

*Solutions  $MP/MP^*$*   
*Réduction des endomorphismes*

### Solution 1.

1. On a

$$\begin{aligned} f^k : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto A^k M \end{aligned}$$

donc pour tout polynôme  $P$ , on a  $P(f) = P(A)M$  par combinaison linéaire. Si  $P(A) = 0$ , alors  $P(f) = 0$ . Donc si  $A$  est diagonalisable,  $f$  l'est aussi. Si  $P(f) = 0$  alors avec  $M = I_n$ , on a  $P(A) = 0$  et  $A$  est diagonalisable si  $f$  l'est.

Même résultat avec  $g$  et  $B$ .

2. Soit  $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  tel que  $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \lambda_{i,j} X_i Y_j^\top = 0$ . Alors on a

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_i \right) Y_j^\top = 0 \quad (1)$$

Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la  $k$ -ième ligne de notre matrice est

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_{i,k} \right) Y_j^\top = 0 \quad (2)$$

Puisque  $(Y_j^\top)_{1 \leq j \leq n}$  est libre, on a pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_{i,k} = 0 \quad (3)$$

Puisque  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est libre, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $\lambda_{i,j} = 0$ , d'où le résultat.

3. Puisque  $B$  est diagonalisable,  $B^\top$  l'est aussi. On prend  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de vecteurs propres de  $A$  avec pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $AX_i = \lambda_i X_i$ . Prenons  $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$  une base de vecteurs propres de  $B^\top$  avec pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $B^\top Y_j = \mu_j Y_j$  et  $Y_j B^\top = \mu_j Y_j^\top$ . Ainsi,

$$h(X_i Y_j^\top) = AX_i Y_j^\top B = \mu_j AX_i Y_j^\top = \mu_j \lambda_i X_i Y_j^\top \quad (4)$$

et les  $(X_i Y_j^\top)_{1 \leq i,j \leq n}$  forment une base de  $E$  d'après ce qui précède. Donc  $h$  est diagonalisable.

Réciproquement, on a le contre-exemple  $A = 0$  et  $B$  non diagonalisable :  $h$  est l'endomorphisme nul. ■

**Remarque 1.** Généralement, soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , on définit

$$\begin{aligned} h_{A,B} : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AMB \end{aligned}$$

La matrice de  $h_{A,B}$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  s'appelle le produit tensoriel de  $A$  et  $B$  noté

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \quad (5)$$

On a toujours

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \text{Tr}(B) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) \quad (6)$$

Si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables,  $h_{A,B}$  l'est.

**Solution 2.** On pose  $P = DP_1$  et  $Q = DQ_1$  avec  $P_1 \wedge Q_1 = 1$ . Il existe  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  telles que  $UP_1 + VQ_1 = 1$ . On a  $MD = PQ$  donc  $M = DP_1Q_1 = PQ_1 = P_1Q$ .

1. Soit  $x \in \ker(D(f))$ . On a

$$P(f)(x) = DP_1(f)(x) = P_1(f) \circ D(f)(x) = 0 \quad (7)$$

De même pour  $Q(f)(x) = 0$ , donc

$$\ker(D(f)) \subset \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) \quad (8)$$

Soit  $x \in \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f))$ . On a

$$DUP_1 + DVQ_1 = 0 \quad (9)$$

d'où

$$UP + VQ = 0 \quad (10)$$

et

$$D(f)(x) = UP(f)(x) + VQ(f)(x) = 0 \quad (11)$$

Donc

$$\boxed{\ker(D(f)) = \ker(P(f)) \cap \ker(M(f))} \quad (12)$$

2. On a  $P \mid M$  donc  $\ker(P(f)) \subset \ker(M(f))$ . De même,  $\ker(Q(f)) \subset \ker(M(f))$  donc

$$\ker(P(f)) + \ker(Q(f)) \subset \ker(M(f)) \quad (13)$$

Si  $x \in \ker(M(f))$ , on a

$$x = \underbrace{UP_1(f)(x)}_{\in \ker(Q(f))} + \underbrace{VQ_1(f)(x)}_{\in \ker(P(f))} \quad (14)$$

car  $M = P_1Q = Q_1P$ . Donc

$$\boxed{\ker(M(f)) = \ker(P(f)) + \ker(Q(f))} \quad (15)$$

3. Si  $i \in \text{Im}(P(f))$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = P(f)(x) = D(f) \circ P_1(f)(x) \in \text{Im}(D(f))$ .  
De même pour  $\text{Im}(Q(f)) \subset \text{Im}(D(f))$ . Donc

$$\text{Im}(P(f)) + \text{Im}(Q(f)) \subset \text{Im}(D(f)) \quad (16)$$

Soit  $y \in \text{Im}(D(f))$ , alors il existe  $x \in E$  tel que

$$y = D(f)(x) = \underbrace{UP(f)(x)}_{\in \text{Im}(P(f))} + \underbrace{VQ(f)(x)}_{\in \text{Im}(Q(f))} \quad (17)$$

Donc

$$\boxed{\text{Im}(D(f)) = \text{Im}(P(f)) + \text{Im}(Q(f))} \quad (18)$$

4. On a  $P \mid M$  d'où  $\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}P(f)$  et  $\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}Q(f)$ . Ainsi,

$$\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}(Q(f)) \cap \text{Im}P(f) \quad (19)$$

Si  $y \in \text{Im}(P(f)) \cap \text{Im}(Q(f))$  alors il existe  $(x, x') \in E^2$  tels que

$$y = P(f)(x) = P(f)(x') \quad (20)$$

Or  $M = P_1Q = PQ_1$  donc

$$y = UP_1(f)(y) + VQ_1(f)(y) = UP_1Q(f)(x') + VQ_1P(f)(x) \in \text{Im}(M(f)) \quad (21)$$

donc

$$\boxed{\text{Im}(M(f)) = \text{Im}(P(f)) \cap \text{Im}(Q(f))} \quad (22)$$

■

**Solution 3.** On a

$$A \left( \frac{-1}{5}A + \frac{4}{5}I_n \right) = I_n \quad (23)$$

donc  $A$  est inversible.

$$X^2 - 4X + 5 = (X - 2 + i)(X - 2 - i) \quad (24)$$

est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ . Donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , semblable sur  $\mathbb{C}$  à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{pmatrix} \quad (25)$$

où  $\lambda_1 = 2 + i$  et  $\lambda_2 = 2 - i$ .  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donc  $\text{Tr}(A) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 \in \mathbb{R}$

Donc

$$\Im(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2) = 0 = n_1 - n_2 \quad (26)$$

Ainsi  $n_1 = n_2$  donc  $n$  est pair.

$A$  est semblable sur  $\mathbb{C}$  à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Soit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (28)$$

On a  $\chi_{A_0} = X^2 - 4X + 5$ .  $A_0$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Donc  $A$  est semblable sur  $\mathbb{C}$  à

$$\begin{pmatrix} A_0 & & \\ & \ddots & \\ & & A_0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

donc  $A$  est semblable sur  $\mathbb{R}$  à cette même matrice.

Soit  $l \in \mathbb{N}$ , on a

$$X^l = Q_p(X^2 - 4X + 5) + \alpha_l X + \beta_l \quad (31)$$

par division euclidienne. Donc

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \quad (32)$$

On a notamment

$$\begin{cases} (2 + i)^l = \alpha_l(2 + i) + \beta_l \\ (2 - i)^l = \alpha_l(2 - i) + \beta_l \end{cases} \quad (33)$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha_l = \frac{(2+i)^l - (2-i)^l}{2i} \\ \beta_l = (2+i)^l - \frac{(2+i)}{2i} [(2+i)^l - (2-i)^l] \end{cases} \quad (34)$$

■

**Remarque 2.** On a  $2 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$  avec  $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in ]0, \pi[$ . Donc  $\alpha_l = (\sqrt{5})^l \sin(l\theta)$ .

**Remarque 3.** On a

$$I_n - 4A^{-1} + 5A^{-2} = 0 \quad (35)$$

De même,  $(X - \frac{1}{2-i})(X - \frac{1}{2+i})$  annule  $A^{-1}$  et on a pour tout  $l \in -\mathbb{N}^*$ ,

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \quad (36)$$

**Remarque 4.**  $(A - 2I_n)^2 = -I_n$  donc  $\det(-I_n) = (-1)^n > 0$  donc  $n$  est pair.

**Solution 4.**

1. On a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

et  $(1 \ \dots \ 1)^T \neq 0$  donc

$$\boxed{1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} \quad (38)$$

2. Soit  $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \neq 0$  associé à  $\lambda$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \quad (39)$$

Soit  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| > 0$  car  $X \neq 0$ . On a alors

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} |x_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \right) |x_{i_0}| \quad (40)$$

donc

$$\boxed{|\lambda| \leq 1} \quad (41)$$

3. Soit  $J_i = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_{i,j} > 0\}$ . On a

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} |x_j| \leq \left( \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} \right) |x_{i_0}| = |x_{i_0}| \quad (42)$$

On a égalité partout donc pour tout  $j \in J_{i_0}$ ,  $|x_j| = |x_{i_0}|$  et  $x_j = |x_{i_0}| e^{i\theta}$ . En reportant, on a

$$\lambda |x_{i_0}| = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} |x_{i_0}| \quad (43)$$

donc

$$\boxed{\lambda = 1} \quad (44)$$

4. Si  $|\lambda| = 1$  et  $\lambda \neq 1$ , on a  $i_0 \notin J_{i_0}$  car sinon  $\lambda = 1$ . Donc il existe  $i_1 \in J_{i_0} \setminus \{i_0\}$  tel que  $x_{i_1} = |x_{i_0}| e^{i\theta} = \lambda x_{i_0}$ . Ainsi, il existe  $i_2 \neq i_1$  tel que  $x_{i_2} = \lambda x_{i_1}$ . De proche en proche, il existe  $i_q \neq i_{q-1}$  tel que  $x_{i_q} = \lambda x_{i_{q-1}}$  (avec  $q \geq 1$ ) et  $x_{i_q} = \lambda^q x_{i_0}$ . Or

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ k &\mapsto i_k \end{aligned}$$

n'est pas injective. Donc il existe  $k > l$  tel que  $i_k = i_l$  et  $x_{i_k} = \lambda^{k-l} x_{i_l}$  et  $k - l > 1$  donc

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{U}_{k-l}} \quad (45)$$

5. L'identité convient, les matrices de permutation aussi. En effet, si  $\sigma \in \Sigma_n$ , on a  $P_\sigma^{n!} = I_n$  donc les valeurs propres sont racines de  $X^{n!} - 1$  donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(P_\sigma) \subset \mathbb{U}_{n!}$ .

Réciproquement, soit  $A$  stochastique telle que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset (\mathbb{U})$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , supposons  $|J_{i_0}| \geq 2$ . D'après la décomposition de Dunford, il existe  $D$  diagonale et  $N$  nilpotente qui commutent telles que  $A = D + N$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ . Si  $N$  est nilpotente d'indice  $r \geq 2$ , on a pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  avec  $k \geq r$ , on a

$$A^k = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} N^j D^{k-j} = \sum_{j=1}^r \binom{k}{j} N^j D^{k-j} \quad (46)$$

Pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1) \dots (k-j+1)}{j!} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^j}{j!} \quad (47)$$

Comme  $N^{r-1} \neq 0$ , on a

$$A^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \quad (48)$$

et les coefficients de  $D^{k-r+1}$  sont bornés car  $\text{Sp}(D) \subset \mathbb{U}$ .

Or, notons que si  $A$  et  $B$  sont stochastiques,  $AB$  l'est aussi ( $\mathbf{1}$  est toujours valeur propre). Par récurrence,  $A^k$  l'est. Donc  $A^k \in \mathcal{M}_n([0, 1])$ , et l'équivalent est impossible si  $r \geq 2$ . Donc  $r = 1$  donc  $N = 0$  et  $A = D$  est diagonalisable.

