

*Solutions MP/MP^**

Suites et séries de fonctions

Solution 1. Pour $x \geq 0$, on a $F_n(x) > 0$, on a

$$\ln(F_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{kx}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+tx) dt = G(x) \quad (1)$$

On a $G(0) = 0$ et pour $x > 0$, on a

$$G(x) = \left[\left(t + \frac{1}{x}\right) \ln(1+tx) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+tx} \left(t + \frac{1}{x}\right) dt \quad (2)$$

$$= \frac{x+1}{x} \ln(1+x) - 1 \quad (3)$$

(utiliser le fait que G est continue sur $[0, 1]$ et que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$).

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(0) = 1 = F(0)$. Pour $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = (1+x)^{\frac{x+1}{x}} \times \frac{1}{e} = F(x)$.

F est continue sur $[0, 1]$. Soit $x \geq 0$. On écrit

$$|F_n(x) - F(x)| = |e^{G_n(x)} - e^{G(x)}| \quad (4)$$

On a d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|F_n(x) - F(x)| \leq e^{G_n(x)} |G_n(x) - G(x)| \leq e^{G_n(x)} \times \frac{x}{2n} \quad (5)$$

Si $f(t) = \ln(1+tx)$, on a $f'(t) = \frac{x}{1+tx} \geq 0$. Donc f est croissante et $G_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(1+x)$. Finalement,

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{x(1+x)}{2n} \quad (6)$$

On a donc convergence uniforme sur $[0, A]$ pour tout $A \geq 0$. ■

Solution 2.

1. Si $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| \quad (7)$$

Ainsi, si $|x| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n(x)$ converge absolument. Si $|x| > 1$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|U_{n+1}(x)| > |U_n(x)|$, donc $(U_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 : $\sum u_n(x)$ diverge.

Si $x = 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on a $\frac{U_{n+1}(1)}{U_n(1)} > 0$ donc $(u_n)_{n \geq N_0}$ garde un signe constant. On a

$$\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (8)$$

Ainsi, d'après la règle de Raabe-Duhamel, on a

$$|U_n(1)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (9)$$

Ainsi, on a convergence si et seulement si $\alpha > 2$.

Si $x = -1$, on a toujours $|U_n(-1)| = |U_n(1)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. Si $\sum u_n(-1)$ converge, on a $\alpha > 0$. Réciproquement, si $\alpha > 0$, on a $|U_n(-1)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\sum u_n(-1)$ est une série alternée. On a donc

$$\left| \frac{u_{n+1}(-1)}{u_n(-1)} \right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} < 1 \quad (10)$$

donc $(|u_n(-1)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante : d'après le critère spéciale des séries alternées, $\sum u_n(-1)$ converge. Ainsi, $\sum u_n(-1)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

2. Supposons la convergence uniforme sur $[0, 1[$. Comme pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} u_n(x) = u_n(1)$, d'après le théorème d'interversion des limites, comme il ya convergence uniforme au voisinage de 1, $\sum u_n(1)$ converge. Donc d'après ce qui précède, on a $\alpha > 2$.

Réciproquement, si $\alpha > 2$, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|u_n(x)| \leq |u_n(1)|$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). Donc on a convergence normale sur $[0, 1]$.

3. Supposons convergence uniforme sur $] -1, 0]$. Comme pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} u_n(x) = u_n(-1)$. D'après le théorème d'interversion des limites, comme il y a convergence uniforme au voisinage de -1 , $\sum u_n(-1)$ converge. D'après ce qui précède, on a $\alpha > 0$.

Réciproquement, si $\alpha > 0$, soit $x \in [-1, 0]$, $\sum u_n(x)$ est alternée dont le terme général décroît en valeur absolue (et tend vers 0). Donc pour tout $N \geq 1$, on a

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| \leq |u_N(x)| \leq |u_N(-1)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (11)$$

On a donc convergence uniforme de $\sum u_n(x)$ sur $[-1, 0]$

■

Remarque 1. Pour rappel, on redonne la règle de Raabe-Duhamel : si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n^2} \quad (12)$$

alors il existe $C > 0$ telle que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\beta}$. En effet, on écrit

$$\ln \left((n+1)^\beta v_{n+1} \right) - \ln \left(n^\beta v_n \right) = \beta \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right) = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (13)$$

donc $(n^\beta v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}_+^* .

Remarque 2. On peut aussi éviter la règle de Raabe-Duhamel. On forme

$$\ln(|u_n(1)|) = \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{2k-1}{2k-1+\alpha} \right| = -\frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \underset{k \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{k^2} \right) = -\frac{\alpha}{2} \ln(n) - \frac{\gamma\alpha}{2} + K + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (1) \quad (14)$$

donc $|u_n(1)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ avec $C > 0$.

