

*Solutions MP/MP^**

Espaces euclidiens

Solution 1.

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $XX^\top Y = (X|Y)X$ est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}X$. Donc H_X est la matrice de la réflexion par rapport à X^\perp .
2. C'est une conséquence du théorème de réduction.

■

Solution 2.

1. $A \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ab + ac + bc &= 0, \\a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= 1,\end{aligned}\tag{1}$$

(vecteurs colonnes unitaires, vecteurs colonnes orthogonaux, déterminant égal à 1). a, b, c racines de $X^3 - X^2 + p$ si et seulement si $X^3 - X^2 + p = (X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - X^2(a + b + c) + X(ab + bc + ac) - abc$ si et seulement

$$\begin{aligned}a + b + c &= 1, \\ab + bc + cd &= 0, \\-abc &\in \left[0, \frac{4}{27}\right].\end{aligned}\tag{2}$$

Ainsi, si on a (1), on a $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 1$ donc $a + b + c = \pm 1 = \varepsilon \in \{-1, 1\}$. De plus,

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab^2 + ba^2 + ac^2 + ca^2 + bc^2 + cb^2) + 6abc,\tag{3}$$

$$= 1 + 3abc + 6abc + 3a(1 - a^2) + 3b(1 - b^2) + 3c(1 - c^2),\tag{4}$$

$$= 1 + 3abc - 3 - 9abc + 3(a + b + c) + 6abc,\tag{5}$$

$$= 3(a + b + c) - 2,\tag{6}$$

donc $\varepsilon^2 = 3\varepsilon - 2$ donc $\varepsilon = 1$ et $a + b + c = 1$.

On a $b + c = 1 - a$, $bc = -ab - ac = -a(b + c) = a(a - 1)$, et $-abc = a^2(1 - a) = \varphi(a) \geq 0$, car $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ donc $a \in [-1, 1]$. On a $-abc = \varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$, et $a + b + c = 1$

donc un des trois au moins est positif. Comme φ est compris entre 0 et $\frac{4}{27}$ sur $[0, 1]$, on a $-abc \in [0, \frac{4}{27}]$.

Si on a (2), on a $(a + b + c)^2 = 1 = a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2$. On a $(a + b + c)^3 = 1 = a^3 + b^3 + c^3 - 3(a^3 + b^3 + c^3) + 3(a + b + c) + 6abc$ donc $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$.

2. On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a + b + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc l'axe de rotation est $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\text{Tr}(A) =$

$$3a = 1 + 2 \cos(\theta), \text{ donc } \cos(\theta) = \frac{3a-1}{2}, \text{ et } \sin(\theta) = (Af_1 | f_2) = [f_3, f_1, Af_2] \text{ avec } f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } f_2 = f_3 \wedge f_1. \text{ On laisse les calculs au lecteur.}$$

■

Solution 3.

1. $A_n \in S_n(\mathbb{R})$ donc est diagonalisable sur \mathbb{R} .

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a

$$X^T A_n X = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \frac{x_i x_j}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad (7)$$

$$= \int_0^1 \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} x_i t^{\lambda_i - \frac{1}{2}} x_j t^{\lambda_j - \frac{1}{2}} dt, \quad (8)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{\lambda_i - \frac{1}{2}} \right)^2 dt \geq 0. \quad (9)$$

Si $X^T A_n X = 0$, alors pour tout $t \in]0, 1]$, $\sum_{i=1}^n x_i t^{\lambda_i - \frac{1}{2}} = 0$ donc pour tout $y \in]-\infty, 0]$, $\sum_{i=1}^n x_i e^{(\lambda_i - \frac{1}{2})y} = 0$. Or $(y \mapsto e^{(\lambda_i - \frac{1}{2})y})_{1 \leq i \leq n}$ forme une famille libre comme vecteurs propres de la dérivation. Donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$ et $X = 0$.

3. On a $A_n \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc d'après l'inégalité d'Hadamard, on a

$$0 \leq \det(A_n) \leq \prod_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (10)$$

car si $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sum u_n$ converge donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

■

Remarque 1. On rappelle que si A est symétrique complexe, elle n'est pas nécessairement diagonalisable, par exemple $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = X^2$ et $A \neq 0$.

Solution 4.

1. On a

$$E_{i,i} = \frac{1}{2} (I_n + \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, -1, \dots, -1)) \in \text{Vect}(O_n(\mathbb{R})), \quad (11)$$

où le 1 est à l'indice i . De plus, si $i \neq j$, on a

$$E_{i,j} = \frac{1}{2}(A + B), \quad (12)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & & \\ \vdots & & 1 & & & & & & & & & \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & & \\ \vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & & \\ \vdots & & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & 1 & & & \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

et

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & & \\ \vdots & & -1 & & & & & & & & & \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & & \\ \vdots & & & \vdots & -1 & & & \vdots & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & -1 & \vdots & & & & \\ \vdots & & & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & -1 & & & \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

avec les changements aux quadrants correspondants aux j -èmes et i -èmes lignes et colonnes.

Comme A et B sont des matrices de permutation, on a $E_{i,j} \in \text{Vect}(O_n(\mathbb{R}))$.

2. $O_n(\mathbb{R})$ est compact, et $U \mapsto \text{Tr}(AU)$ est continue sur $O_n(\mathbb{R})$, donc bornée et donc N est bien définie. N vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Vérifions la séparation : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$. Pour tout $U \in O_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(AU) = 0$. Par combinaison linéaire, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\text{Tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0$ donc $A = 0$. Donc N est bien une norme.

3. Soit

$$\begin{aligned} \iota : O_n(\mathbb{R}) &\rightarrow O_n(\mathbb{R}) \\ U &\mapsto UV \end{aligned} \quad (15)$$

ι est bijective car $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe. Donc

$$N(VA) = \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} |\text{Tr}(AUV)|, \quad (16)$$

$$= \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} |\text{Tr}(AU)|, \quad (17)$$

$$= N(A). \quad (18)$$

4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propres (positives) de S . Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de

\mathbb{R}^n telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $S\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$. Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$, on a

$$|\mathrm{Tr}(Su)| = |\mathrm{Tr}(US)|, \quad (19)$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n (US\varepsilon_i | \varepsilon_i) \right|, \quad (20)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|U\varepsilon_i\| \|\varepsilon_i\|, \quad (21)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (22)$$

et la borne supérieur est atteinte pour $U = I_n$. Donc $N(S) = \mathrm{Tr}(S)$.

5. Soit $S = \sqrt{AA^\top} \in S_n^+(\mathbb{R})$. D'après la décomposition polaire, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = SO$. Alors on a $N(A) = N(S) = \mathrm{Tr}(\sqrt{AA^\top})$. ■

Solution 5. A et B sont symétriques réelles donc diagonalisables. Si $Ax = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $X^\top AX = \lambda \|X\|^2 \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$: les valeurs propres de A et B sont positives.

