Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Intégration

Solution 1.1. S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $S' = f > 0$. Donc S définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a,b]$ dans $[S(a)=0, S(b)]$. COmme pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\frac{S(b)}{n} \in [0, S(b)]$, il existe un unique $x_k \in [a,b]$ tel que $S(x_k) = k\frac{S(b)}{n}$ qui est simplement donné par

$$\boxed{x_k = S^{-1}\left(k\frac{S(b)}{n}\right).} \tag{1.1}$$

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{S(b)}\left(\frac{S(b)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(S^{-1}\left(\frac{k}{n}S(b)\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{S(b)}\int_0^{S(b)} f\left(S^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t = I. \tag{1.2}$$

On effectue le changement de variable $u = S^{-1}(t)$ pour obtenir

$$\boxed{I = \frac{1}{S(b)}\int_0^b f(u)^2\mathrm{d}u.} \tag{1.3}$$

■

Remarque 1.1. *On peut se demander si cela reste vrai si $f \geqslant 0$ (mais $f \neq 0$). On définit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & [0, S(b)] & \to & [a,b] \\ & y & \mapsto & \min\left(\{x \in [a,b] | y = S(x)\}\right) \end{array} \tag{1.4}$$

On a $x_k = \varphi\left(k\frac{S(b)}{n}\right)$, $f\circ\varphi$ continue par morceaux sur $[0,S(b)]$ et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\varphi\left(k\frac{S(b)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{S(b)}\int_0^{S(b)} (f\circ\varphi)(t)\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

Cela marche aussi si $\{t \in [a,b], f(t) = 0\}$ est discret car S reste strictement croissante. Cela marche aussi si $\int f > 0$ (poser $f_p = f + \frac{1}{p} > 0$ et passer à la limite).

Solution 1.2.

1. Pour tout $x > 0$, on a $g(x) \leqslant \|f\|_\infty$. Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $|f|$, il existe $[a,b] \subset [0,1]$ avec $a < b$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $0 < |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} < |f(t)|$.

D'où

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant \left(\int_a^b |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant (b-a)^{\frac{1}{x}}\left(|f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Alors il existe $X_1 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant X_1$, $|f(t0)| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant g(x)$. D'où le résultat.

2. On pose $h_x(t) = \exp(x\ln(|f(t)|))$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lim\limits_{x\to 0} h_x(t) = 1$ et pour tout $x > 0$, pour tout $t \in [0,1]$ $h_x(t) \leqslant \max(1, \|f\|_\infty)$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t = 1. \tag{1.7}$$

Malheureusement, ce n'est pas suffisant.

Posons donc $k_x(t) = \frac{|f(t)|^x - 1}{x}$. Pour t fixé, on a $\lim\limits_{x\to 0} k_x(t) = \ln(|f(t)|)$. De plus, pour tout $0 < x \leqslant 1$, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$||f(t)|^x - 1| = \left|\mathrm{e}^{x\ln(|f(t)|)} - \mathrm{e}^0\right| \begin{cases} \leqslant x\ln(|f(t)|), & \text{si } |f(t)| \leqslant 1, \\ \hline \leqslant x\ln(|f(t)|)\mathrm{e}^{x\ln(|f(t)|)} & \\ \leqslant x\ln(|f(t)|)\mathrm{e}^{\ln(|f(t)|)}, & \text{si } |f(t)| > 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ainsi $k_x(t) \leqslant \max\left(\ln(\|f\|_\infty), \|f\|_\infty \ln(\|f\|_\infty)\right)$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{f(t)^x - 1}{x}\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(|f(t)|)\,\mathrm{d}t. \tag{1.9}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1 + x\int_0^1 k_x(t)\mathrm{d}t\right)\right), & (1.10)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\left(x\int_0^1 \ln(|f(t)|) + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\right), & (1.11)\\ &= \exp\left(\int_0^1 \ln(|f(t)|)\,\mathrm{d}t + \underset{x\to 0}{o}(1)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp\left(\int_0^1 \ln(|f(t)|)\,\mathrm{d}t\right). & (1.12) \end{aligned}$$

■

Solution 1.3. On fixe $y \in [0, f(a)]$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & [0,a] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x f + \int_0^y g - xy \end{array} \tag{1.13}$$

φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = f(x) - y$ donc φ décroît de 0 à $g(y)$ puis croît jusqu'en $x = a$. Son minimum vaut alors $\varphi(g(y)) = \int_0^x + \int_0^{f(x)} g - xf(x)$ avec $x = g(y)$.

Si f est $\mathcal{C}^1$, alors g l'est aussi car f définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$. On effectue le changement de variable $u = f(t)$ et on obtient $\varphi(g(y)) = \int_0^x (tf'(t) + f(t))\mathrm{d}t - xf(x) = [tf(t)]_0^x - xf(x) = 0$. De même si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux (utiliser la relation de Chasles).

Plus généralement, on a le lemme

Lemme 1.1. *Soit pour $n \geqslant 1$, $f_n : [0, a] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux continue telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_n\left(\frac{k}{n}a\right) = f\left(\frac{k}{n}a\right)$. Alors $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$ et $(f_n^{-1})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, f(a)]$.*

Preuve du lemme. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x \in \left[\frac{ka}{n}, \frac{k+1}{n}a\right]$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}a\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \left|f(x) - f\left(\frac{ka}{n}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{k}{n}a\right) - f_n(x)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{1.14}$$

On fait de même pour $(f_n^{-1})_{n\geqslant 1}$. ■

f_n et f_n^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux continues et $g_n = f_n^{-1}$. On a $\int_0^x f_n + \int_0^{f_n(x)} f_n = xf_n(x)$. Quand $n \to +\infty$, par convergence uniforme, on a $\int_0^{f_n(x)} g_n = \int_0^{f(x)} g_n + \int_{f_n(x)}^{f(x)} g_n$ et le dernier terme est uniformément borné par $\|f^{-1}\|_\infty |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, le cas d'égalité est quand

$$\boxed{\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x).} \tag{1.15}$$

■

Solution 1.4. On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{x-1}{2\sqrt{2(1-x)}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$. On effectue le changement de variable $x = \cos(t)$ d'où $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. On a alors

$$I = -\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\ln(\cos(t))}{1 + \cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos(t))}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t. \tag{1.16}$$

Or $\tan'\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ donc par intégrations par parties,

$$I = \left[\ln(\cos(t))\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

Le premier terme vaut $\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$. Pour le deuxième terme, on utilise la formule d'addition $\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\tan\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{1-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{1+u}, \tag{1.18}$$

en ayant effectué le changement de variables $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, d'où $\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Il ne reste plus qu'à faire une décomposition en éléments simples. ■

Solution 1.5.

1. I_n est bien définie. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x, \tag{1.19}$$

$$= [\tan^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x, \tag{1.20}$$

$$= 1 - n(I_n + I_{n+2}). \tag{1.21}$$

Donc $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. On a $I_0 = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - I_{2p-2} = \cdots = (-1)^p\left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p-1}\right). \tag{1.22}$$

On a $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln(2)$. Ainsi,

$$I_{2p+1} = (-1)^p\left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p}\right). \tag{1.23}$$

2. On pose $f_n(x) = \tan^n(x)$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Si $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 partout sauf en $\frac{\pi}{4}$ où elle vaut 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $|f_n(x)| \leqslant 1$ intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.} \tag{1.24}$$

3. D'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \\ \ln(2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.\end{aligned}} \tag{1.25}$$

■

Remarque 1.2. *On peut donner un équivalent de I_n. Comme pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$, on a $I_{n+2} \leqslant I_n$. Ainsi,*

$$2I_{n+2} \leqslant I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n, \tag{1.26}$$

et donc

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}, \tag{1.27}$$

d'où

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.} \tag{1.28}$$

Solution 1.6.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$, on a

$$\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geqslant \left(\int_a^b 1\right)^2 = (b-a)^2. \tag{1.29}$$

$f\colon x \mapsto 1$ pour tout $x \in [a,b]$ donne l'égalité, et d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a égalité si et seulement si $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont proportionnelles, donc si et seulement si f est constante.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $c < a$. Soit

$$\begin{array}{rccl} f_{\alpha,c}: & [a,b] & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & t & \mapsto & (t-c)^\alpha \end{array} \tag{1.30}$$

On a

$$\phi(f_{\alpha,c}) = \frac{1}{\alpha^2-1}\left[(b-c)^{\alpha+1} - (a-c)^{\alpha+1}\right]\left[(a-c)^{-\alpha+1} - (b-c)^{-\alpha+1}\right], \tag{1.31}$$

$$\underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^2}\left[(b-c)^{\alpha+1} \times \frac{1}{(a-c)^{\alpha-1}}\right], \tag{1.32}$$

$$\underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{(b-a)(a-c)}{\alpha^2}\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} +\infty, \tag{1.33}$$

car $b-c > a-c$.

3. Soit $f, g \in E^2$ et $\lambda \in [0,1]$. $\lambda f + (1-\alpha)g$ est continue et strictement positive. E est convexe dans $\left(\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ donc connexe par arcs.

   Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions convergent uniformément vers f. Par convergence uniforme, on a $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$. De plus, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{f_n(x) \times f(x)} \leqslant \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\min_{y\in[a,b]} f_n(y) \times f(y)}. \tag{1.34}$$

   Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\min f}{2}$ et pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(x) \geqslant \frac{\min f}{2}$. Alors

$$\left\|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right\|_\infty \leqslant \frac{2\|f_n - f\|_\infty}{(\min f)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.35}$$

   Ainsi, $\int_a^b \frac{1}{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \frac{1}{f}$ et $\phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(f)$. ϕ est donc continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc

$$\boxed{\phi(E) = [(b-a)^2, +\infty[.} \tag{1.36}$$

■

Solution 1.7. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2} \end{array} \tag{1.37}$$

f est continue. On a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\int_0^1 f$ converge. On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} f$ converge.

