*Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Intégration

Exercice 1.1. *Soit f continue strictement positive de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et*

$$\begin{array}{rccc} S: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f \end{array} \tag{1}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $x_k \in [a,b]$ tel que $S(x_k) = k\frac{S(b)}{n}$. Évaluer ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 1.2. *Soit f continue non identiquement nulle et $g(x) = \left(\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}}$.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \|f\|_\infty$.*
2. *On suppose $|f| > 0$, calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.*

Exercice 1.3. *Soit $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ strictement croissante continue avec $f(0) = 0$. Soit $g\colon [0,f(a)] \to [0,a] = f^{-1}$ (continue strictement croissante). Soit $(x,y) \in [0,a] \times [0,f(a)]$. Montrer que*

$$xy \leqslant \int_0^x f + \int_0^y g. \tag{2}$$

Expliciter le cas d'égalité.

Exercice 1.4. *Existence et calcul de*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Exercice 1.5. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.*

1. *Exprimer I_n en fonction de n.*
2. *Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ (sous réserve d'existence) ?*
3. *En déduire $\frac{\pi}{4}$ et $\ln(2)$ comme somme de séries.*

Exercice 1.6. *Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)\right\}$. On définit*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \end{array} \tag{4}$$

1. *Montrer que l'on peut définir* $m = \min_{f \in E} \phi(f)$ *et évaluer* m*. Déterminer les* $f \in E$ *tels que* $\phi(f) = m$*.*
2. *Montrer que* f *n'est pas majorée sur* E*.*
3. *Déterminer* $\phi(E)$*.*

Exercice 1.7. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$*.*

Exercice 1.8. *Existence et calcul de* $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t(1-t)^3}}\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.9. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(t)}{\sqrt{\cos(2t)}}\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.10. *Soit* $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *continue par morceaux et* $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *continue par morceaux* T*-périodique* ($T > 0$)*. Évaluer* $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t$*. Cas particulier : pour* $f \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *continue, évaluer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{3+2\cos(nt)}\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.11. *Soit* $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *uniformément continue et intégrable.*

1. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$*.*
2. *Montrer que* $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$*.*

Exercice 1.12. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2} \end{array} \tag{5}$$

1. *Étudier la convergence simple, la convergence uniforme et en moyenne.*
2. *Soit* g *continue et bornée sur* $\mathbb{R}$*, évaluer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_n(t)\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.13. *Existence et calcul de* $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$*.*

Exercice 1.14. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$*. On pourra poser* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.15. *Pour* $\alpha > 1$*, on note*

$$\begin{array}{rccl} f_\alpha : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{1+x^\alpha|\sin(x)|} \end{array} \tag{6}$$

Montrer que f_α *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$*.*

Exercice 1.16.

1. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f = 0$.*
2. *Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\mathrm{d}t$.*
3. *En déduire $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ non nulle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$ (avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \to t^n f(t)$ intégrables sur $\mathbb{R}_+$).*

Exercice 1.17 (Transformée de Laplace)**.** *Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{L}f(a)$ converge. On définit $g(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-au} f(u)\mathrm{d}u$.*

1. *Montrer que pour tout $b > a$, $\mathcal{L}f(b)$ converge et que*
$$\mathcal{L}f(b) = (b-a)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t)\mathrm{d}t. \tag{7}$$
2. *Soit h vérifiant les mêmes conditions que f, montrer que si pour tout $b \geqslant a$, $\mathcal{L}f(b) = \mathcal{L}h(b)$, alors $f = h$ (injectivité de la transformée de Laplace).*

Exercice 1.18. *On dit que f est continue à support compact si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue et il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant A$, $f(x) = 0$.*

1. *Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t)\mathrm{d}t$, et que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *On suppose que $\widehat{f}$ est continue à support compact, montrer que $f = 0$.*

Exercice 1.19. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue, montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

Exercice 1.20. *Soit $x > 0$.*

1. *Montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t}_{I_n(x)} = \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{8}$$
2. *En déduire que*
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{9}$$
3. *Montrer que*
$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}, \tag{10}$$
où γ est la constante d'Euler.

4. *Donner un développement en série de* $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$.

