Solutions MP/MP*
Équations différentielles linéaires

Solution 1. L'équation différentielle est linéaire homogène sous forme résolue du second ordre. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'ensemble solution est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit φ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$u : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & y' + \varphi y \end{array}$$

On définit ensuite

$$u \circ u : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & (y' + \varphi y)' + \varphi(y' + \varphi y) = y'' + y'(2\varphi) + (\varphi' + \varphi^2)y \end{array}$$

On pose $\varphi(x) = x$. Alors l'équation différentielle équivaut à $u \circ u(y) = 0$. On a $u(z) = 0$ si et seulement si $z' + xz = 0$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

On cherche la solution générale sous la forme $y(x) = d(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. En reportant, cela équivaut à $d'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, et cela équivaut au fait qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $d(x) = cx + d$. Donc l'ensemble solution est

$$\left\{ x \mapsto (cx + d)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \middle| (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

■

Solution 2. C'est une équation homogène linéaire. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Le système équivaut à $tY' = aY$ où

$$Y : \begin{array}{ccc} I = \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Sur I, le système équivaut à $Y' = \frac{1}{t}AY$, équation homogène à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'ensemble solution est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension

3. On a

$$
\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X-1 & 3 & -3 & \\ 2 & X+6 & -13 & \\ & 1 & 4 & X-8 \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & 3 & 0 \\ 2 & X+6 & X-7 \\ 1 & 4 & X-4 \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & -4X+7 & 0 \\ 2 & X-2 & X-7 \\ 1 & 0 & X-4 \end{vmatrix}, \\
&= (-4X+7)(X-7) + (X-4)\left((X-1)(X-2) - 2(-4X+7)\right), \\
&= X^3 - 3X^2 + 3X - 1, \\
&= (X-1)^3.
\end{aligned}
$$

A est trigonalisable mais non diagonalisable car non semblable à I_3. On a

$$
(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -3y + 3z &=& 0, \\ -2x - 7y + 13z &=& 0, \\ -x - 4y + 7z &=& 0. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& z, \\ x &=& 3y \end{array} \right.
$$

On prend pour vecteur propre $f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $(A - I_3)^3 = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, et $\dim(\ker(A - I_3)) = 1$. On a

$$
(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.
$$

On choisit f_3 tel que $(A - I_3)^2 f_3 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, par exemple $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose $f_2 = (A - I_3) f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et on a $f_1 = (A - I_3)^2 f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit

$$
P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).
$$

Alors

$$
A_1 = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

On pose $Y_1 = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$. Alors le système équivaut à

$$\begin{cases} tx_1' &= x_1 + y_1, \\ ty_1' &= y_1 + z_1, \\ tz_1' &= z_1. \end{cases}$$

On trouve $z_1(t) = \alpha e^{\ln|t|} = Ct$ pour tout $t \in I$ (avec $C = \pm\alpha$). En reportant, on a $y_1' = \frac{1}{t}y_1 + C$, donc si $y_1(t) = D(t) \times t$, on a $D'(t) \times t = C$ d'où $D(t) = C \ln|t| + D$. Enfin, on a $x_1' = \frac{1}{t}x_1 + C\ln|t| + D$.

Donc si $x_1(t) = E(t) \times t$, on a $E'(t) \times t = C\ln|t| + D$. Si $I = \mathbb{R}_+^*$, on a

$$E(t) = C \int_1^t \frac{\ln(u)}{u} \mathrm{d}u + D\ln(t) + E,$$

avec $\int_1^t \frac{\ln(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln^2(t)$. Ainsi, on a $E(t) = \frac{C}{2}\ln^2(t) + D\ln(t) + E$, d'où

$$x_1(t) = \frac{C}{2} t \ln^2|t| + Dt\ln|t| + E \times t.$$

Puis $Y = PY_1$, prolongeable (avec une classe $\mathcal{C}^1$) en 0 si et seulement si $C = D = 0$ si et seulement si $Y_1(t) = \begin{pmatrix} tE \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ■

Remarque 1. *Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, on a*

$$\begin{aligned} tY_1' = A_1Y_1 &\iff Y_1' - \frac{1}{t}A_1Y_1 = 0, \\ &\iff \exp(-\ln(t)A_1)(Y_1' - \frac{1}{t}A_1Y_1) = (Y_1(t)\exp(-\ln(t)A_1))' = 0, \\ &\iff \exists Y_0 \in \mathbb{R}^3, \forall t \in I, \exp(-\ln|t|\,A_1)Y_1(t) = Y_0, \\ &\iff \exists Y_0 \in \mathbb{R}^3, \forall t \in I, Y_1(t) = \exp(\ln|t|\,A_1)Y_0. \end{aligned}$$

On a $A_1 = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$ *avec* $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et $N^3 = 0$. Ainsi,*

$$\exp(\ln|t|\,A_1) = \underbrace{e^{\ln|t|}}_{\pm t} \times \left(I_3 + \ln|t|\,N + \frac{\ln^2|t|}{2}N^2\right).$$

Solution 3.

1. On a $V(x) = \mathrm{e}^{xA}u$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $xA \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}\exp(xA)^{\mathsf{T}} &= \exp((xA)^{\mathsf{T}}),\\ &= \exp(-xA),\\ &= \exp(xA)^{-1},\end{aligned}$$

donc $\exp(xA) \in SO_n(\mathbb{R})$ et $\|V(x)\|_2 = \|u\|_2$.

2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\Theta_{x_0} : \begin{array}{ccc} S_{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^n \\ V & \mapsto & V(x_0) \end{array}$$

est un isomorphisme (où $S_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble solution).

Ainsi,

— ou bien $(V_1, \ldots, V_n)$ est liée et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W(x) = 0$,

— ou bien $(V_1, \ldots, V_n)$ est libre et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $W(x) \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}W'(x) &= \sum_{i=1}^{n} \det_B(V_1(x), \ldots, V_i'(x), \ldots, V_n(x)),\\ &= \sum_{i=1}^{n} \det_{B(x)}(V_1(x), \ldots, AV_i(x), \ldots, V_n(x))W(x),\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}W(x),\\ &= W(x) \times \mathrm{Tr}(A),\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $W(x) = c$.

3. On suppose $u \neq 0$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xA) \in O_n(\mathbb{R})$. $(u, \exp(xA)u)$ est liée si et seulement s'il existe $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ telle que $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$, $\exp(xA)u = \varepsilon(x)u$. On a $(\exp(xA)u|u) = \varepsilon(x)\|u\|_2^2$ donc $x \mapsto \varepsilon(x)$ est continue à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc constante.

Lemme 1. *On a* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{0\}$, *et il existe* $P \in O_n(\mathbb{R})$ *et* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in (\mathbb{R}^*)^p$ *tel que*

$$P^{-1}AP = P^{\mathsf{T}}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & & & & & \\ \alpha_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & -\alpha_p & & \\ & & & \alpha_p & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = A_1.$$

Preuve du lemme 1. Si $Ax = \lambda X$, alors

$$(AX|X) = X^\mathsf{T} AX = \lambda \|X\|_2^2 = (X^\mathsf{T} AX)^\mathsf{T} = X^\mathsf{T}(-A)X = -\lambda \|X\|_2^2.$$

Donc $\lambda = 0$.
Le deuxième résultat s'obtient par récurrence sur n. ∎

On a donc

$$\exp(xA) = P\exp(xA_1)P^{-1} = P \begin{pmatrix} R_{x\alpha_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{x\alpha_p} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $\alpha_i \neq 0$, où R_θ indique la matrice de rotation en dimension 2 d'angle θ. Ainsi, pour que $\exp(xA)u = u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit que $u \in \ker(A)$ (pour ne pas être affecté par les matrices de rotation).