On pose $x = u^2$ et on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{2u^2\ln(u^2)}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u, \qquad (1.38)\\ &= 4\int_0^{+\infty} \frac{u^2\ln(u)}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u, \qquad (1.39)\\ &= 2\left(\left[-\frac{1}{(1+u^2)} \times u\ln(u)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\left(\ln(u) + 0\right)\mathrm{d}u\right), \qquad (1.40)\\ &= 2\left(\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\right). \qquad (1.41) \end{aligned}$$

Noter que l'intégration par parties faite en 1.40 est correcte car tout converge en 0 et $+\infty$ (passer à la limite $\alpha, \beta \to 0, +\infty$ pour être plus rigoureux).

La première intégrale est nulle. En effet, on pose $x = \frac{1}{u}$ d'où $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u = -\int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x. \tag{1.42}$$

La deuxième intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. Finalement, on a

$$\boxed{I = \pi.} \tag{1.43}$$

■

Solution 1.8. On note f la fonction intégrande. f est continue négative. On a $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \left|\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\right| = \underset{t\to 0}{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)$ donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f$ converge. On a $|f(t)| \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 f$ converge.

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}. \tag{1.44}$$

Comme $t(1-t) = -(t^2-t) = -\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-(2t-1)^2\right)$, on pose $2t-1 = \cos\theta$. On a alors $t = \frac{\cos\theta+1}{2}$ et $\mathrm{d}\theta = \frac{-2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. Ainsi,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\ln\left(\frac{\cos\theta+1}{2}\right)}{\frac{1-\cos\theta}{2}}\mathrm{d}\theta. \tag{1.45}$$

On a $\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. En posant $u = \frac{\theta}{2}$, on a donc

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos u)}{\sin^2 u}\mathrm{d}u. \tag{1.46}$$

En fixant $0 < \varepsilon < \alpha < 1$ et en posant $I_{\varepsilon,\alpha} = \int_\varepsilon^\alpha f$, on a en faisant une intégration par parties :

$$I_{\varepsilon,\alpha} = 4\left(\left[-\cot u \times \ln(\cos u)\right]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha 1\mathrm{d}u\right). \tag{1.47}$$

Le deuxième terme tend vers $\frac{\pi}{2}$,. Pour le premier, si $\alpha = \frac{\pi}{2} - h$, on a

$$-\cot\alpha\ln\cos\alpha = -\tan h\ln\sin h = -\tan h\left[\ln h + \underset{h\to 0}{o}(1)\right] \underset{h\to 0}{\sim} -h\ln(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \tag{1.48}$$

De même, on a

$$-\cot\varepsilon\ln\cos\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\frac{1}{\varepsilon}\times\frac{-\varepsilon^2}{2} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{1.49}$$

Ainsi,

$$\boxed{I = -2\pi.} \tag{1.50}$$

■

Solution 1.9. On note f la fonction intégrande. Si $h = \frac{\pi}{4} - t$, on a $\cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) = \sin(2h) \underset{h\to 0}{\sim} 2h$. Ainsi,

$$f(t) \underset{t\to\frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}}, \tag{1.51}$$

donc l'intégrale existe (critère de Riemann).

En posant $u = \sin(t)$, puis $v = \sqrt{2}u$, puis $\theta = \arcsin(v)$, on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 - \sin^2(t)\right)\cos(t)}{\sqrt{1 - 2\sin^2(t)}}\mathrm{d}t, &(1.52)\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - u^2}{\sqrt{1 - 2u^2}}\mathrm{d}u, &(1.53)\\
&= \int_0^1 \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}}, &(1.54)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \frac{\sin^2\theta}{2}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\theta, &(1.55)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos(2\theta))\mathrm{d}\theta\right), &(1.56)\\
&= \frac{3\pi - 1}{8\sqrt{2}}. &(1.57)
\end{aligned}$$

■

Solution 1.10. Si $f = c \in \mathbb{C}$ est constante, on a

$$\gamma = \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t = c\int_a^b g(\lambda t)\mathrm{d}t. \tag{1.58}$$

On pose $u = \lambda t$ et on pose $k(\lambda) = \left\lfloor \frac{\lambda b - \lambda a}{T} \right\rfloor \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda(b-a)}{T}$. Alors

$$\gamma = \frac{c}{\lambda}k(\lambda)\int_0^T g + \frac{c}{\lambda}\int_{\lambda a + k(\lambda)T}^{\lambda b} g. \tag{1.59}$$

Le deuxième terme est majoré par $\frac{|c|}{\lambda}T\,\|g\|_\infty \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$. Finalement,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\gamma = \frac{c(b-a)}{T}\int_0^T g = \frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b f. \tag{1.60}$$

C'est la même chose pour les fonctions en escalier (par combinaison linéaire).

Pour une fonction quelconque f continue par morceaux, soit $\varepsilon > 0$. Il existe f_ε une fonction en escalier telle que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On forme

$$\Gamma = \left|\int_a^b (f(t)g(\lambda t))\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b f\right|. \tag{1.61}$$

On a

$$\Gamma = \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t + \int_a^b (f(t)-f_\varepsilon(t))g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b f_\varepsilon - \frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b (f-f_\varepsilon)\right|, \tag{1.62}$$

$$\leqslant \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b f_\varepsilon\right| + \left|\int_a^b (f(t)-f_\varepsilon(t))g(\lambda t)\mathrm{d}t\right| + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b (f-f_\varepsilon)\right|. \tag{1.63}$$

Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$\left|\int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T \int_a^b f_\varepsilon\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.64}$$

Ainsi, $\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\times 3 = \varepsilon$. Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T g\int_a^b f.} \tag{1.65}$$

Pour le cas particulier, on a $g(t) = \frac{1}{3+2\cos(t)}$. g est 2π-périodique, paire et strictement positive. On pose $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on a $\cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$. Par parité, on a $\int_0^{2\pi} g = 2\int_0^\pi g$, et

$$\int_0^\pi g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}x}{(1+x^2)\left(3+2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)}, \tag{1.66}$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}, \tag{1.67}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}, \tag{1.68}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{\pi}{2}, \tag{1.69}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \tag{1.70}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)}{3+2\cos(nt)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}f.} \tag{1.71}$$

■

Remarque 1.3. *Pour calculer $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(t)}$, on peut écrire*

$$\frac{1}{3+2\cos(t)}=\frac{1}{3+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1}. \tag{1.72}$$

On décompose $F(X)=\frac{X}{X^2+3X+1}=\frac{\alpha}{X-\lambda}+\frac{\beta}{X-\mu}$ avec $\lambda=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\in]-1,0[$, $\mu=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\in]-\infty,-1[$, $\alpha=\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$, $\beta=\frac{\mu}{\mu-\lambda}$ avec $\lambda-\mu=\sqrt{5}$ et $\lambda=\frac{1}{\mu}$. Ainsi,

$$\frac{1}{3+2\cos(t)}=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\lambda}-\frac{\mu}{\sqrt{5}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mu}, \tag{1.73}$$

$$=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{1-\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mu}}, \tag{1.74}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \tag{1.75}$$

car $\left|\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right|<1$ et $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mu}\right|<1$. Comme on a $\left|\lambda^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|\leqslant|\lambda|^n$, on a convergence normale sur $[0,2\pi]$ car $|\lambda|<1$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(nt)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \tag{1.76}$$

Solution 1.11.

1. Si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $A>0$, il existe $x_A\geqslant A$ tel que $|f(x_A)|>\varepsilon_0$. On sait qu'il existe $\alpha_0>0$ tel que pour tout $(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_+)^2$, si $|x_1-x_2|\leqslant\alpha_0$ alors $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $A\geqslant 0$, pour tout $x\in[x_A-\alpha_0,x_A+\alpha_0]$, on a $|f(x)-f(x_A)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Donc $f(x)$ est du signe de $f(x_A)$ et $|f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors on a

$$\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}f(x)\mathrm{d}x\right|=\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x>\varepsilon_0\alpha_0>0. \tag{1.77}$$

Or

$$\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x-\int_{x_A+\alpha_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\xrightarrow[A\to+\infty]{}0. \tag{1.78}$$

C'est absurde, donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.} \tag{1.79}$$

2. Il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$, on ait $|f(x)| < 1$. Donc pour tout $x > x_0$, on a $|f^2(x_0)| \leqslant |f(x)|$ d'où $f^2 = \underset{+\infty}{O}(f)$ et f^2 est intégrable.

■

Remarque 1.4. *Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors il faut raisonner sur $\Im(f)$ et $\Re(f)$ et le résultat reste vrai.*

Solution 1.12.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Si $x \neq 0$, alors f_n converge simplement vers 0. On n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car on pourrait intervertir les limites en 0. Soit $a > 0$, soit $x \in [a, +\infty[$. f étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $|f_n(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

   Notons que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrable vaut 1. Enfin, pour tout $a > 0$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (reste d'intégrale convergente).

2. Notons $g_n(u) = \frac{g\left(\frac{u}{n}\right)}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}$ de telle sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\mathrm{d}u$.