Exercice 1.21 (Théorème de D'Alembert-Gauss par l'indice)**.**

1. *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ 2π*-périodique et* $\mathcal{C}^1$. *On définit l'indice de* f *par*
$$d(f) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'}{f}. \tag{11}$$
Montrer que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi d(f)} = 1$ *si et seulement si* $d(f) \in \mathbb{Z}$.

2. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* $n \geqslant 1$, *de coefficient* $a_n \neq 0$, *on suppose que* P *ne s'annule pas sur* $\mathbb{C}$. *Soit* $t \geqslant 0$, *on pose*
$$\begin{array}{rccc} f_r : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^* \\ & t & \mapsto & P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \end{array} \tag{12}$$

3. *Évaluer* $d(f_0)$ *et* $\lim\limits_{r\to+\infty} d(f_r)$, *montrer que* $r \mapsto d(f_r)$ *est continue. Conclure.*

Exercice 1.22. *Soit* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$. *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\left(f(0) + f(1)\right). \tag{13}$$
Donner un développement à l'ordre 2 de v_n *quand* $n \to +\infty$. *On pourra montrer l'égalité de Taylor-Lagrange : si* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* $[a,b]$, $a < b$, *alors il existe* $\xi \in]a,b[$ *tel que*
$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \tag{14}$$
et et l'appliquer à $F(x) = \int_0^x f$.

Exercice 1.23. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\mathrm{d}t. \tag{15}$$
Exprimer I_n *sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de* I_n *quand* $n \to +\infty$. *Qu'en déduit-on sur* $\frac{\pi}{4}$ *?*

Exercice 1.24. *Soit*
$$\begin{array}{rccc} f : &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_{x^2}^{x}\frac{\mathrm{e}^t}{\arcsin(t)}\mathrm{d}t \end{array} \tag{16}$$
Analyser la continuité, la dérivabilité et le comportement au voisinage de 0.

Exercice 1.25. *Existence et calcul de*

$$I_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^n}, \tag{17}$$

pour $n \geqslant 1$.

Exercice 1.26. *Soit* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) f'\left(\frac{i}{n}\right). \tag{18}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 1.27. *Soit* $a, b > 0$. *Montrer que*

$$\lim_{x\to 1} \int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{19}$$

Exercice 1.28. *Soit* φ *convexe de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(donc continue). Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue avec* $a < b$.

1. *Montrer que*
$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\mathrm{d}t. \tag{20}$$

2. *On suppose de plus* φ *strictement convexe, montrer que l'on a égalité dans ce qui précède si et seulement si* f *est constante.*

Exercice 1.29. *Trouver toutes les fonctions* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues telles que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = f(x)f(y). \tag{21}$$

Exercice 1.30. *Soit* f *continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *avec* $a < b$. *On pose*

$$I_n = \left(\int_a^b |f(t)|^n\right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_n. \tag{22}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 1.31. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $\rho \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. *Montrer que* $F(\rho,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| \mathrm{d}t$ *existe.*

2. *Montrer que* $F(\rho,\theta)$ *ne dépend pas de* θ.

3. *Calculer* $F(\rho, \theta)$ *en utilisant une somme de Riemann sur* $[0, 2\pi]$.

Exercice 1.32. *On définit* C_0 *l'ensemble des fonctions continues à support compact de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *i.e. si* $f \in C_0$, *alors il existe* $A \geqslant 0$ *tel que pour tout* $|t| \geqslant A$, *alors* $f(t) = 0$. *On note* C_1 *l'ensemble des fonctions de* C_0 *de classe* $\mathcal{C}^1$.

1. *Soit* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue telle que pour tout* $\varphi \in C_0$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0$. *Montrer que* $f = 0$.
2. *Soit* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue telle que pour tout* $\varphi \in C_1$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = 0$. *Montrer que* f *est constante.*
3. *Soit* $f \in C_0$ *telle qu'il existe* $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que pour tout* $\varphi \in C_1$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = \int_{\mathbb{R}} g\varphi$. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $f' = -g$.

Exercice 1.33. *Existence et calcul de*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t} \mathrm{d}t, \tag{23}$$

et de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} \mathrm{d}t. \tag{24}$$