∎

Remarque 2. *Si $(V_1(0), \dots, V_n(0))$ est une base orthonormée directe, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\|V_i(x)\|_2 = \|V_i(0)\|_2 = 1$ et en dérivant, on a $(V_i(x)|V_j(x)) = \varphi_{i,j}(x)$.*

On a

$$\begin{aligned} \varphi'_{i,j}(x) &= (V'_i(x)|V_j(x)) + (V_i(x)|V'_j(x)), \\ &= V_j(x)^\mathsf{T} AV_i(x) + V_j^\mathsf{T} \underbrace{A^\mathsf{T}}_{-A} V_i(x), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{i,j} = 0$ donc $\varphi_{i,j}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Enfin,

$$\det_B(V_1(x), \dots, V_n(x)) = \det_B(V_1(0), \dots, V_n(0)) = 1.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(V_1(x), \dots, V_n(x))$ est une base orthonormée directe.

Solution 4. On résout sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Posons

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $B : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(x, y) est solution du système différentiel sur I si et seulement si pour tout $t \in I$, $Y'(t) = AY(t) + B(t)$.

On réduit A : $\chi_A = X^2 + X = X(X+1)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. On a

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -4a - 2b & = & 0, \\ 6a + 3b & = & 0, \end{array}\right.$$

si et seulement si $2a = b$. On pose $f_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, vecteur propre de A associé à 0. On a

$$(A + I_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -4a - 2b & = & 0, \\ 6a + 3b & = & 0, \end{array}\right.$$

si et seulement si $3x = -2y$. On pose $f_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et on pose $Y_1 = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. De plus, on a

$$B(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} f_{-1},$$

donc $P^{-1}B(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1(t)$.

Ainsi, le système différentiel équivaut sur I à pour tout $t \in I$, $Y_1'(t) = A_1Y_1(t) + B_1(t)$, d'où pour tout $t \in I$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 0, \\ y_1'(t) & = & -y_1(t) + \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}. \end{array}\right.$$

Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $x_1(t) = \alpha$. D'autre part, on trouve $y_1(t) = \mathrm{e}^t\left(\ln(|\mathrm{e}^t - 1|) + \gamma\right)$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer x et y, on calcule ensuite $Y = PY_1$. ■

Solution 5.

1. On résout sur $I = \mathbb{R}_+^*$ou $]-1, 0[$. Sur I, l'équation différentielle équivaut à

$$f'(x) + \frac{\lambda}{x} f(x) = \frac{1}{x(x+1)},$$

d'équation homogène associée $y' = -\frac{\lambda}{x} y$. Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \beta \mathrm{e}^{-\lambda \ln|x|} = \frac{\beta}{|x|^\lambda}$ où $\beta \in \mathbb{R}$. Pour une solution générale de la forme $y(x) = \frac{\beta(x)}{|x|^\lambda}$ avec $x \mapsto \beta(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a $\frac{\beta'(x)}{|x|^\lambda} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Commencent les disjonctions de cas où l'on note $f(x) = \frac{\beta(x)}{|x|^\lambda}$ une solution.

— Si $I = \mathbb{R}_+^*$, on a $\beta'(x) = x^{\lambda - 1} - \frac{x^\lambda}{x+1}$.

— <u>Si $\lambda \neq 0$</u>, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta(x) = \frac{x^\lambda}{\lambda} - \int_1^x \frac{u^\lambda}{u+1}\mathrm{d}u + \beta$ et $f(x) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{x^\lambda}\int_1^x \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u + \frac{\beta}{x^\lambda}$. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\beta}{x^\lambda}$ est finie si et seulement si $\lambda > 0$. Comme $\frac{u^\lambda}{u+1} \underset{u\to 0}{\sim} u^\lambda$ donc $\int_1^0 \frac{u^\lambda}{u+1}\mathrm{d}u$ converge si et seulement si $\lambda > -1$ (critère de Riemann).

— <u>Si $\lambda \in]-1,0[$</u>, $\frac{1}{x^\lambda} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\int_1^x \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to 0]{} \int_1^0 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\lambda}$ qui est une limite finie (sans condition sur β).

— <u>Si $\lambda > 0$</u>, notons que si f a une limite finie en 0, il faut que

$$\frac{1}{x^\lambda}\left(\int_1^x \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u - \beta\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \text{quelque chose de fini.}$$

Or $\frac{1}{x^\lambda} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, donc il faut

$$\left(\int_1^x \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u - \beta\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

d'où

$$\beta = -\int_0^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u.$$

Réciproquement, si $\beta = -\int_0^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{x^\lambda}\left(\int_1^x \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u\right), \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{x^\lambda}\int_0^x \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u, \\ &= \frac{1}{\lambda} - \int_0^x \frac{\left(\frac{u}{x}\right)^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u, \\ &= \frac{1}{\lambda} - \int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+vx}x\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+vx}x\mathrm{d}v = x\int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+vx}\mathrm{d}v,$$

et pour tout $(x,v) \in I \times [0,1]$, $\left|\frac{v^\lambda}{1+vx}\right| \leqslant v^\lambda$, intégrable sur $[0,1]$. D'aès le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+vx}\mathrm{d}v \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^1 v^\lambda\mathrm{d}v = \frac{1}{\lambda+1},$$

d'où $x\int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+v}\mathrm{d}v \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\lambda}$.

Donc f a une limite finie en 0 si et seulement si $\beta = -\int_0^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u$.

— Si $\lambda < -1$, on a $\frac{\beta}{x^\lambda} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\frac{u^\lambda}{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} u^\lambda$. Par intégration des relations de comparaisons (applicable car les intégrandes sont positives), on a

$$\int_x^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 u^\lambda \mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda+1}\left(1 - x^{\lambda+1}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

et

$$-\frac{1}{x^\lambda}\int_x^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{1+\lambda}\frac{x^{\lambda+1}}{x^\lambda} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\lambda}$.

— Si $\lambda = -1$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 - x\int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} + \beta x, \\ &= -1 - x\ln(x+1) + \ln(2) + \beta x, \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2) - 1. \end{aligned}$$

— Si $\lambda = 0$, on a

$$\beta'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

et $\beta(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \beta$. On a alors $f(x) = \frac{\beta(x)}{x^0} = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \beta \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$, sans condition sur β.

— Si $I =]-1, 0[$, on vérifie que c'est la même chose.

Si $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est solution avec un rayon de convergence $R > 0$, on a $xf'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^n$. Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$xf'(x) + \lambda f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+\lambda) a_n x^n = \frac{1}{1+x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\lambda + n},$$

donc si $\lambda \notin \mathbb{Z}_-$, on a une solution développable en série entière autour de 0.

Réciproquement, avec cette définition des (a_n) et de f, on a un rayon de convergence $R = 1$ (par la règle de d'Alembert) et f est solution de l'équation différentielle sur $]-1, 1[$.

