*Exercices MP/MP**
Espaces euclidiens

Exercice 1. *Soit* $X = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *tel que* $\|X\|_2 = 1$. *On lui associe* $H_X = I_n - 2XX^\mathsf{T}$.

1. *Reconnaître l'endomorphisme canoniquement associée à* H_x *(géométriquement).*
2. *Montrer que* $(H_X)_{X \in S(0,1)}$ *engendre* $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *et a* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* $A \in SO_3(\mathbb{R})$ *si et seulement s'il existe* $p \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$ *telle que* a, b, c *soient les racines de* $X^3 - X^2 + p$.
2. *Déterminer alors les ingrédients de cette rotation.*

Exercice 3. *Soit* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ *distincts, et* $A_n = \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. *Montrer que* A_n *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. *On choisit pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$, *montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \det(A_n) = 0$.

Exercice 4.

1. *Montrer que* $\mathrm{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *On définit*
$$N : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \sup\limits_{U \in O_n(\mathbb{R})} |\mathrm{Tr}(AU)| \end{array}$$
Montrer que N *est définie et que c'est une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. *Montrer que pour tout* $(A, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$, *on a* $N(VA) = N(A)$.
4. *Soit* $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, *calculer* $N(S)$.
5. *Montrer que pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \mathrm{Tr}(\sqrt{AA^\mathsf{T}})$.

Exercice 5. *Soit* $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$ *telle que pour tout* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$0 \leqslant X^\mathsf{T} A X \leqslant X^\mathsf{T} B X. \tag{1}$$
Montrer que $0 \leqslant \det(A) \leqslant \det(B)$. *On montrera que si* $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $A^{-1}B$ *est semblable à* $\sqrt{A^{-1}} V \sqrt{A^{-1}} = C$ *et on vérifiera que* $\min \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \geqslant 1$.

Exercice 6. *Soit* (r, s) *deux rotations de* $\mathbb{R}^3$, *reconnaître* $r' = s \circ r \circ s^{-1}$. *A quelles conditions nécessaires et suffisantes* r *et* s *commutent-elles ?*

Exercice 7. *Soit* $D = \{A \in O_n(\mathbb{R}) | I_n + A \in GL_n(\mathbb{R})\}$ *et*
$$D' = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \middle| M^\mathsf{T} = -M\right\}.$$

1. *Montrer que $D \subset SO_n(\mathbb{R})$.*
2. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & D & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \end{array}$$

   Montrer que φ définit une bijection de D dans D'.

Exercice 8. *Soit $(A, B) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$, montrer que $\sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)} \leqslant \sqrt[n]{\det(A+B)}$. Si A est inversible, on montrera que $A^{-1}B$ est semblable à $C = \sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}$, puis que $\varphi\colon x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ est strictement convexe. Donner le cas d'égalité (pour A inversible).*

Exercice 9. *Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} < 0$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$.*

1. *Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant |X|^\top A\,|X| \leqslant X^\top A X$.*
2. *Montrer que si $X \neq 0$ et $AX = 0$, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y^\top A\,|X| = 0$ et en déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$.*
3. *Montrer que $\operatorname{rg}(A) \geqslant n - 1$.*
4. *Soit $\lambda = \min \operatorname{Sp}(A)$, montrer que λ est valeur propre simple de A.*

Exercice 10. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dans E euclidien tel que $\operatorname{Tr}(u) = 0$. Montrer qu'il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(u(e_i)|e_i) = 0$.*

Exercice 11. *Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est antisymétrique si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$, $(u(x)|y) = -(x|u(y))$.*

1. *Montrer que u est antisymétrique si et seulement si pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) = 0$.*
2. *Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée de E.*
3. *Montrer que $\operatorname{Sp}(u) \subset \{0\}$, et que si la dimension de E est impaire, $\operatorname{Sp}(u) = \{0\}$.*
4. *Montrer qu'il existe B base orthonormée de E, il existe $r \in \mathbb{N}$, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\operatorname{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -a_2 & & & \\ & & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

5. *Montrer $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 12.

1. *Montrer que* $\exp$ *induit une bijection de* $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$. *On note* $\ln$ *la réciproque.*
2. *Justifier que* $\exp$ *est continue sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. *Soit* $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de matrices de* $S_n^{++}(\mathbb{R})$ *telle que* $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k = M$. *Soit* $\alpha = \min(\mathrm{Sp}(M)) > 0$ *et* $\beta = \max(\mathrm{Sp}(M))$. *Montrer qu'il existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $k \geqslant k_0$, *pour tout* $X \in S(0,1)$,
$$\frac{\alpha}{2} \leqslant X^{\mathsf{T}} M_k X \leqslant \beta + 1. \tag{3}$$
4. *En déduire que* $(\ln(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
5. *Prouver que* $\exp\colon S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

Exercice 13. *Soit* $A \in S_n(\mathbb{R})$, *de valeurs propres* $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. *Pour* F *sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$, *on pose*
$$\Phi(F) = \max_{X\in F} \frac{(AX|X)}{X^{\mathsf{T}}AX}. \tag{4}$$

Montrer que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, *on a*
$$\lambda_k = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=k}} \Phi(F). \tag{5}$$

Exercice 14. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$. *On suppose que* $\mathrm{Sp}(A) = \{a_{1,1},\dots,a_{n,n}\}$. *Montrer que* A *est diagonale. On pourra considérer* $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ *tel que*
$$a_{i_0,i_0} = \min(a_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n},$$
et former
$$\begin{array}{rccl} \varphi: & (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & \varphi(X,Y) = Y^{\mathsf{T}}(A - a_{i_0,i_0} I_n)X \end{array}$$

Exercice 15 (Intercalation des valeurs propres)**.** *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ *ses valeurs propres. Soit* $A' = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ *et* $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{n-1}$ *ses valeurs propres.*

Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$.

