Solutions MP/MP*

Calcul différentiel

Solution 1. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Pour $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, posons

$$(x,y,z) = \|(x,y,z)\|_2 (x',y',z'). \tag{1}$$

On a

$$f(x,y,z) = \frac{\|(x,y,z)\|_2^3 (x'^3 + y'^3 - x'y'^2 + y'z'^2 + x'y'z')}{\|(x,y,z)\|_2^2}. \tag{2}$$

Comme $\|(x',y',z')\|_2 = 1 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, on a $(x',y',z') \in [-1,1]^3$ et

$$|f(x,y,z)| \leqslant 5 \|(x,y,z)\|_2 \xrightarrow[\|(x,y,z)\|_2 \to 0]{} 0. \tag{3}$$

D'où la continuité de f en $(0,0,0)$.

On étudie les dérivées partielles en $(0,0,0)$. On forme $x \mapsto f(x,0,0) = x$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)$ existe et vaut 1, puis $y \mapsto f(0,y,0) = y$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)$ existe et vaut 1 et enfin $z \mapsto f(0,0,z) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$ existe et vaut 0. Donc si f est différentiable en $(0,0,0)$, nécessairement

$$\begin{array}{rccc} df_{(0,0,0)}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (h,k,l) & \mapsto & h+k \end{array} \tag{4}$$

Pour $(h,k,l) \neq (0,0,0)$, on a

$$f(h,k,l) - f(0,0,0) - (h+k) = \frac{h^3 + k^3 - hk^2 + kl^2 + hkl - h^3 - hk^2 - hl^2 - k^3 - kh^2 - kl}{h^2 + k^2 + l^2}, \tag{5}$$

$$= \frac{-2hk^2 + hkl - hl^2 - kh^2}{h^2 + k^2 + l^2}. \tag{6}$$

On pose $(h,k,l) = \|(h,k,l)\|_2 (h',k',l')$ avec $\|(h',k',l')\|_2 = 1$. Soit

$$\varphi(h,k,l) = \frac{f(h,k,l) - f(0,0,0) - (h+k)}{\|(h,k,l)\|_2} = -2h'k'^2 + h'k'l' - h'l'^2 - k'h'^2. \tag{7}$$

Pour $(h,k,l) = t(1,1,0)$, on a

$$\varphi(t,t,0) = -\frac{3}{\sqrt{32}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{8}$$

Donc f n'est pas différentiable en $(0,0,0)$, et n'est donc pas $\mathcal{C}^1$ non plus. ■

Remarque 1. *On peut aussi, en fixant $(h,k,l) \in \mathbb{R}^3$, on étudie*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f((0,0,0) + t(h,k,l)) = t\frac{h^3+k^3-hk^2+kl^2+hkl}{h^2+k^2+l^2} \end{array} \tag{9}$$

ψ est dérivable en 0, et

$$D_{(h,k,l)}f(0,0,0) = \frac{h^3+k^3-hk^2+kl^2+hkl}{h^2+k^2+l^2}, \tag{10}$$

non linéaire selon (h,k,l). Donc f n'est pas différentiable en $(0,0,0)$.

Solution 2.

1. On a pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$. Par récurrence, on montre que ψ est continue.

2. Supposons ψ différentiable en x_0. Soit $i \in J$, on a $\psi - \varphi_i \leqslant 0$ sur U et $(\psi-\varphi_i)(x_0) = 0$, donc $\psi - \varphi_i$ admet un extremum en x_0, donc $d(\psi-\varphi_i)_{x_0} = 0$ et $d\psi_{x_0} = d\varphi_{i_{x_0}}$.

