

*Solutions  $MP/MP^*$*   
*Intégration*

**Solution 1.**  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  avec  $S' = f > 0$ . Donc  $S$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[a, b]$  dans  $[S(a) = 0, S(b)]$ . Comme pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \frac{S(b)}{n} \in [0, S(b)]$ , il existe un unique  $x_k \in [a, b]$  tel que  $S(x_k) = k \frac{S(b)}{n}$  qui est simplement donné par

$$x_k = S^{-1} \left( k \frac{S(b)}{n} \right). \quad (1)$$

On a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{1}{S(b)} \left( \frac{S(b)}{n} \sum_{k=1}^n f \left( S^{-1} \left( k \frac{S(b)}{n} \right) \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S(b)} \int_0^{S(b)} f(S^{-1}(t)) dt = I. \quad (2)$$

On effectue le changement de variable  $u = S^{-1}(t)$  pour obtenir

$$I = \frac{1}{S(b)} \int_0^b f(u)^2 du. \quad (3)$$

■

**Remarque 1.** On peut se demander si cela reste vrai si  $f \geq 0$  (mais  $f \neq 0$ ). On définit

$$\begin{aligned} \varphi : [0, S(b)] &\rightarrow [a, b] \\ y &\mapsto \min(\{x \in [a, b] | y = S(x)\}) \end{aligned} \quad (4)$$

On a  $x_k = \varphi \left( k \frac{S(b)}{n} \right)$ ,  $f \circ \varphi$  continue par morceaux sur  $[0, S(b)]$  et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left( \varphi \left( k \frac{S(b)}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S(b)} \int_0^{S(b)} (f \circ \varphi)(t) dt. \quad (5)$$

Cela marche aussi si  $\{t \in [a, b], f(t) = 0\}$  est discret car  $S$  reste strictement croissante. Cela marche aussi si  $\int f > 0$  (poser  $f_p = f + \frac{1}{p} > 0$  et passer à la limite).

**Solution 2.**

1. Pour tout  $x > 0$ , on a  $g(x) \leq \|f\|_\infty$ . Soit  $t_0 \in [0, 1]$  tel que  $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité de  $|f|$ , il existe  $[a, b] \subset [0, 1]$  avec  $a < b$  tel que pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $0 < |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} < |f(t)|$ .

D'où

$$\left( \int_0^1 |f(t)|^x dt \right)^{\frac{1}{x}} \geq \left( \int_a^b |f(t)|^x dt \right)^{\frac{1}{x}} \geq (b-a)^{\frac{1}{x}} \left( |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Alors il existe  $X_1 > 0$  tel que pour tout  $x \geq X_1$ ,  $|f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \varepsilon \leq g(x)$ . D'où le résultat.

2. On pose  $h_x(t) = \exp(x \ln(|f(t)|))$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} h_x(t) = 1$  et pour tout  $x > 0$ , pour tout  $t \in [0, 1]$   $h_x(t) \leq \max(1, \|f\|_\infty)$  qui est intégrable sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 |f(t)|^x dt = 1. \quad (7)$$

Malheureusement, ce n'est pas suffisant.

Posons donc  $k_x(t) = \frac{|f(t)|^x - 1}{x}$ . Pour  $t$  fixé, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} k_x(t) = \ln(|f(t)|)$ . De plus, pour tout  $0 < x \leq 1$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$||f(t)|^x - 1| = |e^{x \ln(|f(t)|)} - e^0| \begin{cases} \leq x \ln(|f(t)|), & \text{si } |f(t)| \leq 1, \\ \leq x \ln(|f(t)|) e^{x \ln(|f(t)|)} & \\ \leq x \ln(|f(t)|) e^{\ln(|f(t)|)}, & \text{si } |f(t)| > 1. \end{cases} \quad (8)$$

Ainsi  $k_x(t) \leq \max(\ln(\|f\|_\infty), \|f\|_\infty \ln(\|f\|_\infty))$  qui est intégrable sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{|f(t)|^x - 1}{x} dt = \int_0^1 \ln(|f(t)|) dt. \quad (9)$$

Ainsi,

$$g(x) = \exp \left( \frac{1}{x} \ln \left( 1 + x \int_0^1 k_x(t) dt \right) \right), \quad (10)$$

$$= \exp \left( \frac{1}{x} \left( x \int_0^1 \ln(|f(t)|) dt + o_{x \rightarrow 0}(x) \right) \right), \quad (11)$$

$$= \exp \left( \int_0^1 \ln(|f(t)|) dt + o_{x \rightarrow 0}(1) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp \left( \int_0^1 \ln(|f(t)|) dt \right). \quad (12)$$

■

**Solution 3.** On fixe  $y \in [0, f(a)]$ . On pose

$$\begin{aligned} \varphi : [0, a] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f + \int_0^y g - xy \end{aligned} \quad (13)$$

$\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $\varphi'(x) = f(x) - y$  donc  $\varphi$  décroît de 0 à  $g(y)$  puis croît jusqu'en  $x = a$ . Son minimum vaut alors  $\varphi(g(y)) = \int_0^x + \int_0^{f(x)} g - xf(x)$  avec  $x = g(y)$ .

Si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , alors  $g$  l'est aussi car  $f$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[0, a]$  dans  $[0, f(a)]$ . On effectue le changement de variable  $u = f(t)$  et on obtient  $\varphi(g(y)) = \int_0^x (tf'(t) + f(t)) dt - xf(x) = [tf(t)]_0^x - xf(x) = 0$ . De même si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (utiliser la relation de Chasles).

Plus généralement, on a le lemme

**Lemme 1.** Soit pour  $n \geq 1$ ,  $f_n : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  affine par morceaux continue telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f_n\left(\frac{k}{n}a\right) = f\left(\frac{k}{n}a\right)$ . Alors  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$  et  $(f_n^{-1})_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, f(a)]$ .

*Preuve du lemme.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité uniforme de  $f$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , pour tout  $x \in \left[\frac{ka}{n}, \frac{k+1}{n}a\right]$ , on a  $|f(x) - f\left(\frac{k}{n}a\right)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \left|f(x) - f\left(\frac{ka}{n}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{k}{n}a\right) - f_n(x)\right| \leq \varepsilon. \quad (14)$$

On fait de même pour  $(f_n^{-1})_{n \geq 1}$ . ■

$f_n$  et  $f_n^{-1}$  sont  $\mathcal{C}^1$  par morceaux continues et  $g_n = f_n^{-1}$ . On a  $\int_0^x f_n + \int_0^{f_n(x)} f_n = x f_n(x)$ . Quand  $n \rightarrow +\infty$ , par convergence uniforme, on a  $\int_0^{f_n(x)} g_n = \int_0^{f(x)} g_n + \int_{f_n(x)}^{f(x)} g_n$  et le dernier terme est uniformément borné par  $\|f^{-1}\|_\infty |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi, le cas d'égalité est quand

$$\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = x f(x).$$

(15)

■

**Solution 4.** On pose  $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ .  $f$  est continue sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{x-1}{2\sqrt{2(1-x)}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$ . On effectue le changement de variable  $x = \cos(t)$  d'où  $dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . On a alors

$$I = - \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\ln(\cos(t))}{1 + \cos(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos(t))}{2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt. \quad (16)$$

Or  $\tan'\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$  donc par intégrations par parties,

$$I = \left[ \ln(\cos(t)) \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \tan\left(\frac{t}{2}\right) dt. \quad (17)$$

Le premier terme vaut  $\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$ . Pour le deuxième terme, on utilise la formule d'addition  $\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ . Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t) \tan\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{1 - u^2} \frac{du}{1 + u}, \quad (18)$$

en ayant effectué le changement de variables  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ , d'où  $dt = \frac{2du}{1+u^2}$ . Il ne reste plus qu'à faire une décomposition en éléments simples. ■

**Solution 5.**

1.  $I_n$  est bien définie. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1 + \tan^2(x))dx, \quad (19)$$

$$= [\tan^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1 + \tan^2(x))dx, \quad (20)$$

$$= 1 - n(I_n + I_{n+2}). \quad (21)$$

Donc  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ . On a  $I_0 = \frac{\pi}{4}$ . On en déduit que

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - I_{2p-2} = \dots = (-1)^p \left( \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p-1} \right). \quad (22)$$

On a  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln(2)$ . Ainsi,

$$I_{2p+1} = (-1)^p \left( \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p} \right). \quad (23)$$

2. On pose  $f_n(x) = \tan^n(x)$ . Si  $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . Si  $x = \frac{\pi}{4}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ . Donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$  qui vaut 0 partout sauf en  $\frac{\pi}{4}$  où elle vaut 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ . On a  $|f_n(x)| \leq 1$  intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

(24)

3. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \\ \ln(2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}. \end{aligned}$$

(25)

■

**Remarque 2.** On peut donner un équivalent de  $I_n$ . Comme pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , on a  $0 \leq \tan(x) \leq 1$ , on a  $I_{n+2} \leq I_n$ . Ainsi,

$$2I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \leq 2I_n, \quad (26)$$

et donc

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}, \quad (27)$$

d'où

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}. \quad (28)$$

### Solution 6.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à  $\sqrt{f}$  et  $\frac{1}{\sqrt{f}}$ , on a

$$\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geq \left( \int_a^b 1 \right)^2 = (b-a)^2. \quad (29)$$

$f: x \mapsto 1$  pour tout  $x \in [a, b]$  donne l'égalité, et d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a égalité si et seulement si  $\sqrt{f}$  et  $\frac{1}{\sqrt{f}}$  sont proportionnelles, donc si et seulement si  $f$  est constante.

2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  et  $c < a$ . Soit

$$\begin{aligned} f_{\alpha,c} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t &\mapsto (t-c)^\alpha \end{aligned} \quad (30)$$

On a

$$\phi(f_{\alpha,c}) = \frac{1}{\alpha^2 - 1} \left[ (b-c)^{\alpha+1} - (a-c)^{\alpha+1} \right] \left[ (a-c)^{-\alpha+1} - (b-c)^{-\alpha+1} \right], \quad (31)$$

$$\underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^2} \left[ (b-c)^{\alpha+1} \times \frac{1}{(a-c)^{\alpha-1}} \right], \quad (32)$$

$$\underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(b-a)(a-c)}{\alpha^2} \left( \frac{b-c}{a-c} \right)^\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty, \quad (33)$$

car  $b-c > a-c$ .

3. Soit  $f, g \in E^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .  $\lambda f + (1-\alpha)g$  est continue et strictement positive.  $E$  est convexe dans  $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*), \|\cdot\|_\infty)$  donc connexe par arcs.

