Solutions MP/MP*

Séries Entières

Solution 1.

1. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} > 0$. On va chercher un équivalent. On a $u_n = \mathrm{e}^{n^\alpha \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$. Comme $\cosh(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$, on a

$$\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right), \tag{1}$$

$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \tag{2}$$

Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{n^{\alpha-2}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right)}$. Donc :

— si $\alpha < 2$, $\lim\limits_{n \to +^infty} u_n = 1$ et $R = 1$,

— si $\alpha = 2$, $\lim\limits_{n \to +^infty} u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $R = 1$,

— si $\alpha > 2$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\left(\frac{(n+1)^{\alpha-2}}{2}\right) - \frac{n^{\alpha-2}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right)}. \tag{3}$$

Or

$$(n+1)^{\alpha-2} - n^{\alpha-2} = n^{\alpha-2}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-2} - 1\right), \tag{4}$$

$$\underset{+\infty}{=} n^{-2}\left(\frac{\alpha-2}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right), \tag{5}$$

$$\underset{+\infty}{=} (\alpha-2)\, n^{\alpha-3} + O\left(n^{\alpha-4}\right). \tag{6}$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right)}$. Ainsi,

— si $\alpha < 3$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $R = 1$,

— si $\alpha = 3$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $R = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,

— si $\alpha > 3$, comme $\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\alpha-2)}{2} n^{\alpha-3}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$,

$$\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right) \geqslant \frac{\alpha-2}{4} n^{\alpha-3} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{7}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ et $R = 0$.

2. On note $u_n = \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)} > 0$. Comme $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + O(x^2)$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{(-1)^n n + O\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{(-1)^n n} = v_n$. On ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert à v_n, ça ne va pas converger. Mais on peut encadrer v_n : $0 < v_n \leqslant \mathrm{e}^n$ et donc $R \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$. On a $\frac{u_n}{\mathrm{e}^n} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{n((-1)^n - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right)}$ et $\frac{u_{2n}}{\mathrm{e}^{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\sum \frac{u_n}{\mathrm{e}^n}$ diverge. Ainsi, $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

$\blacksquare$

Solution 2.

1. On remarque

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \dots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_p \\ m_1 e^{i\theta_1} & \dots & m_p e^{i\theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_1 e^{i(p-1)\theta_p} & & m_p e^{i(p-1)\theta_p} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{in\theta_1} \\ \vdots \\ e^{in\theta_p} \end{pmatrix}}_{Y_n}. \tag{8}$$

   A est inversible car $\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{p} m_i\right) \times \mathrm{VdM}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p}) \neq 0$. Donc si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $Y_n = A^{-1}X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui n'est pas car $\|Y_n\|_\infty = 1$.

2. On pose $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. Si $\chi_A = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_p)$ avec $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_j| = \rho(A)$ et $|\lambda_i| < \rho(A)$ pour tout $i \in \{j+1, \dots, p\}$. On écrit $a_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i^n + \sum_{i=j+1}^{p} \lambda_i^n$. D'après la règle de d'Alembert, on a $R \geqslant \frac{1}{\rho(A)}$ (et $R = +\infty$ si $\rho(A) = 0$ et A est nilpotente). De plus, on a

$$\frac{a_n}{\rho(A)^n} = \sum_{k=1}^{j} m_k e^{in\theta_k} + \sum_{i=j+1}^{p} \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^n, \tag{9}$$

   et le premier terme ne tend pas vers 0 d'après ce qui précède tandis que le deuxième tend vers 0. Donc $\sum \frac{a_n}{\rho(A)}$ diverge grossièrement, donc $R = \frac{1}{\rho(A)}$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \frac{1}{\rho(A)}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_i^n z^n\right), \tag{10}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_i z}, \tag{11}$$

$$= \mathrm{Tr}\,(I_p - zA)^{-1}, \tag{12}$$

   car pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $|\lambda_i z| < 1$ et on peut trigonaliser dans la même base A et $I_p - zA$.

