

*Exercices MP/MP**
Séries numériques et familles
sommables

Exercice 1. Soit la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = 2a_{\lfloor n/3 \rfloor} + 3a_{\lfloor n/9 \rfloor}$$

1. On pose pour $p \in \mathbb{N}$, $b_p = a_{3^p}$. Calculer b_p en fonction de p .
2. Montrer que si $3^p \leq n < 3^{p+1}$, alors $a_n = b_p$.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\frac{a_n}{n})_{n \geq 2}$.

Exercice 2. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue. Soit $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe $l \in [a, b]$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un segment.
3. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

Exercice 3. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on définit $u_0 = e^{i\theta}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. Peut-on avoir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- stationnaire ?
- convergente ?
- périodique ?
- dense dans \mathbb{U} ?

On pourra étudier le développement binaire de $\frac{\theta}{2\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$.

Exercice 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, étudier $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^{n^2}$.

Exercice 5. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective telle que $(x_{\varphi(n)})$ est décroissante.
2. Montrer que pour tout $l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $I \subset \mathbb{N}$ fini tel que

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leq \varepsilon$$

ou si $l = +\infty$: $\forall A > 0$, il existe un sous-ensemble I fini tel que $\sum_{k \in I} x_k \geq A$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times \sum_{k=0}^n u_k^2 = 1$. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$. Une telle suite existe-t-elle ?

Exercice 7. Étudier $x_n = n - \sum_{k=1}^n \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$.

Exercice 8. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles telles que

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n + c_n = 0,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} = 3.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$. On pourra étudier $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$.

Exercice 9. Soit $u_0 \in]0, 1[$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que $v_n = n + \ln(n) + O(1)$, en déduire un développement de u_n .

Exercice 10.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_n^n = u_n + n$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de $x_n - \lambda$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs non tous nuls. On suppose que

$$u_n = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de limite a . En cas d'existence, évaluer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Exercice 12.

1. Soit $x \in [0, 1[$, montrer qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n \geq 2}$ d'entiers naturels telle que
 - (i) $0 \leq a_n \leq n - 1$ pour tout $n \geq 2$,
 - (ii) il existe $m \geq n$ tel que $a_m < m - 1$ pour tout $n \geq 2$,
 - (iii) $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n \geq 2}$ pour que $x \in \mathbb{Q}$.
3. Soit $l \in [-1, 1]$, montrer qu'il existe $x \in [0, 1[$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n! 2\pi x) = l$.

Exercice 13. Soit $u_0 > 0, u_1 > 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) + \ln(1 + u_{n-1})$$

Étudier la suite (u_n) . On pourra poser $M_n = \max(u_n, u_{n-1}, l)$, $m_n = \min(u_n, u_{n-1}, l)$ où $l = 2 \ln(1 + l)$ et $l > 0$.

Exercice 14. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}^*)^2$ avec $\frac{p}{q} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On suppose que $(e^{ipx_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e^{iqx_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée ?

Exercice 15.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Exercice 16. Soit $u_n = \prod_{k=2}^n \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}$ pour $n \geq 2$. Quelle est la limite de cette suite ? Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$?

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On pourra minorer $u_{n+1} + \dots + u_{2n}$. Montrer ensuite que si $\{p \in \mathbb{N}, pu_p \geq 1\}$ est infini, alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 18. Nature de $\sum u_n$ où $u_n =$

1. $n^{-1-\frac{1}{n}}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(t) dt$
3. $\sin\left(2\pi \frac{n!}{e}\right)$
4. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 19. Montrer la convergence et calculer la somme des différentes séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{E\left(n^{\frac{1}{3}}\right) - E\left((n-1)^{\frac{1}{3}}\right)}{4n - n^{\frac{1}{3}}}$ où E désigne la partie entière.

Exercice 20. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe \mathcal{C}^2 et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a < 0$. Montrer la convergence de $\sum_{n \geq 1} f(n)$. Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 21. Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^k}{k}$.

Exercice 22. Donner la nature de $\sum u_n$ quand u_n vaut

1. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\frac{1}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}$
3. $\frac{\sin(n! \pi e)}{\ln(n)}$

Exercice 23. Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$ où u_n vaut

1. $a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$ pour $n \geq 1$.

2. $\frac{2^n}{3^{2^n-1}+1}$ pour $n \geq 1$.

3. $\frac{n-k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n(n+1)}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

4. $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ pour $n \geq 0$.

Exercice 24. Soit $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature lorsque

(i) $(nu_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 OU

(ii) $(u_n)_{n \geq 1}$ décroît et tend vers 0.

Comparer alors les sommes respectives. En déduire, pour $p \geq 1$ fixé,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)}$$

Exercice 25. Soit $q \geq 2$ et $v_n = \frac{1}{(n+q)!} \sum_{k=1}^n k!$. Donner la nature de $\sum v_n$. En cas de divergence, donner un équivalent des sommes partielles.