Soit  $f \in E$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de fonctions convergent uniformément vers  $f$ . Par convergence uniforme, on a  $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$ . De plus, pour tout  $x \in [a, b]$ , on a

$$\left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{f_n(x) \times f(x)} \leq \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\min_{y \in [a, b]} f_n(y) \times f(y)}. \quad (34)$$

Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\min f}{2}$  et pour tout  $x \in [a, b]$ , pour tout  $n \geq n_0$ ,  $f_n(x) \geq \frac{\min f}{2}$ . Alors

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\|_\infty \leq \frac{2\|f_n - f\|_\infty}{(\min f)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (35)$$

Ainsi,  $\int_a^b \frac{1}{f_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{f}$  et  $\phi(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(f)$ .  $\phi$  est donc continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc

$$\phi(E) = [(b-a)^2, +\infty[. \quad (36)$$

■

**Solution 7.** Soit

$$\begin{aligned} f : ]0, +\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{(1+x)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

$f$  est continue. On a  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc  $\int_0^1 f$  converge. On a  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x) \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = O_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} \right)$  donc  $\int_1^{+\infty} f$  converge.

On pose  $x = u^2$  et on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2 \ln(u^2)}{(1+u^2)^2} du, \quad (38)$$

$$= 4 \int_0^{+\infty} \frac{u^2 \ln(u)}{(1+u^2)^2} du, \quad (39)$$

$$= 2 \left( \left[ -\frac{1}{(1+u^2)} \times u \ln(u) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} (\ln(u) + 0) du \right), \quad (40)$$

$$= 2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du \right). \quad (41)$$

Noter que l'intégration par parties faite en 40 est correcte car tout converge en 0 et  $+\infty$  (passer à la limite  $\alpha, \beta \rightarrow 0, +\infty$  pour être plus rigoureux).

La première intégrale est nulle. En effet, on pose  $x = \frac{1}{u}$  d'où  $dx = -\frac{du}{u^2}$  et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = - \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) dx}{1 + \frac{1}{x^2} x^2} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx. \quad (42)$$

La deuxième intégrale vaut  $\frac{\pi}{2}$ . Finalement, on a

$$I = \pi. \quad (43)$$

■

**Solution 8.** On note  $f$  la fonction intégrande.  $f$  est continue négative. On a  $|f(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left| \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \right| = O_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}} \right)$  donc  $\int_0^{\frac{1}{2}} f$  converge. On a  $|f(t)| \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  donc  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f$  converge.

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}. \quad (44)$$

Comme  $t(1-t) = -(t^2-t) = -\left((t-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(1-(2t-1)^2)$ , on pose  $2t-1 = \cos \theta$ . On a alors  $t = \frac{\cos \theta + 1}{2}$  et  $d\theta = \frac{-2dt}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \frac{-dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ . Ainsi,

$$I = \int_0^\pi \frac{\ln\left(\frac{\cos \theta + 1}{2}\right)}{\frac{1-\cos \theta}{2}} d\theta. \quad (45)$$

On a  $\frac{1+\cos \theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$  et  $\frac{1-\cos \theta}{2} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . En posant  $u = \frac{\theta}{2}$ , on a donc

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos u)}{\sin^2 u} du. \quad (46)$$

En fixant  $0 < \varepsilon < \alpha < 1$  et en posant  $I_{\varepsilon, \alpha} = \int_\varepsilon^\alpha f$ , on a en faisant une intégration par parties :

$$I_{\varepsilon, \alpha} = 4 \left( [-\cot u \times \ln(\cos u)]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha 1 du \right). \quad (47)$$

Le deuxième terme tend vers  $\frac{\pi}{2}$ . Pour le premier, si  $\alpha = \frac{\pi}{2} - h$ , on a

$$-\cot \alpha \ln \cos \alpha = -\tan h \ln \sin h = -\tan h \left[ \ln h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1) \right] \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -h \ln(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (48)$$

De même, on a

$$-\cot \varepsilon \ln \cos \varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\varepsilon} \times \frac{-\varepsilon^2}{2} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (49)$$

Ainsi,

$$\boxed{I = -2\pi.} \quad (50)$$

■

**Solution 9.** On note  $f$  la fonction intégrande. Si  $h = \frac{\pi}{4} - t$ , on a  $\cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) = \sin(2h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 2h$ . Ainsi,

$$f(t) \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}}, \quad (51)$$

donc l'intégrale existe (critère de Riemann).



En posant  $u = \sin(t)$ , puis  $v = \sqrt{2}u$ , puis  $\theta = \arcsin(v)$ , on a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin^2(t)) \cos(t)}{\sqrt{1 - 2\sin^2(t)}} dt, \quad (52)$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - u^2}{\sqrt{1 - 2u^2}} du, \quad (53)$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{\sqrt{2} \sqrt{1 - u^2}} du, \quad (54)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}}{\sqrt{2}} d\theta, \quad (55)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \right), \quad (56)$$

$$= \frac{3\pi - 1}{8\sqrt{2}}. \quad (57)$$

■

**Solution 10.** Si  $f = c \in \mathbb{C}$  est constante, on a

$$\gamma = \int_a^b f(t)g(\lambda t) dt = c \int_a^b g(\lambda t) dt. \quad (58)$$

On pose  $u = \lambda t$  et on pose  $k(\lambda) = \lfloor \frac{\lambda b - \lambda a}{T} \rfloor \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda(b-a)}{T}$ . Alors

$$\gamma = \frac{c}{\lambda} k(\lambda) \int_0^T g + \frac{c}{\lambda} \int_{\lambda a + k(\lambda)T}^{\lambda b} g. \quad (59)$$

Le deuxième terme est majoré par  $\frac{|c|}{\lambda} T \|g\|_\infty \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ . Finalement,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \gamma = \frac{c(b-a)}{T} \int_0^T g = \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f. \quad (60)$$

C'est la même chose pour les fonctions en escalier (par combinaison linéaire).

Pour une fonction quelconque  $f$  continue par morceaux, soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $f_\varepsilon$  une fonction en escalier telle que  $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ . On forme

$$\Gamma = \left| \int_a^b (f(t)g(\lambda t)) dt - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f \right|. \quad (61)$$

On a

$$\Gamma = \left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)dt + \int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t))g(\lambda t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b (f - f_\varepsilon) \right|, \quad (62)$$

$$\leq \left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon \right| + \left| \int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t))g(\lambda t)dt \right| + \left| \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b (f - f_\varepsilon) \right|. \quad (63)$$

Il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$\left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (64)$$

Ainsi,  $\Gamma \leq \frac{\varepsilon}{3} \times 3 = \varepsilon$ . Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f.} \quad (65)$$

Pour le cas particulier, on a  $g(t) = \frac{1}{3+2\cos(t)}$ .  $g$  est  $2\pi$ -périodique, paire et strictement positive. On pose  $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ , on a  $\cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  et  $\sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$ . Par parité, on a  $\int_0^{2\pi} g = 2 \int_0^\pi g$ , et

$$\int_0^\pi g(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{(1+x^2)\left(3+2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)}, \quad (66)$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5}, \quad (67)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dx}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}, \quad (68)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{2}, \quad (69)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \quad (70)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{3+2\cos(nt)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} f.} \quad (71)$$

■

**Remarque 3.** Pour calculer  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos(t)}$ , on peut écrire

$$\frac{1}{3+2\cos(t)} = \frac{1}{3+e^{it}+e^{-it}} = \frac{e^{it}}{e^{2it}+3e^{it}+1}. \quad (72)$$

On décompose  $F(X) = \frac{X}{X^2+3X+1} = \frac{\alpha}{X-\lambda} + \frac{\beta}{X-\mu}$  avec  $\lambda = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \in ]-1, 0[$ ,  $\mu = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \in ]-\infty, -1[$ ,  $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}$ ,  $\beta = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$  avec  $\lambda - \mu = \sqrt{5}$  et  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ . Ainsi,

$$\frac{1}{3+2\cos(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \frac{1}{e^{it}-\lambda} - \frac{\mu}{\sqrt{5}} \frac{1}{e^{it}-\mu}, \quad (73)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \frac{e^{-it}}{1-\lambda e^{-it}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\frac{e^{it}}{\mu}}, \quad (74)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^n e^{int}, \quad (75)$$

car  $|\lambda e^{-it}| < 1$  et  $\left| \frac{e^{it}}{\mu} \right| < 1$ . Comme on a  $|\lambda^n e^{int}| \leq |\lambda|^n$ , on a convergence normale sur  $[0, 2\pi]$  car  $|\lambda| < 1$ . Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos(nt)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \quad (76)$$

### Solution 11.

1. Si  $f$  ne tend pas vers 0 en  $+\infty$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $A > 0$ , il existe  $x_A \geq A$  tel que  $|f(x_A)| > \varepsilon_0$ . On sait qu'il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que pour tout  $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , si  $|x_1 - x_2| \leq \alpha_0$  alors  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Alors pour tout  $A \geq 0$ , pour tout  $x \in [x_A - \alpha_0, x_A + \alpha_0]$ , on a  $|f(x) - f(x_A)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Donc  $f(x)$  est du signe de  $f(x_A)$  et  $|f(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Alors on a

$$\left| \int_{x_A - \alpha_0}^{x_A + \alpha_0} f(x) dx \right| = \int_{x_A - \alpha_0}^{x_A + \alpha_0} |f(x)| dx > \varepsilon_0 \alpha_0 > 0. \quad (77)$$

Or

$$\left| \int_{x_A - \alpha_0}^{x_A + \alpha_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_A - \alpha_0}^{+\infty} f(x) dx - \int_{x_A + \alpha_0}^{+\infty} f(x) dx \right| \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0. \quad (78)$$

C'est absurde, donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.} \quad (79)$$

2. Il existe  $x_0 > 0$  tel que pour tout  $x > x_0$ , on ait  $|f(x)| < 1$ . Donc pour tout  $x > x_0$ , on a  $|f^2(x_0)| \leq |f(x)|$  d'où  $f^2 = O(f)$  et  $f^2$  est intégrable.

■

**Remarque 4.** Si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , alors il faut raisonner sur  $\Im(f)$  et  $\Re(f)$  et le résultat reste vrai.

**Solution 12.**

1. Si  $x = 0$ ,  $f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Si  $x \neq 0$ , alors  $f_n$  converge simplement vers 0. On n'a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+^*$  car on pourrait intervertir les limites en 0. Soit  $a > 0$ , soit  $x \in [a, +\infty[$ .  $f$  étant décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a  $|f_n(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On a donc convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ .

Notons que  $f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et que son intégrale vaut 1. Enfin, pour tout  $a > 0$ , on a  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (reste d'intégrale convergente).

2. Notons  $g_n(u) = \frac{g(\frac{u}{n})}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$  de telle sorte que  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u) du$ .

