Solutions MP/MP*
Séries Entières

Solution 1.

1. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} > 0$. On va chercher un équivalent. On a $u_n = \mathrm{e}^{n^\alpha \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$. Comme $\cosh(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$, on a

$$\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right), \tag{1}$$

$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \tag{2}$$

Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{n^{\alpha-2}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right)}$. Donc :
— si $\alpha < 2$, $\lim\limits_{n\to+^infty} u_n = 1$ et $R = 1$,
— si $\alpha = 2$, $\lim\limits_{n\to+^infty} u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $R = 1$,
— si $\alpha > 2$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\left(\frac{(n+1)^{\alpha-2}}{2}\right) - \frac{n^{\alpha-2}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right)}. \tag{3}$$

Or

$$(n+1)^{\alpha-2} - n^{\alpha-2} = n^{\alpha-2}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-2} - 1\right), \tag{4}$$

$$\underset{+\infty}{=} n^{-2}\left(\frac{\alpha-2}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right), \tag{5}$$

$$\underset{+\infty}{=} (\alpha-2)\, n^{\alpha-3} + O\left(n^{\alpha-4}\right). \tag{6}$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right)}$. Ainsi,
— si $\alpha < 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $R = 1$,
— si $\alpha = 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $R = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,
— si $\alpha > 3$, comme $\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\alpha-2)}{2} n^{\alpha-3}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$,

$$\frac{(\alpha-2)n^{\alpha-3}}{2} + O\left(n^{\alpha-4}\right) \geqslant \frac{\alpha-2}{4} n^{\alpha-3} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{7}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ et $R = 0$.

2. On note $u_n = \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)} > 0$. Comme $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + O(x^2)$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{(-1)^n n + O\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{(-1)^n n} = v_n$. On ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert à v_n, ça ne va pas converger. Mais on peut encadrer v_n : $0 < v_n \leqslant \mathrm{e}^n$ et donc $R \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$. On a $\frac{u_n}{\mathrm{e}^n} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{n((-1)^n - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right)}$ et $\frac{u_{2n}}{\mathrm{e}^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\sum \frac{u_n}{\mathrm{e}^n}$ diverge. Ainsi, $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

$\blacksquare$

Solution 2.

1. On remarque

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \cdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_p \\ m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} & \cdots & m_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-1)\theta_p} & & m_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-1)\theta_p} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_1} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_p} \end{pmatrix}}_{Y_n}. \tag{8}$$

A est inversible car $\det(A) = \left(\prod_{i=1}^p m_i\right) \times \mathrm{VdM}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_p}) \neq 0$. Donc si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $Y_n = A^{-1} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui n'est pas car $\|Y_n\|_\infty = 1$.

2. On pose $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. Si $\chi_A = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$ avec $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_j| = \rho(A)$ et $|\lambda_i| < \rho(A)$ pour tout $i \in \{j+1, \ldots, p\}$. On écrit $a_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n = \sum_{i=1}^j \lambda_i^n + \sum_{i=j+1}^p \lambda_i^n$. D'après la règle de d'Alembert, on a $R \geqslant \frac{1}{\rho(A)}$ (et $R = +\infty$ si $\rho(A) = 0$ et A est nilpotente). De plus, on a

$$\frac{a_n}{\rho(A)^n} = \sum_{k=1}^j m_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_k} + \sum_{i=j+1}^p \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^n, \tag{9}$$

et le premier terme ne tend pas vers 0 d'après ce qui précède tandis que le deuxième tend vers 0. Donc $\sum \frac{a_n}{\rho(A)}$ diverge grossièrement, donc $R = \frac{1}{\rho(A)}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \frac{1}{\rho(A)}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_i^n z^n\right), \tag{10}$$

$$= \sum_{i=1}^p \frac{1}{1 - \lambda_i z}, \tag{11}$$

$$= \mathrm{Tr}\,(I_p - zA)^{-1}, \tag{12}$$

car pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $|\lambda_i z| < 1$ et on peut trigonaliser dans la même base A et $I_p - zA$.

$\blacksquare$

Solution 3. D'après la règle de d'Alembert, on a $R = 1$. De plus, $|a_n| = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc il y a convergence uniforme sur $\overline{D(0,1)}$. Ainsi, la somme S est continue sur $\overline{D(0,1)}$. Soit

$t \in]-1,1[$, comme $\frac{1}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1}$ avec $a = b = 1$ et $c = 4$, on a

$$\frac{S(t)}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t^n}{n} + \frac{t^n}{n+1} - 4\frac{t^n}{2n+1} \right) = -\ln(1-t) + \left(\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1 \right) - 4 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{2n+1}}_{g(t)}. \tag{13}$$

Si $t > 0$, on a $\sqrt{t}g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1}$. On pose $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et $h(0) = 0$. On a $h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$ donc $h(x) = -x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$ d'où $g(t) = -\sqrt{t} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{t}+1) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{t}-1)$.

Si $t < 0$, $\sqrt{-t}g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{-t}^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(\sqrt{-t}) - \sqrt{-t}$. Donc $g(t) = \frac{\arctan(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} - 1$. L'expression de S reste valable en -1 et 1 par continuité de S. ■

Solution 4. Soit $t \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{u\ln(1+t)}\mathrm{d}u, && (14)\\
&= \left[\frac{1}{\ln(1+t)} \mathrm{e}^{u\ln(1+t)} \right]_{u=0}^{u=1}, && (15)\\
&= \frac{1+t}{\ln(1+t)} - \frac{1}{\ln(1+t)}, && (16)\\
&= \frac{t}{\ln(1+t)} = f(t). && (17)
\end{aligned}$$

Soit $u \in [0,1]$, on a $(1+t)^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(u)$. f_n est continue sur $[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
|f_n(u)| &= \frac{u(1-u)\dots(n-1-u)}{n!} |t|^n, && (18)\\
&\leqslant \frac{(n-1)!}{n!} |t|^n, && (19)\\
&= \frac{1}{n} |t|^n, && (20)\\
&\leqslant |t|^n, && (21)
\end{aligned}$$

car pour tout $u \in [0,1]$, $0 \leqslant k - u \leqslant k$. Comme $|t| < 1$, $|t|^n$ est le terme général d'une série convergente. Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ et on peut intervertir :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!} \mathrm{d}u \right)}_{a_n} t^n, \tag{22}$$

encore vrai pour $t = 0$ car $a_0 = 1$. Donc f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Par ailleurs, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. ■

Remarque 1. *On a*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 u(1-u)\dots(n-1-u)\mathrm{d}u. \tag{23}$$

De plus,

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 u(1-u)\dots(n-1-u)\underbrace{(n-u)}_{\leqslant n}\mathrm{d}u, \tag{24}$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 u(1-u)\dots(n-1-u)\mathrm{d}u = |a_n|. \tag{25}$$

Enfin, $|a_n| \leqslant \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. *D'après le critère spécial des séries alternées,* $\sum a_n$ *converge. Puis* $\sum a_n t^n$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *(majorer le reste par le critère spécial des séries alternées), donc il y a convergence et continuité en 1. On vérifie que*

$$|a_n| = \frac{1}{n}\int_0^1 u\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{u}{k}\right)}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\ln(n)u+g_n(u)}$$

, où $g_n(u)$ *est majorée par* M *indépendant de* n *et de* u. *Ainsi, par convergence dominée,* $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u}{n^u}\mathrm{d}u$, *terme général d'une série divergente.*

Solution 5. On a $a_n = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n)+\gamma+o(1))}$. On a

$$\ln\left(\ln(n)+\gamma+o(1)\right) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1+\frac{\gamma}{\ln(n)}+O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right), \tag{26}$$

$$= \ln(\ln(n)) + \frac{\gamma}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right). \tag{27}$$

Donc $a_n = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))+\gamma+o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\gamma}\underbrace{\mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))}}_{b_n}$. On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \mathrm{e}^{\ln(n+1)\ln(\ln(n+1))-\ln(n)\ln(\ln(n))}, \tag{28}$$

mais

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{29}$$

et

$$\ln(n+1)\ln(\ln(n+1)) = \ln(n)\ln(\ln(n+1)) + \underbrace{O\left(\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}\right)}_{=o(1)\xrightarrow[+\infty]{}0}, \tag{30}$$

puis

$$\ln(\ln(n+1)) \underset{+\infty}{=} \ln\left(\ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{31}$$

$$\underset{+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right), \tag{32}$$

$$\underset{+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + O\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right). \tag{33}$$

Donc $\ln(n+1)\ln(\ln(n+1)) - \ln(n)\ln(\ln(n)) \underset{+\infty}{=} o(1)$, et $\frac{b_{n+1}}{b_n} \lim_{n\to+\infty} 1$, d'où $R = 1$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ donc il y a divergence sur le cercle de convergence. ■

Remarque 2. *On peut aussi écrire $a_n \leqslant n^{\ln(n)} = \mathrm{e}^{(\ln(n))^2} = c_n$, et*

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \mathrm{e}^{(\ln(n+1))^2-(\ln(n))^2} \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}^{\left(\ln(n)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2-(\ln(n))^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1. \tag{34}$$

Donc $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R \geqslant 1$, et $\sum a_n$ diverge donc $R = 1$.