   Soit u fixé dans $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \frac{g(0)}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}$ par continuité de g, et pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|g_n(u)| \leqslant \frac{\|g\|_\infty}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-u^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de converge dominée, on peut intervertir limite et intégrale, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t)f_n(t)\mathrm{d}t = g(0)} \tag{1.80}$$

■

Remarque 1.5. *Généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_n \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t)f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$ par théorème de convergence dominée.*

Remarque 1.6. *Si g est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que si $|t| \leqslant \alpha$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x-t) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors*

$$|(f_n \star g)(x) - g(x)| \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |g(x-t) - g(x)|\, f_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} 2\,\|g\|_\infty\, f_n(t)\mathrm{d}t. \tag{1.81}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $(f_n \star g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.7. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Soit pour $n \geqslant 1$,*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & t & \mapsto & nf(nt) \end{array} \tag{1.82}$$

Par changement de variable, on a $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\alpha^{+\infty} f = 0$ pour $\alpha > 0$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Solution 1.13. Si $x \geqslant 2$, on a $\frac{1}{x} \in]0,1]$ donc on peut définir

$$\begin{array}{rccc} f : & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \tag{1.83}$$

f est continue et $\arcsin(t) \underset{t\to 0}{=} t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ implique $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{6x^3}$, donc d'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Soit $A \geqslant 1$, on pose $I_A = \int_1^A \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \ln(A) - \int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$. On a

$$\int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x, \tag{1.84}$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{A}\right) + \ln(A + \sqrt{A^2-1}) - \frac{\pi}{2}, \tag{1.85}$$

$$\underset{A\to+\infty}{=} 1 + \ln(A) + \ln(2) - \frac{\pi}{2} + o(1), \tag{1.86}$$

donc

$$\boxed{I = \lim_{A\to+\infty} = -1 + \frac{\pi}{2} - \ln(2).} \tag{1.87}$$

■

Solution 1.14. On a $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t) \underset{t\to 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc I existe, et en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on a $I = J$. On a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) \mathrm{d}t, \tag{1.88}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) \mathrm{d}t, \tag{1.89}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) \mathrm{d}u - \frac{\pi}{2} \ln(2), \tag{1.90}$$

$$= I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) \mathrm{d}u - \frac{\pi}{2} \ln(2). \tag{1.91}$$

On a

$$I+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin(u))\mathrm{d}u=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(v))\mathrm{d}v=I. \tag{1.92}$$

Finalement, on a $I+J=I-\frac{\pi}{2}\ln(2)$ donc

$$\boxed{I=J=-\frac{\pi}{2}\ln(2).} \tag{1.93}$$

■

Solution 1.15. f_α est positive, continue et $f_\alpha \leqslant 1$. f_α est intégrable si et seulement si $\sum u_k$ converge avec

$$\begin{aligned}
u_k &= \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha\left|\sin(x)\right|}, && (1.94)\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+k\pi)^\alpha\left|\sin(t)\right|}, && (1.95)\\
&\leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\frac{2}{\pi}\left|t\right|}, && (1.96)\\
&= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\frac{2}{\pi}t}, && (1.97)\\
&= \frac{\pi}{\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha}\ln\left(1+\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\right), && (1.98)\\
&\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ln(k)}{(k\pi)^\alpha} \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right). && (1.99)
\end{aligned}$$

Donc $\sum u_k$ converge et $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge. ■

Solution 1.16.

1. Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\int_a^b P(t)f(t)\mathrm{d}t=0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $(P_n)\in(\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telle que $\|P_n-f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur $[a,b]$. $(P_nf)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_a^b P_nf=0$ donne par convergence uniforme $\int_a^b f^2=0$. Comme f^2 est continue positive, on a $f^2=0$ donc $f=0$.
2. Pour tout $n\geqslant 1$, on a par intégration par parties,

$$I_n=\frac{n}{1-\mathrm{i}}I_{n-1}. \tag{1.100}$$

On a $I_0 = \frac{1}{1-\mathrm{i}}$. Par récurrence, on a

$$I_n = \frac{n!}{(1-\mathrm{i})^{n+1}} = \frac{n!}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\pi}{4}}. \tag{1.101}$$

3. Pour $n = 4k-1$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Im(I_{4k-1}) = 0 = \int_0^{+\infty} t^{4k-1} \sin(t) \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t. \tag{1.102}$$

On pose $u = t^4$, $t = u^{\frac{1}{4}}$ et $\mathrm{d}t = \frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} \mathrm{d}u$. Ainsi, en posant $f(u) = \sin\left(u^{\frac{1}{4}}\right) \mathrm{e}^{-u^{\frac{1}{4}}}$,

$$\boxed{0 = \int_0^{+\infty} f(u) u^{k-1} \mathrm{d}u.} \tag{1.103}$$

■

Solution 1.17.

1. g est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et en tout point de continuité de f, on a $g'(t) = \mathrm{e}^{-at} f(t)$.

On a $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \mathcal{L}f(a)$.

Soit $X \geqslant 0$, on a grâce à une intégration par parties,

$$\int_0^X \mathrm{e}^{-bt} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^X \mathrm{e}^{-(b-a)t} \mathrm{e}^{-at} f(t) \mathrm{d}t, \tag{1.104}$$

$$= \left[g(t)\mathrm{e}^{-(b-a)t}\right]_0^X + (b-a) \int_0^X \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t) \mathrm{d}t. \tag{1.105}$$

Le terme entre crochet s'annule car $g(0) = 0$, et $b > a$ donc $g(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \mathcal{L}f(a)$. g est continue, admet une limite finie en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\left|\mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t)\right| \leqslant \|g\|_\infty \mathrm{e}^{-(b-a)t}, \tag{1.106}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)} g(t) \mathrm{d}t, \tag{1.107}$$

converge absolument et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bt} f(t) \mathrm{d}t$ converge et

$$\boxed{\mathcal{L}f(b) = (b-a) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t) \mathrm{d}t.} \tag{1.108}$$

2. En raisonnant sur $f-h$, on se ramène à $\mathcal{L}f=0$. Pour tout $b>a$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t}g(t)\mathrm{d}t=0$, donc pour tout $x>0$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}g(t)\mathrm{d}t=0$. Si $g=0$, alors en dérivant, on a $f=0$. On pose $u=\mathrm{e}^{-t}$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $[0,+\infty[\to]0,1]$. On a donc, pour tout $x>0$, $\int_0^1 u^{x-1}g\left(-\ln(u)\right)\mathrm{d}u=0$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n g\left(-\ln(u)\right)\mathrm{d}u=0=\int_0^1 u^n k(u)\mathrm{d}u$ avec $k\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $k(0)=\mathcal{L}f(a)$ et $k(x)=g\left(-\ln(x)\right)$ si $x\in]0,1]$. k est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de Weierstrass, $k=0$ donc $g=0$ puis $f=0$.

■

Solution 1.18.

1. Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}f(t)\right|=|f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $f(t)\underset{|t|\to+\infty}{\sim}0$. $\widehat{f}$ est définie et $\widehat{f}(x)=\int_{-A}^{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(t)\mathrm{d}t$.

   Posons
   $$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (x,t) & \mapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(t) \end{array} \tag{1.109}$$
   Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x\mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}=(\mathrm{i}t)^k g(x,t)$. On a
   $$\left|\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial x^k}\right|=|t|^k\,|f(t)|\,, \tag{1.110}$$
   majoration indépendante de x et intégrable sur $[-A,A]$. Donc $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\widehat{f}^{(k)}(x)=\int_{-A}^{A}(\mathrm{i}t)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(t)\mathrm{d}t$.

2. Soit $B>0$ tel que si $x>B$, $\widehat{f}(x)=0$. Soit $x_0=B+1$, alors $\widehat{f}=0$ sur $]x_0-1,+\infty[$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\widehat{f}^{(k)}(x_0)=0=\int_{-A}^{A}t^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_0}f(t)\mathrm{d}t$. D'après le théorème de Weierstrass, on a $f(t)=0$ pour tout $t\in[-A,A]$.

■

Solution 1.19. Si f est affine avec $f(x)=\alpha x+\beta$. On a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\alpha\frac{(b^2-a^2)}{2}+\beta(b-a)$ et $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)\left(\alpha\frac{(a+b)}{2}+\beta\right)$ d'où $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Notons que l'inégalité de l'énoncé équivaut à pour tout $x\in\mathring{I}$, pour tout $h>0$, on a $a=x-h$ et $b=x+h\in I^2$, $2hf(x)\leqslant\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$.

Si f est convexe, soit $a < b \in I^2$. Soit φ affine sur $[a, b]$ telle que $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. On a

$$\varphi' = \lambda = \frac{1}{2}\left(f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{1.111}$$

par convexité et en notant $\varphi(t) = \lambda t + \mu$. En notant φ_1 la demi-tangente à f en $\frac{a+b}{2}$, on a pour tout $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$,

$$\varphi(t) \leqslant \varphi_1(t) \leqslant f(t). \tag{1.112}$$

φ_1 est affine sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\varphi_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\varphi_1'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right)$. De la même façon, pour tout $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, on a

$$\varphi(t) \leqslant \varphi_2(t) \leqslant f(t), \tag{1.113}$$

avec φ_2 affine sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, $\varphi_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\varphi_2'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

On a donc $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f$.

Réciproquement, si pour tout $a < b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, soient $x < y \in I^2$ fixés. On pose $g = f - \varphi$ avec $\varphi(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$. g vérifie l'inégalité de l'énoncé car pour φ on a égalité (car affine). On veut montrer que $g \leqslant 0$ sur $[x, y]$. On a $g(x) = g(y) = 0$. Soit $g(x_0) = \max_{t \in [x,y]} g(t)$. Si $g(x_0) > 0$, on a $x_0 \in]x, y[$ car $g(x) = g(y) = 0$. Soit $h > 0$ tel que $x_0 - h$ et $x_0 + h \in [x, y]$. On applique l'inégalité de l'énoncé à g :

$$2hg(x_0) \leqslant \int_{x_0-h}^{x_0+h} g(t)\mathrm{d}t = 2g(x_0), \tag{1.114}$$

donc

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} (g(x_0) - g(t))\mathrm{d}t = 0, \tag{1.115}$$

et l'intégrande est positive et continue. Donc pour tout $t \in [x_0 - h, x_0 + h]$, on a $g(t) = g(x_0)$. On pose $h = \min(y - x_0, x - x_0)$. On obtient $g(x) = 0 = g(x_0) > 0$ (ou $g(y) = g(x_0)$) ce qui est absurde. Donc $g \leqslant 0$ sur $[x, y]$ et f est convexe. ∎

Remarque 1.8. *Notons que si pour tout $(h, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathring{I}$ tels que $(x-h, x+h) \in I^2$, $2hf(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$, alors pour $x \in \mathring{I}$ et h fixé, $x \mapsto \int_{x-h}^{x+h} f$ est $\mathcal{C}^1$ donc f l'est. Par récurrence, f est $\mathcal{C}^\infty$, et en dérivant deux fois par rapport à h (pour $x \in \mathring{I}$ fixé), on a $0 = f'(x+h) - f'(x-h)$ donc f est affine.*

Solution 1.20.

