*Solutions MP/MP**

Équations différentielles linéaires

Solution 1. L'équation différentielle est linéaire homogène sous forme résolue du second ordre. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'ensemble solution est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit φ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & y & \mapsto & y'+\varphi y \end{array} \tag{1}$$

On définit ensuite

$$\begin{array}{rccc} u\circ u: & \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & y & \mapsto & (y'+\varphi y)'+\varphi(y'+\varphi y) = y''+y'(2\varphi)+(\varphi'+\varphi^2)y \end{array} \tag{2}$$

On pose $\varphi(x) = x$. Alors l'équation différentielle équivaut à $u\circ u(y) = 0$. On a $u(z) = 0$ si et seulement si $z'+xz = 0$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

On cherche la solution générale sous la forme $y(x) = d(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. En reportant, cela équivaut à $d'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, et cela équivaut au fait qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $d(x) = cx+d$. Donc l'ensemble solution est

$$\left\{x \mapsto (cx+d)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\middle|\, (c,d)\in\mathbb{R}^2\right\}. \tag{3}$$

■

Solution 2. C'est une équation homogène linéaire. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Le système équivaut à $tY' = aY$ où

$$\begin{array}{rccc} Y: & I = \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{array} \tag{5}$$

Sur I, le système équivaut à $Y' = \frac{1}{t}AY$, équation homogène à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'ensemble solution est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 3 & -3 \\ 2 & X+6 & -13 \\ 1 & 4 & X-8 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & 3 & 0 \\ 2 & X+6 & X-7 \\ 1 & 4 & X-4 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -4X+7 & 0 \\ 2 & X-2 & X-7 \\ 1 & 0 & X-4 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$= (-4X+7)(X-7) + (X-4)\left((X-1)(X-2) - 2(-4X+7)\right), \tag{9}$$

$$= X^3 - 3X^2 + 3X - 1, \tag{10}$$

$$= (X-1)^3. \tag{11}$$

A est trigonalisable mais non diagonalisable car non semblable à I_3. On a

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3y + 3z &= 0, \\ -2x - 7y + 13z &= 0, \\ -x - 4y + 7z &= 0. \end{cases} \iff \begin{cases} y &= z, \\ x &= 3y \end{cases} \tag{12}$$

On prend pour vecteur propre $f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $(A - I_3)^3 = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, et $\dim(\ker(A - I_3)) = 1$. On a

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

On choisit f_3 tel que $(A - I_3)^2 f_3 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, par exemple $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose $f_2 = (A - I_3) f_3 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et on a $f_1 = (A - I_3)^2 f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}). \tag{14}$$

Alors

$$A_1 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

On pose $Y_1 = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$. Alors le système équivaut à

$$\begin{cases} tx_1' &= x_1 + y_1, \\ ty_1' &= y_1 + z_1, \\ tz_1' &= z_1. \end{cases} \tag{16}$$

On trouve $z_1(t) = \alpha e^{\ln|t|} = Ct$ pour tout $t \in I$ (avec $C = \pm\alpha$). En reportant, on a $y_1' = \frac{1}{t}y_1 + C$, donc si $y_1(t) = D(t) \times t$, on a $D'(t) \times t = C$ d'où $D(t) = C\ln|t| + D$. Enfin, on a $x_1' = \frac{1}{t}x_1 + C\ln|t| + D$.

Donc si $x_1(t) = E(t) \times t$, on a $E'(t) \times t = C\ln|t| + D$. Si $I = \mathbb{R}_+^*$, on a

$$E(t) = C\int_1^t \frac{\ln(u)}{u}\mathrm{d}u + D\ln(t) + E, \tag{17}$$

avec $\int_1^t \frac{\ln(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln^2(t)$. Ainsi, on a $E(t) = \frac{C}{2}\ln^2(t) + D\ln(t) + E$, d'où

$$x_1(t) = \frac{C}{2}t\ln^2|t| + Dt\ln|t| + E \times t. \tag{18}$$

Puis $Y = PY_1$, prolongeable (avec une classe $\mathcal{C}^1$) en 0 si et seulement si $C = D = 0$ si et seulement si $Y_1(t) = \begin{pmatrix} tE \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ■

Remarque 1. *Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, on a*

$$\begin{aligned}
tY_1' = A_1Y_1 &\iff Y_1' - \frac{1}{t}A_1Y_1 = 0, && (19)\\
&\iff \exp(-\ln(t)A_1)(Y_1' - \frac{1}{t}A_1Y_1) = (Y_1(t)\exp(-\ln(t)A_1))' = 0, && (20)\\
&\iff \exists Y_0 \in \mathbb{R}^3, \forall t \in I, \exp(-\ln|t|\,A_1)Y_1(t) = Y_0, && (21)\\
&\iff \exists Y_0 \in \mathbb{R}^3, \forall t \in I, Y_1(t) = \exp(\ln|t|\,A_1)Y_0. && (22)
\end{aligned}$$

On a $A_1 = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$ *avec* $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $N^3 = 0$. *Ainsi,*

$$\exp(\ln|t|\,A_1) = \underbrace{\mathrm{e}^{\ln|t|}}_{\pm t} \times \left(I_3 + \ln|t|\,N + \frac{\ln^2|t|}{2}N^2\right). \tag{23}$$

Solution 3.

1. On a $V(x) = \mathrm{e}^{xA}u$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $xA \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
\exp(xA)^\mathsf{T} &= \exp((xA)^\mathsf{T}), && (24)\\
&= \exp(-xA), && (25)\\
&= \exp(xA)^{-1}, && (26)
\end{aligned}$$

   donc $\exp(xA) \in SO_n(\mathbb{R})$ et $\|V(x)\|_2 = \|u\|_2$.

2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc} \Theta_{x_0}: & S_\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & V & \mapsto & V(x_0) \end{array} \tag{27}$$

   est un isomorphisme (où $S_\mathbb{R}$ est l'ensemble solution).

   Ainsi,

   — ou bien $(V_1, \ldots, V_n)$ est liée et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W(x) = 0$,

   — ou bien $(V_1, \ldots, V_n)$ est libre et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $W(x) \neq 0$. Alors

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} \det_B(V_1(x), \dots, V_i'(x), \dots, V_n(x)), \tag{28}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det_{B(x)}(V_1(x), \dots, AV_i(x), \dots, V_n(x))W(x), \tag{29}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} W(x), \tag{30}$$

$$= W(x) \times \mathrm{Tr}(A), \tag{31}$$

$$= 0. \tag{32}$$

Donc $W(x) = c$.

3. On suppose $u \neq 0$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xA) \in O_n(\mathbb{R})$. $(u, \exp(xA)u)$ est liée si et seulement s'il existe $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ telle que $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$, $\exp(xA)u = \varepsilon(x)u$. On a $(\exp(xA)u|u) = \varepsilon(x) \|u\|_2^2$ donc $x \mapsto \varepsilon(x)$ est continue à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc constante.

Lemme 1. *On a* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{0\}$, *et il existe* $P \in O_n(\mathbb{R})$ *et* $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbb{R}^*)^p$ *tel que*

$$P^{-1}AP = P^\mathsf{T} AP = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & & & & & \\ \alpha_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & -\alpha_p & & \\ & & & \alpha_p & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = A_1. \tag{33}$$

Preuve du lemme 1. Si $Ax = \lambda X$, alors

$$(AX|X) = X^\mathsf{T} AX = \lambda \|X\|_2^2 = (X^\mathsf{T} AX)^\mathsf{T} = X^\mathsf{T}(-A)X = -\lambda \|X\|_2^2. \tag{34}$$

Donc $\lambda = 0$.

Le deuxième résultat s'obtient par récurrence sur n. ■

On a donc

$$\exp(xA) = P\exp(xA_1)P^{-1} = P\begin{pmatrix} R_{x\alpha_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{x\alpha_p} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, \tag{35}$$

avec $\alpha_i \neq 0$, où R_θ indique la matrice de rotation en dimension 2 d'angle θ. Ainsi, pour que $\exp(xA)u = u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit que $u \in \ker(A)$ (pour ne pas être affecté par les matrices de rotation).

