*Exercices MP/MP**
Espaces vectoriels normés

Exercice 1. *On définit*

$$N: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x\cos(t) + y\sin(2t)| \end{array}$$

1. *Montrer que N est une norme.*
2. *Montrer que*
$$\overline{B_{\|\cdot\|_1}(0,1)} \subset \overline{B_N(0,1)} \subset \overline{B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)}$$
3. *Montrer que*
$$S_N(0,1)\bigcap(\mathbb{R}_+)^2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists t\in[0,\frac{\pi}{4}] \colon x\cos(t)+y\sin(2t)=1\right\}$$
En déduire que
$$S_N(0,1)\bigcap(\mathbb{R}_+)^2 = \left\{\left(\frac{\cos(2t)}{\cos(t)^3}, \frac{\sin(t)}{2\cos(t)^3}\right) \;\middle|\; t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right\}$$

Exercice 2. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et*

$$N: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2} \end{array}$$

1. *Montrer que N est une norme sur E et que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N$.*
2. *N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?*

Exercice 3. *Soit $n \geqslant p$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est ouverte, c'est-à-dire que pour tout Θ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f(\Theta)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, si et seulement si f est surjective.*

Exercice 4. *Soit $E = \Big\{$fonctions lipschitziennes: $[0,1]\to\mathbb{R}\Big\}$. Pour $f\in E$, on pose*

$$\kappa(f) = \sup\left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \;\middle|\; (x,y)\in[0,1]^2, x\neq y\right\}$$

1. *Montrer que $N(f) = |f(0)| + \kappa(f)$ est une norme sur E.*
2. *Montrer que N et N_∞ ne sont pas équivalentes.*
3. *Montrer que $N' = N_\infty + \kappa$ est équivalente à N.*

Exercice 5. *Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $G\in\mathcal{V}(I_n)$ où $\mathcal{V}$ un voisinage de I_n, muni de la norme*

$$\|(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$$

. Montrer que $G = GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 6. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et* $f : E \to E$ *une fonction telle que*

(i) $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $\exists M \geqslant 0, \forall x \in B_{\|\cdot\|}(0,1), \|f(x)\| \leqslant M.$

Montrer que f *est continue et linéaire.*

Exercice 7. *Soit* E *un espace vectoriel normé. Pour* $A \subset E$*, on pose* $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

1. *Montrer que* $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$.
2. *Combien au plus de parties différentes obtient-on à partir de* A *par itérations d'intérieur et d'adhérence ?*

Exercice 8. *Soit* A *une partie non vide d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé* E*. On définit*

$$d_A : \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x,A) = \inf\{\|x-a\| \,\big|\, a \in A\} \end{array}$$

avec $d_\emptyset(x) = +\infty$ *pour tout* $x \in E$.

1. *Soit* $A, B \subset E$*. Montrer que* $\overline{A} = \overline{B}$ *si et seulement si* $d_A = d_B$.
2. *On pose* $\rho(A,B) = \sup\limits_{x \in E} |d_A(x) - d_B(x)|$ *(vaut* $+\infty$ *si non borné). Montrer que*

$$\rho(A,B) = \max\Big(\sup_{x\in A} d_B(x), \sup_{y \in B} d_A(y)\Big) \overset{def}{=} \alpha(A,B)$$

Exercice 9. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *non constant.*

1. *Montrer que si* F *est un fermé de* $\mathbb{C}$*, alors* $P(F)$ *est un fermé de* $\mathbb{C}$.
2. *Si* Θ *est un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$*, montrer que* $P(\Theta)$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$.

Exercice 10. *On définit* $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,\big|\, P \text{ unitaire et } \deg(P) = n\}$*.* F *est fermé dans* $\mathbb{R}_n[X]$*. Notons* $\mathcal{S} = \{P \in F \,\big|\, P \text{ est scindé sur } \mathbb{R}\}$.