Les valeurs propres de  $A$  sont des racines de l'unité, soit  $m$  le ppcm des ordres de ces racines (dans  $(\mathbb{U}, \times)$ ). On a alors

$$A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \quad (49)$$

d'où

$$A^m = P \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) P^{-1} \quad (50)$$

Notons  $M = \max_{j \in J_{i_0}} |a_{i_0, j}| < 1$  (car  $|J_{i_0}| \geq 2$  donc pour tout  $j \in J_{i_0}$ ,  $a_{i_0, j} \neq 1$ ). On

note  $a_{i_0, i_0}^{(m)}$  le coefficient  $(i_0, i_0)$  de  $A^m$ . On a alors

$$a_{i_0, i_0}^{(m)} = 1 = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0, j} a_{j, i_0}^{(m-1)} \leq M \sum_{j \in J_{i_0}} a_{j, i_0}^{(m-1)} \leq M \sum_{j=1}^n a_{j, i_0}^{(m-1)} = M \quad (51)$$

car  $A^{m-1}$  est stochastique. Donc  $M = 1$  ce qui n'est pas possible (par définition de  $M$ ). Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $|J_i| = 1$  donc il existe un unique  $j_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $a_{i, j_i} = 1$  et pour tout  $j \neq j_i$ ,  $a_{i, j} = 0$ .

$i \mapsto j_i$  est injective, sinon  $\text{rg}(A) \leq n - 1$  et  $0 \in \text{Sp}(A)$ .

■

**Remarque 5.** On peut avoir  $|\lambda| < 1$  pour la question 2, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (52)$$

On a  $A^2 = A$  et  $\text{rg}(A) = 1$ ,  $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ .

**Remarque 6.** Par exemple, pour 4, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

On a  $\chi_A = X^2 - 1$  et  $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ .

**Remarque 7.** Si pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_{i,j} > 0$  (i.e. pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $J_i = \llbracket 1, n \rrbracket$ ). D'après 3, on a  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{U} = \{1\}$ . De plus, si  $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^{\top} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  vérifie  $AX = X$ , d'après ce qui précède, on a  $x_1 = \dots = x_n$  et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1.

**Solution 5.**

1. Soit  $(\lambda, \mu) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ . On a  $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B^{\top})$ . Soit  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  vecteurs propres associés respectivement à  $\lambda$  et à  $\mu$ . On pose  $M = XY^{\top}$ . Alors

$$\Phi_{A,B}(M) = AXY^{\top} - XY^{\top}B = (\lambda - \mu)XY^{\top} = (\lambda - \mu)M \quad (54)$$

donc

$\lambda - \mu \in \text{Sp}(\Phi_{A,B})$

(55)

Réciproquement, soit  $\alpha \in \text{Sp}(\Phi_{A,B})$ . Il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  tel que l'on ait  $AM - MB = \alpha M$  d'où  $AM = M(\alpha I_n + B)$ . Par récurrence,  $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$  et par combinaison linéaire, pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$  on a  $P(A)M = MP(\alpha I_n + B)$ . En particulier, on prend  $P = \chi_A$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$0 = M\chi_A(\alpha I_n + B) \quad (56)$$

On a  $M \neq 0$  donc  $\chi_A(\alpha I_n + B)$  n'est pas inversible. On écrit

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \quad (57)$$

d'où

$$\chi_A(\alpha I_n + B) = \prod_{k=1}^n (B + (\alpha - \lambda_k)I_n) \quad (58)$$

donc il existe  $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $B + (\alpha - \lambda_{k_0})I_n$  est non inversible. Donc  $\lambda_{k_0} - \alpha \in \text{Sp}(B)$  et donc  $\alpha$  est une différence d'un élément de  $\text{Sp}(A)$  et de  $\text{Sp}(B)$ .



2. On forme

$$\begin{array}{ccc} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} g_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & MB \end{array}$$

Toujours par récurrence et combinaison linéaires, pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$P(f_A)M = P(A)M \quad (59)$$

Si  $P(A) = 0$ , on a  $P(f_A) = 0$ . Si  $P(f_A) = 0$ , pour  $M = I_n$ , on a  $P(A) = 0$ . De même pour  $B$ . Donc  $\Pi_A = \Pi_{f_A}$  (polynômes minimaux) et  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $f_A(M)$  est diagonalisable.  $f_A$  et  $g_B$  commutent car

$$(f_A \circ g_B)(M) = AMB = (g_B \circ f_A)(M) \quad (60)$$

Donc  $f_A$  et  $g_B$  sont codiagonalisables et donc  $\Phi_{A,B}$  l'est. ■

**Remarque 8.** Si  $(X_1, \dots, X_n)$  (respectivement  $(Y_1, \dots, Y_n)$ ) est une base de vecteurs propres de  $A$  (respectivement de  $B^\top$ ), alors  $(X_i Y_j^\top)_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de vecteurs propres pour  $\Phi_{A,B}$ .

**Remarque 9.** C'est faux sur  $\mathbb{R}$ , par exemple

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

On a  $\text{Sp}_{\mathbb{R}} = \emptyset$  et  $\Phi_{A,A}(I_2) = 0$  donc  $0 \in \text{Sp}_{\Phi_{A,A}}$ .

**Remarque 10.** Si  $\Phi_{A,B}$  est diagonalisable, soit  $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  une base de vecteurs propres de  $\Phi_{A,B}$ . Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  tel que  $BX = \lambda X$ . On a

$$AM_{i,j} = M_{i,j}(B + \lambda_{i,j}I_n) \quad (62)$$

avec  $\Phi_{A,B}(M_{i,j}) = \lambda_{i,j}M_{i,j}$ . Donc

$$AM_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})M_{i,j}X \quad (63)$$

Pour tout  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $X_0 = MX$ .  $M \in \text{Vect}(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  donc

$$\text{Vect}(M_{i,j}X)_{1 \leq i, j \leq n} = M_{n,1}(\mathbb{C}) \quad (64)$$

On peut donc en extraire une base : c'est une base de vecteurs propres de  $A$ .

**Solution 6.**

1. Par récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $A^k M = \theta^k M A^k$ , or  $F$  est un sous-espace vectoriel donc par combinaisons linéaires, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $P(A)M = MP(\theta A)$ .
2. Soit  $X \in \ker(A - \lambda I_n)$ . On a  $AMX = \theta MAX = \lambda \theta MX$ . On a donc  $MX \in \ker(A - \lambda \theta I_n)$ .

Si pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , on a  $\theta \lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , alors si  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et  $X \in \ker(A - \lambda I_n)$ , alors  $\ker(A - \lambda \theta I_n) = \{0\}$ . Donc  $MX = 0$ . Or les vecteurs propres forment une famille génératrice donc  $M = 0$  et  $F = \{0\}$ .

S'il existe  $\lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  tel que  $\theta \lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ . Soit  $X_1$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_0$ . On complète  $(X_1)$  en  $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$  base de  $\mathbb{C}^n$  formé de vecteurs propres de  $A$ . On définit  $MX_1 = Y_1 \in \ker(A - \lambda_0 \theta I_n) \setminus \{0\}$  et pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a  $MX_i = 0$ . Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a

$$AMX_i = 0 = \theta MAX_i = \theta \lambda_i MX_i \quad (65)$$

et

$$AMX_1 = AY_1 = \lambda_0 \theta Y_1 = \theta MAX_1 = \theta \lambda_0 X_1 \quad (66)$$

Donc  $M \neq 0$  et  $M \in F$ . Finalement, on a  $F = \{0\}$  si et seulement si pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ,  $\theta \lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ .

3. On écrit  $\chi_A = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{m_j}$  avec  $\lambda_j$  distincts et  $m_j \geq 1$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (67)$$

Supposons  $\theta \neq 0$ . Si  $M \in F$  et si  $x \in \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$ . On a

$$\left( \left( \frac{X}{\theta} - \lambda_j \right)^{m_j} \right) (A)(Mx) = M(A - \lambda_j I_n)^{m_j}(x) = 0 \quad (68)$$

Donc

$$Mx \in \ker \left( \frac{1}{\theta} A - \lambda_j I_n \right)^{m_j} = \ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (69)$$

car  $\theta \neq 0$ .

De plus,  $\ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} \neq \{0\}$  si et seulement si  $\ker(A - \theta \lambda_j I_n) \neq \{0\}$  car

$$\det[(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j}] = \det[(A - \theta \lambda_j I_n)]^{m_j} \quad (70)$$

Si pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ,  $\theta \lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , soit  $x \in \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$ . On a

$$Mx \in \ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} = \{0\} \quad (71)$$

donc  $M = 0$  car  $\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$ .

S'il existe  $\lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  tel que  $\lambda_0\theta \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , soit  $x_1 \in \ker(A - \lambda_0 I_n) \neq \{0\}$ . On pose

$$Mx_1 = y_1 \in \ker(A - \lambda_0\theta I_n) \setminus \{0\} \quad (72)$$

On complète  $(x_1)$  en  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$  base de  $\mathbb{C}^n$  formée de vecteurs appartenant à

$$\bigcup_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (73)$$

On a pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $Mx_i = 0$ . On a  $M \neq 0$  et

$$AMx_1 = Ay_1 = \theta\lambda_0 y_1 = \theta\lambda_0 Mx_1 \quad (74)$$

Pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a  $AMx_i = 0$  si  $x_i \in \ker(A - \lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$  et si  $\lambda_{j_i} \neq \lambda_0$ . On a  $Ax_i \in \ker(A - \lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$  donc

$$Ax_i \in \text{Vect}(x_2, \dots, x_n) \quad (75)$$

et  $MAx_i = 0$  donc  $AMx_i = \theta MAx_i$ .

Si  $F \neq \{0\}$ , il existe  $M \neq 0$  tel que  $AM = \theta MA$ . Pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on a  $P(A)M = MP(\theta A)$ . En particulier, pour  $P = \chi_A$ , on a

$$M\chi_A(\theta A) = 0 \quad (76)$$

$M \neq 0$  et donc  $\chi_A(\theta A)$  n'est pas inversible. Si  $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ , il existe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\theta A - \lambda_k I_n)$  est non inversible, d'où

$\lambda_k \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\theta A)$

(77)

■

**Solution 7.** On a

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (78)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (79)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (80)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (81)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 1 - \lambda & \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (82)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (83)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad (84)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \quad (85)$$

où l'on a fait successivement les opérations suivantes :  $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ ,  $C_i \leftarrow C_i - C_1$  pour  $i \in \{2, 3, 4\}$ , développement selon la première ligne,  $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$ ,  $L_i \leftarrow L_i + L_1$  pour  $i \in \{2, 3\}$ , développement selon la première colonne.

$\chi_A$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$  donc  $A$  est diagonalisable. On trouve ensuite un vecteur propre dans chaque sous-espace propre (qui sont de dimension un). ■

**Solution 8.**

1. On a  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$  si et seulement s'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  telle que  $AX = \lambda X$  si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i \neq 1} a_i x_i = \lambda x_1 \\ \vdots \\ \sum_{i \neq j} a_i x_i = \lambda x_j \\ \vdots \\ \sum_{i \neq n} a_i x_i = \lambda x_n \end{cases} \quad (86)$$

Soit  $S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ . Ce système équivaut à

$$S = (\lambda + a_1)x_1 = \dots = (\lambda + a_n)x_n \quad (87)$$

Si  $S = 0$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\lambda = -a_i$  ou  $x_i = 0$  (et  $X \neq 0$ ). Les  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ , il existe un unique  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda = -a_{i_0}$  et pour tout  $i \neq i_0$ , on a  $x_i = 0$ . En reportant, on a  $S = 0 = \lambda x_{i_0}$  donc  $\lambda = 0$  ce qui est impossible car  $0 = \lambda = -a_{i_0} > 0$ . Donc  $S \neq 0$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda + a_i \neq 0$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i = \frac{S}{\lambda + a_i}$ . On a alors

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i S}{\lambda + a_i} \quad (88)$$

donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1} \quad (89)$$

Réciproquement, on prend  $x_i = \frac{1}{\lambda + a_i}$  et on a bien  $AX = \lambda X$ .

