

*Solutions  $MP/MP^*$*

*Espaces vectoriels normés*

## Solution 1.

1. A  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fixé, la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x \cos(t) + y \sin(2t)\end{aligned}\tag{1}$$

est bornée, donc le sup sur  $\mathbb{R}$  existe. Pour la séparation, prendre  $t = 0$  et  $t = \frac{\pi}{4}$ . Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à  $t$  fixé puis passer au sup sur  $\mathbb{R}$ .

2. Si  $|x| + |y| \leq 1$ , alors  $N(x, y) \leq 1$  donc on a la première inclusion.

Si  $N(x, y) \leq 1$ , utiliser  $t = 0$  pour avoir  $|x| \leq 1$  et  $t = \frac{\pi}{4}$  puis  $t = -\frac{\pi}{4}$  pour pouvoir justifier

$$|2y| \leq \left| x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq 2\tag{2}$$

et donc  $|y| \leq 1$ . D'où la deuxième inclusion.

3. On fixe  $(x, y) \in S_N(0, 1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$ .  $\varphi$  est  $2\pi$ -périodique,  $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$  et  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$ . On peut donc se limiter à un intervalle de longueur  $2\pi$  pour l'étude de  $\varphi$ .

On note que si  $t \in [-\pi, 0]$ ,  $\cos(t)$  et  $\sin(2t)$  sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leq |x| \cos(t) + |y| \sin(2t) = |\varphi(-t)|\tag{3}$$

et  $-t \in [0, \pi]$ . Donc le sup est atteint sur  $[0, \pi]$ .

On note maintenant, comme  $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , que si  $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$0 \leq \varphi(t) = \underbrace{x \cos(t)}_{\in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]} + y \sin(2t) \leq \underbrace{x \cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]} + y \sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t)\tag{4}$$

Donc le sup est atteint sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Soit maintenant  $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$  tel que  $\varphi(t_0)$  réalise le sup (existe car  $\varphi$  est continue sur un compact). Comme c'est aussi le sup sur  $\mathbb{R}$  qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre :  $\varphi'(t_0) = 0$ .

On a donc  $x \cos(t_0) + y \sin(2t_0) = 1$  et  $-x \sin(t_0) + 2y \cos(2t_0) = 0$ . On en déduit les valeurs de  $x$  et  $y$  en fonction de  $t_0$ , en faisant attention que  $\cos(t_0) \neq 0$  sinon  $\sin(t_0) = 0$  aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où  $t_0 = 0$ .

Réciproquement, s'il existe  $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$  tel que  $x$  et  $y$  s'écrivent de la façon demandée, alors  $t_0$  est l'unique point satisfaisant  $\varphi(t_0) = 1$  et  $\varphi'(t_0) = 0$ . Mais alors le sup de  $\varphi$  sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  est atteint en un point  $t_1$  qui vérifie les mêmes choses, donc  $t_1 = t_0$  d'où  $N(x, y) = 1$ .

■

### Solution 2.

1. Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur  $E$

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt\end{aligned}\tag{5}$$

Alors  $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$  et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. Pour  $x \in [0, 1]$ , écrire  $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$ ,  $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$ , utiliser Cauchy-Schwarz avec  $f'$  et 1 puis que  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$ , pour enfin passer au sup sur  $x$ .
3. Utiliser, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction

$$\begin{aligned}f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n\end{aligned}\tag{6}$$

■

**Solution 3.** Si  $f$  est ouverte,  $f(\mathbb{R}^n)$  est un sous-espace vectoriel ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . Donc  $f$  est surjective.

Si  $f$  est surjective, on prend  $F$  un supplémentaire de  $\ker(f)$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $\dim(\ker(f)) = n - p$  et  $\dim(F) = p$ . Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\ker(f)$ . On vérifie que  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est une base de  $\mathbb{R}^p$ . On définit

$$\begin{aligned}N_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i^n x_i e_i &\mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\end{aligned}\tag{7}$$

norme sur  $\mathbb{R}^n$  et

$$\begin{aligned}N_2 : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i^p y_i f(e_i) &\mapsto \max_{1 \leq i \leq p} |y_i|\end{aligned}\tag{8}$$

norme sur  $\mathbb{R}^p$ .

Soit  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $y_0 \in f(\Theta)$ , il existe  $x_0 \in \Theta$  :  $y_0 = f(x_0)$ . Si  $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , alors  $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$ . Comme  $\Theta$  est un ouvert, il existe  $r_0 > 0$  tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta\tag{9}$$

Soit  $y = \sum_{i=1}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$ , si  $N_2(y - y_0) < r_0$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$  et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \quad (10)$$

avec  $N_1(x - x_0) = \max_{1 \leq i \leq p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$ . Ainsi  $x \in \Theta$  et  $y \in f(\Theta)$ , donc  $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$  et  $f(\Theta)$  est un ouvert. ■

#### Solution 4.

1. Classique.

2.

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + \kappa(f)x \leq N(f) \quad (11)$$

car  $x \leq 1$ , donc  $N_\infty \leq N$ . Pour la non-équivalence, prendre

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n \end{aligned} \quad (12)$$

3. On a  $|f(0)| \leq N_\infty(f)$  donc  $N(f) \leq N'(f)$ . Ensuite,  $N_\infty \leq N$  donne  $N' \leq N + \kappa \leq 2N$ . Donc  $N$  et  $N'$  sont équivalentes. ■

**Remarque 1.** Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend  $(e_i)_{i \in I}$  une base (de Hamel),  $J = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$  dénombrable. Si  $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ , on peut vérifier que

$$N_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i| \quad (13)$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n |x_{i_{2n}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i| \quad (14)$$

ne se dominent pas.

**Solution 5.** Il existe  $\alpha > 0$  tel que  $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$ . Soient  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que

$\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$ . Alors

$$\left\| T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right) - I_n \right\|_\infty = \left| \frac{\lambda}{p} \right| < \alpha \quad (15)$$

donc  $T_{i,j}(\lambda) \in G$  ( $T_{i,j}$  est la matrice de transvection :  $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ ).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left( T_{i,j} \left( \frac{\lambda}{p} \right) \right)^p \in G \quad (16)$$

Soit  $\delta = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} = 1$  donc il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$ .

On a alors

$$\left\| D_n \left( \rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} \right) - I_n \right\|_{\infty} < \alpha \quad (17)$$

donc  $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}})^p \in G$  (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent  $GL_n(\mathbb{C})$ , on a bien  $G = GL_n(\mathbb{C})$ . ■

**Remarque 2.** *C'est faux sur  $\mathbb{R}$ . Contre-exemple : matrices de déterminant positif.*

**Solution 6.** Si  $f$  n'est pas continue en 0, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $h \in E$  avec  $\|h\| \leq \alpha$  et  $\|f(h)\| > \varepsilon_0$ . On prends  $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ , d'où  $\|nh_n\| \leq 1$  mais  $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leq M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Donc  $f$  est continue en 0. Comme  $f$  est linéaire, pour tout  $x \in E$ ,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x) + f(h) = f(x) \quad (18)$$

donc  $f$  est continue.

On a  $f(px) = p(fx)$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$  puis  $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$  pour tout  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  donc pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(rx) = rf(x)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il existe une suite de rationnels telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lambda$ . Comme  $f$  est continue, on a

$$f(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n x) \quad (19)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n f(x) \quad (20)$$

$$= \lambda f(x) \quad (21)$$

Donc  $f$  est linéaire. ■

**Remarque 3.** Soit  $e_0 = 1$  et  $e_1 = \sqrt{2}$  et  $(e_i)_{i \in I}$  une  $\mathbb{Q}$ -base de  $\mathbb{R}$  ( $0 \in I$ ). On définit

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i \in I \setminus \{0\}} \lambda_i e_i \quad (22)$$

$f$  vérifie  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , mais si  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de rationnels tendant vers  $\sqrt{2}$ ,  $f(r_n) = r_n \rightarrow \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$ .

### Solution 7.

1. On a  $\alpha(A) \subset \overline{A}$  donc  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$  donc  $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$ . Comme  $\alpha(A)$  est un ouvert inclus dans  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$  donc  $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$ .
2. Si  $\beta(A) = \overline{\overline{A}}$ , on montre aussi que  $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ . On a donc  $A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}$  et  $\overline{\overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}}$  et c'est tout.

■

### Solution 8.

1. Si  $d_A = d_B$ ,

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B} \quad (23)$$

Réciproquement, soit  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a_1 \in \overline{A}$ ,  $\|x - a_1\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$  (par définition de l'inf). Il existe  $a_2 \in A$ ,  $\|a_1 - a_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  (par définition de la fermeture). Ainsi,

$$d_A(x) \leq \|x - a_2\| \leq \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon \quad (24)$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x)$ . Comme  $A \subset \overline{A}$ ,  $d_{\overline{A}} \leq d_A$ , on a  $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$ .

2. Soit  $x \in A$ , on a  $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leq \rho(A, B)$  donc  $\sup_{x \in A} d_B(x) \leq \rho(A, B)$ , de même pour  $\sup_{y \in B} d_A(y)$  donc on a une première inégalité.

Réciproquement, soit  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a \in A$  et  $b \in B$  tel que  $\|x - a\| \leq d_A(x) + \varepsilon$  et  $\|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon$ . On a alors

$$d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|a - b\| + \|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A, B) \quad (25)$$

Ceci vaut pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc  $d_A(x) \leq d_B(x) + \alpha(A, B)$ . De même,  $d_B(x) \leq d_A(x) + \alpha(A, B)$  donc  $\rho(A, B) \leq \alpha(A, B)$ .

■

### Solution 9.

1. Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $y \in \mathbb{C}$  donc il existe  $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$  telle que l'on ait pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(x_n) = y_n$ .  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car  $\lim_{z \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$  (car  $P$  est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass)  $x_{\sigma(n)} \rightarrow x$  et  $x \in F$  car  $F$  est fermé. Par continuité de  $z \mapsto P(z)$  sur  $\mathbb{C}$ , on a  $y = P(x) \in P(F)$ .
2. Soit  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , soit  $y \in P(\Theta)$ ,  $\exists x \in \Theta$  tel que  $P(x) = y$  et il existe  $r > 0$ ,  $B(x, r) \subset \Theta$ . Soit  $y' \in \mathbb{C}$ , supposons que pour tout  $x' \in \mathbb{C}$  tel que  $P(x') = y'$ , on a  $|x - x'| > r$ . Soit  $Q(X) = P(X) - y' = a \prod_{i=1}^n (X - x_i)$  non constant où  $a$  est le coefficient dominatrice de  $P$ . Par hypothèse, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ :  $|x_i - x| > r$  (car  $P(x_i) = y'$ ), ainsi

$$|Q(x)| = |y - y'| \geq |a|r^n \quad (26)$$

Par contraposée, si  $|y - y'| \leq \frac{|a|r^n}{2}$ , alors il existe  $x' \in \mathbb{C}$  tel que  $P(x') = y'$  et  $|x' - x| < r$ . Ainsi,  $x' \in B(x, r) \subset \Theta$  et  $y' \in P(\Theta)$ . Donc  $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$  et  $P(\Theta)$  est un ouvert.