Solution 6. Le nombre de diviseurs est compris entre 1 et n. Comme $\sum z^n$ et $\sum nz^n$ ont un rayon de convergence égal à 1, on a $R = 1$ par encadrement. ■

Solution 7. On pose $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Alors $\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

— Si $l < 1$, alors d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $R = +\infty$.

— Si $l > 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant \frac{l+1}{2}$ et pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \geqslant u_{N_0} \times \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $R = 0$.

— Si $l = 1$: si $a_n = n!$, on a $u_n = n+1$ donc $R = 0$, si $a_n = \frac{1}{n!}$, on a $u_n = \frac{1}{n+1}$ donc $R = +\infty$, si $a_n = \lambda^n$ avec $\lambda > 0$, on a $u_n = \lambda$ et $R = \frac{1}{\lambda}$. Donc on ne peut rien dire. ■

Solution 8. D'après la règle de d'Alembert, avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc le rayon de convergence de ϕ est $R = 1$ donc ϕ est bien définie.

Fixons $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| < 1$, formons

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \mathrm{e}^{\phi(tz)} \end{array} \tag{35}$$

z étant fixé, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{t^n z^n}{n} = \phi(tz)$ vaut $\frac{1}{|z|} > 1$, donc l'application $t \mapsto \phi(tz)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1] \subset \left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$. f est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^n t^{n-1} \times f(t) = \frac{z}{1+tz}f(t), \tag{36}$$

car $|zt| < 1$ et $f(0) = 1$. On pose $g(t) = 1+tz$. Alors $g'(t) = z = \frac{z}{1+tz}g(t)$ et $g(0) = 1$. Ainsi, par unicité (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz), pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = g(t)$. En particulier, $f(1) = \mathrm{e}^{\phi(z)} = 1 + z$. ■

Remarque 3. *On vient de définir, pour $|z| < 1$, $\phi(z)$ qui est un logarithme complexe continue de $1+z$. Si $1 + z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, $\phi(z) = \ln(\rho) + \mathrm{i}\theta$.*

Solution 9. On a $a_n = \frac{1}{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$ et $1 \leqslant |a_n| \leqslant 2$ donc $R = 1$. Si $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{3n} - 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} -z^{3n+1} + z^{3n+2}\right) = \frac{1}{1-z^3} + \frac{2z}{1-z^3} - \frac{2z^2}{1-z^3} = \frac{1+2z-2z^2}{1-z^3}. \quad (37)$$

■

Solution 10.

1. On a $b_n \geqslant 0$ donc g est croissante sur $[0,1[$. g admet donc une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ en 1^-. Pour tout $x < 1$, $g(x) \leqslant l$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$, comme $b_n x^n \geqslant 0$, on a $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \leqslant g(x) \leqslant l$. N étant fixé, quand $x \to 1$, on a $\sum_{n=0}^{N} b_n \leqslant l$ et quand $N \to +\infty$, on a $l = +\infty$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geqslant n_0$, $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \times b_n$. Pour tout $x \in [0,1[$, on a $|f(x) - g(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n - b_n| x^n$. Le terme de gauche est en polynôme en x qui a une limite finie en 1^-, le terme de droite majoré par $\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} g(x)$, car les b_n sont positifs. Ainsi, ce terme de droite est un $\underset{x\to 1^-}{O}(g(x))$ donc majoré par $\frac{\varepsilon}{2} g(x)$ pour x suffisamment proche de 1, d'où $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$ et $f(x) \underset{1^-}{\sim} g(x)$.
3. On a $n^p \underset{+\infty}{\sim} n(n-1)\dots(n-p+1)$, donc

$$h_p(x) \underset{1}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^n, \quad (38)$$

et $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$. De proche en proche, on a $f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} n \dots (n-p+1)x^{n-p}$, d'où

$$\boxed{h_p(x) \underset{1}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.} \quad (39)$$

■

Solution 11. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$. Alors si $S_n = \sum_{h=0}^{n} a_h$, on a

$$|S_n - S| \leqslant \left|S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| + \left|f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\right|. \quad (40)$$

Puisque $f\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\left|f\left(1-\frac{1}{n}\right)-S\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Pour $n \geqslant N_0$, on a alors

$$\left|S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant A_n + B_n + C_n, \tag{41}$$

avec $A_n = \sum_{h=0}^{N_0} |a_h| \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^h\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et il existe N_1 pour tout $n \geqslant N_1$, $A_n \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. On a

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{h=N_0+1}^{n} |a_h| \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^h\right), &(42)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h=N_0+1}^{n} \left(\frac{1}{h} \times h\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right), &(43)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h=N_0}^{n} \frac{1}{n}, &(44)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \times \frac{n-N_0}{n}, &(45)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4}. &(46) \end{aligned}$$

Cela est dû au fait que $x \mapsto 1-x^h$ est concave sur $[0,1]$ donc

$$\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^h\right) \leqslant h\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right),$$

(ou par accroissement fini). Enfin, on a

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{h\geqslant n} a_h \left(1-\frac{1}{n}\right)^h, &(47)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \sum_{h\geqslant n} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^h}{h}, &(48)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4n} \sum_{h\geqslant n} \left(1-\frac{1}{n}\right)^h, &(49)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4n} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^h, &(50)\\ &= \frac{\varepsilon}{4}. &(51) \end{aligned}$$

Ainsi, on a $|S_n - S| \leqslant \varepsilon$ et donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$. ■

Remarque 4. *C'est une réciproque du lemme d'Abel radial i.e. si* $\sum a_n$ *converge alors*

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{52}$$

Remarque 5. *Ce n'est pas valable par exemple pour* $a_n = (-1)^n$*, car* $f(x) = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{2}$ *mais* $\sum(-1)^n$ *diverge.*

Solution 12. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = f(0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$. Alors

$$f(z) = f(0)\left(1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n}_{=g(z)}\right), \tag{53}$$

avec $g(z) \xrightarrow[z\to 0]{} 0$ car g est somme d'une série entière donc continue. Il existe $r > 0$, si $|z| < r$, $|g(z)| < 1$. Alors on a vu, d'après l'Exercice 8, que l'on a

$$f(z) = \exp\left(\ln\rho + i\theta + \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{g(z)^p}{p}\right). \tag{54}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on peut développer chaque terme $g(z)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} z^n$ (produit de Cauchy). On vérifie alors (théorème de Fubini) que l'on peut intervertir les sommations. ■

Remarque 6. *Autre méthode : si* T *existe avec* $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$*. Pour* $t \in]-r, r[$*, on a* $f(t) = e^{T(t)}$*. En dérivant, on a* $f'(t) = T'(t)f(t) = \left(\sum_n (n+1)b_{n+1}t^n\right) f(t)$*. Par unicité de développement, et par produit de Cauchy, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{h=0}^{n}(h+1)b_{h+1}a_{n-h}, \tag{55}$$

$$= (n+1)b_{n+1}\underbrace{a_0}_{\neq 0} + \sum_{h=1}^{n} h b_h a_{n-h+1}. \tag{56}$$

On a $b_0 = T(0)$*, on choisit* b_0 *tel que* $e^{b_0} = a_0 \neq 0$ *et on définit univoquement* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par récurrence. On vérifie alors, en majorant, que* $\sum b_n z^n$ *a un rayon de convergence* $r > 0$ *(montrer qu'il existe* $M \geqslant 0, A \geqslant 0$ *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $|b_n| AM^n$*). Alors* $f'(t) = T'(t)f(t)$ *et en posant* $g(t) = e^{T(t)}$*, on a* $g = f$ *par unicité via le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Solution 13.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\left|\frac{1}{\sin(n\pi a)}\right| \geqslant 1$, donc $R_a \leqslant 1$.

2. On rappelle que si a est irrationnel algébrique de degré $d \geqslant 2$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $\left|a - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi a - p\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a alors
$$\begin{aligned} |\sin(n\pi a)| &= |\sin(n\pi a - p\pi)|, && (57)\\ &\geqslant \frac{2}{\pi}|n\pi a - p\pi|, && (58)\\ &\geqslant 2|na - p|, && (59)\\ &\geqslant 2n\frac{C}{n^d} = \frac{2C}{n^{d-1}}, && (60) \end{aligned}$$
car par concavité, on a pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin(t)| \geqslant \frac{2}{\pi}|t|$. On a donc $|a_n| \leqslant \frac{n^{d-1}}{2C}$, et comme le rayon de convergence de $\sum \frac{n^{d-1}}{2C} z^{d-1}$ vaut 1, on a $R_a = 1$.
3. On a $|\sin(n!\pi e)| = \left|\sin\left(n!\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)\right| \underset{+\infty}{=} \left|\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$. Pour $x \in]0,1]$, $\sum nx^{n!}$ converge. L'idée est donc de former a tel que pour tout $x \in]0,1]$, on puisse extraire
$$\left(\frac{x^{\sigma(n)}}{\sin(\sigma(n)\pi a)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \tag{61}$$
qui ne tend pas vers 0.