2. On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-a_n, \dots, -a_1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x + a_i} \end{aligned}$$

3. Posons  $-a_{n+1} = -\infty$  et  $-a_0 = +\infty$ . Sur  $] -a_{k+1}, -a_k[$ , on a

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{-a_i}{(x + a_i)^2} \quad (90)$$

Les  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  étant positifs, on a  $\lim_{x \rightarrow -a_{k+1}^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -a_k^-} f(x) = -\infty$  (si  $k \neq n$ )

(et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , il existe un unique  $\lambda_k \in ] -a_{k+1}, -a_k[$  tel que  $f(\lambda_k) = 1$ . Donc  $A$  admet exactement  $n$  valeurs propres réelles distinctes. Donc  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . ■

**Remarque 11.** Soit

$$F(X) = - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X + a_k} + 1 = \frac{P(X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)} \quad (91)$$

avec  $P = (X + a_1) \dots (X + a_n) - \sum_{k=1}^n a_k P_k$  où  $P_k = \prod_{i \neq k} (X + a_i)$  de degré  $n-1$ . On a  $\deg(P) = n$  et son coefficient dominant est 1. De plus, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $P(\lambda) = 0$  si et seulement si  $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$  si et seulement si  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  donc  $P = \chi_A$ .

**Solution 9.** On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \frac{\lambda}{j} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (92)$$

où le coefficient est à la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne. La matrice à gauche est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Donc les matrices de transvections sont dans  $G$ . De plus, les matrices de dilatations sont aussi dans  $G$ . Donc  $G = GL_n(\mathbb{R})$ . ■

**Solution 10.** Supposons  $u$  diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \quad (93)$$

avec  $\lambda_i \neq 0$ . Donc  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = A^p = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p)$  donc  $u^p$  est diagonalisable. On a toujours  $\ker(u) \subset \ker(u^2)$  et la forme diagonale implique  $\ker(u) = \ker(u^2)$ .

Supposons  $u^p$  diagonalisable, on écrit  $\Pi_{u^p} = (X - \lambda_0) \dots (X - \lambda_r) = R$  (avec  $\lambda_k \neq 0$  pour tout  $k \geq k$ ) qui est scindé à racines simples. On a

$$P(u^p) = 0 = (u^p - \lambda_0 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u^p - \lambda_r \text{id}_E) = Q(u) \quad (94)$$

avec  $Q(X) = P(X^p)$ .

Si  $\lambda_0 \neq 0$ , chaque  $\lambda_k$  admet  $p$  racines  $p$ -ièmes distinctes et si  $\mu_k$  est l'une de ses racines, on a

$$X^p - \lambda_k = \prod_{j=1}^p \left( X - \mu_k e^{i \frac{2j\pi}{p}} \right) \quad (95)$$

De plus, les racines  $p$ -ièmes des  $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  sont deux à deux distinctes. Donc  $Q$  est scindé à racines simples, et donc  $u$  est diagonalisable.

Si  $\lambda_0 = 0$ , on a  $Q = X^p A(X)$  avec  $A$  scindé à racines simples non nulles et  $X^p \wedge A = 1$ . D'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker(Q(u)) = \mathbb{C}^n = \ker(u^p) \otimes \ker(A(u)) = \ker(u^p) \otimes_{i \in I} \ker(u - \mu_i \text{id}) \quad (96)$$

car  $A$  est scindé à racines simples. Montrons que  $\ker(u) = \ker(u^p)$ . L'inclusion directe est évidente. Réciproquement, montrons que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$  et si  $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$ , alors  $\ker(u^{k+1}) = \ker(u^{k+2})$ . L'inclusion est évidente, et si on a l'égalité, si  $x \in \ker(u^{k+2})$ , on a  $u(x) \in \ker(u^{k+1}) = \ker(u^k)$  donc  $x \in \ker(u^{k+1})$ . Comme  $\ker(u) = \ker(u^2)$ , d'après ce qui précède, par récurrence, on a  $\ker(u) = \ker(u^p)$ , donc  $u$  est diagonalisable. ■

**Solution 11.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ ,  $u$  canoniquement associée à

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (97)$$

. On a

$$\begin{cases} u(e_1) = e_n \\ u(e_2) = e_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = e_{n-1} \end{cases} \quad (98)$$

d'où

$$\begin{cases} u^k(e_1) = e_{n+1-k} \\ \vdots u^k(e_{k-1}) = e_{n-1} \\ \vdots \\ u^k(e_n) = e_{n-k} \end{cases} \quad (99)$$

et donc

$$J_n^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (100)$$

où les 1 commencent à la  $k + 1$ -ième colonne sur la première ligne et à la  $n - k + 1$ -ième ligne sur la première colonne. Notamment, le 1 sur la dernière colonne est à la  $n - k$ -ième ligne.

On a  $A(a_0, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k$ . En développant par rapport à la première ligne, on a

$$\chi_{J_n}(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} \quad (101)$$

Le premier déterminant vaut  $X^{n-1}$  et le deuxième vaut  $-(-1)^n \times (-1)^{n-2} = -1$  donc  $\chi_{J_n}(X) = X^n - 1$ . Ainsi,  $\chi_{J_n}$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$  donc  $J_n$  est diagonalisable avec des sous-espaces propres de dimension 1. Soit  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ , on a  $\text{Sp}(J_n) = \{\omega^k, 0 \leq k \leq n-1\}$ . On a  $J_n X = \omega^k X$  si et seulement si

$$\begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases} \quad (102)$$

si et seulement si

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix} = x_1 X_k \quad (103)$$

avec  $X_k$  vecteur propre de  $J_n$  associé à  $\omega^k$ . Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \omega & & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix} \quad (104)$$

et  $P^{-1} J_n P = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ . On a donc

$$P^{-1} A(a_0, \dots, a_n) P = \text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1})),$$

où  $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ . Donc  $A$  est diagonalisable de valeurs propres  $Q(1), \dots, Q(\omega^{n-1})$  et donc

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k)$$

(105)

■



**Remarque 12.** On a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \quad (106)$$

Si  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$  vérifient  $a + b + c = 1$ , on a

$$|a + jb + j^2c| = |a + j^2b + jc| \leq a + b + c = 1 \quad (107)$$

si et seulement si  $a, jb, j^2c$  ont même argument si et seulement si  $\{a, b, c\} = \{1, 0, 0\}$ .

**Solution 12.** On sait que  $f^n = 0$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton et que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$  et si  $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ , alors  $\ker(f^k) = \ker(f^m)$  pour tout  $m \geq k$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et

$$\begin{aligned} u : \ker(f^{k+1}) &\rightarrow \ker(f^k) \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

est bien définie car si  $x \in \ker(f^{k+1})$ ,  $f(x) \in \ker(f^k)$ . Comme  $\ker(f) \subset \ker(f^{k+1})$ ,  $\ker(u) = \ker(f)$  et  $\dim(\ker(u)) = 1$ . D'après le théorème du rang, on a  $\dim(\ker(f^{k+1})) = \text{rg}(u) + 1 \leq \dim(\ker(f^k)) + 1$ . Par récurrence, on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\dim(\ker(f^k)) \leq k$  (car on ne peut croître au plus de 1 à chaque itération).

Si  $f^{n-1} = 0$ , on a  $\dim(\ker(f^{n-1})) = n \leq n-1$  ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{f^{n-1} \neq 0} \quad (108)$$

Soit  $x \notin \ker(f^{n-1})$ . Soit  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ . Si  $\alpha_0 x + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$ , en appliquant  $f^{n-1}$ , on a  $\alpha_0 f^{n-1}(x) = 0$  donc  $\alpha_0 = 0$ . Puis on applique  $f^{n-2}$ , etc. De proche en proche,  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ . Ainsi,  $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est libre en dimension  $n$ , c'est donc une base et on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (109)$$

qui est une matrice nilpotente d'indice  $n$ . Matriciellement, on a

$$\ker(f^k) = \text{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n).$$

■

**Solution 13.** Supposons qu'il existe  $x \in V$ ,  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  soit une base de  $V$ . Notons  $u^n(x) = a_0x + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x)$ . Soit  $y \in V$  tel que  $u(y) = \lambda y$ . Pour  $y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^i(x)$ . On a donc

$$u(y) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^{i+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda y_i u^i(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1} u^i(x) + y_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x) \quad (110)$$

Donc  $u(y) = \sum_{i=1}^{n-1} u^i(x)(y_{i-1} + y_{n-1}a_i) + y_{n-1}a_0x$  donc

$$\begin{cases} \lambda y_0 &= y_{n-1}a_0 \\ \lambda y_1 &= y_0 + a_1 y_{n-1} \\ \vdots & \\ \lambda y_{n-2} &= y_{n-3} + a_{n-2} y_{n-1} \\ \lambda y_{n-1} &= y_{n-2} + a_{n-1} y_{n-1} \end{cases} \quad (111)$$

donc par récurrence

$$\begin{cases} \lambda y_{n-2} &= (\lambda - a_{n-1})y_{n-1} \\ \lambda y_{n-3} &= (\lambda(\lambda - a_{n-1}) - a_{n-2})y_{n-1} \\ \vdots & \\ \lambda y_0 &= (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - a_1)y_{n-1} \end{cases} \quad (112)$$

Donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Supposons que les sous-espaces propres de  $u$  sont de dimension 1. On écrit  $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$V = \bigotimes_{i=1}^r \underbrace{\ker(u - \lambda_i \text{id}_V)^{n_i}}_{F_i} \quad (113)$$

et les sous-espaces caractéristiques  $F_i$  sont stables par  $u$ . Soit  $v_i = u|_{F_i} - \lambda_i \text{id}_{F_i}$ . On a  $\chi_u = \prod_{i=1}^r \chi_{u|_{F_i}}$  (matrice diagonale par blocs dans une base adaptée).  $(X - \lambda_i)^n$  annule  $u|_{F_i}$  et  $\text{Sp}_{F_i}(u|_{F_i}) = \{\lambda_i\}$ . Alors  $\chi_{u|_{F_i}} = (X - \lambda_i)^{\dim(F_i)}$ . En reportant, on a  $\dim(F_i) = n_i$ . De plus,  $V_i^{n_i} = 0$  donc  $v_i$  est nilpotent. On a donc  $\dim(\ker(v_i)) = \dim(\ker(u - \lambda_i \text{id}_E)) = 1$ . Donc il existe  $x_i \in F_i$  tel que  $(x_i, v_i(x_i), \dots, v_i^{n_i-1}(x_i))$  soit une base de  $F_i$ .

On forme  $x = \sum_{i=1}^r x_i$ . Soit  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$  tel que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x) = 0 = \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i) \right).$$

Les  $F_i$  sont en somme directe donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i) = 0 \quad (114)$$

Soit  $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$ .  $I_{x_i} = \{A \in \mathbb{C}[X] \mid A(u)(x_i) = 0\}$  est un idéal de  $\mathbb{C}[X]$  donc est principal et il existe  $\Pi_i \in I_{x_i}$  minimal et

$$\Pi_i \mid P \quad (115)$$

On a  $(X - \lambda_i)^{n_i}(u)(x_i) = 0$  et  $(x_i, u(x_i), \dots, u^{n_i-1}(x_i))$  est libre, donc si  $P \in I_{x_i}$ ,  $\deg(P) \geq n_i$  donc  $\deg(\Pi_i) = n_i$  et  $\Pi_i = (X - \lambda_i)^{n_i}$ . Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\Pi_i \mid P$  et donc

$$\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i} \mid P \quad (116)$$

Mais  $P$  est de degré  $\leq n - 1$ , nécessairement  $P = 0$  et  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est libre. ■

**Remarque 13.** Autre méthode pour le sens direct : on a

$$\text{mat}_{(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = A \quad (117)$$

Si  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on a

$$A - \lambda I_n = \text{mat}_{(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \quad (118)$$

qui est non inversible, mais donc les  $(n - 1)$  première colonnes sont libres, donc est de rang  $n - 1$ .

