*Solutions MP/MP**
Suites et séries de fonctions

Solution 1. Pour $x \geqslant 0$, on a $F_n(x) > 0$, on a

$$\ln\left(F_n(x)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{kx}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln\left(1+tx\right) dt = G(x)$$

On a $G(0) = 0$ et pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[\left(t + \frac{1}{x}\right)\ln(1+tx)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+tx}\left(t + \frac{1}{x}\right) dt \\ &= \frac{x+1}{x}\ln(1+x) - 1 \end{aligned}$$

(utiliser le fait que G est continue sur $[0,1]$ et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$).

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 1 = F(0)$. Pour $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = (1+x)^{\frac{x+1}{x}} \times \frac{1}{e} = F(x)$.

F est continue sur $[0,1]$. Soit $x \geqslant 0$. On écrit

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\mathrm{e}^{G_n(x)} - \mathrm{e}^{G(x)}\right|$$

On a d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \mathrm{e}^{G_n(x)}\,|G_n(x) - G(x)| \leqslant \mathrm{e}^{G_n(x)} \times \frac{x}{2n}$$

Si $f(t) = \ln\left(1+tx\right)$, on a $f'(t) = \frac{x}{1+tx} \geqslant 0$. Donc f est croissante et $G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \ln(1+x)$. Finalement,

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \frac{x(1+x)}{2n}$$

On a donc convergence uniforme sur $[0, A]$ pour tout $A \geqslant 0$. ■

Solution 2.

1. Si $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha}\,|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

Ainsi, si $|x| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n(x)$ converge absolument. Si $|x| > 1$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|U_{n+1}(x)| > |U_n(x)|$, donc $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 : $\sum u_n(x)$ diverge.

Si $x = 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $\frac{U_{n+1}(1)}{U_n(1)} > 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant N_0}$ gare un signe constant. On a

$$\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, d'après la règle de Raabe-Duhamel, on a

$$|U_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Ainsi, on a convergence si et seulement si $\alpha > 2$.
Si $x = -1$, on a toujours $|U_n(-1)| = |U_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. Si $\sum u_n(-1)$ converge, on a $\alpha > 0$. Réciproquement, si $\alpha > 0$, on a $|U_n(-1)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum u_n(-1)$ est une série alternée. On a donc

$$\left|\frac{u_{n+1}(-1)}{u_n(-1)}\right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} < 1$$

donc $(|u_n(-1)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : d'après le critère spéciale des séries alternées, $\sum u_n(-1)$ converge. Ainsi, $\sum u_n(-1)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

2. Supposons la convergence uniforme sur $[0,1[$. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to1^-} u_n(x) = u_n(1)$, d'après le théorème d'interversion des limites, comme il ya convergence uniforme au voisinage de 1, $\sum u_n(1)$ converge. Donc d'après ce qui précède, on a $\alpha > 2$.
Réciproquement, si $\alpha > 2$, pour tout $x \in [0,1]$, on a $|u_n(x)| \leqslant |u_n(1)|$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). Donc on a convergence normale sur $[0,1]$.
3. Supposons convergence uniforme sur $]-1,0]$. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to-1^+} u_n(x) = u_n(-1)$. D'après le théorème d'interversion des limites, comme il y a convergence uniforme au voisinage de -1, $\sum u_n(-1)$ converge. D'après ce qui précède, on a $\alpha > 0$.
Réciproquement, si $\alpha > 0$, soit $x \in [-1,0]$, $\sum u_n(x)$ est alternée dont le terme général décroît en valeur absolue (et tend vers 0). Donc pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant |u_N(x)| \leqslant |u_N(-1)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

On a donc convergence uniforme de $\sum u_n(x)$ sur $[-1,0]$

■

Remarque 1. *Pour rappel, on redonne la règle de Raabe-Duhamel : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{\frac{1}{n^2}}$$

alors il existe $C > 0$ telle que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\beta}$. En effet, on écrit

$$\ln\left((n+1)^\beta v_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta v_n\right) = \beta \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $(n^\beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 2. *On peut aussi éviter la règle de Raabe-Duhamel. On forme*

$$\begin{aligned}\ln\left(|u_n(1)|\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{2k-1}{2k-1+\alpha}\right|,\\ &= -\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right),\\ &= -\frac{\alpha}{2}\ln(n) - \frac{\gamma\alpha}{2} + K + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\end{aligned}$$

donc $|u_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ *avec* $C>0$.