$\blacksquare$

Solution 3. D'après la règle de d'Alembert, on a $R = 1$. De plus, $|a_n| \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc il y a convergence uniforme sur $\overline{D(0,1)}$. Ainsi, la somme S est continue sur $\overline{D(0,1)}$. Soit $t \in]-1,1[$, comme $\frac{1}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1}$ avec $a = b = 1$ et $c = 4$, on a

$$\frac{S(t)}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t^n}{n} + \frac{t^n}{n+1} - 4\frac{t^n}{2n+1} \right) = -\ln(1-t) + \left(\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1 \right) - 4 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{2n+1}}_{g(t)}. \tag{13}$$

Si $t > 0$, on a $\sqrt{t}g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1}$. On pose $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$ et $h(0) = 0$. On a $h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$ donc $h(x) = -x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$ d'où $g(t) = -\sqrt{t} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{t}+1) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{t}-1)$.

Si $t < 0$, $\sqrt{-t}g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{-t}^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(\sqrt{-t}) - \sqrt{-t}$. Donc $g(t) = \frac{\arctan(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} - 1$. L'expression de S reste valable en -1 et 1 par continuité de S. ∎

Solution 4. Soit $t \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{u\ln(1+t)}\mathrm{d}u, && (14)\\
&= \left[\frac{1}{\ln(1+t)} \mathrm{e}^{u\ln(1+t)} \right]_{u=0}^{u=1}, && (15)\\
&= \frac{1+t}{\ln(1+t)} - \frac{1}{\ln(1+t)}, && (16)\\
&= \frac{t}{\ln(1+t)} = f(t). && (17)
\end{aligned}$$

Soit $u \in [0, 1]$, on a $(1+t)^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(u)$. f_n est continue sur $[0, 1]$. On a

$$\begin{aligned}
|f_n(u)| &= \frac{u(1-u)\dots(n-1-u)}{n!} |t|^n, && (18)\\
&\leqslant \frac{(n-1)!}{n!} |t|^n, && (19)\\
&= \frac{1}{n} |t|^n, && (20)\\
&\leqslant |t|^n, && (21)
\end{aligned}$$

car pour tout $u \in [0, 1]$, $0 \leqslant k - u \leqslant k$. Comme $|t| < 1$, $|t|^n$ est le terme général d'une série convergente. Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ et on peut intervertir :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} \mathrm{d}u \right)}_{a_n} t^n, \tag{22}$$

encore vrai pour $t=0$ car $a_0=1$. Donc f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Par ailleurs, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. ■

Remarque 1. *On a*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 u(1-u)\dots(n-1-u)\mathrm{d}u. \tag{23}$$

De plus,

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 u(1-u)\dots(n-1-u)\underbrace{(n-u)}_{\leqslant n}\mathrm{d}u, \tag{24}$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 u(1-u)\dots(n-1-u)\mathrm{d}u = |a_n|. \tag{25}$$

Enfin, $|a_n| \leqslant \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. *D'après le critère spécial des séries alternées,* $\sum a_n$ *converge. Puis* $\sum a_n t^n$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *(majorer le reste par le critère spécial des séries alternées), donc il y a convergence et continuité en 1. On vérifie que* $|a_n| = \frac{1}{n}\int_0^1 u\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{u}{k}\right)}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\ln(n)u+g_n(u)}$, *où* $g_n(u)$ *est majorée par* M *indépendant de* n *et de* u. *Ainsi, par convergence dominée,* $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u}{n^u}\mathrm{d}u$, *terme général d'une série divergente.*

Solution 5. On a $a_n = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n)+\gamma+o(1))}$. On a

$$\ln\left(\ln(n)+\gamma+o(1)\right) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1+\frac{\gamma}{\ln(n)}+O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right), \tag{26}$$

$$= \ln(\ln(n)) + \frac{\gamma}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right). \tag{27}$$

Donc $a_n = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))+\gamma+o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\gamma}\underbrace{\mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))}}_{b_n}$. On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \mathrm{e}^{\ln(n+1)\ln(\ln(n+1))-\ln(n)\ln(\ln(n))}, \tag{28}$$

mais

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{29}$$

et

$$\ln(n+1)\ln(\ln(n+1)) = \ln(n)\ln(\ln(n+1)) + \underbrace{O\left(\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}\right)}_{=o(1)\xrightarrow[+\infty]{}0}, \tag{30}$$

puis

$$
\begin{aligned}
\ln(\ln(n+1)) &\underset{+\infty}{=} \ln\left(\ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), && (31)\\
&\underset{+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right), && (32)\\
&\underset{+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + O\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right). && (33)
\end{aligned}
$$

