

*Exercices MP/MP**
Équations différentielles linéaires

Exercice 1. Résoudre, sur un intervalle à préciser,

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0.$$

On pourra chercher φ de classe \mathcal{C}^1 telle que si $u(y) = y' + \varphi y$, alors $u \circ u(y) = y'' + 2xy' + (1 + x^2)y$.

Exercice 2. Résoudre, sur un intervalle I à préciser,

$$\begin{cases} tx' &= x - 3y + 3z, \\ ty' &= -2x - 6y + 13z, \\ tz' &= -x - 4y + 8z. \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $V'(x) = AV(x)$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, et V solution de l'équation différentielle telle que $V(0) = u$. Évaluer $\|V(x)\|_2$.
2. Soit (V_1, \dots, V_n) n solutions de l'équation différentielle. Évaluer

$$\det_B(V_1(x), \dots, V_n(x)) = W(x),$$

où B désigne une base orthonormée directe.

3. À quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il $u \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(u, V(x))$ est liée ?

Exercice 4. Résoudre, sur un intervalle à préciser, le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ y' &= 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Exercice 5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$xf'(x) + \lambda f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle qui ont une limite finie en 0, et les solutions développables en séries entières (au voisinage de 0).
2. Calculer $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+1)}$.

Exercice 6. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} \geq 0$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\exp(tA) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.
2. On suppose que l'on est dans ce cas. Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow (\mathbb{R}_+)^n$, \mathcal{C}^0 et soit $x_0 \in (\mathbb{R}_+)^n$. Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= Ax(t) + f(t), \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

prend ses valeurs dans $(\mathbb{R}_+)^n$.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ et f_1, \dots, f_n n fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , \mathcal{C}^0 sur $[a, b]$ et \mathcal{C}^∞ sur $]a, b[$. On pose

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Montrer que X ne s'annule pas sur $[a, b]$ si et seulement si $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{C}^0(]a, b[, \mathbb{R})^n$ tel que (f_1, \dots, f_n) forme une base de solution de $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$.

Exercice 8. Résoudre, en précisant l'intervalle, $y'' + y = |\sin(x)|$.

Exercice 9. Soit $A: A \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $X_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $X: X \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ \mathcal{C}^1 solution de $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $X(0) = X_0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Résoudre $2xy'' + y' - y = 0$.

Exercice 11. Résoudre $y'' - y = \frac{1}{\cosh(x)}$.

Exercice 12. Soit $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\Re(\lambda) < 0$. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tA) = 0.$$

Exercice 13. Soit f continue périodique de période $T > 0$. Soit $\omega > 0$. À quelles conditions nécessaires et suffisantes (sur f) existe-t-il une solution T -périodique de $y'' + \omega^2 y = f$?

Exercice 14. Résoudre $x^2 y'' - 2x(1-x)y' + 2(1+x)y = 0$.

Exercice 15. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) + f(t) = 0$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. Est-ce encore vrai si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) - f(t) = 0$?

Exercice 16. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ solution de pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = A(t)B - BA(t) = [A(t), B]$ (crochet de Lie). Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

Exercice 17. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. On pose $X_1(t) = \exp(tA)$, $X_2(t) = \exp(tB)X_1(t)$ et $X_3(t) = \exp(-t(A+B))X_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'on peut définir $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de classe \mathcal{C}^1 tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_3'(t) = \exp(-t(A+B))\varphi(t)\exp(tB)\exp(tA),$$

et évaluer $\varphi'(t)$.

2. On suppose $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Calculer $\varphi(t)$ puis $X_3(t)$. Montrer enfin que

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)\exp\left(-\frac{1}{2}[B, A]\right).$$

Exercice 18. Soient $p, q: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = 0$. Soit y une solution non nulle de l'équation différentielle. On note $X = \{x \in I \mid y(x) = 0\}$.

1. Montrer que tous les points de X sont isolés.
2. Montrer que si I est compact, X est fini.
3. Si $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, si X est infini, montrer que l'on peut ordonner X en une suite $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_n < x_{n+1}$.

Exercice 19.