   Supposons qu'il existe $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $d\varphi_{i_{x_0}} = l$ pour tout $i \in J$. D'abord, on a pour tout $j \notin J$, $\varphi_j(x_0) > \psi(x_0)$, donc par continuité de $\varphi_j - \psi$ il existe $\eta_j > 0$ tel que

   $$\forall x \in B(x_0, \eta_j), \quad (\varphi_j - \psi)(x) > 0. \tag{11}$$

   On pose alors $\eta = \min\limits_{j \notin J}(\eta_j)$. Alors pour tout $x \in B(x_0,\eta)$, il existe $i \in J$, $\psi(x) = \varphi_i(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $i \in J$, il existe $\delta_i > 0$ tel que si $\|h\| < \delta_i$,

   $$|\varphi_i(x_0+h) - \varphi_i(x_0) - l(h)| \leqslant \varepsilon \|h\|. \tag{12}$$

   On pose $\delta = \min\limits_{i \in H}(\delta_i)$. Donc si $\|h\| \leqslant \min(\delta,\eta)$, on a

   $$|\psi(x_0+h) - \psi(x_0) - l(h)| \leqslant \varepsilon \|h\|, \tag{13}$$

   car $\psi(x_0+h)$ est un des $\varphi_i(x_0+h)$. Donc ψ est bien différentiable en x_0, et pour tout $i \in J$, $d\psi_{x_0} = l = d\varphi_{i_{x_0}}$.

3. Fixons $x_0 \in U, h \in \mathbb{R}^n$. Pour le même η que précédemment, on a pour tout $x \in B(x_0,\eta)$, il existe $i \in J$ tel que $d\psi_x = d\varphi_{i_x}$. Alors

   $$|d\psi_x(h) - d\psi_{x_0}(h)| \leqslant \max_{i \in J} \left| d\varphi_{i_x}(h) - d\varphi_{i_{x_0}} \right| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0. \tag{14}$$

■

Remarque 2. *C'est faux pour un nombre infini de fonctions, par exemple la fonction nulle partout sauf sur $\left[0, \frac{2}{n}\right]$ où elle est affine par morceaux et vaut -1 en $\frac{1}{n}$.*

Solution 3. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit $A = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$. On a alors $f(X) = X^\top AX$. Si $X \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j}\mathrm{d}t, && (15)\\ &= \int_0^1 \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} x_i x_j t^i t^j \mathrm{d}t, && (16)\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^i\right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0. && (17)\end{aligned}$$

Or $\left(\sum_{i=1}^n x_i t^i\right)^2$ est continue positive, donc $f(X) = 0$ si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^n x_i t^i\right)^2 = 0$, pour tout $t \in [0,1]$, donc $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Ainsi, A est définie positive.

Soient $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A. On a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 \|X\|^2 \leqslant f(X)$, donc $\lim\limits_{\|X\|\to+\infty} f(X) = +\infty$. Donc f n'admet pas de maximum global sur H_0, mais un minimum global.

Si f présente un extremum en $X_0 \in H_0$, soit alors $H = (h_1, \ldots, h_n) \in H_0$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(X_0 + tH) \end{array} \qquad (18)$$

φ présente un extremum en $t = 0$, donc $\varphi'(0) = 0$ et $(\nabla f(X_0)|H) = 0$.

On a $\nabla f(X_0) = 2AX_0$ (terme en t du polynôme $f(X_0 + tH)$) et $(2AX_0|H) = 0$ pour tout $H \in H_0$, donc $AX_0 \in H_0^\perp = \mathrm{Vect}((1,\ldots,1))$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX_0 = \lambda \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. Comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$ car $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a

$$X_0 = \lambda A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \qquad (19)$$

et $X_0 \in H_0$ donc $\left(X_0 \middle| \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right) = 1$, donc il y a un unique extremum sur H_0, qui est un minimum absolu :

$$X_0 = \frac{A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}{\left(A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)}. \tag{20}$$

■

Solution 4. Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ ouvert. f est$\mathcal{C}^\infty$ sur Δ.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, pour $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f\left(r\cos(\theta), y_0 + t\sin(\theta)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \text{ ou } \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \\ r^2\cos^2(\theta)\sin\left(\frac{y_0 + r\sin(\theta)}{r\cos(\theta)}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{21}$$

Dans tous les cas, $|f(r\cos(\theta), y_0 + r\sin(\theta))| \leqslant r^2 \xrightarrow[r \to 0]{} 0$. Donc f est continue en $(0, y_0)$.