1. *Montrer que* $P \in \mathcal{S}$ *si et seulement si pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$.
2. *En déduire que* $\mathcal{S}$ *est fermé.*
3. *Montrer que* $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\big|\, M \text{ trigonalisable sur } \mathbb{R}\}$ *est fermé.*

Exercice 11. *Soit* $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $A = \sum_{i=1}^n a_i X^i$, $B = \sum_{i=1}^m b_i X^i$ *avec* $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

1. *Montrer que*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}_{n+m-1}[X] \\ (U,V) & \mapsto & AU + BV \end{array}$$

   est bijective si et seulement si $A \wedge B = 1$.

   On note $M_{A,B}$ *la matrice de* φ *dans la base canonique de* $\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]$ *et on définit le résultant* $R_{A,B} = \det(M_{A,B})$.

2. *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $p \in \mathbb{N}$ fixé, on munit $\mathbb{K}_p[X]$ d'une norme quelconque. Montrer que*
$$\begin{array}{rccl} \Phi_{A,B} : & \mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K} \\ & (A,B) & \mapsto & R_{A,B} \end{array}$$
est continue.
3. *En déduire que $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{C}\}$ est ouvert. Et sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 12. *Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^n = 0\}$. F est donc l'ensemble des matrices nilpotentes.*

1. *Déterminer $\overline{F}$ et $\mathring{F}$.*
2. *On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^\intercal M)}$. Vérifier que c'est une norme et calculer $d(I_n, F)$.*

Exercice 13.

1. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{K})$.*
2. *En déduire que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_{AB} = \chi_{BA}$.*

Exercice 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée (pour une norme quelconque). On pose $v_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u^p$.*

1. *Montrer que*
$$E = \ker(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - id_E)$$
On pourra évaluer $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u)$ et faire tendre p vers $+\infty$.
2. *Montrer que $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers Π, le projecteur sur $\ker(u - id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - id_E)$.*

Exercice 15. *Soit A compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé, $f : A \to A$ 1-lipschitzienne.*

1. *Soit $x_0 \in A$, et pour $n \geqslant 1, \forall x \in A,\ f_n(x) = \frac{1}{n}f(x_0) + (1 - \frac{1}{n})f(x_0)$. Montrer que f possède un unique point fixe x_n.*
2. *Montrer que f possède au moins un point fixe.*
3. *Si l'espace est euclidien, montrer que $F = \{x \in A \mid f(x) = x\}$ est convexe.*
4. *Contre-exemple dans le cas général.*

Exercice 16. *Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés avec $\dim(F) < +\infty$. Soit $f : E \to F$ continue telle qu'il existe $M \geqslant 0$, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M$.*

1. *Si $M = 0$, montrer que f est linéaire (continue). Est-ce encore vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?*

2. *On suppose $M > 0$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{array}{rccl} v_n : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{2^n} f(2^n x) \end{array}$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x)$.

3. *Montrer que g est l'unique application linéaire continue telle que $g - f$ soit bornée.*

Exercice 17. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension plus grande que 2 et $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $t \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{t\})$ est compact. Montrer que f atteint son maximum ou son minimum sur E.*

Exercice 18. *Soit $n \geqslant 2$. Existe-t-il f continue injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$?*

Exercice 19. *Soit $\varphi \colon l^1 \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue. On pose $K_n = \varphi(e_n) \in \mathbb{R}$ où e_n est la base canonique de l^1.*

1. *Montrer que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $|||\varphi||| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |K_n| = \|(K_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$.*
2. *Montrer que*

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathcal{L}_c(l^1, \mathbb{R}) & \to & l^\infty \\ & \varphi & \mapsto & (\varphi(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

est une isométrie bijective.

