

*Solutions MP/MP**

Séries numériques et familles sommables

Solution 1.

1. On a $b_0 = a_1 = 5, b_1 = a_3 = 13$ et pour $p \geq 2, b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$.

On a donc l'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les deux solutions sont 3 et -1. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$.

On a alors $b_0 = 5 = \lambda + \mu$ et $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$. On trouve alors

$$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}} \quad (1)$$

2. On le montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

3. Si $3^p \leq n < 3^{p+1}$, on a $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$. Alors

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leq \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p} \quad (2)$$

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \quad (3)$$

Soit $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{p_n} \leq \sigma(n) < 3^{p_n+1}$. On a

$$p_n = \lfloor \log_3(\sigma(n)) \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (4)$$

En reportant, on a $\frac{3}{2} \leq \lambda \leq \frac{9}{2}$.

Si $\sigma(n) = 3^n$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \quad (5)$$

Si $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \quad (6)$$

Soit $\mu \in [1, 3[$ et $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n \mu$. Alors

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2\mu} \quad (7)$$

$$\boxed{\text{Donc tout réel compris dans } \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right] \text{ est valeur d'adhérence.}} \quad (8)$$

■

Solution 2.

1.

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - x \end{aligned} \tag{9}$$

est continue, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $l \in [a, b]$ avec $g(l) = 0$, d'où

$$\boxed{f(l) = l} \tag{10}$$

2. On note $A = \{\lambda \mid \lambda \text{ est valeur d'adhérence}\}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que A est non vide. De plus, A est borné car $A \subset [a, b]$. Soit $\lambda = \inf(A)$ et $\mu = \sup(A)$.

Si $\lambda = b$, on a $\mu = b$ et $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$.

Si $\lambda < b$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \notin A$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in]\lambda, \lambda + \varepsilon[\}$ est infini. Par définition, λ est valeur d'adhérence. Donc $\lambda \in A$, et de même $\mu \in A$.

Soit $\nu \in]\lambda, \mu[$ avec $\lambda < \mu$. Si $\nu \notin A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$ est fini. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $x_n \notin]\nu - \varepsilon_0, \nu + \varepsilon_0[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0$. Soit alors $n \geq \max(N_0, N_1)$. Si $x_n \leq \nu - \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \leq \nu - \varepsilon_0$. Si $x_n \geq \nu + \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \geq \nu + \varepsilon_0$. Ceci contredit que λ et μ sont valeur d'adhérence.

Ainsi, $\nu \in A$ et

$$\boxed{[\lambda, \mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}} \tag{11}$$

3. Si (x_n) converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Réciproquement, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, d'après 2., on a $A = [\lambda, \mu]$. On suppose $\lambda < \nu$. Ainsi, $\frac{\lambda + \nu}{2} = \alpha$ est valeur d'adhérence. Donc il existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$ par continuité de f et c'est aussi égale à $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Ainsi,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha} \tag{12}$$

Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda, \mu]$ et $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$, alors pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n = x_{n_0}$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lambda = \mu : (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et a une unique valeur d'adhérence.

$$\boxed{\text{Donc } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}} \tag{13}$$

■

Solution 3. On a $u_n = e^{i2^n \theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ car $l = l^2$ et $|l| = 1$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique au-delà d'un certain rang, il existe $T \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_{n+T} = u_n$. En particulier, $u_{N_0+T} = u_{N_0}$. On veut alors $2^{N_0+T}\theta \equiv 2^{N_0}\theta[2\pi]$. D'où $2^{N_0+T}\theta = 2\theta + 2k\pi$ donc $2^{N_0}(2^T - 1)\theta = 2k\pi$. Donc $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $U_{n+1} = U_n = U_{n^2}$. Comme $|U_n| = 1$, alors $2^n \theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $\frac{\theta}{2\pi}$ est dyadique.

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$ (nombre dyadique). Alors pour tout $n \geq n_0$, $2^n \theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $u_n = u_{n_0} = 1$.

Pour la densité, on prend une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en écrivant successivement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous les paquets de k entiers sont dans $\{0, 1\}^k$. Soit $x \in [0, 1[$ tel que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \quad (14)$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $p_N \in \mathbb{N}$,

$$2^{p_N} \theta = 2\pi \underbrace{(\dots)}_{\in \mathbb{N}} + 2\pi \left(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in [0, \frac{1}{2^N}[} \right) \quad (15)$$

On a alors

$$e^{i2^{p_N} \theta} = e^{i2\pi \left(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \dots \right)} \quad (16)$$

et

$$\left| \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} - x \right| \leq \frac{1}{2^N} \quad (17)$$

D'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_{p_N} = e^{i2\pi x}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans \mathbb{U} . ■

Solution 4. Si $a = 0$ et $b = 0$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou inversement), $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Si $a > 0$ ou $b > 0$, on a

$$u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{e^{\frac{1}{n} \ln(a)} + e^{\frac{1}{n} \ln(b)}}{2}\right)\right) \quad (18)$$

$$= \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{2n} \ln(ab) + \frac{1}{4n^2} (\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad (19)$$

$$= \exp\left(\frac{n}{2} \ln(ab) + \frac{1}{4} (\ln(a)^2 + \ln(b)^2) - \frac{1}{8} \ln(ab)^2 + o(1)\right) \quad (20)$$

Si $ab > 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty} \quad (21)$$

Si $ab < 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0} \quad (22)$$

Si $ab = 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{\frac{1}{2} \ln(a)^2}} \quad (23)$$

■

Solution 5.

1. Soit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 0$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$).

$$J = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid x_k \geq \frac{M}{2} \right\} \quad (24)$$

est fini car $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et est non vide. On définit

$$\varphi(0) = \min \left\{ k \in J \mid x_k = \max\{x_n \mid n \in J\} \right\} \quad (25)$$

Pour tout $n \in J$, $x_{\varphi(0)} \geq x_n$. Si $n \notin J$, $x_n \leq \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$. Ainsi,

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \quad (26)$$

Puis on recommence avec

$$\left\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\}\right\} \quad (27)$$

2. Pour $l = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_N < \varepsilon$. On pose

$$\boxed{I = \{N\}} \quad (28)$$

et on a bien

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leq \varepsilon \quad (29)$$

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^N x_k > A$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$). Donc on peut prendre

$$\boxed{I = \{0, \dots, N\}} \quad (30)$$

Si $l \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < l$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on a $x_n < \varepsilon$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$. Donc il existe un plus petit entier N_1 tel que $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geq l - \varepsilon$. Comme $x_{N_1} < \varepsilon$, on a $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leq l + \varepsilon$. Donc

$$\boxed{I = \{N_0, \dots, N_1\}} \quad (31)$$

■

Solution 6. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2 \quad (32)$$

Montrons que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. D'abord, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$.

Si $l < +\infty$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}$ et donc $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l^2}$ et la série diverge. Donc $l = +\infty$ et comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On observe ensuite que $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$ donc $S_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$. Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{= (S_n - S_{n-1}) S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (33)$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \quad (34)$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{= S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \quad (35)$$

On applique le théorème de Césaro à la suite $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \quad (36)$$

donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$, et comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a bien

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}} \quad (37)$$

Réciproquement, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ avec $u_0 = 1$. On a

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}} \quad (38)$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}} \quad (39)$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1} \quad (40)$$

■

Remarque 1. On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha} \quad (41)$$

Solution 7. Tout d'abord, on montre que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4 \quad (42)$$

en posant

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned} \quad (43)$$

de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$ et on a $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geq 0$ et $f'(0) = 0$. Comme $f(0) = 0$, on a pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$.

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur f , on a

$$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t \in [0,1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leq \cosh(1)} \leq x^4 \quad (44)$$

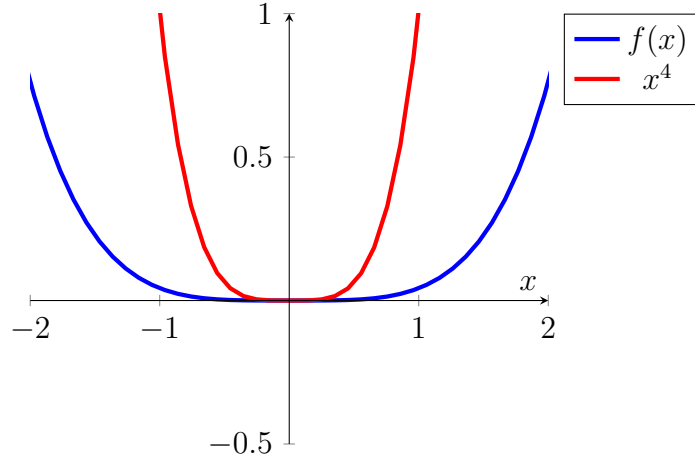


FIGURE 1 $0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^n \left[\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - 1 \right] \quad (45)$$

Ainsi,

$$0 \leq x_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (46)$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1) \quad (47)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}} \quad (48)$$

■

Solution 8. φ est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$.

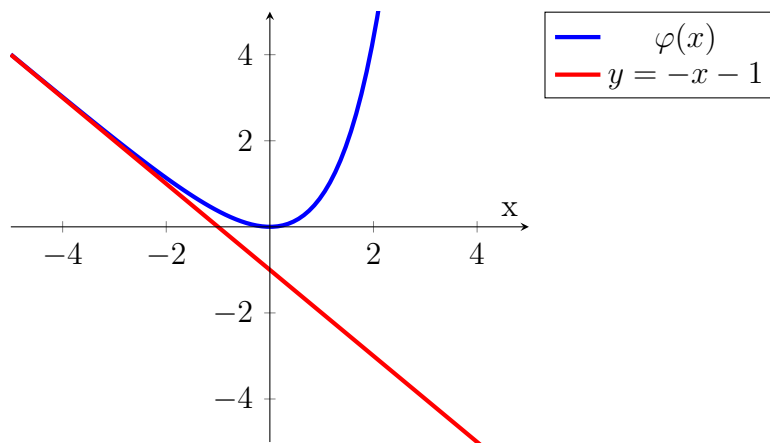


FIGURE 2 $e^x - x - 1 \geq -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$0\varphi(a_n) \leq \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (49)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(a_n) = 0 \quad (50)$$

Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| > \varepsilon$. Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geq \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0 \quad (51)$$

ce qui contredit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(a_n) = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0} \quad (52)$$

et c'est pareil pour b_n et c_n . ■

Solution 9.

