Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Algèbre Générale

Solution 1.1. Soit $(x, y) \in G^2$. On a d'abord

$$x \cdot y = (x \cdot y)^{p+1}(x \cdot y)^{-p} \tag{1.1}$$
$$= x^{p+1} \cdot y^{p+1} \cdot y^{-p} \cdot x^{-p} \tag{1.2}$$
$$= x^{p+1} \cdot y \cdot x^{-p} \tag{1.3}$$

On cherche maintenant à montrer que x^{p+1} et y commutent. On a

$$y^{p+2} \cdot x^{p+2} = (y \cdot x)^{p+2} \tag{1.4}$$
$$= (y \cdot x)^{p+1} \cdot y \cdot x \tag{1.5}$$
$$= y^{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot y \cdot x \tag{1.6}$$

Donc on a $y \cdot x^{p+1} = x^{p+1} \cdot y$. En reportant dans (1.3), on a $x \cdot y = y \cdot x$ et donc

$$\boxed{\text{G est abélien.}} \tag{1.7}$$

■

Remarque 1.1.

— *Pour $(\Sigma_3, \cdot)$, on a f_0, f_1 et f_6 des morphismes mais Σ_3 n'est pas commutatif.*

— *Si f_2 est un morphisme, alors on a $(x \cdot y)^2 = x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2$ d'où $y \cdot x = x \cdot y$.*

Solution 1.2. A est non vide car $\omega(e_G) = 1$ et $e_G \in A$. Soit $x \in A$ tel que $\omega(x) = 2p+1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$x^{2k} = e_G \Leftrightarrow 2p + 1 \mid 2k \tag{1.8}$$
$$\Leftrightarrow 2p + 1 \mid k \tag{1.9}$$

d'après le théorème de Gauss.

Ainsi, $\omega(x^2) = 2p + 1$ et $x^2 \in A$, donc

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \to & A \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \tag{1.10}$$

est bien définie. Soit $x \in A$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2p+1} = e_G$ donc $x^{2p+2} = x$ d'où $(x^{p+1})^2 = x$. Il suffit donc de vérifier que $x^{p+1} \in A$ pour montrer que l'application est surjective. Comme A est fini, elle sera bijective.

On a $gr\{x^{p+1}\} \subset gr\{x\}$ et $(x^{p+1})^2 = x$ donc $gr\{x\} = gr\{x^{p+1}\}$ donc $\omega(x) = \omega(x^{p+1}) = 2p+1$ et donc $x^{p+1} \in A$.

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ est bijective.}} \tag{1.11}$$

■

Solution 1.3. On note $m = \theta(\sigma)$. On suppose que σ se décompose en produit de cycle de longueur $l_1, \dots, l_m$ avec $l_1 + \dots + l_m = n$. Comme

$$(a_1, \dots, a_l) = [a_1, a_2] \circ [a_2, a_3] \circ \dots \circ [a_{l-1}, a_l] \tag{1.12}$$

Donc σ se décompose en $\sum_{i=1}^{m} (l_i - 1) = n - m$ transpositions. Montrons par récurrence sur k, $\mathcal{H}(k)$: "Un produit de k transpositions possède au moins $n-k$ orbites".

Pour $k = 0$, $\sigma = id$ possède n orbites.

Pour $k = 1$, soit τ une transposition, on a $\theta(\tau) = n - 2 + 1 = n - 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_k$, soit $\sigma \in \Sigma_n$ qui se décompose en produit de $k+1$ transpositions.

$$\sigma = \underbrace{\tau_1 \circ \dots \tau_k}_{\sigma'} \circ \tau_{k+1} \tag{1.13}$$

D'après $\mathcal{H}_k$, on a $\theta(\sigma') \geqslant n - k$. Notons $\tau_{k+1} = [a, b]$.

Si a et b appartiennent à la même orbite. On note $(a_1, \dots, a_r)$ le cycle correspondant avec $a_r = a$ et $a_s = b$ où $s \in [\![1, n-1]\!]$. On a

$$\begin{cases} (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_i) = a_{i+1} & \text{où } i \notin \{r, s\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_r) = a_{s+1} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_s) = a_1 \end{cases} \tag{1.14}$$

On n'a pas perdu d'orbites, donc $\theta(\sigma) \geqslant n-k-1$.

Si a et b n'appartiennent pas à la même orbite, notons $(a_1,\dots,a_r)$ et $(b_1,\dots,b_s)$ ces orbites avec $a=a_r$ et $b=b_s$. On a

$$\begin{cases} \underbrace{(a_1,\dots,a_{r-1},a_r)\circ(b_1,\dots,b_s)\circ[a_r,b_s]}_{\sigma''}(a_i)=a_{i+1} & \text{où } i\in[\![1,\dots,r-1]\!] \\ (a_1,\dots,a_{r-1},a_r)\circ(b_1,\dots,b_s)\circ[a_r,b_s](b_j)=b_{j+1} & \text{où } j\in[\![1,\dots,s-1]\!] \\ (a_1,\dots,a_{r-1},a_r)\circ(b_1,\dots,b_s)\circ[a_r,b_s](a_r)=b_1 \\ (a_1,\dots,a_{r-1},a_r)\circ(b_1,\dots,b_s)\circ[a_r,b_s](b_s)=a_1 \end{cases} \tag{1.15}$$

Donc

$$\sigma''=(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s) \tag{1.16}$$

On a perdu une orbite et donc $\theta(\sigma)\geqslant n-k-1$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence sur k.}} \tag{1.17}$$

■

Solution 1.4. On note par $\overline{k}$ les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et par $\widetilde{l}$ les éléments de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Soit f un morphisme. On pose $f(\overline{1})=\widetilde{x}$ où $x\in[\![0,m-1]\!]$. On a donc $nf(\overline{1})=f(\overline{0})=\widetilde{0}$.

On a donc $\widetilde{nx}=\widetilde{0}$ donc $m\mid nx$. On écrit $m=m_1(m\wedge n)$ et $n=n_1(m\wedge n)$. D'après le théorème de Gauss, on a donc $m_1\mid x$. Donc $x=km_1$ avec $k\in[\![0,(n\wedge m)-1]\!]$.

Réciproquement, soit $k\in[\![0,(n\wedge m)-1]\!]$. On définit

$$\begin{array}{rccc} f_k: & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ & \overline{l} & \mapsto & \widetilde{lkm_1} \end{array} \tag{1.18}$$

Si $\overline{l}=\overline{l'}$, alors $n\mid l-l'$ et donc $nm_1\mid(l-l')km_1$ puis $n_1(n\wedge m)m_1\mid(l-l')km_1$ donc $m\mid(l-l')km_1$ d'où $\widetilde{lkm_1}=\widetilde{l'km_1}$ donc f est bien définie et c'est évidemment un morphisme.

Soit $k,k'\in[\![0,n\wedge m-1]\!]$ avec $k\neq k'$. Si $\widetilde{km_1}=\widetilde{k'm_1}$ alors $m\mid(k-k')m_1$ et donc $n\wedge m\mid k-k'$ et $|k-k'|<n\wedge m$ donc $k=k'$ ce qui est absurde. Ainsi, les f_k sont distincts.

$$\boxed{\text{On a donc } n \wedge m \text{ morphismes.}} \tag{1.19}$$

■

Remarque 1.2. *Exemple pour l'exercice précédent : morphisme de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. On a $f(\bar{1}) = \widetilde{x}$ d'où $\widetilde{4x} = \widetilde{0}$ donc $3 \mid x$ d'où $x \in \{0, 3\}$. On a donc le morphisme trivial $f_0 \colon \bar{l} \mapsto \widetilde{0}$ et $f_1 \colon \bar{l} \mapsto \widetilde{3l}$.*

Solution 1.5. On considère $H = \{x \in G \mid x^2 = e_G\}$. Si $x \notin H$, alors $x^{-1} \neq x$ et donc

$$P = \prod_{x \in H} x \tag{1.20}$$

H est le noyau du morphisme $x \mapsto x^2$ (morphisme car G est abélien) donc H est un sous-groupe. Soit K un sous-groupe de H et $a \in H \setminus K$. Montrons que $K \cup aK$ est un sous-groupe de H.

On a $e_G \in K \cup aK$. Soit $x \in K \cup aK \subset H$, on a $x^{-1} = x \in K \cup aK$. Soit $(x_1, x_2) \in (K \cup aK)^2$, si $(x_1, x_2) \in K^2$,, c'est ok. Si $(x_1, x_2) \in (aK)^2$, on note $x_1 = a \cdot k_1$ et $x_2 = a \cdot k_2$ avec $(k_1, k_2) \in K^2$. On a $x_1 \cdot x_2 = a^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2 \in K$. Si $x_1 \in K$ et $x_2 \in aK$, alors $x_1 \cdot x_2 = a \cdot k_1 \cdot k_2 \in aK$. Donc $K \cup aK$ est un sous-groupe de H.

Soit $x \in K \cap aK$, il existe $(k_1, k_2) \in K^2$ tel que $k_1 = a \cdot k_2$ et $a \in K$ ce qui est impossible. Donc $K \cap aK = \emptyset$.

On construit alors par récurrence K_n : on pose $K_0 = \{e_G\}$ et à l'étape n, si $K_n = H$ on arrête, sinon il existe $a_{n+1} \in H \setminus K_n$ et on pose $K_{n+1} = K_n \cup a_{n+1}K$. Alors $|K_{n+1}| = 2|K_n|$. Comme H est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H = K_{n_0}$. On a alors $|H| = 2^{n_0}$.

Ainsi, si $n_0 = 0$, on a $H = \{e_G\}$ et

$$\boxed{P = e_G} \tag{1.21}$$

Si $n_0 = 1$, on a $H = \{e_G, a_1\}$ et

$$\boxed{P = a_1 \neq e_G} \tag{1.22}$$

Si $n_0 \geqslant 2$, comme chaque a_k apparaît un nombre pair de fois dans le produit, on a

$$\boxed{P = e_G} \tag{1.23}$$

■

Solution 1.6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $(\overline{kx_0})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ ne sont pas deux à deux distincts. Donc il existe $l \neq l' \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $\overline{lx_0} = \overline{l'x_0}$ d'où $0 < |l - l'| \leqslant n$. Donc il existe $j \in [\![1, n]\!]$ avec $jx_0 \in G$. Ainsi, $n!x_0 \in G$ (itéré de jx_0). Ce raisonnement est vrai pour $x = \frac{x_0}{n!}$ donc $x_0 \in G$. Ainsi,

$$\boxed{G = \mathbb{R}} \tag{1.24}$$

■

Solution 1.7. Soit f un isomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $f(\overline{k}) = kf\overline{1})$. Par isomorphisme, $\omega(f(\overline{1})) = \omega(\overline{1}) = n$. Notons alors $\overline{x} = f(\overline{1})$ avec $x \in [\![0, n-1]\!]$.

Si $x \wedge n = 1$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ux + vn = 1$, donc $u\overline{x} = \overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$. Ainsi, $Zn\mathbb{Z} = gr\{\overline{x}\}$ (car les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des itérés de $\overline{1}$) donc $\omega(\overline{x}) = n$.

Réciproquement, si $\omega(\overline{x}) = n$, $\overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$ donc il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $u\overline{x} = 1 = \overline{ux}$. Donc $n \mid ux - 1$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathbb{Z}$ tel que $ux - 1 = vn$, d'où $ux + vn = 1$. D'après Bézout, on a $x \wedge n = 1$. Finalement, on a $\omega(\overline{x}) = n$ si et seulement si $x \wedge n = 1$.

Ainsi, les isomorphismes sont nécessairement de la forme

$$\begin{array}{rccc} f_x : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{k} & \mapsto & \overline{kx} \end{array} \tag{1.25}$$

où $x \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \wedge n = 1$.

Réciproquement, si $x \in [\![0, n-1]\!]$ est tel que $x \wedge n = 1$, f_x est évidemment un morphisme. Si $\overline{k} \in \ker(f_x)$, on a $f_x\left(\overline{k}\right) = \overline{0}$ si et seulement si $\overline{kx} = \overline{0}$ si et seulement si $n \mid kx$ et comme $n \wedge x = 1$, d'après le théorème de Gauss, on a $n \mid k$ donc $\overline{k} = \overline{0}$ donc $\ker(f_x) = \left\{\overline{0}\right\}$. Donc f_x est injective, donc bijective car $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$. ■

Solution 1.8. Si $y \in \mathrm{Im}\varphi$, y possède $|\ker\varphi|$ antécédents. En effet, il existe $x_0 \in G$ tel que $y = \varphi(x_0)$. Pour tout $x \in G$, on a $\varphi(x) = y$ si et seulement si $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ si et seulement si $\varphi(x_0^{-1} \cdot x) = e_G$ si et seulement si $x_0^{-1} \cdot x \in \ker\varphi$ si et seulement si $x \in x_0 \ker\varphi$. Comme

$$\begin{array}{rccc} g: & \ker\varphi & \to & x_0 \ker\varphi \\ & x & \mapsto & x \cdot x_0 \end{array} \tag{1.26}$$

est bijective, on a $|\ker\varphi| = |x_0\varphi|$. Ainsi, on a $|G| = |\mathrm{Im}\varphi| \times |\ker\varphi|$.

Dans tous les cas, on a $\ker\varphi \subset \ker\varphi^2$ et $\mathrm{Im}\varphi^2 \subset \mathrm{Im}\varphi$. On a ensuite

$$\mathrm{Im}\varphi^2 = \mathrm{Im}\varphi \iff |\mathrm{Im}\varphi^2| = |\mathrm{Im}\varphi| \tag{1.27}$$

$$\iff |\ker\varphi^2||\mathrm{Im}\varphi^2| = |\ker\varphi^2||\mathrm{Im}\varphi| = |G| = |\ker\varphi||\mathrm{Im}\varphi| \tag{1.28}$$

$$\iff |\ker\varphi^2| = |\ker\varphi| \tag{1.29}$$

$$\iff \boxed{\ker\varphi^2 = \ker\varphi} \tag{1.30}$$

■

Solution 1.9. On considère

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^m \end{array} \tag{1.31}$$

l'exercice revient à montrer que f est bijective. D'après le théorème de Bézout, il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $am + bn = 1$. Soit $y \in G$, on a

$$y^1 = y = y^{am+bn} = y^{am} \cdot \underbrace{y^{bn}}_{=e_G} = y^{am} = (y^a)^m \tag{1.32}$$

Donc f est surjective et comme G est fini,

$$\boxed{\text{f est bijective.}} \tag{1.33}$$

■

Solution 1.10.

1. On a $e_G \in S_g$, si $(x,y) \in S_g^2$ alors $x \cdot y \cdot g = x \cdot g \cdot y = g \cdot x \cdot y$ donc $x \cdot y \in S_g$ et si $x \in S_g$ alors $x \cdot g = g \cdot x$ implique $g \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot g$ en multipliant par l'inverse de x à gauche et à droite donc
$$\boxed{x^{-1} \in S_g} \tag{1.34}$$

2. Soit $(h,h') \in G^2$. On a $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$ si et seulement si $g \cdot h^{-1} \cdot h' = h^{-1} \cdot h \cdot g$ si et seulement si $h^{-1} \cdot h \in S_g$ si et seulement si $h' \in hS_g$. Or $|hS_g| = |S_g|$ car
$$\begin{array}{cccc} I_h : & S_g & \to & hS_g \\ & x & \mapsto & h \cdot x \end{array} \tag{1.35}$$
est bijective de réciproque $I_{h^{-1}}$. Soit la relation d'équivalence $\mathcal{R}_0$ sur G définie par $h\mathcal{R}_0h'$ si et seulement si $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$. Chaque classe à $|S_g|$ éléments et il y y a $|C(g)|$ classes dans G d'où
$$\boxed{|G| = |S_g|\,|C(g)|} \tag{1.36}$$

3. On a $Z(G) = \cap_{g \in G} S_g$ donc $Z(G)$ est un sous-groupe et pour tout $g \in G$,
$$\boxed{Z(G) \subset S_g} \tag{1.37}$$

4. Pour $x \in G$, on note $\overline{x} = \{h \cdot x \cdot h^{-1} \mid h \in G\} = C(x)$.

   On a $|\overline{x}| = 1$ si et seulement si pour tout $h \in G$, $h \cdot x \cdot h^{-1} = x$ si et seulement si $x \in Z(G)$. Soit $\mathcal{A}$ une partie de G telle que $(\overline{x})_{x \in \mathcal{A}}$ forme une partition de $G \setminus Z(G)$. On a
$$|G| = p^\alpha = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)| \tag{1.38}$$
   Si $x \in \mathcal{A}$, $x \notin Z(G)$ donc $|S_x| < |G|$ (car $x \in Z(G)$ si et seulement si $S_x = G$) et donc
$$|C(x)| = \frac{|G|}{|S_x|} \tag{1.39}$$
   d'après 2. Donc $|C(x)| = p^\beta$ avec $\beta \in [\![1, \alpha]\!]$ car $|C(x)| \neq 1$. Donc
$$p \,\Big|\, \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)| \tag{1.40}$$
   d'où
$$p \mid |Z(G)| \tag{1.41}$$
   donc
$$\boxed{|Z(G)| \neq 1} \tag{1.42}$$

5. On a
$$p^2 = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)| \tag{1.43}$$
D'après la question 4, on a $|Z(G)| \neq 1$ et $|Z(G)| \mid |G|$.

Si $Z(G) \neq G$, alors $|Z(G)| = p$. Pour $x \in \mathcal{A}$, $Z(G) \subset S_x \neq G$ donc $|S_x| = p$ (car $|S_x| \mid |G|$) et donc $Z(G) = S_x$. Or $x \in S_x$ et $x \notin Z(G)$ ce qui n'est pas possible, donc $|Z(G)| = p^2$ et $Z(G) = G$.

$$\boxed{\text{Donc G est abélien.}} \tag{1.44}$$

S'il existe un élément d'ordre p^2. G est cyclique et est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Sinon, pour tout $x \in G \setminus \{e_G\}$, on a $\omega(x) = p$. Soit $x_1 \in G \setminus \{e_G\}$ et $x_2 \in G \setminus gr\{x_1\}$. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 & \to & G \\ & (\overline{k}, \overline{l}) & \mapsto & x_1^k \cdot x_2^l \end{array} \tag{1.45}$$
f est bien définie car si $\overline{k} = \overline{k'}$ et $\overline{l} = \overline{l'}$, on a $p \mid k - k'$ et $p \mid l - l'$ donc $x_1^k \cdot x_2^l = x_1^{k'} \cdot x_2^{l'}$. Comme G est abélien, f est un morphisme.

Montrons que f est injective. Soit $(\overline{k}, \overline{l}) \in \ker(f)$ avec $(k, l) \in [\![0, p-1]\!]^2$, on a $x_1^k \cdot x_2^l = e_G$ donc $x_2^l = x_1^{-k}$. Si $l \in [\![1, p-1]\!]$ or p est premier donc $l \wedge p = 1$ donc il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $lu + pv = 1$. Alors on a
$$x_2 = x_2^{lu+pv} = x_2^{lu} \cdot x_2^{pv} = x_2^{lu} = x_1^{-k} \in gr\{x_1\} \tag{1.46}$$
ce qui n'est pas possible. Donc $\overline{l} = \overline{0}$ et de même $\overline{k} = \overline{0}$ donc f est injective et ainsi $|\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}| = |G|$ donc
$$\boxed{\text{f est un isomorphisme.}} \tag{1.47}$$

■

Remarque 1.3. *Les groupes de cardinal p^3 ne sont pas nécessairement abélien, par exemple le groupe des isométries du carré $\mathcal{D}_4$ de cardinal 8.*

Solution 1.11. Soit f un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n$ donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $f(1) = r_0$ donc
$$\boxed{f : n \mapsto r_0^n} \tag{1.48}$$

Soit f un morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $f(1) = f(\frac{1}{a})^a$. Pour tout p premier, on a $\nu_p(f(1)) = a\nu_p(f(\frac{1}{a}))$ donc pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $a \mid \nu_p(f(1))$ donc $\nu_p(f(1)) = 0$ pour tout p premier, donc $f(1) = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n = 1$ et $f(b \times \frac{a}{b}) = f(a) = 1 = f(\frac{a}{b})^b$ donc $f(\frac{a}{b}) = 1$. Donc

$$\boxed{f : r \mapsto 1} \tag{1.49}$$

■

Solution 1.12. On a $xy = y^2x$, $x^2y = xy^2x = y^4x^2$, $x^3y = x^2y^2x = xy^4x^2 = y^8x^3$, $x^5y = y^{32}x^5$ donc $y^{31} = e_G$ et $\omega(y) = 31$.

Tout élément de G peut s'écrire $y^\lambda x^\mu$ avec $(\lambda, \mu) \in [\![0, 30]\!] \times \{0, 4\}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & [\![0,30]\!] \times [\![0,4]\!] & \to & G \\ & (\lambda, \mu) & \mapsto & y^\lambda x^\mu \end{array} \tag{1.50}$$

est surjective par construction. Soit $((\lambda, \mu), (\lambda', \mu')) \in ([\![0, 30]\!] \times [\![0, 4]\!])^2$ tel que $y^\lambda x^\mu = y^{\lambda'} x^{\mu'}$ donc $y^{\lambda - \lambda'} = x^{p' - p}$ d'où $y^{5(\lambda - \lambda')} = x^{5(\mu' - \mu)} = e_G$. Or $\omega(y) = 31$ donc $31 \mid 5(\lambda - \lambda')$ et d'après le théorème de Gauss, $31 \mid \lambda - \lambda'$. Or $(\lambda, \lambda') \in [\![0, 30]\!]^2$ donc $\lambda = \lambda'$ et de même $\mu = \mu'$ donc f est injective donc bijective et

$$\boxed{|G| = 155} \tag{1.51}$$

Soit G' un autre tel groupe engendré par x' et y', on forme

$$\begin{array}{rccc} g: & G & \to & G \\ & y^p x^\mu & \mapsto & y'^\lambda x'^\mu \end{array} \tag{1.52}$$

et on vérifie que g est un isomorphisme. ■

Solution 1.13.

1. Soit $i \in [\![1, r]\!]$, il existe nécessairement $y_i \in G$ tel que $\nu_{p_i}(\omega(y_i)) = p_i^{\alpha_i}$ (où ν_p est la valuation p-adique), sinon on ne pourrait pas avoir ce terme dans le ppcm. Donc

$$\boxed{p_i^{\alpha_i} \mid \omega(y_i)} \tag{1.53}$$

2. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega(y_i) = p_i^{\alpha_i} n$. Posons $x_i = y_i^n \in G$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$,

$$x_i^k = e_G \Longleftrightarrow y_i^{nk} = e_G \Longleftrightarrow \omega(y_i) \mid nk \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid k \tag{1.54}$$

Donc

$$\boxed{\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}} \tag{1.55}$$

3. On pose $x = \prod_{i=1}^r x_i$. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors

$$x^k = e_G \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^r x_i^k = e_G \tag{1.56}$$

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on met le tout à la puissance $M_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r p_j^{\alpha_j}$. On a alors, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$x_i^{kM_i} = e_G \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid kM_i \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid k \tag{1.57}$$

la dernière équivalence venant du théorème de Gauss. Donc pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $p_i^{\alpha_i} \mid k$, ce qui équivaut donc à $N \mid k$ et donc

$$\boxed{\omega(x) = N} \tag{1.58}$$

■

Solution 1.14. Sur un corps commutatif, un polynôme de degré n admet au plus n racines. Montrons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{K}^*$ tel que $\omega(x_i) = |\mathbb{K}^*|$. Par définition de N, pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $\omega(x) \mid N$. D'où $x^N = 1_{\mathbb{K}}$. Donc x est racine de $X^N - 1$. Ainsi, $|\mathbb{K}^*| \leqslant N$. Par ailleurs, $N \mid |\mathbb{K}^*|$ car pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $x^{|\mathbb{K}^*|} = 1_{\mathbb{K}^*}$. Donc $|\mathbb{K}^*| = N$ et ainsi

$$\boxed{\mathbb{K}^* = gr\left\{x_1\right\}} \tag{1.59}$$

On a $|\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*| = 12$ donc pour tout $\overline{x} \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, $\omega(\overline{x}) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. On a $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{2}^3 = \overline{8}$, $\overline{2}^4 = \overline{16} = \overline{3}$, $\overline{2}^6 = \overline{12}$ donc $\omega(\overline{2}) = 12$ et

$$\boxed{\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^* = gr\left\{\overline{2}\right\} = \left\{\overline{2}^k \mid k \in [\![0, 11]\!]\right\}} \tag{1.60}$$

■

Solution 1.15.

1. Soit $(x,y) \in G^2$, on a $(x \cdot y)^2 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = e_G$ donc $x \cdot y = y^{-1} \cdot x^{-1}$ et comme $x^2 = e_G$, $x^{-1} = x$ d'où $xy = yx$ et
$$\boxed{\text{G est abélien.}} \tag{1.61}$$
2. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice minimale de G : pour tout $x \in G$, il existe$(\varepsilon_i) \in \{0,1\}^n$ tel que $x = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$ (car G est abélien). Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n & \to & G \\ & (\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) & \mapsto & \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \end{array} \tag{1.62}$$
Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $\overline{\varepsilon_i} = \overline{\varepsilon_i'}$, alors $x^{\varepsilon_i} = x^{\varepsilon_i'}$ car $x_i^2 = e_G$ et $2 \mid \varepsilon_i - \varepsilon_i'$. Donc f est bien définie.

f est clairement un morphisme (car G est abélien). D'après la première question, f est surjective. Montrons que f est injective. Soit $(\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n})$ tel que $\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} = e_G$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, supposons ε_i impair, on a alors $x_i = \varepsilon_i = x_i$. D'où $x_i = \prod_{j=1}^n x_j^{-\varepsilon_j} = \prod_{j=1}^n x_j^{\varepsilon_j}$ car $x^2 = e_G$. Donc $x_i \in gr(x_j, j \in [\![1,n]\!], j \neq i)$, ce qui contredit le caractère minimal de $(x_1, \dots, x_n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, f est injective donc est un isomorphisme.}} \tag{1.63}$$

■

Remarque 1.4. *En notant + la loi sur G, on peut définir*
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G & \to & G \\ & (\varepsilon, x) & \mapsto & x^\varepsilon \end{array} \tag{1.64}$$
. Alors $(G, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, de dimension finie n car G est fini, et le choix d'une base réalise un isomorphisme de $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ dans $(G, +)$.

Remarque 1.5. *Par isomorphisme, on a*
$$\prod_{x \in G} x = f\left(\sum_{(\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} (\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) \right) \tag{1.65}$$

Pour $n = 1$, on a $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$, pour $n = 2$, on a $(\overline{0}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{0})$. Pour $n > 2$, $\overline{1}$ apparaît 2^{n+1} fois sur chaque coordonnée (donc un nombre pair de fois), donc la somme fait $(\overline{0}, \dots, \overline{0})$.

Solution 1.16.

1. Si G est abélien, on a
$$\boxed{D(G) = \{e_G\}} \tag{1.66}$$

2. Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, σ se décompose en un produit d'un nombre pair de transpositions. Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux transpositions.
   — Si $\{a, b\} = \{c, d\}$, alors $[a, b] \circ [c, d] = id$.
   — Si $a \in \{c, d\}$, supposons par exemple $a = c$ et $b \neq d$. On a alors $[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ [a, d] = [b, a, d]$.
   — Si $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, on a
$$[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ \underbrace{[b, c] \circ [b, c]}_{=id} \circ [c, d] = [a, b, c] \circ [b, c, d] \tag{1.67}$$
$$\boxed{\text{Donc les 3-cycles engendrent } \mathcal{A}_n.} \tag{1.68}$$

3. On a
$$\sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(a_3)) \tag{1.69}$$
On peut trouver $\sigma \colon [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que a_i soit envoyé sur b_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et les éléments $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ dans $[\![1, n]\!] \setminus \{b_1, b_2 b_3\}$.
$$\boxed{\text{Donc les 3-cycles sont conjugués dans } \Sigma_n.} \tag{1.70}$$
Si $n \geqslant 5$ et σ impair, soit $(c_1, c_2) \in [\![1, n]\!] \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$. $\sigma' = \sigma \circ [c_1, c_2]$ est pair et $\sigma'(a_i) = b_i$.
$$\boxed{\text{Donc les trois cycles sont conjugués dans } \mathcal{A}_n \text{ pour } n \geqslant 5.} \tag{1.71}$$
C'est cependant faux pour $n = 3$ et $n = 4$.

4. Soit $(\sigma, \sigma') \in \Sigma_n^2$. En notant $\mathcal{E}$ la signature d'une permutation (morphisme de $(\Sigma_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$), on a
$$\mathcal{E}(\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1}) = 1 \tag{1.72}$$
donc $\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1} \in \mathcal{A}_n$. Donc $D(\Sigma_n) \subset \mathcal{A}_n$.
Soit ensuite (a_1, a_2, a_3) un 3-cycle. On a $(a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$ puis
$(a_1, a_3, a_2)^{-1} = (a_1, a_2, a_3)$. Ainsi, on a
$$\sigma \circ (a_1, a_3, a_2) \circ \sigma^{-1} \circ (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3) \tag{1.73}$$

On pose $\sigma = [a_2, a_3]$, et alors (a_1, a_2, a_3) est un commutateur. Ainsi, $(a_1, a_2, a_3) \in D(\Sigma_n)$ et donc $\mathcal{A}_n \subset D(\Sigma_n)$ (d'après la première question).

Finalement, on a

$$\boxed{D(\Sigma_n) = \mathcal{A}_n} \tag{1.74}$$

■

Remarque 1.6. *Pour $n \geqslant 5$, on a $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$.*

Solution 1.17.

1. Pour $g \in G$, τ_g est bijective de réciproque $\tau_{g^{-1}}$. On a notamment $\tau_{g \cdot g'} = \tau_g \circ \tau_{g'}$ donc τ est un morphisme. Si $g \in G$ est tel que $\tau_g = id$, pour tout $x \in G$, on a $gx = x$ donc $g = e_G$. Donc τ est un morphisme injectif et

$$\boxed{\text{G est isomorphe à Im}\tau = \tau(G)\text{, sous-groupe de }\Sigma(G)\text{, lui-même isomorphe à }\Sigma_n} \tag{1.75}$$

2. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \Sigma_n & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & \sigma & \mapsto & (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = P_\sigma \end{array} \tag{1.76}$$

P_σ est la matrice de permutation associée à σ. f est un morphisme, et est injectif, donc

$$\boxed{\text{G est isomorphe à un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{C}).} \tag{1.77}$$

■

Solution 1.18. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 8t + 7$. Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, on a $\overline{0}^2 = \overline{0}$, $\overline{1}^2 = \overline{1}$, $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$, $\overline{4}^2 = \overline{0}$, $\overline{5}^2 = \overline{1}$, $\overline{6}^2 = \overline{4}$ et $\overline{7}^2 = \overline{1}$. Donc la somme de 3 de ces classes ne donnent pas $\overline{7}$.

Par récurrence, prouvons la propriété. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = (8t + 7)4^{n+1}$. Parmi x, y, z les trois sont pairs ou deux d'entre eux sont impairs. Si x, y impairs et z pair, on écrit $x = 2x' + 1, y = 2y' + 1, z = 2z'$, alors $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2[4]$ mais $(8t + 7)4^{n+1} \equiv 0[4]$: contradiction. Nécessairement, x, y et z sont pairs. En divisant par 4, on se ramène donc à l'hypothèse de récurrence.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}} \tag{1.78}$$

■

Solution 1.19. On raisonne sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. On a $\overline{10^{10^n}} = \overline{3^{10^n}}$. Dans le groupe $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$, $\overline{3}$ a un ordre qui divise $|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*| = 6$. On a $\overline{3}^2 = \overline{2}$, $\overline{3}^3 = \overline{-1}$ et $\overline{3}^6 = \overline{1}$. Donc $\overline{3}^{6k} = \overline{1}, \overline{3}^{6k+1} = \overline{3}, \overline{3}^{6k+2} = \overline{2}, \overline{3}^{6k+3} = \overline{-1}, \overline{3^{6k+4}} = \overline{4}$ et $\overline{3^{6k+5}} = \overline{5}$..

On se place maintenant dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\overline{10} = \overline{4}, \overline{10}^2 = \overline{4}$ et donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{10}^n = \overline{4}$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n = 6k + 4$. Ainsi,

$$\boxed{\overline{10^{10^n}} = \overline{4}} \tag{1.79}$$

■

Solution 1.20.

1. On a $F_1 = 5$ et $2 + \prod_{k=0}^{0} F_k = 2 + 3 = 5$. Soit $n \geqslant 1$, supposons que $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$. Alors

$$F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n})^2 - 1 \tag{1.80}$$

$$= (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) \tag{1.81}$$

$$= F_n(F_n - 2) \tag{1.82}$$

$$= F_n \times \prod_{k=0}^{n-1} F_k \tag{1.83}$$

$$= \prod_{k=0}^{n} F_k \tag{1.84}$$

$$\boxed{\text{d'où le résultat par récurrence.}} \tag{1.85}$$

2. Soit p un facteur premier de F_n. S'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $p \mid F_k$, alors d'après la première question on a $p \mid F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k = 2$. Donc $p = 2$. Or F_n est impair, donc non divisible par deux, ce qui est absurde. Donc p ne divise aucun F_k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Les F_n étant distincts deux à deux,

$$\boxed{\text{il existe donc une infinité de nombres premiers.}} \tag{1.86}$$

■

Remarque 1.7. *Si $n \neq m$ alors $F_n \wedge F_m = 1$.*

Solution 1.21.

1. On teste uniquement les puissances qui divisent 32 : 2,4,8,16,32. On a $\overline{5}^2 = \overline{-7}, \overline{5}^4 = \overline{-15}, \overline{5}^8 = \overline{1}$. Donc

$$\boxed{\omega(\overline{5}) = 8} \tag{1.87}$$

2. On note

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \to & U \\ & (\dot{k}, \tilde{l}) & \mapsto & \overline{-1}^k \times \overline{5}^l \end{array} \tag{1.88}$$

On a $\omega(\overline{-1}) = 2$ et $\gamma(\overline{5}) = 8$ donc ψ est bien définie. ψ est bien un morphisme de groupes. Soit $(\dot{k}, \tilde{l}) \in \ker(\psi)$, on a $\overline{-1}^k \times \overline{5}^l = \overline{1}$. Si $\dot{k} = \dot{1}$, alors $\overline{-1}^k = \overline{-1} = \overline{5}^{-l} = \overline{5}^l \in gr\{\overline{5}\}$. Donc $\overline{5}^{2l} = \overline{1}$ et ainsi $8 \mid 2l$ d'où $4 \mid l$. Mais alors $l \in \{0, 4\}$ ce qui est impossible. Donc $\dot{k} \neq \dot{1}$. De ce fait, $\dot{k} \neq \dot{1}$. Ainsi, $\overline{5}^l = \overline{1}$ donc $\tilde{l} = \tilde{0}$. Ainsi, $\ker(\psi) = \left\{(\dot{0}, \tilde{0})\right\}$ donc ψ est injective, puis bijective car $|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}| = |U|$. Donc

$$\boxed{U = gr\left\{\overline{-1}, \overline{5}\right\}} \tag{1.89}$$

■

Remarque 1.8. *U n'est pas cyclique car, par isomorphisme, ses éléments ont un ordre qui divise 8.*

Solution 1.22.

1. Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & G_n \times G_m & \to & U_{nm} \\ & (\xi, \xi') & \mapsto & \xi \times \xi' \end{array} \tag{1.90}$$

Soit $(\xi, \xi') \in G_n \times G_m$, Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(\xi \times \xi')^k = 1$. Alors $(\xi \times \xi')^{km} = 1$ d'où $\xi^{km} = 1$ donc $n \mid km$ et $n \mid k$ d'après le théorème de Gauss. De même pour n, on a $m \mid k$ et donc $nm \mid k$. La réciproque est immédiate : $\xi \times \xi' \in G_{nm}$. Donc $f(G_n \times G_m) \subset G_{nm}$ et $|G_n \times G_m| = \varphi(n) \times \varphi(m) = \varphi(nm) = |G_{nm}|$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

Montrons que f est injective : soit $(x, y, x', y') \in G_n^2 \times G_m^2$ tel que $xx' = yy'$. On a alors $x^m = y^m$ et $x'^n = y'^n$ d'où $(xy^{-1})^m = 1$ d'où $\omega(xy^{-1}) \mid m$ et $\omega(xy^{-1}) \mid n$. Donc $\omega(xy^{-1}) = 1$ donc $x = y$ et en reportant, on a $x' = y'$. Donc f est injective puis bijective (égalité des cardinaux).

On a alors

$$\mu(n)\mu(m) = \sum_{\xi\in G_n} \xi \times \sum_{\xi'\in G_m} \xi' \tag{1.91}$$

$$= \sum_{(\xi,\xi')\in G_n\times G_m} \xi\xi' \tag{1.92}$$

$$= \sum_{\xi\in G_{nm}} \xi \tag{1.93}$$

$$= \boxed{\mu(nm)} \tag{1.94}$$

2. On a $\mu(1) = 1$. Soit p premier. On a

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = 0 \tag{1.95}$$

donc

$$\mu(p)\sum_{k=1}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = -1 \tag{1.96}$$

Soit alors $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \geqslant 2$, on a

$$\boxed{\mu(p^\alpha) = \sum_{\substack{k=1\\ k\wedge p=1}}^{p^\alpha} e^{\frac{2ik\pi}{p^\alpha}} = \sum_{k=1}^{p^\alpha} e^{\frac{2ik\pi}{p^\alpha}} - \sum_{k=1}^{p^{\alpha-1}} e^{\frac{2ik\pi}{p^{\alpha-1}}} = 0} \tag{1.97}$$

Si $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$, s'il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $\alpha_i \geqslant 2$ alors $\mu(n) = 0$. Sinon, on a

$$\boxed{\mu(n) = \prod_{i=1}^{r} \mu(p_i) = (-1)^r} \tag{1.98}$$

3. Soit $(f, g) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^2$, on a

$$(f \star g)(n) = \sum_{d_1d_2=n} f(d_1)g(d_2) \tag{1.99}$$

$$= \sum_{d_1d_2=n} g(d_1)f(d_2) \tag{1.100}$$

$$= (g \star f)(n) \tag{1.101}$$

$$\boxed{\text{Donc } \star \text{ est commutative.}} \tag{1.102}$$

Soit $(f,g,h) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^3$, on a

$$(f \star (g \star h))(n) = \sum_{d_1 d = n} f(d_1)(g \star h)(d) \tag{1.103}$$

$$= \sum_{d_1 d = n} \left[f(d_1) \times \sum_{d_2 d_3 = d} g(d_2) h(d_3) \right] \tag{1.104}$$

$$= \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(g_1) g(d_2) h(d_3) \tag{1.105}$$

$$= ((f \star g) \star h)(n) \tag{1.106}$$

$$\boxed{\text{donc } \star \text{ est associative.}} \tag{1.107}$$

On vérifie maintenant que l'élément neutre est $e : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ qui à 1 associe 1 et 0 si $n \geqslant 2$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & \sum_{d|n} \mu(d) \end{array} \tag{1.108}$$

On a $\psi(1) = 1$. Soit $n \geqslant 2$ avec $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_r}$. Les diviseurs de n sont dans $D = \{\prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i} \mid \beta_i \leqslant \alpha_i\}$. Ainsi, $\psi(n) = \sum_{d \in D} \mu(d)$. Or $\mu(d)$ vaut 0 s'il existe $\beta_i \geqslant 2$ et $(-1)^k$ si k β_i valent 1 et les autres 0. Il y a $\binom{r}{k}$ choix possibles pour que k β_i valent 1. Ainsi,

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^{r} 1^{r-k} (-1)^k \binom{r}{k} = 0 \tag{1.109}$$

Donc $\mu \star 1 = e$, et $\mu^{-1} = 1 \colon n \mapsto 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On note

$$\begin{array}{rccc} id : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ & n & \mapsto & n \end{array} \tag{1.110}$$

Alors

$$\sum_{d|n} d\mu(\frac{n}{d}) = (\mu \star id)(n) \tag{1.111}$$

$$= (id \star \mu)(n) \tag{1.112}$$

$$= (1 \star (\varphi \star \mu))(n) \tag{1.113}$$

$$= \boxed{\varphi(n)} \tag{1.114}$$

la troisième égalité venant du fait que $id = 1 \star \varphi$ car $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

$\blacksquare$

Solution 1.23. Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a

$$\binom{p+k}{k} = \frac{(p+k) \times \cdots \times (p+1)}{k \times \cdots \times 1} = 1 + \alpha k p \tag{1.115}$$

car $(p+k) \times \cdots \times (p+1) = k! + p \times \text{qqchose}$. On a $p \mid \binom{p}{k}$ donc

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} [p^2] \tag{1.116}$$

Pour $k = 0$, on a $\binom{p}{0}\binom{p}{0} = 1$ et pour $k = p$, on a $\binom{p}{p}\binom{2p}{p} = \binom{2p}{p}$. Et

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} - 2 = 2^p - 2 \tag{1.117}$$

Il reste donc à prouver que $\binom{2p}{p} \equiv 2[p^2]$.

Or

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{p}{p-k} \equiv 2[p^2] \tag{1.118}$$

la première égalité venant de l'égalité du terme en X^p dans $(1+X)^{2p} = (1+X)^p(1+X)^p$, et la deuxième venant du fait que seuls les termes en $k = 0$ et $k = p$ ne contiennent pas de p^2, et valent chacun 1.

Finalement, on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 2^p - 2 + 1 + 2[p^2] \equiv 2^p + 1[p^2]} \tag{1.119}$$

$\blacksquare$

Solution 1.24.

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$. On note $|G| = d$. On a donc $G \subset \mathbb{U}_d$ car pour tout $x \in G$, $x^d = 1$.

$$\boxed{\text{Donc } G = \mathbb{U}_d \text{ est cyclique.}} \tag{1.120}$$

2. On pose

$$\begin{array}{rccc} \psi : & SO_2(\mathbb{R}) & \to & (\mathbb{U}, \times) \\ & R_\theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \tag{1.121}$$

qui est un isomorphisme. Donc les sous-groupes de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les G_n pour $n \geqslant 1$ avec

$$\boxed{G_n = \left\{ R_{\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}} \tag{1.122}$$

3. φ est bilinéaire et symétrique. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on $\varphi(X, X) = \sum_{M \in G} \|MX\|^2 \geqslant 0$ et si $\varphi(X, X) = 0$, on a pour tout $M \in G$, $X = 0$. Notamment, $I_2 \in G$ et donc $X = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est bien un produit scalaire.}} \tag{1.123}$$

Pour tout $(M_0, X, Y) \in G \times (\mathbb{R}^2)^2$, on a $\varphi(M_0X, M_0Y) = \sum_{M \in G} \langle MM_0X, MM_0Y \rangle$ et $M \mapsto MM_0$ est bijective de G dans G donc $\varphi(M_0X, M_0Y) = \varphi(X, Y)$.

Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_1$ une base orthonormée pour φ. On note $P_0 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1}$. Pour tout $M \in G$, $P_0^{-1}MP_0$ est la matrice d'une isométrie pour φ dans une base orthonormée pour φ. Donc $P_0^{-1}MP_0$ est orthogonale, et $\det(P_0^{-1}MP_0) = 1$ car pour tout $M \in G$, $\det(M) = 1$. Ainsi, $\left\{P_0^{-1}MP_0 \mid M \in G\right\}$ est un sous-groupe fini de $SO_2(\mathbb{R})$, donc cyclique. Il est isomorphe à G donc

$$\boxed{\text{G est cyclique.}} \tag{1.124}$$

■

Solution 1.25.

1. On a $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in E$. On remarque ensuite que pour tout $s = x + y\sqrt{2} \in E$, on a $ss^{-1} = 1$ avec $s^{-1} = x - y\sqrt{1} \in E$. Soit $(s, s') \in E^2$ avec $s = x + y\sqrt{2}$ et $s' = x' + y'\sqrt{2}$. Notons déjà que $x + y\sqrt{2} > 0$ car $x = \sqrt{1 + 2y^2} > |y|\sqrt{2}$. On a donc

$$ss' = \underbrace{xx' + 2yy'}_{\in\mathbb{Z}} + \sqrt{2}\underbrace{(yx' + y'x)}_{\in\mathbb{Z}} \tag{1.125}$$

On a $xx' \in \mathbb{N}$ et $x > \sqrt{2}|y| \geqslant 0$ et $x' > \sqrt{2}|y'| \geqslant 0$ donc $xx' > 2|yy'|$ et ainsi $xx' + 2yy' \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, on a

$$(xx' + 2yy')^2 - 2(yx' + y'x)^2 = (xx')^2 + 4(yy')^2 - 2(yx')^2 2(y'x)^2 \quad (1.126)$$

$$= (x^2 - 2y^2)(x'^2 - 2y'^2) \quad (1.127)$$

$$= 1 \quad (1.128)$$

Donc $ss' \in E$. Finalement,

$$\boxed{\text{E est un sous-groupe de } (\mathbb{R}_+^*, \times).} \quad (1.129)$$

2. ln est un isomorphisme de E sur $\ln(E)$, sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On sait que si

$$\underbrace{\inf(\ln(E) \cap \mathbb{R}_+)}_{\alpha} > 0 \quad (1.130)$$

alors $\ln(E) = \alpha\mathbb{Z}$ (sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans le cas $\alpha > 0$, pour rappel si $\alpha = 0$ alors le sous-groupe est dense dans $\mathbb{R}$). On cherche la borne inférieure de $E \cap]1 + \infty[$ que l'on note β. β existe car cet ensemble est non vide, par exemple $3 + 2\sqrt{2}$ y appartient.

Si $\beta = 1$, on peut trouver une suite de termes de E strictement décroissante convergeant vers 1. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 < x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} < x_n + y_n\sqrt{2} \quad (1.131)$$

On sait que

$$x_n - y_n\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})^{-1} < 1 < x_n + y_n\sqrt{2} \quad (1.132)$$

donc $-y_n\sqrt{2} < 1 - x_n < 0$ donc $y_n > 0$. Ainsi,

$$y_n = \sqrt{\frac{x_n^2 - 1}{2}} \quad (1.133)$$

Si $x_{n+1} \geqslant x_n$, alors $y_{n+1} \geqslant y_n$ d'où $x_{n+1} + \sqrt{2}y_{n+1} > x_n + \sqrt{2}y_n$ ce qui est absurde. Donc $x_{n+1} < x_n$ et on obtient une suite strictement décroissante d'entiers naturels ce qui est impossible. Donc $\beta > 1$ et

$$\boxed{E = \left\{(x_0 + y_0\sqrt{2})^n \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\} \text{ est monogène.}} \quad (1.134)$$

On peut identifier β :

$$x_0 = \min\left\{x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y\sqrt{2} \in E \cap], +\infty[\right\} \quad (1.135)$$

Donc $\beta = 3 + 2\sqrt{2}$ Finalement, $x^2 - 2y^2 = 1$ avec $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n + y_n\sqrt{2} = \beta^n$.

■

Remarque 1.9. *En fait, on a*

$$\begin{cases} x_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k} 3^{n-2k} \\ y_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} 3^{n-2k-1} \end{cases} \tag{1.136}$$

Solution 1.26. On a $7 \mid n^n - 3$ si et seulement si $\overline{n}^n = \overline{3}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$ est un groupe de cardinal 6. Donc l'ordre de ses éléments divisent 6, et sont donc 1,2,3 ou 6. Notamment, on vérifie que $\omega(\overline{3}) = 6$ et donc le groupe engendré par $\overline{3}$ est exactement $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$. Ainsi,

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times) = \left\{ \overline{3}^k \mid k \in [\![0, 5]\!] \right\} \tag{1.137}$$

(c'est un groupe cyclique). Les générateurs sont $\left\{ \overline{3}^k, k \wedge 6 = 1 \right\} = \left\{ \overline{3}, \overline{3}^5 = \overline{-2} = \overline{5} \right\}$. Donc $\overline{n} = \overline{3}$ ou $\overline{n} = \overline{5}$.

Si $\overline{n} = 3$, $\overline{3}^n = \overline{3}$ si et seulement si $n \equiv 1[6]$ donc $n \equiv 3[7]$ et $n \equiv 1[6]$. D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à $n \equiv 31[42]$. La réciproque est immédiate.

Si $\overline{n} = 5$, $\overline{5}^n = \overline{3}$ si et seulement si $n \equiv 5[6]$ et $n \equiv 5[7]$. D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à $n \equiv 5[42]$.

$$\boxed{\text{Donc les solutions sont } n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } n \equiv 31[42] \text{ ou } n \equiv 5[42].} \tag{1.138}$$

■

Solution 1.27. On a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} = \frac{2a}{(p-1)!} \iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{k(p-k)} = \frac{2a}{(p-1)!} \tag{1.139}$$

$$\iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p(p-1)!}{k(p-k)} = 2a \tag{1.140}$$

$$\iff p \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!^3}{k(p-k)}}_{\in\mathbb{N}} = 2a \underbrace{(p-1)!^2}_{p\wedge(p-1)!^2=1} \tag{1.141}$$

donc $p \mid a$ d'après le théorème de Gauss.

On écrit alors $a = p \times b$ avec $b \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} = \frac{2b}{(p-1)!} \tag{1.142}$$

comme $(p-1)!, k$ et $p-k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \overline{-k}^{-2} = \overline{2b} \times \underbrace{\overline{(p-1)!}^{-1}}_{=\overline{-1}} \tag{1.143}$$

d'après le théorème de Wilson.

Donc

$$\overline{2b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^{-2} \tag{1.144}$$

Comme

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ & \overline{k} & \mapsto & \overline{k}^{-1} \end{array} \tag{1.145}$$

est bijective, on a

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \overline{\frac{p(p-1)(2p-1)}{6}} \tag{1.146}$$

Or $p \geqslant 5$ est premier, donc $p-1$ est pair et p est congru) 1 ou 2 modulo 3. Donc $p-1 \equiv 0[3]$ ou $2p-1 \equiv 0[3]$ donc $\frac{(p-1)(2p-1)}{6} \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \overline{p} \times \overline{\frac{(p-1)(2p-1)}{6}} = 0 \tag{1.147}$$

et donc $p \mid b$ par le théorème de Gauss. Donc

$$\boxed{p^2 \mid a} \tag{1.148}$$

■

Solution 1.28. Les racines réelles de P ont une multiplicité paire, le coefficient dominant est positif (car la limite en $+\infty$ est positive) et les racines complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées :

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2 = (X-\Re(\alpha))^2 + |\Im(\alpha)|^2 \tag{1.149}$$

avec $\Im(\alpha) \neq 0$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat en décomposant P sur } \mathbb{C}[X].} \tag{1.150}$$

■

Solution 1.29.

1. $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par α et 1. S'il existait $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = a\mathbb{Z}$, alors il existait $(n, m) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tel que $1 = na$ et $\alpha = ma$, d'où $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Le fait que } \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ est alors immédiate.}} \tag{1.151}$$

2. Posons $\beta = \frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{Z} + \beta\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $c < d \in \mathbb{R}^2$. Comme $\frac{c}{2\pi} < \frac{d}{2\pi}$, il existe $x \in \mathbb{Z} + \beta\mathbb{N} \cap]\frac{c}{2\pi}, \frac{d}{2\pi}[$ et alors $2\pi x \in 2\pi\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N} \cap]c, d[$. On pose $c = \arcsin(a)$ et $d = \arcsin(b)$ avec $a < b$. On a bien $c < d$ car arcsin est strictement croissante.

   Alors il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $2\pi m + \alpha m = 2\pi x \in]c, d[$ donc $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi m + \alpha n) = \sin(\alpha n) \in]a, b[$.

$$\boxed{\text{Donc } (\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est dense dans }]-1, 1[.} \tag{1.152}$$

   En particulier, cela vaut pour $\alpha = 1$ car $\pi \notin \mathbb{Q}$. Donc $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. 2^n commence par 7 en base 10 si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ avec

$$7 \times 10^p \leqslant 2^n < 8 \times 10^p \iff \ln(7) + p\ln(10) \leqslant n\ln(2) < \ln(8) + p\ln(10) \tag{1.153}$$

$$\iff \frac{\ln(7)}{\ln(10)} \leqslant \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} - p < \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \tag{1.154}$$

On a alors

$$p = \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \mathbb{N} \tag{1.155}$$

On étudie donc $\mathbb{N}\frac{\ln(2)}{\ln(10)} + \mathbb{Z}$. Supposons que $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Alors on a $2^q = 10^p$ mais comme $p \neq 0$, on a $5 \mid 10^p$ mais $5 \nmid 2^q$, donc $\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$.

On sait que

$$u_n = n\frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \left] \frac{\ln(7)}{\ln(10)}, \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \right[\tag{1.156}$$

Par densité, on peut donc construire par récurrence $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{\ln(7)}{\ln(10)} < u_{n_{p+1}} < u_{n_p} < \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \tag{1.157}$$

$$\boxed{\text{Donc on a bien une infinité de puissance de 2 commençant par 7 en base 10.}} \tag{1.158}$$

■

Remarque 1.10. *$(e^{in\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ est de la même façon dense dans $\mathbb{U}$. On peut montrer qu'elle est équirépartie, c'est à dire que pour tout $a < b \in [0, 2\pi[^2$, on a*

$$\lim_{N\to+\infty} \left| \left\{ n \in [\![1, N]\!] \middle| n\alpha - \frac{\lfloor 2\pi n\alpha \rfloor}{2\pi} \in]a, b[\right\} \right| \times \frac{1}{N} = \frac{b-a}{2\pi} \tag{1.159}$$

Remarque 1.11. *Par équirépartition dans $[0, 1[$ des*

$$\left\{ n\frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \mid n \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.160}$$

la probabilité pour qu'une puissance de 2 commence par k en base 10 est ($k \in [\![1, 9]\!]$)

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln(10)} \tag{1.161}$$

Solution 1.30.

1. Pour $\alpha = a + ib$, on définit le module au carré : $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$. Soit $\beta = c + \mathrm{i}d \neq 0$. Si $\alpha = \beta q + r$ avec $q, r \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ et $|r|^2 < |\beta|^2$, alors $|\alpha - \beta q|^2 < |\beta|^2$ et $\beta \neq 0$ donc

$$\left| \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\in\mathbb{C}} - \underbrace{q}_{\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]} \right| < 1 \tag{1.162}$$

On pose $\frac{\alpha}{\beta} = x + \mathrm{i}y$. On pose

$$u_x = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}[\\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x \in [\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor x \rfloor + 1[\end{cases} \tag{1.163}$$

et de même pour u_y. On a alors $q = u_x + \mathrm{i}u_y \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ et

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - q \right|^2 = |x - u_x|^2 + |y - u_y|^2 \leqslant 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1 \tag{1.164}$$

On pose donc $r = \alpha - \beta q \in \mathbb{Z}[i]$ et ainsi

$$\boxed{\text{l'anneau } \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ est euclidien.}} \tag{1.165}$$

2. Soit A un anneau euclidien et I un idéal de A non réduit à $\{0\}$. Il existe $x \in I$ tel que

$$v(x_0) = \min\{v(x) \mid x \in I\{0\}\} \tag{1.166}$$

On a $x_0 A \subset I$. Soit $x \in I$. Il existe $q, r \in A$ tel que

$$x = x_0 q + r \tag{1.167}$$

avec $v(r) < v(x_0)$ ou $r = 0$. Or $r \in I$ donc $r = 0$. Ainsi $x \in x_0 A$ et donc $I = x_0 A$.

$$\boxed{\text{Donc tout anneau euclidien est principal.}} \tag{1.168}$$

■

Remarque 1.12. *C'est encore vrai avec* $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}] = \{a + \mathrm{i}b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Solution 1.31.

1. Si $\overline{x} = \overline{y}^2$ est un carré, d'après le petit théorème de Fermat, on a $\overline{x}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{y}^{p-1} = \overline{1}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ & \overline{y} & \mapsto & \overline{y}^2 \end{array} \tag{1.169}$$

f est un morphisme multiplicatif, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$.

Comme $\mathbb{F}_p$ est un corps, chaque carré possède exactement deux antécédents. Il y a $p-1$ antécédents, donc il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$. Donc $|\mathrm{Im}(f)| = \frac{p-1}{2}$ et si $\overline{x}$ est un carré, x est racine de $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$. Le polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$ possède au plus $\frac{p-1}{2}$ racines et tout carré est racine. Donc les racines sont exactement les carrés et

$$\boxed{\overline{x}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1} \text{ si et seulement si } \overline{x} \text{ est un carré.}} \tag{1.170}$$

2. On a $p \equiv 1[4]$ si et seulement si $\frac{p-1}{2}$ est pair si et seulement si $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ si et seulement si $\overline{-1}$ est un carré dans $\mathbb{F}_p$. Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ tous congrus à 1 modulo 4. On pose $n = (p_1 \times \cdots \times p_r)^2 + 1$. Soit p un facteur premier de n, on a $n \equiv 1[n_i]$ donc $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $\overline{n} = \overline{0}$ donc $\overline{-1} = \overline{p_1 \times \cdots \times p_r}^2$ donc $p \equiv 1[4]$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\text{Donc il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.}} \tag{1.171}$$

■

Solution 1.32.

1. On pose $P_1 = \sum_{i=0}^n r_i' X^i$, et $\nu_p(r_i')$ est positif par définition de $c(P)$. Donc

$$\boxed{P_1 \in \mathbb{Z}[X]} \tag{1.172}$$

Pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$\min_{i \in [\![1,n]\!]} \nu_p(r_i) = \nu_p(r_{i_0}) \tag{1.173}$$

et $\nu_p(r_{i_0}') = 0$ donc $p \nmid r_{i_0}'$ donc

$$\bigwedge_{i=1}^n r_i' = 1 \tag{1.174}$$

Si on a $P = \alpha_1 P_1 = \alpha_2 P_2$ avec les conditions requises, soit $p \in \mathcal{P}$, si $\nu_p(\alpha_2) > \nu_p(\alpha_1)$, alors p divise tous les coefficients de P_1 ce qui n'est pas possible, donc $\nu_p(\alpha_2) = \nu_p(\alpha_1)$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a aussi $\alpha_1 = \alpha_2$ et donc $P_1 = P_2$.

$$\boxed{\text{Donc l'écriture est unique.}} \tag{1.175}$$

2. On a $P = c(P)P_1$ et $Q = c(Q)Q_1$ donc $PQ = c(P)c(Q)P_1Q_1$ et $P_1Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$.

   Soit $p \in \mathcal{P}$ divisant tous les coefficients de P_1Q_1. On définit, si $R = \sum_{i\in\mathbb{N}} \gamma_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$, $\overline{R} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{\gamma_i} X^i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. $R \mapsto \overline{R}$ est un morphisme d'anneaux. Par hypothèse, on a $\overline{P_1}\overline{Q_1} = \overline{0} = \overline{P_1Q_1}$ et par intégrité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on a $\overline{P_1} = \overline{0}$ ou bien $\overline{Q_1} = \overline{0}$, ce qui est exclu par les hypothèses. Donc

$$\boxed{\mathrm{c(PQ)=c(P)c(Q)}} \tag{1.176}$$

3. Soit alors P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (les inversibles de $\mathbb{Z}[X]$ étant -1 et 1). Posons

$$P = QR \in \mathbb{Q}[X]^2 \tag{1.177}$$

$$= c(Q)c(R)\underbrace{Q_1R_1}_{\in\mathbb{Z}[X]} \tag{1.178}$$

   Or $c(Q)c(R) = c(P)$ d'après le lemme de Gauss et nécessairement, $c(P) = 1$. Donc $P = Q_1R_1$, et alors $Q_1 = \pm 1$ et $R_1 = \pm 1$, et Q ou R est constant,

$$\boxed{\text{donc P est irréductible sur } \mathbb{Q}[X].} \tag{1.179}$$

   Pour la réciproque, on a $2X$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ car de degré 1, mais pas sur $\mathbb{Z}[X]$ car ni 2 ni X ne sont inversibles.

4. Soit $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$. Sur $\mathbb{C}[X]$, on a $P = (X - e^{\mathrm{i}\theta})(X - e^{-\mathrm{i}\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

   Et $e^{\mathrm{i}\theta} \neq e^{-\mathrm{i}\theta}$ car $\theta \not\equiv 0[\pi]$. On a $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ donc $e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}_q$, et $e^{\mathrm{i}\theta}$ et $e^{-\mathrm{i}\theta}$ sont des racines de A. Donc, dans $\mathbb{C}[X]$, on a $P \mid A$ et $A \in \mathbb{Q}[X]$, donc il existe $B \in \mathbb{Q}[X]$ tel que

$$\underbrace{A}_{\in\mathbb{Q}[X]} = \underbrace{B}_{\in\mathbb{C}[X]} \times \underbrace{P}_{\in\mathbb{Q}[X]} \tag{1.180}$$

   Or B s'obtient par la division euclidienne de A par P, qui est indépendante du corps de référence, il vient $B \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $A \mid P$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

On a $c(A) = 1 = c(B)c(P)$ et $A = c(B)c(P)B_1P_1 = B_1P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et le coefficient dominant de A est donc 1. Donc le coefficient dominant de B_1 et de P_1 est aussi 1. En reportant, on a $P = P_1 \in \mathbb{Z}[X]$.

Donc $2\cos(\theta) \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2]$ donc $\cos\{\theta\} \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$ (-1 et 1 ne peuvent y être car on a supposé $\theta \not\equiv 0[\pi]$). Les solutions sont donc

$$\boxed{\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}} \tag{1.181}$$

(en rajoutant $\theta = 0$ et π).

$\blacksquare$

Remarque 1.13. *On a* $\frac{\arccos(\frac{1}{3})}{\pi} \notin Q$ *car* $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$ *n'est pas dans l'ensemble solutions.*

Solution 1.33.

1. Soit $P = a\prod_{i=1}^{s}(X - a_i)^{\alpha_i}$ avec les a_i distincts et $\alpha_i \geqslant 1$. a_i est racine de P' de multiplicité $\alpha_i - 1$. Il manque donc s racines. Si $\alpha = 0$, le résultat est évident, sinon on pose

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & P(x)e^{\frac{x}{\alpha}} \end{array} \tag{1.182}$$

et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha}(P(x) + \alpha P'(x)) \tag{1.183}$$

Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, P' est scindé sur $\mathbb{R}$ (appliquer le théorème de Rolle entre les racines distinctes de P), donc f' s'annule $s - 1$ fois entre les racines de P donc

$$\boxed{P + \alpha P' \text{ aussi.}} \tag{1.184}$$

La dernière racine est réelle car sinon, le conjugué de la racine complexe supposée serait aussi racine.

2. On pose $R = \mu\prod_{i=0}^{r}(X - \beta_i)$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \Delta: & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array} \tag{1.185}$$

On a alors

$$\sum_{i=0}^{r} a_i P^{(i)} = \sum_{i=0}^{r} a_i \Delta^i(P) = R(\Delta)(P) = \mu \prod_{i=0}^{r}(\Delta - \beta_i id)(P) \tag{1.186}$$

Par récurrence sur r, on montre que

$$\boxed{\prod_{i=0}^{r}(\Delta - \beta_i id)(P) \text{ est scindé}} \tag{1.187}$$

d'après la première question.

■

Remarque 1.14. *On a aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' + \lambda P$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ si P est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Solution 1.34. Soit $F = \frac{P'}{P}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ où a_i sont les racines de P. On note α le coefficient dominant de P, et on a

$$P' = \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j) \right) \tag{1.188}$$

On a donc $F = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i}$ et on a

$$F' = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)^2} = \frac{P''P - P'P'}{P^2} \tag{1.189}$$

Pour $x \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, on a

$$(n-1)(P'^2(x))(x) \geqslant nP(x)P''(x) \iff n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \leqslant -P'^2(x) \tag{1.190}$$

$$\iff \frac{P'^2(x)}{P^2(x)} \leqslant n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \times \frac{1}{P^2(x)} \tag{1.191}$$

$$\iff F^2(x) \leqslant n(-F'(x)) \tag{1.192}$$

$$\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)} \right)^2 \leqslant \boxed{n \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)^2}} \tag{1.193}$$

qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ avec $(1 \ldots 1)$ et $(\frac{1}{x-a_1} \ldots \frac{1}{x-a_n})$. ■

Remarque 1.15. *Si* $P = \alpha(X-a_1)^{m_1}(X-a_r)^{m_r}$*, alors*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X-a_i} \tag{1.194}$$

Solution 1.35.

