*Exercices MP/MP**

Calcul différentiel

Exercice 1. *Étudier la continuité, la différentiabilité et la classe de*

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^3+y^3-xy^2+yz^2+xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \tag{1}$$

Exercice 2. *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in (\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R}))^k$.*

1. *Montrer que $\psi = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (\varphi_i)$ est continue.*
2. *Soit $x_0 \in U$, si les $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont différentiables en x_0, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ le soit. On pourra former*

$$J = \{i \in [\![1,k]\!], \psi(x_0) = \varphi_i(x_0)\}. \tag{2}$$

3. *Si les $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur U et ψ est différentiable, montrer que ψ est $\mathcal{C}^1$ sur U.*

Exercice 3. *On définit*

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & f(X) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \end{array} \tag{3}$$

Soit $H_0 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Déterminer les extrema de f sur H_0.

Exercice 4. *Étudier la continuité, différentiabilité, classe de*

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \tag{4}$$

Exercice 5. *Soit $n \geqslant 2$, en quels points de $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles différentiables ?*

Exercice 6. *Soit $n \geqslant 3$. Trouver*

$$\sup \left\{ \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} \middle| (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}. \tag{5}$$

Exercice 7. *Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x^2 + y^2 = 0. \tag{6}$$

Exercice 8. *Soit*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ M & \mapsto & (\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \dots, \mathrm{Tr}(M^n)) \end{array} \tag{7}$$

1. *Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$, calculer sa différentielle.*

2. *Quel est le rang de df_M ? On l'exprimera en fonction du degré du polynôme minimal de M, Π_M.*

3. *Montrer que $C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \Pi_M = \chi_M\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 9. *Trouver toutes les applications $f\colon \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2}. \tag{8}$$

Exercice 10. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ convexe et $\mathcal{C}^1$.*

1. *Montrer que pour $(x, y) \in U^2$, $f(y) \geqslant f(x) + df_x(y - x)$.*

2. *Montrer que tout point critique de f est un minimum absolu.*

3. *Montrer que l'ensemble E des points critiques de f est convexe.*

4. *On suppose $U = \mathbb{R}^n$, montrer que E est fermé.*

Exercice 11. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est homogène de degré α ou α-homogène si et seulement si pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $f(tx) = t^\alpha f(x)$.*

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, montrer que f est α-homogène si et seulement si pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x)$.

Exercice 12. *Étudier les extrema de*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 + y^2 + z^2 - xyz \end{array} \tag{9}$$

.