*Solutions MP/MP**
Espaces euclidiens

Solution 1.

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $XX^\mathsf{T}Y = (X|Y)X$ est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}X$. Donc H_X est la matrice de la réflexion par rapport à $X^\perp$.
2. C'est une conséquence du théorème de réduction.

■

Solution 2.

1. $A \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= 1,\\ ab+ac+bc &= 0,\\ a^3+b^3+c^3-3abc &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$
(vecteurs colonnes unitaires, vecteurs colonnes orthogonaux, déterminant égal à 1). a, b, c racines de $X^3 - X^2 + p$ si et seulement si $X^3 - X^2 + p = (X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - X^2(a+b+c) + X(ab+bc+ac) - abc$ si et seulement
$$\begin{aligned} a+b+c &= 1,\\ ab+bc+cd &= 0,\\ -abc &\in \left[0, \tfrac{4}{27}\right]. \end{aligned} \tag{2}$$
Ainsi, si on a (1), on a $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = 1$ donc $a+b+c = \pm 1 = \varepsilon \in \{-1, 1\}$. De plus,
$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(ab^2+ba^2+ac^2+ca^2+bc^2+cb^2)+6abc, \tag{3}$$
$$= 1+3abc+6abc+3a(1-a^2)+3b(1-b^2)+3c(1-c^2), \tag{4}$$
$$= 1+3abc-3-9abc+3(a+b+c)+6abc, \tag{5}$$
$$= 3(a+b+c)-2, \tag{6}$$
donc $\varepsilon^2 = 3\varepsilon - 2$ donc $\varepsilon = 1$ et $a+b+c = 1$.
On a $b+c = 1-a, bc = -ab-ac = -a(b+c) = a(a-1)$, et $-abc = a^2(1-a) = \varphi(a) \geqslant 0$, car $a^2+b^2+c^2 = 1$ donc $a \in [-1, 1]$. On a $-abc = \varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$, et $a+b+c) = 1$ donc un des trois au moins est positif. Comme φ est compris entre 0 et $\frac{4}{27}$ sur $[0, 1]$, on a $-abc \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.
Si on a (2), on a $(a+b+c)^2 = 1 = a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ac) = a^2+b^2+c^2$. On a $(a+b+c)^3 = 1 = a^3+b^3+c^3-3(a^3+b^3+c^3)+3(a+b+c)+6abc$ donc $a^3+b^3+c^3-3abc = 1$.
2. On a $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc l'axe de rotation est $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On a $\mathrm{Tr}(A) = 3a = 1+2\cos(\theta)$, donc $\cos(\theta) = \frac{3a-1}{2}$, et $\sin(\theta) = (Af_1|f_2) = [f_3, f_1, Af_2]$ avec $f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $f_2 = f_3 \wedge f_1$. On laisse les calculs au lecteur.

$\blacksquare$

Solution 3.

1. $A_n \in S_n(\mathbb{R})$ donc est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a

$$X^\top A_n X = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{x_i x_j}{\lambda_i + \lambda_j}, \tag{7}$$
$$= \int_0^1 \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} x_i t^{\lambda_i - \frac{1}{2}} x_j t^{\lambda_j - \frac{1}{2}} \mathrm{d}t, \tag{8}$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{\lambda_i - \frac{1}{2}} \right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0. \tag{9}$$

Si $X^\top A_n X = 0$, alors pour tout $t \in]0,1]$, $\sum_{i=1}^n x_i t^{\lambda_i - \frac{1}{2}} = 0$ donc pour tout $y \in]-\infty, 0]$, $\sum_{i=1}^n x_i \mathrm{e}^{\left(\lambda_i - \frac{1}{2}\right)y} = 0$. Or $\left(y \mapsto \mathrm{e}^{\left(\lambda_i - \frac{1}{2}\right)y}\right)_{1\leqslant i \leqslant n}$ forme une famille libre comme vecteurs propres de la dérivation. Donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$ et $X = 0$.
3. On a $A_n \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc d'après l'inégalité d'Hadamard, on a

$$0 \leqslant \det(A_n) \leqslant \prod_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \tag{10}$$

car si $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum u_n$ converge donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\blacksquare$

Remarque 1. *On rappelle que si A est symétrique complexe, elle n'est pas nécessairement diagonalisable, par exemple $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = X^2$ et $A \neq 0$.*

Solution 4.

1. On a

$$E_{i,i} = \frac{1}{2}\left(I_n + \mathrm{diag}(-1,\dots,-1,1,-1\dots,-1)\right) \in \mathrm{Vect}(O_n(\mathbb{R})), \tag{11}$$

où le 1 est à l'indice i. De plus, si $i \neq j$, on a

$$E_{i,j} = \frac{1}{2}(A+B), \tag{12}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ \vdots & & 1 & & & & & & & & \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & \\ \vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & & & 1 & & \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ \vdots & & -1 & & & & & & & & \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & \\ \vdots & & & \vdots & -1 & & & \vdots & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & -1 & \vdots & & & \\ \vdots & & & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & & & -1 & & \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

avec les changements aux quadrants correspondants aux j-èmes et i-èmes lignes et colonnes. Comme A et B sont des matrices de permutation, on a $E_{i,j} \in \mathrm{Vect}(O_n(\mathbb{R}))$.

2. $O_n(\mathbb{R})$ est compact, et $U \mapsto \mathrm{Tr}(AU)$ est continue sur $O_n(\mathbb{R})$, donc bornée et donc N est bien définie. N vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Vérifions la séparation : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$. Pour tout $U \in O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AU) = 0$. Par combinaison linéaire, on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0$ donc $A = 0$. Donc N est bien une norme.

3. Soit
$$\begin{array}{rccc} \iota : & O_n(\mathbb{R}) & \to & O_n(\mathbb{R}) \\ & U & \mapsto & UV \end{array}$$
ι est bijective car $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe. Donc
$$N(VA) = \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} |\mathrm{Tr}(AUV)|, \tag{15}$$
$$= \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} |\mathrm{Tr}(AU)|, \tag{16}$$
$$= N(A). \tag{17}$$
4. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valeurs propres (positives) de S. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $S\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$. Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$, on a
$$|\mathrm{Tr}(Su)| = |\mathrm{Tr}(US)|, \tag{18}$$
$$= \left| \sum_{i=1}^{n} (US\varepsilon_i | \varepsilon_i) \right|, \tag{19}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|U\varepsilon_i\| \|\varepsilon_i\|, \tag{20}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \tag{21}$$
et la borne supérieur est atteinte pour $U = I_n$. Donc $N(S) = \mathrm{Tr}(S)$.
5. Soit $S = \sqrt{AA^\mathsf{T}} \in S_n^+(\mathbb{R})$. D'après la décomposition polaire, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = SO$. Alors on a $N(A) = N(S) = \mathrm{Tr}(\sqrt{AA^\mathsf{T}})$.

■

Solution 5. A et B sont symétriques réelles donc diagonalisables. Si $Ax = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $X^\mathsf{T} AX = \lambda \|X\|^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$: les valeurs propres de A et B sont positives.

Si $A \notin GL_n(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $\det(B) = \prod_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} \mu \geqslant 0$. Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, d'où
$$A^{-1}B = \sqrt{A^{-1}}\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}\sqrt{A} = \sqrt{A^{-1}}C\sqrt{A}, \tag{22}$$
car $\sqrt{A^{-1}} = \sqrt{A}^{-1}$ (preuve en diagonalisant). Soit X un vecteur unitaire. On a
$$X^\mathsf{T} CX = \underbrace{X^\mathsf{T}\sqrt{A^{-1}}}_{Y^\mathsf{T}} B \underbrace{\sqrt{A^{-1}}X}_{Y} \geqslant Y^\mathsf{T} AY = X^\mathsf{T}\sqrt{A^{-1}}A\sqrt{A^{-1}}X = X^\mathsf{T} X = 1. \tag{23}$$
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, soit X unitaire tel que $CX = \lambda X$. Il vient $X^\mathsf{T} CX = \lambda \geqslant 1$. Comme $C \in S_n(\mathbb{R})$, on a $\det(C) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \lambda \geqslant 1$ donc $\det(B) \geqslant \det(A)$. ■

Remarque 2. *Si on a égalité, alors* $\mathrm{Sp}(C) = \{1\}$, *donc* $C = I_n$ *et* $A = B$.