Soit  $u$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = \frac{g(0)}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$  par continuité de  $g$ , et pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , on a  $|g_n(u)| \leq \frac{\|g\|_\infty}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de convergence dominée, on peut intervertir limite et intégrale, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t) f_n(t) dt = g(0) \quad (80)$$

■

**Remarque 5.** Généralement, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(f_n \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$  par théorème de convergence dominée.

**Remarque 6.** Si  $g$  est bornée et uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ , soit  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha > 0$  tel que si  $|t| \leq \alpha$  alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|g(x-t) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors

$$|(f_n \star g)(x) - g(x)| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |g(x-t) - g(x)| f_n(t) dt + \int_{\mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]} 2 \|g\|_\infty f_n(t) dt. \quad (81)$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc  $(f_n \star g)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 7.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue par morceaux telle que  $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ . Soit pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto n f(nt) \end{aligned} \quad (82)$$

Par changement de variable, on a  $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} f = 0$  pour  $\alpha > 0$ .  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité.

**Solution 13.** Si  $x \geq 2$ , on a  $\frac{1}{x} \in ]0, 1]$  donc on peut définir

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \quad (83)$$

$f$  est continue et  $\arcsin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$  implique  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{6x^3}$ , donc d'après le critère de Riemann,  $\int_1^{+\infty} f$  converge.

Soit  $A \geq 1$ , on pose  $I_A = \int_1^A \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln(A) - \int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ . On a

$$\int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx, \quad (84)$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{A}\right) + \ln(A + \sqrt{A^2 - 1}) - \frac{\pi}{2}, \quad (85)$$

$$\underset{A \rightarrow +\infty}{=} 1 + \ln(A) + \ln(2) - \frac{\pi}{2} + o(1), \quad (86)$$

donc

$$I = \lim_{A \rightarrow +\infty} = -1 + \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

(87)

■

**Solution 14.** On a  $\ln(\sin(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$  donc  $I$  existe, et en posant  $u = \frac{\pi}{2} - t$ , on a  $I = J$ . On a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt, \quad (88)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) dt, \quad (89)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \frac{\pi}{2} \ln(2), \quad (90)$$

$$= I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \frac{\pi}{2} \ln(2). \quad (91)$$

On a

$$I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(v)) dv = I. \quad (92)$$

Finalement, on a  $I + J = I - \frac{\pi}{2} \ln(2)$  donc

$$I = J = -\frac{\pi}{2} \ln(2).$$

(93)

■

**Solution 15.**  $f_\alpha$  est positive, continue et  $f_\alpha \leq 1$ .  $f_\alpha$  est intégrable si et seulement si  $\sum u_k$  converge avec

$$u_k = \int_{k\pi - \frac{\pi}{2}}^{k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + x^\alpha |\sin(x)|}, \quad (94)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (t + k\pi)^\alpha |\sin(t)|}, \quad (95)$$

$$\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2}{\pi} |t|}, \quad (96)$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2}{\pi} t}, \quad (97)$$

$$= \frac{\pi}{\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha} \ln \left(1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha\right), \quad (98)$$

$$\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ln(k)}{(k\pi)^\alpha} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right). \quad (99)$$

Donc  $\sum u_k$  converge et  $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt$  converge. ■

**Solution 16.**

1. Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$ . D'après le théorème de Weierstrass, il existe  $(P_n) \in (\mathbb{R}[X])^\mathbb{N}$  telle que  $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  sur  $[a, b]$ .  $(P_n f)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f^2$  sur  $[a, b]$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^b P_n f = 0$  donne par convergence uniforme  $\int_a^b f^2 = 0$ . Comme  $f^2$  est continue positive, on a  $f^2 = 0$  donc  $f = 0$ .
2. Pour tout  $n \geq 1$ , on a par intégration par parties,

$$I_n = \frac{n}{1-i} I_{n-1}. \quad (100)$$

On a  $I_0 = \frac{1}{1-i}$ . Par récurrence, on a

$$I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{n!}{(\sqrt{2})^{n+1}} e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}}. \quad (101)$$

3. Pour  $n = 4k - 1$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\Im(I_{4k-1}) = 0 = \int_0^{+\infty} t^{4k-1} \sin(t) e^{-t} dt. \quad (102)$$

On pose  $u = t^4$ ,  $t = u^{\frac{1}{4}}$  et  $dt = \frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} du$ . Ainsi, en posant  $f(u) = \sin\left(u^{\frac{1}{4}}\right) e^{-u^{\frac{1}{4}}}$ ,

$$0 = \int_0^{+\infty} f(u) u^{k-1} du.$$

(103)

■

### Solution 17.

1.  $g$  est continue,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et en tout point de continuité de  $f$ , on a  $g'(t) = e^{-at}f(t)$ . On a  $g(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \mathcal{L}f(a)$ .

Soit  $X \geq 0$ , on a grâce à une intégration par parties,

$$\int_0^X e^{-bt} f(t) dt = \int_0^X e^{-(b-a)t} e^{-at} f(t) dt, \quad (104)$$

$$= [g(t) e^{-(b-a)t}]_0^X + (b-a) \int_0^X e^{-(b-a)t} g(t) dt. \quad (105)$$

Le terme entre crochet s'annule car  $g(0) = 0$ , et  $b > a$  donc  $g(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \mathcal{L}f(a)$ .  $g$  est continue, admet une limite finie en  $+\infty$ , donc est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi,

$$|e^{-(b-a)t} g(t)| \leq \|g\|_\infty e^{-(b-a)t}, \quad (106)$$

qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Finalement,

$$\int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t) dt, \quad (107)$$

converge absolument et  $\int_0^{+\infty} e^{-bt} f(t) dt$  converge et

$$\mathcal{L}f(b) = (b-a) \int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t) dt. \quad (108)$$

2. En raisonnant sur  $f-h$ , on se ramène à  $\mathcal{L}f = 0$ . Pour tout  $b > a$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t) dt = 0$ , donc pour tout  $x > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt = 0$ . Si  $g = 0$ , alors en dérivant, on a  $f = 0$ . On pose  $u = e^{-t}$  qui est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $[0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1]$ . On a donc, pour tout  $x > 0$ ,  $\int_0^1 u^{x-1} g(-\ln(u)) du = 0$ . Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 u^n g(-\ln(u)) du = 0 = \int_0^1 u^n k(u) du$  avec  $k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $k(0) = \mathcal{L}f(a)$  et  $k(x) = g(-\ln(x))$  si  $x \in ]0, 1]$ .  $k$  est continue sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème de Weierstrass,  $k = 0$  donc  $g = 0$  puis  $f = 0$ .

■

### Solution 18.

1. Pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|e^{ixt} f(t)| = |f(t)|$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  car  $f(t) \underset{|t| \rightarrow +\infty}{\sim} 0$ .  $\widehat{f}$  est définie et  $\widehat{f}(x) = \int_{-A}^A e^{itx} f(t) dt$ .

Posons

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\mapsto e^{itx} f(t) \end{aligned} \quad (109)$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g(x, t)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\partial^k g}{\partial x^k} = (it)^k g(x, t)$ . On a

$$\left| \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial x^k} \right| = |t|^k |f(t)|, \quad (110)$$

majoration indépendante de  $x$  et intégrable sur  $[-A, A]$ . Donc  $\widehat{f}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{f}^{(k)}(x) = \int_{-A}^A (it)^k e^{itx} f(t) dt$ .

2. Soit  $B > 0$  tel que si  $x > B$ ,  $\widehat{f}(x) = 0$ . Soit  $x_0 = B + 1$ , alors  $\widehat{f} = 0$  sur  $]x_0 - 1, +\infty[$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\widehat{f}^{(k)}(x_0) = 0 = \int_{-A}^A t^k e^{itx_0} f(t) dt$ . D'après le théorème de Weierstrass, on a  $f(t) = 0$  pour tout  $t \in [-A, A]$ . ■

**Solution 19.** Si  $f$  est affine avec  $f(x) = \alpha x + \beta$ . On a  $\int_a^b f(t) dt = \alpha \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \beta(b - a)$  et  $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b - a)\left(\alpha \frac{(a+b)}{2} + \beta\right)$  d'où  $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b f(t) dt$ .

Notons que l'inégalité de l'énoncé équivaut à pour tout  $x \in \mathring{I}$ , pour tout  $h > 0$ , on a  $a = x - h$  et  $b = x + h \in I^2$ ,  $2hf(x) \leq \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$ .

Si  $f$  est convexe, soit  $a < b \in I^2$ . Soit  $\varphi$  affine sur  $[a, b]$  telle que  $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ . On a

$$\varphi' = \lambda = \frac{1}{2} \left( f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \geq f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad (111)$$

par convexité et en notant  $\varphi(t) = \lambda t + \mu$ . En notant  $\varphi_1$  la demi-tangente à  $f$  en  $\frac{a+b}{2}$ , on a pour tout  $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ ,

$$\varphi(t) \leq \varphi_1(t) \leq f(t). \quad (112)$$

$\varphi_1$  est affine sur  $[a, \frac{a+b}{2}]$ ,  $\varphi_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  et  $\varphi'_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ . De la même façon, pour tout  $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ , on a

$$\varphi(t) \leq \varphi_2(t) \leq f(t), \quad (113)$$

avec  $\varphi_2$  affine sur  $[\frac{a+b}{2}, b]$ ,  $\varphi_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  et  $\varphi'_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

On a donc  $\int_a^b \varphi(t) dt = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt$ .

Réciproquement, si pour tout  $a < b$ ,  $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt$ , soient  $x < y \in I^2$  fixés. On pose  $g = f - \varphi$  avec  $\varphi(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) + f(x)$ .  $g$  vérifie l'inégalité de l'énoncé car pour  $\varphi$  on a égalité (car affine). On veut montrer que  $g \leq 0$  sur  $[x, y]$ . On a  $g(x) = g(y) = 0$ . Soit  $g(x_0) = \max_{t \in [x, y]} g(t)$ . Si  $g(x_0) > 0$ , on a  $x_0 \in ]x, y[$  car  $g(x) = g(y) = 0$ . Soit  $h > 0$  tel que  $x_0 - h$  et  $x_0 + h \in [x, y]$ . On applique l'inégalité de l'énoncé à  $g$  :

$$2hg(x_0) \leq \int_{x_0-h}^{x_0+h} g(t) dt = 2g(x_0), \quad (114)$$

donc

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} (g(x_0) - g(t)) dt = 0, \quad (115)$$



et l'intégrande est positive et continue. Donc pour tout  $t \in [x_0 - h, x_0 + h]$ , on a  $g(t) = g(x_0)$ . On pose  $h = \min(y - x_0, x - x_0)$ . On obtient  $g(x) = 0 = g(x_0) > 0$  (ou  $g(y) = g(x_0)$ ) ce qui est absurde. Donc  $g \leq 0$  sur  $[x, y]$  et  $f$  est convexe. ■

**Remarque 8.** Notons que si pour tout  $(h, x) \in \mathbb{R}_+ \times \overset{\circ}{I}$  tels que  $(x - h, x + h) \in I^2$ ,  $2hf(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ , alors pour  $x \in \overset{\circ}{I}$  et  $h$  fixé,  $x \mapsto \int_{x-h}^{x+h} f$  est  $\mathcal{C}^1$  donc  $f$  l'est. Par récurrence,  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , et en dérivant deux fois par rapport à  $h$  (pour  $x \in \overset{\circ}{I}$  fixé), on a  $0 = f'(x + h) - f'(x - h)$  donc  $f$  est affine.

