

*Solutions MP/MP^**

Calcul différentiel

Solution 1. f est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, posons

$$(x, y, z) = \|(x, y, z)\|_2 (x', y', z'). \quad (1)$$

On a

$$f(x, y, z) = \frac{\|(x, y, z)\|_2^3 (x'^3 + y'^3 - x'y'^2 + y'z'^2 + x'y'z')}{\|(x, y, z)\|_2^2}. \quad (2)$$

Comme $\|(x', y', z')\|_2 = 1 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, on a $(x', y', z') \in [-1, 1]^3$ et

$$|f(x, y, z)| \leq 5 \|(x, y, z)\|_2 \xrightarrow{\|(x, y, z)\|_2 \rightarrow 0} 0. \quad (3)$$

D'où la continuité de f en $(0, 0, 0)$.

On étudie les dérivées partielles en $(0, 0, 0)$. On forme $x \mapsto f(x, 0, 0) = x$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0)$ existe et vaut 1, puis $y \mapsto f(0, y, 0) = y$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0)$ existe et vaut 1 et enfin $z \mapsto f(0, 0, z) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)$ existe et vaut 0. Donc si f est différentiable en $(0, 0, 0)$, nécessairement

$$\begin{aligned} df_{(0,0,0)} : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (h, k, l) &\mapsto h + k \end{aligned} \quad (4)$$

Pour $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$, on a

$$f(h, k, l) - f(0, 0, 0) - (h + k) = \frac{h^3 + k^3 - hk^2 + kl^2 + hkl - h^3 - hk^2 - hl^2 - k^3 - kh^2 - kl}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad (5)$$

$$= \frac{-2hk^2 + hkl - hl^2 - kh^2}{h^2 + k^2 + l^2}. \quad (6)$$

On pose $(h, k, l) = \|(h, k, l)\|_2 (h', k', l')$ avec $\|(h', k', l')\|_2 = 1$. Soit

$$\varphi(h, k, l) = \frac{f(h, k, l) - f(0, 0, 0) - (h + k)}{\|(h, k, l)\|_2} = -2h'k'^2 + h'k'l' - h'l'^2 - k'h'^2. \quad (7)$$

Pour $(h, k, l) = t(1, 1, 0)$, on a

$$\varphi(t, t, 0) = -\frac{3}{\sqrt{32}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \quad (8)$$

Donc f n'est pas différentiable en $(0, 0, 0)$, et n'est donc pas \mathcal{C}^1 non plus. ■

Remarque 1. On peut aussi, en fixant $(h, k, l) \in \mathbb{R}^3$, on étudie

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f((0, 0, 0) + t(h, k, l)) = t \frac{h^3 + k^3 - hk^2 + kl^2 + hkl}{h^2 + k^2 + l^2} \end{aligned} \quad (9)$$

ψ est dérivable en 0, et

$$D_{(h,k,l)}f(0,0,0) = \frac{h^3 + k^3 - hk^2 + kl^2 + hkl}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad (10)$$

non linéaire selon (h, k, l) . Donc f n'est pas différentiable en $(0, 0, 0)$.

Solution 2.

1. On a pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$. Par récurrence, on montre que ψ est continue.
2. Supposons ψ différentiable en x_0 . Soit $i \in J$, on a $\psi - \varphi_i \leq 0$ sur U et $(\psi - \varphi_i)(x_0) = 0$, donc $\psi - \varphi_i$ admet un extremum en x_0 , donc $d(\psi - \varphi_i)_{x_0} = 0$ et $d\psi_{x_0} = d\varphi_{i_{x_0}}$.
Supposons qu'il existe $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $d\varphi_{i_{x_0}} = l$ pour tout $i \in J$. D'abord, on a pour tout $j \notin J$, $\varphi_j(x_0) > \psi(x_0)$, donc par continuité de $\varphi_j - \psi$ il existe $\eta_j > 0$ tel que

$$\forall x \in B(x_0, \eta_j), \quad (\varphi_j - \psi)(x) > 0. \quad (11)$$

On pose alors $\eta = \min_{j \notin J}(\eta_j)$. Alors pour tout $x \in B(x_0, \eta)$, il existe $i \in J$, $\psi(x) = \varphi_i(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $i \in J$, il existe $\delta_i > 0$ tel que si $\|h\| < \delta_i$,

$$|\varphi_i(x_0 + h) - \varphi_i(x_0) - l(h)| \leq \varepsilon \|h\|. \quad (12)$$

On pose $\delta = \min_{i \in H}(\delta_i)$. Donc si $\|h\| \leq \min(\delta, \eta)$, on a

$$|\psi(x_0 + h) - \psi(x_0) - l(h)| \leq \varepsilon \|h\|, \quad (13)$$

car $\psi(x_0 + h)$ est un des $\varphi_i(x_0 + h)$. Donc ψ est bien différentiable en x_0 , et pour tout $i \in J$, $d\psi_{x_0} = l = d\varphi_{i_{x_0}}$.