Solution 3. Pour $k \geq \lfloor x \rfloor$, on a

$$\arctan(k+x) - \arctan(k) \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad (15)$$

On a

$$f_k(x) = \arctan \left(\frac{x}{1+k(k+x)} \right) = \arctan \left(\frac{x}{k^2} + \underset{k \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{k^2} \quad (16)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$ converge absolument et f définie sur \mathbb{R} . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$f'_k(x) = \frac{1}{1+(k+x)^2} \quad (17)$$

On fixe $[a, b] \subset \mathbb{R}$, pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|k+x| \geq k - |x| \geq k - \underbrace{\max(|a|, |b|)}_{=M} \geq 0 \quad (18)$$

pour $k \geq \lfloor M+1 \rfloor$.

On a de plus $0 \leq f'_k(x) \leq \frac{1}{1+(k-M)^2}$ (terme général d'une série à termes positifs convergente).

On $\sum_{k \geq \lfloor M \rfloor + 1} f'_k$ converge normalement sur $[a, b]$. Enfin,

$$f - \sum_{k=1}^{\lfloor M \rfloor} f_k = \sum_{k=\lfloor M \rfloor + 1}^{+\infty} f_k \quad (19)$$

est donc \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ d'après le théorème de dérivation terme à terme, donc f est \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ (car $\sum_{k=1}^{\lfloor M \rfloor} f_k$ est une somme finie de fonctions \mathcal{C}^1 donc est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}). Ainsi f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^N f_k(n) = \sum_{k=0}^N \arctan(k+n) - \arctan(k) \quad (20)$$

$$= \sum_{k=n}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^N \arctan(k) \quad (21)$$

$$= \sum_{k=N+1}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) \quad (22)$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} n \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) = f(n) \quad (23)$$

On a $\arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k} > 0$, d'après le théorème de comparaison des sommes partielles de séries à termes positifs divergente, donc $f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. Par ailleurs, f est croissante sur \mathbb{R} , donc pour tout $x \geq 0$, on a

$$\ln|x| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x) \quad (24)$$

donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$. ■

Solution 4. Soit $t > 0$, on a $\ln(1 - e^{-nt}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-nt}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} -e^{nt} = 0$ (terme général d'une série à termes positifs convergente car $t > 0$).

On définit

$$\begin{aligned} g_+ : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\ln(1 - e^{-xt}) \geq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

On a $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_t(x)$. De plus, $g'_t(x) = -\frac{te^{-xt}}{1-e^{-xt}} \leq 0$. g_+ est décroissante, et on a

$$\int_n^{n+1} g_+(x) dx \leq g_+(x) \leq \int_{n-1}^n g_+(x) dx \quad (26)$$

On somme de $n = 1$ à $+\infty$ (on admet l'existence pour $n = 0$). On obtient

$$-\ln(1 - e^{-xt}) = \int_1^{+\infty} g_+(x) dx \leq -f(t) \leq \int_0^{+\infty} -\ln(1 - e^{-xt}) dx \quad (27)$$

On pose $u = xt$ et $dx = \frac{du}{t}$ car $t > 0$. On a

$$\int_1^{+\infty} -\ln(1 - e^{-xt}) dx = \frac{1}{t} \int_t^{+\infty} -\ln(1 - e^{-u}) du \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t} I \quad (28)$$

et

$$\int_0^{+\infty} -\ln(1 - e^{-xt}) dx = \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} -\ln(1 - e^{-u}) du = \frac{I}{t} \quad (29)$$

donc

$$\boxed{f(t) \underset{t \rightarrow +0^+}{\sim} -\frac{I}{t}} \quad (30)$$

■

Solution 5.

1. On a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2}$ donc

$$\left| \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \right| \leq \frac{1}{2^{p+1}}, \quad (31)$$

et $g_n(x)$ est définie. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} F_p : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \end{aligned} \quad (32)$$

On a $|F_p(n)| \leq \frac{1}{2^{p+1}}$ et pour p fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_p(n) = 0$. Donc $\sum_{p \geq 0} F_p$ converge normalement sur \mathbb{N} . D'après le théorème d'interversion des limites, on a

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.} \quad (33)$$

2. S'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{p_0} \in [a, b]$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_{p_0} + \frac{1}{n}$ ou $a_{p_0} - \frac{1}{n} \in [a, b]$ et $g_n(a_{p_0} \pm \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{2^{p_0+1}}$ (série à termes positifs).

Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \notin [a, b]$, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{p=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$0 \leq \sum_{p=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (34)$$

Notons $\alpha) \min_{\substack{0 \leq p \leq N_0 \\ x \in [a, b]}} |x - a_p| > 0$. Pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $p \in [0, N_0]$, $|x - a_p| \geq \alpha$ et il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\frac{1}{n} \leq \alpha$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $p \in [0, N_0]$, $f_n(x - a_p) \leq f_n(\alpha)$ et

$$0 \leq \sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \leq \sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (35)$$

Ainsi, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, pour tout $x \in [a, b]$, $\sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in [a, b]$, $0 \leq g_n(x) \leq \varepsilon$. D'où le résultat. ■

Solution 6. f_n est définie car $\frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Soit $a > 0$. Sur $[-a, a]$, $|f_n(x)| \leq \frac{|a|}{n^2}$, terme général d'une série à termes positifs convergente. Il y a donc convergence normale sur $[-a, a]$, et f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc f l'est aussi. Soit $g_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$. On a $g'_n(x) = -\frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$ et pour tout $x \in [-a, a]$, $|g'_n(x)| \leq \frac{2|a|}{n^4}$. Il y a à nouveau convergence normale sur $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et donc $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est \mathcal{C}^1 et donc f aussi.

Sur $[-1, 1]$, on peut intervertir les limites :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0.} \quad (36)$$

Fixons $x > 0$, on pose $\psi_x(t) = \frac{x}{x^2+t^2}$. ψ_x est positive décroissante. Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_n^{n+1} \psi_x(t) dt \leq \psi_x(n) \leq \int_{n-1}^n \psi_x(t) dt. \quad (37)$$

On a

$$\int_A^X \frac{x dt}{x^2 + t^2} = \int_A^X \frac{\frac{dt}{x}}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{A}{x}\right). \quad (38)$$

Ainsi, en sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_1^{+\infty} \psi_x(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_x(n) \leq \int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt. \quad (39)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

En 0, on a $f(x) = xg(x)$ avec convergence normale sur \mathbb{R} pour g , g continue sur \mathbb{R} et $g(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \frac{\pi^2}{6}.} \quad (40)$$

■

Solution 7. Les f_n sont M -Lipschitziennes. Soient $x, y \in [a, b]$. On a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|$ donc par passage à la limite, f est M -Lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$, on considère la subdivision (a_1, \dots, a_N) de $[a, b]$ de pas δ . Soit $x \in [a, b]$ et $K \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tel que $x \in [a_K, a_{K+1}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_K)| + |f_n(a_K) - f(a_K)| + |f(a_K) - f(x)| \leq M\delta + |f_n(a_K) - f(a_K)| + M\delta. \quad (41)$$

On s'impose $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3M}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $n \geq N_1$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. ■

Remarque 3. L'existence de M est nécessaire, cf $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = x^n$.

Remarque 4. f n'est pas nécessairement dérivable, cf $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ et

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \right| \leq 1. \quad (42)$$

Solution 8. Si $x = 2$, on a

$$f_n(2) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{n}\right)^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \left[\ln \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right) \right]_0^1 = \ln(2). \quad (43)$$

Si $x < 2$, on a pour tout $n \geq 1$, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leq \frac{1}{n}. \quad (44)$$

On somme pour obtenir

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leq f_n(x) \leq 1 \quad (45)$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1.} \quad (46)$$

De plus, soit $a < 2$, pour tout $x \in]-\infty, a]$, on a

$$0 \leq 1 - f_n(x) \leq 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leq 1 - \frac{n}{\sqrt{n + n^a}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (47)$$

Donc $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 1 sur $] -\infty, a]$.

Si $x > 2$, soit $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} + \sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor + 1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}. \quad (48)$$

On a

$$\sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leq \frac{n^\alpha}{\sqrt{1 + n^2}} n^{\alpha-1}, \quad (49)$$

et

$$\sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor + 1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^{x\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^{x\alpha-2}}}. \quad (50)$$

On choisit α tel que $\alpha < 1$ et $x\alpha - 2 > 0$ (possible car $x > 2$). Si $a > 2$, pour $\alpha = (1 + \frac{2}{a}) \times \frac{1}{2}$, si $x \geq a$, on a $\frac{2}{x} \leq \frac{2}{a} < \alpha < 1$ donc

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + n^{x\alpha-2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (51)$$

Il y a donc convergence uniforme vers 0 sur $[a, +\infty[$. ■

Solution 9.

1. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n \times n \times \dots \times n} \leq \frac{1}{k!}. \quad (52)$$

Ainsi,

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} - f_n(a) \right\| = \left\| \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} \right\|, \quad (53)$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) \|a\|^k, \quad (54)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{\|a\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|a\|}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (55)$$

On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = \exp(a)$.

Soit $R \geq 0$, pour tout $a \in \overline{B(0, R)}$,

$$\|\exp(a) - f_n(a)\| \leq \left\| \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right\| \quad (56)$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) R^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (57)$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\exp(a)$ sur les compacts.

2. D'après ce qui précède, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $z \mapsto \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z)$. Et on a convergence sur les compacts.

3. On peut déjà dire que $\deg(P_n) \leq 2n + 1$. Le coefficient en X^{2n+1} de P_n est

$$\alpha = \frac{\left(\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(\frac{-i}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2i} = \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}} \times \frac{(-1)^n}{2i} [i - (-i)] \neq 0 \quad (58)$$

et donc $\deg(P_n) = 2n + 1$.

Le coefficient en X est $\frac{(2+1)\left(\frac{i}{2n+1} - \left(\frac{-i}{2n+1}\right)\right)}{2i} = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$P_n(z) = 0 \iff \left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1}, \quad (59)$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad 1 - \frac{iz}{2n+1} = \left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right) \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right), \quad (60)$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad 1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right) = \frac{iz}{2n+1} \left(1 + \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right), \quad (61)$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad z = (2n+1) \times (-i) \times \frac{(-2i) \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, \quad (62)$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad z = -(2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right). \quad (63)$$

On a

$$P_n = aX \times \prod_{k=1}^{2n} \left(X + (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right), \quad (64)$$

$$= aX \prod_{k=1}^n \left(X + (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right) \times \prod_{k=n+1}^{2n} \left(X + (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right), \quad (65)$$

$$= aX \prod_{k=1}^n \left(X^2 - (2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right), \quad (66)$$

$$= a'X \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right). \quad (67)$$

Comme le coefficient de X vaut 1, on a $a' = 1$, d'où le résultat.

4. Soit $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(p) = a_{n,p}$. D'après (i), $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{N} , et d'après (ii), on peut intervertir et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$.
5. \tan est impaire, et $\tan'' = 2 \tan(1 + \tan^2) > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc \tan est convexe et $\tan(t) > t$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, et c'est bon par imparité.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \leq \frac{x^2}{k^2 \pi^2}$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $\frac{x^2}{k^2 \pi^2} \leq \frac{1}{2}$, alors pour tout $n \geq k_0$, pour tout $k \in \llbracket k_0, n \rrbracket$, $1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \geq \frac{1}{2} > 0$. Alors

$$0 \leq -\ln \left(\prod_{k=k_0}^n \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right) \right) = \sum_{k=k_0}^n -\ln \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right). \quad (68)$$

On a

$$0 \leq -\ln \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right) \leq -\ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right) = O_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2} \right), \quad (69)$$

terme général d'une série à termes positifs convergente.

Si $g_n(x) = -\ln \left(\prod_{k=k_0}^n \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right) \right)$, alors $g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_{n,k}$ où l'on définit pour tout $k \geq k_0, n \geq k_0$,

$$a_{n,k} = -\ln \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right) \quad (70)$$

si $k \leq n$, et 0 sinon. On pose aussi $\alpha_k = -\ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right)$. On a bien $|a_{n,k}| \leq \alpha_k$ terme général d'une série à termes positifs convergente.

Pour $k \geq k_0$ fixé, pour $n \geq k$, on a

$$a_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha_k. \quad (71)$$

On peut donc appliquer ce qui précède, et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \alpha_k, \quad (72)$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=k_0}^n \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right) = \prod_{k=k_0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right). \quad (73)$$

Soit $R_n(x) = x \prod_{k=1}^{k_0} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \prod_{k=1}^{k_0} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)}. \quad (74)$$

■

Remarque 5. En identifiant le coefficient en x^3 , on obtient

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2}, \quad (75)$$

d'où

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (76)$$

De même, en identifiant le coefficient en x^5 , on obtient

$$\frac{1}{120} = \sum_{\substack{(k_1, k_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ k_1 \neq k_2}} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \pi^4} = \sum_{(k_1, k_2) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \pi^4} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4 \pi^4} = \zeta(2)^2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4 \pi^4}. \quad (77)$$

On trouve donc

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}. \quad (78)$$

De la même façon, on montre de manière générale que

$$\zeta(2p) = a_p \pi^{2p}, \quad (79)$$

avec $a_p \in \mathbb{Q}$.