1. Soit $f_n\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t)=0$ si $t>n$ et $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ si $t\leqslant n$. f_n est continue par morceaux, positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car équivalente à 0 en $+\infty$ et à t^{x-1} en 0. Soit $t\in]0,+\infty[$ fixé, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_0$, $n>t$ et pour tout $n\geqslant N_0$,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}, && (1.116)\\ &= \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1}, && (1.117)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}t^{x-1}, && (1.118)\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}. && (1.119)\end{aligned}$$

On a donc convergence simple vers $f(t)=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$, fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\geqslant 1$ et $t\in[0,n[$, on a

$$0\leqslant f_n(t)\leqslant f(t), \tag{1.120}$$

car $\ln(1+x)\leqslant x$ pour tout $x>-1$. D'après le théorème de convergence dominée, on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.} \tag{1.121}$$

2. On pose $u=\frac{t}{n}$ et on a

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n\mathrm{d}u, && (1.122)\\ &= n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u, && (1.123)\\ &= n^x\left(\left[(1-u)^n\frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\mathrm{d}u\right). && (1.124)\end{aligned}$$

Le terme entre crochets est nul car $u\geqslant 1$ et $x>0$.

Si on pose $B_n(x)=\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u$, on a

$$B_n(x) = \frac{n}{x}B_{n-1}(x+1) = \cdots = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}B_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{1.125}$$

On a donc

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n).}} \tag{1.126}$$

3. Par définition, on a $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$. On a

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{1\times 2\times\cdots\times n}\mathrm{e}^{-x\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} x\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]\mathrm{e}^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+o(1)\right)}\mathrm{e}^{\gamma x}, \tag{1.127}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}} \times \underbrace{\mathrm{e}^{o(1)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}. \tag{1.128}$$

Donc on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}. \tag{1.129}$$

4. On remarque que $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = (\ln\Gamma)'(x)$. On a

$$\ln\Gamma(x) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{x}{k}-\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)}_{f_k(x)\geqslant 0}. \tag{1.130}$$

On a convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $k>1$, f_k est $\mathcal{C}^1$, et pour tout $k\geqslant 1$, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f_k'(x) = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\geqslant 0$ car $x>0$.

Soit $A>0$, pour tout $x\in]0,A]$, on a

$$0 < f_k(x) \leqslant \frac{1}{k}-\frac{1}{k+A} = \frac{A}{k(k+A)} \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{1.131}$$

Donc pour tout $A>0$, $\sum f_k(x)$ converge normalement sur $]0,A]$. $\ln\Gamma$ est donc $\mathcal{C}^1$ (en tant que série de fonction) et on a

$$\boxed{\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) = -\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right).} \tag{1.132}$$

■

Remarque 1.9. *En particulier, comme $\Gamma(1)=1$, on a*

$$\Gamma'(1) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(1) = -1-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = -\gamma, \tag{1.133}$$

car la série est téléscopique.

Remarque 1.10. *On a*

$$(\ln\Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''\Gamma-\Gamma'^2}{\Gamma^2}. \tag{1.134}$$

Par ailleurs,

$$0 \leqslant \Gamma'^2(x) = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} \ln^2(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \times \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma''(x)\Gamma(x), \tag{1.135}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ona égalité stricte car $\ln(t)$ *n'est pas constante. Ainsi,* $\ln\Gamma$ *est strictement convexe.*

Remarque 1.11. *On peut vérifier que* $\ln\Gamma$ *est l'unique fonction de* $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *telle que*

1. $\ln\Gamma$ *est convexe,*
2. $\forall x > 0,\ (\ln\Gamma)(x+1) = (\ln\Gamma)(x) + \ln(x)$*,*
3. $(\ln\Gamma)(1) = 0$*.*

Solution 1.21.

1. On a
$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi d(f)} = \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\right). \tag{1.136}$$
Posons $g(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}g(x)$. On a $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f-f'g}{g^2} = 0$ donc $\frac{g}{f} = \alpha \in \mathbb{C}$. En particulier, $g(0) = g(2\pi) = 1$ donc $d(f) \in \mathbb{Z}$.
2. f_0 est constante égale à $P(0)$ donc $d(f_0) = 0$ car c'est une fonction constante. Soit $r \geqslant 0$, on a
$$d(f_r) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_r'(t)}{f_r(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\mathrm{d}t. \tag{1.137}$$
On note $g(r,t)$ la fonction intégrande définit sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. $r \mapsto g(r,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et soit $z \in \mathbb{C}$, on a
$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n. \tag{1.138}$$
Alors
$$h(z) = \frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{a_1 z + \cdots + n a_n z^n}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} \tag{1.139}$$
est continue sur $\mathbb{C}$ et pour $z \neq 0$, on a
$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{\frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + n a_n}{\frac{a_0}{z^n} + a_n} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} n. \tag{1.140}$$

Donc h est bornée sur $\mathbb{C}$, soit $M = \|h\|_\infty$. On a $|g(r,t)| \leqslant M \in L^1([0,2\pi])$. Donc $r \mapsto d(f_r)$ est continue et pour t fixé, on a $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r,t) = n$. Par convergence dominée, on a $\lim\limits_{r\to+\infty} d(f_r) = n$. $r \mapsto d(f_r)$ est continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc constante et $d(f_0) = 0$, $\lim\limits_{r\to+\infty} d(f_r) = n \neq 0$: c'est absurde. Donc P s'annule.

■

Remarque 1.12. *Le théorème de relèvement permet d'écrire $f(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ avec $\rho(t) = |f(t)|$ et $(\rho,\theta)\colon \mathbb{R} \to \left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ est $\mathcal{C}^1$. On a alors*

$$\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'}{\rho} + \mathrm{i}\left(\theta(2\pi) - \theta(0)\right). \tag{1.141}$$

Le premier terme vaut $[\ln(\rho)]_0^{2\pi} = 0$ car $\rho = |f|$ est 2π-périodique, et le deuxième terme vaut $2\mathrm{i}\pi\times$ le nombre de tours que décrit f autour de l'origine.

Solution 1.22. En appliquant l'inégalité de Taylor avec reste intégral à f de classe $\mathcal{C}^n$, on a

$$R_n = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t. \tag{1.142}$$

Soit $m_n = \min\limits_{[a,b]} f^{(n)}$ et $M_n = \max\limits_{[a,b]} f^{(n)}$. Alors

$$m_n \frac{|b-a|^n}{n!} \leqslant \left| \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant M_n \frac{|b-a|^n}{n!}. \tag{1.143}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$.

On a

$$v_n - \int_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right] - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f. \tag{1.144}$$

On prend d'abord $a = \frac{k}{n}$ et $b = \frac{k+1}{n}$, il existe $\xi_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3} f^{(2)}(\xi_k). \tag{1.145}$$

Puis avec $a = \frac{k+1}{n}$ et $b = \frac{k}{n}$, il existe $\eta_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que

$$F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) = -\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f^{(2)}(\eta_k). \tag{1.146}$$

En faisant la différence des deux égalités et en divisant par deux, on a

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t, \tag{1.147}$$

$$=\frac{1}{2n}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right)+\frac{1}{4n^2}\left(f'\left(\frac{k}{n}\right)-f'\left(\frac{k+1}{n}\right)\right), \tag{1.148}$$

$$+\frac{1}{12n^3}\left(f^{(2)(\xi_k)}+f^{(2)}(\eta_k)\right). \tag{1.149}$$

En sommant, on obtient (par le théorème de Riemann car on a une subdivision pointée)

$$v_n-\int_0^1 f=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4n^2}\left(f'\left(\frac{k+1}{n}\right)-f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)-\frac{1}{12n^3}\left(f^{(2)}(\xi_k)+f^{(2)}(\eta_k)\right), \tag{1.150}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{4n^2}\left[f'(1)-f'(0)\right]-\frac{1}{6n^2}\left[\int_0^1 f'^{(2)}(t)\mathrm{d}t+o(1)\right], \tag{1.151}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{4n^2}\left[f'(1)-f'(0)\right]-\frac{1}{6n^2}\left(f'(1)-f'(0)+o(1)\right). \tag{1.152}$$

Donc on a

$$\boxed{v_n=\int_0^1 f+\frac{1}{12n^2}\left(f'(1)-f'(0)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).} \tag{1.153}$$

■

Solution 1.23. On a

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2(x)+1-1\right)\tan^{n-2}(x)\mathrm{d}x, \tag{1.154}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan'(x)-1\right)\tan^{n-2}(x)\mathrm{d}x, \tag{1.155}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\tan^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_{n-2}. \tag{1.156}$$

Donc

$$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}. \tag{1.157}$$

On a $I_0=\frac{\pi}{4}$ et $I_1=\left[-\ln|\cos|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln(2)$.