#### Solution 14.

1. On utilise le fait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$ . S'il existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Im}(f^{k+1}) = \text{Im}(f^k)$  alors pour tout  $l \geq k$ ,  $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^l)$ .

En effet, si  $x = f^{k+1}(x') \in \text{Im}(f^{k+1})$ , on a  $x = f^k(f(x')) \in \text{Im}(f^k)$ . Si on a égalité des espaces, soit  $x = f^{k+1}(x') = f(f^k(x')) \in \text{Im}(f^{k+1})$ . Alors  $f^k(x') \in \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$  donc il existe  $x''$  tel que  $f^k(x') = f^{k+1}(x'')$ , mais alors  $x = f^{k+2}(x'') \in \text{Im}(f^{k+2})$ . On a donc le résultat en itérant.

Ainsi, pour tout  $n \geq d$ , on a  $\text{rg}(f^n) = \text{rg}(f^d)$  donc  $(\text{rg}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire au moins à partir de  $d$  et  $r(f) = \text{rg}(f^d)$ .

2. Comme  $f$  et  $g$  commutent, on a

$$(f + g)^{2d} = \sum_{k=0}^{2d} \binom{2d}{k} f^k g^{2d-k} \quad (119)$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, 2d \rrbracket$ , on a  $k \geq d$  ou  $2d - k \geq d$  donc

$$\begin{cases} \text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(f^d) \\ \text{ou} \\ \text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(g^d) \end{cases} \quad (120)$$

et donc  $\text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)$ . Finalement,  $\text{Im}(f + g)^{2d} \subset \text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)$ . On a donc

$$r(f + g) = \dim(\text{Im}(f + g)^{2d}) \quad (121)$$

$$\leq \dim(\text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)) \quad (122)$$

$$\leq \dim(\text{Im}(f^d)) + \dim(\text{Im}(g^d)) \quad (123)$$

$$\leq r(f) + r(g) \quad (124)$$

Pour un contre-exemple, on utilise  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = A^\top$ . On a  $A^2 = B^2$  donc  $r(A^2) = r(B^2) = 0$  et  $A + B$  inversible donc  $r(A + B) = 2 > r(A) + r(B)$ .

3. On a  $\chi_f = X^{m_0}Q$  avec  $\deg(Q) = d - m_0$  et  $Q(0) = 0$ . D'après le lemme des noyaux, on a

$$V = \ker(f^{m_0}) \otimes \ker(Q(f)) \quad (125)$$

Dans une base adaptée  $\mathcal{B}$ , on a  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  avec  $A^{m_0} = 0$  et  $B$  inversible.

Alors pour tout  $k \geq m_0$ ,  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$  et  $\text{rg}(f^k) = \text{rg}(B^k) = d - m_0 = r(f)$ . ■

**Solution 15.** On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de la norme  $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$ . Notons que si  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , alors  $|\lambda| \leq \|A\|$ . En effet, si  $X$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ , on a

$$\|AX\|_\infty = |\lambda| \|X\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty \quad (126)$$

et  $X \neq 0$  donc  $\|X\|_\infty \neq 0$ .

Soit  $A = e^{\frac{2ik\pi}{q}} I_n$ , soit  $B \in \mathcal{G}_q$  telle que  $\|B - A\| \leq \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$ . Soit  $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ , on a  $\mu \in \mathbb{U}_q$  car  $B^q = I_n$ . Donc  $\mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B - A)$  et

$$\left| \mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right| \leq \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \quad (127)$$

Si  $\mu = e^{\frac{2il\pi}{q}}$ , on a

$$\left| \mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right| = 2 \left| \sin \left( \frac{(l-k)\pi}{q} \right) \right| > \sin \left( \frac{\pi}{q} \right) \quad (128)$$

si  $l \neq k$ . Nécessairement, on a  $\mu = e^{\frac{2ik\pi}{q}}$ , donc  $B = A$  car  $B$  est diagonalisable et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right\}$ . Donc  $A$  est un point isolé de  $\mathcal{G}_q$ .

Soit maintenant  $A \in \mathcal{G}_q$ , on suppose que  $A$  n'est pas une matrice scalaire, donc  $|\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)| \geq 2$ . Soit  $\lambda \in (\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$ . Il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \mu_1, \dots, \mu_r),$$

avec  $\mu_1, \dots, \mu_r \neq \lambda$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , posons

$$A_\varepsilon = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \varepsilon & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu_r \end{pmatrix} P^{-1} \quad (129)$$

On a  $A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A$  et  $A_\varepsilon \neq A$ . Montrons que  $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$ . On a  $\chi_{A_\varepsilon} = \chi_A$ ,  $\text{rg}(A_\varepsilon - \lambda I_n) = \text{rg}(A - \lambda I_n)$  (observer les colonnes) et pour  $\mu_l \in \text{Sp}(A)$ ,  $\mu_l \neq \lambda$ , on a  $\text{rg}(A_\varepsilon - \mu_l I_n) = \text{rg}(A - \mu_l I_n)$  (observer les lignes). La dimension des sous-espaces propres de  $A$  et  $A_\varepsilon$  sont les mêmes donc  $A_\varepsilon$  est diagonalisable. De plus,  $\text{Sp}(A_\varepsilon) \subset \text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}_q$  donc  $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$ . Ainsi,  $A$  n'est pas isolé dans  $\mathcal{G}_q$ . ■

**Solution 16.** On a

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1) - ((\lambda - 1) - 1) = \lambda(\lambda - 2)^2 \quad (130)$$

Soit  $X = (x \ y \ z)^T$ . On a  $MX = 0$  si et seulement si  $y = x$  et  $z = -x$  donc  $E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ .

On a  $(M - 2I_3)X = 0$  si et seulement si  $y = z = -x$  donc  $E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ .

$M$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  mais trigonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u) \otimes \ker(u - 2id)^2 \quad (131)$$

Soit  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \star \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (132)$$

avec  $\varepsilon_3 \in \ker(u - 2id)^2$  et  $\varepsilon_3 \notin \text{Vect}(\varepsilon_2)$ . On a

$$(M - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (133)$$

donc  $(M - 2I_3)^2 X = 0$  si et seulement si  $2x - y + z = 0$ . On pose  $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a

$M\varepsilon_3 = -\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$  donc si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (134)$$

on a

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (135)$$

Les sous-espaces stables de dimension 0 :  $\{0\}$ . Les sous-espaces stables de dimension 1 : ils sont engendrés par les vecteurs propres, ce sont donc  $\text{Vect}(\varepsilon_1)$  et  $\text{Vect}(\varepsilon_2)$ . Si maintenant  $F$  est un sous-espace stable de dimension 2, montrons que l'on a

$$F = (F \cap \ker(u)) \otimes (F \cap \ker(u - 2id)^2) = F_0 \otimes F_2 \quad (136)$$

En effet, on a  $F_0 \otimes F_2 \subset F$ . Si maintenant  $x \in F$ , a priori on a  $x = x_0 + x_2$  avec  $x_0 \in \ker(u)$  et  $x_2 \in \ker(u - 2id)^2$ . On a  $u(x) = u(x_2) \in F$  par stabilité,  $u^2(x) = u^2(x_2) \in F$ , et  $(u - 2id)^2(x_2) = 0$  donc  $x_2 = \frac{1}{4}(-u^2(x) + 4u(x_2)) \in F$  et  $x_0 = x - x_2 \in F$ .

On a  $F_0 = \{0\}$  ou  $\ker(u)$ . Si  $F_0 = \{0\}$ , on a  $F = F_2$ . Si  $F_0 = \ker(u)$ , on a  $\dim(F_2) = 1$  donc  $F_2 = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ .

Donc les sous-espaces stables de dimension 2 sont  $\ker(u - 2id)^2$  et  $\text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

Enfin, les sous-espaces stables de dimension 3 :  $\mathbb{R}^3$ . ■

**Remarque 14.** Plus généralement, si  $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ . On écrit

$$E = \bigotimes_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i id_E)^{m_i} = \bigotimes_{i=1}^r F_i \quad (137)$$

Si  $F$  est stable, on note  $\Pi_i$  le projecteur sur  $F_i$  parallèlement à  $\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r F_j \in \mathbb{K}[u]$ . On a pour tout  $x \in F$ ,  $\Pi_i(x) \in F$  par stabilité, il s'ensuit que

$$F = \bigotimes_{i=1}^r (F \cap F_i) \quad (138)$$

**Solution 17.**

1. Si  $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ , on a

$$A - I_{n+1} = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & 0_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 0 \end{array} \right) \quad (139)$$

donc  $\text{rg}(A - I_{n+1}) = 2$  et  $\chi_{A - I_{n+1}} = X^{n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$  (sur  $\mathbb{C}$ ). On a  $\text{Tr}(A - I_{n+1}) = 0 = \mu + \lambda$  et  $\text{Tr}(A - I_{n+1})^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda^2 + \mu^2$  donc  $\{\lambda, \mu\} \in \left\{ \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\}$  et  $A - I_{n+1}$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (140)$$

2. On note  $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ . Soit  $X$  tel que  $A'X = \pm\lambda$  où  $A' = A - I_{n+1}$ . Alors en écrivant le système, on vérifie que l'on peut prendre

$$f_{\pm} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (141)$$

et si  $X$  est tel que  $A'X = 0$ , si  $i_0$  est tel que  $a_{i_0} \neq 0$ , on récupère une bas de  $\ker(A')$

avec

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (142)$$

où  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}$ . Le 1 est à la  $i$ -ième ligne,  $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$  est à la ligne  $i_0$ . ■

**Solution 18.** On pose  $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$ . On montre d'abord que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$   $|\lambda| \leq \|A\|$ . En effet, si  $X$  non nul est tel que  $AX = \lambda X$ , on a  $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$  donc  $|\lambda| \|X\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$ , d'où le résultat.

Soit alors  $m = \sup \{\|M\| \mid M \in G\}$ . Soit  $M \in G$  et  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ . On a  $|\lambda| \leq m$ . Comme  $M^k \in G$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a aussi  $|\lambda|^k \leq m$  donc  $|\lambda| = 1$  (faire tendre  $k$  vers  $-\infty$  et  $+\infty$ ).

Grâce à la décomposition de Dunford, on a  $M = D + N$  avec  $D$  diagonalisable,  $N$  nilpotente et  $D$  et  $N$  qui commutent. Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  telle que  $N^{r-1} \neq 0$  et  $N^r = 0$ . On a  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$  donc  $G \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $MD^{-1} = I_n + ND^{-1}$  avec  $ND^{-1}$  est nilpotente d'indice  $r$ . On a pour tout  $k \geq r$ , on a

$$(MD^{-1})^k = M^k (D^{-1})^k \quad (143)$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (ND^{-1})^i \quad (144)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{k}{i} (ND^{-1})^i \quad (145)$$

$$\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \quad (146)$$

Notons que pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  si  $\|X\|_\infty = 1$ , on a

$$\|(AB)X\|_\infty \leq \|A\| \|BX\|_\infty \leq \|A\| \|B\| \quad (147)$$

donc  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

La suite  $(MD^{-1})^k$  est bornée, donc  $r = 1$  et  $N = 0$ , donc  $M$  est diagonalisable.