2. On choisit $\lambda = \frac{1}{3} > 0$. Les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc définis. Soit

$$S(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^n}{\frac{1}{3} + n}.$$

S est solution de l'équation différentielle sur $]-1,1[$, et on connaît sa forme d'après l'étude menée à la première question. Comme $\lambda > 0$, S a une limite finie en 0 donc S est entièrement déterminée (car on n'a pas le choix pour la constante β) :

$$S(x) = 3 + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \int_0^x \frac{u^{\frac{1}{3}}}{1+u} \mathrm{d}u.$$

On pose $v = u^{\frac{1}{3}}$, d'où

$$\int_0^x \frac{u^{\frac{1}{3}}}{1+u} \mathrm{d}u = 3 \int_0^{x^3} \frac{3v^3 \mathrm{d}v}{v^3+1} = 9 \left(\int_0^{x^3} \mathrm{d}v - \int_0^{x^3} \frac{\mathrm{d}v}{v^3+1} \right).$$

On décompose ensuite $\frac{1}{X^3+1}$ en éléments simples pour calculer l'intégrale.

■

Solution 6.

1. Pour le sens indirect, on a $\exp(tA) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{t^k A^k}{k!}$. Pour $i \neq j$, $(\exp(tA))_{i,j}$ est une série entière en t et on a

$$(\exp(tA))_{i,j} = 0 + t a_{i,j} + t^2 (A^2)_{i,j} + \dots \underset{t \to 0}{\sim} t a_{i,j}.$$

   Par hypothèse, $(\exp(tA))_{i,j} \geqslant 0$ donc pour $t \to 0^+$, on a $a_{i,j} \geqslant 0$.
   Réciproquement, on considère $\beta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (-a_{i,i})$. Posons $A' = A + \beta I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$. Pour tout $t \geqslant 0$, $tA' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ donc $\exp(tA') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$. Comme A et I_n commutent, on a

$$\begin{aligned} \exp(tA') &= \exp(tA + \beta t I_n), \\ &= \exp(tA) \exp(t\beta I_n), \\ &= \exp(tA) \times \mathrm{e}^{t\beta}, \end{aligned}$$

   donc $\exp(tA) = \underbrace{\mathrm{e}^{-tB}}_{\in \mathbb{R}_+} \exp(tA') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Posons $\varphi \colon t \mapsto \exp(-tA)x(t)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. x est solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& Ax(t) + f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0) &=& 0, \end{array} \right. , \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \exp(-tA)(x'(t) - Ax(t)) &=& \exp(-tA)f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0) &=& 0, \end{array} \right. , \\ &\iff \varphi(t) = x_0 + \int_0^t \exp(-uA) f(u) \mathrm{d}u, \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ &\iff x(t) = \exp(tA) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-uA) f(u) \mathrm{d}u \right), \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ &\iff x(t) = \exp(tA) + \exp(tA) \int_0^t \exp(-uA) f(u) \mathrm{d}u, \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Or $\exp(tA)x_0 \in (\mathbb{R}_+)^n$ d'après la première question, et

$$\exp(tA)\int_0^t \exp(-uA)f(u)\mathrm{d}u = \int_0^t \exp((t-u)A)f(u)\mathrm{d}u.$$

Pour tout $u \in [0,t]$, $(t-u) > 0$ donc $\exp((t-u)A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ et ainsi, $c(t) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

■

Solution 7. Le sens indirect est normalement du cours, il suffit de considérer l'isomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \Theta_{t_0}: & S_{(H),]a,b[} & \to & \mathbb{R}^n \\ & f & \mapsto & (f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)) \end{array}$$

où $S_{(H),]a;b[}$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $]a,b[$ avec une condition particulière en t_0.

Réciproquement, si W ne s'annule pas, notons $L_i(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(i)(x)} \\ f_2^{(i}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}$ (ce sont les lignes de W mises en colonne). On a

$$W(x) = \det(L_0(x), L_1(x), \dots, L_{n-1}(x)),$$

et comme W ne s'annule pas, pour tout $x \in]a,b[$, $(L_0(x), \dots, L_{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, il existe $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)) \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1^{(n)}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} a_i(x) L_i(x), \\ &= \big(L_0(x), L_1(x), \dots, L_{n-1}(x)\big) \begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x) & f_1'(x)_{R(x)} & \dots & f_1^{(x-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(x) & f_{n-1}'(x) & \dots & f_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{R(x)} \begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les f_i étant $\mathcal{C}^n$, $x \mapsto R(x)$ est continue et $A \mapsto A^{-1}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $x \mapsto R(x)^{-1}$ est continue sur $]a,b[$ donc $x \mapsto R(x)^{-1} \begin{pmatrix} f_1^{(n)}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ est continue sur $]a,b[$.
En d'autres termes, les $(a_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ sont continues sur $]a,b[$. ■

Solution 8. $|\sin|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène a $(\cos, \sin)$ pour base de solutions. On cherche des solutions sous la forme $y(x) = a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$, avec $a'(x)\cos(x) + b'(x)\sin(x) = 0$.

y est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} a'(x)\cos(x) + b'(x)\sin(x) &= 0, \\ -a'(x)\sin(x) + b'(x)\cos(x) &= |\sin(x)|\,. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \cos(x) \times \text{première ligne} - \sin(x) \times \text{deuxième ligne} \\ \sin(x) \times \text{première ligne} + \cos(x) \times \text{deuxième ligne} \end{array}$$

donne

$$\begin{aligned} a'(x) &= -\sin(x)\,|\sin(x)| = \varepsilon_x \sin^2(x), \\ b'(x) &= \cos(x)\,|\sin(x)| = -\varepsilon_x \cos(x)\sin(x), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_x = 1$ si $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ pour k impair, et ε_x si k est pair.

Sur $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$, on a $a(x) = \varepsilon_k \times \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + a_k$ et $b(x) = \varepsilon_k \times \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) + b_k$. On a

$$y(x) = \frac{\varepsilon_k}{2}\left(\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)\cos(x) - \frac{\cos(2x)}{2}\sin(x)\right) + a_k\cos(x) + b_k\sin(x).$$

Par continuité, $\lim\limits_{x \to k\pi^-} y(x) = \frac{\varepsilon_k}{2}\left(k\pi(-1)^k\right) + a_k(-1)^k$ et $\lim\limits_{x \to k\pi^+} y(x) = -\frac{\varepsilon_k}{2}(k\pi(-1)^k) + a_{k+1}(-1)^k$ (on a $\varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_k$). Donc $a_{k+1} = a_k + \varepsilon_k k\pi$. De même pour les b_k, on étudie la continuité de la dérivée.

On détermine ainsi a_k et b_k en fonction de a_0 et b_0, par exemple pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a_k = a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j (j\pi)$. ■

Remarque 3. *Autre méthode : $|\sin|$ est $\mathcal{C}^1$-PM continue 2π-périodique paire. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$|\sin(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx),$$

avec

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On résout ensuite $y'' + y = \cos(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on somme en vérifiant que la solution obtenue est de classe $\mathcal{C}^2$.