3. Fixons $x_0 \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$. Pour le même η que précédemment, on a pour tout $x \in B(x_0, \eta)$, il existe $i \in J$ tel que $d\psi_x = d\varphi_{i_x}$. Alors

$$|d\psi_x(h) - d\psi_{x_0}(h)| \leq \max_{i \in J} |d\varphi_{i_x}(h) - d\varphi_{i_{x_0}}| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0. \quad (14)$$

■

Remarque 2. C'est faux pour un nombre infini de fonctions, par exemple la fonction nulle partout sauf sur $[0, \frac{2}{n}]$ où elle est affine par morceaux et vaut -1 en $\frac{1}{n}$.

Solution 3. f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n . Soit $A = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$. On a alors $f(X) = X^\top A X$. Si $X \neq 0$, on a

$$f(X) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j} dt, \quad (15)$$

$$= \int_0^1 \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} x_i x_j t^i t^j dt, \quad (16)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^i \right)^2 dt \geq 0. \quad (17)$$

Or $(\sum_{i=1}^n x_i t^i)^2$ est continue positive, donc $f(X) = 0$ si et seulement si $(\sum_{i=1}^n x_i t^i)^2 = 0$, pour tout $t \in [0, 1]$, donc $x_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, A est définie positive.

Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A . On a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 \|X\|^2 \leq f(X)$, donc $\lim_{\|X\| \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty$. Donc f n'admet pas de maximum global sur H_0 , mais un minimum global.

Si f présente un extremum en $X_0 \in H_0$, soit alors $H = (h_1, \dots, h_n) \in H_0$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(X_0 + tH) \end{aligned} \quad (18)$$

φ présente un extremum en $t = 0$, donc $\varphi'(0) = 0$ et $(\nabla f(X_0)|H) = 0$.

On a $\nabla f(X_0) = 2AX_0$ (terme en t du polynôme $f(X_0 + tH)$) et $(2AX_0|H) = 0$ pour tout $H \in H_0$, donc $AX_0 \in H_0^\perp = \text{Vect}((1, \dots, 1))$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme

$A \in GL_n(\mathbb{R})$ car $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a

$$X_0 = \lambda A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

et $X_0 \in H_0$ donc $\left(X_0 \left| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right. \right) = 1$, donc il y a un unique extremum sur H_0 , qui est un minimum

absolu :

$$X_0 = \frac{A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}{\left(A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)}. \quad (20)$$

■

Solution 4. Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ ouvert. f est \mathcal{C}^∞ sur Δ .

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, pour $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(r \cos(\theta), y_0 + r \sin(\theta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \text{ ou } \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \\ r^2 \cos^2(\theta) \sin\left(\frac{y_0 + r \sin(\theta)}{r \cos(\theta)}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (21)$$

Dans tous les cas, $|f(r \cos(\theta), y_0 + r \sin(\theta))| \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. Donc f est continue en $(0, y_0)$.

Pour l'existence des dérivées partielles en $(0, y_0)$: on forme $x \mapsto f(x, y_0)$ et on se demande si elle est dérivable en 0. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x} = x \sin\left(\frac{y_0}{x}\right), \quad (22)$$

donc

$$\left| \frac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \quad (23)$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$ existe et vaut 0.

Soit $y \mapsto f(0, y) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ existe et vaut 0.

Si f est différentiable en $(0, y_0)$, nécessairement on a

$$\begin{aligned} df_{(0, y_0)} : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (h, k) &\mapsto h \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Étudions donc

$$f(h, y_0 + k) - f(0, y_0) = \varphi(h, k) = \begin{cases} h^2 \sin\left(\frac{y_0 + k}{h}\right), & \text{si } h \neq 0, \\ 0, & \text{si } h = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Alors $|\varphi(h, k)| \leq \|(h, k)\|_2^2$, donc $\varphi(h, k) = o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}((h, k))$ donc f est différentiable en $(0, 0)$.