Solution 10.

1. Soit $\alpha \in [a, b]$. f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. On a $f([0, 1]) \subset [0, \frac{1}{2}]$. Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f(x) \geq x$. $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est strictement croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, donc converge vers $\frac{1}{2}$ seul point fixe de f (continue). Ainsi (f_n) converge simplement vers $\frac{1}{2}$ sur $[a, b]$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$\left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - f_n(x) \leq \max\left(\frac{1}{2} - f_n(a), \frac{1}{2} - f_n(b)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (80)$$

Donc $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

On a $f_n(0) = f_n(1) = 0 \neq \frac{1}{2}$, on n'a donc pas la continuité de la limite simple. Donc il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0, 1]$ (même sur $]0, 1[$).

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Q_2 est dense dans \mathbb{R} , donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe $(\alpha_{k,m})_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_2^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n \alpha_{k,m} = a_k$. Soit $Q_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,m} X^k \in \mathbb{Q}_2[X]$. Pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$|P(x) - Q(x)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k - \alpha_{k,m}| |x|^k \leq \sum_{k=0}^n |a_k - \alpha_{k,m}| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad (81)$$

donc il existe $M \in \mathbb{N}$, si $Q = Q_M$, alors $\|P - Q\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\|f - P\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Si $Q = \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{2^{n_k}} X^k$, soit pour $m \in \mathbb{N}$, $Q_m = \sum_{k=0}^n p_k (f_m)^{n_k} X^k$ converge uniformément vers Q sur $[a, b]$ (n est fixé), et $Q_m \in \mathbb{Z}[X]$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathbb{Z}[X]$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|Q_{n_0} - Q\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Si $A = Q_{n_0} \in \mathbb{Z}[X]$, on a bien $\|f - A\|_{\infty, [a, b]} \leq \varepsilon$.

Sur $[0, 1]$, on n'a pas de suite de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f = \frac{1}{2}$ car pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(0) \in \mathbb{Z}$.

■

Solution 11.

1. Par croissance des taux d'accroissements (en un point fixé) :

$$\frac{u_n(y) - u_n(x)}{y - x} \leq \frac{u_n(y) - u_n(b)}{y - b} \leq \frac{u_n(\beta) - u_n(b)}{\beta - b}, \quad (82)$$

et de même

$$\frac{u_n(y) - u_n(x)}{y - x} \geq \frac{u_n(\alpha) - u_n(a)}{\alpha - a}. \quad (83)$$

Finalement, on a

$$\left| \frac{u_n(x) - u_n(y)}{x - y} \right| \leq \max \left(\left| \frac{u_n(\alpha) - u_n(a)}{\alpha - a} \right|, \left| \frac{u_n(\beta) - u_n(b)}{\beta - b} \right| \right), \quad (84)$$

qui sont des suites bornées car convergent. D'où l'existence de A .

2. Par passage à la limite (simple), u est A -Lipschitzienne sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq N}$ une subdivision de pas d de $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n(x) - u(x)| \leq |u_n(x) - u_n(a_k)| + |u_n(a_k) - u(a_k)| + |u(a_k) - u(x)|, \quad (85)$$

$$\leq 2Ad + |u_n(a_k) - u(a_k)|. \quad (86)$$

On choisit d tel que $2Ad \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par convergence simple, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $|u_n(a_k) - u(a_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq N_0$, pour tout $x \in [a, b]$, $|u_n(x) - u(x)| \leq \varepsilon$. Donc (u_n) converge uniformément vers u sur $[a, b]$. ■

Remarque 6. *C'est faux si $I = [a, b]$, cf $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = x^n$.*

Solution 12. Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f . Si φ est une fonction polynômiale, $\varphi = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$. Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, (f_n^k) converge uniformément vers f^k sur $[a, b]$. Par combinaison linéaire, $(\varphi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi \circ f$ sur $[a, b]$. $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée (car converge), donc il existe $A \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq A$ et $\|f\|_\infty \leq A$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\|\varphi - P\|_{\infty, [-A, A]} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ d'après le théorème de Weierstrass. Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \leq |(\varphi \circ f_n)(x) - (P \circ f_n)(x)| \quad (87)$$

$$+ |P \circ f_n(x) - P \circ f(x)| + |P \circ f(x) - \varphi \circ f(x)|, \quad (88)$$

$$\leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \|P \circ f_n - P \circ f\|_{\infty, [a, b]} \quad (89)$$

et le dernier terme tend vers 0 donc est plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$ pour n suffisamment grand. D'où le résultat. ■

Remarque 7. *Pour la deuxième partie du raisonnement, on peut aussi invoquer la continuité uniforme de φ sur $[-A, A]$.*

Solution 13.