Solution 9. On pose $\varphi(t) = X(t)^\mathsf{T} X(t)$. En dérivant, on a

$$\varphi'(t) = X(t)^\mathsf{T} X(t) + X(t)^\mathsf{T} X'(t) = -X^\mathsf{T} A(t)X(t) + X^\mathsf{T} A(t)X(t) = 0.$$

Comme $\varphi(0) = I_n$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = I_n$ donc $X(t) \in O_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 4. *Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ solution de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $Y(0) = Y_0$, de même $Y(t)^\mathsf{T} Y(t) = \|Y(t)\|^2 = \|Y_0\|^2$ donc $Y(t)$ est tracé sur une sphère.*

Remarque 5. *Réciproquement, soit* $X\colon \mathbb{R} \to O_n(\mathbb{R})$ *de classe* $\mathcal{C}^1$*. En dérivant*

$$X(t)^\mathsf{T} X(t) = \mathrm{I_n},$$

on a $X'(t)X(t)^\mathsf{T} + X(t)X'(t)^\mathsf{T} = 0$ *et* $X(t)^\mathsf{T} = X(t)^{-1}$*, donc*

$$X'(t)X(t)^{-1} = -X(t)X'(t)^\mathsf{T} = -(X'(t)X(t)^{-1})^\mathsf{T},$$

donc $X'(t) = A(t)X(t)$ *avec* $A(t)$ *antisymétrique.*

Solution 10. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution sur $]-R, R[$ avec $R > 0$, on a $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n$. En reportant, et par unicité du développement en série entière, on a

$$2(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n = 0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)}$ donc

$$a_n = \frac{2^n}{(2n)!} a_0.$$

Réciproquement, définissons ainsi les a_n, avec par exemple $a_0 = 1$. On a $R = +\infty$ (règle de d'Alembert). En remontant les calculs, $y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{(2n)!}$ est solution sur I.

Si $I = \mathbb{R}_+^*$, on a $y_1(x) = \cosh(\sqrt{2x})$. On vérifie alors que $y_2(x) = \sinh(\sqrt{2x})$ est solution.
Si $I = \mathbb{R}_-^*$, on a $y_1(x) = \cos(\sqrt{-2x})$. On vérifie que $\sin(\sqrt{-2x})$ est solution.
Les solutions maximales sont donc :

— sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lambda \cosh(\sqrt{2x}) + \mu \sinh(\sqrt{2x})$ avec $\mu \neq 0$,
— sur $\mathbb{R}_-^*$, $\alpha \cos(\sqrt{-2x}) + \beta \sin(\sqrt{-2x})$ avec $\beta \neq 0$,
— sur $\mathbb{R}$, $\lambda \cosh(\sqrt{2x})$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda \cos(\sqrt{-2x})$ sur $\mathbb{R}_-$ d'où $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n 2^n}{(2n)!}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ car développable en série entière.

■

Solution 11. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur $\mathbb{R}$. $(\sinh, \cosh)$ est nue base de l'ensemble solutions de l'équation homogène. Soit $\varphi(x) = \lambda(x)\cosh(x) + \mu(x)\sinh(x)$ avec la condition $\lambda' \cosh + \mu' \sinh = 0$. φ est solution si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda'(x)\cosh(x) + \mu'(x)\sinh(x) &= 0, \\ \lambda'(x)\sinh(x) + \mu'(x)\cosh(x) &= \frac{1}{\cosh(x)}. \end{cases}$$

$\cosh(x) \times$première ligne$-\sinh(x)\times$deuxième ligne et $\sinh(x)\times$première ligne$-\cosh(x)\times$ deuxième ligne donne

$$\begin{cases} \lambda'(x) &= -\tanh(x), \\ \mu'(x) &= 1. \end{cases}$$

Donc $\lambda(x) = -\ln(\cosh(x)) + \lambda$ et $\mu(x) = x + \mu$.

On a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \cosh(x)(\lambda - \ln(\cosh(x))) + \sinh(x)(x+\mu), \\ \varphi'(x) &= \sinh(x)\,(\lambda - \ln(\cosh(x))) + \cosh(x)(x+\mu). \end{aligned}$$

Et $\varphi(0) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $\varphi'(0) = 0$ si et seulement si $\mu = 0$. ■

Solution 12. D'après la décomposition de Dunford, il existe D diagonalisable et N nilpotente qui commutent telles que $A = D + N$, avec $\chi_D = \chi_A$. Alors

$$\exp(tA) = \underbrace{\exp(tD)}_{P^{-1}\operatorname{diag}(\mathrm{e}^t\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant P}} \underbrace{\exp(tN)}_{\left(I_n+tN+\cdots+\frac{t^{n-1}N^{n-1}}{(n-1)!}\right)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

■

Solution 13. $(\sin,\cos)$ est une base de solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$. Soit

$$\varphi(t) = \lambda(t)\sin(\omega t) + \mu(t)\cos(\omega t),$$

avec $\lambda'(t)\sin(\omega t) + \mu'(t)\cos(\omega t) = 0$. φ est solution si et seulement si $\varphi'' + \omega^2\varphi = f$ et

$$\lambda'(t)\cos(\omega t) - \mu'(t)\sin(\omega t) = \frac{f(t)}{\omega}.$$

On fait $\sin(\omega t)$ fois la première ligne + $\cos(\omega t)$ fois la deuxième ligne donne

$$\lambda'(t) = \frac{f(t)}{\omega}\cos(\omega t).$$

$\cos(\omega t)$ fois la première ligne - $\sin(\omega t)$ fois la deuxième ligne donne

$$\mu'(t) = -\frac{f(t)}{\omega}\sin(\omega t).$$

Ainsi,

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{\omega}\sin(\omega(t-u))\mathrm{d}u + \lambda\sin(\omega t) + \mu\cos(\omega t).$$

φ est T-périodique si et seulement si pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t+T) = \varphi_1(t) = \varphi(t)$. Or $\varphi_1(t)$ est solution car f est T-périodique. On a $\varphi_1 = \varphi$ si et seulement si $\varphi_1(0) = \varphi(0)$ et $\varphi_1(T) = \varphi(T)$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si et seulement si $\varphi(T) = \varphi(0)$ et $\varphi'(T) = \varphi'(0)$.

Ainsi, on doit avoir

$$\int_0^T \frac{f(u)}{\omega}\sin(\omega(T-u))\mathrm{d}u + \lambda\sin(\omega T) + \mu\cos(\omega T) = \mu.$$

Comme $\varphi'(t) = \lambda(t)\omega\cos(\omega t) - \mu(t)\omega\sin(\omega t)$, donc

$$\varphi'(t) = \int_0^t f(u)\cos(\omega(t-u))\mathrm{d}u + \lambda\omega\cos(\omega T) - \mu\omega\sin(\omega t).$$

Donc on doit avoir

$$\int_0^T f(u)\cos(\omega(T-u))\mathrm{d}u + \lambda\omega\cos(\omega T) - \mu\omega\sin(\omega T) = \lambda\omega.$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues et admet une unique solution T-périodique si et seulement si le déterminant

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\sin(\omega T) & \cos(\omega T)-1\\ \omega(\cos(\omega T)-1) & -\omega\sin(\omega t)\end{vmatrix} &= \omega\left(-\sin^2(\omega T)-(\cos(\omega T)-1)^2\right),\\ &= \omega\left(-2+2\cos(\omega T)\right),\end{aligned}$$

est non nul si et seulement si $\cos(\omega T)\neq 1$. ■

Solution 14. Soit $I=\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur I et la dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène est 2. Notons que si une solution est polynomiale de degré n, alors le coefficient en x^{n+1} de $x^2y''(x)-2x(1+x)y'(x)+2(1+x)y(x)$ est $0=-2na_n+2a_n$. Nécessairement $n=1$ et y_1 est affine. On vérifie que $y_1(x)=x$ est solution. On cherche ensuite une solution de la forme $y_2(x)=C(x)y_1(x)=C(x)x$ avec C non constante. En reportant, on trouve

$$C''(x)+\left(2\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)C'(x)=0.$$

On trouve par exemple $C(x)=\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u^4}\mathrm{d}u$. On choisit $\varepsilon=1$ si $I=\mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon=-1$ si $I=\mathbb{R}_-^*$.

