

*Exercices  $MP/MP^*$*   
*Réduction des endomorphismes*

**Exercice 1.** Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et pour  $(A, B) \in E^2$  et

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto AM \end{aligned} \quad (1)$$

et

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto MB \end{aligned} \quad (2)$$

et  $h = f \circ g$ .

1. Montrer que  $f$  (respectivement  $g$ ) est diagonalisable si et seulement si  $A$  (respectivement  $B$ ) l'est.
2. Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  deux bases de  $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .  
Montrer que  $(X_i Y_i^T)_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de  $E$ .
3. On suppose que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables. Montrer que  $h$  l'est. A-t-on la réciproque ?

**Exercice 2** (Lemme des noyaux généralisé). Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$  unitaires. Soient  $D = P \wedge Q$ ,  $M = P \vee Q$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer les différentes assertions suivantes :

1.  $\ker D(f) = \ker P(f) \cap \ker Q(f)$ .
2.  $\ker M(f) = \ker P(f) + \ker Q(f)$ .
3.  $\operatorname{Im} D(f) = \operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f)$ .
4.  $\operatorname{Im} M(f) = \operatorname{Im} P(f) \cap \operatorname{Im} Q(f)$ .

**Exercice 3.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 - 4A + 5I_n = 0$ .  $A$  est-elle inversible ? Que dire de  $A$  ? Que dire de  $n$  ? Calculer les puissances de  $A$  ?

**Exercice 4.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite stochastique si et seulement si

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que  $1 \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ .
2. Soit  $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , montrer que  $|\lambda| \leq 1$ .
3. Soit  $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et  $x$  un vecteur propre associé.  
Montrer que si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{i,i} > 0$  alors  $\lambda = 1$ .
4. Soit  $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  telle que  $|\lambda| = 1$ . Montrer que  $\lambda$  est une racine de l'unité.
5. Reconnaître les matrices stochastiques dont toutes les valeurs sont de module 1.

**Exercice 5.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$  et

$$\begin{aligned} \Phi_{A,B} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AM - MB \end{aligned} \quad (3)$$

1. Déterminer  $\text{Sp}(\Phi_{A,B})$  en fonction de  $\text{Sp}(A)$  et  $\text{Sp}(B)$ .
2. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables,  $\Phi_{A,B}$  l'est aussi.

**Exercice 6.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\theta \in \mathbb{C}$ . Soit  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = \theta MA\}$ .

1. Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , pour tout  $M \in F$ , on a  $P(A)M = MP(\theta A)$ . Établir une relation analogue portant sur  $P(M)$ .
2. On suppose  $A$  diagonalisable. Quelle est l'action de  $F$  sur les sous-espaces propres de  $A$ ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  pour que  $F = \{0\}$ .
3. De même dans le cas général (raisonner sur  $\ker(A - \lambda I_n)^k$ ).

**Exercice 7.** Réduire sur  $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 8.** Soit  $0 < a_1 < \dots < a_n$  et  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{i,i} = 0$  et si  $i \neq j$ ,  $a_{i,j} = a_j$ .

1. Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$  si et seulement si

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$$

2.  $A$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 9.** Soit  $G$  le sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  engendré par les matrices diagonalisables inversibles. Montrer que  $G = GL_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 10.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$  et  $p \geq 2$ . Montrer que  $u^p$  est diagonalisable si et seulement si  $u$  est diagonalisable et  $\ker(u) = \ker(u^2)$ .

**Exercice 11** (Matrice circulante). Soit  $n \geq 1$ ,  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  et

$$A(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Donner les éléments propres de  $A(a_0, \dots, a_{n-1})$ . Est-elle diagonalisable? Calculer son déterminant.

**Exercice 12.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent tel que  $\dim(\ker(f)) = 1$ . Montrer que  $f^{n-1} \neq 0$  et qu'il existe  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .

**Exercice 13** (Endomorphisme cyclique). Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(V)$ . Montrer qu'il existe  $x \in V$  tel que  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  soit une base de  $V$  si et seulement si les sous-espaces propres de  $u$  sont de dimension 1.