Pour tout $(x_0, y_0) \in \Delta$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 2x_0 \sin\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - y_0 \cos\left(\frac{y_0}{x_0}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= x_0 \cos\left(\frac{y_0}{x_0}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Pour $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \begin{cases} 0, & \text{si } r \cos(\theta) = 0, \\ 2r \cos(\theta) \sin\left(\frac{y_0 + r \sin(\theta)}{r \cos(\theta)}\right), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (27)$$

Si $y_0 \neq 0$, pour $\theta = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(r, y_0) = -y_0 \cos\left(\frac{y_0}{x}\right)$, qui n'a pas de limite en $r \rightarrow 0$. Si $y_0 = 0$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)\right| \leq 3r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. Donc f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 et on a toujours $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. ■

Solution 5. Soit $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Si $\|\cdot\|_1$ est différentiable en X_0 , alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$x_i \mapsto \|(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0)\| = |x_i| + \sum_{j \neq i_0} |x_j^0|, \quad (28)$$

est dérivable en x_i^0 . Nécessairement, $x_i^0 \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Réciproquement, si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i^0 \neq 0$, notons $\varepsilon_i = 1$ si $x_i^0 > 0$ et $\varepsilon_i = -1$ sinon. Pour X suffisamment proche de X_0 , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, x_i est du signe de x_i^0 et $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i$, localement linéaire donc différentiable et

$$d\|\cdot\|_1(X_0): h = (h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h_i. \quad (29)$$

S'il existe un unique indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_{i_0}^0| = \|X_0\|_\infty$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$, on a $|x_j^0| < |x_{i_0}^0|$ ($\neq 0$ car sinon $x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0$ mais $n \geq 2$). Pour $X = (x_1, \dots, x_n)$ suffisamment proche de X_0 , comme $x_j \mapsto |x_j| - |x_{i_0}|$ est continue et strictement négative en x_0 , pour tout $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$, $|x_j| < |x_{i_0}|$. Donc $\|X\|_\infty = |x_{i_0}| = \varepsilon_{i_0} x_{i_0}$, linéaire donc $\|\cdot\|_\infty$ est différentiable en X_0 .

S'il existe $i_1 \neq i_2 \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $|x_{i_1}^0| = |x_{i_2}^0| = \|X_0\|_\infty$, quitte à remplacer \hat{a} par $-X_0$ on suppose $x_{i_1}^0 > 0$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|X_0 + (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)\| = \begin{cases} t + x_{i_1}, & \text{si } t > 0, \\ |x_{i_2}| = x_{i_1}, & \text{si } t < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

φ n'est pas dérivable en 0, donc $\|\cdot\|_\infty$ est non différentiable en X^0 . ■

Solution 6. Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. On prend $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On veut prolonger par continuité en $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en i_0 -ième position. On a

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \times (1 - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}))}{\prod_{i \neq i_0}^{n-1} (1 - \varepsilon_i) \times (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)} \underset{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \rightarrow (0, \dots, 0)}{\sim} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i}{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}}, \quad (31)$$

$$\leq \|(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})\|_1^{n-2} \xrightarrow{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \rightarrow 0} 0, \quad (32)$$

car $n \geq 3$.

On note Σ_n le simplexe. On peut définir

$$\begin{aligned} f : \Sigma_n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} & \text{si } \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

f est continue sur le compact Σ_n donc atteint son maximum sur Σ_n .

On a $f(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) > 0$ donc le maximum est strictement positif et est atteint en

$$X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in]0, 1[^n. \quad (34)$$

Soit $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n h_i = 0$. Pour $|t|$ suffisamment petit, on a $X_0 + th \in \Sigma_n$ et $\varphi : t \mapsto f(X_0 + th)$ admet un extremum en 0. On a $\varphi'(0) = 0 = (\nabla f(X_0)|h)$, vrai pour tout h tel que $\sum_{i=1}^n h_i = 0$, donc pour tout $h \in \{(1, \dots, 1)\}^\perp$. Donc $\nabla f(X_0) \in \text{Vect}(1, \dots, 1)$. Par symétrie, on a $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(-1 + \frac{1}{1 - x_i}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x_j}{1 - x_j}. \quad (35)$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \frac{1}{(1-x_i^0)^2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x_j^0}{1-x_j^0} = \frac{1}{x_{i_0}(1-x_i^0)} \times \prod_{j=1}^n \frac{x_j^0}{1-x_j^0}. \quad (36)$$

Ainsi, pour $i_1 \neq i_2$,

$$\frac{1}{x_{i_1}(1-x_{i_1})} = \frac{1}{x_{i_2}(1-x_{i_2})}. \quad (37)$$

Soit

$$\begin{aligned} \psi :]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t(1-t) \end{aligned} \quad (38)$$

. Alors $x_{i_2}^0 = x_{i_1}^0$ ou $1 - x_{i_1}$. Dans le deuxième cas, on a $x_{i_1}^0 + x_{i_2}^0 = 1$ et pour tout $i \notin \{i_1, i_2\}$, $x_i = 0$, ce qui n'est pas car le maximum est strictement positif.