1. $P' \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P') = \deg(P) - 1$. On a $P \wedge P' = 1$ car P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Comme le pgcd est obtenu par l'algorithme d'Euclide qui est indépendant du corps de référence, on a $P \wedge P' = 1$ sur $\mathbb{C}[X]$ donc

$$\boxed{P \text{ n'a que des racines simples sur } \mathbb{C}.} \tag{1.195}$$

2. Notons $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ (défini car $A(\alpha) = 0$ donc α est algébrique). Comme $A(\alpha) = 0$, on a $P \mid A$ et P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a $\deg(P) \geqslant 2$, on peut donc décomposer sur $\mathbb{Q}[X]$:

$$A = P^r \times P_1^{r_1} \times \dots P_s^{r_s} \tag{1.196}$$

avec les P_i irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ non associés.

α n'est pas racine d'un P_i car sinon $P \mid P_i$ ce qui est impossible. α est racine simple de P donc $m(\alpha) = r > \frac{\deg(A)}{2}$. Par ailleurs, $\deg(P)^r \geqslant 2r > \deg(A)$ ce qui est impossible.

Donc

$$\alpha \in \mathbb{Q} \tag{1.197}$$

■

Solution 1.36. Soit $x \in A$. Il existe $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n < m$ tel que $x^n = x^m$. Alors $x^{m-n} = e_G \in A$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}^* & \to & A \\ & n & \mapsto & x^n \end{array} \tag{1.198}$$

n'est pas injective, car $\mathbb{N}^*$ est infini et A est fini. Or $m - n \in \mathbb{N}^*$ donc

$$x^{m-n} = e_G \Rightarrow x = x \cdot x^{m-n-1} = e_G \tag{1.199}$$

donc $x^{-1} = x^{m-n-1} \in A$ et ainsi

$$\boxed{\text{A est un sous-groupe.}} \tag{1.200}$$

■

Solution 1.37. Pour $\alpha = 0$, on a $1 + p \equiv 1 + p[p^2]$. Pour $\alpha = 1$, on a

$$(1+p)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} p^k = 1 + p^2 + \binom{p}{2} p^2 \sum_{k=3}^{p} \binom{p}{k} p^k \tag{1.201}$$

Or $\binom{p}{2} p^2 = \frac{p(p-1)p^2}{2} \equiv 0[p^3]$ car p est premier plus grand que trois donc impair, et la somme est aussi congru à 0 modulo p^3.

Soit $\alpha \geqslant 1$, supposons que l'on ait

$$(1+p)^p \equiv 1 + p^{\alpha+1}[p^{\alpha+2}] \tag{1.202}$$

Il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$(1+p)^{p^\alpha} = 1 + p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2} \tag{1.203}$$

Alors

$$(1+p)^{p^{\alpha+1}} = (1 + \underbrace{p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2}}_{x})^p \tag{1.204}$$

Or

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k = 1 + p^{\alpha+2} + lp^{\alpha+3} + \underbrace{\sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k}_{\text{divisible par } x^2} \tag{1.205}$$

Comme $p^{\alpha+1} \mid x$, $p^{2\alpha+2} \mid x^2$ avec $2\alpha + 2 \geqslant \alpha + 3$ $(\alpha \geqslant 1)$. D'où

$$p^{\alpha+3} \,\Big|\, x^2 \,\Big|\, \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k \tag{1.206}$$

et donc

$$\boxed{(1+p)^{p^{\alpha+1}} \equiv 1 + p^{\alpha+2}[p^{\alpha+3}]} \tag{1.207}$$

■

Remarque 1.16. *Pour $p = 2, \alpha = 1$, on a $3^2 = 9 \not\equiv 5[8]$.*

Solution 1.38. Si $7 = 2x^2 - 5y^2$, on a $\overline{0} = 2\overline{x}^2 - 5\overline{y}^2 = \overline{2}(\overline{x}^2 + \overline{y}^2)$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Comme 2 et 7 sont premiers entre eux donc $\overline{2}$ est inversible. Donc $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \overline{0}$. La seule possibilité est $\overline{x} = \overline{0}$ et $\overline{y} = \overline{0}$. Donc $7 \mid x$ et $y \mid y$. Si $x = 7k$ alors $x^2 = 49k^2$ donc $49 \mid x^2$ et $49 \mid y^2$ donc $47 \mid 2x^2 - 5y^2 = 7$ ce qui est faux.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\boxed{7 \neq 2x^2 - 5y^2} \tag{1.208}$$

■

Solution 1.39. $\mathbb{F}_{19}$ est un corps car 19 est premier. On a donc $\overline{x}^3 = \overline{1}$ si et seulement si $(x - \overline{1})(x^2 + x - \overline{1}) = \overline{0}$. On a donc $x = \overline{1}$ ou $x^2 + x + \overline{1} = \overline{0}$. On a

$$x^2 + x + \overline{1} = (x + \overline{2}^{-1})^2 + \overline{3} \times \overline{4}^{-1} = (x + \overline{10})^2 + \overline{3} \times \overline{50} \tag{1.209}$$

Donc $(x + \overline{10})^2 = \overline{4}$ d'où

$$\boxed{x = \overline{-8} = \overline{11} \text{ ou } x = \overline{-12} = \overline{7}.} \tag{1.210}$$

■

Solution 1.40.

1. m est inversible si et seulement si $m \wedge 2^n = 1$ si et seulement si $m \wedge 2 = 1$ si et seulement si m est impair.

$$\boxed{\text{Il y a donc } 2^{n-1} \text{ inversibles.}} \tag{1.211}$$

2. On a $5^{2^{3-3}} = 5 \equiv 1 + 2^2[2^3]$. Par récurrence, soit $n \geqslant 3$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $5^{2^{n-3}} = 1 + 2^{n-1} + k2^n$ donc

$$\boxed{5^{2^{n-1}} = 1 + 2^n + k2^{n+1} + 2^{2n-2}(1 + 2k)^2 \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}]} \tag{1.212}$$

car $2n - 2 \geqslant n + 1$ $(n \geqslant 3)$.

3. On a $5^{2^{n-2}} \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}] \equiv 1[2^n]$ et $5^{2^{n-3}} \not\equiv 1[2^n]$.

$$\boxed{\text{Donc l'ordre de } \overline{5} \text{ est } 2^{n-2}.} \tag{1.213}$$

4. $gr\left\{\overline{-1}\right\} = \left\{\overline{-1}, \overline{1}\right\}$. $\overline{5}$ n'engendre pas $\overline{-1}$ car si $\overline{5}^k = \overline{-1}$, on a $\overline{5}^{2k} = \overline{1}$ d'où $2^{n-2} \mid 2k$ donc $2^{n-3} \mid k$. Ainsi, $k \in \{2^{n-3}, 2^{n-2}, 2^{n-1}\}$. Mais $\overline{5}^{2^{n-2}} = \overline{1}, \overline{5}^{2^{n-3}} = \overline{1 + 2^{n-1}} \neq \overline{-1}$ donc un tel k n'existe pas.

   Posons

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}, +) & \to & (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}^\times, \times) \\ & (\widetilde{a}, \dot{b}) & \mapsto & \overline{-1}^a\overline{5}^b \end{array} \tag{1.214}$$

Elle est bien définie car $\omega(\overline{-1}) = 2$ et $\omega(\overline{5}) = 2^{n-2}$. C'est évidemment un morphisme, on a égalité des cardinaux des ensembles de départ et d'arrivée, et on vérifie qu'elle est injective, et donc

$$\boxed{\text{c'est un isomorphisme.}} \tag{1.215}$$

■

Solution 1.41. Soit $(x, x') \in G^2$ tel que $x \cdot x' = e$. Alors

$$e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e \cdot x' \cdot x \tag{1.216}$$

si et seulement si

$$e \cdot x \cdot x' = e = x \cdot e \cdot x' \cdot x \cdot x' = x \cdot e \cdot x' \tag{1.217}$$

Soit $(x, x', x'') \in G^3$ tel que $x \cdot x' = e$ et $x' \cdot x'' = e$. On a alors

$$x \cdot x' \cdot x'' = x \cdot e = x = e \cdot x'' \tag{1.218}$$

Donc $x = e \cdot x''$ et $e = e \cdot x'' \cdot x'$. Si on prouve que $e \cdot x'' = x''$, alors $x = x''$ et $x' \cdot x = e$.

Montrons donc que pour tout $x \in G$, $e \cdot x = x$. Notons que s'il existe $e' \in G$ tel que pour tou t$x \in G$, $e' \cdot x = x$, alors $e' \cdot e = e' = e$. Il vient donc

$$x' \cdot x = x' \cdot e \cdot x'' = x' \cdot x'' = e \tag{1.219}$$

Donc pour tout $x \in G$, l'élément x' est inverse à droite et à gauche : $x \cdot x' = e$.

Donc

$$x \cdot x' \cdot x = e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e = x \tag{1.220}$$

Et donc e est neutre à gauche. Finalement,

$$\boxed{(G, \cdot) \text{ est un groupe.}} \tag{1.221}$$

■

Remarque 1.17. *Si $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est surjective, on peut définir*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f(x) \end{array} \tag{1.222}$$

pour un certain $x \in \mathbb{R}$. On a $f \circ g = id$. Si f n'est pas injective : s'il existait $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $h\circ f = id$, soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ telle que $f(x) = f(x')$. En composant par h, on aurait $x = x'$ donc f serait injective ce qui n'est pas.

On peut donc avoir un inverse à droite mais pas à gauche.

Solution 1.42. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\underbrace{1\ldots1}_{\text{n fois en base 10}} = 1 + 10 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9} \tag{1.223}$$

On a

$$21 \,\Big|\, \frac{10^n-1}{9} \iff 3 \,\Big|\, \frac{10^n-1}{9} \text{ et } 7 \,\Big|\, \frac{10^n-1}{9} \tag{1.224}$$

$$\iff 27 \mid 10^n - 1 \text{ et } 7 \mid 10^n - 1 \tag{1.225}$$

car $7 \wedge 9 = 1$. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on a $\overline{10} = \overline{3}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{10}^{6k} = \overline{1}$ d'après le petit théorème de Fermat. Dans $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$, $\widetilde{10}$ est inversible car $10 \wedge 27 = 1$. $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times, +, \times)$ comporte 18 éléments donc pour tout $k' \in \mathbb{N}$, on a $\widetilde{10}^{18k'} = \widetilde{1}$.

Lorsque $81 \mid n$, on a $21 \mid 1\ldots1$.

Cherchons plus précisément les ordres de $\overline{10}$ dans $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ et de $\widetilde{10}$ dans $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times, \times)$. Dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$, groupe de cardinal 6, on vérifie que l'ordre de 10 est 6. Dans l'autre groupe, on vérifie que l'ordre de $\widetilde{10}$ est 3. Ainsi, $21 \mid 1\ldots1$ si et seulement si $6 \mid n$.

$$\boxed{\text{Il y a donc une infinité de multiples de 21 qui s'écrivent avec uniquement des 1 en base 10.}} \tag{1.226}$$

■

Remarque 1.18. *Il suffit de trouver l'ordre de 10 dans les deux ensembles et de prendre le ppcm.*

Solution 1.43.

1. $X^d - 1$ a au plus d racines dans $\mathbb{K}$. Pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, x_0^k est racine de $X^d - 1_{\mathbb{K}}$ car $gr\{x_0\}$ a pour cardinal d. Donc les racines sont exactement les puissances de x_0.

   Soit $x \in \mathbb{K}^*$ d'ordre d. On a $x \in gr\{x_0\}$ car $x^d = 1$ (racine du polynôme de $X^d = 1_{\mathbb{K}}$). Or, dans le groupe cyclique engendré par x_0,

$$\boxed{\text{il y a } \varphi(d) \text{ éléments.}} \tag{1.227}$$

2. On a ou bien $\varphi(d)$ ou bien aucun élément d'ordre d dans $\mathbb{K}$. Soit d tel que $d \mid n$, on note $H_d = \{x \in K \mid \omega(x) = d\}$. On a

$$\mathbb{K}^* = \bigcup_{d|n} H_d \tag{1.228}$$

   Alors

$$n = \sum_{d|n} |H_d| \leqslant \sum_{d|n} \varphi(d) = n \tag{1.229}$$

   Alors pour tout d tel que $d \mid n$, on a $|H_d| = \varphi(d)$. En particulier, on a $|H_n| = \varphi(n) \geqslant 1$ donc H_n est non vide. Donc il existe (au moins) un élément d'ordre n, donc

$$\boxed{(\mathbb{K}^*, \times) \text{ est cyclique.}} \tag{1.230}$$

■

Solution 1.44.

1. Soit $x \in M$. On a $\overline{1} - \overline{x}^{-1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{1}$ et $\overline{1} - \overline{x}^{-1} = \overline{1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{0}$, ce qui n'est pas possible pour les deux cas.

$$\boxed{\text{Donc f est bien définie.}} \tag{1.231}$$

   Soit $x \in M$, on a

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(\overline{1} - \overline{x}^{-1}) && (1.232)\\ &= \overline{1} - (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1} && (1.233)\\ &= (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1} - \overline{1}) && (1.234)\\ &= -\overline{x}^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1} && (1.235) \end{aligned}$$

Donc

$$f^3(x) = \overline{1} - (\overline{1} - (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1})^{-1} \tag{1.236}$$
$$= \overline{1} - (-x\overline{x}^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1})^{-1} \tag{1.237}$$
$$= \overline{1} + \overline{x}(\overline{1} - \overline{x}^{-1}) \tag{1.238}$$
$$= \overline{1} + \overline{x} - \overline{1} \tag{1.239}$$
$$= \overline{x} \tag{1.240}$$

Donc

$$f^3 = id_M \tag{1.241}$$

2. Soit $x \in M$, on a

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \overline{1} - \overline{x}^{-1} = x \tag{1.242}$$
$$\Longleftrightarrow \overline{x}^2 - \overline{x} + \overline{1} = \overline{0} \tag{1.243}$$
$$\Longleftrightarrow (\overline{x} - \overline{2}^{-1})^2 + \overline{3} \times \overline{4}^{-1} = \overline{0} \tag{1.244}$$
$$\Longleftrightarrow \overline{-3} = (\overline{2}\overline{x} - \overline{1})^2 \tag{1.245}$$

f admet un point fixe si et seulement $\overline{-3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ car $\overline{y} = \overline{2}\overline{x} - \overline{1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{2}^{-1}(\overline{y} + \overline{1})$.

Donc

$$\boxed{\overline{-3} \text{ est un carré dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\text{si et seulement si f admet un point fixe.}} \tag{1.246}$$

3. Comme p est premier plus grand que 5, on a $p \equiv 1$ ou $2[3]$ donc $p - 2 \equiv 0$ ou $2[3]$ car $f^3 = id_M$, les longueurs des cycles qui composent f valent 1 ou 3.

   Si f n'a pas de point fixe, tous les cycles sont de longueur 3, donc $3 \mid p - 2$ donc $p \equiv 2[3]$. Si $p \equiv 2[3]$, alors $3 \mid p - 2$, le nombre de points fixes est un multiple de 3 donc aussi du nombre de racine carrés de $\overline{-3}$. Et puisque l'on est dans un corps, il y a au plus 2 racines de $\overline{-3}$. Donc si $p \equiv 2[3]$, il n'y a pas de point fixe.

   Donc

$$\boxed{\overline{-3} \text{ est un carré dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ si et seulement si } p \equiv 1[3].} \tag{1.247}$$

$\blacksquare$

Solution 1.45. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que x possède un développement décimal périodique. Alors il existe $(n_0, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_{n+T} = a_n$. On a alors

$$|x| = \underbrace{b_m \dots b_0, a_0 \dots a_{n_0-1}}_{\in \mathbb{Q}} + \frac{1}{10^{n_0-1}} \underbrace{(0, a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} a_{n_0} \dots)}_{=y} \tag{1.248}$$

$$10^T y - y = a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} \in \mathbb{N} \tag{1.249}$$

et donc

$$y = \frac{a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1}}{10^T - 1} \in \mathbb{Q} \tag{1.250}$$

Donc $x \in Q$.

Réciproquement, soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p = aq + b$ avec $b \in [\![0, q-1]\!]$. Si $b = 0$, on arrête. On a sinon

$$x = a + \frac{1}{10^k} \frac{10^k b}{q} \tag{1.251}$$

où $k = \min\{m \geqslant 1 \mid 10^m b > q\}$. On réitère l'algorithme avec $\frac{10^k b}{q}$ car on a $\left\lfloor \frac{10^k b}{q} \right\rfloor \in [\![1, 9]\!]$ par définition de k.

Il y a q restes possibles dans la division euclidienne par q. Ainsi, au bout d'au plus de $q+1$ itérations, on retrouve un reste précédent. Par unicité de la division euclidienne, on obtient un développement décimal périodique.

Donc

$$\boxed{x \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant n_0, a_{n+T} = a_n.} \tag{1.252}$$

$\blacksquare$

Remarque 1.19. *On peut écrire $q = 2^a 5^b q'$ avec $q' \wedge 2 = q' \wedge 5 = 1$. On se ramène alors à $q \wedge 2 = q \wedge 5 = 1$. En reportant dans l'écriture décimale de x, on a*

$$\frac{\alpha}{q} = \frac{\beta}{10^T - 1} \tag{1.253}$$

avec $\alpha \wedge q = 1$. On a donc $q \mid 10^T - 1$ d'après le lemme de Gauss. T revient donc à l'ordre de $\overline{10}$ dans $\left((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times\right)$ qui contient $\varphi(q)$ éléments. Par défaut, on a donc $T = \varphi(q)$.

Solution 1.46.

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \in [\![0, n-1]\!]$, on a $H_n(m) = 0 \in \mathbb{Z}$. Si $m \geqslant n$, on a $H_n(m) = \binom{m}{n} \in \mathbb{Z}$. Si $m < 0$, on a

$$H_n(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = (-1)^n \binom{-m+n-1}{-m-1} \in \mathbb{Z} \tag{1.254}$$

Donc

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}} \tag{1.255}$$

2. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$. On a $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ donc $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Supposons $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base étagée en degré de $\mathbb{C}[X]$. Donc il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$. Par récurrence, on a $P(0) = a_0 \in \mathbb{Z}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$. On a alors

$$P(k+1) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \underbrace{a_k}_{\in \mathbb{Z}} H_k}_{\in \mathbb{Z}} + a_{k+1} \underbrace{H_{k+1}(k+1)}_{=1} \tag{1.256}$$

Donc $a_{k+1} \in \mathbb{Z}$.

Donc

$$\boxed{P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } \exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}, P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k.} \tag{1.257}$$

■

Remarque 1.20. *Les translation $X + \alpha$ sont les seules pour lesquelles on a $(X+\alpha)(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. En effet, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, on a $P \in \mathbb{Q}[X]$ d'après ce qui précède. Si $\deg(P) \geqslant 2$, quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer le coefficient dominant de P strictement positif. On a alors $\lim_{x \to +\infty} P'(x) = +\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que P est strictement croissant sur $[A, +\infty[$. De plus, $P(x+1) - P(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc il existe $A' > 0$ tel que $P(x+1) > P(x) + 1$. Pour $n \geqslant \max(A, A')$, on a $P(n+1) \geqslant P(n) + 2$ ce qui contredit $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Donc le degré de P est inférieur à 1.*

Solution 1.47. Le coefficient en X^k s'écrit $a_{k-1} - \alpha a_k \in \mathbb{Q}$. Si $a_k \in \mathbb{Q}$, on a donc $a_{k-1} \in \mathbb{Q}$. Il est donc impossible d'avoir deux coefficients consécutifs rationnels. Or $x_{n-1} \in \mathbb{Q}$ car c'est le coefficient dominant de P. Donc

$$\boxed{\alpha \text{ est nécessairement racine simple.}} \tag{1.258}$$

■

Solution 1.48. Soit $\Delta = P \wedge P' = \Delta$. On a $\deg(\Delta) \in \{1,2,3,4\}$ car $\Delta \mid P'$.

Si $\deg(\Delta) = 4$, alors $\Delta = P'$ (car associé). Donc il existe $\beta \in \mathbb{C}$ d'où $\underbrace{P}_{\in \mathbb{Q}[X]} = (X-\beta)\underbrace{P'}_{\in \mathbb{Q}[X]}$. Par division euclidienne, $X - \beta \in \mathbb{Q}[X]$ et $\beta \in \mathbb{Q}$ d'après l'algorithme de la division euclidienne.

Si $\deg(\Delta) = 1$, on a $P = X - \beta$ avec $\beta \in \mathbb{Q}$ racine de P.

Si $\deg(\Delta) = 2$, si $\Delta = (X-\beta)^2$, on a $\Delta' = 2(X-\beta) \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\beta \in \mathbb{Q}$ racine de Δ donc de P. Si $\Delta = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$. α_1 et α_2 sont racines doubles de P donc $P = (X-\beta)\underbrace{(X-\alpha_1)^2(X-\alpha_2)^2}_{=\Delta^2 \in \mathbb{Q}[X]}$ Par division euclidienne, $X - \beta \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $\beta \in \mathbb{Q}$.

Si $\deg(\Delta) = 3$, si $\Delta = (X-\beta)^3$, on a $\Delta^{(2)} = 6(X-\beta) \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\beta \in \mathbb{Q}$. Si $\Delta = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$ avec α_1, α_2 et α_3 distinctes. α_1, α_2 et α_3 seraient racines doubles de P ce qui contredit $\deg(P) = 5$. Si $\Delta = (X-\alpha)^2(X-\beta)$, α est racine triple de P et β racine double de P donc $P = (X-\alpha)^3(X-\beta)^2 \in \mathbb{Q}[X]$. Par division euclidienne, $(X-\alpha)(X-\beta) \in \mathbb{Q}[X]$ et

$$X - \alpha = \frac{\Delta}{(X-\alpha)(X-\beta)} \in \mathbb{Q}[X] \tag{1.259}$$

donc $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Donc

$$\boxed{\text{P admet au moins une racine rationnelle.}} \tag{1.260}$$

■

Solution 1.49.

1. $1 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}], 0 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}], \mathrm{i} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Soit $(a,b,a',b') \in \mathbb{Z}^4$:

$$\begin{cases} (a+\mathrm{i}b) - (a'+\mathrm{i}b') = (a-a') + \mathrm{i}(b-b') \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \\ (a+\mathrm{i}b) \times (aa'-bb') + \mathrm{i}(ab'+ba') \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \end{cases} \tag{1.261}$$

Donc $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant i.

Soit A un sous anneau de $\mathbb{C}$ contenant i. A est stable par x donc $i^4 = 1 \in A$. A est stable par $+$ donc $\mathbb{Z} \subset A$, puis $\mathrm{i}\mathbb{Z} \subset A$ donc $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset A$.

$$\boxed{\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ est donc le plus petit sous anneau de } \mathbb{C} \text{ contenant i.}} \quad (1.262)$$

2. Si $|z|^2 = 1$ c'est-à-dire $a^2 + b^2 = 1$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{a - \mathrm{i}b}{|z|^2} = a - \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \quad (1.263)$$

Si z est inversible dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, il existe $' \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $zz' = 1$ donc $|z|^2|z'|^2 = 1$ donc $|z|^2 = 1$. Donc

$$\boxed{z \text{ est inverse dans } \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ si et seulement si } |z|^2 = 1.} \quad (1.264)$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Si $|a| \geqslant 2$ ou $|b \geqslant 2$, alors $a^2 + b^2 \geqslant 4$ donc si $|z|^2 = 1$, alors $a^2 + b^2 = 1$ et $(|a| = 1$ et $|b| = 0)$ ou $(|a| = 0$ et $|b| = 1)$. Donc

$$\boxed{U = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}} \quad (1.265)$$

3. (a) Si $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - n| \leqslant \frac{1}{2}$ (faire un dessin et le montrer grâce aux parties entières). Soit alors $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$, on prend un $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|x_0 - a| \leqslant \frac{1}{2}, |y_0 - b| \leqslant \frac{1}{2}$. Et pour $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, on a

$$\boxed{|z - z_0|^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \leqslant \frac{1}{2}} \quad (1.266)$$

(b) Soit $(q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$, on a $z_1 = qz_2 + r$ si et seulement si $\frac{z_1}{z_2} - q = \frac{r}{z_2}$. On a $|r| < |z_1|$ si et seulement si $\left|\frac{z_1}{z_2} - q\right| < 1$. On a $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$ donc d'après 3.(a), il existe $q \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $\left|\frac{z_1}{z_2} - q\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. On pose alors $r = z_1 - qz_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ par stabilité. Il vient donc $|r| < |z_2|$. Ainsi,

$$\boxed{\exists (q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2, z_1 = qz_2 + r \text{ et } |r| < |z_1|.} \quad (1.267)$$

Si $z_2 = 1$ et $z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$, on peut prendre $q \in \{0, 1, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}\}$. Donc

$$\boxed{\text{il n'y a pas unicité.}} \quad (1.268)$$

(c) Soit $I \neq \{0\}$ un idéal de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. On note $n_0 = \min\left\{|z|^2 \;\middle|\; z \in I \setminus \{0\}\right\}$ (partie non vide de $\mathbb{N}^*$). Soit $z_0 \in I \setminus \{0\}$ tel que $|z_0|^2 = n_0$. On a directement $z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset I$ (I est un idéal). Réciproquement, soit $z \in I$, d'après 3.(b), il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ tel que

$$r = \underbrace{z}_{\in I} - \underbrace{z_0}_{\in I}\underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]} \in I \tag{1.269}$$

et $|r|^2 < n_0$. Nécessairement, $r = 0$ et $z = z_0 q \in z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Donc $I = z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ est principal.}} \tag{1.270}$$

4. Si $|z|^2 = 1$, alors $z \in U$ donc c'est bon. On travaille ensuite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la décomposition existe pour $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ avec $|z|^2 \leqslant n$. Soit $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $|z|^2 = n+1$. On a $|z|^2 \geqslant 2$ donc $z \in U$. Si z est irréductible, c'est bon. Sinon, il existe $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ tel que $z = z_1 z_2$ et z_1 et z_2 non inversibles. Alors $|z_1|^2 \geqslant 2$ et $|z_2|^2 \geqslant 2$. Or $|z|^2 = n+1 = |z_1|^2|z_2|^2$ donc $|z_1|^2 \leqslant n$ et $|z_2|^2 \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, on peut décomposer z_1 et z_2, donc z est décomposable

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}} \tag{1.271}$$

Pour l'unicité, soit $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \setminus \{0\}$ tel que $z = u\prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\nu_\rho(z)} = v\prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\mu_\rho(z)}$. Le théorème de Gauss est valable dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, car c'est un anneau principal. S'il existe $\rho_0 \in \mathcal{P}_0$ tel que $\nu_{\rho_0}(z) < \mu_{\rho_0}(z)$, alors

$$\rho_0 \;\Big|\; \prod_{p \in \mathcal{P}_0 \setminus \{\rho_0\}} \rho^{\nu_\rho(z)} \tag{1.272}$$

ce qui est proscrit par le théorème de Gauss. On a donc pour tout $\rho \in \mathcal{P}_0$, $\nu_\rho(z) = \mu_\rho(z)$. En reportant, on a $u = v$.

$$\boxed{\text{D'où l'unicité de la décomposition.}} \tag{1.273}$$

■

Solution 1.50.

1. On a $\overline{1} \in R$. Soit $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \in R^2$, il existe $(\overline{y_1}, \overline{y_2}) \in (\mathbb{F}_p^*)^2$ tel que $\overline{x_1} = \overline{y_1}^2$ et $\overline{x_2} = \overline{y_2}^2$. On a alors

$$\overline{x_1 x_2}^{-1} = (\overline{y_1 y_2}^{-1})^2 \in R \tag{1.274}$$

donc

$$\boxed{R \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{F}_p^*, \times).} \tag{1.275}$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{F}_p^* & \to \mathbb{F}_p^* \\ \overline{y} & \mapsto \overline{y}^2 \end{aligned} \tag{1.276}$$

On a $\mathrm{Im}(\varphi) = R$. Comme $\mathbb{F}_p$ est un corps, chaque éléments de R a exactement 2 antécédents par φ. Donc $|R| = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{2} = \frac{p-1}{2}$.

S'il existe $\overline{y} \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $\overline{a} = \overline{y}^2$, on a $\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{y}^{p-1} = \overline{1}$ par le théorème de Fermat.

Réciproquement, si $\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$, $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$ admet au plus $\frac{p-1}{2}$ racines dans $\mathbb{F}_p^*$. Tous les éléments de R sont racines de ce polynôme, ce sont donc ses seules racines. Donc $a \in R$.

$$\boxed{\text{Donc } a \in R \text{ si et seulement si } a^{\frac{p-1}{2}} = 1.} \tag{1.277}$$

2. Si $p = a^2 + b^2$, alors $\overline{0} = \overline{a}^2 + \overline{b}^2$. Si $\overline{a} = \overline{b} = \overline{0}$, on a $p \mid a$ et $p \mid b$ donc $p^2 \mid p$ ce qui est exclu. Par exemple, si $\overline{a} \neq \overline{0}$, on a $\overline{1} = -\overline{b}^2 \overline{a}^{-2}$ donc $\overline{-1} = (\overline{a}^{-1}\overline{b})^2 \in R$ d'après 1. On a donc $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ si et seulement si $2 \mid \frac{p-1}{2}$ (car p est premier plus grand que 3) d'où $4 \mid p-1$ donc

$$\boxed{p \equiv 1[4]} \tag{1.278}$$

3. On a $|\mathbb{F}_p| = p$, $E(\sqrt{p}) \leqslant \sqrt{p} < E(\sqrt{p}) + 1$ et $|\{0, \dots, E(\sqrt{p})\}|^2 = (E(\sqrt{p}) + 1)^2 > p$ (p est premier, ce n'est pas un carré) donc (cardinalité)

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective.}} \tag{1.279}$$

Donc il existe

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in (\{0, \dots, E(\sqrt{p})\}^2)^2 \tag{1.280}$$

avec $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ et $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Donc

$$\overline{a_1} - \overline{kb_1} = \overline{a_2} - \overline{kb_2} \Rightarrow \overline{a_1} - \overline{a_2} = \overline{k}(\overline{b_1} - \overline{b_2}) \tag{1.281}$$

Si $\overline{b_1} = \overline{b_2}$, alors $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ donc $p \mid b_1 - b_2$ et $p \mid a_1 - a_2$ donc $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ ce qui n'est pas vrai. Donc $\overline{b_1} \neq \overline{b_2}$. Posons $b_0 = b_1 - b_2$ et $a_0 = a_1 - a_2$. On a $\overline{b_0} \neq \overline{0}$. Il vient donc $(|a_0|, |b_0|) \in [\![1, E(\sqrt{p})]\!]^2$, $\overline{a_0} = \overline{kb_0}$ donc

$$\boxed{\overline{k} = \overline{a_0}\,\overline{b_0}^{-1}} \tag{1.282}$$

4. Si $p \equiv 1[4]$, en remontant les calculs, on a $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ donc $\overline{-1} \in R$ et il existe $\overline{k} \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $\overline{-1} = \overline{k}^2$. Alors d'après 3., il existe (a_0, b_0) tels que $\overline{k} = \overline{a_0}\overline{b_0}^{-1}$. Il vient alors $\overline{-1} = \overline{a_0}^2(\overline{b_0}^{-1})^2$ donc $\overline{-b_0}^2 = \overline{a_0}^2$. On a

$$p \mid a_0^2 + b_0^2 \in [\![2, 2E(\sqrt{p})]\!]^2 \subset [\![2, 2p-1]\!] \tag{1.283}$$

Nécessairement, $a_0^2 + b_0^2 = p$ et

$$\boxed{p \text{ est somme de deux carrés.}} \tag{1.284}$$

■

Solution 1.51.

1. Soit $(m, n) \in A^2$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que $m = a^2 + b^2 = |a + \mathrm{i}b|^2$ et $n = c^2 + d^2 = |c + \mathrm{i}d|^2$. Donc

$$\boxed{m \times n = |ac - bd6\mathrm{i}(bc + ad)|^2 = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \in A} \tag{1.285}$$

2. On a

$$\boxed{n = \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_1} p^{\nu_p(n)}}_{\in A \text{ car } \mathcal{P}_1 \subset A} \times \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{\nu_p(n)}}_{= \prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{2\alpha_p} \in A} \in A} \tag{1.286}$$

3. Soit $n \in A$, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $n = a^2 + b^2$. Soit $p \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, on a $p \mid a^2 + b^2$ donc $\overline{a^2 + b^2} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $p \nmid a$ ou $p \nmid b$, alors $\overline{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \overline{0}$ donc $\overline{-1} \in R$ (résidus quadratiques, voir exercice précédent). Donc $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

   Si $p \mid a$ et $p \mid b$, $a = p^k a', b = p^l b'$ avec $p \nmid a'$ et $p \nmid b'$. On suppose $1 \leqslant k \leqslant l$ (quitte à échanger a et b). On a

$$a^2 + b^2 = p^{2k}(a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2) = n \tag{1.287}$$

   donc

$$p \,\Big|\, a'^2 + p^{2(l-k)b'^2} \tag{1.288}$$

   et $\overline{a'}^2 + \overline{p^{2(l-k)}}\overline{b'}^2 = \overline{0}$. Nécessairement, $l = k$. De même $p \in \mathcal{P}_1$. Par contraposée, ν_p est pair.

$$\boxed{\text{D'où la réciproque.}} \tag{1.289}$$

■

2 Séries numériques et familles sommables

Solution 2.1.

1. On a $b_0 = a_1 = 5, b_1 = a_3 = 13$ et pour $p \geqslant 2$, $b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$.

   On a donc l'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les deux solutions sont 3 et -1. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$.

   On a alors $b_0 = 5 = \lambda + \mu$ et $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$. On trouve alors

$$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

2. On le montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

3. Si $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, on a $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$. Alors

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p} \tag{2.2}$$

   Soit $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \tag{2.3}$$

   Soit $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{p_n} \leqslant \sigma(n) < 3^{p_n+1}$. On a

$$p_n = \lfloor \log_3(\sigma(n)) \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \tag{2.4}$$

   En reportant, on a $\frac{3}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{9}{2}$.

   Si $\sigma(n) = 3^n$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{9}{2} \tag{2.5}$$

   Si $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2} \tag{2.6}$$

   Soit $\mu \in [1, 3[$ et $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n \mu$. Alors

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{9}{2\mu} \tag{2.7}$$

$$\boxed{\text{Donc tout réel compris dans } \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right] \text{ est valeur d'adhérence.}} \tag{2.8}$$

■

Solution 2.2.

1. $$g: \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array} \tag{2.9}$$

   est continue, $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $l \in [a,b]$ avec $g(l) = 0$, d'où

   $$\boxed{f(l) = l} \tag{2.10}$$

2. On note $A = \{\lambda \mid \lambda \text{ est valeur d'adhérence}\}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que A est non vide. De plus, A est borné car $A \subset [a,b]$. Soit $\lambda = \inf(A)$ et $\mu = \sup(A)$.

   Si $\lambda = b$, on a $\mu = b$ et $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$.

   Si $\lambda < b$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \notin A$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in]\lambda, \lambda+\varepsilon[\}$ est infini. Par définition, λ est valeur d'adhérence. Donc $\lambda \in A$, et de même $\mu \in A$.

   Soit $\nu \in]\lambda, \mu[$ avec $\lambda < \mu$. Si $\nu \notin A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$ est fini. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $x_n \notin]\nu - \varepsilon_0, \nu + \varepsilon_0[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0$. Soit alors $n \geqslant \max(N_0, N_1)$. Si $x_n \leqslant \nu - \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \leqslant \nu - \varepsilon_0$. Si $x_n \geqslant \nu + \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \geqslant \nu + \varepsilon_0$. Ceci contredit que λ et μ sont valeur d'adhérence.

   Ainsi, $\nu \in A$ et

   $$\boxed{[\lambda, \mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}} \tag{2.11}$$

3. Si (x_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, d'après 2., on a $A = [\lambda, \mu]$. On suppose $\lambda < \nu$. Ainsi, $\frac{\lambda+\nu}{2} = \alpha$ est valeur d'adhérence. Donc il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$ par continuité de f et c'est aussi égale à $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Ainsi,

   $$\boxed{f(\alpha) = \alpha} \tag{2.12}$$

   Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda, \mu]$ et $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x_n = x_{n_0}$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lambda = \mu$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et a une unique valeur d'adhérence.

$$\boxed{\text{Donc } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}} \tag{2.13}$$

■

Solution 2.3. On a $u_n = e^{i2^n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ car $l = l^2$ et $|l| = 1$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique au-delà d'un certain rang, il existe $T \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_{n+T} = u_n$. En particulier, $u_{N_0+T} = u_{N_0}$. On veut alors $2^{N_0+T}\theta \equiv 2^{N_0}\theta[2\pi]$. D'où $2^{N_0+T}\theta = 2\theta + 2k\pi$ donc $2^{N_0}(2^T - 1)\theta = 2k\pi$. Donc $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $U_{N+1} = U_N = U_{N^2}$. Comme $|U_N| = 1$, alors $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $\frac{\theta}{2\pi}$ est dyadique.

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$ (nombre dyadique). Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $u_n = u_{n_0} = 1$.

Pour la densité, on prend une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant successivement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous les paquets de k entiers sont dans $\{0,1\}^k$. Soit $x \in [0,1[$ tel que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \tag{2.14}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $p_N \in \mathbb{N}$,

$$2^{p_N}\theta = 2\pi\underbrace{(\dots)}_{\in\mathbb{N}} + 2\pi\Big(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in[0,\frac{1}{2^N}[}\Big) \tag{2.15}$$

On a alors

$$e^{i2^{p_N}\theta} = e^{i2\pi(\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_N}{2^N}+\dots)} \tag{2.16}$$

et

$$\left|\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} - x\right| \leqslant \frac{1}{2^N} \tag{2.17}$$

D'où $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{p_N} = e^{i2\pi x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{U}$. ■

Solution 2.4. Si $a=0$ et $b=0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a=0$ et $b\neq 0$ (ou inversement), $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a>0$ ou $b>0$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(\frac{e^{\frac{1}{n}\ln(a)} + e^{\frac{1}{n}\ln(b)}}{2}\Big)\Big) && (2.18)\\ &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + \frac{1}{4n^2}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) && (2.19)\\ &= \exp\Big(\frac{n}{2}\ln(ab) + \frac{1}{4}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2 + o(1))\Big) && (2.20)\end{aligned}$$

Si $ab>1$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty} \tag{2.21}$$

Si $ab<1$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0} \tag{2.22}$$

Si $ab=1$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}\ln(a)^2}} \tag{2.23}$$

■

Solution 2.5.

1. Soit $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n > 0$ (car $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$).

$$J = \left\{k\in\mathbb{N} \;\middle|\; x_k \geqslant \frac{M}{2}\right\} \tag{2.24}$$

est fini car $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et est non vide. On définit

$$\varphi(0) = \min\left\{k\in J \;\middle|\; x_k = \max\{x_n \mid n\in J\}\right\} \tag{2.25}$$

Pour tout $n \in J$, $x_{\varphi(0)} \geqslant x_n$. Si $n \notin J$, $x_n \leqslant \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$. Ainsi,

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \tag{2.26}$$

Puis on recommence avec

$$\left\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\}\right\} \tag{2.27}$$

2. Pour $l = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_N < \varepsilon$. On pose

$$\boxed{I = \{N\}} \tag{2.28}$$

et on a bien

$$\left|\sum_{k \in I} x_k - l\right| \leqslant \varepsilon \tag{2.29}$$

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{N} x_k > A$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$). Donc on peut prendre

$$\boxed{I = \{0, \dots, N\}} \tag{2.30}$$

Si $l \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < l$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $x_n < \varepsilon$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$. Donc il existe un plus petit entier N_1 tel que $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geqslant l - \varepsilon$. Comme $x_{N_1} < \varepsilon$, on a $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leqslant l + \varepsilon$. Donc

$$\boxed{I = \{N_0, \dots, N_1\}} \tag{2.31}$$

■

Solution 2.6. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \tag{2.32}$$

Montrons que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. D'abord, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} >$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = l \in \overline{R}_+^*$. Si $l < +\infty$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l}$ et donc $u_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l^2}$ et la série diverge. Donc $l = +\infty$ et comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On observe ensuite que $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$ donc $S_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} S_n$. Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{= (S_n - S_{n-1}) S_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \tag{2.33}$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3 \tag{2.34}$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{=\ S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3 \tag{2.35}$$

On applique le théorème de Césaro à la suite $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3 \tag{2.36}$$

donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$, et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a bien

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}} \tag{2.37}$$

Réciproquement, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ avec $u_0 = 1$. On a

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}} \tag{2.38}$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}} \tag{2.39}$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1} \tag{2.40}$$

■

Remarque 2.1. *On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour $\alpha < 1$,*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha} \tag{2.41}$$

Solution 2.7. Tout d'abord, on montre que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4 \tag{2.42}$$

en posant

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{array} \tag{2.43}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et on a $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geqslant 0$ et $f'(0) = 0$. Comme $f(0) = 0$, on a pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant 0$.

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur f, on a

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t \in [0,1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leqslant \cosh(1)} \leqslant x^4 \tag{2.44}$$

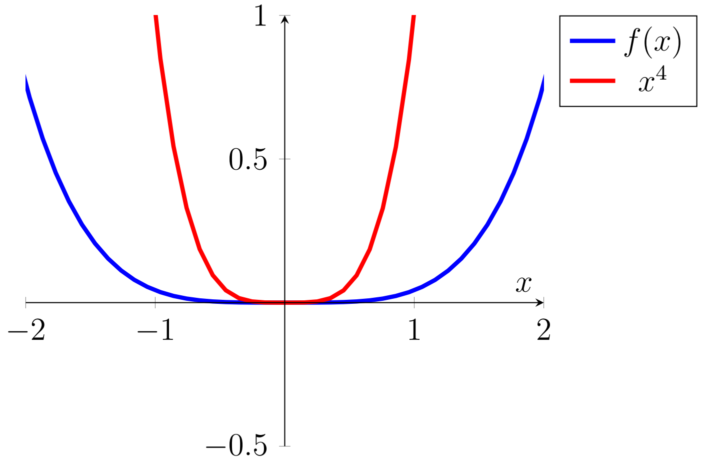

FIGURE 1 – $0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - 1\right] \tag{2.45}$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \tag{2.46}$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1) \tag{2.47}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}} \tag{2.48}$$

■

Solution 2.8. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$.

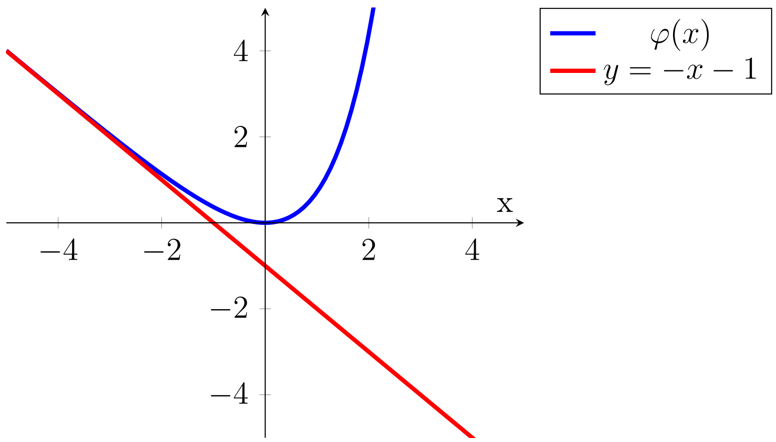

FIGURE 2 – $e^x - x - 1 \geqslant -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$0\varphi(a_n) \leqslant \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{2.49}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0 \tag{2.50}$$

Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| > \varepsilon$. Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geqslant \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0 \tag{2.51}$$

ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0} \tag{2.52}$$

et c'est pareil pour b_n et c_n. ■

Solution 2.9.

1. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x(1-x) \end{array} \tag{2.53}$$

On a $f(x) \in]0, \frac{1}{4}]$. Pour tout $n \in \geqslant 1$, $u_n \in]0, \frac{1}{4}]$. Par récurrence, on a donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } v_n \text{ est bien définie.}} \tag{2.54}$$

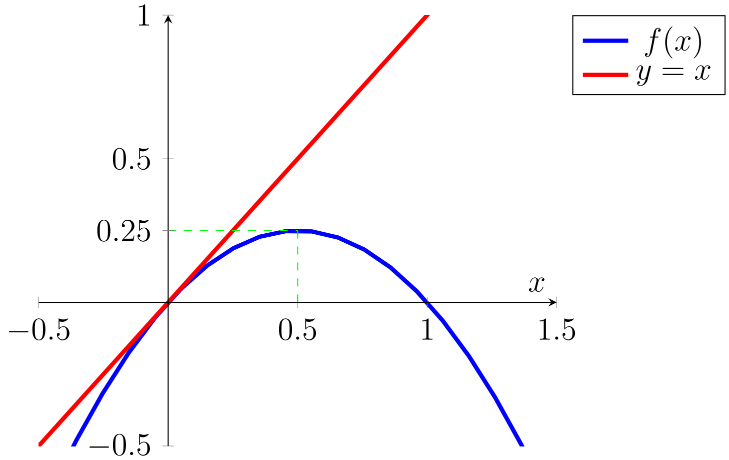

FIGURE 3 – $x(1-x) \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ pour $x \in]0,1[$.

2. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1) \tag{2.55}$$

Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. D'après le théorème de Césaro, on a

$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \tag{2.56}$$

donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{=O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \tag{2.57}$$

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{2.58}$$

et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. En sommant, on a donc

$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o\big(\ln(n)\big) \tag{2.59}$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n+\ln(n)+o\big(\ln(n)\big)} && (2.60)\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{1}{1+\frac{\ln(n)}{n}+o(\frac{\ln(n)}{n})} && (2.61)\\ &= \frac{1}{n}\Big(1-\frac{\ln(n)}{n}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)\Big) && (2.62)\\ &= \frac{1}{n}\underbrace{-\frac{\ln(n)}{n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{=\,\alpha_n} && (2.63)\end{aligned}$$

α_n est le terme genéral d'une série à termes positifs convergentes car $\alpha_n = O\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$. Donc

$$v_{n+1}-v_n = 1+\frac{1}{n}+\alpha_n+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{2.64}$$

et en sommant,

$$\boxed{v_n = n+\ln(n)+O(1)} \tag{2.65}$$

et comme montré auparavant,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n}-\frac{\ln(n)}{n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)} \tag{2.66}$$

■

Solution 2.10.

1. Soit

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n-x-n \end{array} \tag{2.67}$$

On a $f_n'(x) = nx^{n-1}-1 = 0$ si et seulement si

$$x = \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n \tag{2.68}$$

$f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. f_n est monotone strictement sur $]\alpha_n, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc il existe un unique } x_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } f_n(x_n) = 0} \tag{2.69}$$

On a $f_n(1) = -n < 0$ donc $x_n > 1$ et $f_n(2) = 2^n-2-n > 0$ pour $n \geqslant 3$ (on a $x_2 = 2$). Donc pour $n \geqslant 3$, $x_n \in]1,2[$.

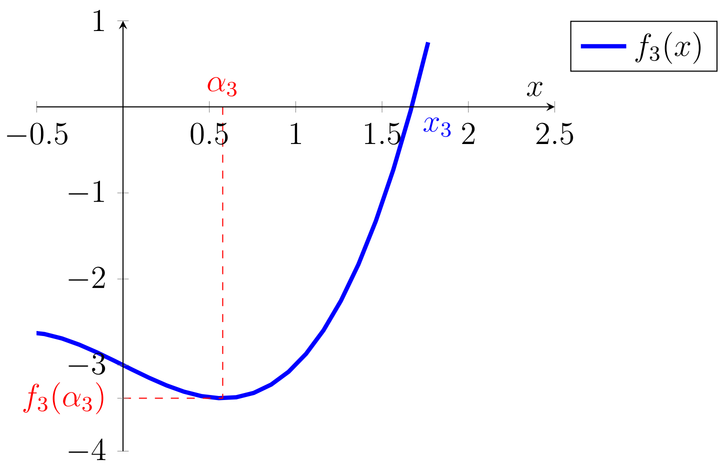

FIGURE 4 – $x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur $\mathbb{R}_+$.

2. On a $x_n^n = x_n + n \leqslant 2 + n$ donc

$$1 \leqslant x_n \leqslant (2+n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(2+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \tag{2.70}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1} \tag{2.71}$$

3. On peut poser $x_n = 1 + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On a

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n \tag{2.72}$$

donc

$$n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln(1+\varepsilon_n+n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1+\varepsilon_n}{n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}} \tag{2.73}$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \tag{2.74}$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \tag{2.75}$$

On a enfin

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n = 1 + n + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \tag{2.76}$$

d'où

$$\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{1}{n}\ln(n+1+\frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)) \tag{2.77}$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\ln(n) + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{=\,o\left(\frac{1}{n}\right)}\Big)\Big] \tag{2.78}$$

$$= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{2.79}$$

donc

$$1+\varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big) \tag{2.80}$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big) \tag{2.81}$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)} \tag{2.82}$$

■

Solution 2.11. On note

$$v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1}a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n} \tag{2.83}$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a$ alors $v_n = a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. De manière générale, on a

$$v_n - a = v_n - a\frac{u_n + \cdots + u_0}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}(a_k - a)}{u_0 + \cdots + u_n} \tag{2.84}$$

Ainsi,

$$|u_n - a| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}|a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \tag{2.85}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $|a_k - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, on note $M = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k - a|$. Soit $n \geqslant N$, on a

$$|v_n - a| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k}|a_k - a| + \sum_{k=N}^{n} |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \tag{2.86}$$

$$\leqslant \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} u_k M}{u_0 + \cdots + u_n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N}^{n} u_{n-k}\frac{\varepsilon}{2}}{u_0 + \cdots + u_n}}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} \tag{2.87}$$

car les u_i sont positifs.

On remarque enfin que

$$\begin{aligned} u_n &= o(u_0 + \cdots + u_n) \\ u_{n-1} &= o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\ &\vdots \\ u_{n-N+1} &= o(u_0 + \cdots + u_n) \end{aligned} \tag{2.88}$$

Donc

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \tag{2.89}$$

et il existe $N' \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, on a

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.90}$$

et donc pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a $|v_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et ainsi

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = a} \tag{2.91}$$

■

Solution 2.12.

1. Pour $n \geqslant 2$, (iii) donne

$$x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \tag{2.92}$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \tag{2.93}$$

où l'inégalité est stricte d'après (ii). Pour $n \geqslant 2$, on a

$$x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2!} \tag{2.94}$$

donc

$$0 \leqslant 2x - \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} < 1 \tag{2.95}$$

Donc $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$. On a ensuite

$$0 \leqslant n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \underbrace{a_n}_{\in\mathbb{N}} < 1 \tag{2.96}$$

donc

$$\boxed{a_n = \left\lfloor n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) \right\rfloor} \tag{2.97}$$

On a donc bien unicité.

Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus. On a, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \underbrace{a_n}_{\in\mathbb{N}} < 1 \tag{2.98}$$

Or

$$0 - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{1}{(n-1)!} \tag{2.99}$$

donc

$$a_n \in \{0, \dots, n-1\} \tag{2.100}$$

et (i) est vérifié.

On a

$$0 \leqslant x - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k!} < \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{2.101}$$

donc (iii) est vérifié, et supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $m \geqslant n_0 + 1$, on a $a_m = m - 1$. Alors

$$x = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \tag{2.102}$$

et

$$x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n_0!} \tag{2.103}$$

donc

$$n_0!\Big(x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!}\Big) = 1 \tag{2.104}$$

et

$$n_0!\Big(x - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_{n_0-1}}{(n_0-1)!}\Big) - a_{n_0} = 1 \tag{2.105}$$

En prenant la partie entière, on a donc $0 = 1$ ce qui est absurde.

Donc (ii) est vérifié.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = 0$ alors $x \in \mathbb{Q}$.

   Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a
$$x = \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n!} \tag{2.106}$$
   si et seulement si
$$a_n = n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) \tag{2.107}$$
   si et seulement si
$$n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) \in \mathbb{N} \tag{2.108}$$
   ce qui est vrai dès que $n \geqslant q$. Donc pour tout $n > q$, on a $a_n = 0$ par unicité.

3. Soit $l \in [-1, 1]$. Soit $x \in [0, 1[$ avec
$$x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \tag{2.109}$$
   On a alors
$$n!2\pi x = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \underbrace{\sum_{k \geqslant n+2} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{=\ \varepsilon_n} \tag{2.110}$$
   On a
$$0 \leqslant \varepsilon_n < \frac{2\pi n!}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{2.111}$$
   Donc
$$\sin(n!2\pi x) = \sin\Big(\frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \varepsilon_n\Big) \tag{2.112}$$
   et il suffit d'avoir, comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\arcsin(l)}{2\pi} \in \Big[0, \frac{1}{4}\Big] \tag{2.113}$$
   On pose alors
$$\boxed{a_n = \left\lfloor \frac{n \arcsin(l)}{2\pi} \right\rfloor} \tag{2.114}$$
   pour $n \geqslant 2$ et on a $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{4} < n - 1$ pour tout $n \geqslant 2$. On a donc le résultat.

■

Remarque 2.2. *Il n'y a pas unicité. Par exemple, pour $l = 0$, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ convient. Plus généralement, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \geqslant q$, on a*
$$\sin\left(n!2\pi\Big(x + \frac{p}{q}\Big)\right) = \sin(n!2\pi x) \tag{2.115}$$

Solution 2.13. Par récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\ln(1+x) - x \end{array} \tag{2.116}$$

et

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\ln(1+x) \end{array} \tag{2.117}$$

g est dérivable est

$$g'(x) = \frac{1-x}{1+x} \tag{2.118}$$

donc g est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $l \in]0,+\infty[$ tel que $g(l) = 0$ d'où $f(l) = l$.

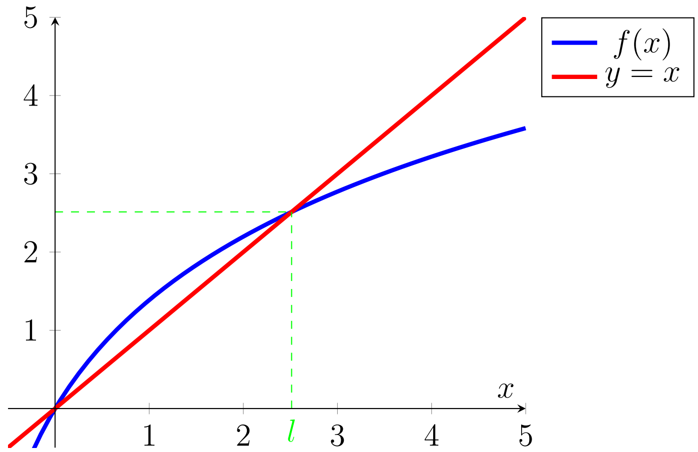

FIGURE 5 – $x \mapsto 2\ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in]0,l]$, on a $x \leqslant f(x) \leqslant l$ et pour tout $x > l$, on a $l \leqslant f(x) \leqslant x$.

Soit $n \geqslant 1$. Si $u_n \geqslant l$ et $u_{n-1} \geqslant l$, on a $m_n = l$ et $M_n \in \{u_n, u_{n-1}\}$. Il vient donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(f(u_n) + f(u_{n-1})) \geqslant f(l) = l \tag{2.119}$$

et

$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \leqslant M_n \tag{2.120}$$

Donc $m_{n+1} = l = m_n$ et $M_{n+1} \leqslant M_n$.

Par récurrence, on a pour tout $k \geqslant n$, $u_k \geqslant l$ et $(M_k)_{k \geqslant n}$ converge vers $\lambda \geqslant l$ (car décroissante et plus grande que l) et $m_k = l$ pour tout $k \geqslant n$.

De plus pour tout $k \geqslant n$, on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(f(u_k) + f(u_{k-1})) \leqslant f(M_k) \tag{2.121}$$

car f est croissante et donc

$$u_{k+2} \leqslant f(M_{k+1}) \leqslant f(M_k) \tag{2.122}$$

Par passage à la limite, on a $\lambda \leqslant f(\lambda)$ donc $\lambda = f(\lambda)$ et donc $\lambda = l$. Or pout tout $k \geqslant n$, on a

$$\underbrace{m_k}_{=\,l} \leqslant u_k \leqslant M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l \tag{2.123}$$

donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l} \tag{2.124}$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0-1} \geqslant l$ et $u_{n_0} \geqslant l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Or même s'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_1-1} \leqslant l$ et $u_{n_1} \leqslant l$, alors on inverse les rôles de M_{n_1} et m_{n_1}.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n - l)(u_{n+1} - l) \leqslant 0 \tag{2.125}$$

Supposons par exemple $u_0 \geqslant l$ et $u_1 \leqslant l$. Alors

$$0 \leqslant u_2 - l \leqslant \frac{u_0 - l}{2} \tag{2.126}$$

et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_{2k} - l \leqslant \frac{u_0 - l}{2^k}$. Donc $u_{2k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$ et de même $u_{2k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$ (par valeurs inférieures). Donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l} \tag{2.127}$$

■

Solution 2.14. Soit $(\theta, \theta') \in [2, 2\pi[^2$ tel que

$$\lim_{k \to +\infty} e^{\mathrm{i}px_n} = e^{\mathrm{i}\theta} \tag{2.128}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} e^{\mathrm{i}qx_n} = e^{\mathrm{i}\theta'} \tag{2.129}$$

Soient x, x' deux valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distinctes. On a

$$\begin{cases} e^{\mathrm{i}px} = e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}px'} \\ e^{\mathrm{i}qx} = e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}qx'} \end{cases} \tag{2.130}$$

Il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} px = px' + 2k\pi \\ qx = qx' + 2k\pi \end{cases} \tag{2.131}$$

et donc $p(x - x') = 2k\pi$ et $q(x - x') = 2k'\pi$ et alors $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence. Comme elle est bornée,

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}} \tag{2.132}$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut prendre

$$\boxed{x_n = n!} \tag{2.133}$$

On a

$$e^{2\mathrm{i}\pi n!} = 1 \tag{2.134}$$

et

$$n!e = n!\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0} \tag{2.135}$$

Si on veut x_n divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut prendre

$$\boxed{x_n = (-1)^n n!} \tag{2.136}$$

■

Solution 2.15.

1. On a
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leqslant \boxed{\frac{n^k}{k!}} \tag{2.137}$$
2. On a
$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k \tag{2.138}$$
donc
$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z|^k \underbrace{\left|\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right|}_{\geqslant 0} \tag{2.139}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \frac{|z|^k}{n^k} \tag{2.140}$$
$$\boxed{= \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n} \tag{2.141}$$
3. On sait que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{|z|} \tag{2.142}$$
et
$$\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{|z|}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{|z|}{n}+o\left(\frac{|z|}{n}\right)\right)} = e^{|z|}e^{o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{|z|} \tag{2.143}$$
En reportant dans la question précédente, on a donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z} \tag{2.144}$$

■

Remarque 2.3. *Une autre méthode est d'écrire, pour $z = a + \mathrm{i}b$,*
$$1 + \frac{z+\mathrm{i}b}{n} = 1 + \frac{a}{n} + \mathrm{i}\frac{b}{n} = \rho_n e^{\mathrm{i}\theta_n} \tag{2.145}$$
. On a alors
$$\left|1+\frac{a+\mathrm{i}b}{n}\right| = \sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}} = \rho_n \tag{2.146}$$

et alors

$$\rho_n^n = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)\right|^n \tag{2.147}$$

$$= e^{\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}\right)} \tag{2.148}$$

$$= e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \tag{2.149}$$

$$= e^{a+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a = |e^z| \tag{2.150}$$

On écrit ensuite

$$1+\frac{a+\mathrm{i}b}{n} = \rho_n\Bigg(\underbrace{\frac{1+\frac{a}{n}}{\rho_n}}_{=\ \cos(\theta_n)} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{b}{n\rho_n}}_{=\ \sin(\theta_n)}\Bigg) \tag{2.151}$$

On a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b}{n\rho_n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{a}{n}}{\rho_n} = 1 \tag{2.152}$$

On peut imposer $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ *et il existe alors* $N\in\mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$, $\cos(\theta_n) \geqslant 0$. *Pour* $n \geqslant N$, *on a alors* $\theta_n \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *donc*

$$\theta_n = \arcsin\left(\frac{b}{n\rho_n}\right) \tag{2.153}$$

et $n\theta_n = n\arcsin\left(\frac{b}{n\rho_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} b$. *Finalement, on a bien*

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \rho_n^n e^{\mathrm{i}\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a e^{\mathrm{i}b} = e^z \tag{2.154}$$

Solution 2.16. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > 0$. On a

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}}_{<1} u_n \tag{2.155}$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc converge. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}_{=\ v_k} < 0 \tag{2.156}$$

Ensuite,

$$v_k = -\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{k}} \tag{2.157}$$

Comme $\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=-\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0} \tag{2.158}$$

On a ensuite

$$u_n = \exp\left(\sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right]\right) \tag{2.159}$$

et

$$\ln\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.160}$$

Donc

$$v_k = -\frac{2}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.161}$$

Le terme dans le O est le terme générale d'une série absolument convergent donc convergent, on note ce terme α_k. On a alors

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{2}{\sqrt{k}}+\alpha_k\right) = -2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty}\alpha_k}_{=\,C}+o\left(1\right) \tag{2.162}$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \int_2^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{k\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \tag{2.163}$$

Posons

$$w_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n} \tag{2.164}$$

On étudie la série de terme général $w_n - w_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}}-2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) && (2.165)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}-2\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) && (2.166)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}-2\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) && (2.167)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) && (2.168)\\
&= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) && (2.169)
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ converge et ainsi $(w_n)_{n\geqslant 2}$ converge : il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + C' + o(1) \tag{2.170}$$

On a donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} v_k = -4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1) \tag{2.171}$$

Ainsi,

$$u_n = \exp\left(-4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} Ke^{-4\sqrt{n}} \tag{2.172}$$

où $K = e^{-2C'+C} > 0$.

Donc

$$u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} K^\alpha e^{-4\alpha\sqrt{n}} \tag{2.173}$$

Si $\alpha \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^\alpha \not\to 0$ donc

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ diverge.}} \tag{2.174}$$

Si $\alpha > 0$, $u_n^\alpha = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ converge.}} \tag{2.175}$$

■

Solution 2.17. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a

$$u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \geqslant nu_{2n} \geqslant 0 \tag{2.176}$$

Si (S_n) converge alors $S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$.

Comme on a $(2n+1)u_{2n} \geqslant (2n+1)u_{2n+1} \geqslant 0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n} = 0$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0 \text{ et donc } u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{2.177}$$

Si $\{p \in \mathbb{N} | pu_p \geqslant 1\}$ est infini, alors $u_p \neq o\left(\frac{1}{p}\right)$ donc

$$\boxed{\sum u_p \text{ diverge.}} \tag{2.178}$$

$\blacksquare$

Remarque 2.4. *Ce n'est pas vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, par exemple si $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré et 0 sinon.*

Solution 2.18. 1. C'est une série à termes positifs. On a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \tag{2.179}$$

Ainsi

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \tag{2.180}$$

et donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \tag{2.181}$$

2. C'est une série à termes positifs. On a

$$u_n \geqslant \int_1^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(1) dt = \frac{\sin(1)}{n+1} \times \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \tag{2.182}$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \tag{2.183}$$

3. On écrit

$$\frac{n!}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^k}_{\in\mathbb{Z}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k \tag{2.184}$$

et

$$\left|\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k\right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{2.185}$$

d'après le critère spécial des séries alternées.

Donc

$$\sin\left(2\pi\frac{n!}{e}\right) = \sin\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{2.186}$$

$$= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\substack{\text{terme général}\\ \text{d'une série alternée}\\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\substack{\text{terme général}\\ \text{d'une série absolument}\\ \text{convergente}}} \tag{2.187}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \tag{2.188}$$

4. Si $\alpha \leqslant 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ et comme $\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \tag{2.189}$$

Si $\alpha > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge.}} \tag{2.190}$$

Si $\alpha \in]0,1]$, on écrit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \underbrace{(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}} \tag{2.191}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right)\right) \tag{2.192}$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} \quad \underbrace{-\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}\right)}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} < 0 \\ \text{terme général} \\ \text{d'une série convergente} \\ \text{ssi } \alpha > \frac{1}{2}}} \tag{2.193}$$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.} \tag{2.194}$$

■

Remarque 2.5. *Soit $\alpha \in [0,1]$ et*

$$u_n = \int_0^\alpha t^n \sin(t)dt \geqslant 0 \tag{2.195}$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \leqslant \alpha^{n+1}$, terme général d'une série convergente donc $\sum u_n$ converge.

