

*Exercices MP/MP\**

*Séries Entières*

**Exercice 1.** Donner le rayon de convergence de

1.  $\sum_{n \geq 1} \left( \cosh \left( \frac{1}{n} \right) \right)^{n^\alpha} z^n$ ,
2.  $\sum_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)^{n^3} z^n$ .

**Exercice 2.**

1. Soit  $(\theta_1, \dots, \theta_p) \in [0, 2\pi[$  des réels distincts,  $(m_1, \dots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ . Montrer que

$$\left( u_n = \sum_{k=1}^p m_k e^{in\theta_k} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (1)$$

ne tend pas vers 0.

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  et  $a_n = \text{Tr}(A^n)$ . Donner le rayon de convergence et la somme de  $\sum a_n z^n$ .

**Exercice 3.** Donner le rayon de convergence et calculer la somme (en cas de convergence) de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sum_{k=1}^n k^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{6z^n}{n(n+1)(2n+1)}. \quad (2)$$

**Exercice 4.** On définit

$$\begin{aligned} f : ]-1, +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \frac{t}{\ln(1+t)} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ , en déduire que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . On pourra former  $\int_0^1 (1+t)^u du = I(t)$ .

**Exercice 5.** Donner le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$  où

$$a_n = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^{\ln(n)}. \quad (4)$$

**Exercice 6.** Donner le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  où  $a_n$  est le nombre de diviseurs  $n$ .

**Exercice 7.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n-1} a_{n+1}}{a_n^2} = l \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ .

**Exercice 8.** Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . On pose  $\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ . Déterminer  $e^{\phi(z)}$ .

**Exercice 9.** Donner le rayon de convergence et calculer la somme (sur le disque ouvert de convergence) de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}. \quad (6)$$

**Exercice 10.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles, on suppose que

- i) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n \geq 0$ ,
- ii)  $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ ,
- iii) le rayon de convergence de  $\sum b_n z^n$  vaut 1,
- iv)  $\sum b_n$  diverge.

On forme sur  $[0, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ .

- 1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ .
- 2. Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x)$ .
- 3. Donner un équivalent simple quand  $x \rightarrow 1^-$  de  $h_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 11.** Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  de rayon de convergence 1. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = S \in \mathbb{R}$  et que  $a_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ . Montrer que  $\sum a_n$  converge et vaut  $S$ . On pourra étudier  $f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .

**Exercice 12.** Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  développable en série entière avec un rayon de convergence  $\rho > 0$  telle que  $f(0) \neq 0$ . Montrer qu'il existe une fonction  $T$ , développable en série entière, et  $r > 0$ , telle que si  $|z| < r$ ,  $f(z) = e^{T(z)}$ .

**Exercice 13.** Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , on pose pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{1}{\sin(n\pi a)}$ . Soit  $R_a$  le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ .

- 1. Montrer que  $R_a \leq 1$ .
- 2. Évaluer  $R_a$  lorsque  $a$  est irrationnel algébrique.
- 3. Existe-t-il  $a$  tel que  $R_a = 0$  ?

**Exercice 14.** Soit  $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N$  premiers entre eux dans leur ensemble. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $c_n = \left| \left\{ (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{N}^N \mid p_1 a_1 + \dots + p_N a_N = n \right\} \right|$ . Donner un équivalent simple de  $c_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 15.** Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{1+x+x^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Montrer que  $f$  est développable en série entière, et donner le rayon de convergence de la série entière obtenue. On pourra dériver  $f^2(x)$ .

**Exercice 16.** Soit  $f: [0, A[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $f^{(n)}(t) \geq 0$ .

1. Soit  $x \in [0, A[$ , montrer que  $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  converge.
2. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, A[$ ,  $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ . Montrer que si  $x < y < A$ , on a  $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y)$ .
3. En déduire que  $f$  est développable en série entière sur  $[0, A[$ .
4. Application à  $\tan$ .

**Exercice 17.** Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  si

1.  $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ .
2. pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $a_{3p} = \frac{(-1)^p}{2^p}$ ,  $a_{3p+1} = 3^p$  et  $a_{3p+2} = 0$ . Calculer la somme.
3.  $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2} dt$ , et calcul. Quelle est la valeur en  $-1$  ?

**Exercice 18.** On pose  $\omega_0 = 1$ . Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\omega_n$  est le nombre de relations d'équivalence sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On s'intéresse à la série entière  $\sum \frac{\omega_n}{n!} z^n = \sum a_n z^n$ , de rayon de convergence  $R$ , de somme notée  $f(z)$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega_k$  et que  $\omega_n \leq n^n$  et  $R > 0$ .
2. Soit  $r > 1$  et  $n_0 = \lfloor re^r \rfloor$ . On pose  $A = \max_{k \leq n_0} \frac{\omega_k}{k!} r^k$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\omega_n r^n}{n!} \leq A$ , en déduire  $R$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,  $f'(x) = e^x f(x)$ , déduire  $f(x)$  et une expression de  $\omega_n$ .

**Exercice 19.** On appelle « partition » d'un entier  $n \geq 0$  toute suite décroissante d'entiers naturels  $(t_k)_{k \geq 1}$  telle que  $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k = n$  (somme finie). On note  $p_n$  le nombre de partitions de  $n$ . Soit  $R$  le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} p_n z^n = f(z)$ .

1. Montrer que  $R > 0$ .

2. Montrer que pour tout  $x \in [0, R[$ , on a  $f(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}$ , est-ce encore vrai pour  $z \in D(0, R)$  ?
3. Évaluer  $R$ .

**Exercice 20.** Soit  $U$  un ouvert bornée non vide de  $\mathbb{C}$  et  $f: \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$  continue sur  $\overline{U}$  analytique sur  $U$ , c'est-à-dire que pour tout  $z_0 \in U$ , il existe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $h \in \mathbb{C}$  tel que  $|h| < d(z_0, \partial U)$ ,  $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$ .