Pour l'existence des dérivées partielles en $(0, y_0)$: on forme $x \mapsto f(x, y_0)$ et on se demande si elle est dérivable en 0. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x,y_0) - f(0,y_0)}{x} = x\sin\left(\frac{y_0}{x}\right), \tag{22}$$

donc

$$\left|\frac{f(x,y_0) - f(0,y_0)}{x}\right| \leqslant |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0. \tag{23}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$ existe et vaut 0.

Soit $y \mapsto f(0,y) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ existe et vaut 0.

Si f est différentiable en $(0, y_0)$, nécessairement on a

$$\begin{array}{rccl} df_{(0,y_0)} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (h,k) & \mapsto & h\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = 0 \end{array} \tag{24}$$

Étudions donc

$$f(h, y_0 + k) - f(0, y_0) = \varphi(h, k) = \begin{cases} h^2 \sin\left(\frac{y_0+k}{h}\right), & \text{si } h \neq 0, \\ 0, & \text{si } h = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Alors $|\varphi(h,k)| \leqslant \|(h,k)\|_2^2$, donc $\varphi(h,k) = \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}((h,k))$ donc f est différentiable en $(0,0)$.

Pour tout $(x_0, y_0) \in \Delta$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 2x_0 \sin\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - y_0 \cos\left(\frac{y_0}{x_0}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0 \cos\left(\frac{y_0}{x_0}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Pour $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \begin{cases} 0, & \text{si } r\cos(\theta) = 0, \\ 2r\cos(\theta)\sin\left(\frac{y_0 + r\sin(\theta)}{r\cos(\theta)}\right), & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27}$$

Si $y_0 \neq 0$, pour $\theta = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(r, y_0) = -y_0 \cos\left(\frac{y_0}{x}\right)$, qui n'a pas de limite en $r \to 0$. Si $y_0 = 0$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| \leqslant 3r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ et on a toujours $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. ■

Solution 5. Soit $X_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Si $\|\cdot\|_1$ est différentiable en X_0, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$x_i \mapsto \left\|(x_1^0, \ldots, x_i, \ldots, x_n^0)\right\| = |x_i| + \sum_{j \neq i_0} \left|x_j^0\right|, \tag{28}$$

est dérivable en x_i^0. Nécessairement, $x_i^0 \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Réciproquement, si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i^0 \neq 0$, notons $\varepsilon_i = 1$ si $x_i^0 > 0$ et $\varepsilon_i = -1$ sinon. Pour X suffisamment proche de X_0, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, x_i est du signe dex_i^0 et $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i$, localement linéaire donc différentiable et

$$d\|\cdot\|_1(X_0)\colon h = (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h_i. \tag{29}$$

S'il existe un unique indice $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\left|x_{i_0}^0\right|)\,\|X_0\|_\infty$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$, on a $\left|x_j^0\right| < \left|x_{i_0}^0\right|$ ($\neq 0$ car sinon $x_1^0 = \cdots = x_n^0 = 0$ mais $n \geqslant 2$). Pour $X = (x_1, \ldots, x_n)$ suffisamment proche de X_0, comme $x_j \mapsto |x_j| - |x_{i_0}|$ est continue et strictement négative en x_0, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$, $|x_j| < |x_{i_0}|$. Donc $\|X\|_\infty = |x_{i_0}| = \varepsilon_{i_0} x_{i_0}$, linéaire donc $\|\cdot\|_\infty$ est différentiable en X_0.

S'il existe $i_1 \neq i_2 \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $\left|x_{i_1}^0\right| = \left|x_{i_2}^0\right| = \|X_0\|_\infty$, quitte à remplacer âr $-X_0$ on suppose $x_{i_1}^0 > 0$. Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \|X_0 + (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)\| = \begin{cases} t + x_{i_1}, & \text{si } t > 0, \\ |x_{i_2}| = x_{i_1}, & \text{si } t < 0. \end{cases} \end{array} \tag{30}$$

φ n'est pas dérivable en 0, donc $\|\cdot\|_\infty$ est non différentiable en X^0. ■

Solution 6. Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. On prend $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in [0,1]^{n-1} \backslash \{(0, \dots, 0)\}$. On veut prolonger par continuité en $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en i_0-ième position. On a

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \times (1 - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}))}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} (1 - \varepsilon_i) \times (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)} \underset{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \to (0, \dots, 0)}{\sim} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i}{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}}, \tag{31}$$

$$\leqslant \|(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})\|_1^{n-2} \xrightarrow[(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \to 0]{} 0, \tag{32}$$

car $n \geqslant 3$.