Si $A \notin GL_n(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $\det(B) = \prod_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} \mu \geq 0$. Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, d'où

$$A^{-1}B = \sqrt{A^{-1}}\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}\sqrt{A} = \sqrt{A^{-1}}C\sqrt{A}, \quad (23)$$

car $\sqrt{A^{-1}} = \sqrt{A}^{-1}$ (preuve en diagonalisant). Soit X un vecteur unitaire. On a

$$X^\top CX = \underbrace{X^\top \sqrt{A^{-1}}}_{Y^\top} B \underbrace{\sqrt{A^{-1}} X}_Y \geq Y^\top AY = X^\top \sqrt{A^{-1}} A \sqrt{A^{-1}} X = X^\top X = 1. \quad (24)$$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, soit X unitaire tel que $CX = \lambda X$. Il vient $X^\top CX = \lambda \geq 1$. Comme $C \in S_n(\mathbb{R})$, on a $\det(C) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \lambda \geq 1$ donc $\det(B) \geq \det(A)$. ■

Remarque 2. Si on a égalité, alors $\mathrm{Sp}(C) = \{1\}$, donc $C = I_n$ et $A = B$.

Solution 6. $SO(\mathbb{R}^3)$ est un groupe donc $r' \in SO(\mathbb{R}^3)$. Si r est la rotation d'axe orienté par f_3 (unitaire) et d'angle θ , alors $r'(s(f_3)) = s(f_3)$ donc r' est une rotation d'axe orienté par $s(f_3)$ d'angle

θ' . On a $\text{Tr}(r') = \text{Tr}(r)$ donc $\theta' = \pm\theta$. Soit $f_1 \in f_3^\perp$ unitaire et $f_2 = f_3 \wedge f_1$. On a $\sin(\theta) = (r(f_1)|f_2) = [f_3, f_1, r(f_1)]$. Comme s est une isométrie, $s(f_1)$ est unitaire et orthogonal à $s(f_3)$ donc

$$\sin(\theta') = [s(f_3), s(f_1), \underbrace{s(r(f_1))}_{r'(s(f_1))}] = \underbrace{\det(s)}_1 \times \underbrace{[f_3, f_1, r(f_1)]}_{\sin(\theta)}, \quad (25)$$

donc $\theta = \theta'$.

Supposons que r et s commutent alors $r' = r$, donc $s(f_3) \in \text{Vect}(f_3)$ et s est une isométrie donc $s(f_3) \in \{f_3, -f_3\}$. Si $s(f_3) = f_3$, r et s ont même axe. Si $s(f_3) = -f_3$, $-1 \in \text{Sp}(s)$ et s est un retournement et r aussi (car r et s jouent des rôles symétriques), et l'axe de r est perpendiculaire à celui de s .

Réciproquement, si r et s sont de même axe, elles commutent. Si ce sont deux retournements par rapport à deux axes orthogonaux, dans une base orthonormée directe adaptée, elles ont pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donc r et s commutent. ■

Solution 7.

1. D'après le théorème de réduction, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\underbrace{A}_{\in D} = P \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r}, 1, \dots, 1) \underbrace{P^{-1}}_{P^\top}, \quad (26)$$

car $-1 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, où R_θ une matrice de rotation d'angle θ . Donc $\det(A) = 1$ et donc $A \in SO_n(\mathbb{R})$ et $D \subset O_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(A) = M$ si et seulement si $M(I_n + A) = I_n - A$. Si c'est le cas, en transposant, on a

$$(M(I_n + A))^\top = (I_n + A)^\top M^\top, \quad (27)$$

$$= (I_n + A^{-1}) M^\top, \quad (28)$$

$$= (I_n - A)^\top, \quad (29)$$

$$= I_n - A^{-1}, \quad (30)$$

et $A \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $(A + I_n)^\top M = A - I_n$ donc

$$M^\top = (A + I_n)^{-1}(A - I_n) = (A - I_n)(A + I_n)^{-1}, \quad (31)$$

car si $BC = CB$ et C inversible, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.

Ainsi, $M^\top = -M$ donc φ est bien définie de D dans D' .

Soit $M \in D'$, on a $M = \varphi(A)$ si et seulement si $M(I_n + A) = I_n - A$ si et seulement si $(M + I_n)A = I_n - M$.

Lemme 1. Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}} M$, alors $\lambda = 0$.

Preuve du 1. Soit X vecteur propre associé à λ . On a

$$\underbrace{X^\top M X}_{\in \mathbb{R}} = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0} = (X^\top M X)^\top = X^\top M^\top X = -X^\top M X = -\lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0}, \quad (32)$$

donc $\lambda = 0$. ■

On en déduit que $M + I_n$ est inversible, et donc $A = (M + I_n)^{-1}(I_n - M)$. Il vient

$$A^\top = (I_n + M)(I_n - M)^{-1}, \quad (33)$$

$$= (I_n - M)^{-1}(I_n + M), \quad (34)$$

$$= A^{-1}, \quad (35)$$

et donc A est orthogonale.

Si $I_n + A$ n'est pas inversible, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = -X$ et $0 = M(I_n + A)X = (I_n - A)X$ donc $AX = X$: impossible car $X \neq 0$. Donc $I_n + A$ est inversible. ■

Solution 8. Soit A inversible, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\sqrt{A^{-1}} = \sqrt{A}^{-1}$. Alors

$$A^{-1}B = \sqrt{A^{-1}} \underbrace{\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}}_C \sqrt{A}, \quad (36)$$

donc $A^{-1}B$ est semblable à C .

On a $X^\top CX = \underbrace{X^\top \sqrt{A^{-1}}}_{Y^\top} B \underbrace{\sqrt{A^{-1}} X}_Y \geq 0$ donc $C \in S_n^+(\mathbb{R})$.

On a l'inégalité de l'énoncé si et seulement si $1 + \sqrt[n]{\det(A^{-1}B)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A^{-1}B)}$ si et seulement si $1 + \sqrt[n]{\det(C)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + C)}$. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \subset \mathbb{R}$. L'inégalité équivaut à

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (37)$$

S'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_i = 0$, l'inégalité est vraie. Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i > 0$, alors l'inégalité équivaut à

$$\underbrace{\ln \left(1 + \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i) \right) \right)}_{\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)\right)} \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(\ln(\lambda_i)))}_{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(\ln(\lambda_i))}. \quad (38)$$

Comme $\varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$ et $\varphi''(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$, φ est strictement convexe d'où l'inégalité.

De plus, si on a égalité, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$, et C étant diagonalisable, il existe $\lambda \geq 0$ tel que $C = \lambda I_n$, d'où $B = \lambda A$.

Si A n'est pas inversible, soit pour $p \geq 1$, $A_p = \frac{1}{p} I_n + A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\text{Sp}(A_p) = \text{Sp}(A) + \frac{1}{p} \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt[n]{\det(A_p)} + \sqrt[n]{\det(B)} \leq \sqrt[n]{\det(A_p + B)}, \quad (39)$$

et en passant à la limite $p \rightarrow +\infty$, on obtient l'inégalité. ■

Remarque 3. On a $\sqrt[n]{\det\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{\det(A+B)} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)} \right)$. On peut en déduire (par continuité et dichotomie) que $A \mapsto \sqrt[n]{\det(A)}$ de $S_n^+(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} est concave.

Solution 9.

