*Exercices MP/MP**

Réduction des endomorphismes

Exercice 1. *Soit* $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et pour* $(A, B) \in E^2$ *et*

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & E \\ & M & \mapsto & AM \end{array} \tag{1}$$

et

$$\begin{array}{rccc} g: & E & \to & E \\ & M & \mapsto & MB \end{array} \tag{2}$$

et $h = f \circ g$.

1. *Montrer que* f *(respectivement* g*) est diagonalisable si et seulement si* A *(respectivement* B*) l'est.*
2. *Soient* $(X_1, \ldots, X_n)$ *et* $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *deux bases de* $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

   Montrer que $(X_i Y_i^\mathsf{T})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est une base de* E.
3. *On suppose que* A *et* B *sont diagonalisables. Montrer que* h *l'est. A-t-on la réciproque ?*

Exercice 2 (Lemme des noyaux généralisé)**.** *Soit* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ *unitaires. Soient* $D = P \wedge Q$, $M = P \vee Q$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *où* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Montrer les différentes assertions suivantes :*

1. $\ker D(f) = \ker P(f) \cap \ker Q(f)$.
2. $\ker M(f) = \ker P(f) + \ker Q(f)$.
3. $\mathrm{Im} D(f) = \mathrm{Im} P(f) + \mathrm{Im} Q(f)$.
4. $\mathrm{Im} M(f) = \mathrm{Im} P(f) \cap \mathrm{Im} Q(f)$.

Exercice 3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 - 4A + 5I_n = 0$. A *est-elle inversible ? Que dire de* A *? Que dire de* n *? Calculer les puissances de* A *?*

Exercice 4. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dite stochastique si et seulement si*

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \ a_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que* $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.
2. *Soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, *montrer que* $|\lambda| \leqslant 1$.
3. *Soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ *et* x *un vecteur propre associé.*

   Montrer que si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,i} > 0$ *alors* $\lambda = 1$.

4. *Soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ *telle que* $|\lambda| = 1$. *Montrer que* λ *est une racine de l'unité.*

5. *Reconnaître les matrices stochastiques dont toutes les valeurs sont de module 1.*

Exercice 5. *Soit* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ *et*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{A,B} : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & AM - MB \end{array} \tag{3}$$

1. *Déterminer* $\mathrm{Sp}(\Phi_{A,B})$ *en fonction de* $\mathrm{Sp}(A)$ *et* $\mathrm{Sp}(B)$.

2. *Montrer que si* A *et* B *sont diagonalisables,* $\Phi_{A,B}$ *l'est aussi.*

Exercice 6. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\theta \in \mathbb{C}$. *Soit* $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = \theta MA\}$.

1. *Montrer que pour tout* $P \in \mathbb{C}[X]$, *pour tout* $M \in F$, *on a* $P(A)M = MP(\theta A)$. *Établir une relation analogue portant sur* $P(M)$.

2. *On suppose* A *diagonalisable. Quelle est l'action de* F *sur les sous-espaces propres de* A *? Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ *pour que* $F = \{0\}$.

3. *De même dans le cas général (raisonner sur* $\ker(A - \lambda I_n)^k$*).*

Exercice 7. *Réduire sur* $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. *Soit* $0 < a_1 < \cdots < a_n$ *et* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i} = 0$ *et si* $i \neq j$, $a_{i,j} = a_j$.

1. *Montrer que* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ *si et seulement si*

$$\sum_{k=i}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$$

2. *A est-elle diagonalisable ?*

Exercice 9. *Soit* G *le sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$ *engendré par les matrices diagonalisables inversibles. Montrer que* $G = GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ et $p \geqslant 2$. Montrer que u^p est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable et* $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Exercice 11 (Matrice circulante)**.** *Soit $n \geqslant 1$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et*

$$A(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Donner les éléments propres de $A(a_0, \dots, a_{n-1})$. Est-elle diagonalisable ? Calculer son déterminant.

