*Solutions MP/MP**

Probabilités sur un univers dénombrable

Solution 1.

1. On note P :'le lancer initial donne pile', F :'le lancer initial donne face', B_k :'la k-ième boule est blanche', N_k :'la k-ième boule est noire'.

   On a
$$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(P)\,\mathbb{P}_P(B_k) + \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}_F(B_k) = \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} \tag{1}$$
   donc
$$\boxed{\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2}} \tag{2}$$

2. On a
$$\boxed{\mathbb{P}_{B_k}(P) = \mathbb{P}_P(B_k)\frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(B_k)} = \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1} \tag{3}$$

3. On a
$$\mathbb{P}\left(B_1 \bigcap \dots \bigcap B_k\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_P\left(B_1 \bigcap \dots \bigcap B_k\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_F\left(B_1 \bigcap \dots \bigcap B_k\right) \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{j}{j+1} + \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right) \tag{5}$$
$$\boxed{= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\right)} \tag{6}$$

4. On a
$$\mathbb{P}\left(B_k \bigcap B_{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} + \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{k+2}\right) \tag{7}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)}\right) \tag{8}$$
   Donc on a indépendance si et seulement si
$$\mathbb{P}\left(B_k \bigcap B_{k+1}\right) = \mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}(B_{k+1}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \tag{9}$$
$$\Leftrightarrow 2k(k+1) + 2 = (k+2)(k+2) \tag{10}$$
$$\Leftrightarrow 2k^2 + 2k = k^2 + 3k \tag{11}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{k = 1} \tag{12}$$

   Ainsi, seuls les deux premiers tirages sont indépendants.

■

Remarque 1. *Seuls les deux premiers tirages sont indépendants car le premier tirage est indépendant du lancer de pièce.*

Solution 2.

1.
$$\boxed{p_0 = 1, q_0 = 0, p_N = 0, q_N = 1} \tag{13}$$

2. Soit $a \in [\![1, N-1]\!]$. Puisque les lancers de pièce sont indépendants, on peut partitionner selon le résultat du premier lancer. On a donc [probabilités conditionnelles]

$$\boxed{p_a = p \times p_{a+1} + q \times p_{a-1}} \tag{14}$$

L'équation caractéristique est

$$pX^2 - x + q = 0 \tag{15}$$

On a $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4(1-p)p = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$.

Ainsi, si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $a \in [\![0, N]\!]$, on a

$$p_a = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^a \tag{16}$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \times \left(\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right)} \tag{17}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$p_a = \alpha a + \beta \tag{18}$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{N}(N-a)} \tag{19}$$

3. Pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$q_a = pq_{a+1} + qp_{a-1} \tag{20}$$

donc pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$p_a + q_a = p\left(p_{a+1} + q_{a+1}\right) + q\left(p_{a-1} + q_{a-1}\right) \tag{21}$$

Comme $p_0 + q_0 = p_N + q_N = 1$, on a pour tout $a \in [\![0, N]\!]$,

$$\boxed{p_a + q_a = 1} \tag{22}$$

Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement en temps fini.

■

Solution 3.

1. Les tirs sont indépendants donc

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(A_n\right) = (1-a)^n \times (1-b)^n \times a\\&\mathbb{P}\left(B_n\right) = (1-a)^n \times (1-b)^n \times (1-a) \times b\end{aligned}} \tag{23}$$

2. On a

$$G_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \tag{24}$$

réunion disjointe. Donc

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(G_A\right) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab}\\&\mathbb{P}\left(G_B\right) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \frac{b(1-a)}{a+b-ab}\end{aligned}} \tag{25}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(G_A\right) + \mathbb{P}\left(G_B\right) = 1} \tag{26}$$

3. On a $\mathbb{P}\left(G_A\right) = \mathbb{P}\left(G_B\right)$ si et seulement si

$$\frac{a}{1-a} = b \tag{27}$$

Cela implique que $\frac{a}{1-a} \in]0,1[$ ce qui est possible uniquement (après étude de fonction) si

$$\boxed{a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } b = \frac{a}{1-a}} \tag{28}$$

■

Solution 4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose E_n :'Le joueur gagne au bout du n-ième lancer' (évènement disjoints) et G :'Le joueur gagne'. On a $G \cup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$. Donc
$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{n} = \ln(2)} \tag{29}$$

2. On note P_n :'le joueur obtient pile au n-ième lancer', P :'il obtient pile'. On a
$$\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\mathbb{P}(G \bigcap P_n)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}_{P_n}(G) \times \mathbb{P}(P_n)}{\mathbb{P}(G)} \tag{30}$$
donc
$$\boxed{\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\ln(2)}} \tag{31}$$
Puis
$$\boxed{\mathbb{P}_G(P) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}_G(P_n) = 1} \tag{32}$$

■

Remarque 2. *On a utilisé le résultat suivant : pour tout $x \in]0,1[$,*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \tag{33}$$
Soit on connaît le résultat avec les séries entières, soit on le redémontre à la main : pour $N \geqslant 1$, on a
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} x^n t^{n-1} dt \tag{34}$$
$$= x\int_0^1 \frac{1-(xt)^N}{1-xt} dt \tag{35}$$
$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1-xt} dt}_{=[\ln(1-xt)]_0^1} + R_N \tag{36}$$
avec $|R_N| \leqslant \frac{x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ d'où le résultat.

Solution 5.

1. On a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 + p_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} = 2\alpha + (1-2\alpha) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{37}$$
donc
$$\boxed{\text{c'est une probabilité sur } \mathbb{N}.} \tag{38}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note E_k :'la famille a k enfants et exactement 2 garçons', E :'la famille a exactement 2 garçons', A_k :'la famille a k enfants'.

   On a alors
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(E_k) \times \mathbb{P}(A_k) \tag{39}$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \binom{k}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times p_k \tag{40}$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k+1}} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \tag{41}$$
$$= (1-2\alpha) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{2k}} \tag{42}$$
$$= (1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{2k+4}} \tag{43}$$
$$= \frac{1}{16}(1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{4^k} = \frac{1}{16}(1-2\alpha) \times \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} \tag{44}$$
$$\boxed{= \frac{4(1-2\alpha)}{27}} \tag{45}$$

3. On note F :'la famille a au moins 2 filles', F_k :'la famille a exactement k filles et au moins 4 enfants', G :'la famille a au moins 2 garçons', G_k :'la famille a exactement k garçons et au moins 4 enfants'.

   On a
$$\mathbb{P}_G(G) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} \tag{46}$$
   et $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G} = F_0 \cup F_1 \cup G_0 \cup G_1$. Donc, comme $\mathbb{P}(F_0) = \mathbb{P}(G_0)$ et $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(G_1)$, on a $\mathbb{P}(F \cap G) = 1 - 2(\mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1))$.