Donc $\ln(n+1)\ln(\ln(n+1)) - \ln(n)\ln(\ln(n)) = \underset{+\infty}{o}(1)$, et $\frac{b_{n+1}}{b_n} \lim_{n\to+\infty} 1$, d'où $R = 1$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ donc il y a divergence sur le cercle de convergence. ■

Remarque 2. *On peut aussi écrire $a_n \leqslant n^{\ln(n)} = \mathrm{e}^{(\ln(n))^2} = c_n$, et*

$$
\frac{c_{n+1}}{c_n} = \mathrm{e}^{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\left(\ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 - (\ln(n))^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1. \tag{34}
$$

Donc $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R \geqslant 1$, et $\sum a_n$ diverge donc $R = 1$.

Solution 6. Le nombre de diviseurs est compris entre 1 et n. Comme $\sum z^n$ et $\sum nz^n$ ont un rayon de convergence égal à 1, on a $R = 1$ par encadrement. ■

Solution 7. On pose $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Alors $\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

— Si $l < 1$, alors d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $R = +\infty$.

— Si $l > 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant \frac{l+1}{2}$ et pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \geqslant u_{N_0} \times \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $R = 0$.

— Si $l = 1$: si $a_n = n!$, on a $u_n = n+1$ donc $R = 0$, si $a_n = \frac{1}{n!}$, on a $u_n = \frac{1}{n+1}$ donc $R = +\infty$, si $a_n = \lambda^n$ avec $\lambda > 0$, on a $u_n = \lambda$ et $R = \frac{1}{\lambda}$. Donc on ne peut rien dire.

■

Solution 8. D'après la règle de d'Alembert, avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc le rayon de convergence de ϕ est $R = 1$ donc ϕ est bien définie.

Fixons $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| < 1$, formons

$$\begin{array}{rrcl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \mathrm{e}^{\phi(tz)} \end{array} \tag{35}$$

z étant fixé, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{t^n z^n}{n} = \phi(tz)$ vaut $\frac{1}{|z|} > 1$, donc l'application $t \mapsto \phi(tz)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1] \subset \left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$. f est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^n t^{n-1} \times f(t) = \frac{z}{1+tz}f(t), \tag{36}$$

car $|zt| < 1$ et $f(0) = 1$. On pose $g(t) = 1 + tz$. Alors $g'(t) = z = \frac{z}{1+tz}g(t)$ et $g(0) = 1$. Ainsi, par unicité (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz), pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = g(t)$. En particulier, $f(1) = \mathrm{e}^{\phi(z)} = 1 + z$. ■

Remarque 3. *On vient de définir, pour $|z| < 1$, $\phi(z)$ qui est un logarithme complexe continue de $1+z$. Si $1+z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in]-\pi,\pi[$, $\phi(z) = \ln(\rho) + \mathrm{i}\theta$.*

Solution 9. On a $a_n = \frac{1}{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$ et $1 \leqslant |a_n| \leqslant 2$ donc $R = 1$. Si $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{3n} - 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} -z^{3n+1} + z^{3n+2}\right) = \frac{1}{1-z^3} + \frac{2z}{1-z^3} - \frac{2z^2}{1-z^3} = \frac{1+2z-2z^2}{1-z^3}. \tag{37}$$

■

Solution 10.

1. On a $b_n \geqslant 0$ donc g est croissante sur $[0,1[$. g admet donc une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ en 1^-. Pour tout $x < 1$, $g(x) \leqslant l$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$, comme $b_n x^n \geqslant 0$, on a $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \leqslant g(x) \leqslant l$. N étant fixé, quand $x \to 1$, on a $\sum_{n=0}^{N} b_n \leqslant l$ et quand $N \to +\infty$, on a $l = +\infty$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geqslant n_0$, $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \times b_n$. Pour tout $x \in [0,1[$, on a $|f(x) - g(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n - b_n| x^n$. Le terme de gauche est en polynôme en x qui a une limite finie en 1^-, le terme de droite majoré par $\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}g(x)$, car les b_n sont positifs. Ainsi, ce terme de droite est un $\underset{x\to 1^-}{O}(g(x))$ donc majoré par $\frac{\varepsilon}{2}g(x)$ pour x suffisamment proche de 1, d'où $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$ et $f(x) \underset{1^-}{\sim} g(x)$.