1. Soit

$$\begin{aligned} f:]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(1-x) \end{aligned} \quad (53)$$

On a $f(x) \in]0, \frac{1}{4}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \frac{1}{4}]$. Par récurrence, on a donc $u_{n+1} \leq u_n$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Donc v_n est bien définie.

(54)

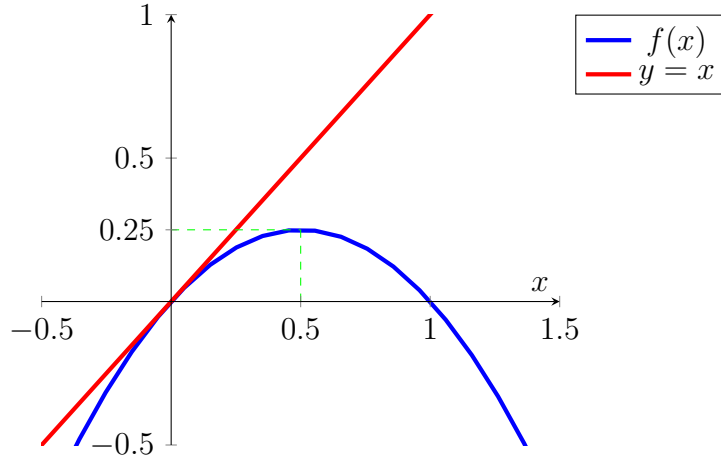


FIGURE 3 $x(1-x) \in]0, \frac{1}{4}]$ pour $x \in]0, 1[$.

2. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{u_n} (1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1) \quad (55)$$

Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. D'après le théorème de Césaro, on a

$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (56)$$

donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} (1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{= o(\frac{1}{n^2})} \quad (57)$$

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (58)$$

et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. En sommant, on a donc

$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o(\ln(n)) \quad (59)$$

On a alors

$$u_n = \frac{1}{n + \ln(n) + o(\ln(n))} \quad (60)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \quad (61)$$

$$= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right) \quad (62)$$

$$= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \alpha_n} \quad (63)$$

α_n est le terme général d'une série à termes positifs convergentes car $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (64)$$

et en sommant,

$$\boxed{v_n = n + \ln(n) + O(1)} \quad (65)$$

et comme montré auparavant,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)} \quad (66)$$

■

Solution 10.

1. Soit

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n - x - n \end{aligned} \quad (67)$$

On a $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 = 0$ si et seulement si

$$x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n \quad (68)$$

$f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. f_n est monotone strictement sur $]\alpha_n, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc il existe un unique } x_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } f_n(x_n) = 0} \quad (69)$$

On a $f_n(1) = -n < 0$ donc $x_n > 1$ et $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ pour $n \geq 3$ (on a $x_2 = 2$). Donc pour $n \geq 3$, $x_n \in]1, 2[$.

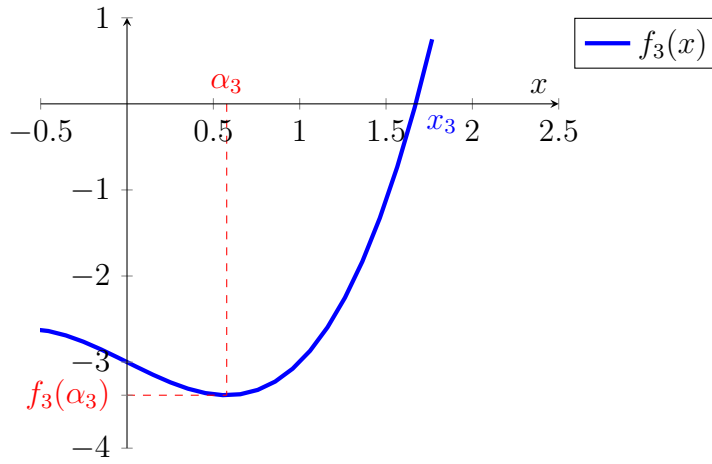


FIGURE 4 $x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur \mathbb{R}_+ .

2. On a $x_n^n = x_n + n \leq 2 + n$ donc

$$1 \leq x_n \leq (2 + n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(2+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (70)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 \quad (71)$$

3. On peut poser $x_n = 1 + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. On a

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n \quad (72)$$

donc

$$n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(1 + \varepsilon_n + n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1 + \varepsilon_n}{n}\right)}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}} \quad (73)$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \quad (74)$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad (75)$$

On a enfin

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n = 1 + n + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad (76)$$

d'où

$$\ln(1 + \varepsilon_n) = \frac{1}{n} \ln(n+1) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad (77)$$

$$= \frac{1}{n} \left[\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \right] \quad (78)$$

$$= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (79)$$

donc

$$1 + \varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right) \quad (80)$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right) \quad (81)$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)} \quad (82)$$

■

Solution 11. On note

$$v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n} \quad (83)$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a$ alors $v_n = a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. De manière générale, on a

$$v_n - a = v_n - a \frac{u_n + \cdots + u_0}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k} (a_k - a)}{u_0 + \cdots + u_n} \quad (84)$$

Ainsi,

$$|u_n - a| \leq \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k} |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \quad (85)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, on note $M = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k - a|$. Soit $n \geq N$, on a

$$|v_n - a| \leq \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k} |a_k - a| + \sum_{k=N}^n u_{n-k} |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \quad (86)$$

$$\leq \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k M}{u_0 + \cdots + u_n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N}^n u_{n-k} \frac{\varepsilon}{2}}{u_0 + \cdots + u_n}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \quad (87)$$

car les u_i sont positifs.

On remarque enfin que

$$\begin{aligned} u_n &= o(u_0 + \cdots + u_n) \\ u_{n-1} &= o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\ &\vdots \\ u_{n-N+1} &= o(u_0 + \cdots + u_n) \end{aligned} \tag{88}$$

Donc

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \tag{89}$$

et il existe $N' \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{90}$$

et donc pour tout $n \geq \max(N, N')$, on a $|v_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et ainsi

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a} \tag{91}$$

■

Solution 12.

1. Pour $n \geq 2$, (iii) donne

$$x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \tag{92}$$

Ainsi,

$$0 \leq x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \tag{93}$$

où l'inégalité est stricte d'après (ii). Pour $n \geq 2$, on a

$$x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2!} \tag{94}$$

donc

$$0 \leq 2x - \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} < 1 \tag{95}$$

Donc $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$. On a ensuite

$$0 \leq n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1 \quad (96)$$

donc

$$a_n = \left\lfloor n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \right\rfloor \quad (97)$$

On a donc bien unicité.

Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus. On a, pour tout $n \geq 2$, on a

$$0 \leq n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1 \quad (98)$$

Or

$$0 - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{1}{(n-1)!} \quad (99)$$

donc

$$a_n \in \{0, \dots, n-1\} \quad (100)$$

et (i) est vérifié.

On a

$$0 \leq x - \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k!} < \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (101)$$

donc (iii) est vérifié, et supposons qu'il existe $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $m \geq n_0 + 1$, on a $a_m = m - 1$. Alors

$$x = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \quad (102)$$

et

$$x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n_0!} \quad (103)$$

donc

$$n_0! \left(x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} \right) = 1 \quad (104)$$

et

$$n_0! \left(x - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_{n_0-1}}{(n_0-1)!} \right) - a_{n_0} = 1 \quad (105)$$

En prenant la partie entière, on a donc $0 = 1$ ce qui est absurde.

Donc (ii) est vérifié.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n = 0$ alors $x \in \mathbb{Q}$.

Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a

$$x = \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n!} \quad (106)$$

si et seulement si

$$a_n = n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \quad (107)$$

si et seulement si

$$n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \in \mathbb{N} \quad (108)$$

ce qui est vrai dès que $n \geq q$. Donc pour tout $n > q$, on a $a_n = 0$ par unicité.

3. Soit $l \in [-1, 1]$. Soit $x \in [0, 1[$ avec

$$x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \quad (109)$$

On a alors

$$n!2\pi x = \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \underbrace{\sum_{k \geq n+2} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{= \varepsilon_n} \quad (110)$$

On a

$$0 \leq \varepsilon_n < \frac{2\pi n!}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (111)$$

Donc

$$\sin(n!2\pi x) = \sin\left(\frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \varepsilon_n\right) \quad (112)$$

et il suffit d'avoir, comme $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin(l)}{2\pi} \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \quad (113)$$

On pose alors

$$a_n = \left\lfloor \frac{n \arcsin(l)}{2\pi} \right\rfloor \quad (114)$$

pour $n \geq 2$ et on a $0 \leq a_n \leq \frac{n}{4} < n-1$ pour tout $n \geq 2$. On a donc le résultat. ■

Remarque 2. Il n'y a pas unicité. Par exemple, pour $l = 0$, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ convient. Plus généralement, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \geq q$, on a

$$\sin\left(n!2\pi\left(x + \frac{p}{q}\right)\right) = \sin(n!2\pi x) \quad (115)$$

Solution 13. Par récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2\ln(1+x) - x \end{aligned} \quad (116)$$

et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2\ln(1+x) \end{aligned} \quad (117)$$

g est dérivable est

$$g'(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (118)$$

donc g est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $l \in]0, +\infty[$ tel que $g(l) = 0$ d'où $f(l) = l$.

