*Exercices MP/MP**

Séries numériques et familles sommables

Exercice 1. *Soit la suite définie par* $a_0 = 1$ *et pour tout* $n \geqslant 1$,

$$a_n = 2a_{\lfloor n/3 \rfloor} + 3a_{\lfloor n/9 \rfloor}$$

1. *On pose pour* $p \in \mathbb{N}$, $b_p = a_{3^p}$. *Calculer* b_p *en fonction de* p.
2. *Montrer que si* $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, *alors* $a_n = b_p$.
3. *Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de* $(\frac{a_n}{n})_{n \geqslant 2}$.

Exercice 2. *Soit* $[a, b] \subset\in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to [a, b]$ *continue. Soit* $x_0 \in [a, b]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. *Montrer que* f *admet au moins un point fixe* $l \in [a, b]$.
2. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, *montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est un segment.*
3. *En déduire que* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge si et seulement si* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

Exercice 3. *Soit* $\theta \in [0, 2\pi[$, *on définit* $u_0 = e^{\mathrm{i}\theta}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. *Peut-on avoir* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

— *stationnaire ?*

— *convergente ?*

— *périodique ?*

— *dense dans* $\mathbb{U}$ *?*

On pourra étudier le développement binaire de $\frac{\theta}{2\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$.

Exercice 4. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, *étudier* $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^{n^2}$.

Exercice 5. *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} = 0$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

1. *Montrer qu'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijective telle que* $(x_{\varphi(n)})$ *est décroissante.*
2. *Montrer que pour tout* $l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un sous-ensemble* $I \subset \mathbb{N}$ *fini tel que*

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leqslant \varepsilon$$

   ou si $l = +\infty$: $\forall A > 0$, *il existe un sous-ensemble* I *fini tel que* $\sum_{k \in I} x_k \geqslant A$.

Exercice 6. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \sum_{k=0}^n u_k^2 = 1$. *Montrer que* $u_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$. *Une telle suite existe-t-elle ?*

Exercice 7. *Étudier* $x_n = n - \sum_{k=1}^n \cosh(\frac{1}{\sqrt{k+n}})$.

Exercice 8. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites réelles telles que*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n + c_n = 0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} = 3$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. *On pourra étudier* $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$.

Exercice 9. *Soit* $u_0 \in]0,1[$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. *On pose* $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*
2. *Montrer que* $v_n = n + \ln(n) + O(1)$, *en déduire un développement de* u_n.

Exercice 10.

1. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 2$, *il existe un unique* $u_n \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $u_n^n = u_n + n$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\geqslant 2}$ *converge vers* $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
3. *Donner un développement asymptotique à deux termes de* $x_n - \lambda$.

Exercice 11. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs non tous nuls. On suppose que*

$$u_n = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *de limite* a. *En cas d'existence, évaluer*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Exercice 12.

1. *Soit* $x \in [0,1[$, *montrer qu'il existe une unique suite* $(a_n)_{n\geqslant 2}$ *d'entiers naturels telle que*

   (i) $0 \leqslant a_n \leqslant n-1$ *pour tout* $n \geqslant 2$,

   (ii) *il existe* $m \geqslant n$ *tel que* $a_m < m-1$ *pour tout* $n \geqslant 2$,

   (iii) $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$.

2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\geqslant 2}$ pour que $x \in \mathbb{Q}$.*

3. *Soit $l \in [-1, 1]$, montrer qu'il existe $x \in [0, 1[$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} sin(n!2\pi x) = l$.*

Exercice 13. *Soit $u_0 > 0, u_1 > 0$ et pour tout $n \geqslant 1$,*

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) + \ln(1 + u_{n-1})$$

Étudier la suite (u_n). On pourra poser $M_n = \max(u_n, u_{n-1}, l)$, $m_n = \min(u_n, u_{n-1}, l)$ où $l = 2\ln(1+l)$ et $l > 0$.

Exercice 14. *Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}^*)^2$ avec $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On suppose que $(e^{ipx_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{iqx_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ?*

Exercice 15.