Donc $x_1^0 = \dots = x_n^0 = \frac{1}{n}$ et donc

$$\sup \left\{ \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} \middle| (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\} = \left(\frac{1}{n-1} \right)^n. \quad (39)$$

■

Remarque 3. En notant $\alpha_n = \left(\frac{1}{n-1}\right)^n$, on a

$$\alpha_n = e^{-n \ln(n-1)} = e^{-n(\ln(n) + \ln(1-\frac{1}{n}))} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n^n}. \quad (40)$$

Solution 7. On pose

$$\begin{aligned} f^* : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned} \quad (41)$$

f^* est de classe \mathcal{C}^1 par composition. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta), \\ \frac{\partial f^*}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta. \end{aligned} \quad (42)$$

Ainsi, $r \frac{\partial f^*}{\partial r} = r \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$. En reportant, on a donc

$$r \frac{\partial f^*}{\partial r} + r^2 = 0. \quad (43)$$

Pour $r > 0$, on a $\frac{\partial f^*}{\partial r} = -r$, encore vrai pour $r \geq 0$ par continuité de $\frac{\partial f^*}{\partial r}$. Ainsi,

$$f^*(r, \theta) = -\frac{r^2}{2} + g(\theta), \quad (44)$$

avec g de classe \mathcal{C}^1 .

■

Solution 8.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}(M^k)$ est un polynôme en coefficients de M . Soit $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, formons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto f(M + tH) \end{aligned} \quad (45)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}((M + tH)^k)$ est un polynôme, et la dérivée en 0 est le terme en t . Ce coefficient vaut

$$\sum_{i=1}^k \text{Tr}(M^{i-1} H M^{k-i}) = k \text{Tr}(M^{k-1} H). \quad (46)$$

Donc $df_M(H) = \varphi'(0) = (\text{Tr}(H), \dots, n \text{Tr}(M^{n-1} H))$.

2. On a $df_M \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème du rang, on a $\text{rg}(df_M) = n^2 - \dim(\ker(df_M))$.

Or

$$\ker(df_M) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(H) = \text{Tr}(MH) = \dots = \text{Tr}(M^{n-1}H) = 0\}, \quad (47)$$

$$= \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \text{Tr}(P(M)H) = 0\}. \quad (48)$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour tout $A \in \mathbb{R}[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A(M) = P(M)$ où P est le reste de la division euclidienne de A par χ_M . Ainsi,

$$\ker(df_M) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall P \in \mathbb{R}[X], \text{Tr}(P(M)H) = 0\}. \quad (49)$$

Or $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire, donc

$$\ker(df_M) = \left\{ H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall P \in \mathbb{R}[X], \underbrace{(P(M)^\top)^\top}_{P(M^\top)} H = 0 \right\} = \mathbb{R}[M^\top]^\perp. \quad (50)$$

Comme $\dim(\mathbb{R}[M^\top]) = \deg \Pi_{M^\top} =$. Ainsi, $\text{rg}(df_M) = \deg \Pi_M$.

3. A priori, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Pi_M \mid \chi_M$ et

$$C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \deg \Pi_M = n\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{rg}(df_M) = n\}. \quad (51)$$

Lemme 1. Si $\text{rg}(A) = p$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $M \in B(A, \alpha)$, $\text{rg}(M) \geq p$.

Preuve du lemme 1. Il existe une sous-matrice carrée de taille p inversible extraite de A . ■

Soit $M_0 \in C$, $\text{rg}(df_{M_0}) = n$, on applique le lemme à $\text{mat}(df_{M_0}, B, B')$ où B est la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B' est la base de \mathbb{R}^n . f étant \mathcal{C}^1 , $M \mapsto df_M$ est continue et il existe α tel que si $\|M - M_0\| \leq \alpha$, alors $\text{rg}(df_M) \geq n$. Or $df_M: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, donc $\text{rg}(df_M) \leq n$ et $B(M_0, \alpha) \subset C$. Donc C est ouvert. ■

Solution 9. On forme

$$\begin{aligned} f^*: \mathbb{R}^* \times [-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned} \quad (52)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \\ \frac{\partial f^*}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta. \end{aligned} \quad (53)$$

