*Solutions MP/MP**

Calcul matriciel

Solution 1. Soit $(k,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$
\begin{aligned}
\left[M\overline{M}\right]_{k,m} &= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\overline{\omega}^{(j-1)(m-1)} && (1)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k-1}\overline{\omega}^{m-1}\right]^j && (2)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k-m}\right]^j && (3)
\end{aligned}
$$

Or $\omega^{k-m} = 1$ si et seulement si $n \mid k-m$ si et seulement si $k = m$ car $|k-m| \in [\![0, n-1]\!]$. Si $k = m$, on a $[M\overline{M}]_{k,m} = n$ et si $k \neq m$, on a

$$
[M\overline{M}]_{k,m} = \frac{1 - \left(\omega^{k-m}\right)^n}{1 - \omega^{k-m}} = 0 \tag{4}
$$

Donc $M\overline{M} = nI_n$. Ainsi, $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$$
\boxed{M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}} \tag{5}
$$

On a $\det(M\overline{M}) = \det(M)\det(\overline{M}) = n^n = \det(M)\overline{\det(M)} = |\det(M)|^2$ donc $|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$.

On calcul M^2. On a

$$
[M^2]_{k,m} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)+(j-1)(m-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k+m-2}\right]^j \tag{6}
$$

On a $k+m-2 \in [\![0, 2n-2]\!]$ donc $n \mid k+m-2$ si et seulement si $k+m = n+2$ ou $k+m = 2$ si et seulement si $m = n+2-k$ ou $k = m = 1$. Donc

$$
M^2 = \begin{pmatrix}
n & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & & & & n\\
\vdots & & & n & 0\\
\vdots & & \iddots & & \vdots\\
0 & n & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix} \tag{7}
$$

En développant par rapport à la première ligne (ou colonne), on a

$$
\det(M^2) = n^n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{8}
$$

donc

$$\boxed{\det(M) = \begin{cases} \pm n^{\frac{n}{2}} & \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est pair i.e. } \begin{cases} n \equiv 0[4] \\ \text{ou} \\ n \equiv 3[4] \end{cases} \\ \pm \mathrm{i} n^{\frac{n}{2}} & \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est impair i.e. } \begin{cases} n \equiv 1[4] \\ \text{ou} \\ n \equiv 2[4] \end{cases} \end{cases}} \tag{9}$$

■

Solution 2.

1. Si $A \geqslant 0$, soit $X \geqslant 0$, on a

$$[AX]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geqslant 0 \tag{10}$$

donc $AX \geqslant 0$.

Réciproquement, soit $j \in [\![1, n]\!]$, on prend

$$X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

où le 1 est en j-ième position. $X_j \geqslant 0$ et

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \geqslant 0 \tag{12}$$

donc $A \geqslant 0$.

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \geqslant 0, A^{-1} = (A^{-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \geqslant 0$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. On a
$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}A^{-1}_{k,j} = 0 \tag{13}$$
donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $A_{i,j} = 0$ ou $A^{-1}_{k,j} = 0$.

i étant fixé, comme $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, il existe $k_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $A_{i,k_0} > 0$. Alors pour tout $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, on a $A^{-1}_{k_0,j} = 0$ et $A^{-1}_{k_0,i} > 0$ (car A^{-1} est inversible). Supposons qu'il existe $k_1 \neq k_0$ tel que $A_{i,k_1} > 0$. Alors pour tout $j \neq i$, on a $A^{-1}_{k,j} = 0$ et $A^{-1}_{k_1,i} > 0$, mais alors les lignes k_0 et k_1 sont liées, ce qui est impossible. Donc il existe un unique $k_i \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,k_i} > 0$. Comme A est inversible, pour $i \neq i'$, on a $k_i \neq k_{i'}$, sinon on aurait deux lignes proportionnelles. Donc
$$\begin{array}{rccc} \Delta : & [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ & i & \mapsto & k_i \end{array} \tag{14}$$
Ainsi il existe une unique permutation $\sigma \in \Sigma_n$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,\sigma(i)} > 0$ et pour tout $j \neq \sigma(i)$, $A_{ij} = 0$. Donc
$$\boxed{A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)P_\sigma} \tag{15}$$
avec $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$ et $a_i > 0$.

Réciproquement, si A est de cette forme, on a $A \geqslant 0$ et
$$A^{-1} = P_\sigma^{-1} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) = P_{\sigma^{-1}} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) \tag{16}$$
donc $A^{-1} \geqslant 0$.

■

Remarque 1. *Soit*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Si $AX \geqslant 0$, en définissant $x_0 = x_{n+1} = 0$, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} \geqslant 0 \tag{18}$$

Si $x_{i_0} = \min(x_0, \dots, x_{n+1})$, on a

$$2x_{i_0} \geqslant x_{i_0-1} + x_{i_0+1} \geqslant 2x_{i_0} \tag{19}$$

donc $x_{i_0-1} = x_{i_0+1} = x_{i_0}$. De proche en proche, on a $x_{i_0} = x_0 = 0$. Donc $X \geqslant 0$.