On a alors

$$\mathbb{P}\left(G_0\right) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{47}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{2k-1}} \tag{48}$$

$$= 2\left(1-2\alpha\right) \frac{1}{4^4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \tag{49}$$

$$= 2\left(1-2\alpha\right) \times \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{3} \tag{50}$$

et

$$\mathbb{P}\left(G_1\right) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{51}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} k \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \tag{52}$$

$$= \left(1-2\alpha\right) \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{2^{2k-1}} \tag{53}$$

$$= \left(1-2\alpha\right) \times \frac{2}{4} \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{4^{k-1}} \tag{54}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k+1}{4^k} \tag{55}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} - 1 - \frac{2}{4} - \frac{3}{4^2}\right) \tag{56}$$

et on calcule enfin

$$\boxed{\mathbb{P}\left(G\right) = 1 - \mathbb{P}\left(G_0\right) - \mathbb{P}\left(G_1\right)} \tag{57}$$

■

Solution 6. Pour tout $k \geqslant 1$, on note A_k :'A gagne à son lancé k' et B_k de manière équivalente pour le joueur B. On note G_A :'A gagne' et de même pour B. On a ainsi

$$G_A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k \tag{58}$$

(réunion disjointe) et pareil pour G_B. On a

$$\mathbb{P}\left(A_k\right) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} \tag{59}$$

d'où

$$\mathbb{P}(G_A) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{5}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)} \tag{60}$$

et pareil

$$\boxed{\mathbb{P}(G_B) = \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{5}{36}\right) \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{5}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)} > \mathbb{P}(G_A)} \tag{61}$$

et

$$\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) = 1 \tag{62}$$

donc $G_A \cup G_B$ est presque sur. ■

Solution 7. Soit $k \in \llbracket 0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \rrbracket$. La probabilité que l'on tire $2k$ boules blanches est (loi binomiale) :

$$\binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{63}$$

donc la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit pair est

$$\mathbb{P}_P = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{64}$$

De même, la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit impair est

$$\mathbb{P}_I = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k+1} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k-1} \tag{65}$$

On a alors

$$\mathbb{P}_P + \mathbb{P}_I = 1 \tag{66}$$

et

$$\mathbb{P}_P - \mathbb{P}_I = \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} (-1)^{k'} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k'} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k'} = \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n \tag{67}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}_P = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n\right)} \tag{68}$$

■

Remarque 3. *Si on note $\mathbb{P}_3$ la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit multiple de 3 :*

$$\mathbb{P}_3 = \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} \binom{n}{3k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{3k} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-3k} \tag{69}$$

On note $\mathbb{P}_2$ la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit congru à 2 module 3, et on définit $\mathbb{P}_1$ de même. Alors on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 &= 1 \\ \mathrm{j}\mathbb{P}_1 + \mathrm{j}^2\mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 &= \left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n \\ \mathrm{j}^2\mathbb{P}_1 + \mathrm{j}\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_3 &= \left(\frac{b+\mathrm{j}^2a}{a+b}\right)^n \end{cases} \tag{70}$$

et donc

$$\mathbb{P}_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n + \left(\frac{b+\mathrm{j}^2a}{a+b}\right)^n\right) \tag{71}$$

Solution 8. Soit pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$A_i = \{\sigma \in \Sigma_n | \sigma(i) = i\} \tag{72}$$

$$A = \{\sigma \in \Sigma_n | \sigma \text{ a un point fixe}\} \tag{73}$$

On a

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{74}$$

On a

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!] \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{i\in J} A_i \right| \tag{75}$$

Il y a $\binom{n}{k}$ tels J, et on a

$$\left| \bigcap_{i\in J} A_i \right| = |\{\sigma \in \Sigma_n | \forall i \in J, \sigma(i) = i\}| = (n-k)! \tag{76}$$

Ainsi,

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! \tag{77}$$

donc

$$\boxed{p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = -\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 1 - \frac{1}{e}} \tag{78}$$

■

Solution 9.

1.

$$\boxed{p_N(0) = 0, p_N(1) = 1} \tag{79}$$

2. Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$p_N(n) = p \times p_N(n+1) + (1-n) \times p_N(n-1) \tag{80}$$

et l'équation caractéristique est $X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{1-p}{p}$ et le discriminant vaut $\Delta = \left(\frac{1}{p} - 2\right)^2 \geqslant 0$. Donc les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{q}{p}$. Ainsi, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,

$$p_N(n) = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^n \tag{81}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Avec les conditions initiales, on trouve

$$\begin{cases} \mu & = & \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ \lambda & = & \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases} \tag{82}$$

donc

$$\boxed{p_N(n) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \text{ i.e. } p < \frac{1}{2} \\ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n & \text{si } q < p \text{ i.e. } p > \frac{1}{2} \end{cases}} \tag{83}$$

On vérifie d'ailleurs que l'arrêt en temps fini est presque sûr : $p_N(n) + q_N(n) = 1$ (utiliser la relation de récurrence et les conditions initiales).

■

Solution 10.

1. On note A_n :'la première boule blanche apparaît au n-ième tirage' et B_n :'on tire une boule noire au n-ième tirage'. On a

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \bigcap \overline{B_n} \tag{84}$$

ce qui implique donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) = p_n & \qquad (85)\\
&= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\dots\mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{n-1}}\left(\overline{B_n}\right) \qquad (86)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\dots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1} \qquad (87)\\
&= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}} \qquad (88)
\end{aligned}
$$

et par sommation téléscopique, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1} \qquad (89)$$

Donc on tire une boule blanche presque sûrement.

2. On utilise le même principe : pour $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = p_n = \frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}\times\frac{2c+1}{2c+2}}\times\dots\times\frac{(n-2)\,c+1}{(n-2)\,c+2}\times\frac{1}{(n-1)\,c+2} \qquad (90)$$

Comme les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant 1 \qquad (91)$$

donc

$$\boxed{\text{la série converge.}} \qquad (92)$$

On peut montrer à nouveau que le tirage d'une boule blanche reste presque sûr. En effet, on a

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{nc+2-c-1}{nc+2} = 1-\frac{c+1}{nc+2} = a-\frac{c+1}{nc}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (93)$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, il existe $K>0$ tel que

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{c+1}{c}}} \qquad (94)$$

avec $\frac{c+1}{c} > 1$. Notamment, $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = 0$. Comme

$$(nc+2)\,p_{n+1} = ((n-1)\,c+1)\,p_n \qquad (95)$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ncp_{n+1} - (n-1)\,cp_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2p_{n+1} \tag{96}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n - u_1\right) \tag{97}$$

La première somme est téléscopique et vaut 0, et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc on trouve bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \tag{98}$$

■

Remarque 4. *On peut contourner la règle de Raabe-Duhamel. On écrit*

$$\ln\left(p_{n+1}\right) = -\ln\left(2\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{kc+1}{kc+2}\right) - \ln\left(nc+2\right) \tag{99}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{kc+2}\right) - \ln\left(n\right) + \ln\left(c\right) - \ln(2) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{100}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{kc} + \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) - \ln\left(n\right) - A + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{101}$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\ln\left(n\right) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) - \ln\left(n\right) - A + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{102}$$

$$= -\ln\left(n\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) + A' + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{103}$$

Ainsi,

$$p_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1+\frac{1}{c}}} \tag{104}$$

donc la série converge.