Donc $r \frac{\partial f^*}{\partial r} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$. En reportant, on a

$$r \frac{\partial f^*}{\partial r} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad (54)$$

donc $\frac{\partial f^*}{\partial r} = \frac{1}{r^3 \cos^2 \theta}$ en intégrant par rapport à r (θ constant). Ainsi,

$$f^*(r, \theta) = -\frac{1}{2r^2 \cos^2 \theta} + g(\theta), \quad (55)$$

avec g de classe \mathcal{C}^1 . Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \setminus \{(x, 0) | x \leq 0\}$, on a

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right). \quad (56)$$

Donc

$$f(x, y) = -\frac{1}{2x^2} + h \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad (57)$$

avec h de classe \mathcal{C}^1 . ■

Solution 10.

1. Par convexité de f , pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(ty + (1-t)x) &\leq tf(y) + (1-t)f(x), \\ f(x + (t(y-x))) &\leq f(x) + t(f(y) - f(x)). \end{aligned} \quad (58)$$

On a $df_x(y-x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t}$, or pour tout $t \in]0, 1]$, on a

$$\frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x). \quad (59)$$

Donc $df_x(y-x) \leq f(y) - f(x)$.

2. Si x est point critique de f , on a $df_x = 0$. Donc pour tout $y \in U$, $f(y) \geq f(x)$ donc f présente un minimum absolu. La réciproque est vraie car U est ouvert.

3. soit $(x, y) \in E^2$, soit $t \in [0, 1]$. On a $f(x) = f(y) = \min_U f$. Par convexité de f , on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) = f(y), \quad (60)$$

donc $f(tx + (1-t)y) = f(y) = \min_U f$.

4. On a $E = \{x \in \mathbb{R}^n | df_x = 0\} = df^{-1}(\{0\})$. E est fermé car df est continue (application linéaire en dimension finie).

■

Solution 11. Si f est α -homogène, soit $g(t) = f(tx) = t^\alpha f(x)$. On a

$$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x) = df_{tx}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n). \quad (61)$$

Pour $t = 1$, on a le résultat.

Réciproquement, soient $g_1(t) = f(tx)$ et $g_2(t) = t^\alpha f(x)$. On a

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx), \\ g_2'(t) &= \alpha t^{\alpha-1} f(x). \end{aligned} \quad (62)$$

Donc $tg_2'(t) = \alpha g_2(t)$ et $tg_1'(t) = \sum_{i=1}^n tx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \alpha f(tx) = \alpha g_1(t)$.

g_1 et g_2 sont solutions d'une même équation différentiable et $g_1(1) = g_2(1)$ donc $g_1 = g_2$.

■

Remarque 4.

- Une application linéaire est 1-homogène.
- Un produit scalaire est 2-homogène.
- $(x, y, z) \rightarrow xy^2 - 4x^3 + xyz$ est 3-homogène.

Solution 12. f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 . On a $f(x, x, x) = 3x^2 - x^3 \xrightarrow{x \pm \infty} \pm \infty$. $X = (x, y, z)$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{63}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned}2x &= yz, \\ 2y &= xz, \\ 2z &= xy,\end{aligned}\tag{64}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned}z &= \frac{x^2 z}{4}, \\ x &= \frac{x z^2}{4}, \\ y &= \frac{x z}{2},\end{aligned}\tag{65}$$

si et seulement si $z = x = y0$ ou $(x, y, z) \in \{(\pm 2, \pm 2, \pm 2)\}$ et $y = \frac{xz}{2}$.

- En $(0,0,0)$, soit $X = (x, y, z)$, soit $X' = \frac{X}{\|X\|_2}$. On a $f(X) = \|X\|_2^2 - \|X\|_2^3 x' y' z'$. Or $|x' y' z'| \leq 1$ car $\|X'\|_2 = 1$. Donc $f(X) = \|X\|_2^2 + \underset{X \rightarrow 0}{o}(\|X\|_2^2) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} \|X\|_2^2$. Donc $f(X) \geq 0 = f(0)$ au voisinage de 0. On a donc un minimum local en 0.
- En $(2,2,2)$, on a

$$f(2+h, 2+k, 2+l) - f(2, 2, 2) = (2+h)^2 + (2+k)^2 + (2+l)^2\tag{66}$$

$$\begin{aligned}& - (2+h)(2+k)(2+l) - 4, \\ & = \underbrace{h^2 + k^2 + l^2 - 2hk - 2kl - 2hl}_{q(h,k,l)} - hkl.\end{aligned}\tag{67}$$

Le dernier terme est un terme négligeable devant $\|(h, k, l)\|_2^2$ quand $(h, k, l) \rightarrow 0$. On a

$$q(h, k, l) = (h, k, l) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}.\tag{68}$$

On a $A = 2I_3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ semblable à $\text{diag}(2, 2, -1)$. Les valeurs propres de A sont de

signes opposés donc $q(h, k, l)$ change de signe donc f admet un point col en $(2, 2, 2)$: pas d'extremum. Par exemple, $q(h, 0, 0) = h^2 > 0$ et $q(h, h, h) = -3h^2 < 0$ pour $h \neq 0$.

