*Exercices MP/MP**

Séries Entières

Exercice 1. *Donner le rayon de convergence de*

1. $\sum_{n\geqslant 1}\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} z^n$,
2. $\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^3} z^n$.

Exercice 2.

1. *Soit* $(\theta_1,\dots,\theta_p)\in[0,2\pi[^p$ *des réels distincts,* $(m_1,\dots,m_p)\in(\mathbb{N}^*)^p$. *Montrer que*
$$\left(u_n=\sum_{k=1}^{p} m_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{1}$$
ne tend pas vers 0.
2. *Soit* $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ *et* $a_n=\mathrm{Tr}(A^n)$. *Donner le rayon de convergence et la somme de* $\sum a_n z^n$.

Exercice 3. *Donner le rayon de convergence et calculer la somme (en cas de convergence) de*

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{\sum_{k=1}^{n}k^2}=\sum_{n=\geqslant 1}\frac{6z^n}{n(n+1)(2n+1)}. \tag{2}$$

Exercice 4. *On définit*

$$\begin{array}{rccl} f: &]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \frac{t}{\ln(1+t)} & si\ t\neq 0, \\ 1 & si\ t=0. \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

Montrer que f *est développable en série entière sur* $]-1,1[$, *en déduire que* f *est* $\mathcal{C}^\infty$. *On pourra former* $\int_0^1 (1+t)^u \mathrm{d}u = I(t)$.

Exercice 5. *Donner le rayon de convergence de* $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ *où*

$$a_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^{\ln(n)}. \tag{4}$$

Exercice 6. *Donner le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *où* a_n *est le nombre de diviseurs* n.

Exercice 7. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2}=l\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 8. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On pose $\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$. Déterminer $\mathrm{e}^{\phi(z)}$.*

Exercice 9. *Donner le rayon de convergence et calculer la somme (sur le disque ouvert de convergence) de*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}. \tag{6}$$

Exercice 10. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, on suppose que*

i) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geqslant 0$,*

ii) $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$,

iii) *le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ vaut 1,*

iv) *$\sum b_n$ diverge.*

On forme sur $[0, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. *Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$.*
2. *Montrer que $f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} g(x)$.*
3. *Donner un équivalent simple quand $x \to 1^-$ de $h_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$ avec $p \in \mathbb{N}$.*

Exercice 11. *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim\limits_{x \to 1^-} = S \in \mathbb{R}$ et que $a_n = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $\sum a_n$ converge et vaut S. On pourra étudier $f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.*

Exercice 12. *Soit $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développable en série entière avec un rayon de convergence $\rho > 0$ telle que $f(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe une fonction T, développable en série entière, et $r > 0$, telle que si $|z| < r$, $f(z) = \mathrm{e}^{T(z)}$.*

Exercice 13. *Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{\sin(n\pi a)}$. Soit R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.*

1. *Montrer que $R_a \leqslant 1$.*
2. *Évaluer R_a lorsque a est irrationnel algébrique.*
3. *Existe-t-il a tel que $R_a = 0$?*

Exercice 14. *Soit $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n = \left|\left\{(p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{N}^N \middle| p_1 a_1 + \ldots p_N a_N = n\right\}\right|$. Donner un équivalent simple de c_n quand $n \to +\infty$.*

Exercice 15. *Soit*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1+x+x^2} \end{array} \tag{7}$$

Montrer que f est développable en série entière, et donner le rayon de convergence de la série entière obtenue. On pourra dériver $f^2(x)$.

Exercice 16. *Soit $f\colon [0, A[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,1[$, $f^{(n)}(t) \geqslant 0$.*

1. *Soit $x \in [0, A[$, montrer que $\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge.*
2. *On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, A[$, $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$. Montrer que si $x < y < A$, on a $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y)$.*
3. *En déduire que f est développable en série entière sur $[0, A[$.*
4. *Application à* tan.