Solution 11. On a

$$u_{n+1} = q \times 1 + p \times u_n^2 \tag{105}$$

car soit la bactérie meure au premier jour, soit les deux descendants n'ont plus de lignée au n-ième jour (on a u_n^2 car les lignées des deux descendants sont indépendantes).

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & q + px^2 \end{array} \tag{106}$$

Si $x \in [0,1]$, on a $f(x) \in [0,1]$ car $f(1) = q + p = 1$. Soit $g(x) = f(x) - x$. On a

$$g(x) = p\,(x-1)\left(x - \frac{p}{q}\right) \tag{107}$$

— Si $1 \leqslant \frac{p}{q}$: on a pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) > 0$ et $g(1) = 0$. Donc si

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1} \tag{108}$$

car c'est une suite croissante, majorée, convergente vers le point fixe 1.

— Si $1 > \frac{q}{p}$: si $x \in \left[0, \frac{q}{p}\right[$, on a $g(x) > 0$, si $x \in \left]\frac{q}{p}, 1\right[$, $g(x) < 0$ et $g\left(\frac{q}{p}\right) = 0$.
Par récurrence, comme $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{q}{p}\right[$ donc (suite croissante majorée qui converge vers le point fixe $\frac{q}{p}$) donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{q}{p}} \tag{109}$$

On a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \min\left(1, \frac{q}{p}\right)} \tag{110}$$

Ainsi, la lignée s'éteint presque sûrement si et seulement si $\frac{q}{p} \geqslant 1$ i.e. $p \leqslant \frac{1}{2}$. Sinon, la probabilité d'extinction est $\frac{q}{p}$.

Si $p = \frac{1}{2}$, on pose $\varepsilon_n = 1 - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right) \tag{111}$$

d'où

$$\varepsilon_{n+1} = 1 - u_{n+1} = \varepsilon_n\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{112}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon_{n+1}^{\alpha} = \varepsilon_n^{\alpha}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^{\alpha} = \varepsilon_n^{\alpha} - \frac{\alpha\varepsilon_n^{\alpha+1}}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\varepsilon_n^{\alpha+1}\right) \tag{113}$$

On choisit $\alpha = -1$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \tag{114}$$

D'après le lemme de Césaro, on a $\frac{1}{\varepsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ d'où

$$\boxed{\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}} \tag{115}$$

■

Solution 12. On note E_n :'la puce est en 0 à l'instant $2n$' et B_n :'la puce repasse pour la première fois en 0 à l'instant $2n$'.

Soit E :'la puce repasse par l'origine'. On a

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \tag{116}$$

où les B_n sont disjoints donc $\mathbb{P}(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(B_n)$.

On a

$$\mathbb{P}(E_n) = \binom{2n}{n} p^n q^n \tag{117}$$

On écrit alors

$$E_n = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} (E_n \cap B_k) \tag{118}$$

où la réunion est disjointe (on partitionne selon le premier passage en 0). D'où

$$u_n = \mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(E_n) \tag{119}$$

On pose $b_k = \mathbb{P}(B_k)$ et on a $\mathbb{P}_{B_k}(E_n) = \mathbb{P}(E_{n-k}) = u_{n-k}$: c'est comme si on repartait de 0 à l'étape k. On a donc $u_0 = \mathbb{P}(E_0) = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} \tag{120}$$

en posant $b_0 = 0$.

Or, on a

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}(pq)^n \tag{121}$$

d'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \tag{122}$$

et on a $4pq < 1$ si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$.

Dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$, on pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= S - u_0 && (123)\\
&= S - 1 && (124)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} && (125)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} && (126)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} u_l\right) &= S\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \qquad & (127)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \mathbb{P}(E) = \frac{S-1}{S} < 1} \tag{128}$$

Comme dans ce cas, on a $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(E_n) < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli indique que le nombre de retours à l'origine est presque sûrement fini. ■

Remarque 5. *Avec les séries entières, on peut vérifier que*

$$S = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}} \tag{129}$$

d'où

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \sqrt{1-4pq} \tag{130}$$

Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Comme on a pour $p \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(p) = 1 - \sqrt{4p(1-p)} \tag{131}$$

et $b_n(p) \leqslant b_n\left(\frac{1}{2}\right)$, on peut passer à la limite donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \tag{132}$$

et la retour en 0 est presque sûr si $p = \frac{1}{2}$.

Remarque 6. *Pour montrer que*

$$l(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{1-4x} \tag{133}$$

lorsque $0\leqslant x<\frac{1}{4}$. *On effectue un produit de Cauchy*

$$l(x)^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}4^nx^n=\frac{1}{1-4r} \tag{134}$$

en dénombrant les parties d'un ensemble à $2n$ *éléments séparées en* n *éléments dans* A *et* n *éléments dans* B.

Solution 13. On note P_n :'on obtient pile au n-ième lancer' et F_n :'on obtient face au n-ième lancer'.

1. On a

$$\boxed{a_1=0, a_2=p^2, a_3=qp^2} \tag{135}$$

2. Pour $n\geqslant 4$, on a

$$A_n=\bigcap_{k=1}^{n-3}\overline{A_k}\bigcap F_{n-2}\bigcap P_{n-1}\bigcap P_n \tag{136}$$

Comme les évènements concernant des lancers différents sont supposés indépendants, on a

$$a_n=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-3}\overline{A_k}\right)qp^2 \tag{137}$$

On écrit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-3}\overline{A_k}\right)=1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-3}A_k\right)=1-\sum_{k=1}^{n-3}a_k \tag{138}$$

car les A_k sont incompatibles. Ainsi,

$$a_n=p^2q\left(1-\sum_{k=1}^{n-3}a_k\right) \tag{139}$$

et $\sum_{k\geqslant 1}a_k$ converge puisque

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\leqslant\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 1}\right)\leqslant 1 \tag{140}$$

Pour calculer a_n, on remarque que

$$B_n=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k} \tag{141}$$

est exactement l'évènement 'on n'a pas deux piles consécutifs dans les lancers $\{1, \dots, n\}$'.

Si P_n, on a nécessairement F_{n-1} et B_{n-2}, si F_n on a nécessairement B_{n-1}. Ainsi,

$$\mathbb{P}(B_n) = qp\mathbb{P}(B_{n-2}) + q\mathbb{P}(B_{n-1}) \tag{142}$$

On a l'équation caractéristique $X^2 - qX - pq$, le discriminant est $\Delta = q^2 + 4pq > 0$. On en déduit les racines $\lambda_1 = \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$, et on utilise les conditions aux limites $\mathbb{P}(B_0) = \mathbb{P}(B_1) = 1$ et $\mathbb{P}(B_n) = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$.