Si $\alpha = 1$, on utilise

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi} t \tag{2.196}$$

Alors $u_n \geqslant \frac{2}{\pi(n+2)}$, terme générale d'une série divergente donc $\sum u_n$ diverge.

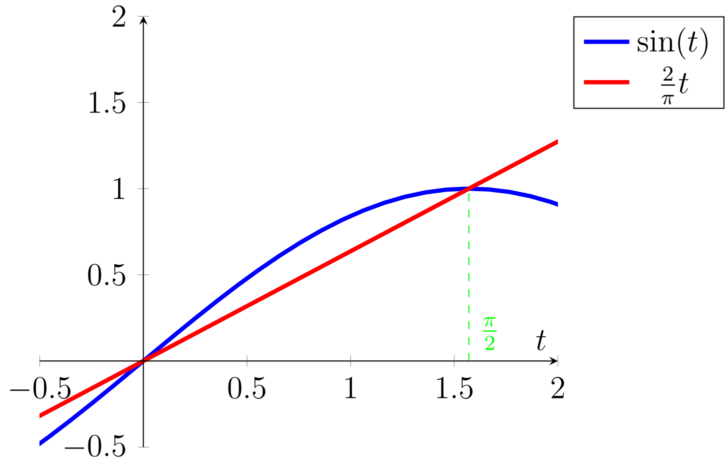

FIGURE 6 – $\sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution 2.19.

On a

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \tag{2.197}$$

u_n est le reste d'ordre n d'une série alternée, donc u_n est du signe de $\frac{(-1)^n}{n}$. Donc on a

$$u_{n+1} \times u_n \leqslant 0 \tag{2.198}$$

Par ailleurs,

$$|u_n| = \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{=\frac{1}{n(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{=\frac{1}{(n+2)(n+3)}} + \cdots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} \tag{2.199}$$

Donc $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \tag{2.200}$$

Pour calculer la somme, on peut chercher si la famille $(u_{n,p})_{\substack{n\geqslant 1\\ p\in\mathbb{N}}}$ est sommable où

$$u_{n,p} = \frac{(-1)^n}{(n+2p)(n+2p+1)} \tag{2.201}$$

Soit $p \geqslant 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p} - \frac{1}{n+2p+1} \right) = \frac{1}{2p+1} \tag{2.202}$$

Donc

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\geqslant 1} |u_{n,p}| = +\infty \tag{2.203}$$

Ainsi, cette famille n'est pas sommable. Essayons plutôt de calculer u_n d'abord : soit $n \geqslant 1$ fixé et $N \geqslant n$. On a

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n}^{N} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \tag{2.204}$$

$$= -\sum_{k=n}^{N} \int_0^1 (-t)^{k-1} dt \tag{2.205}$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=n}^{N} (-t)^{k-1} dt \tag{2.206}$$

$$= \int_0^1 (-t)^n \frac{1-(-t)^{N-n+1}}{1+t} dt \tag{2.207}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \tag{2.208}$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leqslant \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{1}{N+2} \tag{2.209}$$

Donc

$$u_n = -\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \tag{2.210}$$

Soit alors $M \geqslant 1$. On a

$$\sum_{n=1}^{M} u_n = \sum_{n=1}^{M} \left(-\int_0^1 \frac{(-t)^n}{t+1} dt \right) \tag{2.211}$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{1+t} \sum_{n=1}^{M} (-t)^n dt \tag{2.212}$$

$$= -\int_0^1 \frac{-t}{1+t} \frac{1-(-t)^M}{1+t} dt \tag{2.213}$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \tag{2.214}$$

Comme

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{M+1}dt = \frac{1}{M+2} \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0 \tag{2.215}$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}dt \tag{2.216}$$

$$= \int_0^1 \frac{(t+1)-1}{(1+t)^2}dt \tag{2.217}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}dt \tag{2.218}$$

$$= [\ln(1+t)]_0^1 + \left[\frac{1}{2} - 1\right] \tag{2.219}$$

$$= \ln(2) - \frac{1}{2} \tag{2.220}$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2) - \frac{1}{2}} \tag{2.221}$$

$$\frac{1}{(3n)!} = \left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{2.222}$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \tag{2.223}$$

Posons

$$\begin{cases} S_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \\ S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \\ S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!} \end{cases} \tag{2.224}$$

On a

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 &= e \\ S_0 + jS_1 + j^2 S_2 &= \exp(j) \\ S_0 + j^2 S_1 + jS_2 &= \exp(j^2) \end{cases} \tag{2.225}$$

où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. En sommant les trois lignes, on a

$$3S_0 = e + \exp(j) + \exp(j^2) = e + e^{-\frac{1}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \tag{2.226}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3}\left(e + e^{-\frac{1}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)} \tag{2.227}$$

S'il existe $p \geqslant 0$ tel que $n = p^3$, alors

$$\left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p \tag{2.228}$$

et

$$\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor \left(p^3 - 1\right)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p - 1 \tag{2.229}$$

Sinon, $n^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{N}$. Soit $k = \left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$. Alors $k^3 < n \leqslant (k+1)^3$ donc $k^3 \leqslant n - 1 < (k+1)^3$ d'où $k \leqslant (n-1)^{\frac{1}{3}} < k+1$. Donc $\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = k$.

Donc $\sum u_n$ est une série lacunaire. Comme $u_{p^3} = O\left(\frac{1}{p^3}\right)$, d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \tag{2.230}$$

Sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^3 - p} \tag{2.231}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x(4x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} \tag{2.232}$$

Donc la somme partielle jusqu'au rang n vaut

$$S_n = \underbrace{-\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}_{=\ H_n} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p+1} \tag{2.233}$$

$$= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \tag{2.234}$$

$$= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k}}_{=\ H_{2n-1}} - 1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}}_{=\ \frac{1}{2}H_{n-1}} \right) \tag{2.235}$$

$$= -H_n + 2H_{2n-1} - H_{n-1} - 1 + \frac{1}{2n+1} \tag{2.236}$$

$$= -\ln(n) + 2\ln(2n-1) - \ln(n-1) - 1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{=\ o(1)} + o\left(1\right) \tag{2.237}$$

$$= \ln\left(\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)}\right) - 1 + o\left(1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(4) - 1 \tag{2.238}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(4) - 1} \tag{2.239}$$

■

Solution 2.20. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$a - \varepsilon \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant a + \varepsilon \tag{2.240}$$

Alors

$$(a-\varepsilon)f(x) \leqslant f'(x) \leqslant (+\varepsilon)f(x) \tag{2.241}$$

On voit donc que

$$f'(x) - f(x)(a+\varepsilon) \leqslant 0 \tag{2.242}$$

On pose alors (sorte d'inéquation différentielle)

$$g_1(x) = f(x)e^{-(a+\varepsilon)x} \tag{2.243}$$

On a

$$g_1'(x) = e^{-(a+\varepsilon)x}\left(f'(x) - f(x)(a+\varepsilon)\right) \leqslant 0 \tag{2.244}$$

pour tout $x \geqslant A$. Donc g_1 est décroissante sur $[A, +\infty[$. Alors

$$0 < g_1(x) \leqslant g_1(A) = f(A)e^{-(a+\varepsilon)A} \tag{2.245}$$

Alors

$$0 < f(x) \leqslant \left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right)e^{(a+\varepsilon)x} \tag{2.246}$$

De même, pour $x \geqslant A$,

$$\left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right)e^{(a-\varepsilon)x} \leqslant f(x) \tag{2.247}$$

car $g_2(x) = f(x)e^{-(a-\varepsilon)x}$ est croissante sur $[A, +\infty[$.

Donc

$$f(n) \leqslant \left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right)e^{(a+\varepsilon)n} \tag{2.248}$$

Comme $a + \varepsilon < 0$,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} f(n) \text{ converge.}} \tag{2.249}$$

De plus

$$f(A)e^{-(a-\varepsilon)A}\frac{e^{(a-\varepsilon)N}}{1-e^{a-\varepsilon}} \leqslant R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leqslant f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\frac{e^{(a+\varepsilon)N}}{1+e^{a+\varepsilon}} \tag{2.250}$$

Donc

$$\boxed{R_N = \underset{n\to+\infty}{O}\left(e^{aN}\right) \text{ et } e^{aN} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(R_N\right)} \tag{2.251}$$

■

Solution 2.21. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{e^k}{k}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \tag{2.252}$$

On utilise la règle d'Abel : on écrit $e^k = B_k - B_{k-1}$ avec

$$\begin{cases} B_k = \sum_{j=0}^{k} e^j = \frac{e^{k+1}-1}{e-1} \\ B_{-1} = 0 \end{cases} \tag{2.253}$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k+1} = -1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{B_k}{k(k+1)}}_{\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{e^{k+1}}{(e-1)k^2}}}_{= \underset{n\to+\infty}{o}(S_n)} + \underbrace{\frac{B_n}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n e}{n(e-1)}} \tag{2.254}$$

Donc

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{n(e-1)}} \tag{2.255}$$

■

Solution 2.22.

1. $u_n > 0$ et

$$u_n = e^{n^\alpha \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n^\alpha\left(-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n^{\alpha-1}} + O\left(n^{\alpha-2}\right) \tag{2.256}$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \tag{2.257}$$

Si $\alpha = 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \tag{2.258}$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$-n^{\alpha-1} + O\left(n^{\alpha-2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^{\alpha-1} \tag{2.259}$$

donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$,

$$-n^{\alpha-1} + O\left(n^{\alpha-1}\right) \leqslant \frac{-n^{\alpha-1}}{2} \tag{2.260}$$

d'où

$$u_n \leqslant e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{2.261}$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \tag{2.262}$$

2. On a $u_n > 0$ et
$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{k}\ln(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1 \tag{2.263}$$
donc par comparaison des sommes partielles, on a
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \tag{2.264}$$
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et
$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \tag{2.265}$$

3. On écrit $n!e = \lfloor n!e \rfloor + \alpha_n$. Alors
$$\sin(n!\pi e) = (-1)^{\lfloor n!e \rfloor} \sin(\alpha_n \pi) \tag{2.266}$$
On écrit
$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \tag{2.267}$$
On pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{n\times n!}$. On a
$$v_n \leqslant e \leqslant w_n \tag{2.268}$$
donc
$$0 \leqslant e - v_n \leqslant \frac{1}{n\times n!} \tag{2.269}$$
d'où
$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leqslant \frac{n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2} \tag{2.270}$$
Donc
$$n!e\pi = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!}}_{\text{pair}} \pi + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{2.271}$$
Finalement,a
$$\frac{\sin(n!e\pi)}{\ln(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln(n)} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\ln(n)(n+1)}}_{\substack{\text{terme général}\\ \text{d'une série alternée}\\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)}_{\substack{\text{terme général}\\ \text{d'une série absolument}\\ \text{convergente}}} \tag{2.272}$$
Donc
$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \tag{2.273}$$

$\blacksquare$

Solution 2.23.

1. On a

$$u_n = (a+b+c)\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = (a+b+c)\ln(n) + \frac{b+2c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{2.274}$$

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+2c &= 0 \end{cases} \tag{2.275}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \end{cases} \tag{2.276}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si} a = b \text{ et } b = -2c \text{ avec } c \in \mathbb{R}} \tag{2.277}$$

Prenons $c = 1$ pour calculer la somme. On a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) \tag{2.278}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) - \ln(n+1) \tag{2.279}$$

$$= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) \tag{2.280}$$

$$= \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2) \tag{2.281}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)} \tag{2.282}$$

2. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \tag{2.283}$$

On écrit

$$u_n = \frac{2^n\left(3^{2^{n-1}}-1\right)}{\left(3^{2^{-1}}+1\right)\left(3^{2^n}-1\right)} = \frac{2^n\left(3^{2^{n-1}}+1-2\right)}{3^{2^n}-1} = \underbrace{\frac{2^n}{3^{2^{n-1}}-1}}_{=\ v_n} - \underbrace{\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}-1}}_{=\ v_{n+1}} \tag{2.284}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 = 1} \tag{2.285}$$

3. On remarque que $k - n\left\lfloor\frac{k}{n}\right\rfloor$ est le reste de la division euclidienne de k par n. Donc ce reste est borné par $k-1$. Donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \tag{2.286}$$

On note alors

$$J_r = \{n \in \mathbb{N}^* | n \equiv r[k]\} \tag{2.287}$$

$(J_r)_{r\in\{0,\dots,k-1\}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{n\in J_r} \frac{r}{n(n+1)} = 0 \tag{2.288}$$

si $r=0$. Si $r \in \{1,\dots,k-1\}$, on a

$$S_r = r\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)} \tag{2.289}$$

et par sommabilité on a

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n-k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}{n(n+1)} = \sum_{r=1}^{k-1} S_r = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)} \tag{2.290}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On a

$$v_p = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{(kp+r)(kp+r+1)} \tag{2.291}$$
$$= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r+1} \tag{2.292}$$
$$= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=2}^{k} \frac{r-1}{kp+r} \tag{2.293}$$
$$= \frac{1}{kp+1} + \sum_{r=2}^{k-1} \frac{1}{kp+r} - \frac{k-1}{k(p+1)} \tag{2.294}$$
$$= \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{kp+r} - \frac{1}{p+1} \tag{2.295}$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^{N} v_p = \sum_{n=1}^{k(N+1)} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{k(N+1)}{N+1}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) = \ln(k) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{2.296}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(k)} \tag{2.297}$$

4. On a

$$\arctan(u) + \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) \tag{2.298}$$

donc

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(n) \tag{2.299}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}} \tag{2.300}$$

■

Solution 2.24. On a

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = u_1 - n u_{n+1} + \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1} \tag{2.301}$$

Si $(nu_n)_{n\geqslant 1}$, on a donc évidemment d'après ce qui précède

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k} \tag{2.302}$$

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ décroît, $v_n \geqslant 0$ et on a

$$\frac{v_k}{k} = u_k - u_{k+1} \tag{2.303}$$

et donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k,n} \tag{2.304}$$

en définissant $w_{n,k} = \frac{v_k}{k}$ si $k \geqslant n$ et 0 sinon. On a $w_{k,n} \geqslant 0$ car $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable si et seulement si $(w_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ si et seulement si (d'après le théorème de Fubini)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{\sum_{n=1}^{k} \frac{v_k}{k} = v_k} < +\infty \tag{2.305}$$

Et dans ce cas (toujours d'après le théorème de Fubini),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{=\ u_n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{=\ v_k} < +\infty \tag{2.306}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k} \tag{2.307}$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} \tag{2.308}$$

et

$$v_n = \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} - \frac{n}{(n+1)\dots(n+p+1)} = \frac{p+1}{(n+1)\dots(n+p+1)} \tag{2.309}$$

Soit

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1)\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1)\left(S_p - \frac{1}{p!}\right) \qquad (2.310)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}} = \frac{p+1}{p(p!)} \qquad (2.311)$$

■

Solution 2.25. Montrons d'une manière générale que si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ est telle que

$$u_k = \underset{k\to+\infty}{o}(u_{k+1}) \qquad (2.312)$$

, alors $\sum u_k$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

En effet, on a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = +\infty$ et d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_k$ diverge. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$,

$$0 \leqslant \frac{u_k}{u_{k+1}} \leqslant \varepsilon \qquad (2.313)$$

Soit $n \geqslant N$. Pour $k \geqslant N+1$, on a

$$u_k \leqslant \varepsilon u_{k+1} \leqslant \dots \leqslant \varepsilon^{n-k} u_n \qquad (2.314)$$

pour $k \leqslant n-1$.

Alors

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} u_k \leqslant \left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-N-1} u_n\right) \qquad (2.315)$$

On peut supposer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ et alors

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_n \leqslant 2\varepsilon u_n \qquad (2.316)$$

Donc on a bien le résultat voulu.

Pour revenir à l'exercice, on a alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+q)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^q} \qquad (2.317)$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente. Donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}} \tag{2.318}$$

■

Solution 2.26. On a

$$\left|\frac{z^{nb}}{z^{na+c}+1}\right| = \frac{|z|^{nb}}{|1+z^{na+c}|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^{nb} \tag{2.319}$$

car $|z| < 1$. $|z|^{nb}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour n fini, on a

$$\frac{1}{1+z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-z^{na+c})^k \tag{2.320}$$

Montrons donc que $\left(z^{nb}\left((-z^{na+c})^k\right)\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}|z|^{nb}|z|^{k(na+c)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^{nb}}{1-|z|^{na+c}} < +\infty \tag{2.321}$$

d'après ce qui précède. On a sommabilité, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{nb}(-z^{na+c})^k \tag{2.322}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{ck}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n(b+ak)}\right) \tag{2.323}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{ck}}{1-z^{b+ak}} \tag{2.324}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{ck}}{1-z^{b+ak}}} \tag{2.325}$$

■

Solution 2.27. On a

$$b_q = \sum_{n=1}^{q} u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} \tag{2.326}$$

Montrons donc que la famille des $(u_{n,q})_{(n,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}|u_{n,q}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=n}^{+\infty}\frac{n|a_n|}{q(q+1)} \tag{2.327}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|\left(\sum_{q=n}^{+\infty}\frac{1}{q}-\frac{1}{q+1}\right) \tag{2.328}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| < +\infty \tag{2.329}$$

Donc le théorème de Fubini s'applique et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,q} = \sum_{q=1}^{+\infty}b_q = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n \tag{2.330}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{q=1}^{+\infty}b_q = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n} \tag{2.331}$$

■

Solution 2.28. D'après l'exercice précédent, $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n \tag{2.332}$$

On applique l'inégalité de la moyenne géométrique et arithmétique à $(u_1, 2u_2, \dots, nu_n)$:

$$\sqrt[n]{u_1\times 2u_2\times\cdots\times nu_n} = w_n\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{1}{n}(u_1+2u_2+\cdots+nu_n) = (n+1)v_n \tag{2.333}$$

Donc on a

$$w_n \leqslant \frac{(n+1)v_n}{\sqrt[n]{n!}} \tag{2.334}$$

On étudie donc $\sqrt[n]{n!}$:

$$\sqrt[n]{n!} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n!)\right) \tag{2.335}$$
$$= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)\right) \tag{2.336}$$
$$= \exp\left(\frac{1}{n}\left(n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(\pi n) + \ln\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)\right) \tag{2.337}$$
$$= n\exp\left(-1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \tag{2.338}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e} \tag{2.339}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e \tag{2.340}$$

Ainsi, $w_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}} \tag{2.341}$$

Montrons que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant e \tag{2.342}$$

Cela équivaut à $(n+1)^n \leqslant e^n n!$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k \leqslant n! e^n \tag{2.343}$$

ce qui est vrai car pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a $\frac{1}{(n-k)!} \leqslant 1$. Donc $w_n \leqslant e v_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n} \tag{2.344}$$

Pour montrer que e est la meilleure constante possible, on forme pour $N \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,N} = \frac{1}{n}$ si $n \leqslant N$ et 0 sinon. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = H_n < +\infty \tag{2.345}$$

Dans ce cas, on a

$$w_{n,N} = \sqrt[n]{u_{1,N} \dots w_{n,N}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n \tag{2.346}$$

pour $n \leqslant N$ et 0 sinon. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N} = \sum_{n=1}^{N} w_{n,N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n \tag{2.347}$$

En divisant par $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, on a donc

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N}}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N}} = \frac{\sum_{n=1}^{N} v_{n,N} \times \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e \tag{2.348}$$

d'après le théorème de Césaro.

On a trouvé une suite donc la constante C est égale à e. D'après ce qui précède,

$$\boxed{e \text{ est la meilleure constante possible.}} \tag{2.349}$$

■

Remarque 2.6. *Pour la fin de l'exercice précédent, on peut utiliser le fait que $H_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$ et alors*

$$\sum_{n=1}^{N} w_{n,N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{1}{n+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} e \ln(N) \tag{2.350}$$

par le théorème de sommation des relations de comparaison.

Solution 2.29.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$I_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\} \middle| p+q=n\right\} \tag{2.351}$$

On a alors

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n+1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \tag{2.352}$$

$$\boxed{\text{Donc la condition nécessaire et suffisante est } \alpha > 2.} \tag{2.353}$$

Dans ce cas, par le théorème des sommation par paquets, on a

$$\boxed{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1) + \zeta(\alpha)} \tag{2.354}$$

2. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{(p+q)^2}{2} \leqslant p^2+q^2 \leqslant (p+q)^2 \tag{2.355}$$

Pour $\alpha \leqslant 0$, il est clair que l'on a divergence. Pour $\alpha > 0$, on a donc

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \leqslant \frac{2^\alpha}{(p+q)^{2\alpha}} \tag{2.356}$$

$$\boxed{\text{Donc la condition nécessaire et suffisante est } \alpha > 1.} \tag{2.357}$$

d'après le 1.

■

Solution 2.30. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{m+n^2-1} = \frac{1}{n^2} = \Sigma_n \tag{2.358}$$

par téléscopage. $\sum_{n\geqslant 1} \Sigma_n$ converge et

$$\sum_{n\geqslant 1} \Sigma_n = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.359}$$

$$\boxed{\text{Donc } \left(\frac{1}{(m+n^2)\,(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \text{ est sommable et la somme vaut } \frac{\pi^2}{6}.} \tag{2.360}$$

Posons, pour $k \geqslant 1$,

$$I_k = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \middle| m+n^2 = k\right\} \tag{2.361}$$

On a $n^2 \in \{1,\ldots,k\}$ si et seulement si $n \in \left\{1,\ldots,\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor\right\}$ et $(m,n) \in I_k$ si et seulement si $m = k-n^2$.

On a $|I_k| = \left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$ et par sommation par paquets,

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)}} \tag{2.362}$$

■

Remarque 2.7. *Grâce à une transformation d'Abel, on a aussi, pour $N \geqslant 1$,*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k+1} \tag{2.363}$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{N} \underbrace{\frac{\lfloor k \rfloor - \lfloor k-1 \rfloor}{k}}_{\neq 0 \text{ ssi } k=p^2} + \underbrace{\frac{\lfloor N \rfloor}{N+1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} \tag{2.364}$$

et on retrouve le résultat.

Solution 2.31.

1.
$$\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \tag{2.365}$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k\geqslant 1} -\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) \tag{2.366}$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k\geqslant 1} -\ln\left(1 - -\frac{1}{p_k}\right) \tag{2.367}$$

converge si et seulement si (car $-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} p_k > 0$ vu que $p_k \geqslant k$ pour tout $k \geqslant 1$)

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k} \tag{2.368}$$

converge.

Donc

$$\boxed{\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \text{ converge si et seulement si } \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k} \text{ converge.}} \tag{2.369}$$

Fixons alors $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{n_k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{n_k}}\right) \tag{2.370}$$

où la série est à termes positifs et est convergent. Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{p_1^{n_1} \dots p_N^{n_N}}\right)_{n_1,\dots,n_N \in \mathbb{N}^N} \tag{2.371}$$

est sommable et on a

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \sum_{(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{N}^N} \frac{1}{p_1^{n_1}\dots p_N^{n_N}} \tag{2.372}$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{p_{N+1}-1} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty \tag{2.373}$$

car dans la première somme, tous les inverses (et une seule fois) des nombres dont les facteurs premiers sont dans $\{p_1,\dots,p_N\}$ apparaissent.

Donc

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}} \tag{2.374}$$

2. Posons

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \tag{2.375}$$

On a

$$\ln(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{-\ln\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}\right)}_{\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{p_k^s}=\underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^s}\right)} \tag{2.376}$$

car $p_k \geqslant k$. Donc

$$\boxed{(\Pi_n) \text{ converge dans } \mathbb{R}_+^*.} \tag{2.377}$$

Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{(p_1^s)^{j_1}\dots(p_n^s)^{j_n}}\right)_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \tag{2.378}$$

Ainsi, on a

$$\Pi_n = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^s \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \tag{2.379}$$

$$= \zeta(s) \tag{2.380}$$

car dans la première somme, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, chaque k n'apparaît qu'une unique fois. Comme on a

$$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^s} \leqslant \Pi_n \tag{2.381}$$

Donc $\Pi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(s)$ et ainsi

$$\boxed{\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} = \zeta(s)} \tag{2.382}$$

3. Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Si $a > 1$, on a

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^a} \tag{2.383}$$

Donc $\sum \frac{1}{n^z}$ converge absolument. On peut donc prolonger ζ à $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}$.

De même que précédemment, puisque

$$\left|\left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^z\right| = \frac{1}{\left(p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}\right)^a} \tag{2.384}$$

la famille

$$\left(\left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^z\right)_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \tag{2.385}$$

est sommable. On peut aussi développer et

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^z}} = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^z \tag{2.386}$$

On a

$$|\Pi_n - \zeta(z)| = \left|\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^z - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^z}\right| \tag{2.387}$$

$$= \left|\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus J_n} \frac{1}{k^z}\right| \tag{2.388}$$

$$\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus J_n} \frac{1}{k^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{2.389}$$

où l'on a noté $J_n = \{k \geqslant 1 |$ les facteurs premiers de k sont dans $\{p_1, \dots, p_n\}\}$ et où l'on a appliqué l'inégalité triangulaire et le résultat de 2. pour conclure.

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\zeta(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}} \tag{2.390}$$

■

Solution 2.32. Pour $\alpha > 2$, puisque $\varphi(n) \geqslant n$, on a

$$\frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha-1}} \tag{2.391}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour $\alpha = 2$, si $n = p_k$ est premier, on a $\varphi(p_k) = p_k - 1$ et

$$\frac{\varphi(p_k)}{p_k^2} = \frac{p_k - 1}{p_k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_k} \tag{2.392}$$

et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.

De même pour $\alpha < 2$, $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ diverge car $\frac{\varphi(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)$.

Donc

$$\boxed{\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.} \tag{2.393}$$

Pour $\alpha > 1$, on calcule

$$S = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^\alpha} \times \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_2^\alpha} = \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2} \frac{\varphi(n_1)}{(n_1 n_2)^\alpha} \tag{2.394}$$

ce qui est légitime car il s'agit de deux séries à termes positifs convergentes. Soit, pour $n \geqslant 1$, $D_n = \left\{(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \middle| n = n_1 n_2\right\}$. Par sommation par paquets, on a,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(n_1,n_2)\in D_n} \frac{\varphi(n_1)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{n_1 | n} \varphi(n_1) \right) \tag{2.395}$$

et grâce à la formule d'Euler-Möbius, on a

$$\sum_{n_1|n} \varphi(n_1) = n \tag{2.396}$$

Ainsi, $S = \zeta(\alpha - 1)$ et donc

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}} \tag{2.397}$$

■

Solution 2.33. Soit $A \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. S'il y a n indices $k \in \mathbb{N}$ tels que $z_k \in B(A,R)$, alors pour ces indices k, on a $B(z_k, \frac{1}{2}) \subset B(A, R+\frac{1}{2})$. Donc (faire un dessin !), on a

$$n\frac{\pi}{4} \leqslant \pi\left(R+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.398}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{i \in \mathbb{N} | z_i \in B(0,n)\}$. De l'inégalité précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est fini. Il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective qui permet d'ordonner les z_n par module croissante et à même module par indice croissant.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $R = \left|z_{\sigma(n)}\right|$, on a pour tout $k \leqslant n$, $z_{\sigma(k)} \in B(0,R)$.

Donc

$$n\frac{\pi}{4} \leqslant \pi\left(\left|z_{\sigma(n)}\right|+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.399}$$

d'où

$$\left|z_{\sigma(n)}\right| \geqslant \left|z_{\sigma(n)}+\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \tag{2.400}$$

Donc

$$\left|\frac{1}{z_{\sigma(n)}}\right|^3 = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.401}$$

Donc

$$\boxed{\sum \frac{1}{z_{\sigma(n)}^3} \text{ est absolument convergente.}} \tag{2.402}$$

■

Solution 2.34. On a $k = \lfloor n \rfloor$ si et seulement si $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$. Il y a $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ entiers.

Posons

$$B_p = \sum_{n=1}^{p} (-1)^{\lfloor n \rfloor} \tag{2.403}$$

et $B_{-1} = 0$. Si $k^2 \leqslant p \leqslant (k+1)^2$, on a

$$B_p = \underbrace{B_k^2}_{\text{signe de } (-1)^k} + (-1)^k \underbrace{(p-k)^2}_{|\cdot| \leqslant 2k+1} \tag{2.404}$$

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|B_p| \leqslant 2\lfloor p \rfloor + 1 \tag{2.405}$$

Donc avec une transformation d'Abel, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(B_n - B_{n-1})}{n} \tag{2.406}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{B_n}{n+1} \tag{2.407}$$

$$= \underbrace{\frac{B_N}{N}}_{= \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} - B_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{n(n+1)}}_{= \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} \tag{2.408}$$

D'après le critère de Riemann, la dernière somme converge absolument et donc

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} \text{ converge.}} \tag{2.409}$$

■

Solution 2.35.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n u_{n+1} > 0$. On a

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{N_0}}\right) = \sum_{k=N_0+1}^{n} \ln\left(\frac{a+k}{n+k}\right) = \sum_{k=N_0+1} \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{k}\right) \tag{2.410}$$

Alors

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{N_0}}\right) = \sum_{k=N_0+1}^{n} \frac{a-b}{k} + \underbrace{\underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{\text{terme général d'une série convergente}} = (a-b)\ln(n) + \underbrace{C}_{\in\mathbb{R}} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{2.411}$$

Ainsi,

$$u_n = u_{N_0} n^{a-b} \underbrace{k^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}}_{>0} \underset{n\to+\infty}{\sim} U_{N_0} n^{a-b} k \tag{2.412}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a>1} \tag{2.413}$$

2. On a

$$u_{n+1}(b+n+1) = u_n(a+n+1) \tag{2.414}$$

donc

$$(a+1)u_n = bu_{n+1} + (n+1)u_{n+1} - nu_n \tag{2.415}$$

En sommant sur $\mathbb{N}$, on a

$$(a+1)\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = b\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + u_1 = b\sum_{n=1}^{+\infty} + \underbrace{u_1 - bu_0}_{=\frac{a(a+1)}{b(b+1)}-a} \tag{2.416}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{a\left(a+1-b\left(b+1\right)\right)}{b\left(b+1\right)\left(a+1-b\right)} = a\left(\frac{1}{b(b+1)} - \frac{b}{(b+1)(a+1-b)}\right)} \tag{2.417}$$

3. Pour $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$, on a

$$\boxed{u_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} = \frac{-\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}}{(n+1)!} = -\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)}\binom{2n}{n}} \tag{2.418}$$

■

Solution 2.36.

1. u_n est une série à termes positifs et

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \tag{2.419}$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \tag{2.420}$$

$\sum v_n$ est une série alternée. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et en formant

$$\begin{array}{rccl} f: & [2,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array} \tag{2.421}$$

On a $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ qui est négatif dès que $x > e$. Donc $(v_n)_{n\geqslant 3}$ décroît. D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}} \tag{2.422}$$

2. f décroît sur $[, +\infty[$ donc pour tout $k \geqslant 4$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x} dx \tag{2.423}$$

d'où

$$\underbrace{\int_4^{N+1} \frac{\ln(x)}{x} dx}_{= \frac{1}{2}\left[\ln^2(N+1) - \ln^2(4)\right]} \leqslant \sum_{k=4}^{N} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \underbrace{\int_3^{N} \frac{\ln(x)}{x} dx}_{= \frac{1}{2}\left[\ln^2(N) - \ln^2(3)\right]} \tag{2.424}$$

Donc

$$\boxed{S_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2(N)} \tag{2.425}$$

Formons $w_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n - w_{n-1}$ converge. On a

$$w_n - w_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln^2(n-1)}{2} \tag{2.426}$$

On a

$$\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln(n) - \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{2.427}$$

et

$$\ln^2(n-1) = \ln^2(n) - \frac{2\ln(n)}{n} + \underbrace{\underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} \tag{2.428}$$

Donc

$$w_n - w_{n-1} = \underbrace{\underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{\text{terme général d'une série absolument convergente}} \tag{2.429}$$

Donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + L + \underset{n \to +\infty}{o}(1)} \tag{2.430}$$

3. On a

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(2k)}{2k}}_{= I_N} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}_{= J_N} \tag{2.431}$$

Donc

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = I_N - (S_{2N} - I_N) \tag{2.432}$$

On a

$$S_{2N} = \frac{\ln^2(2N)}{2} + L + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{\ln^2(2)}{2} + \frac{\ln^2(N)}{2} + \ln(2)\ln(N) + L + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \quad (2.433)$$

De plus,

$$I_N = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(2)}{2k}}_{=\frac{\ln(2)}{2}\left(\ln(N)+\gamma+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\right)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2k}}_{=\frac{1}{2}S_N=\frac{\ln^2(N)}{4}+\frac{L}{2}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)} \quad (2.434)$$

Finalement, on a bien

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = 2I_n - S_{2N} \quad (2.435)$$

$$= \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \quad (2.436)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2}} \quad (2.437)$$

■

Solution 2.37. Si $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_{n+1} = 10^{\alpha_n - 1}$. Alors $q_1(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$, $q_k(\alpha_n) = \alpha_{n-k}$, $q_n(\alpha_n) = 2$ et $q_{n+1}(\alpha_n) = 1$.

Si $k < \alpha_n$, $q_n(k) = 1$. Soit

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} u_k \quad (2.438)$$

Comme c'est une série à termes positifs, $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge si et seulement $\sum_{n\geqslant 0} S_n$ converge.

Par définition, pour tout $k \in \{\alpha_n, \dots, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a $q_{n+1}(k) = 1$ et pour tout $p \geqslant n+1$, $q_p(k) = 1$. Donc

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{kq_1(k)\dots\underbrace{q_n(k)}_{\geqslant 2}} \quad (2.439)$$

Posons

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \log_{10}(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(10)} \end{array} \quad (2.440)$$

Il vient $q_1(t) = \lfloor f(t) \rfloor + 1 > f(t)$. Par récurrence, on a

$$q_n(t) \geqslant f^n(t) \tag{2.441}$$

défini pour $t \geqslant \alpha_n$. On a donc

$$S_n \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k(f(k))\dots f^n(k)} \tag{2.442}$$

On forme

$$\begin{array}{rccc} g_n: & [\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1 & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{tf(t)\dots f^n(t)} \end{array} \tag{2.443}$$

qui est décroissante. Ainsi, pour tout $k \in \{\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a

$$\int_k^{k+1} g_n(t) \leqslant u_k \leqslant \int_{k-1}^k g_n(t) \tag{2.444}$$

d'où en faisant le changement de variables $u = \log_{10}(t)$, on a

$$\int_{\alpha_{n-1}-1}^{\alpha_n-1} g_{n-1}(u)du(\ln(10)) \leqslant S_n \leqslant \int_{\alpha_n-1}^{\alpha_{n+1}-1} g_n(t)dt \tag{2.445}$$

On obtient donc une minoration par $C \times (\ln(10))^n$ donc

$$\boxed{\text{la série diverge.}} \tag{2.446}$$

■

Solution 2.38.

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_0 = 1 > 0$ et $P_1(x) = 1 + x$ s'annule en -1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat au rang n. On a $P'_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$, par hypothèse P_{2n+1} s'annule uniquement en $\alpha_{2n+1} < 0$. Donc $P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) = \frac{(\alpha_{2n+1})^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$ donc $P_{2n+2} > 0$. Comme $P'_{2n+3} = P_{2n+2} > 0$ donc P_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P_{2n+3} = \pm\infty$. Donc il existe un unique $\alpha_{2n+3} \in \mathbb{R}$ tel que $P_{2n+3}(\alpha_{2n+3}) = 0$. Comme $P_{2n+3}(0) = 1 \geqslant 1$, $\alpha_{2n+3} < 0$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}} \tag{2.447}$$

2. Soit $x<0$, on a $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = e^x > 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $P_{2n+1}(x) > 0$. En particulier, $\alpha_{2n+1} < x$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_{2n+1} = -\infty} \tag{2.448}$$

■

Solution 2.39. On pose $f_n(x) = e^x - x - n$, on a $f_n'(x) = e^x - 1$. Donc $x_1 = 0$ et ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \exists! x_n \geqslant 0 \colon e^{x_n} = x_n + n} \tag{2.449}$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -1 < 0$ donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0$ et $x_n < x_{n+1}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, de plus $e^{x_n} = x_n + n \geqslant n$ donc $x_n \geqslant \ln(n)$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty} \tag{2.450}$$

De plus, $x_n = \ln(x_n + n)$ et $f_n(n) = e^n - 2n > 0$ (par récurrence), donc $x_n < n$ par stricte croissante de f_n donc

$$x_n = \ln(x_n + n) \leqslant \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2) \tag{2.451}$$

Ainsi, $x_n = \underset{n\to+\infty}{O}(\ln(n))$. En reportant, on a

$$x_n = \ln(n + \underset{n\to+\infty}{O}(\ln(n))) = \ln(n) + \ln(1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{2.452}$$

donc

$$\boxed{n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)} \tag{2.453}$$

En reportant, on a

$$\boxed{x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \tag{2.454}$$

■

Solution 2.40.

1. Si $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \in \mathbb{R}_+^+$, on a

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{S^\alpha} \tag{2.455}$$

Comme u_n est le terme générale d'une série convergente donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}} \tag{2.456}$$

2. On a $\alpha = 1$ donc $v_n = \frac{u_n}{S_n}$, soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i = \sum_{i=1}^{n+p} \frac{u_i}{S_i} \tag{2.457}$$

où $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $i \in \{n+1, n+p\}$, $S_i \leqslant S_{n+p}$ donc

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geqslant \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i = \frac{1}{S_{n+p}} (S_{n+p} - S_n) = 1 - \frac{S_n}{S_{p+n}} \tag{2.458}$$

et ainsi,

$$\boxed{\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}} \tag{2.459}$$

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour n fixé, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} S_{n+p} = +\infty$ (car $\sum u_n$ diverge). Donc lorsque $p \to +\infty$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i \geqslant 1 \tag{2.460}$$

ce qui est absurde puisque la limite en $+\infty$ du reste est 0. Ainsi,

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}} \tag{2.461}$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et

$$v_n = \frac{1}{\alpha - 1} \left(S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha} \right) \tag{2.462}$$

avec $(S_n^{1-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc $\sum w_n$ est une série téléscopique convergente. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, on a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant w_n \leqslant \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha} \tag{2.463}$$

car $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $\sum w_n$ converge,

$$\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge.}} \tag{2.464}$$

Si $\alpha < 1$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n^{\alpha-1} = 0$,

$$\frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{u_n}{S_n^\alpha}\right) \tag{2.465}$$

donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}} \tag{2.466}$$

4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ par convergence et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et de plus $u_n = R_n - R_{n+1}$. On pose

$$\alpha_n = \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(R_{n+1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right) \tag{2.467}$$

si $\alpha \neq 1$.

Si $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n^{1-\alpha} = 0$ donc $\sum \alpha_n$ est une série téléscopique convergente et de même que précédemment, on a

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} \leqslant \alpha_n \tag{2.468}$$

donc $w_n \leqslant \alpha_n$ et

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}} \tag{2.469}$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$\alpha_n = \ln(R_n) - \ln(R_{n+1}) \tag{2.470}$$

où $\ln(R_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Donc $\sum \alpha_n$ est une série téléscopique divergente. De plus

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n} = 1 - \frac{R_{n+1}}{R_n} \tag{2.471}$$

donc

$$\ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n}{R_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n}{R_n} \tag{2.472}$$

On a donc

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n \tag{2.473}$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}} \tag{2.474}$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{u_n}{R_n^\alpha}\right) \tag{2.475}$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}} \tag{2.476}$$

■

Solution 2.41.

1. Pour tout $x \in [0, 1[$ il existe un unique $q_x \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $x \in [\frac{q_x}{n}, \frac{q_x+1}{n}]$ avec $q_x = \lfloor nx \rfloor$ et

$$\begin{aligned} h : \quad \{0, \dots, n\} &\to \{0, \dots, n-1\} \\ k \quad &\mapsto q_{x_k} = \lfloor nx_k \rfloor \end{aligned} \tag{2.477}$$

n'est pas injective donc il existe $k > k'$ tel que $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$ avec $(k, k') \in \{0, \dots, n\}^2$ d'où

$$|kx - \lfloor kx \rfloor - (k'x - \lfloor k'x \rfloor)| < \frac{1}{n} \tag{2.478}$$

d'où

$$|(k - k')x - p| < \frac{1}{n} \tag{2.479}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$ et pour $q = (k - k') \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\boxed{\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}} \tag{2.480}$$

2. D'après ce qui précède, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n} \leqslant \frac{1}{q_n^2} \tag{2.481}$$

car $n \geqslant q_n$. Donc

$$\boxed{\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}} \tag{2.482}$$

On a donc $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si q_n ne tend pas vers $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n > N$ avec $q_n < A$. Donc $\{n \in \mathbb{N} | q_n < A\}$ est infini : on peut extraire $(q_{\sigma(n)})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q_{\sigma(n)} < A$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire $(q_{\varphi(n)})$ qui converge vers $q \in \mathbb{R}$. Notons que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang donc $q \in \mathbb{N}^*$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{\varphi(n)} = \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} q_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha q$. $(p_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers relatifs stationnaire, donc $\alpha q \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty} \tag{2.483}$$

3. On sait qu'il existe $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante telle que $\sin(\sigma(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sigma(n)\sin(\sigma(n))} = 0 \tag{2.484}$$

donc si la suite converge, alors elle converge vers 0.

Appliquons ce qui précède à $\alpha = \frac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0$ et

$$\left|\frac{1}{\pi} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \tag{2.485}$$

Alors

$$|q_n - \pi p_n| < \frac{\pi}{q_n} \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{2.486}$$

pour n suffisamment grand. Quitte à extraire, on peut supposer que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a

$$|\sin(x)| = |\sin(q_n - \pi q_n)| \tag{2.487}$$

donc

$$|\sin(q_n)| \leqslant \left|\sin\left(\frac{\pi}{q_n}\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{q_n} \tag{2.488}$$

car sin est croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Donc

$$\underbrace{\frac{1}{|q_n \sin(q_n)|}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \geqslant \frac{1}{\pi} \tag{2.489}$$

ce qui est absurde.

Donc

$$\boxed{\left(\frac{1}{n\sin(n)}\right)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas.}} \tag{2.490}$$

■

Solution 2.42.

1. On a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| = \left|\sum_{p=1}^{n} (a_{n,p} - a_p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p\right| =\leqslant \sum_{p=1}^{n} |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=n+1}^{+\infty} |a_p| \quad (2.491)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geqslant N$, on a

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{n,p} - a_p| = \sum_{p=1}^{N} |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=N+1}^{n} |a_{n,p} - a_p| \quad (2.492)$$

Pour p fixé, on a $|a_p| \leqslant b_p$ donc

$$\sum_{p=N+1}^{n} |a_{n,p} - a_p| \leqslant 2 \sum_{p=N+1}^{n} b_p \quad (2.493)$$

Ainsi,

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| \leqslant \sum_{p=1}^{N} |a_{n,p} - a_p| + 3 \sum_{p=N+1}^{+\infty} b_p \quad (2.494)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ converge, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$3 \sum_{p=N_1+1}^{+\infty} b_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.495)$$

donc pour tout $n \geqslant N_1$, on a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| \quad (2.496)$$

N_1 étant fixé, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on a

$$\sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.497)$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| = 0 \quad (2.498)$$

Donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| < \varepsilon \quad (2.499)$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}a_{n,p}=\sum_{p=1}^{+\infty}a_p} \tag{2.500}$$

2. On fixe $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{p}{n}\right)^n=e^{-p} \tag{2.501}$$

Pour $x\geqslant -1$, on a $\ln(1+x)\leqslant x$ donc $\ln\left(1-\frac{p}{n}\right)\leqslant -\frac{p}{n}$ et $a_{n,p}=e^{n\ln\left(1-\frac{p}{n}\right)}\leqslant e^{-p}=b_p$ Donc d'après ce qui précède,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)}=\frac{1}{e-1}} \tag{2.502}$$

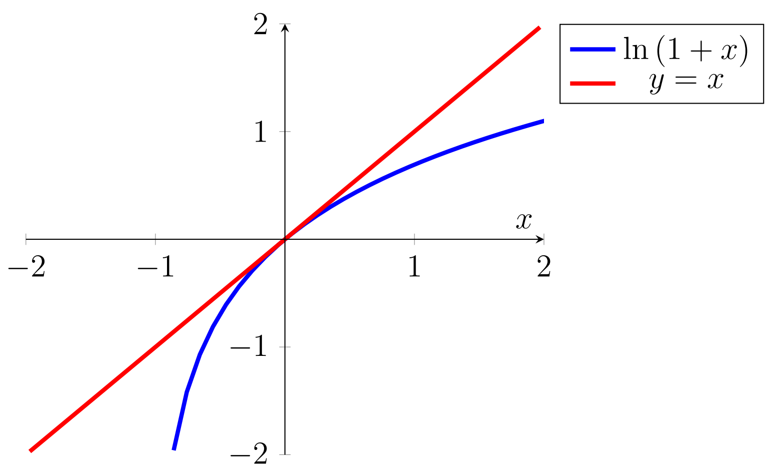

FIGURE 7 – $\ln(1+x)\leqslant x$ pour $x>-1$.

■

Remarque 2.8. *C'est faux si on n'a pas l'hypothèse (ii). Par exemple,*

$$a_{n,p}=\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \tag{2.503}$$

pour p fixé mais

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty \tag{2.504}$$

Solution 2.43.

1. Pour tout $k \geqslant 1$, $(u_{kn})_{n\geqslant 1}$ est une sous-famille de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sommable, donc $(u_{kn})_{n\geqslant 1}$ est sommable.

$$\boxed{\text{Donc } S_k \text{ existe.}} \tag{2.505}$$

2. On a

$$\begin{cases} S_1 - S_2 & = & u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} + \dots & = & 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 + S_6 & = & u_1 + u_5 + u_7 + u_{11} + \dots & = & 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 - S_5 + S_6 + S_{10} + S_{15} - S_{10} & = & u_1 + u_7 + u_{11} + \dots & = & 0 \end{cases} \tag{2.506}$$

A la première ligne on enlève les multiples de 2, à la deuxième ligne on enlève les multiples de 2 et 3, à la troisième ligne on enlève les multiples de 2, 3 et 5. Et ainsi de suite.

Soient donc $p_1, \dots, p_N$ les N premiers nombres premiers. On a

$$0 = \sum_{k=1}^{p_1 \dots p_N} \mu(k) S_k = \sum_{k \in \left\{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \middle| (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\right\}} \mu(k) S_k \tag{2.507}$$

où si $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $\mu(k) = 0$ s'il existe $\alpha_i \geqslant 2$ et $\mu\left(p_{i_1} \dots p_{i_s}\right) = (-1)^s$ sinon (fonction de Möbius).

Soit $n = p_1^{\beta_1} \dots p_N^{\beta_N}$. On cherche le coefficient en u_n dans la somme. Si $n = 1$, c'est 1. Si $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0 \tag{2.508}$$

donc

$$\sum_{k \in \left\{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \middle| (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\right\}} \mu(k) S_k = u_1 + \alpha_N \tag{2.509}$$

avec

$$\alpha_N = \sum_{k \in B_N} u_k \tag{2.510}$$

où $B_N \subset \mathbb{N}^*$ est tel que $\min\left(B_N\right) = p_{N+1}$. On a

$$|\alpha_N| \leqslant \sum_{k \geqslant p_{N+1}} |u_k| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \tag{2.511}$$

car c'est le reste de $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$ convergente.

Donc $u_1 + \alpha_N = 0 \xrightarrow[N \to +\infty]{} u_1$ donc $u_1 = 0$.

Avec $u_1 = 0$,

$$\begin{cases} S_n & = & u_n + u_{2n} + u_{3n} + \dots & = & 0 \\ S_{2n} & = & u_{2n} + u_{4n} + u_{6n} + \dots & = & 0 \end{cases} \tag{2.512}$$

et en recommençant avec u_n pour tout $n \geqslant 1$, on obtient bien

$$\boxed{u_n = 0} \tag{2.513}$$

■

Solution 2.44.

1. On prend $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum u_n = 0$ converge donc $\sum f(u_n) = \sum f(0)$ converge. Donc

$$\boxed{f(0) = 0} \tag{2.514}$$

Supposons que f n'est pas continue en 0. Alors il existe $\varepsilon_0 >$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [-\alpha, \alpha] : |f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Pour $\alpha \equiv \alpha_n = \frac{1}{n^2}$, il existe $x_n \in \left[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right] : |f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$. $\sum x_n$ converge absolument mais $\sum f(x_n)$ diverge grossièrement ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{f est continue en 0.}} \tag{2.515}$$

2. Supposons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]-\alpha, \alpha[: f(-x) \neq -f(x)$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ telle que $f(-x_n) + f(x_n) \neq 0$. Il existe $N_n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$N_n |f(-x_n) + f(x_n)| \geqslant 1 \tag{2.516}$$

(il suffit de prendre $N_n = \left\lfloor \frac{1}{|f(x_n)+f(-x_n)|} \right\rfloor + 1$)

On définit

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots, \dots, x_n, -x_n, \dots, \dots) \tag{2.517}$$

où $(x_n, -x_n)$ apparaît N_n fois. On a $\sum_{k=0}^{2N} u_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{2N+1} u_k = x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\sum u_n$ converge.

Si $\sum f(u_n)$ convergeait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ alors

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(x_k) \right| < \frac{1}{2} \tag{2.518}$$

De plus, pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \cdots + f(x_n) + f(-x_n) + f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2} \tag{2.519}$$

où $(f(x_n), f(-x_n))$ apparaît N_n fois. Comme

$$|f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2} \tag{2.520}$$

on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \cdots + f(x_n) + f(-x_n)| = N_n |f(x_n) + f(-x_n)| < 1 \tag{2.521}$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc f est impaire au voisinage de 0.}} \tag{2.522}$$

3. Supposons que pour tout $\beta > 0$, il existe $(x, y) \in]-\beta, \beta[^2$ avec $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$. Alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_n \in \mathbb{N}$,

$$M_n |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \geqslant 1 \tag{2.523}$$

On définit alors

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_n + y_n, -x_n, -y_n, \dots) \tag{2.524}$$

où $(x_n + y_n, -x_n, -y_n)$ apparaît M_n fois. On a

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } N \equiv 0[3] \\ x_n + y_n & \text{si } N \equiv 1[3] \\ y_n & \text{si } N \equiv 2[3] \end{cases} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \tag{2.525}$$

donc $\sum u_n$ converge.

Si $\sum f(u_n)$ convergeait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(u_k)\right| < \frac{1}{2} \tag{2.526}$$

De plus, d'après 2., il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on a $f(-x_n) + f(-y_n) = -f(x_n) - f(y_n)$ donc pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a

$$|f(x_n + y_n) + f(-x_n) + f(-y_n)| \times M_n = |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \times M_n < 1 \quad (2.527)$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc f est linéaire au voisinage de 0.}} \quad (2.528)$$

4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*, x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant \frac{\beta}{|k|}$. Par récurrence, on a $f(kx) = kf(x)$.

   Si $|x| < \beta$ et si $\frac{x}{\beta} \in \mathbb{Q}$, on a

$$\frac{x}{\frac{\beta}{2}} = \frac{p}{q} \quad (2.529)$$

   donc en posant $\lambda = \frac{2}{\beta} f\left(\frac{\beta}{2}\right)$, on a

$$f(x) = f\left(\frac{p\beta}{2q}\right) = \frac{p}{q} f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{p}{q}\frac{\beta}{2}\lambda = \lambda x \quad (2.530)$$

   Si $\frac{x}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{x}{\frac{\beta}{2}}$. On a alors

$$f(x) = f\left(\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + r_n\frac{\beta}{2}\right) \quad (2.531)$$

$$= f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + f\left(\frac{r_n\beta}{2}\right) \quad (2.532)$$

   et $x - \frac{r_n\beta}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après 1. et $r_n f\left(\frac{\beta}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x$

$$\boxed{\text{Donc f est une homothétie au voisinage de 0.}} \quad (2.533)$$

■

3 Probabilités sur un univers dénombrable

Solution 3.1.

1. On note P :'le lancer initial donne pile', F :'le lancer initial donne face', B_k :'la k-ième boule est blanche', N_k :'la k-ième boule est noire'.

   On a
   $$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(P)\,\mathbb{P}_P(B_k) + \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}_F(B_k) = \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} \tag{3.1}$$
   donc
   $$\boxed{\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

2. On a
   $$\boxed{\mathbb{P}_{B_k}(P) = \mathbb{P}_P(B_k)\frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(B_k)} = \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1} \tag{3.3}$$

3. On a
   $$\mathbb{P}\left(B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_k\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_P\left(B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_k\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_F\left(B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_k\right) \tag{3.4}$$
   $$= \frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{j}{j+1} + \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right) \tag{3.5}$$
   $$\boxed{= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\right)} \tag{3.6}$$

4. On a
   $$\mathbb{P}\left(B_k \bigcap B_{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} + \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{k+2}\right) \tag{3.7}$$
   $$= \frac{1}{2}\left(\frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)}\right) \tag{3.8}$$

   Donc on a indépendance si et seulement si
   $$\mathbb{P}\left(B_k \bigcap B_{k+1}\right) = \mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}(B_{k+1}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \tag{3.9}$$
   $$\Leftrightarrow 2k(k+1) + 2 = (k+2)(k+2) \tag{3.10}$$
   $$\Leftrightarrow 2k^2 + 2k = k^2 + 3k \tag{3.11}$$
   $$\Leftrightarrow \boxed{k = 1} \tag{3.12}$$

   Ainsi, seuls les deux premiers tirages sont indépendants.

■

Remarque 3.1. *Seuls les deux premiers tirages sont indépendants car le premier tirage est indépendant du lancer de pièce.*

Solution 3.2.

1.
$$\boxed{p_0 = 1, q_0 = 0, p_N = 0, q_N = 1} \tag{3.13}$$

2. Soit $a \in [\![1, N-1]\!]$. Puisque les lancers de pièce sont indépendants, on peut partitionner selon le résultat du premier lancer. On a donc [probabilités conditionnelles]

$$\boxed{p_a = p \times p_{a+1} + q \times p_{a-1}} \tag{3.14}$$

L'équation caractéristique est

$$pX^2 - x + q = 0 \tag{3.15}$$

On a $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4(1-p)p = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$.

Ainsi, si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $a \in [\![0, N]\!]$, on a

$$p_a = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^a \tag{3.16}$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \times \left(\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right)} \tag{3.17}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$p_a = \alpha a + \beta \tag{3.18}$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{N}(N-a)} \tag{3.19}$$

3. Pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$q_a = pq_{a+1} + qp_{a-1} \tag{3.20}$$

donc pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$p_a + q_a = p\left(p_{a+1} + q_{a+1}\right) + q\left(p_{a-1} + q_{a-1}\right) \tag{3.21}$$

Comme $p_0 + q_0 = p_N + q_N = 1$, on a pour tout $a \in [\![0, N]\!]$,

$$\boxed{p_a + q_a = 1} \tag{3.22}$$

Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement en temps fini.

■

Solution 3.3.

1. Les tirs sont indépendants donc

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(A_n\right) = (1-a)^n \times (1-b)^n \times a \\ &\mathbb{P}\left(B_n\right) = (1-a)^n \times (1-b)^n \times (1-a) \times b \end{aligned}} \tag{3.23}$$

2. On a

$$G_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \tag{3.24}$$

réunion disjointe. Donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{P}\left(G_A\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab} \\ \mathbb{P}\left(G_B\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \frac{b(1-a)}{a+b-ab} \end{array}} \tag{3.25}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(G_A\right) + \mathbb{P}\left(G_B\right) = 1} \tag{3.26}$$

3. On a $\mathbb{P}\left(G_A\right) = \mathbb{P}\left(G_B\right)$ si et seulement si

$$\frac{a}{1-a} = b \tag{3.27}$$

Cela implique que $\frac{a}{1-a} \in]0, 1[$ ce qui est possible uniquement (après étude de fonction) si

$$\boxed{a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } b = \frac{a}{1-a}} \tag{3.28}$$

■

Solution 3.4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose E_n :'Le joueur gagne au bout du n-ième lancer' (évènement disjoints) et G :'Le joueur gagne'. On a $G \cup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$. Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{n} = \ln(2)} \tag{3.29}$$

2. On note P_n :'le joueur obtient pile au n-ième lancer', P :'il obtient pile'. On a

$$\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\mathbb{P}(G \bigcap P_n)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}_{P_n}(G) \times \mathbb{P}(P_n)}{\mathbb{P}(G)} \tag{3.30}$$

   donc

$$\boxed{\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\ln(2)}} \tag{3.31}$$

   Puis

$$\boxed{\mathbb{P}_G(P) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}_G(P_n) = 1} \tag{3.32}$$

■

Remarque 3.2. *On a utilisé le résultat suivant : pour tout $x \in]0,1[$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \tag{3.33}$$

Soit on connaît le résultat avec les séries entières, soit on le redémontre à la main : pour $N \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} x^n t^{n-1} dt \tag{3.34}$$

$$= x\int_0^1 \frac{1-(xt)^N}{1-xt} dt \tag{3.35}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1-xt} dt}_{=[\ln(1-xt)]_0^1} + R_N \tag{3.36}$$

avec $|R_N| \leqslant \frac{x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ d'où le résultat.

Solution 3.5.

1. On a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 + p_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} = 2\alpha + (1-2\alpha) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{3.37}$$
donc
$$\boxed{\text{c'est une probabilité sur } \mathbb{N}.} \tag{3.38}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note E_k :'la famille a k enfants et exactement 2 garçons', E :'la famille a exactement 2 garçons', A_k :'la famille a k enfants'.

   On a alors
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(E_k) \times \mathbb{P}(A_k) \tag{3.39}$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \binom{k}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times p_k \tag{3.40}$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k+1}} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \tag{3.41}$$
$$= (1-2\alpha) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{2k}} \tag{3.42}$$
$$= (1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{2k+4}} \tag{3.43}$$
$$= \frac{1}{16}(1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{4^k} = \frac{1}{16}(1-2\alpha) \times \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} \tag{3.44}$$
$$\boxed{= \frac{4(1-2\alpha)}{27}} \tag{3.45}$$

3. On note F :'la famille a au moins 2 filles', F_k :'la famille a exactement k filles et au moins 4 enfants', G :'la famille a au moins 2 garçons', G_k :'la famille a exactement k garçons et au moins 4 enfants'.

   On a
$$\mathbb{P}_G(G) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} \tag{3.46}$$
   et $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G} = F_0 \cup F_1 \cup G_0 \cup G_1$. Donc, comme $\mathbb{P}(F_0) = \mathbb{P}(G_0)$ et $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(G_1)$, on a $\mathbb{P}(F \cap G) = 1 - 2(\mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1))$.

On a alors

$$\mathbb{P}(G_0) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{3.47}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{2k-1}} \tag{3.48}$$

$$= 2(1-2\alpha)\frac{1}{4^4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \tag{3.49}$$

$$= 2(1-2\alpha) \times \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{3} \tag{3.50}$$

et

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{3.51}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} k \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \tag{3.52}$$

$$= (1-2\alpha) \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{2^{2k-1}} \tag{3.53}$$

$$= (1-2\alpha) \times \frac{2}{4} \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{4^{k-1}} \tag{3.54}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k+1}{4^k} \tag{3.55}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} - 1 - \frac{2}{4} - \frac{3}{4^2} \right) \tag{3.56}$$

et on calcule enfin

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(G_0) - \mathbb{P}(G_1)} \tag{3.57}$$

■

Solution 3.6. Pour tout $k \geqslant 1$, on note A_k :'A gagne à son lancé k' et B_k de manière équivalente pour le joueur B. On note G_A :'A gagne' et de même pour B. On a ainsi

$$G_A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k \tag{3.58}$$

(réunion disjointe) et pareil pour G_B. On a

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} \tag{3.59}$$

d'où

$$\mathbb{P}(G_A) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{5}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)} \tag{3.60}$$

et pareil

$$\boxed{\mathbb{P}(G_B) = \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{5}{36}\right) \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{5}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)} > \mathbb{P}(G_A)} \tag{3.61}$$

et

$$\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) = 1 \tag{3.62}$$

donc $G_A \cup G_B$ est presque sur. ■

Solution 3.7. Soit $k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$. La probabilité que l'on tire $2k$ boules blanches est (loi binomiale) :

$$\binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{3.63}$$

donc la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit pair est

$$\mathbb{P}_P = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{3.64}$$

De même, la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit impair est

$$\mathbb{P}_I = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k+1} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k-1} \tag{3.65}$$

On a alors

$$\mathbb{P}_P + \mathbb{P}_I = 1 \tag{3.66}$$

et

$$\mathbb{P}_P - \mathbb{P}_I = \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} (-1)^{k'} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k'} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k'} = \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n} \tag{3.67}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}_P = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n}\right)} \tag{3.68}$$

■

Remarque 3.3. *Si on note $\mathbb{P}_3$ la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit multiple de 3 :*

$$\mathbb{P}_3 = \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} \binom{n}{3k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{3k} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-3k} \tag{3.69}$$

On note $\mathbb{P}_2$ la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit congru à 2 module 3, et on définit $\mathbb{P}_1$ de même. Alors on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 & = & 1 \\ \mathrm{j}\mathbb{P}_1 + \mathrm{j}^2\mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 & = & \left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n \\ \mathrm{j}^2\mathbb{P}_1 + \mathrm{j}\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_3 & = & \left(\frac{b+\mathrm{j}^2 a}{a+b}\right)^n \end{cases} \tag{3.70}$$

et donc

$$\mathbb{P}_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n + \left(\frac{b+\mathrm{j}^2 a}{a+b}\right)^n\right) \tag{3.71}$$

Solution 3.8. Soit pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$A_i = \{\sigma \in \Sigma_n | \sigma(i) = i\} \tag{3.72}$$

$$A = \{\sigma \in \Sigma_n | \sigma \text{ a un point fixe}\} \tag{3.73}$$

On a

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{3.74}$$

On a

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!] \\ |J|=k}} \left|\bigcap_{i\in J} A_i\right| \tag{3.75}$$

Il y a $\binom{n}{k}$ tels J, et on a

$$\left|\bigcap_{i\in J} A_i\right| = |\{\sigma \in \Sigma_n | \forall i \in J, \sigma(i) = i\}| = (n-k)! \tag{3.76}$$

Ainsi,

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! \tag{3.77}$$

donc

$$\boxed{p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = -\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 1 - \frac{1}{e}} \tag{3.78}$$

■

Solution 3.9.

1.
$$\boxed{p_N(0) = 0, p_N(1) = 1} \tag{3.79}$$

2. Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$p_N(n) = p \times p_N(n+1) + (1-n) \times p_N(n-1) \tag{3.80}$$

et l'équation caractéristique est $X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{1-p}{p}$ et le discriminant vaut $\Delta = \left(\frac{1}{p} - 2\right)^2 \geqslant 0$. Donc les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{q}{p}$. Ainsi, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,

$$p_N(n) = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^n \tag{3.81}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Avec les conditions initiales, on trouve

$$\begin{cases} \mu & = & \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ \lambda & = & \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases} \tag{3.82}$$

donc

$$\boxed{p_N(n) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \text{ i.e. } p < \frac{1}{2} \\ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n & \text{si } q < p \text{ i.e. } p > \frac{1}{2} \end{cases}} \tag{3.83}$$

On vérifie d'ailleurs que l'arrêt en temps fini est presque sûr : $p_N(n) + q_N(n) = 1$ (utiliser la relation de récurrence et les conditions initiales).

■

Solution 3.10.

1. On note A_n :'la première boule blanche apparaît au n-ième tirage' et B_n :'on tire une boule noire au n-ième tirage'. On a

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \bigcap \overline{B_n} \tag{3.84}$$

ce qui implique donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= p_n && (3.85)\\
&= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}\left(\overline{B_n}\right) && (3.86)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1} && (3.87)\\
&= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}} && (3.88)
\end{aligned}$$

et par sommation téléscopique, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1} \tag{3.89}$$

Donc on tire une boule blanche presque sûrement.