Prenons ensuite  $\alpha = \sqrt{3}$ . Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ , on a  $\lambda - 1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M - I_n)$ . Si  $\lambda = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , on a  $|e^{i\theta} - 1| < \sqrt{3}$  si et seulement si  $2 \sin(\frac{\theta}{2}) < \sqrt{3}$  si et seulement si  $\theta \in ]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , on a  $(e^{i\theta})^k \in \text{Sp}(M^k)$ . Donc on a aussi  $|\sin(\frac{k\theta}{2})| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Quitte à changer  $\theta$  en  $-\theta$ , on peut supposer  $\theta \in [0, \frac{2\pi}{3}[$ . Si  $\theta \geq 0$ , posons l'unique  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k\theta \geq \frac{2\pi}{3}$  et  $(k-1)\theta \in [0, \frac{2\pi}{3}[$ . On a alors

$$k\theta = (k-1)\theta + \theta < \frac{4\pi}{3} \quad (148)$$

ce qui est absurde si et seulement si  $|\sin(\frac{k\theta}{2})| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ainsi,  $\theta = 0$  et  $\text{Sp}(M) = \{1\}$ , et puisque  $M$  est diagonalisable,  $M = I_n$  et  $G = \{I_n\}$ . ■

**Remarque 15.** Soit  $\alpha > \sqrt{3}$  et  $G = \{I_n, jI_n, j^2I_n\}$ . Pour tout  $M \in G$ ,  $\|M - I_n\| < \alpha$  et  $G \neq \{I_n\}$ .

**Solution 19.**

1. On vérifie que  $\chi_A(\lambda) = \lambda^3$ . On a  $AX = 0$  si et seulement si  $x_1 = x_3$  et  $x_2 = -2x_1$ .

On prend  $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $u$  est nilpotente et  $\dim(\ker(u)) = 1$ . On a  $u^3 = 0$  et on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (149)$$

Soit  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on a  $u^2(e_1) \neq 0$  donc  $(u^2(e_1), u(e_1), e_1)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . On a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (150)$$

$\dim(\ker(u^k)) = k$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , notamment car  $\text{rg}(u^2) = 1$  pour justifier que  $\dim(\ker(u^2)) = 2$ .

Soit  $F$  stable par  $u$  de dimension  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ .  $u|_F$  est nilpotente et  $u|_F^i = 0$ .

Donc  $F \subset \ker(u^i)$  qui est de dimension  $i$ . Donc  $F = \ker(u^i)$ .

2. Si  $B^2 = A$ ,  $B^6 = 0$  donc  $B^3 = 0$ . Alors  $B^4 = 0 = A^2$  ce qui n'est pas vrai. Donc il n'y a pas de  $B$  tel que  $B^2 = A$ . ■

**Solution 20.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associé à  $A$ . On a  $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)$ . D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u + id) \otimes \underbrace{\ker(u^2 + id)}_F \quad (151)$$

On a  $F \neq \{0\}$  car  $u \neq -id$ . On note  $v = u|_F$ . On a  $v^2 = -id_F$  et  $\det(v^2) = (\det(v))^2 = (-1)^{\dim(F)} > 0$  donc  $\dim(F)$  est pair. Nécessairement, on a  $\dim(F) = 2$  et  $\dim(\ker(u + id)) = 1$ . Soit  $\varepsilon_3$  vecteur propre associé à  $-1$ . Soit  $x \in F \setminus \{0\}$ . Si  $(x, u(x))$  est lié,  $x$  est vecteur propre de  $v$  et  $v^2 + id_F = 0$  ce qui est impossible car il n'y a pas de valeur propre réelle. Donc on pose  $\mathcal{B} = (x, u(x), \varepsilon_3)$  base de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $u^2(x) = -x$ , donc

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (152)$$

■

**Remarque 16.** Sur  $\mathbb{C}$ , on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (153)$$

ou  $iI_3$ .

**Solution 21.**

1.  $I_x = \{A \in \mathbb{K}[X] \mid A(f)(x) = 0\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  non vide car  $\mu_f \in I_x$ . Donc il existe un unique  $P_x$  unitaire tel que  $I_x = P_x \mathbb{K}[X]$ .
2. Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $A(f) = 0$  si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $P_x \mid A$  si et seulement si  $\bigvee_{x \in E} P_x \mid A$  donc  $\mu_f = \bigvee_{x \in E} P_x$ .
3. On a

$$P_x P_y(f)(x + y) = P_x P_y(f)(x) + P_x P_y(f)(y) \quad (154)$$

$$= P_f(f)(P_x(f)(x)) + P_x(f)(P_y(f)(y)) \quad (155)$$

$$= 0 \quad (156)$$

Donc  $P_{x+y} \mid P_x P_y$ .

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$ . Supposons  $A(f)(x + y) = 0$ . On a  $P_x(f)(A(f)(x + y)) = 0$ ,  $P_x(f)(A(f)(x)) = A(f)(P_x(f)(x)) = 0 = -AP_x(f)(y)$ . Donc  $P_y \mid AP_x$ . D'après le théorème de Gauss,  $P_y \mid A$ . De même,  $P_x \mid A$ . On prend  $A = P_{x+y}$ . Comme  $P_x \wedge P_y = 1$  et  $P_x P_y \mid P_{x+y}$ , on a

$$\boxed{P_x P_y = P_{x+y}} \quad (157)$$

4. On décompose  $\mu_f = \prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}$  avec pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $A_i$  irréductible sur  $\mathbb{K}[X]$  et  $\alpha_i \geq 1$ . Comme  $\mu_f = \bigvee_{x \in E} P_x$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , il existe  $y_i \in E$  tel que  $P_{y_i} = A_i^{\alpha_i} Q_i$ . On pose  $x_i = Q_i(f)(y_i)$ . Pour tout  $A \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $A(f)(x_i) = 0$  si et seulement si  $AQ_i(f)(y_i) = 0$  si et seulement si  $A_i^{\alpha_i} Q_i \mid AQ_i$  si et seulement si  $A_i^{\alpha_i} \mid A$ . Ainsi,  $P_{x_i} = A_i^{\alpha_i}$ . En utilisant le point précédent par récurrence, on a  $\mu_f = P_{\sum_{i=1}^r x_i}$  et on pose donc  $x = \sum_{i=1}^r x_i$ .
5. Supposons que ce  $v$  existe. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\deg(\mu_f) \leq n$ . Soit  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ . Si  $\alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$ . En appliquant en  $v$ , comme la famille est libre, on a de proche en proche  $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ . Donc pour tout  $A \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ , si  $A(f) = 0$ , alors  $A = 0$ . Donc  $\deg(\mu_f) \geq n$ , donc  $\deg(\mu_f) = n$ . Réciproquement, soit  $v \in E$  tel que  $P_v = \mu_f$  qui existe d'après le point précédent. Soit  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\alpha_0 v + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$ . On forme  $A = \alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ . On a  $A(f)(v) = 0$ , donc  $P_v \mid A$  mais  $P_v$  est de degré  $n$  donc  $A = 0$ . Donc la famille est libre et de cardinal  $n$  : c'est une base. ■

### Solution 22.

1.  $\varphi$  est linéaire, soit  $(s, t) \in S^2$ . On a  $\varphi(s) = t$  si et seulement si  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = t_n$  pour tout  $n \geq 1$  si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & t_1 \\ s_1 + s_2 & = & 2t_2 \\ \vdots & & \\ s_1 + \dots + s_{n-1} & = & (n-1)t_{n-1} \\ s_1 + \dots + s_n & = & nt_n \\ \vdots & & \end{array} \right. \quad (158)$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & t_1 \\ s_2 & = & 2t_2 - t_1 \\ \vdots & & \\ s_n = nt_n - (n-1)t_{n-1} & & \\ \vdots & & \end{array} \right. \quad (159)$$

donc  $\varphi$  est bijective.

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il existe  $s \in S \setminus \{0\}$  tel que  $\varphi(s) = \lambda s$  si et seulement si  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lambda s_n$  pour tout  $n \geq 1$  si et seulement si  $s \in S \setminus \{0\}$  tel que  $s = \lambda \varphi^{-1}(s)$  si et seulement si  $s \in S \setminus \{0\}$  tel que  $s_1 = \lambda s_1$  et pour tout  $n \geq 2$ ,  $s_n = \lambda(ns_n - (n-1)s_{n-1})$  i.e.  $(\lambda n - 1)s_n = \lambda(n-1)s_{n-1}$ .

Si c'est le cas, si  $s_1 \neq 0$ , on a  $\lambda = 1$  et pour tout  $n \geq 2$ ,  $s_n = s_{n-1}$  donc  $s$  est constante.

Sinon, soit  $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N}^* | s_{n_0} \neq 0\}$ . On a  $(\lambda n_0 - 1)s_{n_0} = 0$  donc  $\lambda = \frac{1}{n_0}$  et pour tout  $n > n_0$ , on a  $s_n = \frac{\frac{1}{n_0}(n-1)}{\frac{n}{n_0}-1} s_{n-1} = \frac{n-1}{n-n_0} s_{n-1}$ . Ainsi,

$$s_n = \frac{(n-1)!}{(n_0-1)!(n-n_0)!} s_{n_0} = \binom{n-1}{n_0-1} s_{n_0} \quad (160)$$

Réciproquement, en posant  $s_{n_0} = 1$  et en définissant pour tout  $n > n_0$ ,  $s_n = \binom{n-1}{n_0-1}$  et pour tout  $n \leq n_0 - 1$ ,  $s_n = 0$ , alors on a  $\varphi(s) = \frac{1}{n_0}s$ . Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(\varphi) = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}} \quad (161)$$

et les sous-espaces propres sont de dimension 1. ■

**Remarque 17.** Si on se limite à  $\mathbb{R}^p$ , en définissant

$$\varphi_p(s_1, \dots, s_p) = (s_1, \frac{s_1 + s_2}{2}, \dots, \frac{s_1 + \dots + s_p}{p}),$$

alors en écrivant la matrice de  $\varphi_p$  dans la base canonique, on a

$$\chi_{\varphi_p} = (X - 1)(X - \frac{1}{2}) \dots (X - \frac{1}{p}).$$

**Solution 23.**

1. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . Supposons que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|\lambda - a_{i,i}| > L_i$ .  $\lambda I_n - A$  est une matrice à diagonale strictement dominante donc inversible : absurde. Donc il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda \in D_i$ . Comme  $\lambda \in \text{Sp}(A^\Gamma)$ , il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda \in S_i$ . D'où le résultat.
2. Soit  $X$  non nul (dans  $\mathbb{C}^n$ ) tel que  $AX = \lambda X$ . Soit  $i_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|x_{i_1}| = \|X\|_\infty > 0$ . On a, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$ .  
Soit  $i_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|x_{i_2}| = \max_{i \neq i_1} |x_i|$ .  
Si  $x_{i_2} = 0$ , on a  $\lambda = a_{i_1, i_1}$  et  $|\lambda - a_{i_1, i_1}| = 0$  et  $|\lambda - a_{i_1, i_1}| |\lambda - a_{i_2, i_2}| = 0 \leq L_{i_1} L_{i_2}$ .  
Sinon, on a  $|\lambda - a_{i_1, i_1}| |x_{i_1}| \leq |x_{i_2}| L_{i_1}$  et de même  $|\lambda - a_{i_2, i_2}| |x_{i_2}| \leq |x_{i_1}| L_{i_2}$  d'où le résultat. ■

**Remarque 18.** On peut avoir égalité, par exemple avec la matrice nulle.

**Solution 24.**  $A$  est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_i = 0$  alors  $A = 0$ .

Sinon,  $\text{rg}(A) = 2$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$  canoniquement associée à  $A$ . On a  $\dim(\ker(u)) = n - 1$  et  $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$  sur  $\mathbb{C}$ . On a  $\text{Tr}(A) = \lambda + \mu = 0$  donc  $\mu = -\lambda$  et  $\text{Tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2$  donc

$$\{\lambda, \mu\} = \left\{ \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\} \quad (162)$$

Les deux valeurs propres sont de multiplicité 1 dans  $\chi_A$  : les sous-espaces propres sont de dimension 1.