Solution 3. Pour $k \geqslant \lfloor x \rfloor$, on a

$$\arctan(k+x) - \arctan(k) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

On a

$$f_k(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+k(k+x)}\right) = \arctan\left(\frac{x}{k^2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ converge absolument et f définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f_k'(x) = \frac{1}{1+(k+x)^2}$$

On fixe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|k+x| \geqslant k - |x| \geqslant k - \underbrace{\max\left(|a|, |b|\right)}_{=M} \geqslant 0$$

pour $k \geqslant \lfloor M+1 \rfloor$.

On a de plus $0 \leqslant f_k'(x) \leqslant \frac{1}{1+(k-M)^2}$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). On $\sum_{k\geqslant\lfloor M\rfloor+1} f_k'$ converge normalement sur $[a,b]$. Enfin,

$$f - \sum_{k=1}^{\lfloor M\rfloor} f_k = \sum_{k=\lfloor M\rfloor+1}^{+\infty} f_k$$

est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ d'après le théorème de dérivation terme à terme, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (car $\sum_{k=1}^{\lfloor M\rfloor} f_k$ est une somme finie de fonctions $\mathcal{C}^1$ donc est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} f_k(n) &= \sum_{k=0}^{N} \arctan(k+n) - \arctan(k) \\
&= \sum_{k=n}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{N} \arctan(k) \\
&= \sum_{k=N+1}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} n\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \arctan(\frac{1}{k}) = f(n)
\end{aligned}$$

On a $\arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k} > 0$, d'après le théorème de comparaison des sommes partielles de séries à termes positifs divergente, donc $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Par ailleurs, f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$\ln\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} f\left(\lfloor x\rfloor\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\lfloor x\rfloor + 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$$

donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. ■

Solution 4. Soit $t > 0$, on a $\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-nt}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-nt}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} -\mathrm{e}^{nt} = 0$ (terme général d'une série à termes positifs convergente car $t > 0$).

On définit

$$\begin{array}{rccl} g_+ : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-xt}\right) \geqslant 0 \end{array}$$

On a $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_t(x)$. De plus, $g_t'(x) = -\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1-\mathrm{e}^{-xt}} \leqslant 0$. g_+ est décroissante, et on a

$$\int_n^{n+1} g_+(x)dx \leqslant g_+(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_+(x)dx$$

On somme de $n = 1$ à $+\infty$ (on admet l'existence pour $n = 0$). On obtient

$$-\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-xt}\right) = \int_1^{+\infty} g_+(x)dx \leqslant -f(t) \leqslant \int_0^{+\infty} -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-xt}\right) dx$$

On pose $u = xt$ et $dx = \frac{du}{t}$ car $t > 0$. On a

$$\int_1^{+\infty} -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-xt}\right) dx = \frac{1}{t}\int_t^{+\infty} -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{u}\right) du \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t} I$$

et

$$\int_0^{+\infty} -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-xt}\right) dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-u}\right) du = \frac{I}{t}$$

donc

$$\boxed{f(t) \underset{t\to+0^+}{\sim} -\frac{I}{t}}$$

■

Solution 5.

1. On a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2}$ donc
$$\left|\frac{1}{2^p} f_n(x-a_p)\right| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}},$$
et $g_n(x)$ est définie. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$\begin{array}{rccc} F_p : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \dfrac{1}{2^p} f_n(x-a_p) \end{array}$$
On a $|F_p(n)| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$ et pour p fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_p(n) = 0$. Donc $\sum_{p\geqslant 0} F_p$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. D'après le théorème d'interversion des limites, on a
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.}$$

2. S'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{p_0} \in [a,b]$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $a_{p_0} + \frac{1}{n}$ ou $a_{p_0} - \frac{1}{n} \in [a,b]$ et $g_n(a_{p_0} \pm \frac{1}{n}) \geqslant \frac{1}{2^{p_0+1}}$ (série à termes positifs).
Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \notin [a,b]$, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{p=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, on a
$$0 \leqslant \sum_{p=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x-a_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Notons $\alpha) \min_{\substack{0\leqslant p\leqslant N_0 \\ x\in[a,b]}} |x-a_p| > 0$. Pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $p \in [\![0,N_0]\!]$, $|x-a_p| \geqslant \alpha$ et il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\frac{1}{n} \leqslant \alpha$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $p \in [\![0,N_0]\!]$, $f_n(x-a_p) \leqslant f_n(\alpha)$ et
$$0 \leqslant \sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(x-a_p) \leqslant \sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Ainsi, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, pour tout $x \in [a,b]$, $\sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(x-a_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, pour tout $x \in [a,b]$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \varepsilon$. D'où le résultat.