**Exercice 14.** Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $d$ .

1. Pour  $f \in \mathcal{L}(V)$ , montrer qu'il existe  $r(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{rg}(f^n)$ .
2. Si  $f$  et  $g$  commutent, montrer que  $r(f+g) \leq r(f) + r(g)$ . Et si  $f$  et  $g$  ne commutent pas ?
3. Exprimer  $r(f)$  en fonction du degré du polynôme caractéristique de  $f$ .

**Exercice 15.** Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{G}_q = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^q = I_n\}$ . Quels sont les points isolés de  $\mathcal{G}_q$  ?

**Exercice 16.** Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associée à  $M$ . Trouver tous les sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $u$ .

**Exercice 17.** Soit

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & I_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 1 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

1.  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Donner ses éléments propres.

**Exercice 18.** Soit  $G$  un sous-groupe borné de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que pour tout  $M \in G$ ,  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$  et  $M$  est diagonalisable. Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que si  $\|M - I_n\| < \alpha$  alors  $G = \{I_n\}$ .

**Exercice 19.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associée à  $A$ .

1. Trouver tous les sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $u$ .
2. Existe-t-il  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$  ?

**Exercice 20.** Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  tel que  $A^3 + A^2 + A + I_3 = 0$  et  $A \neq -I_3$ . Montrer que  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 21.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $x \in E$ .

1. Montrer qu'il existe un unique  $P_x$  unitaire tel que pour tout  $A \in P_x \mathbb{K}$ ,  $A(f)(x) = 0$ .
2. Montrer que  $\mu_f$  (polynôme minimal de  $f$ ) est égal à

$$\mu_f = \bigvee_{x \in E} P_x$$

3. Soit  $(x, y) \in E^2$ , montrer que si  $P_x \vee P_y = 1$  alors  $P_{x+y} = P_x P_y$ .
4. Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $P_x = \mu_f$ .
5. Montrer qu'il existe  $v \in E$ , tel que  $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\deg(\mu_f) = n$  (donc le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique).

**Exercice 22.** Soit  $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ , pour  $s = (s_n)_{n \geq 1} \in S$ , on définit

$$s^* = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k \right)_{n \geq 1}$$

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \varphi : S &\rightarrow S \\ s &\mapsto s^* \end{aligned} \tag{4}$$

est un automorphisme.

2. Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ .

**Exercice 23** (Disques de Gershgorin). Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note, pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $L_i = \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|$  et  $C_j = \sum_{k \neq j} |a_{k,j}|$ . Soit  $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq L_i\}$  et  $S_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{j,j}| \leq C_j\}$ .

1. Montrer que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \left[ \left( \bigcup_{i=1}^n D_i \right) \cap \left( \bigcup_{j=1}^n S_j \right) \right]$
2. Montrer que si  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , il existe  $i_1 \neq i_2 \in \{1, \dots, n\}^2$  tels que

$$|\lambda - a_{i_1, i_1}| \times |\lambda - a_{i_2, i_2}| \leq L_{i_1} \times L_{i_2}$$

**Exercice 24.** Soit

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & 0_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Réduire  $A$ .

**Exercice 25.** Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  diagonalisables. Montrer que  $f$  et  $g$  ont les mêmes sous-espaces propres si et seulement s'il existe  $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tels que  $f = P(g)$  et  $g = Q(f)$ .

**Exercice 26.** Soit  $G$  un sous-groupe fini abélien de  $GL_2(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  et donner un exemple d'un tel sous-groupe dans chaque cas.

**Exercice 27.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.

**Exercice 28.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 29.** Soit  $n \geq 1$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ .

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_n \\ \vdots & & x_{n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ x_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

2. La suite  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ?

**Exercice 30.**

1. Donner les valeurs propres et vecteurs propres de

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - nP \end{array} \quad (5)$$

2. Donner les valeurs propres et vecteurs propres de

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - nP'' \end{array} \quad (6)$$

**Exercice 31.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

avec  $a + b + c = 1$  pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$ .

1. Donner le  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ .

2. La suite  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ?

**Exercice 32.** Soit  $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n_2, n_1} & D \end{pmatrix}$$

avec  $B \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n_1, n_2}(\mathbb{C})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$ .

1. Donner une formule pour  $A^p$  pour  $p \in \mathbb{N}$ .
2. Comparer, du point de vue de la divisibilité,  $\mu_A$ ,  $\mu_B \vee \mu_D$  et  $\mu_B \times \mu_D$  (polynômes minimaux).
3. Que dire si  $C = 0$  ?
4. Que dire si  $B = D$  et  $C = I_{n_1}$  ?
5. Trouver une matrice  $A$  telle que  $\mu_A \neq \mu_B \vee \mu_D$  et  $\mu_A \neq \mu_B \times \mu_D$ .

