

*Exercices MP/MP\**

*Espaces euclidiens*

**Exercice 1.** Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $\|X\|_2 = 1$ . On lui associe  $H_X = I_n - 2XX^\top$ .

1. Reconnaître l'endomorphisme canoniquement associée à  $H_x$  (géométriquement).
2. Montrer que  $(H_X)_{X \in S(0,1)}$  engendre  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 2.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A \in SO_3(\mathbb{R})$  si et seulement s'il existe  $p \in [0, \frac{4}{27}]$  telle que  $a, b, c$  soient les racines de  $X^3 - X^2 + p$ .
2. Déterminer alors les ingrédients de cette rotation.

**Exercice 3.** Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  distincts, et  $A_n = \left( \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

1. Montrer que  $A_n$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .
3. On choisit pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \det(A_n) = 0$ .

**Exercice 4.**

1. Montrer que  $\text{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. On définit

$$\begin{aligned} N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} |\text{Tr}(AU)| \end{aligned} \tag{1}$$

Montrer que  $N$  est définie et que c'est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3. Montrer que pour tout  $(A, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ , on a  $N(VA) = N(A)$ .
4. Soit  $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ , calculer  $N(S)$ .
5. Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $N(A) = \text{Tr}(\sqrt{AA^\top})$ .

**Exercice 5.** Soit  $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$  telle que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$0 \leq X^\top AX \leq X^\top BX. \tag{2}$$

Montrer que  $0 \leq \det(A) \leq \det(B)$ . On montrera que si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $A^{-1}B$  est semblable à  $\sqrt{A^{-1}}V\sqrt{A^{-1}} = C$  et on vérifiera que  $\min \text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \geq 1$ .

**Exercice 6.** Soit  $(r, s)$  deux rotations de  $\mathbb{R}^3$ , reconnaître  $r' = s \circ r \circ s^{-1}$ . A quelles conditions nécessaires et suffisantes  $r$  et  $s$  commutent-elles ?

**Exercice 7.** Soit  $D = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid I_n + A \in GL_n(\mathbb{R})\}$  et  $D' = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ .

1. Montrer que  $D \subset SO_n(\mathbb{R})$ .

2. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : D &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Montrer que  $\varphi$  définit une bijection de  $D$  dans  $D'$ .

**Exercice 8.** Soit  $(A, B) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$ , montrer que  $\sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)} \leq \sqrt[n]{\det(A+B)}$ . Si  $A$  est inversible, on montrera que  $A^{-1}B$  est semblable à  $C = \sqrt{A^{-1}B}\sqrt{A^{-1}}$ , puis que  $\varphi : x \mapsto \ln(1 + e^x)$  est strictement convexe. Donner le cas d'égalité (pour  $A$  inversible).

**Exercice 9.** Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $i \neq j$ ,  $a_{i,j} < 0$ . Pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on note

$$|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq |X|^T A |X| \leq X^T A X$ .

2. Montrer que si  $X \neq 0$  et  $AX = 0$ , alors pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $|X|^T A |X| = 0$  et en déduire que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i \neq 0$ .

3. Montrer que  $\text{rg}(A) \geq n - 1$ .

4. Soit  $\lambda = \min \text{Sp}(A)$ , montrer que  $\lambda$  est valeur propre simple de  $A$ .

**Exercice 10.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  dans  $E$  euclidien tel que  $\text{Tr}(u) = 0$ . Montrer qu'il existe  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(u(e_i)|e_i) = 0$ .

**Exercice 11.** Soit  $E$  euclidien,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est antisymétrique si et seulement si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $(u(x)|y) = -(x|u(y))$ .

1. Montrer que  $u$  est antisymétrique si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $(u(x)|x) = 0$ .

2. Montrer que  $u$  est antisymétrique si et seulement si sa matrice  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  dans une base orthonormée de  $E$ .

3. Montrer que  $\text{Sp}(u) \subset \{0\}$ , et que si la dimension de  $E$  est impaire,  $\text{Sp}(u) = \{0\}$ .
4. Montrer qu'il existe  $B$  base orthonormée de  $E$ , il existe  $r \in \mathbb{N}$ , il existe  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$\text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -a_2 & \\ & & & a_2 & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

5. Montrer  $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 12.

1. Montrer que  $\exp$  induit une bijection de  $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ . On note  $\ln$  la réciproque.
2. Justifier que  $\exp$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices de  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = M$ . Soit  $\alpha = \min(\text{Sp}(M)) > 0$  et  $\beta = \max(\text{Sp}(M))$ . Montrer qu'il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq k_0$ , pour tout  $X \in S(0, 1)$ ,

$$\frac{\alpha}{2} \leq X^\top M_k X \leq \beta + 1. \quad (5)$$

4. En déduire que  $(\ln(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée.
5. Prouver que  $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.

**Exercice 13.** Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , de valeurs propres  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Pour  $F$  sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , on pose

$$\Phi(F) = \max_{X \in F} \frac{(AX|X)}{X^\top AX}. \quad (6)$$

Montrer que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=k}} \Phi(F). \quad (7)$$

**Exercice 14.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\text{Sp}(A) = \{a_{1,1}, \dots, a_{n,n}\}$ . Montrer que  $A$  est diagonale. On pourra considérer  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $a_{i_0, i_0} = \min(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$  et former

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^n)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \varphi(X, Y) = Y^\top (A - a_{i_0, i_0} I_n) X \end{aligned} \quad (8)$$

**Exercice 15** (Intercalation des valeurs propres). Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres. Soit  $A' = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$  et  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$  ses valeurs propres.