Solution 6. $SO(\mathbb{R}^3)$ est un groupe donc $r' \in SO(\mathbb{R}^3)$. Si r est la rotation d'axe orienté par f_3 (unitaire) et d'angle θ, alors $r'(s(f_3)) = s(f_3)$ donc r' est une rotation d'axe orienté par $s(f_3)$ d'angle θ'. On a $\mathrm{Tr}(r') = \mathrm{Tr}(r)$ donc $\theta' = \pm\theta$. Soit $f_1 \in f_3^{\perp}$ unitaire et $f_2 = f_3 \wedge f_1$. On a $\sin(\theta) = (r(f_1)|f_2) = [f_3, f_1, r(f_1)]$. Comme s est une isométrie, $s(f_1)$ est unitaire et orthogonal à $s(f_3)$ donc

$$\sin(\theta') = [s(f_3), s(f_1), \underbrace{s(r(f_1))}_{r'(s(f_1))}] = \underbrace{\det(s)}_{1} \times \underbrace{[f_3, f_1, r(f_1)]}_{\sin(\theta)}, \tag{24}$$

donc $\theta = \theta'$.

Supposons que r et s commutent alors $r' = r$, donc $s(f_3) \in \mathrm{Vect}(f_3)$ et s est une isométrie donc $s(f_3) \in \{f_3, -f_3\}$. Si $s(f_3) = f_3$, r et s ont même axe. Si $s(f_3) = -f_3$, $-1 \in \mathrm{Sp}(s)$ et s est un retournement et r aussi (car r et s jouent des rôles symétriques), et l'axe de r est perpendiculaire à celui de s.

Réciproquement, si r et s sont de même axe, elles commutent. Si ce sont deux retournements par rapport à deux axes orthogonaux, dans une base orthonormée directe adaptée, elles ont pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donc r et s commutent. ■

Solution 7.

1. D'après le théorème de réduction, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\underbrace{A}_{\in D} = P \operatorname{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r}, 1 \dots, 1) \underbrace{P^{-1}}_{P^{\mathsf{T}}}, \tag{25}$$

car $-1 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, où R_θ une matrice de rotation d'angle θ. Donc $\det(A) = 1$ et donc $A \in SO_n(\mathbb{R})$ et $D \subset O_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(A) = M$ si et seulement si $M(I_n + A) = I_n - A$. Si c'est le cas, en transposant, on a

$$
\begin{aligned}
(M(I_n + A))^{\mathsf{T}} &= (I_n + A)^{\mathsf{T}} M^{\mathsf{T}}, && (26)\\
&= \left(I_n + A^{-1}\right) M^{\mathsf{T}}, && (27)\\
&= (I_n - A)^{\mathsf{T}}, && (28)\\
&= I_n - A^{-1}, && (29)
\end{aligned}
$$

et $A \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $(A + I_n)^{\mathsf{T}} M = A - I_n$ donc

$$M^{\mathsf{T}} = (A + I_n)^{-1}(A - I_n) = (A - I_n)(A + I_n)^{-1}, \tag{30}$$

car si $BC = CB$ et C inversible, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.
Ainsi, $M^{\mathsf{T}} = -M$ donc φ est bien définie de D dans D'.
Soit $M \in D'$, on a $M = \varphi(A)$ si et seulement si $M(I_n + A) = I_n - A$ si et seulement si $(M + I_n)A = I_n - M$.

Lemme 1. *Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} M$, alors $\lambda = 0$.*

Preuve du 1. Soit X vecteur propre associé à λ. On a

$$\underbrace{X^\top M X}_{\in\mathbb{R}} = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0} = \left(X^\top M X\right)^\top = X^\top M^\top X = -X^\top M X = -\lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0}, \tag{31}$$

donc $\lambda = 0$. ■

On en déduit que $M + I_n$ est inversible, et donc $A = (M + I_n)^{-1}(I_n - M)$. Il vient

$$A^\top = (I_n + M)(I_n - M)^{-1}, \tag{32}$$
$$= (I_n - M)^{-1}(I_n + M), \tag{33}$$
$$= A^{-1}, \tag{34}$$

et donc A est orthogonale.
Si $I_n + A$ n'est pas inversible, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = -X$ et $0 = M(I_n + A)X = (I_n - A)X$ donc $AX = X$: impossible car $X \neq 0$. Donc $I_n + A$ est inversible.

■

Solution 8. Soit A inversible, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\sqrt{A^{-1}} = \sqrt{A}^{-1}$. Alors

$$A^{-1}B = \sqrt{A^{-1}}\, \underbrace{\sqrt{A^{-1}} B \sqrt{A^{-1}}}_{C}\, \sqrt{A}, \tag{35}$$

donc $A^{-1}B$ est semblable à C.

On a $X^\top C X = \underbrace{X^\top \sqrt{A^{-1}}}_{Y^\top} B \underbrace{\sqrt{A^{-1}} X}_{Y} \geqslant 0$ donc $C \in S_n^+(\mathbb{R})$.

On a l'inégalité de l'énoncé si et seulement si $1 + \sqrt[n]{\det(A^{-1}B)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + A^{-1}B)}$ si et seulement si $1 + \sqrt[n]{\det(C)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + C)}$. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \subset \mathbb{R}$. L'inégalité équivaut à

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{36}$$

S'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$, l'inégalité est vraie. Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$, alors l'inégalité équivaut à

$$\underbrace{\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)\right)\right)}_{\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)\right)} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \exp\left(\ln(\lambda_i)\right)\right)}_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(\ln(\lambda_i))}. \tag{37}$$

Comme $\varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$ et $\varphi''(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$, φ est strictement convexe d'où l'inégalité.

De plus, si on a égalité, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, et C étant diagonalisable, il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $C = \lambda I_n$, d'où $B = \lambda A$.

Si A n'est pas inversible, soit pour $p \geqslant 1$, $A_p = \frac{1}{p} I_n + A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\mathrm{Sp}(A_p) = \mathrm{Sp}(A) + \frac{1}{p} \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt[n]{\det(A_p)} + \sqrt[n]{\det(B)} \leqslant \sqrt[n]{\det(A_p + B)}, \tag{38}$$

et en passant à la limite $p \to +\infty$, on obtient l'inégalité. ■

Remarque 3. *On a* $\sqrt[n]{\det\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\det(A+B)} \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)}\right)$. *On peut en déduire (par continuité et dichotomie) que* $A \mapsto \sqrt[n]{\det(A)}$ *de* $S_n^+(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *est concave.*

Solution 9.