1. Pour $t \geq 0$, on a $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{1+n^2}$ donc on a convergence normale sur \mathbb{R}^+ . Pour $t < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = +\infty$ donc la série diverge grossièrement. Ainsi, $E = \mathbb{R}_+$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et on a convergence normale donc f est continue sur E . Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_0(t) = 1$. On peut intervertir par convergence normale, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est \mathcal{C}^∞ sur E . Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n^{(k)}(t) = \frac{(-n)^k e^{-nt}}{1+n^2}. \quad (90)$$

Soit $\alpha > 0$. Pour $t \geq \alpha$, on a

$$|f_n^{(k)}(t)| \leq \frac{e^{-n\alpha}}{1+n^2} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right). \quad (91)$$

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$, donc f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

On a pour tout $t > 0$,

$$f''(t) + f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{1}{1-e^{-t}}. \quad (92)$$

■

Solution 14.

1. On a $u_n(0) = 0$. Soit $x > 0$, on a $|u_n(x)| = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ donc on a bien convergence simple sur $[0, 1]$.
2. On a

$$u_n(x) = \frac{(1-nx)e^{-nx}}{n^a}. \quad (93)$$

Ainsi, u_n est croissante de 0 à $\frac{1}{n}$ et décroît de $\frac{1}{n}$ à 1, et on a $u_n(0) = 0$, $u_n(1) = \frac{e^{-n}}{n^a}$ et $u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{en^{a+1}} = \|u_n\|_{\infty, [0,1]}$. On a donc convergence normale si et seulement si $a > 0$.

3. Pour $a = 1$ (respectivement $a = 2$), S est continue par convergence normale car u_n est \mathcal{C}^∞ pour tout $n \geq 1$. Soit $x > 0$, si $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ (respectivement $h_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$) et $g(x) = \frac{S(x)}{x}$ (respectivement $h(x) = \frac{S(x)}{x}$), soit $\alpha \in]0, 1]$ et $x \in [\alpha, 1]$, on a

$$|g'_n(x)| = |e^{-nx}| \leq e^{-n\alpha} \quad (94)$$

(respectivement

$$|h'_n(x)| \leq \left| \frac{e^{-n\alpha}}{n} \right| \quad (95)$$

et $|h''_n(x)| \leq e^{-n\alpha}$). Donc $\sum g'_n$ (respectivement $\sum h'_n$ et $\sum h''_n$) converge normalement sur $[\alpha, 1]$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$ donc g est \mathcal{C}^1 (respectivement h est \mathcal{C}^2) sur $]0, 1]$.

Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -e^{-nx} = \frac{-e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \quad (96)$$

et donc (par changement de variable dans l'intégrale)

$$g(x) = g(1) + \ln(1 - e^{-1}) - \ln(1 - e^{-x}). \quad (97)$$

puis $S(x) = xg(x)$. On fait de même pour $a = 2$.

■

Solution 15. Si $x > 0$, on a $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{+nx^{\frac{3}{2}}} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)$. Ainsi, le domaine de f est $]0, +\infty[$.

Chaque f_n est continue sur \mathbb{R}_+^* . Soit $a > 0$, pour $x \geq a$, pour $n \geq 1$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + na^{\frac{3}{2}}}, \quad (98)$$

et le terme de droite est le terme général d'une série à termes positifs convergente indépendante de x .

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Donc f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

On a

$$0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \times \zeta \left(\frac{3}{2} \right), \quad (99)$$

donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Fixons $x > 0$, soit

$$\begin{aligned} g_x : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{1+tx^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (100)$$

g est continue positive et décroissante. Elle est intégrable sur \mathbb{R}_+^* car est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand $t \rightarrow 0$, et est un $O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$g_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} g_x(t) dt \leq g_x(n) \quad (101)$$

Ainsi, en sommant, on obtient

$$f(x) - \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{1}{1+(n+1)x^{\frac{3}{2}}} \leq I(x) = \int_1^{+\infty} g_x(t)dt \leq f(x). \quad (102)$$

Pour calculer $I(x)$, on fait les changements de variables $u = \sqrt{t}$ puis $v = ux^{\frac{3}{4}}$ pour avoir

$$I(x) = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} \int_{x^{\frac{3}{4}}}^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{x^{\frac{3}{4}}}. \quad (103)$$

Ainsi, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{x^{\frac{3}{4}}}$. Donc f est intégrale sur $]0, 1]$. Finalement, f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . ■

Remarque 8. On peut aussi former, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{n}(1+nx^{\frac{3}{2}})} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^{\frac{3}{2}}}, \quad (104)$$

en faisant le changement de variables $u = n^{\frac{2}{3}}x$. u_n est alors le terme général d'une série à termes positifs convergente, et on peut intervertir les signes \sum et \int .