■

Solution 13.

1. Si g est continue, $x \mapsto g(x, x)$ est continue et f est \mathcal{C}^1 .

Réciproquement, si f est \mathcal{C}^1 , soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x + t(y - x) \end{aligned} \quad (69)$$

$f \circ \gamma$ est \mathcal{C}^1 . On a alors

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)), \quad (70)$$

$$= \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt, \quad (71)$$

$$= \int_0^1 (y - x) f'(\gamma(t)) dt. \quad (72)$$

Donc si $x \neq y$, $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \int_0^1 f'(x + t(y - x)) dt$, vrai aussi si $x = y$. On a, pour $t \in [0, 1]$ fixé, $(x, y) \mapsto f'(x + t(y - x))$ est continue car f est \mathcal{C}^1 . Par ailleurs, soit $R > 0$ tel que $(x, y) \in [-R, R]^2$, notons $M_R = \|f'\|_{\infty, [-R, R]}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $x + t(y - x) \in [-R, R]$ et $|f'(x + t(y - x))| \leq M_R$ intégrable sur $[0, 1]$. D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, g est continue.

2. Si g est \mathcal{C}^1 , alors f est \mathcal{C}^2 . Réciproquement, si f est \mathcal{C}^2 , fixons $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soit

$$\varphi_1(x) = g(x, y_0) = \int_0^1 f'(x + t(y_0 - x)) dt. \quad (73)$$

On note $F(x, t)$ l'intégrande. On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = (1 - t)f''(x + t(y_0 - x))$. Soit $R \geq \max(|y_0|, |x_0| + 1)$ et $x \in [-R, R]$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $x + t(y_0 - x) \in [-R, R]$. Soit $M_2 = \|f''\|_{\infty, [-R, R]}$. D'où $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)| \leq (1 - t)M_2$ intégrable sur $[0, 1]$.

Donc φ_1 est dérivable en x_0 , et on a

$$\varphi'(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \int_0^1 (1 - t)f''(x_0 + t(y_0 - x_0)) dt. \quad (74)$$

De même, comme $g(y, x) = g(x, y)$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y) = \int_0^1 t f''(x_0 + t(y_0 - x_0)) dt. \quad (75)$$

De plus, on vérifie la continuité des dérivées partielles (par rapport à (x, y)) grâce au théorème de continuité d'une intégrale à paramètre. Donc g est \mathcal{C}^1 . ■

Solution 14. Soit $(x_0, y_0) \in U$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$. f est dérivable au sens complexe si et seulement s'il existe $f'(z_0) = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0 + h) = f(z_0) + h(a + ib) + o_{h \rightarrow 0}(h)$ si et seulement si

$$\tilde{f}_1(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + i\tilde{f}_2(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = \tilde{f}_1(x_0, y_0) + i\tilde{f}_2(x_0, y_0) + (h_1 + ih_2)(a + ib) + o_{h \rightarrow 0}(h), \quad (76)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= \tilde{f}_1(x_0, y_0) + h_1 a - h_2 b + o_{h \rightarrow 0}(h), \\ \tilde{f}_2(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= \tilde{f}_2(x_0, y_0) + h_1 b + h_2 a + o_{h \rightarrow 0}(h), \end{cases} \quad (77)$$

si et seulement si \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont différentiables en (x_0, y_0) et

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(x_0, y_0) = a, & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(x_0, y_0) = -b, \\ \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(x_0, y_0) = b, & \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(x_0, y_0) = a. \end{cases}, \quad (78)$$

si et seulement si \tilde{f} est différentiable en (x_0, y_0) et $J_{\tilde{f}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ si et seulement si $d\tilde{f}_{(x_0, y_0)}$ est une similitude directe si et seulement si \tilde{f} est différentiable en (x_0, y_0) et (équations de Cauchy-Riemann)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (79)$$
■

Solution 15.