Lemme 1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ strictement croissante, et*
$$a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_n}. \tag{62}$$
On a
$$a - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}}. \tag{63}$$

Preuve du Lemme 1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{a_0 \dots a_n} \leqslant \frac{1}{a_0 a_1^n}$ et $a_1 \geqslant 2$ donc
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{a_0 \dots a_n}$$
converge. On a
$$\left|a - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{a_0 \dots a_n}\right| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_k}, \tag{64}$$
donc $\frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \leqslant \frac{1}{a_0 \dots a_N} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{N+1}^k} = \frac{1}{a_0 \dots a_N} \times \frac{1}{a_{N+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{N+1}}}$. Donc
$$a - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{a_0 \dots a_k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a_0 \dots a_{N+1}}. \tag{65}$$
■

On a donc $(a_0 \dots a_N)a - \underbrace{(a_0 \dots a_N) \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{a_0 \dots a_k}}_{\in \mathbb{N}} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a_{N+1}}$. Ainsi,

$$\left| \sin \left(\underbrace{(a_0 \dots a_N)}_{=\sigma(N)} \pi a \right) \right| = \left| \sin \left((a_0 \dots a_N) \pi a - (a_0 \dots a_N) \sum_{k=0}^{N} \frac{\pi}{a_0 a_k} \right) \right| \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{a_{N+1}}. \tag{66}$$

Pour $x \in]0, 1]$, on a $\frac{x^{\sigma(N)}}{|\sin(\sigma(N)\pi a)|} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \exp\left(\sigma(N) \ln(x) + \ln(a_{N+1})\right)$. Il suffit de choisir a_{N+1} tel que $\ln(a_{N+1}) \geqslant N(a_0 \dots a_N)$, par exemple $a_{N+1} = \left\lfloor \mathrm{e}^{N(a_0 \dots a_N)} \right\rfloor + 1$. Donc pour tout $x \in]0, 1]$, $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{x^{\sigma(N)}}{|\sin(\sigma(N)\pi a)|} = +\infty$. Ainsi, $R_a = 0$.

■

Solution 14. Pour $|z| < 1$, par produit de Cauchy, ces séries sont définies et absolument convergentes, par sommabilité,

$$\left(\sum_{p_1=0}^{+\infty} z^{a_1 p_1} \right) \times \dots \times \left(\sum_{p_N=0}^{+\infty} z^{a_N p_N} \right) - \frac{1}{(1 - z^{a_1}) \dots (1 - z^{a_N})} = \sum_{(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{N}^N} z^{a_1 p_1 + \dots + a_N p_N}. \tag{67}$$

Par associativité, on regroupe selon les valeurs de l'exposant et on note l'expression précédente $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. On factorise la fraction rationnelle [les pôles sont des racines de l'unité] :

$$\frac{1}{\prod_{\xi \in \mathbb{U}} (z - \xi)^{m(\xi)}}, \tag{68}$$

avec $m(1) = N$, $m(\xi) < N$ si $\xi \neq 1$ car $a_1 \wedge \dots \wedge a_N = 1$: si $\xi^{a_1} = \dots = \xi^{a_N} = 1$, l'ordre de ξ divise $a_1, \dots, a_N$ donc divise $a_1 \wedge \dots \wedge a_N = 1$. Cette expression vaut alors $\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_{1,k}}{(-z+1)^k} + \sum_{\xi \in \mathbb{U} \setminus \{1\}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_{\xi,k}}{(-z+\xi)^k} \right)$ (somme finie). Pour $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{(-z + \xi)^k} = \left(-\frac{1}{\xi} \right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n - k + 1) \dots (n + 1)}{(k - 1)!} \left(\frac{z}{\xi} \right)^n. \tag{69}$$

Ainsi, le coefficient en z^n et équivalent à $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \left(-\frac{1}{\xi} \right)^k$ en $+\infty$. Donc c_n est un polynôme en n, équivalent en $+\infty$ à $\alpha_{1,N} \times \frac{n^{N-1}}{(n-1)!}$.

Si $F = \frac{1}{(1-X^{a_1}) \dots (1-X^{a_N})}$, en évaluant $(1 - X)^N F$ et en prenant la limite en $X \to 1$, on a $\frac{X^{a_k} - 1}{X - 1} = 1 + X + \dots + X^{a_k - 1} \xrightarrow[X \to 1]{} a_k$. Finalement, $\alpha_{1,N} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ et $c_n \geqslant 1$ pour n suffisamment grand. Ainsi,

$$\boxed{c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{N-1}}{\left(\prod_{k=1}^{N} a_k \right) (N - 1)!}.} \tag{70}$$

$\blacksquare$

Solution 15. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par somme et composée. Pour $x \neq 1$, on a

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}} = \sqrt{1-x^3} \times \sqrt{\frac{1}{1-x}}, \tag{71}$$

produit de deux fonctions développable en série entière sur $]-1,1[$. Il existe donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a $f^2(x) = 1+x+x^2$ et $(f^2)'(x) = 2f'(x)f(x) = 1+2x$ d'où pour tout $x \in]-1,1[$,

$$2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right) = 1+2x, \tag{72}$$

encore vrai pour $z \in D(0,1)$ par unicité du développement en série entière.

Si $R > 1$, me rayon de convergence de $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ est R. On aurait alors pour tout $z \in D(0,R)$

$$2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n\right) = 1+2z, \tag{73}$$

i.e. si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors $2S'(z)S(z) = 1+2z$. En j, on a $2S'(\mathrm{j})S(\mathrm{j}) = 1+2\mathrm{j}$. Comme pour tout $x \in]-1,1[$, $S^2(x) = 1+x+x^2$, par unicité, on a pour tout $z \in D(0,R)$, $S^2(z) = 1+z+z^2$. Donc $S^2(\mathrm{j}) = 1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$ d'où $S(\mathrm{j}) = 0$: impossible car sinon $0 = 1+2\mathrm{j}$. Ainsi, $R = 1$. $\blacksquare$

Solution 16.

1. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est une série à termes positifs, d'après la formule de Taylor reste intégral, on a

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{S_n(x)} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}_{R_n(x)\geqslant 0}. \tag{74}$$

   On a $0 \leqslant S_n(x) \leqslant f(x)$, donc la série converge et la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.

2. On pose $t = xu$ et on a

$$R_n(x) = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u. \tag{75}$$

   Pour tout $t \in [0,A[$, $f^{(n+2)}(t) \geqslant 0$, $f^{(n+1)}$ est croissante. On a donc

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}y^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)\mathrm{d}u, \tag{76}$$

   d'où $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

3. $(R_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée d'après a), donc $R_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ d'où $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.
4. On a $\tan \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan' = 1 + \tan^2 \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\tan^{(k)} \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On dérive n fois, d'après la formule de Leibniz, on a
$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \geqslant 0. \tag{77}$$
Par imparité, on a pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}. \tag{78}$$
Par imparité, c'est aussi vrai sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

■

Remarque 7. *Si* $\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, $\tan' = 1 + \tan^2$ *fournit, pour tout* $n \geqslant 1$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

Solution 17.

1. D'après le critère spécial des séries alternées, a_n est du signe de $(-1)^n$, et $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant M$. Donc par comparaison, $R \geqslant 1$.
D'autre part, on a $|a_n| + |a_{n+1}| = \frac{1}{n}$ et $|a_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2k)(n+1+2k)}$. On a $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$. On a alors $2|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 2|a_n|$, et $\frac{1}{2n} \leqslant |a_n| \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$. D'où $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ et $R = 1$.
$a_n(-1)^n = |a_n|$ est le terme général d'une série divergente.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, on a $a_n\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = |a_n|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. $n \mapsto |a_n|$ est décroissante tandis que $n \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ est bornée. D'après la règle d'Abel, $\sum a_n\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n$ converge. On a convergence sur le cercle sauf en -1.
2. On a toujours $|a_n| \leqslant 3^{\frac{n-1}{3}}$. Si $b_n = 3^{\frac{n-1}{3}}$, $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence égal à $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
Donc $R \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. De plus, $a_{3p+1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3p+1} = 3^p \times \frac{1}{3^p} \times \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}$. Donc $\sum a_n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n \not\to 0$ quand $\twoheadrightarrow +\infty$. Donc $R = 3^{-\frac{1}{3}}$.
Sur le cercle, si $z = 3^{-\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|a_{3p+1}z^{3p+1}| = 3^{-\frac{1}{3}}$ donc $a_n z^n \not\twoheadrightarrow 0$: il y a divergence.
Pour le calcul effectif, si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 3^{-\frac{1}{3}}$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} z^{3p} + \sum_{p=0}^{+\infty} 3^p z^{3p+1} = \frac{1}{1 + \frac{z^3}{2}} + \frac{z}{1 - 3z^3}. \tag{79}$$
3. Soit $n \geqslant 0$, on a $\frac{1}{3}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, on a $R = 1$.

