

*Exercices MP/MP**

Intégration

Exercice 1. Soit f continue strictement positive de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}_+^* et

$$\begin{aligned} S : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f \end{aligned} \quad (1)$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un unique $x_k \in [a, b]$ tel que $S(x_k) = k \frac{S(b)}{n}$.

Évaluer ensuite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 2. Soit f continue non identiquement nulle et $g(x) = \left(\int_0^1 |f(t)|^x dt \right)^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \|f\|_\infty$.
2. On suppose $|f| > 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Exercice 3. Soit $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante continue avec $f(0) = 0$. Soit $g : [0, f(a)] \rightarrow [0, a] = f^{-1}$ (continue strictement croissante). Soit $(x, y) \in [0, a] \times [0, f(a)]$. Montrer que

$$xy \leq \int_0^x f + \int_0^y g. \quad (2)$$

Expliciter le cas d'égalité.

Exercice 4. Existence et calcul de

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3)$$

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$.

1. Exprimer I_n en fonction de n .
2. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ (sous réserve d'existence) ?
3. En déduire $\frac{\pi}{4}$ et $\ln(2)$ comme somme de séries.

Exercice 6. Soit $E = \{f \in C^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)\}$. On définit

$$\begin{aligned} \phi : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \end{aligned} \quad (4)$$

1. Montrer que l'on peut définir $m = \min_{f \in E} \phi(f)$ et évaluer m . Déterminer les $f \in E$ tels que $\phi(f) = m$.

2. Montrer que f n'est pas majorée sur E .

3. Déterminer $\phi(E)$.

Exercice 7. Existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{(1+x)^2} dx$.

Exercice 8. Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t(1-t)^3}} dt$.

Exercice 9. Existence et calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(t)}{\sqrt{\cos(2t)}} dt$.

Exercice 10. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} continue par morceaux et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} continue par morceaux T -périodique ($T > 0$). Évaluer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t) dt$. Cas particulier : pour $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, évaluer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{3+2\cos(nt)} dt$.

Exercice 11. Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue et intégrable.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Montrer que $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 12. Soit

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \end{aligned} \tag{5}$$

1. Étudier la convergence simple, la convergence uniforme et en moyenne.

2. Soit g continue et bornée sur \mathbb{R} , évaluer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_n(t) dt$.

Exercice 13. Existence et calcul de $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Exercice 14. Existence et calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$. On pourra poser $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$.

Exercice 15. Pour $\alpha > 1$, on note

$$\begin{aligned} f_\alpha: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^\alpha |\sin(x)|} \end{aligned} \tag{6}$$

Montrer que f_α est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 16.

1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t) dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{(i-1)t} dt$.

3. En déduire $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = 0$ (avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \rightarrow t^n f(t)$ intégrables sur \mathbb{R}_+).

Exercice 17 (Transformée de Laplace). Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} continue par morceaux. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \mathcal{L}f(a)$ converge. On définit $g(t) = \int_0^t e^{-au} f(u) du$.

1. Montrer que pour tout $b > a$, $\mathcal{L}f(b)$ converge et que

$$\mathcal{L}f(b) = (b - a) \int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t) dt. \quad (7)$$

2. Soit h vérifiant les mêmes conditions que f , montrer que si pour tout $b \geq a$, $\mathcal{L}f(b) = \mathcal{L}h(b)$, alors $f = h$ (injectivité de la transformée de Laplace).

Exercice 18. On dit que f est continue à support compact si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est continue et il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geq A$, $f(x) = 0$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t) dt$, et que \hat{f} est \mathcal{C}^∞ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2. On suppose que \hat{f} est continue à support compact, montrer que $f = 0$.

Exercice 19. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt$.

Exercice 20. Soit $x > 0$.

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt}_{I_n(x)} = \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (8)$$

2. En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}. \quad (9)$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, \quad (10)$$

où γ est la constante d'Euler.

4. Donner un développement en série de $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$.

Exercice 21 (Théorème de D'Alembert-Gauss par l'indice).

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ 2π -périodique et \mathcal{C}^1 . On définit l'indice de f par

$$d(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}. \quad (11)$$

Montrer que $e^{2i\pi d(f)} = 1$ si et seulement si $d(f) \in \mathbb{Z}$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, de coefficient $a_n \neq 0$, on suppose que P ne s'annule pas sur \mathbb{C} .

Soit $t \geq 0$, on pose

$$\begin{aligned} f_r : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ t &\mapsto P(\mathrm{re}^{it}) \end{aligned} \quad (12)$$

3. Évaluer $d(f_0)$ et $\lim_{r \rightarrow +\infty} d(f_r)$, montrer que $r \mapsto d(f_r)$ est continue. Conclure.

Exercice 22. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} (f(0) + f(1)). \quad (13)$$

Donner un développement à l'ordre 2 de v_n quand $n \rightarrow +\infty$. On pourra montrer l'égalité de Taylor-Lagrange : si f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, $a < b$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad (14)$$

et et l'appliquer à $F(x) = \int_0^x f$.

Exercice 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt. \quad (15)$$

Exprimer I_n sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$. Qu'en déduit-on sur $\frac{\pi}{4}$?