On a donc

$$I_{2p}=(-1)^p\left(\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^p}{2p+1}\right), \tag{1.158}$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2}\left(\ln(2) - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^p}{p}\right). \tag{1.159}$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.} \tag{1.160}$$

Comme on a $2I_n \leqslant I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \leqslant 2I_{n-2}$ d'où

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}, \tag{1.161}$$

ainsi

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.} \tag{1.162}$$

■

Solution 1.24. On note g la fonction intégrande. g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$. On a

$$f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} g(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} g(t)\mathrm{d}t, \tag{1.163}$$

donc f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = g(x) - 2xg'(x^2)$.

En 0, e^t se comporte comme 1 et $\frac{1}{\arcsin(t)}$ comme en $\frac{1}{t}$. Donc, au voisinage de 0,

$$h(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{\arcsin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t\mathrm{e}^t - \arcsin(t)}{t\arcsin(t)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{t^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} \xrightarrow[t\to0^+]{} 1. \tag{1.164}$$

Donc h est bornée sur $]0,1]$, soit $M = \sup_{t\in]0,1]} |h(t)|$. On a

$$\left|\int_{x^2}^{x} h(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x}^{x^2} |h(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(x - x^2) \xrightarrow[x\to0]{} 0. \tag{1.165}$$

Comme $\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x)$, on a $f(x) \underset{x\to0}{=} -\ln(x) + o(1)$.

Pour aller plus loin dans le développement limité, on pousse plus loin le développement limité de $h(t)$ dans 0^+. ■

Solution 1.25. On note f la fonction intégrande. $x \mapsto x^2 + x + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}$. Donc d'après le critère de Riemann, l'intégrale converge absolument.

Pour le calcul, on on

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)\right)^2 + 1\right). \tag{1.166}$$

On pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)$ et on a

$$I_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}. \tag{1.167}$$

On note J_n l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u^2+1)^{n-1}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}. \tag{1.168}$$

On pose $\theta = \arctan(u)$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0, +\infty[\to [0, \frac{\pi}{2}[$. On a $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ et $\frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} = \cos^{2n-2}(\theta)$.

On retrouve les intégrales de Wallis, d'où on en tire

$$J_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!} \frac{\pi}{2}. \tag{1.169}$$

Donc

$$\boxed{I_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!} \frac{\pi}{2}.} \tag{1.170}$$

■

Solution 1.26. Soit $M_0 = \sup\limits_{[0,1]} |f|$ et $M_1 = \sup\limits_{[0,1]} |f'|$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\left| f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M_1}{n}. \tag{1.171}$$

Donc, par la formule de la somme de Riemann, on a

$$\left| u_n - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) f'\left(\frac{i+1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 ff'} \right| \leqslant \underbrace{\frac{M_1^2}{n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}, \tag{1.172}$$

donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(f^2(1) - f^2(0)\right).} \tag{1.173}$$

■

Solution 1.27. Ici, l'intégrale diverge, mais comme on fait tendre l'intervalle d'intégration à un singleton, cela aura une limite finie.

Formons

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{\ln(t)} \end{array} \tag{1.174}$$

Si $x < 1$, x^a et x^b sont < 1, et si $x > 1$, alors x^a et x^b sont > 1. $\int_{x^a}^{x^b} f(t)\mathrm{d}t$ est donc bien définie.

On a

$$\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} = \frac{1}{\ln(1+(t-1))} - \frac{1}{t-1} = \frac{(t-1) - \ln(1+(t-1))}{(t-1)\ln(1+(t-1))} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{\frac{(t-1)^2}{2}}{(t-1)^2} = \frac{1}{2}. \tag{1.175}$$

Soit $h\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $h(1) = \frac{1}{2}$. h est continue donc bornée au voisinage de 1. Il existe $\alpha_0 > 0$ et $M_0 \geqslant 0$ tels que pour tout $t \in [1-\alpha_0, 1+\alpha_0]$, on ait

$$\left| \int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} - \int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \right| \leqslant M_0 \left| x^b - x^a \right| \xrightarrow[x\to 1]{} 0. \tag{1.176}$$

Or, si $x = 1 + x'$, on a

$$\int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \left[\ln|t-1|\right]_{x^a}^{x^b}, \tag{1.177}$$

$$= \ln\left|x^b - 1\right| - \ln|x^a - 1|, \tag{1.178}$$

$$= \ln\left|(1+x')^b - 1\right| - \ln|(1+x')^a - 1|, \tag{1.179}$$

$$\underset{x'\to 0}{=} \ln|bx" + o(x')| - \ln|ax' + o(x')|, \tag{1.180}$$

$$\underset{x'\to 0}{=} \ln(b) + \ln(x') + o(1) - [\ln(a) + \ln(x') + o(1)], \tag{1.181}$$

$$\underset{x'\to 0}{=} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + o(1) \xrightarrow[x'\to 0]{} \ln\left(\frac{a}{b}\right). \tag{1.182}$$

D'où le résultat. ■

Solution 1.28.

1. Soit $n \geqslant 1$, on a
$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f. \tag{1.183}$$
Par convexité, on a
$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} S_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right), \tag{1.184}$$
donc en passant à la limite $n \to +\infty$, par continuité, on a
$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t.} \tag{1.185}$$

2. Soit $c \in]a,b[$. En cas d'égalité dans ce qui précède, on a
$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \varphi\left(\frac{c-a}{b-a}\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \frac{b-c}{b-a}\frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right), \tag{1.186}$$
$$\leqslant \frac{c-a}{b-a}\varphi\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right) + \frac{b-c}{b-a}\varphi\left(\frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right), \tag{1.187}$$
$$\leqslant \frac{1}{b-a}\left(\int_a^c \varphi\circ f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b \varphi\circ f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\mathrm{d}t, \tag{1.188}$$
par convexité et par ce qui précède. Par hypothèse, on a égalité partout, Par stricte convexité, on a
$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\mathrm{d}t, \tag{1.189}$$
d'où $(b-c)\int_a^c g(t)\mathrm{d}t = (c-a)\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$. En dérivant par rapport à c, on obtient
$$(b-a)f(c) - \int_a^c f(t)\mathrm{d}t = -(c-a)f(c) + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t, \tag{1.190}$$
soit $(b-a)f(c) = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ et $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $c \in]a,b[$. Donc f est constante sur $[a,b]$.

■

Remarque 1.13. *Pour la première question, on aurait aussi pu passer par des fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f.*

Solution 1.29. Si $f = 0$, ça marche. Sinon, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)} \int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t)\mathrm{d}t. \tag{1.191}$$

Par récurrence, f est $\mathcal{C}^1$ (d'après l'expression) et si f est $\mathcal{C}^k$, alors elle est $\mathcal{C}^{k+1}$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$. Par ailleurs, $f(y_0)f(-x) = -f(y_0)f(y)$ donc f est impaire. On dérive par rapport à x : $f(x+y)-f(x-y) = f'(x)f(y)$, et en dérivant à nouveau par rapport à x, on a $f'(x+y) - f'(x-y) = f''(x)f(y)$.

Même chose par rapport à y : $f(x+y) - f(x-y) = f(x)f'(y)$ puis $f' - x + y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$. On pose alors $\alpha = \frac{f''(y_0)}{f(y_0)}$, on a $f''(x) - \alpha f(x) = 0$.

Si $\alpha = 0$, comme f est impaire, on a $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ et en reportant, on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = a\left[\frac{u^2}{2}\right]_{x-y}^{x+y} = 2axy. \tag{1.192}$$

Or $f(x)f(y) = a^2xy$ donc ou bien $a = 0$, ce qui est exclu, ou bien $a = 2$.

Si $\alpha > 0$, on a $f(x) = a_1 \sinh(\sqrt{\alpha}x)$. En reportant, on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2a_1}{\sqrt{\alpha}} \sinh(\sqrt{\alpha}x)\sinh(\sqrt{\alpha}y), \tag{1.193}$$

et $f(x) = f(y) = a_1^2 \sinh(\sqrt{\alpha}x)\sinh(\sqrt{\alpha}y)$ d'où $a_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$.

Si $\alpha < 0$, on trouve $f(x) = a_2 \sin(\sqrt{-\alpha}x)$ avec $a_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}$. ∎

Solution 1.30. Soit f une fonction constante égale à c sur $[a,b]$. On a alors $I_n = (b-a)^{\frac{1}{n}}|c| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |c|$.

Plus généralement, on a

$$I_n \leqslant \left(\int_a^b \|f\|_\infty^n\right)^{\frac{1}{n}} = (b-a)^{\frac{1}{n}}\|f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty. \tag{1.194}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a $I_n \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon$. $|f|$ est continue sur le compact $[a,b]$, donc il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$. Par continuité de $|f|$, il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ avec $c < d$ tel que pour tout $t \in [c,d]$, on ait $|f(t)| \geqslant \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors

$$\int_a^b |f|^n \geqslant \int_c^b |f|^n \geqslant (d-c)\left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n, \tag{1.195}$$

donc

$$I_n \geqslant \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.196}$$

Il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on a $I_n \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$. Donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a

$$\|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant I_n \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon, \tag{1.197}$$

donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \|f\|_\infty .} \tag{1.198}$$

■

Remarque 1.14. *Soit $u_n = I_n^n$ avec f continue non nulle. On a $u_n > 0$ et $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|$. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $|f|^{\frac{n}{2}}$ et $|f|^{\frac{n}{2}+1}$, on a*

$$0 < u_{n+1} = \int_a^b |f|^{n+1} \leqslant \sqrt{u_n}\sqrt{u_n + 2} \tag{1.199}$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}. \tag{1.200}$$

$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ *est croissante et strictement positive, donc converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$. On a*

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l). \tag{1.201}$$

D'après le théorème de Césaro, on a donc

$$\frac{\ln(u_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l), \tag{1.202}$$

d'où $\ln\left(u_n^{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\|f\|_\infty = \ln(l)$ par unicité de la limite.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \|f\|_\infty . \tag{1.203}$$

Solution 1.31.

1. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, comme $\rho \neq 1$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, donc $t \mapsto \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| > 0$ et $t \mapsto \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|$ est continue, 2π-périodique sur $[-\pi, \pi]$ donc $F(\rho, \theta)$ existe.

2. On a
$$F(\rho,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\theta)} - \rho\right| \mathrm{d}t = \int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - \rho\right| \mathrm{d}u, \tag{1.204}$$
et comme l'intégrande est une fonction 2π-périodique,
$$F(\rho,\theta) = \int_{0}^{2\pi} \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - \rho\right| \mathrm{d}u, \tag{1.205}$$
est indépendant de θ.

3. Soit $n \geqslant 1$, on a
$$S_n = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} - \rho\right| = \frac{2\pi}{n}\ln\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1}\left(\rho - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)\right|\right) = \frac{2\pi}{n}\ln\left(|\rho^n - 1|\right). \tag{1.206}$$
Si $\rho > 1$, on a
$$S_n = \frac{2\pi}{n}\ln\left(\rho^n - 1\right), \tag{1.207}$$
$$= \frac{2\pi}{n}\left[\ln(\rho^n) + \ln\left(1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)^n\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi\ln(\rho). \tag{1.208}$$
Donc $F(\rho,\theta) = 2\pi\ln(\rho)$.

Si $\rho < 1$, $S_n = \frac{2\pi}{n}\ln(1-\rho^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $F(\rho,\theta) = 0$.

■

Remarque 1.15. *On a*
$$F(\rho,0) = \int_0^{2\pi} \ln|\cos(u) - \rho + \mathrm{i}\sin(u)|\,\mathrm{d}u, \tag{1.209}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(\rho^2 - 2\rho\cos(u) + 1\right)\mathrm{d}u, \tag{1.210}$$
$$= 2\pi\ln(\rho) + F\left(\frac{1}{\rho}, 0\right). \tag{1.211}$$

Remarque 1.16. *On peut se demander si l'on a convergence de* $F(1,0) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(2(1-\cos(u))\right)\mathrm{d}u$. *On vérifie que*
$$|\ln(2(1-\cos(u)))| \underset{u\to0}{\sim} 2|\ln u| = \underset{u\to0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right). \tag{1.212}$$

Donc $F(1,0)$ converge. Pour le calcul, on a

$$2F(1,0) = 2\pi\ln(2) + 2\int_0^{\pi}\ln(1-\cos(u))\mathrm{d}u, \tag{1.213}$$
$$= 2\pi\ln(2) + 4\int_0^{\pi}\ln\left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\mathrm{d}u, \tag{1.214}$$
$$= 2\pi\ln(2) + 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin\left(v\right)\right)\mathrm{d}v. \tag{1.215}$$

D'après un exercice précédent, l'intégrale vaut $-\frac{\pi}{2}\ln(2)$ et finalement $F(1,0)=0$.

Solution 1.32. Toutes les intégrales existent car les fonctions sont à support compact.

1. Montrons la contraposée. Soit $\delta\in\mathbb{R}$ tel que $f(\delta)\neq 0$. On suppose que $f(\delta)>0$. Par continuité, il existe $\eta 0$ tel que $f\geqslant 0$ sur $[\delta-\eta,\delta+\eta]$. $f\times\varphi$ est continue sur $[\delta-\eta,\delta+\eta]$, positive et $(f\varphi)(\delta)>0$ donc $\int_{\mathbb{R}} f\varphi>0$ (en choisissant $\varphi\geqslant 0$ définie sur le support $[\delta-\eta,\delta+\eta]$).

2. Montrons un petit lemme : si $\psi\in C_0$, il existe $\varphi\in C_1$ tel que $\psi=\varphi'$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}}\psi=0$. Pour le sens direct, on a $\int_{\mathbb{R}}\psi=\int_{\mathbb{R}}\varphi'=\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)-\lim_{t\to-\infty}\varphi(t)=0$. Pour le sens indirect, on définit $\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi$ (possible car $\psi\in C_0$). φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'=\psi$. φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'=\psi$. Soit $A\geqslant 0$ tel que pour tout $|t|\geqslant A$, on a $\psi(t)=0$. Alors pour tout $t\leqslant -A$, on a $\varphi(t)=0$ et pour tout $t\geqslant A$, $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\psi=\int_{-A}^{A}\psi=0$. Donc *varphi* est à support compact.

   Pour montrer le résultat, montrons la contraposée. Supposons f non constante, il existe $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ distincts tel que $f(x_1)\neq f(x_2)$. Quitte à remplacer f par $f-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, on peut supposer que $f(x_2)=-f(x_1)$. Il existe $\eta>0$ tel que pour tout $t\in[x_1-\eta,x_1+\eta]$, $f(t)\geqslant 0$ et pour tout $t\in[x_2-\eta,x_2+\eta]$, $f(t)\leqslant 0$.

   On a $\int_{\mathbb{R}}\psi=0$. On pose $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\psi(x)\mathrm{d}x$. Alors $\varphi\in C_1$ et $\int_{\mathbb{R}} f\varphi'>0$.

3. Soit G une primitive de g. On a alors, pour tout $\varphi\in C_1$,

$$\int_{\mathbb{R}} g\varphi = [G\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} G\varphi' = \int_{\mathbb{R}} f\varphi'. \tag{1.216}$$

   D'après ce qui précède, on a, pour tout $\varphi\in C_1$, $\int_{\mathbb{R}}(f+G)\varphi'=0$ et donc $f=-G$ à une constante près.

■

Solution 1.33. On note

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t} \end{array} \tag{1.217}$$

f est continue, tend vers 1 en 0 et $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc I existe.

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t, \tag{1.218}$$

$$= \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_{2\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t, \tag{1.219}$$

$$= \int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t. \tag{1.220}$$

La fonction $\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}$ tend vers -1 quand $t \to 0$, donc elle est bornée au voisinage de 0 et est continue. Donc

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} = \int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \ln(2) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{1.221}$$

donc

$$\boxed{I = \ln(2).} \tag{1.222}$$

On note maintenant f la fonction intégrande de J. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{1.223}$$

et

$$\int_1^X \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_1^X}_{\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} -\sin(1)} + \int_1^X \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t, \tag{1.224}$$

et l'intégrale de droite converge absolument. Donc $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge et de même pour $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t$. Donc J existe.

Soit $\varepsilon > 0$ et $X \geqslant \varepsilon$, on a

$$\int_\varepsilon^X \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^X\frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^X\frac{\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t, \tag{1.225}$$

$$= \int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_X^{2X}\frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t. \tag{1.226}$$

La deuxième intégrale tend vers 0 quand $X \to +\infty$ (car l'intégrale est semi-convergente), et de même, on a $\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ donc

$$\boxed{J = \ln(2).} \tag{1.227}$$

■

Remarque 1.17. *Généralement, pour $a < b$ et $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 et telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge. Alors on a $f(u) = f(0) + uf'(0) + \underset{u\to 0}{o}(u)$ et*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\mathrm{d}t, \tag{1.228}$$

existe. En notant g la fonction intégrande, g tend vers $(b-a)f'(0)$ en 0. Et en séparant pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{1.229}$$

Solution 1.34. f est continue par morceaux, positive. On a $0 \leqslant f \leqslant 2$ donc f est intégrable sur $]0,1]$. On écrit

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{k}{k(k+1)}, \tag{1.230}$$

et en prenant les sommes partielles et en passant à la limite, on trouve

$$\boxed{I = 1-\gamma.} \tag{1.231}$$

■

Solution 1.35. On note

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{\mathrm{e}^t-1} \end{array} \tag{1.232}$$

g est continue positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)/$ Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t, \tag{1.233}$$

$$= \left[\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\right]_x^{+\infty}, \tag{1.234}$$

$$= -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right). \tag{1.235}$$

f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} -\ln(x+o(x)) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x) = \underset{x\to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. D'où l'existence de I. On pose $u = e^{-x}$ soit $x = -\ln(u)$ et $dx = -\frac{du}{u}$. C'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0,1[$. On a alors

$$I = -\int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du = \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du. \tag{1.236}$$

On pose $v = 1-u$ pour avoir

$$I = \int_0^1 \frac{-\ln(v)}{1-v} dv. \tag{1.237}$$

Pour $v \in]0,1[$, on développe

$$\frac{-\ln(v)}{1-v} = \sum_{k=0}^{+\infty} -v^k \ln(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(v). \tag{1.238}$$

f_k est positive intégrable sur $]0,1[$.

On forme $u_k = \int_0^1 |f_k(t)|\, dt$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors $u_k = \int_0^1 -t^k \ln(t) dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Donc $\sum u_k$ converge et on peut intervertir. Finalement, on a

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{6}.} \tag{1.239}$$

■

Remarque 1.18. *On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée à $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$ car les f_k sont positifs.*

Remarque 1.19. *On a*

$$f(x) = \underbrace{\int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1}}_{\underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t} dt} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x) = \underset{x\to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \tag{1.240}$$

car la fonction est positive, et

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{1.241}$$

Solution 1.36.

1. On pose $f_n(t) = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, continue positive sur $[-n,+\infty[$. I_n est donc bien définie. On pose $u = t+n$, et alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n^n}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^n \mathrm{d}u, \tag{1.242}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}\int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u, \tag{1.243}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}\Gamma(n+1), \tag{1.244}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}n!. \tag{1.245}$$

2. On pose $t = \sqrt{n}u$ et on a

$$J_n = \sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}u}\mathrm{d}u. \tag{1.246}$$

On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $f(u) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}u}$ sur $[-\sqrt{n},\sqrt{n}]$ et 0 ailleurs. f_n est continue par morceaux (intégrable) sur $\mathbb{R}$. Soit $u\in\mathbb{R}$, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_0$, $\sqrt{n}\geqslant |u|$. Alors pour tout $n\geqslant N_0$, on a

$$f_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}-\frac{u^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)-\sqrt{n}u}, \tag{1.247}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{1.248}$$

Ainsi, on a convergence simple de $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(u) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$.