1. On a $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$ et

$$X^\intercal A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_i^2 a_{i,i} + \sum_{i \neq j} x_i x_j a_{i,j}. \tag{39}$$

Ainsi, comme $A \in S_n^+(\mathbb{R})$,

$$0 \leqslant |X|^\intercal A |X| = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 a_{i,i} + \sum_{i \neq j} |x_i| |x_j| a_{i,j}. \tag{40}$$

Or, pour $i \neq j$, $|x_i| |x_j| a_{i,j} \leqslant x_i x_j a_{i,j}$. Donc

$$|X|^\intercal A |X| \leqslant X^\intercal A X. \tag{41}$$

2. Si $AX = 0$, d'après ce qui précède on a $|X|^\intercal A |X| = 0$. Formons

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & Y^\intercal A X \end{array}$$

φ est une forme bilinéaire symétrique positive de forme quadratique associée q. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\varphi(Y, |X|)| \leqslant \sqrt{q(Y)} \underbrace{\sqrt{q(|X|)}}_{=0} = 0. \tag{42}$$

Donc $Y^\intercal A |X| = 0$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$. Donc $A|X| \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ d'où $A|X| = 0$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| = 0$ donc $\sum_{j \neq i} a_{i,j} |x_j| + a_{i,i} |x_i| = 0$. Si $|x_i| = 0$, pour tout $j \neq i$, $|x_j| = 0$: impossible. Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $x_i \neq 0$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in (\ker(A) \setminus \{0\})^2$. Alors $Y - \frac{y_1}{x_1} X \in \ker(A)$ et sa première coordonnée est nulle donc $Y = \frac{y_1}{x_1} X$, donc $\dim(\ker(A)) \leqslant A$ et $\operatorname{rg}(A) \geqslant n-1$.
4. Soit $A' = A - \lambda I_n$. Soit $\lambda_1 \in \operatorname{Sp}(A')$, on a $\operatorname{Sp}(A') = \operatorname{Sp}(A) - \lambda$. Or $\lambda = \min \operatorname{Sp}(A)$, donc pour tout $\lambda' \in \operatorname{Sp}(A')$, $\lambda' \geqslant 0$ et donc $A' \in S_n^+(\mathbb{R})$ et vérifie les hypothèses de A. On a $0 < \dim(\ker(A')) \leqslant 1$ et 0 est valeur propre donc $\dim(\ker(A - \lambda I_n)) = 1$: λ est une valeur propre simple.

■

Solution 10. Par récurrence sur $\dim(E) = n$: c'est vrai si $\dim(E) = 1$ car dans ce cas, $u = 0$. Soit $n \geqslant 1$, supposons le résultat vrai en dimension n et soit E de dimension $n+1$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})$ une base orthonormée de E. On a $\operatorname{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n (u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i) = 0$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & S(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (u(x)|x) \end{array}$$

. f est continue et $S(0,1)$ est connexe par arc. Nécessairement, il existe $x \in S(0,1)$ tel que $(u(x)|x) = 0$. On pose $e_1 = x$, et dans une base orthonormée adaptée à $E = \mathbb{R}_1 \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R}e_1)^\perp$,

$$\operatorname{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & A \end{pmatrix}. \tag{43}$$

$\operatorname{Tr}(A) = 0$, et par hypothèse de récurrence, il existe B_1 une base orthonormée de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ (de dimension n) telle que $\operatorname{mat}(p \circ u, B_1) = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix}$ où p est la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}e_1)^\perp$. D'où le résultat. ■

Solution 11.

1. Si u est antisymétrique, avec $y = x$, on a $(u(x)|x) = 0$. Réciproquement, si pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) = 0$, alors pour tout $(x,y) \in E^2$, $(u(x+y)|x+y) = 0 = (u(x)|x) + (u(y)|y) + (u(x)|y) + (u(y)|x)$, d'où $(u(x)|y) = -(x|u-y)$.
2. Soit B une base orthonormée et $A = \operatorname{mat}_B(u)$. u est antisymétrique si et seulement si pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $Y^\top AX = -X^\top AY = -X^\top A^\top X$. Donc, pour X et Y les vecteurs dans la base canonique, on a $A^\top = A$, et la réciproque est vraie.
3. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et $x \neq 0$ vecteur propre associé. On a $(u(x)|x) = 0 = \lambda \|x\|^2$. Comme $x \neq 0$, on a $\lambda = 0$, donc $\operatorname{Sp}(u) \subset \{0\}$.
   Si $\dim(E)$ est impair, χ_u est de degré impair, donc admet une racine réelle (par le théorème des valeurs intermédiaires), donc $0 \in \operatorname{Sp}(u)$.
4. Par récurrence sur $\dim(E) = n$. Si $n = 1$, $\operatorname{mat}_B(u) = (0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai pour $\dim(E) \leqslant n$. Soit E de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique.

Lemme 2. *Si F est stable par u, $F^\perp$.*

Preuve du 2. Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. On a $(u(x)|y) = -(\underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{u(y)}_{\in F}) = 0$. ∎

Rappelons par ailleurs qu'il existe F stable par u de dimension 1 ou 2, dans une base orthonormée B_1 de F : $\mathrm{mat}_{B_1}(u_{|F}) = (0)$ si $\dim(F) = 1$, et $\mathrm{mat}_{B_2}(u_{|F}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ si $\dim(F) = 2$. On applique l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$.

5. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\exp(A)^\mathsf{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(A^k\right)^\mathsf{T}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-A)^k}{k!} = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}, \tag{44}$$

car $A \mapsto A^\mathsf{T}$ est linéaire et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie donc continue.
$\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)) = \exp(0) = 1$ en trigonalisant sur $\mathbb{C}$. Ainsi, $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.
Soit $M \in SO_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathbb{R}^k$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$M = P\,\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_k}, -1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1), \tag{45}$$

où -1 apparaît n_1 fois, avec n_1 pair car $\det(M) = 1$, donc

$$M = P\,\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_k}, R_\pi, \ldots, R_\pi, 1, \ldots, 1), \tag{46}$$

où l'on rappelle que mes R_θ représente une matrice de rotation d'angle θ en dimension 2. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = aR_{\frac{\pi}{2}}. \tag{47}$$

Comme $R_{\frac{\pi}{2}}^2 = -I_2$, $R_{\frac{pi}{2}}^3 - R_{\frac{\pi}{2}}$ et $R_{\frac{\pi}{2}}^4 = I_2$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k a^{2k} I_2, \tag{48}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k a^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Donc

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{a^{2k}}{(2k)!} I_2 + \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \tag{50}$$

$$= \cos(a) I_2 + \sin(a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_a. \tag{51}$$

Ainsi, $M = P\exp(\underbrace{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, \theta_k, R_\pi, \ldots, R_\pi, 0, \ldots, 0)}_{A' \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})})P^{-1} = \exp(\underbrace{PA'P^{-1}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})})$, donc $M \in \exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

■

Solution 12.

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que
$$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}, \tag{52}$$
d'où
$$\exp(A) = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})P^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R}). \tag{53}$$
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que
$$B = P\,\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)P^{-1}, \tag{54}$$
avec $\mu_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit
$$A = P\,\mathrm{diag}(\ln(\mu_1), \ldots, \ln(\mu_n))P^{-1}. \tag{55}$$
Alors $\exp(A) = B$.
Soit $(A_1, A_2) \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $\exp(A_1) = \exp(A_2) = B$. Soient $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$ correspondant à A_1 et A_2, et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ correspondant à B. On vérifie que les sous-espaces propres de u_1 et u_2 sont ceux de v. Il s'ensuit que $u_1 = u_2$. En effet, si $A \in \mathrm{Sp}(u_1)$, et si $u_1(x) = \lambda_1 x$, alors $\exp(u_1)(x) = v(x) = \mathrm{e}^{\lambda} x$ donc $\ker(u_1 - \lambda_i id) \subset \ker(v - \mathrm{e}^{\lambda} id)$. u_1 étant diagonalisable, si les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, alors
$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u_i - \lambda_i id) \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(v - \mathrm{e}^{\lambda_i} id) \subset \mathbb{R}^n. \tag{56}$$
D'où $\ker(u_i - \lambda_i id) = \ker(v - \mathrm{e}^{\lambda_i} id)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.
2. On a $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$, c'est la somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur les compacts.
3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $|\!|\!| M |\!|\!| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|MX\|$. Soit $X \in S(0, 1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} \left|X^\mathsf{T} M_k X - X^\mathsf{T} M X\right| &= \left|((M_k - M)(X)|X)\right|, &(57)\\ &\leqslant \|(M_k - M)(X)\|, &(58)\\ &\leqslant |\!|\!| M_k - M |\!|\!|. &(59)\end{aligned}$$
Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $|\!|\!| M_k - M |\!|\!| \leqslant \min\left(\frac{\alpha}{2}, 1\right)$. On a pour tout $k \geqslant k_0$, $\alpha \leqslant X^\mathsf{T} M X \leqslant \beta$ d'où
$$\alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \leqslant X^\mathsf{T} M_k X \leqslant \beta + 1. \tag{60}$$

4.