■

Solution 6. f_n est définie car $\frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Soit $a > 0$. Sur $[-a, a]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{|a|}{n^2}$, terme général d'une série à termes positifs convergente. Il y a donc convergence normale sur $[-a, a]$, et f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc f l'est aussi. Soit $g_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$. On a $g_n'(x) = -\frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$ et pour tout $x \in [-a, a]$, $|g_n'(x)| \leqslant \frac{2|a|}{n^4}$. Il y a à nouveau convergence normale sur $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et donc $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$ et donc f aussi.

Sur $[-1, 1]$, on peut intervertir les limites :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = 0.}$$

Fixons $x > 0$, on pose $\psi_x(t) = \frac{x}{x^2+t^2}$. ψ_x est positive décroissante. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_n^{n+1} \psi_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \psi_x(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} \psi_x(t)\mathrm{d}t.$$

On a

$$\int_A^X \frac{x\mathrm{d}t}{x^2+t^2} = \int_A^X \frac{\frac{\mathrm{d}t}{x}}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{A}{x}\right).$$

Ainsi, en sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_1^{+\infty} \psi_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_x(n) \leqslant \int_0^{+\infty} \psi_x(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

En 0, on a $f(x) = xg(x)$ avec convergence normale sur $\mathbb{R}$ pour g, g continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = \frac{\pi^2}{6}$. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\frac{\pi^2}{6}.}$$

■

Solution 7. Les f_n sont M-Lipschitziennes. Soient $x, y \in [a, b]$. On a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant M\,|x-y|$ donc par passage à la limite, f est M-Lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$, on considère la subdivision $(a_1, \ldots, a_N)$ de $[a, b]$ de pas δ. Soit $x \in [a, b]$ et $K \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $x \in [a_K, a_{K+1}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_n(a_K)| + |f_n(a_K) - f(a_K)| + |f(a_K) - f(x)|\,, \\ &\leqslant M\delta + |f_n(a_k) - f(a_k)| + M\delta. \end{aligned}$$

On s'impose $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $n \geqslant N_1$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. ■

Remarque 3. *L'existence de M est nécessaire, cf $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = x^n$.*

Remarque 4. *f n'est pas nécessairement dérivable, cf $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ et*

$$|f_n'(x)| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \right| \leqslant 1.$$

Solution 8. Si $x = 2$, on a

$$f_n(2) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{n}\right)^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \left[\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \right]_0^1 = \ln(2).$$

Si $x < 2$, on a pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

On somme pour obtenir

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant f_n(x) \leqslant 1$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1.}$$

De plus, soit $a < 2$, pour tout $x \in]-\infty, a]$, on a

$$0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant 1 - \frac{n}{\sqrt{n + n^a}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers 1 sur $]-\infty, a]$.

Si $x > 2$, soit $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} + \sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor + 1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}.$$

On a

$$\sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{n^\alpha}{\sqrt{1 + n^2}} \underset{n \to +\infty}{} n^{\alpha - 1},$$

et

$$\sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor + 1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^{x\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^{x\alpha - 2}}}.$$

On choisit α tel que $\alpha < 1$ et $x\alpha - 2 > 0$ (possible car $x > 2$). Si $a > 2$, pour $\alpha = \left(1 + \frac{2}{a}\right) \times \frac{1}{2}$, si $x \geqslant a$, on a $\frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{a} < \alpha < 1$ donc

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+n^{\alpha x - 2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il y a donc convergence uniforme vers 0 sur $[a, +\infty[$. ■

Solution 9.

1. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times [\![0, n]\!]$,

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \times n \times \cdots \times n} \leqslant \frac{1}{k!}.$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - f_n(a) \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} \right\|, \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) \|a\|^k, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\|a\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|a\|}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

   On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = \exp(a)$.

   Soit $R \geqslant 0$, pour tout $a \in \overline{B(0, R)}$,

$$\begin{aligned} \|\exp(a) - f_n(a)\| &\leqslant \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right\| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) R^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

   $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\exp(a)$ sur les compacts.

2. D'après ce qui précède, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $z \mapsto \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z)$. Et on a convergence sur les compacts.

3. On peut déjà dire que $\deg(P_n) \leqslant 2n + 1$. Le coefficient en X^{2n+1} de P_n est

$$\alpha = \frac{\left(\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(\frac{-i}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2i} = \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}} \times \frac{(-1)^n}{2i}[i - (-i)] \neq 0$$

   et donc $\deg(P_n) = 2n + 1$.