$A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , semblable à  $\text{diag}(0, \dots, 0, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, -\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2})$ .

On a  $AX = 0$  si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 x_{n+1} & = 0 \\ \vdots & \\ a_n x_{n+1} & = 0 \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n & = 0 \end{cases} \quad (163)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_{n+1} & = 0 \\ x_{i_0} & = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n a_i x_i \end{cases} \quad (164)$$

avec  $i_0$  indice tel que  $a_{i_0} \neq 0$ . Une base de  $\ker(u)$  est donc

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (165)$$

où  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}$ . Le 1 est à la  $i$ -ième ligne,  $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$  est à la ligne  $i_0$ .

On a  $AX = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} X = \alpha X$  si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 x_{n+1} & = \alpha x_1 \\ \vdots & \\ a_n x_{n+1} & = \alpha x_n \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i & = \alpha x_{n+1} \end{cases} \quad (166)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{a_1}{\alpha} x_{n+1} \\ \vdots & \\ x_n &= \frac{a_n}{\alpha} x_{n+1} \end{cases} \quad (167)$$

Une base de  $\ker(u - \alpha id)$  est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\alpha} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (168)$$

De même pour  $-\alpha$ , on vérifie qu'une base de  $\ker(u + \alpha id)$  est

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_1}{\alpha} \\ \vdots \\ -\frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (169)$$

■

**Solution 25.** Pour le sens direct,  $f$  et  $g$  ont les mêmes espaces propres distincts. Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $E_i = \ker(f - \lambda_i id) = \ker(g - \mu_i id)$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  valeurs propres distinctes deux à deux de  $f$  et  $\mu_1, \dots, \mu_r$  pour  $g$ .

On pose

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^r \mu_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \\ P &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{X - \mu_j}{\mu_i - \mu_j} \end{aligned} \quad (170)$$

Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $x \in E_i$ . On a  $Q(f)(x) = Q(\lambda_i)x = \mu_i x = g(x)$ .  $Q(f)$  et  $g$  coïncident sur les vecteurs d'une base, donc ils sont égaux, donc  $Q(f) = g$ . De même,  $f = P(g)$ .

Réciproquement, s'il existe  $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]^2$  tel que  $f = P(g)$  et  $g = Q(f)$ . On prend  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ , soit  $x \in \ker(f - \lambda id)$ . On a  $g(x) = Q(f)(x) = Q(\lambda)x$  donc  $x \in \ker(g - Q(\lambda)id)$ .

On a

$$\ker(f - \lambda id) \subset \ker(g - Q(\lambda)id) \subset \ker(f - P(Q(\lambda))id) \quad (171)$$

Or  $P(Q(\lambda)) = \lambda$  car pour  $x \in \ker(f - \lambda id) \setminus \{0\}$ , on a  $\lambda x = P(Q(\lambda))x$ . Donc  $\ker(f - \lambda id) = \ker(g - Q(\lambda)id)$  donc  $f$  et  $g$  ont les mêmes sous-espaces propres. ■

**Remarque 19.** C'est faux si  $f$  et  $g$  ne sont pas diagonalisables, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (172)$$

$A$  et  $B$  ont les mêmes sous-espaces propres (un seul :  $\text{Vect}(e_1, e_4)$ ). On a  $A^2 = 0$  donc pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ ,

$$P(A) = \alpha I_4 + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq B \quad (173)$$

**Solution 26.** Soit  $m = |G|$ . On a pour tout  $M \in G$ , on a  $M^m = I_2$  donc  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_m$ . Notons que  $G$  étant abélien, toutes les matrices sont co-diagonalisables.

Si  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$ , alors  $M = I_2$ . Si  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1\}$ , alors  $M = -I_2$ . Dans ces deux cas, on a  $\det(M) = 1$  et  $\text{Tr}(M) = \pm 2$ . On note ce cas 1.

Si  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1, 1\}$ ,  $M$  est semblable à  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $M^2 = I_2$ . Dans ce cas, on a  $\det(M) = -1$  et  $\text{Tr}(M) = 0$ . On note ce cas 2.

Notons que l'on a  $\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$  et  $\Delta = (\text{Tr}(M))^2 - 4\det(M)$ . Comme  $\chi_M$  est un polynôme réel, si  $\delta < 0$ , on écrit  $\chi_M(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ . Comme  $\text{Tr}(M) = 2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$ , on a  $\theta \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$ .

Si  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ,  $M$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad (174)$$

et  $M^3 = I_2$ . On a  $\det(M) = 1$  et  $\text{Tr}(M) = -1$ . On note ce cas 3.

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $M$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \quad (175)$$

et  $M^4 = I_2$ . On a  $\det(M) = 1$  et  $\text{Tr}(M) = 0$ . On note ce cas 4.

Si  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $M$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad (176)$$

et  $M^6 = I_2$ . On a  $\det(M) = 1$  et  $\text{Tr}(M) = 1$ . On note ce cas 5.

Par ailleurs, il existe  $P \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que pour tout  $M \in G$ ,  $P^{-1}MP = I_2$ .

S'il existe  $M \in G$  du type 2, alors les types 3 et 5 sont exclus car on obtiendrait par produit  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\theta} \end{pmatrix}$  avec  $\text{Tr}(M) = 0$  car  $\chi_m$  est un polynôme réel, et  $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$ , ce qui n'est pas.

Ainsi,

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\} \quad (177)$$

Ainsi,

$$G = \begin{cases} \{I_2\} & B \text{ matrice de type 2} \\ \{-I_2, I_2\} & A \text{ matrice de type 4} \\ \{I_2, B\} & A, B \text{ matrices de type 4, 2} \\ \{I_2, A, A^2, A^3\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & B \text{ matrice de type 2} \\ \{I_2, A, B, A^2, A^3, -B\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \\ \{I_2, B, -B, -I_2\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \end{cases} \quad (178)$$

S'il n'y a pas de matrice de type 2, on a

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j^2 & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \right\} \quad (179)$$

On ne peut pas avoir une matrice de type 3 ou 5 car  $\pm ij$  et  $\pm ij^2$  ne sont pas des valeurs propres possibles. Donc

$$G = \begin{cases} \{I_2, C, C^2\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & C \text{ matrice de type 3} \\ \{I_2, D, D^2, D^3, D^4, D^5\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & D \text{ matrice de type 5} \end{cases} \quad (180)$$

Notons que dans le deuxième cas,  $D^2$  est de type 3.

On a donc bien  $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ . ■

**Solution 27.** Si  $u$  est diagonalisable, la famille des vecteurs propres est génératrice. En prenant un sous-espace de  $E$  de base  $\mathcal{B}$ , on complète avec des vecteurs propres, ce qui forme un sous-espace stable par  $u$ .

Réciproquement, soit

$$F = \bigotimes_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda id) \quad (181)$$

stable par  $u$ .  $F$  admet un supplémentaire stable qu'on nommera  $G$ . Si  $G \neq \{0\}$ ,  $u|_G$  admet nécessairement un vecteur propre, or les vecteurs propres sont dans  $F \setminus \{0\}$ ; absurde. Donc  $G = \{0\}$  et  $E = F$  donc  $u$  est diagonalisable. ■

**Solution 28.** Plus généralement, soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{k,l}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . On définit

$$M = B \otimes A = \begin{pmatrix} b_{1,1}A & \dots & b_{1,p}A \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1}A & \dots & b_{p,p}A \end{pmatrix} \quad (182)$$

Si  $B$  est diagonalisable, il existe  $Q \in GL_p(\mathbb{K})$  tel que  $Q^{-1}BQ = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ . On note  $Q = (q_{i,j})$  et  $Q^{-1} = (q'_{i,j})$ . Par produits par blocs, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q'_{1,1}I_n & \dots & q'_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q'_{p,1}I_n & \dots & q'_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{=Q^{-1} \otimes I_n = (Q \otimes I_n)^{-1}} M \underbrace{\begin{pmatrix} q_{1,1}I_n & \dots & q_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p,1}I_n & \dots & q_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{Q \otimes I_n} = \text{diag}(\mu_1 A, \dots, \mu_p A) = M_1 \quad (183)$$



Si de plus  $A$  est diagonalisable, il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  tel que  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  
Alors

$$\text{diag}(P^{-1}, \dots, P^{-1})M_1 \text{diag}(P, \dots, P) = \text{diag}(\mu_1, \lambda_1, \dots, \mu_1, \lambda_n, \dots, \mu_p \lambda_1, \dots, \mu_p \lambda_n) \quad (184)$$

Donc  $B \otimes A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(B \otimes A) = \{\lambda_i \mu_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$ . ■

**Remarque 20.** On a  $\text{Tr}(B \otimes A) = \text{Tr}(B) \times \text{Tr}(A)$  et  $\det(B \otimes A) = \det(B)^n \det(A)^p$ .

**Remarque 21.** Si  $B$  est diagonalisable et non nulle, si  $B \otimes A$  est diagonalisable, il existe  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $\mu_i \neq 0$  et  $\mu_i A$  est diagonalisable (restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable) donc  $A$  est diagonalisable.

### Solution 29.

1. On note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  et  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  canoniquement associé à  $A$ .

Si  $n = 2m$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ , on pose pour  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $F_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_{n-k+1})$ .  
On a  $u(e_k) = x_k e_{n-k+1}$  et  $u(e_{n-k+1}) = x_{n-k+1} e_k$  donc  $F_k$  est stable par  $u$ . Ainsi,  
 $\text{mat}_{(e_k, e_{n-k+1})}(u|_{F_k}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{n-k+1} \\ x_k & 0 \end{pmatrix}$ .

Étudions, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $\chi_M = X^2 - ab$ .

Si  $ab \neq 0$ , on note  $\lambda$  une racine carrée de  $ab$  sur  $\mathbb{C}$ . On a  $\chi_M(X - \lambda)(X + \lambda)$  qui est scindé à racines simples donc  $M$  est diagonalisable et semblable à  $\text{diag}(\lambda, -\lambda)$ .

Si  $ab = 0$  : si  $a = b = 0$  alors  $M = 0$ . Si  $a$  ou  $b \neq 0$ , alors  $M$  n'est pas diagonalisable puisque si elle l'était, comme sa seule valeur propre est 0, elle serait semblable donc égale à 0 ce qui n'est pas. Donc  $A$  est diagonalisable si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $x_k$  et  $x_{n-k+1}$  non nuls ou  $x_k = 0 = x_{n-k+1}$ .

Si  $n = 2m + 1$ , on fait le même raisonnement avec  $u(e_m) = x_m e_m$ .

2.  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $(u|_{F_k}^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge.

Soit  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Si  $x_k x_{n+1-k} \neq 0$ , soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda^2 = x_k x_{n+1-k}$ . Dans une base de vecteurs propres  $\mathcal{B}$ , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u|_{F_k}^p) = \begin{pmatrix} \lambda^p & 0 \\ 0 & (-\lambda)^p \end{pmatrix} \quad (185)$$

Cela converge si et seulement si  $|\lambda| < 1$  si et seulement si  $|x_k x_{n+1-k}| < 1$ .