Exercice 12. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tel que* $\dim(\ker(f)) = 1$. *Montrer que $f^{n-1} \neq 0$ et qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$, $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.*

Exercice 13 (Endomorphisme cyclique)**.** *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(V)$. Montrer qu'il existe $x \in V$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de V si et seulement si les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.*

Exercice 14. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d.*

1. *Pour $f \in \mathcal{L}(V)$, montrer qu'il existe* $r(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{rg}(f^n)$.
2. *Si f et g commutent, montrer que $r(f+g) \leqslant r(f) + r(g)$. Et si f et g ne commutent pas ?*
3. *Exprimer $r(f)$ en fonction du degré du polynôme caractéristique de f.*

Exercice 15. *Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{G}_q = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^q = I_n\}$. Quels sont les points isolés de $\mathcal{G}_q$?*

Exercice 16. *Soit*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $u \in \mathcal{L}(R^3)$ canoniquement associée à M. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Exercice 17. *Soit*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & I_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

1. *A est-elle diagonalisable ?*
2. *Donner ses éléments propres.*

Exercice 18. *Soit G un sous-groupe borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $M \in G$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$ et M est diagonalisable. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|||M - I_n||| < \alpha$ alors $G = \{I_n\}$.*

Exercice 19. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A.

1. *Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u.*
2. *Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?*

Exercice 20. *Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A^2 + A + I_3 = 0$ et $A \neq -I_3$. Montrer que A est semblable à*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 21. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.*

1. *Montrer qu'il existe un unique P_x unitaire tel que pour tout $A \in P_x\mathbb{K}$, $A(f)(x) = 0$.*
2. *Montrer que μ_f (polynôme minimal de f) est égal à*

$$\mu_f = \bigvee_{x \in E} P_x$$

3. *Soit $(x, y) \in E^2$, montrer que si $P_x \vee P_y = 1$ alors $P_{x+y} = P_x P_y$.*
4. *Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = \mu_f$.*
5. *Montrer qu'il existe $v \in E$, tel que $(v, f(v), \dots f^{n-1}(v))$ est une base de E si et seulement si $\deg(\mu_f) = n$ (donc le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique).*

Exercice 22. *Soit $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, pour $s = (s_n)_{n \geqslant 1} \in S$, on définit*

$$s^* = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k \right)_{n \geqslant 1}$$

1. *Montrer que*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S & \to & S \\ & s & \mapsto & s^* \end{array} \tag{4}$$

est un automorphisme.

2. *Déterminer les éléments propres de* φ.

Exercice 23 (Disques de Gershgorin)**.** *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On note, pour tout* $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $L_i = \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|$ *et* $C_j = \sum_{k \neq j} |a_{k,j}|$. *Soit* $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant L_i\}$ *et* $S_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{j,j}| \leqslant C_j\}$.

1. *Montrer que* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \left[\left(\bigcup_{i=1}^n D_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^n S_j\right)\right]$
2. *Montrer que si* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, *il existe* $i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, n\}^2$ *tels que*

$$|\lambda - a_{i_1,i_1}| \times |\lambda - a_{i_2,i_2}| \leqslant L_{i_1} \times L_{i_2}$$

Exercice 24. *Soit*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & 0_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \ldots & a_n & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Réduire A.

Exercice 25. *Soient* f *et* g *dans* $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ *diagonalisables. Montrer que* f *et* g *ont les mêmes sous-espaces propres si et seulement s'il existe* $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ *tels que* $f = P(g)$ *et* $g = Q(f)$.

Exercice 26. *Soit* G *un sous-groupe fini abélien de* $GL_2(\mathbb{Z})$. *Montrer que* $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ *et donner un exemple d'un tel sous-groupe dans chaque cas.*

Exercice 27. *Soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que* u *est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.*

Exercice 28. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M est-elle diagonalisable ?

Exercice 29. *Soit $n \geqslant 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.*

1.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_n \\ \vdots & & x_{n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ x_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable ?

2. *La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?*

Exercice 30.

1. *Donner les valeurs propres et vecteurs propres de*
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & XP' - nP \end{array} \tag{5}$$

2. *Donner les valeurs propres et vecteurs propres de*
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & XP' - nP'' \end{array} \tag{6}$$

Exercice 31. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

avec $a + b + c = 1$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$.