2. On utilise le même principe : pour $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = p_n = \frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}\times\frac{2c+1}{2c+2}}\times\cdots\times\frac{(n-2)\,c+1}{(n-2)\,c+2}\times\frac{1}{(n-1)\,c+2} \tag{3.90}$$

Comme les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant 1 \tag{3.91}$$

donc

$$\boxed{\text{la série converge.}} \tag{3.92}$$

On peut montrer à nouveau que le tirage d'une boule blanche reste presque sûr. En effet, on a

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{nc+2-c-1}{nc+2} = 1-\frac{c+1}{nc+2} = a-\frac{c+1}{nc}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.93}$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, il existe $K>0$ tel que

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{c+1}{c}}} \tag{3.94}$$

avec $\frac{c+1}{c} > 1$. Notamment, $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = 0$. Comme

$$(nc+2)\,p_{n+1} = ((n-1)\,c+1)\,p_n \tag{3.95}$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ncp_{n+1} - (n-1)\, cp_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2p_{n+1} \tag{3.96}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n - u_1\right) \tag{3.97}$$

La première somme est téléscopique et vaut 0, et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc on trouve bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \tag{3.98}$$

■

Remarque 3.4. *On peut contourner la règle de Raabe-Duhamel. On écrit*

$$\ln\left(p_{n+1}\right) = -\ln\left(2\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{kc+1}{kc+2}\right) - \ln\left(nc+2\right) \tag{3.99}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{kc+2}\right) - \ln\left(n\right) + \ln\left(c\right) - \ln(2) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{3.100}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{kc} + \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) - \ln\left(n\right) - A + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{3.101}$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\ln\left(n\right) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) - \ln\left(n\right) - A + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{3.102}$$

$$= -\ln\left(n\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) + A' + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{3.103}$$

Ainsi,

$$p_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1+\frac{1}{c}}} \tag{3.104}$$

donc la série converge.

Solution 3.11. On a

$$u_{n+1} = q \times 1 + p \times u_n^2 \tag{3.105}$$

car soit la bactérie meure au premier jour, soit les deux descendants n'ont plus de lignée au n-ième jour (on a u_n^2 car les lignées des deux descendants sont indépendantes).

Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & q + px^2 \end{array} \tag{3.106}$$

Si $x \in [0,1]$, on a $f(x) \in [0,1]$ car $f(1) = q + p = 1$. Soit $g(x) = f(x) - x$. On a

$$g(x) = p\,(x-1)\left(x - \frac{p}{q}\right) \tag{3.107}$$

— Si $1 \leqslant \frac{p}{q}$: on a pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) > 0$ et $g(1) = 0$. Donc si

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1} \tag{3.108}$$

car c'est une suite croissante, majorée, convergente vers le point fixe 1.

— Si $1 > \frac{q}{p}$: si $x \in \left[0, \frac{q}{p}\right[$, on a $g(x) > 0$, si $x \in \left]\frac{q}{p}, 1\right[$, $g(x) < 0$ et $g\left(\frac{q}{p}\right) = 0$.
Par récurrence, comme $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{q}{p}\right[$ donc (suite croissante majorée qui converge vers le point fixe $\frac{q}{p}$) donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{q}{p}} \tag{3.109}$$

On a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \min\left(1, \frac{q}{p}\right)} \tag{3.110}$$

Ainsi, la lignée s'éteint presque sûrement si et seulement si $\frac{q}{p} \geqslant 1$ i.e. $p \leqslant \frac{1}{2}$. Sinon, la probabilité d'extinction est $\frac{q}{p}$.

Si $p = \frac{1}{2}$, on pose $\varepsilon_n = 1 - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right) \tag{3.111}$$

d'où

$$\varepsilon_{n+1} = 1 - u_{n+1} = \varepsilon_n \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3.112}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon_{n+1}^\alpha = \varepsilon_n^\alpha \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^\alpha = \varepsilon_n^\alpha - \frac{\alpha \varepsilon_n^{\alpha+1}}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\varepsilon_n^{\alpha+1}\right) \tag{3.113}$$

On choisit $\alpha = -1$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \tag{3.114}$$

D'après le lemme de Césaro, on a $\frac{1}{\varepsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ d'où

$$\boxed{\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}} \tag{3.115}$$

■

Solution 3.12. On note E_n :'la puce est en 0 à l'instant $2n$' et B_n :'la puce repasse pour la première fois en 0 à l'instant $2n$'.

Soit E :'la puce repasse par l'origine'. On a

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \tag{3.116}$$

où les B_n sont disjoints donc $\mathbb{P}(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(B_n)$.

On a

$$\mathbb{P}(E_n) = \binom{2n}{n} p^n q^n \tag{3.117}$$

On écrit alors

$$E_n = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} (E_n \cap B_k) \tag{3.118}$$

où la réunion est disjointe (on partitionne selon le premier passage en 0). D'où

$$u_n = \mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(E_n) \tag{3.119}$$

On pose $b_k = \mathbb{P}(B_k)$ et on a $\mathbb{P}_{B_k}(E_n) = \mathbb{P}(E_{n-k}) = u_{n-k}$: c'est comme si on repartait de 0 à l'étape k. On a donc $u_0 = \mathbb{P}(E_0) = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} \tag{3.120}$$

en posant $b_0 = 0$.

Or, on a

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}(pq)^n \tag{3.121}$$

d'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \tag{3.122}$$

et on a $4pq < 1$ si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$.

Dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$, on pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S - u_0 \tag{3.123}$$
$$= S - 1 \tag{3.124}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} \tag{3.125}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} \tag{3.126}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} u_l\right) \qquad = S\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tag{3.127}$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \mathbb{P}(E) = \frac{S-1}{S} < 1} \tag{3.128}$$

Comme dans ce cas, on a $\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(E_n) < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli indique que le nombre de retours à l'origine est presque sûrement fini. ■

Remarque 3.5. *Avec les séries entières, on peut vérifier que*

$$S = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}} \tag{3.129}$$

d'où

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \sqrt{1-4pq} \tag{3.130}$$

Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Comme on a pour $p \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(p) = 1 - \sqrt{4p(1-p)} \tag{3.131}$$

et $b_n(p) \leqslant b_n\left(\frac{1}{2}\right)$, on peut passer à la limite donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \tag{3.132}$$

et la retour en 0 est presque sûr si $p = \frac{1}{2}$.

Remarque 3.6. *Pour montrer que*

$$l(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{1-4x} \tag{3.133}$$

lorsque $0 \leqslant x < \frac{1}{4}$*. On effectue un produit de Cauchy*

$$l(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n = \frac{1}{1-4r} \tag{3.134}$$

en dénombrant les parties d'un ensemble à $2n$ *éléments séparées en* n *éléments dans* A *et* n *éléments dans* B*.*

Solution 3.13. On note P_n :'on obtient pile au n-ième lancer' et F_n :'on obtient face au n-ième lancer'.

1. On a

$$\boxed{a_1 = 0, a_2 = p^2, a_3 = qp^2} \tag{3.135}$$

2. Pour $n \geqslant 4$, on a

$$A_n = \bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{A_k} \bigcap F_{n-2} \bigcap P_{n-1} \bigcap P_n \tag{3.136}$$

Comme les évènements concernant des lancers différents sont supposés indépendants, on a

$$a_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{A_k} \right) qp^2 \tag{3.137}$$

On écrit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{A_k} \right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-3} A_k \right) = 1 - \sum_{k=1}^{n-3} a_k \tag{3.138}$$

car les A_k sont incompatibles. Ainsi,

$$a_n = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n-3} a_k \right) \tag{3.139}$$

et $\sum_{k \geqslant 1} a_k$ converge puisque

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geqslant 1} \right) \leqslant 1 \tag{3.140}$$

Pour calculer a_n, on remarque que

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} \tag{3.141}$$

est exactement l'évènement 'on n'a pas deux piles consécutifs dans les lancers $\{1,\dots,n\}$'. Si P_n, on a nécessairement F_{n-1} et B_{n-2}, si F_n on a nécessairement B_{n-1}. Ainsi,

$$\mathbb{P}(B_n) = qp\mathbb{P}(B_{n-2}) + q\mathbb{P}(B_{n-1}) \tag{3.142}$$

On a l'équation caractéristique $X^2 - qX - pq$, le discriminant est $\Delta = q^2 + 4pq > 0$. On en déduit les racines $\lambda_1 = \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$, et on utilise les conditions aux limites $\mathbb{P}(B_0) = \mathbb{P}(B_1) = 1$ et $\mathbb{P}(B_n) = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$.

■

Remarque 3.7. *La probabilité d'obtenir une séquence fixée de longueur N est égale à 1. En effet, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n :'la séquence apparaît entre les lancers $nN+1$ et $(n+1)N$'. Les A_n sont clairement indépendants et on a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) = \alpha > 0$ et $\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(A_n)$ diverge. Notamment,*

$$\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{k} \overline{A_n}\right) = \lim_{k\to+\infty} \prod_{n=0}^{k}(1-\alpha) = 0 \tag{3.143}$$

On a donc presque sûrement la séquence. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a presque sûrement une infinité de fois la séquence.

Solution 3.14. On note N_n :'on tire une boule noire au n-ième tirage', et B_n :'on tire une boule blanche au n-ième tirage'.

On a

$$\mathbb{P}_N(n) = \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_n}(B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1\cap\cdots\cap B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_1\cap\cdots\cap B_n)} \tag{3.144}$$

Or

$$\mathbb{P}(B_1\cap\cdots\cap B_n) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \tag{3.145}$$

car pour k fixé, $\frac{1}{N+1}$ est la probabilité d'avoir l'urne k et $\left(\frac{k}{n}\right)^n$ est la probabilité d'avoir une blanche sachant qu'on a pris l'urne k, et la limite vient d'une somme de Riemann.

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}_N(n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}} \tag{3.146}$$

■

Remarque 3.8. *Pour $n = 0$, on a*

$$\mathbb{P}_N(0) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k}{N+1} = \frac{1}{2} \tag{3.147}$$

Solution 3.15. Si cette probabilité est définie, on note p la probabilité recherchée. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $n_1 \wedge n_2 = d$ si et seulement si $n_1 = dn_1'$ et $n_2 = dn_2'$ avec $n_1' \wedge n_2' = 1$. Ainsi, la probabilité pour que $n_1 \wedge n_2 = d$ est $\frac{p}{d^2}$ et

$$\sum_{d \geqslant 1} \frac{p}{d^2} = 1 \tag{3.148}$$

d'où

$$\boxed{p = \frac{6}{\pi^2}} \tag{3.149}$$

■

Remarque 3.9. *Pour justifier un peu plus précisément, on note que dans l'ensemble $[\![1, dN]\!]$, la proportion de multiplies de d est de $\frac{1}{d}$, donc sur $[\![1, dN]\!]^2$, la proportion de couples de multiples de d est $\frac{1}{d^2}$.*

Solution 3.16. On note $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ (qui détermine la loi de X_n car c'est une variable de Bernouilli). On a $q_1 = p_2$ et pour $n \geqslant 2$,

$$q_n = p_1 q_{n-1} + p_2(1 - q_{n-1}) = (p_1 - p_2)q_{n-1} + p_2 \tag{3.150}$$

La relation est vraie pour $n = 1$ en posant $q_0 = 0$.

— Si $p_1 = 1$ et $p_2 = 0$, on a $q_n = q_{n-1} + p_2$ d'où

$$\boxed{q_n = 0} \tag{3.151}$$

— Si $(p_1, p_2) \neq (1, 0)$, on a $p_1 - p_2 \neq 1$ donc

$$q_n = (p_1 - p_2)^n \times \frac{-p_2}{1 - (p_1 - p_2)} + \frac{p_2}{1 - (p_1 - p_2)} \tag{3.152}$$

$$= \boxed{\frac{p_2}{1 - (p_1 - p_2)}(1 - (p_1 - p_2)^n) = \mathbb{E}(X_n)} \tag{3.153}$$

— Si $p_1 - p_2 = -1$, i.e. $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$,

$$\boxed{q_n \text{ n'a pas de limite.}} \tag{3.154}$$

— Si $p_1 - p_2 \neq -1$,

$$\boxed{q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{p_2}{1-(p_2-p_1)}} \tag{3.155}$$

■

Solution 3.17.

1. Pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, on veut

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}\left((D_1 \leqslant k) \cap (D_2 \leqslant k)\right) = \mathbb{P}(D_1 \leqslant k)\mathbb{P}(D_2 \leqslant k) = \frac{k^2}{36} \tag{3.156}$$

Or on a (avec $P(X \leqslant 0) = 0$)

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = \frac{2k-1}{36} \tag{3.157}$$

De même, on a $P(Y \geqslant k) = \frac{(7-k)^2}{36}$ donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{13-2k}{36} \tag{3.158}$$

A chaque fois, on vérifie que $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Y = k) = 1$.

Pour les calculs de variance et d'espérance, on calcule $\sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(X = k) - \left(\sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k)\right)$, de même pour Y.

2. Soit $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$, si $i < j$ on a $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ mais $P(X = i)\mathbb{P}(Y = j) \neq 0$, on n'a donc pas indépendance.

3. Si $P(D_i = k) = p_{k,i}$, on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \left(\sum_{l=1}^{k} p_{l,1}\right)\left(\sum_{l=1}^{k} p_{l,2}\right) = \sum_{1 \leqslant l,r \leqslant k} p_{l,1} \times p_{r,2} \tag{3.159}$$

et on calcule ensuite $P(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1)$ et cela vaut ce que cela vaut.

■

Solution 3.18.

1. On a

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i} \frac{a^j(1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!}(b^i e^{-b}) \tag{3.160}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b^i e^{-b}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} \tag{3.161}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b^i e^{-b}}{i!} \tag{3.162}$$

$$= e^b e^{-b} \tag{3.163}$$

$$= 1 \tag{3.164}$$

donc la définition est cohérente.

2. On a

$$\boxed{p_{i,\cdot} = \sum_{j=0}^{i} p_{i,j} = \frac{b^i e^{-b}}{i!}} \tag{3.165}$$

et

$$p_{\cdot,j} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{e^{-b}a^j}{j!}\left(\frac{b^i(1-a)^{i-j}}{(i-j)!}\right) \tag{3.166}$$

$$= \frac{e^{-b}a^j b^j}{j!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b^i(1-a)^i}{i!} \tag{3.167}$$

$$= \boxed{\frac{e^{-ab}(ab)^j}{j!}} \tag{3.168}$$

On a $p_{i,j} \neq p_{i,\cdot} \neq p_{\cdot,j}$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

3. Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (car $p_{i,j} = 0$ si $i < j$). On a

$$\mathbb{P}(X - Y = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j + k, Y = j) \tag{3.169}$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b^{j+k}e^{-b}a^j(1-a)^k}{j!k!} \tag{3.170}$$

$$= \frac{e^{-b}b^k(1-a)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(ba)^j}{j!} \tag{3.171}$$

$$= \boxed{\frac{e^{b(a-1)}(b(1-a))^k}{k!}} \tag{3.172}$$

De plus,

$$\mathbb{P}(Z = k, Y = j) = \mathbb{P}((X, Y) = (k + j, j)) = p_{k+j,j} = \frac{b^{j+k}e^{-b}a^j(1-a)^k}{j!k!} \tag{3.173}$$

et

$$\mathbb{P}(Z = k)\mathbb{P}(Y = j)) = \frac{e^{b(a-1)b^k(1-a)^k}}{k!}\frac{e^{-ab}(ab^j)}{j!} \tag{3.174}$$

$$= \frac{e^{-b}b^{k+j}a^j(1-a)^k}{k!j!} \tag{3.175}$$

donc Z et Y sont indépendantes.

■

Remarque 3.10. *On a $X \sim \mathcal{P}(b)$ et $Y \sim \mathcal{P}(ab)$ donc X et Y ont des espérances.*

Solution 3.19.

1. On a $S_n - S_{n-1} = T_n$ pour tout $n \geqslant 2$, donc

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i} \tag{3.176}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, comme $T_n \sim \mathcal{G}(1-x)$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = k) = x^{k-1}(1-x)} \tag{3.177}$$

et

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}(1-x) = \frac{1}{1-x}} \tag{3.178}$$

et

$$\boxed{\mathbb{V}(T_n) = \frac{x}{(1-x)^2}} \tag{3.179}$$

3. On a

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_i) = \frac{n}{1-x}} \tag{3.180}$$

Comme les $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendants, on a

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i) = \frac{nx}{(1-x)^2}} \tag{3.181}$$

Pour $k < n$, on a $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$ et sinon, on a

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n} \tag{3.182}$$

(choisir les $n-1$ succès parmi $k-1$ épreuves).

4. On a $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = 1$ donc

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}} \tag{3.183}$$

■

Solution 3.20. On a $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}$. On pose

$$u_{k,n} = \begin{cases} \mathbb{P}(X = k) \text{ si k>n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{3.184}$$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge si et seulement si $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable ($u_{k,n} \geqslant 0$) si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$ converge (théorème de Fubini). Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \tag{3.185}$$

■

Solution 3.21. On cherche $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} u_k$ avec $u_k >$. On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\lambda}{k+1} \geqslant 1 \tag{3.186}$$

si et seulement si $k \leqslant \lambda - 1$. On a donc $u_k \leqslant u_{k+1}$ si et seulement si $k \leqslant \lfloor \lambda \rfloor - 1$ et le maximum est donc atteint pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

Si $\lambda = n \in \mathbb{N}^*$, le maximum vaut

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \tag{3.187}$$

■

Solution 3.22.

1. On a
$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{10-(k-1)}{10-(k-2)}\times\frac{1}{10-(k-1)}=\frac{1}{10} \tag{3.188}$$
donc $X\sim\mathcal{U}(\llbracket 1,10\rrbracket)$ et $Y\sim\mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$ donc $\mathbb{E}(X)=\frac{11}{2}$, $\mathbb{V}(X)=\frac{10^2-1}{12}=\frac{33}{4}$, $\mathbb{E}(Y)=10$, $\mathbb{V}(Y)=\frac{9}{10}\times 100=90$.

2. Soit S l'événement 'le gardien est sobre' et Z compte le nombre d'essais au bout desquels il a réussi. Alors
$$\mathbb{P}_{Z\geqslant 9}(5)=\frac{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(Z\geqslant 9)}{\mathbb{P}(Z\geqslant 9)}=\frac{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(X\geqslant 9)}{\frac{1}{3}\mathbb{P}(Y\geqslant 9)+\frac{2}{3}\mathbb{P}(X\geqslant 9)} \tag{3.189}$$
On a $\mathbb{P}(X\geqslant 9)=\frac{1}{5}$ et
$$\mathbb{P}(Y\geqslant 9)=\sum_{n=9}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\times\frac{1}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^{8} \tag{3.190}$$
d'où
$$\boxed{\mathbb{P}_{Z\geqslant 9}(5)=\frac{2}{5\times\left(\frac{9}{10}\right)^{8}+2}<\frac{1}{2}} \tag{3.191}$$

■

Solution 3.23.

1. On a
$$\boxed{N=\frac{n(n+1)}{2}} \tag{3.192}$$

2. Soit $(i,j)\in\llbracket 1,n\rrbracket^2$, si $i<j$ on a $p_{i,j}=0$ (où $p_{i,j}$ est la loi conjointe). Si $j\leqslant i$, on a
$$p_{i,j}=\frac{1}{N}=\frac{2}{n(n+1)} \tag{3.193}$$
On a ensuite
$$\boxed{p_{i,\cdot}=\sum_{j=1}^{i}\frac{2}{n(n+1)}}=\frac{2i}{n(n+1)} \tag{3.194}$$
et
$$\boxed{p_{j,\cdot}}=\sum_{i=j}^{n}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2(n-j+1)}{n(n+1)} \tag{3.195}$$

3. On calcule

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{E}(B)=\sum_{i=1}^{n}p_{i,\cdot}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{2n+1}{3}\\ \mathbb{E}(R)=\sum_{j=1}^{n}jp_{\cdot,j}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}j(n+1-j)=\frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{array}} \tag{3.196}$$

On laisse le reste en calcul facile en utilisant $\mathbb{V}(G)=\mathbb{V}(R)+\mathbb{V}(B)-2\text{cov}(B,R)$ et

$$\mathbb{E}(BR)=\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}ijp_{i,j} \tag{3.197}$$

■

Solution 3.24.

1. On écrit

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\mathbb{P}_{X_n=k-1}(X_{n+1}=k)\mathbb{P}(X_n=k-1)=\frac{k}{k+1}\mathbb{P}(X_n=k)} \tag{3.198}$$

2. On a $\mathbb{P}(X_n=k)=0$ si $k>n$, sinon on écrit

$$\mathbb{P}(X_n=k)=\frac{k}{k+1}\mathbb{P}(X_{n-1}=k-1) \tag{3.199}$$

$$=\frac{k}{k+1}\times\frac{k-1}{k}\times\frac{k-2}{k-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times u_{n-k} \tag{3.200}$$

$$=\boxed{\frac{1}{k+1}u_{n-k}} \tag{3.201}$$

3. On a $\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(X_n=j)=1$ donc

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n}\frac{u_n}{n-j+1}=1} \tag{3.202}$$

et on a $u_0=1, u_1=\frac{1}{2}, u_2=\frac{5}{12}, u_3=\frac{3}{8}$ (en utilisant la formule précédente).

4. On écrit

$$(k+1)\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=k\mathbb{P}(X_n=k-1) \tag{3.203}$$

donc pour tout $k\in[\![1,n+1]\!]$,

$$k\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=(k-1)\mathbb{P}(X_n=k-1)+\mathbb{P}(X_n=k-1)-\mathbb{P}(X_{n+1}=k) \tag{3.204}$$

En sommant sur $k\in[\![1,n+1]\!]$, on trouve donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1})=\mathbb{E}(X_n)+1-(1-u_{n+1})=\mathbb{E}(X_n)+u_{n+1}} \tag{3.205}$$

Par récurrence, on a directement

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = u_n + \cdots + u_1 + \underbrace{\mathbb{E}(X_0)}_{=\,0}} \tag{3.206}$$

5. On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}\left((X_0 = 0) \cap (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = n-1) \cap (X_n = 0)\right) && (3.207)\\
&= \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}_{X_0=0}(X_1 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{(X_0=0)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=n-1)}(X_{n=0}) && (3.208)\\
&= \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}_{X_0=0}(X_1 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{(X_{n-1}=n-1)}(X_{n=0}) && (3.209)\\
&= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} && (3.210)\\
&= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}} && (3.211)
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 \tag{3.212}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 0) = 0} \tag{3.213}$$

Donc le retour en temps fini à l'origine est presque sûr.

6. Non au vu de la formule donnée par $\mathbb{P}(T = n)$.

■

Solution 3.25.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}} \tag{3.214}$$

(loi binomiale, car les m caisses sont équiprobables).

2. On a $\mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k) = 0$ si $k > n$ donc si $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{X_1=k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k)\mathbb{P}(N = n) \tag{3.215}$$

$$= \sum_{n=k} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \tag{3.216}$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \left(\frac{1}{m}\right)^k \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^{n-k} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \tag{3.217}$$

On reconnaît la série exponentielle, après un changement d'indice, appliquée en $\lambda\left(1 - \frac{1}{m}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\frac{\lambda}{n}} \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}{k!}} \tag{3.218}$$

et donc $X_1 \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

■

Solution 3.26.

1. Si $(i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \{-1, 0, 1\}$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left((U, V) = (i, j)\right) = \mathbb{P}\left(X = \frac{i + j}{2}, Y = \frac{-j}{2}\right)} \tag{3.219}$$

Cette probabilité vaut 0 si i et j n'ont pas la même parité. Sinon, on a

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((U, V) = (0, 0)\right) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = q^2 \\
&\mathbb{P}\left((U, V) = (1, -11)\right) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = qp \\
&\mathbb{P}\left((U, V) = (1, 1)\right) = qp \\
&\mathbb{P}\left((U, V) = (2, 0)\right) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p^2
\end{aligned}} \tag{3.220}$$

2. On a

$$\mathrm{cov}(U, V) = \mathbb{E}\left(\left(U - \mathbb{E}(U)\right)\left(V - \mathbb{E}(V)\right)\right) \tag{3.221}$$

$$= \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) \tag{3.222}$$

$$= \mathbb{E}(X^2 - Y^2) - \left[\left(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\right)\left(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)\right] \tag{3.223}$$

$$= \mathbb{E}(X^2 - Y^2) - \left[\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2\right] \tag{3.224}$$

$$= \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) \tag{3.225}$$

$$= 0 \tag{3.226}$$

3. Les variables U et V ne sont pas indépendantes, il suffit de voir que

$$\boxed{\mathbb{P}\left((U,V)=(1,0)\right)=0\neq\mathbb{P}(U=1)\mathbb{P}(V=0)=2pq\times\left(q^2+p^2\right)} \tag{3.227}$$

■

Solution 3.27.

1. $P\sim\mathcal{G}(p)$ et $F\sim\mathcal{G}(q)$ donc

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}(P)&=\tfrac{1}{p}\\ \mathbb{V}(P)&=\tfrac{q}{p^2}\\ \mathbb{E}(F)&=\tfrac{1}{q}\\ \mathbb{V}(F)&=\tfrac{p}{q^2}\end{aligned}} \tag{3.228}$$

2. On a $\mathbb{P}\left((P=1)\cap(F=1)\right)=0\neq\mathbb{P}(P=1)\mathbb{P}(F=1)$ donc P et F ne sont pas indépendantes.

3. Soit $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on note $p_{i,j}=\mathbb{P}(X=i,Y=j)$. On partitionne selon si $P=1$ ou $F=1$ et donc

$$\boxed{p_{i,j}=p^{i+1}q^j+q^{i+1}p^j} \tag{3.229}$$

On note

$$\begin{aligned}p_{i,\cdot}&=\textstyle\sum_{j=1}^{+\infty}p_{i,j}=p^{i+1}\frac{q}{1-q}+q^{i+1}\frac{p}{1-p}=p^iq+q^ip\\ p_{\cdot,j}&=\textstyle\sum_{i=1}^{+\infty}p_{i,j}=\frac{p^2}{1-p}q^j+\frac{q^2}{1-q}p^j=q^{j-1}p^2+p^{j-1}q^2\end{aligned} \tag{3.230}$$

De plus, on a $p_{1,1}=p^2q+q^2p=pq$ et $p_{1,\cdot}\times p_{\cdot,1}=(pq+qp)(p^2+q^2)=2pq(p^2+q^2)$ dp,c si X et Y sont indépendantes, on a $1=2(p^2+q^2)$ d'où $p=\frac{1}{2}$. Réciproquement, si $p=\frac{1}{2}$, on a $p_{i,\cdot}=\frac{1}{2^i}$, $p_{\cdot,j}=\frac{1}{2^j}$ et $p_{i,j}=\frac{1}{2^{i+j}}=p_{i,\cdot}p_{\cdot,j}$. Ainsi, X et Y sont indépendantes si et seulement si $p=\frac{1}{2}$.

4. On a

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}ip_{i,\cdot}=q\sum_{i=1}^{+\infty}ip^i+p\sum_{i=1}^{+\infty}iq^i \tag{3.231}$$

On utilise alors le fait que $\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-1}=\frac{1}{(1-z)^2}$ si $|z|<1$ et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{p^2+q^2}{pq}\geqslant 2} \tag{3.232}$$

car $(p-q)^2\geqslant 0$.

5. On a

$$\boxed{\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{i,i}=\sum_{i=1}^{+\infty}p^iq^i(p+q)=pq\times\frac{1}{1-pq}} \tag{3.233}$$

6. Si $p=\frac{1}{2}$, X et Y sont indépendantes, donc par convolution,

$$\boxed{\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)=\sum_{i=1}^{k-1}p_{i,\cdot}p_{\cdot,k-i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2^k}=\frac{k-1}{2^k}} \tag{3.234}$$

■

Solution 3.28.

1. On a

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda x)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{2^kk!}+x\sinh(\lambda)=\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}+x\sinh(\lambda)} \tag{3.235}$$

car $|x^2|\leqslant 1$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $(2k)!\geqslant 2^kk!$ (par récurrence).

2. $\mathrm{e}^{\lambda X}$ admet une espérance car $\left|\mathrm{e}^{\lambda X}\right|\leqslant\mathrm{e}^{\lambda}$. Comme X est centrée, on a d'après l'inégalité précédente, en prenant l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)\leqslant\mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}}\right)+\sinh(\lambda)\mathbb{E}(X)=\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}} \tag{3.236}$$

En appliquant l'inégalité à $-X$, on a l'autre inégalité.

3. Grâce à l'inégalité de Markov, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(X\geqslant a)=\mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\geqslant\mathrm{e}^{\lambda a}\right)}\leqslant\frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)}{e^{\lambda a}}=\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right) \tag{3.237}$$

4. On pose $X=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_i$. X est centrée dans $[-1,1]$ ainsi que $-X$. On a donc, pour tout $\lambda\geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X|\geqslant a\right)=\mathbb{P}(X\geqslant a)+\mathbb{P}(-X\geqslant a)\leqslant 2\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} \tag{3.238}$$

On optimise ensuite cette inégalité en $\lambda\geqslant 0$ (le minimum est en $\lambda=a$) et on a bien

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant a\right)\leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}} \tag{3.239}$$

■

Solution 3.29.

1. Comme $\mathbb{E}(Y) < +\infty$, on a d'après le théorème de Fubini et le fait que $(X = l)_{l\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{l=0}^{+\infty} l\mathbb{P}(Y = l) \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = l)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X=k)}(Y)\mathbb{P}(X = k)} \tag{3.240}$$

2. Pour $\lambda = X_{n+1}$ et $X = X_n$, et en utilisant le fait que les poules sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X_n=k)}\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda\mathbb{P}(X_n = k) = \lambda\mathbb{E}(X_n) \tag{3.241}$$

Par récurrence, on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \lambda^n\mathbb{E}(X_0) = \lambda^n N} \tag{3.242}$$

On note que si $\lambda > 1$, $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la descendance est assurée. Si $\lambda < 1$, on a $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

■

Solution 3.30. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=n)}(K = k)\mathbb{P}(N = n) && (3.243)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} && (3.244)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} && (3.245)
\end{aligned}$$

Donc $K \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ et

$$\boxed{\mathbb{E}(K) = \lambda p} \tag{3.246}$$

■

Solution 3.31.

1. On a $\chi_{A_k} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{k}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)} \tag{3.247}$$

Comme les $(A_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendants, on a aussi

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)} \tag{3.248}$$

2. Soit $X_n = \frac{S_n}{\ln(n)}$. On a $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{\ln^2(n)}\mathbb{V}(S_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant 4\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{3.249}$$

   Or, si $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|\mathbb{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $|X_n - 1| < \varepsilon$. Par contraposée, si $|X_n - 1| \geqslant \varepsilon$, alors ou bien $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ou $|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(|X_n - 1| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 4\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2} + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3.250}$$

   A partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour tout $n \geqslant N_0$, on a $\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0} \tag{3.251}$$

■

Solution 3.32.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\mathbb{P}(U \geqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geqslant k)\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(X_i \geqslant k\right) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=k}^{+\infty} q^{j-1}p = (q^{k-1})^n \tag{3.252}$$

   Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \geqslant k) - \mathbb{P}(U \geqslant k+1) = q^{(k-1)n}(q^n - 1)} \tag{3.253}$$

   U possède une espérance car $0 \leqslant U \leqslant X \sim \mathcal{G}(p)$ et on a

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(U = k) \tag{3.254}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left((q^n)^{k-1} - (q^n)^k\right) \tag{3.255}$$

$$= \frac{1}{(1-q^n)^2} - \frac{q^n}{(1-q^n)^2} \tag{3.256}$$

$$= \boxed{\frac{1}{1-q^n}} \tag{3.257}$$

   où l'on a utilisé le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{P}(V \leqslant k) = \left(1-q^k\right)^n$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(V=k) = \left(1-q^k\right)^n - \left(1-q^{k-1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} nq^{k-1}(1-q) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0} \tag{3.258}$$

Comme $k\mathbb{P}(V=k) = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, V admet une espérance est

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(V=k) \tag{3.259}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\left(1-q^k\right)^n - \left(1-q^{k-1}\right)^n\right] \tag{3.260}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left[(-1)^i q^{ki} - (-1)^i q^{(k-1)i}\right] \tag{3.261}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} q^{(k-1)i}(1-q^i) \tag{3.262}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (1-q^i) \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(q^i\right)^{k-1} \tag{3.263}$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1-q^i}} \tag{3.264}$$

■

Solution 3.33.

1. $1-p^N$ correspond à la probabilité que le joueur perde au moins une partie sur N consécutives donc c'est aussi la probabilité pour qu'il perde une partie entre la $nN+1$-ième et la $(n+1)N$-ième (inclus), car les parties sont indépendantes. On note $A_{nN+1,(n+1)N}$:'le joueur perd une partie entre la $nN+1$-ième et la $(n+1)N$-ième (au sens large)'. $\{t_k > nN\}$ et $A_{nN+1,(n+1)N}$ sont des événements indépendants car les différentes parties sont indépendantes. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(t_k > nN\right)\left(1-p^N\right) = \mathbb{P}\left((t_k > nN) \cap A_{nN+1,(n+1)N}\right) \geqslant \mathbb{P}(t_k > n(N+1))} \tag{3.265}$$

car s'il avait gagné toutes les parties entre $nN+1$ et $(n+1)N$ on aurait $t_k \leqslant n(N+1)$.

On sait que si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, X possède une espérance finie si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$ converge et on a (théorème de Fubini) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$.

On a donc

$$\mathbb{P}(t_k > Nn) \leqslant (1-p^n)\mathbb{P}(t_k > 0) = 1 - p^n \tag{3.266}$$

par récurrence sur n d'après 1. Pour $l \in \mathbb{N}$, soit $n = \left\lfloor \frac{l}{N} \right\rfloor$, on a $nN \leqslant l < (n+1)N$ donc

$$\mathbb{P}(t_k > l) \leqslant \mathbb{P}(t_k > nN) \leqslant (1-p^N)^{\left\lfloor \frac{l}{N} \right\rfloor} \leqslant \left(1-p^N\right)^{\frac{l}{N}} \tag{3.267}$$

et le membre de droite est le terme général d'une série converge car $\left(1-p^N\right)^{\frac{1}{N}} < 1$. Donc t_k admet une espérance.

2. On note b_i :'le joueur gagne au i-ième coup'. Alors

$$\begin{aligned}
T_k &= \sum_{l=0}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_k = l) &(3.268)\\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} l\left(\mathbb{P}_{b_i}(t_k = l)\mathbb{P}(b_i) + \mathbb{P}_{\overline{b_i}}(t_k = l)\mathbb{P}(\overline{b_i})\right) &(3.269)\\
&= p\sum_{l=1}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_{k+1} = l-1) + q\sum_{l=1}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_{k-1} = l-1) &(3.270)\\
&= p\left(\sum_{l=1}^{+\infty}(l-1)\mathbb{P}(t_{k+1} = l-1) + \sum_{l=1}^{+\infty} 1\times\mathbb{P}(t_{k+1} = l-1)\right)\\
&\quad + q\left(\sum_{l=1}^{+\infty}(l-1)\mathbb{P}(t_{k-1} = l-1) + \sum_{l=1}^{+\infty} 1\times\mathbb{P}(t_{k-1} = l-1)\right) &(3.271)\\
&= p\left(T_{k-1}+1\right) + q\left(T_{k+1}+1\right) &(3.272)
\end{aligned}$$

3. On a $qT_{k+1} - T_k + pT_{k-1} = -1$. Comme $q\alpha(k+1) - \alpha k + p\alpha(k-1) = 1$ si et seulement si $\alpha = \frac{1}{1-2p}$, on pose $U_k = T_k - \frac{k}{1-2p}$ si $p = \frac{1}{2}$. Alors

$$qU_{k+1} - U_k + pU_{k-1} = -1 - q\frac{k+1}{1-2p} + \frac{k}{1-2p} - p\frac{k-1}{1-2p} = 0 \tag{3.273}$$

car $p+q=1$.

L'équation caractéristique est $qr^2 - r + p = 0$, les racines sont 1 et $\frac{p}{q}$ (qui est différent de 1 car $p \neq \frac{1}{2}$). Donc

$$q\left(1-\frac{p}{q}\right)(1-1) = 0 \tag{3.274}$$

On a $T_0 = T_N = 0$ donc

$$\boxed{T_k = \frac{1}{q-p}\left(k - N\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right)\right)} \tag{3.275}$$

si $p \neq \frac{1}{2}$. Si $p = \frac{1}{2}$, on a

$$T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1} = -2 \tag{3.276}$$

Ainsi, si $V_k = T_{k-1} - T_k$, on a

$$V_{k+1} = -2 + V_k \tag{3.277}$$

On en déduit grâce aux conditions aux limites $T_0 = T_N = 0$ que

$$\boxed{T_k = k(N-k)} \tag{3.278}$$

■

Solution 3.34.

1. On a

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\zeta(s)n^s} = 1} \tag{3.279}$$

2. On a

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k\in A_n} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)r^s n^s} = \frac{1}{n^s}} \tag{3.280}$$

3. Soient $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts. On a $A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_r} = A_{p_1\times\cdots\times p_k}$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(A_{p_1} \bigcap \ldots \bigcap A_{p_k}\right)} = \frac{1}{(p_1 \ldots p_k)^s} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{p_i}) \tag{3.281}$$

donc les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants.

On remarque que l'on a $\{1\} = \cap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}$. On pose p_k le k-ième nombre premier et $B_k = \cap_{i=1}^{k} \overline{A_{p_i}}$ qui est une suite décroissante d'événements. Comme les $(A_{p_i})_i$ sont indépendants, c'est aussi le cas des $(\overline{A_{p_i}})_i$, et on a donc

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^{k} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{i=}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \tag{3.282}$$

Or $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$ donc

$$\boxed{\zeta(s) = \left(\prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)\right)^{-1}} \tag{3.283}$$

■

Solution 3.35. On a $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{2}(1-b)$ et pour tout $n \geqslant 2$,

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2} b^{n-1}(1-b)} \tag{3.284}$$

Les événements E_n sont incompatibles donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = 1} \tag{3.285}$$

Il est donc presque sûr qu'on finisse par utiliser A.

On a

$$\boxed{\mathbb{P}(U_n) = \frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n} \tag{3.286}$$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite décroissante d'événements, donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = 0} \tag{3.287}$$

■

Solution 3.36.

1. On a

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = 1-(1-p)^n} \tag{3.288}$$

2. $B_n = \bigcap_{i=1}^N A_{i,n}$ et les $A_{i,n}$ sont indépendants donc

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_{i,n}) = (1-(1-p)^n)^N} \tag{3.289}$$

3. On note $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$ et $B_{n-1} \subset B_n$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_{n-1}) = (1-(1-p)^n)^N - \left(1-(1-p)^{n-1}\right)^N} \tag{3.290}$$

■

Solution 3.37.

1. On a

$$\mathbb{K}_{<n}[X] = \left\{a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} \middle| (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\right\} \tag{3.291}$$

donc $|\mathbb{K}_{<n}[X]| = p^n$. De même, on a

$$\mathbb{K}_{=n}[X] = \left\{a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n X^n \middle| (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n, a_n \neq \overline{0}\right\} \tag{3.292}$$

donc $|\mathbb{K}_{=n}[X]| = p^n(p-1)$ d'où $|\Omega| = p^{2n}(p-1)$.

On a $\mathbb{P}(\deg(Q) = -\infty) = \frac{1}{p^n}$ et si $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\boxed{\mathbb{P}(\deg(Q) = k) = \frac{p^k(p-1)}{p^n}} \tag{3.293}$$

2. On a $(Q, P) \in A$ si et seulement si $Q \mid P$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{K}_{\leqslant n}[X]$ tel que $P = AQ$ et $\deg(A) + \deg(Q) = n$. Ainsi, $\left(Q, \frac{P}{Q}\right) \in B$ et f est bien définie. On a directement

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & B & \to & A \\ & (Q, A) & \mapsto & (Q, AQ) \end{array} \tag{3.294}$$

donc f est bijective et $|A| = |B|$.

On a

$$B = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{(Q, A) \in \mathbb{K}_{=k}[X] \times \mathbb{K}_{=n-k}[X]\} \tag{3.295}$$

donc

$$|B| = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(p-1) \times p^{n-k}(p-1) = np^n(p-1)^2 = |A| \tag{3.296}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(Q \mid P) = \frac{np^n(p-1)^2}{p^{2n}(p-1)} = \frac{n(p-1)}{p^n}} \tag{3.297}$$

3. On a $R_1 = R$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$ si et seulement si $Q \mid P - R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$. Comme $\deg(Q) < \deg(P)$, $\deg(R) < \deg(P)$ implique $\deg(P - R) = \deg(P)$.

Or

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K}_{=n}[X] & \to & \mathbb{K}_{=n}[X] \\ & P & \mapsto & P - R \end{array} \tag{3.298}$$

est bijective donc les lois de $P-R$ et de P sont les mêmes. En notant $r=\deg(R)$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1=R) &= \mathbb{P}\left((Q\mid P-R)\cap(\deg(Q)>\deg(R))\right) && (3.299)\\
&= \sum_{q=r+1}^{n-1}\frac{p^{n-q}(p-1)}{(p-1)^2}\times\frac{p^d(p-1)}{p^{2n}} && (3.300)\\
&= \boxed{\frac{1}{p^n}\times(n-r-1)} && (3.301)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\deg(Q)=q}(R_1=R) &= \frac{\mathbb{P}\left((R_1=R)\cap(\deg(Q)=q)\right)}{\mathbb{P}\left(\deg(Q)=s\right)} && (3.302)\\
&= \frac{\frac{1}{p^n}}{\frac{p^q(p-1)}{p^n}} && (3.303)\\
&= \boxed{\frac{1}{p^q(p-1)}} && (3.304)
\end{aligned}$$

■

Solution 3.38.

1. (X_1,X_2) prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]^2\setminus\{(i,i)|i\in[\![1,n]\!]\}$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$, alors

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)=\frac{1}{n(n-1)}} \qquad (3.305)$$

La loi conjointe est uniforme.

2. X_2 prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On a

$$\mathbb{P}(X_2=j)=\sum_{\substack{i=1^n\\ i\neq j}}\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)=\frac{n-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n} \qquad (3.306)$$

donc $X_2\sim\mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\right)$.

$X_{1_{|X_2=j}}$ prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]\setminus\{j\}$ et

$$\mathbb{P}(X_{1_{|X_2=j}}=i)=\frac{\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)}{\mathbb{P}(X_2=j)}=\frac{1}{n-1} \qquad (3.307)$$

donc $X_{1_{|X_2=j}}\sim\mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\setminus\{j\}\right)$.

3. D'après ce qui précède, les lois de X_1 et X_2 sont différentes et X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

4. On écrit

$$(X_1, \dots, X_k) = \left\{(x_1, \dots, x_k) \in [\![1, n]\!]^k \middle| \forall i \neq j, x_i \neq x_j\right\} \tag{3.308}$$

ensemble que l'on note $A_{n,k}$. On a $|A_{n,k}| = n(n-1)\dots(n-k+1)$. Pour $(x_1, \dots, x_k) \in A_{n,k}$, on a donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{1}{n(n-1)}\dots(n-k+1)} \tag{3.309}$$

et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ et les X_i ne sont pas indépendants.

5. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1, X_2) &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} (i, j) \times \frac{1}{n(n-1)} && (3.310) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i} i\right), \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\neq j} j\right)\right) && (3.311) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n-1)(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)(n+1)}{2}\right) && (3.312) \\
&= \boxed{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}} && (3.313)
\end{aligned}$$

■

4 Calcul matriciel

Solution 4.1. Soit $(k,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$\begin{aligned}
\left[M\overline{M}\right]_{k,m} &= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\overline{\omega}^{(j-1)(m-1)} && (4.1)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k-1}\overline{\omega}^{m-1}\right]^j && (4.2)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k-m}\right]^j && (4.3)
\end{aligned}$$

Or $\omega^{k-m} = 1$ si et seulement si $n \mid k-m$ si et seulement si $k=m$ car $|k-m| \in [\![0, n-1]\!]$. Si $k=m$, on a $[M\overline{M}]_{k,m} = n$ et si $k \neq m$, on a

$$[M\overline{M}]_{k,m} = \frac{1-\left(\omega^{k-m}\right)^n}{1-\omega^{k-m}} = 0 \tag{4.4}$$

Donc $M\overline{M} = nI_n$. Ainsi, $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}} \tag{4.5}$$

On a $\det(M\overline{M}) = \det(M)\det(\overline{M}) = n^n = \det(M)\overline{\det(M)} = |\det(M)|^2$ donc $|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$.

On calcul M^2. On a

$$[M^2]_{k,m} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)+(j-1)(m-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k+m-2}\right]^j \tag{4.6}$$

On a $k+m-2 \in [\![0, 2n-2]\!]$ donc $n \mid k+m-2$ si et seulement si $k+m = n+2$ ou $k+m=2$ si et seulement si $m = n+2-k$ ou $k=m=1$. Donc

$$M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & & & & n\\ \vdots & & & n & 0\\ \vdots & & \iddots & & \vdots\\ 0 & n & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

En développant par rapport à la première ligne (ou colonne), on a

$$\det(M^2) = n^n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{4.8}$$

donc

$$\boxed{\det(M) = \begin{cases} \pm n^{\frac{n}{2}} \quad \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est pair i.e. } \begin{cases} n \equiv 0[4] \\ \text{ou} \\ n \equiv 3[4] \end{cases} \\ \pm i n^{\frac{n}{2}} \quad \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est impair i.e. } \begin{cases} n \equiv 1[4] \\ \text{ou} \\ n \equiv 2[4] \end{cases} \end{cases}} \tag{4.9}$$

■

Solution 4.2.

1. Si $A \geqslant 0$, soit $X \geqslant 0$, on a

   $$[AX]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geqslant 0 \tag{4.10}$$

   donc $AX \geqslant 0$.

   Réciproquement, soit $j \in [\![1, n]\!]$, on prend

   $$X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

   où le 1 est en j-ième position. $X_j \geqslant 0$ et

   $$AX = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \geqslant 0 \tag{4.12}$$

   donc $A \geqslant 0$.

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \geqslant 0, A^{-1} = (A^{-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \geqslant 0$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} A^{-1}_{k,j} = 0 \tag{4.13}$$

donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $A_{i,j} = 0$ ou $A^{-1}_{k,j} = 0$.

i étant fixé, comme $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, il existe $k_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $A_{i,k_0} > 0$. Alors pour tout $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, on a $A^{-1}_{k_0,j} = 0$ et $A^{-1}_{k_0,i} > 0$ (car A^{-1} est inversible). Supposons qu'il existe $k_1 \neq k_0$ tel que $A_{i,k_1} > 0$. Alors pour tout $j \neq i$, on a $A^{-1}_{k,j} = 0$ et $A^{-1}_{k_1,i} > 0$, mais alors les lignes k_0 et k_1 sont liées, ce qui est impossible. Donc il existe un unique $k_i \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,k_i} > 0$.

Comme A est inversible, pour $i \neq i'$, on a $k_i \neq k_{i'}$, sinon on aurait deux lignes proportionnelles. Donc

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ & i & \mapsto & k_i \end{array} \tag{4.14}$$

Ainsi il existe une unique permutation $\sigma \in \Sigma_n$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,\sigma(i)} > 0$ et pour tout $j \neq \sigma(i)$, $A_{ij} = 0$. Donc

$$\boxed{A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) P_\sigma} \tag{4.15}$$

avec $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$ et $a_i > 0$.

Réciproquement, si A est de cette forme, on a $A \geqslant 0$ et

$$A^{-1} = P_\sigma^{-1} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) = P_{\sigma^{-1}} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) \tag{4.16}$$

donc $A^{-1} \geqslant 0$.

■

Remarque 4.1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Si $AX \geqslant 0$, en définissant $x_0 = x_{n+1} = 0$, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} \geqslant 0 \tag{4.18}$$

Si $x_{i_0} = \min(x_0, \ldots, x_{n+1})$, on a

$$2x_{i_0} \geqslant x_{i_0-1} + x_{i_0+1} \geqslant 2x_{i_0} \tag{4.19}$$

donc $x_{i_0-1} = x_{i_0+1} = x_{i_0}$. De proche en proche, on a $x_{i_0} = x_0 = 0$. Donc $X \geqslant 0$.

Si $AX = 0$, on a $AX \geqslant 0$ et $A(-X) = 0$ donc $X \geqslant 0$ et $-X \geqslant 0$ donc $X = 0$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = AX \geqslant 0$, on a $A^{-1}Y = X \geqslant 0$ donc $A^{-1} \geqslant 0$.

Solution 4.3. Soit

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \tag{4.20}$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$(X+1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \tag{4.21}$$

On note $P_i = X^{i-1}$ et $\mathcal{B} = (P_1, \ldots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. $u^{-1}\colon P \mapsto P(X-1)$ donc A est inversible et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(X-1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i (-1)^{j-i-1} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} (-1)^{j-i} \tag{4.22}$$

donc

$$\boxed{A^{-1} = \left(\binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}} \tag{4.23}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k\colon P \mapsto P(X+k)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$(X+k)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i k^{j-i-1} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} k^{j-i} \tag{4.24}$$

donc

$$\boxed{A^k = \left(\binom{j-1}{i-1} k^{j-i} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}} \tag{4.25}$$

■

Solution 4.4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H(n)$:'si $\dim(E) = n$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\mathrm{Tr}(u) = 0$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

,

Pour $n = 1$, on a $u = 0$ si $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Pour $n \geqslant 1$, on suppose $H(n)$, soit E de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda id_E$, on a $\mathrm{Tr}(u) = (n+1)\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $u = 0$.

Sinon, il existe $e_1 \neq 0$ tel que $(e_1, u(e_1))$ est libre (résultat classique, redémontré en remarque ci-dessous). On pose $e_2 = u(e_1)$ et on complète (e_1, e_2) en une base de E : $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) = \mathcal{B}_1$. Alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & & & & \\ 0 & & \text{A'} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

avec $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(A') = 0$. Posons $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$. On note Π la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1)$. Alors si

$$\begin{array}{rccc} u' : & F & \to & F \\ & x & \mapsto & \Pi(u(x)) \end{array} \tag{4.28}$$

et $A' = \mathrm{mat}_{(e_2,\dots,e_{n+1})}(u')$ donc $\mathrm{Tr}(u') = 0$. D'après $H(n)$, il existe $(f_2, \dots, f_{n+1})$ une base de F telle que

$$\mathrm{mat}_{(f_2,\dots,f_{n+1})}(u') = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Soit donc $\mathcal{B}_2 = (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ base de E. On a $u(e_1) \in F$ donc

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix}} \tag{4.30}$$

2. Soit $M = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $D = (i\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a

$$[DM]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} i\delta_{i,k}a_{k,j} = ia_{i,j} \tag{4.31}$$

et

$$[MD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}k\delta_{k,j} = ja_{i,j} \tag{4.32}$$

On a $M \in \ker(\varphi)$ si et seulement si pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$ si et seulement si $M \in D_n(\mathbb{K})$ (ensemble des matrices diagonales). Donc $\dim(\ker(\varphi)) = n$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n^n - n$. Or pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), [MD - DM]_{i,i} = 0$. Notons Δ_n l'ensemble des matrices de diagonale nulle. On a $\mathrm{Im}\varphi \subset \Delta_n$ et $\dim(\Delta_n) = n^2 - n$ (une base de Δ_n est $(E_{i,j})_{i\neq j}$, matrices élémentaires) donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \Delta_n$.

Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. D'après 1. il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP \in \Delta_n = \mathrm{Im}(\varphi)$ donc il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = MD - DM$ donc

$$\begin{aligned} A &= P(MD - DM)P^{-1} && (4.33)\\ &= PMDP^{-1} - PDMP^{-1} && (4.34)\\ &= \boxed{XY - YX} && (4.35) \end{aligned}$$

avec $X = PMP^{-1}$ et $Y = PDP^{-1}$.

■

Remarque 4.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(x, u(x))$ est liée i.e. pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda_x x$. Alors u est une homothétie.*

En effet, soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, si (x, y) est liée, il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \mu x$. On a alors

$$u(y) = \lambda_y y = \mu u(x) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y \tag{4.36}$$

On a $y \neq 0$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Si (x, y) est libre, on a

$$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y \tag{4.37}$$

Par liberté de (x, y), on a $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi, λ_x ne dépend pas de x : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$, i.e. $u = \lambda id_E$.

Solution 4.5.

1. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ et $Y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, on a

$$XY^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & \dots & x_1y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

est de rang 1. On a

$$(XY^\mathsf{T})^2 = X(Y^\mathsf{T}X)Y^\mathsf{T} = \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right) XY^\mathsf{T} \tag{4.39}$$

Si $\lambda = 0$, c'est évident.

Si $\lambda \neq 0$ et $B = I_n + \lambda XY^\mathsf{T}$, on a

$$XY^\mathsf{T} = \frac{B - I_n}{\lambda} \tag{4.40}$$

et

$$(XY^\mathsf{T})^2 = \frac{(B - I_n)^2}{\lambda^2} \tag{4.41}$$

soit

$$(XY^\mathsf{T})^2 = \frac{B^2 - 2B + I_n}{\lambda^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)\left(\frac{B - I_n}{\lambda}\right) \tag{4.42}$$

d'où

$$\lambda\left(Y^\mathsf{T}X\right)(B - I_n) = B^2 - 2B + I_n \tag{4.43}$$

d'où

$$B^2 + \left(-2 - \lambda\left(Y^\mathsf{T}X\right)\right)B + I_n\left(1 + \lambda\left(Y^\mathsf{T}X\right)\right) = 0 \tag{4.44}$$

Si $1+\lambda Y^\top X \neq 0$, alors B est inversible et

$$\boxed{B^{-1} = -\frac{1}{1+\lambda Y^\top X}\left(B - \left(2+\lambda Y^\top X\right) I_n\right)} \tag{4.45}$$

Si $1+\lambda Y^\top X = 0$, on a

$$B\left(B - I_n\right) = 0 \tag{4.46}$$

Si B est inversible, on aura $B = I_n$ et $\lambda XY^\top = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Or $\lambda \neq 0$ donc $X = Y = 0$ et $1 = 0$: absurde. Donc $B \notin GL_n(\mathbb{K})$.

2. On a

$$M = A + \lambda XY^Y = A\left(I_n + \lambda A^{-1}XY^\top\right) \tag{4.47}$$

donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\left(I_n + \lambda A^{-1}XY^\top\right)$ est inversible si et seulement si $1+\lambda Y^\top A^{-1}X$ est inversible d'après 1. Alors

$$\boxed{M^{-1} = \left(I_n - \frac{\lambda A^{-1}XY^\top}{1+\lambda Y^\top A^{-1}X}\right)A^{-1}} \tag{4.48}$$

■

Solution 4.6. On a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ donc il faut montrer que $(S_0,\dots,S_n)$ est libre. Soit donc $\alpha = (\alpha_0,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\alpha_0 S_0 + \cdots + \alpha_n S_n = 0 \tag{4.49}$$

Si $\alpha \neq 0$, on pose $k_0 = \max\left(k \in [\![0,n]\!] | \alpha_k \neq 0\right)$. On a

$$\alpha_0(1-X)^n + \cdots + \alpha_{k_0}X^{k_0}(1-X)^{n-k_0} = 0 \tag{4.50}$$

soit

$$\alpha_0(1-X)^{k_0} + \cdots + \alpha_{k_0}X^{k_0} = 0 \tag{4.51}$$

En évaluant en 1, on a $\alpha_{k_0} = 0$ ce qui est absurde. Donc $(S_0,\dots,S_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X] = n+1$.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a

$$S_j = X^j(1-X)^{n-j} \tag{4.52}$$

$$= X^j\left(\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k X^k\right) \tag{4.53}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k X^{k+j} \tag{4.54}$$

$$= \sum_{k=j}^{n}\binom{n-j}{k-j}(-1)^{k-j} X^k \tag{4.55}$$

donc

$$\boxed{A = P_{(1,\dots,X^n)\to(S_0,\dots,S_n)} = \left(\binom{n-j}{k-j}(-1)^{k-j}\right)_{0\leqslant k,j\leqslant n}} \tag{4.56}$$

On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $u(X^j) = S_j$ pour tout $j \in [\![0,n]\!]$. On a $u(X^j) = \left(\frac{X}{1-X}\right)^j(1-X)^n$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $u(P) = P\left(\frac{X}{1-X}\right)(1-X)^n$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on a $u(P) = Q$ si et seulement si $P\left(\frac{X}{1-X}\right)(1-X)^n = Q(X)$ si et seulement si $P(Y)\left(\frac{1}{1+Y}\right)^n = Q\left(\frac{Y}{1+Y}\right)$ soit $u(P) = Q$ si et seulement si $P(Y) = Q\left(\frac{Y}{1+Y}\right)(1+Y)^n$. Ainsi $u^{-1}(X^j) = X^j(1+X)^{n-j}$, donc

$$\boxed{A^{-1} = \mathrm{mat}_{(1,\dots,X^n)}(u^{-1}) = \left(\binom{n-j}{k-j}\right)_{0\leqslant k,j\leqslant n}} \tag{4.57}$$

■

Solution 4.7. Si on a $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$, on a $I_n \notin H$. On écrit donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathbb{K}I_n \tag{4.58}$$

Soit $i \neq j$, on prend $E_{i,j} = M + \lambda I_n$ (décomposition précédente) avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda \neq 0$, on a

$$M = E_{i,j} - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K}) \tag{4.59}$$

donc $M \in GL_n(\mathbb{K}) \cap H$: absurde. Donc $\lambda = 0$ et $E_{i,j} \in H$, d'où $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{,\neq i} \subset H$. Or

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in (GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{Vect}(E_{i,j})_{i\neq j}) \subset (GL_n(\mathbb{K}) \cap H) \tag{4.60}$$

donc $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$: absurde. ■

Remarque 4.3. *Il existe une forme linéaire non nulle* $\varphi \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *telle que* $H = \ker(\varphi)$.

En effet, pour toute forme linéaire φ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, il existe une unique matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM) \tag{4.61}$$

Pour le montrer : si A *existe, pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$*. Réciproquement, soit* $A = (\varphi(E_{j,i}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$*. On a pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ *car cex deux formes linéaires coïncident sur les* $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$,

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \mathrm{Tr}(AM) = 0\} \tag{4.62}$$

Si $r = \mathrm{rg}(A)$*, il existe* $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ *telles que* $A = Q^{-1} J_{n,n,r} P$ *(*$J_{n,n,r}$ *: matrice de taille* $n \times n$ *avec les* r *premiers coefficients diagonaux valant 1). Alors pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a*

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(J_{n,n,r} \underbrace{MPQ^{-1}}_{=\ M'}) \tag{4.63}$$

et il suffit de prendre

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

Remarque 4.4. *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifie* $\dim(F) \geqslant n^2 - n + 1$ *alors*

$$G \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset \tag{4.65}$$

Solution 4.8.

1. On prend $\lambda = 0$ et $N(0 \times 0) = 0 \times N(0) = 0$ donc

$$\boxed{N(0) = 0} \tag{4.66}$$

2. On a pour $j \neq i$, $E_{i,j} \times E_{j,j} = E_{i,j}$ et $E_{j,j}E_{i,j} = 0$ donc $N(E_{i,j}) = N(E_{i,j}E_{j,j}) = N(E_{j,j}E_{i,j})$ d'où

$$\boxed{N(E_{i,j}) = 0} \tag{4.67}$$

3. Déjà traité à l'exercice 4.
4. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} \tag{4.68}$$

donc

$$\boxed{N(A) = N(P^{-1}AP) \leqslant \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} N(E_{i,j}) = 0} \tag{4.69}$$

5. Soit $A' = A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n$. On a $N(A') = 0$ d'après ce qui précède. Montrons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$,

$$|N(A) - N(B)| \leqslant N(A - B) \tag{4.70}$$

On écrit $A = A - B + B$ et $N(A) \leqslant N(A - B) + N(B)$ d'où $N(A) - N(B) \leqslant N(A - B)$ et on a le résultat par symétrie de A et B.

On a donc

$$\left| N(A) - N\left(\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) \right| \leqslant N\left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = 0 \tag{4.71}$$

d'où

$$\boxed{N(A) = N\left(\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = |\mathrm{Tr}(A)| \times \underbrace{N\left(\frac{I_n}{n}\right)}_{= \ a \geqslant 0}} \tag{4.72}$$

■

Solution 4.9. On écrit

$$f + g = f \circ \left(id + f^{-1} \circ g\right) \tag{4.73}$$

avec $f^{-1} \circ g$ de rang 1. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ g) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \star \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

avec $\alpha = \mathrm{Tr}(f^{-1} \circ g)$ et donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(id + g^{-1} \circ g)$ est inversible si et seulement si $1 + \alpha \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(f^{-1} \circ g) \neq 1$. ■

Solution 4.10. Par symétrie du problème, il suffit de déterminer les

$$a_{n,j} = |\{\text{chemins de longueur } n \text{ de } 1 \text{ vers } j \in \{2,3,4\}\}| \tag{4.75}$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a(n,1) \\ a(n,2) \\ a(n,3) \\ a(n,4) \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

On a alors

$$X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} X_n \tag{4.77}$$

car (en raisonnant modulo 4) il y a autant de chemins de longueur n+1 reliant 1 à j que de chemins de longueur n reliant 1 à j-1 + chemins de longueur n reliant 1 à j+1. d'où $X_n = A^n X_0$ avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} \tag{4.79}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

On a $B^2 = I_2$ et on montre par récurrence

$$\left\{\begin{array}{ll} A^{2p} = 2^{2p-1}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix} & p \geqslant 1 \\ A^{2p+1} = 2^{2p}\begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} & p \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{4.81}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} a(2p,1) = 2^{2p-1} = a(2p,3) \\ a(2p,2) = 0 = a(2p,4) \\ a(2p+1,1) = 0 = a(2p+1,3) \\ a(2p+1,4) = 2^{2p} = a(2p+1,4) \end{array}} \tag{4.82}$$

Ici, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.83}$$

En deux itérations, il y a chaque fois deux possibilités pour relier deux sommets différents de même partié, et 3 pour revenir au même sommet. On a donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_8 + 2 \begin{pmatrix} B & B & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \end{pmatrix} \tag{4.84}$$

On applique le binôme de Newton pour calculer les puissances paires de A, puis on déduit les puissances impaires en multipliant par A. ■

Solution 4.11. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Supposons $AX = 0$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0 \Rightarrow -a_{i,i} x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j \tag{4.85}$$

donc

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j \right| = |a_{i,i} x_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j} x_j| \tag{4.86}$$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$x_{i_0} = \max \{|x_i|, i \in [\![1, n]\!]\} \tag{4.87}$$

On a alors

$$|a_{j,i_0}| \, |x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i_0,j}| \tag{4.88}$$

D'après l'hypothèse, on a $|x_{i_0}| = 0$ donc $X = 0$ et A est inversible.

Il faut l'inégalité stricte, un contre-exemple est donnée par une ligne nulle. ■

Remarque 4.5. *Si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $|a_{j,j}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$ alors $A^\mathsf{T} \in GL_n(\mathbb{C})$ et donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$.*

Solution 4.12. On écrit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$
\begin{aligned}
i \wedge j &= \sum_{k \mid i \wedge j} \varphi(k) && (4.89)\\
&= \sum_{\substack{k \mid i\\ k \mid j}} \varphi(k) && (4.90)\\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} b_{k,j} \varphi(k) && (4.91)
\end{aligned}
$$

avec $b_{k,i} = 1$ si $k \mid i$ et 0 sinon. On a alors, si $A = (i \wedge j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $A = B^\top C$ avec $B = (b_{k,i})_{1 \leqslant i,k \leqslant n}$ (triangulaire supérieure) et $C = (\varphi(k) b_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant n}$ (triangulaire supérieure). Donc

$$
\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(i)} \tag{4.92}
$$

■

Solution 4.13. Pour l'unicité, si $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ telles que proposées. Comme A est inversible, on a $\det(A) = \det(L_i)\det(U_i) \neq 0$ pour $i\{1,2\}$ et donc L_i et U_i sont inversibles. Ainsi,

$$
L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{C}) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}) \tag{4.93}
$$

avec des 1 sur la diagonale, c'est donc I_n, d'où l'unicité.

Pour l'existence, on travaille par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour $n = 1$ on a $A = (1) \times (a_{1,1})$. Soit $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ vérifiant l'hypothèse, alors A_n vérifie l'hypothèse $A_n = L_n U_n$ avec

$$
A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & Y \\ X^\top & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \tag{4.94}
$$

On veut

$$
A_{n+1} = \begin{pmatrix} & 0 \\ L' & \vdots \\ & 0 \\ X_1^\top & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U' & & & Y_1 \\ 0 & \dots & 0 & u_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \tag{4.95}
$$

On a $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, par produits par blocs, on a $A_n = L'U' = L_n U_n$ et par unicité, $L' = L_n$ et $U' = U_n$. On a $X^\top = X_1^\top U'$ et donc $X_1^\top = X^\top U_n^{-1}$ et $Y = L_n Y_1$ donc $Y_1 = L_n^{-1} Y$.

