*Exercices MP/MP**

Fonction d'une variable réelle

Exercice 1 (Polnômes de Legendre)**.** *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n = P_n^{(n)}$ où*

$$P_n = \frac{(X^2-1)^n}{2^n n!}$$

1. *On munit $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire*

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

   Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

2. *Montrer que*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k}(x-1)^k$$

3. *Montrer que L_n admet n zéros simples sur $]-1,1[$.*

4. *Montrer que pour $n \geqslant 2$,*

$$L_n = \frac{2n-1}{n} X L_{n-1} - \frac{n-1}{2n-1} L_{n-2}$$

Exercice 2. *Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, $(x_0,\dots,x_n) \in [a,b]^{n+1}$ avec $a < b$ et*

$$V(x_0,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & \dots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & \dots & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\Delta f(x_0,\dots,x_n)$$

S'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $\Delta f(x_0,\dots,x_n)$ prend n'importe quelle valeur, sinon $\prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$\Delta f(x_0,\dots,x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Exercice 3. *Soit*

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \;\middle|\; \|f''\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

Soit pour $f \in E$,

$$A(f) = f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)$$

Déterminer $\sup_{f\in E} A(f)$.

Exercice 4. *Trouver toutes les fonctions* $\mathcal{C}^1$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *telles que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*,* $f(x) - f(y) = (x-y)f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Exercice 5. *Soit* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *convexe.*

1. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ *existe.*
2. *Montrer que si* $l \geqslant 0$*,* f *est décroissante.*
3. *Montrer que si* $l \in \mathbb{R}$*,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - lx$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

Exercice 6. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$*.*

1. *Calculer*
$$l_p = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k}$$
2. *Soit* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*,* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec* $f(0) = 0$*. Montrer que*
$$v_n = \sum_{k=0}^{np} f\left(\frac{1}{k+n}\right)$$
3. *Si on suppose seulement* f *continue et* $f(0) = 0$*, montrer que l'on peut avoir* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergente.*
4. *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *avec* $f(0) = f'(0) = 0$ *et* $f''(0) \neq 0$*, trouver un équivalent de* v_n*.*

Exercice 7. *Soit* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$*,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m$ *existe et* f' *est uniformément continue. Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$*. Et si* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ *? Et si* f *est seulement* $\mathcal{C}^1$ *sans* f' *uniformément continue ?*

Exercice 8. *Trouver toutes les fonctions* f *et* g *continues de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*,*
$$f(x+y) - f(x-y) = 2yg(x)$$

Exercice 9. *Soit* $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *convexe de classe* $\mathcal{C}^1$*. Soit*
$$S_n = \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(t)dt$$
Montrer que pour tout $n \geqslant 2$*,*
$$0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{8}(f'(n) - f'(1))$$

Exercice 10.

1. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to E$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie avec f de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On poe $M_0 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$ et $M_2 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f''(t)\|$. Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que*

$$M_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f'(t)\| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on formera

$$\begin{cases} A = f(x+h) - f(x) - hf'(x) \\ B = f(x-h) - f(x) + hf'(x) \end{cases}$$

et on exprimera $f'(x)$ en fonction de A et B.

2. *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ et telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f^{(k)}$ l'est aussi. On pourra former*

$$\begin{cases} A_1 = f(x+1) - f(x) - f'(x) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \\ A_k = f(x+k) - f(x) - kf'(x) - \cdots - k^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{cases}$$

Exercice 11 (Longueur d'un arc)**.** *Soit $\gamma\colon [a,b] \to E$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $\sigma = (a_0, \ldots, a_n) \in \Sigma([a,b])$ (ensemble des subdivisions de $[a,b]$), on définit*

$$l_{\sigma,\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|$$

On dit que γ est de longueur finie si et seulement il existe $l(\gamma) = \sup\limits_{\sigma\in\Sigma([a,b])} l_{\sigma,\gamma}$ appelée longueur de γ.

1. *Montrer que pour tout $\sigma \in \Sigma([a,b])$,*

$$l_{\sigma,\gamma} \leqslant \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

2. *Soit $\sigma = (a_1, \ldots, a_n) \in \Sigma([a,b])$, montrer que*

$$\Big| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \Big| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt$$

3. *Soit $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe $\alpha_0 >$ tel que si $\delta(\sigma) \leqslant \alpha_0$ (où δ est le pas de la subdivision, c'est-à-dire la longueur maximale entre deux a_i), alors*

$$\Big| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Puis montrer qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que si $\delta(\sigma) \leqslant \alpha_1$, alors

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En déduire que

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

4. *Étudier*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

Exercice 12 (Théorème de relèvement)**.** *Soit $\gamma\colon I \to \mathbb{C}^*$ un arc $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 0$. On appelle relèvement continu de γ toute application continue $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{\mathrm{i}\theta(t)}$.*

1. *Montrer que si θ_1 et θ_2 sont deux relèvements continue de γ, alors il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $t \in I$, $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k_0\pi$.*
2. *On suppose $k \geqslant 1$. On pose $f(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^k$ et que s'il existe θ relèvement C^1 de γ, alors pour tout $t \in I$,*
$$\theta'(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)}$$
3. *Pour $k \geqslant 1$, en déduire qu'il existe un relèvement $\mathcal{C}^k$ de γ.*