■

Remarque 7. *La probabilité d'obtenir une séquence fixée de longueur N est égale à 1. En effet, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n :'la séquence apparaît entre les lancers $nN+1$ et $(n+1)N$'. Les A_n sont clairement indépendants et on a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) = \alpha > 0$ et $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Notamment,*

$$\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{k} \overline{A_n}\right) = \lim_{k\to+\infty} \prod_{n=0}^{k}(1-\alpha) = 0 \tag{143}$$

On a donc presque sûrement la séquence. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a presque sûrement une infinité de fois la séquence.

Solution 14. On note N_n :'on tire une boule noire au n-ième tirage', et B_n :'on tire une boule blanche au n-ième tirage'.

On a

$$\mathbb{P}_N(n) = \mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_n}(B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n)} \tag{144}$$

Or

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \tag{145}$$

car pour k fixé, $\frac{1}{N+1}$ est la probabilité d'avoir l'urne k et $\left(\frac{k}{n}\right)^n$ est la probabilité d'avoir une blanche sachant qu'on a pris l'urne k, et la limite vient d'une somme de Riemann.

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}_N(n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}} \tag{146}$$

■

Remarque 8. *Pour $n = 0$, on a*

$$\mathbb{P}_N(0) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k}{N+1} = \frac{1}{2} \tag{147}$$

Solution 15. Si cette probabilité est définie, on note p la probabilité recherchée. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $n_1 \wedge n_2 = d$ si et seulement si $n_1 = dn_1'$ et $n_2 = dn_2'$ avec $n_1' \wedge n_2' = 1$. Ainsi, la probabilité pour que $n_1 \wedge n_2 = d$ est $\frac{p}{d^2}$ et

$$\sum_{d \geqslant 1} \frac{p}{d^2} = 1 \tag{148}$$

d'où

$$\boxed{p = \frac{6}{\pi^2}} \tag{149}$$

■

Remarque 9. *Pour justifier un peu plus précisément, on note que dans l'ensemble $[\![1, dN]\!]$, la proportion de multiplies de d est de $\frac{1}{d}$, donc sur $[\![1, dN]\!]^2$, la proportion de couples de multiples de d est $\frac{1}{d^2}$.*

Solution 16. On note $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ (qui détermine la loi de X_n car c'est une variable de Bernouilli). On a $q_1 = p_2$ et pour $n \geqslant 2$,

$$q_n = p_1 q_{n-1} + p_2(1 - q_{n-1}) = (p_1 - p_2)q_{n-1} + p_2 \tag{150}$$

La relation est vraie pour $n = 1$ en posant $q_0 = 0$.

— Si $p_1 = 1$ et $p_2 = 0$, on a $q_n = q_{n-1} + p_2$ d'où

$$\boxed{q_n = 0} \tag{151}$$

— Si $(p_1, p_2) \neq (1, 0)$, on a $p_1 - p_2 \neq 1$ donc

$$q_n = (p_1 - p_2)^n \times \frac{-p_2}{1 - (p_1 - p_2)} + \frac{p_2}{1 - (p_1 - p_2)} \tag{152}$$

$$= \boxed{\frac{p_2}{1 - (p_1 - p_2)}\left(1 - (p_1 - p_2)^n\right) = \mathbb{E}(X_n)} \tag{153}$$

— Si $p_1 - p_2 = -1$, i.e. $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$,

$$\boxed{q_n \text{ n'a pas de limite.}} \tag{154}$$

— Si $p_1 - p_2 \neq -1$,

$$\boxed{q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{p_2}{1-(p_2-p_1)}} \tag{155}$$

■

Solution 17.

1. Pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, on veut

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}\left((D_1 \leqslant k) \cap (D_2 \leqslant k)\right) = \mathbb{P}(D_1 \leqslant k)\mathbb{P}(D_2 \leqslant k) = \frac{k^2}{36} \tag{156}$$

Or on a (avec $P(X \leqslant 0) = 0$)

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = \frac{2k-1}{36} \tag{157}$$

De même, on a $P(Y \geqslant k) = \frac{(7-k)^2}{36}$ donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{13-2k}{36} \tag{158}$$

A chaque fois, on vérifie que $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Y = k) = 1$.

Pour les calculs de variance et d'espérance, on calcule $\sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(X = k) - \left(\sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k)\right)$, de même pour Y.

2. Soit $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$, si $i < j$ on a $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ mais $P(X = i)\mathbb{P}(Y = j) \neq 0$, on n'a donc pas indépendance.

3. Si $P(D_i = k) = p_{k,i}$, on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \left(\sum_{l=1}^{k} p_{l,1}\right)\left(\sum_{l=1}^{k} p_{l,2}\right) = \sum_{1 \leqslant l,r \leqslant k} p_{l,1} \times p_{r,2} \tag{159}$$

et on calcule ensuite $P(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1)$ et cela vaut ce que cela vaut.

■

Solution 18.

1. On a

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i} \frac{a^j(1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!}(b^i e^{-b}) \tag{160}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b^i e^{-b}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} \tag{161}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b^i e^{-b}}{i!} \tag{162}$$

$$= e^b e^{-b} \tag{163}$$

$$= 1 \tag{164}$$

donc la définition est cohérente.

2. On a

$$\boxed{p_{i,\cdot} = \sum_{j=0}^{i} p_{i,j} = \frac{b^i e^{-b}}{i!}} \tag{165}$$

et

$$p_{\cdot,j} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{e^{-b}a^j}{j!}\left(\frac{b^i(1-a)^{i-j}}{(i-j)!}\right) \tag{166}$$

$$= \frac{e^{-b}a^j b^j}{j!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b^i(1-a)^i}{i!} \tag{167}$$

$$= \boxed{\frac{e^{-ab}(ab)^j}{j!}} \tag{168}$$

On a $p_{i,j} \neq p_{i,\cdot} \neq p_{\cdot,j}$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

3. Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (car $p_{i,j} = 0$ si $i < j$). On a

$$\mathbb{P}(X - Y = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j + k, Y = j) \tag{169}$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b^{j+k} e^{-b} a^j (1-a)^k}{j!k!} \tag{170}$$

$$= \frac{e^{-b} b^k (1-a)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(ba)^j}{j!} \tag{171}$$

$$= \boxed{\frac{e^{b(a-1)}(b(1-a))^k}{k!}} \tag{172}$$

De plus,

$$\mathbb{P}(Z=k,Y=j)=\mathbb{P}((X,Y)=(k+j,j))=p_{k+j,j}=\frac{b^{j+k}e^{-b}a^j(1-a)^k}{j!k!} \tag{173}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k)\mathbb{P}(Y=j)) &= \frac{e^{b(a-1)b^k(1-a)^k}}{k!}\frac{e^{-ab}(ab^j)}{j!} && (174)\\ &= \frac{e^{-b}b^{k+j}a^j(1-a)^k}{k!j!} && (175)\end{aligned}$$

donc Z et Y sont indépendantes.

■

Remarque 10. *On a $X \sim \mathcal{P}(b)$ et $Y \sim \mathcal{P}(ab)$ donc X et Y ont des espérances.*

Solution 19.

