*Exercices MP/MP**

Séries Entières

Exercice 1. *Donner le rayon de convergence de*

1. $\sum_{n\geqslant 1}\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} z^n$,
2. $\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^3}$.

Exercice 2.

1. *Soit* $(\theta_1,\ldots,\theta_p)\in[0,2\pi[^p$ *des réels distincts,* $(m_1,\ldots,m_p)\in(\mathbb{N}^*)^p$. *Montrer que*
$$\left(u_n=\sum_{k=1}^{p} m_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{1}$$
ne tend pas vers 0.
2. *Soit* $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ *et* $a_n=\mathrm{Tr}(A^n)$. *Donner le rayon de convergence et la somme de* $\sum a_n z^n$.

Exercice 3. *Donner le rayon de convergence et calculer la somme (en cas de convergence) de*

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{\sum_{k=1}^n k^2}=\sum_{n=\geqslant 1}\frac{6z^n}{n(n+1)(2n+1)}. \tag{2}$$

Exercice 4. *On définit*

$$\begin{array}{rccl} f: &]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \frac{t}{\ln(1+t)} & si\ t\neq 0, \\ 1 & si\ t=0. \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

Montrer que f *est développable en série entière sur* $]-1,1[$, *en déduire que* f *est* $\mathcal{C}^\infty$. *On pourra former* $\int_0^1 (1+t)^u \mathrm{d}u = I(t)$.

Exercice 5. *Donner le rayon de convergence de* $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ *où*

$$a_n=\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^{\ln(n)}. \tag{4}$$

Exercice 6. *Donner le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *où* a_n *est le nombre de diviseurs* n.

Exercice 7. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2}=l\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 8. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On pose $\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$. Déterminer $\mathrm{e}^{\phi(z)}$.*

Exercice 9. *Donner le rayon de convergence et calculer la somme (sur le disque ouvert de convergence) de*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}. \tag{6}$$

Exercice 10. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, on suppose*

i) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geqslant 0$,*

ii) $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$,

iii) *le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ vaut 1,*

iv) *$\sum b_n$ diverge.*

On forme sur $[0, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. *Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$.*
2. *Montrer que $f(x) = \underset{x\to 1^-}{\sim} g(x)$.*
3. *Donner un équivalent simple quand $x \to 1^-$ de $h_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$ avec $p \in \mathbb{N}$.*

Exercice 11. *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim\limits_{x\to 1^-} = S \in \mathbb{R}$ et que $a_n = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $\sum a_n$ converge et vaut S. On pourra étudier $f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.*

Exercice 12. *Soit $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développable en série entière avec un rayon de convergence $\rho > 0$ telle que $f(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe une fonction T, développable en série entière, et $r > 0$, telle que si $|z| < r$, $f(z) = \mathrm{e}^{T(z)}$.*

Exercice 13. *Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{\sin(n\pi a)}$. Soit R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.*

1. *Montrer que $R_a \leqslant 1$.*
2. *Évaluer R_a lorsque a est irrationnel algébrique.*
3. *Existe-t-il a tel que $R_a = 0$?*

Exercice 14. *Soit $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n = \left|\left\{(p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{N}^N \middle| p_1 a_1 + \ldots p_N a_N = n\right\}\right|$. Donner un équivalent simple de c_n quand $n \to +\infty$.*

Exercice 15. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{1+x+x^2} \end{array} \tag{7}$$

Montrer que f est développable en série entière, et donner le rayon de convergence de la série entière obtenue. On pourra dériver $f^2(x)$.

Exercice 16. *Soit $f\colon [0,A[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,1[$, $f^{(n)}(t) \geqslant 0$.*

1. *Soit $x \in [0,A[$, montrer que $\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge.*
2. *On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,A[$, $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$. Montrer que si $x < y < A$, on a $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y)$.*
3. *En déduire que f est développable en série entière sur $[0,A[$.*
4. *Application à* tan.