■

### Solution 10.

1. Si  $P \notin \mathcal{S}$ , il existe  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tel que  $P(z_0) = 0$  et  $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$ . Par contraposée, si pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$ , alors  $P \in \mathcal{S}$ .

Réciproquement, si  $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$  avec  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  réels, soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . On a

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^n |a - \lambda_i + ib| \geq |b|^n \quad (27)$$

2. Soit  $(P_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$  telle que  $P_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} P \in F$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$ , on a pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $|P_p(z)| \geq |\Im(z)|^n$  donc quand  $p \rightarrow +\infty$ ,  $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$  donc  $P \in \mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}$  est fermé.
3. Soit  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de matrice trigonalisable sur  $\mathbb{R}$  qui converge vers  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\chi_p$  le polynôme caractéristique de  $M_p$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\chi_p \in \mathcal{S}$  et  $\chi_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \chi_M$ . Comme  $\mathcal{S}$  est fermé,  $\chi_M \in \mathcal{S}$  et  $M$  est trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

■

### Solution 11.

1.  $\varphi$  est linéaire et  $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n - 1 = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$ .

Si  $\varphi$  est bijective, elle est surjective et il existe  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $UA + BV = 1$  et d'après le théorème de Bézout, on a  $A \wedge B = 1$ .

Réciproquement, si  $\varphi$  n'est pas surjective, il existe  $(U, V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \setminus \{(0, 0)\}$  tel que  $\varphi(U, V) = 0$  d'où  $AU = -BV$ . Soit  $\delta = A \wedge B$ , on écrit  $A = \delta A_1$  et  $B = \delta B_1$  avec  $A_1 \wedge B_1 = 1$  et on a  $A_1 U = -B_1 V$ . D'après le théorème de Gauss, on a  $A_1 \mid V$  et  $B_1 \mid U$ . Si  $U = 0$ , on a  $V = 0$  et de même si  $V = 0$ , on a  $U = 0$ . On peut donc supposer  $U \neq 0$  et  $V \neq 0$ , et on a alors  $\deg(A_1) \leq \deg(V) \leq n - 1 < n = \deg(A)$  mais  $A = \delta A_1$  donc  $\deg(\delta) \geq 1$  et  $A \wedge B \neq 1$ .

2.  $\Phi$  est continue car  $R_{A,B}$  est un polynôme en les coefficients de  $A$  et  $B$ .
3. Comme on est dans  $\mathbb{C}$ ,  $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$ .  $\Phi_{P,P'}$  est continue d'après la question précédente,  $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$  donc  $\Delta$  est ouvert.

Sur  $\mathbb{R}$ , on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si  $P \wedge P' = 1$  (contre-exemple :  $P = X^2 + 1$ ). Dans  $\mathbb{R}_3[X]$ ,  $X$  est scindé à racines simples et  $X(1 + \varepsilon X)^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} X$  et  $-\frac{1}{\varepsilon}$  est racine double, donc  $\Delta$  n'est pas ouvert.

■

**Remarque 4.** On peut cependant considérer

$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\} \quad (28)$$

Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  sont les racines (distinctes) de  $R$  sur  $\mathbb{R}$ , on choisit  $\alpha_0 \in ]-\infty, \lambda_1[$ ,  $\alpha_n \in ]\lambda_n, +\infty[$  et  $\alpha_i \in ]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$  si  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ , on a  $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$  (car les racines de  $P$  provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ Q &\mapsto (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0 \leq k \leq n-1} \end{aligned} \quad (29)$$

$\Psi$  est continue sur  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  qui est ouvert, donc il existe  $r > 0$  tel que si  $\|P - Q\| < r$ , alors  $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ . Donc  $Q$  change  $n$  fois de signe, et admet au moins  $n$  racines. Mais  $\deg(Q) = n$ , donc  $Q$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\Delta_n$  est ouvert dans  $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$ .



**Remarque 5.**  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ diagonalisable à racines simples}\}$  est exactement égal à  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M \text{ scindé à racines simples}\}$ . C'est donc un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  car  $M \mapsto \chi_M$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et c'est aussi vrai sur  $\mathbb{R}$ .

### Solution 12.

1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^n \end{aligned} \tag{30}$$

$f$  est continue et  $F = f^{-1}(\{0\})$  donc  $F = \overline{F}$ .

Soit  $M_0 \in F$ ,  $X^n$  annule  $M_0$  donc  $M_0$  est trigonalisable : on écrit  $M_0$  dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors  $M_\varepsilon$  la même matrice dans la même base en rajoutant simplement  $\varepsilon$  en première position de la diagonale. Alors  $M_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M_0$  et  $M_\varepsilon \notin F$  donc  $\mathring{F} = \emptyset$ . Notons que cela signifie que  $F$  est dense.

2. La norme dérive du produit scalaire  $(A|B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$ . Soit  $M \in F$ , on a  $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$ . On a  $(M|I_n) = \text{Tr}(M) = 0$  car  $M$  est nilpotente. Donc  $\|M - I_n\|^2$  est minimale pour  $\|M\|^2$  minimale, donc pour  $M = 0 \in F$ . Donc  $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$  (et la distance est atteinte pour  $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ ).

■

### Solution 13.

1.  $A \mapsto \det(A)$  est continue et  $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$  est donc ouvert. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , pour  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $A_p = A - \frac{1}{p+1}I_n$ . Comme  $\text{Sp}(A)$  est fini, il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $p \geq N$ ,  $\frac{1}{p+1} \notin \text{Sp}(A)$ . Donc pour tout  $p \geq N$ ,  $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$ , et  $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$  donc  $GL_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2. On fixe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ . On écrit  $BA = A^{-1}(AB)A$  donc  $AB$  et  $BA$  sont semblables donc  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ . Comme, à  $B$  fixé,  $A \mapsto \chi_{AB}$  et  $A \mapsto \chi_{BA}$  sont continues sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a le résultat par densité.

■

### Solution 14.

1. On a  $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u) \circ v_p = \frac{1}{p}(id_E - u^p)$ , donc  $\|v_p \circ (id_E - u)\| \leq \frac{1}{p}(\|id_E\| + \|u^p\|) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

Soit  $x \in \ker(u - id_E) \cap \text{Im}(u - id_E)$ , on a  $u(x) = x$  et il existe  $y \in E$ ,  $x = (u - id_E)(y)$ . On a  $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$  et  $v_p(x) = v_p \circ (u - id_E)(y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  d'où  $x = 0$ . Le théorème du rang permet de conclure.

2. Soit  $x \in E$ , on écrit  $x = x_1 + x_2$  avec  $\Pi(x) = x_1$  et  $x_2 = (u - id_E)(y_2)$ . Alors  $v_p(x) = x_1 + v_p \circ (u - id_E)(y_2) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x_1 = \Pi(x)$ .

■

### Solution 15.

1. Pour tout  $x \in A$ ,  $f_n(x) \in A$  car  $A$  est convexe. Soit  $(x, y) \in A^2$ , on a

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\| \quad (31)$$

Donc  $f_n$  est  $(1 - \frac{1}{n})$ -lipschitzienne. On forme

$$\begin{aligned} g_n : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|f_n(x) - x\| \end{aligned} \quad (32)$$

qui est continue. Soit  $x_n \in A$  telle que  $g_n(x_n) = \min_{x \in A} g_n(x)$  (existe car  $A$  est compact et  $g_n$  continue). On a  $x_n \in A$ , d'où  $f_n(x_n) \in A$  et

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f_n(x_n) - x_n\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) g_n(x_n) \quad (33)$$

Si  $g_n(x_n) \neq 0$ , alors on aurait  $g_n(f_n(x_n)) < g_n(x_n)$  ce qui n'est pas possible. Donc  $g_n(x_n) = 0$  et  $f_n(x_n) = x_n$ .

Soit  $y_n$  un autre point fixe, on a

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x_n - y_n\| \quad (34)$$

donc  $x_n = y_n$ .

2. On a  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  et on extrait (car  $A$  est compact) et on a

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in A \quad (35)$$

On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)}f(x_0)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\right)f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)} \quad (36)$$

par continuité de  $f$ . Donc  $f(x) = x$ .

3. Soit  $(x, y) \in A^2$ , points fixes de  $f$ , et  $t \in [0, 1]$ , on pose  $z = tx + (1 - t)y$ . On a

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \quad (37)$$

$$\leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| \quad (38)$$

$$\leq \|x - z\| + \|z - y\| \quad (39)$$

$$= (1 - t)\|x - y\| + t\|x - y\| \quad (40)$$

$$= \|x - y\| \quad (41)$$

On a donc égalité partout :  $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$  et  $\|f(x) - f(z)\| = \|x - z\|$ ,  $\|f(z) - f(y)\| = \|z - y\|$  car  $f$  est 1-lipschitzienne.

Comme la norme est euclidienne, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(x) - f(z) = \lambda(f(z) - f(y))$  d'où  $f(x) + \lambda f(y) = (\lambda + 1)f(z)$  d'où  $f(z) = \frac{x + \lambda y}{\lambda + 1} = t'x + (1 - t')y$  avec  $t' = \frac{1}{\lambda + 1} \in [0, 1]$ . En reportant, on a

$$\|f(x) - f(z)\| = \|x - t'x - (1 - t')y\| = (1 - t')\|x - y\| = \|x - z\| = (1 - t)\|x - y\| \quad (42)$$

Si  $x \neq y$ , alors  $t = t'$  et  $f(z) = tx + (1 - t)y = z$ .

4. Soit dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\overline{B_{\|\cdot\|}(0, 1)} = [-1, 1]^2 = A$ . Soit

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto (x, |x|) \end{aligned} \quad (43)$$

On a

$$\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_\infty = \|(x_1, |x_1|) - (x_2, |x_2|)\|_\infty \quad (44)$$

$$= \max\{|x_1 - x_2|, ||x_1| - |x_2||\} \quad (45)$$

$$= |x_1 - x_2| \quad (46)$$

$$\leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty \quad (47)$$

Donc  $f$  est 1-lipschitzienne, on a  $f(x, y) = (y, x)$  si et seulement si  $y = |x|$ . Donc ici,  $F$  n'est pas convexe.

■

### Solution 16.

1. On a pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  et par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ . Pour  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , on a  $f(qrx) = qf(rx) = f(px) = pf(x)$  donc  $f(rx) = rf(x)$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  et continuité de  $f$ , on a pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ . Donc  $f$  est linéaire.

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans  $\mathbb{C}$ .

2. On étudie la série, pour  $x$  fixé de terme général

$$\|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| = \frac{1}{2^n} \|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}} \quad (48)$$

qui est donc convergente. Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

3. On a  $v_0(x) = f(x)$ , donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) = g(x) - f(x)$ .  $f$  étant continue,  $v_n$  l'est aussi, et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme pour tout  $x \in E$ ,  $\|(v_{n+1} - v_n)(x)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$ , donc  $g$  est continue.
4. On a, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\|v_n(x + y) - v_n(x) - v_n(y)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n(x + y)) - \frac{1}{2^n} (f(2^n x) + f(2^n y)) \right\| \leq \frac{M}{2^n} \quad (49)$$

Donc quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $g(x + y) = g(x) + g(y)$ .