### Solution 20.

1. Soit  $f_n: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_n(t) = 0$  si  $t > n$  et  $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$  si  $t \leq n$ .  $f_n$  est continue par morceaux, positive, intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car équivalente à 0 en  $+\infty$  et à  $t^{x-1}$  en 0.

Soit  $t \in ]0, +\infty[$  fixé, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $n > t$  et pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}, \quad (116)$$

$$= e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} t^{x-1}, \quad (117)$$

$$= e^{n(-\frac{t}{n} + o(\frac{1}{n}))} t^{x-1}, \quad (118)$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-t} t^{x-1}. \quad (119)$$

On a donc convergence simple vers  $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$ , fonction continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Soit  $n \geq 1$  et  $t \in [0, n]$ , on a

$$0 \leq f_n(t) \leq f(t), \quad (120)$$

car  $\ln(1 + x) \leq x$  pour tout  $x > -1$ . D'après le théorème de convergence dominée, on a bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt. \quad (121)$$

2. On pose  $u = \frac{t}{n}$  et on a

$$I_n(x) = \int_0^1 (1 - u)^n (nu)^{x-1} n du, \quad (122)$$

$$= n^x \int_0^1 (1 - u)^n u^{x-1} du, \quad (123)$$

$$= n^x \left( \left[ (1 - u)^n \frac{u^x}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 n(1 - u)^{n-1} \frac{u^x}{x} du \right). \quad (124)$$

Le terme entre crochets est nul car  $u \geq 1$  et  $x > 0$ .

Si on pose  $B_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$ , on a

$$B_n(x) = \frac{n}{x} B_{n-1}(x+1) = \dots = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} B_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \quad (125)$$

On a donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}. \quad (126)$$

3. Par définition, on a  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n))$ . On a

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{1 \times 2 \times \dots \times n} e^{-x \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} x \left[ \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right] e^{-x(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + o(1))} e^{\gamma x}, \quad (127)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \times \underbrace{e^{o(1)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}. \quad (128)$$

Donc on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}. \quad (129)$$

4. On remarque que  $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = (\ln \Gamma)'(x)$ . On a

$$\ln \Gamma(x) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)}_{f_k(x) \geq 0}. \quad (130)$$

On a convergence simple sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On a pour tout  $k > 1$ ,  $f_k$  est  $\mathcal{C}^1$ , et pour tout  $k \geq 1$ , pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geq 0$  car  $x > 0$ .

Soit  $A > 0$ , pour tout  $x \in ]0, A]$ , on a

$$0 < f_k(x) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+A} = \frac{A}{k(k+A)} \underset{k \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (131)$$

Donc pour tout  $A > 0$ ,  $\sum f_k(x)$  converge normalement sur  $]0, A]$ .  $\ln \Gamma$  est donc  $\mathcal{C}^1$  (en tant que série de fonction) et on a

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right). \quad (132)$$

■

**Remarque 9.** En particulier, comme  $\Gamma(1) = 1$ , on a

$$\Gamma'(1) = \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma} \right) (1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = -\gamma, \quad (133)$$

car la série est télescopique.

**Remarque 10.** On a

$$(\ln \Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}. \quad (134)$$

Par ailleurs,

$$0 \leq \Gamma'^2(x) = \left( \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma''(x) \Gamma(x), \quad (135)$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a égalité stricte car  $\ln(t)$  n'est pas constante. Ainsi,  $\ln \Gamma$  est strictement convexe.

**Remarque 11.** On peut vérifier que  $\ln \Gamma$  est l'unique fonction de  $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

1.  $\ln \Gamma$  est convexe,
2.  $\forall x > 0, (\ln \Gamma)(x+1) = (\ln \Gamma)(x) + \ln(x)$ ,
3.  $(\ln \Gamma)(1) = 0$ .

**Solution 21.**

1. On a

$$e^{2i\pi d(f)} = \exp \left( \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt \right). \quad (136)$$

Posons  $g(x) = \exp \left( \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \right)$ .  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)$ . On a  $\left( \frac{g}{f} \right)' = \frac{g'f - f'g}{f^2} = 0$  donc  $\frac{g}{f} = \alpha \in \mathbb{C}$ . En particulier,  $g(0) = g(2\pi) = 1$  donc  $d(f) \in \mathbb{Z}$ .

2.  $f_0$  est constante égale à  $P(0)$  donc  $d(f_0) = 0$  car c'est une fonction constante. Soit  $r \geq 0$ , on a

$$d(f_r) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'_r(t)}{f_r(t)} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} P'(re^{it})}{P(re^{it})} dt. \quad (137)$$

On note  $g(r, t)$  la fonction intégrande définie sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ .  $r \mapsto g(r, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et soit  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n. \quad (138)$$

Alors

$$h(z) = \frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{a_1z + \cdots + na_nz^n}{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n} \quad (139)$$

est continue sur  $\mathbb{C}$  et pour  $z \neq 0$ , on a

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{\frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + na_n}{\frac{a_0}{z^n} + a_n} \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} n. \quad (140)$$

Donc  $h$  est bornée sur  $\mathbb{C}$ , soit  $M = \|h\|_\infty$ . On a  $|g(r, t)| \leq M \in L^1([0, 2\pi])$ . Donc  $r \mapsto d(f_r)$  est continue et pour  $t$  fixé, on a  $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r, t) = n$ . Par convergence dominée, on a  $\lim_{r \rightarrow +\infty} d(f_r) = n$ .  $r \mapsto d(f_r)$  est continue à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  donc constante et  $d(f_0) = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} d(f_r) = n \neq 0$  : c'est absurde. Donc  $P$  s'annule. ■

**Remarque 12.** Le théorème de relèvement permet d'écrire  $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$  avec  $\rho(t) = |f(t)|$  et  $(\rho, \theta) : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  est  $\mathcal{C}^1$ . On a alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'}{\rho} + i(\theta(2\pi) - \theta(0)). \quad (141)$$

Le premier terme vaut  $[\ln(\rho)]_0^{2\pi} = 0$  car  $\rho = |f|$  est  $2\pi$ -périodique, et le deuxième terme vaut  $2i\pi \times$  le nombre de tours que décrit  $f$  autour de l'origine.

**Solution 22.** En appliquant l'inégalité de Taylor avec reste intégral à  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$ , on a

$$R_n = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt. \quad (142)$$

Soit  $m_n = \min_{[a,b]} f^{(n)}$  et  $M_n = \max_{[a,b]} f^{(n)}$ . Alors

$$m_n \frac{|b-a|^n}{n!} \leq \left| \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \right| \leq M_n \frac{|b-a|^n}{n!}. \quad (143)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\xi \in ]a, b[$  tel que  $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$ .

On a

$$v_n - \int_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right] - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f. \quad (144)$$

On prend d'abord  $a = \frac{k}{n}$  et  $b = \frac{k+1}{n}$ , il existe  $\xi_k \in ]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$  tel que

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3} f^{(2)}(\xi_k). \quad (145)$$

Puis avec  $a = \frac{k+1}{n}$  et  $b = \frac{k}{n}$ , il existe  $\eta_k \in ]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$  tel que

$$F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) = -\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}f^{(2)}(\eta_k). \quad (146)$$

En faisant la différence des deux égalités et en divisant par deux, on a

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt, \quad (147)$$

$$= \frac{1}{2n} \left( f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right) + \frac{1}{4n^2} \left( f'\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k+1}{n}\right) \right), \quad (148)$$

$$+ \frac{1}{12n^3} (f^{(2)}(\xi_k) + f^{(2)}(\eta_k)). \quad (149)$$

En sommant, on obtient (par le théorème de Riemann car on a une subdivision pointée)

$$v_n - \int_0^1 f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4n^2} \left( f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right) - \frac{1}{12n^3} (f^{(2)}(\xi_k) + f^{(2)}(\eta_k)), \quad (150)$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{4n^2} [f'(1) - f'(0)] - \frac{1}{6n^2} \left[ \int_0^1 f^{(2)}(t)dt + o(1) \right], \quad (151)$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{4n^2} [f'(1) - f'(0)] - \frac{1}{6n^2} (f'(1) - f'(0) + o(1)). \quad (152)$$

Donc on a

$$\boxed{v_n = \int_0^1 f + \frac{1}{12n^2} (f'(1) - f'(0)) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}. \quad (153)$$

■

**Solution 23.** On a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2(x) + 1 - 1) \tan^{n-2}(x)dx, \quad (154)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan'(x) - 1) \tan^{n-2}(x)dx, \quad (155)$$

$$= \frac{1}{n-1} [\tan^{n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-2}. \quad (156)$$

Donc

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}. \quad (157)$$

On a  $I_0 = \frac{\pi}{4}$  et  $I_1 = [-\ln|\cos|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln(2)$ .

On a donc

$$I_{2p} = (-1)^p \left( \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} \right), \quad (158)$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2} \left( \ln(2) - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^p}{p} \right). \quad (159)$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.} \quad (160)$$

Comme on a  $2I_n \leq I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \leq 2I_{n-2}$  d'où

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}, \quad (161)$$

ainsi

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.} \quad (162)$$

■

**Solution 24.** On note  $g$  la fonction intégrande.  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, 1]$ . On a

$$f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x g(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} g(t) dt, \quad (163)$$

donc  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et  $f'(x) = g(x) - 2xg'(x^2)$ .

En 0,  $e^t$  se comporte comme 1 et  $\frac{1}{\arcsin(t)}$  comme en  $\frac{1}{t}$ . Donc, au voisinage de 0,

$$h(t) = \frac{e^t}{\arcsin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{te^t - \arcsin(t)}{t \arcsin(t)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{t^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1. \quad (164)$$

Donc  $h$  est bornée sur  $]0, 1]$ , soit  $M = \sup_{t \in ]0, 1]} |h(t)|$ . On a

$$\left| \int_{x^2}^x h(t) dt \right| \leq \int_x^{x^2} |h(t)| dt \leq M(x - x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \quad (165)$$

Comme  $\int_{x^2}^x \frac{dt}{t} = -\ln(x)$ , on a  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\ln(x) + o(1)$ .