1. On a $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$ et

$$X^\top AX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_i^2 a_{i,i} + \sum_{i \neq j} x_i x_j a_{i,j}. \quad (40)$$

Ainsi, comme $A \in S_n^+(\mathbb{R})$,

$$0 \leq |X|^\top A |X| = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 a_{i,i} + \sum_{i \neq j} |x_i| |x_j| a_{i,j}. \quad (41)$$

Or, pour $i \neq j$, $|x_i| |x_j| a_{i,j} \leq x_i x_j a_{i,j}$. Donc

$$|X|^\top A |X| \leq X^\top A X. \quad (42)$$

2. Si $AX = 0$, d'après ce qui précède on a $|X|^\top A |X| = 0$. Formons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto Y^\top A X \end{aligned} \quad (43)$$

φ est une forme bilinéaire symétrique positive de forme quadratique associée q . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\varphi(Y, |X|)| \leq \sqrt{q(Y)} \underbrace{\sqrt{q(|X|)}}_{=0} = 0. \quad (44)$$

Donc $Y^\top A |X| = 0$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$. Donc $A |X| \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ d'où $A |X| = 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| = 0$ donc $\sum_{j \neq i} a_{i,j} |x_j| + a_{i,i} |x_i| = 0$. Si $|x_i| = 0$, pour tout $j \neq i$, $|x_j| = 0$: impossible. Donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $x_i \neq 0$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in (\ker(A) \setminus \{0\})^2$. Alors $Y - \frac{y_1}{x_1} X \in \ker(A)$ et sa première coordonnée est nulle donc $Y = \frac{y_1}{x_1} X$, donc $\dim(\ker(A)) \leq A$ et $\text{rg}(A) \geq n - 1$.

4. Soit $A' = A - \lambda I_n$. Soit $\lambda_1 \in \text{Sp}(A')$, on a $\text{Sp}(A') = \text{Sp}(A) - \lambda$. Or $\lambda = \min \text{Sp}(A)$, donc pour tout $\lambda' \in \text{Sp}(A')$, $\lambda' \geq 0$ et donc $A' \in S_n^+(\mathbb{R})$ et vérifie les hypothèses de A . On a $0 < \dim(\ker(A')) \leq 1$ et 0 est valeur propre donc $\dim(\ker(A - \lambda I_n)) = 1$: λ est une valeur propre simple.

■

Solution 10. Par récurrence sur $\dim(E) = n$: c'est vrai si $\dim(E) = 1$ car dans ce cas, $u = 0$. Soit $n \geq 1$, supposons le résultat vrai en dimension n et soit E de dimension $n + 1$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})$ une base orthonormée de E . On a $\text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n (u(\varepsilon_i) | \varepsilon_i) = 0$. Soit

$$\begin{aligned} f : S(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (u(x) | x) \end{aligned} \quad (45)$$

. f est continue et $S(0, 1)$ est connexe par arc. Nécessairement, il existe $x \in S(0, 1)$ tel que $(u(x)|x) = 0$. On pose $e_1 = x$, et dans une base orthonormée adaptée à $E = \mathbb{R}_1 \oplus (\mathbb{R}e_1)^\perp$,

$$\text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & A \end{pmatrix}. \quad (46)$$

$\text{Tr}(A) = 0$, et par hypothèse de récurrence, il existe B_1 une base orthonormée de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ (de dimension n) telle que $\text{mat}(p \circ u, B_1) = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix}$ où p est la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}e_1)^\perp$. D'où le résultat. ■

Solution 11.

1. Si u est antisymétrique, avec $y = x$, on a $(u(x)|x) = 0$. Réciproquement, si pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) = 0$, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $(u(x+y)|x+y) = 0 = (u(x)|x) + (u(y)|y) + (u(x)|y) + (u(y)|x)$, d'où $(u(x)|y) = -(x|u - y)$.
2. Soit B une base orthonormée et $A = \text{mat}_B(u)$. u est antisymétrique si et seulement si pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $Y^\top AX = -X^\top AY = -X^\top A^\top X$. Donc, pour X et Y les vecteurs dans la base canonique, on a $A^\top = -A$, et la réciproque est vraie.
3. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \neq 0$ vecteur propre associé. On a $(u(x)|x) = 0 = \lambda \|x\|^2$. Comme $x \neq 0$, on a $\lambda = 0$, donc $\text{Sp}(u) \subset \{0\}$.

Si $\dim(E)$ est impair, χ_u est de degré impair, donc admet une racine réelle (par le théorème des valeurs intermédiaires), donc $0 \in \text{Sp}(u)$.

4. Par récurrence sur $\dim(E) = n$. Si $n = 1$, $\text{mat}_B(u) = (0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai pour $\dim(E) \leq n$. Soit E de dimension $n + 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique.

Lemme 2. Si F est stable par u , F^\perp .

Preuve du 2. Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. On a $(u(x)|y) = -(\underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{u(y)}_{\in F}) = 0$. ■

Rappelons par ailleurs qu'il existe F stable par u de dimension 1 ou 2, dans une base orthonormée B_1 de F : $\text{mat}_{B_1}(u|_F) = (0)$ si $\dim(F) = 1$, et $\text{mat}_{B_2}(u|_F) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ si $\dim(F) = 2$. On applique l'hypothèse de récurrence à F^\perp .

5. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\exp(A)^\top = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^k)^\top}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-A)^k}{k!} = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}, \quad (47)$$

car $A \mapsto A^\top$ est linéaire et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie donc continue.

$\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) = \exp(0) = 1$ en trigonalisant sur \mathbb{C} . Ainsi, $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in SO_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathbb{R}^k$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$M = P \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, -1, \dots, -1, 1, \dots, 1), \quad (48)$$

où -1 apparaît n_1 fois, avec n_1 pair car $\det(M) = 1$, donc

$$M = P \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, R_\pi, \dots, R_\pi, 1, \dots, 1), \quad (49)$$

où l'on rappelle que R_θ représente une matrice de rotation d'angle θ en dimension 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a R_{\frac{\pi}{2}}. \quad (50)$$

Comme $R_{\frac{\pi}{2}}^2 = -I_2$, $R_{\frac{\pi}{2}}^3 = -R_{\frac{\pi}{2}}$ et $R_{\frac{\pi}{2}}^4 = I_2$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k a^{2k} I_2, \quad (51)$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k a^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Donc

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{a^{2k}}{(2k)!} I_2 + \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad (53)$$

$$= \cos(a) I_2 + \sin(a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_a. \quad (54)$$

Ainsi, $M = P \exp(\underbrace{\text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, R_\pi, \dots, R_\pi, 0, \dots, 0)}_{A' \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}) P^{-1} = \exp(\underbrace{P A' P^{-1}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})})$, donc $M \in \exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Solution 12.

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}, \quad (55)$$

d'où

$$\exp(A) = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R}). \quad (56)$$

Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$B = P \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P^{-1}, \quad (57)$$

avec $\mu_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit

$$A = P \operatorname{diag}(\ln(\mu_1), \dots, \ln(\mu_n)) P^{-1}. \quad (58)$$

Alors $\exp(A) = B$.