On a pour tout  $x \in E$ ,

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M \quad (50)$$

Soit maintenant  $h$  linéaire continue telle que  $h - f$  soit bornée, soit  $M' = \sup_{x \in E} \|h(x) - f(x)\|$ .

On a donc

$$\|v_n(x) - h(x)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^n} h(2^n x) \right\| \leq \frac{M'}{2^n} \quad (51)$$

car  $h$  est linéaire. Donc quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) = h(x)$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = g(x)$ .

■

**Solution 17.** En particulier, pour  $t = f(0)$ ,  $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{x \in E \mid f(x) = f(0)\}$  est borné (car compact). Donc il existe  $A$  tel que  $f^{-1}(\{f(0)\}) \subset \overline{B(0, A)}$ . Par contraposée, pour tout  $x \in E$ , si  $\|x\| > A$ , alors  $f(x) \neq f(0)$ .

On montre alors que  $E \setminus \overline{B(0, A)}$  est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

$f$  étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout  $x \in E \setminus \overline{B(0, A)}$ ,  $f(x) > f(0)$  soit  $f(x) < f(0)$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on se place dans le cas  $f(x) > f(0)$ . Comme on est en dimension finie sur  $\overline{B(0, A)}$  compact,  $f$  atteint son minimum et ce minimum est plus petit que  $f(0)$ , c'est donc un minimum global. ■

**Remarque 6.** C'est faux pour  $n = 1$ . Contre-exemple :  $f = id_{\mathbb{R}}$ .

**Solution 18.** Si c'était le cas, on prend un cercle  $\mathcal{C}$  compact (et connexe par arcs).  $f(\mathcal{C})$  est compact connexe par arc dans  $\mathbb{R}$ . On note  $f(\mathcal{C}) = [a, b]$  (avec  $a < b$  car  $f$  injective). Si  $x \in \mathcal{C}$  est tel que  $f(x) = \frac{a+b}{2}$ , on  $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a, b] \setminus \left\{ \frac{a+b}{2} \right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$  donc une telle fonction n'existe pas. ■

**Solution 19.**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|e_n\|_{l^1} = 1$  et  $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\|$  donc  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. On note  $M = \sup |K_n| \leq \|\varphi\|$ .

Soit maintenant  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$ . On a, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| u - \sum_{n=0}^N u_n e_n \right\|_1 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (52)$$

(reste d'une série convergente). Par continuité de  $\varphi$ , on a donc

$$|\varphi(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| |K_n| \leq M \|u\|_1 \quad (53)$$

Ainsi,  $\|\varphi\| \leq M$  et donc  $\|\varphi\| = M$ .

2.  $F$  est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective.

Soit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ . On définit

$$\begin{aligned} \varphi : \quad l^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{aligned} \quad (54)$$

Elle est bien définie car  $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$  et  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Elle est linéaire, et continue car  $|\varphi(u)| \leq \|(K_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$ .

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(e_n) = K_n$ . Donc  $F(\varphi) = (K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $F$  est surjective. Donc  $F$  est une isométrie bijective et le dual topologique de  $l^1$  est équivalent à  $l^\infty$ .

■

### Solution 20.

1. Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle telle que  $K = \ker(\varphi)$ . Si  $F$  est dense,  $\varphi$  est discontinue. Soit  $(a, b) \in (E \setminus H)^2$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^\mathbb{N}$  qui converge vers  $b - a$  (existe car  $H$  est dense). La suite  $(a + x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi(a + x_n) = \varphi(a) \neq 0$ , et pour  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi(t(a + x_n) + (1 - t)(a + x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$ . Donc  $[a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H$ .

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E \setminus H$  telle que

$$\begin{cases} \gamma(t) = \alpha_n t + \beta_n \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) = b \\ \gamma(t) = a + tx_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (55)$$

On cherche à définir  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  : on veut  $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = a + x_n$  et  $\gamma(1 - \frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$  (pour la continuité en se raccordant au  $x_n$ ). En résolvant le système, on trouve  $\alpha_n = n(n+1)(x_n - x_{n+1})$  et  $\beta_n = a + x_n - (n-1)(n+1)(x_n - x_{n+1})$ .

Soit alors  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :  $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$  et pour tout  $n \geq N$ , pour tout  $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}]$ ,  $\gamma(t) \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$  par convexité de la boule. Donc  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = b$  et  $\gamma$  est continue. Donc  $E \setminus H$  est connexe par arcs.

2. Soit  $\varphi$  une forme linéaire telle que  $\ker(f) = H$  est fermé. Alors  $\varphi$  est continue (à redémontrer). Soit  $x \in E \setminus H$ , on a  $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$  et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si  $E \setminus H$  était connexe par arcs,  $\varphi$  s'annulerait sur  $E \setminus H$  ce qui n'est pas vrai. Donc  $E \setminus H$  n'est pas connexe par arcs.
3. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , si  $H$  est dense alors  $E \setminus H$  est connexe par arc d'après la première question. Si  $H$  est fermé, soit  $\varphi$  une forme linéaire continue telle que  $\ker(f) = H$ . Soit  $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$ .
  - Si  $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_+^*$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in E \setminus H}) \neq 0$  et on peut relier directement  $x_1$  et  $x_2$ .
  - Sinon, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  avec  $\varphi(x_1) = \rho e^{i\theta}$  et  $\varphi(x_2) = \rho' e^{i(\theta+\pi)}$ . Alors  $x_3 = ix_1$  est tel que  $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$  et  $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$  (on contourne l'origine par une rotation de

l'angle  $\frac{\pi}{2}$ ). Par conséquent, on peut utiliser  $x_3$  pour relier  $x_1$  et  $x_2$  donc  $E \setminus H$  est connexe par arcs. ■

**Solution 21.** Soit

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ((x, \sin(\frac{1}{x})))\end{aligned}\tag{56}$$

$\varphi$  est continue et  $\Gamma \cup \varphi(\mathbb{R}_+^*)$  est connexe par arcs.

On a  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$  avec  $\Gamma' = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$ . En effet, pour tout  $y \in [-1, 1]$ , on pose  $x_k = \frac{1}{\arcsin(y) + 2k\pi}$ . On a  $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$  donc  $(0, y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \bar{\Gamma}$ .

Réciproquement, si  $(x, y) \in \bar{\Gamma}$ , il existe  $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  avec  $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$  et  $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$ . Si  $x > 0$ , par continuité,  $y = \sin(\frac{1}{x})$  et  $(x, y) \in \Gamma$ . Si  $x = 0$ ,  $y \in [-1, 1]$  donc  $(x, y) \in \Gamma'$ .

Si  $\bar{\Gamma}$  est connexe par arcs, il existe

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 1] &\rightarrow \bar{\Gamma} \\ t &\mapsto (x(t), y(t))\end{aligned}\tag{57}$$

continue telle que  $\gamma(0) = (0, 0)$  et  $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ . La première projection  $t \mapsto x(t)$  est continue avec  $x(0) = 0$  et  $x(1) = \frac{1}{\pi}$ . On définit maintenant  $t_1 = \sup\{t \in [0, 1] \mid x(t) = 0\}$ . Par continuité,  $x(t_1) = 0$  et donc  $t_1 < 1$ . Donc pour tout  $t > t_1$ ,  $x(t) > 0$  et  $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$  pour  $t > t_1$  et  $\gamma(t_1) = (0, y_1)$  avec  $y_1 \in [-1, 1]$ .

Or,  $-1$  et  $1$  n'appartiennent pas simultanément à  $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ . On peut supposer que  $1 \notin ]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ . Comme  $\gamma$  est continue, il existe  $t_2 > t_1$  tel que pour tout  $t \in ]t_1, t_2]$ ,  $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in ]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ . Or  $x(t_2) > 0$  et  $x(t_1) = 0$  donc il existe  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $t_0 \in ]t_1, t_2]$  tel que  $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$  (théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors  $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin ]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$  ce qui contredit ce qui précède.

Donc  $\bar{\Gamma}$  n'est pas connexe par arcs. ■

**Solution 22.**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in K$  car  $u_n$  est le barycentre de  $(a, T(a), \dots, T^n(a))$  et  $K$  est convexe.

Comme  $K$  est compact, on peut extraire  $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u \in K$ . Alors

$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n) + 1} (id_E - T^{\sigma(n)+1})(a) \quad (58)$$

d'où

$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leq \frac{1}{\sigma(n) + 1} \times 2M \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (59)$$

avec  $M = \sup_{x \in K} \|x\|$  (existe car  $K$  est compact donc borné). Par continuité de  $T$ , on a  $T(u) = u$ .

2. Posons  $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$  fermé car  $K' = K \cap \left( \underbrace{(id_E - T)^{-1}\{0\}}_{\text{continu}} \right)$ . Donc  $K'$  est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout  $(u_1, u_2) \in K'^2$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ , par linéarité de  $T$ , on a

$$T(tu_1 + (1-t)u_2) = tu_1 + (1-t)u_2 \quad (60)$$

donc  $K'$  convexe. De plus, comme  $U \circ T = T \circ U$ , pour tout  $u \in K'$ , on a  $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$  donc  $U(u) \in K'$ . On applique alors la question 1 à  $K'$  est il existe  $y \in K'$  :  $U(y) = y$  et  $T(y) = y$ .

■

### Solution 23.

1. C'est le théorème du rang car  $\text{rg}(u) \leq n \leq p-2$ , et  $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0\}$  est de dimension  $p-1$  donc  $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$  (formule de Grassmann).

2. On a

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i)x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = x \quad (61)$$

et

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \quad (62)$$

Soit  $I_+ = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i > 0\}$  et  $I_- = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i < 0\}$ . On a  $I_+ \neq \emptyset$  et  $I_- \neq \emptyset$  car  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$ . Soit  $t \geq 0$ . Pour tout  $i \in I_+$ ,  $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$ . Pour  $i \in I_-$ ,  $\lambda_i + t \underbrace{\alpha_i}_{<0} \geq 0$  si et seulement si  $t \leq -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ . Prenons alors

$$t = \min_{i \in I_-} \left( -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right) \quad (63)$$



On a aussi pour tout  $i \in I_-$ ,  $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$  et il existe  $i_0 \in I_-$  tel que  $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$ .

3. Par récurrence descendante, on se ramène à  $n+1$  points car si  $x$  est barycentre de  $p$  points avec  $p \geq n+2$ , alors il est barycentre de  $p-1$  points.

4. Soit  $A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$  fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit

$$\begin{aligned} f : A \times K^{n+1} &\rightarrow \text{conv}(K) \\ ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (x_1, \dots, x_{n+1})) &\mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{aligned} \quad (64)$$

$f$  est surjective et continue, donc  $\text{conv}(K)$  est l'image continue d'un compact donc  $\text{conv}(K)$  est compact.

■

**Solution 24.** Pour tout  $u \in A_p$ ,  $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  distincts et  $u$  est diagonalisable. Réciproquement, si  $u$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  alors dans une base la matrice de  $u$  est diagonale avec des  $\alpha_i$  (éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc  $u \in A_p$ .