1. Pour tout $(x, y) \in U$, on a

$$\Delta f_n(x, y) = \Delta f(x, y) + \frac{4}{n} = \frac{4}{n} > 0. \quad (80)$$

Si le $\sup_{\overline{U}} f_n$ est atteint en un point de l'intérieur, (x_n, y_n) alors en ce point on a annulation des dérivées partielles. Comme $\Delta f_n(x_n, y_n) > 0$, on a $\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x_n, y_n) > 0$ ou $\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(x_n, y_n) > 0$. Supposons par symétrie $\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x_n, y_n) > 0$, alors pour h suffisamment petit,

$$f_n(x_n + h, y_n) = f_n(x_n, y_n) + h \underbrace{\frac{\partial f_n}{\partial x}(x_n, y_n)}_{=0} + \frac{h^2}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, y_n)}_{>0} + o_{h \rightarrow 0}(h), \quad (81)$$

alors $f_n(x_n + h, y_n) > f_n(x_n, y_n)$ pour h suffisamment petit. C'est absurde car on avait supposé $f_n(x_n, y_n) = \sup_{\overline{U}} f_n$. Donc $\sup_{\overline{U}} f_n$ est atteint sur ∂U .

2. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de ∂U telle que $f_n(x_n, y_n) = \sup_{\overline{U}} f_n$. ∂U est fermé borné dans \mathbb{R}^2 donc compact. On extrait une suite $((x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers $(x_\infty, y_\infty) \in \partial U$. De cette dernière, on a

$$f(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) = f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) - \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}^2 + y_{\sigma(n)}^2)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}, \quad (82)$$

car \overline{U} borné. f étant continue, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) = f(x_\infty, y_\infty). \quad (83)$$

Soit $(x, y) \in \overline{U}$, on a

$$f_{\sigma(n)}(x, y) \leq f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}). \quad (84)$$

Par passage à la limite, $f(x, y) \leq f(x_\infty, y_\infty)$ et donc

$$f(x_\infty, y_\infty) = \max_{\overline{U}} f. \quad (85)$$

3. On forme $h = f - g$ continue sur \overline{U} , harmonique sur U et $h|_{\partial U} = 0$. D'après ce qui précède, $h(x) \leq 0$ pour tout $x \in \overline{U}$. On peut ainsi appliquer le résultat à $-h = g - f$, donc pour tout $x \in \overline{U}$, $h(x) \leq 0$ d'où $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \overline{U}$. Finalement, on $f = g$. ■

Remarque 5. On vient de montrer l'unicité d'une solution éventuelle au problème de Dirichlet : $\Delta f = 0$ sur U , $f = \tilde{f}$ sur ∂U avec $\tilde{f} : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On peut montrer l'existence sur $\overline{D(0,1)}$. Soit

$$\begin{aligned}\tilde{f} : C(0,1) &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = e^{i\theta} &\mapsto \tilde{f}(e^{i\theta})\end{aligned}\tag{86}$$

continue, alors

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto \tilde{f}(e^{i\theta})\end{aligned}\tag{87}$$

continue 2π -périodique.

On pose $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 < \infty$. On définit, pour tout $r \in [0,1[$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g) r^n e^{in\theta},\tag{88}$$

harmonique sur $\overline{D(0,1)}$ et vérifie $f|_{\partial U} = \tilde{f}$, $f(x+iy) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)(x+iy)^n : \Delta f = 0$. Notons que l'on a

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_r(\theta - i) dt,\tag{89}$$

avec

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1 - r^2}{1 - (2 \cos(x))r + r^2}.\tag{90}$$

Solution 16. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \sin \theta, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial y} (r \cos \theta),\end{aligned}\tag{91}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}\tag{92}$$

En réinjectant, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (93)$$

$$= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (94)$$

$$- \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (95)$$

$$- \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (96)$$

$$+ \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (97)$$

On fait les mêmes calculs pour $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (98)$$

$$+ \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (99)$$

$$+ \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (100)$$

$$+ \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (101)$$

Finalement, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (102)$$

■

Solution 17.

1. G est \mathcal{C}^2 (l'hypothèse de domination est vérifiée sur les compacts). On a

$$G'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial r}(r, \theta) d\theta. \quad (103)$$

On a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial f} \right) (r, \theta) d\theta, \quad (104)$$

$$= -\frac{1}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial \theta^2} (r, \theta) d\theta, \quad (105)$$

$$= -\frac{1}{2\pi r^2} \left[\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \theta} (r, \theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}, \quad (106)$$

$$= 0. \quad (107)$$

2. $r \mapsto rG'(r)$ est constant pour $r > 0$, et continue en 0, donc G' est nulle donc G est constant.

Ainsi, $G(r) = f(x_0, y_0)$.