Soit $(A_1, A_2) \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $\exp(A_1) = \exp(A_2) = B$. Soient $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$ correspondant à A_1 et A_2 , et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ correspondant à B . On vérifie que les sous-espaces propres de u_1 et u_2 sont ceux de v . Il s'ensuit que $u_1 = u_2$. En effet, si $A \in \operatorname{Sp}(u_1)$, et si $u_1(x) = \lambda_1 x$, alors $\exp(u_1)(x) = v(x) = e^\lambda x$ donc $\ker(u_1 - \lambda_i \operatorname{id}) \subset \ker(v - e^{\lambda_i} \operatorname{id})$. u_1 étant diagonalisable, si les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, alors

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(u_i - \lambda_i \operatorname{id}) \subset \bigoplus_{i=1}^r \ker(v - e^{\lambda_i} \operatorname{id}) \subset \mathbb{R}^n. \quad (59)$$

D'où $\ker(u_i - \lambda_i \operatorname{id}) = \ker(v - e^{\lambda_i} \operatorname{id})$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

2. On a $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$, c'est la somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur les compacts.
3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\|M\| = \sup_{\|X\|=1} \|MX\|$. Soit $X \in S(0, 1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|X^\top M_k X - X^\top M X| = |((M_k - M)(X)|X)|, \quad (60)$$

$$\leq \|(M_k - M)(X)\|, \quad (61)$$

$$\leq \|M_k - M\|. \quad (62)$$

Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $\|M_k - M\| \leq \min(\frac{\alpha}{2}, 1)$. On a pour tout $k \geq k_0$, $\alpha \leq X^\top M X \leq \beta$ d'où

$$\alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \leq X^\top M_k X \leq \beta + 1. \quad (63)$$

4.

Lemme 3. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$, noté $\rho(A)$.

Preuve du lemme 3. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale qui diagonalise A avec $A\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$. Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \in S(0, 1)$, on a $AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i$. Alors

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i)^2 \leq \rho(A)^2 \underbrace{\|X\|^2}_{=1}, \quad (64)$$

et $\|AX\|^2 = \rho(A)$ pour X vecteur propre associé à une des valeurs propres de valeur absolue maximale. ■

D'après ce qui précède, pour tout $k \geq k_0$, $\text{Sp}(\mu_k) \subset [\frac{\alpha}{2}, \beta + 1]$. Donc

$$\text{Sp}(\ln(M_k)) \subset \left[\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right), \ln(\beta + 1) \right]. \quad (65)$$

Alors $\|\ln(M_k)\| \leq \max(|\ln(\frac{\alpha}{2})|, |\ln(\beta + 1)|)$, pour tout $k \geq k_0$.

5. $(\ln(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée en dimension finie, donc admet une valeur d'adhérence A . Pr, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln(M_k) \in S_n(\mathbb{R})$ fermé car sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en dimension finie. Donc $A \in S_n(\mathbb{R})$. En notant l'extraction σ , on a $\ln(M_{\sigma(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$ donc $M_{\sigma(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \exp(A) = M$ par continuité de l'exponentielle.

De plus, par injectivité, on a bien $A = \ln(M)$. La suite $(\ln(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence $\ln(M)$, donc converge vers $\ln(M)$. ■

Remarque 4. Généralement, soient E et F de dimension finie. Soit A un fermé de E , et $f: A \subset E \rightarrow B \subset F$ bijective continue. On suppose que si $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(f^{-1}(\eta_k))_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ est bornée. Alors f^{-1} est continue.

Solution 13. $S_F(0, 1)$ est compacte, et $X \mapsto (AX|X)$ est continue, donc admet un maximum sur $S_F(0, 1)$ et $\Phi(F)$ est bien définie.

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée qui diagonalise A : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n tel que $\dim(F) = k$. Soit $X) \sum_{i=1}^n X_i \varepsilon_i \in S_F(0, 1)$. Alors $(AX|X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

Soit $E_k = \text{Vect}(\varepsilon_k, \dots, \varepsilon_n)$, $\dim(E_k) = n - k + 1$. Nécessairement, $E_k \cap F \neq \{0\}$, car sinon $\dim(E_k + F) = n + 1$.

Soit $x = \sum_{i=k}^n x_i \varepsilon_i \in E_k \cap F$ unitaire. Alors

$$(AX|X) = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2 = \lambda_k. \quad (66)$$

Donc $\Phi(F) \geq \lambda_k$.

Soit $F_k = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ de dimension k . Pour tout $x \in F_k$ unitaire, on a $(AX|X) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k$.

λ_k est atteint pour $x = \varepsilon_k$, d'où $\lambda_k = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=k}} \Phi(F)$. ■

Solution 14. Comme les valeurs propres de A sont $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$, on a

$$\text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 = \text{Tr}(A^T A) = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}} a_{i,j}^2, \quad (67)$$

et donc pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$. ■

Solution 15. Soit F' un sous-espace vectoriel de dimension k de \mathbb{R}^{n-1} , on lui associe $F = F' \times \{0\}$ de dimension k de \mathbb{R}^n .

$$\text{Soit } X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in F' \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ On a}$$

$$(A'X'|X') = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n-1\}^2} a_{i,j} x_i x_j = (AX|X), \quad (68)$$

et $\|X'\| = \|X\|$.

Donc $\Phi'(F') = \Phi(F) \geq \lambda_k$. Ceci est valable pour tout sous-espace vectoriel F' de \mathbb{R}^{n-1} de dimension k , donc $\mu_k \geq \lambda_k$.

Soit G un sous-espace vectoriel de dimension $k+1$ de \mathbb{R}^n .

— Si $G \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, on a comme précédemment, en notant

$$G' = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in G\}, \quad (69)$$

un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{n-1} de dimension $k+1$ et comme précédemment, on a $\Phi(G) = \Phi'(G') \geq \mu_{k+1} \geq \mu_k$.

— Si $G \not\subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, on forme

$$G_1 = G \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \quad (70)$$

On a $\dim(G) + \dim(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) - \dim(G_1) = \dim(G + \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = n$, donc $\dim(G_1) = k$.

Comme $G_1 \subset G$, on a $\Phi(G) \geq \Phi(G_1) \geq \mu_k$. Dans tous les cas, $\Phi(G) \geq \mu_k$ donc $\lambda_{k+1} \geq \mu_k$. ■

Solution 16.

- Supposons qu'il existe $(v, w) \in \left(\overline{B_{\|\cdot\|}(0, 1)}\right)^2$ tel que $u = \frac{v+w}{2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|v(x)\| \leq \|x\|$ et $\|w(x)\| \leq \|x\|$, car $\|v\| \leq 1$ et $\|w\| \leq 1$. Donc

$$\|u(x)\| = \|x\| \leq \left\| \frac{1}{2} (v(x) + w(x)) \right\| \leq \frac{\|v(x)\| + \|w(x)\|}{2} \leq \|x\|. \quad (71)$$

On a donc $\|v(x)\| = \|x\| = \|w(x)\|$ et il existe $\lambda_x \geq 0$ tel que $v(x) = \lambda_x w(x)$ (égalité dans Minkowski). Donc $\lambda_x = 1$, et ceci étant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $v = w = u$. Donc u est extrémal.

2. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n et $A = \text{mat}_B(u)$. On pose $S = \sqrt{A^\top A} \in S_n^+(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $\theta \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \theta \times S$ (décomposition polaire). Pour tout $X \in S(0, 1)$, comme $\|A\| \leq 1$, on a $\|AX\| \leq 1$. Par ailleurs, pour tout $X \in S(0, 1)$, $X^\top S^2 X = (AX|AX) = \|AX\|^2 \leq 1$. Donc $\text{Sp}(S^2) \subset [0, 1]$ et $\text{Sp}(S) \subset [0, 1]$ car $S \in S_n(\mathbb{R})$. Si $\text{Sp}(S) = \{1\}$, on a $S = I_n$, et $A = \theta \in O_n(\mathbb{R})$ ce qui n'est pas. Donc il existe $\lambda \in \text{Sp}(S)$ tel que $\lambda \in [0, 1[$.

Dans une base orthonormée B' qui diagonalise S , on a $A' = \text{mat}_{B'}(u) = \theta' \times \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in [0, 1]$ et $\lambda_1 < 1$.

Si $\lambda_1 \neq 0$, soit $\varepsilon = \min(\lambda_1, 1 - \lambda_1)$, on pose $S^+ = \text{diag}(\lambda_1 - \varepsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $S^- = \text{diag}(\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $B = \theta' \times S^+$, $C = \theta' \times S^-$, $A' = \frac{B+C}{2}$ et $B \neq C \neq A$. Comme les valeurs propres de S^+ et S^- sont dans $[0, 1]$, on a $\|S^+\| \leq 1$, $\|S^-\| \leq 1$. Et $\|\theta'\| = 1$, d'où $\|B\| \leq 1$ et $\|C\| \leq 1$. Donc u n'est pas extrémal.

Si $\lambda_1 = 0$, $S^+ = \text{diag}(-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $S^- = \text{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, et parallèlement, u n'est pas extrémal. Les points extrémaux sont les isométries.

3. Soit $\|\cdot\|_2$ une norme euclidienne. Si $\|X\|_2 < 1$, alors X n'est pas extrémal et il existe $(\lambda, \mu) \in [0, 1]^2$ tel que $X = \frac{\lambda X + \mu X}{2}$.

Soit X tel que $\|X\|_2 = 1$, si $X = \frac{Y+Z}{2}$ avec $\|Y\|_2 \leq 1$ et $\|Z\|_2 \leq 1$. On a

$$\|X\|_2 = 1 = \left\| \frac{Y+Z}{2} \right\|_2 \leq \frac{\|Y\|_2 + \|Z\|_2}{2} \leq 1. \quad (72)$$

On a égalité partout, comme pour la première question, on a $Y = Z = X$. Les points extrémaux sont les points de la sphère unité. En prenant $A = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$, on a $\|A\| = 1$ mais A n'est pas une isométrie pour $n \geq 2$. Donc la norme triple n'est pas une norme euclidienne. ■

Solution 17. Si $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ alors $A^3 = P \text{diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3) P^{-1}$. $\sqrt[3]{\cdot}$ étant injectif, on a $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(B)$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ les valeurs propres distinctes de A . Soient u et v canoniquement associés à A et B . u et v sont diagonalisables. Soit $x \in \ker(u - \lambda_i \text{id})$. On a $u(x) = \lambda_i x$, on a $u^3(x) = \lambda_i^3 x$, donc $\ker(u - \lambda_i \text{id}) \subset \ker(u^3 - \lambda_i^3 \text{id})$ car les $(\lambda_j^3)_{1 \leq j \leq i}$ sont distincts. On a

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \text{id}) \subset \bigoplus_{i=1}^r \ker(u^3 - \lambda_i^3 \text{id}) \subset \mathbb{R}^n, \quad (73)$$

donc $\ker(u - \lambda_i \text{id}) = \ker(u^3 - \lambda_i^3 \text{id}) = \ker(v^3 - \lambda_i^3 \text{id}) = \ker(v - \lambda_i \text{id})$. u et v ont les mêmes valeurs propres et même sous-espaces propres, donc sont égaux et $A = B$. ■

Solution 18. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^{n+1})^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x = (x_0, \dots, x_n), y = (x_0, \dots, y_n)) &\mapsto \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \frac{x_i y_j}{i+j+1} \end{aligned} \quad (74)$$

C'est une forme bilinéaire symétrique. q dérive de φ . Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on a

$$q(x) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j} dt, \quad (75)$$

$$= \int_0^1 \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} x_i x_j t^{i+j} dt, \quad (76)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n x_i t^i \right)^2 dt \geq 0. \quad (77)$$

Si l'intégrale est nulle, alors $\sum_{i=0}^n x_i t^i = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. C'est un polynôme en t ayant une infinité de racines sur $[0, 1]$, c'est donc le polynôme nul donc pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i = 0$ donc $x = 0$. ■

Solution 19. Pour $n = 1$, on considère $x_0 = 0$ et $\|x_1\| = 1$. Si $c_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_2}{2}$. Alors

$$\|c_1 - x_1\| = \|c_1 - x_2\| = \frac{1}{2}. \quad (78)$$

Soit pour $n \geq 1$, H_n : « Pour E de dimension n , il existe $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$, pour tout $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| = 1$ et pour $c_n = \frac{(x_1 + \dots + x_{n+1})}{n+1}$, il existe r_n tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\|x_i - c_n\| = r_n$ ».

Supposons H_n est vraie. Soit E_n de dimension $n+1$ et soit H un hyperplan de E . Il existe $(x_1, \dots, x_{n+1}, c_n, r_n)$ vérifiant H_n . Soit u un vecteur unitaire orthogonal à H . Soit D la droite passant par c_n et de vecteur directeur u : $D = \{c_n + tu | t \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|x_i - (c_n + tu)\|^2 = \|x_i - c_n\|^2 + t^2 = r_n^2 + t^2. \quad (79)$$

Posons $x_{n+2} = c_n + \sqrt{1 - r_n^2} u$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\|x_{n+2} - x_i\| = 1$. Soit

$$c_{n+1} = \frac{x_1 + \dots + x_{n+2}}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} c_n + \frac{1}{n+2} x_{n+2} = c_n + \frac{\sqrt{1 - r_n^2}}{n+2} u. \quad (80)$$

Pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a

$$\|c_{n+1} - x_i\|^2 = \frac{1 - r_n^2}{(n+2)^2} + r_n^2, \quad (81)$$

$$= \frac{1 + ((n+2)^2 - 1)r_n^2}{(n+2)^2}, \quad (82)$$

$$= \frac{1 + (n+1)(n+3)r_n^2}{(n+2)^2}. \quad (83)$$

On pose $r_{n+1} = \sqrt{\frac{1+(n+1)(n+3)r_n^2}{(n+2)^2}}$, puis

$$\|c_{n+1} - x_{n+2}\|^2 = \left(\frac{\sqrt{1 - r_n^2}}{n+2} - \sqrt{1 - r_n^2} \right)^2 = \frac{1 - r_n^2}{(n+2)^2} (n+1)^2. \quad (84)$$

On a

$$r_n^2 = \left\| \frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} - x_1 \right\|^2, \quad (85)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \left\| \sum_{i=2}^{n+1} (x_i - x_1) \right\|^2, \quad (86)$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \times \left(n+2 \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_1 | x_j - x_i) \right). \quad (87)$$

