

*Solutions MP/MP**
Fonction d'une variable réelle

Solution 1. Tout d'abord, $\deg(L_n) = n$ et son coefficient dominant est $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. -1 et 1 sont racines d'ordre n de P_n donc pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(1) = 0$. Ainsi, on a par intégrations par parties successives :

$$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^1 f^{(n)}(t) P_n(t) dt \quad (1)$$

Notamment, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P^{(n)} = 0$ et $(P|L_n) = 0$. En particulier, pour tout $m < n$, $\deg(L_m) \leq n-1$ et $(L_m|L_n) = 0$ donc $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de L_n grâce aux intégrales de Wallis :

$$\|L_n\|_2^2 = (L_n|L_n) \quad (2)$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^1 L_n^{(n)}(t^2 - 1)^n dt \quad (3)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt \quad (4)$$

On pose $t = \cos(\theta)$ d'où $dt = -\sin(\theta)d\theta$, d'où

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^\pi \sin(\theta)^{2n+1} d\theta \quad (5)$$

$$= 2I_{2n+1} \text{ [Wallis]} \quad (6)$$

On a classiquement $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. D'où

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \times \underbrace{I_1}_1 = 1 \quad (7)$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (8)$$

d'où

$$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2 \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \quad (9)$$

2. On utilise la formule de Leibniz en écrivant $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$.
3. On montre le résultat par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que $L_n = P_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $] -1, 1[$. Or $\deg(L_n) = n$, donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.
4. (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (étagée en degré). Donc il existe $(\alpha_{n,0}, \dots, \alpha_{n,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $XL_{n-1} = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} L_k$. Si $k \leq n-3$, on a

$$(XL_{n-1}L_k) = \alpha_{n,k} \|L_k\|_2^2 = (L_{n-1}XL_k) = 0 \quad (10)$$

car $\deg(XL_k) = k + 1 \leq n - 2$. Donc

$$XL_{n-1} = \alpha_{n,n-2}L_{n-2} + \alpha_{n,n-1}L_{n-1} + \alpha_{n,n}L_n \quad (11)$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(XL_{n-1}|L_{n-1}) = \int_{-1}^1 tL_{n-1}(t)^2 dt \quad (12)$$

Or P_n est paire, donc L_n est de la parité de n et donc L_n^2 est paire puis XL_n^2 est impaire. Donc $\alpha_{n,n-1} = 0$.

$$(XL_{n-1}|L_{n-2}) = \alpha_{n,n-2} \underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{= \frac{2}{2n-3}} \quad (13)$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) \underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}} \quad (14)$$

Par ailleurs,

$$(-1)^{n-1} \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) dt = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-1} dt}_{2I_{2n-1}} \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \times 2 \times \frac{2^{2n-2}(n-1)!^2}{(2n-1)!} \quad (16)$$

$$= \frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!} \quad (17)$$

donc $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}} = \frac{n-1}{n}$. D'où le résultat. ■

Solution 2. On forme

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \underbrace{\Delta f(x_0, \dots, x_{n-1}, x)}_{\varphi(x)} - \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)}_{P(x)} A \end{aligned} \quad (18)$$

On a $g(x_n) = 0$. On suppose les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ distincts, et on pose

$$A = \frac{V(x_0, \dots, x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)} \quad (19)$$

g est de classe \mathcal{C}^n et pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $g(x_i) = 0$. Donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g^{(n)}(\xi) = 0$ (théorème de Rolle appliqué n fois. $\deg(P) = n$ et son coefficient dominant est A donc $P^{(n)}(\xi) = An! = \varphi^{(n)}(\xi)$).

On développe maintenant $\varphi(x)$ par rapport à la dernière colonne :

$$\varphi(x) = f(x) \times V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + Q(X) \quad (20)$$

avec $\deg(Q) \leq n-1$ et $V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j)$ (déterminant de Vandermonde). On a donc

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (x_j - x_i) \quad (21)$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{A}{\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)} = \Delta f(x_0, \dots, x_n) \quad (22)$$

■

Solution 3. On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^0 -tf''(t)dt \quad (23)$$

et de même

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f''(t)dt \quad (24)$$

D'où

$$A(f) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (25)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} tf''(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f''(t)dt \quad (26)$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt \quad (27)$$

$$= \frac{1}{4} \quad (28)$$

Et c'est atteint pour $f(t) = \frac{t^2}{4}$. ■

Solution 4. Pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x)$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) \quad (29)$$

donc f' est \mathcal{C}^1 et donc f est \mathcal{C}^2 . On fixe alors x et on dérive deux fois (29) en fonction de h . On a alors

$$f''(x+h) = f''(x-h) \quad (30)$$

pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ donc f'' est constante et f est polynômiale de degré 2.