4. Comme $a_n \geqslant \frac{1}{3}\frac{1}{n+1}$, en $x = R$, $\sum a_n x^n = \sum a_n$ est divergente.
$\sum a_n(-R)^n$ est alternée, et comme $t^{n+1} \leqslant t^n$ pour tout $t \in [0,1]$, $n \mapsto |a_n|$ décroît vers 0. Donc $\sum a_n(-R)^n$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées.
Pour le calcul, soit $x \in]-1,1[$. Soit

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{(tx)^n}{1+t+t^2} \end{array} \tag{80}$$

f_n est continue sur $[0,1]$ et $|f_n(t)| \leqslant |x|^n$ terme général d'une série à termes positifs convergente. Donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$, on peut intervertir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2} \mathrm{d}t x^n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} \times \frac{1}{1-tx} \mathrm{d}t. \tag{81}$$

On pose $F(X) = \frac{1}{1+X+X^2} \times \frac{1}{1-Xx} = \frac{\alpha X+\beta}{1+X+X^2} + \frac{\gamma}{1-Xx}$. Si $x \neq 0$, on a $\gamma = \frac{x^2}{1+x+x^2}$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} XF(X) = 0 = \alpha - \frac{\gamma}{x}$ et $\alpha = \frac{x}{1+x+x^2}$. Enfin, $F(0) = 1 = \beta + \gamma$ donc $\beta = \frac{1}{1+x+x^2}$.
Finalement, on a

$$S(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \times \left[\int_0^1 \frac{xt+1+x}{1+t+t^2} \mathrm{d}t + x^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-tx}\right]. \tag{82}$$

Le calcul est laissé aux soins du lecteur.
Pour la valeur en -1, on note que pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n x^n = S(-x)$. D'après le critère spécial des séries alternées, le n-ième reste est majoré par $a_n \to 0$ donc on a convergence uniforme et $\lim\limits_{x\to1} S(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ (continuité en -1).

■

Solution 18.

1. On partitionne les relations d'équivalence sur $[\![1, n+1]\!]$ selon le cardinal de la classe de $n+1$, k. On a alors $\omega_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\omega_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\omega_k$ (choisir les k éléments en relation avec $n+1$). On a $\omega_0 = 1 = 0^0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $k \leqslant n$, on ait $\omega_k \leqslant k^k$. Alors

$$\omega_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k = (1+n)^n \leqslant (n+1)^{n+1}. \tag{83}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_n \leqslant n^n$.
On a $\frac{\omega_n}{n!} \leqslant \frac{n^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $R \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$.

2. Pour tout $n \leqslant n_0$, $\frac{\omega_n r^n}{n!} \leqslant A$. Soit $n \geqslant n_0$, supposons que pour tout $k \leqslant n$, $\omega_k x^k \leqslant Ak!$. Alors on a

$$\omega_{n+1} r^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega_k r^k r^{n+1-k}, \tag{84}$$

$$\leqslant n! Ar \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{n-k}}{(n-k)!}, \tag{85}$$

$$\leqslant n! Ar \mathrm{e}^r \leqslant (n+1)! A. \tag{86}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\omega_n}{n!} \leqslant \frac{A}{r^n}$. On a donc $R \geqslant r$ pour tout $r \geqslant 1$ donc $R = +\infty$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} z^n, \tag{87}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_{n+1}}{n!} z^n, \tag{88}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^n, \tag{89}$$

$$= \mathrm{e}^x f(x). \tag{90}$$

Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$, et $K = \frac{f(0)}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{k!} \frac{(kx)^n}{n!}}_{a_{k,n}}. \tag{91}$$

On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{k,n}| = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{|x|}} < +\infty$. D'après le théorème de Fubini, on a donc

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k! n!}, \tag{92}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\omega_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.} \tag{93}$$

■

Solution 19.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $p_n \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_{n-j}$ (car p_{n-j} est le nombre maximal de possibilité si le premier terme vaut j, $t_1 = j$). On a $p_0 = 2^0$ et par récurrence forte, soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $p_k \leqslant 2^k$, alors
$$p_n \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} p_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2^n - 1. \tag{94}$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leqslant 2^n$. D'après la règle de d'Alembert, $R \geqslant \frac{1}{2}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 1$ donc $R \leqslant 1$.
2. Soit $x \in [0, R[$, on a $x < 1$. Alors $0 \leqslant -\ln\left(1 - x^k\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} x^k$, terme générale d'une série à termes positifs convergente car $x < 1$. Donc $\prod_{k \geqslant 1} \frac{1}{1-x^k}$ converge.
Soit $N \geqslant 1$, on a
$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{n_k=0}^{+\infty} (x^k)^{n_k} \right), \tag{95}$$
$$= \sum_{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N} x^{n_1 + 2n_2 + \cdots + Nn_N}, \tag{96}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n,N} x^n, \tag{97}$$
où $\alpha_{n,N} = \left| \left\{ (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N \middle| n_1 + 2n_2 + \cdots + Nn_N = n \right\} \right|$. Par sommabilité, on a $\alpha_{n,N} = |\{\text{partitions } (t_k)_{k \geqslant 1} \text{ de } n | t_1 \leqslant N\}| \leqslant p_n$, et si $n \leqslant N, \alpha_{n,N} = p_n$.
On a $f(x) = \sum_{n=0}^{N} p_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_{n,N} x^n$ d'où $\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^k} \leqslant f(x)$. Ainsi,
$$0 \leqslant f(x) - \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^k} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} (p_n - \alpha_{n,N}) x^n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n x^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0, \tag{98}$$
reste d'une série convergente. Donc
$$f(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}. \tag{99}$$
Soit $z \in D(0, R)$,
$$\left| f(z) - \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} (p_n - \alpha_{n,N}) |z|^n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0. \tag{100}$$
Cela reste vrai sur $D(0, R)$.

3. Si $x \in [0,1[$, on peut développer et on obtient

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \tag{101}$$

et par unicité, $a_n = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $R = 1$.

■

Solution 20.

1. On a $f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{int} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| = |a_n| r^n$, et comme $r < d(z_0, \partial U)$ donc $\sum |a_n| r^n$ converge. On a convergence normale des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 2\pi]$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{int} \mathrm{d}t = 2\pi a_0 = 2\pi f(z_0). \tag{102}$$

Donc

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t.} \tag{103}$$

2. $\overline{U}$ est un compact donc $|f|$ atteint son maximum sur $\overline{U}$. De plus, pour tout $r \in [0, d(z_0, \partial U)]$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $\left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right| \leqslant \|f\|_\infty$, intégrable sur $[0, 2\pi]$ et f continue. Donc d'après le théorème de continuité,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t\right),$$

où $R = d(z_0, \partial U)$.
Si $|f|$ atteint son maximum en $z_0 \in U$, on a

$$|f(z_0)| = \|f\|_\infty = \left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right| \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty. \tag{104}$$

On a donc égalité partout : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\|f\|_\infty - \left|f\left(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right|\right) \mathrm{d}t = 0$. Comme l'intégrande est une fonction continue positive, donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\|f\|_\infty = f\left(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$. On a $d\left(C(0, R), \partial U\right) = 0$ et comme $C(0, R)$ est un compact la distance est atteinte : il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0} \in \partial U$, donc $|f|$ atteint son maximum et son minimum sur ∂U.

3. Si $f = 0$ sur ∂U, alors $f = 0$ sur $\overline{U}$.

■

Remarque 8. *S'il existe $z_0 \in U$ tel que $|f(z_0)| = \|f\|_\infty$, on a pour tout $r \leqslant R$,*

$$|f(z_0)| = \|f\|_\infty = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right|\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty . \quad (105)$$

On en déduit que pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right| = |f(z_0)|$, et on a aussi

$$\arg\left(f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right) \equiv \arg\left(f(z_0)\right)[2\pi].$$

Donc $f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = f(z_0)$, et on peut vérifier que f est constante.

Solution 21.

1. Passer au ln de la valeur absolue, équivalent, convergence géométrique.
2. On cherche une équation fonctionnelle satisfaite par f. On a

$$f(qz) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - q^{k+1}z\right) = \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1 - q^k z\right),$$

   donc $(1 - qz)f(qz) = f(z)$. Si f est développable en série entière avec $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0, R)$ avec $R > 0$, on a par unicité du développement, $a_n(q^n - 1) = a_{n-1}q^n$ et comme $|q| < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q^n \neq 1$ d'où $a_n = a_{n-1}\frac{q^n}{q^n - 1} = \prod_{i=1}^n \frac{q^i}{q^i - 1}$.
   Réciproquement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \prod_{i=1}^n \frac{q^i}{q^i-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et par la règle de d'Alembert, $R = +\infty$. Si $S\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie apr $\S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, en reportant les calculs, S vérifie la même équation fonctionnelle que f. En itérant, on a $S(z) = \prod_{i=1}^n (1 - q^i z)S(q^n z)$. S étant continue en 0 (car développable en série entière sur $\mathbb{C}$), on a $S(q^n z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} S(0) = a_0 = 1$. En passant à la limite, on a donc $S(z) = f(z)$ et f est développable en série entière.
3. Si $f(z) \neq 0$ et $f(qz) \neq 0$, on pose $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. On a alors $g(qz) = (1 - qz)g(z)$, et on procède de même façon qu'à la question précédente. On trouve alors $R = \frac{1}{|q|}$.

■

Solution 22.

