Solutions MP/MP*

Espaces préhilbertiens

Solution 1.

1. φ est une forme bilinéaire symétrique. Soit $f \in E$, on a
$$\varphi(f, f) = \int_0^1 f^2 + f'^2 \geqslant 0. \tag{1}$$
Si $\varphi(f, f) = 0$, f^2 étant continue et positive, on a $f = 0$.

2. Soit $(f, g) \in V \times W$. On a
$$\begin{aligned} \int_0^1 fg + f'g' &= \int_0^1 fg + \int_0^1 f'g', && (2)\\ &= \int_0^1 fg + [fg']_0^1 - \int_0^1 fg'', && (3)\\ &= \int_0^1 fg - \int_0^1 fg, && (4)\\ &= 0. && (5) \end{aligned}$$
Donc V et W sont orthogonaux.

   Soit $h \in E$. Supposons qu'il existe $(f, g) \in V \times W$ tel que $h = f + g$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$ et $f(0) = f(1) = 0$. Donc $h(0) = a + b$ et $h(1) = a\mathrm{e} + \frac{b}{\mathrm{e}}$. On trouve donc
$$\begin{aligned} a &= \frac{\frac{h(0)}{\mathrm{e}} - h(1)}{\frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}},\\ b &= \frac{eh(0) - h(1)}{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}. \end{aligned} \tag{6}$$
Réciproquement, en définissant a et b comme précédemment, on pose $f = h - g$. On a bien $f \in V$ et $h = f + g$. Finalement, $E = V \overset{\perp}{\oplus} W$.

3. Si $h_0 \in W \cap E_{\alpha,\beta}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $h_0(x) = a\cosh(x) + b\sinh(x)$, $h_0() = 0 = a = \alpha$ et $h_0(1) = a\cosh(1) + b\sinh(1) = \beta$ d'où
$$b = \frac{\beta - \alpha\cosh(1)}{\sinh(1)}. \tag{7}$$
Réciproquement, h_0 ainsi défini est dans $W \cap E_{\alpha,\beta}$.

   Pour tout $h \in E_{\alpha,\beta}$, $h - h_0 \in V$, d'après le théorème de Pythagore, on a $\|h_0\| \leqslant \|h\|$. Ainsi, la borne supérieure est $\|h_0\|^2$.

■

Solution 2.

1. Si $P \in \ker(\Delta)$, on a $P(X+a) = P(X)$ et par itération, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(ka) = P(0)$, donc P est constant. Ainsi, $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$. On a

$$\Delta(X^k) = (X+a)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i a^{k-i}, \tag{8}$$

de degré $k-1$ et de coefficient dominant ka. Ainsi, si $P = \sum_{i=0}^n X^i$ avec $a_n \neq 0$, on a $\Delta(P) = \sum_{k=0}^n a_k \Delta(X^k)$ de degré $n-1$ et de coefficient dominant $a_n na$.

2. Si $k \geqslant \deg(P)+1$, on a $\Delta^k P = 0$, et $\Delta^{\deg(P)}(P) = a_n \times n! a^n \neq 0$. φ est une somme finie, une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(P,P) \geqslant 0$ et si $P \neq 0$, $\left(\Delta^{\deg(P)} P(0)\right)^2 > 0$ donc $\varphi(P,P) > 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, cherchons P_n de coefficient dominant strictement positif avec $\deg(P_n) = n$ tel que pour tout $k \in [\![0,]\!]$, $\Delta^k P_n(0) = \delta_{n,k}$. On a $P(0) = 0$ pour $k = 0$, et $\Delta(P)(0) = P(a) - P(0) = 0$ donc $P(a) = 0$. De proche en proche, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(ka) = 0$. Donc $P_n = \alpha_n X(X-a)\dots(X-(n-1)a)$, et $\Delta^n(P_n)(0) = 1$ d'où

$$\alpha_n = \frac{1}{n! a^n}. \tag{9}$$

Réciproquement, en définissant P_n comme ci-dessus, avec $P_0 = 1$, on a

$$\Delta(P_n) = \alpha_n \left[(X+a)(X-a)\dots(X-(n-2)a) - X(X-a)\dots(X-(n-1)a)\right], \tag{10}$$

$$= \alpha_n X(X-a)\dots(X-(n-2)a)(na), \tag{11}$$

$$= P_{n-1}. \tag{12}$$

Par récurrence, $\Delta^k(P_n)(0) = \delta_{n,k}$ donc (P_n) est orthonormée.