C'est un cas particulier où trouver la dominante (pour appliquer le théorème de convergence dominée) est difficile. On propose $\varphi(u) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$ (plus grand que f et toujours intégrable). Soit $n\geqslant 1$ et $u\in]-\sqrt{n},\sqrt{n}]$, soit

$$g_n(u) = n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}u - \left(-\frac{u^2}{4}\right), \tag{1.249}$$

dérivable sur $]-\sqrt{n},\sqrt{n}]$. On a

$$g_n'(u) = \frac{-\frac{u}{2}\left(1-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{1+\frac{u}{\sqrt{n}}}, \tag{1.250}$$

donc $g_n' \leqslant 0$ si $u\geqslant 0$ et $g_n > 0$ si $u<0$. Comme $g_n(0)=0$, on a $g_n(u)\leqslant 0$ pour tout $u\in]-\sqrt{n},\sqrt{n}]$ et donc pour tout $u\in\mathbb{R}$, $0\leqslant f_n(u)\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\boxed{\frac{J_n}{\sqrt{n}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.} \tag{1.251}$$

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$K_n = \int_{-n}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \tag{1.252}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n} \int_{2n}^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u. \tag{1.253}$$

On écrit $u^n \mathrm{e}^{-u} = u^n \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} = h(u) \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}$. Alors h est dérivable sur $]2n, +\infty[$ et $h'(u) = u^{n-1} \left(n - \frac{u}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}$ donc

$$0 \leqslant h(u) \leqslant (2n)^n \mathrm{e}^{-n}. \tag{1.254}$$

Donc

$$K_n \leqslant 2^n \int_{2n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} \mathrm{d}u = 2^n \times 2\mathrm{e}^{-n}. \tag{1.255}$$

Or $\mathrm{e} > 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n = 0$. Donc $K_n = \underset{n \to +\infty}{o}(I_n)$ et $I_n = J_n + K_n$ donc $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} J_n$ et

$$\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \sqrt{2\pi n}.} \tag{1.256}$$

■

Solution 1.37.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f_x(t) = \underset{t \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f_x(t) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{x^2}{2}$ donc $I(x)$ est bien définie.
2. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f_x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $a \neq 0$, on a

$$|\cos(a) - 1| = |\cos(a) - \cos(0) - a\cos'(0)| \leqslant \frac{a^2}{2} \sup_{[0,a]} |\cos''| \leqslant \frac{a^2}{2}. \tag{1.257}$$

Donc $|1 - \cos(tx)| \leqslant \frac{t^2 x^2}{2}$. Ainsi, pour tout $t > 0$, on a $|f_x(t)| \leqslant \frac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-t}$. Fixons $a \geqslant 0$, on a pour tout $x \in [-a, a]$, pour tout $t > 0$, $|f_x(t)| \leqslant \frac{a^2}{2} \mathrm{e}^{-t}$, fonction indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de continuité, I est continue sur $[-a, a]$, pour tout $a \geqslant 0$, donc sur $\mathbb{R}$. On a $\frac{\partial f_x}{\partial x}(t) = \frac{\sin(t)x}{t} \mathrm{e}^{-t}$, $\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}(t) = \cos(tx) \mathrm{e}^{-t}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leqslant |u|$ donc pour tout $t > 0$, pour tout $x \in [-a, a]$,

$$\left|\frac{\partial f_x}{\partial x}(t)\right| \leqslant |x| \, \mathrm{e}^{-t} \leqslant a\mathrm{e}^{-t}, \tag{1.258}$$

$$\left|\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}(t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}. \tag{1.259}$$

Donc d'après le théorème de dérivation, I est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a

$$\begin{aligned}
I''(x) &= \int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, && (1.260)\\
&= \Re\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}x)t}\mathrm{d}t\right), && (1.261)\\
&= \Re\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}x}\right), && (1.262)\\
&= \frac{1}{1+x^2}. && (1.263)
\end{aligned}$$

Donc $I'(x) = \lambda + \arctan(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $I'(0) = 0$, $I'(x) = \arctan(x)$. On a $I(0) = 0$ donc

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_0^x \arctan(u)\mathrm{d}u, && (1.264)\\
&= [u\arctan(u)]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u, && (1.265)\\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right). && (1.266)
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.20. *En posant $v = xt$ pour $x > 0$, on a*

$$I(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(v)}{v^2}\mathrm{e}^{-\frac{v}{x}}\mathrm{d}v, \tag{1.267}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(v)}{v^2}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}, \tag{1.268}$$

et par intégration par parties, cette intégrale vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v}\mathrm{d}v$. C'est une autre preuve de l'intégrale de Dirichlet.

Solution 1.38. Soit $x \geqslant 0$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ définie continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\int_x^X \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_x^X}_{\xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{1-\cos(x)}{x}} + \int_x^X \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t. \tag{1.269}$$

L'intégrale est absolument convergente, donc $f(x)$ est définie et on a

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t. \tag{1.270}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$. Soit $X > 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^X f(x)\mathrm{d}x &= [xf(x)]_0^X - \int_0^X f'(x)x\mathrm{d}x, &(1.271)\\
&= Xf(X) + \int_0^X \sin(x)\mathrm{d}x, &(1.272)\\
&= Xf(X) + (1 - \cos(X)), &(1.273)\\
&= X \int_X^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t, &(1.274)\\
&= 1 - X \int_X^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t. &(1.275)
\end{aligned}$$

Par intégrations par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_X^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{t^2} \sin(t)\right]_X^{+\infty} + \int_X^{+\infty} \frac{2}{t^2} \sin(t)\mathrm{d}t, &(1.276)\\
&= -\frac{\sin(X)}{X^2} + \int_X^{+\infty} \frac{2\sin(t)}{t^3} \mathrm{d}t, &(1.277)\\
&= \underset{X \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{X^2}\right), &(1.278)
\end{aligned}$$

car la deuxième intégrale est majorée par $\int_X^{+\infty} \frac{2}{t^3} \mathrm{d}t = \frac{1}{X^2}$. Finalement, on a

$$\int_0^X f(x)\mathrm{d}x = 1 + \underset{X \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{X}\right), \tag{1.279}$$

donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.} \tag{1.280}$$

■

Solution 1.39. Définissons f_h pour $h > 0$ par $f_h(t) = f(nh)$ si $t \in [nh, (n+1)h[$ ($n \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor$). Pour h fixé, $f(nh) = \underset{n \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\phi(h)$ est bien définie. f_h est continue par morceaux et $f_h(t) = \underset{t \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f_h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\phi(h) = \int_0^{+\infty} f_h(t)\mathrm{d}t. \tag{1.281}$$

Soit t fixé, on a $\lim\limits_{h\to 0^+} h\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor = t$. Donc par continuité de f, $f_h(t) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(t)$.

On sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^2}$. Donc

$$|f_h(t)| \leqslant \frac{M}{\left(h\left\lfloor\frac{t}{h}\right\rfloor\right)^2} \leqslant \frac{M}{(t-h)^2}. \tag{1.282}$$

On s'impose $h < 1$. Dans ce cas, pour tout $t > 2$, $|f_h(t)| \leqslant \frac{M}{(t-1)^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ et indépendant de h. Pour tout $t \in [0, 2]$, $|f_h(t)| \leqslant \|f\|_\infty$ intégrable sur $[0, 2]$ et indépendant de h.

Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \|f\|_\infty & \text{si } t \in [0,2], \\ \frac{M}{(t-1)^2} & \text{si } t > 2. \end{cases} \end{array} \tag{1.283}$$

φ est continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendante de h. Donc, par convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \phi(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.} \tag{1.284}$$

■

Solution 1.40. f est impaire donc on se limite à $x > 0$. On pose $g(x,t)$ l'intégrande. $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} x$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{(x-1)t}}{2t}$, donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x < 1$. Donc le domaine de définition est $]-1, 1[$. Enfin, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \cosh(xt)\mathrm{e}^{-t} = \frac{\mathrm{e}^{(x-1)t}+\mathrm{e}^{-(x+1)t}}{2}$. Fixons $a \in [0, 1[$, soit $x \in [0, a]$. Si $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \sinh(xt) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{xt}}{2}$ et

$$0 \leqslant g(x,t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{(x-1)t}}{2t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{(a-1)t}}{2t}. \tag{1.285}$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sinh(u)}{u} = 1$, donc il existe $M \geqslant 0$ tel que si $|u| \leqslant a$, $\left|\frac{\sinh(u)}{u}\right| \leqslant M$. Si $t \in]0, 1]$, $xt \in]0, a]$, $0 \leqslant g(x,t) \leqslant M_a$. En définissant

$$\begin{array}{rccl} \phi_0 : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+ \\ & t & \mapsto & \begin{cases} M_a & \text{si } t \in]0,1], \\ \frac{\mathrm{e}^{(a-1)t}}{2t} & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{array} \tag{1.286}$$

ϕ_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $|g(x,t)| \leqslant \phi_0(t)$. Or sinh est croissante et $|g(x,t)| \leqslant \frac{\sinh(at)}{t}\mathrm{e}^{-t}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \cosh(at)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $a < 1$. D'après le théorème de continuité dérivabilité, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ pour tout $a < 1$, donc sur $[0,1[$.