Si $AX = 0$, on a $AX \geqslant 0$ et $A(-X) = 0$ donc $X \geqslant 0$ et $-X \geqslant 0$ donc $X = 0$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = AX \geqslant 0$, on a $A^{-1}Y = X \geqslant 0$ donc $A^{-1} \geqslant 0$.

Solution 3. Soit

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \tag{20}$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$(X+1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \tag{21}$$

On note $P_i = X^{i-1}$ et $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. $u^{-1}\colon P \mapsto P(X-1)$ donc A est inversible et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(X-1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i (-1)^{j-i-1} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} (-1)^{j-i} \tag{22}$$

donc

$$\boxed{A^{-1} = \left(\binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}} \tag{23}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k\colon P \mapsto P(X+k)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$(X+k)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i k^{j-i-1} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} k^{j-i} \tag{24}$$

donc

$$\boxed{A^k = \left(\binom{j-1}{i-1} k^{j-i} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}} \tag{25}$$

■

Solution 4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H(n)$:'si $\dim(E) = n$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\mathrm{Tr}(u) = 0$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

,

Pour $n = 1$, on a $u = 0$ si $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Pour $n \geqslant 1$, on suppose $H(n)$, soit E de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda id_E$, on a $\mathrm{Tr}(u) = (n+1)\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $u = 0$.

Sinon, il existe $e_1 \neq 0$ tel que $(e_1, u(e_1))$ est libre (résultat classique, redémontré en remarque ci-dessous). On pose $e_2 = u(e_1)$ et on complète (e_1, e_2) en une base de E : $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) = \mathcal{B}_1$. Alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & & & & \\ 0 & & \text{A'} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \tag{27}$$

avec $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(A') = 0$. Posons $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$. On note Π la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1)$. Alors si

$$\begin{aligned} u' : \ & F & \to & \ F \\ & x & \mapsto & \ \Pi(u(x)) \end{aligned} \tag{28}$$

et $A' = \mathrm{mat}_{(e_2,\dots,e_{n+1})}(u')$ donc $\mathrm{Tr}(u') = 0$. D'après $H(n)$, il existe $(f_2, \dots, f_{n+1})$ une base de F telle que

$$\mathrm{mat}_{(f_2,\dots,f_{n+1})}(u') = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Soit donc $\mathcal{B}_2 = (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ base de E. On a $u(e_1) \in F$ donc

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix}} \tag{30}$$

2. Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $D = (i\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a

$$[DM]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} i\delta_{i,k} a_{k,j} = i a_{i,j} \tag{31}$$

et

$$[MD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} k \delta_{k,j} = j a_{i,j} \tag{32}$$

On a $M \in \ker(\varphi)$ si et seulement si pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$ si et seulement si $M \in D_n(\mathbb{K})$ (ensemble des matrices diagonales). Donc $\dim(\ker(\varphi)) = n$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n^n - n$. Or pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $[MD - DM]_{i,i} = 0$. Notons Δ_n l'ensemble des matrices de diagonale nulle. On a $\mathrm{Im}\varphi \subset \Delta_n$ et $\dim(\Delta_n) = n^2 - n$ (une base de Δ_n est $(E_{i,j})_{i \neq j}$, matrices élémentaires) donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \Delta_n$.

Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. D'après 1. il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP \in \Delta_n = \mathrm{Im}(\varphi)$ donc il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = MD - DM$ donc

$$\begin{aligned} A &= P(MD - DM)P^{-1} && (33) \\ &= PMDP^{-1} - PDMP^{-1} && (34) \\ &= \boxed{XY - YX} && (35) \end{aligned}$$

avec $X = PMP^{-1}$ et $Y = PDP^{-1}$.

■

Remarque 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(x, u(x))$ est liée i.e. pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda_x x$. Alors u est une homothétie.*

En effet, soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, si (x, y) est liée, il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \mu x$. On a alors

$$u(y) = \lambda_y y = \mu u(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y \tag{36}$$

On a $y \neq 0$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Si (x, y) est libre, on a

$$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y \tag{37}$$

Par liberté de (x, y), on a $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi, λ_x ne dépend pas de x : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$, i.e. $u = \lambda id_E$.

Solution 5.

1. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ et $Y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, on a

$$XY^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & \dots & x_1y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} \tag{38}$$

est de rang 1. On a

$$(XY^\mathsf{T})^2 = X(Y^\mathsf{T}X)Y^\mathsf{T} = \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right) XY^\mathsf{T} \tag{39}$$

Si $\lambda = 0$, c'est évident.

