

*Exercices MP/MP\**  
*Intégration*

**Exercice 1.** Soit  $f$  continue strictement positive de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\begin{aligned} S : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f \end{aligned}$$

Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe un unique  $x_k \in [a, b]$  tel que  $S(x_k) = k \frac{S(b)}{n}$ . Évaluer ensuite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ .

**Exercice 2.** Soit  $f$  continue non identiquement nulle et  $g(x) = \left( \int_0^1 |f(t)|^x dt \right)^{\frac{1}{x}}$ .

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \|f\|_\infty$ .
2. On suppose  $|f| > 0$ , calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  strictement croissante continue avec  $f(0) = 0$ . Soit  $g : [0, f(a)] \rightarrow [0, a] = f^{-1}$  (continue strictement croissante). Soit  $(x, y) \in [0, a] \times [0, f(a)]$ . Montrer que

$$xy \leq \int_0^x f + \int_0^y g.$$

Expliciter le cas d'égalité.

**Exercice 4.** Existence et calcul de

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx.$$

**Exercice 5.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$ .

1. Exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$ .
2. Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  (sous réserve d'existence) ?
3. En déduire  $\frac{\pi}{4}$  et  $\ln(2)$  comme somme de séries.

**Exercice 6.** Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)\}$ . On définit

$$\begin{aligned} \phi : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \end{aligned}$$

1. Montrer que l'on peut définir  $m = \min_{f \in E} \phi(f)$  et évaluer  $m$ . Déterminer les  $f \in E$  tels que  $\phi(f) = m$ .
2. Montrer que  $f$  n'est pas majorée sur  $E$ .
3. Déterminer  $\phi(E)$ .

**Exercice 7.** Existence et calcul de  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{(1+x)^2} dx$ .

**Exercice 8.** Existence et calcul de  $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t(1-t)^3}} dt$ .

**Exercice 9.** Existence et calcul de  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(t)}{\sqrt{\cos(2t)}} dt$ .

**Exercice 10.** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  continue par morceaux et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  continue par morceaux  $T$ -périodique ( $T > 0$ ). Évaluer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t) dt$ . Cas particulier : pour  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, évaluer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{3+2\cos(nt)} dt$ .

**Exercice 11.** Soit  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue et intégrable.

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
2. Montrer que  $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ .

**Exercice 12.** Soit

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \end{aligned}$$

1. Étudier la convergence simple, la convergence uniforme et en moyenne.
2. Soit  $g$  continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , évaluer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_n(t) dt$ .

**Exercice 13.** Existence et calcul de  $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ .

**Exercice 14.** Existence et calcul de  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$ . On pourra poser

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt.$$

**Exercice 15.** Pour  $\alpha > 1$ , on note

$$\begin{aligned} f_\alpha: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^\alpha |\sin(x)|} \end{aligned}$$

Montrer que  $f_\alpha$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 16.**

1. Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^b f(t) dt = 0$ . Montrer que  $f = 0$ .
2. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{(i-1)t} dt$ .
3. En déduire  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  non nulle telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = 0$  (avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \mapsto t^n f(t)$  intégrables sur  $\mathbb{R}_+$ ).

**Exercice 17** (Transformée de Laplace). Soit  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  continue par morceaux. On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  telle que  $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \mathcal{L}f(a)$  converge. On définit  $g(t) = \int_0^t e^{-au} f(u) du$ .

1. Montrer que pour tout  $b > a$ ,  $\mathcal{L}f(b)$  converge et que

$$\mathcal{L}f(b) = (b - a) \int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t) dt.$$

2. Soit  $h$  vérifiant les mêmes conditions que  $f$ , montrer que si pour tout  $b \geq a$ ,  $\mathcal{L}f(b) = \mathcal{L}h(b)$ , alors  $f = h$  (injectivité de la transformée de Laplace).

**Exercice 18.** On dit que  $f$  est continue à support compact si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est continue et il existe  $A \geq 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , si  $|x| \geq A$ ,  $f(x) = 0$ .

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t) dt$ , et que  $\hat{f}$  est  $C^\infty$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. On suppose que  $\hat{f}$  est continue à support compact, montrer que  $f = 0$ .

**Exercice 19.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continue, montrer que  $f$  est convexe si et seulement si pour tout  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$ ,  $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt$ .

**Exercice 20.** Soit  $x > 0$ .

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt}_{I_n(x)} = \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

2. En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}},$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler.

4. Donner un développement en série de  $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ .

**Exercice 21** (Théorème de D'Alembert-Gauss par l'indice).

1. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$   $2\pi$ -périodique et  $C^1$ . On définit l'indice de  $f$  par

$$d(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}.$$

Montrer que  $e^{2i\pi d(f)} = 1$  si et seulement si  $d(f) \in \mathbb{Z}$ .

2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n \geq 1$ , de coefficient  $a_n \neq 0$ , on suppose que  $P$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $t \geq 0$ , on pose

$$\begin{aligned} f_r : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ t &\mapsto P(re^{it}) \end{aligned}$$

3. Évaluer  $d(f_0)$  et  $\lim_{r \rightarrow +\infty} d(f_r)$ , montrer que  $r \mapsto d(f_r)$  est continue. Conclure.

**Exercice 22.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} (f(0) + f(1)).$$

Donner un développement à l'ordre 2 de  $v_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . On pourra montrer l'égalité de Taylor-Lagrange : si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$ ,  $a < b$ , alors il existe  $\xi \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

et et l'appliquer à  $F(x) = \int_0^x f$ .

**Exercice 23.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt.$$

Exprimer  $I_n$  sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de  $I_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Qu'en déduit-on sur  $\frac{\pi}{4}$  ?