Enfin, $a_{n+1,n+1} = X_1^\intercal Y_1 + u_{n+1,n+1}$ et donc

$$u_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1} - X_1^\intercal Y_1 = a_{n+1,n+1} - X^\intercal U_n^{-1} L_n^{-1} Y \tag{4.96}$$

Réciproquement, en définissant ainsi U et L, on a bien $A = Lu$ en remontant les calculs. ■

Solution 4.14. On a $\sum_{k\in A_i} a_k - \sum_{k\in B_i} a_k = 0$ (combinaison linéaire des a_k avec des coefficients ± 1), donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \pm 1 \\ \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\,A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{pmatrix}}_{=\,X} = 0 \tag{4.97}$$

Sur chaque ligne, il y a n fois 1 et n fois -1 (car les A_i et B_i sont disjoints). On veut montrer que $X = \alpha \mathbf{1}$. On a $X \in \ker(A)$ et $\mathbf{1} \in \ker(A)$ (car il y a n 1 et n -1 par ligne). On veut donc montrer que $\dim(\ker(A)) = 1$, soit $\mathrm{rg}(A) = 2n$.

On doit donc montrer qu'il existe une sous-matrice de taille $2n$ inversible car $\dim(\ker(A)) \geqslant 1$. Comme on est bloqué par les ± 1, on se place dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit donc

$$\overline{B_n} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \dots & \dots & \overline{1}1 \\ \overline{1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \overline{1}1 \\ \overline{1}1 & \dots & \dots & \overline{1}1 & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \tag{4.98}$$

Si $\det(\overline{B_n}) \neq 0$, on a $\det(B_n) \neq 2k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où B_n est obtenue en enlevant à A sa dernière ligne et sa dernière colonne, et donc $\det(A) \neq 0$.

On cherche un polynôme annulateur de $\overline{B_n}$. On a

$$\left(\overline{B_n}+\overline{I_{2n}}\right)^2=\overline{B_n}^2+2\overline{B_n}+I_{2n}=\begin{pmatrix}\overline{1} & \dots & \overline{1}\\ \vdots & & \vdots\\ \overline{1} & \dots & \overline{1}\end{pmatrix}^2=2n\begin{pmatrix}\overline{1} & \dots & \overline{1}\\ \vdots & & \vdots\\ \overline{1} & \dots & \overline{1}\end{pmatrix}=\left(\overline{0}\right) \tag{4.99}$$

Ainsi,

$$\overline{B_n}\left(\overline{B_n}+2\overline{I_{2n}}\right)=-\overline{I_{2n}}=\overline{I_{2n}} \tag{4.100}$$

donc $\overline{B_n}\in GL_n\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ et donc $B_n\in GL_{2n}(\mathbb{R})$, ce qui démontre bien que $\mathrm{rg}(A)=2n$ et $\ker(A)=\mathrm{Vect}(\mathbf{1})$, d'où

$$\boxed{a_1=\dots=a_{2n+1}} \tag{4.101}$$

■

Solution 4.15. On note $T_{i,j}(\lambda)=I_n+\lambda E_{i,j}$ pour $i<j$. On rappelle que la multiplication à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$ remplace la i-ième ligne de la matrice L_i par $L_i+\lambda L_j$: on ajoute à une ligne λ fois une ligne d'indice supérieur. La multiplication à droite par $T_{i,j}(\lambda)$ remplace la j-ième colonne de la matrice C_j par $C_j+\lambda C_i$: on ajoute à une colonne λ foi une colonne d'indice inférieur. Ces matrices sont des matrices de transvection.

On note aussi $D_i(\lambda)$ la matrice de dilatation qui contient des 1 sur la diagonale sauf en i position où il y a un λ. On rappelle que la multiplication à gauche par $D_i(\lambda)$ revient à multiplier L_i par λ et la multiplication à droite revient à multiplier C_i par λ.

Sur la première colonne de M, il y a au moins un coefficient non nul car $M\in GL_n(\mathbb{C})$. Soit

$i_1 = \max\{i \in [\![, n]\!], m_{i,1} \neq 0\}$. On effectue alors

$$D_{i_1}\left(\frac{1}{m_{i_1,1}}\right) M = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \star & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \tag{4.102}$$

Par produite de transvections (qui sont des matrices triangulaires supérieures, i.e. dans $\mathcal{T}_n^+$) à gauche, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \tag{4.103}$$

Par produite de transvections $\in \mathcal{T}_n^+$ à droite, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \tag{4.104}$$

Soit $M' \in GL_n(\mathbb{C})$ la matrice extraite de M en ôtant la première colonne et la i_1-ième ligne. On procède par récurrence avec M'. Donc il existe $\sigma \in \Sigma_n, (T, T') \in (\mathcal{T}_n^+)^2$ telle que

$$\boxed{M = TP_\sigma T'} \tag{4.105}$$

Montrons que tout matrice de $\mathcal{T}_n^+$ inversible est produit de matrices de transvections dans $\mathcal{T}_n^+$ et de dilatations.

Soit $T \in \mathcal{T}_n^+ \cap GL_n(\mathbb{C})$ avec

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \tag{4.106}$$

On a $t_{1,1} \neq 0$ car sinon la colonne 1 est nulle. On a donc

$$TD_1\left(\frac{1}{t_{1,1}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \star & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \star \end{pmatrix} \tag{4.107}$$

Puis, par produit de transvections à droite, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \star \end{pmatrix} \tag{4.108}$$

On procède ensuite par récurrence sur n, et on a

$$T \times B_1 \times \cdots \times B_l = I_n \tag{4.109}$$

donc

$$T = B_l^{-1} \times \cdots \times B_1^{-1} \tag{4.110}$$

où $B_i \mathcal{T}_n^+$ transvection ou dilatation.

Soit donc (T, T', P_σ) vérifiant les hypothèses telles que $M = TP_\sigma T'$, alors on a

$$T^{-1}MT'^{-1} = P_\sigma = \underbrace{B_l^{-1} \times \cdots \times B_1^{-1}}_{\text{transvections ou dilatations}} \times M \times \underbrace{B_l'^{-1} \times \cdots \times B_1'^{-1}}_{\text{transvections ou dilatations}} \tag{4.111}$$

Nécessairement, on a $\sigma(1) = i$ défini plus haut. Donc de proche en proche, σ est univoquement déterminée.

Cependant, on peut écrire

$$I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times I_2 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times I_2 \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.112}$$

donc il n'y a pas unicité de T et T'. ■

Solution 4.16.

1. Soit $A \in J \cap GL_n(\mathbb{K})$, on a pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$M = \underbrace{\underbrace{M \times A}_{\in J} \times A^{-1}}_{\in J} \in J \tag{4.113}$$

2. Soit $A_0 \in J \setminus \{0\}$ de rang $r \neq 0$. Il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A_0P = J_r \in J$, on a alors

$$\boxed{J_r \times J_1 = J_1 \in J} \tag{4.114}$$

3. Deux matrices de rang 1 sont équivalentes donc toutes les matrices de rang 1 son dans J. Or si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit

$$\boxed{A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \underbrace{a_{i,j}E_{i,j}}_{\text{de rang 1 ou 0}} \in J} \tag{4.115}$$

■

Solution 4.17. On a

$$(\lambda A + I_n)(\lambda B + I_n) = \lambda^2 AB + \lambda A + \lambda B + I_n = I_n \tag{4.116}$$

donc $\lambda B + I_n$ est inversible. De plus, $A(\lambda B + I_n) = -B$ donc

$$A = -\left(\lambda B + I_n\right)^{-1} B \tag{4.117}$$

Or $(\lambda B + I_n)^{-1}$ et B commutent. En effet, comme $\lambda \neq 0$, on a

$$B(\lambda B + I_n)^{-1} = \left(\left[B + \frac{1}{\lambda I_n}\right] - \frac{1}{\lambda} I_n\right)(\lambda B + I_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n - \frac{1}{\lambda}(\lambda B + I_n)^{-1} \tag{4.118}$$

et on montre de même que

$$(\lambda B + I_n)^{-1} B = \frac{1}{\lambda} I_n - \frac{1}{\lambda}(\lambda B + I_n)^{-1} \tag{4.119}$$

Ainsi,

$$\boxed{BA = -B(\lambda B + I_n)^{-1} B = -(\lambda B + I_n)^{-1} BB = AB} \tag{4.120}$$

■

Solution 4.18. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$

On a $AX = Y$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n & = & y_1 & [1] \\ a_2 x_1 + x_2 & = & y_2 & [2] \\ \vdots & & & \\ a_n x_1 + x_n & = & y_n & [n] \end{cases} \tag{4.121}$$

si et seulement si $(L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n a_i L_i)$

$$\begin{cases} \left(1 + \sum_{i=2}^n a_i^2\right) x_1 & = & y_1 + \sum_{i=2}^n a_i y_i & [1] \\ a_2 x_1 + x_2 & = & y_2 & [2] \\ \vdots & & & \\ a_n x_1 + x_n & = & y_n & [n] \end{cases} \tag{4.122}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n}{1 + \sum_{i=2}^n a_i^2} \\ x_j = y_j - a_j x_1 & \forall j \in [\![2, n]\!] \end{cases} \tag{4.123}$$

En posant

$$\lambda = \frac{1}{1 + \sum_{i=2}^n a_i^2} \tag{4.124}$$

cela équivaut à (en posant $a_1 = 1$)

$$\begin{cases} x_1 = \lambda(y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n) \\ x_j = \lambda \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} a_i y_i - \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} a_i^2\right) y_j \right] & \forall j \in [\![2, n]\!] \end{cases} \tag{4.125}$$

Donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 4.6. *On pourrait se poser la question si $A \in GL_n(\mathbb{C})$? Si $1 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$, on sait que $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Cependant, on vérifie que si $X = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & \ldots & -a_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} \neq 0$, on a $AX = 0$ et donc $A \notin GL_n(\mathbb{C})$.*

Solution 4.19.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \in \ker(A) \cap H$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ et $AX = 0$. Notons que l'on a

$$A + A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} = N \tag{4.126}$$

On a

$$NX = -X \tag{4.127}$$

et $N^\mathsf{T} = N$.

On a alors

$$X^\mathsf{T} AX + X^\mathsf{T} A^\mathsf{T} X = X^\mathsf{T} NX = -X^\mathsf{T} X = -\sum_{i=1}^n x_i^2 \tag{4.128}$$

Comme $AX = 0$, on a aussi $X^\top AX = 0$ et $X^\top A^\top X = (AX)^\top X = 0$ donc on a $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ d'où $x_i = 0$ et $X = 0$. Donc

$$\boxed{\ker(u) \cap H} = \{0\} \tag{4.129}$$

Donc $\dim(\ker(u)) \in \{0, 1\}$ et le théorème du rang assure alors que $\text{rg}(A) \in \{n-1, n\}$.

2. Comme $A + A^\top = N$, on a $A = \frac{1}{2}N + S$ avec $S \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Or, pour $S = 0$, on a

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - I_n \tag{4.130}$$

et $(N + I_n)^2 = n(M + I_n)$ donc $N \in GL_n(\mathbb{R})$. De même, pour

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.131}$$

on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.132}$$

et $\text{rg}(A) = n - 1$.

Donc on peut avoir les deux possibilités.

■

Solution 4.20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ de range 1 telle que $\text{Tr}(u) = \lambda$. On a $\dim(\ker(u)) = n - 1$

En prenant une base de $\ker(u)$ $(e_1, \dots, e_{n-1})$ que l'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.133}$$

Si $\lambda \neq 0$, posons $f_n = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_{n-1} e_n + e_n$, on a

$$u(f_n) = \lambda f_n \tag{4.134}$$

si et seulement si

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \lambda e_n = \lambda f_n \tag{4.135}$$

On pose $\beta_1 = \frac{\alpha}{\lambda}, \dots, \beta_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\lambda}$ et si $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1}, f_n)$, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.136}$$

Si $\lambda = 0$, il existe $i_0 \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$ (sinon $\operatorname{rg}(u) = 0$). On pose $f_n = e_n$ et $f_1 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1} \in \ker(u) \setminus \{0\}$ et on complète $(f_1, \dots, f_{n-1})$ en une base de $\ker(u)$. On pose $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ base de $\mathbb{C}^n$ et on a alors

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.137}$$

Ainsi, dans les deux cas, deux matrices sont de rang 1 et de même trace si et seulement si elles sont semblables. ■

Solution 4.21.

1. Soit $M \in F$, telle que $\mathrm{rg}(M) = r$. M est équivalente à J_r, donc il existe $(P_0, Q_0) \in GL_n(\mathbb{R})^2$ telle que $P_0^{-1} J_r Q_0 = M \in F$.

2. Soit

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad F &\to F_0 \\ M &\mapsto P_0 M Q_0^{-1} \end{aligned} \tag{4.138}$$

est linéaire surjective par définition de F_0 de réciproque $\varphi^{-1}\colon M_0 \to P_0^{-1} M_0 Q_0$ donc F et F_0 sont isomorphes.

Pour tout $M \in F$, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(\varphi(M))$: φ étant bijective, on a $r = \max\{\mathrm{rg}(M_0) | M_0 \in F_0\}$

3. Il suffit de choisir les coefficients de B et C donc

$$\boxed{\dim(G_0) = n(n-r)} \tag{4.139}$$

4. On écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda I_r & B^\mathsf{T} \\ B & C \end{pmatrix} = \lambda J_r + M_0 \in F_0 \tag{4.140}$$

Si on avait

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & \lambda I_r & & \vdots \\ & & & b_{j,r} \\ \hline b_{i,1} & \dots & b_{i,r} & c_{i,j} \end{array}\right) \neq 0 \tag{4.141}$$

(déterminant d'une sous-matrice de taille $r+1$ de la matrice précédente), on aurait

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \lambda I_r & B^\mathsf{T} \\ B & C \end{pmatrix} \geqslant r + 1 > r \tag{4.142}$$

ce qui est exclu d'après 2.

5. En effectuant $L_{r+1} \leftarrow L_{r+1} - \frac{b_{i,1}}{\lambda} L_1 - \cdots - \frac{b_{i,r}}{\lambda} L_r$, en notant $f(\lambda) = c_{i,j} - \sum_{k=1}^{r} \frac{b_{i,k}}{\lambda} b_{j,k}$, on obtient

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & \lambda I_r & & \vdots \\ & & & b_{j,r} \\ \hline 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{array}\right) = 0 \tag{4.143}$$

D'où $f(\lambda) = 0$ et comme $\lambda \neq 0$, on a

$$\lambda f(\lambda) = 0 = \lambda c_{i,j} - \sum_{k=1}^{r} b_{i,k} b_{j,k} \tag{4.144}$$

qui est nulle sur $\mathbb{R}^*$ donc $c_{i,j} = 0$ et $\sum_{k=1}^{r} b_{i,k} b_{j,k} = 0$. Ceci implique $C = 0$ et pour $i = j$, on a $\sum_{k=1}^{r} b_{j,k}^2 = 0$ donc $B = 0$.

6. On a donc $G_0 \cap F_0 = \{0\}$ ($\dim(G_0) = n(n-r)$). G_0 et F_0 sont en somme directe, donc

$$\dim(G_0 \oplus F_0) = \dim(G_0) + \dim(F_0) \leqslant n^2 \tag{4.145}$$

donc

$$\boxed{\dim(F) = \dim(F_0) \leqslant n^2 - n(n-r) = nr} \tag{4.146}$$

7. Si $F \cap GL_n(\mathbb{R}) = \emptyset$, on a $r \leqslant n-1$ et $\dim(F) \leqslant n(n-1)$. Par contraposée, si $\dim(F) \geqslant n^2 - n + 1$, on a $F \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

8. Soit

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B^{\mathsf{T}} \\ B & C \end{pmatrix} \middle| B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \right\} \tag{4.147}$$

sous-$\mathbb{R}$-espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par les mêmes arguments que précédemment, on a $G_1 \cap F_0 = \{0\}$ et $\dim_{\mathbb{R}}(G_1) = 2n(n-r)$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = 2n^2$ donc

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} F_0 = 2 \dim_{\mathbb{C}} F_0 \leqslant 2nr} \tag{4.148}$$

Le résultat est donc encore valable.

■

Solution 4.22. On a $f(I_n) = f(I_n)^2$ donc $f(I_n \in \{0, 1\}$. Si $f(I_n) = 0$, alors $f = 0$ ce qui est exclu.

Si M est inversible, on a

$$f(M \times M^{-1}) = f(M) \times f(M^{-1}) = 1 \tag{4.149}$$

donc $f(M) \neq 0$.

Si M n'est pas inversible, posons $r = \text{rg}(M) \leqslant n-1$. M est équivalente la matrice nilpotente

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.150}$$

Donc il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2$ telles que $M = P^{-1}M'Q$. On a

$$f(M'^n) = (f(M'))^n = f(0) \tag{4.151}$$

Comme $f(0) = f(0)^2$, on a aussi $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 1$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $f(A \times 0) = f(A) \times f(0) = 1$ ce qui est impossible car f n'est pas constante. Donc $f(0) = 0$. Ainsi, $f(M') = 0$ et donc $f(M) = 0$. ■

Remarque 4.7. *f induit donc un morphisme de $(GL_n(\mathbb{C}), \times) \to (\mathbb{C}^*, \times)$.*

Remarque 4.8. *On peut montrer que pour $n \geqslant 2$, pour tout $i \neq j \in \{1, n\}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, il existe $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$,*

$$T_{i,j}(\lambda) = ABA^{-1}B^{-1} \tag{4.152}$$

en écrivant

$$\begin{aligned} T_{i,k}(\alpha)T_{k,j}(\beta)T_{i,k}(-\alpha)T_{k,j}(-\beta) = &(I_n + \alpha E_{i,k} + \beta E_{k,j} + \alpha\beta E_{i,j}) \\ &\times (I_n - \alpha E_{i,k} - \beta E_{k,j} + \alpha\beta E_{i,j}) \qquad (4.153) \\ =&I_n + \alpha\beta E_{i,j} \qquad (4.154) \end{aligned}$$

Il vient

$$f(T_{i,j}(\lambda)) = f(A)f(B)f(A)^{-1}f(B)^{-1} = 1 \tag{4.155}$$

Si $M \in GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme produit de transvections $T_{i,j}(\lambda)$ et de dilatations $D_n(\det(M))$.

Il vient $f(M) = f(D_n(\det(M)))$*. Or*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{C}^*, \times) & \to & (\mathbb{C}^*, \times) \\ & \alpha & \mapsto & f(D_n(\alpha)) \end{array} \tag{4.156}$$

est un morphisme de groupe (car $D_n(\alpha\beta) = D_n(\alpha)D_n(\beta)$*).*

Finalement, $f(M) = \varphi(\det(M))$.

Si de plus f *est continue,* φ *aussi et on peut montrer qu'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi(z) = z^k$.

5 Réduction des endomorphismes

Solution 5.1.

1. On a
$$f^k : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & A^k M \end{array} \tag{5.1}$$
donc pour tout polynôme P, on a $P(f) = P(A)M$ par combinaison linéaire. Si $P(A) = 0$, alors $P(f) = 0$. Donc si A est diagonalisable, f l'est aussi. Si $P(f) = 0$ alors avec $M = I_n$, on a $P(A) = 0$ et A est diagonalisable si f l'est.

   Même résultat avec g et B.

2. Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ tel que $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{i,j} X_i Y_j^\mathsf{T} = 0$. Alors on a
$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i \right) Y_j^\mathsf{T} = 0 \tag{5.2}$$
Soit $k \in [\![1,n]\!]$, la k-ième ligne de notre matrice est
$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_{i,k} \right) Y_j^\mathsf{T} = 0 \tag{5.3}$$
Puisque $(Y_j^\mathsf{T})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est libre, on a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_{i,k} = 0 \tag{5.4}$$
Puisque $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda_{i,j} = 0$, d'où le résultat.

3. Puisque B est diagonalisable, B^T l'est aussi. On prend $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de A avec pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$. Prenons $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de B^T avec pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $B^\mathsf{T} Y_j = \mu_j Y_j$ et $Y_j B^\mathsf{T} = \mu_j Y_j^\mathsf{T}$. Ainsi,
$$h\left(X_i Y_j^\mathsf{T}\right) = A X_i Y_j^\mathsf{T} B = \mu_j A X_i Y_j^\mathsf{T} = \mu_j \lambda_i X_i Y_j^\mathsf{T} \tag{5.5}$$
et les $(X_i Y_j^\mathsf{T})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ forment une base de E d'après ce qui précède. Donc h est diagonalisable. Réciproquement, on a le contre-exemple $A = 0$ et B non diagonalisable : h est l'endomorphisme nul.

$\blacksquare$

Remarque 5.1. *Généralement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit*

$$\begin{array}{rccc} h_{A,B}: & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & AMB \end{array} \tag{5.6}$$

La matrice de $h_{A,B}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'appelle le produit tensoriel de A et B noté

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

On a toujours

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \,\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) \tag{5.8}$$

Si A et B sont diagonalisables, $h_{A,B}$ l'est.

Solution 5.2. On pose $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$. Il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ telles que $UP_1 + VQ_1 = 1$. On a $MD = PQ$ donc $M = DP_1Q_1 = PQ_1 = P_1Q$.

1. Soit $x \in \ker(D(f))$. On a

$$P(f)(x) = DP_1(f)(x) = P_1(f) \circ D(f)(x) = 0 \tag{5.9}$$

De même pour $Q(f)(x) = 0$, donc

$$\ker(D(f)) \subset \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) \tag{5.10}$$

Soit $x \in \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f))$. On a

$$DUP_1 + DVQ_1 = 0 \tag{5.11}$$

d'où

$$UP + VQ = 0 \tag{5.12}$$

et

$$D(f)(x) = UP(f)(x) + VQ(f)(x) = 0 \tag{5.13}$$

Donc

$$\boxed{\ker(D(f)) = \ker(P(f)) \cap \ker(M(f))} \tag{5.14}$$

2. On a $P \mid M$ donc $\ker(P(f)) \subset \ker(M(f))$. De même, $\ker(Q(f)) \subset \ker(M(f))$ donc

$$\ker(P(f)) + \ker(Q(f)) \subset \ker(M(f)) \tag{5.15}$$

Si $x \in \ker(M(f))$, on a

$$x = \underbrace{UP_1(f)(x)}_{\in \ker(Q(f))} + \underbrace{VQ_1(f)(x)}_{\in \ker(P(f))} \tag{5.16}$$

car $M = P_1 Q = Q_1 P$. Donc

$$\boxed{\ker(M(f)) = \ker(P(f)) + \ker(Q(f))} \tag{5.17}$$

3. Si $i \in \operatorname{Im}(P(f))$, il existe $x \in E$ tel que $y = P(f)(x) = D(f) \circ P_1(f)(x) \in \operatorname{Im}(D(f))$. De même pour $\operatorname{Im}(Q(f)) \subset \operatorname{Im}(D(f))$. Donc

$$\operatorname{Im}(P(f)) + \operatorname{Im}(Q(f)) \subset \operatorname{Im}(D(f)) \tag{5.18}$$

Soit $y \in \operatorname{Im}(D(f))$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = D(f)(x) = \underbrace{UP(f)(x)}_{\in \operatorname{Im}(P(f))} + \underbrace{VQ(f)(x)}_{\in \operatorname{Im}(Q(f))} \tag{5.19}$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{Im}(D(f)) = \operatorname{Im}(P(f)) + \operatorname{Im}(Q(f))} \tag{5.20}$$

4. On a $P \mid M$ d'où $\operatorname{Im}(M(f)) \subset \operatorname{Im} P(f)$ et $\operatorname{Im}(M(f)) \subset \operatorname{Im} Q(f)$. Ainsi,

$$\operatorname{Im}(M(f)) \subset \operatorname{Im}(Q(f)) \cap \operatorname{Im}\operatorname{Im}(Q(f)) \tag{5.21}$$

Si $y \in \operatorname{Im}(P(f)) \cap \operatorname{Im}(Q(f))$ alors il existe $(x, x') \in E^2$ tels que

$$y = P(f)(x) = P(f)(x') \tag{5.22}$$

Or $M = P_1 Q = PQ_1$ donc

$$y = UP_1(f)(y) + VQ_1(f)(y) = UP_1Q(f)(x') + VQ_1P(f)(x) \in \operatorname{Im}(M(f)) \tag{5.23}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Im}(M(f)) = \operatorname{Im}(P(f)) \cap \operatorname{Im}(Q(f))} \tag{5.24}$$

■

Solution 5.3. On a

$$A\left(\frac{-1}{5}A+\frac{4}{5}I_n\right)=I_n \tag{5.25}$$

donc A est inversible.

$$X^2-4X+5=(X-2+\mathrm{i})(X-2-\mathrm{i}) \tag{5.26}$$

est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{n_2}\end{pmatrix} \tag{5.27}$$

où $\lambda_1=2+\mathrm{i}$ et $\lambda_2=2-\mathrm{i}$. $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Tr}(A)=n_1\lambda_1+n_2\lambda_2\in\mathbb{R}$

Donc

$$\Im(n_1\lambda_1+n_2\lambda_2)=0=n_1-n_2 \tag{5.28}$$

Ainsi $n_1=n_2$ donc n est pair.

A est semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \overline{\lambda_1} & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \overline{\lambda_1}\end{pmatrix} \tag{5.29}$$

Soit

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 4\end{pmatrix} \tag{5.30}$$

On a $\chi_{A_0}=X^2-4X+5$. A_0 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et est semblable à

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \overline{\lambda_1}\end{pmatrix} \tag{5.31}$$

Donc A est semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$\begin{pmatrix} A_0 & & \\ & \ddots & \\ & & A_0 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

donc A est semblable sur $\mathbb{R}$ à cette même matrice.

Soit $l \in \mathbb{N}$, on a

$$X^l = Q_p(X^2 - 4X + 5) + \alpha_l X + \beta_l \tag{5.33}$$

par division euclidienne. Donc

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \tag{5.34}$$

On a notamment

$$\begin{cases} (2+\mathrm{i})^l = \alpha_l(2+\mathrm{i}) + \beta_l \\ (2-\mathrm{i})^l = \alpha_l(2-\mathrm{i}) + \beta_l \end{cases} \tag{5.35}$$

On a donc

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_l = \frac{(2+\mathrm{i})^l - (2-\mathrm{i})^l}{2\mathrm{i}} \\ \beta_l = (2+\mathrm{i})^l - \frac{(2+\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\left[(2+\mathrm{i})^l - (2-\mathrm{i})^l\right] \end{cases}} \tag{5.36}$$

■

Remarque 5.2. *On a* $2+\mathrm{i} = \sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *avec* $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in]0,\pi[$*. Donc* $\alpha_l = \left(\sqrt{5}\right)^l \sin(l\theta)$*.*

Remarque 5.3. *On a*

$$I_n - 4A^{-1} + 5A^{-2} = 0 \tag{5.37}$$

De même, $\left(X - \frac{1}{2-\mathrm{i}}\right)\left(X - \frac{1}{2+\mathrm{i}}\right)$ *annule* A^{-1} *et on a pour tout* $l \in -\mathbb{N}^*$*,*

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \tag{5.38}$$

Remarque 5.4. $(A - 2I_n)^2 = -I_n$ *donc* $\det(-I_n) = (-1)^n > 0$ *donc* n *est pair.*

Solution 5.4.

1. On a

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

et $\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T} \neq 0$ donc

$$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} \tag{5.40}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_n\end{pmatrix}^\mathsf{T} \neq 0$ associé à λ. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \tag{5.41}$$

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| > 0$ car $X \neq 0$. On a alors

$$|\lambda|\,|x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\,|x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| \tag{5.42}$$

donc

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1} \tag{5.43}$$

3. Soit $J_i = \{j \in [\![1,n]\!] | a_{i,j} > 0\}$. On a

$$|\lambda|\,|x_{i_0}| = \left|\sum_{j \in J_{i_0}}^{n} a_{i_0,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j \in J_{i_0}}^{n} a_{i_0,j}\,|x_j| \leqslant \left(\sum_{j \in J_{i_0}}^{n} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| = |x_{i_0}| \tag{5.44}$$

On a égalité partout donc pour tout $j \in J_{i_0}$, $|x_j| = |x_{i_0}|$ et $x_j = |x_{i_0}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. En reportant, on a

$$\lambda\,|x_{i_0}| = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j}\,|x_{i_0}| \tag{5.45}$$

donc

$$\boxed{\lambda = 1} \tag{5.46}$$

4. Si $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$, on a $i_0 \notin J_{i_0}$ car sinon $\lambda = 1$. Donc il existe $i_1 \in J_{i_0} \setminus \{i_0\}$ tel que $x_{i_1} = |x_{i_0}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \lambda x_{i_0}$. Ainsi, il existe $i_2 \neq i_1$ tel que $x_{i_2} = \lambda x_{i_1}$. De proche en proche, il existe $i_q \neq i_{q-1}$ tel que $x_{i_q} = \lambda x_{i_{q-1}}$ (avec $q \geqslant 1$) et $x_{i_q} = \lambda^q x_{i_0}$. Or

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N} & \to & [\![1,n]\!] \\ & k & \mapsto & i_k \end{array} \tag{5.47}$$

n'est pas injective. Donc il existe $k > l$ tel que $i_k = i_l$ et $x_{i_k} = \lambda^{k-k} x_{i_k}$ et $k - l > 1$ donc

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{U}_{k-l}} \tag{5.48}$$

5. L'identité convient, les matrices de permutation aussi. En effet, si $\sigma \in \Sigma_n$, on a $P_\sigma^{n!} = I_n$ donc les valeurs propres sont racines de $X^{n!} - 1$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P_\sigma) \subset \mathbb{U}_{n!}$.

Réciproquement, soit A stochastique telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset (\mathbb{U})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, supposons $|J_{i_0}| \geqslant 2$. D'après la décomposition de Dunford, il existe D diagonale et N nilpotente qui commutent telles que $A = D + N$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Si N est nilpotente d'indice $r \geqslant 2$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geqslant r$, on a

$$A^k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} N^j D^{k-j} = \sum_{j=1}^{r} \binom{k}{j} N^j D^{k-j} \tag{5.49}$$

Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on a

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^j}{j!} \tag{5.50}$$

Comme $N^{r-1} \neq 0$, on a

$$A^k \underset{k\to+\infty}{sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \tag{5.51}$$

et les coefficients de D^{k-r+1} sont bornés car $\mathrm{Sp}(D) \subset \mathbb{U}$.

Or, notons que si A et B sont stochastiques, AB l'est aussi (**1** est toujours valeur propre). Par récurrence, A^k l'est. Donc $A^k \in \mathcal{M}_n([0, 1])$, et l'équivalent est impossible si $r \geqslant 2$. Donc $r = 1$ donc $N = 0$ et $A = D$ est diagonalisable.

Les valeurs propres de A sont des racines de l'unité, soit m le ppcm des ordres de ces racines (dans $(\mathbb{U}, \times)$). On a alors

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \tag{5.52}$$

d'où

$$A^m = P \operatorname{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) P^{-1} \tag{5.53}$$

Notons $M = \max\limits_{j \in J_{i_0}} |a_{i_0,j}| < 1$ (car $|J_{i_0}| \geqslant 2$ donc pour tout $j \in J_{i_0}$, $a_{i_0,j} \neq 1$). On note $a_{i_0,i_0}^{(m)}$ le coefficient (i_0, i_0) de A^m. On a alors

$$a_{i_0,i_0}^{(m)} = 1 = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} a_{j,i_0}^{(m-1)} \leqslant M \sum_{j \in J_{i_0}} a_{j,i_0}^{(m-1)} \leqslant M \sum_{j=1}^{n} a_{j,i_0}^{(m-1)} = M \tag{5.54}$$

car A^{m-1} est stochastique. Donc $M = 1$ ce qui n'est pas possible (par définition de M). Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|J_i| = 1$ donc il existe un unique $j_i \in [\![1, n]\!]$ avec $a_{i,j_i} = 1$ et pour tout $j \neq j_i$, $a_{i,j} = 0$.

$i \mapsto j_i$ est injective, sinon $\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 1$ et $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

$\blacksquare$

Remarque 5.5. *On peut avoir* $|\lambda| < 1$ *pour la question 2, par exemple*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \tag{5.55}$$

On a $A^2 = A$ *et* $\mathrm{rg}(A) = 1$, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

Remarque 5.6. *Par exemple, pour 4, on a*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.56}$$

On a $\chi_A = X^2 - 1$ *et* $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

Remarque 5.7. *Si pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} > 0$ *(i.e. pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$, $J_i = [\![1,n]\!]$*). D'après 3, on a* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{U} = \{1\}$. *De plus, si* $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ *vérifie* $AX = X$, *d'après ce qui précède, on a* $x_1 = \cdots = x_n$ *et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1.*

Solution 5.5.

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. On a $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B^{\mathsf{T}})$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ. On pose $M = XY^{\mathsf{T}}$. Alors

$$\Phi_{A,B}(M) = AXY^{\mathsf{T}} - XY^{\mathsf{T}}B = (\lambda - \mu)XY^{\mathsf{T}} = (\lambda - \mu)M \tag{5.57}$$

donc

$$\boxed{\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(\Phi_{A,B})} \tag{5.58}$$

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathrm{Sp}(\Phi_{A,B})$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que l'on ait $AM - MB = \alpha M$ d'où $AM = M(\alpha I_n + B)$. Par récurrence, $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$ et par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ on a $P(A)M = MP(\alpha I_n + B)$. En particulier, on prend $P = \chi_A$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$0 = M\chi_A(\alpha I_n + B) \tag{5.59}$$

On a $M \neq 0$ donc $\chi_A(\alpha I_n + B)$ n'est pas inversible. On écrit

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \tag{5.60}$$

d'où

$$\chi_A(\alpha I_n + B) = \prod_{k=1}^{n}(B + (\alpha - \lambda_k)I_n) \tag{5.61}$$

donc il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $B + (\alpha - \lambda_{k_0})I_n$ est non inversible. Donc $\lambda_{k_0} - \alpha \in \mathrm{Sp}(B)$ et donc α est une différence d'un élément de $\mathrm{Sp}(A)$ et de $\mathrm{Sp}(B)$.

2. On forme

$$\begin{array}{cccc} f_A: & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & AM \end{array} \tag{5.62}$$

et

$$\begin{array}{cccc} g_B: & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & MB \end{array} \tag{5.63}$$

Toujours par récurrence et combinaison linéaires, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(f_A)M = P(A)M \tag{5.64}$$

Si $P(A) = 0$, on a $P(f_A) = 0$. Si $P(f_A) = 0$, pour $M = I_n$, on a $P(A) = 0$. De même pour B. Donc $\Pi_A = \Pi_{f_A}$ (polynômes minimaux) et A est diagonalisable si et seulement si $f_A(M)$ est diagonalisable. f_A et g_B commutent car

$$(f_A \circ g_B)(M) = AMB = (g_B \circ f_A)(M) \tag{5.65}$$

Donc f_A et g_B sont codiagonalisables et donc $\Phi_{A,B}$ l'est.

■

Remarque 5.8. *Si $(X_1, \dots, X_n)$ (respectivement $(Y_1, \dots, Y_n)$) est une base de vecteurs propres de A (respectivement de $B^\top$), alors $(X_i Y_j^\top)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de vecteurs propres pour $\Phi_{A,B}$.*

Remarque 5.9. *C'est faux sur $\mathbb{R}$, par exemple*

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.66}$$

On a $\mathrm{Sp}_\mathbb{R} = \emptyset$ et $\Phi_{A,A}(I_2) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Sp}_{\Phi_{A,A}}$.

Remarque 5.10. *Si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, soit $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $BX = \lambda X$. On a*

$$AM_{i,j} = M_{i,j}(B + \lambda_{i,j} I_n) \tag{5.67}$$

avec $\Phi_{A,B}(M_{i,j}) = \lambda_{i,j} M_{i,j}$. Donc

$$AM_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j}) M_{i,j} X \tag{5.68}$$

Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $X_0 = MX$. $M \in \mathrm{Vect}(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donc

$$\mathrm{Vect}(M_{i,j}X)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = M_{n,1}(\mathbb{C}) \tag{5.69}$$

On peut donc en extraire une base : c'est une base de vecteurs propres de A.

Solution 5.6.

1. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k M = \theta^k M A^k$, or F est un sous-espace vectoriel donc par combinaisons linéaires, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$.
2. Soit $X \in \ker(A - \lambda I_n)$. On a $AMX = \theta MAX = \lambda\theta MX$. On a donc $MX \in \ker(A - \lambda\theta I_n)$.

   Si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a $\theta\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \ker(A - \lambda I_n)$, alors $\ker(A - \lambda\theta I_n) = \{0\}$. Donc $MX = 0$. Or les vecteurs propres forment une famille génératrice donc $M = 0$ et $F = \{0\}$.

   S'il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\theta\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Soit X_1 un vecteur propre de A associé à λ_0. On complète (X_1) en $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ base de $\mathbb{C}^n$ formé de vecteurs propres de A. On définit $MX_1 = Y_1 \in \ker(A - \lambda_0\theta I_n) \setminus \{0\}$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a $MX_i = 0$. Ainsi, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a

   $$AMX_i = 0 = \theta MAX_i = \theta\lambda_i MX_i \tag{5.70}$$

   et

   $$AMX_1 = AY_1 = \lambda_0\theta Y_1 = \theta MAX_1 = \theta\lambda_0 X_1 \tag{5.71}$$

   Donc $M \neq 0$ et $M \in F$. Finalement, on a $F = \{0\}$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \theta\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

3. On écrit $\chi_A = \prod_{j=1}^r (X-\lambda_j)^{m_j}$ avec λ_j distincts et $m_j \geqslant 1$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^r \ker(A-\lambda_j I_n)^{m_j} \tag{5.72}$$

Supposons $\theta \neq 0$. Si $M \in F$ et si $x \in \ker(A-\lambda_j I_n)^{m_j}$. On a

$$\left(\left(\frac{X}{\theta}-\lambda_j\right)^{m_j}\right)(A)(Mx) = M\left(A-\lambda_j I_n\right)^{m_j}(x) = 0 \tag{5.73}$$

Donc

$$Mx \in \ker\left(\frac{1}{\theta}A-\lambda_j I_n\right)^{m_j} = \ker\left(A-\theta\lambda_j I_n\right)^{m_j} \tag{5.74}$$

car $\theta \neq 0$.

De plus, $\ker(A-\theta\lambda_j I_n)^{m_j} \neq \{0\}0$ si et seulement si $\ker(A-\theta\lambda_j I_n) \neq \{0\}$ car

$$\det\left[(A-\theta\lambda_j I_n)^{m_j}\right] = \det\left[(A-\theta\lambda_j I_n)\right]^{m_j} \tag{5.75}$$

Si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\lambda\theta \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, soit $x \in \ker(A-\lambda_j I_n)^{m_j}$. On a

$$Mx \in \ker(A-\theta\lambda_j I_n)^{m_j} = \{0\} \tag{5.76}$$

donc $M=0$ car $\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^r \ker(A-\lambda_j I_n)^{m_j}$.

S'il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\lambda_0\theta \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, soit $x_1 \in \ker(A-\lambda_0 I_n) \neq \{0\}$. On pose

$$Mx_1 = y_1 \in \ker(A-\lambda_0\theta I_n) \setminus \{0\} \tag{5.77}$$

On complète (x_1) en $\mathcal{B} = (x_1,\dots,x_n)$ base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs appartenant à

$$\bigcup_{j=1}^r \ker(A-\lambda_j I_n)^{m_j} \tag{5.78}$$

On a pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $Mx_i = 0$. On a $M \neq 0$ et

$$AMx_1 = Ay_1 = \theta\lambda_0 y_1 = \theta\lambda_0 Mx_1 \tag{5.79}$$

Pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, on a $AMx_i = 0$ si $x_i \in \ker(A-\lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$ et si $\lambda_{j_i} \neq \lambda_0$. On a $Ax_i \in \ker(A-\lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$ donc

$$Ax_i \in \mathrm{Vect}(x_2,\dots,x_n) \tag{5.80}$$

et $MAx_i = 0$ donc $AMx_i = \theta MAx_i$.

Si $F \neq \{0\}$, il existe $M \neq 0$ tel que $AM = \theta MA$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$. En particulier, pour $P = \chi_A$, on a

$$M\chi_A(\theta A) = 0 \tag{5.81}$$

$M \neq 0$ et donc $\chi_A(\theta A)$ n'est pas inversible. Si $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$, $(\theta A - \lambda_k I_n)$ est non inversible, d'où

$$\boxed{\lambda_k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\theta A)} \tag{5.82}$$

■

Solution 5.7. On a

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \tag{5.83}$$

$$= (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \tag{5.84}$$

$$= (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \tag{5.85}$$

$$= (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \tag{5.86}$$

$$= (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \tag{5.87}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \tag{5.88}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \tag{5.89}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda^2+1) \tag{5.90}$$

où l'on a fait successivement les opérations suivantes : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i \in \{2,3,4\}$, développement selon la première ligne, $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$, $L_i \leftarrow L_i + L_1$ pour $i \in \{2,3\}$, développement selon la première colonne.

χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable. On trouve ensuite un vecteur propre dans chaque sous-espace propre (qui sont de dimension un). ■

Solution 5.8.

1. On a $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $AX = \lambda X$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i\neq 1} a_i x_i &= \lambda x_1 \\ \vdots & \\ \sum_{i\neq j} a_i x_i &= \lambda x_1 \\ \vdots & \\ \sum_{i\neq n} a_i x_i &= \lambda x_1 \end{cases} \tag{5.91}$$

Soit $S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Ce système équivaut à

$$S = (\lambda + a_1)x_1 = \cdots = (\lambda + a_n)x_n \tag{5.92}$$

Si $S = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda = -a_i$ ou $x_i = 0$ (et $X \neq 0$). Les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, il existe un unique $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda = -a_{i_0}$ et pour tout $i \neq i_0$, on a $x_i = 0$. En reportant, on a $S = 0 = \lambda x_{i_0}$ donc $\lambda = 0$ ce qui est impossible car $0 = \lambda = -a_{i_0} > 0$.

Donc $S \neq 0$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda + a_i \neq 0$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \frac{S}{\lambda + a_i}$. On a alors

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i S}{\lambda + a_i} \tag{5.93}$$

donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1} \tag{5.94}$$

Réciproquement, on prend $x_i = \frac{1}{\lambda + a_i}$ et on a bien $AX = \lambda X$.

2. On définit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \setminus \{-a_n, \dots, -a_1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x + a_i} \end{array} \tag{5.95}$$

3. Posons $-a_{n+1} = -\infty$ et $-a_0 = +\infty$. Sur $]-a_{k+1}, -a_k[$, on a

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{-a_i}{(x + a_i)^2} \tag{5.96}$$

Les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant positifs, on a $\lim_{x\to -a_{k+1}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -a_k^-} f(x) = -\infty$ (si $k\neq n$) (et $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique $\lambda_k \in]-a_{k+1}, -a_k[$ tel que $f(\lambda_k) = 1$. Donc A admet exactement n valeurs propres réelles distinctes. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

■

Remarque 5.11. *Soit*

$$F(X) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X+a_k} + 1 = \frac{P(X)}{(X+a_1 \dots (X+a_n))} \tag{5.97}$$

avec $P = (X+a_1)\dots(X+a_n) - \sum_{k=1}^n a_k P_k$ *où* $P_k = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}(X+a_i)$ *de degré* $n-1$*. On a* $\deg(P) = n$ *et son coefficient dominant est 1. De plus, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a* $P(\lambda) = 0$ *si et seulement si* $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$ *si et seulement si* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ *donc* $P = \chi_A$*.*

Solution 5.9. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \frac{\lambda}{j} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \times \mathrm{diag}(1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.98}$$

où le coefficient est à la i-ième ligne et la j-ième colonne. La matrice à gauche est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Donc les matrices de transvections sont dans G. De plus, les matrices de dilatations sont aussi dans G. Donc $G = GL_n(\mathbb{R})$. ■

Solution 5.10. Supposons u diagonalisable, il existe un base $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \tag{5.99}$$

avec $\lambda_i \neq 0$. Donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = A^p)\,\mathrm{diag}(0,\dots,0,\lambda_1^p,\dots,\lambda_r^p)$ donc u^p est diagonalisable. On a toujours $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et la forme diagonale implique $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Supposons u^p diagonalisable, on écrit $\Pi_{u^p} = (X-\lambda_0)\dots(X-\lambda_r) = R$ (avec $\lambda_k \neq 0$ pour tout $k \geqslant k$) qui est scindé à racines simples. On a

$$P(u^p) = 0 = (u^p - \lambda_0 id_E) \circ \dots \circ (u^p - \lambda_r id_E) = Q(u) \tag{5.100}$$

avec $Q(X) = P(X^p)$.

Si $\lambda_0 \neq 0$, chaque λ_k admet p racines p-ièmes distinctes et si μ_k est l'une de ses racines, on a

$$X^p - \lambda_k = \prod_{j=1}^{p} \left(X - \mu_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2j\pi}{p}}\right) \tag{5.101}$$

De plus, les racines p-ièmes des $(\lambda_k)_{kk\in[\![1,r]\!]}$ sont deux à deux distinctes. Donc Q est scindé à racines simples, et donc u est diagonalisable.

Si $\lambda_0 = 0$, on a $Q = X^p A(X)$ avec A scindé à racines simples non nulles et $X^p \wedge A = 1$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker(Q(u)) = \mathbb{C}^n = \ker(u^p) \otimes \ker(A(u)) = \ker(u^p) \otimes_{i\in I} \ker(u - \mu_i id) \tag{5.102}$$

car A est scindé à racines simples. Montrons que $\ker(u) = \ker(u^p)$. L'inclusion directe est évidente. Réciproquement, montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$ et si $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$, alors $\ker(u^{k+1}) = \ker(u^{k+2})$. L'inclusion est évidente, et si on a l'égalité, si $x \in \ker(u^{k+2})$, on a $u(x) \in \ker(u^{k+1}) = \ker(u^k)$ donc $x \in \ker(u^{k+1})$. Comme $\ker(u) = \ker(u^2)$, d'après ce qui précède, par récurrence, on a $\ker(u) = \ker(u^p)$, donc u est diagonalisable. ∎

Solution 5.11. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, u canoniquement associée à

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.103}$$

. On a

$$\begin{cases} u(e_1) & = & e_n \\ u(e_2) & = & e_1 \\ \vdots & & \\ u(e_n) & = & e_{n-1} \end{cases} \tag{5.104}$$

d'où

$$\begin{cases} u^k(e_1) & = & e_{n+1-k} \\ \vdots u^k(e_{k-1}) & = & e_{n-1} \\ \vdots & & \\ u^k(e_n) & = & e_{n-k} \end{cases} \tag{5.105}$$

et donc

$$J_n^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.106}$$

où les 1 commencent à la $k+1$-ième colonne sur la première ligne et à la $n-k+1$-ième ligne sur la première colonne. Notamment, le 1 sur la dernière colonne est à la $n-k$-ième ligne.

On a $A(a_0,\dots,a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k$. En développant par rapport à la première ligne, on a

$$\chi_{J_n}(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} \tag{5.107}$$

Le premier déterminant vaut X^{n-1} et le deuxième vaut $-(-1)^n \times (-1)^{n-2} = -1$ donc $\chi_{J_n}(X) = X^n - 1$. Ainsi, χ_{J_n} est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc J_n est diagonalisable avec des sous-espaces propres de dimension 1. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$, on a $\mathrm{Sp}(J_n) = \left\{\omega^k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$. On a $J_n X = \omega^k X$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_2 &= \omega^k x_1 \\ \vdots & \\ x_n &= = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 &= \omega^k x_n \end{cases} \tag{5.108}$$

si et seulement si

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix} = x_1 X_k \tag{5.109}$$

avec X_k vecteur propre de J_n associé à ω^k. Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \omega & & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.110}$$

et $P^{-1} J_n P = \mathrm{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. On a donc $P^{-1} A(a_0, \dots, a_n) P = \mathrm{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1}))$ où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Donc A est diagonalisable de valeurs propres $Q(1), \dots, Q(\omega^{n-1})$ et donc

$$\boxed{\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k)} \tag{5.111}$$

■

Remarque 5.12. *On a*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\mathrm{j}b+\mathrm{j}^2c)(a+\mathrm{j}^2b+\mathrm{j}c) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \tag{5.112}$$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ vérifient $a + b + c = 1$, on a

$$\left|a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c\right| = \left|a + \mathrm{j}^2 b + \mathrm{j}c\right| \leqslant a + b + c = 1 \tag{5.113}$$

si et seulement si $a, \mathrm{j}b, \mathrm{j}^2 c$ ont même argument si et seulement si $\{a, b, c\} = \{1, 0, 0\}$.

Solution 5.12. On sait que que $f^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^m)$ pour tout $m \geqslant k$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et

$$\begin{array}{rccc} u : & \ker(f^{+1}) & \to & \ker(f^k) \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array} \tag{5.114}$$

est bien définie car si $x \in \ker(f^{k+1})$, $f(x) \in \ker(f^k)$. Comme $\ker(f) \subset \ker(f^{k+1})$, $\ker(u) = \ker(f)$ et $\dim(\ker(u)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f^{k+1})) = \mathrm{rg}(u) + 1 \leqslant \dim(\ker(f^k)) + 1$. Par récurrence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dim(\ker(f^k)) \leqslant k$ (car on ne peut croître au lus de 1 à chaque itération).

Si $f^{n-1} = 0$, on a $\dim(\ker(f^{n-1})) = n \leqslant n - 1$ ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{f^{n-1} \neq 0} \tag{5.115}$$

Soit $x \notin \ker(f^{n-1})$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Si $\alpha_0 x + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$, en appliquant f^{n-1}, on a $\alpha_0 f^{n-1}(x) = 0$ donc $\alpha_0 = 0$. Puis on applique f^{n-2}, etc. De proche en proche, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Ainsi, $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre en dimension n, c'est donc une base et on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.116}$$

qui est une matrice nilpotente d'indice n. Matriciellement, on a $\ker(f^k) = \mathrm{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$. ■

Solution 5.13. Supposons qu'il existe $x \in V$, $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de V. Notons $u^n(x) = a_0 x + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x)$. Soit $y \in V$ tel que $u(y) = \lambda y$. Pour $y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^i(x)$. On a donc

$$u(y) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^{i+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda y_i u^i(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1}u^i(x) + y_{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x) \tag{5.117}$$

Donc $u(y) = \sum_{i=1}^{n-1} u^i(x)(y_{i-1} + y_{n-1}a_i) + y_{n-1}a_0 x$ donc

$$\begin{cases} \lambda y_0 & = & y_{n-1}a_0 \\ \lambda y_1 & = & y_0 + a_1 y_{n-1} \\ \vdots & & \\ \lambda y_{n-2} & = & y_{n-3} + a_{n-2}y_{n-1} \\ \lambda y_{n-1} & = & y_{n-2} + a_{n-1}y_{n-1} \end{cases} \tag{5.118}$$

donc par récurrence

$$\begin{cases} \lambda y_{n-2} & = & (\lambda - a_{n-1})y_{n-1} \\ \lambda y_{n-3} & = & (\lambda(\lambda - a_{n-1}) - a_{n-2})y_{n-1} \\ \vdots & & \\ \lambda y_0 & = & (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - a_1)y_{n-1} \end{cases} \tag{5.119}$$

Donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Supposons que les sous-espaces propres de u sont de dimension 1. On écrit $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{n_i}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$V = \bigotimes_{i=1}^{r} \underbrace{\ker(u - \lambda_i id_V)^{n_i}}_{F_i} \tag{5.120}$$

et les sous-espaces caractéristiques F_i sont stables par u. Soit $v_i = u_{|F_i} - \lambda_i id_{F_i}$. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} \chi_{u_{|F_i}}$ (matrice diagonale par blocs dans un base adaptée). $(X - \lambda_i)^n$ annule $u_{|F_i}$ et $\mathrm{Sp}_{F_i}(u_{|F_i}) = \{\lambda_i\}$. Alors $\chi_{u_{|F_i}} = (X - \lambda_i)^{\dim(F_i)}$. En reportant, on a $\dim(F_i) = n_i$. De plus, $V_i^{n_i} = 0$ donc v_i est nilpotent. On a donc $\dim(\ker(v_i)) = \dim(\ker(u - \lambda_i id_E)) = 1$. Donc il existe $x_i \in F_i$ tel que $(x_i, v_i(x_i), \dots, v_i^{n_i - 1}(x_i))$ soit une base de F_i.

On forme $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$ tel que $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x) = 0 = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i)\right)$. Les F_i sont en somme directe donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i) = 0 \tag{5.121}$$

Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$. $I_{x_i} = \{A \in \mathbb{C}[X] | A(u)(x_i) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ donc est principal et il existe $\Pi_i \in I_{x_i}$ minimal et

$$\Pi_i \mid P \tag{5.122}$$

On a $(X-\lambda_i)^{n_i}(u)(x_i) = 0$ et $(x_i, u(x_i), \dots, u^{n_i-1}(x))$ est libre, donc si $P \in I_{x_i}$, $\deg(P) \geqslant n_i$ donc $\deg(\Pi_i) = n_i$ et $\Pi_i = (X-\lambda_i)^{n_i}$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\Pi_i \mid P$ et donc

$$\prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{n_i} \mid P \tag{5.123}$$

Mais P est de degré $\leqslant n-1$, nécessairement $P = 0$ et $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre. ■

Remarque 5.13. *Autre méthode pour le sens direct : on a*

$$\mathrm{mat}_{(x,u(x),\dots,u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = A \tag{5.124}$$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, *on a*

$$A - \lambda I_n = \mathrm{mat}_{(x,u(x),\dots,u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \tag{5.125}$$

qui est non inversible, mais donc les $(n-1)$ *première colonnes sont libres, donc est de rang* $n-1$.

Solution 5.14.

1. On utilise le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^k)$ alors pour tout $l \geqslant k$, $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^l)$.

   En effet, si $x = f^{k+1}(x') \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$,, on a $x = f^k(f(x)) \in \mathrm{Im}(f^k)$. Si on a égalité des espaces, soit $x = f^{k+1}(x') = f(f^k(x')) \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$. Alors $f^k(x') \in \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$ donc il existe

x'' tel que $f^k(x') = f^{k+1}(x'')$, mais alors $x = f^{k+2}(x'') \in \mathrm{Im}(f^{k+2})$. On a donc le résultat en itérant.

Ainsi, pour tout $n \geqslant d$, on a $\mathrm{rg}(f^n) = \mathrm{rg}(f^d)$ donc $(\mathrm{rg}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire au moins à partir de d et $r(f) = \mathrm{rg}(f^d)$.

2. Comme f et g commutent, on a

$$(f+g)^{2d} = \sum_{k=0}^{2d} \binom{2d}{k} f^k g^{2d-k} \tag{5.126}$$

Pour tot $k \in [\![0, 2d]\!]$, on a $k \geqslant d$ ou $2d - k \geqslant d$ donc

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \mathrm{Im}(f^d) \\ \text{ou} \\ \mathrm{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \mathrm{Im}(g^d) \end{cases} \tag{5.127}$$

et donc $\mathrm{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \mathrm{Im}(f^d) + \mathrm{Im}(g^d)$. Finalement, $\mathrm{Im}(f+g)^{2d} \subset \mathrm{Im}(f^d) + \mathrm{Im}(g^d)$. On a donc

$$\begin{aligned} r(f+g) &= \dim(\mathrm{Im}(f+g)^{2d}) && (5.128)\\ &\leqslant \dim(\mathrm{Im}(f^d) + \mathrm{Im}(g^d)) && (5.129)\\ &\leqslant \dim(\mathrm{Im}(f^d)) + \mathrm{Im}(g^d) && (5.130)\\ &\leqslant r(f) + r(g) && (5.131) \end{aligned}$$

Pour un contre-exemple, on utilise $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^\mathsf{T}$. On a $A^2 = B^2$ donc $r(A^2) = r(B^2) = 0$ et $A + B$ inversible donc $r(A+B) = 2 > r(A) + r(B)$.

3. On a $\chi_f = X^{m_0} Q$ avec $\deg(Q) = d - m_0$ et $Q(0) = 0$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$V = \ker(f^{m_0}) \otimes \ker(Q(f)) \tag{5.132}$$

Dans une base adaptée $\mathcal{B}$, on a $\mathrm{mat}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A^{m_0} = 0$ et B inversible. Alors pour tout $k \geqslant m_0$, $\mathrm{mat}_\mathcal{B}(f^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(f^k) = \mathrm{rg}(B^k) = d - m_0 = r(f)$.

■

Solution 5.15. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $|||A||| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$. Notons que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| \leqslant |||A|||$. En effet, si X est un vecteur propre associé à λ, on a

$$\|AX\|_\infty = |\lambda|\,\|X\|_\infty \leqslant |||A|||\,\|X\|_\infty \tag{5.133}$$

et $X \neq 0$ donc $\|X\|_\infty \neq 0$.

Soit $A = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}} I_n$, soit $B \in \mathcal{G}_q$ telle que $|||B - A||| \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, on a $\mu \in \mathbb{U}_q$ car $B^q = I_n$. Donc $\mu - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B - A)$ et

$$\left|\mu - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}}\right| \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \tag{5.134}$$

Si $\mu = \mathrm{e}^{\frac{2il\pi}{q}}$, on a

$$\left|\mu - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{(l-k)\pi}{q}\right)\right| > \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \tag{5.135}$$

si $l \neq k$. Nécessairement, on a $\mu = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}}$, donc $B = A$ car B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}}\right\}$. Donc A est un point isolé de $\mathcal{G}_q$.

Soit maintenant $A \in \mathcal{G}_q$, on suppose que A n'est pas une matrice scalaire, donc $|\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)| \geqslant 2$. Soit $\lambda \in (\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \mu_1, \dots, \mu_r)$ avec $\mu_1, \dots, \mu_r \neq \lambda$. Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$A_\varepsilon = P \begin{pmatrix}
\lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \lambda & \varepsilon & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu_r
\end{pmatrix} P^{-1} \tag{5.136}$$

On a $A_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} A$ et $A_\varepsilon \neq A$. Montrons que $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$. On a $\chi_{A_\varepsilon} = \chi_A$, $\mathrm{rg}\,(A_\varepsilon - \lambda I_n) = \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ (observer les colonnes) et pour $\mu_l \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mu_l \neq \lambda$, on a $\mathrm{rg}\,(A_\varepsilon - \mu_l I_n) = \mathrm{rg}\,(A - \mu_l I_n)$ (observer les lignes). La dimension des sous-espaces propres de A et A_ε sont les mêmes donc A_ε est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A_\varepsilon) \subset \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{U}_q$ donc $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$. Ainsi, A n'est pas isolé dans $\mathcal{G}_q$. ■

Solution 5.16. On a

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1) - ((\lambda-1)-1) = \lambda(\lambda-2)^2 \tag{5.137}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathsf{T}$. On a $MX = 0$ si et seulement si $y = x$ et $z = -x$ donc $E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$.

On a $(M - 2I_3)X = 0$ si et seulement si $y = z = -x$ donc $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$.

M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais trigonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u) \otimes \ker(u - 2id)^2 \tag{5.138}$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \star \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.139}$$

avec $\varepsilon_3 \in \ker(u - 2id)^2$ et $\varepsilon_3 \notin \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$. On a

$$(M - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.140}$$

donc $(M - 2I_3)^2 X = 0$ si et seulement si $2x - y + z = 0$. On pose $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $M\varepsilon_3 = -\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$ donc si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.141}$$

on a

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.142}$$

Les sous-espaces stables de dimension 0 : $\{0\}$. Les sous-espaces stables de dimension 1 : ils sont engendrés par les vecteurs propres, ce sont donc $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$. Si maintenant F est un sous-espace stable de dimension 2, montrons que l'on a

$$F = (F \cap \ker(u)) \otimes \left(F \cap \ker(u - 2id)^2\right) = F_0 \otimes F_2 \tag{5.143}$$

En effet, on a $F_0 \otimes F_2 \subset F$. Si maintenant $x \in F$, a priori on a $x = x_0 + x_2$ avec $x_0 \in \ker(u)$ et $x_2 \in \ker(u - 2id)^2$. On a $u(x) = u(x_2) \in F$ par stabilité, $u^2(x) = u^2(x_2) \in F$, et $(u - 2id)^2(x_2) = 0$ donc $x_2 = \frac{1}{4}\left(-u^2(x) + 4u(x_2)\right) \in F$ et $x_0 = x - x_2 \in F$.

On a $F_0 = \{0\}$ ou $\ker(u)$. Si $F_0 = \{0\}$, on a $F = F_2$. Si $F_0 = \ker(u)$, on a $\dim(F_2) = 1$ donc $F_2 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$.

Donc les sous-espaces stables de dimension 2 sont $\ker(u - 2id)^2$ et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Enfin, les sous-espaces stables de dimension 3 : $\mathbb{R}^3$. ■

Remarque 5.14. *Plus généralement, si $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$. On écrit*

$$E = \bigotimes_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i id_E)^{m_i} = \bigotimes_{i=1}^{r} F_i \tag{5.144}$$

Si F est stable, on note Π_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} F_i \in \mathbb{K}[u]$. On a pour tout $x \in F$, $\Pi_i(x) \in F$ par stabilité, il s'ensuit que

$$\boxed{F = \bigotimes_{i=1}^{r} (F \cap F_i)} \tag{5.145}$$

Solution 5.17.

1. Si $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, on a

$$A - I_{n+1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & 0_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 0 \end{array}\right) \tag{5.146}$$

donc $\mathrm{rg}(A - I_{n+1}) = 2$ et $\chi_{A-I_{n+1}} = X^{n-1}(X-\lambda)(X-\mu)$ (sur $\mathbb{C}$). On a $\mathrm{Tr}(A - I_{n+1}) = 0 = \mu + \lambda$ et $\mathrm{Tr}(A - I_{n+1})^2 = 2\sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda^2 + \mu^2$ donc $\{\lambda, \mu\} \in \left\{\pm\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\right\}$ et $A - I_{n+1}$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{5.147}$$

2. On note $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. Soit X tel que $A'X = \pm\lambda$ où $A' = A - I_{n+1}$. Alors en écrivant le système, on vérifie que l'on peut prendre

$$f_{\pm} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{5.148}$$

et si X est tel que $A'X = 0$, si i_0 est tel que $a_{i_0} \neq 0$, on récupère une bas de $\ker(A')$ avec

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.149}$$

où $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_0\}$. Le 1 est à la i-ième ligne, $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$ est à la ligne i_0.

■

Solution 5.18. On pose $|||A||| = \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty$. On montre d'abord que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ $|\lambda| \leqslant |||A|||$. En effet, si X non nul est tel que $AX = \lambda X$, on a $\|AX\|_\infty \leqslant |||A||| \, \|X\|_\infty$ donc $|\lambda| \, \|X\|_\infty \leqslant |||A||| \, \|X\|_\infty$, d'où le résultat.

Soit alors $m = \sup\{|||M||| | M \in G\}$. Soit $M \in G$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a $|\lambda| \leqslant m$. Comme $M^k \in G$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a aussi $|\lambda|^k \leqslant m$ donc $|\lambda| = 1$ (faire tendre k vers $-\infty$ et $+\infty$).

Grâce à la décomposition de Dunford, on a $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et D et N qui commutent. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^{r-1} \neq 0$ et $N^r = 0$. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$ donc $G \in GL_n(\mathbb{C})$ et $MD^{-1} = I_n + ND^{-1}$ avec ND^{-1} est nilpotente d'indice r. On a pour tout

$k \geqslant r$, on a

$$(MD^{-1})^k = M^k (D^{-1})^k \tag{5.150}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (ND^{-1})^i \tag{5.151}$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{k}{i} (ND^{-1})^i \tag{5.152}$$

$$\underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \tag{5.153}$$

Notons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si $\|X\|_\infty = 1$, on a

$$\|(AB)X\|_\infty \leqslant |||A||| \, \|BX\|_\infty \leqslant |||A||| |||B||| \tag{5.154}$$

donc $|||AB||| \leqslant |||A||| |||B|||$.

La suite $(MD^{-1})^k$ est bornée, donc $r = 1$ et $N = 0$, donc M est diagonalisable.