Exercice 26. Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Montrer, en justifiant l'existence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{nc}}{1 - z^{na+b}}$$

Exercice 27. Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série complexe absolument convergente. On pose pour $q \in \mathbb{N}^*$, $b_q = \frac{1}{q(q+1)}(a_1 + 2a_2 + \dots + qa_q)$. Montrer que $\sum_{q \geq 1} b_q$ converge et évaluer sa somme en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. On pourra poser $u_{n,q} = \frac{na_n}{q(q+1)}$ si $n \leq q$ et 0 sinon.

Exercice 28 (Inégalité de Carleman). Soit $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n < +\infty$. On pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)}(u_1 + \dots + nu_n)$ et $w_n = \sqrt[n]{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a l'inégalité entre la moyenne géométrique et arithmétique :

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$.

Montrer que $\sum w_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. On pourra utiliser l'exercice précédent. Montrer que e est la "meilleure" constante possible, c'est-à-dire que si $\forall (u_n)_{n \geq 1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum u_n$ converge, on a $\sum w_n \leq C \sum u_n$ alors $C \geq e$.

Exercice 29.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ soit sommable et exprimer alors la somme en fonction de la fonction ζ de Riemann.

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ soit sommable.

Exercice 30. Étudier la sommabilité de $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}$.

Exercice 31.

1. Montrer que

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$$

converge (où les p_k sont les nombres premiers). En déduire la nature de

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$$

2. Montrer que pour tout $s \in]1, +\infty[$, le produit infini

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

converge. Donner sa valeur en fonction de $\zeta(s)$.

3. Généraliser ce résultat à $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 1$.

Exercice 32. On note $\varphi(n) = |\{k \in \{1, \dots, n\}, k \wedge n = 1\}|$ (fonction d'Euler). Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ converge-t-elle ? Donner alors sa somme en fonction de $\zeta(\alpha)$.

Exercice 33. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{z_n^3}$ converge.

Exercice 34. Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$.

Exercice 35. Pour $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*)$, on définit $u_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge.
2. Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Faire le cas où $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$.

Exercice 36. Soit $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ et $v_n = (-1)^n u_n$ pour $n \geq 1$.

1. Donner la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
2. Soit $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$. Donner un équivalent de S_N puis développer jusqu'au $o(1)$.
3. Exprimer $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ en fonction de γ (constante d'Euler) et $\ln(2)$.

Exercice 37. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $q_1(n)$ la nombre de chiffres de l'écriture décimale de n . On définit par récurrence $q_{k+1}(n) = q_1(q_k(n))$. Étudier la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n q_1(n) q_2(n) \dots q_n(n)}$$

Exercice 38. Soit $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n} > 0$ sur \mathbb{R} et P_{2n+1} s'annule une seule fois en $a_{2n+1} < 0$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1}$.

Exercice 39. Montrer qu'il existe un unique $x_n \geq 0$ tel que $e^{x_n} = x_n + n$. Donne un développement asymptotique à deux termes de x_n pour $n \geq 1$.

Exercice 40. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge, étudier $\sum v_n$.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Pour $\alpha = 1$, montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $v_{n+1} + \dots + v_{n+p} \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$. En déduire que $\sum v_n$ diverge.
3. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Pour $\alpha > 1$, on forme $w_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$. Montrer que $\sum v_n$ converge. Et si $\alpha < 1$?
4. On suppose que $\sum u_n$ converge. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $w_n = \frac{u_n}{R_n^\alpha}$. Étudier la nature de $\sum w_n$.

Exercice 41 (Principe des tiroirs de Dirichlet). Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$ tel que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qn}$. On pourra étudier les $n+1$ réels $(kx - \lfloor kx \rfloor) = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ et montrer qu'il existe $k \neq k'$ avec $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$.
2. Montrer qu'il existe $(p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$.
3. Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n \sin(n)}\right)_{n \geq 1}$ (on admet que $\pi \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Exercice 42. Soit $(a_{n,p}) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^*)^2}$ telle que

- (i) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,p} = a_p \in \mathbb{C}$,
- (ii) il existe une suite de réels positifs (b_p) donc la série converge telle que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $|a_{n,p}| \leq b_p$.

1. Évaluer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n a_{n,p}$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \right)$.

Exercice 43. Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on peut définir $S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{kn}$.
2. On suppose que pour tout $k \geq 1$, $S_k = 0$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0$.

Exercice 44. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum f(u_n)$ converge.

1. Montrer que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = -f(x)$ (f est impaire au voisinage de 0).
3. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ $\forall (x, y) \in]-\beta, \beta[^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (f est linéaire au voisinage de 0).
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$ tels que $\forall x \in]-\gamma, \gamma[$, $f(x) = \lambda x$ (f est une homothétie au voisinage de 0).

Exercice 45. Existence et calcul de

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor}{k(k+1)} := \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$