Pour aller plus loin dans le développement limité, on pousse plus loin le développement limité de  $h(t)$  dans  $0^+$ . ■

**Solution 25.** On note  $f$  la fonction intégrande.  $x \mapsto x^2 + x + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et positive,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}$ . Donc d'après le critère de Riemann, l'intégrale converge absolument.

Pour le calcul, on on

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left( \left( \frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1) \right)^2 + 1 \right). \quad (166)$$

On pose  $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1)$  et on a

$$I_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{4}{3} \right)^n \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^n}. \quad (167)$$

On note  $J_n$  l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u^2 + 1)^{n-1}} \frac{du}{1 + u^2}. \quad (168)$$

On pose  $\theta = \arctan(u)$ ,  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[0, +\infty[ \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}[$ . On a  $d\theta = \frac{du}{1+u^2}$  et  $\frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} = \cos^{2n-2}(\theta)$ .

On retrouve les intégrales de Wallis, d'où on en tire

$$J_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!} \frac{\pi}{2}. \quad (169)$$

Donc

$$I_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{4}{3} \right)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!} \frac{\pi}{2}. \quad (170)$$

■

**Solution 26.** Soit  $M_0 = \sup_{[0,1]} |f|$  et  $M_1 = \sup_{[0,1]} |f'|$ . D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\left| f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{M_1}{n}. \quad (171)$$

Donc, par la formule de la somme de Riemann, on a

$$\left| u_n - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) f'\left(\frac{i+1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f f'} \right| \leq \underbrace{\frac{M_1^2}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}, \quad (172)$$

donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f^2(1) - f^2(0)) .} \quad (173)$$

■

**Solution 27.** Ici, l'intégrale diverge, mais comme on fait tendre l'intervalle d'intégration à un singleton, cela aura une limite finie.

Formons

$$f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} \quad (174)$$

Si  $x < 1$ ,  $x^a$  et  $x^b$  sont  $< 1$ , et si  $x > 1$ , alors  $x^a$  et  $x^b$  sont  $> 1$ .  $\int_{x^a}^{x^b} f(t)dt$  est donc bien définie.

On a

$$\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} = \frac{1}{\ln(1+(t-1))} - \frac{1}{t-1} = \frac{(t-1) - \ln(1+(t-1))}{(t-1)\ln(1+(t-1))} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{\frac{(t-1)^2}{2}}{(t-1)^2} = \frac{1}{2}. \quad (175)$$

Soit  $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$  si  $t \neq 1$  et  $h(1) = \frac{1}{2}$ .  $h$  est continue donc bornée au voisinage de 1. Il existe  $\alpha_0 > 0$  et  $M_0 \geq 0$  tels que pour tout  $t \in [1 - \alpha_0, 1 + \alpha_0]$ , on ait

$$\left| \int_{x^a}^{x^b} \frac{dt}{\ln(t)} - \int_{x^a}^{x^b} \frac{dt}{t-1} \right| \leq M_0 |x^b - x^a| \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0. \quad (176)$$

Or, si  $x = 1 + x'$ , on a

$$\int_{x^a}^{x^b} \frac{dt}{t-1} = [\ln |t-1|]_{x^a}^{x^b}, \quad (177)$$

$$= \ln |x^b - 1| - \ln |x^a - 1|, \quad (178)$$

$$= \ln |(1+x')^b - 1| - \ln |(1+x')^a - 1|, \quad (179)$$

$$\underset{x' \rightarrow 0}{=} \ln |bx'' + o(x')| - \ln |ax' + o(x')|, \quad (180)$$

$$\underset{x' \rightarrow 0}{=} \ln(b) + \ln(x') + o(1) - [\ln(a) + \ln(x') + o(1)], \quad (181)$$

$$\underset{x' \rightarrow 0}{=} \ln \left( \frac{b}{a} \right) + o(1) \xrightarrow{x' \rightarrow 0} \ln \left( \frac{a}{b} \right). \quad (182)$$

D'où le résultat. ■

**Solution 28.**

1. Soit  $n \geq 1$ , on a

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f. \quad (183)$$



Par convexité, on a

$$\varphi \left( \frac{1}{b-a} S_n \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi \left( f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right) \right), \quad (184)$$

donc en passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$ , par continuité, on a

$$\boxed{\varphi \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt.} \quad (185)$$

2. Soit  $c \in ]a, b[$ . En cas d'égalité dans ce qui précède, on a

$$\varphi \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right) = \varphi \left( \frac{c-a}{b-a} \frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt + \frac{b-c}{b-a} \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt \right), \quad (186)$$

$$\leq \frac{c-a}{b-a} \varphi \left( \frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt \right) + \frac{b-c}{b-a} \varphi \left( \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt \right), \quad (187)$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \left( \int_a^c \varphi \circ f(t) dt + \int_c^b \varphi \circ f(t) dt \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt, \quad (188)$$

par convexité et par ce qui précède. Par hypothèse, on a égalité partout, Par stricte convexité, on a

$$\frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt = \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt, \quad (189)$$

d'où  $(b-c) \int_a^c g(t) dt = (c-a) \int_c^b f(t) dt$ . En dérivant par rapport à  $c$ , on obtient

$$(b-a)f(c) - \int_a^c f(t) dt = -(c-a)f(c) + \int_c^b f(t) dt, \quad (190)$$

soit  $(b-a)f(c) = \int_c^b f(t) dt$  et  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$  pour tout  $c \in ]a, b[$ . Donc  $f$  est constante sur  $[a, b]$ . ■

**Remarque 13.** Pour la première question, on aurait aussi pu passer par des fonctions en escaliers qui converge uniformément vers  $f$ .

**Solution 29.** Si  $f = 0$ , ça marche. Sinon, il existe  $y_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(y_0) \neq 0$  et donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)} \int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t) dt. \quad (191)$$

Par récurrence,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  (d'après l'expression) et si  $f$  est  $\mathcal{C}^k$ , alors elle est  $\mathcal{C}^{k+1}$ , donc  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . Par ailleurs,  $f(y_0)f(-x) = -f(y_0)f(y)$  donc  $f$  est impaire. On dérive par rapport à  $x$  :  $f(x+y) - f(x-y) = f'(x)f(y)$ , et en dérivant à nouveau par rapport à  $x$ , on a  $f'(x+y) - f'(x-y) = f''(x)f(y)$ .

Même chose par rapport à  $y$  :  $f(x+y) - f(x-y) = f(x)f'(y)$  puis  $f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$ . On pose alors  $\alpha = \frac{f''(y_0)}{f(y_0)}$ , on a  $f''(x) - \alpha f(x) = 0$ .

Si  $\alpha = 0$ , comme  $f$  est impaire, on a  $f(x) = ax$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et en reportant, on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt = a \left[ \frac{u^2}{2} \right]_{x-y}^{x+y} = 2axy. \quad (192)$$

Or  $f(x)f(y) = a^2xy$  donc ou bien  $a = 0$ , ce qui est exclu, ou bien  $a = 2$ .

Si  $\alpha > 0$ , on a  $f(x) = a_1 \sinh(\sqrt{\alpha}x)$ . En reportant, on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt = \frac{2a_1}{\sqrt{\alpha}} \sinh(\sqrt{\alpha}x) \sinh(\sqrt{\alpha}y), \quad (193)$$

et  $f(x) = f(y) = a_1^2 \sinh(\sqrt{\alpha}x) \sinh(\sqrt{\alpha}y)$  d'où  $a_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ .

Si  $\alpha < 0$ , on trouve  $f(x) = a_2 \sin(\sqrt{-\alpha}x)$  avec  $a_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}$ . ■

**Solution 30.** Soit  $f$  une fonction constante égale à  $c$  sur  $[a, b]$ . On a alors  $I_n = (b-a)^{\frac{1}{n}} |c| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |c|$ .

Plus généralement, on a

$$I_n \leq \left( \int_a^b \|f\|_\infty^n \right)^{\frac{1}{n}} = (b-a)^{\frac{1}{n}} \|f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty. \quad (194)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ , on a  $I_n \leq \|f\|_\infty + \varepsilon$ .  $|f|$  est continue sur le compact  $[a, b]$ , donc il existe  $t_0 \in [a, b]$  tel que  $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$ . Par continuité de  $|f|$ , il existe  $(c, d) \in [a, b]^2$  avec  $c < d$  tel que pour tout  $t \in [c, d]$ , on ait  $|f(t)| \geq \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$ .

On a alors

$$\int_a^b |f|^n \geq \int_c^d |f|^n \geq (d-c) \left( \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right)^n, \quad (195)$$

donc

$$I_n \geq \left( \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right) (d-c)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (196)$$

Il existe donc  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_2$ , on a  $I_n \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ . Donc pour tout  $n \geq \max(N_1, N_2)$ , on a

$$\|f\|_\infty - \varepsilon \leq I_n \leq \|f\|_\infty + \varepsilon, \quad (197)$$

donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \|f\|_\infty.} \quad (198)$$

■

**Remarque 14.** Soit  $u_n = I_n^n$  avec  $f$  continue non nulle. On a  $u_n > 0$  et  $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|f\|$ . Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à  $|f|^{\frac{n}{2}}$  et  $|f|^{\frac{n}{2}+1}$ , on a

$$0 < u_{n+1} = \int_a^b |f|^{n+1} \leq \sqrt{u_n} \sqrt{u_n + 2} \quad (199)$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}. \quad (200)$$

$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 0}$  est croissante et strictement positive, donc converge vers  $l \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$ . On a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(l). \quad (201)$$

D'après le théorème de Césaro, on a donc

$$\frac{\ln(u_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(l), \quad (202)$$

d'où  $\ln\left(u_n^{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln \|f\|_\infty = \ln(l)$  par unicité de la limite.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \|f\|_\infty. \quad (203)$$

### Solution 31.

1. Pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ , comme  $\rho \neq 1$ , on a  $e^{it} \neq \rho e^{i\theta}$ , donc  $t \mapsto |e^{it} - \rho e^{i\theta}| > 0$  et  $t \mapsto \ln |e^{it} - \rho e^{i\theta}|$  est continue,  $2\pi$ -périodique sur  $[-\pi, \pi]$  donc  $F(\rho, \theta)$  existe.
2. On a

$$F(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |e^{i(t-\theta)} - \rho| dt = \int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} \ln |e^{iu} - \rho| du, \quad (204)$$

et comme l'intégrande est une fonction  $2\pi$ -périodique,

$$F(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} \ln |e^{iu} - \rho| du, \quad (205)$$

est indépendant de  $\theta$ .

