Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Intégration

Exercice 1.1. *Soit f continue strictement positive de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et*

$$\begin{array}{rccl} S: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f \end{array} \tag{1}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $x_k \in [a,b]$ tel que $S(x_k) = k\frac{S(b)}{n}$. Évaluer ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 1.2. *Soit f continue non identiquement nulle et $g(x) = \left(\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}}$.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \|f\|_\infty$.*
2. *On suppose $|f| > 0$, calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.*

Exercice 1.3. *Soit $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ strictement croissante continue avec $f(0) = 0$. Soit $g\colon [0,f(a)] \to [0,a] = f^{-1}$ (continue strictement croissante). Soit $(x,y) \in [0,a] \times [0,f(a)]$. Montrer que*

$$xy \leqslant \int_0^x f + \int_0^y g. \tag{2}$$

Expliciter le cas d'égalité.

Exercice 1.4. *Existence et calcul de*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Exercice 1.5. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.*

1. *Exprimer I_n en fonction de n.*
2. *Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ (sous réserve d'existence) ?*
3. *En déduire $\frac{\pi}{4}$ et $\ln(2)$ comme somme de séries.*

Exercice 1.6. *Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)\right\}$. On définit*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \end{array} \tag{4}$$

1. *Montrer que l'on peut définir* $m = \min_{f\in E} \phi(f)$ *et évaluer* m*. Déterminer les* $f \in E$ *tels que* $\phi(f) = m$*.*

2. *Montrer que* f *n'est pas majorée sur* E*.*

3. *Déterminer* $\phi(E)$*.*

Exercice 1.7. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$*.*

Exercice 1.8. *Existence et calcul de* $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t(1-t)^3}}\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.9. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(t)}{\sqrt{\cos(2t)}}\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.10. *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *continue par morceaux et* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *continue par morceaux* T*-périodique (*$T > 0$*). Évaluer* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t$*. Cas particulier : pour* $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *continue, évaluer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{3+2\cos(nt)}\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.11. *Soit* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *uniformément continue et intégrable.*

1. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$*.*
2. *Montrer que* $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$*.*

Exercice 1.12. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2} \end{array} \tag{5}$$

1. *Étudier la convergence simple, la convergence uniforme et en moyenne.*

2. *Soit* g *continue et bornée sur* $\mathbb{R}$*, évaluer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f_n(t)\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.13. *Existence et calcul de* $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$*.*

Exercice 1.14. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$*. On pourra poser* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$*.*

Exercice 1.15. *Pour* $\alpha > 1$*, on note*

$$\begin{array}{rccc} f_\alpha : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{1+x^\alpha|\sin(x)|} \end{array} \tag{6}$$

Montrer que f_α *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$*.*

Exercice 1.16.

1. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f = 0$.*
2. *Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\mathrm{d}t$.*
3. *En déduire $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ non nulle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$ (avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \to t^n f(t)$ intégrables sur $\mathbb{R}_+$).*

Exercice 1.17 (Transformée de Laplace)**.** *Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{L}f(a)$ converge. On définit $g(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-au} f(u)\mathrm{d}u$.*

1. *Montrer que pour tout $b > a$, $\mathcal{L}f(b)$ converge et que*
$$\mathcal{L}f(b) = (b-a)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t)\mathrm{d}t. \tag{7}$$
2. *Soit h vérifiant les mêmes conditions que f, montrer que si pour tout $b \geqslant a$, $\mathcal{L}f(b) = \mathcal{L}h(b)$, alors $f = h$ (injectivité de la transformée de Laplace).*

Exercice 1.18. *On dit que f est continue à support compact si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue et il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant A$, $f(x) = 0$.*

1. *Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t)\mathrm{d}t$, et que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *On suppose que $\widehat{f}$ est continue à support compact, montrer que $f = 0$.*

Exercice 1.19. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue, montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

Exercice 1.20. *Soit $x > 0$.*

1. *Montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t}_{I_n(x)} = \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{8}$$
2. *En déduire que*
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{9}$$
3. *Montrer que*
$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}, \tag{10}$$
où γ est la constante d'Euler.

4. *Donner un développement en série de* $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$.

Exercice 1.21 (Théorème de D'Alembert-Gauss par l'indice)**.**

1. *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ 2π*-périodique et* $\mathcal{C}^1$*. On définit l'indice de* f *par*

$$d(f) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}. \tag{11}$$

   Montrer que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi d(f)} = 1$ *si et seulement si* $d(f) \in \mathbb{Z}$.

2. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* $n \geqslant 1$*, de coefficient* $a_n \neq 0$*, on suppose que* P *ne s'annule pas sur* $\mathbb{C}$*. Soit* $t \geqslant 0$*, on pose*

$$\begin{array}{rccc} f_r : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^* \\ & t & \mapsto & P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \end{array} \tag{12}$$

3. *Évaluer* $d(f_0)$ *et* $\lim\limits_{r \to +\infty} d(f_r)$*, montrer que* $r \mapsto d(f_r)$ *est continue. Conclure.*