Si  $u \in A_p$ , on écrit donc le polynôme caractéristique de  $u$

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \quad (65)$$

avec  $0 \leq m_i \leq \dim(E) = n$  et  $\sum_{i=1}^r m_i = n$ .  $u \mapsto \chi_u$  est continue. Pour  $(m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r$  tel que  $\sum_{i=1}^r m_i = n$ , notons

$$A_{m_1, \dots, m_r} = \left\{ u \in A_p \mid \chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \quad (66)$$

et

$$\left[ u \mapsto \chi_u(A_p) \right] = \left\{ \bigcup_{(m_1, \dots, m_r) \in D_{n,r}} \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\} \quad (67)$$

où

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \mid \sum_{i=1}^r m_i = n \right\} \quad (68)$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires,

si  $(m_1, \dots, m_r) \neq (m'_1, \dots, m'_r)$ , alors  $A_{m_1, \dots, m_r}$  et  $A_{m'_1, \dots, m'_r}$  ne sont pas dans la même composante

connexe par arcs car

$$\left[ u \mapsto \chi_u \left( A_{m_1, \dots, m_p} \cup A_{m'_1, \dots, m'_r} \right) \right] = \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \cup \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m'_i} \right\}}_{\text{pas connexe par arcs}} \quad (69)$$

Si  $\gamma: [0, 1] \rightarrow A_p$  est continue,  $t \mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t) + a_1(t)X + \dots + a_{n-1}(t)X^{n-1} + X^n$  est continue sur  $[0, 1]$  et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.  $a_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.

Soit  $u_0 \in A_{m_1, \dots, m_r}$ , soit  $u \in A_{m_1, \dots, m_r}$ , alors il existe une base  $\mathcal{B}_0$  base de  $E$  telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$  soit diagonale avec des  $\alpha_1$  sur les  $m_1$  premières lignes de la diagonale,  $\alpha_2$  sur les  $m_2$  lignes suivantes, etc. Soit  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ .  $M$  est semblable à  $M_0$  donc il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $M = PM_0P^{-1}$ .

Or  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs, donc il existe  $\varphi: [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  continue telle que  $\varphi(0) = P$  et  $\varphi(1) = I_n$ . On pose alors

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\rightarrow A_{m_1, \dots, m_r} \\ t &\mapsto \varphi(t)M_0\varphi^{-1}(t) \end{aligned} \quad (70)$$

Alors  $A_{m_1, \dots, m_r}$  est connexe par arcs.

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \mid \sum_{i=1}^r m_i = n \right\} \quad (71)$$

qui vaut  $\binom{m+r-1}{r-1}$  possibilités (place  $n$  points sur une droite et les séparer avec  $r-1$  barres : le nombre de points dans chaque segment donne un  $m_i$ , il y a  $m+r-1$  possibilités pour placer les  $r-1$  barres). ■

### Solution 25.

1. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|AX|_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}x_j}_{>0} \geq 0$ . Si  $|AX|_i = 0$  alors pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j = 0$  donc  $x_j = 0$ , impossible car  $X \neq 0$ .
2. Si  $|AX| = A|X|$ . On a pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{i,j}|x_j| \quad (72)$$

donc les  $(a_{i,j}x_j)_{1 \leq j \leq n}$  ont tous même argument. On prend  $\theta = \arg(x_j)$ .

3.  $K$  est fermé et borné en dimension finie : c'est un compact. On a  $I_x \neq \emptyset$  car  $AX \geq 0$  donc  $0 \in I_x$ . Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $AX - t_k X \geq 0$  donc pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(AX - t_k X)_i \geq 0$  et par passage à la limite,  $AX - tX \geq 0$  donc  $I_x$  est fermé.

Si  $t \in I_x$ ,

$$|tX|_1 = t = \sum_{i=1}^n t \underbrace{x_i}_{\geq 0} \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j}_{=(AX)_i} \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \quad (73)$$

car  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ . On note  $M = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ .

4. Pour tout  $x \in K$ ,  $\theta(X) \leq M$  donc  $\theta$  est bien borné sur  $K$ . Par définition de  $r_0$ , il existe  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$  tel que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta(X_k) = r_0$ . On note  $\theta(X_k) = t_k$ . Comme  $K$  est compact, il existe  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $X_{\sigma(k)}$  converge vers  $X^+ \in K$ . A priori,  $\theta(X^+) \leq r_0$ . On a  $AX_{\sigma(k)} - t_{\sigma(k)}X_{\sigma(k)} \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  donc par passage à la limite,  $AX^+ - r_0X^+ \geq 0$  et donc  $r_0 \leq \theta(X^+)$  donc  $r_0 = \theta(X^+)$ .

5. Soit  $Y = A^+ - r_0X^+ \geq 0$ . Si  $Y \neq 0$ , alors  $AY > 0$  d'après la question 1 donc

$$AY = A \underbrace{(AX^+)}_{>0} - r_0 \underbrace{(AX^+)}_{>0} > 0 \quad (74)$$

On a  $AY > \varepsilon AX^+$  si et seulement si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|AY|_i > \varepsilon |AX^+|_i$  (car  $AY > 0$ ).

On pose alors

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{|AY|_i}{|AX^+|_i} \quad (75)$$

On a alors  $AY - \varepsilon AX^+ > 0$  d'où

$$A \underbrace{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}_{\in K} - (r_0 + \varepsilon) \frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} > 0 \quad (76)$$

donc  $r_0 + \varepsilon \in I_{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}$  c'est-à-dire

$$r_0 + \varepsilon \leq \theta\left(\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}\right) \leq r_0 \quad (77)$$

ce qui est impossible. Nécessairement  $Y = 0$ .

6. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$|AV|_i = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |v_j| = (A|V|)_i \quad (78)$$

donc  $|\lambda| = |AV| \leq A|V|$ . De plus,  $|V| \in K$  donc  $|\lambda| \leq \theta(|V|) \leq r_0$ . Notons que cela implique que le rayon spectral de  $A$  est  $\rho(A)$  est plus petit que  $r_0$  et que l'on a même égalité.

7. Si  $|\lambda| = r_0$ , on a  $|\lambda| = \theta(|V|) = r_0$  et d'après la question 5 on a  $A|V| = r_0|V| = |AV|$ .

D'après la question 2, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $V = e^{i\theta}|V|$ . Or

$$AV = \lambda V = e^{i\theta} A|V| = e^{i\theta} r_0 |V| \quad (79)$$

et comme  $|K| \in K$ ,  $|V| \neq 0$  et on a donc  $\lambda = r_0$ .

8. Soit  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $\|V\|_1 = 1$  et  $AV = r_0 V$ . D'après la question précédente, on a  $V = e^{i\theta}|V|$  et  $A|V| = r_0|V|$ . Soit alors  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|) \quad (80)$$

Notons maintenant que si  $Y \geq 0$  avec  $Y \neq 0$  vérifie  $AY = r_0 Y$ , alors  $Y > 0$ . En effet, d'après la première question,  $AY > 0$ . On a  $r_0 \neq 0$  car sinon  $\text{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$  et  $A^n = 0$  ce qui est impossible car ses coefficients sont strictement positifs. D'où  $Y > 0$ .

Ainsi, par définition de  $X^+$ , on a  $X^+ > 0$  et  $|V| > 0$ . On a alors

$$(X^+)_i + t|v_i| \geq 0 \quad (81)$$

si et seulement si

$$t \geq -\frac{|X^+|_i}{|v_i|} \quad (82)$$

On prend

$$t = \min_{1 \leq i \leq n} -\frac{|X^+|_i}{|v_i|} \quad (83)$$

Finalement, on a  $X^+ + t|V| \geq 0$  et une de ses coordonnées vaut 0 (car on a pris le minimum sur les  $i$ ). Nécessairement,  $X^+ + t|V| = 0$  (car  $A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$ ) et donc  $|V| \in \mathbb{R}X^+$ . Donc  $V = e^{i\theta}|V| \in \mathbb{C}X^+$  et ainsi

$$\dim(\ker(A - r_0 I_n)) = 1 \quad (84)$$

■

**Solution 26.** Soit

$$\begin{aligned}\varphi : U \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\|\end{aligned}\tag{85}$$

On a

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| = ||\|x - y\| - \|x' - y'\|| \leq \|(x - y) - (x' - y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| \leq 2\|(x, y) - (x', y')\|_\infty\tag{86}$$

donc  $\varphi$  est continue.

$U \times V$  est compact, donc il existe  $(x_1, y_1) \in (U \times V)$  telle que  $\varphi(x_1, y_1) = \min_{(x, y) \in U \times V} \varphi(x, y)$ . Comme  $U$  et  $V$  sont disjoints,  $x_1 \neq y_1$  et  $\varphi(x_1, y_1) = d(U, V) > 0$ .

Soit  $\alpha = \frac{d(U, V)}{3}$ . On pose  $U' = \{x \in E \mid d(x, U) < \alpha\}$  et  $V' = \{x \in E \mid d(x, V) < \alpha\}$ .  $x \mapsto \|x\|$  est continue car 1-lipschitzienne donc  $U'$  et  $V'$  sont des ouverts et on a bien  $U \subset U'$  et  $V \subset V'$ . Soit ensuite  $x \in U' \cap V'$ , on a  $d(x, U) < \alpha$  et  $d(x, V) < \alpha$  donc il existe  $(u, v) \in U \times V$ ,  $d(x, u) < \alpha$  et  $d(x, v) < \alpha$ . Alors  $d(u, v) \leq 2\alpha$  ce qui est absurde. Donc  $U' \cap V' = \emptyset$ . ■

**Solution 27.**

1.  $f$  est 1-lipschitzienne donc est continue. On forme

$$\begin{aligned}g : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x - f(x)\|\end{aligned}\tag{87}$$

$g$  est continue,  $K$  est compact donc il existe  $a \in K$  tel que  $g(a) = \min_{x \in K} g(x)$ . Si  $a \neq f(a)$ , alors  $\|f(a) - f^2(a)\| = g(f(a)) < \|a - f(a)\| = g(a)$  ce qui est impossible par définition de  $a$ . Donc  $f(a) = a$ . S'il existe  $a' \neq a$  tel que  $f(a') = a'$ , alors  $\|f(a) - f(a')\| = \|a - a'\| < \|a - a'\|$  ce qui est impossible. Donc  $a$  est unique.

2. S'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} = a$  alors pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ . Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq a$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|u_{n+1} - a\| = \|f(u_n) - f(a)\| < \|u_n - a\|\tag{88}$$

donc la suite  $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante dans  $\mathbb{R}_+$  donc elle converge vers  $l \geq 0$ . Par compacité de  $K$ , il existe une extraction  $\sigma$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha \in K$ . Par continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\sigma(n)} - a\| = \|\alpha - a\| = l \quad (89)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\underbrace{u_{\sigma(n)+1} - f(a)}_{f(u_{\sigma(n)})}\| = \|f(\alpha) - f(a)\| = l = \|\alpha - a\| \quad (90)$$

par continuité de  $f$ . Ainsi, on a  $\alpha = a$  et  $l = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ .

3.  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $x < y \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $z \in ]x, y[$  tel que (égalité des accroissements finis)

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(z)| = \left| \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \right| < 1 \quad (91)$$

donc  $f$  vérifie bien l'hypothèse de contraction. Cependant, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a  $\sqrt{a^2 + 1} > a$  donc pas de point fixe. La démonstration tombe en défaut car  $\mathbb{R}$  n'est pas compact. ■

**Solution 28.** La condition est équivalente à pour tout  $(M_1, M_2, M_3) \in K_1 \times K_2 \times K_3$ ,  $M_1, M_2$  et  $M_3$  ne sont pas alignés.