3. Soit  $n \geq 1$ , on a

$$S_n = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - \rho \right| = \frac{2\pi}{n} \ln \left( \left| \prod_{k=0}^{n-1} \left( \rho - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \right| \right) = \frac{2\pi}{n} \ln (|\rho^n - 1|). \quad (206)$$

Si  $\rho > 1$ , on a

$$S_n = \frac{2\pi}{n} \ln(\rho^n - 1), \quad (207)$$

$$= \frac{2\pi}{n} \left[ \ln(\rho^n) + \ln \left( 1 - \left( \frac{1}{\rho} \right)^n \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\pi \ln(\rho). \quad (208)$$

Donc  $F(\rho, \theta) = 2\pi \ln(\rho)$ .

Si  $\rho < 1$ ,  $S_n = \frac{2\pi}{n} \ln(1 - \rho^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $F(\rho, \theta) = 0$ .

■

**Remarque 15.** On a

$$F(\rho, 0) = \int_0^{2\pi} \ln |\cos(u) - \rho + i \sin(u)| \, du, \quad (209)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(\rho^2 - 2\rho \cos(u) + 1) \, du, \quad (210)$$

$$= 2\pi \ln(\rho) + F\left(\frac{1}{\rho}, 0\right). \quad (211)$$

**Remarque 16.** On peut se demander si l'on a convergence de  $F(1, 0) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(2(1 - \cos(u))) \, du$ . On vérifie que

$$|\ln(2(1 - \cos(u)))| \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 2 |\ln u| = \underset{u \rightarrow 0}{o} \left( \frac{1}{\sqrt{u}} \right). \quad (212)$$

Donc  $F(1, 0)$  converge. Pour le calcul, on a

$$2F(1, 0) = 2\pi \ln(2) + 2 \int_0^{\pi} \ln(1 - \cos(u)) \, du, \quad (213)$$

$$= 2\pi \ln(2) + 4 \int_0^{\pi} \ln \left( \sin \left( \frac{u}{2} \right) \right) \, du, \quad (214)$$

$$= 2\pi \ln(2) + 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(v)) \, dv. \quad (215)$$

D'après un exercice précédent, l'intégrale vaut  $-\frac{\pi}{2} \ln(2)$  et finalement  $F(1, 0) = 0$ .

**Solution 32.** Toutes les intégrales existent car les fonctions sont à support compact.

1. Montrons la contraposée. Soit  $\delta \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\delta) \neq 0$ . On suppose que  $f(\delta) > 0$ . Par continuité, il existe  $\eta > 0$  tel que  $f \geq 0$  sur  $[\delta - \eta, \delta + \eta]$ .  $f \times \varphi$  est continue sur  $[\delta - \eta, \delta + \eta]$ , positive et  $(f\varphi)(\delta) > 0$  donc  $\int_{\mathbb{R}} f\varphi > 0$  (en choisissant  $\varphi \geq 0$  définie sur le support  $[\delta - \eta, \delta + \eta]$ ).

2. Montrons un petit lemme : si  $\psi \in C_0$ , il existe  $\varphi \in C_1$  tel que  $\psi = \varphi'$  si et seulement si  $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$ . Pour le sens direct, on a  $\int_{\mathbb{R}} \psi = \int_{\mathbb{R}} \varphi' = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$ . Pour le sens indirect, on définit  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi$  (possible car  $\psi \in C_0$ ).  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $\varphi' = \psi$ .  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $\varphi' = \psi$ . Soit  $A \geq 0$  tel que pour tout  $|t| \geq A$ , on a  $\psi(t) = 0$ . Alors pour tout  $t \leq -A$ , on a  $\varphi(t) = 0$  et pour tout  $t \geq A$ ,  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \psi = \int_{-A}^t \psi = 0$ . Donc  $\varphi$  est à support compact.

Pour montrer le résultat, montrons la contraposée. Supposons  $f$  non constante, il existe  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  distincts tel que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $f - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ , on peut supposer que  $f(x_2) = -f(x_1)$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t \in [x_1 - \eta, x_1 + \eta]$ ,  $f(t) \geq 0$  et pour tout  $t \in [x_2 - \eta, x_2 + \eta]$ ,  $f(t) \leq 0$ .

On a  $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$ . On pose  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \psi(x) dx$ . Alors  $\varphi \in C_1$  et  $\int_{\mathbb{R}} f \varphi' > 0$ .

3. Soit  $G$  une primitive de  $g$ . On a alors, pour tout  $\varphi \in C_1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} g \varphi = [G \varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} G \varphi' = \int_{\mathbb{R}} f \varphi'. \quad (216)$$

D'après ce qui précède, on a, pour tout  $\varphi \in C_1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} (f + G) \varphi' = 0$  et donc  $f = -G$  à une constante près.

■

**Solution 33.** On note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \end{array} \quad (217)$$

$f$  est continue, tend vers 1 en 0 et  $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc  $I$  existe.

Soit  $\varepsilon > 0$ . On a

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt, \quad (218)$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (219)$$

$$= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (220)$$

La fonction  $\frac{e^{-t}-1}{t}$  tend vers -1 quand  $t \rightarrow 0$ , donc elle est bornée au voisinage de 0 et est continue. Donc

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (221)$$

donc

$$I = \ln(2). \quad (222)$$

On note maintenant  $f$  la fonction intégrande de  $J$ .  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \quad (223)$$

et

$$\int_1^X \frac{\cos(t)}{t} dt = \underbrace{\left[ \frac{\sin(t)}{t} \right]_1^X}_{\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} -\sin(1)} + \int_1^X \frac{\sin(t)}{t^2} dt, \quad (224)$$

et l'intégrale de droite converge absolument. Donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$  converge, et c'est donc aussi le cas pour  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ . Donc  $J$  existe.

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $X \geq \varepsilon$ , on a

$$\int_\varepsilon^X \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} dt = \int_\varepsilon^X \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_\varepsilon^X \frac{\cos(2t)}{t} dt, \quad (225)$$

$$= \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_X^{2X} \frac{\cos(t)}{t} dt. \quad (226)$$

La deuxième intégrale tend vers 0 quand  $X \rightarrow +\infty$  (car l'intégrale est semi-convergente), et de même, on a  $\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)-1}{t} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  donc

$J = \ln(2).$

(227)

■

**Remarque 17.** Généralement, pour  $a < b$  et  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, dérivable en 0 et telle que  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  converge. Alors on a  $f(u) = f(0) + uf'(0) + o_{u \rightarrow 0}(u)$  et

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt, \quad (228)$$

existe. En notant  $g$  la fonction intégrande,  $g$  tend vers  $(b-a)f'(0)$  en 0. Et en séparant pour  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(0) \ln \left( \frac{b}{a} \right). \quad (229)$$

**Solution 34.**  $f$  est continue par morceaux, positive. On a  $0 \leq f \leq 2$  donc  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . On écrit

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{t} - \frac{k}{k(k+1)}, \quad (230)$$

et en prenant les sommes partielles et en passant à la limite, on trouve

$I = 1 - \gamma.$

(231)

■

**Solution 35.** On note

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{e^t - 1} \end{aligned} \quad (232)$$

$g$  est continue positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  / Donc  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt, \quad (233)$$

$$= [\ln(1 - e^{-t})]_x^{+\infty}, \quad (234)$$

$$= -\ln(1 - e^{-x}). \quad (235)$$

$f$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On a  $f(x) = -\ln(x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . D'où l'existence de  $I$ . On pose  $u = e^{-x}$  soit  $x = -\ln(u)$  et  $dx = -\frac{du}{u}$ . C'est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $]0, 1[$ . On a alors

$$I = -\int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du = \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du. \quad (236)$$

On pose  $v = 1 - u$  pour avoir

$$I = \int_0^1 \frac{-\ln(v)}{1-v} dv. \quad (237)$$

Pour  $v \in ]0, 1[$ , on développe

$$\frac{-\ln(v)}{1-v} = \sum_{k=0}^{+\infty} -v^k \ln(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(v). \quad (238)$$

$f_k$  est positive intégrable sur  $]0, 1[$ .

On forme  $u_k = \int_0^1 |f_k(t)| dt$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $u_k = \int_0^1 -t^k \ln(t) dt = \frac{1}{(k+1)^2}$ . Donc  $\sum u_k$  converge et on peut intervertir. Finalement, on a

$$I = \frac{\pi^2}{6}.$$

(239)

■

**Remarque 18.** On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée à  $(\sum_{k=0}^n f_k)$  car les  $f_k$  sont positifs.

**Remarque 19.** On a

$$f(x) = \underbrace{\int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1}}_{\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t} dt} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad (240)$$

car la fonction est positive, et

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{x^2} \right). \quad (241)$$

### Solution 36.

1. On pose  $f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ , continue positive sur  $[-n, +\infty[$ .  $I_n$  est donc bien définie. On pose  $u = t + n$ , et alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n^n} e^{-u} e^n du, \quad (242)$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du, \quad (243)$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \Gamma(n+1), \quad (244)$$

$$= \frac{e^n}{n^n} n!. \quad (245)$$

2. On pose  $t = \sqrt{n}u$  et on a

$$J_n = \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{n \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}u} du. \quad (246)$$

On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f_n(u) = e^{n \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}u}$  sur  $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$  et 0 ailleurs.  $f_n$  est continue par morceaux (intégrable) sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $u \in \mathbb{R}$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $\sqrt{n} \geq |u|$ . Alors pour tout  $n \geq N_0$ , on a

$$f_n(u) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n \left( \frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right) - \sqrt{n}u}, \quad (247)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-\frac{u^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (248)$$

Ainsi, on a convergence simple de  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $f(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ .

C'est un cas particulier où trouver la dominante (pour appliquer le théorème de convergence dominée) est difficile. On propose  $\varphi(u) = e^{-\frac{u^2}{4}}$  (plus grand que  $f$  et toujours intégrable). Soit  $n \geq 1$  et  $u \in ]-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ , soit

$$g_n(u) = n \ln \left( 1 + \frac{u}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{n}u - \left( -\frac{u^2}{4} \right), \quad (249)$$

dérivable sur  $] -\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ . On a

$$g'_n(u) = \frac{-\frac{u}{2} \left( 1 - \frac{u}{\sqrt{n}} \right)}{1 + \frac{u}{\sqrt{n}}}, \quad (250)$$



donc  $g'_n \leq 0$  si  $u \geq 0$  et  $g_n > 0$  si  $u < 0$ . Comme  $g_n(0) = 0$ , on a  $g_n(u) \leq 0$  pour tout  $u \in ]-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$  et donc pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq f_n(u) \leq e^{-\frac{u^2}{4}}$ .