■

Solution 18.

1. Soit $\gamma:]-\alpha, \alpha[\rightarrow O_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 tel que $\gamma'(0) = A$ et $\gamma(0) = I_n$. On a $\gamma(t)^\top \gamma(t) = I_n$.

En dérivant, on a

$$\gamma'(t)^\top \gamma(t) + \gamma(t)^\top \gamma'(t) = 0, \quad (108)$$

donc $A^\top + A = 0$. Ainsi, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto \exp(tA) \end{aligned} \quad (109)$$

de classe \mathcal{C}^1 . On a $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$. De plus,

$$\exp(tA)^\top \exp(tA) = \exp(t(A^\top + A)) = I_n, \quad (110)$$

donc $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{T}_{I_n}(O_n(\mathbb{R}))$. Notons que $\det(\exp(tA)) = \exp(\text{Tr}(tA)) = 1$ donc $\exp(tA) \in SO_n(\mathbb{R})$.

2. On a $A \in \mathcal{T}_\theta(O_n(\mathbb{R}))$ si et seulement s'il existe

$$\begin{aligned} \gamma:]-\alpha, \alpha[&\rightarrow O_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned} \quad (111)$$

tel que $\gamma(0) = \theta$ et $\gamma'(0) = A$ si et seulement s'il existe

$$\begin{aligned} \gamma_1 :]-\alpha, \alpha[&\rightarrow O_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto \theta^{-1}\gamma(t) \end{aligned} \quad (112)$$

tel que $\gamma_1(0) = I_n$ et $\gamma'_1(0) = \theta^{-1}A$ si et seulement si $\theta^{-1}A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (d'après ce qui précède)
et

$$\mathcal{T}_\theta(O_n(\mathbb{R})) = \theta\mathcal{A}_n(\mathbb{R}). \quad (113)$$

3. $O_n(\mathbb{R})$ est compact (fermé et borné en dimension finie). Donc $d(M, O_n(\mathbb{R}))$ est atteinte.

Soit θ_0 tel que $d(M, O_n(\mathbb{R})) = \|\theta_0 - M\|_2$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \iota : O_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto \|\theta - M\|_2^2 \end{aligned} \quad (114)$$

. Soit

$$\begin{aligned} \gamma :]-\alpha, \alpha[&\rightarrow O_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned} \quad (115)$$

de classe \mathcal{C}^1 tel que $\gamma(0) = \theta_0$ et $\gamma'(0) = A$. Alors $\theta^{-1}A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ d'après ce qui précède.

$$\begin{aligned} f :]-\alpha, \alpha[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|\gamma(t) - M\|_2^2 \end{aligned} \quad (116)$$

atteint un minimum en 0, donc

$$f'(0) = 0, \quad (117)$$

$$= d\|\cdot\|_{2_{\theta_0-M}}^2(A), \quad (118)$$

$$= (\nabla(\|\cdot\|_2^2)(\theta_0 - M)|A), \quad (119)$$

$$= 2(\theta_0 - M|A). \quad (120)$$

C'est vrai pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\theta_0^{-1}A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$;
 $(\theta_0 - M|\theta_0 B) = (\theta_0 - \theta(\theta_0^{-1}M)|\theta_0 B) = 0$.

Comme $\theta \in O_n(\mathbb{R})$, on a pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $(I_n - \theta_0^{-1}M|B) = 0$ donc $I_n - \theta_0^{-1}M \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (car pour tout $(B, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(B|S) = \text{Tr}(B^\top S) = -\text{Tr}(BS)$)
donc $(B|S) = 0$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n^2$.

Donc $\theta_0^{-1}M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $S_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \theta_0 S_0$. On a $M^\top M = S_0^\top \theta_0^\top \theta_0 S_0 = S_0^2$. Ainsi,

$$\|\theta_0 - M\|_2^2 = (\theta_0 - \theta_0 S_0 | \theta_0 - \theta_0 S_0), \quad (121)$$

$$= (I_n - S_0 | I_n - S_0), \quad (122)$$

$$= \text{Tr}((I_n - S_0)^2), \quad (123)$$

$$= \text{Tr}(I_n - 2S_0 + S_0^2), \quad (124)$$

$$= n - 2 \text{Tr}(S_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad (125)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\lambda_i - 1)^2, \quad (126)$$

où $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les valeurs propres de S_0 (qui sont les racines des valeurs propres de $M^\top M$).

Réciproquement, si $M = \theta S$, on a $S^\top S = M^2 = S_0^\top S_0 = S_0^2$: c'est encore minimal.

■