**Exercice 24.** Soit

$$\begin{aligned} f : ]0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{x^2}^x \frac{e^t}{\arcsin(t)} dt \end{aligned}$$

Analyser la continuité, la dérivabilité et le comportement au voisinage de 0.

**Exercice 25.** Existence et calcul de

$$I_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^n},$$

pour  $n \geq 1$ .

**Exercice 26.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) f'\left(\frac{i}{n}\right).$$

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 27.** Soit  $a, b > 0$ . Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_{x^a}^{x^b} \frac{dt}{\ln(t)} = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

**Exercice 28.** Soit  $\varphi$  convexe de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (donc continue). Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue avec  $a < b$ .

1. Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t)) dt.$$

2. On suppose de plus  $\varphi$  strictement convexe, montrer que l'on a égalité dans ce qui précède si et seulement si  $f$  est constante.

**Exercice 29.** Trouver toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = f(x)f(y).$$

**Exercice 30.** Soit  $f$  continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  avec  $a < b$ . On pose

$$I_n = \left( \int_a^b |f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_n.$$

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

**Exercice 31.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\rho \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ .

1. Montrer que  $F(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |e^{it} - \rho e^{i\theta}| dt$  existe.

2. Montrer que  $F(\rho, \theta)$  ne dépend pas de  $\theta$ .

3. Calculer  $F(\rho, \theta)$  en utilisant une somme de Riemann sur  $[0, 2\pi]$ .

**Exercice 32.** On définit  $C_0$  l'ensemble des fonctions continues à support compact de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , i.e. si  $f \in C_0$ , alors il existe  $A \geq 0$  tel que pour tout  $|t| \geq A$ , alors  $f(t) = 0$ . On note  $C_1$  l'ensemble des fonctions de  $C_0$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que pour tout  $\varphi \in C_0$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0$ . Montrer que  $f = 0$ .

2. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que pour tout  $\varphi \in C_1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = 0$ . Montrer que  $f$  est constante.

3. Soit  $f \in C_0$  telle qu'il existe  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que pour tout  $\varphi \in C_1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = \int_{\mathbb{R}} g\varphi$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f' = -g$ .

**Exercice 33.** Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt,$$

et de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} dt.$$

**Exercice 34.** On note

$$\begin{aligned} f : ]0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \end{aligned}$$

Calculer

$$I = \int_0^1 f(t) dt.$$

**Exercice 35.** Existence de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} \end{aligned}$$

Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) dx,$$

est définie et donner sa valeur.

**Exercice 36.**

1. Soit  $n \geq 1$ , calculer

$$I_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt.$$

2. Donner un équivalent en  $+\infty$  de

$$J_n = \int_{-n}^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt.$$

On rappelle que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ .

3. En déduire la formule de Stirling.

**Exercice 37.**

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} f_x(t) dt,$$

est définie.

2. Montrer que  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. Calculer  $I(x)$ .

**Exercice 38.** Montrer que pour tout  $x \geq 0$ , on peut définir  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ . Prouver l'existence et calculer  $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

**Exercice 39.** Soit  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  pour  $x \rightarrow +\infty$ . On pose, pour  $h > 0$ ,

$$\phi(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh).$$

Calculer  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \phi(h)$ .

**Exercice 40.** Déterminer le domaine de définition et calculer

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

**Exercice 41.** Déterminer le domaine de définition et calculer

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}} dt.$$

**Exercice 42** (Transformée de Fourier). Soit  $f$  continue, bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On peut définir

$$\begin{aligned} \widehat{f}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \nu &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\nu t} dt \end{aligned}$$

On suppose que  $\widehat{f}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et on veut montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu) e^{i\nu x} d\nu.$$

1. On définit, pour tout  $\lambda \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu) e^{i\nu x} e^{-\lambda|\nu|} d\nu.$$

Montrer que pour  $\lambda > 0$ , on a

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2} f(x+t) dt.$$

2. Montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_x(\lambda) = f(x)$ .

3. Conclure.

**Exercice 43** (Intégrale de Dirichlet).



1. On forme, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} D_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \end{aligned}$$

Montrer que  $D_n$  est paire,  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $2\pi$ -périodique, et calcule  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) dt$ . Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , on a

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. On pose  $u_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt$ . Montrer que

$$u_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{u} du.$$

3. Montrer que l'on peut prolonger  $u \mapsto \frac{1}{\sin(\frac{u}{2})} - \frac{1}{(\frac{u}{2})}$  en une fonction  $\mathcal{C}^1$ , notée  $\varphi$ , sur  $[0, 1]$ .

4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du$ . Conclure.

**Exercice 44** (Transformée de Laplace). Soit  $f$  continue de  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\int_0^t f(t) e^{-at} dt$  converge.

1. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on peut définir  $Lf(a+x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(a+x)t} dt$  et que  $Lf(a+x) = x \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt$ , où  $g(t) = \int_0^t f(v) e^{-av} dv$ .
2. On suppose que pour tout  $x \geq 0$ ,  $Lf(a+x) = 0$ , montrer que  $f = 0$ . On pourra montrer que  $Lf(a+x) = x \int_0^1 h(u) u^{x-1} du$ , où  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est continue.

**Exercice 45.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^\mathbb{N}$  croissante telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ . Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

**Exercice 46.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^\mathbb{N}$  une suite croissante telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ . Montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}}_{S(x)} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

**Exercice 47.** Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$ . En déduire  $\int_0^\pi \frac{3 \sin(x)}{5-3 \cos(x)} dx$ .

**Exercice 48.** Donner le domaine de définition et calculer

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) dt.$$

**Exercice 49.** Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2xt) dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x e^{t^2} dt e^{-x^2} \end{aligned}$$

sont définies et égales. Donner la limite de  $f$  en  $+\infty$ .