Exercice 17. *Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ si*

1. *$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.*
2. *pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{3p} = \frac{(-1)^p}{2^p}$, $a_{3p+1} = 3^p$ et $a_{3p+2} = 0$. Calculer la somme.*
3. *$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}\mathrm{d}t$, et calcul. Quelle est la valeur en -1 ?*

Exercice 18. *On pose $\omega_0 = 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, ω_n est le nombre de relations d'équivalence sur $[\![1, n]\!]$. On s'intéresse à la série entière $\sum \frac{\omega_n}{n!} z^n = \sum a_n z^n$, de rayon de convergence R, de somme notée $f(z)$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\omega_k$ et que $\omega_n \leqslant n^n$ et $R > 0$.*
2. *Soit $r > 1$ et $n_0 = \lfloor r\mathrm{e}^r \rfloor$. On pose $A = \max\limits_{k\leqslant n_0} \frac{\omega_k}{k!} r^k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\omega_n t^n}{n!} \leqslant A$, en déduire R.*
3. *Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$, déduire $f(x)$ et une expression de ω_n.*

Exercice 19. *On appelle « partition »d'un entier $n \geqslant 0$ toute suite décroissante d'entiers naturels $(t_k)_{k\geqslant 1}$ telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k = n$ (somme finie). On note p_n le nombre de partitions de n. Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} p_n z^n = f(z)$.*

1. *Montrer que $R > 0$.*

2. *Montrer que pour tout* $x \in [0, R[$, *on a* $f(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}$, *est-ce encore vrai pour* $z \in D(0, R)$ *?*

3. *Évaluer* R.

Exercice 20. *Soit* U *un ouvert bornée non vide de* $\mathbb{C}$ *et* $f \colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ *continue sur* $\overline{U}$ *analytique sur* U, *c'est-à-dire que pour tout* $z_0 \in U$, *il existe* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $h \in \mathbb{C}$ *tel que* $|h| < d(z_0, \partial U)$, $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$.

1. *Montrer que pour tout* $z_0 \in U$ *et* $r \in [0, d(z_0, \partial U)[$, *on a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t. \tag{8}$$

2. *En déduire que* $|f|$ *atteint son maximum et son minimum sur* ∂U.

3. *Que peut-on dire si* $f = 0$ *sur* ∂U *?*

Exercice 21.

1. *Montrer que l'on peut, pour* $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ *fixé, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - q^k z\right)$.

2. *Montrer que* f *est développable en série entière.*

3. *De même pour* $\frac{1}{f}$.

Exercice 22. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f \colon U \to \mathbb{C}$ *analytique sur* U *(développable en série entière au voisinage de tout point de* U*).*

1. *Soit* $z_0 \in U$ *et* $r_0 > 0, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que si* $h \in D(0, r_0)$, $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$. *On suppose qu'il existe* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ *telle que*

   (i) *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\xi_k \neq z_0$,

   (ii) $\lim_{n\to+\infty} \xi_k = z_0$,

   (iii) *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $f(\xi_k) = 0$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

2. *On suppose de plus que* U *est connexe par arcs. Montrer que* $f = 0$ *sur* U. *Est-ce encore vrai si* (ξ_k) *ne converge pas ?*

Exercice 23. *Soit* $\theta \in]0, \pi[$.

1. *Montrer que* $f(x) = \ln\left(1 - 2x\cos(\theta) + x^2\right)$ *est développable en série entière en 0.*

2. *Qu'en déduit-on relativement à* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ *?*

3. *Calculer* $I(x) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(\theta) + x^2\right) \mathrm{d}\theta$.

Exercice 24. *Soit* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite strictement croissante d'entiers naturels.*

1. *Donner le rayon de convergence de* $\sum_{n\geqslant 0} x^{p_n}$*. On pose* $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{p_n}$.

2. *On suppose que* $n \underset{n\to+\infty}{=} o(p_n)$*. Montrer que* $\lim_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = 0$.

3. *Réciproque ?*

Exercice 25. *Soit* $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$*, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_{n+1} = u_n - v_n$ *et* $v_{n+1} = u_n - 2v_n$*. DOnner le rayon de convergence et les sommes des séries entières* $U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ *et* $V(z) \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n$.

Exercice 26.

1. *Donner le développement en série entière de* $f(z) = \frac{\sin(\theta)}{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1}$ *avec* $\theta \in [0, 2\pi[$.

2. *En déduire* $I(z) = \int_0^\pi \frac{\sin(\theta)\mathrm{d}\theta}{z^2 - z = 2z\cos(\theta) + 1}$.

Exercice 27.