Lemme 3. *Soit* $A \in S_n(\mathbb{R})$, *on a* $|||A||| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, *noté* $\rho(A)$.

Preuve du lemme 3. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale qui diagonalise A avec $A\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$. Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \in S(0,1)$, on a $AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i$. Alors

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i)^2 \leqslant \rho(A)^2 \underbrace{\|X\|^2}_{=1}, \tag{61}$$

et $\|AX\|^2 = \rho(A)$ pour X vecteur propre associé à une des valeurs propres de valeur absolue maximale. ■

D'après ce qui précède, pour tout $k \geqslant k_0$, $\mathrm{Sp}(\mu_k) \subset \left[\frac{\alpha}{2}, \beta + 1\right]$. Donc

$$\mathrm{Sp}(\ln(M_k)) \subset \left[\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right), \ln(\beta+1)\right]. \tag{62}$$

Alors $|||\ln(M_k)||| \leqslant \max\left(\left|\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|, |\ln(\beta+1)|\right)$, pour tout $k \geqslant k_0$.

5. $(\ln(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée en dimension finie, donc admet une valeur d'adhérence A. Pr, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln(M_k) \in S_n(\mathbb{R})$ fermé car sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en dimension finie. Donc $A \in S_n(\mathbb{R})$. En notant l'extraction σ, on a $\ln\left(M_{\sigma(k)}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$ donc $M_{\sigma(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp(A) = M$ par continuité de l'exponentielle.

   De plus, par injectivité, on a bien $A = \ln(M)$. La suite $(\ln(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence $\ln(M)$, donc converge vers $\ln(M)$.

■

Remarque 4. *Généralement, soient* E *et* F *de dimension finie. Soit* A *un fermé de* E, *et* $f\colon A \subset E \to B \subset F$ *bijective continue. On suppose que si* $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ *est bornée, alors* $(f^{-1}(\eta_k))_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *est bornée. Alors* f^{-1} *est continue.*

Solution 13. $S_F(0,1)$ est compacte, et $X \mapsto (AX|X)$ est continue, donc admet un maximum sur $S_F(0,1)$ et $\Phi(F)$ est bien définie.

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée qui diagonalise A : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim(F) = k$. Soit $X) \sum_{i=1}^n X_i \varepsilon_i \in S_F(0,1)$. Alors $(AX|X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

Soit $E_k = \mathrm{Vect}(\varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_n)$, $\dim(E_k) = n - k + 1$. Nécessairement, $E_k \cap F \neq \{0\}$, car sinon $\dim(E_k + F) = n + 1$.

Soit $x = \sum_{i=k}^n x_i \varepsilon_i \in E_k \cap F$ unitaire. Alors

$$(AX|X) = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2 = \lambda_k. \tag{63}$$

Donc $\Phi(F) \geqslant \lambda_k$.

Soit $F_k = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ de dimension f. Pour tout $x \in F_k$ unitaire, on a $(AX|X) = \sum_{i=}^{k} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_k$.

λ_k est atteint pour $x = \varepsilon_k$, d'où $\lambda_k = \min\limits_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=k}} \Phi(F)$. ■

Solution 14. Comme les valeurs propres de A sont $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$, on a

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 = \mathrm{Tr}(A^\mathsf{T} A) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}} a_{i,j}^2, \tag{64}$$

et donc pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$. ■

Solution 15. Soit F' un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^{n-1}$, on lui associe $F = F' \times \{0\}$ de dimension k de $\mathbb{R}^n$.

Soit $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in F'$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. On a

$$(A'X'|X') = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n-1\}^2} a_{i,j} x_i x_j = (AX|X), \tag{65}$$

et $\|X'\| = \|X\|$.

Donc $\Phi'(F') = \Phi(F) \geqslant \lambda_k$. Ceci est valable pour tout sous-espace vectoriel F' de $\mathbb{R}^{n-1}$ de dimension k, donc $\mu_k \geqslant \lambda_k$.

Soit G un sous-espace vectoriel de dimension $k+1$ de $\mathbb{R}^n$.

— Si $G \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, on a comme précédemment, en notant

$$G' = \left\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \middle| (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in G\right\}, \tag{66}$$

un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n-1}$ de dimension $k+1$ et comme précédemment, on a $\Phi(G) = \Phi'(G') \geqslant \mu_{k+1} \geqslant \mu_k$.

— Si $G \not\subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, on forme

$$G_1 = G \bigcap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \tag{67}$$

On a $\dim(G) + \dim(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) - \dim(G_1) = \dim\left(G + \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right) = n$, donc $\dim(G_1) = k$.

Comme $G_1 \subset G$, on a $\Phi(G) \geqslant \Phi(G_1) \geqslant \mu_k$. Dan tous les cas, $\Phi(G) \geqslant \mu_k$ donc $\lambda_{k+1} \geqslant \mu_k$.

■

Solution 16.

1. Supposons qu'il existe $(v, w) \in \left(\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)}\right)^2$ tel que $u = \frac{v+w}{2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|v(x)\| \leqslant \|x\|$ et $\|w(x)\| \leqslant \|x\|$, car $\|\|v\|\| \leqslant 1$ et $\|\|w\|\| \leqslant 1$. Donc
$$\|u(x)\| = \|x\| \leqslant \left\|\frac{1}{2}(v(x) + w(x))\right\| \leqslant \frac{\|v(x)\| + \|w(x)\|}{2} \leqslant \|x\|. \tag{68}$$
On a donc $\|v(x)\| = \|x\| = \|w(x)\|$ et il existe $\lambda_x \geqslant 0$ tel que $v(x) = \lambda_x w(x)$ (égalité dans Minkowski). Donc $\lambda_x = 1$, et ceci étant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $v = w = u$. Donc u est extrémal.
2. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $A = \mathrm{mat}_B(u)$. On pose $S = \sqrt{A^\mathsf{T} A} \in S_n^+(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $\theta \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \theta \times S$ (décomposition polaire). Pour tout $X \in S(0,1)$, comme $\|\|A\|\| \leqslant 1$, on a $\|AX\| \leqslant 1$. Par ailleurs, pour tout $X \in S(0,1)$, $X^\mathsf{T} S^2 X = (AX|AX) = \|AX\|^2 \leqslant 1$. Donc $\mathrm{Sp}(S^2) \subset [0,1]$ et $\mathrm{Sp}(S) \subset [0,1]$ car $S \in S_n(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{Sp}(S) = \{1\}$, on a $S = I_n$, et $A = \theta \in O_n(\mathbb{R})$ ce qui n'est pas. Donc il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$ tel que $\lambda \in [0,1[$.

   Dans une base orthonormée B' qui diagonalise S, on a $A' = \mathrm{mat}_{B'}(u) = \theta' \times \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in [0,1]$ et $\lambda_1 < 1$.

   Si $\lambda_1 \neq 0$, soit $\varepsilon = \min(\lambda_1, 1 - \lambda_1)$, on pose $S^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1 - \varepsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $S^- = \mathrm{diag}(\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $B = \theta' \times S^+$, $C = \theta' \times S^-$, $A' = \frac{B+C}{2}$ et $B \neq C \neq A$. Comme les valeurs propres de S^+ et S^- sont dans $[0,1]$, on a $\|\|S^+\|\| \leqslant 1$, $\|\|S^-\|\| \leqslant 1$. Et $\|\|\theta'\|\| = 1$, d'où $\|\|B\|\| \leqslant 1$ et $\|\|C\|\| \leqslant 1$. Donc u n'est pas extrémal.