■

Remarque 2. *Si $(V_1(0), \dots, V_n(0))$ est une base orthonormée directe, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\|V_i(x)\|_2 = \|V_i(0)\|_2 = 1$ et en dérivant, on a $(V_i(x)|V_j(x)) = \varphi_{i,j}(x)$.*

On a

$$\varphi'_{i,j}(x) = (V'_i(x)|V_j(x)) + (V_i(x)|V'_j(x)), \tag{36}$$

$$= V_j(x)^\mathsf{T} A V_i(x) + V_j^\mathsf{T} \underbrace{A^\mathsf{T}}_{-A} V_i(x), \tag{37}$$

$$= 0. \tag{38}$$

Donc $\varphi_{i,j} = 0$ donc $\varphi_{i,j}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Enfin,

$$\det_B(V_1(x), \dots, V_n(x)) = \det_B(V_1(0), \dots, V_n(0)) = 1. \tag{39}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(V_1(x), \dots, V_n(x))$ est une base orthonormée directe.

Solution 4. On résout sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Posons

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$Y\colon t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $B\colon t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(x, y) est solution du système différentiel sur I si et seulement si pour tout $t \in I$, $Y'(t) = AY(t) + B(t)$.

On réduit A : $\chi_A = X^2 + X = X(X+1)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. On a

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4a - 2b &= 0, \\ 6a + 3b &= 0, \end{cases} \tag{41}$$

si et seulement si $2a = b$. On pose $f_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, vecteur propre de A associé à 0. On a

$$(A + I_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4a - 2b &= 0, \\ 6a + 3b &= 0, \end{cases} \tag{42}$$

si et seulement si $3x = -2y$. On pose $f_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et on pose $Y_1 = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. De plus, on a

$$B(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} f_{-1}, \tag{43}$$

donc $P^{-1}B(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1(t)$.

Ainsi, le système différentiel équivaut sur I à pour tout $t \in I$, $Y_1'(t) = A_1 Y_1(t) + B_1(t)$, d'où pour tout $t \in I$,

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 0, \\ y_1'(t) &= -y_1(t) + \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}. \end{cases} \tag{44}$$

Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $x_1(t) = \alpha$. D'autre part, on trouve $y_1(t) = \mathrm{e}^t \left(\ln(|\mathrm{e}^t - 1|) + \gamma\right)$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer x et y, on calcule ensuite $Y = PY_1$. ■

Solution 5.

1. On résout sur $I=\mathbb{R}_+^*$ou $]-1,0[$. Sur I, l'équation différentielle équivaut à

$$f'(x)+\frac{\lambda}{x}f(x)=\frac{1}{x(x+1)}, \tag{45}$$

d'équation homogène associée $y'=-\frac{\lambda}{x}y$. Les solutions de l'équation homogène sont $x\mapsto \beta\mathrm{e}^{-\lambda\ln|x|}=\frac{\beta}{|x|^\lambda}$ où $\beta\in\mathbb{R}$. Pour une solution générale de la forme $y(x)=\frac{\beta(x)}{|x|^\lambda}$ avec $x\mapsto\beta(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a $\frac{\beta'(x)}{|x|^\lambda}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$. Commencent les disjonctions de cas où l'on note $f(x)=\frac{\beta(x)}{|x|^\lambda}$ une solution.

— <u>Si $I=\mathbb{R}_+^*$</u>, on a $\beta'(x)=x^{\lambda-1}-\frac{x^\lambda}{x+1}$.

— <u>Si $\lambda\neq 0$</u>, il existe $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\beta(x)=\frac{x^\lambda}{\lambda}-\int_1^x\frac{u^\lambda}{u+1}\mathrm{d}u+\beta$ et $f(x)=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{x^\lambda}\int_1^x\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u+\frac{\beta}{x^\lambda}$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta}{x^\lambda}$ est finie si et seulement si $\lambda>0$. Comme $\frac{u^\lambda}{u+1}\underset{u\to0}{\sim}u^\lambda$ donc $\int_1^0\frac{u^\lambda}{u+1}\mathrm{d}u$ converge si et seulement si $\lambda>-1$ (critère de Riemann).

— <u>Si $\lambda\in]-1,0[$</u>, $\frac{1}{x^\lambda}\xrightarrow[x\to0]{}0$ et $\int_1^x\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u\xrightarrow[x\to0]{}\int_1^0\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u$ donc $f(x)\xrightarrow[x\to0]{}\frac{1}{\lambda}$ qui est une limite finie (sans condition sur β).

— <u>Si $\lambda>0$</u>, notons que si f a une limite finie en 0, il faut que

$$\frac{1}{x^\lambda}\left(\int_1^x\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u-\beta\right)\xrightarrow[x\to0]{}\text{quelque chose de fini.} \tag{46}$$

Or $\frac{1}{x^\lambda}\xrightarrow[x\to0]{}+\infty$, donc il faut

$$\left(\int_1^x\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u-\beta\right)\xrightarrow[x\to0]{}0, \tag{47}$$

d'où

$$\beta=-\int_0^1\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u. \tag{48}$$

Réciproquement, si $\beta=-\int_0^1\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u$, on a

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{x^\lambda}\left(\int_1^x\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u+\int_0^1\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u\right), &(49)\\
&=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{x^\lambda}\int_0^x\frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u, &(50)\\
&=\frac{1}{\lambda}-\int_0^x\frac{\left(\frac{u}{x}\right)^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u, &(51)\\
&=\frac{1}{\lambda}-\int_0^1\frac{v^\lambda}{1+vx}x\mathrm{d}v. &(52)
\end{aligned}$$

Or
$$\int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+vx} x\mathrm{d}v = x\int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+vx}\mathrm{d}v, \tag{53}$$
et pour tout $(x,v) \in I \times [0,1]$, $\left|\frac{v^\lambda}{1+vx}\right| \leqslant v^\lambda$, intégrable sur $[0,1]$. D'aès le théorème de convergence dominée, on a donc
$$\int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+vx}\mathrm{d}v \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^1 v^\lambda \mathrm{d}v = \frac{1}{\lambda+1}, \tag{54}$$
d'où $x\int_0^1 \frac{v^\lambda}{1+v}\mathrm{d}v \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\lambda}$.

Donc f a une limite finie en 0 si et seulement si $\beta = -\int_0^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u$.

— Si $\lambda < -1$, on a $\frac{\beta}{x^\lambda} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\frac{u^\lambda}{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} u^\lambda$. Par intégration des relations de comparaisons (applicable car les intégrandes sont positives), on a
$$\int_x^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 u^\lambda \mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda+1}\left(1-x^{\lambda+1}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \tag{55}$$
et
$$-\frac{1}{x^\lambda}\int_x^1 \frac{u^\lambda}{1+u}\mathrm{d}u \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{1+\lambda}\frac{x^{\lambda+1}}{x^\lambda} \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \tag{56}$$
d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\lambda}$.

— Si $\lambda = -1$, on a
$$f(x) = -1 - x\int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} + \beta x, \tag{57}$$
$$= -1 - x\ln(x+1) + \ln(2) + \beta x, \tag{58}$$
$$\xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2) - 1. \tag{59}$$

— Si $\lambda = 0$, on a
$$\beta'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \tag{60}$$
et $\beta(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \beta$. On a alors $f(x) = \frac{\beta(x)}{x^0} = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \beta \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$, sans condition sur β.

— Si $I =]-1,0[$, on vérifie que c'est la même chose.

Si $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est solution avec un rayon de convergence $R > 0$, on a $xf'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^n$. Ainsi, pour tout $x \in]-R,R[$, on a
$$xf'(x) + \lambda f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+\lambda) a_n x^n = \frac{1}{1+x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^n. \tag{61}$$

Par unicité du développement en série entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\lambda + n}, \tag{62}$$

donc si $\lambda \notin \mathbb{Z}_-$, on a une solution développable en série entière autour de 0.