Solution 16.

1. Si $x < 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} = +\infty. \quad (105)$$

Si $x = 0$, on a $S(0) = 0$. Si $x > 0$, on a $\frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} = \left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc on a convergence simple sur \mathbb{R}_+ .

2. On cherche $\sup_{x \geq 0} |f_n(x)|$. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$f'_n(x) = \frac{(1-nx)}{\ln(n)} e^{-nx}. \quad (106)$$

Ainsi, le sup est atteint en $x = \frac{1}{n}$. Comme $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne^{\ln(n)}}$ est le terme général d'une série à termes positifs divergente (série de Bertrand), on n'a pas convergence normale sur \mathbb{R}_+ .

Soit $N \geq 2$, $x \geq 0$. On a

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{x}{\ln(N)} \sum_{n=N}^{+\infty} e^{-nx}, \quad (107)$$

$$\leq \frac{x}{\ln(N)} \frac{e^{-Nx}}{1-e^{-x}}, \quad (108)$$

$$\leq \frac{xe^{-x}}{\ln(N)(1-e^{-x})} \times \frac{e^x}{e^x}, \quad (109)$$

$$\leq \frac{x}{\ln(N)(e^x-1)}. \quad (110)$$

$x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$, tend vers 1 quand $x \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Donc cette fonction est bornée par $M \geq e$ et

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{M}{\ln(N)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (111)$$

On a donc convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

3. On a $S(x) = x \times \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} = x \times \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x)$. g_n est \mathcal{C}^1 , et pour $a > 0$, $x \geq a$ et $n \geq 2$, on a $g'_n(x) = -\frac{ne^{-nx}}{\ln(n)}$ d'où $|g'_n(x)| \leq \frac{ne^{-nx}}{\ln(n)} \leq \frac{ne^{-na}}{\ln(n)}$ qui est le terme général d'une série à termes positifs convergente car $a > 0$. Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} g'_n$ converge normalement sur $[a, \infty[$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n$ convergent simplement sur \mathbb{R}_+ donc $\sum_{n \geq 2} g_n$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

On a $\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x) = \tau(x)$. τ est décroissante car les g_n le sont, donc $\tau(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} l \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Comme $g_n \geq 0$, pour tout $N \geq 2$ et $x > 0$, on a $\sum_{n=2}^N g_n(x) \leq \tau(x)$. Quand $x \rightarrow 0$, on a donc

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln(n)} \leq l, \quad (112)$$

et quand $N \rightarrow +\infty$, on a $l = +\infty$. Ainsi, S n'est pas dérivable à droite en 0.

4. On a $x^k S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{k+1} e^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} k_n(x)$. On a

$$k'_n(x) = \frac{x^k e^{-nx}}{\ln(n)} (k+1-nx), \quad (113)$$

donc le sup est atteinte en $x = \frac{k+1}{n}$. Pour tout $x \geq K+1$, on a $|k_n(x)| \leq |k_n(K+1)| \leq \frac{(k+1)^{k+1} e^{-(k+1)n}}{\ln(n)} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. Donc $\sum_{n \geq 2} k_n$ converge normalement sur $[K+1, +\infty[$ et on peut intervertir les limites. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k S(x) = 0.} \quad (114)$$

■

Solution 17.

1. Q_k est \mathcal{C}^∞ , 2π -périodique, paire, $0 \leq Q_k(t) \leq c_k$, $Q_k(-\pi) = Q_k(\pi) = 0$, $Q_k(0) = c_k$. Q_k est décroissante sur $[0, \pi]$. Pour tout $t \in [\delta, \pi]$, $0 \leq Q_k(t) \leq c_k \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2} \right)^k$. On a $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2} \right)^k dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(u) du \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ (via les intégrales de Wallis). Ainsi, c_k est équivalent à $\sqrt{k\pi}$ quand $k \rightarrow +\infty$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2} \right)^k = 0$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_k(t) = 0.} \quad (115)$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$|P_k(t) - f(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_k(s)ds \right|, \quad (116)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s)ds, \quad (117)$$