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\boxed{\frac{J_n}{\sqrt{n}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.} \quad (251)$$

3. On pose pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$K_n = \int_{-n}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt, \quad (252)$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \int_{2n}^{+\infty} u^n e^{-u} du. \quad (253)$$

On écrit  $u^n e^{-u} = u^n e^{-\frac{u}{2}} e^{-\frac{u}{2}} = h(u) e^{-\frac{u}{2}}$ . Alors  $h$  est dérivable sur  $]2n, +\infty[$  et  $h'(u) = u^{n-1} \left(n - \frac{u}{2}\right) e^{-\frac{u}{2}}$  donc

$$0 \leq h(u) \leq (2n)^n e^{-n}. \quad (254)$$

Donc

$$K_n \leq 2^n \int_{2n}^{+\infty} e^{-\frac{u}{2}} du = 2^n \times 2e^{-n}. \quad (255)$$

Or  $e > 2$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$ . Donc  $K_n = o_{n \rightarrow +\infty}(I_n)$  et  $I_n = J_n + K_n$  donc  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} J_n$  et

$$\boxed{n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}.} \quad (256)$$

■

### Solution 37.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f_x(t) = O_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et  $f_x(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{x^2}{2}$  donc  $I(x)$  est bien définie.
2. Pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto f_x(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout  $a \neq 0$ , on a

$$|\cos(a) - 1| = |\cos(a) - \cos(0) - a \cos'(0)| \leq \frac{a^2}{2} \sup_{[0,a]} |\cos''| \leq \frac{a^2}{2}. \quad (257)$$

Donc  $|1 - \cos(tx)| \leq \frac{t^2 x^2}{2}$ . Ainsi, pour tout  $t > 0$ , on a  $|f_x(t)| \leq \frac{x^2}{2} e^{-t}$ . Fixons  $a \geq 0$ , on a pour tout  $x \in [-a, a]$ , pour tout  $t > 0$ ,  $|f_x(t)| \leq \frac{a^2}{2} e^{-t}$ , fonction indépendante de  $x$  et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

D'après le théorème de continuité,  $I$  est continue sur  $[-a, a]$ , pour tout  $a \geq 0$ , donc sur  $\mathbb{R}$ . On a  $\frac{\partial f_x}{\partial x}(t) = \frac{\sin(tx)}{t}e^{-t}$ ,  $\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}(t) = \cos(tx)e^{-t}$ . Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin(u)| \leq |u|$  donc pour tout  $t > 0$ , pour tout  $x \in [-a, a]$ ,

$$\left| \frac{\partial f_x}{\partial x}(t) \right| \leq |x|e^{-t} \leq ae^{-t}, \quad (258)$$

$$\left| \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}(t) \right| \leq e^{-t}. \quad (259)$$

Donc d'après le théorème de dérivation,  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et on a

$$I''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t} dt, \quad (260)$$

$$= \Re \left( \int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t} dt \right), \quad (261)$$

$$= \Re \left( \frac{1}{1-ix} \right), \quad (262)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}. \quad (263)$$

Donc  $I'(x) = \lambda + \arctan(x)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Comme  $I'(0) = 0$ ,  $I'(x) = \arctan(x)$ . On a  $I(0) = 0$  donc

$$I(x) = \int_0^x \arctan(u) du, \quad (264)$$

$$= [u \arctan(u)]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2} du, \quad (265)$$

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad (266)$$

■

**Remarque 20.** En posant  $v = xt$  pour  $x > 0$ , on a

$$I(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(v)}{v^2} e^{-\frac{v}{x}} dv, \quad (267)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(v)}{v^2} dv = \frac{\pi}{2}, \quad (268)$$

et par intégration par parties, cette intégrale vaut  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv$ . C'est une autre preuve de l'intégrale de Dirichlet.

**Solution 38.** Soit  $x \geq 0$ ,  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$  définie continue sur  $\mathbb{R}$ . On a

$$\int_x^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \underbrace{\left[ \frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_x^X}_{\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x}} + \int_x^X \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt. \quad (269)$$

L'intégrale est absolument convergente, donc  $f(x)$  est définie et on a

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt. \quad (270)$$

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$ . Soit  $X > 0$  fixé, on a

$$\int_0^X f(x) dx = [xf(x)]_0^X - \int_0^X f'(x) x dx, \quad (271)$$

$$= Xf(X) + \int_0^X \sin(x) dx, \quad (272)$$

$$= Xf(X) + (1 - \cos(X)), \quad (273)$$

$$= X \int_X^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt, \quad (274)$$

$$= 1 - X \int_X^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt. \quad (275)$$

Par intégrations par parties, on a

$$\int_X^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \left[ \frac{1}{t^2} \sin(t) \right]_X^{+\infty} + \int_X^{+\infty} \frac{2}{t^3} \sin(t) dt, \quad (276)$$

$$= -\frac{\sin(X)}{X^2} + \int_X^{+\infty} \frac{2 \sin(t)}{t^3} dt, \quad (277)$$

$$= O_{X \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{X^2} \right), \quad (278)$$

car la deuxième intégrale est majorée par  $\int_X^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt = \frac{1}{X^2}$ . Finalement, on a

$$\int_0^X f(x) dx = 1 + O_{X \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{X} \right), \quad (279)$$

donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1.} \quad (280)$$

■

**Solution 39.** Définissons  $f_h$  pour  $h > 0$  par  $f_h(t) = f(nh)$  si  $t \in [nh, (n+1)h[$  ( $n \lfloor \frac{t}{h} \rfloor$ ). Pour  $h$  fixé,  $f(nh) = O_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^2})$  donc  $\phi(h)$  est bien définie.  $f_h$  est continue par morceaux et  $f_h(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$  donc  $f_h$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\phi(h) = \int_0^{+\infty} f_h(t) dt. \quad (281)$$

Soit  $t$  fixé, on a  $\lim_{h \rightarrow 0^+} h \lfloor \frac{t}{h} \rfloor = t$ . Donc par continuité de  $f$ ,  $f_h(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(t)$ .

On sait qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x > 0$ ,  $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ . Donc

$$|f_h(t)| \leq \frac{M}{(h \lfloor \frac{t}{h} \rfloor)^2} \leq \frac{M}{(t-h)^2}. \quad (282)$$

On s'impose  $h < 1$ . Dans ce cas, pour tout  $t > 2$ ,  $|f_h(t)| \leq \frac{M}{(t-1)^2}$  est intégrable sur  $[2, +\infty[$  et indépendant de  $h$ . Pour tout  $t \in [0, 2]$ ,  $|f_h(t)| \leq \|f\|_\infty$  intégrable sur  $[0, 2]$  et indépendant de  $h$ .

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \|f\|_\infty & \text{si } t \in [0, 2], \\ \frac{M}{(t-1)^2} & \text{si } t > 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (283)$$

$\varphi$  est continue par morceaux intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et indépendante de  $h$ . Donc, par convergence dominée,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = \int_0^{+\infty} f(t) dt. \quad (284)$$

■

**Solution 40.**  $f$  est impaire donc on se limite à  $x > 0$ . On pose  $g(x, t)$  l'intégrande.  $t \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $g(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$  et  $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{(x-1)t}}{2t}$ , donc  $t \mapsto g(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $x < 1$ . Donc le domaine de définition est  $] -1, 1[$ . Enfin,  $x \mapsto g(x, t)$  est  $\mathcal{C}^\infty$ .

On a  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \cosh(xt)e^{-t} = \frac{e^{(x-1)t} + e^{-(x+1)t}}{2}$ . Fixons  $a \in [0, 1[$ , soit  $x \in [0, a]$ . Si  $t \geq 1$ , on a  $0 \leq \sinh(xt) \leq \frac{e^{xt}}{2}$  et

$$0 \leq g(x, t) \leq \frac{e^{(x-1)t}}{2t} \leq \frac{e^{(a-1)t}}{2t}. \quad (285)$$

Par ailleurs,  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sinh(u)}{u} = 1$ , donc il existe  $M \geq 0$  tel que si  $|u| \leq a$ ,  $\left| \frac{\sinh(u)}{u} \right| \leq M$ . Si  $t \in ]0, 1]$ ,  $xt \in ]0, a]$ ,  $0 \leq g(x, t) \leq M_a$ . En définissant

$$\begin{aligned} \phi_0 : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \begin{cases} M_a & \text{si } t \in ]0, 1], \\ \frac{e^{(a-1)t}}{2t} & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (286)$$

$\phi_0$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $|g(x, t)| \leq \phi_0(t)$ . Or  $\sinh$  est croissante et  $|g(x, t)| \leq \frac{\sinh(at)}{t} e^{-t}$ , intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par ailleurs,  $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \leq \cosh(at) e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $a < 1$ . D'après le théorème de continuité dérivabilité,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, a]$  pour tout  $a < 1$ , donc sur  $[0, 1[$ .

Alors

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \cosh(xt) e^{-t} dt, \quad (287)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{(x-1)t} + e^{-(x+1)t}) dt, \quad (288)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} \right). \quad (289)$$

Comme  $f(0) = 0$ , pour  $x \in [0, 1[$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  et si  $x \in ]-1, 0]$ ,  $f(x) = -f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ . ■

**Solution 41.** On a  $|f(x, t)| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et est équivalent à  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  en 0. Donc  $F$  existe et est continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \sqrt{t} e^{-t}, \quad (290)$$

est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Donc  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t} e^{t(ix-1)} dt, \quad (291)$$

$$= \left[ \frac{i\sqrt{t} e^{t(ix-1)}}{ix-1} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{ie^{t(ix-1)}}{2\sqrt{t}(ix-1)} dt, \quad (292)$$

$$= -\frac{i}{2(ix-1)} F(x). \quad (293)$$

On a

$$\frac{i}{2(ix-1)} = \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{i}{2(x^2+1)}, \quad (294)$$

donc

$$F(x) = A \exp \left( -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \arctan(x) \right). \quad (295)$$

Comme

$$F(0) = A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}, \quad (296)$$

on a

$$F(x) = \sqrt{\pi} \exp \left( -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \arctan(x) \right). \quad (297)$$

■

**Solution 42.**

1. On a

$$\left| \widehat{f}(\nu) e^{i\nu x} e^{-\lambda|\nu|} \right| \leq \left| \widehat{f}(\nu) \right|. \quad (298)$$