Le coefficient en X est $\frac{(2+1)\left(\frac{\mathrm{i}}{2n+1}-\left(\frac{-\mathrm{i}}{2n+1}\right)\right)}{2\mathrm{i}}=1$.
Soit $z\in\mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
P_n(z)=0 &\iff \left(1+\frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)^{2n+1}=\left(1-\frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)^{2n+1},\\
&\iff \exists k\in[\![0,2n]\!]\,,\ 1-\frac{\mathrm{i}z}{2n+1}=\left(1+\frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right),\\
&\iff \exists k\in[\![0,2n]\!]\,,\ 1-\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right)=\frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\left(1+\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right)\right),\\
&\iff \exists k\in[\![0,2n]\!]\,,\ z=(2n+1)\times(-\mathrm{i})\times\frac{(-2\mathrm{i})\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)},\\
&\iff \exists k\in[\![0,2n]\!]\,,\ =-(2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
P_n&=aX\times\prod_{k=1}^{2n}\left(X+(2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right),\\
&=aX\prod_{k=1}^{n}\left(X+(2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\prod_{k=n+1}^{2n}\left(X+(2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right),\\
&=aX\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right),\\
&=a'X\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Comme le coefficient de X vaut 1, on a $a'=1$, d'où le résultat.

4. Soit $f_n\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ telle que $f(p)=a_{n,p}$. D'après (i), $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{N}$, et d'après (ii), on peut intervertir et $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n$.
5. tan est impaire, et $\tan''=2\tan(1+\tan^2)>0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc tan est convexe et $\tan(t)>t$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, et c'est bon par imparité.
Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $0\leqslant\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\leqslant\frac{x^2}{k^2\pi^2}$. Il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geqslant k_0$, $\frac{x^2}{k^2\pi^2}\leqslant\frac{1}{2}$, alors pour tout $n\geqslant k_0$, pour tout $k\in[\![k_0,n]\!]$, $1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\geqslant\frac{1}{2}>0$. Alors

$$\begin{aligned}
0&\leqslant-\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n}\left(1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{3n+1}\right)}\right)\right),\\
&=\sum_{k=k_0}^{n}-\ln\left(1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).
\end{aligned}$$

On a

$$0 \leqslant -\ln\left(1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \leqslant -\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

terme général d'une série à termes positifs convergente.
Si $g_n(x) = -\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n}\left(1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{3n+1}\right)}\right)\right)$, alors $g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_{n,k}$ où l'on définit pour tout $k \geqslant k_0, n \geqslant k_0$,

$$a_{n,k} = -\ln\left(1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

si $k \leqslant n$, et 0 sinon. On pose aussi $\alpha_k = -\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. On a bien $|a_{n,k}| \leqslant \alpha_k$ terme général d'une série à termes positifs convergente.
Pour $k \geqslant k_0$ fixé, pour $n \geqslant k$, on a

$$a_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha_k.$$

On peut donc appliquer ce qui précède, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \alpha_k,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=k_0}\left(1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=k_0}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Soit $R_n(x) = x\prod_{k=1}^{k_0}\left(1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\prod_{k=1}^{k_0}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\sin(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).}$$

■

Remarque 5. *En identifiant le coefficient en x^3, on obtient*

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\pi^2},$$

d'où

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

De même, en identifiant le coefficient en x^5, on obtient

$$\frac{1}{120} = \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ k_1\neq k_2}} \frac{1}{k_1^2k_2^2\pi^4} = \sum_{(k_1,k_2)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{k_1^2k_2^2\pi^4} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4\pi^4} = \zeta(2)^2 - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4\pi^4}.$$

On trouve donc

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

De la même façon, on montre de manière générale que

$$\zeta(2p) = a_p\pi^{2p},$$

avec $a_p \in \mathbb{Q}$.

Solution 10.

1. Soit $\alpha \in [a,b]$. f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. On a $f\left([0,1]\right) \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$. Pour tout $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $f(x) \geqslant x$. $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, donc converge vers $\frac{1}{2}$ seul point fixe de f (continue). Ainsi (f_n) converge simplement vers $\frac{1}{2}$ sur $[a,b]$.
   Pour tout $n \geqslant 1$,
   $$\left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - f_n(x) \leqslant \max\left(\frac{1}{2} - f_n(a), \frac{1}{2} - f_n(b)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   Donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$.
   On a $f_n(0) = f_n(1) = 0 \neq \frac{1}{2}$, on n'a donc pas la continuité de la limite simple. Donc il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0,1]$ (même sur $]0,1[$).
2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$. Q_2 est dense dans $\mathbb{R}$, donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $(\alpha_{k,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_2^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n} \alpha_{k,m} = a_k$. Soit $Q_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,m}X^k \in \mathbb{Q}_2[X]$. Pour tout $x \in [a,b]$ on a
   $$|P(x) - Q(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k - \alpha_{k,m}|\,|x|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k - \alpha_{k,m}| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$
   donc il existe $M \in \mathbb{N}$, si $Q = Q_M$, alors $\|P - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{R}\right)$, soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Si $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{2^{n_k}}X^k$, soit pour $m \in \mathbb{N}$, $Q_m = \sum_{k=0}^{n} p_k\left(f_m\right)^{n_k}X^k$ converge uniformément vers Q sur $[a,b]$ (n est fixé), et $Q_m \in \mathbb{Z}[X]$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathbb{Z}[X]$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|Q_{n_0} - Q\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Si $A = Q_{n_0} \in \mathbb{Z}[X]$, on a bien $\|f - A\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$.
   Sur $[0,1]$, on n'a pas de suite de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f = \frac{1}{2}$ car pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(0) \in \mathbb{Z}$.