On pourra utiliser le résultat de l'Exercice 13.

Exercice 16. *Soit* C *un convexe d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, on dit que* $x \in C$ *est extrémal si et seulement si pour tout* $(y,z) \in C^2$, *si* $x = \frac{x+y}{2}$, *alors* $x = y = z$. *On munit* $\mathbb{R}^n$ *de* $\|\cdot\|_2$ *et* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *de norme* $|||\cdot|||$ *associée.*

1. *Montrer que si* $u \in O(E)$, u *est extrémal dans* $\overline{B_{|||\cdot|||}(0,1)} = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid |||v||| \leqslant 1\}$.
2. *Soit* $u \in \overline{B_{|||\cdot|||}(0,1)}$ *qui n'est pas une isométrie. Montrer qu'il existe* $(v,w) \in \mathcal{L}(E)^2$ *tel que* $v \in O(E)$, $w \in S^+(E)$, $\mathrm{Sp}(w) \subset [0,1]$ *et il existe* $\lambda \in \mathrm{Sp}(w)$ *tel que* $\lambda \in [0,1[$. *En déduire que* u *n'est pas extrémal.*

3. *Montrer qu'il n'existe pas de produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$ tel que $|||\cdot|||$ soit la norme euclidienne associée.*

Exercice 17. *Soit $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 = B^3$ (ou $A^5 = B^5$ ou $A^{2k+1} = B^{2k+1}$). Montrer que $A = B$.*

Exercice 18. *Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$*

$$q : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{n+1})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \end{array}$$

Montrer que c'est un produit scalaire.

Exercice 19. *Soit $(E, \|\cdot\|_2)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.*
Montrer qu'il existe $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ tel que pour tout $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| = 1$.

Exercice 20. *Soit*

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \end{array}$$

Pour quelles valeurs de α q est-elle une forme quadratique définie positive ?

Exercice 21. *Soit E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_p) \in E^p$ tel que pour tout $i \neq j$, $(e_i|e_j) \leqslant 0$.*

1. *Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, montrer que si $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| e_i = 0$.*
2. *Montrer que s'il existe $\varepsilon \in E$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $(\varepsilon, e_i) > 0$ alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.*
3. *Montrer que si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E et si $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ avec pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $(x|e_i) > 0$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $x_i > 0$. On pourra former $(-x, e_1, \ldots, e_p)$.*

Exercice 22 (Famille obtusangle)**.** *Soit E euclidien de dimension n. Quel est le cardinal maximal r_n d'une famille $(x_1, \ldots, x_p)\mathrm{i}, E^p$ telle que pour tout $i \neq j$, $(x_i|x_j) < 0$?*

Exercice 23. *Soit E euclidien de dimension n.*

1. *Montrer qu'il existe $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ unitaire tel que pour tout $i \neq j$, $\|u_i - u_j\| = 1$.*
2. *Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.*
3. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la famille résultant du processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(u_1, \ldots, u_n)$. Montrer qu'il existe $(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j = \sum_{1 \leqslant i < j} b_i e_i + a_j e_j$.*

Exercice 24. *Soit E un espace euclidien, $p \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \in E^{2p}$. Montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i = u(x_i)$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $(y_i|y_j) = (x_i|x_j)$.*

Exercice 25. *Soit E euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrer que*

$$E = \ker(f - id) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(f - id). \tag{6}$$

Exercice 26. *Soit E un espace euclidien, C une partie convexe fermée non vide de E.*

1. *Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $c_x \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - c_x\|$. On note $c_x = p_C(x)$.*
2. *Montrer que $p_C(x)$ est l'unique vecteur dans C tel que pour tout $y \in C$, $(x - p_C(x)|y - p_C(x)) \leqslant 0$.*
3. *Montrer que $p_C \colon E \to C$ est 1-Lipschitzienne.*

Exercice 27. *Soit G un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{K}^n)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

1. *Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on forme*

$$\varphi(x, y) = \sum_{g \in G} (gx|gy). \tag{7}$$

   Montrer que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$, et que pour tout $g_0 \in G$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^n$, $\varphi(g_0 x, g_0 y) = \varphi(x, y)$.
2. *Montrer que pour tout $f \in G$, on a $\operatorname{Tr}(f^{-1}) = \overline{\operatorname{Tr}(f)}$.*
3. *Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{R})$. Montrer que G est cyclique.*

Exercice 28. *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer que $0 \leqslant \det(A) \leqslant \prod_{i=1}^n a_{i,i}$. Étudier le cas d'égalité.*
2. *Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|\det(M)| \leqslant \prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2}$. Étudier le cas d'égalité.*
3. *Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\det(B) = 1$. Montrer que $\operatorname{Tr}(AB) \geqslant n\,(\det A)^{\frac{1}{n}}$. Étudier le cas d'égalité.*

Exercice 29. *Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et avec $SO_n(\mathbb{R})$. On distinguera le cas $n = 3$ et $n \geqslant 3$.*