$$\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u^4}\mathrm{d}u \underset{x\to 0}{\sim} \int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{d}u}{u^4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{3x^3}.$$

Donc y_2 n'a pas de limite en 0. λy_1 sont les seules solutions maximales sur $\mathbb{R}$. ■

Solution 15. On pose $g(t)=f'(t)+f(t)$. L'équation homogène a pour solution $y(t)=\lambda\exp(-t)$ d'où $f(t)=\lambda(t)\exp(-t)$ avec

$$(f'+f)(t)=g(t)=\lambda'(t)\exp(-t).$$

On a $\lambda(t)=\int_0^t \exp(t)g(u)\mathrm{d}u+\lambda$. Si $F(t)=\int_0^t g(u)\exp(u)\mathrm{d}u$, soit $\varepsilon>0$. Il existe $A>0$ tel que pour tout $t>A$, $|g(t)|\leqslant\varepsilon$. Alors

$$F(t)=\underbrace{\mathrm{e}^{-t}\int_0^A g(u)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}0}+\int_A^t g(u)\mathrm{e}^{u-t}\mathrm{d}u,$$

et le second terme est majoré en valeur absolue par $\frac{\varepsilon}{2}\int_{A-t}^0 \mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\mathrm{e}^{A-t}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. D'où le résultat.

Contre exemple pour la deuxième question : e^t. ■

Solution 16. Soit

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ & M & \mapsto & MB-BM\end{array}$$

On a $A'(t) = \varphi(A(t))$, c'est une équation différentielle homogène linéaire. φ est à coefficients constants, on sait alors que
$$A(t) = \exp(t\varphi)(A(0)).$$
On a $\exp(t\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\varphi^k$. Soit
$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & MB \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rccl} \varphi_2 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & -BM \end{array}$$
On a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, et
$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(M) = -BMB = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(M).$$
Ainsi, $\exp(t\varphi) = \exp(\varphi_1)\exp(t\varphi_2)$. On a
$$\begin{array}{rccl} \varphi_1^k : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & MB^k \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rccl} \varphi_1^k : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & (-1)^k B^k M \end{array}$$

On Si $A(0) = A_0$, on a
$$\exp(t\varphi_1)\left(\exp(t\varphi_2)(A(0))\right) = \exp(t\varphi_1)\exp(-tB)(A_0).$$
On a
$$\exp(t\varphi_1)(M) = M\exp(tB).$$
Ainsi,
$$A(t) = \exp(-tB)A_0\exp(tB),$$
donc $A(t)$ est semblable à A_0. ∎

Remarque 6. *Si A_0 et B commutent alors $A(t) = A_0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ et B commutent.*

Remarque 7. *Onp eut aussi résoudre en écrivant*
$$\underbrace{\mathrm{e}^{tB}(A'(t) + BA(t))}_{C'(t)} = \underbrace{\mathrm{e}^{tB}A(t)}_{C(t)}B.$$

Donc $C'(t) = C(t)B$ puis $C'(t)\exp(-tB) - C(t)B\exp(-tB) = 0 = D'(t)$ avec $D(t) = \exp(-tB)$. Ainsi, $D(t) = D(0)$, d'où $C(t) = C(0)\exp(tB)$ puis
$$A(t) = \exp(-tB)A(0)\exp(tB).$$

Remarque 8. *Si on a maintenant* $A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$, *soit pour* $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(t) = \mathrm{Tr}(A^k(t))$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(t) &= \mathrm{Tr}(-\sum_{i=0}^{k-1} A^i(t)A'(t)A^{k-1-i}(t)),\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{Tr}(A'(t)A^{k-1}(t)),\\
&= k\,\mathrm{Tr}(A'(t)A^{k-1}(t)),\\
&= k\left(\mathrm{Tr}(A(t)B(t)A^{k-1}(t)) - \mathrm{Tr}(B(t)A^k(t))\right).
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_k'(t) = 0$, *donc* $t \mapsto \mathrm{Tr}(A^k(t))$ *est constant. Or les coefficients de* χ_A *sont des polynômes en* $(\mathrm{Tr}(A^k)_{1\leqslant k\leqslant n-1})$, *donc* $\chi_{A(t)}$ *est constant. Si* $\chi_{A_0} = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ *est scindé à racines simples, alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ *est semblable à* $\mathrm{diag}(\lambda_i)$ *donc à* A_0.

Solution 17.

1. On a

$$\begin{aligned}
X_3'(t) = &-\exp(-t(A+B))(A+B)\exp(tB)\exp(tA)\\
&+\exp\left(-t(A+B)\right)\left(B\exp(tB)\exp(tA) + \exp(tB)A\exp(tA)\right),\\
= &\exp(-t(A+B))\left(-(A+B) + B + \exp(tB)A\exp(-tB)\right)\exp(tB)\exp(tA).
\end{aligned}$$

   Donc $\varphi(t) = -A + \exp(tB)A\exp(-tB)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \exp(tB)BA\exp(-tB) - \exp(tB)AB\exp(-tB),\\
&= \exp(tB)[B,A]\exp(-tB).
\end{aligned}$$

2. $[B,[A,B]] = 0$ donc B commute avec $[B,A]$. Ainsi, $\varphi'(t) = [B,A]$ et

$$\varphi(t) = t(BA - AB) + \varphi(0) = t(AB - BA).$$

   Puis on a (A et B commutent avec $[A,B]$)

$$\begin{aligned}
\chi_3'(t) &= t\exp(-t(A+B))[B,A]\exp(tB)\exp(tA),\\
&= t[B,A]\chi_3(t).
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2}[B,A]\right)(X_3'(t) - t[B,A]\chi_3(t)) = C'(t) = 0,$$

   avec $C(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}[B,A]\right)\chi_3(t)$, donc

$$\chi_3(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}[B,A]\right)\chi_3(0) = \exp\left(\frac{t^2}{2}[B,A]\right).$$

Ainsi,

$$\exp\left(t(A+B)\right) = \exp(tB)\exp(tA)\exp\left(-\frac{t^2}{2}[B,A]\right),$$

et pour $t=1$,

$$\exp(A+B) = \exp(B)\exp(A)\exp\left(-\frac{1}{2}[B,A]\right).$$

■

Solution 18.

1. Si $X=\emptyset$, c'est bon. Sinon, soit $x_0 \in X$. Si $y'(x_0)=0$, y est solution de l'équation différentielle avec $y(x_0)=y'(x_0)=0$ et 0 est aussi solution. Par unicité venant du théorème de Cauchy-Lipschitz, on a $y=0$ ce qui n'est pas. Donc $y'(x_0)\neq 0$ et par continuité de y' $y'>0$ au voisinage de x_0 donc y est localement injective.
2. Supposons $|X|=+\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ injective. Comme $X_n \subset I$, $x_n \in I$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc il existe $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in I$.

   Or $y(x_{\sigma(n)})=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc par continuité de y, on a $y(x)=0$. Ainsi, pour tout $a>0$, il existe $x_n\in X$ tel que $x_n \in]x-a,x+a[$, impossible d'après la première question.
3. Stratégie : on va montrer que X est dénombrable, qu'il existe $x_0\in X$ tel que pour tout $x\in X$, $x_0\leqslant x$, et ainsi de suite par récurrence sur $X\setminus\{x_0\}$.