   Si $\lambda_1 = 0$, $S^+ = \mathrm{diag}(-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $S^- = \mathrm{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, et parallèlement, u n'est pas extrémal. Les points extrémaux sont les isométries.
3. Soit $\|\cdot\|_2$ une norme euclidienne. Si $\|X\|_2 < 1$, alors X n'est pas extrémal et il existe $(\lambda, \mu) \in [0,1[^2$ tel que $X = \frac{\lambda X + \mu X}{2}$.
   Soit X tel que $\|X\|_2 = 1$, si $X = \frac{Y+Z}{2}$ avec $\|Y\|_2 \leqslant 1$ et $\|Z\|_2 \leqslant 1$. On a
$$\|X\|_2 = 1 = \left\|\frac{Y+Z}{2}\right\|_2 \leqslant \frac{\|Y\|_2 + \|Z\|_2}{2} \leqslant 1. \tag{69}$$
On a égalité partout, comme pour la première question, on a $Y = Z = X$. Les points extrémaux sont les points de la sphère unité. En prenant $A = \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)$, on a $\|\|A\|\| = 1$ mais A n'est pas une isométrie pour $n \geqslant 2$. Donc la norme triple n'est pas une norme euclidienne.

■

Solution 17. Si $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$ alors $A^3 = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3)P^{-1}$. $\sqrt[3]{}$ étant injectif, on a $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A) = \mathrm{Sp}_\mathbb{R}(B)$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ les valeurs propres distinctes de A. Soient u et v canoniquement associés à A et B. u et v sont diagonalisables. Soit $x \in \ker(u - \lambda_i id)$. On a $u(x) = \lambda_i x$, on a $u^3(x) = \lambda_i^3 x$, donc $\ker(u - \lambda_i id) \subset \ker(u^3 - \lambda_i^3 id)$ car les $(\lambda_j^3)_{1 \leqslant j \leqslant i}$ sont distincts. On a
$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i id) \subset \bigoplus_{i=1}^r \ker(u^3 - \lambda_i^3 id) \subset \mathbb{R}^n, \tag{70}$$

donc $\ker(u-\lambda_i id)=\ker(u^3-\lambda_i^3 id)=\ker(v^3-\lambda_i^3 id)=\ker(v-\lambda_i id)$. u et v ont les mêmes valeurs propres et même sous-espaces propres, donc sont égaux et $A=B$. ■

Solution 18. Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{n+1})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x=(x_0,\dots,x_n), y=(x_0,\dots,y_n)) & \mapsto & \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} \frac{x_i y_i}{i+j+1} \end{array}$$

C'est une forme bilinéaire symétrique. q dérive de φ. Soit $x\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a

$$q(x)=\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j}\mathrm{d}t, \tag{71}$$

$$=\int_0^1 \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} x_i x_j t^{i+j}\mathrm{d}t, \tag{72}$$

$$=\int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n x_i t^i\right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0. \tag{73}$$

Si l'intégrale est nulle, alors $\sum_{i=0}^n x_i t^i=0$ pour tout $t\in[0,1]$. C'est un polynôme en t ayant une infinité de racines sur $[0,1]$, c'est donc le polynôme nul donc pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $x_i=0$ donc $x=0$. ■

Solution 19. Pour $n=1$, on considère $x_0=0$ et $\|x_1\|=1$. Si $c_1=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_2}{2}$. Alors

$$\|c_1-x_1\|=\|c_1-x_2\|=\frac{1}{2}. \tag{74}$$

Soit pour $n\geqslant 1$, H_n : « Pour E de dimension n, il existe $(x_1,\dots,x_{n+1})\in E^{n+1}$, pour tout $i\neq j$, $\|x_i-x_j\|=1$ et pour $c_n=\frac{(x_1+\dots+x_{n+1})}{n+1}$, il existe r_n tel que pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$, $\|x_i-c_n\|=r_n$ ».

Supposons H_n est vraie. Soit E_n de dimension $n+1$ et soit H un hyperplan de E. Il existe $(x_1,\dots,x_{n+1},c_n,r_n)$ vérifiant H_n. Soit u un vecteur unitaire orthogonal à H. Soit D la droite passant par c_n et de vecteur directeur u : $D=\{c_n+tu|t\in\mathbb{R}\}$. Pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\|x_i-(x_n+tu)\|^2=\|x_i-c_n\|^2+t^2=r_n^2+t^2. \tag{75}$$

Posons $x_{n+2}=c_n+\sqrt{1-r_n^2}u$. Pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$, $\|x_{n+2}-x_i\|=1$. Soit

$$c_{n+1}=\frac{x_1+\dots+x_{n+2}}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}c_n+\frac{1}{n+2}x_{n+2}=c_n+\frac{\sqrt{1-r_n^2}}{n+2}u. \tag{76}$$

Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on a

$$\|c_{n+1} - x_i\|^2 = \frac{1 - r_n^2}{(n+2)^2} + r_n^2, \tag{77}$$

$$= \frac{1 + ((n+2)^2 - 1)r_n^2}{(n+2)^2}, \tag{78}$$

$$= \frac{1 + (n+1)(n+3)r_n^2}{(n+2)^2}. \tag{79}$$

On pose $r_{n+1} = \sqrt{\frac{1+(n+1)(n+3)r_n^2}{(n+2)^2}}$, puis

$$\|c_{n+1} - x_{n+2}\|^2 = \left(\frac{\sqrt{1 - r_n^2}}{n+2} - \sqrt{1 - r_n^2}\right)^2 = \frac{1 - r_n^2}{(n+2)^2}(n+1)^2. \tag{80}$$

On a

$$r_n^2 = \left\|\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} - x_1\right\|^2, \tag{81}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}\left\|\sum_{i=2}^{n+1}(x_i - x_1)\right\|^2, \tag{82}$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \times \left(n + 2\sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1}(x_i - x_1 | x_j - x_i)\right). \tag{83}$$

On a, pour tout $i \neq j \neq 1$,

$$\|x_i - x_j\|^2 = 1 = \|(x_i - x_1) + (x_1 - x_j)\|^2 = 2 + 2(x_i - x_1 | x_1 - x_j), \tag{84}$$

d'où $(x_i - x_1 | x_j - x_1) = \frac{1}{2}$, puis

$$r_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{n}{2(n+1)}, \tag{85}$$

et

$$r_{n+1}^2 = \frac{1 + \frac{n(n+3)}{2}}{(n+2)^2}, \tag{86}$$

$$= \frac{n(n+3)+2}{2(n+2)^2}, \tag{87}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+2)} \in [0, 1[. \tag{88}$$

Et en reportant,

$$\|c_{n+1} - x_{n+2}\|^2 = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}(1 - r_n^2), \tag{89}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}(1 - \frac{n}{2(n+1)}), \tag{90}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)^2}{(n+2)^2 2(n+1)}, \tag{91}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+2)}, \tag{92}$$

$$= r_{n+1}. \tag{93}$$

■

Remarque 5 (Méthode directe). *Soit E euclidien de dimension $n+1$. Soit $(e_1, \dots, e_{n+1})$ une base orthonormée de E. On a $\frac{\|e_i - e_j\|}{2} = 1$ pour $i \neq j$. Soit*

$$H = \{x = x_1 e_1 + \dots + x_{n+1} e_{n+1} \in E | x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\}, \tag{94}$$

hyperplan de E. On a $\dim(E) = n$, pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, soit $y_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - c) \in H$ avec $c = \frac{e_1 + \dots + e_{n+1}}{n+1}$ et pour tout $i \neq j$, $\|y_i - y_j\| = 1$.