On note Σ_n le simplexe. On peut définir

$$\begin{array}{rccl} f: & \Sigma_n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)} & \text{si } \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \tag{33}$$

f est continue sur le compact Σ_n donc atteint son maximum sur Σ_n.

On a $f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) > 0$ donc le maximum est strictement positif et est atteint en

$$X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in]0, 1[^n. \tag{34}$$

Soit $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n h_i = 0$. Pour $|t|$ suffisamment petit, on a $X_0 + th \in \Sigma_n$ et $\varphi\colon t \mapsto f(X_0 + th)$ admet un extremum en 0. On a $\varphi'(0) = 0 = (\nabla f(X_0) | h)$, vrai pour tout h tel que $\sum_{i=1}^n h_i = 0$, donc pour tout $h \in \{(1, \dots, 1)\}^\perp$. Donc $\nabla f(X_0) \in \mathrm{Vect}(1, \dots, 1)$. Par symétrie, on a $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(-1 + \frac{1}{1 - x_i}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x_j}{1 - x_j}. \tag{35}$$

On a donc
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \frac{1}{(1-x_i^0)^2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x_j^0}{1-x_j^0} = \frac{1}{x_{i_0(1-x_i^0)}}\times\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j^0}{1-x_j^0}. \tag{36}$$
Ainsi, pour $i_1 \neq i_2$,
$$\frac{1}{x_{i_1}(1-x_{i_1})} = \frac{1}{x_{i_2}(1-x_{i_2})}. \tag{37}$$
Soit
$$\begin{array}{rccc} \psi : &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t(1-t) \end{array} \tag{38}$$
. Alors $x_{i_2}^0 = x_{i_1}^0$ ou $1 - x_{i_1}$. Dans le deuxième cas, on a $x_{i_1}^0 + x_{i_2}^0 = 1$ et pour tout $i \notin \{i_1, i_2\}$, $x_i = 0$, ce qui n'est pas car le maximum est strictement positif.

Donc $x_1^0 = \cdots = x_n^0 = \frac{1}{n}$ et donc
$$\sup\left\{\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)}\middle|(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\} = \left(\frac{1}{n-1}\right)^n. \tag{39}$$
■

Remarque 3. *En notant* $\alpha_n = \left(\frac{1}{n-1}\right)^n$*, on a*
$$\alpha_n = \mathrm{e}^{-n\ln(n-1)} = \mathrm{e}^{-n\left(\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n^n}. \tag{40}$$

Solution 7. On pose
$$\begin{array}{rccc} f^\star : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (r,\theta) & \mapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \tag{41}$$
$f^\star$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition. On a
$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f^\star}{\partial r} & = & \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta), \\ \frac{\partial f^\star}{\partial \theta} & = & \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta. \end{array} \tag{42}$$
Ainsi, $r\frac{\partial f^\star}{\partial r} = r\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$. En reportant, on a donc
$$r\frac{\partial f^\star}{\partial r} + r^2 = 0. \tag{43}$$

Pour $r > 0$, on a $\frac{\partial f^\star}{\partial r} = -r$, encore vrai pour $r \geqslant 0$ par continuité de $\frac{\partial f^\star}{\partial r}$. Ainsi,
$$f^\star(r,\theta) = -\frac{r^2}{2} + g(\theta), \tag{44}$$
avec g de classe $\mathcal{C}^1$. ■

Solution 8.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Tr}(M^k)$ est un polynomiale en coefficients de M. Soit $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, formons
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & f(M+tH) \end{array} \tag{45}$$
Soit $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Tr}((M+tH)^k)$ est un polynôme, et la dérivée en 0 est le terme en t. Ce coefficient vaut
$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Tr}(M^{i-1}HM^{k-i}) = k\operatorname{Tr}(M^{k-1}H). \tag{46}$$
Donc $df_M(H) = \varphi'(0) = (\operatorname{Tr}(H), \dots, n\operatorname{Tr}(M^{n-1}H))$.