Réciproquement, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a bien la relation de l'énoncé. ■

Solution 5.

1. Soit $a > 0$,

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{R} &\rightarrow]a, +\infty[\\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned} \quad (31)$$

est croissante. Donc il existe $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tau_a(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. On écrit alors

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \frac{x-a}{x} + \frac{f(a)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \quad (32)$$

2. S'il existe $a < b \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $f(a) < f(b)$, alors $\tau_a(b) > 0$. Comme τ_a est croissante, $l \geq \tau_a(b) > 0$. Par contraposée, si $l \geq 0$, f est décroissante.
3. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = f(x) - lx$. Pour $x < y$, on a

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - l \leq 0 \quad (33)$$

Donc φ est décroissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existe. ■

Solution 6.

1. On forme

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\frac{1}{p} + x} \end{aligned} \quad (34)$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{k}{np}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\frac{1}{p} + x} = \ln(p+1) = l_p \quad (35)$$

2. On note $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $0 < x < \alpha_0$, alors $|\varepsilon(x_0)| \leq \varepsilon_0$, et il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $\frac{1}{n} \leq \alpha_0$. Alors pour tout $n \geq N_0$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$,

$$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left| \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon_0}{p} \quad (36)$$

et

$$\left| \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{k+n} \right| \leq \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leq \frac{\varepsilon_0}{p} \frac{np+1}{n+1} \leq \varepsilon_0 \quad (37)$$

On a donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p+1) f'(0) \quad (38)$$

3. On peut penser à $f: x \mapsto \sqrt{x}$ continue et $f(0) = 0$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (39)$$

donc v_n diverge.

4. On écrit $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi,

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{(k+n)^2} \quad (40)$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$, $|\varepsilon(\frac{1}{n+k})| \leq \varepsilon$ et donc

$$\left| \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2} \quad (41)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right) \quad (42)$$

puis

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} \quad (43)$$

Or

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(np)^2} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2} \quad (44)$$

$$= \frac{1}{np} \times \frac{1}{np} \underbrace{\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(\frac{1}{p} + x)^2}} \quad (45)$$

donc

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(0)p}{n(p+1)} \quad (46)$$

■

Solution 7. Supposons que f' ne tend pas vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \geq A, |f'(x_A)| \geq \varepsilon_0 > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\alpha_0 \geq 0, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $|x - y| \leq \alpha_0$ alors $|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $t \in [x_A - \alpha, x_A + \alpha]$, on a

$$|f'(t)| \geq |f'(x_A)| - |f'(x_A) - f'(t)| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (47)$$

et pour $A = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geq n, \forall t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f'(t)| \geq \frac{\varepsilon_0}{n}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f' > 0$ sur les $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Alors

$$f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = \int_{x_n - \alpha_0}^{x_n + \alpha_0} f'(t) dt \geq \varepsilon_0 \alpha_0 > 0 \quad (48)$$

mais comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = 0 \quad (49)$$

d'où la contradiction.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, on applique ce qui précède à $\Im(f)$ et $\Re(f)$.

Si f' n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (50)$$

car $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$ et

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2} \sin(x^2)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\frac{2x \cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en } +\infty} \quad (51)$$

■

Solution 8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x + \frac{h}{2}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x) \quad (52)$$

par continuité de g . Donc f est dérivable et $f' = g$. Par ailleurs, pour $y = \frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2}) \quad (53)$$

par récurrence f est \mathcal{C}^∞ .

En outre, en fixant x et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à y , on a

$$f''(x+y) - f''(x-y) = 0 \quad (54)$$

Donc f'' est constante donc f est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec $f' = g$). ■

Solution 9. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt \quad (55)$$

On note $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ de classe \mathcal{C}^2 .

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \int_a^b F''(t)(b-t)dt \quad (56)$$

Pour $a = k$ et $b = k + \frac{1}{2}$, on a

$$F(k + \frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k + \frac{1}{2} - t)f'(t)dt = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k + \frac{1}{2} - u)du \quad (57)$$

et pour $a = k+1, b = k + \frac{1}{2}$,

$$F(k + \frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k + \frac{1}{2} - t)f'(t)dt = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k + \frac{1}{2} + u)du \quad (58)$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(f(k) - f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u(f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u))du \quad (59)$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u)}_{\geq 0 \text{ car } u \geq 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du \quad (60)$$

et $f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u) \leq f'(k+1) - f'(k)$ d'où

$$S_n \leq \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} u du}_{=\frac{1}{8}} (f'(n) - f'(1)) \quad (61)$$

■

Solution 10.

1. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{cases} \|A\| \leq \frac{h^2}{2} M_2 \\ \|B\| \leq \frac{h^2}{2} M_2 \end{cases} \quad (62)$$

On a $B - A - f(x-h) + f(x+h) = 2hf'(x)$ d'où

$$\|f'(x)\| \leq \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h} \quad (63)$$

Donc f' est bornée sur \mathbb{R} . On a ensuite un majorant qui dépend de h que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.

2. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|A_k\| \leq \frac{k^n}{n!} M_n \quad (64)$$

On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1 - f(x+1) \\ \vdots \\ A_k - f(x+k) \\ \vdots \\ A_n - f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (65)$$

On a

$$\det(M) = \frac{(-1)^n}{1! \times 2! \times \dots \times (n-1)!} V(1, \dots, n) \quad (66)$$

où V est le déterminant de Vandermonde. Donc $\det(M) \neq 0$. On peut former les $f^{(j)}(x)$ en fonction des $(A_i - f(x+i))_{1 \leq i \leq n}$: il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - f(x+i))$. Donc

$$\|f^{(j)}(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \left(\frac{n}{n!} M_n + M_0 \right) \quad (67)$$

Donc $f^{(j)}$ est bornée pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$. ■

Solution 11.

1.

$$l_{\sigma, \gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad (68)$$

2. On a

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| - \underbrace{\| (a_{i+1} - a_i) \gamma'(a_i) \|}_{>0} \right| \quad (69)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) - (a_{i+1} - a_i) \gamma'(a_i)\| \quad (70)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt \quad (71)$$

3. $\|\gamma'\|$ est continue donc

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \quad (72)$$

Donc α_0 existe.

γ' est continue sur $[a, b]$ donc uniformément continue sur $[a, b]$, et il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on a

$$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow \|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (73)$$

Alors si $\delta(\sigma) \leq \alpha_1$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, pour tout $t \in [a_i, a_{i+1}]$, on a

$$|t - a_i| \leq (a_{i+1} - a_i) \leq \alpha_1 \quad (74)$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i) - \gamma'(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (75)$$

et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (76)$$

Finalement, si $\delta(\sigma) \leq \min(\alpha_0, \alpha_1)$, on a

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon \quad (77)$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad (78)$$

4. On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix} \quad (79)$$

donc $\|\gamma'(t)\| = R$ et $l(\gamma) = 2\pi R$.

■

Solution 12.

1. Pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{i\theta_2(t)} \quad (80)$$

donc

$$e^{i(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1 \quad (81)$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, il existe $k(t) \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$. On a

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi} \quad (82)$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à k_0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$,

$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (83)$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , par composition, f est \mathcal{C}^k . On a alors

$$f(t) = e^{i\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = i\theta'(t)e^{i\theta(t)} = i\theta'(t)f(t) \quad (84)$$

Donc

$$\theta(t) = -i \frac{f'(t)}{f(t)} \quad (85)$$

De plus, on a

$$\theta(t) = \theta(t_0) - i \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du \quad (86)$$

pour $t_0 \in I$.

3. On fixe $t_0 \in I$. Soit θ_0 un argument de $\gamma(t_0)$, on pose

$$\theta(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du \quad (87)$$

Comme $\frac{f'}{f}$ est \mathcal{C}^{k-1} , θ est bien \mathcal{C}^k . On forme $g(t) = e^{i\theta(t)}$ qui est de classe \mathcal{C}^k . On a

$$g'(t) = i\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t) \quad (88)$$

donc $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$, donc $\frac{g}{f}$ est constante sur I et $g(t_0) = e^{i\theta_0} = f(t_0)$ donc $g = f$ sur I .

Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $|f(t)| = |e^{i\theta(t)}| = 1$ et si $\theta(t) = a(t) + i(t)$, on a donc

$$e^{i\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{ia(t)} \quad (89)$$

donc $b(t) = 0$ et $\theta(t) \in \mathbb{R}$. ■

Solution 13. Si c'était le cas, on aurait $2f'(2x) = 3f'(x)$ donc $f'(0) = 0$, ce qui est contradictoire. ■