1. On a $S_n - S_{n-1} = T_n$ pour tout $n \geqslant 2$, donc

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i} \tag{176}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, comme $T_n \sim \mathcal{G}(1-x)$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = k) = x^{k-1}(1-x)} \tag{177}$$

et

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}(1-x) = \frac{1}{1-x}} \tag{178}$$

et

$$\boxed{\mathbb{V}(T_n) = \frac{x}{(1-x)^2}} \tag{179}$$

3. On a

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_i) = \frac{n}{1-x}} \tag{180}$$

Comme les $(T_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont indépendants, on a

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i) = \frac{nx}{(1-x)^2}} \tag{181}$$

Pour $k < n$, on a $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$ et sinon, on a

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n} \tag{182}$$

(choisir les $n-1$ succès parmi $k-1$ épreuves).

4. On a $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = 1$ donc

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}} \tag{183}$$

■

Solution 20. On a $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}$. On pose

$$u_{k,n} = \begin{cases} \mathbb{P}(X = k) \text{ si k>n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{184}$$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge si et seulement si $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable ($u_{k,n} \geqslant 0$) si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$ converge (théorème de Fubini). Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \tag{185}$$

■

Solution 21. On cherche $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} u_k$ avec $u_k >$. On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\lambda}{k+1} \geqslant 1 \tag{186}$$

si et seulement si $k \leqslant \lambda - 1$. On a donc $u_k \leqslant u_{k+1}$ si et seulement si $k \leqslant \lfloor \lambda \rfloor - 1$ et le maximum est donc atteint pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

Si $\lambda = n \in \mathbb{N}^*$, le maximum vaut

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \tag{187}$$

■

Solution 22.

1. On a
$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{10-(k-1)}{10-(k-2)}\times\frac{1}{10-(k-1)}=\frac{1}{10} \tag{188}$$
donc $X\sim\mathcal{U}(\llbracket 1,10\rrbracket)$ et $Y\sim\mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$ donc $\mathbb{E}(X)=\frac{11}{2}$, $\mathbb{V}(X)=\frac{10^2-1}{12}=\frac{33}{4}$, $\mathbb{E}(Y)=10$, $\mathbb{V}(Y)=\frac{9}{10}\times 100=90$.

2. Soit S l'événement 'le gardien est sobre' et Z compte le nombre d'essais au bout desquels il a réussi. Alors
$$\mathbb{P}_{Z\geqslant 9}(5)=\frac{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(Z\geqslant 9)}{\mathbb{P}(Z\geqslant 9)}=\frac{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(X\geqslant 9)}{\frac{1}{3}\mathbb{P}(Y\geqslant 9)+\frac{2}{3}\mathbb{P}(X\geqslant 9)} \tag{189}$$
On a $\mathbb{P}(X\geqslant 9)=\frac{1}{5}$ et
$$\mathbb{P}(Y\geqslant 9)=\sum_{n=9}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\times\frac{1}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^{8} \tag{190}$$
d'où
$$\boxed{\mathbb{P}_{Z\geqslant 9}(5)=\frac{2}{5\times\left(\frac{9}{10}\right)^{8}+2}<\frac{1}{2}} \tag{191}$$

■

Solution 23.

1. On a
$$\boxed{N=\frac{n(n+1)}{2}} \tag{192}$$

2. Soit $(i,j)\in\llbracket 1,n\rrbracket^2$, si $i<j$ on a $p_{i,j}=0$ (où $p_{i,j}$ est la loi conjointe). Si $j\leqslant i$, on a
$$p_{i,j}=\frac{1}{N}=\frac{2}{n(n+1)} \tag{193}$$
On a ensuite
$$\boxed{p_{i,\cdot}=\sum_{j=1}^{i}\frac{2}{n(n+1)}}=\frac{2i}{n(n+1)} \tag{194}$$
et
$$\boxed{p_{j,\cdot}}=\sum_{i=j}^{n}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2(n-j+1)}{n(n+1)} \tag{195}$$

3. On calcule

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{E}(B) = \sum_{i=1}^n p_{i,\cdot} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n+1}{3} \\ \mathbb{E}(R) = \sum_{j=1}^n jp_{\cdot,j} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j(n+1-j) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{array}} \tag{196}$$

On laisse le reste en calcul facile en utilisant $\mathbb{V}(G) = \mathbb{V}(R) + \mathbb{V}(B) - 2\mathrm{cov}(B, R)$ et

$$\mathbb{E}(BR) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ijp_{i,j} \tag{197}$$

■

Solution 24.

1. On écrit

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = k-1) = \frac{k}{k+1}\mathbb{P}(X_n = k)} \tag{198}$$

2. On a $\mathbb{P}(X_n = k) = 0$ si $k > n$, sinon on écrit

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k}{k+1}\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \tag{199}$$

$$= \frac{k}{k+1} \times \frac{k-1}{k} \times \frac{k-2}{k-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times u_{n-k} \tag{200}$$

$$= \boxed{\frac{1}{k+1}u_{n-k}} \tag{201}$$

3. On a $\sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X_n = j) = 1$ donc

$$\boxed{\sum_{j=0}^n \frac{u_n}{n-j+1} = 1} \tag{202}$$

et on a $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{5}{12}, u_3 = \frac{3}{8}$ (en utilisant la formule précédente).

4. On écrit

$$(k+1)\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = k\mathbb{P}(X_n = k-1) \tag{203}$$

donc pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$,

$$k\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = (k-1)\mathbb{P}(X_n = k-1) + \mathbb{P}(X_n = k-1) - \mathbb{P}(X_{n+1} = k) \tag{204}$$

En sommant sur $k \in [\![1, n+1]\!]$, on trouve donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + 1 - (1 - u_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + u_{n+1}} \tag{205}$$

Par récurrence, on a directement

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = u_n + \cdots + u_1 + \underbrace{\mathbb{E}(X_0)}_{=\,0}} \tag{206}$$

5. On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}\left((X_0 = 0) \cap (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = n-1) \cap (X_n = 0)\right) &(207)\\
&= \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}_{X_0=0}(X_1 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{(X_0=0)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=n-1)}(X_{n=0}) &(208)\\
&= \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}_{X_0=0}(X_1 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{(X_{n-1}=n-1)}(X_{n=0}) &(209)\\
&= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} &(210)\\
&= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}} &(211)
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 \tag{212}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 0) = 0} \tag{213}$$

Donc le retour en temps fini à l'origine est presque sûr.

6. Non au vu de la formule donnée par $\mathbb{P}(T = n)$.

■

Solution 25.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}} \tag{214}$$

(loi binomiale, car les m caisses sont équiprobables).