On a, pour tout $i \neq j \neq 1$,

$$\|x_i - x_j\|^2 = 1 = \|(x_i - x_1) + (x_1 - x_j)\|^2 = 2 + 2(x_i - x_1 | x_1 - x_j), \quad (88)$$

d'où $(x_i - x_1 | x_j - x_1) = \frac{1}{2}$, puis

$$r_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \left(n + \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n}{2(n+1)}, \quad (89)$$

et

$$r_{n+1}^2 = \frac{1 + \frac{n(n+3)}{2}}{(n+2)^2}, \quad (90)$$

$$= \frac{n(n+3) + 2}{2(n+2)^2}, \quad (91)$$

$$= \frac{n+1}{2(n+2)} \in [0, 1[. \quad (92)$$

Et en reportant,

$$\|c_{n+1} - x_{n+2}\|^2 = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} (1 - r_n^2), \quad (93)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \left(1 - \frac{n}{2(n+1)}\right), \quad (94)$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)^2}{(n+2)^2 2(n+1)}, \quad (95)$$

$$= \frac{n+1}{2(n+2)}, \quad (96)$$

$$= r_{n+1}. \quad (97)$$

■

Remarque 5 (Méthode directe). Soit E euclidien de dimension $n+1$. Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) une base orthonormée de E . On a $\frac{\|e_i - e_j\|}{2} = 1$ pour $i \neq j$. Soit

$$H = \{x = x_1 e_1 + \dots + x_{n+1} e_{n+1} \in E \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\}, \quad (98)$$

hyperplan de E . On a $\dim(E) = n$, pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, soit $y_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - c) \in H$ avec $c = \frac{e_1 + \dots + e_{n+1}}{n+1}$ et pour tout $i \neq j$, $\|y_i - y_j\| = 1$.

Solution 20. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^n)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i - \alpha \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \end{aligned} \quad (99)$$

Alors $\varphi(x, x) = q(x)$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n , pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (100)$$

d'où $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$.

- Si $\alpha < \frac{1}{n}$, on a $q(x_1, \dots, x_n) \geq (1 - n\alpha) \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ et si $q(x_1, \dots, x_n) = 0$, alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ donc les x_i sont nuls.
- Si $\alpha \geq \frac{1}{n}$, on a $q(1, \dots, 1) = n - \alpha n^2 = n(1 - \alpha n) \leq 0$.

Finalement, q est une forme quadratique définie positive si et seulement si $\alpha < \frac{1}{n}$. ■

Solution 21.

1. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|^2 = 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^n \lambda_i \lambda_j (e_i | e_j). \quad (101)$$

On a alors

$$0 \leq \left\| \sum_{i=1}^n |\lambda_i| e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^n |\lambda_i| |\lambda_j| (e_i | e_j) \leq 0, \quad (102)$$

car $|\lambda_i| |\lambda_j| \geq \lambda_i \lambda_j$ et $(e_i | e_j) \leq 0$ donc $|\lambda_i| |\lambda_j| (e_i | e_j) \leq \lambda_i \lambda_j (e_i | e_j)$. Ainsi, $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| e_i = 0$.

Notons que $\sum_{i \neq j} (|\lambda_i| |\lambda_j| - \lambda_i \lambda_j) (e_i | e_j) = 0$ et chaque terme est négatif, donc pour tout $i \neq j$, $(|\lambda_i| |\lambda_j| - \lambda_i \lambda_j) (e_i | e_j) = 0$. Si $(e_i | e_j) < 0$, λ_i et λ_j sont donc de mêmes signes.

2. On suppose que $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^p |\lambda_i| e_i = 0$ et $(\varepsilon | \sum_{i=1}^p |\lambda_i| e_i) = 0 = \sum_{i=1}^p |\lambda_i| (\varepsilon | e_i)$ et chaque terme de la somme est positif, donc pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\lambda_i = 0$ et (e_1, \dots, e_p) est libre.
3. On a $(-x | e_i) < 0$ donc $(-x, e_1, \dots, e_p)$ vérifie l'hypothèse. On a $1 \times (-x) + \sum_{i=1}^p x_i e_i = 0$ et d'après ce qui précède, $-x + \sum_{i=1}^p |x_i| e_i = 0$ donc $x = \sum_{i=1}^p |x_i| e_i = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ et par unicité, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|x_i| = x_i \geq 0$.

Soit $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $x_{i_0} = 0$. On a

$$(x | e_{i_0}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p x_i (e_i | e_{i_0}) > 0, \quad (103)$$

ce qui est absurde donc pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $x_i > 0$. ■

Solution 22. — En dimension 1, soit $E = \text{Vect}(u)$ avec u unitaire. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, $\dim(E) = 1$ donc pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i = \lambda_i u$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, et pour $i \neq j \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $(x_i | x_j) = \lambda_i \lambda_j$, d'où $p \leq 2$ si on veut $(x_i | x_j) < 0$ pour tout $i \neq j \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$. Or $(u, -2)$ est obtusangle donc $r_1 = 2$.

— En dimension 2, on suppose $r_2 = 3$.

Par récurrence, supposons $r_n = n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace euclidien de dimension $n + 1$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille obtusangle maximale (avec $p \geq 2$). En particulier, $x_1 \neq 0$. Soit $H = x_1^\perp$ de dimension n et pour tout $i \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $x'_i = p_H(x_i)$. Pour tout $i \in \llbracket 2, p \rrbracket$, on a $x_i = x'_i + y_i$ avec $y_i = \lambda_i x_1$ avec $(x_i | x_1) = \lambda_i \|x_1\|^2 < 0$ donc $\lambda_i < 0$, et pour tout $i \neq j \in \llbracket 2, p \rrbracket^2$, $(x_i | x_j) = (x'_i | x'_j) + \underbrace{\lambda_i \lambda_j \|x_1\|^2}_{>0} < 0$, donc $(x'_i | x'_j) < 0$.

Par hypothèse de récurrence, on a donc $p - 1 \leq n + 1$ d'où $p \leq n + 2$ d'où $r_{n+1} \leq n + 2$.

De plus soit H un hyperplan (quelconque) de E . Par hypothèse de récurrence, il existe alors $(x'_2, \dots, x'_{n+2}) \in H^{n+1}$ obtusangle. Soit x_1 un vecteur orthogonal à H . Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n + 2 \rrbracket$, $x_i = x'_i - \varepsilon x_1$. On a $(x'_i | x_1) < 0$ et $(x_i | x_j) = (x'_i | x'_j) + \varepsilon^2$ pour tout $i \neq j \in \llbracket 2, n + 2 \rrbracket$. Il suffit de prendre

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{i \neq j \in \llbracket 2, n+2 \rrbracket^2} \left(\sqrt{-(x'_i | x'_j)} \right) > 0, \quad (104)$$

donc on a bien $r_{n+1} = n + 2$. ■

Solution 23.

1. En posant $u_0 = 0$ cela revient à trouver $(u_0, \dots, u_n) \in E^{n+1}$ tel que pour tout $i \neq j$, $\|u_i - u_j\| = 1$. On sait que dans \mathbb{R}^{n+1} euclidien, soit la base canonique de (e_1, \dots, e_{n+1}) on a pour tout $i \neq j$, $\left\| \frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}} \right\| = 1$. Soit donc

$$c = \frac{e_1 + \dots + e_{n+1}}{(n+1)\sqrt{2}}, \quad (105)$$

et $H = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$ hyperplan. Soit $v_i = \frac{e_i}{\sqrt{2}} - c \in H$ et pour tout $i \neq j$, $\|v_i - v_j\| = 1$.