Alors

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \cosh(xt)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \tag{1.287}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{(x-1)t} + \mathrm{e}^{-(x+1)t}\right)\mathrm{d}t, \tag{1.288}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1}\right). \tag{1.289}$$

Comme $f(0) = 0$, pour $x \in [0,1[$, $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et si $x \in]-1,0]$, $f(x) = -f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. ■

Solution 1.41. On a $|f(x,t)| = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et est équivalent) $\frac{1}{\sqrt{t}}$ en 0. Donc F existe et est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}, \tag{1.290}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc F est $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{i}\sqrt{t}\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}x-1)}\mathrm{d}t, \tag{1.291}$$

$$= \left[\frac{\mathrm{i}\sqrt{t}\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}x-1)}}{\mathrm{i}x-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}x-1)}}{2\sqrt{t}(\mathrm{i}x-1)}\mathrm{d}t, \tag{1.292}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2(\mathrm{i}x-1)}F(x). \tag{1.293}$$

On a

$$\frac{\mathrm{i}}{2(\mathrm{i}x-1)} = \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{\mathrm{i}}{2(x^2+1)}, \tag{1.294}$$

donc

$$F(x) = A\exp\left(-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\arctan(x)\right). \tag{1.295}$$

Comme

$$F(0) = A = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}, \tag{1.296}$$

on a

$$\boxed{F(x) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\arctan(x)\right).} \tag{1.297}$$

■

Solution 1.42.

1. On a
$$\left|\widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{e}^{-\lambda|\lambda|}\right| \leqslant \left|\widehat{f}(\nu)\right|. \tag{1.298}$$
Donc g_x est bien définie. On pose
$$h(t,\nu) = f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}. \tag{1.299}$$
On a
$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\nu)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\nu, \tag{1.300}$$
et comme
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t,\nu)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}\mathrm{d}\nu \times \int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty, \tag{1.301}$$
d'après le théorème de Fubini,
$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}\mathrm{d}\nu\right)f(t)\mathrm{d}t, \tag{1.302}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}\mathrm{e}^{\lambda\nu}\mathrm{d}\nu + \int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}\mathrm{e}^{-\lambda\nu}\right)f(t)\mathrm{d}t, \tag{1.303}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\lambda-\mathrm{i}(t-x)} + \frac{1}{\lambda-\mathrm{i}(x-t)}\right)f(t)\mathrm{d}t, \tag{1.304}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{2\lambda f(t)}{\lambda^2+(t-x)^2}\mathrm{d}t. \tag{1.305}$$
On pose $t' = t-x$ et on a bien
$$\boxed{g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{2\lambda f(t+x)}{\lambda^2+t^2}\mathrm{d}t.} \tag{1.306}$$

2. On pose $u = \frac{t}{\lambda}$ pour $\lambda > 0$. Alors
$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\lambda u + x)}{1+u^2}\mathrm{d}u, \tag{1.307}$$
et pour u fixé, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{2f(\lambda u+x)}{1+u^2} = \frac{2f(x)}{1+u^2}$ par continuité de f. Comme
$$\left|\frac{2f(\lambda u+x)}{1+u^2}\right| \leqslant \frac{2\,\|f\|_\infty}{1+u^2}, \tag{1.308}$$

fonction de u intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendante de λ. Par le théorème de continuité, on a

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0} g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2f(x)}{1+u^2} \mathrm{d}u = f(x).} \tag{1.309}$$

3. Pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et on a

$$\left| \widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|} \right| \leqslant \left| \widehat{f}(\nu) \right|, \tag{1.310}$$

fonction indépendante de λ intégrable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de continuité, g_x est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en 0. Ainsi,

$$\boxed{g_x(0) = f(x) = \lim_{\lambda \to 0} g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \mathrm{d}\nu.} \tag{1.311}$$

■

Remarque 1.21. *En exemple, soit $a > 0$ et*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^{-a|x|} \end{array} \tag{1.312}$$

f est continue, intégrable et bornée. On a

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} \mathrm{d}t, \tag{1.313}$$

$$= \frac{2a}{a^2+\nu^2}. \tag{1.314}$$

$\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$2\pi \mathrm{e}^{-a|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{2a}{a^2+\nu^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \mathrm{d}\nu. \tag{1.315}$$

Remarque 1.22. *Si $\widehat{f} = 0$, elle est intégrable et d'après la formule, on a $f = 0$.*

Solution 1.43.

1. $D_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt)$ est paire, 2π-périodique et $\mathcal{C}^\infty$. Sa moyenne est 1, et comme pour

$t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$, on a

$$D_n(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \tag{1.316}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \right), \tag{1.317}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)t}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(2n+1)t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)t}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}} \right), \tag{1.318}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \left(\frac{-2\mathrm{i} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{-2\mathrm{i} \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right), \tag{1.319}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{1.320}$$

2. On pose $u = \frac{2t}{2n+1}$.

3. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sir $]0, \pi]$. Pour tout $u > 0$,

$$\varphi(u) = \frac{\frac{u}{2} - \sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}\right)^3}{\left(\frac{u^2}{4}\right)} \xrightarrow[u \to 0]{} 0. \tag{1.321}$$

On pose $\varphi(0) = 0$. φ ainsi prolongée est continue sur $[0, 2\pi]$. On a

$$\varphi'(u) = -\frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{2}{u^2}, \tag{1.322}$$

$$= \frac{4\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) - u^2 \cos\left(\frac{u}{2}\right)}{2u^2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}, \tag{1.323}$$

$$\underset{u \to 0}{\sim} \frac{u^4\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{u^4}{2}\right)} \xrightarrow[u \to 0]{} \frac{1}{12}. \tag{1.324}$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

4. On a

$$\int_0^\pi \varphi(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u = \left[-\frac{2}{n+1} \cos\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \varphi(u) \right]_0^\pi + \frac{2}{n+1} \int_0^\pi \varphi'(u) \cos\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u, \tag{1.325}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \tag{1.326}$$

car φ et φ' sont bornées. De plus,

$$\int_0^\pi \varphi(u)\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^\pi D_n(u)\mathrm{d}u - \int_0^\pi \frac{2\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{u}\mathrm{d}u, \tag{1.327}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\mathrm{d}u - 2u_n, \tag{1.328}$$

$$= \pi - 2u_n. \tag{1.329}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.} \tag{1.330}$$

■

Remarque 1.23. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intégrable sur un intervalle I. On a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_I f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t = 0$.*

En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $[a,b] \subset I$ tel que $\int_{I\setminus[a,b]}|f| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$\left|\int_I f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{I\setminus[a,b]}|f| + \left|\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right|, \tag{1.331}$$

et le deuxième terme tend vers 0 quand $\lambda \to \pm\infty$, donc inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ pour λ suffisamment grand. En particulier, si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\widehat{f}(\lambda) = 0$.

Solution 1.44.

1. g est de classe $\mathcal{C}^1$. On a $g'(t) = f(t)\mathrm{e}^{-at}$, $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = Lf(a)$. Donc g est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Soit $X > 0$, on a

$$\int_0^X f(t)\mathrm{e}^{-(a+x)t}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-xt}g(t)\right]_0^X + x\int_0^X g(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t. \tag{1.332}$$

Le terme entre crochet tend vers 0 quand $X \to +\infty$ car $x > 0$ et $|g(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant \|g\|_\infty |\mathrm{e}^{-xt}| = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc $Lf(a+x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(a+x)}\mathrm{d}t$ existe et vaut $x\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

2. On pose $u = \mathrm{e}^{-t}$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0,+\infty[\to]0,1]$. On a alors

$$Lf(a+x) = x\int_0^1 g\left(-\ln(u)\right)u^{x-1}\mathrm{d}u. \tag{1.333}$$

Or $\lim_{u \to 0^+} g(-\ln(u)) = Lf(a)$. On définit

$$
\begin{array}{rccl}
h: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\
 & u & \mapsto & \begin{cases} g(-\ln(u)) & \text{si } u \neq 0, \\ LF(a) & \text{si } u = 0. \end{cases}
\end{array}
\tag{1.334}
$$

h est continue et $Lf(a+x) = x\int_0^1 h(u)u^{x-1}\mathrm{d}u$. Si pour tout $x > 0$, $Lf(a+x) = 0$, on a pour tout > 0, $\int_0^1 h(u)u^{x-1}\mathrm{d}u = 0$. Par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\int_0^1 \ln(u)P(u) = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, on prend $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\overline{h}$. Donc $\int_0^1 |h|^2 = 0$ donc $h = 0$. Ainsi, $g = 0$ et $g'(t) = 0 = f(t)\mathrm{e}^{-at}$ donc $f = 0$.

■

Remarque 1.24. *Il suffit qu'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Lf(a_0+n) = 0$.*

Solution 1.45. Pour $x > 0$, $\sum g_n(x)$ est alternée car $|g_n(x)| = \mathrm{e}^{-a_n x}$ est décroissante car $a_n \leqslant a_{n+1}$ et tend vers 0 car $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Donc g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, d'après le critère spécial des séries alternées,

$$
\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x} \right| \leqslant \mathrm{e}^{-a_N x}. \tag{1.335}
$$

Soit $\alpha > 0$. Alors pout tout $x \geqslant \alpha$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$
\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x} \right| \leqslant \mathrm{e}^{-a_N x} \leqslant \mathrm{e}^{-a_N \alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0, \tag{1.336}
$$

car $\alpha > 0$ et $\lim_{N\to+\infty} a_N = +\infty$.

Ainsi, $\sum g_n$ converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$, donc g est continue sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, toujours d'après le critère spécial des séries alternées, pour tout $x > 0$,

$$
|g(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-a_0 x}, \tag{1.337}
$$

fonction de x intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue et est $\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On forme $u_n = \int_0^{+\infty} |g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a_n x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a_n}$. On n'est pas sûr que $\sum \frac{1}{a_n}$ converge. Mais on a

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\mathrm{e}^{-a_n x} = S_N(x) \leqslant \mathrm{e}^{-a_0 x}, \tag{1.338}$$

fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x. \tag{1.339}$$

■

Table des figures