1. Montrer que pour tout  $z_0 \in U$  et  $r \in [0, d(z_0, \partial U)[$ , on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt. \quad (8)$$

2. En déduire que  $|f|$  atteint son maximum et son minimum sur  $\partial U$ .
3. Que peut-on dire si  $f = 0$  sur  $\partial U$  ?

**Exercice 21.**

1. Montrer que l'on peut, pour  $q \in \mathbb{C}$ ,  $|q| < 1$  fixé, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^k z)$ .
2. Montrer que  $f$  est développable en série entière.
3. De même pour  $\frac{1}{f}$ .

**Exercice 22.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  analytique sur  $U$  (développable en série entière au voisinage de tout point de  $U$ ).

1. Soit  $z_0 \in U$  et  $r_0 > 0$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que si  $h \in D(0, r_0)$ ,  $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$ . On suppose qu'il existe  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$  telle que

(i) pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_k \neq z_0$ ,

(ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_k = z_0$ ,

(iii) pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f(\xi_k) = 0$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 0$ .

2. On suppose de plus que  $U$  est connexe par arcs. Montrer que  $f = 0$  sur  $U$ . Est-ce encore vrai si  $(\xi_k)$  ne converge pas ?

**Exercice 23.** Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ .

1. Montrer que  $f(x) = \ln(1 - 2x \cos(\theta) + x^2)$  est développable en série entière en 0.

2. Qu'en déduit-on relativement à  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$  ?
3. Calculer  $I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(\theta) + x^2) d\theta$ .

**Exercice 24.** Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante d'entiers naturels.

1. Donner le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} x^{p_n}$ . On pose  $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^{p_n}$ .
2. On suppose que  $n = o_{n \rightarrow +\infty}(p_n)$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$ .
3. Réciproque ?

**Exercice 25.** Soit  $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n - v_n$  et  $v_{n+1} = u_n - 2v_n$ . Donner le rayon de convergence et les sommes des séries entières  $U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$  et  $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n$ .

**Exercice 26.**

1. Donner le développement en série entière de  $f(z) = \frac{\sin(\theta)}{z^2 - 2z \cos(\theta) + 1}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ .
2. En déduire  $I(z) = \int_0^\pi \frac{\sin(\theta) d\theta}{z^2 - z - 2z \cos(\theta) + 1}$ .

**Exercice 27.**

1. Soit  $Y$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $(\mathbb{E}(Y^k))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  caractérise la loi de  $Y$ .
2. Soit  $Y$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose qu'il existe  $a \in [0, 1[$  tel que  $\mathbb{P}(Y = k) = O_{k \rightarrow +\infty}(a^k)$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Y^n$  a une espérance finie et que  $(\mathbb{E}(Y^n))_{n \geq 1}$  caractérise la loi de  $Y$ .

**Exercice 28.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{C}^1$  au sens complexe, c'est-à-dire que pour tout  $z_0 \in U$ , il existe  $f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$  et  $f': U \rightarrow \mathbb{C}$  est continue.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} g: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto \int_0^{2\pi} \frac{f((1-\lambda)z + \lambda r e^{it}) - f(z)}{r e^{it} - z} r e^{it} dt \end{aligned} \quad (9)$$

est constante. En déduire que  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(r e^{it} e^{-int}) dt. \quad (10)$$

2. Montrer que pour tout  $z_0 \in U$ , on a pour  $R = d(z_0, \partial U)$ , il existe  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  tel que pour tout  $h \in D(0, R)$ ,  $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$ .

**Exercice 29.** Calculer, en précisant le domaine de définition,

$$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}. \quad (11)$$

**Exercice 30.** Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ . On suppose que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $f(z) \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$ .
2. On pose  $v(z) = \Im(f(z))$ . Montrer que pour tout  $m \geq 1$ , pour tout  $r > 0$ ,

$$\pi r^m a_m = 2 \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin(m\theta) d\theta, \quad (12)$$

puis que  $|r^m a_m| \leq mr |a_1|$ .

3. En déduire que  $f$  est affine.

**Exercice 31.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière telle que  $\sum |a_n|$  converge. On définit

$$\begin{aligned} f : \overline{D(0,1)} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \end{aligned} \quad (13)$$

On note  $P_{r,n}(x) = \sum_{k=-n}^n r^{|k|} e^{ikx}$ , et pour  $r \in [0,1[$ ,  $P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} e^{ikx}$ . Il s'agit du noyau de Poisson.

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $r \in [0,1[$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{|k|} e^{ikx} f(e^{i(x-t)}) dt = a_k r^k e^{ikx}. \quad (14)$$

En déduire que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) f(e^{i(x-t)}) dt = f(re^{ix}). \quad (15)$$

2. Quel est le signe de  $P_r$  ? Calculer  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r - t dt$ .
3. Montrer que si  $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ , alors  $f(\overline{D(0,1)}) \subset \overline{D(0,1)}$ .

**Exercice 32.** Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}^*}$  indépendants tels que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ . On pose  $R_n = \chi_{A_k}$ .

1. Donner l'espérance et la variance de  $R_n$ , et donner à chaque fois un équivalent.

2. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{R_n}{\ln(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0. \quad (16)$$

3. Donner la fonction génératrice  $G_{R_n}$ . En déduire  $\mathbb{P}(R_n = 1)$  et  $\mathbb{P}(R_n = 2)$ .

4. Soit  $a < b \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $T_n = R_{nb} - R_{na}$ . Donner la fonction génératrice  $G_{T_n}$ . Déterminer, pour  $t \geq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{T_n}(t)$ . On pourra montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .