Exercices MP/MP*

Espaces préhilbertiens

Exercice 1. *Soit* $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ *et*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_0^1 fg + g'g' \end{array} \tag{1}$$

1. *Montrer que* φ *est un produit scalaire.*

2. *Soit* $V = \{f \in E | f(0) = f(1) = 0\}$ *et* $W = \{g \in E | g'' = g\}$. *Montrer que* V *et* W *sont supplémentaires orthogonaux. Pour* $h \in E$, *déterminer* $p_W(h)$ *(projection orthogonale sur* W*).*

3. *Soit* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* $E_{\alpha,\beta} = \{h \in E | h(0) = \alpha$ *et* $h(1) = \beta\}$. *Déterminer*

$$\inf_{h \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 h^2 + h'^2. \tag{2}$$

Exercice 2. *Soit* $a \neq 0$ *et*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+a) - P(X) \end{array} \tag{3}$$

1. *Déterminer* $\ker(\Delta)$. *Si* $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X]$, *que vaut* $\deg(\Delta P)$ *?*

2. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}[X]^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^k P(0) \Delta^k Q(0) \end{array} \tag{4}$$

   Montrer que φ *est bien définie, et que c'est un produit scalaire.*

3. *Exhiber une base orthonormée* $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}[X]$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.

Exercice 3. *Trouver*

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x = I(a,b). \tag{5}$$

Exercice 4. *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On définit*

$$(P|Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k). \tag{6}$$

1. *Montrer que* $(\cdot|\cdot)$ *est un produit scalaire.*

2. *Existence et unicité d'une base orthonormée* $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ *et le coefficient dominant de* P_n *et strictement positif.*

3. *Déterminer, pour* $(k,j) \in \mathbb{N}^2$, $P_j^{(k)}(a_k)$.

4. *Montrer que*

$$P_n(x) = \int_{a_0}^{x} \int_{a_1}^{t_1} \dots \int_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n \mathrm{d}t_{n-1} \dots \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1. \tag{7}$$

5. *Déterminer P_n si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n\alpha$.*

Exercice 5. *Calculer*

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \left(ax^2 - bx + c - \sin(x)\right)^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x. \tag{8}$$