Exercice 20. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et H un hyperplan de E.*

1. *Montrer que si H est dense, alors $E \setminus H$ est connexe par arc.*
2. *Et si H est fermé ?*
3. *Et pour un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé ?*

Exercice 21. *Soit $\Gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que Γ est connexe par arcs mais que $\overline{\Gamma}$ ne l'est pas.*

Exercice 22. *Soit K compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $T \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $T(K) \subset K$.*

1. *Soit $a \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(a)$. Montrer que T admet au moins un point fixe dans K.*
2. *Soit $U \in \mathcal{L}_c(E)$ qui commute avec T et tel que $U(K) \subset K$. Montrer que U et T ont un point fixe commun.*

Exercice 23 (Théorème de Carathéodory)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension n.*

1. *Soit $p \geqslant n+2$ et $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}_-^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Soit*
$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \to & E \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \end{array}$$
Montrer que $\dim(\ker(u)) \geqslant 2$. En déduire qu'il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{0,\dots,0\}$ tel que $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$.
2. *Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i) x_i$ et que $\sum_{i=1}^p \lambda_i + t\alpha_i = 1$. Prouver que l'on peut choisir t tel que $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} (\lambda_i + t\alpha_i) = 0$.*
3. *En déduire que x est barycentre à coefficients positifs de $n+1$ éléments $(x_i,\dots,x_p)$.*
4. *Soit K un compact de E. Montrer que $\mathrm{conv}(K)$ est compact.*

Exercice 24. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts et $P = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_r)$. Déterminer les composantes connexes par arcs de $A_P \in \{u \in \mathcal{L}(E) \mid P(u) = 0\}$.*

Exercice 25 (Théorème de Perron-Frobenius)**.** *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}$, $a_{i,j} > 0$. On note alors $A > 0$, et on peut définir de même $A \geqslant 0$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. On pose, pour $X = (x_1,\dots,x_n)^\mathsf{T}$, $|X| = (|x_1|,\dots,|x_n|)^\mathsf{T}$. On définit $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)} |\lambda|$ le rayon spectral de A.*

1. *Montrer que si $X \geqslant 0$ et $X \neq 0$, on a $AX > 0$.*
2. *Montrer que pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, si $|AX| = A|X|$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} X \geqslant 0$.*
3. *On définit*
$$K = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; X \geqslant 0 \text{ et } \|X\|_1 = 1\right\}$$
et pour tout $X \in K$,
$$I_X = \left\{t \geqslant 0 \;\middle|\; AX - tX \geqslant 0\right\}$$
Montrer que I_X est non vide, fermé et borné. On pose $\theta(X) = \max(I_X)$.
4. *Montrer que θ est borné sur K. On pose $r_0 = \sup\limits_{x\in K} \theta(X)$. Établir qu'il existe $X^+ \in K$ tel que $\theta(X^+) = r_0$.*
5. *Montrer que $AX^+ = r_0 X^+$. On pourra poser $Y = AX^+ - r_0X^+$ et on montrera que si $Y \neq 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A(A^+) - (r_0+\varepsilon)AX^+ > 0$.*
6. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|V\|_1 = 1$ et $AV = \lambda V$. Montrer que $|AV| \leqslant A|V|$, en déduire que $|\lambda| \leqslant r_0$.*
7. *Montrer que si $|\lambda| = r_0$, alors $A|V| = r_0|V| = |AV|$, en déduire que $\lambda = r_0$.*
8. *Montrer que $\dim(\ker(A - r_0 I_n)) = 1$.*

Exercice 26. *Soit E un espace vectoriel normé, U et V deux compacts disjoints. Montrer qu'il existe U' et V' des ouverts disjoints tels que $U \subset U'$ et $V \subset V'$.*

Exercice 27. *Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $f\colon K \to K$ tel que pour tout $x \neq y \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.*

1. *Montrer qu'il existe un unique $a \in K$ tel que $f(a) = a$.*
2. *Soit $u_0 \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.*
3. *Étudier $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 28. *Soient K_1, K_2, K_3 trois compacts non vides du plan tels qu'il n'existe pas de droite coupant K_1, K_2 et K_3 simultanément. Montrer qu'il existe un cercle de rayon minimal les coupant tous les trois.*

Exercice 29. *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On définit pour tout $f \in E$, pour tout $x \in [0,1]$,*

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. *Montrer que $T \in \mathcal{L}_c(E)$ et calculer $|||T|||$.*
2. *Montrer que $\mathrm{id}_E - T$ est un homéomorphisme.*

Exercice 30. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue, montrer l'équivalence :*