Si $\lambda \neq 0$ et $B = I_n + \lambda XY^\mathsf{T}$, on a

$$XY^\mathsf{T} = \frac{B - I_n}{\lambda} \tag{40}$$

et

$$(XY^\mathsf{T})^2 = \frac{(B - I_n)^2}{\lambda^2} \tag{41}$$

soit

$$(XY^\mathsf{T})^2 = \frac{B^2 - 2B + I_n}{\lambda^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)\left(\frac{B - I_n}{\lambda}\right) \tag{42}$$

d'où

$$\lambda\left(Y^\mathsf{T}X\right)(B - I_n) = B^2 - 2B + I_n \tag{43}$$

d'où

$$B^2 + \left(-2 - \lambda\left(Y^\mathsf{T}X\right)\right)B + I_n\left(1 + \lambda\left(Y^\mathsf{T}X\right)\right) = 0 \tag{44}$$

Si $1 + \lambda Y^\top X \neq 0$, alors B est inversible et

$$\boxed{B^{-1} = -\frac{1}{1+\lambda Y^\top X}\left(B - \left(2 + \lambda Y^\top X\right) I_n\right)} \tag{45}$$

Si $1 + \lambda Y^\top X = 0$, on a

$$B\left(B - I_n\right) = 0 \tag{46}$$

Si B est inversible, on aura $B = I_n$ et $\lambda X Y^\top = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Or $\lambda \neq 0$ donc $X = Y = 0$ et $1 = 0$: absurde. Donc $B \notin GL_n(\mathbb{K})$.

2. On a

$$M = A + \lambda X Y^Y = A\left(I_n + \lambda A^{-1} X Y^\top\right) \tag{47}$$

donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\left(I_n + \lambda A^{-1} X Y^\top\right)$ est inversible si et seulement si $1 + \lambda Y^\top A^{-1} X$ est inversible d'après 1. Alors

$$\boxed{M^{-1} = \left(I_n - \frac{\lambda A^{-1} X Y^\top}{1 + \lambda Y^\top A^{-1} X}\right) A^{-1}} \tag{48}$$

■

Solution 6. On a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ donc il faut montrer que $(S_0, \ldots, S_n)$ est libre. Soit donc $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\alpha_0 S_0 + \cdots + \alpha_n S_n = 0 \tag{49}$$

Si $\alpha \neq 0$, on pose $k_0 = \max\left(k \in [\![0, n]\!] | \alpha_k \neq 0\right)$. On a

$$\alpha_0 (1-X)^n + \cdots + \alpha_{k_0} X^{k_0} (1-X)^{n-k_0} = 0 \tag{50}$$

soit

$$\alpha_0 (1-X)^{k_0} + \cdots + \alpha_{k_0} X^{k_0} = 0 \tag{51}$$

En évaluant en 1, on a $\alpha_{k_0} = 0$ ce qui est absurde. Donc $(S_0, \ldots, S_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X] = n+1$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$S_j = X^j(1-X)^{n-j} \tag{52}$$

$$= X^j \left(\sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^k \right) \tag{53}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^{k+j} \tag{54}$$

$$= \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j} (-1)^{k-j} X^k \tag{55}$$

donc

$$\boxed{A = P_{(1,\dots,X^n)\to(S_0,\dots,S_n)} = \left(\binom{n-j}{k-j} (-1)^{k-j} \right)_{0\leqslant k,j \leqslant n}} \tag{56}$$

On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $u(X^j) = S_j$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$. On a $u(X^j) = \left(\frac{X}{1-X}\right)^j (1-X)^n$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $u(P) = P\left(\frac{X}{1-X}\right)(1-X)^n$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on a $u(P) = Q$ si et seulement si $P\left(\frac{X}{1-X}\right)(1-X)^n = Q(X)$ si et seulement si $P(Y)\left(\frac{1}{1+Y}\right)^n = Q\left(\frac{Y}{1+Y}\right)$ soit $u(P) = Q$ si et seulement si $P(Y) = Q\left(\frac{Y}{1+Y}\right)(1+Y)^n$. Ainsi $u^{-1}(X^j) = X^j(1+X)^{n-j}$, donc

$$\boxed{A^{-1} = \mathrm{mat}_{(1,\dots,X^n)}(u^{-1}) = \left(\binom{n-j}{k-j} \right)_{0\leqslant k,j \leqslant n}} \tag{57}$$

■

Solution 7. Si on a $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$, on a $I_n \notin H$. On écrit donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathbb{K} I_n \tag{58}$$

Soit $i \neq j$, on prend $E_{i,j} = M + \lambda I_n$ (décomposition précédente) avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda \neq 0$, on a

$$M = E_{i,j} - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K}) \tag{59}$$

donc $M \in GL_n(\mathbb{K}) \cap H$: absurde. Donc $\lambda = 0$ et $E_{i,j} \in H$, d'où $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{,\neq i} \subset H$. Or

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in (GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{Vect}(E_{i,j})_{i\neq j}) \subset (GL_n(\mathbb{K}) \cap H) \tag{60}$$

donc $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$: absurde. ■

Remarque 3. *Il existe une forme linéaire non nulle* $\varphi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *telle que* $H = \ker(\varphi)$.

En effet, pour toute forme linéaire φ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, il existe une unique matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM) \tag{61}$$

Pour le montrer : si A *existe, pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$*,* $\varphi(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$*. Réciproquement, soit* $A = (\varphi(E_{j,i}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$*. On a pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ *car cex deux formes linéaires coïncident sur les* $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$*.*

Il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$*,*

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \mathrm{Tr}(AM) = 0\} \tag{62}$$

Si $r = \mathrm{rg}(A)$*, il existe* $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ *telles que* $A = Q^{-1}J_{n,n,r}P$ *(*$J_{n,n,r}$ *: matrice de taille* $n \times n$ *avec les* r *premiers coefficients diagonaux valant 1). Alors pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a*

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(J_{n,n,r}\underbrace{MPQ^{-1}}_{=\ M'}) \tag{63}$$

et il suffit de prendre

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Remarque 4. *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifie* $\dim(F) \geqslant n^2 - n + 1$ *alors*

$$G \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset \tag{65}$$

Solution 8.

