*Exercices MP/MP**

Calcul matriciel

Exercice 1. *Soit* $M = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ *où* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. *Montrer que* $M \in GL_n(\mathbb{C})$ *et calculer* M^{-1}. *Que vaut* $\det(M)$ *?*

Exercice 2. *On dit que* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *est positive et on note* $A \geqslant 0$ *si et seulement si tous ses coefficients le sont.*

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $A \geqslant 0$ *si et seulement si pour tout* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *si* $X \geqslant 0$ *alors* $AX \geqslant 0$.
2. *Quelles sont les matrices* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *telles que* $A \geqslant 0$ *et* $A^{-1} \geqslant 0$ *?*

Exercice 3. *Soit* $A = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *Calculer* A^{-1} *et* A^k *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique non nulle* ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$). *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

1. *Montrer que* A *est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra procéder par récurrence, en distinguant selon qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n$ *ou non. Dans le deuxième cas, pour* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ *canoniquement associée à* A, *on montrera qu'il existe* $e_1 \in \mathbb{K}^n$ *telle que* $(e_1, u(e_1))$ *est libre.*
2. *Montrer qu'il existe* $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *tel que* $A = [X, Y] = XY - YX$. *On pourra considérer*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & DM - MD \end{array} \tag{1}$$

avec $D = \mathrm{diag}(1, 2, \dots, n)$ *et déterminer* $\ker(\varphi)$.

Exercice 5. *Soit* $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$.

1. *Pour quelles valeurs de* λ, $I_n + \lambda XY^\mathsf{T}$ *est inversible ?*
2. *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{R})$. *A quelle condition nécessaire et suffisante* $A + \lambda XY^\mathsf{T} \in GL_n(\mathbb{R})$ *? Montrer alors que*

$$(A + \lambda XY^\mathsf{T})^{-1} = A^{-1} - \frac{\lambda}{1 + \lambda Y^\mathsf{T} A^{-1} X} A^{-1} X Y^\mathsf{T} A^{-1}$$

Exercice 6. *Soit* $n \geqslant 1$ *et pour tout* $j \in \{0, \dots, n\}$, $S_j = X^j(1-X)^{n-j}$. *Montrer que c'est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$ *et exprimer* $(1, X, \dots, X^n)$ *en fonction de* $(S_0, \dots, S_n)$.

Exercice 7. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps et* H *un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer que* $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq 0$ *pour* $n \geqslant 2$.

Exercice 8. *Soit* $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$ *telle que :*

(i) $\forall \lambda \geqslant 0, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ N(\lambda A) = \lambda N(A)$,

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$,

(iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ N(AB) = N(BA)$.

1. *Calculer* $N(0)$.
2. *Évaluer* $N(E_{i,j})$ *pour* $i \neq j$ *(matrice élémentaire de la base canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*).*
3. *Montrer que si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est telle que* $\mathrm{Tr}(A) = 0$*, alors* A *est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra procéder par récurrence, en distinguant selon qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n$ *ou non. Dans le deuxième cas, pour* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ *canoniquement associée à* A*, on montrera qu'il existe* $e_1 \in \mathbb{K}^n$ *telle que* $(e_1, u(e_1))$ *est libre.*
4. *En déduire* $N(A)$ *si* $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
5. *Montrer qu'il existe* $a \in \mathbb{R}^+$ *telle que pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*,* $N(A) = a|\mathrm{Tr}(A)|$.

Exercice 9. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n*,* $f \in GL(E)$ *et* g *un endomorphisme de* E *de rang 1. Montrer que* $f + g \in GL(E)$ *si et seulement* $\mathrm{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq 1$.

Exercice 10. *On considère un carré dans* $\mathbb{Z}^2$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, quel est le nombre de chemins de longueur* n *qui relient un sommet à un autre ? Généraliser à un cube dans* $\mathbb{Z}^3$.

Exercice 11 (Matrice à diagonale strictement dominante)**.** *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$*. On dit que* A *est à diagonale strictement dominante. Montrer que* $A \in GL_n(\mathbb{C})$*. Est-ce encore vrai si on a seulement l'inégalité large ?*

Exercice 12. *Calculer, pour* $n \geqslant 1$*,* $\det\Big((i \wedge j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$*. On pourra utiliser, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{k|n} \varphi(k)$.

