

*Exercices MP/MP**
Fonction d'une variable réelle

Exercice 1 (Polynômes de Legendre). On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n = P_n^{(n)}$ où

$$P_n = \frac{(X^2 - 1)^n}{2^n n!}$$

1. On munit $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

2. Montrer que

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k} (x-1)^k$$

3. Montrer que L_n admet n zéros simples sur $] -1, 1[$.

4. Montrer que pour $n \geq 2$,

$$L_n = \frac{2n-1}{n} X L_{n-1} - \frac{n-1}{2n-1} L_{n-2}$$

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, $(x_0, \dots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ avec $a < b$ et

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & \dots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & \dots & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \Delta f(x_0, \dots, x_n)$$

S'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $\Delta f(x_0, \dots, x_n)$ prend n'importe quelle valeur, sinon $\prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$\Delta f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Exercice 3. Soit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid \|f''\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Soit pour $f \in E$,

$$A(f) = f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)$$

Déterminer $\sup_{f \in E} A(f)$.

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) - f(y) = (x - y)f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ existe.
2. Montrer que si $l \geq 0$, f est décroissante.
3. Montrer que si $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - lx$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer

$$l_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k}$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, f de classe \mathcal{C}^1 avec $f(0) = 0$. Montrer que

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} f\left(\frac{1}{k+n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p+1)f'(0).$$

3. Si on suppose seulement f continue et $f(0) = 0$, montrer que l'on peut avoir $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente.
4. Si f est de classe \mathcal{C}^2 avec $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$, trouver un équivalent de v_n .

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$ existe et f' est uniformément continue. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Et si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$? Et si f est seulement \mathcal{C}^1 sans f' uniformément continue?

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions f et g continues de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x+y) - f(x-y) = 2yg(x)$$

Exercice 9. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ convexe de classe \mathcal{C}^1 . Soit

$$S_n = \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(t)dt$$

Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq S_n \leq \frac{1}{8}(f'(n) - f'(1))$$

Exercice 10.

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie avec f de classe \mathcal{C}^2 et telle que f et f'' soient bornées sur \mathbb{R} . On pose $M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$ et $M_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f''(t)\|$. Montrer que f' est bornée sur \mathbb{R} et que

$$M_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f'(t)\| \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on formera

$$\begin{cases} A = f(x+h) - f(x) - hf'(x) \\ B = f(x-h) - f(x) + hf'(x) \end{cases}$$

et on exprimera $f'(x)$ en fonction de A et B .

2. Si f est de classe \mathcal{C}^n et telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur \mathbb{R} , montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $f^{(k)}$ l'est aussi. On pourra former

$$\begin{cases} A_1 = f(x+1) - f(x) - f'(x) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \\ A_k = f(x+k) - f(x) - kf'(x) - \dots - k^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{cases}$$

Exercice 11 (Longueur d'un arc). Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ un arc de classe \mathcal{C}^1 . Pour $\sigma = (a_0, \dots, a_n) \in \Sigma([a, b])$ (ensemble des subdivisions de $[a, b]$), on définit

$$l_{\sigma, \gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|$$

On dit que γ est de longueur finie si et seulement il existe $l(\gamma) = \sup_{\sigma \in \Sigma([a, b])} l_{\sigma, \gamma}$ appelée longueur de γ .

1. Montrer que pour tout $\sigma \in \Sigma([a, b])$,

$$l_{\sigma, \gamma} \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

2. Soit $\sigma = (a_1, \dots, a_n) \in \Sigma([a, b])$, montrer que

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $\delta(\sigma) \leq \alpha_0$ (où δ est le pas de la subdivision, c'est-à-dire la longueur maximale entre deux a_i), alors

$$\left| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Puis montrer qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que si $\delta(\sigma) \leq \alpha_1$, alors

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En déduire que

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

4. Étudier

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

Exercice 12 (Théorème de relèvement). Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}^*$ un arc \mathcal{C}^k avec $k \geq 0$. On appelle relèvement continu de γ toute application continue $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)}$.

1. Montrer que si θ_1 et θ_2 sont deux relèvements continus de γ , alors il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $t \in I$, $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k_0\pi$.
2. On suppose $k \geq 1$. On pose $f(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$. Montrer que f est \mathcal{C}^k et que s'il existe θ relèvement \mathcal{C}^1 de γ , alors pour tout $t \in I$,

$$\theta'(t) = -i \frac{f'(t)}{f(t)}$$

3. Pour $k \geq 1$, en déduire qu'il existe un relèvement \mathcal{C}^k de γ .

Exercice 13. Existe-t-il un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 3f(x)$.