Prenons ensuite $\alpha = \sqrt{3}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on a $\lambda - 1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M - I_n)$. Si $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1\right| < \sqrt{3}$ si et seulement si $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < \sqrt{3}$ si et seulement si $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$. Donc on a aussi $\left|\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Quitte à changer θ en $-\theta$, on peut supposer $\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$. Si $\theta \geqslant 0$, posons l'unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\theta \geqslant \frac{2\pi}{3}$ et $(k-1)\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$. On a alors

$$k\theta = (k-1)\theta + \theta < \frac{4\pi}{3} \tag{5.155}$$

ce qui est absurde si et seulement si $\left|\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\right| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $\theta = 0$ et $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$, et puisque M est diagonalisable, $M = I_n$ et $G = \{I_n\}$. ∎

Remarque 5.15. *Soit $\alpha > \sqrt{3}$ et $G = \{I_n, \mathrm{j}I_n, \mathrm{j}^2 I_n\}$. Pour tout $M \in G$, $|||M - I_n||| < \alpha$ et $G \neq \{I_n\}$.*

Solution 5.19.

1. On vérifie que $\chi_A(\lambda) = \lambda^3$. On a $AX = 0$ si et seulement si $x_1 = x_3$ et $x_2 = -2x_1$. On prend

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. u est nilpotente et $\dim(\ker(u)) = 1$. On a $u^3 = 0$ et on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.156}$$

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $u^2(e_1) \neq 0$ donc $(u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.157}$$

$\dim(\ker(u^k)) = k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, notamment car $\mathrm{rg}(u^2) = 1$ pour justifier que $\dim(\ker(u^2)) = 2$.

Soit F stable par u de dimension $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. $u_{|F}$ est nimpotente et $u_{|F}^i = 0$. Donc $F \subset \ker(u^i)$ qui est de dimension i. Donc $F = \ker(u^i)$.

2. Si $B^2 = A$, $B^6 = 0$ donc $B^3 = 0$. Alors $B^4 = 0 = A^2$ ce qui n'est pas vrai. Donc il n'y a pas de B tel que $B^2 = A$.

■

Solution 5.20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A. On a $X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+1)$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u + id) \otimes \underbrace{\ker(u^2 + id)}_{F} \tag{5.158}$$

On a $F \neq \{0\}$ car $u \neq -id$. On note $v = u_{|F}$. On a $v^2 = -id_F$ et $\det(v^2) = (\det(v))^2 = (-1)^{\dim(F)} > 0$ donc $\dim(F)$ est pair. Nécessairement, on a $\dim(F) = 2$ et $\dim(\ker(u + id)) = 1$. Soit ε_3 vecteur propre associé à -1. Soit $x \in F \setminus \{0\}$. Si $(x, u(x))$ est lié, x est vecteur propre de v et $v^2 + id_F = 0$

ce qui est impossible car il n'y a pas de valeur propre réelle. Donc on pose $\mathcal{B}=(x,u(x),\varepsilon_3)$ base de $\mathbb{R}^3$. On a $u^2(x)=-x$, donc

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}} \tag{5.159}$$

■

Remarque 5.16. *Sur $\mathbb{C}$, on peut prendre*

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{5.160}$$

ou $\mathrm{i}I_3$.

Solution 5.21.

1. $I_x=\{A\in\mathbb{K}[X]|A(f)(x)=0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non vide car $\mu_f\in I_x$. Donc il existe un unique P_x unitaire tel que $I_x=P_x\mathbb{K}[X]$.
2. Soit $A\in\mathbb{K}[X]$, on a $A(f)=0$ si et seulement si pour tout $x\in E$, $P_x\mid A$ si et seulement si $\vee_{x\in E}P_x\mid A$ donc $\mu_f=\vee_{x\in E}P_x$.
3. On a

$$P_xP_y(f)(x+y)=P_xP_y(f)(x)+P_xP_y(f)(y) \tag{5.161}$$
$$=P_f(f)\left(P_x(f)(x)\right)+P_x(f)\left(P_y(f)(y)\right) \tag{5.162}$$
$$=0 \tag{5.163}$$

Donc $P_{x+y}\mid P_xP_y$.

Soit $A\in\mathbb{K}[X]$. Supposons $A(f)(x+y)=0$. On a $P_x(f)\left(A(f)(x+y)\right)=0$, $P_x(f)\left(A(f)(x)\right)=A(f)\left(P_x(f)(x)\right)=0=-AP_x(f)(y)$. Donc $P_y\mid AP_x$. D'après le théorème de Gauss, $P_y\mid A$. De même, $P_x\mid A$. On prend $A=P_{x+y}$. Comme $P_x\wedge P_y=1$ et $P_xP_y\mid P_{x+y}$, on a

$$\boxed{P_xP_y=P_{x+y}} \tag{5.164}$$

4. On décompose $\mu_f = \prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}$ avec pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, A_i irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_i \geqslant 1$. Comme $\mu_f = \vee_{x \in E} P_x$, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe $y_i \in E$ tel que $P_{y_i} = A_i^{\alpha_i} Q_i$. On pose $x_i = Q_i(f)(y_i)$. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, on a $A(f)(x_i) = 0$ si et seulement si $AQ_i(f)(y_i) = 0$ si et seulement si $A_i^{\alpha_i} Q_i \mid AQ_i$ si et seulement si $A_i^{\alpha_i} \mid A$. Ainsi, $P_{x_i} = A_i^{\alpha_i}$. En utilisant le point précédent par récurrence, on a $\mu_f = P_{\sum_{i=1}^r x_i}$ et on pose donc $x = \sum_{i=1}^r x_i$.

5. Supposons que ce v existe. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\deg(\mu_f) \leqslant n$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Si $\alpha_0 id + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$. En appliquant en v, comme la famille est libre, on a de proche en proche $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Donc pour tout $A \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, si $A(f) = 0$, alors $A = 0$. Donc $\deg(\mu_f) \geqslant n$, donc $\deg(\mu_f) = n$.

   Réciproquement, soit $v \in E$ tel que $P_v = \mu_f$ qui existe d'après le point précédent. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\alpha_0 v + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$. On forme $A = \alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$. On a $A(f)(v) = 0$, donc $P_v \mid A$ mais P_v est de degré n donc $A = 0$. Donc la famille est libre et de cardinal n : c'est une base.

■

Solution 5.22.

1. φ est linéaire, soit $(s, t) \in S^2$. On a $\varphi(s) = t$ si et seulement si $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = t_n$ pour tout $n \geqslant 1$ si et seulement si

$$\begin{cases} s_1 & = & t_1 \\ s_1 + s_2 & = & 2t_2 \\ \vdots & & \\ s_1 + \cdots + s_{n-1} & = & (n-1)t_{n-1} \\ s_1 + \cdots + s_n & = & nt_n \\ \vdots & & \end{cases} \tag{5.165}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} s_1 & = & t_1 \\ s_2 & = & 2t_2 - t_1 \\ \vdots & & \\ s_n = nt_n - (n-1)t_{n-1} & & \\ \vdots & & \end{cases} \tag{5.166}$$

donc φ est bijective.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(s) = \lambda s$ si et seulement si $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \lambda s_n$ pour tout $n \geqslant 1$ si et seulement si $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $s = \lambda\varphi^{-1}(s)$ si et seulement si $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $s_1 = \lambda s_1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $s_n = \lambda(ns_n - (n-1)s_{n-1})$ i.e. $(\lambda n - 1)s_n = \lambda(n-1)s_{n-1}$.

   Si c'est le cas, si $s_1 \neq 0$, on a $\lambda = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $s_n = s_{n-1}$ donc s est constante.

   Sinon, soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* | s_{n_0} \neq 0\}$. On a $(\lambda n_0 - 1)s_{n_0} = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{n_0}$ et pour tout $n > n_0$, on a $s_n = \frac{\frac{1}{n_0}(n-1)}{\frac{n}{n_0} - 1} s_{n-1} = \frac{n-1}{n-n_0} s_{n-1}$. Ainsi,

$$s_n = \frac{(n-1)!}{(n_0-1)!(n-n_0)!} s_{n_0} = \binom{n-1}{n_0-1} s_{n_0} \tag{5.167}$$

   Réciproquement, en posant $s_{n_0} = 1$ et en définissant pour tout $n > n_0$, $s_n = \binom{n-1}{n_0-1}$ et pour tout $n \leqslant n_0 - 1$, $s_n = 0$, alors on a $\varphi(s) = \frac{1}{n_0}s$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}} \tag{5.168}$$

   et les sous-espaces propres sont de dimension 1.

■

Remarque 5.17. *Si on se limite à $\mathbb{R}^p$, en définissant $\varphi_p(s_1, \ldots, s_p) = (s_1, \frac{s_1+s_2}{2}, \ldots, \frac{s_1+\cdots+s_p}{p})$. Alors en écrivant la matrice de φ_p dans la base canonique, on a $\chi_{\varphi_p} = (X-1)(X-\frac{1}{2})\ldots(X-\frac{1}{p})$.*

Solution 5.23.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Supposons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda - a_{i,i}| > L_i$. $\lambda I_n - A$ est une matrice à diagonale strictement dominante donc inversible : absurde. Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda \in D_i$. Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^\mathsf{T})$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda \in S_i$. D'où le résultat.

2. Soit X non nul (dans $\mathbb{C}^n$) tel que $AX = \lambda X$. Soit $i_1 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty > 0$. On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j$.

   Soit $i_2 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_2}| = \max_{i \neq i_1} |x_i|$.

   Si $x_{i_2} = 0$, on a $\lambda = a_{i_1,i_1}$ et $|\lambda - a_{i_1,a_1}| = 0$ et $|\lambda - a_{i_1,a_1}| \, |\lambda - a_{i_2,i_2}| = 0 \leqslant L_{i_1} L_{i_2}$.

   Sinon, on a $|\lambda - a_{i_1,i_1}| \, |x_{i_1}| \leqslant |x_{i_2}| \, L_{i_1}$ et de même $|\lambda - a_{i_2,i_2}| \, |x_{i_2}| \leqslant |x_{i_1}| \, L_{i_2}$ d'où le résultat.

■

Remarque 5.18. *On peut avoir égalité, par exemple avec la matrice nulle.*

Solution 5.24. A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = 0$ alors $A = 0$.

Sinon, $\mathrm{rg}(A) = 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ canoniquement associée à A. On a $\dim(\ker(u)) = n - 1$ et $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$ sur $\mathbb{C}$. On a $\mathrm{Tr}(A) = \lambda + \mu = 0$ donc $\mu = -\lambda$ et $\mathrm{Tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 2\sum_{i=1}^n a_i^2$ donc

$$\{\lambda, \mu\} = \left\{ \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\} \tag{5.169}$$

Les deux valeurs propres sont de multiplicité 1 dans χ_A : les sous-espaces propres sont de dimension 1.

A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, semblable à $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, -\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2})$.

On a $AX = 0$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 x_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_n x_{n+1} & = & 0 \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.170}$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 0 \\ x_{i_0} & = & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}} a_i x_i \end{array} \right. \tag{5.171}$$

avec i_0 indice tel que $a_{i_0} \neq 0$. Une base de $\ker(u)$ est donc

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.172}$$

où $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_0\}$. Le 1 est à la i-ième ligne, $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$ est à la ligne i_0.

On a $AX = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} X = \alpha X$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 x_{n+1} & = & \alpha x_1 \\ \vdots & & \\ a_n x_{n+1} & = & \alpha x_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & = & \alpha x_{n+1} \end{array} \right. \tag{5.173}$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{a_1}{\alpha} x_{n+1} \\ \vdots & & \\ x_n & = & \frac{a_n}{\alpha} x_{n+1} \end{array} \right. \tag{5.174}$$

Une base de $ker(u - \alpha id)$ est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\alpha} \\ \dots \\ \frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.175}$$

De même pour $-\alpha$, on vérifie qu'une base de $\ker(u+\alpha id)$ est

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_1}{\alpha} \\ \dots \\ -\frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.176}$$

■

Solution 5.25. Pour le sens direct, f et g ont les mêmes espaces propres distincts. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $E_i = \ker(f - \lambda_i id) = \ker(g - \mu_i id)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ valeurs propres distinctes deux à deux de f et $\mu_1, \dots, \mu_r$ pour g.

On pose

$$\begin{array}{rcl} Q & = & \sum_{i=1}^r \mu_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^r \frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \\ P & = & \sum_{i=1}^r \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^r \frac{X-\mu_j}{\mu_i-\mu_j} \end{array} \tag{5.177}$$

Soit $i \in [\![1, r]\!]$ et $x \in E_i$. On a $Q(f)(x) = Q(\lambda_i)x = \mu_i x = g(x)$. $Q(f)$ et g coïncident sur les vecteurs d'une base, donc ils sont égaux, donc $Q(f) = g$. De même, $f = P(g)$.

Réciproquement, s'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]^2$ tel que $f = P(g)$ et $g = Q(f)$. On prend $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, soit $x \in \ker(f - \lambda id)$. On a $g(x) = Q(f)(x) = Q(\lambda)x$ donc $x \in \ker(g - Q(\lambda)id)$. On a

$$\ker(f - \lambda id) \subset \ker(g - Q(\lambda)id) \subset \ker(f - P(Q(\lambda))id) \tag{5.178}$$

Or $P(Q(\lambda)) = \lambda$ car pour $x \in \ker(f - \lambda id) \setminus \{0\}$, on a $\lambda x = P(Q(\lambda))x$. Donc $\ker(f - \lambda id) = \ker(g - Q(\lambda)id)$ donc f et g ont les mêmes sous-espaces propres. ■

Remarque 5.19. *C'est faux si f et g ne sont pas diagonalisables, par exemple*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.179}$$

A et B ont les mêmes sous-espaces propres (un seul : $\mathrm{Vect}(e_1, e_4)$). On a $A^2 = 0$ donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,

$$P(A) = \alpha I_4 + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq B \tag{5.180}$$

Solution 5.26. Soit $m = |G|$. On a pour tout $M \in G$, on a $M^m = I_2$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_m$. Notons que G étant abélien, toutes les matrices sont co-diagonalisables.

Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$, alors $M = I_2$. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1\}$, alors $M = -I_2$. Dans ces deux cas, on a $\det(M) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = \pm 2$. On note ce cas 1.

Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1, 1\}$, M est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^2 = I_2$. Dans ce cas, on a $\det(M) = -1$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$. On note ce cas 2.

Notons que l'on a $\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}(M)X + \det(M)$ et $\Delta = (\mathrm{Tr}(M))^2 - 4\det(M)$. Comme χ_M est un polynôme réel, si $\delta < 0$, on écrit $\chi_M(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$. Comme $\mathrm{Tr}(M) = 2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$, on a $\theta \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

Si $\theta = \frac{2\pi}{3}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \tag{5.181}$$

et $M^3 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = -1$. On note ce cas 3.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \tag{5.182}$$

et $M^4 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$. On note ce cas 4.

Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \tag{5.183}$$

et $M^6 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = 1$. On note ce cas 5.

Par ailleurs, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout $M \in G$, $P^{-1}MP = I_2$.

S'il existe $M \in G$ du type 2, alors les types 3 et 5 sont exclus car on obtiendrait par produit $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{Tr}(M) = 0$ car χ_m est un polynôme réel, et $\theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$, ce qui n'est pas.

Ainsi,

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \right\} \tag{5.184}$$

Ainsi,

$$G = \begin{cases} \{I_2\} & \\ \{-I_2, I_2\} & \\ \{I_2, B\} & B \text{ matrice de type 2} \\ \{I_2, A, A^2, A^3\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & A \text{ matrice de type 4} \\ \{I_2, A, B, A^2, A^3, -B\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & A, B \text{ matrices de type 4, 2} \\ \{I_2, B, -B, -I_2\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & B \text{ matrice de type 2} \end{cases} \tag{5.185}$$

S'il n'y a pas de matrice de type 2, on a

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} \mathrm{j} & 0 \\ 0 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{j} & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{j}^2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j} \end{pmatrix} \right\} \tag{5.186}$$

On ne peut pas avoir une matrice de type 3 ou 5 car $\pm\mathrm{ij}$ et $\pm\mathrm{ij}^2$ ne sont pas des valeurs propres possibles. Donc

$$G = \begin{cases} \{I_2, C, C^2\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & C \text{ matrice de type 3} \\ \{I_2, D, D^2, D^3, D^4, D^5\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & D \text{ matrice de type 5} \end{cases} \tag{5.187}$$

Notons que dans le deuxième cas, D^2 est de type 3.

On a donc bien $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. ∎

Solution 5.27. Si u est diagonalisable, la famille des vecteurs propres est génératrice. En prenant un sous-espace de E de base $\mathcal{B}$, on complète avec des vecteurs propres, ce qui forme un sous-espace stable par u.

Réciproquement, soit

$$F = \bigotimes_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda id) \tag{5.188}$$

stable par u. F admet un supplémentaire stable qu'on nommera G. Si $G \neq \{0\}$, $u_{|G}$ admet nécessairement un vecteur propre, or les vecteurs propres sont dans $F \setminus \{0\}$; absurde. Donc $G = \{0\}$ et $E = F$ donc u est diagonalisable. ■

Solution 5.28. Plus généralement, soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{k,l}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit

$$M = B \otimes A = \begin{pmatrix} b_{1,1}A & \dots & b_{1,p}A \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1}A & \dots & b_{p,p}A \end{pmatrix} \tag{5.189}$$

Si B est diagonalisable, il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(\mu_1, dots, \mu_p)$. On note $Q = (q_{i,j})$ et $Q^{-1} = (q'_{i,j})$. Par produits par blocs, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q'_{1,1}I_n & \dots & q'_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q'_{p,1}I_n & \dots & q'_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{=Q^{-1}\otimes I_n = (Q\otimes I_n)^{-1}} M \underbrace{\begin{pmatrix} q_{1,1}I_n & \dots & q_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p,1}I_n & \dots & q_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{Q\otimes I_n} = \mathrm{diag}(\mu_1 A, \dots, \mu_p A) = M_1 \tag{5.190}$$

Si de plus A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, dots, \lambda_n)$. Alors

$$\mathrm{diag}(P^{-1}, \dots, P^{-1}) M_1 \,\mathrm{diag}(P, \dots, P) = \mathrm{diag}(\mu_1, \lambda_1, \dots, \mu_1, \lambda_n, \dots, \mu_p\lambda_1, \dots, \mu_p\lambda_n) \tag{5.191}$$

Donc $B \otimes A$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B \otimes A) = \{\lambda_i \mu_j | 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p\}$. ■

Remarque 5.20. *On a* $\mathrm{Tr}(B \otimes A) = \mathrm{Tr}(B) \times \mathrm{Tr}(A)$ *et* $\det(B \otimes A) = \det(B)^n \det(A)^p$.

Remarque 5.21. *Si B est diagonalisable et non nulle, si $B \otimes A$ est diagonalisable, il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\mu_i \neq 0$ et $\mu_i A$ est diagonalisable (restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable) donc A est diagonalisable.*

Solution 5.29.

1. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A.

   Si $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $k \in [\![1, m]\!]$, $F_k = \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_{n-k+1})$. On a $u(e_k) = x_k e_{n-k+1}$ et $u(e_{n-k+1}) = x_{n-k+1} e_k$ donc F_k est stable par u. Ainsi, $\mathrm{mat}_{(e_k, e_{n-k+1})}(u_{|F_k}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{n-k+1} \\ x_k & 0 \end{pmatrix}$.

   Étudions, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_M = X^2 - ab$.

   Si $ab \neq 0$, on note λ une racine carrée de ab sur $\mathbb{C}$. On a $\chi_M (X - \lambda)(X + \lambda)$ qui est scindé à racines simples donc M est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(\lambda, -\lambda)$.

   Si $ab = 0$: si $a = b = 0$ alors $M = 0$. Si a ou $b \neq 0$, alors M n'est pas diagonalisable puisque si elle l'était, comme sa seule valeur propre est 0, elle serait semblable donc égale à 0 ce qui n'est pas. Donc A est diagonalisable si et seulement si pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, x_k et x_{n-k+1} non nuls ou $x_k = 0 = x_{n-k+1}$.

   Si $n = 2m + 1$, on fait le même raisonnement avec $u(e_m) = x_m e_m$.

2. $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\left(u^p_{|F_k}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

   Soit $k \in [\![1, m]\!]$. Si $x_k x_{n+1-k} \neq 0$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda^2 = x_k x_{n+1-k}$. Dans une base de vecteurs propres $\mathcal{B}$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^p_{|F_k}) = \begin{pmatrix} \lambda^p & 0 \\ 0 & (-\lambda)^p \end{pmatrix} \tag{5.192}$$

   Cela converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ si et seulement si $|x_k x_{n+1-k}| < 1$.

   Si $x_k = x_{n+1-k} = 0$, alors pour tout $p \geqslant 2$, $u^p_{|F_k} = 0$ donc on a convergence.

■

Solution 5.30.

1. On a

$$\mathrm{mat}_{(1, X, \ldots, X^n)}(\varphi) = \mathrm{diag}(-n, 1 - n, \ldots, 0) \tag{5.193}$$

   donc les valeurs propres sont $(k - n)_{k \in [\![0, n]\!]}$. On a $n + 1$ valeurs propres distinctes donc φ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les vecteurs propres sont les (X^k) pour $k \in [\![1, n]\!]$.

2. Si $\varphi(P) = kP$, alors $\deg(P) = k$. Si $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ donc

$$XP' - nP'' - kP = 0 = \sum_{i=0}^{k-2} \left(ia_i - n(i+1)(i+2) - ka_i\right) X^i - a_{k-1}X^{k-1} \tag{5.194}$$

Ainsi, par récurrence, pour tout $p \in \left\{0, ; \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor\right\}$, $a_{k-(2p+1)} = 0$ et pour tout $p \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right\}$,

$$a_{k-2p} = \frac{n^p(k-2p+1)\dots(k-1)k}{(-2p)\dots(-4)(-2)} a_k = \frac{n^p(-1)^p}{2^p p!} \times \frac{k!}{(k-2p)!} a_k \tag{5.195}$$

donc les vecteurs propres correspondent aux polynômes ayant ces coefficients.

■

Solution 5.31.

1. On a

$$A = aI_3 + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \tag{5.196}$$

avec $B = C^2$ et C est la matrice compagnon du polynôme $X^3 - 1$, donc $\chi_C = X^3 - 1$. Ainsi, C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$. On a

$$\begin{aligned} C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix} &= \mathrm{j} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix} &= \mathrm{j}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.197}$$

donc si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix} \tag{5.198}$$

alors on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j} & 0 \\ 0 & 0 & a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2 \end{pmatrix} \tag{5.199}$$

et

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{1, a+c\mathrm{j}+b\mathrm{j}^2, a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2\right\}} \tag{5.200}$$

2. On a

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j})^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{5.201}$$

Tout d'abord, on a $|a+c\mathrm{j}+b\mathrm{j}^2| \leqslant |a|+|b|+|c| = 1$ et on a égalité si et seulement si $a, c\mathrm{j}$ et $b\mathrm{j}^2$ ont le même argument si et seulement si $\{a,b,c\} \in \{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,1\}\}$.

Si $a=1$ et $b=c=0$, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Si ($b=1$ et $a=c=0$) ou ($c=1$ et $a=b=0$), $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Sinon,

$$\boxed{A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}} \tag{5.202}$$

■

Solution 5.32.

1. On vérifie en calculant les premiers termes puis par récurrence que

$$\boxed{A^k = \begin{pmatrix} B^k & \sum_{i=1}^{k} B^{i-1}CD^{k-i} \\ 0 & D^k \end{pmatrix}} \tag{5.203}$$

2. On a

$$\mu_A(A) = 0 = \begin{pmatrix} \mu_A(B) & \star \\ 0 & \mu_A(D) \end{pmatrix} \tag{5.204}$$

donc $\mu_A(B) = \mu_A(D) = 0$. Ainsi, $\mu_B \mid \mu_A$ et $\mu_D \mid \mu_A$ donc $\mu_B \vee \mu_D \mid \mu_A$.

Si B et D sont de tailles 1, $\chi_A(X) = (X-b)(X-d)$ d'où $\mu_B = X-b$ et $\mu_D = X-d$.

Si $b \neq d$, $X - b$ et $X - d$ divise μ_A donc $\mu_A \mid \chi_A$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Si $b = d$, si $c = 0$ on a $\mu_A = X - b$ donc $\mu_A \mid \mu_B \mu_D = (X - b)^2$. Si $c \neq 0$, $\mu_A = X - b$ ou $\mu_A = (X - b)^2$ et $A - bI_n \neq 0$ donc $\mu_A = (X - b)^2$.

3. Si $C = 0$, on a $\mu_A = \mu_B \vee \mu_D$.

4. Si $B = D$ et $C = I_{n_1}$, on a $A^0 = I_{n_1+n_2}$ et pour $k \geqslant 1$,

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & kB^{k-1} \\ 0 & B^k \end{pmatrix} \tag{5.205}$$

Ainsi

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(B) & P'(B) \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = 0 \tag{5.206}$$

si et seulement si $P(B) = P'(B) = 0$ donc $\mu_B \mid P$ et $\mu_B \mid P'$ donc $\mu_B \mid P \vee P'$.

On a

$$\mu_B^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_B \mu_B'(B) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.207}$$

donc $\mu_A \mid \mu_B^2$.

On décompose $\mu_B = (X - \lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \lambda_r)^{m_r}$. On a $P(A) = 0$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, λ_i est racine de P d'ordre plus grand que $m_i + 1$.

5. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.208}$$

On a

$$B = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.209}$$

$\mu_B = \mu_D = X^2$, et $\mu_A \mid X^3$. Or $u^2(e_4) \neq 0$ donc $\mu_A = X^3 \neq X^2 = \mu_B \vee \mu_D \neq X^4 = \mu_B \mu_D$.

■

Solution 5.33. On décompose sur $\mathbb{C}$: $P(X)-\lambda=\alpha\prod_{i=1}^{m}(X-\mu_i)$ avec $\alpha\neq 0$. On a

$$\underbrace{g-\lambda id}_{\substack{\text{non inversible}\\ \text{(respectivement non injectif)}}}=\alpha\prod_{i=1}^{m}(f-\mu_i id) \tag{5.210}$$

donc il existe $i\in[\![1,m]\!]$, $f-\mu_i id$ est non inversible (respectivement non injectif), d'où le résultat. ■

Solution 5.34.

1. Soit $(f_1,\dots,f_r)$ une base de V et $x\in E\setminus\{0\}$. Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{K}^r$ tels que $\alpha_1 f_1(x)+\cdots+\alpha_r f_r(x)=0$. Or V est un sous-espace, donc $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_r f_r\in V$ et $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_r f_r\notin GL(E)$ car $x\neq 0$. D'où $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_r f_r=0$ et donc $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=0$ car $(f_1,\dots,f_r)$ est une base de V.

   Ainsi $(f_1(x),\dots,f_r(x))$ est libre donc $r=\dim(V)\leqslant\dim(E)$.

2. Si $\dim(V)=1$, alors $V=\mathbb{C}f$ avec $f\in GL(E)$. Si $\dim(V)\geqslant 2$, soient $(f,g)\in V^2$ tels que (f,g) soit libre alors pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, $f+\alpha g\neq 0$ et $f+\alpha g\in V\setminus\{0\}$. Or $f+\alpha g=g(g^{-1}\circ f+\alpha id)$. Pour $\alpha\in\mathrm{Sp}(-g^{-1}\circ f)$ (existe car on est dans $\mathbb{C}$), on obtient une contradiction. Donc de même, $V=\mathbb{C}f$ avec $f\in GL(E)$.

3. Comme $\dim(E)=2$, on a $\dim(V)\leqslant 2$. Si $\dim(V)=1$, comme précédemment, on a $V=\mathbb{R}f$ avec $f\in GL(E)$. Si $\dim(V)=2$, soit (f,g) une base de V. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(g^{-1}\circ f)=\emptyset$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g)$. On écrit $\chi_{A^{-1}B}=(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ avec $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $\beta>0$. $A^{-1}B$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et semblable à $\mathrm{diag}(\lambda,\overline{\lambda})$ et $\frac{A^{-1}B-\alpha I_2}{\beta}$ est semblable sur $\mathbb{C}$ à $\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i})$ semblable sur $\mathbb{R}$ à $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ donc $\frac{A^{-1}B-\alpha I_2}{\beta}$ est semblable sur $\mathbb{R}$ à $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A^{-1}B=P\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}P^{-1} \tag{5.211}$$

   Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

$$\lambda A+\mu B=A(\lambda I_2+\mu A^{-1}B)=\underbrace{AP}_{\in GL_2(\mathbb{R})}\begin{pmatrix}\lambda+\alpha\mu&-\beta\\\beta&\lambda+\alpha\mu\end{pmatrix}\underbrace{P^{-1}}_{\in GL_2(\mathbb{R})} \tag{5.212}$$

   avec $\beta>0$,$\alpha\in\mathbb{R}$.

4. Avec les notations précédentes, si $(A, B) \in V^2$ est libre, on a

$$\mathrm{i} \in \mathrm{Sp}\left(\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}\right) = \mathrm{Sp}\left((BA)^{-1}(B - \alpha A)\right) \tag{5.213}$$

et on pose $A' = \beta A \in V$ et $B' = B - \alpha A \in V$.

■

Solution 5.35.

1. En notant $c_{i,j}$ les cofacteurs d'indice (j, i), on a

$$\left[\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^{\mathsf{T}}\right]_{i,j} = (-1)^{i+j} c_{j,i}(\lambda - I_n) \tag{5.214}$$

En développant, on obtient des polynômes en λ de degré plus petit que $n-1$. En regroupant selon les puissances de λ, on a

$$\boxed{\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^{\mathsf{T}} = M_0 + M_1\lambda + \cdots + \lambda^{n-1}M_{n-1}} \tag{5.215}$$

2. On a $(\lambda I_n - A)\,\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^{\mathsf{T}} = \det(\lambda I_n - A) I_n = \chi_A(\lambda) I_n$

En identifiant les coefficients, on a

$$\begin{cases} M_{n-1} &= & I_n \\ M_{n-2} &= & A + a_{n-1}I_n \\ M_{n-3} &= & A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I_n \\ \vdots & & \\ M_{n-k} &= & A^{k-1} + a_{n-1}A^{k-2} + \cdots + a_{n-k+1}I_n \\ \vdots & & \\ M_0 &= & A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n \end{cases} \tag{5.216}$$

et $-AM_0 = a_0 I_n$. En reportant, on a bien $\chi_A(A) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$: on a une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On forme $\lambda I_n - A = (c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda))$ avec

$$c_j(\lambda) = \begin{pmatrix} -a_{1,j} \\ \cdots \\ -a_{j-1,j} \\ \lambda - a_{j,j} \\ -a_{j+1,j} \\ \cdots \\ -a_{n,j} \end{pmatrix} \tag{5.217}$$

On a $\chi_A(\lambda) = \det(c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda))$. det étant une forme n-linéaire, on a

$$\chi_A'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \det(c_1(\lambda), \ldots, c_{k-1}(\lambda), c_k'(\lambda), c_{k+1}(\lambda), \ldots, c_n(\lambda)) \tag{5.218}$$

En développant le terme k par rapport à la k-ième colonne, on trouve qu'il vaut ${}_{k,k}(\lambda I_n - A)$. Ainsi,

$$\boxed{\chi_A'(\lambda) = \operatorname{Tr}(\operatorname{com}(\lambda I_n - A)^{\mathsf{T}})} \tag{5.219}$$

4. On a donc $a_1 + 2a_2\lambda + \cdots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + n\lambda^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \operatorname{Tr}(M_k)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (par linéarité de Tr). Donc pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $\operatorname{Tr}(M_k)$, $\operatorname{Tr}(M_k) = (k+1)a_{k+1}$ (et $\operatorname{Tr}(M_{n-1}) = \operatorname{Tr}(I_n) = n$). On a $\operatorname{Tr}(M_{n-2}) = (n-1)a_{n-1} = \operatorname{Tr}(A) + na_{n-1}$ donc $a_{n-1} = \operatorname{Tr}(A)$. Puis $\operatorname{Tr}(M_{n-3}) = (n-2)a_{n-2} = \operatorname{Tr}(A^2) + a_{n-1}\operatorname{Tr}(A) + a_{n-2}n$ donc $a_{n-2} = -\frac{\operatorname{Tr}(A^2)}{2} + \frac{\operatorname{Tr}(A)^2}{2}$. De proche en proche, on a $a_{n-k} = f_k(\operatorname{Tr}(A), \ldots, \operatorname{Tr}(A^k))$ avec f_k indépendante de A.
5. D'après ce qui précède, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = b_k$ car f est indépendante de A. Donc $\chi_A = \chi_B$.

■

Remarque 5.22. *Si* $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A^2) = \cdots = \operatorname{Tr}(A^n) = 0$*, alors* $\chi_A = \chi_0 = X^n$ *et* A *est nilpotente. On peut le vérifier à la main sur* $\mathbb{C}$ *: si* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ *sont les valeurs propres non nulles distinctes de* A *et* m_i *la multiplicité de* λ_i *dans* χ_A*, alors on a le système*

$$\begin{cases} \operatorname{Tr}(A) &= m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r &= 0 \\ \operatorname{Tr}(A^2) &= m_1\lambda_1^2 + \cdots + m_r\lambda_r^2 &= 0 \\ \vdots \\ \operatorname{Tr}(A^r) &= m_1\lambda_1^r + \cdots + m_r\lambda_r^r &= 0 \end{cases} \tag{5.220}$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0 \tag{5.221}$$

et la matrice est inversible car les λ_i sont distincts non nuls. Donc $m_1 = \dots = m_r = 0$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$.

Solution 5.36. On définit, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Comme p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. On a $\chi_A \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ donc il existe $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où χ_A est scindé sur $\mathbb{L}$. On écrit $\chi_A = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{L}$. On peut trigonaliser $\overline{A}$ sur $\mathbb{L}$ et on a $\mathrm{Tr}(\overline{A}^p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p$. Or la caractéristique de $\mathbb{L}$ vaut p donc on a $(x+y)^p = x^p + y^p$ (binôme de Newton et utiliser le fait que $p \mid \binom{p}{k}$ pour $k \in [\![1, p-1]\!]$). Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(\overline{A}^p) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^p = \mathrm{Tr}(\overline{A})^p \tag{5.222}$$

et on peut appliquer le petit théorème de Fermat : on a bien $\mathrm{Tr}(\overline{A}^p) = \mathrm{Tr}(\overline{A})$ et en remontant dans $\mathbb{Z}$,

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A)[p]} \tag{5.223}$$

■

Solution 5.37. Si on a (i), soit x un vecteur propre associé à $\rho(u) = \rho e^{i\theta}$. On a $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$ et comme $x \neq 0$, on a $\rho(u) \leqslant |\!|\!|\rho(u)|\!|\!| < 1$ d'où (ii).

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford $u = n + d$ avec n nilpotent, d diagonalisable et $dn = nd$. Soit $m = \dim(E)$. Pour tout $p \geqslant m$, on a

$$u^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0} \tag{5.224}$$

En effet, on a $k \geqslant m-1$ fixé, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\binom{p}{k} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \tag{5.225}$$

car $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et

$$\binom{p}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\rho(u)^p}\right) \tag{5.226}$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit x un vecteur propré associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc en particulier, $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, donc $\rho(u)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\rho(u) \geqslant 0$ donc $\rho(u) < 1$. Posons encore $u = d+n$ la décomposition de Dunford de u. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E dans laquelle les coefficients de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$ sont en module $\leqslant \varepsilon$. Définissons sur E

$$\left\|\sum_{i=1}^m x_i e_i\right\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i| \tag{5.227}$$

Soit $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ triangulaire supérieure avec $m_{ii} = \lambda_i$ et pour tout $j \neq i$, $|m_{i,j}| < \varepsilon$. Soit donc $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathbb{C}^m$, on a

$$\|Mx\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \underbrace{\left|\sum_{j=1}^m m_{i,j} x_j\right|}_{(|\lambda_i|+(m-1)\varepsilon)\|x\|_\infty} \tag{5.228}$$

donc

$$|||u||| \leqslant \underbrace{\rho(u)}_{<1} + (m-1)\varepsilon \tag{5.229}$$

et on choisit

$$\varepsilon < \frac{1-\rho(u)}{\underbrace{m-1}_{>0}} \tag{5.230}$$

d'où $|||u||| < 1$ et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence. ■

Remarque 5.23. *$u \mapsto \rho(u)$ n'est pas une norme car pour u nilpotente non nulle, $\rho(u) = 0$.*

Solution 5.38. Supposons (i), soit Y un vecteur propre de A avec $AY = \lambda Y$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, BA^kY = \lambda^k BY$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^{k_0} BY \neq 0$ et $BY \neq 0$ donc on a (ii).

Si (ii), supposons qu'il existe $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\varphi = 0$. On note

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \tag{5.231}$$

avec les λ_i distincts. Alors $Y = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ où $Y_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)$. Il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $Y_{i_0} \neq 0$ car $Y \neq 0$. On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$B \exp(tA) Y = \sum_{i=1}^{r} B \exp(t\lambda_i) Y_i = 0 \tag{5.232}$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, on a $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{r} B\lambda_i^k \exp(t\lambda_i) Y_i = 0$. Pour $t = 0$ on a $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k B Y_i = 0$ ce qui, pour $t = 0$, donne le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} BY_1 + \cdots + BY_r & = & 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \cdots + \lambda_r BY_r & = & 0 \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{r-1} BY_1 + \cdots + \lambda_r^{r-1} BY_r & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.233}$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$, on a donc $\sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) BY_i = 0$. Pour $i \in \{0, \dots, r-1\}$ et $P = \prod_{i \neq j} \frac{(X - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$, on obtient pour tout $i \in \{1, \dots, r\}, BY_i = 0$. En particulier, $BY_{i_0} = 0$ et Y_{i_0} est un vecteur propre de A car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).

Soit $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, supposons que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $BA^kY = 0$. Soit $k \geqslant n$, il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$X^k = Q_k \chi_A + R_k \tag{5.234}$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc $A^k = R_k(A)$ d'où $BA^kY = BR_k(A)Y = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} B \exp(tA) Y &= B \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} Y && (5.235) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (BA^kY)}{k!} && (5.236) \\ &= 0 && (5.237) \end{aligned}$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence. ■

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. A $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & x\cos(t) + y\sin(2t) \end{array} \tag{6.1}$$

   est bornée, donc le sup sur $\mathbb{R}$ existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au sup sur $\mathbb{R}$.

2. Si $|x| + |y| \leqslant 1$, alors $N(x,y) \leqslant 1$ donc on a la première inclusion.

   Si $N(x,y) \leqslant 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leqslant 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leqslant \left| x\frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x\frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leqslant 2 \tag{6.2}$$

   et donc $|y| \leqslant 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. On fixe $(x,y) \in S_N(0,1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π-périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limite à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ.

   On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leqslant x|\cos(t)| + y|\sin(2t)| = |\varphi(-t)| \tag{6.3}$$

   et $-t \in [0,\pi]$. Donc le sup est atteint sur $[0,\pi]$.

   On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leqslant \varphi(t) = x\underbrace{\cos(t)}_{\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]} + y\sin(2t) \leqslant x\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]} + y\sin(2\times(\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t) \tag{6.4}$$

   Donc le sup est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le sup (existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le sup sur $\mathbb{R}$ qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.

   On a donc $x\cos(t_0) + y\sin(2t_0) = 1$ et $-x\sin(t_0) + 2y\cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0, en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.

Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que x et y s'écrivent de la façon demandée, alors t_0 est l'unique point satisfaisant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$. Mais alors le sup de φ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est atteint en un point t_1 qui vérifie les mêmes choses, donc $t_1 = t_0$ d'où $N(x, y) = 1$.

■

Solution 6.2.

1. Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur E

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (f, g) & \mapsto & f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \end{array} \tag{6.5}$$

   Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$ et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. Pour $x \in [0, 1]$, écrire $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, utiliser Cauchy-Schwarz avec f' et 1 puis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a+b}$, pour enfin passer au sup sur x.

3. Utiliser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\begin{array}{rccl} f_n: & [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^n \end{array} \tag{6.6}$$

■

Solution 6.3. Si f est ouverte, $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de R^p. Donc f est surjective.

Si f est surjective, on prend F un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $\dim(\ker(f)) = n - p$ et $\dim(F) = p$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(f)$. On vérifie que $(f(e_1, \dots, f(e_p))$ est une base de $\mathbb{R}^p$. On définit

$$\begin{array}{rccl} N_1: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \sum_i^n x_i e_i & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \end{array} \tag{6.7}$$

norme sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\begin{array}{rccl} N_2: & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & \sum_i^p y_i f(e_i) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |y_i| \end{array} \tag{6.8}$$

norme sur $\mathbb{R}^p$.

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $y_0 \in f(\Theta)$, il existe $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. Comme Θ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta \tag{6.9}$$

Soit $y = \sum_{i=}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, si $N_2(y - y_0) < r_0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \tag{6.10}$$

avec $N_1(x - x_0) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. Ainsi $x \in \Theta$ et $y \in f(\Theta)$, donc $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ et $f(\Theta)$ est un ouvert. ■

Solution 6.4.

1. Classique.
2. $$|f(x)| \leqslant |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leqslant |f(0)| + \kappa(f)x \leqslant N(f) \tag{6.11}$$

   car $x \leqslant 1$, donc $N_\infty \leqslant N$. Pour la non-équivalence, prendre

   $$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^n \end{array} \tag{6.12}$$

3. On a $|f(0)| \leqslant N_\infty(f)$ donc $N(f) \leqslant N'(f)$. Ensuite, $N_\infty \leqslant N$ donne $N' \leqslant N + \kappa \leqslant 2N$. Donc N est N' sont équivalentes.

■

Remarque 6.1. *Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend $(e_i)_{i \in I}$ une base (de Hamel), $J = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ dénombrable. Si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, on peut vérifier que*

$$N_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i| \tag{6.13}$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n|x_{i_{2n}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i| \tag{6.14}$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$. Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$. Alors

$$\left\| T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right) - I_n \right\|_\infty = \left|\frac{\lambda}{p}\right| < \alpha \tag{6.15}$$

donc $T_{i,j}(\lambda) \in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left(T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)^p \in G \tag{6.16}$$

Soit $\delta = \rho e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}} = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$.

On a alors

$$\left\| D_n\left(\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}}\right) - I_n \right\|_\infty < \alpha \tag{6.17}$$

donc $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}})^p \in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G = GL_n(\mathbb{C})$.

■

Remarque 6.2. *C'est faux sur $\mathbb{R}$. Contre-exemple : matrices de déterminant positif.*

Solution 6.6. Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $h \in E$ avec $\|h\| \leqslant \alpha$ et $\|f(h)\| > \varepsilon_0$. On prends $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\| \leqslant 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leqslant M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{\|h\|\to 0} f(x+h) = \lim_{\|h\|\to 0} f(x) + f(h) = f(x) \tag{6.18}$$

donc f est continue.

On a $f(px) = p(fx)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lambda$.

Comme f est continue, on a

$$f(\lambda x) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n x) \tag{6.19}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} r_n f(x) \tag{6.20}$$
$$= \lambda f(x) \tag{6.21}$$

Donc f est linéaire. ■

Remarque 6.3. *Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ ($0 \in I$). On définie*

$$f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\Big) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i\in I\setminus\{0\}} \lambda_i e_i \tag{6.22}$$

f vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \to \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. On a $\alpha(A) \subset \overline{A}$ donc $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Comme $\alpha(A)$ est un ouvert inclus dans $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.
2. Si $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$, on montre aussi que $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. On a donc $A, \overline{A}, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ et c'est tout.

■

Solution 6.8.

1. Si $d_A = d_B$,

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B} \tag{6.23}$$

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_i\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de l'inf). Il existe $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de la fermeture). Ainsi,

$$d_A(x) \leqslant \|x - a_2\| \leqslant \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon \tag{6.24}$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$. Comme $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leqslant d_A$, on a $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.

2. Soit $x \in A$, on a $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leqslant \rho(A, B)$ donc $\sup\limits_{x \in A} d_B(x) \leqslant \rho(A, B)$, de même pour $\sup\limits_{y \in B} d_A(y)$ donc on on a un première inégalité.
Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x - a\| \leqslant d_A(x) + \varepsilon$ et $\|x - b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon$. On a alors

$$d_A(x) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|a - b\| + \|x - b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A, B) \tag{6.25}$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leqslant d_B(x) + \alpha(A, B)$. De même, $d_B(x) \leqslant d_A(x) + \alpha(A, B)$ donc $\rho(A, B) \leqslant \alpha(A, B)$.

■

Solution 6.9.

1. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car $\lim\limits_{z \to +\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \to x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur $\mathbb{C}$, on a $y = P(x) \in P(F)$.

2. Soit Θ un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $y \in P(\Theta), \exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x, r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x - x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominatrice de P. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi

$$|Q(x)| = |y - y'| \geqslant |a| r^n \tag{6.26}$$

Par contraposée, si $|y - y'| \leqslant \frac{|a| r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x' - x| < r$.Ainsi, $x' \in B(x, r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y, |a| r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert.

■

Solution 6.10.

1. Si $P \notin \mathcal{S}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$ et $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$. Par contraposée, si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$,alors $P \in \mathcal{S}$.
Réciproquement, si $P = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$ avec $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ réels, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^{n} |a - \lambda_i + ib| \geqslant |b|^n \tag{6.27}$$

2. Soit $(P_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $P_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} P \in F$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|P_p(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc quand $p \to +\infty$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc $P \in \mathcal{S}$ et S est fermé.
3. Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrice trigonalisable sur $\mathbb{R}$ qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ib bite χ_p le polynôme caractéristique de M_p. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\chi_p \in \mathcal{S}$ et $\chi_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \chi_M$. Comme $\mathcal{S}$ est fermé, $\chi_M \in \mathcal{S}$ et M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

■

Solution 6.11.

1. φ est linéaire et $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n + = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$.

   Si φ est bijective, elle est surjective et il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UA + BV = 1$ et d'après le théorème de Bézout, on a $A \wedge B = 1$.

   Réciproquement, si φ n'est pas surjective, il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\varphi(U, V) = 0$ d'où $AU = -BV$. Soit $\delta = A \wedge B$, on écrit $A = \delta A_1$ et $B = \delta B_1$ avec $A_1 \wedge B_1 = 1$ et on a $A_1 U = -B_1 V$. D'après le théorème de Gauss, on a $A_1 \mid V$ et $B_1 \mid U$. Si $U = 0$, on a $V = 0$ et de même si $V = 0$, on a $U = 0$. On peut donc supposer $U \neq 0$ et $V \neq 0$, et on a alors $\deg(A_1) \leqslant \deg(V) \leqslant n-1 < n = \deg(A)$ mais $A = \delta A_1$ donc $\deg(\delta) \geqslant 1$ et $A \wedge B \neq 1$.
2. Φ est continue car $R_{A,B}$ est un polynôme en les coefficients de A et B.
3. Comme on est dans $\mathbb{C}$, $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$. $\Phi_{P,P'}$ est continue d'après la question précédente, $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc Δ est ouvert.

   Sur $\mathbb{R}$, on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si $P \wedge P' = 1$ (contre-exemple : $P = X^2+1$). Dans $\mathbb{R}_3[X]$, X est scindé à racines simples et $X(1+\varepsilon X)^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} X$ et $-\frac{1}{\varepsilon}$ est racine double, donc Δ n'est pas ouvert.

■

Remarque 6.4. *On peut cependant considérer*

$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\} \tag{6.28}$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ *sont les racines (distinctes) de* R *sur* $\mathbb{R}$*, on choisit* $\alpha_0 \in]-\infty, \lambda_1$*,* $\alpha_n \in]\lambda_n, +\infty[$ *et* $\alpha_i \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ *si* $i = 1, \ldots, n-1$*.*

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$ (car les racines de P provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ & Q & \mapsto & (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \end{array} \tag{6.29}$$

Ψ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$ qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que si $\|P-Q\| < r$, alors $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$. Donc Q change n fois de signe, et admet au moins n racines. Mais $\deg(Q) = n$, donc Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc Δ_n est ouvert dans $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$.

Remarque 6.5. *$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M$ diagonalisable à racines simples$\}$ est exactement égal à $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M$ scindé à racines simples$\}$. C'est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et c'est aussi vrai sur $\mathbb{R}$.*

Solution 6.12.

1. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & A^n \end{array} \tag{6.30}$$

   f est continue et $F = f^{-1}(\{0\})$ donc $F = \overline{F}$.

   Soit $M_0 \in F$, X^n annule M_0 donc M_0 est trigonalisable : on écrit M_0 dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors M_ε la même matrice dans la même base en rajoutant simplement ε en première position de la diagonale. Alors $M_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} M_0$ et $M_\varepsilon \notin F$ donc $\mathring{F} = \emptyset$. Notons que cela signifie que F est dense.

2. La norme dérive du produit scalaire $(A|B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\intercal B)$. Soit $M \in F$, on a $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$. On a $(M|I_n) = \mathrm{Tr}(M) = 0$ car M est nilpotente. Donc $\|M - I_n\|^2$ est minimale pour $\|M\|^2$ minimale, donc pour $M = 0 \in F$. Donc $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$ (et la distance est atteinte pour $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

■

Solution 6.13.

1. $A \mapsto \det(A)$ est continue et $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est donc ouvert. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = A - \frac{1}{p+1}I_n$. Comme $\mathrm{Sp}(A)$ est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout

$p \geqslant N$, $\frac{1}{p+1} \notin \mathrm{Sp}(A)$. Donc pour tout $p \geqslant N$, $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$, et $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$ donc $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. On fixe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On écrit $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Comme, à B fixé, $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a le résultat par densité.

$\blacksquare$

Solution 6.14.

1. On a $v_p\circ(id_E-u) = (id_E-u)\circ v_p = \frac{1}{p}(id_E-u^p)$, donc $\|v_p\circ(id_E-u)\| \leqslant \frac{1}{p}(\|id_E\|+\|u^p\|) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

   Soit $x \in \ker(u-id_E)\cap \mathrm{Im}(u-id_E)$, on a $u(x)=x$ et il existe $y\in E$, $x=(u-id_E)(y)$. On a $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$ et $v_p(x) = v_p\circ(u-id_E)(y) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ d'où $x=0$. Le théorème du rang permet de conclure.

2. Soit $x \in E$, on écrit $x = x_1+x_2$ avec $\Pi(x) = x_1$ et $x_2 = (u-id_E)(y_2)$. Alors $v_p(x) = x_1 + v_p\circ(u-id_E)(y_2) \xrightarrow[p\to+\infty]{} x_1 = \Pi(x)$.

$\blacksquare$

Solution 6.15.

1. Pour tout $x\in A$, $f_n(x)\in A$ car A est convexe. Soit $(x,y)\in A^2$, on a

$$\|f_n(x)-f_n(y)\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|f(x)-f(y)\| \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-y\| \tag{6.31}$$

   Donc f_n est $(1-\frac{1}{n})$-lipschitzienne. On forme

$$\begin{array}{rccc} g_n: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|f_n(x)-x\| \end{array} \tag{6.32}$$

   qui est continue. Soit $x_n \in A$ telle que $g_n(x_n) = \min\limits_{x\in A} g_n(x)$ (existe car A est compact et g_n continue). On a $x_n\in A$, d'où $f_n(x_n)\in A$ et

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)\|f_n(x_n)-x_n\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)g_n(x_n) \tag{6.33}$$

Si $g_n(x_n) \neq 0$, alors on aurait $g_n(f(x_n)) < g_n(x_n)$ ce qui n'est pas possible. Donc $g_n(x_n) = 0$ et $f_n(x_n) = x_n$.

Soit y_n un autre point fixe, on a

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x_n - y_n\| \tag{6.34}$$

donc $x_n = y_n$.

2. On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et on extrait (car A est compact) et on a

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in A \tag{6.35}$$

On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)}f(x_0)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\right)f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)} \tag{6.36}$$

par continuité de f. Donc $f(x) = x$.

3. Soit $(x, y) \in A^2$, points fixes de f, et $t \in [0, 1]$, on pose $z = tx + (1-t)y$. On a

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|f(x) - f(y)\| && (6.37)\\
&\leqslant \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| && (6.38)\\
&\leqslant \|x - z\| + \|z - y\| && (6.39)\\
&= (1-t)\|x - y\| + t\|x - y\| && (6.40)\\
&= \|x - y\| && (6.41)
\end{aligned}$$

On a donc égalité partout : $\|f(x)-f(y)\| = \|f(x)-f(z)\|+\|f(z)-f(y)\|$ et $\|f(x)-f(z)\| = \|x - z\|$, $\|f(z) - f(y)\| = \|z - y\|$ car f est 1-lipschitzienne.

Comme la norme est euclidienne, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) - f(z) = \lambda(f(z) - f(y))$ d'où $f(x) + \lambda f(y) = (\lambda + 1)f(z)$ d'où $f(z) = \frac{x+\lambda y}{\lambda+1} = t'x + (1 - t')y$ avec $t' = \frac{1}{\lambda+1} \in [0, 1]$. En reportant, on a

$$\|f(x) - f(z))\| = \|x - t'x - (1 - t')y\| = (1 - t')\|x - y\| = \|x - z\| = (1 - t)\|x - y\| \tag{6.42}$$

Si $x \neq y$, alors $t = t'$ et $f(z) = tx + (1 - t)y = z$.

4. Soit dans $\mathbb{R}^2$, $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} = [-1,1]^2 = A$. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & (x,|x|) \end{array} \tag{6.43}$$

On a

$$\|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_\infty = \|(x_1,|x_1|)(x_2,|x_2|)\|_\infty \tag{6.44}$$
$$= \max\{|x_1 - x_2|, \big||x_1| - |x_2|\big|\} \tag{6.45}$$
$$= |x_1 - x_2| \tag{6.46}$$
$$\leqslant \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_\infty \tag{6.47}$$

Donc f est 1-lipschitzienne, on a $f(x,y) = (y,x)$ si et seulement si $y = |x|$. Donc ici, F n'est pas convexe.

■

Solution 6.16.

1. On a pour tout $(x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$. Pour $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $f(qrx) = qf(rx) = f(px) = pf(x)$ donc $f(rx) = rf(x)$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de f, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Donc f est linéaire.

   Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans $\mathbb{C}$.

2. On étudie la série, pour x fixé de terme général

$$\|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| = \frac{1}{2^n}\|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}} \tag{6.48}$$

   qui est donc convergente. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. On a $v_0(x) = f(x)$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) = g(x) - f(x)$. f étant continue, v_n l'est aussi, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme pour tout $x \in E$, $\|(v_{n+1} - v_n)(x)\| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}$, donc g est continue.

4. On a, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\|v_n(x+y) - v_n(x) - v_n(y)\| = \|\frac{1}{2^n}f(2^n(x+y)) - \frac{1}{2^n}(f(2^n x) + f(2^n y))\| \leqslant \frac{M}{2^n} \tag{6.49}$$

Donc quand $n \to +\infty$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

On a pour tout $x \in E$,

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x)\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M \tag{6.50}$$

Soit maintenant h linéaire continue telle que $h - f$ soit bornée, soit $M' = \sup_{x \in E} \|h(x) - f(x)\|$. On a donc

$$\|v_n(x) - h(x)\| = \left\|\frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^n} h(2^n x)\right\| \leqslant \frac{M'}{2^n} \tag{6.51}$$

car h est linéaire. Donc quand $n \to +\infty$, $g(x) = h(x)$ car $\lim_{n \to +\infty} v_n(x) = g(x)$.

■

Solution 6.17. En particulier, pour $t = f(0)$, $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{x \in E \mid f(x) = f(0)\}$ est borné (car compact). Donc il existe A tel que $f^{-1}(\{f(0)\}) \subset \overline{B(0, A)}$. Par contraposée, pour tout $x \in E$, si $\|x\| > A$, alors $f(x) \neq f(0)$.

On montre alors que $E \setminus \overline{B(0, A)}$ est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout $x \in E \setminus \overline{B(0, A)}$, $f(x) > f(0)$ soit $f(x) < f(0)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on se place dans le cas $f(x) > f(0)$. Comme on est en dimension finie sur $\overline{B(0, A)}$ compact, f atteint son minimum et ce minimum est plus petit que $f(0)$, c'est donc un minimum global. ■

Remarque 6.6. *C'est faux pour $n = 1$. Contre-exemple : $f = id_{\mathbb{R}}$.*

Solution 6.18. Si c'était le cas, on prend un cercle $\mathcal{C}$ compact (et connexe par arcs). $f(\mathcal{C})$ est compact connexe par arc dans $\mathbb{R}$. On note $f(\mathcal{C}) = [a, b]$ (avec $a < b$ car f injective). Si $x \in \mathcal{C}$ est tel que $f(x) = \frac{a+b}{2}$, on $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a, b] \setminus \left\{\frac{a+b}{2}\right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$ donc une telle fonction n'existe pas. ■

Solution 6.19.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_{l^1} = 1$ et $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leqslant |||\varphi|||$ donc $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On note $M = \sup |K_n| \leqslant |||\varphi|||$.

Soit maintenant $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| u - \sum_{n=0}^{N} u_n e_n \right\|_1 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \tag{6.52}$$

(reste d'une série convergente). Par continuité de φ, on a donc

$$|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n||K_n| \leqslant M\|u\|_1 \tag{6.53}$$

Ainsi, $|||\varphi||| \leqslant M$ et donc $|||\varphi||| = M$.

2. F est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective.

   Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. On définit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & l^1 & \to & \mathbb{R} \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{array} \tag{6.54}$$

   Elle est bien définie car $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle est linéaire, et continue car $|\varphi(u)| \leqslant \|(K_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$.

   Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(e_n) = K_n$. Donc $F(\varphi) = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et F est surjective. Donc F est une isométrie bijective et le dual topologique de l^1 est équivalent à l^∞.

■

Solution 6.20.

1. Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $K = \ker(\varphi)$/ Si F est dense, φ est discontinue. Soit $(a, b) \in (E \setminus H)^2$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $b - a$ (existe car H est dense). La suite $(a + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(a + x_n) = \varphi(a) \neq 0$, et pour $t \in [0, 1]$, $\varphi(t(a + x_n) + (1 - t)(a + x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$. Donc $[a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H$.

   Soit $\gamma : [0, 1] \to E \setminus H$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \gamma(t) & = & \alpha_n t + \beta_n \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) & = & b & \\ \gamma(t) & = & a + t x_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right. \tag{6.55}$$

   On cherche à définir α_n et β_n : on veut $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = a + x_n$ et $\gamma(1 - \frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$ (pour la continuité en se raccordant au x_n). En résolvant le système, on trouve $\alpha_n = n(n+1)(x_n - x_{n+1})$ et $\beta_n = a + x_n - (n - 1)(n + 1)(x_n - x_{n+1})$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$: $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant N$, pour tout $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}[$, $\gamma(t) \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$ par convexité de la boule. Donc $\lim\limits_{t\to 1} \gamma(t) = b$ et γ est continue. Donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

2. Soit φ une forme linéaire telle que $\ker(f) = H$ est fermé. Alors φ est continue (à redémontrer). Soit $x \in E \setminus H$, on a $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $E \setminus H$ était connexe par arcs, φ s'annulerait sur $E \setminus H$ ce qui n'est pas vrai. Donc $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si H est dense alors $E \setminus H$ est connexe par arc d'après la première question. Si H est fermé, soit φ une forme linéaire continue telle que $\ker(f) = H$. Soit $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$.
   - Si $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_-^*$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in E\setminus H}) \neq 0$ et on peut relier directement x_1 et x_2.
   - Sinon, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\varphi(x_1) = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ et $\varphi(x_2) = \rho' e^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$. Alors $x_3 = ix_1$ est tel que $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$ et $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$ (on contourne l'origine par une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$). Par conséquent, on peut utiliser x_3 pour relier x_1 et x_2 donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

■

Solution 6.21. Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ((x, \sin(\frac{1}{x}))) \end{array} \tag{6.56}$$

φ est continue et $\Gamma)\varphi(\mathbb{R}_+^*)$ est connexe par arcs.

On a $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$ avec $\Gamma' = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$. En effet, pour tout $y \in [-1, 1]$, on pose $x_k = \frac{1}{\arcsin(y) + 2k\pi}$. On a $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ donc $(0, y) = \lim\limits_{k\to=+\infty} (x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \overline{\Gamma}$.

Réciproquement, si $(x, y) \in \overline{\Gamma}$, il existe $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ avec $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ et $y = \lim\limits_{k\to+\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$. Si $x > 0$, par continuité, $y = \sin(\frac{1}{x})$ et $(x, y) \in \Gamma$. Si $x = 0$, $y \in [-1, 1]$ donc $(x, y) \in \Gamma'$.

Si $\overline{\Gamma}$ est connexe par arcs, il existe

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [0, 1] & \to & \overline{\Gamma} \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \tag{6.57}$$

continue telle que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. La première projection $t \mapsto x(t)$ est continue avec $x(0) = 0$ et $x(1) = \frac{1}{\pi}$. On définit maintenant $t_1 = \sup\{t \in [0,1] \mid x(t) = 0\}$. Par continuité, $x(t_1) = 0$ et donc $t_1 < 1$. Donc pour tout $t > t_1$, $x(t) > 0$ et $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$ pour $t > t_1$ et $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ avec $y_1 \in [-1, 1]$.

Or, -1 et 1 n'appartiennent pas simultanément à $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. On peut supposer que $1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Comme γ est continue, il existe $t_2 > t_1$ tel que pour tout $t \in]t_1, t_2]$, $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Or $x(t_2) > 0$ et $x(t_1) = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $t_0 \in]t_1, t_2]$ tel que $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ ce qui contredit ce qui précède.

Donc $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs. ■

Solution 6.22.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$ car u_n est le barycentre de $(a, T(a), \ldots, T^n(a))$ et K est convexe. Comme K est compact, on peut extraire $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} u \in K$. Alors
$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n)+1}(id_E - T^{\sigma(n)+1})(a) \tag{6.58}$$
d'où
$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leqslant \frac{1}{\sigma(n)+1} \times 2M \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \tag{6.59}$$
avec $M = \sup_{x \in K} \|x\|$ (existe car K est compact donc borné). Par continuité de T, on a $T(u) = u$.

2. Posons $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$ fermé car $K' = K \cap \Big(\underbrace{(id_E - T)}_{\text{continu}}{}^{-1}\{0\}\Big)$. Donc K' est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout $(u_1, u_2) \in K'^2$, pour tout $t \in [0,1]$, par linéarité de T, on a
$$T(tu_1 + (1-t)u_2) = tu_1 + (1-t)u_2 \tag{6.60}$$
donc K' convexe. De plus, comme $U \circ T = T \circ U$, pour tout $u \in K'$, on a $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$ donc $U(u) \in K'$. On applique alors la question 1 à K' est il existe $y \in K'$: $U(y) = y$ et $T(y) = y$.

■

Solution 6.23.

1. C'est le théorème du rang car $\text{rg}(u) \leqslant n \leqslant p-2$, et $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0\}$ est de dimension $p-1$ donc $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$ (formule de Grassmann).

2. On a
$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = x \tag{6.61}$$
et
$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1 \tag{6.62}$$
Soit $I_+ = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i > 0\}$ et $I_- = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i < 0\}$. On a $I_+ \neq \emptyset$ et $I_- \neq \emptyset$ car $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$. Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $i \in I_+$, $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$. Pour $i \in I_-$, $\lambda_i + t \underbrace{\alpha_i}_{<0} \geqslant 0$ si et seulement si $t \leqslant -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$. Prenons alors
$$t = \min_{i \in I_-} \Big(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \Big) \tag{6.63}$$
On au aussi pour tout $i \in I_-$, $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$ et il existe $i_0 \in I_-$ tel que $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$.

3. Par récurrence descendante, on se ramène à n+1 points car si x est barycentre de p points avec $p \geqslant n+2$, alors il est barycentre de $p-1$ points.

4. Soit $A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & A \times K^{n+1} & \to & \text{conv}(K) \\ & ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (x_1, \dots, x_{n+1})) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array} \tag{6.64}$$
f est surjective et continue, donc $\text{conv}(K)$ est l'image continue d'un compact donc $\text{conv}(K)$ est compact.

■

Solution 6.24. Pour tout $u \in A_p$, $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ distincts et u est diagonalisable. Réciproquement, si u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ alors dans une base la matrice de u est diagonale avec des α_i (éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc $u \in A_p$.