(i) $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$,

(ii) pour tout compact K de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 31. *Soit E un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E et $f : K \to K$ tel que pour tout $(x,y) \in K^2$, $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y)$.*

1. *Montrer que pour tout $(x,y) \in K^2$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{cases} d(x, f^p(x)) < \varepsilon \\ d(y, f^p(y)) < \varepsilon \end{cases}$$

   On pourra former $(f^n(x), f^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. *Montrer que f est isométrie.*
3. *Montrer que f est surjective.*

Exercice 32. *Soit $(A,B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ avec $A \neq B$, et K un compact ne coupant pas (AB). Soit*

$$F = \{r \geqslant 0,\ \textit{il existe un cercle de centre } r\textit{, passant par } A \textit{ et } B \textit{ et rencontrant } K\}$$

Montrer que F est compact.

Exercice 33. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\tau \in \mathcal{L}(E)\colon \tau(P)(X) = P(X+1)$.*

1. *Déterminer* $\mathrm{Sp}(\tau)$.

2. *Vérifier que* $\|P\| = \sup_{x \geqslant 0} |P(x)e^{-x}|$ *est une norme sur* E.
3. *Montrer que* τ *est continue pour cette norme et vérifie* $|||\tau||| \leqslant e$.
4. *Calculer* $|||\tau|||$.

Exercice 34. *$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ continue strictement croissante. Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, soit*

$$T(f)(x) = \int_0^1 \min(x, \varphi(t)) f(t) dt$$

1. *T définit-il un endomorphisme de E ?*
2. *Est-il continue ?*
3. *Calculer* $|||T|||$.

Exercice 35. *Soit $E = \mathbb{C}[X]$ muni de $\|\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. Soit*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & E & \to & \mathbb{C} \\ & \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{2^k} \end{array}$$

1. *Montrer que* $\ker(\varphi)$ *est fermé.*
2. *Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$. Montrer que $\|P - 1\|_\infty > \frac{1}{2}$.*
3. *Évaluer $d(1, \ker(\varphi))$. Cette distance est-elle atteinte ?*

Exercice 36. *Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ (muni de $\|\cdot\|_2$). Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant K.*

Exercice 37. *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f \end{array}$$

Montrer que φ est une forme linéaire continue. Calculer $|||\varphi|||$. Est-elle atteinte ?

Exercice 38. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v - v \circ u = id$.*

1. *Cette hypothèse sur u et v est-elle possible en dimension finie ?*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n$.*
3. *En utilisant la norme, mettre en évidente une contradiction.*

4. *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$ *et*
$$T: \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ P & \mapsto & XP(X) \end{array}$$
et
$$D: \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$
Montrer que T *et* D *ne sont pas simultanément continues pour aucune norme.*

Exercice 39. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbb{C}^n$ *et* $|||\cdot|||$ *la norme subordonnée sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Soit* $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$, $A \neq I_n$ *et* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *tel que*
$$\left\{ \begin{array}{l} |||A - I_n||| \leqslant \alpha \\ |||B - I_n||| \leqslant \beta \end{array} \right.$$

1. *Montrer que* A *et* B *sont inversibles et que*
$$\left|\left|\left|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\right|\right|\right| \leqslant \frac{2|||A - I_n|||\,|||B - I_n|||}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$
2. *Montrer que si* α *et* β *sont suffisamment petits,*
$$\left|\left|\left|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\right|\right|\right| < |||A - I_n|||$$
3. *Soit* $G = gr\{A, B\}$ *(sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{C})$ *engendré par* A *et* B*). Montrer que si* G *est discret, alors il existe* $C \in G \setminus \{I_n\}$*, qui commute avec toutes les matrices de* G*.*

Exercice 40.