■

Solution 3. On choisit $E = \mathcal{C}^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ muni du produit scalaire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\mathrm{d}t = (f|g)$. Soit $f_0 \colon x \mapsto 1$ et $f_1 \colon x \mapsto x \in E$, on note $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$. Trouver $I(a,b)$ revient à calculer $p_F(\sin) = a_0 f_0 + b_0 f_1$ avec $\sin - p_F(\sin) \in F^\perp$.

On a

$$(\sin - a_0 f_1 - b_0 f_0 | f_0) = (\sin - a_0 f_1 - b_0 f_0 | f_1) = 0. \tag{13}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - a_0 x - b_0)\,\mathrm{d}x &= 0, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin(x) - a_0 x^2 - b_0 x)\,\mathrm{d}x &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

On trouve ainsi les valeurs de $b_0 = \frac{8}{\pi^2}(\pi - 3)$ et de $a_0 = \frac{96}{\pi^3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ en résolvant un système de deux équations à deux inconnues en calculant les intégrales (utiliser une intégration par partie pour le calcul de celle d'intégrande $x\sin(x)$). Enfin,

$$I(a,b) = \|\sin - p_F(\sin)\|^2, \tag{15}$$

$$= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2. \tag{16}$$

On finit par trouver $I(a,b) = 1$. ■

Remarque 1. *Ce genre nde problème se résout souvent en se ramenant à un espace euclidien et en utilisant nos connaissances sur le projeté orthogonal.*

Solution 4.

1. Si $k \geqslant \min(\deg(P), \deg(Q))$, $P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k) = 0$, donc $(\cdot|\cdot)$ est définie et est une forme bilinéaire symétrique positive. Soit $P \in E \setminus \{0\}$ avec $\deg(P) = k_0$. Si $(P|P) = 0$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(P^{(k)}(a_k)\right)^2 = 0$. En particulier, $P^{(k_0)}(a_{k_0}) = 0$ ce qui est absurde par définition de k_0. Donc $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.
2. On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $Q_n = \alpha_{0,n} + \alpha_{1,n}X + \cdots + \alpha_{n,n}X^n$ de degré n. On a

$$0 = Q_n(a_0) = Q_n'(a_1) = \cdots = Q_n^{(n-1)}(a_{n-1}), \tag{17}$$

et $Q_n^{(n)}(a_n) = 1$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \alpha_{0,n} + \alpha_{1,n}a_0 + \cdots + \alpha_{n,n}a_0^{,} &= 0, \\ \alpha_{1,n} + 2\alpha_{2,n}a_1 + \cdots + n\alpha_{n,n}a_1^{n-1} &= 0, \\ \vdots \quad \vdots &\quad \vdots, \\ (n-1)!\alpha_{n-1,n} + (n \times \cdots \times 2)\alpha_{n,n}a_{n-1} &= 0, \\ n!\alpha_{n,n} &= 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Il y a une unique solution car c'est un système triangulaire. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $Q_n^{(k)}(a_k) = \delta_{n,k}$ et pour $k > n+1$, c'est vrai aussi car $Q_n^{(k)} = 0$.

On obtient ainsi une famille de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(Q_n) = 0$ et le coefficient dominant de Q_n est strictement positif. De plus pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$(Q_n|Q_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{Q_n^{(k)}(a_k)Q_m^{(k)}(a_k)}_{\delta_{n,k}\delta_{m,k}} = \delta_{n,m}. \tag{19}$$

Par unicité, $Q_n = P_n$ et $P_n^{(k)}(a_k) = \delta_{n,k}$.