Si $u \in A_p$, on écrit donc le polynôme caractéristique de u
$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \tag{6.65}$$

avec $0 \leqslant m_i \leqslant \dim(E) = n$ et $\sum_{i=1}^r m_i = n$. $u \mapsto \chi_u$ est continue. Pour $(m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r$ tel que $\sum_{i=1}^r m_i = n$, notons

$$A_{m_1,\dots,m_r} = \left\{ u \in A_p \;\middle|\; \chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \tag{6.66}$$

et

$$\Big[u \mapsto \chi_u(A_p) \Big] = \left\{ \bigcup_{(m_1,\dots,m_r)\in D_{n,r}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\} \tag{6.67}$$

où

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r} m_i = n \right\} \tag{6.68}$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires,
si $(m_1, \dots, m_r) \neq (m_1', \dots, m_r')$, alors $A_{m_1,\dots,m_r}$ et $A_{m_1',\dots,m_r'}$ ne sont pas dans la même composante connexe par arcs car

$$\Big[u \mapsto \chi_u \Big(A_{m_1,\dots,m_p} \bigcup A_{m_1',\dots,m_r'} \Big) \Big] = \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \bigcup \left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i'} \right\}}_{\text{pas connexe par arcs}} \tag{6.69}$$

Si $\gamma \colon [0,1] \to A_p$ est continue, $t \mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t) + a_1(t)X + \dots + a_{n-1}(t)X^{n-1} + X^n$ est continue sur $[0,1]$ et prend un nombre fini de valeurs donc est constante. $a_i \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.

Soit $u_0 \in A_{m_1,\dots,m_r}$, soit $u \in A_{m_1,\dots,m_r}$, alors il existe une base $\mathcal{B}_0$ base de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$ soit diagonale avec des α_1 sur les m_1 premières lignes de la diagonale, α_2 sur les m_2 lignes suivantes, etc. Soit $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$. M est semblable à M_0 donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PM_0P^{-1}$.

Or $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc il existe $\varphi \colon [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$ continue telle que $\varphi(0) = P$ et $\varphi(1) = I_n$. On pose alors

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [0,1] & \to & A_{m_1,\dots,m_r} \\ & t & \mapsto & \varphi(t)M_0\varphi^{-1}(t) \end{array} \tag{6.70}$$

Alors $A_{m_1,\dots,m_r}$ est connexe par arcs.

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r} m_i = n \right\} \tag{6.71}$$

qui vaut $\binom{m+r-1}{r-1}$ possibilités (place n points sur une droite et les séparer avec $r-1$ barres : le nombre de points dans chaque segment donne un m_i, il y a $m+r-1$ possibilités pour placer les $r-1$ barres). ■

Solution 6.25.

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|AX|_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j} x_j}_{>0} \geqslant 0$. Si $|AX|_i = 0$ alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j = 0$ donc $x_j = 0$, impossible car $X \neq 0$.
2. Si $|AX| = A|X|$. On a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
$$\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right| = \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \tag{6.72}$$
donc les $(a_{i,j} x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ ont tous même argument. On prend $\theta = \arg(x_j)$.
3. K est fermé et borné en dimension finie : c'est un compact. On a $I_x \neq \emptyset$ car $AX \geqslant 0$ donc $0 \in I_x$. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AX - t_k X \geqslant 0$ donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(AX - t_k X)_i \geqslant 0$ et par passage à la limite, $AX - tX \geqslant 0$ donc I_x est fermé.

   Si $t \in I_x$,
$$|tX|_1 = t = \sum_{i=1}^n t \underbrace{x_i}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j}_{=(AX)_i} \leqslant n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \tag{6.73}$$
car $\sum_{j=1}^n x_j = 1$. On note $M = n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.
4. Pour tout $x \in K$, $\theta(X) \leqslant M$ donc θ est bien borné sur K. Par définition de r_0, il existe $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{k \to +\infty} \theta(X_k) = r_0$. On note $\theta(X_k) = t_k$. Comme K est compact, il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $X_{\sigma(k)}$ converge vers $X^+ \in K$. A priori, $\theta(X^+) \leqslant r_0$. On a $AX_{\sigma(k)} - t_{\sigma(k)} X_{\sigma(k)} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc par passage à la limite, $AX^+ - r_0 X^+ \geqslant 0$ et donc $r_0 \leqslant \theta(X^+)$ donc $r_0 = \theta(X^+)$.
5. Soit $Y = A^+ - r_0 X^+ \geqslant 0$. Si $Y \neq 0$, alors $AY > 0$ d'après la question 1 donc
$$AY = A \underbrace{(AX^+)}_{>0} - r_0 \underbrace{(AX^+)_{>0}} > 0 \tag{6.74}$$

On a $AY > \varepsilon AX^+$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|AY|_i > \varepsilon |AX^+|_i$ (car $AY > 0$). On pose alors

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|AY|_i}{|AX^+|_i} \tag{6.75}$$

On a alors $AY - \varepsilon AX^+ > 0$ d'où

$$A \underbrace{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}_{\in K} - (r_0 + \varepsilon) \frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} > 0 \tag{6.76}$$

donc $r_0 + \varepsilon \in I_{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}$ c'est-à-dire

$$r_0 + \varepsilon \leqslant \theta\Big(\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}\Big) \leqslant r_0 \tag{6.77}$$

ce qui est impossible. Nécessairement $Y = 0$.

6. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$|AV|_i = \Big|\sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j\Big| \leqslant \sum_{i=1}^n a_{i,j} |v_j| = (A|V|)_i \tag{6.78}$$

donc $|\lambda| = |AV| \leqslant A|V|$. De plus, $|V| \in K$ donc $|\lambda| \leqslant \theta(|V|) \leqslant r_0$. Notons que cela implique que le rayon spectral de A est $\rho(A)$ est plus petit que r_0 et que l'on a même égalité.

7. Si $|\lambda| = r_0$, on a $|\lambda| = \theta(|V|) = r_0$ et d'après la question 5 on a $A|V| = r_0|V| = |AV|$. D'après la question 2, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $V = e^{\mathrm{i}\theta}|V|$. Or

$$AV = \lambda V = e^{\mathrm{i}\theta} A|V| = e^{\mathrm{i}\theta} r_0 |V| \tag{6.79}$$

et comme $|K| \in K, |V| \neq 0$ et on a donc $\lambda = r_0$.

8. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|V\|_1 = 1$ et $AV = r_0 V$. D'après la question précédente, on a $V = e^{\mathrm{i}\theta}|V|$ et $A|V| = r_0|V|$. Soit alors $t \in \mathbb{R}$, on a

$$A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|) \tag{6.80}$$

Notons maintenant que si $Y \geqslant 0$ avec $Y \neq 0$ vérifie $AY = r_0 Y$, alors $Y > 0$. En effet, d'après la première question, $AY > 0$. On a $r_0 \neq 0$ car sinon $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ et $A^n = 0$ ce qui est impossible car ses coefficients sont strictement positifs. D'où $Y > 0$.

Ainsi, par définition de X^+, on a $X^+ > 0$ et $|V| > 0$. On a alors

$$(X^+)_i + t|v_i| \geqslant 0 \tag{6.81}$$

si et seulement si

$$t \geqslant -\frac{|X^+|_i}{|v_i|} \tag{6.82}$$

On prend

$$t = \min_{1\leqslant i\leqslant n} -\frac{|X^+|_i}{|v_i|} \tag{6.83}$$

Finalement, on a $X^+ + t|V| \geqslant 0$ et une de ses coordonnées vaut 0 (car on a pris le minimum sur les i). Nécessairement, $X^+ + t|V| = 0$ (car $A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$) et donc $|V| \in \mathbb{R}X^+$. Donc $V = e^{\mathrm{i}\theta}|V| \in \mathbb{C}X^+$ et ainsi

$$\dim(\ker(A - r_0 I_n)) = 1 \tag{6.84}$$

■

Solution 6.26. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & U\times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array} \tag{6.85}$$

On a

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x',y') = |\|x-y\|-\|x'-y'\|| \leqslant \|(x-y)-(x'-y')\| \leqslant \|x-x'\|+\|y-y'\| \leqslant 2\|(x,y)-(x',y')\|_\infty \tag{6.86}$$

donc φ est continue.

$U \times V$ est compact, donc il existe $(x_1, y_1) \in (U \times V)$ telle que $\varphi(x_1, y_1) = \min_{(x,y)\in U\times V} \varphi(x, y)$. Comme U et V sont disjoints, $x_1 \neq y_1$ et $\varphi(x_1, y_1))d(U, V) > 0$.

Soit $\alpha = \frac{d(U,V)}{3}$. On pose $U' = \{x \in E \mid d(x, U) < \alpha\}$ et $V' = \{x \in E \mid d(x, V) < \alpha\}$. $x \mapsto \|x\|$ est continue car 1-lipschitzienne donc U' est V' sont des ouverts et on a bien $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Soit ensuite $x \in U' \cap V'$, on a $d(x, U) < \alpha$ et $d(x, V) < \alpha$ donc il existe $(u, v) \in U \times V$, $d(x, u) < \alpha$ et $d(x, v) < \alpha$. Alors $d(u, v) \leqslant 2\alpha$ ce qui est absurde. Donc $U' \cap V' = \emptyset$. ■

Solution 6.27.

1. f est 1-lipschitzienne donc est continue. On forme

$$\begin{array}{rccc} g: & K & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x - f(x)\| \end{array} \tag{6.87}$$

g est continue, K est compact donc il existe $a \in K$ tel que $g(a) = \min_{x \in K} g(x)$. Si $a \neq f(a)$, alors $\|f(a) - f^2(a)\| = g(f(a)) < \|a - f(a)\| = g(a)$ ce qui est impossible par définition de a. Donc $f(a) = a$. S'il existe $a' \neq a$ tel que $f(a') = a'$, alors $\|f(a) - f(a')\| = \|a - a'\| < \|a - a'\|$ ce qui est impossible. Donc a est unique.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = a$ alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_{n+1} - a\| = \|f(u_n) - f(a)\| < \|u_n - a\| \tag{6.88}$$

donc la suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+$ donc elle converge vers $l \geqslant 0$. Par compacité de K, il existe une extraction σ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha \in K$. Par continuité,

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_{\sigma(n)} - a\| = \|\alpha - a\| = l \tag{6.89}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \|\underbrace{u_{\sigma(n)+1}}_{f(u_{\sigma(n)})} - f(a)\| = \|f(\alpha) - f(a)\| = l = \|\alpha - a\| \tag{6.90}$$

par continuité de f. Ainsi, on a $\alpha = a$ et $l = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

3. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x < y \in \mathbb{R}^2$, il existe $z \in]x, y[$ tel que (égalité des accroissements finis)

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(z)| = \left|\frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}\right| < 1 \tag{6.91}$$

donc f vérifie bien l'hypothèse de contraction. Cependant, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2 + 1} > a$ donc pas de point fixe. La démonstration tombe en défaut car $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

■

Solution 6.28. La condition est équivalente à pour tout $(M_1, M_2, M_3) \in K_1 \times K_2 \times K_3$, M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.

On forme alors

$$\begin{array}{rccc} f: & K_1 \times K_2 \times K_3 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (M_1, M_2, M_3) & \mapsto & R(M_1, M_2, M_3) \end{array} \tag{6.92}$$

où $R(M_1, R_2, M_3)$ est le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par M_1, M_2 et M_3.

On note $M_i = (x_i, y_i)$ et Δ_i la médiatrice de $[M_j M_k]$. Établissons une équation de Δ_i. On a $M = (x, y) \in \Delta_i$ si et seulement si $\|\vec{MM_j}\|_2^2 = \|\vec{MM_k}\|_2^2$ si et seulement si $(\vec{MM_j} + \vec{MM_k} \mid \vec{MM_j} - \vec{MM_k}) = 0$ (produit scalaire), si et seulement si $(\vec{MC_i} \mid \vec{M_jM_k}) = 0$ où C_i est le milieu de $[M_j M_k]$, si et seulement si (calculer le produit scalaire)

$$\left(\frac{x_j + x_k}{2} - x\right)(x_k - x_j) + \left(\frac{y_j + y_k}{2} - y\right)(y_k - y_j) = 0 \tag{6.93}$$

Soit alors $M_0 = (x_0, y_0)$ le centre du cercle circonscrit. $M_0 \in \Delta_i \cap \Delta_j$ avec $i \neq j$. Par exemple, $M_0 \in \Delta_3 \cap \Delta_1$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(\frac{x_2 + x_1}{2} - x_0\right)(x_2 - x_1) + \left(\frac{y_2 + y_1}{2} - y_0\right)(y_2 - y_1) & = & 0 \\ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - x_0\right)(x_3 - x_2) + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - y_0\right)(y_3 - y_2) & = & 0 \end{array}\right. \tag{6.94}$$

si et seulement si $(L_2 \leftarrow L_1(x_3 - x_2) + L_2(x_1 - x_2))$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) & = & \dfrac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} \\ x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) & = & \dfrac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2} \end{array}\right. \tag{6.95}$$

si et seulement si $(L_1 \leftarrow L_2(y_2 - y_1) + L_1(y_2 - y_3))$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & \dfrac{\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \\ y_0 & = & \dfrac{\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \end{array}\right. \tag{6.96}$$

et $R(M_1, M_2, M_3) = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}$. En reportant, f est continue sur $K_1 \times K_2 \times K_3$ compact donc f atteint son minimum. ■

Solution 6.29.

1. Pour tout $f \in E$, $T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et $(T(f))' = f$, $T(f)(0) = 0$. T est clairement linéaire, soit ensuite $x \in [0, 1]$, on a

$$|T(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)dt\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|dt \leqslant x\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \tag{6.97}$$

Donc $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ donc T est continue et $|||T||| \leqslant 1$. Pour $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, $T(f)(x) = x$ donc $\|T(1)\|_\infty = 1$. Ainsi, $|||T||| = 1$.

2. $id_E - T$ est continue. Soit $(f,g) \in E^2$, on a $g = f - T(f)$ si et seulement si $g = y' - y$ et $y(0) = 0$. On a $g(x)e^{-x} = \underbrace{e^{-x}(y'(x) - y(x))}_{(e^{-x}y(x))'}$ donc en intégrant de 0 à x on a

$$y(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt \tag{6.98}$$

Donc $T(f)$ vérifie le problème de Cauchy si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$ si et seulement si pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt \tag{6.99}$$

Donc $id_E - T$ est bijective. Enfin, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x)| \leqslant |g(x)| + \left| \int_0^x g(t) e^{x-t} dt \right| \leqslant \|g\|_\infty (1 + xe^x) \leqslant \|g\|_\infty (1+e) \tag{6.100}$$

Ainsi,

$$\|f\|_\infty = \|(id_E - T)^{-1}(g)\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty (1+e) \tag{6.101}$$

donc $(id_E - T)^{-1}$ est continue. Ainsi, $id_E - T$ est un homéomorphisme.

■

Solution 6.30.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $f^{-1}(K)$ est fermé car f est continue. K est borné, donc il existe $M > 0$, tel que pour tout $y \in K$, $\|y\| \leqslant M$. Donc pour tout $x \in f^{-1}(K)$, $\|f(x)\| \leqslant M$. Par contraposée de (i) pour $A = M+1$, il existe $B > 0$ tel que $\|f(x)\| < A \Rightarrow \|x\| < B$. Donc pour $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| < B$ donc $f^{-1}(K)$ est borné. C'est donc un compact.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $A \geqslant 0$. Soit $K = \overline{B(0,A)}$ compact car fermé et borné en dimension finie. D'après (ii), $f^{-1}(K)$ est compact donc borné : il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| \leqslant B$. Par contraposée, si $\|x\| > B$ alors $x \notin f^{-1}(K)$ et $f(x) \notin K$ donc $\|f(x)\| > A$. Ainsi, $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

■

Remarque 6.7. *Exemple pour l'exercice précédent : les fonctions polynômiales non constantes. Contre-exemple : l'exponentielle, cf* $\exp([0,1]) = \mathbb{R}_-$ *non compact.*

Solution 6.31.

1. Soit $(x, y) \in K^2$ compact. Soit σ un extraction telle que

$$(f^{\sigma(n)}(x), f^{\sigma(n)}(y)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (l, l') \in K^2 \tag{6.102}$$

   On a

$$f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{6.103}$$

   de même pour y. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x)\| \leqslant \varepsilon \\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(y) - f^{\sigma(n)}(y)\| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{6.104}$$

   Pour $N = \max(N_1, N_2)$ et $p = \sigma(N+1) - \sigma(N) \in \mathbb{N}^*$, on a

$$d(x, f^p(x)) \leqslant d(f^{\sigma(n+1)}(x), f^{\sigma(n)}(x)) \leqslant \varepsilon$$

   et de même pour y avec le même p.

2. On a

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leqslant d(f(x), f(y)) && (6.105)\\ &\leqslant d(f^p(x), f^p(y)) && (6.106)\\ &\leqslant d(f^p(x), x) + d(x, y) + d(y, f^p(y)) && (6.107)\\ &\leqslant 2\varepsilon + d(x, y) && (6.108) \end{aligned}$$

   Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a égalité tout du long. On a donc notamment, $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$ et donc f est une isométrie.

3. f est 1-lipschitzienne donc continue. Donc $f(K)$ est compact donc fermé. Il suffit donc de montrer que $f(K)$ est dense dans K. Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x - \underbrace{f^p(x)}_{\in f(K)}\| \leqslant \varepsilon$ d'après la première question. Donc $f(K)$ est dense dans K et $f(K) = \overline{f(K)} = K$.

■

Remarque 6.8. *Exemple pour l'exercice précédent : une rotation sur la sphère unité.*

Solution 6.32. Soit

$$\begin{array}{rrcl} f: & K & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & f(M) = \text{rayon du cercle circonscrit au triangle MAB} \end{array} \tag{6.109}$$

On a $F = f(K)$. Soit (C, i, j) un repère orthonormé où C est le milieu de $[AB]$ et $A(-\alpha, 0)$ et $B(\alpha, 0)$ avec $\alpha > 0$. La médiatrice Δ de $[A, B]$ a pour équation $x = 0$. Si $M(x, y)$, soit $\varphi(M)$ le centre du cercle circonscrit. On a $\varphi(M) \in \Delta$ donc $\varphi(M)(0, y_1)$ et $\varphi(M)$ appartient à la médiatrice de $[MA]$. On a $y_1 \neq 0$ car $M \notin (AB)$.

Notons M' le milieu de $[MA]$. On a $M'(\frac{x-\alpha}{2}, \frac{y}{2})$ d'où $\vec{M'\varphi(M)} \cdot \vec{MA} = 0$ d'où (en développant le produit scalaire),

$$y_1 = \Big((\alpha + x)\Big(\frac{\alpha - x}{2}\Big) - \frac{y^2}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{y}\Big) \tag{6.110}$$

φ est donc continue donc f également et $f(K) = F$ est compact. ■

Solution 6.33.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\tau)$ et $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ avec $\tau(P) = \lambda P$. Si P n'est pas constant, notons $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $P(\alpha) = 0$. Alors $P(\alpha + 1) = 0$. En itérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$, impossible car P n'est pas constant donc pas nul. Finalement, P est constant et $\lambda = 1$: $\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}$.
2. $f : x \mapsto P(x)e^{-x}$ est continue et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc le sup est bien défini. Il est ensuite facile de vérifier que $\|P\|$ est une norme.
3. On a

$$\|\tau(P)\| = \sup_{x \geqslant 0} |P(x+1)e^{-x}| = \sup_{x' \geqslant 1} |P(x')e^{-x'}e| \leqslant \sup_{x' \geqslant 0} |P(x')e^{-x'}e| \leqslant e\|P\| \tag{6.111}$$

4. Utiliser $P = X$.

■

Solution 6.34.

1. Pour x fixé, $\min(x, \varphi(t)) = \frac{x+\varphi(t)-|x-\varphi(t)|}{2}$ est continue. Donc $T(f)$ est définie.

   Si $x \leqslant \varphi(0)$,
$$T(f)(x) = \int_0^1 x f(t) dt = x \int_0^1 f(t) dt \tag{6.112}$$
   et si $x \geqslant \varphi(1)$,
$$T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt \tag{6.113}$$
   et si $\varphi(0) \leqslant x \leqslant \varphi(1)$, il existe un unique $t_1 = \varphi^{-1}(x)$ (car φ induit un homéomorphisme de $[0, 1]$ dans $\varphi([0, 1])$).

   Si $t \leqslant t_1$, on a $\varphi(t) \leqslant x$, donc $\min(x, \varphi(t)) = \varphi(t)$. Si $t \geqslant t_1$, on a $\min(x, \varphi(t)) = x$. On a donc
$$T(f)(x) = \int_0^{t_1} \varphi(t) f(t) dt + \int_{t_1}^1 x f(t) dt \tag{6.114}$$
$$= \underbrace{\int_0^{\varphi^{-1}(x)} \varphi(t) f(t) dt}_{=F_1(\varphi^{-1}(x))} + x \underbrace{\int_{\varphi^{-1}(x)}^1 f(t) dt}_{=F_2(\varphi^{-1}(x))} \tag{6.115}$$
   et f et φ étant continues, F_1 et F_2 sont continues.

   Donc $T(f)$ continue et T linéaire, c'est un endomorphisme de E.

2. On a
$$|T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 \min(x, \varphi(t)) dt}_{=A(x)}$$
   donc
$$\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|A\|_\infty \tag{6.116}$$
   donc T est continue et $|||T||| \leqslant \|A\|_\infty$. De plus pour $f = 1$, on a $|||T||| = \|A\|_\infty$.

3. On a
$$A(x) = \int_0^1 \min(x, \varphi(t)) dt = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant \varphi(0) \\ \int_0^1 \varphi(t) dt & \text{si} \quad x \geqslant \varphi(1) \end{cases} \tag{6.117}$$
   Dans tous les cas,
$$\|A\|_\infty \leqslant \int_0^1 \varphi(t) dt \tag{6.118}$$
   donc
$$\|A\|_\infty = \int_0^1 \varphi(t) dt \tag{6.119}$$

■

Solution 6.35.

1. φ est une forme linéaire. et on a

$$|\varphi(P)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{a_k}{2^k}\right| \leqslant 2\|P|_\infty \tag{6.120}$$

donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 2$. Pour $p \neq 0$, $|\varphi(P)| < 2\|P\|_\infty$: pour avoir égalité, il faudrait pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k =$ constante $\neq 0$ ce qui n'est pas possible. Pour $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varphi(P_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc $|||\varphi||| = 2$. De plus, $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé.

2. Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi(P) = 0$ d'où $a_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$ (et il existe $N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, a_n = 0$). On a donc

$$P(X) - 1 = (a_0 - 1) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k X^k \tag{6.121}$$

et si $\|P-1\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{cases} |a_0 - 1| \leqslant \frac{1}{2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.122}$$

et

$$|a_0| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \tag{6.123}$$

Et $\frac{1}{2} \leqslant 1 - |a_0| \leqslant |1 - a_0| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $|a_0| = \frac{1}{2}$ et $|1 - a_0| = \frac{1}{2}$.

$$a_0 = \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\theta} \Rightarrow \left|1 - \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 = \frac{1}{4} \tag{6.124}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\theta)\right)^2 = \frac{1}{4} \tag{6.125}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos(\theta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \tag{6.126}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = 1 \tag{6.127}$$

et donc $a_0 = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \tag{6.128}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| = \frac{1}{2}$, impossible car $P \in \mathbb{C}[X]$, ainsi $\|P-1\|_\infty > \frac{1}{2}$.

3. On définit, pour $n \geqslant 1$, $P_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n)X^k$ avec $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n \in \ker(\varphi)$. On a

$$P_n \in \ker(\varphi) \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n\Big)\frac{1}{2^k} = 0 \tag{6.129}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \tag{6.130}$$

et donc $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (et $\varepsilon_n < 0$). On a donc $\|P_n - 1\|_\infty = \frac{1}{2} - \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.
Donc $d(1, \ker(\varphi)) = \frac{1}{2}$ et cette distance n'est pas atteinte.

■

Solution 6.36. Prouvons d'abord l'existence. Soit $M \in \mathbb{R}^n$, on définit $r(M) = \sup\{\|M - A\| \mid A \in K\}$ et $\varphi\colon A \mapsto \|M - A\|$ est continue sur K compact donc le sup est en fait un max. On a notamment $r(M) = \{R > 0 \mid K \subset B(M, R)\}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & r(M) \end{array} \tag{6.131}$$

Soit $(M, M') \in (\mathbb{R}^n)^2$. Pour tout $A \in K$, on a

$$\|M - A\| \leqslant \|M - M'\| + \|M' - A\| \leqslant \|M - M'\| + r(M') \tag{6.132}$$

En particulier, on a

$$r(M) \leqslant \|M - M'\| + r(M') \tag{6.133}$$

et en échangeant M et M', on a $|r(M) - r(M')| \leqslant \|M - M'\|$. Donc r est 1-lipschitzienne donc continue. Soit $A_0 \in K$, $R(M) \geqslant \|M - A_0\| \geqslant \|M\| - \|A_0\| \xrightarrow[\|M\|\to+\infty]{} +\infty$. Donc il existe $M_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $r(M_0) = \min_{M\in\mathbb{R}^n} r(M) = r_0$, d'où l'existence d'une boule fermée de rayon minimal.

Pour l'unicité, soit $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $r(M_1) = r(M_2) = r_0$. On suppose que $\|M_1 - M_2\| = \varepsilon > 0$. Soit M_3 le milieu de $[M_1M_2]$. On a $K \subset B_{M_1,r_0} \cap B_{M_2,r_0}$. On prend $r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = r_0^2$ d'où

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < r_0 \tag{6.134}$$

Soit $M \in B(M_1, r_0) \cap B(M_2, r_0)$, on a

$$\|M - M_3\|^2 = \frac{1}{4}\Big(\|M - M_1 + M - M_2\|^2\Big) \tag{6.135}$$
$$= \frac{1}{4}\Big(2\|M - M_1\|^2 + 2\|M - M_2\|^1 - \underbrace{\|M_1 - M_2\|^2}_{=\varepsilon^2}\Big) \tag{6.136}$$
$$\leqslant \frac{1}{4}(2r_0^2 + 2r_0^2 - \varepsilon^2) \tag{6.137}$$
$$\leqslant r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} = r^2 \tag{6.138}$$

Donc $B_1 \cap B_2 \subset \overline{B(M_3, r)}$ d'où $K \subset \overline{B(M_3, r)}$, ce qui est absurde car $r < r_0$. Donc $M_1 = M_2$. ■

Solution 6.37. φ est évidemment définie et linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

$$|\varphi(f)| = \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f\right| \tag{6.139}$$
$$\leqslant \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 f\right| \tag{6.140}$$
$$\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f| \tag{6.141}$$
$$\leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \tag{6.142}$$

■

Donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 1$. Notons que si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors on a égalité partout au-dessus et pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| = \|f\|_\infty$ et comme $\left|\int f\right| = \int |f|$ implique que f est de signe constant sur l'intervalle d'intégration, si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors f est de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Or $|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f| = |\int_0^{\frac{1}{2}} f| + |\int_{\frac{1}{2}}^1 f|$, f est de signe opposé sur les deux segments. Or f est continue en $\frac{1}{2}$, donc f est nulle. Donc pour f non nulle, on a $|\varphi(f)| < \|f\|_\infty$ donc la norme triple n'est pas atteinte. Enfin, pour montrer que $|||\varphi||| = 1$, on utilise pour $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ (\frac{1}{2} - t)n & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ -1 & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases} \tag{6.143}$$

On a bien $\|f_n\|_\infty = 1$.

Solution 6.38.

1. Non car on applique l'application trace.
2. On a le résultat par récurrence.
3. On a
$$(n+1)|||v^n||| = |||u \circ v^n \circ v - v^n \circ v \circ r||| \leqslant 2|||u||| |||v||| |||v^n||| \tag{6.144}$$
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v^n = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n + 1 \leqslant 2|||u||| |||v||| \tag{6.145}$$
ce qui est impossible. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^n = 0$. Alors $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1} = 0$ donc $v^{n-1} = 0$ et de proche en proche $v = 0$: contradiction.
4. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,
$$(D \circ T - T \circ D)(P) = (XP)' - XP' = P \tag{6.146}$$
donc $D \circ T - T \circ D = id$. D'après ce qui précède, T et D ne peuvent pas être continus simultanément.

■

Solution 6.39.

1. $\sum_{k \geqslant 0}(A - I_n)^k$ converge absolument car $|||A - I_n|||^k \leqslant \alpha_k$ et $\alpha <$.
Si $AX = 0$, $\|(A - I_n)X\| = \|X\| \leqslant \alpha\|X\|$ donc $\|X\| = 0$ et $X = 0$ donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$, idem pour B. On a alors
$$A \sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k = ((A - I_n) + I_n) \sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k = I_n$$
par téléscopage. Donc
$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k \tag{6.147}$$
et
$$|||A^{-1}||| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1 - \alpha} \tag{6.148}$$

et de même pour B. On écrit alors

$$ABA^{-1}B^{-1} - I_n = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - I_n)(B - I_n) - (B - I_n)(A - I_n))A^{-1}B^{-1}) \tag{6.149}$$

d'où

$$\left|\left|\left|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\right|\right|\right| \leqslant \frac{2|||A - I_n||| |||B - I_n|||}{(1-\alpha)(1-\beta)} \tag{6.150}$$

2. On prend $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.

3. Pour tout $M \in G$, il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \cap G = \{M\}$. Montrons que G est discret si et seulement si I_n est isolé. En effet, si I_n est isolé, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(I_n, r_0) \cap G = \{I_n\}$. Soit $M \in G$, alors pour tout $M' \in G$, $M - M' = M(I_n - M^{-1}M')$ d'où $I_n - M^{-1}M' = M^{-1}(M - M')$. Si

$$|||M - M'||| < \frac{r_0}{|||M^{-1}|||} \tag{6.151}$$

on a $|||I_n - M^{-1}M'||| < r_0$ et donc $M' = M$ et M est isolé. Ainsi G est isolé. La réciproque est évidente.

C est dans le commutant si et seulement si C commute avec A et B si et seulement si

$$\begin{cases} ACA^{-1}C^{-1} = I_n \\ BCB^{-1}C^{-1} = I_n \end{cases} \tag{6.152}$$

Notons maintenant que

$$\overline{B_{\|\cdot\|}(I_n, \frac{1}{4})} \cap G = \mathcal{A} \tag{6.153}$$

est fini. En effet, si cet ensemble était infini, il existerait $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite injective dans $\mathcal{A}$. La suite étant bornée, on peut extraite $(M_{\sigma(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge et alors pour tout $p \in I_n$

$$\underbrace{M_{\sigma(p)}M_{\sigma(p+1)}^{-1}}_{\xrightarrow[pto+\infty]{} I_n} \in G \setminus \{I_n\} \tag{6.154}$$

ce qui est impossible car I_n est isolé.

Comme $A \in \mathcal{A}\setminus\{I_n\}$, il existe $C \in \mathcal{A}\setminus\{I_n\}$ telle que $|||C - I_n|||$ soit minimale et $|||c - I_n||| \leqslant \frac{1}{4}$. D'après la question 2 on a

$$\left|\left|\left|ACA^{-1}C^{-1} - I_n\right|\right|\right| < |||C - I_n||| \tag{6.155}$$

et même chose pour B. Donc nécessairement, $ACA^{-1}C^{-1} = I_n$ et de même pour B. Ainsi, C commute avec toutes les matrices de G.

$\blacksquare$

Solution 6.40.

1. $\mathbb{C}_{n-1}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc c'est un fermé. Par division euclidienne par χ_A, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$. Comme

$$\exp(A) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \tag{6.156}$$

$\exp(A) \in \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$.

2. Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P \tag{6.157}$$

et donc

$$\exp(A) = P^{-1} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P \tag{6.158}$$

et $\exp(A)$ est diagonalisable.

Si $\exp(A)$ est diagonalisable, on utilise la décomposition de Dunford : $A = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. On a donc

$$\exp(A) = \exp(D) \underbrace{\exp(N)}_{=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}} = \exp(D) + \exp(D) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} \right) = \exp(D) + N' \tag{6.159}$$

avec N' nilpotente et $\exp(D)$ est diagonalisable d'après le sens direct. N' commute avec $\exp(D)$. Par unicité de la décomposition de Dunford, $\exp(A)$ étant diagonalisable, on a $N' = 0$. Comme $\exp(D)$ est inversible,

$$N \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}}_{=I_n + N''} = 0 \tag{6.160}$$

avec N'' nilpotente. $I_n + N''$ est donc inversible et ainsi $N = 0$ et A est diagonalisable.

3. D'après ce qui précède, $\exp(A) = I_n$ est diagonalisable et

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{ e^{\lambda} \mid \lambda \in \operatorname{Sp}_{\lambda}(\mathbb{C}) \} = \{ I_n \} \tag{6.161}$$

Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$, en diagonalisant, on a bien $\exp(A) = I_n$.

4. Sur $\mathbb{R}$, si A est diagonalisable, $\exp(A)$ l'est aussi. Cependant, la réciproque n'est pas vrai, par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\pi & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i}\pi \end{pmatrix} \text{ semblable à } \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \tag{6.162}$$

On a $\chi_M = X^2 + 4\pi^2$, $\exp(A) = I_2$ et A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

■

Solution 6.41.

1. On a $\ln(1-x) = P(x) + x^2 O(1)$ et $\exp(y) = Q(y) + y^n O(1)$ d'où

$$\exp(\ln(1+x)) = 1 + x = Q(\ln(1+x)) + \underbrace{\ln(1+x)^n O(1)}_{O(x^n)} \tag{6.163}$$

alors $1+x = Q(P(x)+O(x^n))+O(x^n) = Q(P(x))+O(x^n)$. Soit $B(X) = Q(P(X))+O(x^n) \in \mathbb{R}[X]$, on a $\frac{B(x)}{x^n} = O(1)$ donc $X^n \mid B$ et

$$Q(P(X)) = 1 + X + B(X) = 1 + X + X^n A(X) \tag{6.164}$$

2. On a $N^n = 0$ donc $P(N)$ est aussi nilpotente et on a

$$\exp(P(N)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(N)^k}{k!} = Q(P(N)) = I_n + N + 0 \tag{6.165}$$

3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et sa décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. On a $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{C}^*$ et on écrit

$$M = D \underbrace{(I_n + \underbrace{D^{-1}N}_{\text{nilpotente}})}_{=\exp(P(D^{-1}N))} \tag{6.166}$$

si $D = P_1 \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P_1^{-1}$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_k = \exp(\mu_k)$ (car exp est surjectif sur $\mathbb{C}^*$). Alors

$$D = \exp(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) P_1^{-1}) \in \mathbb{C}[D] \tag{6.167}$$

puis

$$M = \exp\Big(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}\Big) \exp\Big(P(D^{-1}N)\Big) \tag{6.168}$$

$$= \exp\Big(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1} + P(D^{-1}N)\Big) \tag{6.169}$$

car les matrices commutent.

Donc exp est surjective.

■

Solution 6.42. On a $A \subset \overline{A}$, $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{n})^{2n} \in \overline{A}$ et $e = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \in \overline{A}$.

Si $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$, $(\frac{1}{n} + \frac{1}{p})^{n+p} \leqslant 1$. Donc si $(\frac{1}{n} + \frac{1}{p})^{n+p} \geqslant 1$, alors $n = 1$ ou $p = 1$.

Si $x > e$, à partir d'un certain rang, on a $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leqslant \frac{e+x}{2}$ et si $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$. Si $1 \leqslant x < e$, à partir d'un certain rang, on a $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > x$ donc si $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$.

Soit $x < 1$, si $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 3$ ou $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 2$, on a $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leqslant \frac{5}{6}$ et

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} = \exp\left((n+p)\ln\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\right) \tag{6.170}$$

$$\leqslant \exp\left((n+p)\ln\left(\frac{5}{6}\right)\right) \tag{6.171}$$

$$\leqslant \max\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}, \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^p}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0}\right) \tag{6.172}$$

Il existe N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $(\frac{5}{6})^n \leqslant \frac{x}{2}$. Si n ou p est plus grand que N_0, on a donc

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \leqslant \frac{x}{2} \tag{6.173}$$

Donc il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de A plus grand que $\frac{x}{2}$. Ainsi,

$$\overline{A} = A \cup \{e, 0\} \tag{6.174}$$

■

Solution 6.43. On note

$$\mathbb{V} = \bigcup_{m\geqslant 1} \mathbb{U}_m = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{m}} \;\middle|\; m \geqslant 1, k \in \{0, \dots, m-1\} \right\} \tag{6.175}$$

Soit $M \in H$. $X^m - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec ses valeurs propres dans $\mathbb{V}$. Réciproquement, si M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{V}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M), \exists m_\lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{U}_{m_\lambda}$ et soit $m = \mathrm{ppcm}_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)}(m_\lambda)$. Alors $M^m = I_n$.

Soit $A \in \overline{H}$, il existe $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} M_p = A$. Comme le polynôme caractéristique est une fonction continue des coefficients, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \chi_{M_p}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = 0 \tag{6.176}$$

Or

$$|\chi_{M_p}(\lambda)| = |\lambda - \lambda_{1,p}| \dots |\lambda - \lambda_{n,p}| \geqslant d(\lambda, \mathbb{U})^n \tag{6.177}$$

avec $\lambda_{i,p} \in \mathbb{V}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc $d(\lambda, \mathbb{U}) = 0$ et comme $\mathbb{U}$ est fermé, $\lambda \in \mathbb{U}$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$. Soit

$$\left\{ e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_r} \right\} \tag{6.178}$$

les valeurs propres distinctes de A de multiplicités $m_1, \dots, m_r$. Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_1}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{i\theta_r}, \dots, e^{i\theta_r}}_{m_r \text{ fois}})Q^{-1} \tag{6.179}$$

On a

$$\theta = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi}{k} \lfloor k \frac{\theta}{2\pi} \rfloor \tag{6.180}$$

donc on peut former, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{i\theta_{1,p}}, \dots, e^{i\theta_{1,p}}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{i\theta_{r,p}}, \dots, e^{i\theta_{r,p}}}_{m_r \text{ fois}})Q^{-1} \tag{6.181}$$

avec $\theta_{i,p} = \frac{2\pi}{p}\lfloor p\frac{\theta_j}{2\pi}\rfloor + \frac{2j\pi}{p}$. Pour p suffisamment gand, les $(\theta_{j,p})$ sont deux à deux distincts donc A_p est diagonalisable et $A_p \in H$, et donc $A \in \overline{H}$. ■

Solution 6.44.

1. On a l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. On a cependant $N_a(X^k) = |a_k|$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k \neq 0$. Donc N_a est une norme implique que a ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$. Réciproquement, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$, si $P \neq 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec p_k et donc $N_a(P) > 0$. Donc N_a est une norme si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$.
2. Si N_a et N_b sont équivalentes, alors il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta N_b(X^k) \leqslant N_a(X^k) \leqslant \alpha N_b(X^k) \tag{6.182}$$

d'où

$$\beta |b_k| \leqslant N_a(X^k) \leqslant \alpha |b_k| \tag{6.183}$$

Donc $a = O(b)$ et $b = O(a)$.

Réciproquement, si $a = O(b)$ et $b = O(a)$, alors on a l'inégalité précédente sur les a_k et b_k, d'où

$$\beta \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k a_k| \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \tag{6.184}$$

et donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\beta N_b(P) \leqslant N_a(P) \leqslant \alpha N_b(P) \tag{6.185}$$

et N_a et N_b sont équivalentes.
3. Δ est continue pour N_a si et seulement s'il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $N_a(\Delta P) \leqslant C N_a(P)$. Si Δ est continue alors il existe $c \geqslant 0$ tel que $N_a(kX^k) \leqslant c N_a(X^k)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|k a_{k-1}| \leqslant c |a_k| \tag{6.186}$$

Réciproquement, si on a (6.186), pour tout $P \in \mathbb{C}[X] = N_a(\Delta P) \leqslant c N_a(P)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = k!$, (6.186) est vérifiée pour $c = 1$. Si $b_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, (6.186) n'est pas vérifiée donc Δ n'est pas continue pour N_b.

■

Solution 6.45.

1. On a $d(x, A) = 0$ si et seulement si $\inf_{a \in A} \|x-a\| = 0$ si et seulement si $\varepsilon > 0, \exists a \in A\colon \|x-a\| < \varepsilon$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

   On a $A \subset \overline{A}$ donc $d(x, \overline{A}) \leqslant d(x, A)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a' \in \overline{A}$ tel que $\|x - a'\| < d(x, \overline{A}) + \varepsilon$ et il existe $a \in A$ tel que $\|a - a'\| < \varepsilon$. Ainsi,

$$d(x, A) \leqslant \|x - a\| \leqslant d(x, \overline{A}) + 2\varepsilon \tag{6.187}$$

   Ceci calant pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(x, A) \leqslant d(x, \overline{A})$ et donc on a égalité.

2. $A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B}$ donc $d(A, B) \geqslant d(\overline{A}, \overline{B})$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a', b') \in \overline{A} \times \overline{B}$ tel que $\|a' - b'\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + \varepsilon$ et il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $\|a - a'\| < \varepsilon$ et $\|b - b'\|\varepsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a donc

$$d(A, B) \leqslant \|a - b\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + 3\varepsilon \tag{6.188}$$

   Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien l'égalité.

■

Solution 6.46. φ_{x_0} est une forme linéaire. Elle est continue si et seulement $C > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$|P(x_0)| \leqslant C\|P\|_\infty \tag{6.189}$$

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a

$$|P(x_0)| \leqslant \|P\|_\infty \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k \tag{6.190}$$

Si $|x_0| < 1$, on a

$$|P(x_0)| \leqslant \|P\|_\infty \frac{1}{1 - |x_0|} \tag{6.191}$$

donc φ_{x_0} est continue et si $x_0 = |x_0|e^{\mathrm{i}\theta_0}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-\mathrm{i}k\theta_0} X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et

$$|\varphi_{x_0}(P_n) = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1 - |x_0|} \tag{6.192}$$

donc $|||\varphi_{x_0}||| = \frac{1}{1-|x_0|}$.

Si $|x_0| \geqslant 1$,

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \tag{6.193}$$

donc φ_{x_0} n'est pas continue. ■

Solution 6.47. Pour le sens indirect, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$ donc $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$. Par continuité du déterminant, on a $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \det(-\lambda I_n)$. Donc $\lambda = 0$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ donc M est nilpotente.

Pour le sens direct, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M. On trigonalise u sur une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \dots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$. Posons pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$. On pose $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$ et $M_p = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_p}(u)$, semblable à M et $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ car $\|M_p\| \leqslant \frac{1}{p}\|M_1\|$. ■

Solution 6.48. On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M.

Pour le sens indirect, si M n'est pas diagonalisable, il existe une base $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = D + N \tag{6.194}$$

où D est diagonale et N est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases $\mathcal{B}_p$ définies à l'exercice précédent, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} D \tag{6.195}$$

Si $D \in S_M$, alors M est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc S_M n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si M est diagonalisable, soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$ avec $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} M'$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$ car M et M_p sont semblables. Par continuité du déterminant, on a $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$, donc $\chi_{M'} = \chi_M$. De plus, $A \mapsto \Pi_M(A)$ (polynôme minimal) est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Pi_M(M_p) = 0$ donc $\Pi_M(M') = 0$. M' est donc annulée par Π_M, donc M' est diagonalisable et comme $\chi_M = \chi_{M'}$, M et M' ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc $M' \in S_M$. ■

Remarque 6.9. *Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour*

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix} \tag{6.196}$$

On a $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ *et* $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$ *donc* $\lim\limits_{p\to+\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim\limits_{p\to+\infty} M_p}$.

Solution 6.49. On note $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leqslant h\}$.

1. ω_φ est bien défini car $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2\|\varphi\|_\infty$). Si $0 < h \leqslant h'$, alors $A_h \subset A_{h'}$ donc $\sup(A_h) \leqslant \sup(A_{h'})$ donc $\omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h')$.
2. Soit $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, soit $(x, y) \in I^2$ tel que $|x - y| \leqslant h + h'$ (où on peut supposer que $x \leqslant y$).
   — Si $y \in [x, x + h]$, alors $|x - y| \leqslant h$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
   — Si $y \in [x+h, x+h+h']$, $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)-\varphi(x+h)|+|\varphi(x+h)-\varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h)+\omega_\varphi(h')$ car $|x - (x + h)| \leqslant h$ et $|x + h - y| \leqslant h'$.

   Donc $\omega_\varphi(h + h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda h \leqslant (\lfloor \lambda \rfloor + 1)h$ et par croissance et ce qui précède, on a
$$\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega_\varphi(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega_\varphi(h) \tag{6.197}$$
4. Soit $\varepsilon > 0$. φ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, si $|x - y|\alpha$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$ et on a pour $h \leqslant \alpha$, $\omega_\varphi(h) \leqslant \varepsilon$ d'où $\lim\limits_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0$.

   Soit alors $h_0 > 0$ fixé et $h > 0$,
   — si $h_0 \leqslant h$, on a $0 \leqslant \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leqslant \omega_\varphi(h - h_0)$.
   — si $h \leqslant h_0$, on a $0 \leqslant \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h_0 - h)$.

   Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leqslant \omega_\varphi(|h_0 - h|)$. Donc on a bien $\lim\limits_{h\to h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$. Donc ω_φ est continue (et même uniformément).

■

Solution 6.50. G est borné car si $M \in G$, $|||M||| \leqslant |||I_n||| + \mu = 1 + \mu$. Montrons donc que si G_0 est un sous-groupe borné de $GL_n(\mathbb{C})$, alors les valeurs propres de ses éléments sont de module 1, et ceux-ci sont diagonalisables.

En effet, soit $M \in G$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, soit X un vecteur propre associé. On a $\|MX\| = |\lambda|\|X\| \leqslant |||M|||\|X\|$ donc $|\lambda| \leqslant |||M||| \leqslant \sup\limits_{M\in G} |||M|||$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $M^k \in G$ et $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$, donc si $|\lambda| > 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda|^k = +\infty$, et si $|\lambda|^\lambda < 1$, on a $\lim\limits_{k\to-\infty} |\lambda|^k = +\infty$. Comme G est borné, $|\lambda| = 1$.

On utilise ensuite la décomposition de Dunford pour M : $M = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. Grâce au binôme de Newton, pour $k \geqslant r$ p* r est l'indice de nilpotence de N, on a

$$M^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} N^p D^{k-p} = \underbrace{D^k}_{\text{borné}} + kND + \sum_{p=2}^{r-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}} N^p \underbrace{D^{k-p}}_{\text{borné car } \mathrm{Sp}(D)\subset\mathbb{U}} \tag{6.198}$$

Donc

$$M^k \underset{k\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{k^{r-1}}{(r-1)!} \underbrace{N^{r-1}}_{\neq 0} D^{k-r+1}}_{\text{non borné si } N\neq 0} \tag{6.199}$$

Donc $N = 0$ et $M = D$ est diagonalisable.

Revenons donc à l'exercice. Soit $M \in G$ et $\lambda = e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathrm{Sp}(M)$ avec $\theta \in]-\pi, pi]$. Si X est un vecteur propre associé à λ, on a

$$(\lambda - 1)\|X\| = \|(M - I_n)X\| \leqslant \mu\|X\| \tag{6.200}$$

donc $|\lambda - 1| = 2|\underbrace{\sin(\frac{\theta}{2})}_{\geqslant 0}| \leqslant \mu$. Donc $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ où $\theta_0 = \arcsin(\frac{\mu}{2}) \in [0, \pi[$.

Si $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, $e^{\mathrm{i}k\pi} \in \mathrm{Sp}(M^k)$, $|e^{\mathrm{i}k\theta} - 1| \leqslant \mu$. Alors $\{k\theta + 2l\pi \mid (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non monogène et donc dense, et alors $(e^{\mathrm{i}k\theta})_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{U}$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $|e^{\mathrm{i}k_0\theta} + 1| = |2 - (1 - e^{\mathrm{i}k_0\theta_0})| < 2 - \mu$, ce qui est impossible car $|2 - (1 - e^{\mathrm{i}k_{0\theta}})| \geqslant 2 - |1 - e^{\mathrm{i}k_0\theta_0}| \geqslant 2 - \mu$.

Ainsi, $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}_m$. Ce n'est pas forcément le même m pour tout les M dans G. Notons alors pour

$$\lambda \in \bigcup_{M\in G} \mathrm{Sp}(M) = \mathcal{A} \tag{6.201}$$

$\omega(\lambda)$ l'ordre (multiplicatif) de λ dans $\mathbb{U}$.

Si $\omega(\lambda) = m$, on a $gr(\lambda) = \mathbb{U}_m$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda^k = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{m}} \in \mathcal{A}$ (car $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$). Supposons que $\{\omega(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{A}\}$ non borné. Alors il existe $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $m_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ et $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{m_k}} \in \mathcal{A}$. Alors

$$\underbrace{e^{2\mathrm{i}\lfloor \frac{m_k}{2} \rfloor \frac{\pi}{m_k}}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{i\pi} = -1} \in \mathcal{A} \tag{6.202}$$

ce qui est impossible car $|\lambda + 1| \geqslant 2 - \mu > 0$. On peut donc noter

$$m = \underset{\lambda \in \mathcal{A}}{\vee} \omega(\lambda) \tag{6.203}$$

et pour tout $M \in G$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\lambda^m = 1$. Or M est diagonalisable, donc $M^m = I_n$. ■

Solution 6.51. Si $M \in \mathcal{G}_q$, $P(X) = X^q - 1$ annule M donc M est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{U}_q$. Réciproquement, si M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_q$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ avec

$$M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^{-1} \tag{6.204}$$

et donc

$$M^q = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^q, \ldots, \lambda_n^q) P^{-1} = I_n \tag{6.205}$$

Si $M \in \mathcal{G}_q$ n'est pas une homothétie, il existe $\lambda \neq \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)^2$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \tag{6.206}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} M \tag{6.207}$$

Or

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est semblable } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{6.208}$$

car $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)$ donc est diagonalisable. Donc $M_k \sim M$ et $M_k \in \mathcal{G}_q$ et M n'est pas isolé.

Montrons le petit lemme suivante : soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Si $|||M - \lambda I_n||| \leqslant \varepsilon$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \overline{B(\lambda, \varepsilon)}$. En effet, soit X un vecteur propre de M associé à $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a

$$\|(M - \lambda I_n)X\| = |\mu - \lambda| \|X\| \leqslant |||M - \lambda I_n||| \|X\| \leqslant \varepsilon \|X\| \tag{6.209}$$

donc $|\mu - \lambda| \leqslant \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \sin(\frac{\pi}{q}) > 0$ et $\lambda \in \mathbb{U}_q$; si $M \in B_{\|\cdot\|}(\lambda I_n, \varepsilon) \cap \mathcal{G}_q$ alors pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on a $|\lambda - \mu| \leqslant \sin(\frac{\pi}{q})$ donc $\lambda = \mu$. Donc si $M = \lambda I_n$ alors M est isolé (avec $\lambda \in \mathbb{U}_q$). Donc les matrices scalaires sont isolées. $\blacksquare$

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. Tout d'abord, $\deg(L_n) = n$ et son coefficient dominant et $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. -1 et 1 sont racines d'ordre n de P_n donc pour tout $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$. Ainsi, on a par intégrations par parties successives :

$$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t)P_n(t)dt \tag{7.1}$$

Notamment, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P^{(n)} = 0$ et $(P|L_n) = 0$. En particulier, pour tout $m < n$, $\deg(L_m) \leqslant n-1$ et $(L_m|L_n) = 0$ donc $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de L_n grâce aux intégrales de Wallis :

$$\|L_n\|_2^2 = (L_n|L_n) \tag{7.2}$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} L_n^{(n)}(t^2-1)^n dt \tag{7.3}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt \tag{7.4}$$

On pose $t = \cos(\theta)$ d'où $dt = -\sin(\theta)d\theta$, d'où

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = \int_0^{\pi} \sin(\theta)^{2n+1} d\theta \tag{7.5}$$

$$= 2I_{2n+1} \text{ [Wallis]} \tag{7.6}$$

On a classiquement $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. D'où

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \underbrace{I_1}_{} = 1 \tag{7.7}$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \tag{7.8}$$

d'où

$$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2 \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \tag{7.9}$$

2. On utilise la formule de Leibniz en écrivant $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$.

3. On montre le résultat par récurrence sur $k \in \{0,\ldots,n\}$ en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que $L_n = P_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]-1,1[$. Or $\deg(L_n) = n$, donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.

4. $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (étagée en degré). Donc il existe $(\alpha_{n,0},\dots,\alpha_{n,k})\in\mathbb{R}^{k+1}$ tel que $XL_{n-1}=\sum_{k=0}^n \alpha_{n,k}L_k$. Si $k\leqslant n-3$, on a

$$(XL_{n-1}L_k)=\alpha_{n,k}\|L_k\|_2^2=(L_{n-1}XL_k)=0 \tag{7.10}$$

car $\deg(XL_k)=k+1\leqslant n-2$. Donc

$$XL_{n-1}=\alpha_{n,n-2}L_{n-2}+\alpha_{n,n-1}L_{n-1}+\alpha_{n,n}L_n \tag{7.11}$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(Xl_{n-1}|L_{n-1})=\int_{-1}^1 tL_{n-1}(t)^2dt \tag{7.12}$$

Or P_n est paire, donc L_n est de la parité de n et donc L_n^2 est paire puis XL_n^2 est impaire. Donc $\alpha_{n,n-1}=0$.

$$(XL_{n-1}|L_{n-2})=\alpha_{n,n-2}\underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{=\frac{2}{2n-3}} \tag{7.13}$$

$$=(-1)^n\int_{-1}^1 P_{n-1}(t)\underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}} \tag{7.14}$$

Par ailleurs,

$$(-1)^{n-1}\int_{-1}^1 P_{n-1}(t)dt=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\underbrace{\int_{-1}^1(1-t^2)^{n-1}dt}_{2I_{2n-1}} \tag{7.15}$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\times 2\times\frac{2^{2n-2}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} \tag{7.16}$$

$$=\frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!} \tag{7.17}$$

donc $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}}=\frac{n-1}{n}$. D'où le résultat.

■

Solution 7.2. On forme

$$\begin{array}{rccl} g: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \underbrace{\Delta f(x_0,\dots,x_{n-1},x)}_{\varphi(x)}-\underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)A}_{P(x)} \end{array} \tag{7.18}$$

On a $g(x_n) = 0$. On suppose les $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ distincts, et on pose

$$A = \frac{V(x_0, \dots, x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)} \tag{7.19}$$

g est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $g(x_i) = 0$. Donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g^{(n)}(\xi) = 0$ (théorème de Rolle appliqué n fois. $\deg(P) = n$ et son coefficient dominant est A donc $P^{(n)}(\xi) = An! = \varphi^{(n)}(\xi)$.

On développe maintenant $\varphi(x)$ par rapport à la dernière colonne :

$$\varphi(x) = f(x) \times V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + Q(X) \tag{7.20}$$

avec $\deg(Q) \leqslant n - 1$ et $V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1}(x_i - x_j)$ (déterminant de Vandermonde). On a donc

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (x_j - x_i) \tag{7.21}$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{A}{\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1}(x_j - x_i)} = \Delta f(x_0, \dots, x_n) \tag{7.22}$$

■

Solution 7.3. On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{0} -t f''(t) dt \tag{7.23}$$

et de même

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - t) f''(t) dt \tag{7.24}$$

D'où

$$\begin{aligned} A(f) &= f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) && (7.25)\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} t f''(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - t) f''(t) dt && (7.26)\\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} t dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - t) dt && (7.27)\\ &= \frac{1}{4} && (7.28) \end{aligned}$$

Et c'est atteint pour $f(t) = \frac{t^2}{4}$. ■

Solution 7.4. Pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x)$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) \tag{7.29}$$

donc f' est $\mathcal{C}^1$ et donc f est $\mathcal{C}^2$. On fixe alors x et on dérive deux fois (7.29) en fonction de h. On a alors

$$f''(x+h) = f''(x-h) \tag{7.30}$$

pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$ donc f'' est constante et f est polynômiale de degré 2.

Réciproquement, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a bien la relation de l'énoncé. ■

Solution 7.5.

1. Soit $a > 0$,

$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & \mathbb{R} & \to &]a, +\infty[\\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \tag{7.31}$$

   est croissante. Donc il existe $l = \lim\limits_{x\to+\infty} \tau_a(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. On écrit alors

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \frac{x-a}{x} + \frac{f(a)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \tag{7.32}$$

2. S'il existe $a < b \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $f(a) < f(b)$, alors $\tau_a(b) > 0$. Comme τ_a est croissante, $l \geqslant \tau_a(b) > 0$. Par contraposée, si $l \geqslant 0$, f est décroissante.

3. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = f(x) - lx$. Pour $x < y$, on a

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - l \leqslant 0 \tag{7.33}$$

   Donc φ est décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existe.

■

Solution 7.6.

1. On forme

$$\begin{array}{rccc} g : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\frac{1}{p}+x} \end{array} \tag{7.34}$$

   Alors

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{k}{np}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{\frac{1}{p}+x} = \ln(p+1) = l_p \tag{7.35}$$

2. On note $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

   Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $0 < x < \alpha_0$, alors $|\varepsilon(x_0)| \leqslant \varepsilon_0$, et il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{n} \leqslant \alpha_0$. Alors pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$,

$$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left|\varepsilon\Big(\frac{1}{k+n}\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p} \tag{7.36}$$

   et

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{k+n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}\frac{np+1}{n+1} \leqslant \varepsilon_0 \tag{7.37}$$

   On a donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(p+1)f'(0) \tag{7.38}$$

3. On peut penser à $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ continue et $f(0) = 0$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \tag{7.39}$$

   donc v_n diverge.

4. On écrit $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} 0$. Ainsi,

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{bp} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{(k+n)^2} \tag{7.40}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$, $|\varepsilon(\frac{1}{n+k})| \leqslant \varepsilon$ et donc

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2} \tag{7.41}$$

   donc

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right) \tag{7.42}$$

   puis

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} \tag{7.43}$$

   Or

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(np)^2} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2} \tag{7.44}$$

$$= \frac{1}{np} \times \underbrace{\frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{(\frac{1}{p}+x)^2}} \tag{7.45}$$

donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(0)p}{n(p+1)} \tag{7.46}$$

■

Solution 7.7. Supposons que f' ne tend pa vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \geqslant A, |f'(x_A)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\alpha_0 \geqslant 0$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha_0$ alors $|f'(x) - f'(y)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $t \in [x_A - \alpha, x_A + \alpha]$, on a

$$|f'(t)| \geqslant |f'(x_A)| - |f'(x_A) - f'(t)| \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{7.47}$$

et pour $A = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geqslant n, \forall t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f'(t)| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{n}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f' > 0$ sur les $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Alors

$$f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = \int_{x_n - \alpha_0}^{x_n + \alpha_0} f'(t)dt \geqslant \varepsilon_0 \alpha_0 > 0 \tag{7.48}$$

mais comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = 0 \tag{7.49}$$

d'où la contradiction.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, on applique ce qui précède à $\Im(f)$ et $\Re(f)$.

Si f' n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \tag{7.50}$$

car $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ et

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{2x\cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en } +\infty} \tag{7.51}$$

■

Solution 7.8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x + \frac{h}{2}) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x) \tag{7.52}$$

par continuité de g. Donc f est dérivable et $f' = g$. Par ailleurs, pour $y = \frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2}) \tag{7.53}$$

par récurrence f est $\mathcal{C}^\infty$.

En outre, en fixant x et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à y, on a

$$f''(x+y) - f''(x-y) = 0 \tag{7.54}$$

Donc f'' est constante donc f est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec $f' = g$). ■

Solution 7.9. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt \tag{7.55}$$

On note $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \int_a^b F''(t)(b-t)dt \tag{7.56}$$

Pour $a = k$ et $b = k + \frac{1}{2}$, on a

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}-u)du \tag{7.57}$$

et pour $a = k+1, b = k + \frac{1}{2}$,

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}+u)du \tag{7.58}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(f(k) - f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u(f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u))du \tag{7.59}$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u)}_{\geqslant 0 \text{ car } u \geqslant 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du \tag{7.60}$$

et $f'(k+\frac{1}{2}+u)-f'(k+\frac{1}{2}-u)\leqslant f'(k+1)-f'(k)$ d'où

$$S_n \leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} udu}_{=\frac{1}{8}}(f'(n)-f'(1)) \tag{7.61}$$

■

Solution 7.10.

1. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{cases} \|A\| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2 \\ \|B\| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2 \end{cases} \tag{7.62}$$

   On a $B-A-f(x-h)+f(x+h)=2hf'(x)$ d'où

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{hM_2}{2}+\frac{M_0}{h} \tag{7.63}$$

   Donc f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On a ensuite un majorant qui dépend de h que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.

2. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau

$$\forall k \in \{1,\dots,n-1\}, \|A_k\| \leqslant \frac{k^n}{n!}M_n \tag{7.64}$$

   On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1 - f(x+1) \\ \vdots \\ A_k - f(x+k) \\ \vdots \\ A_n - f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{7.65}$$

   On a

$$\det(M) = \frac{(-1)^n}{1! \times 2! \times \dots \times (n-1)!}V(1,\dots,n) \tag{7.66}$$

où V est le déterminant de Vandermonde. Donc $\det(M) \neq 0$. On peut former les $f^{(j)}(x)$ en fonction des $(A_i - f(x+i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$: il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (A_i - f(x+i))$. Donc

$$\|f^{(j)}(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \Big(\frac{n}{n!} M_n + M_0 \Big) \tag{7.67}$$

Donc $f^{(j)}$ est bornée pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

■

Solution 7.11.

1.
$$l_{\sigma,\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \Big\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \gamma'(t) dt \Big\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \tag{7.68}$$

2. On a

$$\Big| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \Big| = \Big| \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| - \| \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{>0} \gamma'(a_i) \| \Big| \tag{7.69}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) - (a_{i+1} - a_i)\gamma'(a_i)\| \tag{7.70}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt \tag{7.71}$$

3. $\|\gamma'\|$ est continue donc

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\delta(\sigma) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \tag{7.72}$$

Donc α_0 existe.

γ' est continue sur $[a,b]$ donc uniformément continue sur $[a,b]$, et il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, on a

$$|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{7.73}$$

Alors si $\delta(\sigma) \leqslant \alpha_1$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, pour tout $t \in [a_i, a_{i+1}]$, on a

$$|t - a_i| \leqslant (a_{i+1} - a_i) \leqslant \alpha_1 \tag{7.74}$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i) - \gamma'(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{7.75}$$

et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.76}$$

Finalement, si @$d(\sigma) \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1)$, on a

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leqslant \varepsilon \tag{7.77}$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \tag{7.78}$$

4. On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} \tag{7.79}$$

donc $\|\gamma'(t)\| = R$ et $l(\gamma) = 2\pi R$.

■

Solution 7.12.

1. Pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_2(t)} \tag{7.80}$$

donc

$$e^{\mathrm{i}(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1 \tag{7.81}$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, il existe $k(t) \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$. On a

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi} \tag{7.82}$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à k_0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Si $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$,
$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \tag{7.83}$$
Comme $\sqrt{\cdot}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, f est $\mathcal{C}^k$. On a alors
$$f(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)e^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{t})} = \mathrm{i}\theta'(t)f(t) \tag{7.84}$$
Donc
$$\theta(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)} \tag{7.85}$$
De plus, on a
$$\theta(t) = \theta(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}du \tag{7.86}$$
pour $t_0 \in I$.

3. On fixe $t_0 \in I$. Soit θ_0 un argument de $\gamma(t_0)$, on pose
$$\theta(t) = \theta_0 - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}du \tag{7.87}$$
Comme $\frac{f'}{f}$ est $\mathcal{C}^{k-1}$, θ est bien $\mathcal{C}^k$. On forme $g(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)}$ qui est de classe $\mathcal{C}^k$. On a
$$g'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t) \tag{7.88}$$
donc $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$, donc $\frac{g}{f}$ est constante sur I et $g(t_0) = e^{\mathrm{i}\theta_0} = f(t_0)$ donc $g = f$ sur I. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $|f(t)| = |e^{\mathrm{i}\theta(t)}| = 1$ et si $\theta(t) = a(t) + \mathrm{i}(t)$, on a donc
$$e^{\mathrm{i}\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{\mathrm{i}a(t)} \tag{7.89}$$
donc $b(t) = 0$ et $\theta(t) \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

8 Suites et séries de fonctions

Solution 8.1. Pour $x \geqslant 0$, on a $F_n(x) > 0$, on a

$$\ln\left(F_n(x)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{kx}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln\left(1+tx\right)dt = G(x) \tag{8.1}$$

On a $G(0) = 0$ et pour $x > 0$, on a

$$G(x) = \left[\left(t + \frac{1}{x}\right)\ln(1+tx)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+tx}\left(t+\frac{1}{x}\right)dt \tag{8.2}$$

$$= \frac{x+1}{x}\ln(1+x) - 1 \tag{8.3}$$

(utiliser le fait que G est continue sur $[0,1]$ et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$).