On forme alors

$$\begin{aligned} f : K_1 \times K_2 \times K_3 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (M_1, M_2, M_3) &\mapsto R(M_1, M_2, M_3) \end{aligned} \quad (92)$$

où  $R(M_1, M_2, M_3)$  est le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .

On note  $M_i = (x_i, y_i)$  et  $\Delta_i$  la médiatrice de  $[M_j M_k]$ . Établissons une équation de  $\Delta_i$ . On a  $M = (x, y) \in \Delta_i$  si et seulement si  $\|M \vec{M}_j\|_2^2 = \|M \vec{M}_k\|_2^2$  si et seulement si  $(M \vec{M}_j + M \vec{M}_k \mid M \vec{M}_j - M \vec{M}_k) = 0$  (produit scalaire), si et seulement si  $(M \vec{C}_i \mid M_j \vec{M}_k) = 0$  où  $C_i$  est le milieu de  $[M_j M_k]$ , si et seulement si (calculer le produit scalaire)

$$\left( \frac{x_j + x_k}{2} - x \right) (x_k - x_j) + \left( \frac{y_j + y_k}{2} - y \right) (y_k - y_j) = 0 \quad (93)$$

Soit alors  $M_0 = (x_0, y_0)$  le centre du cercle circonscrit.  $M_0 \in \Delta_i \cap \Delta_j$  avec  $i \neq j$ . Par exemple,

$M_0 \in \Delta_3 \cap \Delta_1$  si et seulement si

$$\begin{cases} \left( \frac{x_2 + x_1}{2} - x_0 \right) (x_2 - x_1) + \left( \frac{y_2 + y_1}{2} - y_0 \right) (y_2 - y_1) = 0 \\ \left( \frac{x_3 + x_2}{2} - x_0 \right) (x_3 - x_2) + \left( \frac{y_3 + y_2}{2} - y_0 \right) (y_3 - y_2) = 0 \end{cases} \quad (94)$$

si et seulement si  $(L_2 \leftarrow L_1(x_3 - x_2) + L_2(x_1 - x_2))$

$$\begin{cases} x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} \\ x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) = \frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2} \end{cases} \quad (95)$$

si et seulement si  $(L_1 \leftarrow L_2(y_2 - y_1) + L_1(y_2 - y_3))$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \\ y_0 = \frac{\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \end{cases} \quad (96)$$

et  $R(M_1, M_2, M_3) = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}$ . En reportant,  $f$  est continue sur  $K_1 \times K_2 \times K_3$  compact donc  $f$  atteint son minimum. ■

### Solution 29.

1. Pour tout  $f \in E$ ,  $T(f)$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $(T(f))' = f$ ,  $T(f)(0) = 0$ .  $T$  est clairement linéaire, soit ensuite  $x \in [0, 1]$ , on a

$$|T(f)(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (97)$$

Donc  $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  donc  $T$  est continue et  $\|T\| \leq 1$ . Pour  $f = 1$ , on a  $\|f\|_\infty = 1$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $T(f)(x) = x$  donc  $\|T(1)\|_\infty = 1$ . Ainsi,  $\|T\| = 1$ .

2.  $id_E - T$  est continue. Soit  $(f, g) \in E^2$ , on a  $g = f - T(f)$  si et seulement si  $g = y' - y$  et  $y(0) = 0$ . On a  $g(x)e^{-x} = \underbrace{e^{-x}(y'(x) - y(x))}_{(e^{-x}y(x))'}$  donc en intégrant de 0 à  $x$  on a

$$y(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt \quad (98)$$

Donc  $T(f)$  vérifie le problème de Cauchy si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$  si et seulement si pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt \quad (99)$$

Donc  $id_E - T$  est bijective. Enfin, on a pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|f(x)| \leq |g(x)| + \left| \int_0^x g(t) e^{x-t} dt \right| \leq \|g\|_\infty (1 + x e^x) \leq \|g\|_\infty (1 + e) \quad (100)$$

Ainsi,

$$\|f\|_\infty = \|(id_E - T)^{-1}(g)\|_\infty \leq \|g\|_\infty (1 + e) \quad (101)$$

donc  $(id_E - T)^{-1}$  est continue. Ainsi,  $id_E - T$  est un homéomorphisme. ■

### Solution 30.

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $f^{-1}(K)$  est fermé car  $f$  est continue.  $K$  est borné, donc il existe  $M > 0$ , tel que pour tout  $y \in K$ ,  $\|y\| \leq M$ . Donc pour tout  $x \in f^{-1}(K)$ ,  $\|f(x)\| \leq M$ . Par contraposée de (i) pour  $A = M + 1$ , il existe  $B > 0$  tel que  $\|f(x)\| < A \Rightarrow \|x\| < B$ . Donc pour  $x \in f^{-1}(K)$ ,  $\|x\| < B$  donc  $f^{-1}(K)$  est borné. C'est donc un compact.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $A \geq 0$ . Soit  $K = \overline{B(0, A)}$  compact car fermé et borné en dimension finie. D'après (ii),  $f^{-1}(K)$  est compact donc borné : il existe  $B > 0$  tel que pour tout  $x \in f^{-1}(K)$ ,  $\|x\| \leq B$ . Par contraposée, si  $\|x\| > B$  alors  $x \notin f^{-1}(K)$  et  $f(x) \notin K$  donc  $\|f(x)\| > A$ . Ainsi,  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ . ■

**Remarque 7.** Exemple pour l'exercice précédent : les fonctions polynômiales non constantes. Contre-exemple : l'exponentielle, cf  $\exp([0, 1]) = \mathbb{R}_+$  non compact.

### Solution 31.

1. Soit  $(x, y) \in K^2$  compact. Soit  $\sigma$  une extraction telle que

$$(f^{\sigma(n)}(x), f^{\sigma(n)}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (l, l') \in K^2 \quad (102)$$



On a

$$f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (103)$$

de même pour  $y$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x)\| \leq \varepsilon \\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(y) - f^{\sigma(n)}(y)\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (104)$$

Pour  $N = \max(N_1, N_2)$  et  $p = \sigma(N+1) - \sigma(N) \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$d(x, f^p(x)) \leq d(f^{\sigma(n+1)}(x), f^{\sigma(n)}(x)) \leq \varepsilon$$

et de même pour  $y$  avec le même  $p$ .

2. On a

$$d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \quad (105)$$

$$\leq d(f^p(x), f^p(y)) \quad (106)$$

$$\leq d(f^p(x), x) + d(x, y) + d(y, f^p(y)) \quad (107)$$

$$\leq 2\varepsilon + d(x, y) \quad (108)$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a égalité tout du long. On a donc notamment,  $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$  et donc  $f$  est une isométrie.

3.  $f$  est 1-lipschitzienne donc continue. Donc  $f(K)$  est compact donc fermé. Il suffit donc de montrer que  $f(K)$  est dense dans  $K$ . Soit  $x \in K$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\|x - \underbrace{f^p(x)}_{\in f(K)}\| \leq \varepsilon$  d'après la première question. Donc  $f(K)$  est dense dans  $K$  et  $f(K) = \overline{f(K)} = K$ .

■

**Remarque 8.** Exemple pour l'exercice précédent : une rotation sur la sphère unité.

**Solution 32.** Soit

$$\begin{aligned} f : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto f(M) = \text{rayon du cercle circonscrit au triangle MAB} \end{aligned} \quad (109)$$

On a  $F = f(K)$ . Soit  $(C, i, j)$  un repère orthonormé où  $C$  est le milieu de  $[AB]$  et  $A(-\alpha, 0)$  et  $B(\alpha, 0)$  avec  $\alpha > 0$ . La médiatrice  $\Delta$  de  $[A, B]$  a pour équation  $x = 0$ . Si  $M(x, y)$ , soit  $\varphi(M)$  le centre du cercle circonscrit. On a  $\varphi(M) \in \Delta$  donc  $\varphi(M)(0, y_1)$  et  $\varphi(M)$  appartient à la médiatrice de  $[MA]$ . On a  $y_1 \neq 0$  car  $M \notin (AB)$ .

Notons  $M'$  le milieu de  $[MA]$ . On a  $M'(\frac{x-\alpha}{2}, \frac{y}{2})$  d'où  $M'\vec{\varphi(M)} \cdot \vec{MA} = 0$  d'où (en développant le produit scalaire),

$$y_1 = \left( (\alpha + x) \left( \frac{\alpha - x}{2} \right) - \frac{y^2}{2} \right) \left( -\frac{1}{y} \right) \quad (110)$$

$\varphi$  est donc continue donc  $f$  également et  $f(K) = F$  est compact. ■

### Solution 33.

1. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(\tau)$  et  $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$  avec  $\tau(P) = \lambda P$ . Si  $P$  n'est pas constant, notons  $\alpha \in \mathbb{C}$  alors  $P(\alpha) = 0$ . Alors  $P(\alpha + 1) = 0$ . En itérant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(\alpha + n) = 0$ , impossible car  $P$  n'est pas constant donc pas nul. Finalement,  $P$  est constant et  $\lambda = 1 : \text{Sp}(\tau) = \{1\}$ .
2.  $f: x \mapsto P(x)e^{-x}$  est continue et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  donc le sup est bien défini. Il est ensuite facile de vérifier que  $\|P\|$  est une norme.
3. On a

$$\|\tau(P)\| = \sup_{x \geq 0} |P(x+1)e^{-x}| = \sup_{x' \geq 1} |P(x')e^{-x'}e| \leq \sup_{x' \geq 0} |P(x')e^{-x'}e| \leq e\|P\| \quad (111)$$

4. Utiliser  $P = X$ . ■

### Solution 34.

1. Pour  $x$  fixé,  $\min(x, \varphi(t)) = \frac{x + \varphi(t) - |x - \varphi(t)|}{2}$  est continue. Donc  $T(f)$  est définie.

Si  $x \leq \varphi(0)$ ,

$$T(f)(x) = \int_0^1 x f(t) dt = x \int_0^1 f(t) dt \quad (112)$$

et si  $x \geq \varphi(1)$ ,

$$T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt \quad (113)$$

et si  $\varphi(0) \leq x \leq \varphi(1)$ , il existe un unique  $t_1 = \varphi^{-1}(x)$  (car  $\varphi$  induit un homéomorphisme de  $[0, 1]$  dans  $\varphi([0, 1])$ ).

Si  $t \leq t_1$ , on a  $\varphi(t) \leq x$ , donc  $\min(x, \varphi(t)) = \varphi(t)$ . Si  $t \geq t_1$ , on a  $\min(x, \varphi(t)) = x$ . On a donc

$$T(f)(x) = \int_0^{t_1} \varphi(t) f(t) dt + \int_{t_1}^1 x f(t) dt \quad (114)$$

$$= \underbrace{\int_0^{\varphi^{-1}(x)} \varphi(t) f(t) dt}_{=F_1(\varphi^{-1}(x))} + x \underbrace{\int_{\varphi^{-1}(x)}^1 f(t) dt}_{=F_2(\varphi^{-1}(x))} \quad (115)$$

et  $f$  et  $\varphi$  étant continues,  $F_1$  et  $F_2$  sont continues.