On a ainsi $n + 1$ vecteurs dans H (de dimension n) tels que $\|v_i - v_j\| = 1$. On pose pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i = v_i - v_{n+1}$ unitaires et pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, $\|u_i - u_j\| = 1$.

2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$. On a $\|u_i - u_j\|^2 = 1 = \|u_i\|^2 - 2(u_i | u_j) + \|u_j\|^2$ donc $(u_i | u_j) = \frac{1}{2}$. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i (u_i | u_j) = 0$ donc $\lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \lambda_i = 0$. Posons $S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. On a $\lambda_j = -S$, donc $\sum_{j=1}^n \lambda_j = -nS = S$ donc $S = 0$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_j = 0$. Ainsi, (u_1, \dots, u_n) est une base.

3. A priori, on peut écrire

$$u_j = \sum_{i=1}^{j-1} b_{i,j} e_i + a_j e_j = \sum_{i=1}^{j-1} (e u_j | e_i) e_i + a_j e_j. \quad (106)$$

Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, montrons que pour $j \neq k > i$, $(u_j | e_i) = (u_k | e_i)$ si et seulement si $(u_j - u_k | e_i) = 0$. On a $e_i \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_i)$ (procédé de Gram-Schmidt) et pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$,

$$(u_j - u_k | u_l) = (u_j | u_l) - (u_k | u_l) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad (107)$$

car $j \neq l$, $k \neq l$ et $l \leq i < j, k$. Par combinaison linéaire, $(u_j - u_k | e_i) = 0$, d'où le résultat. ■

Solution 24. S'il existe $u \in O(E)$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i = u(x_i)$, alors on a directement

$$(y_i | y_j) = (u(x_i) | u(x_j)) = (x_i | x_j), \quad (108)$$

pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$.

Réciproquement, si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $(x_i | x_j) = (y_i | y_j)$, alors soient $F = \text{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ et (x_1, \dots, x_n) une base de F (quitte à renuméroter).

Lemme 4. Soit $\text{Gram}(z_1, \dots, z_p) = ((z_i | z_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ de colonnes C_1, \dots, C_n . Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$, alors on a $\alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_p C_p = 0$ si et seulement si $\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_p z_p = 0$.

Preuve du lemme 4. On a $\alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_p C_p = 0$ si et seulement si $\sum_{j=1}^p \alpha_j z_j \in \{z_1, \dots, z_p\}^\perp$ si et

seulement si $\sum_{j=1}^p \alpha_j z_j = 0$; car $C_j = \begin{pmatrix} (z_1 | z_j) \\ \vdots \\ (z_p | z_j) \end{pmatrix}$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. ■

D'après le lemme, on a $\text{Gram}(y_1, \dots, y_r) = \text{Gram}(x_1, \dots, x_r) \in GL_r(\mathbb{R})$ donc (y_1, \dots, y_r) est libre. D'autre part, pour tout $i \in \llbracket r+1, p \rrbracket$, il existe $(\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{p,i}) \in \mathbb{R}^p$,

$$x_i = \alpha_{1,i} x_1 + \dots + \alpha_{p,i} x_p. \quad (109)$$

D'après le lemme, on a $y_i = \alpha_{1,i} y_1 + \dots + \alpha_{p,i} y_p$. Soit $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ une base orthonormée de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_r)^\perp = F^\perp$ et (f_{r+1}, \dots, f_n) une base orthonormée de $\text{Vect}(y_1, \dots, y_r)^\perp$.

Soit u telle que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u(x_i) = y_i$, et pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$, $u(\varepsilon_i) = f_i$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a bien pour tout $i \in \llbracket r+1, p \rrbracket$, $u(x_i) = y_i$. Soit enfin $x \in E$, avec

$$x = \underbrace{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r}_{\in F} + \underbrace{\alpha_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \cdots + \alpha_n \varepsilon_n}_{\in F^\perp}. \quad (110)$$

On a alors

$$u(x) = \underbrace{\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_r y_r}_{\in \text{Vect}(y_i)_{1 \leq i \leq r}} + \underbrace{\alpha_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \alpha_n f_n}_{\in \text{Vect}(y_i)_{1 \leq i \leq r}^\perp}. \quad (111)$$

Enfin,

$$\|u(x)\|^2 = \|\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_r y_r\|^2 + \|\alpha_{r+1} f_{r+1} + \cdots + \alpha_n f_n\|^2, \quad (112)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2} \alpha_i \alpha_j \underbrace{(y_i | y_j)}_{(x_i | x_j)} + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i^2, \quad (113)$$

$$= \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r\|^2 + \left\| \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \varepsilon_i \right\|^2, \quad (114)$$

$$= \|x\|^2, \quad (115)$$

donc $u \in O(E)$. ■

Solution 25.

Lemme 5. *S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f^k\| \leq M$, alors $E = \ker(f - id) \oplus \text{Im}(f - id)$ et $\left(\frac{id + f + \cdots + f^k}{k+1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers π , projecteur sur $\ker(f - id)$ parallèlement à $\text{Im}(f - id)$.*

Preuve du lemme 5. Soit $x \in E$, on a

$$(id - f) \left(\frac{id + f + \cdots + f^k}{k+1} \right) (x) = \frac{id - f^{k+1}}{k+1} (x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0, \quad (116)$$

$$\text{car } \frac{\|f^{k+1}(x)\|}{k+1} \leq \frac{M\|x\|}{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Soit $y \in \ker(f - id) \cap \text{Im}(f - id)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) - x = y$ et $f(y) = y$, donc

$$\frac{id + f + \cdots + f^k}{k+1} (y) = y = \left(\frac{id + f + \cdots + f^k}{k+1} \right) (f - id)(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (117)$$

Donc $y = 0$. Comme on est en dimension finie, on a

$$E = \ker(f - id) \oplus \operatorname{Im}(f - id). \quad (118)$$

Soit $x \in E$, il existe $(y, z) \in \ker(f - id) \times \operatorname{Im}(f - id)$ tel que $x = z + y$. Il existe $x_1 \in E$ tel que $z = f(x_1) - x_1$. Alors

$$\frac{(id + f \cdots + f^k)}{k+1}(x) = y + \frac{(f^{k+1} - id)}{k+1}(x_1) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y. \quad (119)$$

■

Ici, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in E$, $\|f^2(x)\| = \|f \circ f(x)\| \leq \|f(x)\| \leq \|x\|$. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f^k(x)\| \leq \|x\|$. On peut donc appliquer le lemme précédent. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in E$, $\left\| \frac{id + f + \cdots + f^k}{k+1}(x) \right\| \leq \|x\|$.

Lemme 6. Si $E = F \oplus G$ et F et G ne sont pas orthogonaux. Soit $\Pi_{F//G}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $\|\Pi(x)\| \geq \|x\|$.