   Pour tout $B<0$, soit $\widetilde{I})[a,B]$. On a $\left|X\cap\widetilde{I}\right|<\infty$. On a

   $$I=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{[B_n,B_{n+1}]}_{I_n},$$

   avec $B_0=a$ et (B_n) strictement croissante, $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$. Alors

   $$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{I_n\cap X}_{\text{fini}}.$$

   Donc X est dénombrable. On a $X_n=I_n\cap X$. Chaque X_n s'ordonne en $x_1^{(n)}<\cdots<x_{r_n}^{(n)}$.

■

Solution 19.

1. Le Wronskien $W_{y_1,y_2}(t)=(y_1y_2'-y_1'y_2)(t)$ garde un signe constant. On a $W_{y_1,y_2}(a)=-y_1'(a)y_2(a)$ et $W_{y_1,y_2}(0)=-y_1'(b)y_2(b)$. $y_1'(a)$ et $y_1'(b)$ sont différents de 0 par unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz (sinon $y_1=0$).

Si $y_1 > 0$ sur $]a,b[$: si $y_1'(a) < 0$, par continuité de y_1', y_1' reste négatif à droite de a donc y_1 y est strictement décroissante donc négative : impossible. Donc $y_1(a) > 0$. De même, $y_1'(b) < 0$. Or le Wronskien ne change pas de signe et

$$y_1'(a)y_1'(b)y_2(a)y_2(b) = W_{y_1,y_2}(a) \times W_{y_1,y_2}(b) > 0.$$

Donc $y_2(a)y_2(b) < 0$. Comme y_2 est continue, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et y_2 s'annule sur $]a,b[$.

Si $y_1 < 0$, on applique ce qui précède à $-y_1$.

Si y_2 s'annulait deux fois sur $]a,b[$, comme y_1 et y_2 jouent des rôles symétriques, y_1 s'annulerait une fois sur $]a,b[$: impossible.

2. Soit $H = y_1y_2' - y_2y_1'$. On a

$$H' = y_1y_2'' - y_2y_1'' = (r_1 - r_2)y_1y_2.$$

Supposons que $y_1 > 0$ sur $]a,b[$. Su y_2 ne s'annule pas sur $]a,b[$, supposons par exemple que $y_2 > 0$ sur $]a,b[$. Alors $H' < 0$ sur $]a,b[$, H est strictement décroissante sur $[a,b]$, et $H(0) = -y_2(a)y_1'(a) < 0$, $H(b) = -y_2(b)y_1'(b) > 0$: impossible. Donc y_2 s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

Application : si pour tout $t \in I$, $r_1(t) < \omega^2$, soit $a < b$ deux zéros consécutifs de y_1 et $y_2(t) = \sin(\omega(t-a))$. Les zéros de y_2 sont les $a + \frac{k\pi}{\omega}$ d'où un écart plus grand que $\frac{\pi}{\omega}$.

Soit a un zéro de y_1. En échangeant les rôles joués par r_1 et r_2 : $y = \sin(\omega'(t-a))$ s'annule en 0 et $a + \frac{\pi}{\omega}$ (deux zéros consécutifs). Donc l'écart entre deux zéros consécutifs de y_1 est plus petit que $\frac{\pi}{\omega}$.

■

Solution 20.

1. Il est clair que $\mathcal{T}_T$ est linéaire. Pour tout $Y \in S$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(\mathcal{T}_T(y))''(x) + p(x)\mathcal{T}_T(y)(x) = y''(x+T) + p(x+T)y(x+T) = 0,$$

donc $\mathcal{T}_T(y) \in \mathcal{L}(S)$. Via le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\dim(S) = 2$. Posons $A = \frac{\mathrm{Tr}(\mathcal{T}_T)}{2}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$X^2 - 2AX + \det(\mathcal{T}_T)$$

annule $\mathcal{T}_T$. Soit alors (y_1, y_2) la base de S telle que $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$.

Si $y = \alpha y_1 + \beta y_2 \in S$, alors $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$ donc $y = y(0)y_1 + y'(0)y_2$. Ainsi,

$$\mathcal{T}_T(y_1) = y_1(T)y_1 + y_1'(T)y_2 = \mathcal{T}_T(y_1)(0)y_1 + \mathcal{T}_T(y_1)'(0)y_2,$$

d'où

$$\mathrm{mat}_{(y_1,y_2)}(\mathcal{T}_T) = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\det(\mathcal{T}_T) = y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T) = W_{y_1,y_2}(T)$ où W est le Wronskien. On a

$$\begin{aligned} W'_{y_1,y_2}(x) &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x), \\ &= -y_1(x)p(x)y_2(x) + y_1(x)p(x)y_2(x), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc W_{y_1,y_2} est constant et $W_{y_1,y_1}(0) = 1$ donc $\det(\mathcal{T}_T) = 1$. Ainsi,

$$\chi_{\mathcal{T}_T} = X^2 - 2AX + 1.$$

On a $A = \frac{\mathrm{Tr}(\mathcal{T}_T)}{2} = \frac{1}{2}(y_1(T) + y_2'(T))$ donc pour tout $y \in S$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x+2T) - 2Ay(x+T) + y(x) = 0$.

2. On a $\chi_{\mathcal{T}_T} = X^2 - 2AX + 1$. On a $\Delta = 4(A^2 - 1) < 0$ si $|A| < 1$. On a deux racines complexes conjuguées μ et $\overline{\mu}$. De plus, $\mu\overline{\mu} = 1 = \det(\mathcal{T}_T)$ donc $\mu \in \mathbb{U}$. Ainsi, il existe $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_T) = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right\}$. Donc $\mathrm{mat}_{(y_1,y_2)}(\mathcal{T}_T)$ est semblable sur $\mathbb{R}$ à

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Soit (f_1, f_2) la base de S telle que $\mathrm{mat}_{(f_1,f_2)}(\mathcal{T}_T) = R_\theta$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{mat}_{(f_1,f_2)}(\mathcal{T}_T^n) = R_{n\theta}.$$

Si $f = af_1 + bf_2$, on a

$$\mathcal{T}_T^n(f) = (a\cos(n\theta) - b\sin(n\theta))f_1 + (a\sin(\theta) + b\cos(n\theta))f_2 = f(x+nT).$$

Pour tout $x \in [0,T]$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|f(x+nT)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\left(\|f_1\|_{\infty,[0,T]} + \|f_2\|_{\infty,[0,T]}\right),$$

donc f est bornée.

3. Si $|A| > 1$, on a $\delta > 0$ et

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{T}_T) = \left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\right\},$$

avec $|\lambda| \in]0,1[$. Il existe (f_1, f_2) base de S telle que $\mathcal{T}_T(f_1) = \lambda f_1$ et $\mathcal{T}_T(f_2) = \frac{1}{\lambda}f_2$. Ainsi, si $f = af_1 + bf_2$, pour tout $x \in [0,T]$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|f(x+nT)| = \left|\lambda^n af_1(x) + \frac{b}{\lambda^n}f_2(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc toutes les solutions non nulles sont non bornées.
Si $A = 1$, on a $\chi_{\mathcal{T}_T} = (X-1)^2$. Ou bien $\mathcal{T}_T = id$ et dans ce cas toutes les solutions sont T-périodiques donc bornées (car continues). Ou bien il existe une base (f_1, f_2) de S telle que

$$\operatorname{mat}_{(f_1,f_2)}(\mathcal{T}_T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\operatorname{mat}_{(f_1,f_2)}(\mathcal{T}_T^n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il existe des solutions non nulles périodiques et des solutions non bornées.

■

Solution 21.