Réciproquement, avec cette définition des (a_n) et de f, on a un rayon de convergence $R = 1$ (par la règle de d'Alembert) et f est solution de l'équation différentielle sur $]-1, 1[$.

2. On choisit $\lambda = \frac{1}{3} > 0$. Les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc définis. Soit

$$S(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^n}{\frac{1}{3} + n}. \tag{63}$$

S est solution de l'équation différentielle sur $]-1, 1[$, et on connaît sa forme d'après l'étude menée à la première question. Comme $\lambda > 0$, S a une limite finie en 0 donc S est entièrement déterminée (car on n'a pas le choix pour la constante β) :

$$S(x) = 3 + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \int_0^x \frac{u^{\frac{1}{3}}}{1+u} \mathrm{d}u. \tag{64}$$

On pose $v = u^{\frac{1}{3}}$, d'où

$$\int_0^x \frac{u^{\frac{1}{3}}}{1+u} \mathrm{d}u = 3 \int_0^{x^3} \frac{3v^3 \mathrm{d}v}{v^3+1} = 9 \left(\int_0^{x^3} \mathrm{d}v - \int_0^{x^3} \frac{\mathrm{d}v}{v^3+1} \right). \tag{65}$$

On décompose ensuite $\frac{1}{X^3+1}$ en éléments simples pour calculer l'intégrale.

■

Solution 6.

1. Pour le sens indirect, on a $\exp(tA) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k A^k}{k!}$. Pour $i \neq j$, $(\exp(tA))_{i,j}$ est une série entière en t et on a

$$(\exp(tA))_{i,j} = 0 + t a_{i,j} + t^2 (A^2)_{i,j} + \dots \underset{t\to 0}{\sim} t a_{i,j}. \tag{66}$$

Par hypothèse, $(\exp(tA))_{i,j} \geqslant 0$ donc pour $t \to 0^+$, on a $a_{i,j} \geqslant 0$.

Réciproquement, on considère $\beta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(-a_{i,i})$. Posons $A' = A + \beta I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$. Pour tout $t \geqslant 0$, $tA' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ donc $\exp(tA') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$. Comme A et I_n commutent, on a

$$\exp(tA') = \exp(tA + \beta t I_n), \tag{67}$$

$$= \exp(tA) \exp(t\beta I_n), \tag{68}$$

$$= \exp(tA) \times \mathrm{e}^{t\beta}, \tag{69}$$

donc $\exp(tA) = \underbrace{\mathrm{e}^{-tB}}_{\in \mathbb{R}_+} \exp(tA') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Posons $\varphi\colon t \mapsto \exp(-tA)x(t)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. x est solution du problème de Cauchy

$$\iff \begin{cases} x'(t) &= Ax(t) + f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0) &= 0, \end{cases}, \tag{70}$$

$$\iff \begin{cases} \exp(-tA)(x'(t) - Ax(t)) &= \exp(-tA)f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0) &= 0, \end{cases}, \tag{71}$$

$$\iff \varphi(t) = x_0 + \int_0^t \exp(-uA)f(u)\mathrm{d}u, \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{72}$$

$$\iff x(t) = \exp(tA)\left(x_0 + \int_0^t \exp(-uA)f(u)\mathrm{d}u\right), \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{73}$$

$$\iff x(t) = \exp(tA) + \exp(tA)\int_0^t \exp(-uA)f(u)\mathrm{d}u, \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{74}$$

Or $\exp(tA)x_0 \in (\mathbb{R}_+)^n$ d'après la première question, et

$$\exp(tA)\int_0^t \exp(-uA)f(u)\mathrm{d}u = \int_0^t \exp((t-u)A)f(u)\mathrm{d}u. \tag{75}$$

Pour tout $u \in [0,t]$, $(t-u) > 0$ donc $\exp((t-u)A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ et ainsi, $c(t) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

■

Solution 7. Le sens indirect est normalement du cours, il suffit de considérer l'isomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \Theta_{t_0}: & S_{(H),]a,b[} & \to & \mathbb{R}^n \\ & f & \mapsto & (f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)) \end{array} \tag{76}$$

où $S_{(H),]a;b[}$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $]a,b[$ avec une condition particulière en t_0.

Réciproquement, si W ne s'annule pas, notons $L_i(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(i)(x)} \\ f_2^{(i}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}$ (ce sont les lignes de W mises en colonne). On a

$$W(x) = \det(L_0(x), L_1(x), \dots, L_{n-1}(x)), \tag{77}$$

et comme W ne s'annule pas, pour tout $x \in]a,b[$, $(L_0(x),\dots,L_{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, il existe $a_0(x),\dots,a_{n-1}(x)) \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{pmatrix} f_1^{(n)}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) L_i(x), \tag{78}$$

$$= \Big(L_0(x), L_1(x), \dots, L_{n-1}(x)\Big) \begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \tag{79}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x) & f_1'(x)_{R(x)} & \dots & f_1^{(x-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(x) & f_{n-1}'(x) & \dots & f_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{R(x)} \begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Les f_i étant $\mathcal{C}^n$, $x \mapsto R(x)$ est continue et $A \mapsto A^{-1}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $x \mapsto R(x)^{-1}$ est continue sur $]a,b[$ donc $x \mapsto R(x)^{-1} \begin{pmatrix} f_1^{(n)}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ est continue sur $]a,b[$. En d'autres termes, les $(a_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ sont continues sur $]a,b[$. ■

Solution 8. $|\sin|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène a $(\cos,\sin)$ pour base de solutions. On cherche des solutions sous la forme $y(x) = a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$, avec $a'(x)\cos(x) + b'(x)\sin(x) = 0$.

y est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} a'(x)\cos(x) + b'(x)\sin(x) &= 0, \\ -a'(x)\sin(x) + b'(x)\cos(x) &= |\sin(x)|. \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned} &\cos(x) \times \text{première ligne} - \sin(x) \times \text{deuxième ligne} \\ &\sin(x) \times \text{première ligne} + \cos(x) \times \text{deuxième ligne} \end{aligned} \tag{82}$$

donne

$$\begin{aligned} a'(x) &= -\sin(x)\,|\sin(x)| = \varepsilon_x \sin^2(x), \\ b'(x) &= \cos(x)\,|\sin(x)| = -\varepsilon_x \cos(x)\sin(x), \end{aligned} \tag{83}$$

avec $\varepsilon_x = 1$ si $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ pour k impair, et ε_x si k est pair.

Sur $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$, on a $a(x) = \varepsilon_k \times \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + a_k$ et $b(x) = \varepsilon_k \times \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) + b_k$. On a

$$y(x) = \frac{\varepsilon_k}{2}\left(\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)\cos(x) - \frac{\cos(2x)}{2}\sin(x)\right) + a_k\cos(x) + b_k\sin(x). \tag{84}$$

Par continuité, $\lim\limits_{x\to k\pi^-} y(x) = \frac{\varepsilon_k}{2}\left(k\pi(-1)^k\right) + a_k(-1)^k$ et $\lim\limits_{x\to k\pi^+} y(x) = -\frac{\varepsilon_k}{2}(k\pi(-1)^k) + a_{k+1}(-1)^k$ (on a $\varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_k$). Donc $a_{k+1} = a_k + \varepsilon_k k\pi$. De même pour les b_k, on étudie la continuité de la dérivée.

On détermine ainsi a_k et b_k en fonction de a_0 et b_0, par exemple pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a_k = a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j (j\pi)$. ■

Remarque 3. *Autre méthode : $|\sin|$ est $\mathcal{C}^1$-PM continue 2π-périodique paire. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$|\sin(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx), \tag{85}$$

avec

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(nt)\mathrm{d}t. \tag{86}$$

On résout ensuite $y'' + y = \cos(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on somme en vérifiant que la solution obtenue est de classe $\mathcal{C}^2$.