1. *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}$.*

2. *Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}^n\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

3. *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.*

Exercice 16. *Soit $u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}$ pour $n \geqslant 2$. Quelle est la limite de cette suite ? Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$?*

Exercice 17. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On pourra minorer $u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$. Montrer ensuite que si $\{p \in \mathbb{N}, pu_p \geqslant 1\}$ est infini, alors $\sum u_n$ diverge.*

Exercice 18. *Nature de $\sum u_n$ où $u_n =$*

1. $n^{-1-\frac{1}{n}}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(t)dt$

3. $\sin\left(2\pi\frac{n!}{e}\right)$

4. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$ *où $\alpha \in \mathbb{R}$*

Exercice 19. *Montrer la convergence et calculer la somme des différentes séries suivantes :*

1. $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant n}\frac{(-1)^k}{k}$
2. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(3n)!}$
3. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{E\left(n^{\frac{1}{3}}\right)-E\left((n-1)^{\frac{1}{3}}\right)}{4n-n^{\frac{1}{3}}}$ *où E désigne la partie entière.*

Exercice 20. *Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)} = a < 0$. Montrer la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$. Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.*

Exercice 21. *Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^k}{k}$.*

Exercice 22. *Donner la nature de $\sum u_n$ quand u_n vaut*

1. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ *où $\alpha\in\mathbb{R}$*
2. $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}$
3. $\frac{\sin(n!\pi e)}{\ln(n)}$

Exercice 23. *Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$ où u_n vaut*

1. $a\ln(n)+b\ln(n+1)+c\ln(n+2)$ *pour $n\geqslant 1$.*
2. $\frac{2^n}{3^{2^{n-1}}+1}$ *pour $n\geqslant 1$.*
3. $\frac{n-k\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}{n(n+1)}$ *avec $k\in\mathbb{N}^*$ est fixé.*
4. $\arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$ *pour $n\geqslant 0$.*

Exercice 24. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n = n(u_n-u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature lorsque*

(i) $(nu_n)_{n\geqslant 1}$ *converge vers 0 OU*

(ii) $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *décroît et tend vers 0.*

Comparer alors les sommes respectives. En déduire, pour $p\geqslant 1$ fixé,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$$

Exercice 25. *Soit $q\geqslant 2$ et $v_n = \frac{1}{(n+q)!}\sum_{k=1}^{n} k!$. Donner la nature de $\sum v_n$. En cas de divergence, donner un équivalent des sommes partielles.*

Exercice 26. *Soit* $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$*,* $z \in \mathbb{C}$*,* $|z| < 1$*. Montrer, en justifiant l'existence :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{nc}}{1-z^{na+b}}$$

Exercice 27. *Soit* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *une série complexe absolument convergente. On pose pour* $q \in \mathbb{N}^*$*,* $b_q = \frac{1}{q(q+1)}(a_1 + 2a_2 + \cdots + qa_q)$*. Montrer que* $\sum_{q\geqslant 1} b_q$ *converge et évaluer sa somme en fonction de* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*. On pourra poser* $u_{n,q} = \frac{na_n}{q(q+1)}$ *si* $n \leqslant q$ *et 0 sinon.*

Exercice 28 (Inégalité de Carleman)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\sum u_n < +\infty$*. On pose* $v_n = \frac{1}{n(n+1)}(u_1 + \cdots + nu_n)$ *et* $w_n = \sqrt[n]{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}$*. On admet que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, pour tout* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$*, on a l'inégalité entre la moyenne géométrique et arithmétique :*

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$*.*

Montrer que $\sum w_n$ *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$*. On pourra utiliser l'exercice précédent. Montrer que e est la "meilleure" constante possible, c'est-à-dire que si* $\forall (u_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ *telle que* $\sum u_n$ *converge, on a* $\sum w_n \leqslant C \sum u_n$ *alors* $C \geqslant e$*.*

Exercice 29.

1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* $\alpha \in \mathbb{R}$ *pour que* $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ *soit sommable et exprimer alors la somme en fonction de la fonction* ζ *de Riemann.*
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* $\alpha \in \mathbb{R}$ *pour que* $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ *soit sommable.*

Exercice 30. *Étudier la sommabilité de* $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$*.*
En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}$*.*

Exercice 31.

1. *Montrer que*

$$\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k}$$

converge (où les p_k sont les nombres premiers). En déduire la nature de

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{p_k}$$

2. *Montrer que pour tout $s\in]1,+\infty[$, le produit infini*

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$$

converge. Donner sa valeur en fonction de $\zeta(s)$.