Solution 20. On définit

$$\begin{array}{llcl} \varphi : & (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i y_i - \alpha \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \end{array}$$

Alors $\varphi(x, x) = q(x)$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^n x_i^2, \tag{95}$$

d'où $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$.

- Si $\alpha < \frac{1}{n}$, on a $q(x_1, \dots, x_n) \geqslant (1 - n\alpha)\sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0$ et so $q(x_1, \dots, x_n) = 0$, alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ donc les x_i sont nuls.
- Si $\alpha \geqslant \frac{1}{n}$, on a $q(1, \dots, 1) = n - \alpha n^2 = n(1 - \alpha n) \leqslant 0$.

Finalement, q est une forme quadratique définie positive si et seulement si $\alpha < \frac{1}{n}$. ■

Solution 21.

1. Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|^2 = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} \lambda_i \lambda_j (e_i|e_j). \tag{96}$$

   On a alors

$$0 \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} |\lambda_i| \, |\lambda_j| \, (e_i|e_j) \leqslant 0, \tag{97}$$

   car $|\lambda_i| \, |\lambda_j| \geqslant \lambda_i \lambda_j$ et $(e_i|e_j) \leqslant 0$ donc $|\lambda_i| \, |\lambda_j| \, (e_i|e_j) \leqslant \lambda_i \lambda_j (e_i|e_j)$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, e_i = 0.$$

   Notons que $\sum_{i \neq j} (|\lambda_i| \, |\lambda_j| - \lambda_i \lambda_j) \, (e_i|e_j) = 0$ et chaque terme est négatif, donc pour tout $i \neq j$, $(|\lambda_i| \, |\lambda_j| - \lambda_i \lambda_j) \, (e_i|e_j) = 0$. Si $(e_i|e_j) < 0$, λ_i et λ_j sont donc de mêmes signes.
2. On suppose que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \, e_i = 0$ et

$$(\varepsilon | \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, e_i) = 0 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, (\varepsilon|e_i)$$

   et chaque terme de la somme est positif, donc pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $\lambda_i = 0$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.
3. On a $(-x|e_i) < 0$ donc $(-x, e_1, \ldots, e_p)$ vérifie l'hypothèse. On a

$$1 \times (-x) + \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = 0,$$

   et d'après ce qui précède, $-x + \sum_{i=1}^{p} |x_i| \, e_i = 0$ donc $x = \sum_{i=1}^{p} |x_i| \, e_i = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et par unicité, pour tout $i \in \{1, \ldots, \}$, $|x_i| = x_i \geqslant 0$.
   Soit $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $x_{i_0} = 0$. On a

$$(x|e_{i_0}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} x_i (e_i|e_{i_0}) > 0, \tag{98}$$

   ce qui est absurde donc pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $x_i > 0$.

■

Solution 22. — En dimension 1, soit $E = \text{Vect}(u)$ avec u unitaire. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, $\dim(E) = 1$ donc pour tout i $[\![1, p]\!]$, $x_i = \lambda_i u$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, et pour $i \neq j \in [\![1, p]\!]^2$, $(x_i|x_j) = \lambda_i\lambda_j$, d'où $p \leqslant 2$ si on veut $(x_i|x_j) < 0$ pour tout $i \neq j \in [\![1, p]\!]^2$. Or $(u, -2)$ est obtusangle donc $r_1 = 2$.

— En dimension 2, on suppose $r_2 = 3$.

Par récurrence, supposons $r_n = n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille obtusangle maximale (avec $p \geqslant 2$). En particulier, $x_1 \neq 0$. Soit $H = x_1^\perp$ de dimension n et pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, $x'_i = p_H(x_i)$. Pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, on a $x_i = x'_i + y_i$ avec $y_i = \lambda_i x_1$ avec $(x_i|x_1) = \lambda_i \|x_1\|^2 < 0$ donc $\lambda_i < 0$, et pour tout $i \neq j \in [\![2, p]\!]^2$, $(x_i|x_j) = (x'_i|x'_j) + \underbrace{\lambda_i\lambda_j \|x_1\|^2}_{>0} < 0$, donc $(x'_i|x'_j) < 0$.

Par hypothèse de récurrence, on a donc $p - 1 \leqslant n + 1$ d'où $p \leqslant n + 2$ d'où $r_{n+1} \leqslant n + 2$.

De plus soit H un hyperplan (quelconque) de E. Par hypothèse de récurrence, il existe alors $(x'_2, \dots, x'_{n+2}) \in H^{n+1}$ obtusangle. Soit x_1 un vecteur orthogonal à H. Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $i \in [\![2, n+2]\!]$, $x_i = x'_i - \varepsilon x_1$. On a $(x'_i|x_1) < 0$ et $(x_i|x_j) = (x'_i|x'_j) + \varepsilon^2$ pour tout $i \neq j \in [\![2, n+2]\!]$. Il suffit de prendre

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{i \neq j \in [\![2, n+2]\!]^2} \left(\sqrt{-(x'_i|x'_j)} \right) > 0, \tag{99}$$

donc on a bien $r_{n+1} = n + 2$. ■

Solution 23.

1. En posant $u_0 = 0$ cela revient à trouver $(u_0, \dots, u_n) \in E^{n+1}$ tel que pour tout $i \neq j$, $\|u_i - u_j\| = 1$. On sait que dans $\mathbb{R}^{n+1}$ euclidien, soit la base canonique de $(e_1, \dots, e_{n+1})$ on a pour tout $i \neq j$, $\left\| \frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}} \right\| = 1$. Soit donc
$$c = \frac{e_1 + \dots + e_{n+1}}{(n+1)\sqrt{2}}, \tag{100}$$
et $H = \left\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}$ hyperplan. Soit $v_i = \frac{e_i}{\sqrt{2}} - c \in H$ et pour tout $i \neq j$, $\|v_i - v_j\| = 1$.
On a ainsi $n+1$ vecteurs dans H (de dimension n) tels que $\|v_i - v_j\| = 1$. On pose pour tout $i \in \{1, \dots, \}$, $u_i = v_i - v_{n+1}$ unitaires et pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, $\|u_i - u_j\| = 1$.
2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$. On a $\|u_i - u_j\|^2 = 1 = \|u_i\|^2 - 2(u_i|u_j) + \|u_j\|^2$ donc $(u_i|u_j) = \frac{1}{2}$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i (u_i|u_j) = 0$ donc $\lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \lambda_i = 0$. Posons $S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. On a $\lambda_j = -S$, donc $\sum_{j=1}^n \lambda_j = -nS = S$ donc $S = 0$ et pour tout $j \in [\![, 1, n]\!]$, $\lambda_j = 0$. Ainsi, $(u_1, \dots, u_n)$ est une base.
3. A priori, on peut écrire
$$u_j = \sum_{i=1}^{j-1} b_{i,j} e_i + a_j e_j = \sum_{i=1}^{j-1} (eu_j|e_i) e_i + a_j e_j. \tag{101}$$

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$,, montrons que pour $j \neq k > i$, $(u_j|e_i) = (u_k|e_i)$ si et seulement si $(u_j - u_k|e_i) = 0$. On a $e_i \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i)$ (procédé de Gram-Schmidt) et pour tout $j \in [\![1, i]\!]$,

$$(u_j - u_k|u_l) = (u_j|u_l) - (u_k|u_l) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \tag{102}$$

car $j \neq l$, $k \neq l$ et $l \leqslant i < j, k$. Par combinaison linéaire, $(u_j - u_k|e_i) = 0$, d'où le résultat.

■

Solution 24. S'il existe $u \in O(E)$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i = u(x_i)$, alors on a directement

$$(y_i|y_j) = (u(x_i)|u(x_j)) = (x_i|x_j), \tag{103}$$

pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$.

Réciproquement, si pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$, alors soient $F = \mathrm{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une base de F (quitte à renuméroter).