3. On a $n^p \underset{+\infty}{\sim} n(n-1)\dots(n-p+1)$, donc

$$h_p(x) \underset{1}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^n, \tag{38}$$

et $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$. De proche en proche, on a $f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} n\dots(n-p+1)x^{n-p}$, d'où

$$\boxed{h_p(x) \underset{1}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.} \tag{39}$$

■

Solution 11. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$. Alors si $S_n = \sum_{h=0}^{n} a_h$, on a

$$|S_n - S| \leqslant \left| S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S \right|. \tag{40}$$

Puisque $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\left|f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Pour $n \geqslant N_0$, on a alors

$$\left| S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| \leqslant A_n + B_n + C_n, \tag{41}$$

avec $A_n = \sum_{h=0}^{N_0} |a_h| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et il existe N_1 pour tout $n \geqslant N_1$, $A_n \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. On a

$$B_n = \sum_{h=N_0+1}^{n} |a_h| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right), \tag{42}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h=N_0+1}^{n} \left(\frac{1}{h} \times h \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right), \tag{43}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h=N_0}^{n} \frac{1}{n}, \tag{44}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \times \frac{n - N_0}{n}, \tag{45}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{46}$$

Cela est dû au fait que $x \mapsto 1 - x^h$ est concave sur $[0, 1]$ donc $\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h\right) \leqslant h\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ (ou par accroissement fini). Enfin, on a

$$C_n = \sum_{h \geqslant n} a_h \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \tag{47}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h \geqslant n} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^h}{h}, \tag{48}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4n} \sum_{h \geqslant n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \tag{49}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4n} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h, \tag{50}$$

$$= \frac{\varepsilon}{4}. \tag{51}$$

Ainsi, on a $|S_n - S| \leqslant \varepsilon$ et donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$. ■

Remarque 4. *C'est une réciproque du lemme d'Abel radial i.e. si $\sum a_n$ converge alors*

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{52}$$

Remarque 5. *Ce n'est pas valable par exemple pour $a_n = (-1)^n$, car $f(x) = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge.*

Solution 12. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = f(0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$. Alors

$$f(z) = f(0) \left(1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n}_{=g(z)} \right), \tag{53}$$

avec $g(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 0$ car g est somme d'une série entière donc continue. Il existe $r > 0$, si $|z| < r$, $|g(z)| < 1$. Alors on a vu, d'après l'Exercice 8, que l'on a

$$f(z) = \exp\left(\ln \rho + i\theta + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{g(z)^p}{p} \right). \tag{54}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on peut développer chaque terme $g(z)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} z^n$ (produit de Cauchy). On vérifie alors (théorème de Fubini) que l'on peut intervertir les sommations. ■

Remarque 6. *Autre méthode : si T existe avec $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Pour $t \in]-r, r[$, on a $f(t) = \mathrm{e}^{T(t)}$. En dérivant, on a $f'(t) = T'(t)f(t) = \left(\sum_n (n+1)b_{n+1}t^n\right) f(t)$. Par unicité de développement, et par produit de Cauchy, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{h=0}^{n} (h+1)b_{h+1}a_{n-h}, \tag{55}$$

$$= (n+1)b_{n+1} \underbrace{a_0}_{\neq 0} + \sum_{h=1}^{n} hb_h a_{n-h+1}. \tag{56}$$