1. *Soit* Y *une variable aléatoire à valeurs dans* $[\![1, n]\!]$*. Montrer que* $\left(\mathbb{E}\left(Y^k\right)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ *caractérise la loi de* Y.

2. *Soit* Y *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$*. On suppose qu'il existe* $a \in [0, 1[$ *tel que* $\mathbb{P}\left(Y = k\right) \underset{k\to+\infty}{=} O(a^k)$*. Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,* Y^n *a une espérance finie et que* $\left(\mathbb{E}(Y^n)\right)_{n\geqslant 1}$ *caractérise la loi de* Y.

Exercice 28. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f\colon U \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ *au sens complexe, c'est-à-dire que pour tout* $z_0 \in U$*, il existe* $f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}^*}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ *et* $f'\colon U \to \mathbb{C}$ *est continue.*

1. *Montrer que*
$$\begin{array}{rccl} g: & [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ & \lambda & \mapsto & \int_0^{2\pi} \frac{f\left((1-\lambda)z + \lambda r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) - f(z)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \end{array} \tag{9}$$
est constante. En déduire que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *avec*
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right) \mathrm{d}t. \tag{10}$$

2. *Montrer que pour tout* $z_0 \in U$*, on a pour* $R = d(z_0, \partial U)$*, il existe* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *tel que pour tout* $h \in D(0, R)$*,* $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$.

Exercice 29. *Calculer, en précisant le domaine de définition,*

$$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}. \tag{11}$$

Exercice 30. *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*. On suppose que pour tout* $z \in \mathbb{C}$*,* $z \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $f(z) \in \mathbb{R}$*.*

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $a_n \in \mathbb{R}$*.*
2. *On pose* $v(z) = \Im(f(z))$*. Montrer que pour tout* $m \geqslant 1$*, pour tout* $r > 0$*,*

$$\pi r^m a_m = 2 \int_0^{\pi} v\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \sin(m\theta) \mathrm{d}\theta, \tag{12}$$

   puis que $|r^m a_m| \leqslant mr\,|a_1|$*.*

3. *En déduire que* f *est affine.*

Exercice 31. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière telle que* $\sum |a_n|$ *converge. On définit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \overline{D(0,1)} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \end{array} \tag{13}$$

On note $P_{r,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$*, et pour* $r \in [0,1[$*,* $P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$*. Il s'agit du noyau de Poisson.*

1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, pour tout* $r \in [0,1[$*,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{|k|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)}\right) \mathrm{d}t = a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{14}$$

   En déduire que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-t)}\right) \mathrm{d}t = f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right). \tag{15}$$

2. *Quel est le signe de* P_r *? Calculer* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r - t)\mathrm{d}t$*.*
3. *Montrer que si* $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$*, alors* $f\left(\overline{D(0,1)}\right) \subset \overline{D(0,1)}$*.*

Exercice 32. *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $(A_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}^*}$ *indépendants tels que pour tout* $n \geqslant 1$*,* $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$*. On pose* $R_n = \chi_{A_k}$*.*

1. *Donner l'espérance et la variance de* R_n*, et donner à chaque fois un équivalent.*

2. *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{R_n}{\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0. \tag{16}$$

3. *Donner la fonction génératrice G_{R_n}. En déduire $\mathbb{P}(R_n = 1)$ et $\mathbb{P}(R_n = 2)$.*

4. *Soit $a < b \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $T_n = R_{nb} - R_{na}$. Donner la fonction génératrice G_{T_n}. Déterminer, pour $t \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_{T_n}(t)$. On pourra montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.*

Exercice 33 (Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$)**.** *Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Soit $X_n \sim X$ avec $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendants, et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$ (avec $S_0 = 0$). Soit*

$$T = \begin{cases} \min\{n \geqslant 1 | S_n = 0\}, & \textit{s'il existe } n \geqslant 1, S_n = 0, \\ +\infty & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{17}$$

On note $\pi = \mathbb{P}(T < +\infty)$: probabilité de retour à l'origine en temps fini.

1. (a) *Justifier qu'en posant pour tout $t \in [0,1[$, on peut définit $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)t^n$ et $g(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k)t^k$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.*

   (b) *Montrer que g admet une limite finie quand $t \to 1^-$ que l'on exprimera en fonction de π.*

2. *Justifier que, pour $(k,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(S_{m+1} - S_m, \ldots, S_{m+k} - S_m) \sim (S_1, \ldots, S_k)$.*

3. (a) *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0)$.*

   (b) *En déduire que pour tout $t \in [0,1[$, $f(t) = 1 + f(t)g(t)$.*

   On suppose que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche de Bernouilli de paramètre p.