1. On prend $\lambda = 0$ et $N(0 \times 0) = 0 \times N(0) = 0$ donc

$$\boxed{N(0) = 0} \tag{66}$$

2. On a pour $j \neq i$, $E_{i,j} \times E_{j,j} = E_{i,j}$ et $E_{j,j}E_{i,j} = 0$ donc $N(E_{i,j}) = N(E_{i,j}E_{j,j}) = N(E_{j,j}E_{i,j})$ d'où

$$\boxed{N(E_{i,j}) = 0} \tag{67}$$

3. Déjà traité à l'Exercice 4.

4. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} \tag{68}$$

donc

$$\boxed{N(A) = N(P^{-1}AP) \leqslant \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} N(E_{i,j}) = 0} \tag{69}$$

5. Soit $A' = A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n$. On a $N(A') = 0$ d'après ce qui précède. Montrons que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$,

$$|N(A) - N(B)| \leqslant N(A-B) \tag{70}$$

On écrit $A = A - B + B$ et $N(A) \leqslant N(A-B) + N(B)$ d'où $N(A) - N(B) \leqslant N(A-B)$ et on a le résultat par symétrie de A et B.

On a donc

$$\left| N(A) - N\left(\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) \right| \leqslant N\left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = 0 \tag{71}$$

d'où

$$\boxed{N(A) = N\left(\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = |\mathrm{Tr}(A)| \times \underbrace{N\left(\frac{I_n}{n}\right)}_{=\ a \geqslant 0}} \tag{72}$$

■

Solution 9. On écrit

$$f + g = f \circ \left(id + f^{-1} \circ g\right) \tag{73}$$

avec $f^{-1} \circ g$ de rang 1. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ g) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \star \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{74}$$

avec $\alpha = \mathrm{Tr}(f^{-1} \circ g)$ et donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(id + g^{-1} \circ g)$ est inversible si et seulement si $1 + \alpha \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(f^{-1} \circ g) \neq 1$. ■

Solution 10. Par symétrie du problème, il suffit de déterminer les

$$a_{n,j} = |\{\text{chemins de longueur } n \text{ de } 1 \text{ vers } j \in \{2,3,4\}\}| \tag{75}$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a(n,1) \\ a(n,2) \\ a(n,3) \\ a(n,4) \end{pmatrix} \tag{76}$$

On a alors

$$X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\,A} X_n \tag{77}$$

car (en raisonnant modulo 4) il y a autant de chemins de longueur n+1 reliant 1 à j que de chemins de longueur n reliant 1 à j-1 + chemins de longueur n reliant 1 à j+1. d'où $X_n = A^n X_0$ avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} \tag{79}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{80}$$

On a $B^2 = I_2$ et on montre par récurrence

$$\left\{\begin{array}{ll} A^{2p} = 2^{2p-1}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix} & p \geqslant 1 \\ A^{2p+1} = 2^{2p}\begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} & p \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{81}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} a(2p,1) = 2^{2p-1} = a(2p,3) \\ a(2p,2) = 0 = a(2p,4) \\ a(2p+1,1) = 0 = a(2p+1,3) \\ a(2p+1,4) = 2^{2p} = a(2p+1,4) \end{array}} \tag{82}$$

Ici, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{83}$$

En deux itérations, il y a chaque fois deux possibilités pour relier deux sommets différents de même partié, et 3 pour revenir au même sommet. On a donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_8 + 2 \begin{pmatrix} B & B & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \end{pmatrix} \tag{84}$$

On applique le binôme de Newton pour calculer les puissances paires de A, puis on déduit les puissances impaires en multipliant par A. ■

Solution 11. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Supposons $AX = 0$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0 \Rightarrow -a_{i,i} x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j \tag{85}$$

donc

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j \right| = |a_{i,i} x_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j} x_j| \tag{86}$$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$x_{i_0} = \max \{ |x_i| \, , i \in [\![1, n]\!] \} \tag{87}$$

On a alors

$$|a_{j,i_0}| \, |x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i_0,j}| \tag{88}$$

D'après l'hypothèse, on a $|x_{i_0}| = 0$ donc $X = 0$ et A est inversible.