1. $(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ est une base de S (espace des solutions de l'équation différentielle). On cherche la solution générale sous la forme

$$y(x) = \lambda(x)\mathrm{e}^x + \mu(x)\mathrm{e}^{-x},$$

avec $\lambda'(x)\mathrm{e}^x + \mu'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lambda'(x)\mathrm{e}^x - \mu'(x)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
Donc $\lambda'(x) = \frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x}$ et $\mu'(x) = -\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^x$. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x + \lambda\mathrm{e}^x + \left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \mu\right)\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $|f(t)| \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout $x \geqslant A$, on a

$$\left|\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \varepsilon\left|1 - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \varepsilon,$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x} = 0$.
Si y est bornée, nécessairement $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \lambda = 0$. Donc

$$\lambda = -\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$

définie car f est bornée. De même,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^x &= \lim_{x'\to+\infty}\left(-\int_0^{x'} f(-u)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-x'},\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\mu = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ (définie car f est bornée). Alors

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(-\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{x} + \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Réciproquement, posons

$$y_0(x) = \frac{1}{2}\left(-\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{x} + \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On a

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{x} = \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{x-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(u+x)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(u+x)\mathrm{e}^{-u}| \leqslant \|f\|_{\infty,\mathbb{R}}\,\mathrm{e}^{-u}$, intégrable. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{|x|\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{x} = 0.$$

De même, on a

$$\lim_{|x|\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Donc $y_0(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$. Donc y_0 est bornée et sa limite est 0.

■

Solution 22.

1. Comme $p\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle équivaut à $x'' + \frac{p'}{p}x' + \frac{q}{p}x = 0$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

   La première partie vient de l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. La deuxième vient du théorème de relèvement.

2. Il vient

$$\begin{array}{rcl} (px')' &=& px'' + p'x' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta, \\ x' &=& r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = \frac{r\cos\theta}{p}. \end{array}$$

   x est solution si et seulement si $(xp)' = -qx = -qr\sin\theta$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} r'\cos\theta + r(q-\theta')\sin\theta &=& 0, \\ r'\sin\theta + r\left(\theta' - \frac{1}{p}\right)\cos\theta &=& 0, \end{array}\right.$$

   si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} r' &=& r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{p} - q\right), \\ \theta' &=& q\sin^2\theta + \frac{1}{p}\cos^2\theta. \end{array}\right.$$

3. Si $p = 1$, on a

$$\begin{cases} \theta' &= q\sin^2\theta + \cos^2\theta, \\ r' = r\sin\theta\cos\theta\,(1-q)\,. \end{cases}$$

On a $\theta' > 0$ donc θ est strictement croissante et admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Si $l < +\infty$, on a

$$\int_a^t \theta'(t)\mathrm{d}u = \theta(t) - \theta(a) \xrightarrow[t\to+\infty]{} l - \theta(a).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^t \theta'(u)\mathrm{d}u &= \int_a^t q(u)\sin^2(\theta(u))\mathrm{d}u + \int_a^t \cos^2(\theta(u))\mathrm{d}u, \\ &\geqslant \int_a^t q(u)\sin^2(\theta(u))\mathrm{d}u, \\ &\underset{u\to+\infty}{\sim} q(u)\sin^2(l). \end{aligned}$$

Comme $\int_a^t q(u)\mathrm{d}u$ diverge, nécessairement, $\int_a^t \theta'(u)\mathrm{d}u$ étant finie, on a $\sin^2(l) = 0$ donc $\cos^2(l) = 1$ et $\int_a^t \cos^2(\theta(u))\mathrm{d}u \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$: contradiction.

Nécessairement, $l = +\infty$, puis par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\pi \geqslant a$, il existe un unique $t_k \in [a, +\infty[$ tel que $\theta(t_k) = k\pi$ et $x(t_k) = 0$. Donc x s'annule une infinité de fois.

■

Solution 23. Si (ii), soit $a \in \mathbb{R}$, alors pour tout $f \in E$, $(\mathcal{T}_a(f))' = \mathcal{T}_a(f')$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x+a) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x+a) + \cdots + a_0 f(x+a) = 0,$$

donc $\mathcal{T}_a(f) \in E$, d'où (iii).

Si (i), on note $\chi_\Delta(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$ le polynôme caractéristique de $\Delta\colon f \mapsto f' \in \mathcal{L}(E)$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_\Delta(\Delta) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc pour tout $f \in E$,

$$\chi_\Delta(\Delta)(f) = f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f = O_E,$$

donc E est inclus dans l'ensemble solution. Puis, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la dimension de l'espace des solutions est $n = \dim(E)$ donc on a bien égalité. D'où (ii).

Si (iii), notons que s'il existe $({}_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $f \in E$, $f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$, alors $f = 0$. En effet, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc} \delta_x: & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

une forme linéaire sur E. D'après le théorème de caractérisation des formes linéaires, il existe $g_x \in E$ tel que pour tout $f \in E$, $\delta_x(f) = f(x) = (g_x|f)$ (produit scalaire complexe a priori). Soit $f \in E$, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g_x|f) = 0$ alors $f = 0$. Ainsi, $(\mathrm{Vect}((g_x)_{x\in\mathbb{R}}))^{\perp} = \{0\}$. Donc $\mathrm{Vect}((g_x)_{x\in\mathbb{R}}) = E$. Donc $(g_x)_{x\in\mathbb{R}}$ est une famille génératrice de E, ainsi il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(g_{x_1}, \dots, g_{x_n})$ est une base de E, donc $(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ (ensemble des formes linéaires sur E de dimension n). En effet, c'est une famille libre car si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} = 0$ alors pour tout $f \in E$, $(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_{x_i}|f) = 0$ donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i g_{x_i} = 0$ et $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\delta_x = \lambda_1(x)\delta_{x_1} + \cdots + \lambda_n(x)\delta_{x_n}$. Donc si $f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \delta_x(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}(f) = 0$ d'où $f = 0$.

Ensuite, notons qu'il existe $(h_1, \dots, h_n)$ base de E telle que pour tout $f \in E$, $f = \sum_{i=1}^n f(x_i) h_i$. En admettant ce résultat, on définit

$$g = \sum_{i=1}^n f'(x_i) h_i,$$

et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f'(x_i) = g(x_i)$. Pour tout $x \in E$, on a

$$f'(x) = \lim_{p \to +\infty} p \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(f)(x) - f(x) \right).$$

Si $\delta_x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}$, on a

$$\begin{aligned}
p \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(f)(x) - f(x) \right) &= p \left(f \left(x + \frac{1}{p} \right) - f(x) \right), \\
&= \delta_x \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(f) - f \right), \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} \left(p \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(f) - f \right) \right), \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i p \left(f \left(x_i + \frac{1}{p} \right) - f(x_i) \right), \\
&\xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_i), \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i), \\
&= g(x), \\
&= f'(x).
\end{aligned}$$

D'où (i). ■

Remarque 9. *En notant le polynôme minimal Δ Π_Δ, on a $\deg(\Pi_\Delta) = n$. En effet, si $\Pi_\Delta = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{m-1} X^{m-1} + X^m$ avec $m \leqslant n$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), alors E est inclus dans l'ensemble solution de l'équation différentielle $b_0 + b_1 y + \cdots + b_{m-1} y^{(m-1)} + y^{(m)} = 0$ qui est de dimension m. Or $\dim(E) = n$ et $m \leqslant n$, donc $m = n$ et $\chi_\Delta = \pi_\Delta$.*

Solution 24.