Solution 9. On pose $\varphi(t) = X(t)^\top X(t)$. En dérivant, on a

$$\varphi'(t) = X(t)^\top X(t) + X(t)^\top X'(t) = -X^\top A(t)X(t) + X^\top A(t)X(t) = 0. \tag{87}$$

Comme $\varphi(0) = I_n$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = I_n$ donc $X(t) \in O_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 4. *Soit $Y\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ solution de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $Y(0) = Y_0$, de même $Y(t)^\top Y(t) = \|Y(t)\|^2 = \|Y_0\|^2$ donc $Y(t)$ est tracé sur une sphère.*

Remarque 5. *Réciproquement, soit* $X\colon \mathbb{R} \to O_n(\mathbb{R})$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *En dérivant* $X(t)^\mathsf{T} X(t) = I_n$, *on a* $X'(t)X(t)^\mathsf{T} + X(t)X'(t)^\mathsf{T} = 0$ *et* $X(t)^\mathsf{T} = X(t)^{-1}$, *donc*

$$X'(t)X(t)^{-1} = -X(t)X'(t)^\mathsf{T} = -(X'(t)X(t)^{-1})^\mathsf{T}, \tag{88}$$

donc $X'(t) = A(t)X(t)$ *avec* $A(t)$ *antisymétrique.*

Solution 10. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution sur $]-R, R[$ avec $R > 0$, on a $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n$. En reportant, et par unicité du développement en série entière, on a

$$2(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n = 0. \tag{89}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)}$ donc

$$a_n = \frac{2^n}{(2n)!}a_0. \tag{90}$$

Réciproquement, définissons ainsi les a_n, avec par exemple $a_0 = 1$. On a $R = +\infty$ (règle de d'Alembert). En remontant les calculs, $y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{(2n)!}$ est solution sur I.

Si $I = \mathbb{R}_+^*$, on a $y_1(x) = \cosh(\sqrt{2x})$. On vérifie alors que $y_2(x) = \sinh(\sqrt{2x})$ est solution.

Si $I = \mathbb{R}_-^*$, on a $y_1(x) = \cos(\sqrt{-2x})$. On vérifie que $\sin(\sqrt{-2x})$ est solution.

Les solutions maximales sont donc :

— sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lambda\cosh(\sqrt{2x}) + \mu\sinh(\sqrt{2x})$ avec $\mu \neq 0$,

— sur $\mathbb{R}_-^*$, $\alpha\cos(\sqrt{-2x}) + \beta\sin(\sqrt{-2x})$ avec $\beta \neq 0$,

— sur $\mathbb{R}$, $\lambda\cosh(\sqrt{2x})$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda\cos(\sqrt{-2x})$ sur $\mathbb{R}_-$ d'où $\lambda\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n 2^n}{(2n)!}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ car développable en série entière.

■

Solution 11. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur $\mathbb{R}$. $(\sinh, \cosh)$ est nue base de l'ensemble solutions de l'équation homogène. Soit $\varphi(x) = \lambda(x)\cosh(x) + \mu(x)\sinh(x)$ avec la condition

$\lambda' \cosh + \mu' \sinh = 0$. φ est solution si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda'(x)\cosh(x) + \mu'(x)\sinh(x) & = & 0, \\ \lambda'(x)\sinh(x) + \mu'(x)\cosh(x) & = & \frac{1}{\cosh(x)}. \end{cases} \tag{91}$$

$\cosh(x) \times$ première ligne $- \sinh(x) \times$ deuxième ligne et $\sinh(x) \times$ première ligne $- \cosh(x) \times$ deuxième ligne donne

$$\begin{cases} \lambda'(x) & = & -\tanh(x), \\ \mu'(x) & = & 1. \end{cases} \tag{92}$$

Donc $\lambda(x) = -\ln(\cosh(x)) + \lambda$ et $\mu(x) = x + \mu$.

On a

$$\begin{aligned} \varphi(x) & = \cosh(x)(\lambda - \ln(\cosh(x))) + \sinh(x)(x+\mu), \\ \varphi'(x) & = \sinh(x)\,(\lambda - \ln(\cosh(x))) + \cosh(x)(x+\mu). \end{aligned} \tag{93}$$

Et $\varphi(0) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $\varphi'(0) = 0$ si et seulement si $\mu = 0$. ■

Solution 12. D'après la décomposition de Dunford, il existe D diagonalisable et N nilpotente qui commutent telles que $A = D + N$, avec $\chi_D = \chi_A$. Alors

$$\exp(tA) = \underbrace{\exp(tD)}_{P^{-1}\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{t}\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant P}} \underbrace{\exp(tN)}_{\left(I_n + tN + \cdots + \frac{t^{n-1}N^{n-1}}{(n-1)!}\right)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0. \tag{94}$$

■

Solution 13. $(\sin, \cos)$ est une base de solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$. Soit

$$\varphi(t) = \lambda(t)\sin(\omega t) + \mu(t)\cos(\omega t), \tag{95}$$

avec $\lambda'(t)\sin(\omega t) + \mu'(t)\cos(\omega t) = 0$. φ est solution si et seulement si $\varphi'' + \omega^2\varphi = f$ et

$$\lambda'(t)\cos(\omega t) - \mu'(t)\sin(\omega t) = \frac{f(t)}{\omega}. \tag{96}$$

On fait $\sin(\omega t)$ fois la première ligne $+ \cos(\omega t)$ fois la deuxième ligne donne

$$\lambda'(t) = \frac{f(t)}{\omega}\cos(\omega t). \tag{97}$$

$\cos(\omega t)$ fois la première ligne - $\sin(\omega t)$ fois la deuxième ligne donne

$$\mu'(t) = -\frac{f(t)}{\omega}\sin(\omega t). \tag{98}$$

Ainsi,

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{\omega}\sin(\omega(t-u))\mathrm{d}u + \lambda\sin(\omega t) + \mu\cos(\omega t). \tag{99}$$

φ est T-périodique si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t+T) = \varphi_1(t) = \varphi(t)$. Or $\varphi_1(t)$ est solution car f est T-périodique. On a $\varphi_1 = \varphi$ si et seulement si $\varphi_1(0) = \varphi(0)$ et $\varphi_1(T) = \varphi(T)$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si et seulement si $\varphi(T) = \varphi(0)$ et $\varphi'(T) = \varphi'(0)$.

Ainsi, on doit avoir

$$\int_0^T \frac{f(u)}{\omega}\sin(\omega(T-u))\mathrm{d}u + \lambda\sin(\omega T) + \mu\cos(\omega T) = \mu. \tag{100}$$

Comme $\varphi'(t) = \lambda(t)\omega\cos(\omega t) - \mu(t)\omega\sin(\omega t)$, donc

$$\varphi'(t) = \int_0^t f(u)\cos(\omega(t-u))\mathrm{d}u + \lambda\omega\cos(\omega T) - \mu\omega\sin(\omega t). \tag{101}$$

Donc on doit avoir

$$\int_0^T f(u)\cos(\omega(T-u))\mathrm{d}u + \lambda\omega\cos(\omega T) - \mu\omega\sin(\omega T) = \lambda\omega. \tag{102}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues et une unique solution T-périodique si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(\omega T) & \cos(\omega T) - 1 \\ \omega(\cos(\omega T) - 1) & -\omega\sin(\omega t) \end{vmatrix} = \omega\left(-\sin^2(\omega T) - (\cos(\omega T) - 1)^2\right) = \omega\left(-2 + 2\cos(\omega T)\right), \tag{103}$$

est non nul si et seulement si $\cos(\omega T) \neq 1$. ■

Solution 14. Soit $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur I et la dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène est 2. Notons que si une solution est polynomiale de degré n, alors le coefficient en x^{n+1} de $x^2y''(x) - 2x(1+x)y'(x) + 2(1+x)y(x)$ est $0 = -2na_n + 2a_n$. Nécessairement $n = 1$ et y_1 est affine. On vérifie que $y_1(x) = x$ est solution. On cherche ensuite une solution de la forme $y_2(x) = C(x)y_1(x) = C(x)x$ avec C non constante. En reportant, on trouve

$$C''(x) + \left(2\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)C'(x) = 0. \tag{104}$$