Exercice 24. Soit

$$\begin{aligned} f :]0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{x^2}^x \frac{e^t}{\arcsin(t)} dt \end{aligned} \quad (16)$$

Analyser la continuité, la dérivabilité et le comportement au voisinage de 0.

Exercice 25. *Existence et calcul de*

$$I_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^n}, \quad (17)$$

pour $n \geq 1$.

Exercice 26. *Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) f'\left(\frac{i}{n}\right). \quad (18)$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 27. *Soit $a, b > 0$. Montrer que*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_{x^a}^{x^b} \frac{dt}{\ln(t)} = \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (19)$$

Exercice 28. *Soit φ convexe de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (donc continue). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $a < b$.*

1. Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t)) dt. \quad (20)$$

2. On suppose de plus φ strictement convexe, montrer que l'on a égalité dans ce qui précède si et seulement si f est constante.

Exercice 29. *Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = f(x)f(y). \quad (21)$$

Exercice 30. *Soit f continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} avec $a < b$. On pose*

$$I_n = \left(\int_a^b |f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_n. \quad (22)$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 31. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.*

1. Montrer que $F(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |e^{it} - \rho e^{i\theta}| dt$ existe.

2. Montrer que $F(\rho, \theta)$ ne dépend pas de θ .

3. Calculer $F(\rho, \theta)$ en utilisant une somme de Riemann sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 32. On définit C_0 l'ensemble des fonctions continues à support compact de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , i.e. si $f \in C_0$, alors il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $|t| \geq A$, alors $f(t) = 0$. On note C_1 l'ensemble des fonctions de C_0 de classe \mathcal{C}^1 .

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $\varphi \in C_0$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0$. Montrer que $f = 0$.
2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $\varphi \in C_1$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = 0$. Montrer que f est constante.
3. Soit $f \in C_0$ telle qu'il existe $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que pour tout $\varphi \in C_1$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = \int_{\mathbb{R}} g\varphi$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et $f' = -g$.

Exercice 33. Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt, \quad (23)$$

et de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} dt. \quad (24)$$

Exercice 34. On note

$$\begin{aligned} f:]0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \end{aligned} \quad (25)$$

Calculer

$$I = \int_0^1 f(t) dt. \quad (26)$$

Exercice 35. Existence de

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} \end{aligned} \quad (27)$$

Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) dx, \quad (28)$$

est définie et donner sa valeur.

Exercice 36.

1. Soit $n \geq 1$, calculer

$$I_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt. \quad (29)$$

2. Donner un équivalent en $+\infty$ de

$$J_n = \int_{-n}^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt. \quad (30)$$

On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

3. En déduire la formule de Stirling.

Exercice 37.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} f_x(t) dt, \quad (31)$$

est définie.

2. Montrer que I est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

3. Calculer $I(x)$.

Exercice 38. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on peut définir $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Prouver l'existence et calculer $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 39. Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On pose, pour $h > 0$,

$$\phi(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh). \quad (32)$$

Calculer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \phi(h)$.

Exercice 40. Déterminer le domaine de définition et calculer

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(xt)}{t} e^{-t} dt. \quad (33)$$

Exercice 41. Déterminer le domaine de définition et calculer

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}} dt. \quad (34)$$

Exercice 42 (Transformée de Fourier). Soit f continue, bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{C} intégrable sur \mathbb{R} . On peut définir

$$\begin{aligned} \widehat{f}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \nu &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\nu t} dt \end{aligned} \quad (35)$$

On suppose que \widehat{f} est intégrable sur \mathbb{R} et on veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu) e^{i\nu x} d\nu. \quad (36)$$

1. On définit, pour tout $\lambda \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu) e^{i\nu x} e^{-\lambda|\nu|} d\nu. \quad (37)$$

Montrer que pour $\lambda > 0$, on a

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2} f(x+t) dt. \quad (38)$$

2. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_x(\lambda) = f(x)$.

3. Conclure.

Exercice 43 (Intégrale de Dirichlet).

1. On forme, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} D_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \end{aligned} \quad (39)$$

Montrer que D_n est paire, \mathcal{C}^∞ , 2π -périodique, et calcule $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) dt$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \quad (40)$$

2. On pose $u_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Montrer que

$$u_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{u} du. \quad (41)$$

3. Montrer que l'on peut prolonger $u \mapsto \frac{1}{\sin(\frac{u}{2})} - \frac{1}{(\frac{u}{2})}$ en une fonction \mathcal{C}^1 , notée φ , sur $[0, 1]$.

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du$. Conclure.

Exercice 44 (Transformée de Laplace). Soit f continue de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^t f(t) e^{-at} dt$ converge.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on peut définir $Lf(a+x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(a+x)t} dt$ et que $Lf(a+x) = x \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt$, où $g(t) = \int_0^t f(v) e^{-av} dv$.

2. On suppose que pour tout $x \geq 0$, $Lf(a+x) = 0$, montrer que $f = 0$. On pourra montrer que $Lf(a+x) = x \int_0^1 h(u) u^{x-1} du$, où $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est continue.

Exercice 45. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^\mathbb{N}$ croissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}. \quad (42)$$