Il faut l'inégalité stricte, un contre-exemple est donnée par une ligne nulle. ■

Remarque 5. *Si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $|a_{j,j}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$ alors $A^\mathsf{T} \in GL_n(\mathbb{C})$ et donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$.*

Solution 12. On écrit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
i \wedge j &= \sum_{k \mid i\wedge j} \varphi(k) && (89)\\
&= \sum_{\substack{k\mid i\\ k\mid j}} \varphi(k) && (90)\\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} b_{k,j} \varphi(k) && (91)
\end{aligned}$$

avec $b_{k,i} = 1$ si $k \mid i$ et 0 sinon. On a alors, si $A = (i \wedge j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $A = B^\mathsf{T} C$ avec $B = (b_{k,i})_{1\leqslant i,k\leqslant n}$ (triangulaire supérieure) et $C = (\varphi(k) b_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant n}$ (triangulaire supérieure). Donc

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(i)} \tag{92}$$

■

Solution 13. Pour l'unicité, si $A = L_1U_1 = L_2U_2$ telles que proposées. Comme A est inversible, on a $\det(A) = \det(L_i)\det(U_i) \neq 0$ pour $i\{1,2\}$ et donc L_i et U_i sont inversibles. Ainsi,

$$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^{-}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{T}_n^{+}(\mathbb{C}) \tag{93}$$

avec des 1 sur la diagonale, c'est donc I_n, d'où l'unicité.

Pour l'existence, on travaille par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour $n = 1$ on a $A = (1) \times (a_{1,1})$. Soit $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ vérifiant l'hypothèse, alors A_n vérifie l'hypothèse $A_n = L_nU_n$ avec

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & Y \\ X^\mathsf{T} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \tag{94}$$

On veut

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} & 0 \\ L' & \vdots \\ & 0 \\ X_1^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U' & & & Y_1 \\ 0 & \dots & 0 & u_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \tag{95}$$

On a $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, par produits par blocs, on a $A_n = L'U' = L_nU_n$ et par unicité, $L' = L_n$ et $U' = U_n$. On a $X^\mathsf{T} = X_1^\mathsf{T} U'$ et donc $X_1^\mathsf{T} = X^\mathsf{T} U_n^{-1}$ et $Y = L_nY_1$ donc $Y_1 = L_n^{-1} Y$.

Enfin, $a_{n+1,n+1} = X_1^\top Y_1 + u_{n+1,n+1}$ et donc

$$u_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1} - X_1^\top Y_1 = a_{n+1,n+1} - X^\top U_n^{-1} L_n^{-1} Y \tag{96}$$

Réciproquement, en définissant ainsi U et L, on a bien $A = Lu$ en remontant les calculs. ■

Solution 14. On a $\sum_{k \in A_i} a_k - \sum_{k \in B_i} a_k = 0$ (combinaison linéaire des a_k avec des coefficients ± 1), donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \pm 1 \\ \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{pmatrix}}_{=X} = 0 \tag{97}$$

Sur chaque ligne, il y a n fois 1 et n fois -1 (car les A_i et B_i sont disjoints). On veut montrer que $X = \alpha \mathbf{1}$. On a $X \in \ker(A)$ et $\mathbf{1} \in \ker(A)$ (car il y a n 1 et n -1 par ligne). On veut donc montrer que $\dim(\ker(A)) = 1$, soit $\mathrm{rg}(A) = 2n$.

On doit donc montrer qu'il existe une sous-matrice de taille $2n$ inversible car $\dim(\ker(A)) \geqslant 1$. Comme on est bloqué par les ± 1, on se place dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit donc

$$\overline{B_n} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \dots & \dots & \overline{1}1 \\ \overline{1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \overline{1}1 \\ \overline{1}1 & \dots & \dots & \overline{1}1 & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \tag{98}$$

Si $\det(\overline{B_n}) \neq 0$, on a $\det(B_n) \neq 2k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où B_n est obtenue en enlevant à A sa dernière ligne et sa dernière colonne, et donc $\det(A) \neq 0$.

On cherche un polynôme annulateur de $\overline{B_n}$. On a

$$\left(\overline{B_n} + \overline{I_{2n}}\right)^2 = \overline{B_n}^2 + 2\overline{B_n} + I_{2n} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \dots & \overline{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{1} & \dots & \overline{1} \end{pmatrix}^2 = 2n \begin{pmatrix} \overline{1} & \dots & \overline{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{1} & \dots & \overline{1} \end{pmatrix} = \left(\overline{0}\right) \tag{99}$$

Ainsi,

$$\overline{B_n}\left(\overline{B_n} + 2\overline{I_{2n}}\right) = -\overline{I_{2n}} = \overline{I_{2n}} \tag{100}$$

donc $\overline{B_n} \in GL_n\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ et donc $B_n \in GL_{2n}(\mathbb{R})$, ce qui démontre bien que $\mathrm{rg}(A) = 2n$ et $\ker(A) = \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$, d'où

$$\boxed{a_1 = \cdots = a_{2n+1}} \tag{101}$$

■

Solution 15. On note $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ pour $i < j$. On rappelle que la multiplication à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$ remplace la i-ième ligne de la matrice L_i par $L_i + \lambda L_j$: on ajoute à une ligne λ fois une ligne d'indice supérieur. La multiplication à droite par $T_{i,j}(\lambda)$ remplace la j-ième colonne de la matrice C_j par $C_j + \lambda C_i$: on ajoute à une colonne λ foi une colonne d'indice inférieur. Ces matrices sont des matrices de transvection.

On note aussi $D_i(\lambda)$ la matrice de dilatation qui contient des 1 sur la diagonale sauf en i position où il y a un λ. On rappelle que la multiplication à gauche par $D_i(\lambda)$ revient à multiplier L_i par λ et la multiplication à droite revient à multiplier C_i par λ.