2. On a $\mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k) = 0$ si $k > n$ donc si $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{X_1=k} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k)\mathbb{P}(N = n) && (215)\\
&= \sum_{n=k} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} && (216)\\
&= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \left(\frac{1}{m}\right)^k \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^{n-k} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} && (217)
\end{aligned}$$

On reconnaît la série exponentielle, après un changement d'indice, appliquée en $\lambda\left(1 - \frac{1}{m}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\frac{\lambda}{n}} \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}{k!}} \qquad (218)$$

et donc $X_1 \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

■

Solution 26.

1. Si $(i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \{-1, 0, 1\}$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left((U, V) = (i, j)\right) = \mathbb{P}\left(X = \frac{i + j}{2}, Y = \frac{-j}{2}\right)} \qquad (219)$$

Cette probabilité vaut 0 si i et j n'ont pas la même parité. Sinon, on a

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((U, V) = (0, 0)\right) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = q^2\\
&\mathbb{P}\left((U, V) = (1, -11)\right) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = qp\\
&\mathbb{P}\left((U, V) = (1, 1)\right) = qp\\
&\mathbb{P}\left((U, V) = (2, 0)\right) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p^2
\end{aligned}} \qquad (220)$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(U, V) &= \mathbb{E}\left((U - \mathbb{E}(U))\,(V - \mathbb{E}(V))\right) && (221)\\
&= \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) && (222)\\
&= \mathbb{E}(X^2 - Y^2) - \left[(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))\,(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))\right] && (223)\\
&= \mathbb{E}(X^2 - Y^2) - \left[\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2\right] && (224)\\
&= \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) && (225)\\
&= 0 && (226)
\end{aligned}$$

3. Les variables U et V ne sont pas indépendantes, il suffit de voir que

$$\boxed{\mathbb{P}\left((U,V)=(1,0)\right)=0\neq\mathbb{P}(U=1)\mathbb{P}(V=0)=2pq\times\left(q^2+p^2\right)} \tag{227}$$

■

Solution 27.

1. $P\sim\mathcal{G}(p)$ et $F\sim\mathcal{G}(q)$ donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{E}(P)=\frac{1}{p}\\ \mathbb{V}(P)=\frac{q}{p^2}\\ \mathbb{E}(F)=\frac{1}{q}\\ \mathbb{V}(F)=\frac{p}{q^2}\end{array}} \tag{228}$$

2. On a $\mathbb{P}\left((P=1)\cap(F=1)\right)=0\neq\mathbb{P}(P=1)\mathbb{P}(F=1)$ donc P et F ne sont pas indépendantes.

3. Soit $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on note $p_{i,j}=\mathbb{P}(X=i,Y=j)$. On partitionne selon si $P=1$ ou $F=1$ et donc

$$\boxed{p_{i,j}=p^{i+1}q^j+q^{i+1}p^j} \tag{229}$$

On note

$$\begin{array}{l}p_{i,\cdot}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{i,j}=p^{i+1}\frac{q}{1-q}+q^{i+1}\frac{p}{1-p}=p^iq+q^ip\\ p_{\cdot,j}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{i,j}=\frac{p^2}{1-p}q^j+\frac{q^2}{1-q}p^j=q^{j-1}p^2+p^{j-1}q^2\end{array} \tag{230}$$

De plus, on a $p_{1,1}=p^2q+q^2p=pq$ et $p_{1,\cdot}\times p_{\cdot,1}=(pq+qp)(p^2+q^2)=2pq(p^2+q^2)$ dp,c si X et Y sont indépendantes, on a $1=2(p^2+q^2)$ d'où $p=\frac{1}{2}$. Réciproquement, si $p=\frac{1}{2}$, on a $p_{i,\cdot}=\frac{1}{2^i}$, $p_{\cdot,j}=\frac{1}{2^j}$ et $p_{i,j}=\frac{1}{2^{i+j}}=p_{i,\cdot}p_{\cdot,j}$. Ainsi, X et Y sont indépendantes si et seulement si $p=\frac{1}{2}$.

4. On a

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}ip_{i,\cdot}=q\sum_{i=1}^{+\infty}ip^i+p\sum_{i=1}^{+\infty}iq^i \tag{231}$$

On utilise alors le fait que $\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-1}=\frac{1}{(1-z)^2}$ si $|z|<1$ et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{p^2+q^2}{pq}\geqslant 2} \tag{232}$$

car $(p-q)^2\geqslant 0$.

5. On a

$$\boxed{\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{i,i}=\sum_{i=1}^{+\infty}p^iq^i(p+q)=pq\times\frac{1}{1-pq}} \tag{233}$$

6. Si $p=\frac{1}{2}$, X et Y sont indépendantes, donc par convolution,

$$\boxed{\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)=\sum_{i=1}^{k-1}p_{i,\cdot}p_{\cdot,k-i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2^k}=\frac{k-1}{2^k}} \tag{234}$$

■

Solution 28.

1. On a

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda x)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{2^k k!}+x\sinh(\lambda)=\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}+x\sinh(\lambda)} \tag{235}$$

car $|x^2|\leqslant 1$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $(2k)!\geqslant 2^k k!$ (par récurrence).

2. $\mathrm{e}^{\lambda X}$ admet une espérance car $\left|\mathrm{e}^{\lambda X}\right|\leqslant\mathrm{e}^{\lambda}$. Comme X est centrée, on a d'après l'inégalité précédente, en prenant l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)\leqslant\mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}}\right)+\sinh(\lambda)\mathbb{E}(X)=\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}} \tag{236}$$

En appliquant l'inégalité à $-X$, on a l'autre inégalité.

3. Grâce à l'inégalité de Markov, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(X\geqslant a)=\mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\geqslant\mathrm{e}^{\lambda a}\right)}\leqslant\frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)}{e^{\lambda a}}=\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right) \tag{237}$$

4. On pose $X=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_i$. X est centrée dans $[-1,1]$ ainsi que $-X$. On a donc, pour tout $\lambda\geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X|\geqslant a\right)=\mathbb{P}(X\geqslant a)+\mathbb{P}(-X\geqslant a)\leqslant 2\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} \tag{238}$$

On optimise ensuite cette inégalité en $\lambda\geqslant 0$ (le minimum est en $\lambda=a$) et on a bien

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant a\right)\leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}} \tag{239}$$

■

Solution 29.

1. Comme $\mathbb{E}(Y) < +\infty$, on a d'après le théorème de Fubini et le fait que $(X = l)_{l\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{l=0}^{+\infty} l\mathbb{P}(Y = l) \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = l)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X=k)}(Y)\mathbb{P}(X = k)} \quad (240)$$

2. Pour $\lambda = X_{n+1}$ et $X = X_n$, et en utilisant le fait que les poules sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X_n=k)}\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda\mathbb{P}(X_n = k) = \lambda\mathbb{E}(X_n) \quad (241)$$

Par récurrence, on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \lambda^n\mathbb{E}(X_0) = \lambda^n N} \quad (242)$$

On note que si $\lambda > 1$, $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la descendance est assurée. Si $\lambda < 1$, on a $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

■

Solution 30. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=n)}(K = k)\mathbb{P}(N = n) && (243)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} && (244)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} && (245)
\end{aligned}$$

Donc $K \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ et

$$\boxed{\mathbb{E}(K) = \lambda p} \quad (246)$$

■

Solution 31.

