Exercices MP/MP*
Équations différentielles linéaires

Exercice 1. *Résoudre, sur un intervalle à préciser,*

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0.$$

On pourra chercher φ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que si $u(y) = y' + \varphi y$, alors $u \circ u(y) = y'' + 2xy' + (1 + x^2)y$.

Exercice 2. *Résoudre, sur un intervalle I à préciser,*

$$\begin{cases} tx' &=& x - 3y + 3z, \\ ty' &=& -2x - 6y + 13z, \\ tz' &=& -x - 4y + 8z. \end{cases}$$

Exercice 3. *Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $V'(x) = AV(x)$.*

1. *Soit $u \in \mathbb{R}^n$, et V solution de l'équation différentielle telle que $V(0) = u$. Évaluer $\|V(x)\|_2$.*
2. *Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ n solutions de l'équation différentielle. Évaluer*

$$\det_B(V_1(x), \ldots, V_n(x)) = W(x),$$

où B désigne une base orthonormée directe.

3. *À quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il $u \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(u, V(x))$ est liée ?*

Exercice 4. *Résoudre, sur un intervalle à préciser, le système différentiel*

$$\begin{cases} x' &=& -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ y' &=& 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Exercice 5. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle*

$$xf'(x) + \lambda f(x) = \frac{1}{x + 1}.$$

1. *Déterminer les solutions de cette équation différentielle qui ont une limite finie en 0, et les solutions développables en séries entières (au voisinage de 0).*
2. *Calculer $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+1)}$.*

Exercice 6. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer que pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} \geqslant 0$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\exp(tA) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.*
2. *On suppose que l'on est dans ce cas. Soit $f \colon \mathbb{R}_+ \to (\mathbb{R}_+)^n$, $\mathcal{C}^0$ et soir $x_0 \in (\mathbb{R}_+)^n$. Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &=& Ax(t) + f(t), \\ x(0 &=& x_0, \end{cases}$$

prend ses valeurs dans $(\mathbb{R}_+)^n$.

Exercice 7. *Soit $n \geqslant 1$ et $f_1, \dots, f_n$ n fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$. On pose*

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Montrer que X ne s'annule pas sur $[a,b]$ si et seulement si $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{C}^0(]a,b[,\mathbb{R})^n$ tel que $(f_1, \dots, f_n)$ forme une base de solution de $y^{(n)} + a_{n-1}(x) + y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$.

Exercice 8. *Résoudre, en précisant l'intervalle, $y'' + y = |\sin(x)|$.*

Exercice 9. *Soit $A\colon A \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $X_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $X\colon X \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{C}^1$ solution de $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $X(0) = X_0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in O_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 10. *Résoudre $2xy'' + y' - y = 0$.*

Exercice 11. *Résoudre $y'' - y = \frac{1}{\cosh(x)}$.*

Exercice 12. *Soit $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\Re(\lambda) < 0$. Montrer que*

$$\lim_{t \to +\infty} \exp(tA) = 0.$$

Exercice 13. *Soit f continue périodique de période $T > 0$. Soit $\omega > 0$. À quelles conditions nécessaires et suffisantes (sur f) existe-t-il une solution T-périodique de $y'' + \omega^2 y = f$?*

Exercice 14. *Résoudre $x^2y'' - 2x(1-x)y' + 2(1+x)y = 0$.*

Exercice 15. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) + f(t) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Est-ce encore vrai si $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) - f(t) = 0$?*

Exercice 16. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ solution de pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = A(t)B - BA(t) = [A(t), B]$ (crochet de Lie). Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est semblable à $A(0)$.*

Exercice 17. *Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $[A,B] = AB - BA$. On pose $X_1(t) = \exp(tA)$, $X_2(t) = \exp(tB)X_1(t)$ et $X_3(t) = \exp(-t(A+B))X_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que l'on peut définir $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$X_3'(t) = \exp(-t(A+B))\varphi(t)\exp(tB)\exp(tA),$$

et évaluer $\varphi'(t)$.

2. *On suppose $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Calculer $\varphi(t)$ puis $X_3(t)$. Montrer enfin que*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)\exp\left(-\frac{1}{2}[B,A]\right).$$

Exercice 18. *Soient $p, q\colon I \to \mathbb{R}$ et $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y = 0$. Soit y une solution non nulle de l'équation différentielle. On note $X = \{x \in I | y(x) = 0\}$.*

1. *Montrer que tous les points de X sont isolés.*
2. *Montrer que si I est compact, X est fini.*
3. *Si $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, si X est infini, montrer que l'on peut ordonner X en une suite $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n < x_{n+1}$.*

Exercice 19.