1. Il existe $(m, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $m \leqslant \Delta \leqslant M$. Si $\lambda = 0$, f est affine et $f(0) = f(1) = 0$ implique $f = 0$. Si $\lambda > 0$, on a
$$\lambda m f \leqslant f'' = \lambda \Delta f \leqslant \lambda M f.$$
Posons g solution de $g'' = \lambda m g$ et h solution de $f'' = \lambda M h$, avec $g(0) = h(0) = 0$, $g'(0) = h'(0) = f'(0)$. On a
$$\begin{array}{rcl} g(t) & = & \frac{f'(0)}{\sqrt{\lambda m}} \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right), \\ h(t) & = & \frac{f'(0)}{\sqrt{\lambda M}} \sinh\left(\sqrt{\lambda M} t\right). \end{array}$$
Donc $g(1) \neq 0$ et $h(1) \neq 0$. On a
$$0 \leqslant (f-g)'' - \lambda m(f-g) = f'' - \lambda m f.$$
Si $f_1 = f - g$, on a $f_1'' - \lambda m f_1 = \varepsilon \geqslant 0$ et $f_1(0) = f_1'(0) = 0$. Résolvons $f_1'' - \lambda m f_1 = \varepsilon_1$ avec $f_1'(0) = f_1(0) = 0$. On a
$$f_1(t) = \lambda(t) \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) + \mu(t) \cosh\left(\sqrt{\lambda m} t\right),$$
avec $\lambda'(t) \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) + \mu'(t) \cosh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) = 0$. Il vient
$$\sqrt{\lambda m}\left(\lambda'(t) \cosh\left(\sqrt{\lambda m} t\right)\right) + \mu'(t) \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) = \varepsilon_1(t).$$
D'où
$$\begin{array}{rcl} \lambda'(t) & = & \frac{1}{\sqrt{\lambda m}} \cosh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) \varepsilon_1(t), \\ \mu'(t) & = & -\frac{1}{\sqrt{\lambda m}} \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) \varepsilon_1(t). \end{array}$$
On a $f_1(0) = 0$ donc $\mu(0) = 0$ et $f_1'(0) = 0$ donc $\lambda(0) = 0$. Finalement,
$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda m}} \int_0^t \left(\sinh\sqrt{\lambda m} u \cosh\sqrt{\lambda m} u - \cosh\sqrt{\lambda m} u \sinh\sqrt{\lambda m} u\right) \varepsilon_1(u) \mathrm{d}u, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda m}} \int_0^t \sinh\sqrt{\lambda m}(t-u) \varepsilon_1(u) \mathrm{d}u \geqslant 0. \end{aligned}$$
Donc $f \geqslant g$. De même, $f \leqslant h$. Donc quelle que soit la valeur de $f'(0)$, on a $f(1) > 0$ ou $f(1) < 0$. Ainsi, $\lambda \leqslant 0$.
On pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \Delta f g$. C'est un produit scalaire car $\Delta > 0$. Vérifions que v est autoadjoint pour ce produit scalaire :
$$\langle v(f), g\rangle = \int_0^1 f''(t) g(t) \mathrm{d}t = \underbrace{[f(t) g(t)]_0^1}_{=0 \text{ car } g \in E} - \int_0^1 f'(t) g'(t) \mathrm{d}t,$$
expression symétrique en f et g. Donc $\langle v(f), g\rangle = \langle f, v(g)\rangle$. Si $v(f) = \lambda f$ et $v(g) = \lambda g$, on a alors $\lambda \langle f, g\rangle = \mu \langle f, g\rangle$ donc si $\lambda \neq \mu$, on a $\langle f, g\rangle = 0$.

2. C'est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz.
3. Sur $[2, +\infty[$ on a $f'' = \gamma f$ et $\gamma < 0$ d'après la première question. Donc il existe $(A, \varphi) \int \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [2, +\infty[$, $f(t) = A \sin(\sqrt{-\gamma} t + \varphi)$.
   Si $A = 0$, f est solution du problème de Cauchy $f'' = \gamma \Delta f$ avec $f(2) = f'(2) = 0$ donc $f = 0$ par unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, ce qui est absurde car $f'(0) = 1$. Donc $A \neq 0$ et f s'annule en $\frac{k\pi - \varphi}{\sqrt{-\gamma}}$ avec $k \in \mathbb{N}$ sur $[2, +\infty[$.
   Sur $[0, 2]$, si f s'annule une infinité de fois, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite injective de $[0, 2]$ telle que $f(a_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On extrait $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in [0, 2]$. f étant continue sur $[0, 2]$, $f(a) = 0$ et d'après le théorème de Rolle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $b_n \in]a, a_{\sigma(n)}[$ (ou bien $]a_{\sigma(n)}, a[$) tel que $f'(b_n) = \gamma$. Par continuité de f', puisque $b_n \to 0$, on a $f'(a) = 0$. f est alors solution du problème de Cauchy $y'' = \gamma \Delta y$ avec $y(a) = y'(a) = 0$. Par unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, $f = 0$ ce qui est absurde car $f'(0) = 1$. Donc f s'annule un nombre fini de fois sur $[0, 2]$.
4. Soit $A > 0$. Sur $[0, A]$, notons $M = \sup\limits_{[0,A]} |\Delta|$. Sur $[0, x_1(\gamma)]$, f_γ est positive (car ne change pas de signe et $f'_\gamma(0) = 1$). Notons $t_\gamma \in [0, x_1(\gamma)]$ tel que $f_\gamma(t_\gamma) = \max\limits_{t \in [0, x_1(\gamma)]} f_\gamma(t)$. Pour tout $t \in]0, x_1(\gamma)[$, on a

$$f''_\gamma(t) = \Delta(t) \gamma f_\gamma(t) < 0,$$

   donc f_γ est concave sur $[0, x_1(\gamma)]$. Ainsi, pour tout $t \in [0, x_1(\gamma)]$, $f_\gamma(t) \leqslant t$ (en-dessous de la tangente en 0). Donc $f_\gamma(t_\gamma) \leqslant t_\gamma \leqslant x_1(\gamma)$. Alors pour tout $t \in [0, x_1(\gamma)]$, on a

$$0 \leqslant f(t) \leqslant x_1(\gamma)(\gamma) \leqslant A,$$

   et $\gamma M A \leqslant f''_\gamma(t) \leqslant 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned} 1 = |f'(t_\gamma) - f'(0)| &\leqslant |\gamma| M A t_\gamma, \\ &\leqslant |\gamma| M A x_1(\gamma), \end{aligned}$$

   donc

$$x_1(\gamma) \geqslant \frac{1}{MA|\gamma|} \xrightarrow[\gamma \to 0]{} +\infty.$$

■

Remarque 10. *Autre méthode pour la première question : comme $f(0) = f(1) = 0$ et $f \neq 0$, il existe $x_0 \in]0, 1[$, $f(x_0) \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$ on suppose $f(x_0) > 0$. Alors $\max\limits_{[0,1]} f > 0$ et il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que $f(x_1) = \max\limits_{[0,1]} f$. Il vient $f'(x_1) = 0$ et si $\lambda > 0$, on a $f''(x_1) = \lambda \Delta(x_1) f(x_1) > 0$. Un développement limité fournit*

$$f(x_1 + h) - f(x_1) \underset{h \to 0}{\sim} \frac{h^2}{2} f'(x_1) > 0,$$

ce qui contredit le fait que $f(x_1) = \max\limits_{t \in [0,1]} f(t)$.