Donc  $T(f)$  continue et  $T$  linéaire, c'est un endomorphisme de  $E$ .

2. On a

$$|T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 \min(x, \varphi(t)) dt}_{=A(x)}$$

donc

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|A\|_\infty \quad (116)$$

donc  $T$  est continue et  $\|T\| \leq \|A\|_\infty$ . De plus pour  $f = 1$ , on a  $\|T\| = \|A\|_\infty$ .

3. On a

$$A(x) = \int_0^1 \min(x, \varphi(t)) dt = \begin{cases} x & \text{si } x \leq \varphi(0) \\ \int_0^1 \varphi(t) dt & \text{si } x \geq \varphi(1) \end{cases} \quad (117)$$

Dans tous les cas,

$$\|A\|_\infty \leq \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (118)$$

donc

$$\|A\|_\infty = \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (119)$$

■

### Solution 35.

1.  $\varphi$  est une forme linéaire. et on a

$$|\varphi(P)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{a_k}{2^k} \right| \leq 2\|P\|_\infty \quad (120)$$

donc  $\varphi$  est continue et  $\|\varphi\| \leq 2$ . Pour  $p \neq 0$ ,  $|\varphi(P)| < 2\|P\|_\infty$  : pour avoir égalité, il faudrait pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = \text{constante} \neq 0$  ce qui n'est pas possible. Pour  $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$ , on a  $\|P_n\|_\infty = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi(P_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$  donc  $\|\varphi\| = 2$ . De plus,  $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$  est fermé.

2. Soit  $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$ . On a  $\varphi(P) = 0$  d'où  $a_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$  (et il existe  $N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, a_n = 0$ ). On a donc

$$P(X) - 1 = (a_0 - 1) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k X^k \quad (121)$$

et si  $\|P - 1\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ , on a

$$\begin{cases} |a_0 - 1| \leq \frac{1}{2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (122)$$

et

$$|a_0| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \quad (123)$$

Et  $\frac{1}{2} \leq 1 - |a_0| \leq |1 - a_0| \leq \frac{1}{2}$ . Donc  $|a_0| = \frac{1}{2}$  et  $|1 - a_0| = \frac{1}{2}$ .

$$a_0 = \frac{1}{2} e^{i\theta} \Rightarrow \left| 1 - \frac{1}{2} e^{i\theta} \right|^2 = \frac{1}{4} \quad (124)$$

$$\Rightarrow \left( 1 - \frac{1}{2} \cos(\theta) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \sin(\theta) \right)^2 = \frac{1}{4} \quad (125)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos(\theta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (126)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = 1 \quad (127)$$

et donc  $a_0 = \frac{1}{2}$ .

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \quad (128)$$

Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|a_k| = \frac{1}{2}$ , impossible car  $P \in \mathbb{C}[X]$ , ainsi  $\|P - 1\|_\infty > \frac{1}{2}$ .

3. On définit, pour  $n \geq 1$ ,  $P_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (-\frac{1}{2} + \varepsilon_n) X^k$  avec  $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$  tel que  $P_n \in \ker(\varphi)$ . On a

$$P_n \in \ker(\varphi) \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left( -\frac{1}{2} + \varepsilon_n \right) \frac{1}{2^k} = 0 \quad (129)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \quad (130)$$

et donc  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (et  $\varepsilon_n < 0$ ). On a donc  $\|P_n - 1\|_\infty = \frac{1}{2} - \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ .

Donc  $d(1, \ker(\varphi)) = \frac{1}{2}$  et cette distance n'est pas atteinte.

■

**Solution 36.** Prouvons d'abord l'existence. Soit  $M \in \mathbb{R}^n$ , on définit  $r(M) = \sup\{\|M - A\| \mid A \in K\}$  et  $\varphi: A \mapsto \|M - A\|$  est continue sur  $K$  compact donc le sup est en fait un max. On a notamment  $r(M) = \{R > 0 \mid K \subset B(M, R)\}$ . Soit

$$\begin{aligned} r: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto r(M) \end{aligned} \quad (131)$$

Soit  $(M, M') \in (\mathbb{R}^n)^2$ . Pour tout  $A \in K$ , on a

$$\|M - A\| \leq \|M - M'\| + \|M' - A\| \leq \|M - M'\| + r(M') \quad (132)$$

En particulier, on a

$$r(M) \leq \|M - M'\| + r(M') \quad (133)$$

et en échangeant  $M$  et  $M'$ , on a  $|r(M) - r(M')| \leq \|M - M'\|$ . Donc  $r$  est 1-lipschitzienne donc continue. Soit  $A_0 \in K$ ,  $R(M) \geq \|M - A_0\| \geq \|M\| - \|A_0\| \xrightarrow{\|M\| \rightarrow +\infty} +\infty$ . Donc il existe  $M_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $r(M_0) = \min_{M \in \mathbb{R}^n} r(M) = r_0$ , d'où l'existence d'une boule fermée de rayon minimal.

Pour l'unicité, soit  $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$  tel que  $r(M_1) = r(M_2) = r_0$ . On suppose que  $\|M_1 - M_2\| = \varepsilon > 0$ . Soit  $M_3$  le milieu de  $[M_1 M_2]$ . On a  $K \subset B_{M_1, r_0} \cap B_{M_2, r_0}$ . On prend  $r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = r_0^2$  d'où

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < r_0 \quad (134)$$

Soit  $M \in B(M_1, r_0) \cap B(M_2, r_0)$ , on a

$$\|M - M_3\|^2 = \frac{1}{4} \left( \|M - M_1 + M - M_2\|^2 \right) \quad (135)$$

$$= \frac{1}{4} \left( 2\|M - M_1\|^2 + 2\|M - M_2\|^2 - \underbrace{\|M_1 - M_2\|^2}_{=\varepsilon^2} \right) \quad (136)$$

$$\leq \frac{1}{4} (2r_0^2 + 2r_0^2 - \varepsilon^2) \quad (137)$$

$$\leq r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} = r^2 \quad (138)$$

Donc  $B_1 \cap B_2 \subset \overline{B(M_3, r)}$  d'où  $K \subset \overline{B(M_3, r)}$ , ce qui est absurde car  $r < r_0$ . Donc  $M_1 = M_2$ . ■

**Solution 37.**  $\varphi$  est évidemment définie et linéaire. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right| \quad (139)$$

$$\leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right| \quad (140)$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f| \quad (141)$$

$$\leq \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \quad (142)$$

■

Donc  $\varphi$  est continue et  $\|\varphi\| \leq 1$ . Notons que si l'on a  $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$ , alors on a égalité partout au-dessus et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|f(t)| = \|f\|_\infty$  et comme  $\left| \int f \right| = \int |f|$  implique que  $f$  est de signe constant sur l'intervalle d'intégration, si l'on a  $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$ , alors  $f$  est de signe constant sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Or  $\left| \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right|$ ,  $f$  est de signe opposé sur les deux segments. Or  $f$  est continue en  $\frac{1}{2}$ , donc  $f$  est nulle. Donc pour  $f$  non nulle, on a  $|\varphi(f)| < \|f\|_\infty$  donc la norme triple n'est pas atteinte. Enfin, pour montrer que  $\|\varphi\| = 1$ , on utilise pour  $n \geq 1$ ,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ (\frac{1}{2} - t)n & \text{si } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases} \quad (143)$$

On a bien  $\|f_n\|_\infty = 1$ .

**Solution 38.**

1. Non car on applique l'application trace.
2. On a le résultat par récurrence.
3. On a

$$(n+1)\|v^n\| = \|u \circ v^n \circ v - v^n \circ v \circ r\| \leq 2\|u\|\|v\|\|v^n\| \quad (144)$$

Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v^n = 0$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n+1 \leq 2\|u\|\|v\| \quad (145)$$

ce qui est impossible. Donc il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $v^n = 0$ . Alors  $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1} = 0$  donc  $v^{n-1} = 0$  et de proche en proche  $v = 0$  : contradiction.

4. Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$(D \circ T - T \circ D)(P) = (XP)' - XP' = P \quad (146)$$

donc  $D \circ T - T \circ D = id$ . D'après ce qui précède,  $T$  et  $D$  ne peuvent pas être continus simultanément. ■

### Solution 39.

1.  $\sum_{k \geq 0} (A - I_n)^k$  converge absolument car  $\|A - I_n\|^k \leq \alpha^k$  et  $\alpha < 1$ .

Si  $AX = 0$ ,  $\|(A - I_n)X\| = \|X\| \leq \alpha\|X\|$  donc  $\|X\| = 0$  et  $X = 0$  donc  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ , idem pour  $B$ . On a alors

$$A \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k = ((A - I_n) + I_n) \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k = I_n$$

par télescopage. Donc

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k \quad (147)$$

et

$$\|A^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (148)$$

et de même pour  $B$ . On écrit alors

$$ABA^{-1}B^{-1} - I_n = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - I_n)(B - I_n) - (B - I_n)(A - I_n))A^{-1}B^{-1} \quad (149)$$

d'où

$$\|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\| \leq \frac{2\|A - I_n\|\|B - I_n\|}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \quad (150)$$

2. On prend  $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ .

3. Pour tout  $M \in G$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(M, r) \cap G = \{M\}$ . Montrons que  $G$  est discret si et seulement si  $I_n$  est isolé. En effet, si  $I_n$  est isolé, il existe  $r_0 > 0$  tel que  $B(I_n, r_0) \cap G = \{I_n\}$ .

Soit  $M \in G$ , alors pour tout  $M' \in G$ ,  $M - M' = M(I_n - M^{-1}M')$  d'où  $I_n - M^{-1}M' = M^{-1}(M - M')$ . Si

$$\|M - M'\| < \frac{r_0}{\|M^{-1}\|} \quad (151)$$

on a  $\|I_n - M^{-1}M'\| < r_0$  et donc  $M' = M$  et  $M$  est isolé. Ainsi  $G$  est isolé. La réciproque est évidente.

$C$  est dans le commutant si et seulement si  $C$  commute avec  $A$  et  $B$  si et seulement si

$$\begin{cases} ACA^{-1}C^{-1} = I_n \\ BCB^{-1}C^{-1} = I_n \end{cases} \quad (152)$$

Notons maintenant que

$$\overline{B_{\|\cdot\|}(I_n, \frac{1}{4})} \cap G = \mathcal{A} \quad (153)$$

est fini. En effet, si cet ensemble était infini, il existerait  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite injective dans  $\mathcal{A}$ .

La suite étant bornée, on peut extraire  $(M_{\sigma(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  qui converge et alors pour tout  $p \in I_n$

$$\underbrace{M_{\sigma(p)} M_{\sigma(p+1)}^{-1}}_{\xrightarrow{pto+\infty} I_n} \in G \setminus \{I_n\} \quad (154)$$

ce qui est impossible car  $I_n$  est isolé.

Comme  $A \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$ , il existe  $C \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$  telle que  $\|C - I_n\|$  soit minimale et  $\|C - I_n\| \leq \frac{1}{4}$ .