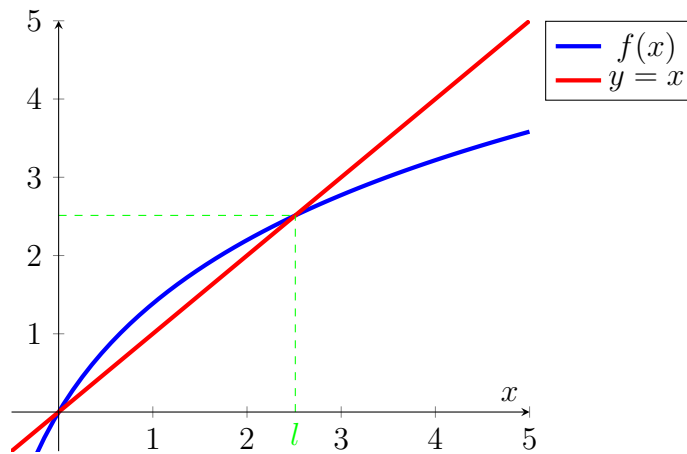


FIGURE 5 $-x \mapsto 2\ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $x \in]0, l]$, on a $x \leq f(x) \leq l$ et pour tout $x > l$, on a $l \leq f(x) \leq x$.

Soit $n \geq 1$. Si $u_n \geq l$ et $u_{n-1} \geq l$, on a $m_n = l$ et $M_n \in \{u_n, u_{n-1}\}$. Il vient donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(f(u_n) + f(u_{n-1})) \geq f(l) = l \quad (119)$$

et

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \leq M_n \quad (120)$$

Donc $m_{n+1} = l = m_n$ et $M_{n+1} \leq M_n$.

Par récurrence, on a pour tout $k \geq n$, $u_k \geq l$ et $(M_k)_{k \geq n}$ converge vers $\lambda \geq l$ (car décroissante et plus grande que l) et $m_k = l$ pour tout $k \geq n$.

De plus pour tout $k \geq n$, on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(f(u_k) + f(u_{k-1})) \leq f(M_k) \quad (121)$$

car f est croissante et donc

$$u_{k+2} \leq f(M_{k+1}) \leq f(M_k) \quad (122)$$

Par passage à la limite, on a $\lambda \leq f(\lambda)$ donc $\lambda = f(\lambda)$ et donc $\lambda = l$. Or pour tout $k \geq n$, on a

$$\underbrace{m_k}_{=l} \leq u_k \leq M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l \quad (123)$$

donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l} \quad (124)$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0-1} \geq l$ et $u_{n_0} \geq l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Or même s'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_1-1} \leq l$ et $u_{n_1} \leq l$, alors on inverse les rôles de M_{n_1} et m_{n_1} .

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n - l)(u_{n+1} - l) \leq 0 \quad (125)$$

Supposons par exemple $u_0 \geq l$ et $u_1 \leq l$. Alors

$$0 \leq u_2 - l \leq \frac{u_0 - l}{2} \quad (126)$$

et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_{2k} - l \leq \frac{u_0 - l}{2^k}$. Donc $u_{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$ et de même $u_{2k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$ (par valeurs inférieures). Donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l} \quad (127)$$

■

Solution 14. Soit $(\theta, \theta') \in [2, 2\pi]^2$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{ipx_n} = e^{i\theta} \quad (128)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{iqx_n} = e^{i\theta'} \quad (129)$$

Soient x, x' deux valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ distinctes. On a

$$\begin{cases} e^{ipx} = e^{i\theta} = e^{ipx'} \\ e^{iqx} = e^{i\theta'} = e^{iqx'} \end{cases} \quad (130)$$

Il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} px = px' + 2k\pi \\ qx = qx' + 2k'\pi \end{cases} \quad (131)$$

et donc $p(x - x') = 2k\pi$ et $q(x - x') = 2k'\pi$ et alors $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence. Comme elle est bornée,

$$\boxed{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}} \quad (132)$$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut prendre

$$\boxed{x_n = n!} \quad (133)$$

On a

$$e^{2i\pi n!} = 1 \quad (134)$$

et

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \quad (135)$$

Si on veut x_n divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut prendre

$$\boxed{x_n = (-1)^n n!} \quad (136)$$

■

Solution 15.

1. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \boxed{\frac{n^k}{k!}} \quad (137)$$

2. On a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k \quad (138)$$

donc

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |z|^k \underbrace{\left| \frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right|}_{\geq 0} \quad (139)$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \frac{|z|^k}{n^k} \quad (140)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \quad (141)$$

3. On sait que

$$\sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e^{|z|} \quad (142)$$

et

$$\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{|z|}{n})} = e^{n(\frac{|z|}{n} + o(\frac{|z|}{n}))} = e^{|z|} e^{o(1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{|z|} \quad (143)$$

En reportant dans la question précédente, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (144)$$

■

Remarque 3. Une autre méthode est d'écrire, pour $z = a + ib$,

$$1 + \frac{z + ib}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i \frac{b}{n} = \rho_n e^{i\theta_n} \quad (145)$$

. On a alors

$$\left|1 + \frac{a + ib}{n}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}} = \rho_n \quad (146)$$

et alors

$$\rho_n^n = \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right|^n \quad (147)$$

$$= e^{\frac{n}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{a}{n} \right)^2 + \frac{b^2}{n^2} \right)} \quad (148)$$

$$= e^{\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \quad (149)$$

$$= e^{a+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a = |e^z| \quad (150)$$

On écrit ensuite

$$1 + \frac{a + ib}{n} = \rho_n \left(\underbrace{\frac{1 + \frac{a}{n}}{\rho_n}}_{= \cos(\theta_n)} + i \underbrace{\frac{b}{n\rho_n}}_{= \sin(\theta_n)} \right) \quad (151)$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n\rho_n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{a}{n}}{\rho_n} = 1 \quad (152)$$

On peut imposer $\theta_n \in] -\pi, \pi]$ et il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\cos(\theta_n) \geq 0$. Pour $n \geq N$, on a alors $\theta_n \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc

$$\theta_n = \arcsin \left(\frac{b}{n\rho_n} \right) \quad (153)$$

et $n\theta_n = n \arcsin \left(\frac{b}{n\rho_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b$. Finalement, on a bien

$$\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = \rho_n^n e^{i n \theta_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a e^{ib} = e^z \quad (154)$$

Solution 16. Pour tout $n \geq 2$, $u_n > 0$. On a

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}}_{<1} u_n \quad (155)$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc converge. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n \underbrace{\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)}_{= v_k} < 0 \quad (156)$$

Ensuite,

$$v_k = -\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{k}} \quad (157)$$

Comme $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0} \quad (158)$$

On a ensuite

$$u_n = \exp \left(\sum_{k=2}^n \left[\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right] \right) \quad (159)$$

et

$$\ln \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O \left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (160)$$

Donc

$$v_k = -\frac{2}{\sqrt{k}} + O \left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (161)$$

Le terme dans le O est le terme générale d'une série absolument convergent donc convergent, on note ce terme α_k . On a alors

$$\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{2}{\sqrt{k}} + \alpha_k \right) = -2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k}_{=C} + o(1) \quad (162)$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \int_2^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \quad (163)$$

Posons

$$w_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad (164)$$

On étudie la série de terme général $w_n - w_{n-1}$. On a

$$w_n - w_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \quad (165)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) \quad (166)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) \quad (167)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} + O \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (168)$$

$$= O \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (169)$$

Donc la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ converge et ainsi $(w_n)_{n \geq 2}$ converge : il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + C' + o(1) \quad (170)$$

On a donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n v_k = -4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1) \quad (171)$$

Ainsi,

$$u_n = \exp(-4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K e^{-4\sqrt{n}} \quad (172)$$

où $K = e^{-2C'+C} > 0$.

Donc

$$u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K^\alpha e^{-4\alpha\sqrt{n}} \quad (173)$$

Si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha \not\rightarrow 0$ donc

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ diverge.}} \quad (174)$$

Si $\alpha > 0$, $u_n^\alpha = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ converge.}} \quad (175)$$

■

Solution 17. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a

$$u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \geq n u_{2n} \geq 0 \quad (176)$$

Si (S_n) converge alors $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n u_{2n} = 0$.

Comme on a $(2n+1)u_{2n} \geq (2n+1)u_{2n+1} \geq 0$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n} = 0$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0 \text{ et donc } u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (177)$$

Si $\{p \in \mathbb{N} | pu_p \geq 1\}$ est infini, alors $u_p \neq o\left(\frac{1}{p}\right)$ donc

$$\boxed{\sum u_p \text{ diverge.}} \quad (178)$$

■

Remarque 4. Ce n'est pas vrai si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, par exemple si $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré et 0 sinon.

Solution 18. 1. C'est une série à termes positifs. On a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (179)$$

Ainsi

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad (180)$$

et donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \quad (181)$$

2. C'est une série à termes positifs. On a

$$u_n \geq \int_1^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(1) dt = \frac{\sin(1)}{n+1} \times \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (182)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \quad (183)$$

3. On écrit

$$\frac{n!}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (-1)^k}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k \quad (184)$$

et

$$\left| \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k \right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (185)$$

d'après le critère spécial des séries alternées.

Donc

$$\sin \left(2\pi \frac{n!}{e} \right) = \sin \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \quad (186)$$

$$= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O \left(\frac{1}{n^2} \right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}} \quad (187)$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (188)$$

4. Si $\alpha \leq 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ et comme $\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \quad (189)$$

Si $\alpha > 1$, $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge.}} \quad (190)$$

Si $\alpha \in]0, 1]$, on écrit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \underbrace{(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow 0}}} \quad (191)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left(1 - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right) \right) \quad (192)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}\right)}_{\substack{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} < 0 \\ \text{terme général} \\ \text{d'une série convergente} \\ \text{ssi } \alpha > \frac{1}{2}}} \quad (193)$$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.} \quad (194)$$

■

Remarque 5. Soit $\alpha \in [0, 1]$ et

$$u_n = \int_0^\alpha t^n \sin(t) dt \geq 0 \quad (195)$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \leq \alpha^{n+1}$, terme général d'une série convergente donc $\sum u_n$ converge.