**Exercice 33.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension quelconque et  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On pose  $g = P(f)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $g - \lambda \text{id}_E$  n'est pas inversible. Montrer qu'il existe  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda = P(\mu)$  et  $f - \mu \text{id}_E$  n'est pas inversible. Si  $\lambda \in \text{Sp}(g)$ , montrer qu'il existe  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda = P(\mu)$  et  $\mu \in \text{Sp}(f)$ .

**Exercice 34.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $V \setminus \{0\} \subset GL(E)$ .

1. Montrer que  $\dim(V) \leq \dim(E)$ .
2. Trouver tous les  $V$  possibles pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
3. Trouver tous les  $V$  possibles pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $E = \mathbb{R}^2$ .
4. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $\dim(V) \geq 2$ , montrer qu'il existe  $(f, g) \in V^2$  tel que si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ ,  $A = \text{mat}(f, \mathcal{B})$  et  $B = \text{mat}(g, \mathcal{B})$  alors  $i \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB^{-1})$ .

**Exercice 35.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps quelconque,  $n \geq 1$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a  $\chi_A = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$  (polynôme caractéristique).

1. Montrer qu'il existe  $(M_0, \dots, M_{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^n$  tel que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{com}(\lambda I_n - A)^T = M_0 + \lambda M_1 + \dots + \lambda^{n-1} M_{n-1}$  (où  $\text{com}$  indique la comatrice.)
2. En formant  $(\lambda I_n - A) \text{com}(\lambda I_n - A)^T$ , calculer  $(M_0, \dots, M_{n-1})$  en fonction de  $A, A^2, \dots, A^n$ . En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.
3. Pour les questions suivantes, on suppose que la caractéristique de  $\mathbb{K}$  est 0. Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\chi'_A(\lambda) = \text{Tr}(\text{com}(\lambda I_n - A)^T)$ .
4. En déduire qu'il existe  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $(a_0, \dots, a_{n-1}) = f(\text{Tr}(A), \dots, \text{Tr}(A^n))$ .
5. Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , montrer que si pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$  alors  $\chi_A = \chi_B$ .

**Exercice 36.** On admet que si  $P \in \mathbb{K}[X]$  (avec  $\mathbb{K}$  un corps), il existe  $\mathbb{L}$  sur-corps de  $\mathbb{K}$  tel que  $P$  soit scindé sur  $\mathbb{L}$  avec la caractéristique de  $\mathbb{L}$  égale à la caractéristique de  $\mathbb{K}$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  et  $p$  premier, montrer que  $\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A)[p]$ .

**Exercice 37.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $\rho(u) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|$ . Montrer l'équivalence

- (i) il existe une norme sur  $E$  telle que  $\|u\| < 1$ ,
- (ii)  $\rho(u) < 1$ ,
- (iii)  $\lim_{p \rightarrow +\infty} u^p = 0$ .

**Exercice 38.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$  avec  $A$  diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Montrer l'équivalence

- (i)  $\forall Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \exists h \in \{0, \dots, n-1\}, BA^h Y \neq 0$ ,
- (ii)  $\forall Y$  vecteur propre de  $A$ ,  $BY \neq 0$ ,
- (iii)  $\forall Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\mapsto B \exp(tA)Y \end{aligned} \tag{7}$$

$n$  n'est pas l'application nulle.

**Exercice 39.** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , que dire de  $\left( \|A^p\|^{\frac{1}{p}} \right)_{p \in \mathbb{N}^*}$  où  $\|\cdot\|$  est une norme quelconque sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  ? Et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?

**Exercice 40.** Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  et  $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n \in \mathbb{K}[X]$ . Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $m_{n,j} = -a_{j-1}$ ,  $m_{i,i+1} = 1$  et  $m_{i,j} = 0$  sinon.

1. Calculer  $\chi_M$ , évaluer la dimension de sous-espaces propres. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $P$  pour que  $M$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ .
2. Soit  $y^{(3)} = y'' + y' - y$ , la mettre sous une forme équivalente à  $Y' = AY$  et résoudre.