1. *Donner le $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.*

2. *La suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?*

Exercice 32. *Soit* $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n_2,n_1} & D \end{pmatrix}$$

avec $B \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n_1,n_2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ *et* $D \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$.

1. *Donner une formule pour* A^p *pour* $p \in \mathbb{N}$.
2. *Comparer, du point de vue de la divisibilité,* μ_A, $\mu_B \vee \mu_D$ *et* $\mu_B \times \mu_D$ *(polynômes minimaux).*
3. *Que dire si* $C = 0$ *?*
4. *Que dire si* $B = D$ *et* $C = I_{n_1}$ *?*
5. *Trouver une matrice* A *telle que* $\mu_A \neq \mu_B \vee \mu_D$ *et* $\mu_A \neq \mu_B \times \mu_D$.

Exercice 33. *Soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension quelconque et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $P \in \mathbb{C}[X]$. *On pose* $g = P(f)$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $g - \lambda id_E$ *n'est pas inversible. Montrer qu'il existe* $\mu \in \mathbb{C}$ *tel que* $\lambda = P(\mu)$ *et* $f - \mu id_E$ *n'est pas inversible. Si* $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$, *montrer qu'il existe* $\mu \in \mathbb{C}$ *tel que* $\lambda = P(\mu)$ *et* $\mu \in \mathrm{Sp}(f)$.

Exercice 34. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* V *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(E)$ *tel que* $V\{0\} \subset GL(E)$.

1. *Montrer que* $\dim(V) \leqslant \dim(E)$.
2. *Trouver tous les* V *possibles pour* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. *Trouver tous les* V *possibles pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $E = \mathbb{R}^2$.
4. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\dim(V) \geqslant 2$, *montrer qu'il existe* $(f, g) \in V^2$ *tel que si* $\mathcal{B}$ *est une base de* E, $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B})$ *et* $B = \mathrm{mat}(g, \mathcal{B})$ *alors* $i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(AB^{-1})$.

Exercice 35. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps quelconque,* $n \geqslant 1$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On a* $\chi_A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ *(polynôme caractéristique).*

1. *Montrer qu'il existe* $(M_0, \dots, M_{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^n$ *tel que pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\mathsf{T} = M_0 + \lambda M_1 + \cdots + \lambda^{n-1} M_{n-1}$ *(où* com *indique la comatrice.)*
2. *En formant* $(\lambda I_n - A)\,\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\mathsf{T}$, *calculer* $(M_0, \dots, M_{n-1})$ *en fonction de* $A, A^2, \dots, A^n$. *En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.*

3. *Pour les questions suivantes, on suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est 0. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A'(\lambda) = \mathrm{Tr}(\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\mathsf{T})$.*

4. *En déduire qu'il existe $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = f(\mathrm{Tr}(A), \ldots, \mathrm{Tr}(A^n))$.*

5. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,$\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$ alors $\chi_A = \chi_B$.*

Exercice 36. *On admet que si $P \in \mathbb{K}[X]$ (avec $\mathbb{K}$ un corps), il existe $\mathbb{L}$ sur-corps de $\mathbb{K}$ tel que P soit scindé sur $\mathbb{L}$ avec la caractéristique de $\mathbb{L}$ égale à la caractéristique de $\mathbb{K}$.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p premier, montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A)[p]$.

Exercice 37. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$. Montrer l'équivalence*

(i) *il existe une norme sur E telle que $|||u||| < 1$,*

(ii) $\rho(u) < 1$,

(iii) $\lim\limits_{p \to +\infty} u^p = 0$.

Exercice 38. *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(C)^2$ avec A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer l'équivalence*

(i) $\forall Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \exists h \in \{0, \ldots, n-1\}$, $BA^kY \neq 0$,

(ii) $\forall Y$ *vecteur propre de A*, $BY \neq 0$,

(iii) $\forall Y \in \mathbb{C}^n\{0\}$,

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^n \\ & t & \mapsto & B\exp(tA)Y \end{array} \tag{7}$$

n'est pas l'application nulle.