4. (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n$.*

   (b) *Montrer que pour tout $t \in [0,1[$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqt^2}}$.*

5. (a) *Calculer $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k)t^k$ pour $t \in [0,1]$ et montrer que $\pi = 1 - |p - q|$.*

   (b) *Déterminer la loi de T.*

6. (a) *Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(T) = +\infty$.*

   (b) *On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, calculer l'espérance conditionnelle de T sachant $T < +\infty$:*

$$\mathbb{E}_{T<+\infty}(T) = \frac{\mathbb{E}(T \times \mathbf{1}_{T<+\infty})}{\mathbb{P}(T = +\infty)}. \tag{18}$$

7. *Déterminer les* $p \in]0,1[$ *tels que* $\pi = 1$.

8. *Montrer que l'on a équivalence entre*

   (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$,

   (ii) $f(t) \xrightarrow[t \to 1^-]{+} \infty$,

   (iii) $(S_n)_{n \geqslant 0}$ *est récurrente (c'est-à-dire* $\pi = 1$*).*

   On note $N_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{S_k=0\}}$ *le nombre de retours à l'origine avant l'instant* n, *et* $N = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{S_k=0\}}$ *le nombre de retours à l'origine à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. $(N_n)_{n \geqslant 1}$ *converge simplement vers* N *dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *et pour tout* $n \geqslant 1$, $N_n \leqslant N$.

   Si Ω *est dénombrable,*

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{\omega \in \Omega} N_n(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} f_\omega(n). \tag{19}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_\omega(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} N(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant 0$ *et* $|f_\omega(n)| \leqslant N(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. *Si* $\mathbb{E}(N) < +\infty$, $\sum f_\omega$ *converge normalement sur* $\mathbb{N}$ *et on peut intervertir. Si* $\mathbb{E}(N) = +\infty$, *soit* $A > 0$, *il existe* χ *fini inclus dans* Ω *tel que* $\sum_{\omega \in \chi} N(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant 2A$ *et (*χ *finie)* $\lim_{n \to +\infty} N_n(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \chi} N(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. *Donc il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N_0$, $\sum_{\omega \in \chi} N_n(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant A$ *et*

$$\mathbb{E}(N_n) \geqslant \sum_{\omega \in \chi} N_n(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant A, \tag{20}$$

   car $N_n \geqslant 0$ *donc* $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(N_n) = \mathbb{E}(N) = +\infty$.

9. *(a) On suppose que* $(S_n)_{n \geqslant 0}$ *est transitoire (i.e.* $p \neq \frac{1}{2}$, *on a alors* $\pi = 1 - |p-q| \neq 1$*). Montrer que* $\mathbb{E}(N) = \frac{\pi}{1-\pi}$. *En déduire que* $\{n \in \mathbb{N} | S_n = 0\}$ *est presque sûrement fini.*

   (b) On suppose que $p = \frac{1}{2}$. *Que vaut* $\mathbb{E}(N)$ *?*

10. *Pour* $x \in \mathbb{Z}^d$, *on note* $N_n^x = |\{j \in [\![1,n]\!], S_j = x\}|$ *(nombre de passage par* x *entre les instants 1 et* n*). Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(N_n^x) \leqslant \mathbb{E}(N)$. *On introduira*

$$T^x = \begin{cases} \min\{n \geqslant 1 | S_n = x\}, & \textit{s'il existe } n \geqslant 1, S_n = x, \\ +\infty, & \textit{sinon,} \end{cases} \tag{21}$$

   le premier passage en x, *et on formera*

$$\begin{aligned} g_{x,n}(t) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T^x = k)t^k, \\ f_{n,x}(t) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = x)t^k, \end{aligned} \tag{22}$$

   et on établira une formule reliant $g_{n,x}$ *à* $f_{n,x}$ *de manière analogue à la question 3.*

11. *On suppose la marche* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *transitoire (donc la probabilité* π *de retour à l'origine en temps fini est strictement inférieure à* 1*). Montrer que* $\|S_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *presque sûrement.*