Si $\alpha = 1$, on utilise

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t \quad (196)$$

Alors $u_n \geq \frac{2}{\pi(n+2)}$, terme générale d'une série divergente donc $\sum u_n$ diverge.

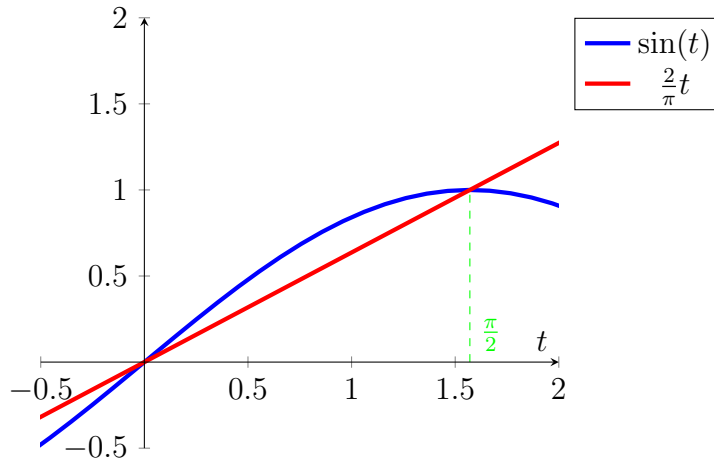


FIGURE 6 – $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solution 19.

On a

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad (197)$$

u_n est le reste d'ordre n d'une série alternée, donc u_n est du signe de $\frac{(-1)^n}{n}$. Donc on a

$$u_{n+1} \times u_n \leq 0 \quad (198)$$

Par ailleurs,

$$|u_n| = \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{=\frac{1}{n(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{=\frac{1}{(n+2)(n+3)}} + \cdots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} \quad (199)$$

Donc $(|u_n|)_{n \geq 1}$ est décroissante.

D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (200)$$

Pour calculer la somme, on peut chercher si la famille $(u_{n,p})_{\substack{n \geq 1 \\ p \in \mathbb{N}}}$ est sommable où

$$u_{n,p} = \frac{(-1)^n}{(n+2p)(n+2p+1)} \quad (201)$$

Soit $p \geq 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p} - \frac{1}{n+2p+1} \right) = \frac{1}{2p+1} \quad (202)$$

Donc

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n \geq 1} |u_{n,p}| = +\infty \quad (203)$$

Ainsi, cette famille n'est pas sommable. Essayons plutôt de calculer u_n d'abord : soit $n \geq 1$ fixé et

$N \geq n$. On a

$$\sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n}^N (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \quad (204)$$

$$= - \sum_{k=n}^N \int_0^1 (-t)^{k-1} dt \quad (205)$$

$$= - \int_0^1 \sum_{k=n}^N (-t)^{k-1} dt \quad (206)$$

$$= \int_0^1 (-t)^n \frac{1 - (-t)^{N-n+1}}{1+t} dt \quad (207)$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k} = - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \quad (208)$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{1}{N+2} \quad (209)$$

Donc

$$u_n = - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \quad (210)$$

Soit alors $M \geq 1$. On a

$$\sum_{n=1}^M u_n = \sum_{n=1}^M \left(- \int_0^1 \frac{(-t)^n}{t+1} dt \right) \quad (211)$$

$$= - \int_0^1 \frac{1}{1+t} \sum_{n=1}^M (-t)^n dt \quad (212)$$

$$= - \int_0^1 \frac{-t}{1+t} \frac{1 - (-t)^{M+1}}{1+t} dt \quad (213)$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \quad (214)$$

Comme

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{M+1} dt = \frac{1}{M+2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \quad (215)$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt \quad (216)$$

$$= \int_0^1 \frac{(t+1) - 1}{(1+t)^2} dt \quad (217)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt \quad (218)$$

$$= [\ln(1+t)]_0^1 + \left[\frac{1}{2} - 1 \right] \quad (219)$$

$$= \ln(2) - \frac{1}{2} \quad (220)$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2) - \frac{1}{2}} \quad (221)$$

$$\frac{1}{(3n)!} = \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (222)$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (223)$$

Posons

$$\begin{cases} S_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \\ S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \\ S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!} \end{cases} \quad (224)$$

On a

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 &= e \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 &= \exp(j) \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 &= \exp(j^2) \end{cases} \quad (225)$$

où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. En sommant les trois lignes, on a

$$3S_0 = e + \exp(j) + \exp(j^2) = e + e^{-\frac{1}{2}} \left(2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \quad (226)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3} \left(e + e^{-\frac{1}{2}} \left(2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \right)} \quad (227)$$

S'il existe $p \geq 0$ tel que $n = p^3$, alors

$$\left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p \quad (228)$$

et

$$\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor (p^3-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p-1 \quad (229)$$

Sinon, $n^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{N}$. Soit $k = \left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$. Alors $k^3 < n \leq (k+1)^3$ donc $k^3 \leq n-1 < (k+1)^3$ d'où $k \leq (n-1)^{\frac{1}{3}} < k+1$. Donc $\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = k$.

Donc $\sum u_n$ est une série lacunaire. Comme $u_{p^3} = O\left(\frac{1}{p^3}\right)$, d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (230)$$

Sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^3 - p} \quad (231)$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x(4x^2 - 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} \quad (232)$$

Donc la somme partielle jusqu'au rang n vaut

$$S_n = - \underbrace{\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}_{= H_n} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p+1} \quad (233)$$

$$= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \quad (234)$$

$$= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2 \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k}}_{= H_{2n-1}} - 1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2}H_{n-1}} \right) \quad (235)$$

$$= -H_n + 2H_{2n-1} - H_{n-1} - 1 + \frac{1}{2n+1} \quad (236)$$

$$= -\ln(n) + 2\ln(2n-1) - \ln(n-1) - 1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{= o(1)} + o(1) \quad (237)$$

$$= \ln \left(\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)} \right) - 1 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(4) - 1 \quad (238)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(4) - 1} \quad (239)$$

■

Solution 20. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$a - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \leq a + \varepsilon \quad (240)$$

Alors

$$(a - \varepsilon)f(x) \leq f'(x) \leq (a + \varepsilon)f(x) \quad (241)$$

On voit donc que

$$f'(x) - f(x)(a + \varepsilon) \leq 0 \quad (242)$$

On pose alors (sorte d'inéquation différentielle)

$$g_1(x) = f(x)e^{-(a+\varepsilon)x} \quad (243)$$

On a

$$g'_1(x) = e^{-(a+\varepsilon)x} (f'(x) - f(x)(a + \varepsilon)) \leq 0 \quad (244)$$

pour tout $x \geq A$. Donc g_1 est décroissante sur $[A, +\infty[$. Alors

$$0 < g_1(x) \leq g_1(A) = f(A)e^{-(a+\varepsilon)A} \quad (245)$$

Alors

$$0 < f(x) \leq (f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a+\varepsilon)x} \quad (246)$$

De même, pour $x \geq A$,

$$(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a-\varepsilon)x} \leq f(x) \quad (247)$$

car $g_2(x) = f(x)e^{-(a-\varepsilon)x}$ est croissante sur $[A, +\infty[$.

Donc

$$f(n) \leq (f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a+\varepsilon)n} \quad (248)$$

Comme $a + \varepsilon < 0$,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge.}} \quad (249)$$

De plus

$$f(A)e^{-(a-\varepsilon)A} \frac{e^{(a-\varepsilon)N}}{1 - e^{a-\varepsilon}} \leq R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leq f(A)e^{-(a+\varepsilon)A} \frac{e^{(a+\varepsilon)N}}{1 + e^{a+\varepsilon}} \quad (250)$$

Donc

$$\boxed{R_N = O_{n \rightarrow +\infty}(e^{aN}) \text{ et } e^{aN} = O_{n \rightarrow +\infty}(R_N)} \quad (251)$$

■

Solution 21. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{e^k}{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (252)$$

On utilise la règle d'Abel : on écrit $e^k = B_k - B_{k-1}$ avec

$$\begin{cases} B_k = \sum_{j=0}^k e^j = \frac{e^{k+1}-1}{e-1} \\ B_{-1} = 0 \end{cases} \quad (253)$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k+1} = -1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{k(k+1)}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{k+1}}{(e-1)k^2}} + \underbrace{\frac{B_n}{n}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n e}{n(e-1)}} \quad (254)$$

Donc

$$\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{n(e-1)}} \quad (255)$$

■

Solution 22.

1. $u_n > 0$ et

$$u_n = e^{n^\alpha \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{n^\alpha(-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))} = e^{-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2})} \quad (256)$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \quad (257)$$

Si $\alpha = 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{e}$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \quad (258)$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n^{\alpha-1} \quad (259)$$

donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}) \leq \frac{-n^{\alpha-1}}{2} \quad (260)$$

d'où

$$u_n \leq e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (261)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (262)$$

2. On a $u_n > 0$ et

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{k} \ln(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1 \quad (263)$$

donc par comparaison des sommes partielles, on a

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \quad (264)$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \quad (265)$$

3. On écrit $n!e = \lfloor n!e \rfloor + \alpha_n$. Alors

$$\sin(n!\pi e) = (-1)^{\lfloor n!e \rfloor} \sin(\alpha_n \pi) \quad (266)$$

On écrit

$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \quad (267)$$

On pose $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{n \times n!}$. On a

$$v_n \leq e \leq w_n \quad (268)$$

donc

$$0 \leq e - v_n \leq \frac{1}{n \times n!} \quad (269)$$

d'où

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \frac{n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (270)$$

Donc

$$n!e\pi = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} \pi}_{\text{pair}} + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (271)$$

Finalement, a

$$\frac{\sin(n!e\pi)}{\ln(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln(n)} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\ln(n)(n+1)}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}} \quad (272)$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (273)$$



Solution 23.