2. On a $df_M \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème du rang, on a $\operatorname{rg}(df_M) = n^2 - \dim(\ker(df_M))$. Or
$$\ker(df_M) = \left\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \middle| \operatorname{Tr}(H) = \operatorname{Tr}(MH) = \cdots = \operatorname{Tr}(M^{n-1}H) = 0\right\}, \tag{47}$$
$$= \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \operatorname{Tr}(P(M)H) = 0\}. \tag{48}$$
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour tout $A \in \mathbb{R}[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A(M) = P(M)$ où P est le reste de la division euclidienne de A par χ_M. Ainsi,
$$\ker(df_M) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \forall P \in \mathbb{R}[X], \operatorname{Tr}(P(M)H) = 0\}. \tag{49}$$
Or $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}(A^\intercal B)$ est un produit scalaire, donc
$$\ker(df_M) = \left\{ H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \middle| \forall P \in \mathbb{R}[X], (\underbrace{P(M)^\intercal}_{P(M^\intercal} | H) = 0 \right\} = \mathbb{R}[M^\intercal]^\perp. \tag{50}$$
Comme $\dim(\mathbb{R}[M^\intercal]) = \deg \Pi_{M^\intercal} =$. Ainsi, $\operatorname{rg}(df_M) = \deg \Pi_M$.

3. A priori, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Pi_M \mid \chi_M$ et
$$C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \deg \Pi_M = n\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \operatorname{rg}(df_M) = n\}. \tag{51}$$
Lemme 1. *Si* $\operatorname{rg}(A) = p$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $M \in B(A, \alpha)$, $\operatorname{rg}(M) \geqslant p$.

Preuve du lemme 1. Il existe une sous-matrice carrée de taille p inversible extraite de A. ■

Soit $M_0 \in C$, $\mathrm{rg}(df_{M_0}) = n$, on applique le lemme à $\mathrm{mat}(df_{M_0}, B, B')$ où B est la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B' est la base de $\mathbb{R}^n$. f étant $\mathcal{C}^1$, $M \mapsto df_M$ est continue et il existe α tel que si $\|M - M_0\| \leqslant \alpha$, alors $\mathrm{rg}(df_M) \geqslant n$. Or $df_M \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, donc $\mathrm{rg}(df_M) \leqslant n$ et $B(M_0, \alpha) \subset C$. Donc C est ouvert.

■

Solution 9. On forme

$$\begin{array}{rccl} f^\star : & \mathbb{R}^\star \times [-\pi, \pi] \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ & (r, \theta) & \mapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \tag{52}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\star}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \\ \frac{\partial f^\star}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta. \end{aligned} \tag{53}$$

Donc $r\frac{\partial f^\star}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$. En reportant, on a

$$r\frac{\partial f^\star}{\partial r} = \frac{1}{\cos^2\theta r^2}, \tag{54}$$

donc $\frac{\partial f^\star}{\partial r} = \frac{1}{r^3\cos^2\theta}$ en intégrant par rapport à r (θ constant). Ainsi,

$$f^\star(r, \theta) = -\frac{1}{2r^2\cos^2\theta} + g(\theta), \tag{55}$$

avec g de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \setminus \{(x, 0) | x \leqslant 0\}$, on a

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right). \tag{56}$$

Donc

$$f(x, y) = -\frac{1}{2x^2} + h\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right), \tag{57}$$

avec h de classe $\mathcal{C}^1$. ■

Solution 10.

1. Par convexité de f, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(ty + (1-t)x) &\leqslant tf(y) + (1-t)f(x), \\ f(x + (t(y - x))) &\leqslant f(x) + t(f(y) - f(x)). \end{aligned} \tag{58}$$

On a $df_x(y-x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}$, or pout tout $t \in]0,1]$, on a

$$\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t} \leqslant f(y)-f(x). \tag{59}$$

Donc $df_x(y-x) \leqslant f(y)-f(x)$.