■

Solution 11.

1. Par croissance des taux d'accroissements (en un point fixé) :
$$\frac{u_n(y)-u_n(x)}{y-x} \leqslant \frac{u_n(y)-u_n(b)}{y-b} \leqslant \frac{u_n(\beta)-u_n(b)}{\beta-b},$$
et de même
$$\frac{u_n(y)-u_n(x)}{y-x} \geqslant \frac{u_n(\alpha)-u_n(a)}{\alpha-a}.$$
Finalement, on a
$$\left|\frac{u_n(x)-u_(y)}{x-y}\right| \leqslant \max\left(\left|\frac{u_n(\alpha)-u_n(a)}{\alpha-a}\right|, \left|\frac{u_n(\beta)-u_n(b)}{\beta-b}\right|\right),$$
qui sont des suites bornées car convergent. D'où l'existence de A.
2. Par passage à la limite (simple), u est A-Lipschitzienne sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ une subdivision de pas d de $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $k \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned}|u_n(x)-u(x)| &\leqslant |u_n(x)-u_n(a_k)| + |u_n(a_k)-u(a_k)| + |u(a_k)-u(x)|,\\ &\leqslant 2Ad + |u_n(a_k)-u(a_k)|.\end{aligned}$$
On choisit d tel que $2Ad \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par convergence simple, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, $|u_n(a_k)-u(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $x \in [a,b]$, $|u_n(x)-u(x)| \leqslant \varepsilon$. Donc (u_n) converge uniformément vers u sur $[a,b]$.

■

Remarque 6. *C'est faux si $I = [a,b]$, cf $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = x^n$.*

Solution 12. Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. Si φ est une fonction polynômiale, $\varphi = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$. Pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, (f_n^k) converge uniformément vers f^k sur $[a,b]$. Par combinaison linéaire, $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi \circ f$ sur $[a,b]$. $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée (car converge), donc il existe $A \geqslant 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant A$ et $\|f\|_\infty \leqslant A$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\|\varphi - P\|_{\infty,[-A,A]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ d'après le théorème de Weierstrass. Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$,
$$\begin{aligned}|(\varphi\circ f_n)(x) - (\varphi\circ f)(x)| &\leqslant |(\varphi\circ f_n)(x) - (P\circ f_n)(x)| \\ &\quad + |P\circ f_n(x) - P\circ f(x)| + |P\circ f(x) - \varphi\circ f(x)|,\\ &\leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + \|P\circ f_n - P\circ f\|_{\infty,[a,b]}\end{aligned}$$
et le dernier terme tend vers 0 donc est plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$ pour n suffisamment grand. D'où le résultat. ■

Remarque 7. *Pour la deuxième partie du raisonnement, on peut aussi invoquer la continuité uniforme de φ sur $[-A, A]$.*

Solution 13.

1. Pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{1+n^2}$ donc on a convergence normale sur $\mathbb{R}^+$. Pour $t < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (t) = +\infty$ donc la série diverge grossièrement. Ainsi, $E = \mathbb{R}_+$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et on a convergence normale donc f est continue sur E. Pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{t \to +\infty} (t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f_0(t) = 1$. On peut intervertir par convergence normale, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f_n(t) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur E. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$f_n^{(k)}(t) = \frac{(-n)^k \mathrm{e}^{-nt}}{1+n^2}.$$
Soit $\alpha > 0$. Pour $t \geqslant \alpha$, on a
$$\left| f_n^{(k)}(t) \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{1+n^2} = \underset{n \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$
Ainsi, $\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $t > 0$,
$$\boxed{f''(t) + f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}}.}$$

■

Solution 14.