Si  $x_k = x_{n+1-k} = 0$ , alors pour tout  $p \geq 2$ ,  $u|_{F_k}^p = 0$  donc on a convergence. ■

### Solution 30.

1. On a

$$\text{mat}_{(1,X,\dots,X^n)}(\varphi) = \text{diag}(-n, 1-n, \dots, 0) \quad (186)$$

donc les valeurs propres sont  $(k-n)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ . On a  $n+1$  valeurs propres distinctes donc  $\varphi$  est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les vecteurs propres sont les  $(X^k)$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

2. Si  $\varphi(P) = kP$ , alors  $\deg(P) = k$ . Si  $P = \sum_{i=0}^k a_i X^i$  donc

$$XP' - nP'' - kP = 0 = \sum_{i=0}^{k-2} (ia_i - n(i+1)(i+2) - ka_i) X^i - a_{k-1} X^{k-1} \quad (187)$$

Ainsi, par récurrence, pour tout  $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor\}$ ,  $a_{k-(2p+1)} = 0$  et pour tout  $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ ,

$$a_{k-2p} = \frac{n^p(k-2p+1) \dots (k-1)k}{(-2p) \dots (-4)(-2)} a_k = \frac{n^p(-1)^p}{2^p p!} \times \frac{k!}{(k-2p)!} a_k \quad (188)$$

donc les vecteurs propres correspondent aux polynômes ayant ces coefficients. ■

### Solution 31.

1. On a

$$A = aI_3 + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_C + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_B \quad (189)$$

avec  $B = C^2$  et  $C$  est la matrice compagnon du polynôme  $X^3 - 1$ , donc  $\chi_C = X^3 - 1$ . Ainsi,  $C$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \{1, j, j^2\}$ . On a

$$\begin{aligned} C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} &= j \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} &= j^2 \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (190)$$

donc si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \quad (191)$$

alors on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a + bj^2 + cj & 0 \\ 0 & 0 & a + bj + cj^2 \end{pmatrix} \quad (192)$$

et

$$\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, a + cj + bj^2, a + bj + cj^2\}} \quad (193)$$

2. On a

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a + bj^2 + cj)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a + bj + cj^2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad (194)$$

Tout d'abord, on a  $|a + cj + bj^2| \leq |a| + |b| + |c| = 1$  et on a égalité si et seulement si  $a, cj$  et  $bj^2$  ont le même argument si et seulement si

$$\{a, b, c\} \in \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}.$$

Si  $a = 1$  et  $b = c = 0$ , la suite  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Si  $(b = 1 \text{ et } a = c = 0)$  ou  $(c = 1 \text{ et } a = b = 0)$ ,  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge. Sinon,

$$\boxed{A^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}} \quad (195)$$

■

### Solution 32.

1. On vérifie en calculant les premiers termes puis par récurrence que

$$\boxed{A^k = \begin{pmatrix} B^k & \sum_{i=1}^k B^{i-1}CD^{k-i} \\ 0 & D^k \end{pmatrix}} \quad (196)$$

2. On a

$$\mu_A(A) = 0 = \begin{pmatrix} \mu_A(B) & \star \\ 0 & \mu_A(D) \end{pmatrix} \quad (197)$$

donc  $\mu_A(B) = \mu_A(D) = 0$ . Ainsi,  $\mu_B \mid \mu_A$  et  $\mu_D \mid \mu_A$  donc  $\mu_B \vee \mu_D \mid \mu_A$ .

Si  $B$  et  $D$  sont de tailles 1,  $\chi_A(X) = (X - b)(X - d)$  d'où  $\mu_B = X - b$  et  $\mu_D = X - d$ .

Si  $b \neq d$ ,  $X - b$  et  $X - d$  divise  $\mu_A$  donc  $\mu_A \mid \chi_A$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Si  $b = d$ , si  $c = 0$  on a  $\mu_A = X - b$  donc  $\mu_A \mid \mu_B \mu_D = (X - b)^2$ . Si  $c \neq 0$ ,  $\mu_A = X - b$  ou  $\mu_A = (X - b)^2$  et  $A - bI_n \neq 0$  donc  $\mu_A = (X - b)^2$ .

3. Si  $C = 0$ , on a  $\mu_A = \mu_B \vee \mu_D$ .
4. Si  $B = D$  et  $C = I_{n_1}$ , on a  $A^0 = I_{n_1+n_2}$  et pour  $k \geq 1$ ,

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & kB^{k-1} \\ 0 & B^k \end{pmatrix} \quad (198)$$

Ainsi

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(B) & P'(B) \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = 0 \quad (199)$$

si et seulement si  $P(B) = P'(B) = 0$  donc  $\mu_B \mid P$  et  $\mu_B \mid P'$  donc  $\mu_B \mid P \vee P'$ .

On a

$$\mu_B^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_B\mu'_B(B) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (200)$$

donc  $\mu_A \mid \mu_B^2$ .

On décompose  $\mu_B = (X - \lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \lambda_r)^{m_r}$ . On a  $P(A) = 0$  si et seulement si pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\lambda_i$  est racine de  $P$  d'ordre plus grand que  $m_i + 1$ .

5. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (201)$$

On a

$$B = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (202)$$

$\mu_B = \mu_D = X^2$ , et  $\mu_A \mid X^3$ . Or  $u^2(e_4) \neq 0$  donc  $\mu_A = X^3 \neq X^2 = \mu_B \vee \mu_D \neq X^4 = \mu_B \mu_D$ .

■

**Solution 33.** On décompose sur  $\mathbb{C}$  :  $P(X) - \lambda = \alpha \prod_{i=1}^m (X - \mu_i)$  avec  $\alpha \neq 0$ . On a

$$\underbrace{g - \lambda id}_{\substack{\text{non inversible} \\ \text{(respectivement non injectif)}}} = \alpha \prod_{i=1}^m (f - \mu_i id) \quad (203)$$

donc il existe  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $f - \mu_i id$  est non inversible (respectivement non injectif), d'où le résultat. ■

**Solution 34.**

1. Soit  $(f_1, \dots, f_r)$  une base de  $V$  et  $x \in E \setminus \{0\}$ . Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$  tels que  $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_r f_r(x) = 0$ . Or  $V$  est un sous-espace, donc  $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r \in V$  et  $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r \notin GL(E)$  car  $x \neq 0$ . D'où  $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r = 0$  et donc  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$  car  $(f_1, \dots, f_r)$  est une base de  $V$ .

Ainsi  $(f_1(x), \dots, f_r(x))$  est libre donc  $r = \dim(V) \leq \dim(E)$ .

2. Si  $\dim(V) = 1$ , alors  $V = \mathbb{C}f$  avec  $f \in GL(E)$ . Si  $\dim(V) \geq 2$ , soient  $(f, g) \in V^2$  tels que  $(f, g)$  soit libre alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $f + \alpha g \neq 0$  et  $f + \alpha g \in V \setminus \{0\}$ . Or  $f + \alpha g = g(g^{-1} \circ f + \alpha \text{id})$ . Pour  $\alpha \in \text{Sp}(-g^{-1} \circ f)$  (existe car on est dans  $\mathbb{C}$ ), on obtient une contradiction. Donc de même,  $V = \mathbb{C}f$  avec  $f \in GL(E)$ .
3. Comme  $\dim(E) = 2$ , on a  $\dim(V) \leq 2$ . Si  $\dim(V) = 1$ , comme précédemment, on a  $V = \mathbb{R}f$  avec  $f \in GL(E)$ . Si  $\dim(V) = 2$ , soit  $(f, g)$  une base de  $V$ . D'après ce qui précède, on a  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(g^{-1} \circ f) = \emptyset$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $B = \text{mat}_{\mathcal{B}}(g)$ . On écrit  $\chi_{A^{-1}B} = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$  avec  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\beta > 0$ .  $A^{-1}B$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et semblable à  $\text{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$  et  $\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}$  est semblable sur  $\mathbb{C}$  à  $\text{diag}(i, -i)$  semblable sur  $\mathbb{R}$  à  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}$  est semblable sur  $\mathbb{R}$  à  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Il existe  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  tel que

$$A^{-1}B = P \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \quad (204)$$

Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\lambda A + \mu B = A(\lambda I_2 + \mu A^{-1}B) = \underbrace{AP}_{\in GL_2(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} \lambda + \alpha\mu & -\beta \\ \beta & \lambda + \alpha\mu \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1}}_{\in GL_2(\mathbb{R})} \quad (205)$$

avec  $\beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ .

4. Avec les notations précédentes, si  $(A, B) \in V^2$  est libre, on a

$$i \in \text{Sp}\left(\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}\right) = \text{Sp}((BA)^{-1}(B - \alpha A)) \quad (206)$$

et on pose  $A' = \beta A \in V$  et  $B' = B - \alpha A \in V$ .

■

### Solution 35.

1. En notant  $c_{i,j}$  les cofacteurs d'indice  $(j, i)$ , on a

$$[\text{com}(\lambda I_n - A)^T]_{i,j} = (-1)^{i+j} c_{j,i}(\lambda - I_n) \quad (207)$$

En développant, on obtient des polynômes en  $\lambda$  de degré plus petit que  $n - 1$ . En regroupant selon les puissances de  $\lambda$ , on a

$$\boxed{\text{com}(\lambda I_n - A)^T = M_0 + M_1 \lambda + \cdots + \lambda^{n-1} M_{n-1}} \quad (208)$$

2. On a  $(\lambda I_n - A) \text{com}(\lambda I_n - A)^\top = \det(\lambda I_n - A) I_n = \chi_A(\lambda) I_n$

En identifiant les coefficients, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} M_{n-1} & = & I_n \\ M_{n-2} & = & A + a_{n-1} I_n \\ M_{n-3} & = & A^2 + a_{n-1} A + a_{n-2} I_n \\ \vdots & & \\ M_{n-k} & = & A^{k-1} + a_{n-1} A^{k-2} + \dots + a_{n-k+1} I_n \\ \vdots & & \\ M_0 & = & A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I_n \end{array} \right. \quad (209)$$

et  $-AM_0 = a_0 I_n$ . En reportant, on a bien  $\chi_A(A) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  : on a une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

3. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On forme  $\lambda I_n - A = (c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda))$  avec

$$c_j(\lambda) = \begin{pmatrix} -a_{1,j} \\ \dots \\ -a_{j-1,j} \\ \lambda - a_{j,j} \\ -a_{j+1,j} \\ \dots \\ -a_{n,j} \end{pmatrix} \quad (210)$$

On a  $\chi_A(\lambda) = \det(c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda))$ .  $\det$  étant une forme  $n$ -linéaire, on a

$$\chi'_A(\lambda) = \sum_{k=1}^n \det(c_1(\lambda), \dots, c_{k-1}(\lambda), c'_k(\lambda), c_{k+1}(\lambda), \dots, c_n(\lambda)) \quad (211)$$

En développant le terme  $k$  par rapport à la  $k$ -ième colonne, on trouve qu'il vaut  $_{k,k}(\lambda I_n - A)$ . Ainsi,

$$\boxed{\chi'_A(\lambda) = \text{Tr}(\text{com}(\lambda I_n - A)^\top)} \quad (212)$$

4. On a donc  $a_1 + 2a_2\lambda + \dots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + n\lambda^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \text{Tr}(M_k)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  (par linéarité de  $\text{Tr}$ ). Donc pour tout  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,  $\text{Tr}(M_k), \text{Tr}(M_k) = (k+1)a_{k+1}$  (et  $\text{Tr}(M_{n-1}) = \text{Tr}(I_n) = n$ ). On a  $\text{Tr}(M_{n-2}) = (n-1)a_{n-1} = \text{Tr}(A) + na_{n-1}$  donc  $a_{n-1} = \text{Tr}(A)$ . Puis  $\text{Tr}(M_{n-3}) = (n-2)a_{n-2} = \text{Tr}(A^2) + a_{n-1} \text{Tr}(A) + a_{n-2}n$  donc  $a_{n-2} = -\frac{\text{Tr}(A^2)}{2} + \frac{\text{Tr}(A)^2}{2}$ . De proche en proche, on a  $a_{n-k} = f_k(\text{Tr}(A), \dots, \text{Tr}(A^k))$  avec  $f_k$  indépendante de  $A$ .
5. D'après ce qui précède, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $a_k = b_k$  car  $f$  est indépendante de  $A$ . Donc  $\chi_A = \chi_B$ .