D'après la question 2 on a

$$\|ACA^{-1}C^{-1} - I_n\| < \|C - I_n\| \quad (155)$$

et même chose pour  $B$ . Donc nécessairement,  $ACA^{-1}C^{-1} = I_n$  et de même pour  $B$ . Ainsi,  $C$  commute avec toutes les matrices de  $G$ .

■

#### Solution 40.

1.  $\mathbb{C}_{n-1}[A]$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc c'est un fermé. Par division euclidienne par  $\chi_A$ , d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$ . Comme

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \quad (156)$$

$\exp(A) \in \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$ .



2. Si  $A$  est diagonalisable, il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que

$$A = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P \quad (157)$$

et donc

$$\exp(A) = P^{-1} \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P \quad (158)$$

et  $\exp(A)$  est diagonalisable.

Si  $\exp(A)$  est diagonalisable, on utilise la décomposition de Dunford :  $A = D + N$  avec  $DN = ND$ ,  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente. On a donc

$$\exp(A) = \exp(D) \underbrace{\exp(N)}_{=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}} = \exp(D) + \exp(D) \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} \right) = \exp(D) + N' \quad (159)$$

avec  $N'$  nilpotente et  $\exp(D)$  est diagonalisable d'après le sens direct.  $N'$  commute avec  $\exp(D)$ . Par unicité de la décomposition de Dunford,  $\exp(A)$  étant diagonalisable, on a  $N' = 0$ . Comme  $\exp(D)$  est inversible,

$$N \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}}_{=I_n + N''} = 0 \quad (160)$$

avec  $N''$  nilpotente.  $I_n + N''$  est donc inversible et ainsi  $N = 0$  et  $A$  est diagonalisable.

3. D'après ce qui précède,  $\exp(A) = I_n$  est diagonalisable et

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{e^\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\} = \{I_n\} \quad (161)$$

Donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ .

Réciproquement, si  $A$  est diagonalisable avec  $\text{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ , en diagonalisant, on a bien  $\exp(A) = I_n$ .

4. Sur  $\mathbb{R}$ , si  $A$  est diagonalisable,  $\exp(A)$  l'est aussi. Cependant, la réciproque n'est pas vraie, par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{pmatrix} \text{ semblable à } \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \quad (162)$$

On a  $\chi_M = X^2 + 4\pi^2$ ,  $\exp(A) = I_2$  et  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

■

**Solution 41.**

1. On a  $\ln(1-x) = P(x) + x^2 O(1)$  et  $\exp(y) = Q(y) + y^n O(1)$  d'où

$$\exp(\ln(1+x)) = 1+x = Q(\ln(1+x)) + \underbrace{\ln(1+x)^n O(1)}_{O(x^n)} \quad (163)$$

alors  $1+x = Q(P(x)+O(x^n))+O(x^n) = Q(P(x))+O(x^n)$ . Soit  $B(X) = Q(P(X))+O(x^n) \in \mathbb{R}[X]$ , on a  $\frac{B(x)}{x^n} = O(1)$  donc  $X^n \mid B$  et

$$Q(P(X)) = 1 + X + B(X) = 1 + X + X^n A(X) \quad (164)$$

2. On a  $N^n = 0$  donc  $P(N)$  est aussi nilpotente et on a

$$\exp(P(N)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(N)^k}{k!} = Q(P(N)) = I_n + N + 0 \quad (165)$$

3. Soit  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  et sa décomposition de Dunford :  $M = D + N$  avec  $D$  diagonalisable,  $N$  nilpotente et  $DN = ND$ . On a  $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(M) \subset \mathbb{C}^*$  et on écrit

$$M = D \underbrace{(I_n + \underbrace{D^{-1}N}_{\text{nilpotente}})}_{=\exp(P(D^{-1}N))} \quad (166)$$

si  $D = P_1 \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P_1^{-1}$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  il existe  $\mu_k \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda_k = \exp(\mu_k)$  (car  $\exp$  est surjectif sur  $\mathbb{C}^*$ ). Alors

$$D = \exp(P_1 \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}) \in \mathbb{C}[D] \quad (167)$$

puis

$$M = \exp\left(P_1 \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}\right) \exp\left(P(D^{-1}N)\right) \quad (168)$$

$$= \exp\left(P_1 \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1} + P(D^{-1}N)\right) \quad (169)$$

car les matrices commutent.

Donc  $\exp$  est surjective.

■

**Solution 42.** On a  $A \subset \overline{A}$ ,  $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{2n} \in \overline{A}$  et  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \in \overline{A}$ .

Si  $n \geq 2$  et  $p \geq 2$ ,  $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \leq 1$ . Donc si  $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \geq 1$ , alors  $n = 1$  ou  $p = 1$ .

Si  $x > e$ , à partir d'un certain rang, on a  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \frac{e+x}{2}$  et si  $x \notin A$ ,  $x \notin \overline{A}$ . Si  $1 \leq x < e$ , à partir d'un certain rang, on a  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > x$  donc si  $x \notin A$ ,  $x \notin \overline{A}$ .

Soit  $x < 1$ , si  $n \geq 2$  et  $p \geq 3$  ou  $n \geq 3$  et  $p \geq 2$ , on a  $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{5}{6}$  et

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} = \exp\left((n+p) \ln\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\right) \quad (170)$$

$$\leq \exp\left((n+p) \ln\left(\frac{5}{6}\right)\right) \quad (171)$$

$$\leq \max\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}, \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^p}_{\xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0}\right) \quad (172)$$

Il existe  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{x}{2}$ . Si  $n$  ou  $p$  est plus grand que  $N_0$ , on a donc

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \leq \frac{x}{2} \quad (173)$$

Donc il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de  $A$  plus grand que  $\frac{x}{2}$ . Ainsi,

$$\overline{A} = A \cup \{e, 0\} \quad (174)$$

■

**Solution 43.** On note

$$\mathbb{V} = \bigcup_{m \geq 1} \mathbb{U}_m = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{m}} \mid m \geq 1, k \in \{0, \dots, m-1\} \right\} \quad (175)$$

Soit  $M \in H$ .  $X^m - 1$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$  donc  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  avec ses valeurs propres dans  $\mathbb{V}$ . Réciproquement, si  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{V}$ . Alors pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ ,  $\exists m_\lambda \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{U}_{m_\lambda}$  et soit  $m = \text{ppcm}_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)}(m_\lambda)$ . Alors  $M^m = I_n$ .

Soit  $A \in \overline{H}$ , il existe  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = A$ . Comme le polynôme caractéristique est une fonction continue des coefficients, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \chi_{M_p}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = 0 \quad (176)$$

Or

$$|\chi_{M_p}(\lambda)| = |\lambda - \lambda_{1,p}| \dots |\lambda - \lambda_{n,p}| \geq d(\lambda, \mathbb{U})^n \quad (177)$$

avec  $\lambda_{i,p} \in \mathbb{V}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Donc  $d(\lambda, \mathbb{U}) = 0$  et comme  $\mathbb{U}$  est fermé,  $\lambda \in \mathbb{U}$ .

Réciproquement, soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$ . Soit

$$\{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_r}\} \quad (178)$$

les valeurs propres distinctes de  $A$  de multiplicités  $m_1, \dots, m_r$ . Il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que

$$A = Q \text{diag}(\underbrace{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_1}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{i\theta_r}, \dots, e^{i\theta_r}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1} \quad (179)$$

On a

$$\theta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{k} \left\lfloor k \frac{\theta}{2\pi} \right\rfloor \quad (180)$$

donc on peut former, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A = Q \text{diag}(\underbrace{e^{i\theta_{1,p}}, \dots, e^{i\theta_{1,p}}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{i\theta_{r,p}}, \dots, e^{i\theta_{r,p}}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1} \quad (181)$$

avec  $\theta_{i,p} = \frac{2\pi}{p} \left\lfloor p \frac{\theta_i}{2\pi} \right\rfloor + \frac{2j\pi}{p}$ . Pour  $p$  suffisamment grand, les  $(\theta_{j,p})$  sont deux à deux distincts donc  $A_p$  est diagonalisable et  $A_p \in H$ , et donc  $A \in \overline{H}$ . ■

#### Solution 44.

1. On a l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. On a cependant  $N_a(X^k) = |a_k|$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X^k \neq 0$ . Donc  $N_a$  est une norme implique que  $a$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{N}$ . Réciproquement, si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \neq 0$ , si  $P \neq 0$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  avec  $p_k$  et donc  $N_a(P) > 0$ . Donc  $N_a$  est une norme si et seulement si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \neq 0$ .
2. Si  $N_a$  et  $N_b$  sont équivalentes, alors il existe  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\beta N_b(X^k) \leq N_a(X^k) \leq \alpha N_b(X^k) \quad (182)$$

d'où

$$\beta |b_k| \leq N_a(X^k) \leq \alpha |b_k| \quad (183)$$

Donc  $a = O(b)$  et  $b = O(a)$ .

Réciproquement, si  $a = O(b)$  et  $b = O(a)$ , alors on a l'inégalité précédente sur les  $a_k$  et  $b_k$ , d'où

$$\beta \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k a_k| \leq \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \quad (184)$$

et donc pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\beta N_b(P) \leq N_a(P) \leq \alpha N_b(P) \quad (185)$$

et  $N_a$  et  $N_b$  sont équivalentes.

3.  $\Delta$  est continue pour  $N_a$  si et seulement s'il existe  $c \geq 0$  tel que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $N_a(\Delta P) \leq c N_a(P)$ . Si  $\Delta$  est continue alors il existe  $c \geq 0$  tel que  $N_a(kX^k) \leq c N_a(X^k)$  alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|k a_{k-1}| \leq c |a_k| \quad (186)$$

Réciproquement, si on a (186), pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$   $N_a(\Delta P) \leq c N_a(P)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = k!$ , (186) est vérifiée pour  $c = 1$ . Si  $b_k = 1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , (186) n'est pas vérifiée donc  $\Delta$  n'est pas continue pour  $N_b$ . ■

#### Solution 45.

1. On a  $d(x, A) = 0$  si et seulement si  $\inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$  si et seulement si  $\varepsilon > 0, \exists a \in A: \|x - a\| < \varepsilon$  si et seulement si  $x \in \overline{A}$ .

On a  $A \subset \overline{A}$  donc  $d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a' \in \overline{A}$  tel que  $\|x - a'\| < d(x, \overline{A}) + \varepsilon$  et il existe  $a \in A$  tel que  $\|a - a'\| < \varepsilon$ . Ainsi,

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq d(x, \overline{A}) + 2\varepsilon \quad (187)$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$  et donc on a l'égalité.

2.  $A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B}$  donc  $d(A, B) \geq d(\overline{A}, \overline{B})$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $(a', b') \in \overline{A} \times \overline{B}$  tel que  $\|a' - b'\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + \varepsilon$  et il existe  $(a, b) \in A \times B$  tel que  $\|a - a'\| < \varepsilon$  et  $\|b - b'\| < \varepsilon$ . En utilisant l'inégalité triangulaire, on a donc

$$d(A, B) \leq \|a - b\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + 3\varepsilon \quad (188)$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a bien l'égalité.