1. On a $u_n(0) = 0$. Soit $x > 0$, on a $|u_n(x)| = \underset{n \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ donc on a bien convergence simple sur $[0, 1]$.
2. On a
$$u_n(x) = \frac{(1 - nx)\mathrm{e}^{-nx}}{n^a}.$$
Ainsi, u_n est croissante de 0 à $\frac{1}{n}$ et décroît de $\frac{1}{n}$ à 1, et on a $u_n(0) = 0$, $u_n(1) = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{a}$ et $u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}n^{a+1}} = \|u_n\|_{\infty, [0,1]}$. On a donc convergence normale si et seulement si $a > 0$.
3. Pour $a = 1$ (respectivement $a = 2$), S est continue par convergence normale car u_n est $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $x > 0$, si $g_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ (respectivement $h_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$) et $g(x) = \frac{S(x)}{x}$ (respectivement $h(x) = \frac{S(x)}{x}$), soit $\alpha \in]0, 1]$ et $x \in [\alpha, 1]$, on a
$$|g_n'(x)| = \left| \mathrm{e}^{-nx} \right| \leqslant \mathrm{e}^{-n\alpha}$$

(respectivement

$$|h'_n(x)| \leqslant \left|\frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{n}\right|$$

et $|h''_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-n\alpha}$). Donc $\sum g'_n$ (respectivement $\sum h'_n$ et $\sum h''_n$) converge normalement sur $[\alpha, 1]$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$ donc g est $\mathcal{C}^1$ (respectivement h est $\mathcal{C}^2$) sur $]0, 1]$.

Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\mathrm{e}^{-nx} = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}},$$

et donc (par changement de variable dans l'intégrale)

$$g(x) = g(1) + \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) - \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

puis $S(x) = xg(x)$. On fait de même pour $a = 2$.

■

Solution 15. Si $x > 0$, on a $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{+nx^{\frac{3}{2}}} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Ainsi, le domaine de f est $]0, +\infty[$.

Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, pour $x \geqslant a$, pour $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + na^{\frac{3}{2}}},$$

et le terme de droite est le terme général d'un série à termes positifs convergente indépendante de x. Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement ssur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \times \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Fixons $x > 0$, soit

$$\begin{array}{rccl} g_x : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \dfrac{1}{1 + tx^{\frac{3}{2}}} \end{array}$$

g est continue positive et décroissante. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand $t \to 0$, et est un $O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ quand $t \to +\infty$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$g_x(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant g_x(n)$$

Ainsi, en sommant, on obtient

$$f(x)-\frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\times\frac{1}{1+(n+1)x^{\frac{3}{2}}}\leqslant I(x)=\int_1^{+\infty}g_x(t)\mathrm{d}t\leqslant f(x).$$

Pour calculer $I(x)$, on fait les changements de variables $u=\sqrt{t}$ puis $v=ux^{\frac{3}{4}}$ pour avoir

$$I(x)=\frac{2}{x^{\frac{3}{4}}}\int_{x^{\frac{3}{4}}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\pi}{x^{\frac{3}{4}}}.$$

Ainsi, $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\pi}{x^{\frac{3}{4}}}$. Donc f est intégrale sur $]0,1]$. Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

Remarque 8. *On peut aussi former, pour $n\geqslant 1$,*

$$u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}(1+nx^{\frac{3}{2}})}=\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^{\frac{3}{2}}},$$

en faisant le changement de variables $u=n^{\frac{2}{3}}x$. u_n est alors le terme général d'une série à termes positifs convergente, et on peut intervertir les signes $\sum$ et $\int$.

Solution 16.

1. Si $x<0$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}=+\infty.$$
Si $x=0$, on a $S(0)=0$. Si $x>0$, on a $\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{=}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc on a convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.
2. On cherche $\sup\limits_{x\geqslant 0}|f_n(x)|$. Pour tout $x\geqslant 0$, on a
$$f_n'(x)=\frac{(1-nx)}{\ln(n)}\mathrm{e}^{-nx}.$$
Ainsi, le sup est atteint en $x=\frac{1}{n}$. Comme $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n\mathrm{e}\ln(n)}$ est le terme général d'une série à termes positifs divergente (série de Bertrand), on n'a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $N\geqslant 2$, $x\geqslant 0$. On a
$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{+\infty}f_n(x)&\leqslant\frac{x}{\ln(N)}\sum_{n=N}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx},\\&\leqslant\frac{x}{\ln(N)}\frac{\mathrm{e}^{-Nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}},\\&\leqslant\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\ln(N)(1-\mathrm{e}^{-x})}\times\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x},\\&\leqslant\frac{x}{\ln(N)(\mathrm{e}^x-1)}.\end{aligned}$$