On trouve par exemple $C(x) = \int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u^4}\mathrm{d}u$. On choisit $\varepsilon = 1$ si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon = -1$ si $I = \mathbb{R}_-^*$.

$$\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u^4}\mathrm{d}u \underset{x\to 0}{\sim} \int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{d}u}{u^4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{3x^3}. \tag{105}$$

Donc y_2 n'a pas de limite en 0. λy_1 sont les seules solutions maximales sur $\mathbb{R}$. ■

Solution 15. On pose $g(t) = f'(t) + f(t)$. L'équation homogène a pour solution $y(t) = \lambda \exp(-t)$ d'où $f(t) = \lambda(t)\exp(-t)$ avec

$$(f' + f)(t) = g(t) = \lambda'(t)\exp(-t). \tag{106}$$

On a $\lambda(t) = \int_0^t \exp(t)g(u)\mathrm{d}u + \lambda$. Si $F(t) = \int_0^t g(u)\exp(u)\mathrm{d}u$, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $t > A$, $|g(t)| \leqslant \varepsilon$. Alors

$$F(t) = \underbrace{\mathrm{e}^{-t}\int_0^A g(u)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}0} + \int_A^t g(u)\mathrm{e}^{u-t}\mathrm{d}u, \tag{107}$$

et le second terme est majoré en valeur absolue par $\frac{\varepsilon}{2}\int_{A-t}^0 \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{A-t}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. D'où le résultat.

Contre exemple pour la deuxième question : e^t. ■

Solution 16. Soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & MB - BM \end{array} \tag{108}$$

On a $A'(t) = \varphi(A(t))$, c'est une équation différentielle homogène linéaire. φ est à coefficients constants, on sait alors que

$$A(t) = \exp(t\varphi)(A(0)). \tag{109}$$

On a $\exp(t\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\varphi^k$. Soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & MB \end{array} \tag{110}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \varphi_2 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & -BM \end{array} \tag{111}$$

On a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, et

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(M) = -BMB = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(M). \tag{112}$$

Ainsi, $\exp(t\varphi) = \exp(\varphi_1)\exp(t\varphi_2)$. On a

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1^k : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & MB^k \end{array} \tag{113}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1^k : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & (-1)^k B^k M \end{array} \tag{114}$$

On Si $A(0) = A_0$, on a

$$\exp(t\varphi_1)\left(\exp(t\varphi_2)(A(0))\right) = \exp(t\varphi_1)\exp(-tB)(A_0). \tag{115}$$

On a

$$\exp(t\varphi_1)(M) = M\exp(tB). \tag{116}$$

Ainsi,

$$A(t) = \exp(-tB)A_0\exp(tB), \tag{117}$$

donc $A(t)$ est semblable à A_0. ■

Remarque 6. *Si A_0 et B commutent alors $A(t) = A_0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ et B commutent.*

Remarque 7. *Onp eut aussi résoudre en écrivant*

$$\underbrace{\mathrm{e}^{tB}(A'(t) + BA(t))}_{C'(t)} = \underbrace{\mathrm{e}^{tB}A(t)}_{C(t)}B. \tag{118}$$

Donc $C'(t) = C(t)B$ puis $C'(t)\exp(-tB) - C(t)B\exp(-tB) = 0 = D'(t)$ avec $D(t) = \exp(-tB)$. Ainsi, $D(t) = D(0)$, d'où $C(t) = C(0)\exp(tB)$ puis

$$A(t) = \exp(-tB)A(0)\exp(tB). \tag{119}$$

Remarque 8. *Si on a maintenant* $A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$, *soit pour* $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(t) = \mathrm{Tr}(A^k(t))$. *Alors*

$$\varphi_k'(t) = \mathrm{Tr}(-\sum_{i=0}^{k-1} A^i(t)A'(t)A^{k-1-i}(t)), \tag{120}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{Tr}(A'(t)A^{k-1}(t)), \tag{121}$$

$$= k\,\mathrm{Tr}(A'(t)A^{k-1}(t)), \tag{122}$$

$$= k\left(\mathrm{Tr}(A(t)B(t)A^{k-1}(t)) - \mathrm{Tr}(B(t)A^k(t))\right). \tag{123}$$

Donc $\varphi_k'(t) = 0$, *donc* $t \mapsto \mathrm{Tr}(A^k(t))$ *est constant.*

Or les coefficients de χ_A *sont des polynômes en* $(\mathrm{Tr}(A^k)_{1\leqslant k\leqslant n-1})$, *donc* $\chi_{A(t)}$ *est constant.*

Si $\chi_{A_0} = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ *est scindé à racines simples, alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ *est semblable à* $\mathrm{diag}(\lambda_i)$ *donc à* A_0.

Solution 17.

1. On a

$$X_3'(t) = -\exp(-t(A+B))(A+B)\exp(tB)\exp(tA) \tag{124}$$
$$+\exp\left(-t(A+B)\right)\left(B\exp(tB)\exp(tA) + \exp(tB)A\exp(tA)\right),$$

$$= \exp(-t(A+B))\left(-(A+B) + B + \exp(tB)A\exp(-tB)\right)\exp(tB)\exp(tA). \tag{125}$$

Donc $\varphi(t) = -A + \exp(tB)A\exp(-tB)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, on a

$$\varphi'(t) = \exp(tB)BA\exp(-tB) - \exp(tB)AB\exp(-tB), \tag{126}$$

$$= \exp(tB)[B,A]\exp(-tB). \tag{127}$$

2. $[B,[A,B]] = 0$ donc B commute avec $[B,A]$. Ainsi, $\varphi'(t) = [B,A]$ et

$$\varphi(t) = t(BA - AB) + \varphi(0) = t(AB - BA). \tag{128}$$

Puis on a (A et B commutent avec $[A,B]$)

$$\chi_3'(t) = t\exp(-t(A+B))[B,A]\exp(tB)\exp(tA), \tag{129}$$

$$= t[B,A]\chi_3(t). \tag{130}$$

Ainsi,

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2}[B,A]\right)(X_3'(t)-t[B,A]\chi_3(t)) = C'(t) = 0, \tag{131}$$

avec $C(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}[B,A]\right)\chi_3(t)$, donc

$$\chi_3(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}[B,A]\right)\chi_3(0) = \exp\left(\frac{t^2}{2}[B,A]\right). \tag{132}$$

Ainsi,

$$\exp\left(t(A+B)\right) = \exp(tB)\exp(tA)\exp\left(-\frac{t^2}{2}[B,A]\right), \tag{133}$$

et pour $t=1$,

$$\exp(A+B) = \exp(B)\exp(A)\exp\left(-\frac{1}{2}[B,A]\right). \tag{134}$$

■

Solution 18.

1. Si $X=\emptyset$, c'est bon. Sinon, soit $x_0 \in X$. Si $y'(x_0)=0$, y est solution de l'équation différentielle avec $y(x_0)=y'(x_0)=0$ et 0 est aussi solution. Par unicité venant du théorème de Cauchy-Lipschitz, on a $y=0$ ce qui n'est pas. Donc $y'(x_0)\neq 0$ et par continuité de y' $y'>0$ au voisinage de x_0 donc y est localement injective.
2. Supposons $|X|=+\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ injective. Comme $X_n \subset I$, $x_n \in I$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc il existe $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in I$.

   Or $y(x_{\sigma(n)})=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc par continuité de y, on a $y(x)=0$. Ainsi, pour tout $a>0$, il existe $x_n\in X$ tel que $x_n \in]x-a,x+a[$, impossible d'après la première question.
3. Stratégie : on va montrer que X est dénombrable, qu'il existe $x_0\in X$ tel que pour tout $x\in X$, $x_0\leqslant x$, et ainsi de suite par récurrence sur $X\setminus\{x_0\}$.