1. Par continuité, $a_0 = f(z_0) = 0$. Supposons qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $a_n \neq 0$. Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\}$. Il vient, si $|h| < r_0$,

$$f(z_0 + h) = \sum_{k \geqslant n_0}^{+\infty} a_k h^k = a_{n_0} h^{n_0}\left(1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_{k+n_0}}{a_{n_0}} h^k}_{g(h)}\right). \quad (106)$$

g est continue (série entière de rayon de convergence plus grand que $r_0 > 0$) et $g(0) = 0$ donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $|h| \leqslant \alpha_0$, alors $|g(h)| \leqslant \frac{1}{2}$. Alors $1 + g(h) \neq 0$ et si $h \neq 0$, $f(z_0 + h) = a_{n_0} h^{n_0} (1 + g(h)) \neq 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $|\xi_k - z_0| \leqslant \alpha_0$, d'où pour tout $k \geqslant N$, $f(\xi_k) \neq 0$, ce qui est absurde. Les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc tous non nuls.

2. Soit $z_1 \in U$. Il existe $\gamma\colon [0,1] \to U$ continue telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Soit $t_0 = \sup\{t \in [0,1] | \forall x \in [0,t], f(\gamma(x)) = 0\}$. Supposons $t_0 \neq 1$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $x \in [0, t_0[$, $f(\gamma(x)) = 0$. On peut appliquer ce qui précède à $\gamma(t_0)$ à la place de z_0 : il existe α_0 tel que pour tout $z \in D(\gamma(t_0), \alpha_0)$ tel que $f(z) = 0$. Par continuité de γ, il existe $\beta > 0$ tel que si $|t - t_0| < \beta$, alors $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leqslant \alpha_1/$ Pour $t = t_0 + \frac{\beta}{2}$, on a $f(\gamma(t)) = 0$ pour tout $x \in [0, t]$. C'est absurde. Donc $t_0 = 1$ et $f(z_1) = 0$.

$\blacksquare$

Remarque 9. *Deux fonctions analytiques définies sur un ouvert connexe par arcs et qui coïncident sur une suite injective convergente sont égales.*

Solution 23.

1. On a $f(x) = \ln\left((x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)\right)$. L'argument est positif et égal à 0 si et seulement si $x = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta) = 0$, ce qui est absurde car $\theta \in]0, \pi[$. f est définie sur $\mathbb{R}$ et est $\mathcal{C}^\infty$. On a

$$f'(x) = \frac{2(x - \cos(\theta))}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} = \frac{2(x - \cos(\theta))}{(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} = \frac{a}{x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{b}{x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}. \tag{107}$$

, où $a = \frac{2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \cos(\theta)\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(\theta)}{2\mathrm{i}\sin(\theta)} = 1$ et $b = \overline{a} = 1$.

On sait alors que $f'(x) = \frac{1}{x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{1}{x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1 (fonction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle). Soit $x \in]-1, 1[$, on a

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \times \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}, \tag{108}$$

$$= -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^k - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k, \tag{109}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{k+1} - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{k+1}\right) x^k, \tag{110}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-2\cos\left((k+1)\theta\right)\right) x^k. \tag{111}$$

On a $f(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \times (-2\cos(k\theta))$.

2. D'après la règle d'Abel, on a convergence pour $x = 1$ donc $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge, et on a convergence uniforme sur $[0, 1]$. f est alors continue en 1 et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\frac{1}{2} f(1) = -\frac{1}{2} \ln\left(2 - 2\cos(\theta)\right). \tag{112}$$

3. Pour $x \in]-1, 1[$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$ qui est égal à 0 si et seulement si $x = \cos(\theta)$ et $\theta \in \{0, \pi\}$: impossible car $x \in]-1, 1[$. On a

$$I(x) = \int_0^{\pi} \left(-2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \cos(k\theta)\right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} f_k(\theta) \mathrm{d}\theta. \tag{113}$$

On pose $u_k = \int_0^{\pi} |f_k(\theta)| \,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{x^k}{k} \times \pi$, terme général d'une série convergente car $|x| < 1$, donc $\sum u_k$ converge. On peut donc intervertir :

$$I(x) = -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \int_0^{\pi} \cos(k\theta) \mathrm{d}\theta = 0. \tag{114}$$

Pour $|x| > 1$, on a

$$I(x) = \int_0^{\pi} \left(\ln(x^2) + \ln\left(1 - \frac{2\cos(\theta)}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}\theta = 2\pi \ln\left(|x|\right). \tag{115}$$

■

Remarque 10. *Pour $x = 1$, on a*

$$\begin{aligned}
\ln(2 - 2\cos(\theta)) &= \ln(2) + \ln(1 - \cos(\theta)), && (116)\\
&\underset{\theta \to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(\frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)\right), && (117)\\
&\underset{\theta \to 0}{=} 2\ln(\theta) + O(1) + \ln(2), && (118)\\
&\underset{\theta \to 0}{\sim} 2\ln(\theta), && (119)\\
&\underset{\theta \to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right). && (120)
\end{aligned}$$

$I(1)$ est donc bien définie et $I(1) = \pi \ln(2) + \int_0^{\pi} \ln\left(2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$. On se ramène ainsi au calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$.

Solution 24.

1. On pose $a_k = 0$ si $k \notin \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $a_k = 1$ sinon. On a toujours $|a_k| \leqslant 1$, donc $R \geqslant 1$. De plus, $\sum_{n \geqslant} 1^{p_n} = +\infty$, donc $R = 1$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{n}{p_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $p_n \geqslant \frac{2n}{\varepsilon}$. Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout $n \geqslant N_0$, on a $x^{p_n} \leqslant x^{\frac{2n}{\varepsilon}}$. Ainsi,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} + \sum_{n=N_0}^{+\infty} x^{p_n} \leqslant \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} + \sum_{n=N_0}^{+\infty} x^{\frac{2n}{\varepsilon}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} + \frac{1}{1 - x^{\frac{2}{\varepsilon}}}. \tag{121}$$

On a $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} = 0$, donc il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\alpha_1[$, $(1-x) \sum_{n=0}^{N_0-1} x^{p_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, et

$$\frac{1-x}{1-x^{\frac{2}{\varepsilon}}} = \frac{u}{1 - \left(1 - \frac{2u}{\varepsilon} + \underset{u \to 0}{o}(u)\right)} \xrightarrow[u \to 0]{} \frac{\varepsilon}{2}, \tag{122}$$

en posant $u = 1 - x$. Ainsi, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $x \in [1 - \alpha_2, 1[$, $\frac{1-x}{1+x^{\frac{2}{\varepsilon}}} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$. Ainsi, en posant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, si $x \in [1-\alpha, 1[$, alors $f(x)(1-x) \leqslant \varepsilon$.

3. On suppose $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x) f(x) = 0$. On pose, pour tout $k \geqslant 1, x_k = 1 - \frac{1}{k}$. Alors on a

$$\begin{aligned} (1-x_k) f(x_k) &= \frac{1}{k} \left(\sum_{n=0}^{N_0-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n} \right) + \sum_{n=k}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n}, & (123)\\ &\geqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n}, & (124)\\ &\geqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n}. & (125) \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p_n} = 0$.

■

Solution 25. On suppose que R_1 et R_2, les rayons de convergence de $U(z)$ et $V(z)$ sont strictement positifs. Soit $R = \min(R_1, R_2) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in D(0, R)$, on a $u_{n+1} z^{n+1} = (u_n z^n - v_n z^n) z$ et $v_{n+1} z^{n+1} = (u_n z^n - 2 v_n z^n) z$. On somme sur $\mathbb{N}$ et on obtient

$$\begin{aligned} U(z) - u_0 &= z(U(z) - V(z)), \\ V(z) - v_0 &= z(U(z) - 2V(z)). \end{aligned} \tag{126}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} U(z)(z-1) - zV(z) &= -U_0, \\ zU(z) - V(z)(2z+1) &= -V_0. \end{aligned} \tag{127}$$

Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} z-1 & -z \\ z - (2z+1) & \end{vmatrix} = -z^2 + z + 1. \tag{128}$$

Le discriminant est $\Delta = 5$. Soit $z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a $|z_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < |z_2|$.

Si $z \notin \{z_1, z_2\}$, on peut utiliser les formules de Cramer. Ainsi,

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{\begin{vmatrix} -u_0 & -z \\ -v_0 & -(2z+1) \end{vmatrix}}{-z^2+z+1} = \frac{(2z+1)u_0 - v_0 z}{-z^2+z+1}, \\ V(z) &= \frac{\begin{vmatrix} z-1 & -u_0 \\ z & -v_0 \end{vmatrix}}{-z^2+z+1} = \frac{-v_0(z-1)+u_0 z}{-z^2+z+1}. \end{aligned} \tag{129}$$

Réciproquement, en définissant ainsi U et V, ce sont des fractions rationnelles de z_1 et z_2 donc développable en séries entières avec un rayon de convergence à $|z_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. En remontant les calculs, les coefficients vérifient les relations de récurrence. ∎

Solution 26.