1. On a

$$u_n = (a+b+c) \ln(n) + b \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = (a+b+c) \ln(n) + \frac{b+2c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (274)$$

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \end{cases} \quad (275)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \end{cases} \quad (276)$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } a = b \text{ et } b = -2c \text{ avec } c \in \mathbb{R}} \quad (277)$$

Prenons $c = 1$ pour calculer la somme. On a

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2) \quad (278)$$

$$= \sum_{n=1}^N \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) - \ln(n+1) \quad (279)$$

$$= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) \quad (280)$$

$$= \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) \quad (281)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)} \quad (282)$$

2. On a $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (283)$$

On écrit

$$u_n = \frac{2^n (3^{2^{n-1}} - 1)}{(3^{2^{n-1}} + 1)(3^{2^n} - 1)} = \frac{2^n (3^{2^{n-1}} + 1 - 2)}{3^{2^n} - 1} = \underbrace{\frac{2^n}{3^{2^{n-1}} - 1}}_{= v_n} - \underbrace{\frac{2^{n+1}}{3^{2^n} - 1}}_{= v_{n+1}} \quad (284)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 = 1} \quad (285)$$

3. On remarque que $k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ est le reste de la division euclidienne de k par n . Donc ce reste est borné par $k - 1$. Donc $u_n = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. D'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (286)$$

On note alors

$$J_r = \{n \in \mathbb{N}^* | n \equiv r[k]\} \quad (287)$$

$(J_r)_{r \in \{0, \dots, k-1\}}$ forme une partition de \mathbb{N}^* . On a

$$\sum_{n \in J_r} \frac{r}{n(n+1)} = 0 \quad (288)$$

si $r = 0$. Si $r \in \{1, \dots, k-1\}$, on a

$$S_r = r \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)} \quad (289)$$

et par sommabilité on a

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n - k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n(n+1)} = \sum_{r=1}^{k-1} S_r = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)} \quad (290)$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On a

$$v_p = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{(kp+r)(kp+r+1)} \quad (291)$$

$$= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r+1} \quad (292)$$

$$= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=2}^k \frac{r-1}{kp+r} \quad (293)$$

$$= \frac{1}{kp+1} + \sum_{r=2}^{k-1} \frac{1}{kp+r} - \frac{k-1}{k(p+1)} \quad (294)$$

$$= \sum_{r=1}^k \frac{1}{kp+r} - \frac{1}{p+1} \quad (295)$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^N v_p = \sum_{n=1}^{k(N+1)} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{k(N+1)}{N+1}\right) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) = \ln(k) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (296)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(k)} \quad (297)$$

4. On a

$$\arctan(u) + \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) \quad (298)$$

donc

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(n) \quad (299)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}} \quad (300)$$

■

Solution 24. On a

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)u_k = u_1 - nu_{n+1} + \sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k - nu_{n+1} \quad (301)$$

Si $(nu_n)_{n \geq 1}$, on a donc évidemment d'après ce qui précède

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k} \quad (302)$$

Si $(u_n)_{n \geq 1}$ décroît, $v_n \geq 0$ et on a

$$\frac{v_k}{k} = u_k - u_{k+1} \quad (303)$$

et donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k,n} \quad (304)$$

en définissant $w_{n,k} = \frac{v_k}{k}$ si $k \geq n$ et 0 sinon. On a $w_{k,n} \geq 0$ car $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sommable si et seulement si $(w_{n,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ si et seulement si (d'après le théorème de Fubini)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{\sum_{n=1}^k \frac{v_k}{k} = v_k} < +\infty \quad (305)$$

Et dans ce cas (toujours d'après le théorème de Fubini),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= u_n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= v_k} < +\infty \quad (306)$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k} \quad (307)$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)} \quad (308)$$

et

$$v_n = \frac{1}{(n+1) \dots (n+p)} - \frac{n}{(n+1) \dots (n+p+1)} = \frac{p+1}{(n+1) \dots (n+p+1)} \quad (309)$$

Soit

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1) \left(S_p - \frac{1}{p!} \right) \quad (310)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}} = \frac{p+1}{p(p!)} \quad (311)$$

■

Solution 25. Montrons d'une manière générale que si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ est telle que

$$u_k = o_{k \rightarrow +\infty}(u_{k+1}) \quad (312)$$

, alors $\sum u_k$ diverge et $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

En effet, on a alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = +\infty$ et d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_k$ diverge. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$0 \leq \frac{u_k}{u_{k+1}} \leq \varepsilon \quad (313)$$

Soit $n \geq N$. Pour $k \geq N+1$, on a

$$u_k \leq \varepsilon u_{k+1} \leq \dots \leq \varepsilon^{n-k} u_n \quad (314)$$

pour $k \leq n-1$.

Alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} u_k \leq (\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-N-1}) u_n \quad (315)$$

On peut supposer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ et alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_n \leq 2\varepsilon u_n \quad (316)$$

Donc on a bien le résultat voulu.

Pour revenir à l'exercice, on a alors

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+q)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^q} \quad (317)$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente. Donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}} \quad (318)$$

■

Solution 26. On a

$$\left| \frac{z^{nb}}{z^{na+c} + 1} \right| = \frac{|z|^{nb}}{|1 + z^{na+c}|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|^{nb} \quad (319)$$

car $|z| < 1$. $|z|^{nb}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour n fini, on a

$$\frac{1}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z^{na+c})^k \quad (320)$$

Montrons donc que $\left(z^{nb} \left((-z^{na+c})^k \right) \right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^{nb} |z|^{k(na+c)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{nb}}{1 - |z|^{na+c}} < +\infty \quad (321)$$

d'après ce qui précède. On a sommabilité, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{nb} (-z^{na+c})^k \quad (322)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{ck} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n(b+ak)} \right) \quad (323)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1 - z^{b+ak}} \quad (324)$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1 - z^{b+ak}}} \quad (325)$$

■

Solution 27. On a

$$b_q = \sum_{n=1}^q u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} \quad (326)$$

Montrons donc que la famille des $(u_{n,q})_{(n,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} |u_{n,q}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=n}^{+\infty} \frac{n|a_n|}{q(q+1)} \quad (327)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| \left(\sum_{q=n}^{+\infty} \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) \quad (328)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \quad (329)$$

Donc le théorème de Fubini s'applique et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (330)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n} \quad (331)$$

■

Solution 28. D'après l'exercice précédent, $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad (332)$$

On applique l'inégalité de la moyenne géométrique et arithmétique à $(u_1, 2u_2, \dots, nu_n)$:

$$\sqrt[n]{u_1 \times 2u_2 \times \dots \times nu_n} = w_n \sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n}(u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n) = (n+1)v_n \quad (333)$$

Donc on a

$$w_n \leq \frac{(n+1)v_n}{\sqrt[n]{n!}} \quad (334)$$

On étudie donc $\sqrt[n]{n!}$:

$$\sqrt[n]{n!} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n!)\right) \quad (335)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)\right)\right) \quad (336)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n} \left(n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \ln\left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)\right)\right) \quad (337)$$

$$= n \exp\left(-1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \quad (338)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e} \quad (339)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e \quad (340)$$

Ainsi, $w_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}} \quad (341)$$

Montrons que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq e \quad (342)$$

Cela équivaut à $(n+1)^n \leq e^n n!$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \leq n! e^n \quad (343)$$

ce qui est vrai car pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$. Donc $w_n \leq e v_n$ pour tout $n \geq 1$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n} \quad (344)$$

Pour montrer que e est la meilleure constante possible, on forme pour $N \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,N} = \frac{1}{n}$ si $n \leq N$ et 0 sinon. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = H_n < +\infty \quad (345)$$

Dans ce cas, on a

$$w_{n,N} = \sqrt[n]{u_{1,N} \dots u_{n,N}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n \quad (346)$$

pour $n \leq N$ et 0 sinon. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N} = \sum_{n=1}^N w_{n,N} = \sum_{n=1}^N \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n \quad (347)$$

En divisant par $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, on a donc

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N}}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N}} = \frac{\sum_{n=1}^N v_{n,N} \times \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \quad (348)$$

d'après le théorème de Césaro.

On a trouvé une suite donc la constante C est égale à e . D'après ce qui précède,

e est la meilleure constante possible.

(349)

■

Remarque 6. Pour la fin de l'exercice précédent, on peut utiliser le fait que $H_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(N)$ et alors

$$\sum_{n=1}^N w_{n,N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{1}{n+1}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e \ln(N) \quad (350)$$

par le théorème de sommation des relations de comparaison.

Solution 29.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid p + q = n\} \quad (351)$$

On a alors

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n+1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad (352)$$

Donc la condition nécessaire et suffisante est $\alpha > 2$.

(353)

Dans ce cas, par le théorème des sommation par paquets, on a

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1) + \zeta(\alpha)$$

(354)

2. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$\frac{(p+q)^2}{2} \leq p^2 + q^2 \leq (p+q)^2 \quad (355)$$

Pour $\alpha \leq 0$, il est clair que l'on a divergence. Pour $\alpha > 0$, on a donc

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{(p+q)^{2\alpha}} \quad (356)$$

Donc la condition nécessaire et suffisante est $\alpha > 1$.

(357)

d'après le 1. ■

Solution 30. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{m+n^2-1} = \frac{1}{n^2} = \Sigma_n \quad (358)$$

par télescopage. $\sum_{n \geq 1} \Sigma_n$ converge et

$$\sum_{n \geq 1} \Sigma_n = \frac{\pi^2}{6} \quad (359)$$

Donc $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

(360)

Posons, pour $k \geq 1$,

$$I_k = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid m + n^2 = k\} \quad (361)$$

On a $n^2 \in \{1, \dots, k\}$ si et seulement si $n \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor\right\}$ et $(m, n) \in I_k$ si et seulement si $m = k - n^2$.

On a $|I_k| = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ et par sommation par paquets,

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[k]}{k(k+1)}$$

(362)

■

Remarque 7. Grâce à une transformation d'Abel, on a aussi, pour $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k+1} \quad (363)$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^N \underbrace{\frac{\lfloor k \rfloor - \lfloor k-1 \rfloor}{k}}_{\neq 0 \text{ ssi } k=p^2} + \underbrace{\frac{\lfloor N \rfloor}{N+1}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} \quad (364)$$

et on retrouve le résultat.