3. *Généraliser ce résultat à $s\in\mathbb{C}$ avec $\Re(s)>1$.*

Exercice 32. *On note $\varphi(n)=|\{k\in\{1,\ldots,n\}\ ,\ k\wedge n=1\}|$ (fonction d'Euler). Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ la somme $\sum\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ converge-t-elle ? Donner alors sa somme en fonction de $\zeta(\alpha)$.*

Exercice 33. *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\neq m$, $|z_n-z_m|\geqslant 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{z_n^3}$ converge.*

Exercice 34. *Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.*

Exercice 35. *Pour $(a,b)\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^*)$, on définit $u_n=\frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge.*
2. *Dans ce cas, calculer sa somme.*
3. *Faire le cas où $a=-\frac{1}{2}$ et $b=1$.*

Exercice 36. *Soit $u_n=\frac{\ln(n)}{n}$ et $v_n=(-1)^n u_n$ pour $n\geqslant 1$.*

1. *Donner la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.*
2. *Soit $S_N=\sum_{n=1}^N u_n$. Donner un équivalent de S_N puis développer jusqu'au o(1).*
3. *Exprimer $\sum_{n=2}^{+\infty}v_n$ en fonction de γ (constante d'Euler) et $\ln(2)$.*

Exercice 37. *Soit pour $n\in\mathbb{N}^*$, $q_1(n)$ la nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. On définit par récurrence $q_{k+1}(n)=q_1(q_k(n))$. Étudier la convergence de*

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{nq_1(n)q_2(n)\ldots q_n(n)}$$

Exercice 38. *Soit $P_n(X)=\sum_{k=0}^n\frac{X^k}{k!}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et P_{2n+1} s'annule une seule fois en $a_{2n+1} < 0$.*

2. *Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n+1}$.*

Exercice 39. *Montrer qu'il existe un unique $x_n \geqslant 0$ tel que $e^{x_n} = x_n + n$. Donne un développement asymptotique à deux termes de x_n pour $n \geqslant 1$.*

Exercice 40. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.*

1. *On suppose que $\sum u_n$ converge, étudier $\sum v_n$.*

2. *On suppose que $\sum u_n$ diverge. Pour $\alpha = 1$, montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $v_{n+1} + \cdots + v_{n+p} \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$. En déduire que $\sum v_n$ diverge.*

3. *On suppose que $\sum u_n$ diverge. Pour $\alpha > 1$, on forme $w_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$. Montrer que $\sum v_n$ converge. Et si $\alpha < 1$?*

4. *On suppose que $\sum u_n$ converge. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $w_n = \frac{u_n}{R_n^\alpha}$. Étudier la nature de $\sum w_n$.*

Exercice 41 (Principe des tiroirs de Dirichlet)**.** *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}$. On pourra étudier les $n+1$ réels $(kx - \lfloor kx \rfloor) = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et montrer qu'il existe $k \neq k'$ avec $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$.*

2. *Montrer qu'il existe $(p_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.*

3. *Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n \sin(n)}\right)_{n \geqslant 1}$ (on admet que $\pi \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).*

Exercice 42. *Soit $(a_{n,p}) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^*)^2}$ telle que*

(i) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,p} = a_p \in \mathbb{C}$,

(ii) il existe une suite de réels positifs (b_p) donc la série converge telle que pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $|a_{n,p}| \leqslant b_p$.

1. *Évaluer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} a_{n,p}$.*

2. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$.*

Exercice 43. *Soit $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ une série complexe absolument convergente.*

1. *Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on peut définir $S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{kn}$.*

2. *On suppose que pour tout* $k \geqslant 1$, $S_k = 0$. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 1$, $u_n = 0$.

Exercice 44. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *si* $\sum u_n$ *converge, alors* $\sum f(u_n)$ *converge.*

1. *Montrer que* $f(0) = 0$ *et que* f *est continue en 0.*
2. *Montrer qu'il existe* $\alpha > 0$, $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = -f(x)$ *(*f *est impaire au voisinage de 0).*
3. *Montrer qu'il existe* $\beta > 0$ $\forall (x,y) \in]-\beta, \beta[^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ *(*f *est linéaire au voisinage de 0).*
4. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\gamma > 0$ *tels que* $\forall x \in]-\gamma, \gamma[$, $f(x) = \lambda x$ *(*f *est une homothétie au voisinage de 0).*