   Pour tout $B<0$, soit $\widetilde{I})[a,B]$. On a $\left|X\cap\widetilde{I}\right|<\infty$. On a

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[B_n,B_{n+1}]}_{I_n}, \tag{135}$$

   avec $B_0=a$ et (B_n) strictement croissante, $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$. Alors

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{I_n\cap X}_{\text{fini}}. \tag{136}$$

   Donc X est dénombrable. On a $X_n = I_n\cap X$. Chaque X_n s'ordonne en $x_1^{(n)}<\cdots<x_{r_n}^{(n)}$.

■

Solution 19.

1. Le Wronskien $W_{y_1,y_2}(t) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)(t)$ garde un signe constant. On a $W_{y_1,y_2}(a) = -y_1'(a)y_2(a)$ et $W_{y_1,y_2}(0) = -y_1'(b)y_2(b)$. $y_1'(a)$ et $y_1'(b)$ sont différents de 0 par unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz (sinon $y_1 = 0$).

   Si $y_1 > 0$ sur $]a,b[$: si $y_1'(a) < 0$, par continuité de y_1', y_1' reste négatif à droite de a donc y_1 y est strictement décroissante donc négative : impossible. Donc $y_1(a) > 0$. De même, $y_1'(b) < 0$. Or le Wronskien ne change pas de signe et

   $$y_1'(a)y_1'(b)y_2(a)y_2(b) = W_{y_1,y_2}(a) \times W_{y_1,y_2}(b) > 0. \tag{137}$$

   Donc $y_2(a)y_2(b) < 0$. Comme y_2 est continue, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et y_2 s'annule sur $]a,b[$.

   Si $y_1 < 0$, on applique ce qui précède à $-y_1$.

   Si y_2 s'annulait deux fois sur $]a,b[$, comme y_1 et y_2 jouent des rôles symétriques, y_1 s'annulerait une fois sur $]a,b[$: impossible.

2. Soit $H = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. On a

   $$H' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = (r_1 - r_2) y_1 y_2. \tag{138}$$

   Supposons que $y_1 > 0$ sur $]a,b[$. Su y_2 ne s'annule pas sur $]a,b[$, supposons par exemple que $y_2 > 0$ sur $]a,b[$. Alors $H' < 0$ sur $]a,b[$, H est strictement décroissante sur $[a,b]$, et $H(0) = -y_2(a)y_1'(a) < 0$, $H(b) = -y_2(b)y_1'(b) > 0$: impossible. Donc y_2 s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

   Application : si pour tout $t \in I$, $r_1(t) < \omega^2$, soit $a < b$ deux zéros consécutifs de y_1 et $y_2(t) = \sin(\omega(t-a))$. Les zéros de y_2 sont les $a + \frac{k\pi}{\omega}$ d'où un écart plus grand que $\frac{\pi}{\omega}$.

   Soit a un zéro de y_1. En échangeant les rôles joués par r_1 et r_2 : $y = \sin(\omega'(t-a))$ s'annule en 0 et $a + \frac{\pi}{\omega}$ (deux zéros consécutifs). Donc l'écart entre deux zéros consécutifs de y_1 est plus petit que $\frac{\pi}{\omega}$.

■

Solution 20.

1. Il est clair que $\mathcal{T}_T$ est linéaire. Pour tout $Y \in S$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(\mathcal{T}_T(y))''(x) + p(x)\mathcal{T}_T(y)(x) = y''(x+T) + p(x+T)y(x+T) = 0, \tag{139}$$

donc $\mathcal{T}_T(y) \in \mathcal{L}(S)$. Via le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\dim(S) = 2$. Posons $A = \frac{\mathrm{Tr}(\mathcal{T}_T)}{2}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$X^2 - 2AX + \det(\mathcal{T}_T) \tag{140}$$

annule $\mathcal{T}_T$. Soit alors (y_1, y_2) la base de S telle que $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$.

Si $y = \alpha y_1 + \beta y_2 \in S$, alors $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$ donc $y = y(0)y_1 + y'(0)y_2$. Ainsi,

$$\mathcal{T}_T(y_1) = y_1(T)y_1 + y_1'(T)y_2 = \mathcal{T}_T(y_1)(0)y_1 + \mathcal{T}_T(y_1)'(0)y_2, \tag{141}$$

d'où

$$\mathrm{mat}_{(y_1,y_2)}(\mathcal{T}_T) = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}. \tag{142}$$

Ainsi, $\det(\mathcal{T}_T) = y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T) = W_{y_1,y_2}(T)$ où W est le Wronskien. On a

$$W'_{y_1,y_2}(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x), \tag{143}$$

$$= -y_1(x)p(x)y_2(x) + y_1(x)p(x)y_2(x), \tag{144}$$

$$= 0. \tag{145}$$

Donc W_{y_1,y_2} est constant et $W_{y_1,y_1}(0) = 1$ donc $\det(\mathcal{T}_T) = 1$. Ainsi,

$$\chi_{\mathcal{T}_T} = X^2 - 2AX + 1. \tag{146}$$

On a $A = \frac{\mathrm{Tr}(\mathcal{T}_T)}{2} = \frac{1}{2}(y_1(T) + y_2'(T))$ donc pour tout $y \in S$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x+2T) - 2Ay(x+T) + y(x) = 0$.

2. On a $\chi_{\mathcal{T}_T} = X^2 - 2AX + 1$. On a $\Delta = 4(A^2 - 1) < 0$ si $|A| < 1$. On a deux racines complexes conjuguées μ et $\overline{\mu}$. De plus, $\mu\overline{\mu} = 1 = \det(\mathcal{T}_T)$ donc $\mu \in \mathbb{U}$. Ainsi, il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_T) = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right\}$. Donc $\mathrm{mat}_{(y_1,y_2)}(\mathcal{T}_T)$ est semblable sur $\mathbb{R}$ à

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{147}$$

Soit (f_1, f_2) la base de S telle que $\mathrm{mat}_{(f_1,f_2)}(\mathcal{T}_T) = R_\theta$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{mat}_{(f_1,f_2)}(\mathcal{T}_T^n) = R_{n\theta}. \tag{148}$$

Si $f = af_1 + bf_2$, on a

$$\mathcal{T}_T^n(f) = (a\cos(n\theta) - b\sin(n\theta))f_1 + (a\sin(\theta) + b\cos(n\theta))f_2 = f(x + nT). \tag{149}$$

Pour tout $x \in [0, T]$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|f(x + nT)| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}\left(\|f_1\|_{\infty,[0,T]} + \|f_2\|_{\infty,[0,T]}\right), \tag{150}$$

donc f est bornée.

3. Si $|A| > 1$, on a $\delta > 0$ et
$$\mathrm{Sp}(\mathcal{T}_T) = \left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\right\}, \tag{151}$$
avec $|\lambda| \in]0, 1[$. Il existe (f_1, f_2) base de S telle que $\mathcal{T}_T(f_1) = \lambda f_1$ et $\mathcal{T}_T(f_2) = \frac{1}{\lambda} f_2$.

Ainsi, si $f = af_1 + bf_2$, pour tout $x \in [0, T]$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|f(x + nT)| = \left|\lambda^n a f_1(x) + \frac{b}{\lambda^n} f_2(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \tag{152}$$

donc toutes les solutions non nulles sont non bornées.

Si $A = 1$, on a $\chi_{\mathcal{T}_T} = (X - 1)^2$. Ou bien $\mathcal{T}_T = id$ et dans ce cas toutes les solutions sont T-périodiques donc bornées (car continues). Ou bien il existe une base (f_1, f_2) de S telle que

$$\mathrm{mat}_{(f_1,f_2)}(\mathcal{T}_T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{153}$$

On a
$$\mathrm{mat}_{(f_1,f_2)}(\mathcal{T}_T^n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{154}$$

Ainsi, il existe des solutions non nulles périodiques et des solutions non bornées.