Solution 31.

1.

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \quad (365)$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} -\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right) \quad (366)$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} -\ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \quad (367)$$

converge si et seulement si (car $-\ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k} > 0$ vu que $p_k \geq k$ pour tout $k \geq 1$)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} \quad (368)$$

converge.

Donc

$$\boxed{\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \text{ converge si et seulement si } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} \text{ converge.}} \quad (369)$$

Fixons alors $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^N \left(\sum_{n_k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{n_k}} \right) \quad (370)$$

où la série est à termes positifs et est convergent. Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{p_1^{n_1} \cdots p_N^{n_N}} \right)_{n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^N} \quad (371)$$

est sommable et on a

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \sum_{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{p_1^{n_1} \dots p_N^{n_N}} \quad (372)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{p_{N+1}-1} \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \quad (373)$$

car dans la première somme, tous les inverses (et une seule fois) des nombres dont les facteurs premiers sont dans $\{p_1, \dots, p_N\}$ apparaissent.

Donc

$$\boxed{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}} \quad (374)$$

2. Posons

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \quad (375)$$

On a

$$\ln(\Pi_n) = \sum_{k=1}^n \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)}_{\sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_k^s} = O\left(\frac{1}{k^s}\right)} \quad (376)$$

car $p_k \geq k$. Donc

$$\boxed{(\Pi_n) \text{ converge dans } \mathbb{R}_+^*} \quad (377)$$

Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{(p_1^s)^{j_1} \dots (p_n^s)^{j_n}} \right)_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \quad (378)$$

Ainsi, on a

$$\Pi_n = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^s \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \quad (379)$$

$$= \zeta(s) \quad (380)$$

car dans la première somme, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, chaque k n'apparaît qu'une unique fois. Comme on a

$$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^s} \leq \Pi_n \quad (381)$$

Donc $\Pi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(s)$ et ainsi

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} = \zeta(s) \quad (382)$$

3. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Si $a > 1$, on a

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^a} \quad (383)$$

Donc $\sum \frac{1}{n^z}$ converge absolument. On peut donc prolonger ζ à $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}$.

De même que précédemment, puisque

$$\left| \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \right| = \frac{1}{(p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n})^a} \quad (384)$$

la famille

$$\left(\left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \right)_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \quad (385)$$

est sommable. On peut aussi développer et

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \quad (386)$$

On a

$$|\Pi_n - \zeta(z)| = \left| \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z} \right| \quad (387)$$

$$= \left| \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus J_n} \frac{1}{k^z} \right| \quad (388)$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus J_n} \frac{1}{k^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (389)$$

où l'on a noté $J_n = \{k \geq 1 \mid \text{les facteurs premiers de } k \text{ sont dans } \{p_1, \dots, p_n\}\}$ et où l'on a appliqué l'inégalité triangulaire et le résultat de 2. pour conclure.

Ainsi, on a bien

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} \quad (390)$$

■

Solution 32. Pour $\alpha > 2$, puisque $\varphi(n) \geq n$, on a

$$\frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad (391)$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour $\alpha = 2$, si $n = p_k$ est premier, on a $\varphi(p_k) = p_k - 1$ et

$$\frac{\varphi(p_k)}{p_k^2} = \frac{p_k - 1}{p_k^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k} \quad (392)$$

et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.

De même pour $\alpha < 2$, $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ diverge car $\frac{\varphi(n)}{n^2} = O\left(\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)$.

Donc

$$\boxed{\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.} \quad (393)$$

Pour $\alpha > 1$, on calcule

$$S = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^\alpha} \times \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_2^\alpha} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} \frac{\varphi(n_1)}{(n_1 n_2)^\alpha} \quad (394)$$

ce qui est légitime car il s'agit de deux séries à termes positifs convergentes. Soit, pour $n \geq 1$, $D_n = \{(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid n = n_1 n_2\}$. Par sommation par paquets, on a,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(n_1, n_2) \in D_n} \frac{\varphi(n_1)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{n_1|n} \varphi(n_1) \right) \quad (395)$$

et grâce à la formule d'Euler-Möbius, on a

$$\sum_{n_1|n} \varphi(n_1) = n \quad (396)$$

Ainsi, $S = \zeta(\alpha - 1)$ et donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha - 1)}{\zeta(\alpha)}} \quad (397)$$

■

Solution 33. Soit $A \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. S'il y a n indices $k \in \mathbb{N}$ tels que $z_k \in B(A, R)$, alors pour ces indices k , on a $B(z_k, \frac{1}{2}) \subset B(A, R + \frac{1}{2})$. Donc (faire un dessin!), on a

$$n \frac{\pi}{4} \leq \pi \left(R + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (398)$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{i \in \mathbb{N} | z_i \in B(0, n)\}$. De l'inégalité précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est fini. Il existe $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective qui permet d'ordonner les z_n par module croissante et à même module par indice croissant.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $R = |z_{\sigma(n)}|$, on a pour tout $k \leq n$, $z_{\sigma(k)} \in B(0, R)$.

Donc

$$n \frac{\pi}{4} \leq \pi \left(|z_{\sigma(n)}| + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (399)$$

d'où

$$|z_{\sigma(n)}| \geq \left| z_{\sigma(n)} + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \quad (400)$$

Donc

$$\left| \frac{1}{z_{\sigma(n)}} \right|^3 = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (401)$$

Donc

$$\sum \frac{1}{z_{\sigma(n)}^3} \text{ est absolument convergente.}$$

(402)

■

Solution 34. On a $k = \lfloor n \rfloor$ si et seulement si $k^2 \leq n < (k+1)^2$. Il y a $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ entiers.

Posons

$$B_p = \sum_{n=1}^p (-1)^{\lfloor n \rfloor} \quad (403)$$

et $B_{-1} = 0$. Si $k^2 \leq p \leq (k+1)^2$, on a

$$B_p = \underbrace{B_k^2}_{\text{signe de } (-1)^k} + (-1)^k \underbrace{(p-k)^2}_{|\cdot| \leq 2k+1} \quad (404)$$

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|B_p| \leq 2 \lfloor p \rfloor + 1 \quad (405)$$

Donc avec une transformation d'Abel, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{(B_n - B_{n-1})}{n} \quad (406)$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{B_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{B_n}{n+1} \quad (407)$$

$$= \underbrace{\frac{B_N}{N}}_{=O_{N \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} - B_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{n(n+1)}}_{=O_{N \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} \quad (408)$$

D'après le critère de Riemann, la dernière somme converge absolument et donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} \text{ converge.}} \quad (409)$$

■

Solution 35.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_n u_{n+1} > 0$. On a

$$\ln \left(\frac{u_n}{u_{N_0}} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \ln \left(\frac{a+k}{n+k} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \ln \left(1 + \frac{a}{k} \right) - \ln \left(1 + \frac{b}{k} \right) \quad (410)$$

Alors

$$\ln \left(\frac{u_n}{u_{N_0}} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \frac{a-b}{k} + \underbrace{O_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2} \right)}_{\text{terme général d'une série convergente}} = (a-b) \ln(n) + \underbrace{C}_{\in \mathbb{R}} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (411)$$

Ainsi,

$$u_n = u_{N_0} n^{a-b} \underbrace{k^{1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)}}_{>0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} U_{N_0} n^{a-b} k \quad (412)$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a > 1} \quad (413)$$

2. On a

$$u_{n+1}(b+n+1) = u_n(a+n+1) \quad (414)$$

donc

$$(a+1)u_n = bu_{n+1} + (n+1)u_{n+1} - nu_n \quad (415)$$

En sommant sur \mathbb{N} , on a

$$(a+1) \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + u_1 = b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \underbrace{u_1 - bu_0}_{= \frac{a(a+1)}{b(b+1)} - a} \quad (416)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{a(a+1-b(b+1))}{b(b+1)(a+1-b)} = a \left(\frac{1}{b(b+1)} - \frac{b}{(b+1)(a+1-b)} \right)} \quad (417)$$

3. Pour $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$, on a

$$\boxed{u_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \cdots \left(n - \frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} = \frac{-\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}}{(n+1)!} = -\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)} \binom{2n}{n}} \quad (418)$$

■

Solution 36.

1. u_n est une série à termes positifs et

$$\frac{1}{n} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \quad (419)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \quad (420)$$

$\sum v_n$ est une série alternée. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et en formant

$$\begin{aligned} f : [2, \infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned} \quad (421)$$

On a $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ qui est négatif dès que $x > e$. Donc $(v_n)_{n \geq 3}$ décroît. D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}} \quad (422)$$

2. f décroît sur $], +\infty[$ donc pour tout $k \geq 4$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx \quad (423)$$

d'où

$$\underbrace{\int_4^{N+1} \frac{\ln(x)}{x} dx}_{= \frac{1}{2} [\ln^2(N+1) - \ln^2(4)]} \leq \sum_{k=4}^N \frac{\ln(k)}{k} \leq \underbrace{\int_3^N \frac{\ln(x)}{x} dx}_{= \frac{1}{2} [\ln^2(N) - \ln^2(3)]} \quad (424)$$

Donc

$$\boxed{S_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2(N)} \quad (425)$$

Formons $w_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n - w_{n-1}$ converge.