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, montrer que* $\exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A]$ *: il existe* $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ *tel que* $\exp(A) = P(A)$*.*
2. *Montrer que* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *si et seulement si* $\exp(A)$ *l'est.*
3. *Résoudre* $\exp(A) = I_n$*.*
4. *Le résultat de la question 2 est-il valable sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 41. *On pose, pour* $n \geqslant 1$,
$$\left\{ \begin{array}{l} P(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{X^{n-1}}{n-1} \\ Q(Y) = 1 + Y + \frac{Y^2}{2} + \cdots + \frac{Y^{n-1}}{(n-1)!} \end{array} \right.$$

1. *Montrer qu'il existe* $A \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $Q(P(X)) = 1 + X + X^n A(X)$*. On pourra écrire les développements limités à l'ordre* n *de* $\exp$ *et* $\ln$*.*
2. *Soit* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *nilpotente, montrer que* $\exp(P(N)) = Q(P(N)) = I_n + N$*.*
3. *En déduire que* $\exp\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*

Exercice 42. *Soit*

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right)^{n+p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$$

Déterminer $\overline{A}$.

Exercice 43. *Soit*

$$H = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; \exists m \in \mathbb{N}^* \colon M^m = I_n \right\}$$

Montrer que

$$\overline{H} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U} \right\}$$

Exercice 44. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, *on définit*

$$\begin{array}{rccc} N_a : & \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{R}^+ \\ & P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k p_k| \end{array}$$

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* N_a *soit une norme.*
2. *Si* a *et* b *vérifient cette condition nécessaire et suffisante, à quelle condition nécessaire et suffisante* N_a *et* N_b *sont-elles équivalentes ?*
3. *Existe-t-il* $(a,b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$ *tel que*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

   soit continue pour N_a *et discontinue pour* N_b *?*

Exercice 45. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et* $A \subset E$ *non vide.*

1. *Montrer que pour tout* $x \in E$, $d(x,A) = 0$ *si et seulement si* $x \in \overline{A}$ *et que* $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.
2. *Soit* B *non vide, montrer que* $d(A,B) = d(\overline{A},\overline{B})$.

Exercice 46. *On munit* $\mathbb{C}[X]$ *de* $\|\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k\|_\infty = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. *Soit* $x_0 \in \mathbb{C}$ *et*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{x_0} : & \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C} \\ & P & \mapsto & P(x_0) \end{array}$$

Pour quelles valeurs de x_0, φ_{x_0} *est-elle continue ? Dans ce cas, calculer* $|||\varphi_{x_0}|||$.

Exercice 47. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* M *est nilpotente si et seulement s'il existe* $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $p \in \mathbb{N}$, M_p *est semblable à* M *et* $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Exercice 48. *Montrer que* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est diagonalisable si et seulement si* $S_M = \{P^{-1}MP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ *est fermé. Pour le sens indirect, on pourra utiliser la décomposition de Dunford et l'exercice précédent.*

Exercice 49. *Soit* $\varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue. On lui associe*

$$\omega_\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x,y) \in I^2 \text{ et } |x-y| < h\} \end{array}$$

1. *Montrer que* ω_φ *est définie et croissante.*
2. *Soit* $(h,h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, *montrer que* $\omega_\varphi(h+h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. *Soit* $(h,\lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer que* $\omega_\varphi(nh) \leqslant n\omega_\varphi(h)$ *et* $\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (1+\lambda)\omega_\varphi(h)$.
4. *Montrer que* $\lim\limits_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0$. *En déduire que* ω_φ *est continue.*

Exercice 50. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbb{C}^n$ *et* $|||\cdot|||$ *la norme subordonnée sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Soit* G *un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{C})$ *tel qu'il existe* $\mu \in [0,2[$,

$$G \subset \overline{B_{|||\cdot|||}(I_n, \mu)}$$

Montrer qu'il existe $\in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* $M \in G$, $M^m = I_n$.

Exercice 51. *Soit* $n \geqslant 1$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$. *On forme*

$$\mathcal{G}_q = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; M^q = I_n \right\}$$

Déterminer les points isolés de $\mathcal{G}_q$.

Exercice 52. *Soit* $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de* $\|\cdot\|_\infty$.

1. *Montrer que*

$$u : \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f \end{array}$$

   est une forme linéaire continue.
2. *Montrer que* $\|u\| = \sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} |u(f)| = 1$ *mais que pour tout* $f \in E$ *telle que* $\|f\|_\infty = 1$, $|u(f)| < 1$.