On a $b_0 = T(0)$, on choisit b_0 tel que $\mathrm{e}^{b_0} = a_0 \neq 0$ et on définit univoquement $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence. On vérifie alors, en majorant, que $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence $r > 0$ (montrer qu'il existe $M \geqslant 0, A \geqslant 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n|\ AM^n$). Alors $f'(t) = T'(t)f(t)$ et en posant $g(t) = \mathrm{e}^{T(t)}$, on a $g = f$ par unicité via le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Solution 13.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\left|\frac{1}{\sin(n\pi a)}\right| \geqslant 1$, donc $R_a \leqslant 1$.
2. On rappelle que si a est irrationnel algébrique de degré $d \geqslant 2$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $\left|a - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi a - p\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a alors

$$|\sin(n\pi a)| = |\sin(n\pi a - p\pi)|, \tag{57}$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} |n\pi a - p\pi|, \tag{58}$$

$$\geqslant 2|na - p|, \tag{59}$$

$$\geqslant 2n\frac{C}{n^d} = \frac{2C}{n^{d-1}}, \tag{60}$$

car par concavité, on a pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin(t)| \geqslant \frac{2}{\pi}|t|$. On a donc $|a_n| \leqslant \frac{n^{d-1}}{2C}$, et comme le rayon de convergence de $\sum \frac{n^{d-1}}{2C} z^{d-1}$ vaut 1, on a $R_a = 1$.
3. On a $|\sin(n!\pi e)| = \left|\sin\left(n!\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)\right| \underset{+\infty}{=} \left|\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$. Pour $x \in]0, 1]$, $\sum nx^{n!}$ converge. L'idée est donc de former a tel que pour tout $x \in]0, 1]$, on puisse extraire

$$\left(\frac{x^{\sigma(n)}}{\sin(\sigma(n)\pi a)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \tag{61}$$

qui ne tend pas vers 0.

Lemme 1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ strictement croissante, et*

$$a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_n}. \tag{62}$$

On a

$$a - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}}. \tag{63}$$

Preuve du Lemme 1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{a_0\dots a_n} \leqslant \frac{1}{a_0 a_1^n}$ et $a_1 \geqslant 2$ donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{a_0\dots a_n}$ converge. On a

$$\left| a - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{a_0 \dots a_n} \right| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_k}, \tag{64}$$

donc $\frac{1}{a_0\dots a_{N+1}} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{a_0\dots a_k} \leqslant \frac{1}{a_0\dots a_N} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{N+1}^k} = \frac{1}{a_0\dots a_N} \times \frac{1}{a_{N+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{a_{N+1}}}$. Donc

$$a - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}}. \tag{65}$$

■

On a donc $\underbrace{(a_0 \dots a_N)a - (a_0 \dots a_N) \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{a_0 \dots a_k}}_{\in\mathbb{N}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a_{N+1}}$. Ainsi,

$$\left| \sin\left(\underbrace{(a_0 \dots a_N)}_{=\sigma(N)} \pi a \right) \right| = \left| \sin\left((a_0 \dots a_N)\pi a - (a_0 \dots a_N) \sum_{k=0}^{N} \frac{\pi}{a_0 a_k} \right) \right| \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{a_{N+1}}. \tag{66}$$

Pour $x \in]0,1]$, on a $\frac{x^{\sigma(N)}}{|\sin(\sigma(N)\pi a)|} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \exp\left(\sigma(N)\ln(x) + \ln(a_{N+1})\right)$. Il suffit de choisir a_{N+1} tel que $\ln(a_{N+1}) \geqslant N(a_0 \dots a_N)$, par exemple $a_{N+1} = \left\lfloor \mathrm{e}^{N(a_0\dots a_N)} \right\rfloor + 1$. Donc pour tout $x \in]0,1]$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{x^{\sigma(N)}}{|\sin(\sigma(N)\pi a)|} = +\infty$. Ainsi, $R_a = 0$.

■

Solution 14. Pour $|z| < 1$, par produit de Cauchy, ces séries sont définies et absolument convergentes, par sommabilité,

$$\left(\sum_{p_1=0}^{+\infty} z^{a_1 p_1}\right) \times \dots \times \left(\sum_{p_N=0}^{+\infty} z^{a_N p_N}\right) - \frac{1}{(1-z^{a_1})\dots(1-z^{a_N})} = \sum_{(p_1,\dots,p_N)\in\mathbb{N}^N} z^{a_1 p_1 + \dots + a_N p_N}. \tag{67}$$