1. Soient $p, q: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Soit (y_1, y_2) une base de solution de l'équation différentielle. Montrer que si $a < b$ sont deux zéros consécutifs de y_1 (y_1 ne s'annule pas sur $]a, b[$), alors y_2 s'annule une seule fois sur $]a, b[$. Et réciproquement : on dit que les zéros de y_1 et y_2 sont entrelacés.
2. Soient $r_1, r_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues et

$$\begin{aligned} y'' + r_1 y &= 0, \\ y'' + r_2 y &= 0. \end{aligned}$$

Soit y_1 une solution non nulle de la première équation différentielle. Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de y_1 . Soit y_2 une solution de la deuxième équation différentielle. Montrer que y_2 s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

Application : s'il existe $\omega > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $r_1(t) < \omega^2$, montrer que l'écart entre deux zéros consécutifs de y_1 est plus grand que $\frac{\pi}{\omega}$. Et si pour tout $t \in I$, $r_1(t) \geq \omega'^2$ avec $\omega' > 0$?

Exercice 20. Soit $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue T -périodique avec $T > 0$. Soit l'équation différentielle $y'' + py = 0$, on note S l'ensemble de ces solutions.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in S$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x + 2T) - 2Ay(x + T) + y(x) = 0$. On pourra étudier

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_T: S &\rightarrow \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ y &\mapsto \mathcal{T}_T(y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto y(x + T) \end{aligned}$$

vérifier que $\mathcal{T}_T \in \mathcal{L}(S)$ et déterminer $\chi_{\mathcal{T}_T}$.

2. Montrer que si $|A| < 1$, alors toutes les solutions de E sont bornées.
3. Examiner le cas $|A| \geq 1$.

Exercice 21. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Soit $y'' - y = f$.

1. Montrer que l'équation différentielle admet une unique solutions bornée y_0 .
2. Évaluer $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} y_0(x)$.

Exercice 22. Soit $q: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et $p: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe \mathcal{C}^1 , et l'équation différentielle

$$p(t)x'' + p'(t)x'(t) + q(t)x = 0.$$

1. Soit $x: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que pour tout $t \in [a, +\infty[$, $(x(t), x'(t)) \neq (0, 0)$.
Montrer qu'il existe $r, \theta: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que pour tout $t \in [a, +\infty[$,

$$\begin{aligned} p(t)x'(t) &= r(t) \cos(\theta(t)), \\ x(t) &= r(t) \sin(\theta(t)). \end{aligned}$$

2. Montrer que l'équation différentielle équivaut à un système

$$\begin{cases} r' &= f(r, \theta, t), \\ \theta' &= g(r, \theta, t). \end{cases}$$

3. Si $p = 1, q > 0$ et $\int_a^{+\infty} q(t)dt$ diverge, montrer que x est solution de l'équation différentielle non nulle s'annulant une infinité de fois.

Exercice 23. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer l'équivalence

- (i) E est stable par dérivation,
- (ii) il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que E est l'ensemble solution de l'équation différentielle $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$,
- (iii) E est stable par translation, c'est-à-dire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in E$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a(f) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x+a) \end{aligned}$$

est dans E .

Exercice 24. Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$

Soit $\Delta \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ et

$$\begin{aligned} v : E &\rightarrow \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \\ f &\mapsto \frac{1}{\Delta} f'' = v(f) \end{aligned}$$

Notons que si $v(f) = \lambda f$ alors $v(f) \in E$.

1. Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $v(f) = \lambda f$, alors $\lambda < 0$. Définir un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E tel que si $v(f) = \lambda f$ et $v(g) = \mu g$ et $\lambda \neq \mu$ alors $\langle f, g \rangle = 0$.
2. On prolonge Δ en $\tilde{\Delta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ tel que $\Delta(x) = 1$ pour tout $x \geq 2$. Montrer que pour tout $\gamma < 0$, il existe un unique $f_\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que $f_\gamma(0) = 0$.
3. Montrer que f_γ admet une suite (dénombrable) de racines simples notées

$$x_0(\gamma) = 0 < x_1(\gamma) < \dots < x_n(\gamma) < \dots,$$

et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(\gamma) = +\infty$.

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} x_n(\gamma) = +\infty$.