Sur la première colonne de M, il y a au moins un coefficient non nul car $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Soit

$i_1 = \max\{i \in [\![, n]\!], m_{i,1} \neq 0\}$. On effectue alors

$$D_{i_1}\left(\frac{1}{m_{i_1,1}}\right) M = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \star & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \tag{102}$$

Par produite de transvections (qui sont des matrices triangulaires supérieures, i.e. dans $\mathcal{T}_n^+$) à gauche, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \tag{103}$$

Par produite de transvections $\in \mathcal{T}_n^+$ à droite, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \tag{104}$$

Soit $M' \in GL_n(\mathbb{C})$ la matrice extraite de M en ôtant la première colonne et la i_1-ième ligne. On procède par récurrence avec M'. Donc il existe $\sigma \in \Sigma_n, (T, T') \in (\mathcal{T}_n^+)^2$ telle que

$$\boxed{M = TP_\sigma T'} \tag{105}$$

Montrons que tout matrice de $\mathcal{T}_n^+$ inversible est produit de matrices de transvections dans $\mathcal{T}_n^+$ et de dilatations.

Soit $T \in \mathcal{T}_n^+ \cap GL_n(\mathbb{C})$ avec

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \tag{106}$$

On a $t_{1,1} \neq 0$ car sinon la colonne 1 est nulle. On a donc

$$TD_1\left(\frac{1}{t_{1,1}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \star & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \star \end{pmatrix} \tag{107}$$

Puis, par produit de transvections à droite, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \star \end{pmatrix} \tag{108}$$

On procède ensuite par récurrence sur n, et on a

$$T \times B_1 \times \cdots \times B_l = I_n \tag{109}$$

donc

$$T = B_l^{-1} \times \cdots \times B_1^{-1} \tag{110}$$

où $B_i \mathcal{T}_n^+$ transvection ou dilatation.

Soit donc (T, T', P_σ) vérifiant les hypothèses telles que $M = TP_\sigma T'$, alors on a

$$T^{-1}MT'^{-1} = P_\sigma = \underbrace{B_l^{-1} \times \cdots \times B_1^{-1}}_{\text{transvections ou dilatations}} \times M \times \underbrace{B_l'^{-1} \times \cdots \times B_1'^{-1}}_{\text{transvections ou dilatations}} \tag{111}$$

Nécessairement, on a $\sigma(1) = i$ défini plus haut. Donc de proche en proche, σ est univoquement déterminée.

Cependant, on peut écrire

$$I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times I_2 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times I_2 \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{112}$$

donc il n'y a pas unicité de T et T'. ■

Solution 16.

1. Soit $A \in J \cap GL_n(\mathbb{K})$, on a pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$M = \underbrace{\underbrace{M \times A}_{\in J} \times A^{-1}}_{\in J} \in J \tag{113}$$

2. Soit $A_0 \in J \setminus \{0\}$ de rang $r \neq 0$. Il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A_0P = J_r \in J$, on a alors

$$\boxed{J_r \times J_1 = J_1 \in J} \tag{114}$$

3. Deux matrices de rang 1 sont équivalentes donc toutes les matrices de rang 1 son dans J. Or si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit

$$\boxed{A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \underbrace{a_{i,j}E_{i,j}}_{\text{de rang 1 ou 0}} \in J} \tag{115}$$

■

Solution 17. On a

$$(\lambda A + I_n)(\lambda B + I_n) = \lambda^2 AB + \lambda A + \lambda B + I_n = I_n \tag{116}$$

donc $\lambda B + I_n$ est inversible. De plus, $A(\lambda B + I_n) = -B$ donc

$$A = -\left(\lambda B + I_n\right)^{-1} B \tag{117}$$

Or $(\lambda B + I_n)^{-1}$ et B commutent. En effet, comme $\lambda \neq 0$, on a

$$B(\lambda B + I_n)^{-1} = \left(\left[B + \frac{1}{\lambda I_n}\right] - \frac{1}{\lambda} I_n\right)(\lambda B + I_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n - \frac{1}{\lambda}(\lambda B + I_n)^{-1} \tag{118}$$

et on montre de même que

$$(\lambda B + I_n)^{-1} B = \frac{1}{\lambda} I_n - \frac{1}{\lambda}(\lambda B + I_n)^{-1} \tag{119}$$

Ainsi,

$$\boxed{BA = -B(\lambda B + I_n)^{-1}B = -(\lambda B + I_n)^{-1}BB = AB} \tag{120}$$

■

Solution 18. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^\top$

On a $AX = Y$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcll} x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n & = & y_1 & [1] \\ a_2 x_1 + x_2 & = & y_2 & [2] \\ \vdots & & & \\ a_n x_1 + x_n & = & y_n & [n] \end{array}\right. \tag{121}$$

si et seulement si $(L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n a_i L_i)$

$$\left\{\begin{array}{lcll} \left(1 + \sum_{i=2}^n a_i^2\right) x_1 & = & y_1 + \sum_{i=2}^n a_i y_i & [1] \\ a_2 x_1 + x_2 & = & y_2 & [2] \\ \vdots & & & \\ a_n x_1 + x_n & = & y_n & [n] \end{array}\right. \tag{122}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n}{1 + \sum_{i=2}^n a_i^2} \\ x_j & = & y_j - a_j x_1 & \forall j \in [\![2, n]\!] \end{cases} \tag{123}$$