1. *Soient $p, q\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues avec $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Soit (y_1, y_2) une base de solution de l'équation différentielle. Montrer que si $a < b$ sont deux zéros consécutifs de y_1 (y_1 ne s'annule pas sur $]a, b[$), alors y_2 s'annule une seule fois sur $]a, b[$. Et réciproquement : on dit que les zéros de y_1 et y_2 sont entrelacés.*
2. *Soient $r_1, r_2\colon I \to \mathbb{R}$ continues et*

$$\begin{aligned} y'' + r_1 y &= 0, \\ y'' + r_2 y &= 0. \end{aligned}$$

   Soit y_1 une solution non nulle de la première équation différentielle. Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de y_1. Soit y_2 une solution de la deuxième équation différentielle. Montrer que y_2 s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.
   Application : s'il existe $\omega > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $r_1(t) < \omega^2$, montrer que l'écart entre deux zéros consécutifs de y_1 est plus grand que $\frac{\pi}{\omega}$. Et si pour tout $t \in I$, $r_1(t) \geqslant \omega'^2$ avec $\omega' > 0$?

Exercice 20. *Soit $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue T-périodique avec $T > 0$. Soit l'équation différentielle $y'' + py = 0$, on note S l'ensemble de ces solutions.*

1. *Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in S$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x + 2T) - 2Ay(x + T) + y(x) = 0$. On pourra étudier*

$$\mathcal{T}_T : \begin{array}{ccc} S & \to & \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ y & \mapsto & \mathcal{T}_T(y) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(x+T) \end{array} \end{array}$$

   vérifier que $\mathcal{T}_T \in \mathcal{L}(S)$ et déterminer $\chi_{\mathcal{T}_T}$.
2. *Montrer que si $|A| < 1$, alors toutes les solutions de E sont bornées.*
3. *Examiner le cas $|A| \geqslant 1$.*

Exercice 21. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. Soit $y'' - y = f$.*

1. *Montrer que l'équation différentielle admet une unique solutions bornée y_0.*
2. *Évaluer $\lim\limits_{|x|\to+\infty} y_0(x)$.*

Exercice 22. *Soit $q\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $p[a,+\infty[\colon \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$, et l'équation différentielle*

$$p(t)x'' + p'(t)x'(t) + q(t)x = 0.$$

1. *Soit $x\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in [a,+\infty[$, $(x(t), x'(t)) \neq (0,0)$. Montrer qu'il existe $r, \theta\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in [a,+\infty[$,*

$$\begin{array}{rcl} p(t)x'(t) & = & r(t)\cos(\theta(t)), \\ x(t) & = & r(t)\sin(\theta(t)). \end{array}$$

2. *Montrer que l'équation différentielle équivaut à un système*

$$\left\{\begin{array}{rcl} r' & = & f(r,\theta,t), \\ \theta' & = & g(r,\theta,t). \end{array}\right.$$

3. *Si $p = 1, q > 0$ et $\int_a^{+\infty} q(t)\mathrm{d}t$ diverge, montrer que x est solution de l'équation différentielle non nulle s'annulant une infinité de fois.*

Exercice 23. *Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence*

(i) E est stable par dérivation,

(ii) il existe $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que E est l'ensemble solution de l'équation différentielle $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$,

(iii) E est stable par translation, c'est-à-dire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in E$,

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_a(f): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & f(x+a) \end{array}$$

est dans E.

Exercice 24. *Soit*

$$E = \{E \in \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) | f(0) = f(1) = 0\}.$$

Soit $\Delta \in \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}_+^*)$ et

$$\begin{array}{rccc} v: & E & \to & \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \dfrac{1}{\Delta}f'' = v(f) \end{array}$$

Notons que si $v(f) = \lambda f$ alors $v(f) \in E$.

1. *Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $v(f) = \lambda f$, alors $\lambda < 0$. Définir un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E tel que si $v(f) = \lambda f$ et $v(g) = \mu g$ et $\lambda \neq \mu$ alors $\langle f, g\rangle = 0$.*
2. *On prolonge Δ en $\widetilde{\Delta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ tel que $\Delta(x) = 1$ pour tout $x \geqslant 2$. Montrer que pour tout $\gamma < 0$, il existe un unique $f_\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ tel que $f_\gamma(0) = 0$.*

3. *Montrer que f_γ admet une suite (dénombrable) de racines simples notées*

$$x_0(\gamma) = 0 < x_1(\gamma) < \cdots < x_n(\gamma) < \ldots,$$

et telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n(\gamma) = +\infty$.

4. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 1$, $\lim_{\gamma \to 0} x_n(\gamma) = +\infty$.

Exercice 25. *Soit $q \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et*

$$y'' + qy = 0.$$

1. *Soit f solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$, montrer que* $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.
2. *Montrer qu'il existe f_0 solution non bornée.*