■

Solution 21.

1. $(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ est une base de S (espace des solutions de l'équation différentielle). On cherche la solution générale sous la forme

$$y(x) = \lambda(x)\mathrm{e}^x + \mu(x)\mathrm{e}^{-x}, \tag{155}$$

avec $\lambda'(x)\mathrm{e}^x + \mu'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lambda'(x)\mathrm{e}^x - \mu'(x)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.

Donc $\lambda'(x) = \frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x}$ et $\mu'(x) = -\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^x$. Donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x + \lambda\mathrm{e}^x + \left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \mu\right)\mathrm{e}^{-x}\right). \tag{156}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $|f(t)| \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout $x \geqslant A$, on a

$$\left|\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \varepsilon\left|1 - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \varepsilon, \tag{157}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Si y est bornée, nécessairement $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \lambda = 0$. Donc

$$\lambda = -\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \tag{158}$$

définie car f est bornée. De même,

$$\lim_{x\to-\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^x = \lim_{x'\to+\infty}\left(-\int_0^{x'} f(-u)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-x'}, \tag{159}$$

$$= 0. \tag{160}$$

Donc $\mu = \int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ (définie car f est bornée). Alors

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(-\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^x + \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x}\right). \tag{161}$$

Réciproquement, posons

$$y_0(x) = \frac{1}{2}\left(-\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^x + \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x}\right). \tag{162}$$

On a

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^x = \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{x-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(u+x)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u. \tag{163}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(u+x)\mathrm{e}^{-u}| \leqslant \|f\|_{\infty,\mathbb{R}}\, \mathrm{e}^{-u}$, intégrable. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{|x|\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{x} = 0. \tag{164}$$

De même, on a

$$\lim_{|x|\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-x} = 0. \tag{165}$$

Donc $y_0(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$. Donc y_0 est bornée et sa limite est 0.

■

Solution 22.

1. Comme $p\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle équivaut à $x'' + \frac{p'}{p}x' + \frac{q}{p}x = 0$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

   La première partie vient de l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. La deuxième vient du théorème de relèvement.

2. Il vient

$$\begin{aligned} (px')' &= px'' + p'x' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta, \\ x' &= r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = \tfrac{r\cos\theta}{p}. \end{aligned} \tag{166}$$

   x est solution si et seulement si $(xp)' = -qx = -qr\sin\theta$ si et seulement si

$$\begin{cases} r'\cos\theta + r(q-\theta')\sin\theta &= 0, \\ r'\sin\theta + r\left(\theta' - \frac{1}{p}\right)\cos\theta &= 0, \end{cases} \tag{167}$$

   si et seulement si

$$\begin{cases} r' &= r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{p} - q\right), \\ \theta' &= q\sin^2\theta + \frac{1}{p}\cos^2\theta. \end{cases} \tag{168}$$

3. Si $p = 1$, on a

$$\begin{cases} \theta' = q\sin^2\theta + \cos^2\theta, \\ r' = r\sin\theta\cos\theta\,(1-q). \end{cases} \tag{169}$$

   On a $\theta' > 0$ donc θ est strictement croissante et admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Si $l < +\infty$, on a

$$\int_a^t \theta'(t)\mathrm{d}u = \theta(t) - \theta(a) \xrightarrow[t\to+\infty]{} l - \theta(a). \tag{170}$$

De plus,

$$\int_a^t \theta'(u)\mathrm{d}u = \int_a^t q(u)\sin^2(\theta(u))\mathrm{d}u + \int_a^t \cos^2(\theta(u))\mathrm{d}u, \tag{171}$$

$$\geqslant \int_a^t q(u)\sin^2(\theta(u))\mathrm{d}u, \tag{172}$$

$$\underset{u\to+\infty}{\sim} q(u)\sin^2(l). \tag{173}$$

Comme $\int_a^t q(u)\mathrm{d}u$ diverge, nécessairement, $\int_a^t \theta'(u)\mathrm{d}u$ étant finie, on a $\sin^2(l) = 0$ donc $\cos^2(l) = 1$ et $\int_a^t \cos^2(\theta(u))\mathrm{d}u \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$: contradiction.
Nécessairement, $l = +\infty$, puis par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\pi \geqslant a$, il existe un unique $t_k \in [a, +\infty[$ tel que $\theta(t_k) = k\pi$ et $x(t_k) = 0$. Donc x s'annule une infinité de fois.

$\blacksquare$

Solution 23. Si (ii), soit $a \in \mathbb{R}$, alors pour tout $f \in E$, $(\mathcal{T}_a(f))' = \mathcal{T}_a(f')$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x+a) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x+a) + \cdots + a_0 f(x+a) = 0, \tag{174}$$

donc $\mathcal{T}_a(f) \in E$, d'où (iii).

Si (i), on note $\chi_\Delta(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$ le polynôme caractéristique de $\Delta\colon f \mapsto f' \in \mathcal{L}(E)$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_\Delta(\Delta) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc pour tout $f \in E$,

$$\chi_\Delta(\Delta)(f) = f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f = O_E, \tag{175}$$

donc E est inclus dans l'ensemble solution. Puis, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la dimension de l'espace des solutions est $n = \dim(E)$ donc on a bien égalité. D'où (ii).

Si (iii), notons que s'il existe $({}_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $f \in E$, $f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$, alors $f = 0$. En effet, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array} \tag{176}$$

une forme linéaire sur E. D'après le théorème de caractérisation des formes linéaires, il existe $g_x \in E$ tel que pour tout $f \in E$, $\delta_x(f) = f(x) = (g_x|f)$ (produit scalaire complexe a priori). Soit $f \in E$, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g_x|f) = 0$ alors $f = 0$. Ainsi, $(\mathrm{Vect}((g_x)_{x\in\mathbb{R}}))^\perp = \{0\}$. Donc $\mathrm{Vect}((g_x)_{x\in\mathbb{R}}) = E$. Donc $(g_x)_{x\in\mathbb{R}}$ est une famille génératrice de E, ainsi il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(g_{x_1}, \ldots, g_{x_n})$ est une base de E, donc $(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ (ensemble des formes linéaires sur E de dimension n). En effet, c'est une famille libre car si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} = 0$ alors pour tout $f \in E$, $(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_{x_i}|f) = 0$ donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i g_{x_i} = 0$ et $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\delta_x = \lambda_1(x)\delta_{x_1} + \cdots + \lambda_n(x)\delta_{x_n}$. Donc si $f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \delta_x(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}(f) = 0$ d'où $f = 0$.

Ensuite, notons qu'il existe $(h_1, \ldots, h_n)$ base de E telle que pour tout $f \in E$, $f = \sum_{i=1}^n f(x_i) h_i$. En admettant ce résultat, on définit

$$g = \sum_{i=1}^n f'(x_i) h_i, \tag{177}$$

et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f'(x_i) = g(x_i)$. Pour tout $x \in E$, on a

$$f'(x) = \lim_{p \to +\infty} p\left(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(f)(x) - f(x)\right). \tag{178}$$

Si $\delta_x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}$, on a

$$\begin{aligned}
p\left(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(f)(x) - f(x)\right) &= p\left(f\left(x + \frac{1}{p}\right) - f(x)\right), && (179)\\
&= \delta_x\left(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(f) - f\right), && (180)\\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}\left(p\left(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(f) - f\right)\right), && (181)\\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i p\left(f\left(x_i + \frac{1}{p}\right) - f(x_i)\right), && (182)\\
&\xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_i), && (183)\\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i), && (184)\\
&= g(x), && (185)\\
&= f'(x). && (186)
\end{aligned}$$

D'où (i). ■

Remarque 9. *En notant le polynôme minimal* Δ Π_Δ, *on a* $\deg(\Pi_\Delta) = n$. *En effet, si* $\Pi_\Delta = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{m-1}X^{m-1} + X^m$ *avec* $m \leqslant n$ *(d'après le théorème de Cayley-Hamilton), alors* E *est inclus dans l'ensemble solution de l'équation différentielle* $b_0 + b_1 y + \cdots + b_{m-1}y^{(m-1)} + y^{(m)} = 0$ *qui est de dimension* m. *Or* $\dim(E) = n$ *et* $m \leqslant n$, *donc* $m = n$ *et* $\chi_\Delta = \pi_\Delta$.

