Exercices MP/MP*

Calcul différentiel

Exercice 1. *Étudier la continuité, la différentiabilité et la classe de*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^3+y^3-xy^2+yz^2+xyz}{x^2+y^2+z^2} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{array} \tag{1}$$

Exercice 2. *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in (\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R}))^k$.*

1. *Montrer que $\psi = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}(\varphi_i)$ est continue.*
2. *Soit $x_0 \in U$, si les $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont différentiables en x_0, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ le soit. On pourra former*

$$J = \{i \in [\![1,k]\!], \psi(x_0) = \varphi_i(x_0)\}. \tag{2}$$

3. *Si les $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur U et ψ est différentiable, montrer que ψ est $\mathcal{C}^1$ sur U.*

Exercice 3. *On définit*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & f(X) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \end{array} \tag{3}$$

Soit $H_0 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Déterminer les extrema de f sur H_0.

Exercice 4. *Étudier la continuité, différentiabilité, classe de*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right), & si\ x \neq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{array} \tag{4}$$

Exercice 5. *Soit $n \geqslant 2$, en quels points de $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles différentiables ?*

Exercice 6. *Soit $n \geqslant 3$. Trouver*

$$\sup \left\{ \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} \middle| (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}. \tag{5}$$

Exercice 7. *Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x^2 + y^2 = 0. \tag{6}$$

Exercice 8. *Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ M & \mapsto & (\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \dots, \mathrm{Tr}(M^n)) \end{array} \tag{7}$$

1. *Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$, calculer sa différentielle.*
2. *Quel est le rang de df_M ? On l'exprimera en fonction du degré du polynôme minimal de M, Π_M.*
3. *Montrer que $C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \Pi_M = \chi_M\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 9. *Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2}. \tag{8}$$

Exercice 10. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ convexe et $\mathcal{C}^1$.*

1. *Montrer que pour $(x, y) \in U^2$, $f(y) \geqslant f(x) + df_x(y - x)$.*
2. *Montrer que tout point critique de f est un minimum absolu.*
3. *Montrer que l'ensemble E des points critiques de f est convexe.*
4. *On suppose $U = \mathbb{R}^n$, montrer que E est fermé.*

Exercice 11. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est homogène de degré α ou α-homogène si et seulement si pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $f(tx) = t^\alpha f(x)$.*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, montrer que f est α-homogène si et seulement si pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x)$.

Exercice 12. *Étudier les extrema de*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 + y^2 + z^2 - xyz \end{array} \tag{9}$$

.

Exercice 13. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On définit*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \textit{si } x \neq y, \\ f'(x), & \textit{sinon.} \end{cases} \end{array} \tag{10}$$

1. *Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si g est $\mathcal{C}^0$. On pourra écrire $g(x,y) = \int_0^1 \dots \mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ si et seulement si g est $\mathcal{C}^1$.*

Exercice 14 (Dérivation au sens complexe)**.** *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & U \subset \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & f(z) \end{array} \tag{11}$$

On lui associe

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}\colon & E \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (\underbrace{\Re(f(x+\mathrm{i}y))}_{\widetilde{f}_1(x,y)}, \underbrace{\Im(f(x+\mathrm{i}y))}_{\widetilde{f}_2(x,y)}) \end{array} \tag{12}$$

On a $f(x+\mathrm{i}y) = \widetilde{f}_1(x,y) + \mathrm{i}\widetilde{f}_2(x,y)$. À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur $\widetilde{f}$, la fonction est-elle dérivable au sens complexe sur U, c'est-à-dire que pour tout $z_0 \in U$, il existe $f'(z_0) = \lim\limits_{\substack{h\to \\ h\in\mathbb{C}^*}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$, respectivement $\mathcal{C}^1$ au sens complexe (c'est-à-dire dérivable sur U et f' continue) ?

Exercice 15 (Fonctions harmoniques)**.** *On définit, pour $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$,*

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y). \tag{13}$$

On dit que f est harmonique sur U si et seulement si $\Delta f = 0$ sur U.

Soit U un ouvert borné, et $f\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{U}$ et harmonique sur U. On veut montrer que $\max\limits_{\overline{U}} f$ est atteint sur ∂U.

On suppose que $\max\limits_{\overline{U}} f$ est atteint sur $(x_0,y_0) \in U$.

1. *On définit, pour tout $n \geqslant 1$,*

$$\begin{array}{rccc} f_n\colon & \overline{U} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) + \frac{1}{n}(x^2+y^2) \end{array} \tag{14}$$

   Montrer que $\Delta f_n(x,y) > 0$, en déduire que $\sup\limits_{\overline{U}} f_n$ est atteint sur ∂U.
2. *Montrer le résultat.*
3. *En déduire que si $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\overline{U}$ et harmoniques sur U et vérifient $f = g$ sur U, alors $f = g$ sur $\overline{U}$.*

Exercice 16 (Laplacien en polaire)**.** *Soit*

$$
\begin{array}{rccl}
f: & U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\
 & (x,y) & \mapsto & f(x,y)
\end{array} \tag{15}
$$

de classe $\mathcal{C}^2$. On lui associe

$$
\begin{array}{rccl}
\widetilde{f}: & U' \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\
 & (r,\theta) & \mapsto & \widetilde{f}(r,\theta) = f(\underbrace{r\cos\theta}_{x(r,\theta)}, \underbrace{r\sin\theta}_{y(r,\theta)})
\end{array} \tag{16}
$$

$\widetilde{f}$ est $\mathcal{C}^2$ par composition. Exprimer la laplacien en polaire Δf en fonction des dérivées partielles de $\widetilde{f}$.

Exercice 17 (Égalité de la moyenne)**.** *Soit f harmonique sur U continue sur $\overline{U}$. Soit $(x_0,y_0) \in U$. On veut montrer que pour tout $r \in [0, d((x_0,y_0), \partial U)]$,*

$$
f(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta = G(r). \tag{17}
$$

La fonction $f_1(x_0,y_0) = f(x_0+x, y_0+y)$ est harmonique. On lui associe $\widetilde{f_1}(r,\theta) = f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$ fonction de θ 2π-périodique.

1. *Pour $r > 0$, calculer $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right)$.*
2. *En déduire le résultat.*

Exercice 18.

1. *Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n.*
2. *De même en $\theta \in O_n(\mathbb{R})$.*
3. *On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^\mathsf{T} B)$ et $\|A\|_2 = (A|A)$. Évaluer, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(M, O_n(\mathbb{R})) = \inf\{\|M-\theta\|_2 | \theta \in O_n(\mathbb{R})\}$.*