Donc  $g_x$  est bien définie. On pose

$$h(t, \nu) = f(t) e^{i\nu(x-t)} e^{-\lambda|\nu|}. \quad (299)$$

On a

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \nu) d\nu \right) dt, \quad (300)$$

et comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t, \nu)| dt d\nu = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|\nu|} d\nu \times \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty, \quad (301)$$

d'après le théorème de Fubini,

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu(x-t)} e^{-\lambda|\nu|} d\nu \right) f(t) dt, \quad (302)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{i\nu(x-t)} e^{\lambda\nu} d\nu + \int_0^{+\infty} e^{i\nu(x-t)} e^{-\lambda\nu} d\nu \right) f(t) dt, \quad (303)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\lambda - i(t-x)} + \frac{1}{\lambda - i(x-t)} \right) f(t) dt, \quad (304)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\lambda f(t)}{\lambda^2 + (t-x)^2} dt. \quad (305)$$

On pose  $t' = t - x$  et on a bien

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\lambda f(t+x)}{\lambda^2 + t^2} dt.$$

(306)

2. On pose  $u = \frac{t}{\lambda}$  pour  $\lambda > 0$ . Alors

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda u + x)}{1 + u^2} du, \quad (307)$$

et pour  $u$  fixé,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2f(\lambda u + x)}{1 + u^2} = \frac{2f(x)}{1 + u^2}$  par continuité de  $f$ . Comme

$$\left| \frac{2f(\lambda u + x)}{1 + u^2} \right| \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{1 + u^2}, \quad (308)$$

fonction de  $u$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  indépendante de  $\lambda$ . Par le théorème de continuité, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2f(x)}{1 + u^2} du = f(x).$$

(309)

3. Pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \mapsto \widehat{f}(\nu)e^{i\nu x}e^{-\lambda|\nu|}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et on a

$$\left| \widehat{f}(\nu)e^{i\nu x}e^{-\lambda|\nu|} \right| \leq \left| \widehat{f}(\nu) \right|, \quad (310)$$

fonction indépendante de  $\lambda$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Par le théorème de continuité,  $g_x$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , donc en 0. Ainsi,

$$g_x(0) = f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)e^{i\nu x} d\nu. \quad (311)$$

■

**Remarque 21.** En exemple, soit  $a > 0$  et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-a|x|} \end{aligned} \quad (312)$$

$f$  est continue, intégrable et bornée. On a

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\nu t} dt, \quad (313)$$

$$= \frac{2a}{a^2 + \nu^2}. \quad (314)$$

$\widehat{f}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$2\pi e^{-a|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{2a}{a^2 + \nu^2} e^{i\nu x} d\nu. \quad (315)$$

**Remarque 22.** Si  $\widehat{f} = 0$ , elle est intégrable et d'après la formule, on a  $f = 0$ .

**Solution 43.**

1.  $D_n = 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kt)$  est paire,  $2\pi$ -périodique et  $\mathcal{C}^\infty$ . Sa moyenne est 1, et comme pour  $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $e^{it} \neq 1$ , on a

$$D_n(t) = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}, \quad (316)$$

$$= e^{-int} \left( \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} \right), \quad (317)$$

$$= e^{-int} \frac{e^{i\frac{(2n+1)t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \left( \frac{e^{-i\frac{(2n+1)t}{2}} - e^{i\frac{(2n+1)t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \right), \quad (318)$$

$$= e^{-int} e^{int} \left( \frac{-2i \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right), \quad (319)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \quad (320)$$

2. On pose  $u = \frac{2t}{2n+1}$ .  
3. Elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \pi]$ . Pour tout  $u > 0$ ,

$$\varphi(u) = \frac{\frac{u}{2} - \sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{u}{2}\right)^3}{\left(\frac{u^2}{4}\right)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0. \quad (321)$$

On pose  $\varphi(0) = 0$ .  $\varphi$  ainsi prolongée est continue sur  $[0, 2\pi]$ . On a

$$\varphi'(u) = -\frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{2}{u^2}, \quad (322)$$

$$= \frac{4 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) - u^2 \cos\left(\frac{u}{2}\right)}{2u^2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}, \quad (323)$$

$$\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^4 \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{u^4}{2}\right)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{1}{12}. \quad (324)$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée,  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

4. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du &= \left[ -\frac{2}{n+1} \cos\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \varphi(u) \right]_0^\pi \\ &\quad + \frac{2}{n+1} \int_0^\pi \varphi'(u) \cos\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du, \end{aligned} \quad (325)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (326)$$

car  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont bornées. De plus,

$$\int_0^\pi \varphi(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du = \int_0^\pi D_n(u) du - \int_0^\pi \frac{2 \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{u} du, \quad (327)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi D_n(u) du - 2u_n, \quad (328)$$

$$= \pi - 2u_n. \quad (329)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

(330)

■

**Remarque 23.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  intégrable sur un intervalle  $I$ . On a  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_I f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$ .



En effet, soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $[a, b] \subset I$  tel que  $\int_{I \setminus [a, b]} |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors

$$\left| \int_I f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_{I \setminus [a, b]} |f| + \left| \int_{[a, b]} f(t) e^{i\lambda t} dt \right|, \quad (331)$$

et le deuxième terme tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ , donc inférieur à  $\frac{\varepsilon}{2}$  pour  $\lambda$  suffisamment grand. En particulier, si  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on a  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \hat{f}(\lambda) = 0$ .

#### Solution 44.

1.  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a  $g'(t) = f(t)e^{-at}$ ,  $g(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = Lf(a)$ . Donc  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $X > 0$ , on a

$$\int_0^X f(t) e^{-(a+x)t} dt = [e^{-xt} g(t)]_0^X + x \int_0^X g(t) e^{-xt} dt. \quad (332)$$

Le terme entre crochet tend vers 0 quand  $X \rightarrow +\infty$  car  $x > 0$  et  $|g(t)e^{-xt}| \leq \|g\|_\infty e^{-xt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . Donc  $t \mapsto g(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Donc  $Lf(a+x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-it(a+x)} dt$  existe et vaut  $x \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt$ .

2. On pose  $u = e^{-t}$ ,  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1]$ . On a alors

$$Lf(a+x) = x \int_0^1 g(-\ln(u)) u^{x-1} du. \quad (333)$$

Or  $\lim_{u \rightarrow 0^+} g(-\ln(u)) = Lf(a)$ . On définit

$$\begin{aligned} h : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ u &\mapsto \begin{cases} g(-\ln(u)) & \text{si } u \neq 0, \\ Lf(a) & \text{si } u = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (334)$$

$h$  est continue et  $Lf(a+x) = x \int_0^1 h(u) u^{x-1} du$ . Si pour tout  $x > 0$ ,  $Lf(a+x) = 0$ , on a pour tout  $x > 0$ ,  $\int_0^1 h(u) u^{x-1} du = 0$ . Par combinaison linéaire, pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\int_0^1 \ln(u) P(u) du = 0$ . D'après le théorème de Weierstrass, on prend  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes qui converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $\bar{h}$ . Donc  $\int_0^1 |h|^2 = 0$  donc  $h = 0$ . Ainsi,  $g = 0$  et  $g'(t) = 0 = f(t)e^{-at}$  donc  $f = 0$ . ■

**Remarque 24.** Il suffit qu'il existe  $a_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Lf(a_0 + n) = 0$ .

**Solution 45.** Pour  $x > 0$ ,  $\sum g_n(x)$  est alternée car  $|g_n(x)| = e^{-a_n x}$  est décroissante car  $a_n \leq a_{n+1}$  et tend vers 0 car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ . Donc  $g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} \right| \leq e^{-a_N x}. \quad (335)$$

Soit  $\alpha > 0$ . Alors pour tout  $x \geq \alpha$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} \right| \leq e^{-a_N x} \leq e^{-a_N \alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \quad (336)$$

car  $\alpha > 0$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N = +\infty$ .

Ainsi,  $\sum g_n$  converge uniformément sur  $[\alpha, +\infty[$ , donc  $g$  est continue sur  $[\alpha, +\infty[$  pour tout  $\alpha > 0$  donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, toujours d'après le critère spécial des séries alternées, pour tout  $x > 0$ ,

$$|g(x)| \leq e^{-a_0 x}, \quad (337)$$

fonction de  $x$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car continue et est  $O_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right)$ . Donc  $g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On forme  $u_n = \int_0^{+\infty} |g_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-a_n x} dx = \frac{1}{a_n}$ . On n'est pas sûr que  $\sum \frac{1}{a_n}$  converge. Mais on a

$$0 \leq \sum_{n=0}^N (-1)^n e^{-a_n x} = S_N(x) \leq e^{-a_0 x}, \quad (338)$$

fonction intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} g(x) dx. \quad (339)$$

■

**Solution 46.** Soit  $x > 0$ , notons  $f_n(x) = (-1)^n e^{-a_n x}$  continue.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  est une série alternée. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|f_{n+1}(x)| = e^{-a_{n+1} x} \leq |f_n(x)|$  car  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  et  $x > 0$ . Donc  $S(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue. Soit  $\alpha > 0$ , pour tout  $x \in [\alpha, +\infty[$ ,  $|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)| \leq e^{-a_N x} \leq e^{-a_N \alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  d'après le critère spécial des séries alternées. Il y a donc convergence uniforme sur  $[\alpha, +\infty[$ , donc  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On a  $|S(x)| \leq e^{-a_0 x}$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (encore une fois via le critère spécial des séries alternées). Donc  $S$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Enfin, d'après le critère spécial des séries alternées,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$  existe.

Problème :  $\sum \int |f_n|$  ne converge pas forcément, on ne peut pas appliquer le théorème d'interversion. On le fait donc à la main : pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{n=0}^N \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}. \quad (340)$$

Soit  $R_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)$ . On a  $|R_N(x)| \leq e^{-a_N x} \leq e^{-a_0 x}$  indépendant de  $N$  et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . D'après le théorème de convergence dominée, on peut intervertir, d'où  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) dx = 0$ . ■

**Solution 47.** On a convergence normale de la série, puis on passe par la partie imaginaire de l'exponentielle. On trouve que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3}{10 - 6 \cos(x)}.$$

L'intégrale vaut

$$2 \int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) dx,$$

avec  $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{3^k} \sin(x)$ . On a convergence normale sur  $\mathbb{R}$ , on peut intervertir. On utilise la formule du produit des sinus :  $\sin(k)x \sin(nx) = \frac{1}{2} (\cos(k-n)x - \cos(k+n)x)$ . Ainsi, l'intégrale vaut 0 si  $k \neq n$  et  $\pi$  sinon. On conclut grâce au calcul précédent. ■

**Remarque 25.** Généralement, si  $I_n = \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$  avec  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  et  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < +\infty$ , on peut intervertir par convergence normale le signe  $\sum$  et  $\int$ .