Solution 24.

1. Il existe $(m, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $m \leqslant \Delta \leqslant M$. Si $\lambda = 0$, f est affine et $f(0) = f(1) = 0$ implique $f = 0$. Si $\lambda > 0$, on a

$$\lambda m f \leqslant f'' = \lambda \Delta f \leqslant \lambda M f. \tag{187}$$

Posons g solution de $g'' = \lambda m g$ et h solution de $f'' = \lambda M h$, avec $g(0) = h(0) = 0$, $g'(0) = h'(0) = f'(0)$. On a

$$\begin{aligned} g(t) &= \tfrac{f'(0)}{\sqrt{\lambda m}} \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right), \\ h(t) &= \tfrac{f'(0)}{\sqrt{\lambda M}} \sinh\left(\sqrt{\lambda M} t\right). \end{aligned} \tag{188}$$

Donc $g(1) \neq 0$ et $h(1) \neq 0$. On a

$$0 \leqslant (f-g)'' - \lambda m (f-g) = f'' - \lambda m f. \tag{189}$$

Si $f_1 = f - g$, on a $f_1'' - \lambda m f_1 = \varepsilon \geqslant 0$ et $f_1(0) = f_1'(0) = 0$. Résolvons $f_1'' - \lambda m f_1 = \varepsilon_1$ avec $f_1'(0) = f_1(0) = 0$. On a

$$f_1(t) = \lambda(t) \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) + \mu(t) \cosh\left(\sqrt{\lambda m} t\right), \tag{190}$$

avec $\lambda'(t) \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) + \mu'(t) \cosh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) = 0$. Il vient

$$\sqrt{\lambda m}\left(\lambda'(t) \cosh\left(\sqrt{\lambda m} t\right)\right) + \mu'(t) \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) = \varepsilon_1(t). \tag{191}$$

D'où

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda m}} \cosh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) \varepsilon_1(t), \\ \mu'(t) &= -\tfrac{1}{\sqrt{\lambda m}} \sinh\left(\sqrt{\lambda m} t\right) \varepsilon_1(t). \end{aligned} \tag{192}$$

On a $f_1(0) = 0$ donc $\mu(0) = 0$ et $f_1'(0) = 0$ donc $\lambda(0) = 0$. Finalement,

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda m}} \int_0^t \left(\sinh\left(\sqrt{\lambda m} u\right) \cosh\left(\sqrt{\lambda m} u\right) - \cosh\left(\sqrt{\lambda m} u\right) \sinh\left(\sqrt{\lambda m} u\right)\right) \varepsilon_1(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\lambda m}} \int_0^t \sin \tag{193}$$

Donc $f \geqslant g$. De même, $f \leqslant h$. Donc quelle que soit la valeur de $f'(0)$, on a $f(1) > 0$ ou $f(1) < 0$. Ainsi, $\lambda \leqslant 0$.

On pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \Delta f g$. C'est un produit scalaire car $\Delta > 0$. Vérifions que v est autoadjoint pour ce produit scalaire :

$$\langle v(f), g\rangle = \int_0^1 f''(t)g(t)\mathrm{d}t = \underbrace{[f(t)g(t)]_0^1}_{=0 \text{ car } g\in E} - \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t, \tag{194}$$

expression symétrique en f et g. Donc $\langle v(f), g\rangle = \langle f, v(g)\rangle$. Si $v(f) = \lambda f$ et $v(g) = \lambda g$, on a alors $\lambda \langle f, g\rangle = \mu \langle f, g\rangle$ donc si $\lambda \neq \mu$, on a $\langle f, g\rangle = 0$.

2. C'est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz.

3. Sur $[2, +\infty[$ on a $f'' = \gamma f$ et $\gamma < 0$ d'après la première question. Donc il existe $(A, \varphi) \int \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [2, +\infty[$, $f(t) = A \sin(\sqrt{-\gamma}t + \varphi)$.

   Si $A = 0$, f est solution du problème de Cauchy $f'' = \gamma\Delta f$ avec $f(2) = f'(2) = 0$ donc $f = 0$ par unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, ce qui est absurde car $f'(0) = 1$. Donc $A \neq 0$ et f s'annule en $\frac{k\pi-\varphi}{\sqrt{-\gamma}}$ avec $k \in \mathbb{N}$ sur $[2, +\infty[$.

   Sur $[0, 2]$, si f s'annule une infinité de fois, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite injective de $[0, 2]$ telle que $f(a_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On extrait $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in [0, 2]$. f étant continue sur $[0, 2]$, $f(a) = 0$ et d'après le théorème de Rolle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $b_n \in]a, a_{\sigma(n)}[$ (ou bien $]a_{\sigma(n)}, a[$) tel que $f'(b_n) = \gamma$. Par continuité de f', puisque $b_n \to 0$, on a $f'(a) = 0$. f est alors solution du problème de Cauchy $y'' = \gamma\Delta y$ avec $y(a) = y'(a) = 0$. Par unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, $f = 0$ ce qui est absurde car $f'(0) = 1$. Donc f s'annule un nombre fini de fois sur $[0, 2]$.

4. Soit $A > 0$. Sur $[0, A]$, notons $M = \sup\limits_{[0,A]} |\Delta|$. Sur $[0, x_1(\gamma)]$, f_γ est positive (car ne change pas de signe et $f'_\gamma(0) = 1$). Notons $t_\gamma \in [0, x_1(\gamma)]$ tel que $f_\gamma(t_\gamma) = \max\limits_{t\in[0,x_1(\gamma)]} f_\gamma(t)$. Pour tout $t \in]0, x_1(\gamma)[$, on a

$$f''_\gamma(t) = \Delta(t)\gamma f_\gamma(t) < 0, \tag{195}$$

   donc f_γ est concave sur $[0, x_1(\gamma)]$. Ainsi, pour tout $t \in [0, x_1(\gamma)]$, $f_\gamma(t) \leqslant t$ (en-dessous de la tangente en 0). Donc $f_\gamma(t_\gamma) \leqslant t_\gamma \leqslant x_1(\gamma)$. Alors pour tout $t \in [0, x_1(\gamma)]$, on a

$$0 \leqslant f(t) \leqslant x_1(\gamma)(\gamma) \leqslant A, \tag{196}$$

et $\gamma MA \leqslant f''_\gamma(t) \leqslant 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$1 = |f'(t_\gamma) - f'(0)| \leqslant |\gamma| \, MAt_\gamma, \tag{197}$$

$$\leqslant |\gamma| \, MAx_1(\gamma), \tag{198}$$

donc

$$x_1(\gamma) \geqslant \frac{1}{MA\,|\gamma|} \xrightarrow[\gamma \to 0]{} +\infty. \tag{199}$$

$\blacksquare$

Remarque 10. *Autre méthode pour la première question : comme $f(0) = f(1) = 0$ et $f \neq 0$, il existe $x_0 \in]0,1[$, $f(x_0) \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$ on suppose $f(x_0) > 0$. Alors $\max\limits_{[0,1]} f > 0$ et il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que $f(x_1) = \max\limits_{[0,1]} f$. Il vient $f'(x_1) = 0$ et si $\lambda > 0$, on a $f''(x_1) = \lambda \Delta(x_1) f(x_1) > 0$. Un développement limité fournit*

$$f(x_1 + h) - f(x_1) \underset{h \to 0}{\sim} \frac{h^2}{2} f'(x_1) > 0, \tag{200}$$

ce qui contredit le fait que $f(x_1) = \max\limits_{t \in [0,1]} f(t)$.