1. Si $\theta \in \{0, \pi\}$, $f(z) = 0$. Sinon, on a $f(z) = \frac{\sin(\theta)}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})} \in \mathbb{R}(z)$. On prend $|z| < 1$. Il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f(z) = \frac{A}{z-e^{i\theta}} + \frac{B}{z-e^{-i\theta}}$. On trouve $A = -\frac{i}{2}$ et $B = \overline{A} = \frac{i}{2}$. En remplaçant, on a

$$f(z) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-e^{-i\theta}} - \frac{1}{z-e^{i\theta}}\right), \tag{130}$$

$$= \frac{i}{2}\left(-\frac{e^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}} + \frac{e^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\right), \tag{131}$$

$$= \frac{i}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-e^{i\theta}\left(ze^{i\theta}\right)^n + e^{-i\theta}\left(ze^{-i\theta}\right)^n\right)\right), \tag{132}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left((n+1)\theta\right) z^n. \tag{133}$$

2. Pour $|z| < 1$, défini car $z \notin \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$, on a

$$I(z) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\sin\left((n+1)\theta\right) z^n}_{f_n(\theta)} \mathrm{d}\theta. \tag{134}$$

Comme $|f_n(\theta)| \leqslant |z|^n$, terme général d'une série à termes positifs convergentes car $|z| < 1$, $\sum f_n$ convergent normalement sur $[0, \pi]$. On peut donc intervertir, et on a

$$I(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \sin\left((n+1)\theta\right) \mathrm{d}\theta = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{2k+1}. \tag{135}$$

Pour $x \in]-1, 1[$, soit $g(x) = xI(x) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$. On a $g'(x) = \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$. On a $g(0) = 0$, donc $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $I(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

■

Remarque 11. *Si* $|x| > 1$*, on a* $I(x) = \frac{1}{x^2} I\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Solution 27.

1. On a $\mathbb{E}(Y^k) = \sum_{p=1}^{n} p^k \mathbb{P}(Y = p)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y^n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & 2^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^n & \dots & n^n \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y = 1) \\ \dots \\ \mathbb{P}(Y = n) \end{pmatrix}. \tag{136}$$

   On a $\det(A) = n!\mathrm{VdM}(1, \dots, n) \neq 0$. A est inversible puis

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y = 1) \\ \dots \\ \mathbb{P}(Y = n) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y^n) \end{pmatrix}. \tag{137}$$

   Donc $\left(\mathbb{E}(Y^k)\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$ caractérise la loi de Y.

2. Soit $n \geqslant 1$. On a $k^n \mathbb{P}(Y = k) = \underset{K \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ (car $a < 1$). Donc Y possède un moment à tout ordre. Formons la série génératrice de Y : $G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) t^k$ de rayon R supérieur à $\frac{1}{a}$. G_Y est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{1}{a}\right[$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} G_Y'(1) & = & \sum_{k=0}^{+\infty} y\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}(Y), \\ G_Y''(1) & = & \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y), \\ \vdots & & \\ G_Y^{(n)}(1) & = & \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\mathbb{P}(Y = k) \\ & & = \mathbb{E}(Y^n) + \sum_{k=0}^{+\infty} A(k)\mathbb{P}(Y = k), \end{array} \tag{138}$$

   avec $A \in \mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$. Donc $(\mathbb{E}(Y^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ déterminent $(G_Y(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   Lemme 2. *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence supérieur ou égal à* R*. Soit* $z_0 \in D(0, R)$*, alors il existe* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *tel que pour tout* $h \in D(0, R - |z_0|)$*,* $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$*.*

   Preuve du lemme 2. Soit $h \in D(0, R - |z_0|)$, on a $|z_0 + h| \leqslant |z_0| + |h| < R$. On a donc

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} h^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{n,k} h^k, \tag{139}$$

avec $\alpha_{n,k} = \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k}$ si $k \leqslant n$ et 0 sinon. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_{n,k}| \, |h|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} \, |h|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(|h| + |z_0|\right)^n < +\infty, \tag{140}$$

car $|h| + |z_0| < R$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$f(z_0 + h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n,k} \right)}_{b_k} h^k.$$

■

On a pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \frac{1}{a} - 1$. On a $G_Y(1+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$ et $b_n = \frac{G_Y^{(n)}(1)}{n!}$. Or $\mathbb{P}(Y = k) = k! G_Y^{(k)}(0)$. On peut encore développer G_Y au voisinage de $2 - \frac{1}{a}$, et de proche en proche, au voisinage de $1 - 2^k \left(\frac{1}{a} - 1\right)$, jusqu'à 0. On retrouve ainsi la loi de Y.

■

Solution 28.

1. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $\left|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| > |z|$, donc $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z \neq 0$ et g est bien définie. Soit

$$\begin{array}{rccc} F: & [0,1] \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & (\lambda, t) & \mapsto & \frac{f\left((1-\lambda)z + \lambda r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) - f(z)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \end{array} \tag{141}$$

F est continue sur $[0,1] \times [0, 2\pi]$ et $[0,1] \times [0, 2\pi]$ est compact donc F est bornée. Ainsi, g est continue (théorème de continuité des intégrales à paramètres).
On a $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t) = f'\left((1-\lambda)z + \lambda r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. C'est une fonction continue sur $[0,1] \times [0, 2\pi]$, donc bornée. D'après le théorème de Leibniz, g est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, pour tout $\lambda \in]0, 1]$, on a

$$g'(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'\left((1-\lambda)z + \lambda r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\mathrm{i}\lambda} f\left((1-\lambda)z + \lambda r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right]_0^{2\pi} = 0, \tag{142}$$

par continuité de g', c'est aussi vrai en $\lambda = 0$. Donc g est constante sur $[0,1]$. De plus, $g(0) = 0 = g(1) = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) - f(z)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t$. Donc

$$f(z) \int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) - f(z)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t. \tag{143}$$

Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$. Comme $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$, on a

$$\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}\right)^n. \tag{144}$$

De plus, $\left|\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}\right|^n = \left|\frac{z}{r}\right|^n$, terme général d'une série à termes positifs convergente indépendant de t, et on a

$$\left|f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}\right|^n \leqslant \|f\|_{\infty,\mathcal{C}(0,r)}\left|\frac{z}{r}\right|^n. \tag{145}$$

Ainsi, on a

$$f(z)\times\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}\right)^n\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}\right)^n\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^k\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t}_{2\pi\delta_{n,0}}. \tag{146}$$

Ainsi,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n\int_0^{2\pi}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t. \tag{147}$$

Ceci valant pour $t\in]0,R[$ fixé, pour tout $z\in D(0,r)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, qui ne dépend pas de r. Ainsi, f est développable en série entière sur tout $D(0,R)$.

2. On applique ce qui précède à $h\mapsto f(z_0+h)$.

■

Remarque 12. *f est $\mathcal{C}^1$ au sens complexe si et seulement si f est développable en série entière au voisinage de tout point $z_0\in U$ (avec un rayon de convergence plus grand que $d(z_0,\partial U)$) si et seulement si f est $\mathcal{C}^\infty$ au sens complexe.*

Remarque 13 (Théorème de Liouville)**.** *Si f est $\mathcal{C}^1$ au sens complexe de $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, alors il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ (rayon de convergence $+\infty$) et pour tout $r>0$,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t. \tag{148}$$

Si de plus f est bornée sur $\mathbb{C}$ et pour tout $n\geqslant 1$, pour tout $r>0$, on a $|a_n|\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{r^n}$. Quand $r\to+\infty$, on a $a_n=0$ donc f est constante.

Application : soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant. Comme $\lim\limits_{|z|}|P(z)|=+\infty$. On sait qu'il existe $m=\min\limits_{z\in\mathbb{C}}|P(z)|$, et si $m>0$, $f=\frac{1}{P}$ est $\mathcal{C}^1$ au sens complexe et bornée sur $\mathbb{C}$ donc constante : impossible. On vient de redémontrer le théorème de d'Alembert Gauss.

Solution 29. Soit $x\neq 0$. Si, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $u_p=\left|\frac{x^{3p}}{(3p)!}\right|>0$, on a

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{x^3}{(3p+1)(3p+2)-3p+3}\xrightarrow[p\to+\infty]{}0. \tag{149}$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Notons $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$ et $S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$. On a

$$\begin{array}{rcl} S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) &=& \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x, \\ S_0(x) + \mathrm{j}S_1(x) + \mathrm{j}^2 S_2(x) &=& \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}, \\ S_0(x) + \mathrm{j}^2 S_1(x) + \mathrm{j}S_2(x) &=& \mathrm{e}^{\mathrm{j}^2 x}. \end{array} \tag{150}$$

En effet, $\mathrm{j} = \mathrm{j}^{3n+1}$ et $\mathrm{j}^2 = \mathrm{j}^{3n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En sommant, on a $3S_0(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}^2 x}$. Donc

$$\boxed{S_0(x) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).} \tag{151}$$

■

Remarque 14. *Autre méthode possible : on a $S_2'(x) = S_1(x)$ et $S_1'(x) = S_0(x)$. Donc $S_2''(x) + S_2'(x) + S_2(x) = \mathrm{e}^x$. L'équation homogène a pour solution générale $\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mu \mathrm{e}^{\mathrm{j}^2 x}$, avec une solution particulière $P(x)\mathrm{e}^x$, avec P constante car 1 n'est pas racine de X^2+X+1. On trouve $\frac{\mathrm{e}^x}{3}$, donc $S_2(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{3} + \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mu \mathrm{e}^{\mathrm{j}^2 x}$, on identifie $S_2(0) = 0$ et $S_2'(0) = 0$, puis $S_0 = S_2''$.*

Solution 30.