car $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s)ds = 1$. f est \mathcal{C}^0 sur $[0, 4\pi]$ donc f est uniformément continue sur $[0, 4\pi]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $(t, t') \in [0, 4\pi]^2$, $|t - t'| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leq \varepsilon$. Alors pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, si $|t - t'| \leq \min(\delta_1, 2\pi)$, alors $|f(t) - f(t')| \leq \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur \mathbb{R} et bornée sur \mathbb{R} car continue 2π -périodique.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ ($\delta < \pi$) tel que pour tout $(t, t') \in [0, 4\pi]^2$, $|t - t'| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors on a

$$|P_k(t) - f(t)| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} 2 \|f\|_{\infty} Q_k(s)ds}_{\leq 2\|f\|_{\infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} Q_k(s)ds}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}, \quad (118)$$

donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|P_k(t) - f(t)| \leq \varepsilon$. Donc P_k converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

3. Montrons que $P_k \in F$. On a

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds, \quad (119)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)Q_k(t-u)du, \quad (120)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{c_k}{2^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) (1 + \cos(t-u))^k du, \quad (121)$$

$$= \frac{c_k}{2^{k+1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{m=-k}^k \alpha_m e^{i\text{Im}(t-u)} du, \quad (122)$$

où la dernière ligne est obtenue en développant $\cos(t-u) = \frac{e^{i(t-u)} + e^{i(u-t)}}{2}$. Ainsi,

$$P_k(t) = \sum_{m=-k}^k \left(\frac{c_k}{2^{k+1}\pi} \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-imu} du \right) e^{imt} \in F. \quad (123)$$

Donc F est dense dans E . ■

Remarque 9. Plus généralement, on peut remplacer la suite Q_k par une « approximation de l'unité ».

Il faut une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

i) $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k est continue et positive,

ii) $\int_{\mathbb{R}} f_k = 1$,

iii) $\forall \delta > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} f_k = 0$.

Alors si f est uniformément continue et bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , $(f \star f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Remarque 10. Soit

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{124}$$

f est continue, on lui associe $g = f \circ \cos$, qui est continue 2π -périodique. Ainsi, $(P_k \star g)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur \mathbb{R} et

$$(Q_k \star g)(t) = \frac{c_k}{2^{k+1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t - u))^k du, \tag{125}$$

qui est une fonction de t parie car g l'est. On a $(1 + \cos(t - u))^k = (1 + \cos(t) \cos(u) + \sin(t) \sin(u))^k$.

En développant, on a

$$(Q_k \star g)(t) = A_k(\cos(t), \sin(t)) = B_k(\cos(t)), \tag{126}$$

où $A_k \in \mathbb{C}[X, Y]$ (polynôme à deux variables) et $B \in \mathbb{C}[X]$ par parité. Ainsi, $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$: on vient de redémontrer le théorème de Weierstrass.

Solution 18.

1. Si (u_n) est croissante, on pose $f_n = u - u_n$. Sinon, on pose $f_n = u_n - u$.
2. f_n est continue et $F_{n,\varepsilon} = f_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ donc $F_{n,\varepsilon}$ est fermé dans K , donc fermé.

Si $x \in F_{n+1,\varepsilon}$, on a $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \varepsilon$ donc $x \in F_{n,\varepsilon}$.

Soit $x \in K$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq f_N(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc $x \notin F_{n,\varepsilon}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_{n,\varepsilon} \neq \emptyset$, alors soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_{n,\varepsilon}$. K étant compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = x \in K$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(k) \geq n$. $x_{\varphi(k)} \in F_{\varphi(k),\varepsilon} \subset F_{n,\varepsilon}$. Alors, quand $k \rightarrow +\infty$, $x \in F_{n,\varepsilon}$ (fermé) donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$ ce qui est absurde.

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_{N,\varepsilon} = \emptyset$ et pour tout $n \geq N$, $F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. Donc pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in K$, $f(x) < \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur K .

3. f est continue sur un compact donc son maximum est atteint et x_n existe. $(\|f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive, donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \geq 0$. Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in K$. Si $l > 0$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{\varphi(N_0)}(x) \leq \frac{l}{2}$. Par continuité de $f_{\varphi(N_0)}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in \overline{B(x, \alpha)}$, $f_{\varphi(N_0)}(y) < l$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $x_{\varphi(n)} \in \overline{B(x, \alpha)}$ donc pour tout $n \geq N_1$, $f_{\varphi(N_0)}(x_{\varphi(n)}) < l$. Pour $n = \max(N_0, N_1)$, on a

$$l \leq f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leq f_{\varphi(N_0)}(x_{\varphi(n)}) < l, \quad (127)$$

ce qui est absurde. Donc $l = 0$ et (f_n) converge uniformément sur K .

■