On a

$$w_n - w_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln^2(n-1)}{2} \quad (426)$$

On a

$$\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln(n) - \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (427)$$

et

$$\ln^2(n-1) = \ln^2(n) - \frac{2\ln(n)}{n} + \underbrace{\underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} \quad (428)$$

Donc

$$w_n - w_{n-1} = \underbrace{\underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{\text{terme général d'une série absolument convergente}} \quad (429)$$

Donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + L + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)} \quad (430)$$

3. On a

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(2k)}{2k}}_{= I_N} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}}_{= J_N} = J_N \quad (431)$$

Donc

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = I_N - (S_{2N} - I_N) \quad (432)$$

On a

$$S_{2N} = \frac{\ln^2(2N)}{2} + L + o_{N \rightarrow +\infty}(1) = \frac{\ln^2(2)}{2} + \frac{\ln^2(N)}{2} + \ln(2) \ln(N) + L + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \quad (433)$$

De plus,

$$\begin{aligned} I_N &= \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(2)}{2k}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2k}} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} \left(\ln(N) + \gamma + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \right) = \frac{1}{2} S_N = \frac{\ln^2(N)}{4} + \frac{L}{2} + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \end{aligned} \quad (434)$$

Finalement, on a bien

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = 2I_N - S_{2N} \quad (435)$$

$$= \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2} + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \quad (436)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2}} \quad (437)$$

■

Solution 37. Si $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_{n+1} = 10^{\alpha_n - 1}$. Alors $q_1(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$, $q_k(\alpha_n) = \alpha_{n-k}$, $q_n(\alpha_n) = 2$ et $q_{n+1}(\alpha_n) = 1$.

Si $k < \alpha_n$, $q_n(k) = 1$. Soit

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} u_k \quad (438)$$

Comme c'est une série à termes positifs, $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} S_n$ converge.

Par définition, pour tout $k \in \{\alpha_n, \dots, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a $q_{n+1}(k) = 1$ et pour tout $p \geq n + 1$, $q_p(k) = 1$. Donc

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k q_1(k) \dots \underbrace{q_n(k)}_{\geq 2}} \quad (439)$$

Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \log_{10}(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(10)} \end{aligned} \quad (440)$$

Il vient $q_1(t) = \lfloor f(t) \rfloor + 1 > f(t)$. Par récurrence, on a

$$q_n(t) \geq f^n(t) \quad (441)$$

défini pour $t \geq \alpha_n$. On a donc

$$S_n \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k(f(k)) \dots f^n(k)} \quad (442)$$

On forme

$$\begin{aligned} g_n : [\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{tf(t) \dots f^n(t)} \end{aligned} \quad (443)$$

qui est décroissante. Ainsi, pour tout $k \in \{\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a

$$\int_k^{k+1} g_n(t) \leq u_k \leq \int_{k-1}^k g_n(t) \quad (444)$$

d'où en faisant le changement de variables $u = \log_{10}(t)$, on a

$$\int_{\alpha_{n-1}-1}^{\alpha_n-1} g_{n-1}(u) du(\ln(10)) \leq S_n \leq \int_{\alpha_n-1}^{\alpha_{n+1}-1} g_n(t) dt \quad (445)$$

On obtient donc une minoration par $C \times (\ln(10))^n$ donc

la série diverge.

(446)

■

Solution 38.

- Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_0 = 1 > 0$ et $P_1(x) = 1 + x$ s'annule en -1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat au rang n . On a $P'_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$, par hypothèse P_{2n+1} s'annule uniquement en $\alpha_{2n+1} < 0$. Donc $P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) = \frac{(\alpha_{2n+1})^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$ donc $P_{2n+2} > 0$. Comme $P'_{2n+3} = P_{2n+2} > 0$ donc P_{2n+3} est strictement croissante sur \mathbb{R} . On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{2n+3} = \pm\infty$. Donc il existe un unique $\alpha_{2n+3} \in \mathbb{R}$ tel que $P_{2n+3}(\alpha_{2n+3}) = 0$. Comme $P_{2n+3}(0) = 1 \geq 1$, $\alpha_{2n+3} < 0$.

D'où le résultat par récurrence.

(447)

2. Soit $x < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^x > 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $P_{2n+1}(x) > 0$. En particulier, $\alpha_{2n+1} < x$ donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{2n+1} = -\infty} \quad (448)$$

■

Solution 39. On pose $f_n(x) = e^x - x - n$, on a $f'_n(x) = e^x - 1$. Donc $x_1 = 0$ et ainsi

$$\boxed{\forall n \geq 2, \exists ! x_n \geq 0 : e^{x_n} = x_n + n} \quad (449)$$

Pour tout $x \geq 0$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -1 < 0$ donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0$ et $x_n < x_{n+1}$.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, de plus $e^{x_n} = x_n + n \geq n$ donc $x_n \geq \ln(n)$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty} \quad (450)$$

De plus, $x_n = \ln(x_n + n)$ et $f_n(n) = e^n - 2n > 0$ (par récurrence), donc $x_n < n$ par stricte croissante de f_n donc

$$x_n = \ln(x_n + n) \leq \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2) \quad (451)$$

Ainsi, $x_n = O_{n \rightarrow +\infty}(\ln(n))$. En reportant, on a

$$x_n = \ln\left(n + O_{n \rightarrow +\infty}(\ln(n))\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = \ln(n) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (452)$$

donc

$$\boxed{x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)} \quad (453)$$

En reportant, on a

$$\boxed{x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \quad (454)$$

■

Solution 40.

1. Si $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S \in \mathbb{R}_+^+$, on a

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S^\alpha} \quad (455)$$

Comme u_n est le terme générale d'une série convergente donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}} \quad (456)$$

2. On a $\alpha = 1$ donc $v_n = \frac{u_n}{S_n}$, soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i = \sum_{i=1}^{n+p} \frac{u_i}{S_i} \quad (457)$$

où $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $i \in \{n+1, n+p\}$, $S_i \leq S_{n+p}$ donc

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i = \frac{1}{S_{n+p}} (S_{n+p} - S_n) = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} \quad (458)$$

et ainsi,

$$\boxed{\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}} \quad (459)$$

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour n fixé, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{n+p} = +\infty$ (car $\sum u_n$ diverge). Donc lorsque $p \rightarrow +\infty$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i \geq 1 \quad (460)$$

ce qui est absurde puisque la limite en $+\infty$ du reste est 0. Ainsi,

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}} \quad (461)$$

3. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ et

$$v_n = \frac{1}{\alpha - 1} (S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}) \quad (462)$$

avec $(S_n^{1-\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Donc $\sum w_n$ est une série télescopique convergente. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, on a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq w_n \leq \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha} \quad (463)$$

car $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $\sum w_n$ converge,

$$\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge.}} \quad (464)$$

Si $\alpha < 1$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{\alpha-1} = 0$,

$$\frac{u_n}{S_n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{S_n^\alpha} \right) \quad (465)$$

donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}} \quad (466)$$

4. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ par convergence et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et de plus $u_n = R_n - R_{n+1}$. On pose

$$\alpha_n = \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} (R_{n+1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}) \quad (467)$$

si $\alpha \neq 1$.

Si $0 < \alpha < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^{1-\alpha} = 0$ donc $\sum \alpha_n$ est une série télescopique convergente et de même que précédemment, on a

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} \leq \alpha_n \quad (468)$$

donc $w_n \leq \alpha_n$ et

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}} \quad (469)$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$\alpha_n = \ln(R_n) - \ln(R_{n+1}) \quad (470)$$

où $\ln(R_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. Donc $\sum \alpha_n$ est une série télescopique divergente. De plus

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n} = 1 - \frac{R_{n+1}}{R_n} \quad (471)$$

donc

$$\ln \left(\frac{R_{n+1}}{R_n} \right) = \ln \left(1 - \frac{u_n}{R_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-u_n}{R_n} \quad (472)$$

On a donc

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha_n \quad (473)$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}} \quad (474)$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$\frac{u_n}{R_n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{u_n}{R_n^\alpha} \right) \quad (475)$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}} \quad (476)$$

■

Solution 41.

1. Pour tout $x \in [0, 1[$ il existe un unique $q_x \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $x \in [\frac{q_x}{n}, \frac{q_x+1}{n}]$ avec $q_x = \lfloor nx \rfloor$
et

$$\begin{aligned} h : \{0, \dots, n\} &\rightarrow \{0, \dots, n-1\} \\ k &\mapsto q_{x_k} = \lfloor nx_k \rfloor \end{aligned} \quad (477)$$

n'est pas injective donc il existe $k > k'$ tel que $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$ avec $(k, k') \in \{0, \dots, n\}^2$ d'où

$$|kx - \lfloor kx \rfloor - (k'x - \lfloor k'x \rfloor)| < \frac{1}{n} \quad (478)$$

d'où

$$|(k - k')x - p| < \frac{1}{n} \quad (479)$$

avec $p \in \mathbb{Z}$ et pour $q = (k - k') \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\boxed{\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn}} \quad (480)$$

2. D'après ce qui précède, pour tout $n \geq 1$, il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{q_n^2} \quad (481)$$

car $n \geq q_n$. Donc

$$\boxed{\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}} \quad (482)$$

On a donc $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si q_n ne tend pas vers $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n > N$ avec $q_n < A$. Donc $\{n \in \mathbb{N} | q_n < A\}$ est infini : on peut

extraire $(q_{\sigma(n)})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q_{\sigma(n)} < A$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire $(q_{\varphi(n)})$ qui converge vers $q \in \mathbb{R}$. Notons que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang donc $q \in \mathbb{N}^*$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{\varphi(n)} = \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} q_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha q$. $(p_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers relatifs stationnaire, donc $\alpha q \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty} \quad (483)$$

3. On sait qu'il existe $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que $\sin(\sigma(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma(n) \sin(\sigma(n))} = 0 \quad (484)$$

donc si la suite converge, alors elle converge vers 0.

Appliquons ce qui précède à $\alpha = \frac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$ et

$$\left| \frac{1}{\pi} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \quad (485)$$

Alors

$$|q_n - \pi p_n| < \frac{\pi}{q_n} \leq \frac{\pi}{2} \quad (486)$$

pour n suffisamment grand. Quitte à extraire, on peut supposer que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

On a

$$|\sin(x)| = |\sin(q_n - \pi q_n)| \quad (487)$$

donc

$$|\sin(q_n)| \leq \left| \sin\left(\frac{\pi}{q_n}\right) \right| \leq \frac{\pi}{q_n} \quad (488)$$

car \sin est croissant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $|\sin(x)| \leq |x|$.

Donc

$$\underbrace{\frac{1}{|q_n \sin(q_n)|}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \geq \frac{1}{\pi} \quad (489)$$

ce qui est absurde.

Donc

$$\boxed{\left(\frac{1}{n \sin(n)} \right)_{n \geq 1} \text{ ne converge pas.}} \quad (490)$$

■

Solution 42.

1. On a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| = \left| \sum_{p=1}^n (a_{n,p} - a_p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p \right| \leq \sum_{p=1}^n |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=n+1}^{+\infty} |a_p| \quad (491)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geq N$, on a

$$\sum_{p=1}^n |a_{n,p} - a_p| = \sum_{p=1}^N |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=N+1}^n |a_{n,p} - a_p| \quad (492)$$

Pour p fixé, on a $|a_p| \leq b_p$ donc

$$\sum_{p=N+1}^n |a_{n,p} - a_p| \leq 2 \sum_{p=N+1}^n b_p \quad (493)$$

Ainsi,

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| \leq \sum_{p=1}^N |a_{n,p} - a_p| + 3 \sum_{p=N+1}^{+\infty} b_p \quad (494)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{p \geq 1} b_p$ converge, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$3 \sum_{p=N_1+1}^{+\infty} b_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (495)$$

donc pour tout $n \geq N_1$, on a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| \quad (496)$$

N_1 étant fixé, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on a

$$\sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (497)$$

car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| = 0 \quad (498)$$

Donc pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| < \varepsilon \quad (499)$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \quad (500)$$

2. On fixe $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n = e^{-p} \quad (501)$$

Pour $x \geq -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$ donc $\ln\left(1 - \frac{p}{n}\right) \leq -\frac{p}{n}$ et $a_{n,p} = e^{n \ln(1 - \frac{p}{n})} \leq e^{-p} = b_p$ Donc d'après ce qui précède,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \right) = \frac{1}{e-1} \quad (502)$$

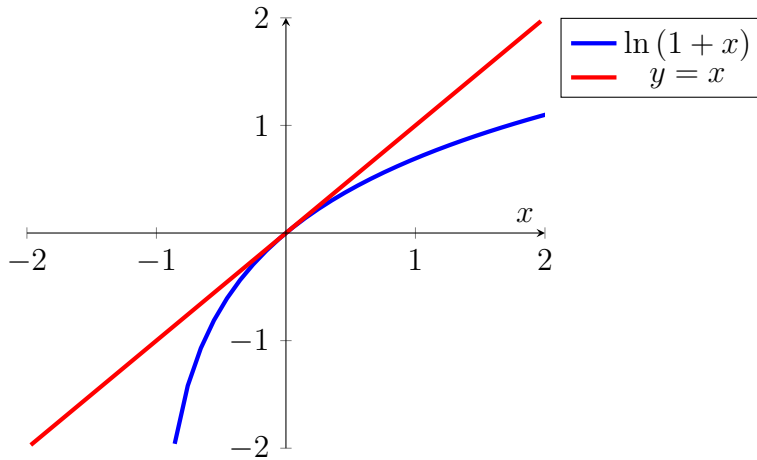


FIGURE 7 – $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$.

■

Remarque 8. C'est faux si on n'a pas l'hypothèse (ii). Par exemple,

$$a_{n,p} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (503)$$

pour p fixé mais

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (504)$$

Solution 43.

1. Pour tout $k \geq 1$, $(u_{kn})_{n \geq 1}$ est une sous-famille de $(u_n)_{n \geq 1}$ sommable, donc $(u_{kn})_{n \geq 1}$ est sommable.

$$\boxed{\text{Donc } S_k \text{ existe.}} \quad (505)$$

2. On a

$$\begin{cases} S_1 - S_2 & = u_1 + u_3 + \dots + u_{2n+1} + \dots & = 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 + S_6 & = u_1 + u_5 + u_7 + u_{11} + \dots & = 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 - S_5 + S_6 + S_{10} + S_{15} - S_{10} & = u_1 + u_7 + u_{11} + \dots & = 0 \end{cases} \quad (506)$$

A la première ligne on enlève les multiples de 2, à la deuxième ligne on enlève les multiples de 2 et 3, à la troisième ligne on enlève les multiples de 2, 3 et 5. Et ainsi de suite.

Soient donc p_1, \dots, p_N les N premiers nombres premiers. On a

$$0 = \sum_{k=1}^{p_1 \dots p_N} \mu(k) S_k = \sum_{k \in \{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\}} \mu(k) S_k \quad (507)$$

où si $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $\mu(k) = 0$ s'il existe $\alpha_i \geq 2$ et $\mu(p_{i_1} \dots p_{i_s}) = (-1)^s$ sinon (fonction de Möbius).

Soit $n = p_1^{\beta_1} \dots p_N^{\beta_N}$. On cherche le coefficient en u_n dans la somme. Si $n = 1$, c'est 1. Si $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0 \quad (508)$$

donc

$$\sum_{k \in \{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\}} \mu(k) S_k = u_1 + \alpha_N \quad (509)$$

avec

$$\alpha_N = \sum_{k \in B_N} u_k \quad (510)$$

où $B_N \subset \mathbb{N}^*$ est tel que $\min(B_N) = p_{N+1}$. On a

$$|\alpha_N| \leq \sum_{k \geq p_{N+1}} |u_k| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (511)$$

car c'est le reste de $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ convergente.

Donc $u_1 + \alpha_N = 0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_1$ donc $u_1 = 0$.

Avec $u_1 = 0$,

$$\begin{cases} S_n &= u_n + u_{2n} + u_{3n} + \dots &= 0 \\ S_{2n} &= u_{2n} + u_{4n} + u_{6n} + \dots &= 0 \end{cases} \quad (512)$$

et en recommençant avec u_n pour tout $n \geq 1$, on obtient bien

$$\boxed{u_n = 0} \quad (513)$$

■

Solution 44.

1. On prend $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum u_n = 0$ converge donc $\sum f(u_n) = \sum f(0)$ converge. Donc

$$\boxed{f(0) = 0} \quad (514)$$

Supposons que f n'est pas continue en 0. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [-\alpha, \alpha] : |f(x)| \geq \varepsilon_0$. Pour $\alpha \equiv \alpha_n = \frac{1}{n^2}$, il existe $x_n \in [-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}] : |f(x_n)| \geq \varepsilon_0$. $\sum x_n$ converge absolument mais $\sum f(x_n)$ diverge grossièrement ce qui est absurde.

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.} \quad (515)$$

2. Supposons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]-\alpha, \alpha[: f(-x) \neq -f(x)$. On définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ telle que $f(-x_n) + f(x_n) \neq 0$. Il existe $N_n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$N_n |f(-x_n) + f(x_n)| \geq 1 \quad (516)$$

(il suffit de prendre $N_n = \left\lfloor \frac{1}{|f(x_n) + f(-x_n)|} \right\rfloor + 1$)

On définit

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots, \dots, x_n, -x_n, \dots, \dots) \quad (517)$$

où $(x_n, -x_n)$ apparaît N_n fois. On a $\sum_{k=0}^{2N} u_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{2N+1} u_k = x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\sum u_n$ converge.

Si $\sum f(u_n)$ convergerait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ alors

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(x_k) \right| < \frac{1}{2} \quad (518)$$

De plus, pour $n \geq n_0$, on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \dots + f(x_n) + f(-x_n) + f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2} \quad (519)$$

où $(f(x_n), f(-x_n))$ apparaît N_n fois. Comme

$$|f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2} \quad (520)$$

on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \dots + f(x_n) + f(-x_n)| = N_n |f(x_n) + f(-x_n)| < 1 \quad (521)$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est impaire au voisinage de } 0.} \quad (522)$$

3. Supposons que pour tout $\beta > 0$, il existe $(x, y) \in]-\beta, \beta[^2$ avec $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$. Alors il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers 0 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_n \in \mathbb{N}$,

$$M_n |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \geq 1 \quad (523)$$

On définit alors

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_n + y_n, -x_n, -y_n, \dots) \quad (524)$$

où $(x_n + y_n, -x_n, -y_n)$ apparaît M_n fois. On a

$$\sum_{k=0}^N u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } N \equiv 0[3] \\ x_n + y_n & \text{si } N \equiv 1[3] \\ y_n & \text{si } N \equiv 2[3] \end{cases} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (525)$$

donc $\sum u_n$ converge.

Si $\sum f(u_n)$ convergerait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(u_k) \right| < \frac{1}{2} \quad (526)$$

De plus, d'après 2., il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $f(-x_n) + f(-y_n) = -f(x_n) - f(y_n)$ donc pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a

$$|f(x_n + y_n) + f(-x_n) + f(-y_n)| \times M_n = |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \times M_n < 1 \quad (527)$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est linéaire au voisinage de } 0.} \quad (528)$$

4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq \frac{\beta}{|k|}$. Par récurrence, on a $f(kx) = kf(x)$.

Si $|x| < \beta$ et si $\frac{x}{\beta} \in \mathbb{Q}$, on a

$$\frac{x}{\frac{\beta}{2}} = \frac{p}{q} \quad (529)$$

donc en posant $\lambda = \frac{2}{\beta}f\left(\frac{\beta}{2}\right)$, on a

$$f(x) = f\left(\frac{p\beta}{2q}\right) = \frac{p}{q}f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{p}{q}\frac{\beta}{2}\lambda = \lambda x \quad (530)$$

Si $\frac{x}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{x}{\beta}$. On a alors

$$f(x) = f\left(\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + r_n\frac{\beta}{2}\right) \quad (531)$$

$$= f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + f\left(\frac{r_n\beta}{2}\right) \quad (532)$$

et $x - \frac{r_n\beta}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après 1. et $r_nf\left(\frac{\beta}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda x$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est une homothétie au voisinage de } 0.} \quad (533)$$

■