Exercice 13. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. On pose, pour* $k \in \{1, \dots, n\}$*,*$A_k = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$*. On suppose que pour tout* $k \in \{1, \dots, n\},\ A_k \in GL_k(\mathbb{C})$*. Montrer qu'il existe une unique décomposition* $(L, U) \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{C}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ *(matrices triangulaires inférieures et supérieures) où* L *a des* 1 *sur la diagonale et* $A = LU$.

Exercice 14. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a_1, \dots, a_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ *tel que pour tout* $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$, *il existe des parties disjointes* A_i *et* B_i *de* $\{1, \dots, 2n+1\} \setminus \{i\}$ *avec* $|A_i| = |B_i| = n$ *et* $\sum_{k \in A_i} a_k = \sum_{k \in B_i} a_k$.

Monter que $a_1 = \cdots = a_{2n+1}$.

Exercice 15. *Soit* $M \in GL_n(\mathbb{C})$, *montrer qu'il existe une unique permutation* $\sigma \in \Sigma_n$ *et il existe* $(T, T') \in (\mathcal{T}_n^+)^2$ *telles que* $M = TP_\sigma T'$ *où* $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *et* δ *est le symbole de Kronecker. Cette décomposition est-elle unique ?*

Exercice 16. *Soit* $\mathbb{K}$ *un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *et* J *un idéal non nul de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Montrer que si* $J \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, *alors* $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. *Montrer que* J *contient une matrice de rang 1.*
3. *Montrer que* $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 17. *Soit* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\lambda \neq 0$ *avec* $\lambda AB + A + B = 0$, *montrer que* A *et* B *commutent.*

Exercice 18. *Soit* $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. *Inverser, si possible,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,i} = 0$ *et pour tout* $i \neq j$, $a_{i,j} + a_{j,i} = 1$. *Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *canoniquement associé à* A. *Soit* $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

1. *Déterminer* $\ker(u) \cap H$. *En déduire que* $\operatorname{rg}(A) \in \{n-1, n\}$.
2. *Est-il possible que toutes les matrices* A *vérifiant ces conditions soient de rang* $n-1$ *?*
3. *Même question avec* n.

Exercice 20. *Soit* $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ *tel que* $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(N) = 1$. *Montrer que* M *et* N *sont semblables si et seulement si* $\operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(N)$.

Exercice 21. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on note* $r = \max\{\operatorname{rg}(M) \mid M \in F\}$.

1. *Montrer qu'il existe* $(P_0, Q_0) \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$P_0^{-1} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{array}\right)}_{J_r} Q_0 \in F$$

On note $F_0 = \{P_0 M Q_0^{-1} \mid M \in F\}$.

2. *Montrer que* F_0 *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *isomorphe à* F, *et que* $r = \max\{\mathrm{rg}(M_0) \mid M_0 \in F_0\}$.

3. *On définit*

$$G_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & B^\intercal \\ \hline B & C \end{array}\right)$$

où $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. *Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par* G_0 *?*

4. *Soit* $M_0 \in G_0 \cap F_0$ *avec*

$$M_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & B^\intercal \\ \hline B & C \end{array}\right) \in F_0$$

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B^\intercal \\ \hline B & C \end{array}\right) \in F_0$$

En déduire que pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n-r\}^2$, *pour tout* $\lambda \neq 0$,

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & \lambda I_r & & \vdots \\ & & & b_{j,r} \\ \hline b_{i,1} & \ldots & b_{i,r} & c_{i,j} \end{array}\right) = 0$$

5. *Montrer que* $C = 0$, *puis que* $B = 0$.

6. *Conclure.*

7. *Si* $\dim(F) \geqslant n^2 - n + 1$, *montrer que* $F \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

8. *Et sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *?*

Exercice 22. *Soit* $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *non constante telle que pour tout* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $f(AB) = f(A) \times f(B)$. *Montrer que* $f(M) \neq 0$ *si et seulement si* $M \in GL_n(\mathbb{C})$.