1. Si
$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \tag{152}$$
on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\theta \in [0, \pi]$, on a
$$v\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Im\left(r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n}\right), \tag{153}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \sin(n\theta), \tag{154}$$
car les $a_n \in \mathbb{R}$.

   Pour $m \geqslant 1$ fixé, on a
$$v\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\sin(m\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \sin(n\theta)\sin(m\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\theta), \tag{155}$$

avec f_n continue sur $[0,\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $|f_n(\theta)| \leqslant |a_n r^n|$, terme général d'une série à termes positifs convergente car $R = +\infty$. Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$, on peut intervertir

$$\int_0^\pi v\left(re^{i\theta}\right)\sin(m\theta)d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^\pi \sin(n\theta)\sin(m\theta)d\theta, \tag{156}$$

$$= a_m r^m \frac{\pi}{2}. \tag{157}$$

3.

Lemme 3. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $|\sin(m\theta)| \leqslant m\,|\sin(\theta)|$.*

Preuve du lemme 3. Par récurrence, car

$$|\sin((m+1)\theta)| = |\sin(m\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(m\theta)|\,, \tag{158}$$

$$\leqslant |\sin(m\theta)| + |\sin(\theta)|\,, \tag{159}$$

$$\leqslant (m+1)\,|\sin(\theta)|\,. \tag{160}$$

■

Donc

$$|r^m a_m| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|v(re^{i\theta})\right| m\,|\sin(\theta)|\,d\theta. \tag{161}$$

sin est positif sur $[0,\pi]$, et pour tout $\theta \in]0,\pi[$, si $v(re^{i\theta}) = 0$, $f(re^{i\theta}) \in \mathbb{R}$ donc $re^{i\theta} \in \mathbb{R}$ ce qui est exclu. Ainsi, $v(re^{i\theta})$ a un signe constant sur $[0, pi]$, et

$$\left|\int_0^\pi v(re^{i\theta})\sin(m\theta)d\theta\right| = \int_0^\pi \left|v(re^{i\theta})\right|\sin(\theta)d\theta. \tag{162}$$

Finalement, on a $|r^m a_m| \leqslant mr\,|a_1|$, d'où $|a_m| \leqslant \frac{m}{r^{m-1}}\,|a_1|$. Pour $m \geqslant 2$, lorsque $r \to +\infty$, on obtient $a_m = 0$. Donc f est affine.

■

Solution 31.

1. On a

$$\int_0^{2\pi} r^{|k|} f\left(e^{i(x-t)}\right)dt = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{a_n e^{in(x-t)+ikt} r^{|k|}}_{f_n(t)}dt. \tag{163}$$

f_n est continue sur $[0,2\pi]$, avec $|f_n(t)| \leqslant \left|a_n r^{|k|}\right|$ terme général d'une série à termes positifs convergente. donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n(t)$ converge normalement sur $[0,2\pi]$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} r^{|k|}e^{ikt} f\left(e^{i(x-t)}\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{inx} r^{|k|}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-int}dt, \tag{164}$$

$$= \begin{cases} 2\pi r^{|k|} a_k e^{ikx} & \text{si } k \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{165}$$

Puis
$$\int_0^{+\infty} P_r(t) f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{r^{|k|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)}\right)}_{g_k(t)} \mathrm{d}t. \tag{166}$$

g_k est continue sur $[0, 2\pi]$, et $|g_k(t)| \leqslant r^{|k|} \|f\|_{\infty, \overline{D(0,1)}}$ et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} < \infty$. On a donc convergence normale sur $[0, 2\pi]$, et

$$\int_0^{2\pi} P_r(t) f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)}\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)}\right) \mathrm{d}t, \tag{167}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2\pi r^k a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \tag{168}$$
$$= 2\pi f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right). \tag{169}$$

2. On a

$$P_r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - 1, \tag{170}$$
$$= \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} + \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} - 1, \tag{171}$$
$$= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(x)}, \tag{172}$$

et $1 + r^2 - 2r\cos(x) = (1 - r\cos(x))^2 + r^2\sin^2(x) > 0$, donc $P_r > 0$. On applique le résultat du a) pour $f = 1$ et on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) \mathrm{d}t = 1. \tag{173}$$

3. Si $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, prenons $z \in D(0,1)$, soit $z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $r \in [0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)}\right) \mathrm{d}t\right|, \tag{174}$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) \left|f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)}\right)\right| \mathrm{d}t, \tag{175}$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) \mathrm{d}t = 1. \tag{176}$$

Donc $f(z) \in \overline{D(0,1)}$ et $f\left(\overline{D(0,1)}\right) \subset \overline{D(0,1)}$.

■

Solution 32.

1. L'espérance vaut la série harmonique $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ par linéarité. Par indépendance, la variance vaut $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. On a
$$\left(\left|\frac{R_n}{\ln(n)}-1\right|\right) \subset \underbrace{\left(\left|\frac{R_n}{\ln(n)}-\frac{\mathbb{E}(R_n)}{\ln(n)}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{B_n} \bigcup \underbrace{\left(\left|\frac{\mathbb{E}(R_n)}{\ln(n)}-1\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{C_n}. \tag{177}$$
C_n est nul à partir d'un certain rang car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(R_n)}{\ln(n)} = 1$. De plus,
$$B_n = \left(|R_n - \mathbb{E}(R_n)|\, \frac{\varepsilon}{2}\ln(n)\right), \tag{178}$$
donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $B_n < \frac{4\mathbb{V}(R_n)}{\varepsilon^2\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\varepsilon^2\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. On a
$$G_{R_n}(t) = \mathbb{E}\left(t^{R_n}\right), \tag{179}$$
$$= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(t^{\chi_{A_k}}), \tag{180}$$
$$= \prod_{k=1}^n \left(1-\frac{1}{k}+\frac{t}{k}\right), \tag{181}$$
$$= \frac{t}{n!}\prod_{k=1}^n (k-1+t), \tag{182}$$
car les $(\chi_{A_k})_{k\geqslant 1}$ sont indépendants. $\mathbb{P}(R_n=1)$ est le coefficient en t de G_{R_n}, et vaut donc $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. De même, $\mathbb{P}(R_n=2)$ est le coefficient en t^2 de G_{R_n} et vaut donc $\frac{1}{n!}\sum_{k=2}^n \frac{(n-1)!}{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.
4. On a $T_n = \sum_{k=na+1}^{nb} \chi_{A_k}$, donc
$$G_{T_n}(t) = \prod_{k=na+1}^{nb}\left(1-\frac{1}{k}+\frac{t}{k}\right). \tag{183}$$
Ainsi, $\ln(G_{T_n}(t)) = \sum_{k=na+1}^{nb} \ln\left(1+\frac{t-1}{k}\right)$. Pour $x>1$, soit $g(x) = \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$. On a $g'(x) = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0$ et $g(0)=0$ donc $g\geqslant 0$.
On a
$$\sum_{k=na+1}^{nb}\frac{t-1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=na+1}^{nb}\left(\frac{t-1}{k}\right)^2 \leqslant \ln(G_n(t)) \leqslant \sum_{k=na+1}^{nb}\frac{t-1}{k}. \tag{184}$$

Comme $0 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=na+1}^{nb}\left(\frac{t-1}{k}\right)^2 \leqslant \frac{(t-1)^2}{2}\sum_{k=na+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $\sum_{k=na+1}^{nb}\frac{t-1}{k} = (t-1)(H_{nb}-H_{na}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (t-1)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} G_{T_n}(t) = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{b}{a}\right)(t-1)}$. Il s'agit de la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

■

Solution 33.

1. (a) Soit $a_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On a $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ donc le rayon de convergence de f est plus grand que 1 et f est définie et $\mathcal{C}^\infty$, de même pour g.

   (b) Soit $g_k(t) = \mathbb{P}(T = k)t^k$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $|g_k(t)| \leqslant \mathbb{P}(T = k)$, terme général d'une série à termes positifs convergente indépendant de t, car $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T = k) = \pi \leqslant 1$, donc $\sum g_k$ converge normalement sur $[0,1]$. Donc $\lim\limits_{t\to1^-} g(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T = k) = \pi$.

2. On a $(S_{m+1}-S_m,\dots,S_{m+k}-S_m) = (X_{m+1}, X_{m+1}+X_{m+2},\dots,X_{n+1}+\dots+X_{m+k})$. $X_{m+1}+\dots X_{m+r}$ a pour loi la convoluée de la loi de X r fois par elle-même car $X_i \sim X$ et les $(X_i)_{1\geqslant i}$ sont indépendants. Donc $X_m+\dots+X_{m+r} \sim X_1+\dots+X_r$, d'où le résultat.