$x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, tend vers 1 quand $x \to 0$ et tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Donc cette fonction est bornée par $M \geqslant \mathrm{e}$ et

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{M}{\ln(N)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$

On a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

3. On a $S(x) = x \times \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = x \times \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x)$. g_n est $\mathcal{C}^1$, et pour $a > 0$, $x \geqslant a$ et $n \geqslant 2$, on a $g_n'(x) = -\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$ d'où $|g_n'(x)| \leqslant \frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \leqslant \frac{n\mathrm{e}^{-na}}{\ln(n)}$ qui est le terme général d'une série à termes positifs convergente car $a > 0$. Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n'$ converge normalement sur $[a, \infty[$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n$ convergen simplement sur $\mathbb{R}_+$ donc $\sum_{n \geqslant 2} g_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a $\frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x) = \tau(x)$. τ est décroissante car les g_n le sont, donc $\tau(x) \xrightarrow[x \to 0]{} l \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Comme $g_n \geqslant 0$, pour tout $N \geqslant 2$ et $x > 0$, on a $\sum_{n=2}^{N} g_n(x) \leqslant \tau(x)$. Quand $x \to 0$, on a donc

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(n)} \leqslant l,$$

et quand $N \to +\infty$, on a $l = +\infty$. Ainsi, S n 'est pas dérivable à droite en 0.

4. On a $x^k S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{k+1} \mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} k_n(x)$. On a

$$k_n'(x) = \frac{x^k \mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} (k + 1 - nx),$$

donc le sup est atteinte en $x = \frac{k+1}{n}$. Pour tout $x \geqslant K + 1$, on a $|k_n(x)| \leqslant |k_n(K+1)| \leqslant \frac{(k+1)^{k+1} \mathrm{e}^{-(k+1)n}}{\ln(n)} = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $\sum_{n \geqslant 2} k_n$ converge normalement sur $[k+1, +\infty[$ et on peut intervertir les limites. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^k S(x) = 0.}$$

■

Solution 17.

1. Q_k est $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique, paire, $0 \leqslant Q_k(t) \leqslant c_k$, $Q_k(-\pi) = Q_k(\pi) = 0$, $Q_k(0) = c_k$. Q_k est décroissante sur $[0, \pi]$. Pour tout $t \in [\delta, \pi]$, $0 \leqslant Q_k(t) \leqslant c_k \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k$. On a $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k \mathrm{d}t = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(u) \mathrm{d}u \underset{k \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ (via les intégrales de Wallis).

Ainsi, c_k est équivalent à $\sqrt{k\pi}$ quand $k \to +\infty$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k = 0$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \sup_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} Q_k(t) = 0.}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|P_k(t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)\mathrm{d}s - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_k(s)\mathrm{d}s\right|,\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|\, Q_k(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s)\mathrm{d}s = 1$. f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, 4\pi]$ donc f est uniformément continue sur $[0, 4\pi]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $(t, t') \in [0, 4\pi]^2$, $|t - t'| \leqslant \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, si $|t - t'| \leqslant \min(\delta_1, 2\pi)$, alors $|f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $\mathbb{R}$ car continue 2π-périodique.
Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ ($\delta < \pi$) tel que pour tout $(t, t') \in [0, 4\pi]^2$, $|t - t'| \leqslant \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors on a

$$|P_k(t) - f(t)| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} 2\,\|f\|_\infty\, Q_k(s)\mathrm{d}s}_{\leqslant 2\|f\|_\infty \sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} Q_k(t) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} Q_k(s)\mathrm{d}s}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2}},$$

donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|P_k(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. Donc P_k converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons que $P_k \in F$. On a

$$\begin{aligned}
P_k(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)\mathrm{d}s,\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)Q_k(t-u)\mathrm{d}u,\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{c_k}{2^k}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(1 + \cos(t-u)\right)^k \mathrm{d}u,\\
&= \frac{c_k}{2^{k+1}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{m=-k}^{k} \alpha_m \mathrm{e}^{\mathrm{I}m(t-u)}\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue en développant $\cos(t-u) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-u)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(u-t)}}{2}$. Ainsi,

$$P_k(t) = \sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{c_k}{2^{k+1}\pi}\alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mu}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt} \in F.$$

Donc F est dense dans E.

■

Remarque 9. *Plus généralement, on peut remplacer la suite Q_k par une « approximation de l'unité ». Il faut une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

i) $\forall k \in \mathbb{N}$, *f_k est continue et positive,*

ii) $\int_{\mathbb{R}} f_k = 1$,

iii) $\forall \delta > 0$, $\lim\limits_{k+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} f_k = 0$.