4. Comme $\int_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n$ est un polynôme en t_{n-1} de degré 1, si

$$A_n(x) = \int_{a_0}^{x} \int_{a_1}^{t_1} \dots \int_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n \mathrm{d}t_{n-1} \dots \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1, \tag{20}$$

alors c'est un polynôme en x de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$. De plus, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$A_n^{(k)}(t_k) = \int_{a_k}^{t_k} \dots \int_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n \dots \mathrm{d}t_{k+1}. \tag{21}$$

Donc si $k \leqslant n-1$, $A_n^{(k)}(a_k) = 0$, et si $k > n$, $A_n^{(k)} = 0 = A_n^{(k)}(a_k)$. Enfin, $A_n^{(n)} = 1$. Donc $A_n = P_n$ par unicité.

5. On a $P_0 = 1$, $P_1(x) = x$. On trouve $P_2(x) = \frac{1}{2}x(x - 2\alpha)$ et $P_3(x) = \frac{x}{6}(x^2 - 6\alpha x + 9\alpha^2)$. On vérifie alors par récurrence que $P_n = \frac{x}{n!}(x - n\alpha)^{n-1}$.

■

Solution 5. On note $\varphi(a, b, c)$ l'intégrale. On pose

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \middle| f^2(x)\mathrm{e}^{-x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \right\}. \tag{22}$$

$0 \in E$, si $f \in E$, alors $\lambda f \in E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $(f, g) \in E^2$, alors $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ donc $g(x)g(x)\mathrm{e}^{-x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$, et $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$ donc $f + g \in E$.

On définit pour tout $(f, g) \in E^2$,

$$(f|g) = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, \tag{23}$$

qui est un produit scalaire sur E.

Soit $f_k\colon x \mapsto x^k$ de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$. On a $\varphi(a,b,c) = \|\sin - af_2 - bf_1 - cf_0\|^2$ minimum pour $af_2 - bf_1 - cf_0 = p_F(\sin)$.

Par définition, (a,b,c) vérifient $(\sin - af_2 - bf_1 - cf_0|f_k) = 0$ pour tout $k \in \{0,1,2\}$.

On a

$$(\sin|f_0) = \int_0^{+\infty} \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \Im\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(1-\mathrm{i})}\mathrm{d}x\right) = \Im\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
(\sin|f_1) &= \int_0^{+\infty} x\sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, &(25)\\
&= \Im\left(\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x(1-\mathrm{i})}\mathrm{d}x\right), &(26)\\
&= \Im\left(\left[\frac{x\mathrm{e}^{-x(1-\mathrm{i})}}{-(1-\mathrm{i})}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{1-\mathrm{i}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(1-\mathrm{i})}\mathrm{d}x\right), &(27)\\
&= \Im\left(0 + \frac{1}{(1-\mathrm{i})^2}\right), &(28)\\
&= \frac{1}{2}, &(29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sin|f_2) &= \int_0^{+\infty} x^2\sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, &(30)\\
&= \Im\left(\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x(1-\mathrm{i})}\mathrm{d}x\right), &(31)\\
&= \Im\left(0 + \frac{2}{(1-\mathrm{i})^3}\right), &(32)\\
&= -\frac{1}{2}. &(33)
\end{aligned}$$

Soit $(i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned}
(f_i|f_j) &= \int_0^{+\infty} x^{i+j}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, &(34)\\
&= \Gamma(i+j+1), &(35)\\
&= (i+j)!. &(36)
\end{aligned}$$

On résout ensuite le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a+b+2c &=& \frac{1}{2},\\
a+2b+6c &=& \frac{1}{2},\\
2a+6b+24c &=& -\frac{1}{2},
\end{array}\right. \tag{37}$$

et on finit par calculer $\|\sin - p_F(\sin)\|^2 = \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2$. ∎