Par associativé, on regroupe selon les valeurs de l'exposant et on note l'expression précédente $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. On factorise la fraction rationnelle [les pôles sont des racines de l'unité] :

$$\frac{1}{\prod_{\xi\in\mathbb{U}}(z-\xi)^{m(\xi)}}, \tag{68}$$

avec $m(1) = N$, $m(\xi) < N$ si $\xi \neq 1$ car $a_1 \wedge \cdots \wedge a_N = 1$: si $\xi^{a_1} = \cdots = \xi^{a_N} = 1$, l'ordre de ξ divise $a_1, \ldots, a_N$ donc divise $a_1 \wedge \cdots \wedge a_N = 1$. Cette expression vaut alors $\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_{1,k}}{(-z+1)^k} + \sum_{\xi\in\mathbb{U}\setminus\{1\}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_{\xi,k}}{(-z+\xi)^k}\right)$ (somme finie). Pour $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{(-z+\xi)^k} = \left(-\frac{1}{\xi}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-k+1)\ldots(n+1)}{(k-1)!} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n. \tag{69}$$

Ainsi, le coefficient en z^n et équivalent à $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\left(-\frac{1}{\xi}\right)^k$ en $+\infty$. Donc c_n est un polynôme en n, équivalent en $+\infty$ à $\alpha_{1,N} \times \frac{n^{N-1}}{(n-1)!}$.

Si $F = \frac{1}{(1-X^{a_1})\ldots(1-X^{a_N})}$, en évaluant $(1-X)^N F$ et en prenant la limite en $X \to 1$, on a $\frac{X^{a_k}-1}{X-1} = 1 + X + \cdots + X^{a_k-1} \xrightarrow[X\to 1]{} a_k$. Finalement, $\alpha_{1,N} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ et $c_n \geqslant 1$ pour n suffisamment grand. Ainsi,

$$\boxed{c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{N-1}}{\left(\prod_{k=1}^{N} a_k\right)(N-1)!}.} \tag{70}$$

■

Solution 15. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par somme et composée. Pour $x \neq 1$, on a

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}} = \sqrt{1-x^3} \times \sqrt{\frac{1}{1-x}}, \tag{71}$$

produit de deux fonctions développable en série entière sur $]-1,1[$. Il existe donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a $f^2(x) = 1+x+x^2$ et $(f^2)'(x) = 2f'(x)f(x) = 1+2x$ d'où pour tout $x \in]-1,1[$,

$$2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = 1+2x, \tag{72}$$

encore vrai pour $z \in D(0,1)$ par unicité du développement en série entière.

Si $R > 1$, me rayon de convergence de $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ est R. On aurait alors pour tout $z \in D(0,R)$

$$2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n\right) = 1+2z, \tag{73}$$

i.e. si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors $2S'(z)S(z) = 1+2z$. En j, on a $2S'(\mathrm{j})S(\mathrm{j}) = 1+2\mathrm{j}$. Comme pour tout $x \in]-1,1[$, $S^2(x) = 1+x+x^2$, par unicité, on a pour tout $z \in D(0,R)$, $S^2(z) = 1+z+z^2$. Donc $S^2(\mathrm{j}) = 1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$ d'où $S(\mathrm{j}) = 0$: impossible car sinon $0 = 1+2\mathrm{j}$. Ainsi, $R = 1$. ■

Solution 16.

1. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est une série à termes positifs, d'après la formule de Taylor reste intégral, on a

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{S_n(x)} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}_{R_n(x)\geqslant 0}. \tag{74}$$

   On a $0 \leqslant S_n(x) \leqslant f(x)$, donc la série converge et la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.

2. On pose $t = xu$ et on a

$$R_n(x) = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u. \tag{75}$$

   Pour tout $t \in [0,A[$, $f^{(n+2)}(t) \geqslant 0$, $f^{(n+1)}$ est croissante. On a donc

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}y^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)\mathrm{d}u, \tag{76}$$

   d'où $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

3. $(R_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée d'après a), donc $R_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ d'où $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

4. On a $\tan \geqslant 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan' = 1+\tan^2 \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\tan^{(k)} \geqslant 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On dérive n fois, d'après la formule de Leibniz, on a

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tan^{(k)}\tan^{(n-k)} \geqslant 0. \tag{77}$$

   Par imparité, on a pour tout $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}. \tag{78}$$

   Par imparité, c'est aussi vrai sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$\blacksquare$

Remarque 7. *Si* $\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, $\tan' = 1 + \tan^2$ *fournit, pour tout* $n \geqslant 1$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.