Alors si f est uniformément continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $(f \star f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Remarque 10. *Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

f est continue, on lui associe $g = f \circ \cos$, qui est continue 2π-périodique. Ainsi, $(P_k \star g)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$ et

$$(Q_k \star g)(t) = \frac{c_k}{2^{k+1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t-u))^k \,\mathrm{d}u,$$

qui est une fonction de t parie car g l'est. On a

$$(1 + \cos(t-u))^k = (1 + \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u))^k$$

En développant, on a

$$(Q_k \star g)(t) = A_k(\cos(t), \sin(t)) = B_k(\cos(t)),$$

où $A_k \in \mathbb{C}[X,Y]$ (polynôme à deux variables) et $B \in \mathbb{C}[X]$ par parité. Ainsi, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$: on vient de redémontrer le théorème de Weierstrass.

Solution 18.

1. Si (u_n) est croissante, on pose $f_n = u - u_n$. Sinon, on pose $f_n = u_n - u$.
2. f_n est continue et $F_{n,\varepsilon} = f_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ donc $F_{n,\varepsilon}$ est fermé dans K, donc fermé.
   Si $x \in F_{n+1,\varepsilon}$, on a $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$ donc $x \in F_{n,\varepsilon}$.
   Soit $x \in K$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant f_N(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ donc $x \notin F_{n,\varepsilon}$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_{n,\varepsilon} \neq \emptyset$, alors soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in F_{n,\varepsilon}$. K étant compact, il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \in K$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(k) \geqslant n$. $x_{\varphi(k)} \in F_{\varphi(k),\varepsilon} \subset F_{n,\varepsilon}$. Alors, quand $k \to +\infty$, $x \in F_{n,\varepsilon}$ (fermé) donc $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$ ce qui est absurde.
   Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_{N,\varepsilon} = \emptyset$ et pour tout $n \geqslant N$, $F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. Donc pour tout $n \geqslant N$, pour tout $x \in K$, $f(x) < \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K.

3. f est continue sur un compact donc son maximum est atteint et x_n existe. La suite $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive, donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \geqslant 0$. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in K$. Si $l > 0$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{\varphi(N_0)}(x) \leqslant \frac{l}{2}$. Par continuité de $f_{\varphi(N_0)}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in \overline{B(x,\alpha)}$, $f_{\varphi(N_0)}(y) < l$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $x_{\varphi(n)} \in \overline{B(x,\alpha)}$ donc pour tout $n \geqslant N_1$, $f_{\varphi(N_0)}(x_{\varphi(n)}) < l$. Pour $n = \max(N_0, N_1)$, on a
$$l \leqslant f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leqslant f_{\varphi(N_0)}(x_{\varphi(n)}) < l,$$
ce qui est absurde. Donc $l = 0$ et (f_n) converge uniformément sur K.

■

Solution 19.

1. Soit $X \in [0,1]$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(x - u_n^2)$. Soit $\varphi\colon t \mapsto t+]/12(x-t^2)$. On a $\varphi'(t) = 1 - t \geqslant 0$ sur $[0,1]$ et $\varphi(t) = t$ si et seulement si $t = \sqrt{x}$. Si $t < \sqrt{x}$, $\varphi(t) \geqslant t$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,\sqrt{x}]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante marorée et converge vers $\sqrt{x}$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement. On a
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sqrt{f}_{n+1}(x), \\ &= \left(\sqrt{x} - f_n(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + f_n(x)\right)\right). \end{aligned}$$
Soit $\varepsilon > 0$. Si $x \in [0,\varepsilon^2]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \sqrt{x} \leqslant \varepsilon$. Si $x > \varepsilon^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sqrt{x} + f_n(x) \geqslant \varepsilon$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \geqslant \varepsilon^2$, on a
$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_{n+1}(x) \leqslant \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)^n \left(\sqrt{x} - f_0(x)\right).$$
Comme $\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sqrt{x} - f_0(x) \leqslant 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)^n \leqslant \varepsilon$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sqrt{\ }$ sur $[0,1]$.
2. Par récurrence, f_n est polynomiale et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_n : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x^2) \end{array}$$
qui converge uniformément vers $|\ |$ sur $[-1,1]$.
3. Soit $I = [a,b]$ avec $a < b$, φ affine par morceaux de la forme
$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n b_i \left|x - a_i\right|.$$
φ est limite uniforme d'une suite de polynômes d'après la question précédente. Or l'espace des fonctions affines par morceaux est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. D'où le théorème de Weierstrass.

■