1. On a $\chi_{A_k} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{k}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)} \quad (247)$$

Comme les $(A_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendants, on a aussi

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)} \tag{248}$$

2. Soit $X_n = \frac{S_n}{\ln(n)}$. On a $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{\ln^2(n)}\mathbb{V}(S_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant 4\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{249}$$

   Or, si $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|\mathbb{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $|X_n - 1| < \varepsilon$. Par contraposée, si $|X_n - 1| \geqslant \varepsilon$, alors ou bien $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ou $|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(|X_n - 1| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 4\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2} + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{250}$$

   A partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour tout $n \geqslant N_0$, on a $\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0} \tag{251}$$

■

Solution 32.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\mathbb{P}(U \geqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geqslant k)\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(X_i \geqslant k\right) = \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{j-1}p = (q^{k-1})^n \tag{252}$$

   Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \geqslant k) - \mathbb{P}(U \geqslant k+1) = q^{(k-1)n}(q^n - 1)} \tag{253}$$

   U possède une espérance car $0 \leqslant U \leqslant X \sim \mathcal{G}(p)$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(U = k) && (254)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left((q^n)^{k-1} - (q^n)^k\right) && (255)\\
&= \frac{1}{(1-q^n)^2} - \frac{q^n}{(1-q^n)^2} && (256)\\
&= \boxed{\frac{1}{1-q^n}} && (257)
\end{aligned}$$

   où l'on a utilisé le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{P}(V \leqslant k) = \left(1-q^k\right)^n$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(V=k) = \left(1-q^k\right)^n - \left(1-q^{k-1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} nq^{k-1}\left(1-q\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0} \tag{258}$$

Comme $k\mathbb{P}(V=k) = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, V admet une espérance est

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(V=k) && (259)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\left(1-q^k\right)^n - \left(1-q^{k-1}\right)^n\right] && (260)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left[(-1)^i q^{ki} - (-1)^i q^{(k-1)i}\right] && (261)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i} q^{(k-1)i}(1-q^i) && (262)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(1-q^i)\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(q^i\right)^{k-1} && (263)\\
&= \boxed{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i+1}\frac{1}{1-q^i}} && (264)
\end{aligned}$$

■

Solution 33.

1. $1-p^N$ correspond à la probabilité que le joueur perde au moins une partie sur N consécutives donc c'est aussi la probabilité pour qu'il perde une partie entre la $nN+1$-ième et la $(n+1)N$-ième (inclus), car les parties sont indépendantes. On note $A_{nN+1,(n+1)N}$:'le joueur perd une partie entre la $nN+1$-ième et la $(n+1)N$-ième (au sens large)'. $\{t_k > nN\}$ et $A_{nN+1,(n+1)N}$ sont des événements indépendants car les différentes parties sont indépendantes. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(t_k > nN\right)\left(1-p^N\right) = \mathbb{P}\left((t_k > nN)\cap A_{nN+1,(n+1)N}\right) \geqslant \mathbb{P}(t_k > n(N+1))} \tag{265}$$

car s'il avait gagné toutes les parties entre $nN+1$ et $(n+1)N$ on aurait $t_k \leqslant n(N+1)$.

On sait que si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, X possède une espérance finie si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X>k)$ converge et on a (théorème de Fubini) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X>k)$.

On a donc

$$\mathbb{P}(t_k > Nn) \leqslant (1-p^n)\mathbb{P}(t_k > 0) = 1 - p^n \tag{266}$$

par récurrence sur n d'après 1. Pour $l \in \mathbb{N}$, soit $n = \left\lfloor \frac{l}{N} \right\rfloor$, on a $nN \leqslant l < (n+1)N$ donc

$$\mathbb{P}(t_k > l) \leqslant \mathbb{P}(t_k > nN) \leqslant (1-p^N)^{\left\lfloor \frac{l}{N} \right\rfloor} \leqslant \left(1-p^N\right)^{\frac{l}{N}} \tag{267}$$

et le membre de droite est le terme général d'une série converge car $\left(1-p^N\right)^{\frac{1}{N}} < 1$. Donc t_k admet une espérance.

2. On note b_i :'le joueur gagne au i-ième coup'. Alors

$$\begin{aligned}
T_k &= \sum_{l=0}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_k = l) && (268)\\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} l\left(\mathbb{P}_{b_i}(t_k = l)\mathbb{P}(b_i) + \mathbb{P}_{\overline{b_i}}(t_k = l)\mathbb{P}(\overline{b_i})\right) && (269)\\
&= p\sum_{l=1}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_{k+1} = l-1) + q\sum_{l=1}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_{k-1} = l-1) && (270)\\
&= p\left(\sum_{l=1}^{+\infty}(l-1)\mathbb{P}(t_{k+1} = l-1) + \sum_{l=1}^{+\infty} 1 \times \mathbb{P}(t_{k+1} = l-1)\right)\\
&\quad + q\left(\sum_{l=1}^{+\infty}(l-1)\mathbb{P}(t_{k-1} = l-1) + \sum_{l=1}^{+\infty} 1 \times \mathbb{P}(t_{k-1} = l-1)\right) && (271)\\
&= p\left(T_{k-1}+1\right) + q\left(T_{k+1}+1\right) && (272)
\end{aligned}$$

3. On a $qT_{k+1} - T_k + pT_{k-1} = -1$. Comme $q\alpha(k+1) - \alpha k + p\alpha(k-1) = 1$ si et seulement si $\alpha = \frac{1}{1-2p}$, on pose $U_k = T_k - \frac{k}{1-2p}$ si $p = \frac{1}{2}$. Alors

$$qU_{k+1} - U_k + pU_{k-1} = -1 - q\frac{k+1}{1-2p} + \frac{k}{1-2p} - p\frac{k-1}{1-2p} = 0 \tag{273}$$

car $p + q = 1$.

L'équation caractéristique est $qr^2 - r + p = 0$, les racines sont 1 et $\frac{p}{q}$ (qui est différent de 1 car $p \neq \frac{1}{2}$). Donc

$$q\left(1 - \frac{p}{q}\right)(1-1) = 0 \tag{274}$$

On a $T_0 = T_N = 0$ donc

$$\boxed{T_k = \frac{1}{q-p}\left(k - N\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right)\right)} \tag{275}$$

si $p \neq \frac{1}{2}$. Si $p = \frac{1}{2}$, on a

$$T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1} = -2 \tag{276}$$

Ainsi, si $V_k = T_{k-1} - T_k$, on a

$$V_{k+1} = -2 + V_k \tag{277}$$

On en déduit grâce aux conditions aux limites $T_0 = T_N = 0$ que

$$\boxed{T_k = k(N-k)} \tag{278}$$

■

Solution 34.