En posant

$$\lambda = \frac{1}{1 + \sum_{i=2}^n a_i^2} \tag{124}$$

cela équivaut à (en posant $a_1 = 1$)

$$\begin{cases} x_1 & = & \lambda(y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n) \\ x_j & = & \lambda\left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} a_i y_i - \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} a_i^2\right) y_j\right] & \forall j \in [\![2, n]\!] \end{cases} \tag{125}$$

Donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 6. *On pourrait se poser la question si $A \in GL_n(\mathbb{C})$? Si $1 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$, on sait que $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Cependant, on vérifie que si $X = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & \ldots & -a_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} \neq 0$, on a $AX = 0$ et donc $A \notin GL_n(\mathbb{C})$.*

Solution 19.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \in \ker(A) \cap H$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ et $AX = 0$. Notons que l'on a

$$A + A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} = N \tag{126}$$

On a

$$NX = -X \tag{127}$$

et $N^\mathsf{T} = N$.

On a alors

$$X^\mathsf{T} A X + X^\mathsf{T} A^\mathsf{T} X = X^\mathsf{T} N X = -X^\mathsf{T} X = -\sum_{i=1}^n x_i^2 \tag{128}$$

Comme $AX = 0$, on a aussi $X^\top AX = 0$ et $X^\top A^\top X = (AX)^\top X = 0$ donc on a $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ d'où $x_i = 0$ et $X = 0$. Donc

$$\boxed{\ker(u) \cap H} = \{0\} \tag{129}$$

Donc $\dim(\ker(u)) \in \{0, 1\}$ et le théorème du rang assure alors que $\mathrm{rg}(A) \in \{n-1, n\}$.

2. Comme $A + A^\top = N$, on a $A = \frac{1}{2}N + S$ avec $S \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Or, pour $S = 0$, on a

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - I_n \tag{130}$$

et $(N + I_n)^2 = n(M + I_n)$ donc $N \in GL_n(\mathbb{R})$. De même, pour

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{132}$$

et $\mathrm{rg}(A) = n - 1$.

Donc on peut avoir les deux possibilités.

■

Solution 20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ de range 1 telle que $\mathrm{Tr}(u) = \lambda$. On a $\dim(\ker(u)) = n - 1$

En prenant une base de $\ker(u)$ $(e_1, \dots, e_{n-1})$ que l'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{133}$$

Si $\lambda \neq 0$, posons $f_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{n-1} e_n + e_n$, on a

$$u(f_n) = \lambda f_n \tag{134}$$

si et seulement si

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \lambda e_n = \lambda f_n \tag{135}$$

On pose $\beta_1 = \frac{\alpha}{\lambda}, \dots, \beta_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\lambda}$ et si $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1}, f_n)$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{136}$$

Si $\lambda = 0$, il existe $i_0 \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$ (sinon $\mathrm{rg}(u) = 0$). On pose $f_n = e_n$ et $f_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} \in \ker(u) \setminus \{0\}$ et on complète $(f_1, \dots, f_{n-1})$ en une base de $\ker(u)$. On pose $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ base de $\mathbb{C}^n$ et on a alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{137}$$

Ainsi, dans les deux cas, deux matrices sont de rang 1 et de même trace si et seulement si elles sont semblables. ■

Solution 21.

1. Soit $M \in F$, telle que $\text{rg}(M) = r$. M est équivalente à J_r, donc il existe $(P_0, Q_0) \in GL_n(\mathbb{R})^2$ telle que $P_0^{-1} J_r Q_0 = M \in F$.

2. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & F & \to & F_0 \\ & M & \mapsto & P_0 M Q_0^{-1} \end{array} \tag{138}$$

est linéaire surjective par définition de F_0 de réciproque $\varphi^{-1}\colon M_0 \to P_0^{-1} M_0 Q_0$ donc F et F_0 sont isomorphes.

Pour tout $M \in F$, $\text{rg}(M) = \text{rg}(\varphi(M))$: φ étant bijective, on a $r = \max\{\text{rg}(M_0) | M_0 \in F_0\}$

3. Il suffit de choisir les coefficients de B et C donc

$$\boxed{\dim(G_0) = n(n-r)} \tag{139}$$

4. On écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda I_r & B^\mathsf{T} \\ B & C \end{pmatrix} = \lambda J_r + M_0 \in F_0 \tag{140}$$

Si on avait

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & \lambda I_r & & \vdots \\ & & & b_{j,r} \\ \hline b_{i,1} & \dots & b_{i,r} & c_{i,j} \end{array}\right) \neq 0 \tag{141}$$

(déterminant d'une sous-matrice de taille $r+1$ de la matrice précédente), on aurait

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \lambda I_r & B^\mathsf{T} \\ B & C \end{pmatrix} \geqslant r + 1 > r \tag{142}$$

ce qui est exclu d'après 2.