Lemme 4. *Soit* $\mathrm{Gram}(z_1, \dots, z_p) = ((z_i|z_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ *de colonnes* $C_1, \dots, C_n$. *Soit*

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p,$$

alors on a $\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_p C_p = 0$ *si et seulement si* $\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_p z_p = 0$.

Preuve du lemme 4. On a $\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_p C_p = 0$ si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j z_j \in \{z_1, \dots, z_p\}^{\perp},$$

si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j z_j = 0,$$

car $C_j = \begin{pmatrix} (z_1|z_j) \\ \vdots \\ (z_p|z_j) \end{pmatrix}$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. ■

D'après le lemme, on a ainsi $\mathrm{Gram}(y_1, \dots, y_r) = \mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_r) \in GL_r(\mathbb{R})$ donc $(y_1, \dots, y_r)$ est libre. D'autre part, pour tout $i \in [\![r+1, p]\!]$, il existe $(\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{p,i}) \in \mathbb{R}^p$,

$$x_i = \alpha_{1,i} x_1 + \cdots + \alpha_{r,i} x_r. \tag{104}$$

D'après le lemme, on a $y_i = \alpha_{1,i} y_1 + \cdots + \alpha_{r,i} y_r$. Soit $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r)^{\perp} = F^{\perp}$ et $(f_{r+1}, \dots, f_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_r)^{\perp}$.

Soit u telle que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $u(x_i) = y_i$, et pour tout $i \in [\![r+1, n]\!]$, $u(\varepsilon_i) = f_i$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a bien pour tout $i \in [\![r+1,p]\!]$, $u(x_i) = y_i$. Soit enfin $x \in E$, avec

$$x = \underbrace{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r}_{\in F} + \underbrace{\alpha_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + \alpha_n \varepsilon_n}_{\in F^\perp}. \tag{105}$$

On a alors

$$u(x) = \underbrace{\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_r y_r}_{\in \mathrm{Vect}(y_i)_{1\leqslant i\leqslant r}} + \underbrace{\alpha_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \alpha_n f_n}_{\in \mathrm{Vect}(y_i)^\perp_{1\leqslant i\leqslant r}}. \tag{106}$$

Enfin,

$$\|u(x)\|^2 = \|\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_r y_r\|^2 + \|\alpha_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \alpha_n f_n\|^2, \tag{107}$$

$$= \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} \alpha_i \alpha_j \underbrace{(y_i|y_j)}_{(x_i|x_j)} + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i^2, \tag{108}$$

$$= \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r\|^2 + \left\| \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i \right\|^2, \tag{109}$$

$$= \|x\|^2, \tag{110}$$

donc $u \in O(E)$. ■

Solution 25.

Lemme 5. *S'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|||f^k||| \leqslant M$, alors $E = \ker(f - id) \oplus \mathrm{Im}(f - id)$ et $\left(\frac{id+f+\cdots+f^k}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers π, projecteur sur $\ker(f-id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f-id)$.*

Preuve du lemme 5. Soit $x \in E$, on a

$$(id - f)\left(\frac{id + f + \cdots + f^k}{k+1}\right)(x) = \frac{(id - f^{k+1})}{k+1}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0, \tag{111}$$

car $\frac{\|f^{k+1}(x)\|}{k+1} \leqslant \frac{M\|x\|}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Soit $y \in \ker(f - id) \cap \mathrm{Im}(f - id)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) - x = y$ et $f(y) = y$, donc

$$\frac{(id + f + \cdots + f^k)}{k+1}(y) = y = \left(\frac{id + f + \cdots + f^k}{k+1}\right)(f - id)(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0. \tag{112}$$

Donc $y = 0$. Comme on est en dimension finie, on a

$$E = \ker(f - id) \oplus \mathrm{Im}(f - id). \tag{113}$$

Soit $x \in E$, il existe $(y,z) \in \ker(f - id) \times \mathrm{Im}(f - id)$ tel que $x = z + y$. Il existe $x_1 \in E$ tel que $z = f(x_1) - x_1$. Alors

$$\frac{(id + f \cdots + f^k)}{k+1}(x) = y + \frac{(f^{k+1} - id)}{k+1}(x_1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y. \tag{114}$$

■

Ici, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in E$, $\|f^2(x)\| = \|f \circ f(x)\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \|x\|$. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left\|f^k(x)\right\| \leqslant \|x\|$. On peut donc appliquer le lemme précédent. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in E$, $\left\|\frac{id+f+\cdots+f^k}{k+1}(x)\right\| \leqslant \|x\|$.

Lemme 6. *Si $E = F \oplus G$ et F et G ne sont pas orthogonaux. Soit $\Pi_{F/\!/G}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $\|\Pi(x)\| \geqslant \|x\|$.*

Preuve du leùùe 6. Soit $(y, z) \in F \times G$ tel que $(y|z) \neq 0$. Supposons (quitte à remplacer z par $-z$) $(y|z) < 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|y + tz\|^2 - \|y\|^2 = 2t(y|z) + t^2 \|z\|^2 \underset{t \to 0^+}{\sim} 2t(y|z) < 0. \tag{115}$$

Comme $\|y\|^2 = \|\Pi(y + tz)\|^2$, il existe $t > 0$ tel que $\|y - tz\| \leqslant \|\Pi(y + tz)\|$. ■

D'après le lemme précédent, $\ker(f - id)$ et $\operatorname{Im}(f - id)$ sont orthogonaux. ■

Solution 26.

1. Soit $y \in C$ et $K = \overline{B(x, \|y - x\|)} \cap C$. K est un compact, car fermé borné en dimension fini, et non vide car $y \in K$. Soit $z \mapsto d(x, z) = \|x - z\|$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est continue (car 1-Lipschitzienne) sur un compact donc admet un minimum atteint en z_0. On a $\|x - z_0\| \leqslant \|x - y\|$. Si $z \in C \setminus K$, on a $\|z - x\| > \|x - y\| \geqslant \|z_0 - x\|$. Pour l'unicité, soient $z_1, z_2 \in C$ tels que $d(x, C) = \|x - z_1\| = \|x - z_2\|$. On a $\frac{z_1+z_2}{2} \in C$ par convexité, on a

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{z_1 + z_2}{2} | z_1 - z_2\right) &= \frac{1}{2}\left((x - z_1) + (x - z_2) | (x - z_2) - (x - z_1)\right), && (116) \\ &= \frac{1}{2}\left|\|x - z_1\|^2 - \|x - z_2\|^2\right|, && (117) \\ &= 0, && (118) \end{aligned}$$

donc $z_1 - z_2$ est orthogonal à $x - \frac{z_1+z_2}{2}$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x - z_1\|^2 = \left\|x - \frac{z_1 + z_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{z_1 - z_2}{2}\right\|^2 \geqslant \|x - z_1\|^2 + \left\|\frac{z_1 - z_2}{2}\right\|^2. \tag{119}$$

Nécessairement, $z_1 = z_2$

2. Soit $y \in C$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\|tp_C(x) + (1 - t)y - x\|^2 = \|(1 - t)(y - p_C(x)) - (x - p_C(x))\|^2 \geqslant \|x - p_C(x)\|^2, \tag{120}$$

et le terme de gauche vaut

$$\|x - p_C(x)\|^2 + \underbrace{(1 - t)^2 \|y - p_C(x)\|^2 - 2(1 - t)\left(x - p_C(x) | y - p_C(x)\right)}_{\varphi(t)}. \tag{121}$$

On a donc $\varphi(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Si $(x - p_C(x)|y - p_C(x)) > 0$, on aurait $\varphi(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} -2(1-t)(x - p_C(x)|y - p_C(x)) < 0$: impossible. Donc $(x - p_C(x)|y - p_C(x)) \leqslant 0$.