■

**Remarque 22.** Si  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^n) = 0$ , alors  $\chi_A = \chi_0 = X^n$  et  $A$  est nilpotente. On peut le vérifier à la main sur  $\mathbb{C}$  : si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  sont les valeurs propres non nulles distinctes de  $A$  et  $m_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$  dans  $\chi_A$ , alors on a le système

$$\begin{cases} \text{Tr}(A) &= m_1\lambda_1 + \dots + m_r\lambda_r &= 0 \\ \text{Tr}(A^2) &= m_1\lambda_1^2 + \dots + m_r\lambda_r^2 &= 0 \\ \vdots & & \\ \text{Tr}(A^r) &= m_1\lambda_1^r + \dots + m_r\lambda_r^r &= 0 \end{cases} \quad (213)$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0 \quad (214)$$

et la matrice est inversible car les  $\lambda_i$  sont distincts non nuls. Donc  $m_1 = \dots = m_r = 0$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$  et  $\chi_A = X^n$ .

**Solution 36.** On définit, pour  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ,  $\bar{A} = (\overline{a_{i,j}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ . Comme  $p$  est premier,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps. On a  $\chi_A \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$  donc il existe  $\mathbb{L}$  un sur-corps de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  où  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{L}$ . On écrit  $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{L}$ . On peut trigonaliser  $\bar{A}$  sur  $\mathbb{L}$  et on a  $\text{Tr}(\bar{A}^p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p$ . Or la caractéristique de  $\mathbb{L}$  vaut  $p$  donc on a  $(x + y)^p = x^p + y^p$  (binôme de Newton et utiliser le fait que  $p \mid \binom{p}{k}$  pour  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ). Ainsi,

$$\text{Tr}(\bar{A}^p) = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^p = \text{Tr}(\bar{A})^p \quad (215)$$

et on peut appliquer le petit théorème de Fermat : on a bien  $\text{Tr}(\bar{A}^p) = \text{Tr}(\bar{A})$  et en remontant dans  $\mathbb{Z}$ ,

$\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A)[p]$

(216)

■

**Solution 37.** Si on a (i), soit  $x$  un vecteur propre associé à  $\rho(u) = \rho e^{i\theta}$ . On a  $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$  et comme  $x \neq 0$ , on a  $\rho(u) \leq \|\rho(u)\| < 1$  d'où (ii).

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford  $u = n + d$  avec  $n$  nilpotent,  $d$  diagonalisable et  $dn = nd$ . Soit  $m = \dim(E)$ . Pour tout  $p \geq m$ , on a

$$u^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0} \quad (217)$$

En effet, on a  $k \geq m-1$  fixé, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que

$$\binom{p}{k} \text{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \quad (218)$$

car  $|\lambda_i| < 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et

$$\binom{p}{k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{\rho(u)^p} \right) \quad (219)$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $u^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$  donc en particulier,  $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc  $\rho(u)^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $\rho(u) \geq 0$  donc  $\rho(u) < 1$ . Posons encore  $u = d + n$  la décomposition de Dunford de  $u$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$  dans laquelle les coefficients de  $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$  sont en module  $\leq \varepsilon$ . Définissons sur  $E$

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i e_i \right\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \quad (220)$$

Soit  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$  triangulaire supérieure avec  $m_{ii} = \lambda_i$  et pour tout  $j \neq i$ ,  $|m_{i,j}| < \varepsilon$ . Soit donc  $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathbb{C}^m$ , on a

$$\|Mx\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^m m_{i,j} x_j \right|}_{(|\lambda_i| + (m-1)\varepsilon)\|x\|_{\infty}} \quad (221)$$

donc

$$\|u\| \leq \underbrace{\rho(u)}_{<1} + (m-1)\varepsilon \quad (222)$$

et on choisit

$$\varepsilon < \underbrace{\frac{1 - \rho(u)}{m-1}}_{>0} \quad (223)$$

d'où  $\|u\| < 1$  et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence. ■

**Remarque 23.**  $u \mapsto \rho(u)$  n'est pas une norme car pour  $u$  nilpotente non nulle,  $\rho(u) = 0$ .

**Solution 38.** Supposons (i), soit  $Y$  un vecteur propre de  $A$  avec  $AY = \lambda Y$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $BA^k Y = \lambda^k BY$  et il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda^{k_0} BY \neq 0$  et  $BY \neq 0$  donc on a (ii).

Si (ii), supposons qu'il existe  $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tel que  $\varphi = 0$ . On note

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \quad (224)$$

avec les  $\lambda_i$  distincts. Alors  $Y = \sum_{i=1}^r Y_i$  où  $Y_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)$ . Il existe  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $Y_{i_0} \neq 0$  car  $Y \neq 0$ . On a alors, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$B \exp(tA)Y = \sum_{i=1}^r B \exp(t\lambda_i)Y_i = 0 \quad (225)$$



Pour tout  $k \in \{0, \dots, r-1\}$ , on a  $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^r B\lambda_i^k \exp(t\lambda_i)Y_i = 0$ . Pour  $t = 0$  on a  $\sum_{i=1}^r \lambda_i^k BY_i = 0$  ce qui, pour  $t = 0$ , donne le système

$$\begin{cases} BY_1 + \dots + BY_r & = 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \dots + \lambda_r BY_r & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} BY_1 + \dots + \lambda_r^{r-1} BY_r & = 0 \end{cases} \quad (226)$$

Pour tout  $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$ , on a donc  $\sum_{i=1}^r P(\lambda_i)BY_i = 0$ . Pour  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  et  $P = \prod_{i \neq j} \frac{(X-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$ , on obtient pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $BY_i = 0$ . En particulier,  $BY_{i_0} = 0$  et  $Y_{i_0}$  est un vecteur propre de  $A$  car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).

Soit  $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , supposons que pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $BA^k Y = 0$ . Soit  $k \geq n$ , il existe  $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$  tel que

$$X^k = Q_k \chi_A + R_k \quad (227)$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc  $A^k = R_k(A)$  d'où  $BA^k Y = BR_k(A)Y = 0$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$B \exp(tA)Y = B \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} Y \quad (228)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (BA^k Y)}{k!} \quad (229)$$

$$= 0 \quad (230)$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence. ■

**Solution 39.** Noter d'abord que le résultat ne dépend pas de la norme (équivalente). Si  $A = \lambda I_n$  on vérifie que  $\|A^p\|^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} |\lambda|$ . On choisit  $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$  et on vérifie que si  $A$  est diagonalisable avec  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$  ses valeurs propres (complexes), alors le résultat est  $|\lambda_2|$ . Si  $A$  est juste trigonalisable (son spectre contient juste  $\lambda \in \mathbb{C}$ ), on écrit  $A$  comme somme d'une matrice scalaire et d'une matrice nilpotente, et on calcule explicitement  $\|A^p\|$ . Le résultat est alors  $|\lambda|$ , et de manière générale, il s'agit du rayon spectral. En dimension quelconque, on utilise la décomposition de Dunford. ■

**Solution 40.**

1.  $M$  est la matrice compagnon de  $P$ , donc  $\chi_M = P$ . Si  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ ,  $\text{rg}(M - \lambda I_n) = n - 1$  car les  $n - 1$  premières lignes sont indépendantes. Ainsi,  $\dim(E_\lambda) = 1$ . Pour la condition nécessaire et suffisante,  $M$  est diagonalisable et si et seulement si  $P$  est scindé à racines simples.

2. On pose  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$  et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale est alors  $Y(t) = e^{tA}Y_0$ .  $\chi_A = (X - 1)^2(X + 1)$ , donc  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  mais trigonalisable. On trigonalise, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et on a  $P^{-1}AP = A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On peut alors calculer  $\exp(tA_1)$ .

■

#### Solution 41.

1. On utilise le fait que  $\mathcal{B}$  est une base.
2. On calcule le polynôme caractéristique qui vaut  $P$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base,  $P$  est nécessairement le polynôme minimal de  $f$ . Comme  $X^n - 1$  annule  $f$ ,  $P \mid X^n - 1$ . Comme  $X^n - 1$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ ,  $f$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , et les valeurs propres réelles de  $f$  sont dans  $\{-1, 1\}$ . Le polynôme minimal de  $f$  est de degré 3, donc il n'est pas scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $f$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  donc  $f$  est inversible. Comme  $\chi_f = P = X^3 - cX^2 - bX - a$ ,  $\det(f) = a \neq 0$  donc  $f^{-1} = \frac{1}{a}(f^2 - cf - b\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ .
4.  $\deg(\chi_f) = 3$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que  $\chi_f(\lambda) = 0$ . S'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  avec  $\mu \neq \lambda$  tel que  $\chi_f(\mu) = 0$ , alors la troisième racine est réelle (car si elle était complexe, on aurait également son conjugué). Mais Le spectre de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est contenu dans  $\{-1, 1\}$ , c'est absurde. Donc  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{\lambda\}$ .
5. Les racines de  $\chi_f$  sur  $\mathbb{C}$  sont  $\{\lambda, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$  avec  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $e^{i\theta} \in \mathbb{U}_n$  (racine de  $X^n - 1$ ). Donc  $\det(f) = \lambda > 0$  (respectivement  $< 0$ ). Donc  $\lambda = 1$  (respectivement  $-1$ ). Si  $\det(f) > 0$ , on a

$$\chi_f = (X - 1)(X^2 - 2\cos\theta X + 1) = X^3 - cX^2 - bX - a,$$

d'où  $a = 1$ ,  $b = -(1 + 2\cos\theta)$ ,  $c = (1 + 2\cos\theta)$ .

■

**Remarque 24.** Pour  $n \geq 3$ ,  $r = \begin{pmatrix} 1 \\ R_{\frac{2\pi}{n}} \end{pmatrix}$  vérifie l'hypothèse.

**Solution 42.**

1.  $J$  est symétrique réelle donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.  $\text{rg}(J) = 1$  donc  $\dim(\ker(J)) = n - 1$ . Ainsi, 0 est valeurs propre d'ordre  $n - 1$ , puis  $\text{Tr}(J) = n$  donc  $\text{Sp}_R(J) = \{0, n\}$ . On a  $\ker(J - nI_n) = \text{Vect}(1, \dots, 1)^\top$ .

2.  $MJ = dJ = JM$  et  $M^2 = M + dI_n$ . Comme  $\text{Im}J = \text{Vect}(1, \dots, 1)^\top$  et  $M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , on a  $\text{Im}J \subset \ker(M - dI_n)$ . Alors  $\ker(M - dI_n) \neq 0$  et  $d \in \text{Sp}(M)$ .  $X^2 - x - d$  annule  $M$  donc  $d^2 = 2d$ . Ainsi,  $d = 0$  ou  $d = 2$ .

■

**Solution 43.** Si  $r = n$ ,  $C$  est inversible et  $A$  et  $B$  sont semblable donc  $\chi_A = \chi_B$ . Si  $C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := J_r$ , notons  $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ . Alors  $CA = BC$  implique  $A_1 = B_1$  et  $A_2 = 0 = B_3$ , donc  $\chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_4}$  et  $\chi_B = \chi_{A_1}\chi_{B_4}$ . Comme  $\deg \chi_{A_1} = r$ ,  $A$  et  $B$  ont bien  $r$  valeurs propres communes au moins. Si  $C$  est quelconque de rang  $r$ , alors  $C$  est équivalente à  $J_r$  et on se ramène au cas précédent.

■

**Remarque 25.** Si  $C \neq 0$ , on a  $r \geq 1$  et  $A, B$  ont au moins une valeur propre commune. On peut le montrer directement, car par récurrence on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $CA^k = B^kC$  d'où  $CP(A) = P(B)C$  pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Notamment pour  $P = \chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ , alors

$$(B - \lambda_1 I_n) \dots (B - \lambda_n I_n)C = 0,$$

et  $C \neq 0$  donc il existe  $\lambda_j \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$  tel que  $B - \lambda_j I_n$  est non inversible. Donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) \neq \emptyset$ . Réciproquement, on prend  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ , il existe alors  $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$  tel que  $A^\top Y = \lambda Y$  et  $BX = \lambda X$ . Alors si  $C = XY^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ , on a  $CA = BC$ .