2. Si x est point critique de f, on a $df_x = 0$. Donc pour tout $y \in U$, $f(y) \geqslant f(x)$ donc f présente un minimum absolu. La réciproque est vraie car U est ouvert.
3. soit $(x,y) \in E^2$, soit $t \in [0,1]$. On a $f(x) = f(y) = \min\limits_U f$. Par convexité de f, on a

$$f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y) = f(y), \tag{60}$$

donc $f(tx+(1-t)y) = f(y) = \min\limits_U f$.
4. On a $E = \{x \in \mathbb{R}^n | df_x = 0\} = df^{-1}(\{0\})$. E est fermé car df est continue (application linéaire en dimension finie).

■

Solution 11. Si f est α-homogène, soit $g(t) = f(tx) = t^\alpha f(x)$. On a

$$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x) = df_{tx}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n). \tag{61}$$

Pour $t = 1$, on a le résultat.

Réciproquement, soient $g_1(t) = f(tx)$ et $g_2(t) = t^\alpha f(x)$. On a

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= \textstyle\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx), \\ g_2'(t) &= \alpha t^{\alpha-1} f(x). \end{aligned} \tag{62}$$

Donc $tg_2'(t) = \alpha g_2(t)$ et $tg_1'(t) = \sum_{i=1}^n tx_i \frac{\partial f}{\partial x}(tx) = \alpha f(tx) = \alpha g_1(t)$.

g_1 et g_2 sont solutions d'une même équation différentiable et $g_1(1) = g_2(1)$ donc $g_1 = g_2$. ■

Remarque 4.

— *Une application linéaire est 1-homogène.*

— *Un produit scalaire est 2-homogène.*

— $(x,y,z) \to xy^2 - 4x^3 + xyz$ *est 3-homogène.*

Solution 12. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On a $f(x,x,x) = 3x^2 - x^3 \xrightarrow[x\pm\infty]{} \pm\infty$. $X = (x,y,z)$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{63}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} 2x &= yz, \\ 2y &= xz, \\ 2z &= xy, \end{aligned} \tag{64}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{x^2z}{4}, \\ x &= \tfrac{xz^2}{4}, \\ y &= \tfrac{xz}{2}, \end{aligned} \tag{65}$$

si et seulement si $z = x = y0$ ou $(x,y,z) \in \{(\pm 2, \pm 2, \pm 2)\}$ et $y = \frac{xz}{2}$.

— En (0,0,0), soit $X = (x,y,z)$, soit $X' = \frac{X}{\|X\|_2}$. On a $f(X) = \|X\|_2^2 - \|X\|_2^3 x'y'z'$. Or $|x'y'z'| \leqslant 1$ car $\|X'\|_2 = 1$. Donc $f(X) = \|X\|_2^2 + \underset{X\to 0}{o}\left(\|X\|_2^2\right) \underset{X\to 0}{\sim} \|X\|_2^2$. Donc $f(X) \geqslant 0 = f(0)$ au voisinage de 0. On a donc un minimum local en 0.

— En (2,2,2), on a

$$f(2+h, 2+k, 2+l) - f(2,2,2) = (2+h)^2 + (2+k)^2 + (2+l)^2 - (2+h)(2+k)(2+l) - 4, \tag{66}$$

$$= \underbrace{h^2 + k^2 + l^2 - 2hk - 2kl - 2hl}_{q(h,k,l)} - \underbrace{hkl}_{= \underset{(h,k,l)\to(0,0,0)}{o}(\|(h,k,l)\|_2^2)} . \tag{67}$$

On a

$$q(h,k,l) = (h,k,l) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} . \tag{68}$$

On a $A = 2I_3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ semblable à $\mathrm{diag}(2, 2, -1)$. Les valeurs propres de A sont de signes opposés donc $q(h, k, l)$ change de signe donc f admet un point col en (2,2,2) : pas d'extremum. Par exemple, $q(h, 0, 0) = h^2 > 0$ et $q(h, h, h) = -3h^2 < 0$ pour $h \neq 0$.

■