1. On a

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\zeta(s)n^s} = 1} \tag{279}$$

2. On a

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k\in A_n} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)r^s n^s} = \frac{1}{n^s}} \tag{280}$$

3. Soient $p_1, \dots, p_k$ des nombres premiers distincts. On a $A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r} = A_{p_1 \times \dots \times p_k}$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(A_{p_1} \bigcap \dots \bigcap A_{p_k}\right)} = \frac{1}{(p_1 \dots p_k)^s} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{p_i}) \tag{281}$$

donc les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants.

On remarque que l'on a $\{1\} = \cap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}$. On pose p_k le k-ième nombre premier et $B_k = \cap_{i=1}^{k} \overline{A_{p_i}}$ qui est une suite décroissante d'événements. Comme les $(A_{p_i})_i$ sont indépendants, c'est aussi le cas des $(\overline{A_{p_i}})_i$, et on a donc

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^{k} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{i=}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \tag{282}$$

Or $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$ donc

$$\boxed{\zeta(s) = \left(\prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)\right)^{-1}} \tag{283}$$

■

Solution 35. On a $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{2}(1-b)$ et pour tout $n \geqslant 2$,

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}b^{n-1}(1-b)} \tag{284}$$

Les événements E_n sont incompatibles donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = 1} \tag{285}$$

Il est donc presque sûr qu'on finisse par utiliser A.

On a

$$\boxed{\mathbb{P}(U_n) = \frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n} \tag{286}$$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite décroissante d'événements, donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = 0} \tag{287}$$

■

Solution 36.

1. On a

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = 1-(1-p)^n} \tag{288}$$

2. $B_n = \bigcap_{i=1}^{N} A_{i,n}$ et les $A_{i,n}$ sont indépendants donc

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_{i,n}) = (1-(1-p)^n)^N} \tag{289}$$

3. On note $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$ et $B_{n-1} \subset B_n$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_{n-1}) = (1-(1-p)^n)^N - \left(1-(1-p)^{n-1}\right)^N} \tag{290}$$

■

Solution 37.

1. On a
$$\mathbb{K}_{<n}[X] = \left\{a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} \middle| (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\right\} \tag{291}$$
donc $|\mathbb{K}_{<n}[X]| = p^n$. De même, on a
$$\mathbb{K}_{=n}[X] = \left\{a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \middle| (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n, a_n \neq \overline{0}\right\} \tag{292}$$
donc $|\mathbb{K}_{=n}[X]| = p^n(p-1)$ d'où $|\Omega| = p^{2n}(p-1)$.

   On a $\mathbb{P}\left(\deg(Q) = -\infty\right) = \frac{1}{p^n}$ et si $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(\deg(Q) = k\right) = \frac{p^k(p-1)}{p^n}} \tag{293}$$

2. On a $(Q, P) \in A$ si et seulement si $Q \mid P$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{K}_{\leqslant n}[X]$ tel que $P = AQ$ et $\deg(A) + \deg(Q) = n$. Ainsi, $\left(Q, \frac{P}{Q}\right) \in B$ et f est bien définie. On a directement
$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & B & \to & A \\ & (Q, A) & \mapsto & (Q, AQ) \end{array} \tag{294}$$
donc f est bijective et $|A| = |B|$.

   On a
$$B = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{(Q, A) \in \mathbb{K}_{=k}[X] \times \mathbb{K}_{=n-k}[X]\} \tag{295}$$
donc
$$|B| = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(p-1) \times p^{n-k}(p-1) = np^n(p-1)^2 = |A| \tag{296}$$
Ainsi,
$$\boxed{\mathbb{P}(Q \mid P) = \frac{np^n(p-1)^2}{p^{2n}(p-1)} = \frac{n(p-1)}{p^n}} \tag{297}$$

3. On a $R_1 = R$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$ si et seulement si $Q \mid P - R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$. Comme $\deg(Q) < \deg(P)$, $\deg(R) < \deg(P)$ implique $\deg(P - R) = \deg(P)$.

   Or
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K}_{=n}[X] & \to & \mathbb{K}_{=n}[X] \\ & P & \mapsto & P - R \end{array} \tag{298}$$

est bijective donc les lois de $P-R$ et de P sont les mêmes. En notant $r=\deg(R)$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1=R) &= \mathbb{P}\left((Q \mid P-R)\cap(\deg(Q)>\deg(R))\right) && (299)\\
&= \sum_{q=r+1}^{n-1} \frac{p^{n-q}(p-1)}{(p-1)^2}\times\frac{p^d(p-1)}{p^{2n}} && (300)\\
&= \boxed{\frac{1}{p^n}\times(n-r-1)} && (301)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\deg(Q)=q}(R_1=R) &= \frac{\mathbb{P}\left((R_1=R)\cap(\deg(Q)=q)\right)}{\mathbb{P}\left(\deg(Q)=s\right)} && (302)\\
&= \frac{\frac{1}{p^n}}{\frac{p^q(p-1)}{p^n}} && (303)\\
&= \boxed{\frac{1}{p^q(p-1)}} && (304)
\end{aligned}$$

■

Solution 38.

1. (X_1,X_2) prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]^2\setminus\{(i,i)|i\in[\![1,n]\!]\}$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$, alors
$$\boxed{\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)=\frac{1}{n(n-1)}} \quad (305)$$
La loi conjointe est uniforme.

2. X_2 prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On a
$$\mathbb{P}(X_2=j)=\sum_{\substack{i=1^n\\ i\neq j}}\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)=\frac{n-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n} \quad (306)$$
donc $X_2\sim\mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\right)$.

   $X_{1_{|X_2=j}}$ prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]\setminus\{j\}$ et
$$\mathbb{P}(X_{1_{|X_2=j}}=i)=\frac{\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)}{\mathbb{P}(X_2=j)}=\frac{1}{n-1} \quad (307)$$
donc $X_{1_{|X_2=j}}\sim\mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\setminus\{j\}\right)$.

3. D'après ce qui précède, les lois de X_1 et X_2 sont différentes et X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

4. On écrit

$$(X_1,\dots,X_k)=\left\{(x_1,\dots,x_k)\in [\![1,n]\!]^k \middle| \forall i\neq j, x_i\neq x_j\right\} \tag{308}$$

ensemble que l'on note $A_{n,k}$. On a $|A_{n,k}|=n(n-1)\dots(n-k+1)$. Pour $(x_1,\dots,x_k)\in A_{n,k}$, on a donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1=x_1,\dots,X_k=x_k)=\frac{1}{n(n-1)}\dots(n-k+1)} \tag{309}$$

et pour tout $i\in [\![1,n]\!]$, $X_i\sim\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ et les X_i ne sont pas indépendants.

5. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1,X_2) &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} (i,j)\times\frac{1}{n(n-1)} && (310)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i} i\right),\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\neq j} j\right)\right) && (311)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n-1)(n+1)}{2},\frac{n(n-1)(n+1)}{2}\right) && (312)\\
&= \boxed{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}} && (313)
\end{aligned}$$

■