Montrer que  $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$ .

On pourra utiliser le résultat de l'Exercice 13.

**Exercice 16.** Soit  $C$  un convexe d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on dit que  $x \in C$  est extrémal si et seulement si pour tout  $(y, z) \in C^2$ , si  $x = \frac{x+y}{2}$ , alors  $x = y = z$ . On munit  $\mathbb{R}^n$  de  $\|\cdot\|_2$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  de norme  $\|\cdot\|$  associée.

1. Montrer que si  $u \in O(E)$ ,  $u$  est extrémal dans  $\overline{B_{\|\cdot\|}(0, 1)} = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \|v\| \leq 1\}$ .
2. Soit  $u \in \overline{B_{\|\cdot\|}(0, 1)}$  qui n'est pas une isométrie. Montrer qu'il existe  $(v, w) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $v \in O(E)$ ,  $w \in S^+(E)$ ,  $\text{Sp}(w) \subset [0, 1]$  et il existe  $\lambda \in \text{Sp}(w)$  tel que  $\lambda \in [0, 1[$ . En déduire que  $u$  n'est pas extrémal.
3. Montrer qu'il n'existe pas de produit scalaire sur  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $\|\cdot\|$  soit la norme euclidienne associée.

**Exercice 17.** Soit  $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})$  tel que  $A^3 = B^3$  (ou  $A^5 = B^5$  ou  $A^{2k+1} = B^{2k+1}$ ). Montrer que  $A = B$ .

**Exercice 18.** Soit la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} q : (\mathbb{R}^{n+1})^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \end{aligned} \quad (9)$$

Montrer que c'est un produit scalaire.

**Exercice 19.** Soit  $(E, \|\cdot\|_2)$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer qu'il existe  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$  tel que pour tout  $i \neq j$ ,  $\|x_i - x_j\| = 1$ .

**Exercice 20.** Soit

$$q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (10)$$

Pour quelles valeurs de  $\alpha$   $q$  est-elle une forme quadratique définie positive ?

**Exercice 21.** Soit  $E$  un espace euclidien,  $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$  tel que pour tout  $i \neq j$ ,  $(e_i | e_j) \leq 0$ .

1. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ , montrer que si  $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$ , alors  $\sum_{i=1}^p |\lambda_i| e_i = 0$ .
2. Montrer que s'il existe  $\varepsilon \in E$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $(\varepsilon, e_i) > 0$  alors  $(e_1, \dots, e_p)$  est libre.
3. Montrer que si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E$  et si  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$  avec pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $(x | e_i) > 0$  alors pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $x_i > 0$ . On pourra former  $(-x, e_1, \dots, e_p)$ .

**Exercice 22** (Famille obtusangle). Soit  $E$  euclidien de dimension  $n$ . Quel est le cardinal maximal  $r_n$  d'une famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $E^p$  telle que pour tout  $i \neq j$ ,  $(x_i | x_j) < 0$  ?

**Exercice 23.** Soit  $E$  euclidien de dimension  $n$ .

1. Montrer qu'il existe  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$  unitaire tel que pour tout  $i \neq j$ ,  $\|u_i - u_j\| = 1$ .
2. Montrer que  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ .
3. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la famille résultant du processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de  $(u_1, \dots, u_n)$ . Montrer qu'il existe  $(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)^2$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u_j = \sum_{1 \leq i < j} b_i e_i + a_j e_j$ .

**Exercice 24.** Soit  $E$  un espace euclidien,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \in E^{2p}$ . Montrer qu'il existe  $u \in O(E)$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $y_i = u(x_i)$  si et seulement si pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ ,  $(y_i | y_j) = (x_i | x_j)$ .

**Exercice 25.** Soit  $E$  euclidien, et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| \leq \|x\|$ . Montrer que

$$E = \ker(f - id) \oplus^\perp \text{Im}(f - id). \quad (11)$$

**Exercice 26.** Soit  $E$  un espace euclidien,  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $E$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in E$ , il existe  $c_x \in C$  tel que  $d(x, C) = \|x - c_x\|$ . On note  $c_x = p_C(x)$ .
2. Montrer que  $p_C(x)$  est l'unique vecteur dans  $C$  tel que pour tout  $y \in C$ ,  $(x - p_C(x) | y - p_C(x)) \leq 0$ .

3. Montrer que  $p_C: E \rightarrow C$  est 1-Lipschitzienne.

**Exercice 27.** Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL(\mathbb{K}^n)$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

1. Pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$ , on forme

$$\varphi(x, y) = \sum_{g \in G} (gx|gy). \quad (12)$$

Montrer que c'est un produit scalaire sur  $\mathbb{K}^n$ , et que pour tout  $g_0 \in G$ , pour tout  $(x, y) \in \mathbb{K}^n$ ,  
 $\varphi(g_0x, g_0y) = \varphi(x, y)$ .

2. Montrer que pour tout  $f \in G$ , on a  $\text{Tr}(f^{-1}) = \overline{\text{Tr}(f)}$ .

3. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $G$  est cyclique.