geqslant 0$, f est décroissante.
3. Posons pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)=f(x)-lx$. Pour $x<y$, on a

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-l\leqslant 0 \tag{33}$$

Donc φ est décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\in\overline{\mathbb{R}}$ existe.

■

Solution 6.

1. On forme

$$\begin{array}{rccc} g : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\frac{1}{p}+x} \end{array} \tag{34}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{np}\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{k}{np}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{dx}{\frac{1}{p}+x}=\ln(p+1)=l_p \tag{35}$$

2. On note $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

   Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $0 < x < \alpha_0$, alors $|\varepsilon(x_0)| \leqslant \varepsilon_0$, et il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{n} \leqslant \alpha_0$. Alors pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$,

$$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left|\varepsilon\Big(\frac{1}{k+n}\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p} \tag{36}$$

   et

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{k+n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}\frac{np+1}{n+1} \leqslant \varepsilon_0 \tag{37}$$

   On a donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(p+1)f'(0) \tag{38}$$

3. On peut penser à $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ continue et $f(0) = 0$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \tag{39}$$

   donc v_n diverge.

4. On écrit $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} 0$. Ainsi,

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{bp} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{(k+n)^2} \tag{40}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$, $|\varepsilon(\frac{1}{n+k})| \leqslant \varepsilon$ et donc

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2} \tag{41}$$

   donc

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right) \tag{42}$$

   puis

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} \tag{43}$$

   Or

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(np)^2} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2} \tag{44}$$

$$= \frac{1}{np} \times \underbrace{\frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{(\frac{1}{p}+x)^2}} \tag{45}$$

donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(0)p}{n(p+1)} \tag{46}$$

■

Solution 7. Supposons que f' ne tend pa vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \geqslant A, |f'(x_A)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\alpha_0 \geqslant 0$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha_0$ alors $|f'(x)-f'(y)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $t \in [x_A - \alpha, x_A + \alpha]$, on a

$$|f'(t)| \geqslant |f'(x_A)| - |f'(x_A) - f'(t)| \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{47}$$

et pour $A = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geqslant n, \forall t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f'(t)| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{n}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f' > 0$ sur les $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Alors

$$f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = \int_{x_n-\alpha_0}^{x_n+\alpha_0} f'(t)dt \geqslant \varepsilon_0\alpha_0 > 0 \tag{48}$$

mais comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = 0 \tag{49}$$

d'où la contradiction.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, on applique ce qui précède à $\Im(f)$ et $\Re(f)$.

Si f' n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \tag{50}$$

car $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ et

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} + \underbrace{\frac{2x\cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en } +\infty} \tag{51}$$

■

Solution 8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x + \frac{h}{2}) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x) \tag{52}$$

par continuité de g. Donc f est dérivable et $f' = g$. Par ailleurs, pour $y = \frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2}) \tag{53}$$

par récurrence f est $\mathcal{C}^\infty$.

En outre, en fixant x et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à y, on a

$$f''(x+y) - f''(x-y) = 0 \tag{54}$$

Donc f'' est constante donc f est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec $f' = g$). ■

Solution 9. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt \tag{55}$$

On note $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \int_a^b F''(t)(b-t)dt \tag{56}$$

Pour $a = k$ et $b = k + \frac{1}{2}$, on a

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}-u)du \tag{57}$$

et pour $a = k+1, b = k+\frac{1}{2}$,

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}+u)du \tag{58}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(f(k)-f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u(f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u))du \tag{59}$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u)}_{\geqslant 0 \text{ car } u \geqslant 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du \tag{60}$$

et $f'(k+\frac{1}{2}+u)-f'(k+\frac{1}{2}-u)\leqslant f'(k+1)-f'(k)$ d'où

$$S_n \leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} udu}_{=\frac{1}{8}}(f'(n)-f'(1)) \tag{61}$$

■

Solution 10.

1. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{cases} \|A\| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2 \\ \|B\| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2 \end{cases} \tag{62}$$

On a $B-A-f(x-h)+f(x+h)=2hf'(x)$ d'où

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{hM_2}{2}+\frac{M_0}{h} \tag{63}$$

Donc f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On a ensuite un majorant qui dépend de h que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.

2. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau

$$\forall k \in \{1,\dots,n-1\}, \|A_k\| \leqslant \frac{k^n}{n!}M_n \tag{64}$$

On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1-f(x+1) \\ \vdots \\ A_k-f(x+k) \\ \vdots \\ A_n-f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{65}$$

On a

$$\det(M)=\frac{(-1)^n}{1!\times 2!\times\cdots\times(n-1)!}V(1,\dots,n) \tag{66}$$

où V est le déterminant de Vandermonde. Donc $\det(M) \neq 0$. On peut former les $f^{(j)}(x)$ en fonction des $(A_i - f(x+i))_{1\leqslant i\leqslant n}$: il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f^{(j)}(x)=\sum_{i=1}^n \alpha_i(A_i - f(x+i))$. Donc

$$\|f^{(j)}(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\Big(\frac{n}{n!}M_n + M_0\Big) \tag{67}$$

Donc $f^{(j)}$ est bornée pour tout $j\in\{1,\dots,n-1\}$.

■

Solution 11.

1. $$l_{\sigma,\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1}\Big\|\int_{a_i}^{a_{i+1}} \gamma'(t)dt\Big\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt \tag{68}$$

2. On a
$$\Big|l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1}-a_i)\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma(a_{i+1})-\gamma(a_i)\| - \|\underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{>0}\gamma'(a_i)\|\Big| \tag{69}$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma(a_{i+1})-\gamma(a_i)-(a_{i+1}-a_i)\gamma'(a_i)\| \tag{70}$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)-\gamma'(a_i)\|dt \tag{71}$$

3. $\|\gamma'\|$ est continue donc
$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \lim_{\delta(\sigma)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1}-a_i) \tag{72}$$

   Donc α_0 existe.

   γ' est continue sur $[a,b]$ donc uniformément continue sur $[a,b]$, et il existe $\alpha_1>0$ tel que pour tout $(x,y)\in[a,b]^2$, on a
$$|x-y|\leqslant \alpha \Rightarrow \|\gamma'(x)-\gamma'(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{73}$$

   Alors si $\delta(\sigma)\leqslant\alpha_1$, pour tout $i\in\{0,\dots,n-1\}$, pour tout $t\in[a_i,a_{i+1}]$, on a
$$|t-a_i| \leqslant (a_{i+1}-a_i) \leqslant \alpha_1 \tag{74}$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i) - \gamma'(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{75}$$

et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{76}$$

Finalement, si @$d(\sigma) \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1)$, on a

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leqslant \varepsilon \tag{77}$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \tag{78}$$

4. On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} \tag{79}$$

donc $\|\gamma'(t)\| = R$ et $l(\gamma) = 2\pi R$.

■

Solution 12.

1. Pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_2(t)} \tag{80}$$

donc

$$e^{\mathrm{i}(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1 \tag{81}$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, il existe $k(t) \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$. On a

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi} \tag{82}$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à k_0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Si $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$,
$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \tag{83}$$
Comme $\sqrt{\cdot}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, f est $\mathcal{C}^k$. On a alors
$$f(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)e^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{t})} = \mathrm{i}\theta'(t)f(t) \tag{84}$$
Donc
$$\theta(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)} \tag{85}$$
De plus, on a
$$\theta(t) = \theta(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}du \tag{86}$$
pour $t_0 \in I$.

3. On fixe $t_0 \in I$. Soit θ_0 un argument de $\gamma(t_0)$, on pose
$$\theta(t) = \theta_0 - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}du \tag{87}$$
Comme $\frac{f'}{f}$ est $\mathcal{C}^{k-1}$, θ est bien $\mathcal{C}^k$. On forme $g(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)}$ qui est de classe $\mathcal{C}^k$. On a
$$g'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t) \tag{88}$$
donc $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$, donc $\frac{g}{f}$ est constante sur I et $g(t_0) = e^{\mathrm{i}\theta_0} = f(t_0)$ donc $g = f$ sur I. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $|f(t)| = |e^{\mathrm{i}\theta(t)}| = 1$ et si $\theta(t) = a(t) + \mathrm{i}(t)$, on a donc
$$e^{\mathrm{i}\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{\mathrm{i}a(t)} \tag{89}$$
donc $b(t) = 0$ et $\theta(t) \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$