3. (a) $\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}_{T=k}(S_n = 0)$ car si on revient à 0 à l'instant n, le 1er retour en 0 a eu lieu à un instant $k \in [\![1,n]\!]$. D'après ce qui précède, on a donc
$$\mathbb{P}_{T=k}(S_n = 0) = \mathbb{P}_{S_k=0}(S_n - S_k = 0) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0). \tag{185}$$

   (b) Posons $P(T = 0) = 0$, d'où $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T = k)t^k$ et pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0), \tag{186}$$
   puis par produit de Cauchy,
$$f(t) = \mathbb{P}(S_0 = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n = 0)t^n = 1 + f(t)g(t). \tag{187}$$

4. (a) Soit $j = |\{i \in [\![1,n]\!] | X_i = 1\}|$. On a $S_n = j-(n-j) = 2j-n$ (on est allé j fois à droite et $n-j$ fois à gauche). Si $n = 2p+1$, $S_n = S_{2p+1} = 2j-2p-1 \neq 0$. Pour que $S_{2n} = 0$, il faut et il suffit que $j = n$, ce qui revient à une loi binomiale $\mathcal{B}(2n,p)$ d'où $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n$.

   (b) On a $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n = 0)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}(pq)^n t^{2n}$. Comme $p \in]0,1[$, $p(1-p) =$

$pq \leqslant \frac{1}{4}$, et si $t \in [0,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4pqt^2}} = (1-4pqt^2)^{-1}, \tag{188}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(4pqt^2)^n, \tag{189}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(n-1+\frac{1}{2}\right)}{n!}(4pqt^2)^n, \tag{190}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\times 3\dots\times(2n-1)}{2^n n!}(4pqt^2)^n, \tag{191}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(4pqt^2)^n, \tag{192}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n t^{2n} = f(t). \tag{193}$$

5. (a) Pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$g(t) = \frac{f(t)-1}{f(t)} = 1-\sqrt{1-4pqt^2}, \tag{194}$$

car $f(t) \neq 0$. D'après 1.(b), on a

$$\pi = \lim_{t\to 1^-} g(t) = 1-\sqrt{1-4p(1-p)} = 1-|2p-1| = 1-|p-q|, \tag{195}$$

et $\pi = 1$ si et seulement si $p = q = \frac{1}{2}$.

(b) Pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = 1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}$. Or $|pqt^2| < 1$ donc g est développable en série entière sur $[0,1[$, et on a

$$g(t) = 1-\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4pqt^2)^n\right), \tag{196}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 1\times 3\times\dots\times(2n-3)}{2^n n!}(4pqt^2)^n, \tag{197}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!2^n n!}4^n(pq)^n t^{2n}, \tag{198}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n(n-1)!^2}2(pq)^n t^{2n}. \tag{199}$$

Par unicité du développement, on a $\mathbb{P}(T = 2n+1) = 0$ et $\mathbb{P}(T = 2n) = \binom{2n-2}{n-1}\frac{2(pq)^n}{n}$.

6. (a) Si $p = \frac{1}{2}$, on a $\pi = 1$ d'où $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. Donc

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{2n}{n4^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}. \tag{200}$$

Or $\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}}\frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n}\frac{1}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, terme général d'une série divergente, d'où le résultat.

(b) Si $p \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\mathbb{E}(T \times \mathbf{1}_{T<+\infty}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T = k) = g'(1) = \frac{4pq}{\sqrt{1-4pq}}, \tag{201}$$

car $g(t) = 1 - \sqrt{1-4pqt^2}$. On a $\mathbb{P}(T < +\infty) = \pi = 1 - |p-q|$ et comme $\sqrt{1-4pq} = |p-q|$, d'où

$$\mathbb{E}_{T<+\infty}(T) = \frac{4pq}{|p-q|\,(1-|p-q|)}. \tag{202}$$

7. $\pi = 1$ si et seulement si $p = \frac{1}{2}$ d'après 6.

8. f est croissante sur $[0,1[$ donc il existe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim\limits_{t\to1^-} f(t) = l = \sup\limits_{t<1} f(t)$.

— Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$, soit $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_n = 0)t^n \leqslant f(t) \leqslant l$. N étant fixé, on peut faire tendre vers 1 d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \leqslant l$. Lorsque $N \to +\infty$, on obtient $\lim\limits_{t\to1^-} f(t) = +\infty$.

— Si $(S_n)_{n\geqslant0}$ n'est pas récurrente, alors $\pi \neq 1$ et $p \neq \frac{1}{2}$. Pour tout $t \in [0,1[$,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqt^2}} \xrightarrow[t\to1^-]{} \frac{1}{\sqrt{1-4pq}}, \tag{203}$$

défini car $4pq = 4p(1-p) < 1$.

— Si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ d'après 4.(a), et $\mathbb{P}(S_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, terme général d'une série divergente donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$.

9. (a) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(N_n), &(204)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{S_n=0\}}), &(205)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = 0), &(206)\\
&= f(1) - \mathbb{P}(S_0 = 0), &(207)\\
&= f(1) - 1. &(208)
\end{aligned}$$

Or $f(1) = 1 + f(1)g(1)$ et $g(1) = \pi$, donc $f(1) = \frac{1}{1-\pi}$, d'où

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\pi}{1-\pi}. \tag{209}$$

(b) Si $p = \frac{1}{2}$, $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ diverge donc $\mathbb{E}(N) = +\infty$.

10. Pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(S_k = x) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(T^x = j)\mathbb{P}_{T^x=j}(S_k = x). \tag{210}$$

Par produit de polynômes, $f_{n,x}(t) = \mathbb{P}(S_0 = x) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = x)t^k$ et $\mathbb{P}(S_0 = x) = 0$ car $x \neq 0$. Soit

$$f_{n,x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T^x = j)\mathbb{P}(X_{k-j} = 0)t^k, \tag{211}$$

pour $t \in [0,1]$. Soit $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)t^k$, on a

$$f_n(t)g_{n,x}(t) = \left(\sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}(S_l = 0)t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(T^x = j)t^j\right), \tag{212}$$

donc $f_{n,x}(t) \leqslant f_n(t)g_{n,x}(t)$. Or $N_{n,x} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{S_j = x\}}$ et

$$\mathbb{E}(N_{n,x}) = f_{n,x}(1) \leqslant f_n(1)g_{n,x}(1) = \mathbb{E}(N_n)\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T^x = k) \leqslant \mathbb{E}(N_n), \tag{213}$$

donc $\mathbb{E}(N_{n,x}) \leqslant \mathbb{E}(N_n)$.

11.

$$\left\{(\|S_n\|)_{n\geqslant 1}\right\} = \{\exists A \geqslant 0 | \{n \in \mathbb{N} | \|S_n\| \leqslant A\} \text{ est fini}\} = \mathcal{A}. \tag{214}$$

Comme S_n est à valeur dans $\mathbb{Z}^d$, il y a un nombre fini de points dans $\overline{B(0,A)}$. On a

$$\mathcal{A} = \left\{x \in \mathbb{Z}^d \middle| \{n \in \mathbb{N} | S_n = x\} \text{ est fini}\right\}. \tag{215}$$

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ fixé, et $\mathcal{A}^x = \{\{n \in \mathbb{N} | S_n = x\} \text{ est infini}\}$, on a

$$\mathcal{A} = \biguplus_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{A}, \tag{216}$$

(union disjointe) et $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\mathcal{A}^x)$ dénombrable.
Soit $N^x = |\{j \in \mathbb{N} | S_j = x\}|$ (à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$). $(N_n^x)_{n\geqslant 1}$ converge vers N^x en croissant. Or $(\mathbb{E}(N_n^x))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\mathbb{E}(N^x)$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, et comme il s'agit d'une marche transitoire, on a

$$\mathbb{E}(N_n^x) \leqslant \mathbb{E}(N_n) \leqslant \mathbb{E}(N) < +\infty, \tag{217}$$

donc $\mathbb{E}(N^x)$ est fini et

$$\mathbb{E}(N^x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(N^x = k) + (+\infty)\underbrace{\mathbb{P}(N^x = +\infty)}_{\mathbb{P}(\mathcal{A}^x)}. \tag{218}$$

Nécessairement, $\mathbb{P}(\mathcal{A}^x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0$.

■

Solution 34. On vérifie d'abord que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n) = 1$. Ensuite, si $u_n = \mathbb{P}(X = n)$, l'étude de l'équation caractéristique donne $u_n = \lambda_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$, et on trouve $\lambda_1 = -3\alpha + 2$ et $\lambda_2 = 4\alpha - 2$ grâce à la condition initiale et la condition $\sum_n u_n = 1$. Noter que $u_n \sim \frac{\lambda_1}{2^n}$ donc il faut (pour que cela reste positif) $0 < \alpha < 2/3$. On écrit ensuite $G_X(t) = \sum_n u_n t^n$. Grâce à l'équation caractéristique, on a

$$G_X(t) = \frac{6u_0 + 6u_1 t - 5tu_0}{6 - 5t + t^2},$$

et le rayon de convergence est 2. L'espérance est $G'_X(1)$ et la variance est $G''_X(1) - G'_X(1)^2 + G'_X(1)$. ■