Soit $z \in C$ tel que pour tout $y \in C$, $(x - z|y - z) \leqslant 0$, alors pour tout $y \in C$, on a

$$\|x-y\|^2 = \|x-z\|^2 + \|z-y\|^2 + 2(x-z|z-y) \geqslant \|x-z\|^2, \tag{122}$$

donc par unicité de $p_C(x)$, $z = p_C(x)$.

3. Soit $x_1, x_2 \in E$. Si $p_C(x_1) = p_C(x_2)$, on a $0 = \|p_C(x_1) + p_C(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\|$. Si non, soit $H = \mathrm{Vect}(p_C(x_2) - p_C(x_1))^\perp$, on a

$$\begin{aligned} x_1 - p_C(x_1) &= \lambda_1(p_C(x_1) - p_C(x_2)) + y_1, \\ x_2 - p_C(x_2) &= \lambda_2(p_C(x_1) - p_C(x_2)) + y_2, \end{aligned} \tag{123}$$

avec $y_1, y_2 \in H$. Alors

$$0 \geqslant (x_1 - p_C(x_1)|p_C(x_2) - p_C(x_1)) = \lambda_1 \|p_C(x_2) - p_C(x_1)\|^2, \tag{124}$$

donc $\lambda_1 \leqslant 0$ et de même, $\lambda_2 \leqslant 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= \|x_1 - p_C(x_1) + p_C(x_1) - p_C(x_2) + p_C(x_2) - x_2\|^2, && (125)\\ &= \|(1-\lambda_1-\lambda_2)(p_C(x_1) - p_C(x_2) + y_1 - y_2)\|^2, && (126)\\ &= \underbrace{|1-\lambda_1-\lambda_2|^2}_{\geqslant 1} \times \|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2, && (127)\\ &\geqslant \|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|^2, && (128) \end{aligned}$$

d'après le théorème de Pythagore. Donc $p_C \colon E \to C$ est 1-Lipschitzienne.

■

Remarque 6. *Dans la question 2), si $x \notin C$, on considère H l'hyperplan passant par $p_C(x)$ et orthogonal à $x - p_C(x)$. C est de l'autre côté de H par rapport à x.*

Solution 27.

1. φ est linéaire par rapport à la seconde variable car $G \subset \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. De plus, on a

$$\varphi(y,x) = \sum_{g\in G} (g(y)|g(x)) = \sum_{g\in G} \overline{(g(x)|g(y)} = \overline{\varphi(x,y)}, \tag{129}$$

et $\varphi(x,x) = \sum_{g\in G} \|g(x)\|^2 \geqslant 0$. Enfin, si $\varphi(x,x) = 0$ alors pour tout $g \in G$, $\|g(x)\| = 0$. En particulier, pour $g = id$, on a $x = 0$. Donc φ est un produit scalaire. Soit $g_0 \in G$. Comme $g \mapsto g \circ g_0$ est bijectif de réciproque $g \mapsto g \circ g_0^{-1}$, le résultat en découle.

2. Soit B une base de $\mathbb{K}^n$ orthonormée pour φ (existe d'après le procédé de Gram-Schmidt). Soit $f \in G$ et $M = \mathrm{mat}_B(f)$ est orthogonale (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou unitaire (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Donc $M^\mathsf{T} M = I_n$ (respectivement $\overline{M}^\mathsf{T} M = I_n$), d'où $M^{-1} = M^\mathsf{T}$ (respectivement $M^{-1} = \overline{M}^\mathsf{T}$), donc $\mathrm{Tr}(f^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(f)}$.
3. Soit B base de $\mathbb{R}^2$ orthonormée pour φ associée à G, P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à B. Pour tout $M \in G$, $P^{-1}MP \in SO_2(\mathbb{R})$ et $G' = \{P^{-1}MP | M \in G\}$ est un sous-groupe fini de $SO_2(\mathbb{R})$. OR $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{U}, \times)$ (via $R_\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$)/ Spot M un sous-groupe de cardinal n de $(\mathbb{U}, \times)$, d'après le théorème de Lagrange, pour tout $z \in H$, $z^n = 1$ donc $H \subset \mathbb{U}_n$ et par isomorphisme, G est cyclique.

■

Remarque 7. *On a aussi, pour tout* $f \in G, |\det(f)| = 1$ *car* $\overline{M}^\mathsf{T} M = I_n$.

Remarque 8. *Il existe des sous-groupes finis de* $GL_2(\mathbb{R})$ *non commutatifs. Par exemple, le groupe des isométries du triangle (3 rotations, 3 symétries), isomorphe à* $(\sigma_3, \circ)$ *non-commutatif.*

Solution 28.

1. On a $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$ et A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda \geqslant 0$. Si A est inversible, on écrit $A = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$ avec P orthogonale, et on pose $\sqrt{A} = P^{-1} \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{lambda_n})P$, inversible car A l'est. Alors $A = Gram(\sqrt{A}e_1, \dots, \sqrt{A}e_n)$ (matrice de Gram). Notons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base orthonormale obtenue par le procédé de Gram-Schmidt à partir de $(\sqrt{A}e_1, \dots, \sqrt{A}e_n)$, libre car $\sqrt{A}$ est inversible. Soit A la matrice de passage entre ces deux bases (triangulaire supérieure au vu du procédé de Gram-Schmidt), i.e. $Q = (\sqrt{A}e_j | \varepsilon_i) = (\alpha_{i,j})$. Alors $\sum_{k=1}^n \alpha_{k,i}\alpha_{k,j} = a_{i,j}$ (coordonnées dans une base orthonormée). Ainsi, $A = Q^\mathsf{T} Q$, et
$$\det(A) = \det(Q)^2 = \prod_{i=1}^n \alpha_{i,i}^2 = \prod_{i=1}^n \left(\sqrt{A}e_i | \varepsilon_i\right)^2 \leqslant \prod_{i=1}^n a_{i,i},$$
d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a égalité si et seulement si pour tout i, $\sqrt{A}e_i \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_i)$ si et seulement si $(\sqrt{A}e_1, \dots, \sqrt{A}e_n)$ est orthogonale si et seulement si A est diagonale.
2. On pose $A = M^\mathsf{T} M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On a $\det(M)^2 = \det(A) \leqslant \prod_{i=1}^n \|Me_i\|^2$, d'où l'inégalité. On a égalité si et seulement si les colonnes de M sont orthogonales.
3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée qui diagonalise $B : Be_i = \mu_i e_i$. Alors on a
$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (ABe_i | e_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i (Ae_i | e_i) \geqslant n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \mu_i (Ae_i | e_i)},$$
d'après l'inégalité arithmético-géométrique. D'où le résultat car $\det(B) = 1$.

$\blacksquare$

Solution 29. Soit $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$. Soit $O = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$. Alors $(OM_1)_{ij} = \varepsilon_i m^1_{ij}$ et $(M_1 O)_{ij} = m^1_{ij}\varepsilon_j$ donc pour tout $i \neq j$, $\varepsilon_i m^1_{ij} = \varepsilon_j m^1_{ij}$. Donc M_1 est diagonale.

Soit M_2 commutant avec toutes les matrices de $SO_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 3$. En prenant $O_{ij} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1) \in SO_n(\mathbb{R})$ où les 1 sont à la i-ième et j-ième places, alors par le même raisonnement que précédemment, M_2 doit être diagonale. De même pour M_1.

Si maintenant on note R_{ij} la rotation dans le plan $\mathrm{Vect}(e_i, e_j)$ (base canonique), alors on trouve que tous les coefficients de M_2 se doivent d'être les mêmes. Donc $M_2 = \lambda \mathrm{I}_n$.

Pour $n = 2$, on sait que

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si $M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec toutes ces matrices, alors on vérifie en multipliant par la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ que $c = -b$ et $a = d$. Alors M_2 est une matrice de similitude directe. $\blacksquare$