Preuve du lemmè 6. Soit $(y, z) \in F \times G$ tel que $(y|z) \neq 0$. Supposons (quitte à remplacer z par $-z$) $(y|z) < 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|y + tz\|^2 - \|y\|^2 = 2t(y|z) + t^2\|z\|^2 \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} 2t(y|z) < 0. \quad (120)$$

Comme $\|y\|^2 = \|\Pi(y + tz)\|^2$, il existe $t > 0$ tel que $\|y - tz\| \leq \|\Pi(y + tz)\|$. ■

D'après le lemme précédent, $\ker(f - id)$ et $\operatorname{Im}(f - id)$ sont orthogonaux. ■

Solution 26.

1. Soit $y \in C$ et $K = \overline{B(x, \|y - x\|)} \cap C$. K est un compact, car fermé borné en dimension fini, et non vide car $y \in K$. Soit $z \mapsto d(x, z) = \|x - z\|$ de \mathbb{K} dans \mathbb{R} . Elle est continue (car 1-Lipschitzienne) sur un compact donc admet un minimum atteint en z_0 . On a $\|x - z_0\| \leq \|x - y\|$. Si $z \in C \setminus K$, on a $\|z - x\| > \|x - y\| \geq \|z_0 - x\|$.

Pour l'unicité, soient $z_1, z_2 \in C$ tels que $d(x, C) = \|x - z_1\| = \|x - z_2\|$. On a $\frac{z_1 + z_2}{2} \in C$ par convexité, on a

$$\left(x - \frac{z_1 + z_2}{2} | z_1 - z_2\right) = \frac{1}{2} ((x - z_1) + (x - z_2))(x - z_2) - (x - z_1)), \quad (121)$$

$$= \frac{1}{2} \left| \|x - z_1\|^2 - \|x - z_2\|^2 \right|, \quad (122)$$

$$= 0, \quad (123)$$

donc $z_1 - z_2$ est orthogonal à $x - \frac{z_1 + z_2}{2}$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x - z_1\|^2 = \left\|x - \frac{z_1 + z_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{z_1 - z_2}{2}\right\|^2 \geq \|x - z_1\|^2 + \left\|\frac{z_1 - z_2}{2}\right\|^2. \quad (124)$$

Nécessairement, $z_1 = z_2$

2. Soit $y \in C$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\|tp_C(x) + (1 - t)y - x\|^2 = \|(1 - t)(y - p_C(x)) - (x - p_C(x))\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2, \quad (125)$$

et le terme de gauche vaut

$$\|x - p_C(x)\|^2 + \underbrace{(1 - t)^2 \|y - p_C(x)\|^2 - 2(1 - t)(x - p_C(x)|y - p_C(x))}_{\varphi(t)}. \quad (126)$$

On a donc $\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si $(x - p_C(x)|y - p_C(x)) > 0$, on aurait $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} -2(1 - t)(x - p_C(x)|y - p_C(x)) < 0$: impossible. Donc $(x - p_C(x)|y - p_C(x)) \leq 0$.

Soit $z \in C$ tel que pour tout $y \in C$, $(x - z|y - z) \leq 0$, alors pour tout $y \in C$, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 + 2(x - z|z - y) \geq \|x - z\|^2, \quad (127)$$

donc par unicité de $p_C(x)$, $z = p_C(x)$.

3. Soit $x_1, x_2 \in E$. Si $p_C(x_1) = p_C(x_2)$, on a $0 = \|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$. Si non, soit $H = \text{Vect}(p_C(x_2) - p_C(x_1))^\perp$, on a

$$\begin{aligned} x_1 - p_C(x_1) &= \lambda_1(p_C(x_1) - p_C(x_2)) + y_1, \\ x_2 - p_C(x_2) &= \lambda_2(p_C(x_1) - p_C(x_2)) + y_2, \end{aligned} \quad (128)$$

avec $y_1, y_2 \in H$. Alors

$$0 \geq (x_1 - p_C(x_1)|p_C(x_2) - p_C(x_1)) = \lambda_1 \|p_C(x_2) - p_C(x_1)\|^2, \quad (129)$$

donc $\lambda_1 \leq 0$ et de même, $\lambda_2 \leq 0$. Alors on a

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1 - p_C(x_1) + p_C(x_1) - p_C(x_2) + p_C(x_2) - x_2\|^2, \quad (130)$$

$$= \|(1 - \lambda_1 - \lambda_2)(p_C(x_1) - p_C(x_2) + y_1 - y_2)\|^2, \quad (131)$$

$$= \underbrace{|1 - \lambda_1 - \lambda_2|^2}_{\geq 1} \times \|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2, \quad (132)$$

$$\geq \|p_C(x_1) - p_C(x_2)\|^2, \quad (133)$$

d'après le théorème de Pythagore. Donc $p_C: E \rightarrow C$ est 1-Lipschitzienne. ■

Remarque 6. Dans la question 2), si $x \notin C$, on considère H l'hyperplan passant par $p_C(x)$ et orthogonal à $x - p_C(x)$. C est de l'autre côté de H par rapport à x .

Solution 27.

1. φ est linéaire par rapport à la seconde variable car $G \subset \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. De plus, on a

$$\varphi(y, x) = \sum_{g \in G} (g(y)|g(x)) = \sum_{g \in G} \overline{(g(x)|g(y))} = \overline{\varphi(x, y)}, \quad (134)$$

et $\varphi(x, x) = \sum_{g \in G} \|g(x)\|^2 \geq 0$. Enfin, si $\varphi(x, x) = 0$ alors pour tout $g \in G$, $\|g(x)\| = 0$. En particulier, pour $g = id$, on a $x = 0$. Donc φ est un produit scalaire.

Soit $g_0 \in G$. Comme $g \mapsto g \circ g_0$ est bijectif de réciproque $g \mapsto g \circ g_0^{-1}$, le résultat en découle.

2. Soit B une base de \mathbb{K}^n orthonormée pour φ (existe d'après le procédé de Gram-Schmidt).

Soit $f \in G$ et $M = \text{mat}_B(f)$ est orthogonale (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou unitaire (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Donc $M^\top M = I_n$ (respectivement $\overline{M}^\top M = I_n$), d'où $M^{-1} = M^\top$ (respectivement $M^{-1} = \overline{M}^\top$), donc $\text{Tr}(f^{-1}) = \overline{\text{Tr}(f)}$.

3. Soit B base de \mathbb{R}^2 orthonormée pour φ associée à G , P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^2 à B . Pour tout $M \in G$, $P^{-1}MP \in SO_2(\mathbb{R})$ et $G' = \{P^{-1}MP | M \in G\}$ est un sous-groupe fini de $SO_2(\mathbb{R})$. OR $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe à (\mathbb{U}, \times) (via $R_\theta \mapsto e^{i\theta}$) / Spot M un sous-groupe de cardinal n de (\mathbb{U}, \times) , d'après le théorème de Lagrange, pour tout $z \in H$, $z^n = 1$ donc $H \subset \mathbb{U}_n$ et par isomorphisme, G est cyclique. ■

Remarque 7. *On a aussi, pour tout $f \in G$, $|\det(f)| = 1$ car $\overline{M}^T M = I_n$.*

Remarque 8. *Il existe des sous-groupes finis de $GL_2(\mathbb{R})$ non commutatifs. Par exemple, le groupe des isométries du triangle (3 rotations, 3 symétries), isomorphe à (σ_3, \circ) non-commutatif.*