5. En effectuant $L_{r+1} \leftarrow L_{r+1} - \frac{b_{i,1}}{\lambda} L_1 - \cdots - \frac{b_{i,r}}{\lambda} L_r$, en notant $f(\lambda) = c_{i,j} - \sum_{k=1}^{r} \frac{b_{i,k}}{\lambda} b_{j,k}$, on obtient

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & \lambda I_r & & \vdots \\ & & & b_{j,r} \\ \hline 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{array}\right) = 0 \tag{143}$$

D'où $f(\lambda) = 0$ et comme $\lambda \neq 0$, on a

$$\lambda f(\lambda) = 0 = \lambda c_{i,j} - \sum_{k=1}^{r} b_{i,k} b_{j,k} \tag{144}$$

qui est nulle sur $\mathbb{R}^*$ donc $c_{i,j} = 0$ et $\sum_{k=1}^{r} b_{i,k} b_{j,k} = 0$. Ceci implique $C = 0$ et pour $i = j$, on a $\sum_{k=1}^{r} b_{j,k}^2 = 0$ donc $B = 0$.

6. On a donc $G_0 \cap F_0 = \{0\}$ ($\dim(G_0) = n(n-r)$). G_0 et F_0 sont en somme directe, donc

$$\dim(G_0 \oplus F_0) = \dim(G_0) + \dim(F_0) \leqslant n^2 \tag{145}$$

donc

$$\boxed{\dim(F) = \dim(F_0) \leqslant n^2 - n(n-r) = nr} \tag{146}$$

7. Si $F \cap GL_n(\mathbb{R}) = \emptyset$, on a $r \leqslant n-1$ et $\dim(F) \leqslant n(n-1)$. Par contraposée, si $\dim(F) \geqslant n^2 - n + 1$, on a $F \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

8. Soit

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B^\mathsf{T} \\ B & C \end{pmatrix} \middle| B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \right\} \tag{147}$$

sous-$\mathbb{R}$-espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par les mêmes arguments que précédemment, on a $G_1 \cap F_0 = \{0\}$ et $\dim_\mathbb{R}(G_1) = 2n(n-r)$ et $\dim_\mathbb{R} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = 2n^2$ donc

$$\boxed{\dim_\mathbb{R} F_0 = 2 \dim_\mathbb{C} F_0 \leqslant 2nr} \tag{148}$$

Le résultat est donc encore valable.

■

Solution 22. On a $f(I_n) = f(I_n)^2$ donc $f(I_n \in \{0,1\}$. Si $f(I_n) = 0$, alors $f = 0$ ce qui est exclu.

Si M est inversible, on a

$$f(M \times M^{-1}) = f(M) \times f(M^{-1}) = 1 \tag{149}$$

donc $f(M) \neq 0$.

Si M n'est pas inversible, posons $r = \mathrm{rg}(M) \leqslant n-1$. M est équivalente la matrice nilpotente

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{150}$$

Donc il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2$ telles que $M = P^{-1}M'Q$. On a

$$f(M'^n) = (f(M'))^n = f(0) \tag{151}$$

Comme $f(0) = f(0)^2$, on a aussi $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 1$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $f(A \times 0) = f(A) \times f(0) = 1$ ce qui est impossible car f n'est pas constante. Donc $f(0) = 0$. Ainsi, $f(M') = 0$ et donc $f(M) = 0$. ■

Remarque 7. *f induit donc un morphisme de $(GL_n(\mathbb{C}), \times) \to (\mathbb{C}^*, \times)$.*

Remarque 8. *On peut montrer que pour $n \geqslant 2$, pour tout $i \neq j \in \{1, n\}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, il existe $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$,*

$$T_{i,j}(\lambda) = ABA^{-1}B^{-1} \tag{152}$$

en écrivant

$$\begin{aligned} T_{i,k}(\alpha)T_{k,j}(\beta)T_{i,k}(-\alpha)T_{k,j}(-\beta) = &(I_n + \alpha E_{i,k} + \beta E_{k,j} + \alpha\beta E_{i,j}) \\ &\times (I_n - \alpha E_{i,k} - \beta E_{k,j} + \alpha\beta E_{i,j}) \qquad (153) \\ = &I_n + \alpha\beta E_{i,j} \qquad (154) \end{aligned}$$

Il vient

$$f(T_{i,j}(\lambda)) = f(A)f(B)f(A)^{-1}f(B)^{-1} = 1 \tag{155}$$

Si $M \in GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme produit de transvections $T_{i,j}(\lambda)$ et de dilatations $D_n(\det(M))$.

Il vient $f(M) = f(D_n(\det(M)))$*. Or*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{C}^*, \times) & \to & (\mathbb{C}^*, \times) \\ & \alpha & \mapsto & f(D_n(\alpha)) \end{array} \tag{156}$$

est un morphisme de groupe (car $D_n(\alpha\beta) = D_n(\alpha)D_n(\beta)$*).*

Finalement, $f(M) = \varphi(\det(M))$.

Si de plus f *est continue,* φ *aussi et on peut montrer qu'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi(z) = z^k$.