■

**Solution 46.**  $\varphi_{x_0}$  est une forme linéaire. Elle est continue si et seulement  $C > 0$  tel que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$|P(x_0)| \leq C \|P\|_\infty \quad (189)$$

Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , on a

$$|P(x_0)| \leq \|P\|_\infty \sum_{k=0}^n |x_0|^k \quad (190)$$

Si  $|x_0| < 1$ , on a

$$|P(x_0)| \leq \|P\|_\infty \frac{1}{1 - |x_0|} \quad (191)$$

donc  $\varphi_{x_0}$  est continue et si  $x_0 = |x_0|e^{i\theta_0}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P_n = \sum_{k=0}^n e^{-ik\theta_0} X^k$ , on a  $\|P_n\|_\infty = 1$  et

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - |x_0|} \quad (192)$$

donc  $\|\varphi_{x_0}\| = \frac{1}{1 - |x_0|}$ .

Si  $|x_0| \geq 1$ ,

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (193)$$

donc  $\varphi_{x_0}$  n'est pas continue. ■

**Solution 47.** Pour le sens indirect, soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$  donc  $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$ . Par continuité du déterminant, on a  $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \det(-\lambda I_n)$ . Donc  $\lambda = 0$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$  donc  $M$  est nilpotente.

Pour le sens direct, soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  canoniquement associée à  $M$ . On trigonalise  $u$  sur une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  avec  $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \dots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$ . Posons pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$ . On pose  $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$  et  $M_p = \text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u)$ , semblable à  $M$  et  $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  car  $\|M_p\| \leq \frac{1}{p} \|M_1\|$ . ■

**Solution 48.** On pose  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  canoniquement associée à  $M$ .

Pour le sens indirect, si  $M$  n'est pas diagonalisable, il existe une base  $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  telle que

$$\text{mat}_B(u) = D + N \quad (194)$$

où  $D$  est diagonale et  $N$  est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases  $\mathcal{B}_p$  définies à l'exercice précédent, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} D \quad (195)$$

Si  $D \in S_M$ , alors  $M$  est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc  $S_M$  n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si  $M$  est diagonalisable, soit  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (S_M)^\mathbb{N}$  avec  $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M'$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a  $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$  car  $M$  et  $M_p$  sont semblables. Par continuité du déterminant, on a  $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$ , donc  $\chi_{M'} = \chi_M$ . De plus,  $A \mapsto \Pi_M(A)$  (polynôme minimal) est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\Pi_M(M_p) = 0$  donc  $\Pi_M(M') = 0$ .  $M'$  est donc annulée par  $\Pi_M$ , donc  $M'$  est diagonalisable et comme  $\chi_M = \chi_{M'}$ ,  $M$  et  $M'$  ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc  $M' \in S_M$ . ■

**Remarque 9.** *Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour*

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix} \quad (196)$$

On a  $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  et  $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$  donc  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p}$ .

**Solution 49.** On note  $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leq h\}$ .

1.  $\omega_\varphi$  est bien défini car  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2\|\varphi\|_\infty$ . Si  $0 < h \leq h'$ , alors  $A_h \subset A_{h'}$  donc  $\sup(A_h) \leq \sup(A_{h'})$  donc  $\omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h')$ .
2. Soit  $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , soit  $(x, y) \in I^2$  tel que  $|x - y| \leq h + h'$  (où on peut supposer que  $x \leq y$ ).
  - Si  $y \in [x, x + h]$ , alors  $|x - y| \leq h$  donc  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
  - Si  $y \in [x + h, x + h + h']$ ,  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x + h)| + |\varphi(x + h) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$  car  $|x - (x + h)| \leq h$  et  $|x + h - y| \leq h'$ .

Donc  $\omega_\varphi(h + h') \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$ .

3. Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $\lambda h \leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)h$  et par croissance et ce qui précède, on a

$$\omega_\varphi(\lambda h) \leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega_\varphi(h) \leq (\lambda + 1)\omega_\varphi(h) \quad (197)$$

4. Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\varphi$  étant uniformément continue, il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in I^2$ , si  $|x - y| \leq \alpha$  on a  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$  et on a pour  $h \leq \alpha$ ,  $\omega_\varphi(h) \leq \varepsilon$  d'où  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_\varphi(h) = 0$ .

Soit alors  $h_0 > 0$  fixé et  $h > 0$ ,

— si  $h_0 \leq h$ , on a  $0 \leq \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leq \omega_\varphi(h - h_0)$ .

— si  $h \leq h_0$ , on a  $0 \leq \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h_0 - h)$ .

Dans tous les cas, on a  $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leq \omega_\varphi(|h_0 - h|)$ . Donc on a bien  $\lim_{h \rightarrow h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$ .

Donc  $\omega_\varphi$  est continue (et même uniformément).

■

**Solution 50.**  $G$  est borné car si  $M \in G$ ,  $\|M\| \leq \|I_n\| + \mu = 1 + \mu$ . Montrons donc que si  $G_0$  est un sous-groupe borné de  $GL_n(\mathbb{C})$ , alors les valeurs propres de ses éléments sont de module 1, et ceux-ci sont diagonalisables.

En effet, soit  $M \in G$  et  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , soit  $X$  un vecteur propre associé. On a  $\|MX\| = |\lambda|\|X\| \leq \|M\|\|X\|$  donc  $|\lambda| \leq \|M\| \leq \sup_{M \in G} \|M\|$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $M^k \in G$  et  $\lambda^k \in \text{Sp}(M^k)$ , donc si  $|\lambda| > 1$ , on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda|^k = +\infty$ , et si  $|\lambda|^\lambda < 1$ , on a  $\lim_{k \rightarrow -\infty} |\lambda|^k = +\infty$ . Comme  $G$  est borné,  $|\lambda| = 1$ .

On utilise ensuite la décomposition de Dunford pour  $M$  :  $M = D + N$  avec  $DN = ND$ ,  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente. Grâce au binôme de Newton, pour  $k \geq r$   $p^*$   $r$  est l'indice de nilpotence de  $N$ , on a

$$M^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} N^p D^{k-p} = \underbrace{D^k}_{\text{borné}} + kND + \sum_{p=2}^{r-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\sim \frac{k^p}{p!}} N^p \underbrace{D^{k-p}}_{\text{borné car } \text{Sp}(D) \subset \mathbb{U}} \quad (198)$$

Donc

$$M^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{k^{r-1}}{(r-1)!} \underbrace{N^{r-1}}_{\neq 0} D^{k-r+1}}_{\text{non borné si } N \neq 0} \quad (199)$$



Donc  $N = 0$  et  $M = D$  est diagonalisable.

Revenons donc à l'exercice. Soit  $M \in G$  et  $\lambda = e^{i\theta} \in \text{Sp}(M)$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . Si  $X$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ , on a

$$(\lambda - 1)\|X\| = \|(M - I_n)X\| \leq \mu\|X\| \quad (200)$$

donc  $|\lambda - 1| = 2 \underbrace{|\sin(\frac{\theta}{2})|}_{\geq 0} \leq \mu$ . Donc  $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$  où  $\theta_0 = \arcsin(\frac{\mu}{2}) \in [0, \pi]$ .

Si  $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ ,  $e^{ik\pi} \in \text{Sp}(M^k)$ ,  $|e^{ik\theta} - 1| \leq \mu$ . Alors  $\{k\theta + 2l\pi \mid (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non monogène et donc dense, et alors  $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$  est dense dans  $\mathbb{U}$ , donc il existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $|e^{ik_0\theta} + 1| = |2 - (1 - e^{ik_0\theta_0})| < 2 - \mu$ , ce qui est impossible car  $|2 - (1 - e^{ik_0\theta_0})| \geq 2 - |1 - e^{ik_0\theta_0}| \geq 2 - \mu$ .

Ainsi,  $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$  et il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda = e^{i\theta} \in \mathbb{U}_m$ . Ce n'est pas forcément le même  $m$  pour tout les  $M$  dans  $G$ . Notons alors pour

$$\lambda \in \bigcup_{M \in G} \text{Sp}(M) = \mathcal{A} \quad (201)$$

$\omega(\lambda)$  l'ordre (multiplicatif) de  $\lambda$  dans  $\mathbb{U}$ .

Si  $\omega(\lambda) = m$ , on a  $gr(\lambda) = \mathbb{U}_m$  donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\lambda^k = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathcal{A}$  (car  $\lambda^k \in \text{Sp}(M^k)$ ). Supposons que  $\{\omega(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{A}\}$  non borné. Alors il existe  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tel que  $m_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $e^{\frac{2i\pi}{m_k}} \in \mathcal{A}$ . Alors

$$\underbrace{e^{2i \lfloor \frac{m_k}{2} \rfloor \frac{\pi}{m_k}}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e^{i\pi} = -1} \in \mathcal{A} \quad (202)$$

ce qui est impossible car  $|\lambda + 1| \geq 2 - \mu > 0$ . On peut donc noter

$$m = \bigvee_{\lambda \in \mathcal{A}} \omega(\lambda) \quad (203)$$

et pour tout  $M \in G$ , pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ ,  $\lambda^m = 1$ . Or  $M$  est diagonalisable, donc  $M^m = I_n$ . ■

**Solution 51.** Si  $M \in \mathcal{G}_q$ ,  $P(X) = X^q - 1$  annule  $M$  donc  $M$  est diagonalisable à valeurs propres dans  $\mathbb{U}_q$ . Réciproquement, si  $M$  est diagonalisable et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_q$  alors il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  avec

$$M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \quad (204)$$

et donc

$$M^q = P \operatorname{diag}(\lambda_1^q, \dots, \lambda_n^q) P^{-1} = I_n \quad (205)$$

Si  $M \in \mathcal{G}_q$  n'est pas une homothétie, il existe  $\lambda \neq \mu \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)^2$  et  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \quad (206)$$

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} M \quad (207)$$

Or

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est semblable } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (208)$$

car  $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)$  donc est diagonalisable. Donc  $M_k \sim M$  et  $M_k \in \mathcal{G}_q$  et  $M$  n'est pas isolé.

Montrons le petit lemme suivante : soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{C}^n$  et  $\|\!\|\!\cdot\!\|$  la norme subordonnée, soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\varepsilon > 0$ . Si  $\|\!\|M - \lambda I_n\!\| \leq \varepsilon$  alors  $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \overline{B(\lambda, \varepsilon)}$ . En effet, soit  $X$  un vecteur propre de  $M$  associé à  $\mu \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ . On a

$$\|(M - \lambda I_n)X\| = |\mu - \lambda| \|X\| \leq \|\!\|M - \lambda I_n\!\| \|X\| \leq \varepsilon \|X\| \quad (209)$$

donc  $|\mu - \lambda| \leq \varepsilon$ .

Pour  $\varepsilon = \sin(\frac{\pi}{q}) > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{U}_q$ ; si  $M \in B_{\|\!\|\!\cdot\!\|}(\lambda I_n, \varepsilon) \cap \mathcal{G}_q$  alors pour tout  $\mu \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ , on a  $|\lambda - \mu| \leq \sin(\frac{\pi}{q})$  donc  $\lambda = \mu$ . Donc si  $M = \lambda I_n$  alors  $M$  est isolé (avec  $\lambda \in \mathbb{U}_q$ ). Donc les matrices scalaires sont isolées. ■