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 1 = F(0)$. Pour $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = (1+x)^{\frac{x+1}{x}} \times \frac{1}{e} = F(x)$.

F est continue sur $[0,1]$. Soit $x \geqslant 0$. On écrit

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\mathrm{e}^{G_n(x)} - \mathrm{e}^{G(x)}\right| \tag{8.4}$$

On a d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \mathrm{e}^{G_n(x)}\,|G_n(x) - G(x)| \leqslant \mathrm{e}^{G_n(x)} \times \frac{x}{2n} \tag{8.5}$$

Si $f(t) = \ln\left(1+tx\right)$, on a $f'(t) = \frac{x}{1+tx} \geqslant 0$. Donc f est croissante et $G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \ln(1+x)$. Finalement,

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \frac{x(1+x)}{2n} \tag{8.6}$$

On a donc convergence uniforme sur $[0, A]$ pour tout $A \geqslant 0$. ■

Solution 8.2.

1. Si $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha}\,|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| \tag{8.7}$$

Ainsi, si $|x| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n(x)$ converge absolument. Si $|x| > 1$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|U_{n+1}(x)| > |U_n(x)|$, donc $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 : $\sum u_n(x)$ diverge.

Si $x = 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $\frac{U_{n+1}(1)}{U_n(1)} > 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant N_0}$ gare un signe constant. On a

$$\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{8.8}$$

Ainsi, d'après la règle de Raabe-Duhamel, on a

$$|U_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \tag{8.9}$$

Ainsi, on a convergence si et seulement si $\alpha > 2$.

Si $x = -1$, on a toujours $|U_n(-1)| = |U_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. Si $\sum u_n(-1)$ converge, on a $\alpha > 0$. Réciproquement, si $\alpha > 0$, on a $|U_n(-1)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum u_n(-1)$ est une série alternée. On a donc

$$\left|\frac{u_{n+1}(-1)}{u_n(-1)}\right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} < 1 \tag{8.10}$$

donc $(|u_n(-1)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : d'après le critère spéciale des séries alternées, $\sum u_n(-1)$ converge. Ainsi, $\sum u_n(-1)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

2. Supposons la convergence uniforme sur $[0, 1[$. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} u_n(x) = u_n(1)$, d'après le théorème d'interversion des limites, comme il ya convergence uniforme au voisinage de 1, $\sum u_n(1)$ converge. Donc d'après ce qui précède, on a $\alpha > 2$.

   Réciproquement, si $\alpha > 2$, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|u_n(x)| \leqslant |u_n(1)|$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). Donc on a convergence normale sur $[0, 1]$.

3. Supposons convergence uniforme sur $]-1, 0]$. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} u_n(x) = u_n(-1)$. D'après le théorème d'interversion des limites, comme il y a convergence uniforme au voisinage de -1, $\sum u_n(-1)$ converge. D'après ce qui précède, on a $\alpha > 0$.

   Réciproquement, si $\alpha > 0$, soit $x \in [-1, 0]$, $\sum u_n(x)$ est alternée dont le terme général décroît en valeur absolue (et tend vers 0). Donc pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant |u_N(x)| \leqslant |u_N(-1)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \tag{8.11}$$

   On a donc convergence uniforme de $\sum u_n(x)$ sur $[-1, 0]$

$\blacksquare$

Remarque 8.1. *Pour rappel, on redonne la règle de Raabe-Duhamel : si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ *et*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{\frac{1}{n^2}} \tag{8.12}$$

alors il existe $C > 0$ *telle que* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\beta}$*. En effet, on écrit*

$$\ln\left((n+1)^\beta v_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta v_n\right) = \beta \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{8.13}$$

donc $(n^\beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}_+^*$*.*

Remarque 8.2. *On peut aussi éviter la règle de Raabe-Duhamel. On forme*

$$\ln\left(|u_n(1)|\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{2k-1}{2k-1+\alpha}\right| = -\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\alpha}{2}\ln(n) - \frac{\gamma\alpha}{2} + K + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{8.14}$$

donc $|u_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ *avec* $C > 0$*.*

Solution 8.3. Pour $k \geqslant \lfloor x \rfloor$, on a

$$\arctan(k+x) - \arctan(k) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{8.15}$$

On a

$$f_k(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+k(k+x)}\right) = \arctan\left(\frac{x}{k^2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2} \tag{8.16}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ converge absolument et f définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f_k'(x) = \frac{1}{1+(k+x)^2} \tag{8.17}$$

On fixe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|k+x| \geqslant k - |x| \geqslant k - \underbrace{\max\left(|a|,|b|\right)}_{=M} \geqslant 0 \tag{8.18}$$

pour $k \geqslant \lfloor M+1 \rfloor$.

On a de plus $0 \leqslant f_k'(x) \leqslant \frac{1}{1+(k-M)^2}$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). On $\sum_{k\geqslant \lfloor M\rfloor+1} f_k'$ converge normalement sur $[a,b]$. Enfin,

$$f - \sum_{k=1}^{\lfloor M\rfloor} f_k = \sum_{k=\lfloor M\rfloor+1}^{+\infty} f_k \tag{8.19}$$

est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ d'après le théorème de dérivation terme à terme, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (car $\sum_{k=1}^{\lfloor M\rfloor} f_k$ est une somme finie de fonctions $\mathcal{C}^1$ donc est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} f_k(n) &= \sum_{k=0}^{N} \arctan(k+n) - \arctan(k) && (8.20)\\
&= \sum_{k=n}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{N} \arctan(k) && (8.21)\\
&= \sum_{k=N+1}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) && (8.22)\\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} n\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \arctan(\frac{1}{k}) = f(n) && (8.23)
\end{aligned}$$

On a $\arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k} > 0$, d'après le théorème de comparaison des sommes partielles de séries à termes positifs divergente, donc $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Par ailleurs, f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$\ln|x| \underset{x\to+\infty}{\sim} f(\lfloor x\rfloor) \leqslant f(x) \leqslant f(\lfloor x\rfloor + 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x) \tag{8.24}$$

donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. ■

Solution 8.4. Soit $t > 0$, on a $\ln(1-\mathrm{e}^{-nt}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-nt}$ car $\lim_{n\to+\infty} -\mathrm{e}^{nt} = 0$ (terme général d'une série à termes positifs convergente car $t > 0$).

On définit

$$\begin{array}{rccl} g_+ : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -\ln(1-\mathrm{e}^{-xt}) \geqslant 0 \end{array} \tag{8.25}$$

On a $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_t(x)$. De plus, $g_t'(x) = -\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1-\mathrm{e}^{-xt}} \leqslant 0$. g_+ est décroissante, et on a

$$\int_n^{n+1} g_+(x)dx \leqslant g_+(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_+(x)dx \tag{8.26}$$

On somme de $n = 1$ à $+\infty$ (on admet l'existence pour $n = 0$). On obtient

$$-\ln\left(1 - e^{-xt}\right) = \int_1^{+\infty} g_+(x)dx \leqslant -f(t) \leqslant \int_0^{+\infty} -\ln\left(1 - e^{-xt}\right) dx \tag{8.27}$$

On pose $u = xt$ et $dx = \frac{du}{t}$ car $t > 0$. On a

$$\int_1^{+\infty} -\ln\left(1 - e^{-xt}\right) dx = \frac{1}{t}\int_t^{+\infty} -\ln\left(1 - e^{u}\right) du \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t} I \tag{8.28}$$

et

$$\int_0^{+\infty} -\ln\left(1 - e^{-xt}\right) dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} -\ln\left(1 - e^{-u}\right) du = \frac{I}{t} \tag{8.29}$$

donc

$$\boxed{f(t) \underset{t\to+0^+}{\sim} -\frac{I}{t}} \tag{8.30}$$

■

Solution 8.5.

1. On a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2}$ donc

$$\left|\frac{1}{2^p} f_n(x - a_p)\right| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}, \tag{8.31}$$

et $g_n(x)$ est définie. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{array}{rccc} F_p: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \end{array} \tag{8.32}$$

On a $|F_p(n)| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$ et pour p fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_p(n) = 0$. Donc $\sum_{p\geqslant 0} F_p$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. D'après le théorème d'interversion des limites, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.} \tag{8.33}$$

2. S'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{p_0} \in [a, b]$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $a_{p_0} + \frac{1}{n}$ ou $a_{p_0} - \frac{1}{n} \in [a, b]$ et $g_n(a_{p_0} \pm \frac{1}{n}) \geqslant \frac{1}{2^{p_0+1}}$ (série à termes positifs).

Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \notin [a, b]$, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{p=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$0 \leqslant \sum_{p=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.34}$$

Notons $\alpha) \min_{\substack{0\leqslant p\leqslant N_0\\ x\in[a,b]}} |x-a_p| > 0$. Pour tout $x\in[a,b]$, pour tout $p\in[\![0,N_0]\!]$, $|x-a_p|\geqslant\alpha$ et il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_1$, $\frac{1}{n}\leqslant\alpha$. Alors pour tout $x\in[a,b]$, pour tout $p\in[\![0,N_0]\!]$, $f_n(x-a_p)\leqslant f_n(\alpha)$ et

$$0\leqslant\sum_{p=0}^{N_0}\frac{1}{2^p}f_n(x-a_p)\leqslant\sum_{p=0}^{N_0}\frac{1}{2^p}f_n(\alpha)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0. \tag{8.35}$$

Ainsi, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_2$, pour tout $x\in[a,b]$, $\sum_{p=0}^{N_0}\frac{1}{2^p}f_n(x-a_p)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, pour tout $x\in[a,b]$, $0\leqslant g_n(x)\leqslant\varepsilon$. D'où le résultat.

■

Solution 8.6. f_n est définie car $\frac{1}{x^2+n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$. Soit $a>0$. Sur $[-a,a]$, $|f_n(x)|\leqslant\frac{|a|}{n^2}$, terme général d'une série à termes positifs convergente. Il y a donc convergence normale sur $[-a,a]$, et f_n est continue pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc f l'est aussi. Soit $g_n(x)=\frac{1}{x^2+n^2}$. On a $g_n'(x)=-\frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$ et pour tout $x\in[-a,a]$, $|g_n'(x)|\leqslant\frac{2|a|}{n^4}$. Il y a à nouveau convergence normale sur $[-a,a]$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ et donc $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$ et donc f aussi.

Sur $[-1,1]$, on peut intervertir les limites :

$$\boxed{\lim_{x\to0}f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to0}f_n(x)=0.} \tag{8.36}$$

Fixons $x>0$, on pose $\psi_x(t)=\frac{x}{x^2+t^2}$. ψ_x est positive décroissante. Ainsi, pour tout $n\geqslant1$,

$$\int_n^{n+1}\psi_x(t)\mathrm{d}t\leqslant\psi_x(n)\leqslant\int_{n-1}^{n}\psi_x(t)\mathrm{d}t. \tag{8.37}$$

On a

$$\int_A^X\frac{x\mathrm{d}t}{x^2+t^2}=\int_A^X\frac{\frac{\mathrm{d}t}{x}}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\xrightarrow[X\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{A}{x}\right). \tag{8.38}$$

Ainsi, en sommant pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\int_1^{+\infty}\psi_x(t)\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\psi_x(n)\leqslant\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\mathrm{d}t. \tag{8.39}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$.

En 0, on a $f(x)=xg(x)$ avec convergence normale sur $\mathbb{R}$ pour g, g continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0)=\frac{\pi^2}{6}$. Ainsi,

$$\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{\sim} x\frac{\pi^2}{6}.} \tag{8.40}$$

■

Solution 8.7. Les f_n sont M-Lipschitziennes. Soient $x,y\in[a,b]$. On a $|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant M|x-y|$ donc par passage à la limite, f est M-Lipschitzienne.

Soit $\varepsilon>0$, on considère la subdivision $(a_1,\dots,a_N)$ de $[a,b]$ de pas δ. Soit $x\in[a,b]$ et $K\in[\![0,N-1]\!]$ tel que $x\in[a_K,a_{K+1}]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(a_K)|+|f_n(a_K)-f(a_K)|+|f(a_K)-f(x)|\leqslant M\delta+|f_n(a_k)-f(a_k)|+M\delta. \tag{8.41}$$

On s'impose $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$. Il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_1$, on a pour tout $k\in[\![0,N]\!]$, $|f_n(a_k)-f(a_k)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $x\in[a,b]$, pour tout $n\geqslant N_1$, $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$. ■

Remarque 8.3. *L'existence de M est nécessaire, cf $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ avec $f_n(x)=x^n$.*

Remarque 8.4. *f n'est pas nécessairement dérivable, cf $f_n\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ avec $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x\mapsto|x|$ et*

$$|f_n'(x)|=\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}\right|\leqslant 1. \tag{8.42}$$

Solution 8.8. Si $x=2$, on a

$$f_n(2)=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{n}\right)^2}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=\left[\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^1=\ln(2). \tag{8.43}$$

Si $x<2$, on a pour tout $n\geqslant 1$, pour tout $p\in[\![1,n]\!]$,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n^x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}}\leqslant\frac{1}{n}. \tag{8.44}$$

On somme pour obtenir

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n^x}}\leqslant f_n(x)\leqslant 1 \tag{8.45}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1.} \tag{8.46}$$

De plus, soit $a < 2$, pour tout $x \in]-\infty, a]$, on a

$$0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2+n^x}} \leqslant 1 - \frac{n}{\sqrt{n+n^a}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{8.47}$$

Donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 1 sur $]-\infty, a]$.

Si $x > 2$, soit $\alpha \in [0,1]$, on a

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} + \sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}}. \tag{8.48}$$

On a

$$\sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+n^2}} \underset{n\to+\infty}{n^{\alpha-1}}, \tag{8.49}$$

et

$$\sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+n^{x\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^{x\alpha-2}}}. \tag{8.50}$$

On choisit α tel que $\alpha < 1$ et $x\alpha - 2 > 0$ (possible car $x > 2$). Si $a > 2$, pour $\alpha = \left(1+\frac{2}{a}\right) \times \frac{1}{2}$, si $x \geqslant a$, on a $\frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{a} < \alpha < 1$ donc

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+n^{\alpha x-2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{8.51}$$

Il y a donc convergence uniforme vers 0 sur $[a, +\infty[$. ■

Solution 8.9.

1. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times [\![0, n]\!]$,

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \times n \times \cdots \times n} \leqslant \frac{1}{k!}. \tag{8.52}$$

Ainsi,

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}-f_n(a)\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^k}{n^k}\right\|, \tag{8.53}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)\|a\|^k, \tag{8.54}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{\|a\|^k}{k!}-\left(1+\frac{\|a\|}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{8.55}$$

On a bien $\lim_{n\to+\infty} f_n(a)=\exp(a)$.

Soit $R\geqslant 0$, pour tout $a\in\overline{B(0,R)}$,

$$\|\exp(a)-f_n(a)\| \leqslant \left\|\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^k}{n^k}\right\| + \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}\right\| \tag{8.56}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)R^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{8.57}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\exp(a)$ sur les compacts.

2. D'après ce qui précède, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $z\mapsto\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\sin(z)$. Et on a convergence sur les compacts.

3. On peut déjà dire que $\deg(P_n)\leqslant 2n+1$. Le coefficient en X^{2n+1} de P_n est

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\mathrm{i}}{2n+1}\right)^{2n+1}-\left(\frac{-\mathrm{i}}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}}\times\frac{(-1)^n}{2\mathrm{i}}[\mathrm{i}-(-\mathrm{i})]\neq 0 \tag{8.58}$$

et donc $\deg(P_n)=2n+1$.

Le coefficient en X est $\frac{(2+1)\left(\frac{\mathrm{i}}{2n+1}-\left(\frac{-\mathrm{i}}{2n+1}\right)\right)}{2\mathrm{i}}=1$.

Soit $z\in\mathbb{C}$, on a

$$P_n(z)=0 \iff \left(1+\frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1-\frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)^{2n+1}, \tag{8.59}$$

$$\iff \exists k\in[\![0,2n]\!],\ 1-\frac{\mathrm{i}z}{2n+1} = \left(1+\frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right), \tag{8.60}$$

$$\iff \exists k\in[\![0,2n]\!],\ 1-\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\left(1+\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{8.61}$$

$$\iff \exists k\in[\![0,2n]\!],\ z=(2n+1)\times(-\mathrm{i})\times\frac{(-2\mathrm{i})\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, \tag{8.62}$$

$$\iff \exists k\in[\![0,2n]\!],\ = -(2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right). \tag{8.63}$$

On a

$$P_n = aX \times \prod_{k=1}^{2n} \left(X + (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right), \tag{8.64}$$

$$= aX \prod_{k=1}^{n} \left(X + (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right) \times \prod_{k=n+1}^{2n} \left(X + (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right), \tag{8.65}$$

$$= aX \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - (2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right), \tag{8.66}$$

$$= a'X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right). \tag{8.67}$$

Comme le coefficient de X vaut 1, on a $a' = 1$, d'où le résultat.

4. Soit $f_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telle que $f(p) = a_{n,p}$. D'après (i), $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{N}$, et d'après (ii), on peut intervertir et $\lim\limits_{p \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$.
5. tan est impaire, et $\tan'' = 2\tan(1+\tan^2) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc tan est convexe et $\tan(t) > t$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et c'est bon par imparité.

   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $\frac{x^2}{k^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{2}$, alors pour tout $n \geqslant k_0$, pour tout $k \in [\![k_0, n]\!]$, $1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \geqslant \frac{1}{2} > 0$. Alors

$$0 \leqslant -\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{3n+1}\right)} \right) \right) = \sum_{k=k_0}^{n} -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right). \tag{8.68}$$

   On a

$$0 \leqslant -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right) \leqslant -\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right) = \underset{k \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2} \right), \tag{8.69}$$

   terme général d'une série à termes positifs convergente.

   Si $g_n(x) = -\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{3n+1}\right)} \right) \right)$, alors $g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_{n,k}$ où l'on définit pour tout $k \geqslant k_0, n \geqslant k_0$,

$$a_{n,k} = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right) \tag{8.70}$$

   si $k \leqslant n$, et 0 sinon. On pose aussi $\alpha_k = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. On a bien $|a_{n,k}| \leqslant \alpha_k$ terme général d'une série à termes positifs convergente.

Pour $k \geqslant k_0$ fixé, pour $n \geqslant k$, on a

$$a_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha_k. \tag{8.71}$$

On peut donc appliquer ce qui précède, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \alpha_k, \tag{8.72}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=k_0} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=k_0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{8.73}$$

Soit $R_n(x) = x\prod_{k=1}^{k_0} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\prod_{k=1}^{k_0}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\sin(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).} \tag{8.74}$$

■

Remarque 8.5. *En identifiant le coefficient en x^3, on obtient*

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}, \tag{8.75}$$

d'où

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{8.76}$$

De même, en identifiant le coefficient en x^5, on obtient

$$\frac{1}{120} = \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ k_1\neq k_2}} \frac{1}{k_1^2k_2^2\pi^4} = \sum_{(k_1,k_2)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{k_1^2k_2^2\pi^4} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4\pi^4} = \zeta(2)^2 - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4\pi^4}. \tag{8.77}$$

On trouve donc

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}. \tag{8.78}$$

De la même façon, on montre de manière générale que

$$\zeta(2p) = a_p\pi^{2p}, \tag{8.79}$$

avec $a_p \in \mathbb{Q}$.

Solution 8.10.

1. Soit $\alpha \in [a,b]$. f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. On a $f([0,1]) \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$. Pour tout $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $f(x) \geqslant x$. $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, donc converge vers $\frac{1}{2}$ seul point fixe de f (continue). Ainsi (f_n) converge simplement vers $\frac{1}{2}$ sur $[a,b]$.

   Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - f_n(x) \leqslant \max\left(\frac{1}{2} - f_n(a), \frac{1}{2} - f_n(b)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{8.80}$$

   Donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

   On a $f_n(0) = f_n(1) = 0 \neq \frac{1}{2}$, on n'a donc pas la continuité de la limite simple. Donc il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0,1]$ (même sur $]0,1[$).

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Q_2 est dense dans $\mathbb{R}$, donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $(\alpha_{k,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_2^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n} \alpha_{k,m} = a_k$. Soit $Q_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,m} X^k \in \mathbb{Q}_2[X]$. Pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$|P(x) - Q(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k - \alpha_{k,m}|\,|x|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k - \alpha_{k,m}| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \tag{8.81}$$

   donc il existe $M \in \mathbb{N}$, si $Q = Q_M$, alors $\|P - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Si $Q = \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{2^{n_k}} X^k$, soit pour $m \in \mathbb{N}$, $Q_m = \sum_{k=0}^n p_k (f_m)^{n_k} X^k$ converge uniformément vers Q sur $[a,b]$ (n est fixé), et $Q_m \in \mathbb{Z}[X]$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathbb{Z}[X]$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|Q_{n_0} - Q\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Si $A = Q_{n_0} \in \mathbb{Z}[X]$, on a bien $\|f - A\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$.

   Sur $[0,1]$, on n'a pas de suite de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f = \frac{1}{2}$ car pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(0) \in \mathbb{Z}$.

■

Solution 8.11.

1. Par croissance des taux d'accroissements (en un point fixé) :

$$\frac{u_n(y) - u_n(x)}{y - x} \leqslant \frac{u_n(y) - u_n(b)}{y - b} \leqslant \frac{u_n(\beta) - u_n(b)}{\beta - b}, \tag{8.82}$$

et de même

$$\frac{u_n(y)-u_n(x)}{y-x} \geqslant \frac{u_n(\alpha)-u_n(a)}{\alpha-a}. \tag{8.83}$$

Finalement, on a

$$\left|\frac{u_n(x)-u_(y)}{x-y}\right| \leqslant \max\left(\left|\frac{u_n(\alpha)-u_n(a)}{\alpha-a}\right|, \left|\frac{u_n(\beta)-u_n(b)}{\beta-b}\right|\right), \tag{8.84}$$

qui sont des suites bornées car convergent. D'où l'existence de A.

2. Par passage à la limite (simple), u est A-Lipschitzienne sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon>0$. Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ une subdivision de pas d de $[a,b]$. Pour tout $x\in[a,b]$, il existe $k\in[\![1,N-1]\!]$ tel que $x\in[a_k,a_{k+1}]$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$|u_n(x)-u(x)| \leqslant |u_n(x)-u_n(a_k)| + |u_n(a_k)-u(a_k)| + |u(a_k)-u(x)|, \tag{8.85}$$

$$\leqslant 2Ad + |u_n(a_k)-u(a_k)|. \tag{8.86}$$

On choisit d tel que $2Ad \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par convergence simple, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_0$, pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, $|u_n(a_k)-u(a_k)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n\geqslant N_0$, pour tout $x\in[a,b]$, $|u_n(x)-u(x)|\leqslant\varepsilon$. Donc (u_n) converge uniformément vers u sur $[a,b]$.

■

Remarque 8.6. *C'est faux si $I=[a,b]$, cf $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ donnée par $f_n(x)=x^n$.*

Solution 8.12. Soit $f\in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. Si φ est une fonction polynômiale, $\varphi=\sum_{k=0}^{N}\alpha_kX^k$. Pour tout $k\in[\![0,N]\!]$, (f_n^k) converge uniformément vers f^k sur $[a,b]$. Par combinaison linéaire, $(\varphi\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi\circ f$ sur $[a,b]$. $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée (car converge), donc il existe $A\geqslant0$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty\leqslant A$ et $\|f\|_\infty\leqslant A$.

Soit $\varepsilon>0$, il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ telle que $\|\varphi-P\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ d'après le théorème de Weierstrass. Ainsi, pour tout $x\in[a,b]$,

$$|(\varphi\circ f_n)(x)-(\varphi\circ f)(x)| \leqslant |(\varphi\circ f_n)(x)-(P\circ f_n)(x)| \tag{8.87}$$

$$+|P\circ f_n(x)-P\circ f(x)|+|P\circ f(x)-\varphi\circ f(x)|, \tag{8.88}$$

$$\leqslant 2\frac{\varepsilon}{3}+\|P\circ f_n-P\circ f\|_{\infty,[a,b]} \tag{8.89}$$

et le dernier terme tend vers 0 donc est plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$ pour n suffisamment grand. D'où le résultat.

■

Remarque 8.7. *Pour la deuxième partie du raisonnement, on peut aussi invoquer la continuité uniforme de φ sur $[-A, A]$.*

Solution 8.13.

1. Pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{1+n^2}$ donc on a convergence normale sur $\mathbb{R}^+$. Pour $t < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (t) = +\infty$ donc la série diverge grossièrement. Ainsi, $E = \mathbb{R}_+$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et on a convergence normale donc f est continue sur E. Pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} (t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f_0(t) = 1$. On peut intervertir par convergence normale, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur E. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n^{(k)}(t) = \frac{(-n)^k \mathrm{e}^{-nt}}{1+n^2}. \tag{8.90}$$

Soit $\alpha > 0$. Pour $t \geqslant \alpha$, on a

$$\left|f_n^{(k)}(t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{1+n^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{8.91}$$

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $t > 0$,

$$\boxed{f''(t) + f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}.} \tag{8.92}$$

■

Solution 8.14.

1. On a $u_n(0) = 0$. Soit $x > 0$, on a $|u_n(x)| = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc on a bien convergence simple sur $[0,1]$.
2. On a

$$u_n(x) = \frac{(1-nx)\mathrm{e}^{-nx}}{n^a}. \tag{8.93}$$

Ainsi, u_n est croissante de 0 à $\frac{1}{n}$ et décroît de $\frac{1}{n}$ à 1, et on a $u_n(0) = 0$, $u_n(1) = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{a}$ et $u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}n^{a+1}} = \|u_n\|_{\infty,[0,1]}$. On a donc convergence normale si et seulement si $a > 0$.

3. Pour $a = 1$ (respectivement $a = 2$), S est continue par convergence normale car u_n est $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $x > 0$, si $g_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ (respectivement $h_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$) et $g(x) = \frac{S(x)}{x}$ (respectivement $h(x) = \frac{S(x)}{x}$), soit $\alpha \in]0, 1]$ et $x \in [\alpha, 1]$, on a

$$|g_n'(x)| = \left|\mathrm{e}^{-nx}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-n\alpha} \tag{8.94}$$

(respectivement

$$|h_n'(x)| \leqslant \left|\frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{n}\right| \tag{8.95}$$

et $|h_n''(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-n\alpha}$). Donc $\sum g_n'$ (respectivement $\sum h_n'$ et $\sum h_n''$) converge normalement sur $[\alpha, 1]$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$ donc g est $\mathcal{C}^1$ (respectivement h est $\mathcal{C}^2$) sur $]0, 1]$.

Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\mathrm{e}^{-nx} = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}, \tag{8.96}$$

et donc (par changement de variable dans l'intégrale)

$$g(x) = g(1) + \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) - \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right). \tag{8.97}$$

puis $S(x) = xg(x)$. On fait de même pour $a = 2$.

■

Solution 8.15. Si $x > 0$, on a $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{+nx^{\frac{3}{2}}} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Ainsi, le domaine de f est $]0, +\infty[$.

Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, pour $x \geqslant a$, pour $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + na^{\frac{3}{2}}}, \tag{8.98}$$

et le terme de droite est le terme général d'un série à termes positifs convergente indépendante de x. Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement ssur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \times \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \tag{8.99}$$

donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Fixons $x > 0$, soit

$$\begin{array}{rccc} g_x : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{1+tx^{\frac{3}{2}}} \end{array} \tag{8.100}$$

g est continue positive et décroissante. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand $t \to 0$, et est un $O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ quand $t \to +\infty$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$g_x(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant g_x(n) \tag{8.101}$$

Ainsi, en sommant, on obtient

$$f(x) - \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{1}{1+(n+1)x^{\frac{3}{2}}} \leqslant I(x) = \int_1^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant f(x). \tag{8.102}$$

Pour calculer $I(x)$, on fait les changements de variables $u = \sqrt{t}$ puis $v = ux^{\frac{3}{4}}$ pour avoir

$$I(x) = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} \int_{x^{\frac{3}{4}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{x^{\frac{3}{4}}}. \tag{8.103}$$

Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{x^{\frac{3}{4}}}$. Donc f est intégrale sur $]0,1]$. Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

Remarque 8.8. *On peut aussi former, pour $n \geqslant 1$,*

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}(1+nx^{\frac{3}{2}})} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{\frac{3}{2}}}, \tag{8.104}$$

en faisant le changement de variables $u = n^{\frac{2}{3}}x$. u_n est alors le terme général d'une série à termes positifs convergente, et on peut intervertir les signes $\sum$ et $\int$.

Solution 8.16.

1. Si $x < 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = +\infty. \tag{8.105}$$

   Si $x = 0$, on a $S(0) = 0$. Si $x > 0$, on a $\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc on a convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.

2. On cherche $\sup\limits_{x\geqslant 0} |f_n(x)|$. Pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$f_n'(x) = \frac{(1-nx)}{\ln(n)}\mathrm{e}^{-nx}. \tag{8.106}$$

Ainsi, le sup est atteint en $x = \frac{1}{n}$. Comme $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n e \ln(n)}$ est le terme général d'une série à termes positifs divergente (série de Bertrand), on n'a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $N \geqslant 2$, $x \geqslant 0$. On a

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{x}{\ln(N)} \sum_{n=N}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}, \tag{8.107}$$

$$\leqslant \frac{x}{\ln(N)} \frac{\mathrm{e}^{-Nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}, \tag{8.108}$$

$$\leqslant \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\ln(N)(1-\mathrm{e}^{-x})} \times \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}, \tag{8.109}$$

$$\leqslant \frac{x}{\ln(N)(\mathrm{e}^{x}-1)}. \tag{8.110}$$

$x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, tend vers 1 quand $x \to 0$ et tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Donc cette fonction est bornée par $M \geqslant \mathrm{e}$ et

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{M}{\ln(N)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0. \tag{8.111}$$

On a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

3. On a $S(x) = x \times \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = x \times \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x)$. g_n est $\mathcal{C}^1$, et pour $a > 0$, $x \geqslant a$ et $n \geqslant 2$, on a $g_n'(x) = -\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$ d'où $|g_n'(x)| \leqslant \frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \leqslant \frac{n\mathrm{e}^{-na}}{\ln(n)}$ qui est le terme général d'une série à termes positifs convergente car $a > 0$. Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n'$ converge normalement sur $[a, \infty[$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n$ convergen simplement sur $\mathbb{R}_+$ donc $\sum_{n\geqslant 2} g_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On a $\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x) = \tau(x)$. τ est décroissante car les g_n le sont, donc $\tau(x) \xrightarrow[x\to 0]{} l \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Comme $g_n \geqslant 0$, pour tout $N \geqslant 2$ et $x > 0$, on a $\sum_{n=2}^{N} g_n(x) \leqslant \tau(x)$. Quand $x \to 0$, on a donc

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(n)} \leqslant l, \tag{8.112}$$

   et quand $N \to +\infty$, on a $l = +\infty$. Ainsi, S n 'est pas dérivable à droite en 0.

4. On a $x^k S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{k+1}\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} k_n(x)$. On a

$$k_n'(x) = \frac{x^k \mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \left(k+1-nx\right), \tag{8.113}$$

   donc le sup est atteinte en $x = \frac{k+1}{n}$. Pour tout $x \geqslant K+1$, on a $|k_n(x)| \leqslant |k_n(K+1)| \leqslant \frac{(k+1)^{k+1}\mathrm{e}^{-(k+1)n}}{\ln(n)} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $\sum_{n\geqslant 2} k_n$ converge normalement sur $[k+1, +\infty[$ et on peut intervertir les limites. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^k S(x) = 0.} \tag{8.114}$$

$\blacksquare$

Solution 8.17.

1. Q_k est $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique, paire, $0 \leqslant Q_k(t) \leqslant c_k$, $Q_k(-\pi) = Q_k(\pi) = 0$, $Q_k(0) = c_k$. Q_k est décroissante sur $[0, \pi]$. Pour tout $t \in [\delta, \pi]$, $0 \leqslant Q_k(t) \leqslant c_k \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k$. On a $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k \mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(u)\mathrm{d}u \underset{k\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ (via les intégrales de Wallis). Ainsi, c_k est équivalent à $\sqrt{k\pi}$ quand $k \to +\infty$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k = 0$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \sup_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} Q_k(t) = 0.} \tag{8.115}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$|P_k(t) - f(t)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)\mathrm{d}s - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_k(s)\mathrm{d}s\right|, \tag{8.116}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|\, Q_k(s)\mathrm{d}s, \tag{8.117}$$

car $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s)\mathrm{d}s = 1$. f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, 4\pi]$ donc f est uniformément continue sur $[0, 4\pi]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $(t, t') \in [0, 4\pi]^2$, $|t - t'| \leqslant \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, si $|t - t'| \leqslant \min(\delta_1, 2\pi)$, alors $|f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $\mathbb{R}$ car continue 2π-périodique.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ ($\delta < \pi$) tel que pour tout $(t, t') \in [0, 4\pi]^2$, $|t - t'| \leqslant \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors on a

$$|P_k(t) - f(t)| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} 2\,\|f\|_\infty\, Q_k(s)\mathrm{d}s}_{\leqslant 2\|f\|_\infty \sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} Q_k(t) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} Q_k(s)\mathrm{d}s}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{8.118}$$

donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|P_k(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. Donc P_k converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons que $P_k \in F$. On a

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)\mathrm{d}s, \tag{8.119}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)Q_k(t-u)\mathrm{d}u, \tag{8.120}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{c_k}{2^k}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(1+\cos(t-u)\right)^k \mathrm{d}u, \tag{8.121}$$

$$= \frac{c_k}{2^{k+1}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{m=-k}^{k}\alpha_m \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(t-u)}\mathrm{d}u, \tag{8.122}$$

où la dernière ligne est obtenue en développant $\cos(t-u) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-u)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u-t)}}{2}$. Ainsi,

$$P_k(t) = \sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{c_k}{2^{k+1}\pi}\alpha_m\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mu}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt} \in F. \tag{8.123}$$

Donc F est dense dans E.

■

Remarque 8.9. *Plus généralement, on peut remplacer la suite Q_k par une « approximation de l'unité » : il faut une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

i) $\forall k \in \mathbb{N}$, *f_k est continue et positive,*

ii) $\int_{\mathbb{R}} f_k = 1$,

iii) $\forall \delta > 0$, $\lim\limits_{k+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} f_k = 0$.

Alors si f est uniformément continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $(f\star f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Remarque 8.10. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \tag{8.124}$$

f est continue, on lui associe $g = f\circ\cos$, qui est continue 2π-périodique. Ainsi, $(P_k\star g)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$ et

$$(Q_k\star g)(t) = \frac{c_k}{2^{k+1}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos(t-u)\right)^k \mathrm{d}u, \tag{8.125}$$

qui est une fonction de t parie car g l'est. On a $(1+\cos(t-u))^k = (1+\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u))^k$. En développant, on a

$$(Q_k\star g)(t) = A_k(\cos(t),\sin(t)) = B_k(\cos(t)), \tag{8.126}$$

où $A_k \in \mathbb{C}[X,Y]$ (polynôme à deux variables) et $B \in \mathbb{C}[X]$ par parité. Ainsi, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$: on vient de redémontrer le théorème de Weierstrass.

Solution 8.18.

1. Si (u_n) est croissante, on pose $f_n = u - u_n$. Sinon, on pose $f_n = u_n - u$.
2. f_n est continue et $F_{n,\varepsilon} = f_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ donc $F_{n,\varepsilon}$ est fermé dans K, donc fermé.

   Si $x \in F_{n+1,\varepsilon}$, on a $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$ donc $x \in F_{n,\varepsilon}$.

   Soit $x \in K$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant f_N(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ donc $x \notin F_{n,\varepsilon}$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_{n,\varepsilon} \neq \emptyset$, alors soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in F_{n,\varepsilon}$. K étant compact, il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \in K$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(k) \geqslant n$. $x_{\varphi(k)} \in F_{\varphi(k),\varepsilon} \subset F_{n,\varepsilon}$. Alors, quand $k \to +\infty$, $x \in F_{n,\varepsilon}$ (fermé) donc $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$ ce qui est absurde.

   Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_{N,\varepsilon} = \emptyset$ et pour tout $n \geqslant N$, $F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. Donc pour tout $n \geqslant N$, pour tout $x \in K$, $f(x) < \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K.
3. f est continue sur un compact donc son maximum est atteint et x_n existe. $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive, donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \geqslant 0$. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in K$. Si $l > 0$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{\varphi(N_0)}(x) \leqslant \frac{l}{2}$. Par continuité de $f_{\varphi(N_0)}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in \overline{B(x,\alpha)}$, $f_{\varphi(N_0)}(y) < l$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $x_{\varphi(n)} \in \overline{B(x,\alpha)}$ donc pour tout $n \geqslant N_1$, $f_{\varphi(N_0)}(x_{\varphi(n)}) < l$. Pour $n = \max(N_0, N_1)$, on a

   $$l \leqslant f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leqslant f_{\varphi(N_0)}(x_{\varphi(n)}) < l, \tag{8.127}$$

   ce qui est absurde. Donc $l = 0$ et (f_n) converge uniformément sur K.

■

9 Intégration

Solution 9.1. S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $S' = f > 0$. Donc S définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a,b]$ dans $[S(a)=0, S(b)]$. COmme pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\frac{S(b)}{n} \in [0, S(b)]$, il existe un unique $x_k \in [a,b]$ tel que $S(x_k) = k\frac{S(b)}{n}$ qui est simplement donné par

$$\boxed{x_k = S^{-1}\left(k\frac{S(b)}{n}\right).} \tag{9.1}$$

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{S(b)}\left(\frac{S(b)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(S^{-1}\left(\frac{k}{n}S(b)\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{S(b)}\int_0^{S(b)} f\left(S^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t = I. \tag{9.2}$$

On effectue le changement de variable $u = S^{-1}(t)$ pour obtenir

$$\boxed{I = \frac{1}{S(b)}\int_0^b f(u)^2\mathrm{d}u.} \tag{9.3}$$

■

Remarque 9.1. *On peut se demander si cela reste vrai si $f \geqslant 0$ (mais $f \neq 0$). On définit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0, S(b)] & \to & [a,b] \\ & y & \mapsto & \min\left(\{x \in [a,b] | y = S(x)\}\right) \end{array} \tag{9.4}$$

On a $x_k = \varphi\left(k\frac{S(b)}{n}\right)$, $f \circ \varphi$ continue par morceaux sur $[0, S(b)]$ et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\varphi\left(k\frac{S(b)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{S(b)}\int_0^{S(b)} (f\circ\varphi)(t)\mathrm{d}t. \tag{9.5}$$

Cela marche aussi si $\{t \in [a,b], f(t) = 0\}$ est discret car S reste strictement croissante. Cela marche aussi si $\int f > 0$ (poser $f_p = f + \frac{1}{p} > 0$ et passer à la limite).

Solution 9.2.

1. Pour tout $x > 0$, on a $g(x) \leqslant \|f\|_\infty$. Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $|f|$, il existe $[a,b] \subset [0,1]$ avec $a < b$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $0 < |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} < |f(t)|$.

D'où

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant \left(\int_a^b |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant (b-a)^{\frac{1}{x}} \left(|f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.6}$$

Alors il existe $X_1 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant X_1$, $|f(t0)| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant g(x)$. D'où le résultat.

2. On pose $h_x(t) = \exp(x \ln(|f(t)|))$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lim\limits_{x\to 0} h_x(t) = 1$ et pour tout $x > 0$, pour tout $t \in [0,1]$ $h_x(t) \leqslant \max\left(1, \|f\|_\infty\right)$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\lim_{x\to 0} \int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t = 1. \tag{9.7}$$

Malheureusement, ce n'est pas suffisant.

Posons donc $k_x(t) = \frac{|f(t)|^x - 1}{x}$. Pour t fixé, on a $\lim\limits_{x\to 0} k_x(t) = \ln\left(|f(t)|\right)$. De plus, pour tout $0 < x \leqslant 1$, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\left||f(t)|^x - 1\right| = \left|\mathrm{e}^{x\ln(|f(t)|)} - \mathrm{e}^0\right| \begin{cases} \leqslant x\ln(|f(t)|), & \text{si } |f(t)| \leqslant 1, \\ \hline \leqslant x\ln(|f(t)|)\mathrm{e}^{x\ln(|f(t)|)} & \\ \leqslant x\ln(|f(t)|)\mathrm{e}^{\ln(|f(t)|)}, & \text{si } |f(t)| > 1. \end{cases} \tag{9.8}$$

Ainsi $k_x(t) \leqslant \max\left(\ln\left(\|f\|_\infty\right), \|f\|_\infty \ln\left(\|f\|_\infty\right)\right)$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{x\to 0} \int_0^1 \frac{f(t)^x - 1}{x} \mathrm{d}t = \int_0^1 \ln\left(|f(t)|\right) \mathrm{d}t. \tag{9.9}$$

Ainsi,

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(1 + x\int_0^1 k_x(t)\mathrm{d}t\right)\right), \tag{9.10}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x}\left(x\int_0^1 \ln\left(|f(t)|\right) + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\right), \tag{9.11}$$

$$= \exp\left(\int_0^1 \ln\left(|f(t)|\right)\mathrm{d}t + \underset{x\to 0}{o}(1)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp\left(\int_0^1 \ln\left(|f(t)|\right)\mathrm{d}t\right). \tag{9.12}$$

■

Solution 9.3. On fixe $y \in [0, f(a)]$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & [0,a] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x f + \int_0^y g - xy \end{array} \tag{9.13}$$

φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = f(x) - y$ donc φ décroît de 0 à $g(y)$ puis croît jusqu'en $x = a$. Son minimum vaut alors $\varphi(g(y)) = \int_0^x + \int_0^{f(x)} g - xf(x)$ avec $x = g(y)$.

Si f est $\mathcal{C}^1$, alors g l'est aussi car f définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$. On effectue le changement de variable $u = f(t)$ et on obtient $\varphi(g(y)) = \int_0^x (tf'(t) + f(t))\mathrm{d}t - xf(x) = [tf(t)]_0^x - xf(x) = 0$. De même si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux (utiliser la relation de Chasles).

Plus généralement, on a le lemme

Lemme 9.1. *Soit pour $n \geqslant 1$, $f_n : [0, a] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux continue telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_n\left(\frac{k}{n}a\right) = f\left(\frac{k}{n}a\right)$. Alors $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$ et $(f_n^{-1})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, f(a)]$.*

Preuve du lemme. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x \in \left[\frac{ka}{n}, \frac{k+1}{n}a\right]$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}a\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \left|f(x) - f\left(\frac{ka}{n}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{k}{n}a\right) - f_n(x)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{9.14}$$

On fait de même pour $(f_n^{-1})_{n\geqslant 1}$. ■

f_n et f_n^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux continues et $g_n = f_n^{-1}$. On a $\int_0^x f_n + \int_0^{f_n(x)} f_n = xf_n(x)$. Quand $n \to +\infty$, par convergence uniforme, on a $\int_0^{f_n(x)} g_n = \int_0^{f(x)} g_n + \int_{f_n(x)}^{f(x)} g_n$ et le dernier terme est uniformément borné par $\|f^{-1}\|_\infty |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, le cas d'égalité est quand

$$\boxed{\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x).} \tag{9.15}$$

■

Solution 9.4. On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{x-1}{2\sqrt{2(1-x)}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$. On effectue le changement de variable $x = \cos(t)$ d'où $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. On a alors

$$I = -\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\ln(\cos(t))}{1 + \cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos(t))}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t. \tag{9.16}$$

Or $\tan'\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ donc par intégrations par parties,

$$I = \left[\ln(\cos(t))\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t. \tag{9.17}$$

Le premier terme vaut $\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$. Pour le deuxième terme, on utilise la formule d'addition $\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\tan\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{1-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{1+u}, \tag{9.18}$$

en ayant effectué le changement de variables $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, d'où $\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Il ne reste plus qu'à faire une décomposition en éléments simples. ■

Solution 9.5.

1. I_n est bien définie. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x, \tag{9.19}$$

$$= [\tan^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x, \tag{9.20}$$

$$= 1 - n(I_n + I_{n+2}). \tag{9.21}$$

Donc $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. On a $I_0 = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - I_{2p-2} = \cdots = (-1)^p\left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p-1}\right). \tag{9.22}$$

On a $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln(2)$. Ainsi,

$$I_{2p+1} = (-1)^p\left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p}\right). \tag{9.23}$$

2. On pose $f_n(x) = \tan^n(x)$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Si $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 partout sauf en $\frac{\pi}{4}$ où elle vaut 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $|f_n(x)| \leqslant 1$ intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.} \tag{9.24}$$

3. D'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},\\ \ln(2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.\end{aligned}} \tag{9.25}$$

■

Remarque 9.2. *On peut donner un équivalent de I_n. Comme pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$, on a $I_{n+2} \leqslant I_n$. Ainsi,*

$$2I_{n+2} \leqslant I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n, \tag{9.26}$$

et donc

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}, \tag{9.27}$$

d'où

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.} \tag{9.28}$$

Solution 9.6.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$, on a

$$\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geqslant \left(\int_a^b 1\right)^2 = (b-a)^2. \tag{9.29}$$

$f\colon x \mapsto 1$ pour tout $x \in [a,b]$ donne l'égalité, et d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a égalité si et seulement si $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont proportionnelles, donc si et seulement si f est constante.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $c < a$. Soit

$$\begin{aligned} f_{\alpha,c} :\ \ [a,b] &\to \mathbb{R}_+^* \\ t &\mapsto (t-c)^\alpha \end{aligned} \tag{9.30}$$

On a

$$\phi(f_{\alpha,c}) = \frac{1}{\alpha^2-1}\left[(b-c)^{\alpha+1} - (a-c)^{\alpha+1}\right]\left[(a-c)^{-\alpha+1} - (b-c)^{-\alpha+1}\right], \tag{9.31}$$

$$\underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^2}\left[(b-c)^{\alpha+1} \times \frac{1}{(a-c)^{\alpha-1}}\right], \tag{9.32}$$

$$\underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{(b-a)(a-c)}{\alpha^2}\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} +\infty, \tag{9.33}$$

car $b-c > a-c$.

3. Soit $f, g \in E^2$ et $\lambda \in [0,1]$. $\lambda f + (1-\alpha)g$ est continue et strictement positive. E est convexe dans $\left(\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ donc connexe par arcs.

   Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions convergent uniformément vers f. Par convergence uniforme, on a $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$. De plus, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{f_n(x) \times f(x)} \leqslant \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\min_{y\in[a,b]} f_n(y) \times f(y)}. \tag{9.34}$$

   Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\min f}{2}$ et pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(x) \geqslant \frac{\min f}{2}$. Alors

$$\left\|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right\|_\infty \leqslant \frac{2\|f_n - f\|_\infty}{(\min f)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{9.35}$$

   Ainsi, $\int_a^b \frac{1}{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \frac{1}{f}$ et $\phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(f)$. ϕ est donc continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc

$$\boxed{\phi(E) = [(b-a)^2, +\infty[.} \tag{9.36}$$

■

Solution 9.7. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2} \end{array} \tag{9.37}$$

f est continue. On a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\int_0^1 f$ converge. On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} f$ converge.

On pose $x = u^2$ et on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{2u^2\ln(u^2)}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u, &(9.38)\\ &= 4\int_0^{+\infty} \frac{u^2\ln(u)}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u, &(9.39)\\ &= 2\left(\left[-\frac{1}{(1+u^2)} \times u\ln(u)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\left(\ln(u) + 0\right)\mathrm{d}u\right), &(9.40)\\ &= 2\left(\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\right). &(9.41) \end{aligned}$$

Noter que l'intégration par parties faite en 9.40 est correcte car tout converge en 0 et $+\infty$ (passer à la limite $\alpha, \beta \to 0, +\infty$ pour être plus rigoureux).

La première intégrale est nulle. En effet, on pose $x = \frac{1}{u}$ d'où $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u = -\int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x. \tag{9.42}$$

La deuxième intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. Finalement, on a

$$\boxed{I = \pi.} \tag{9.43}$$

■

Solution 9.8. On note f la fonction intégrande. f est continue négative. On a $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \left|\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\right| = \underset{t\to 0}{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)$ donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f$ converge. On a $|f(t)| \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 f$ converge.

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}. \tag{9.44}$$

Comme $t(1-t) = -(t^2-t) = -\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-(2t-1)^2\right)$, on pose $2t-1 = \cos\theta$. On a alors $t = \frac{\cos\theta+1}{2}$ et $\mathrm{d}\theta = \frac{-2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. Ainsi,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\ln\left(\frac{\cos\theta+1}{2}\right)}{\frac{1-\cos\theta}{2}}\mathrm{d}\theta. \tag{9.45}$$

On a $\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. En posant $u = \frac{\theta}{2}$, on a donc

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos u)}{\sin^2 u}\mathrm{d}u. \tag{9.46}$$

En fixant $0 < \varepsilon < \alpha < 1$ et en posant $I_{\varepsilon,\alpha} = \int_\varepsilon^\alpha f$, on a en faisant une intégration par parties :

$$I_{\varepsilon,\alpha} = 4\left(\left[-\cot u \times \ln(\cos u)\right]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha 1\mathrm{d}u\right). \tag{9.47}$$

Le deuxième terme tend vers $\frac{\pi}{2}$,. Pour le premier, si $\alpha = \frac{\pi}{2} - h$, on a

$$-\cot\alpha\ln\cos\alpha = -\tan h\ln\sin h = -\tan h\left[\ln h + \underset{h\to 0}{o}(1)\right] \underset{h\to 0}{\sim} -h\ln(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{9.48}$$

De même, on a

$$-\cot\varepsilon\ln\cos\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\frac{1}{\varepsilon}\times\frac{-\varepsilon^2}{2} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{9.49}$$

Ainsi,

$$\boxed{I = -2\pi.} \tag{9.50}$$

■

Solution 9.9. On note f la fonction intégrande. Si $h = \frac{\pi}{4} - t$, on a $\cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) = \sin(2h) \underset{h\to 0}{\sim} 2h$. Ainsi,

$$f(t) \underset{t\to\frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}}, \tag{9.51}$$

donc l'intégrale existe (critère de Riemann).

En posant $u = \sin(t)$, puis $v = \sqrt{2}u$, puis $\theta = \arcsin(v)$, on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 - \sin^2(t)\right)\cos(t)}{\sqrt{1 - 2\sin^2(t)}} \mathrm{d}t, && (9.52)\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - u^2}{\sqrt{1 - 2u^2}} \mathrm{d}u, && (9.53)\\
&= \int_0^1 \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}}, && (9.54)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \frac{\sin^2\theta}{2}}{\sqrt{2}} \mathrm{d}\theta, && (9.55)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2\theta))\mathrm{d}\theta\right), && (9.56)\\
&= \frac{3\pi - 1}{8\sqrt{2}}. && (9.57)
\end{aligned}$$

■

Solution 9.10. Si $f = c \in \mathbb{C}$ est constante, on a

$$\gamma = \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t = c\int_a^b g(\lambda t)\mathrm{d}t. \tag{9.58}$$

On pose $u = \lambda t$ et on pose $k(\lambda) = \left\lfloor \frac{\lambda b - \lambda a}{T} \right\rfloor \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda(b-a)}{T}$. Alors

$$\gamma = \frac{c}{\lambda}k(\lambda)\int_0^T g + \frac{c}{\lambda}\int_{\lambda a + k(\lambda)T}^{\lambda b} g. \tag{9.59}$$

Le deuxième terme est majoré par $\frac{|c|}{\lambda} T \|g\|_\infty \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$. Finalement,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \gamma = \frac{c(b-a)}{T} \int_0^T g = \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f. \tag{9.60}$$

C'est la même chose pour les fonctions en escalier (par combinaison linéaire).

Pour une fonction quelconque f continue par morceaux, soit $\varepsilon > 0$. Il existe f_ε une fonction en escalier telle que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On forme

$$\Gamma = \left| \int_a^b (f(t)g(\lambda t))\mathrm{d}t - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f \right|. \tag{9.61}$$

On a

$$\Gamma = \left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t + \int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t))g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b (f - f_\varepsilon) \right|, \tag{9.62}$$

$$\leqslant \left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon \right| + \left| \int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t))g(\lambda t)\mathrm{d}t \right| + \left| \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b (f - f_\varepsilon) \right|. \tag{9.63}$$

Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$\left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T} \int_0^T \int_a^b f_\varepsilon \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9.64}$$

Ainsi, $\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \times 3 = \varepsilon$. Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f.} \tag{9.65}$$

Pour le cas particulier, on a $g(t) = \frac{1}{3+2\cos(t)}$. g est 2π-périodique, paire et strictement positive. On pose $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on a $\cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$. Par parité, on a $\int_0^{2\pi} g = 2\int_0^\pi g$, et

$$\int_0^\pi g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}x}{(1+x^2)\left(3 + 2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)}, \tag{9.66}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}, \tag{9.67}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}, \tag{9.68}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{2}, \tag{9.69}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \tag{9.70}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)}{3+2\cos(nt)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}f.} \tag{9.71}$$

■

Remarque 9.3. *Pour calculer $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(t)}$, on peut écrire*

$$\frac{1}{3+2\cos(t)}=\frac{1}{3+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1}. \tag{9.72}$$

On décompose $F(X)=\frac{X}{X^2+3X+1}=\frac{\alpha}{X-\lambda}+\frac{\beta}{X-\mu}$ avec $\lambda=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\in]-1,0[$, $\mu=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\in]-\infty,-1[$, $\alpha=\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$, $\beta=\frac{\mu}{\mu-\lambda}$ avec $\lambda-\mu=\sqrt{5}$ et $\lambda=\frac{1}{\mu}$. Ainsi,

$$\frac{1}{3+2\cos(t)}=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\lambda}-\frac{\mu}{\sqrt{5}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mu}, \tag{9.73}$$

$$=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{1-\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mu}}, \tag{9.74}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \tag{9.75}$$

car $\left|\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right|<1$ et $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mu}\right|<1$. Comme on a $\left|\lambda^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|\leqslant|\lambda|^n$, on a convergence normale sur $[0,2\pi]$ car $|\lambda|<1$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(nt)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \tag{9.76}$$

Solution 9.11.

1. Si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $A>0$, il existe $x_A\geqslant A$ tel que $|f(x_A)|>\varepsilon_0$. On sait qu'il existe $\alpha_0>0$ tel que pour tout $(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_+)^2$, si $|x_1-x_2|\leqslant\alpha_0$ alors $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $A\geqslant 0$, pour tout $x\in[x_A-\alpha_0,x_A+\alpha_0]$, on a $|f(x)-f(x_A)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Donc $f(x)$ est du signe de $f(x_A)$ et $|f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors on a

$$\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}f(x)\mathrm{d}x\right|=\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x>\varepsilon_0\alpha_0>0. \tag{9.77}$$

Or

$$\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x-\int_{x_A+\alpha_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\xrightarrow[A\to+\infty]{}0. \tag{9.78}$$

C'est absurde, donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.} \tag{9.79}$$

2. Il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$, on ait $|f(x)| < 1$. Donc pour tout $x > x_0$, on a $|f^2(x_0)| \leqslant |f(x)|$ d'où $f^2 = \underset{+\infty}{O}(f)$ et f^2 est intégrable.

■

Remarque 9.4. *Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors il faut raisonner sur $\Im(f)$ et $\Re(f)$ et le résultat reste vrai.*

Solution 9.12.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Si $x \neq 0$, alors f_n converge simplement vers 0. On n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car on pourrait intervertir les limites en 0. Soit $a > 0$, soit $x \in [a, +\infty[$. f étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $|f_n(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-n^2 a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

   Notons que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrable vaut 1. Enfin, pour tout $a > 0$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (reste d'intégrale convergente).
2. Notons $g_n(u) = \frac{g\left(\frac{u}{n}\right)}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2}$ de telle sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\mathrm{d}u$.

   Soit u fixé dans $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \frac{g(0)}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}$ par continuité de g, et pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|g_n(u)| \leqslant \frac{\|g\|_\infty}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-u^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de converge dominée, on peut intervertir limite et intégrale, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t) f_n(t)\mathrm{d}t = g(0)} \tag{9.80}$$

■

Remarque 9.5. *Généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_n \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$ par théorème de convergence dominée.*

Remarque 9.6. *Si g est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que si $|t| \leqslant \alpha$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x-t) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors*

$$|(f_n \star g)(x) - g(x)| \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |g(x-t) - g(x)|\, f_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} 2\, \|g\|_\infty\, f_n(t)\mathrm{d}t. \tag{9.81}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $(f_n \star g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Remarque 9.7. *Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Soit pour $n\geqslant 1$,*

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & t & \mapsto & nf(nt) \end{array} \tag{9.82}$$

Par changement de variable, on a $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f = 0$ pour $\alpha > 0$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Solution 9.13. Si $x\geqslant 2$, on a $\frac{1}{x}\in]0,1]$ donc on peut définir

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x}-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \tag{9.83}$$

f est continue et $\arcsin(t) \underset{t\to 0}{=} t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)$ implique $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{6x^3}$, donc d'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Soit $A\geqslant 1$, on pose $I_A=\int_1^A \frac{1}{x}-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \ln(A)-\int_1^A\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$. On a

$$\int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[x\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x, \tag{9.84}$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{A}\right)+\ln(A+\sqrt{A^2-1})-\frac{\pi}{2}, \tag{9.85}$$

$$\underset{A\to+\infty}{=} 1+\ln(A)+\ln(2)-\frac{\pi}{2}+o(1), \tag{9.86}$$

donc

$$\boxed{I=\lim_{A\to+\infty} = -1+\frac{\pi}{2}-\ln(2).} \tag{9.87}$$

■

Solution 9.14. On a $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t) \underset{t\to 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc I existe, et en posant $u=\frac{\pi}{2}-t$, on a $I=J$. On a

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t, \tag{9.88}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2t))\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2)\mathrm{d}t, \tag{9.89}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin(u))\mathrm{d}u-\frac{\pi}{2}\ln(2), \tag{9.90}$$

$$=I+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin(u))\mathrm{d}u-\frac{\pi}{2}\ln(2). \tag{9.91}$$

On a

$$I+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin(u))\mathrm{d}u=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(v))\mathrm{d}v=I. \tag{9.92}$$

Finalement, on a $I+J=I-\frac{\pi}{2}\ln(2)$ donc

$$\boxed{I=J=-\frac{\pi}{2}\ln(2).} \tag{9.93}$$

■

Solution 9.15. f_α est positive, continue et $f_\alpha \leqslant 1$. f_α est intégrable si et seulement si $\sum u_k$ converge avec

$$\begin{aligned}
u_k &= \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha\left|\sin(x)\right|}, && (9.94)\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+k\pi)^\alpha\left|\sin(t)\right|}, && (9.95)\\
&\leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\frac{2}{\pi}\left|t\right|}, && (9.96)\\
&= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\frac{2}{\pi}t}, && (9.97)\\
&= \frac{\pi}{\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha}\ln\left(1+\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\right), && (9.98)\\
&\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ln(k)}{(k\pi)^\alpha} \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right). && (9.99)
\end{aligned}$$

Donc $\sum u_k$ converge et $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge. ■

Solution 9.16.

1. Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\int_a^b P(t)f(t)\mathrm{d}t=0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $(P_n)\in(\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telle que $\|P_n-f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur $[a,b]$. $(P_nf)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_a^b P_nf=0$ donne par convergence uniforme $\int_a^b f^2=0$. Comme f^2 est continue positive, on a $f^2=0$ donc $f=0$.
2. Pour tout $n\geqslant 1$, on a par intégration par parties,

$$I_n=\frac{n}{1-\mathrm{i}}I_{n-1}. \tag{9.100}$$

On a $I_0 = \frac{1}{1-\mathrm{i}}$. Par récurrence, on a

$$I_n = \frac{n!}{(1-\mathrm{i})^{n+1}} = \frac{n!}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\pi}{4}}. \tag{9.101}$$

3. Pour $n = 4k-1$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Im(I_{4k-1}) = 0 = \int_0^{+\infty} t^{4k-1} \sin(t) \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t. \tag{9.102}$$

On pose $u = t^4$, $t = u^{\frac{1}{4}}$ et $\mathrm{d}t = \frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} \mathrm{d}u$. Ainsi, en posant $f(u) = \sin\left(u^{\frac{1}{4}}\right) \mathrm{e}^{-u^{\frac{1}{4}}}$,

$$\boxed{0 = \int_0^{+\infty} f(u) u^{k-1} \mathrm{d}u.} \tag{9.103}$$

■

Solution 9.17.

1. g est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et en tout point de continuité de f, on a $g'(t) = \mathrm{e}^{-at} f(t)$. On a $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \mathcal{L}f(a)$.

   Soit $X \geqslant 0$, on a grâce à une intégration par parties,

$$\int_0^X \mathrm{e}^{-bt} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^X \mathrm{e}^{-(b-a)t} \mathrm{e}^{-at} f(t) \mathrm{d}t, \tag{9.104}$$

$$= \left[g(t) \mathrm{e}^{-(b-a)t}\right]_0^X + (b-a) \int_0^X \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t) \mathrm{d}t. \tag{9.105}$$

   Le terme entre crochet s'annule car $g(0) = 0$, et $b > a$ donc $g(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \mathcal{L}f(a)$. g est continue, admet une limite finie en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\left|\mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t)\right| \leqslant \|g\|_\infty \mathrm{e}^{-(b-a)t}, \tag{9.106}$$

   qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)} g(t) \mathrm{d}t, \tag{9.107}$$

   converge absolument et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bt} f(t) \mathrm{d}t$ converge et

$$\boxed{\mathcal{L}f(b) = (b-a) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t) \mathrm{d}t.} \tag{9.108}$$

2. En raisonnant sur $f-h$, on se ramène à $\mathcal{L}f=0$. Pour tout $b>a$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t)\mathrm{d}t = 0$, donc pour tout $x>0$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} g(t)\mathrm{d}t = 0$. Si $g=0$, alors en dérivant, on a $f=0$. On pose $u=\mathrm{e}^{-t}$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $[0,+\infty[\to]0,1]$. On a donc, pour tout $x>0$, $\int_0^1 u^{x-1} g\left(-\ln(u)\right)\mathrm{d}u = 0$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n g\left(-\ln(u)\right)\mathrm{d}u = 0 = \int_0^1 u^n k(u)\mathrm{d}u$ avec $k\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $k(0)=\mathcal{L}f(a)$ et $k(x)=g\left(-\ln(x)\right)$ si $x\in]0,1]$. k est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de Weierstrass, $k=0$ donc $g=0$ puis $f=0$.

■

Solution 9.18.

1. Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} f(t)\right| = |f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $f(t) \underset{|t|\to+\infty}{\sim} 0$. $\widehat{f}$ est définie et $\widehat{f}(x) = \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t)\mathrm{d}t$.

   Posons
   $$g:\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t) \end{array} \tag{9.109}$$
   Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x\mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\frac{\partial^k g}{\partial x^k} = (\mathrm{i}t)^k g(x,t)$. On a
   $$\left|\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial x^k}\right| = |t|^k\,|f(t)|\,, \tag{9.110}$$
   majoration indépendante de x et intégrable sur $[-A,A]$. Donc $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\widehat{f}^{(k)}(x) = \int_{-A}^{A} (\mathrm{i}t)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t)\mathrm{d}t$.

2. Soit $B>0$ tel que si $x>B$, $\widehat{f}(x)=0$. Soit $x_0=B+1$, alors $\widehat{f}=0$ sur $]x_0-1,+\infty[$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\widehat{f}^{(k)}(x_0) = 0 = \int_{-A}^{A} t^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_0} f(t)\mathrm{d}t$. D'après le théorème de Weierstrass, on a $f(t)=0$ pour tout $t\in[-A,A]$.

■

Solution 9.19. Si f est affine avec $f(x)=\alpha x+\beta$. On a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \alpha\frac{(b^2-a^2)}{2} + \beta(b-a)$ et $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left(\alpha\frac{(a+b)}{2}+\beta\right)$ d'où $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Notons que l'inégalité de l'énoncé équivaut à pour tout $x\in\mathring{I}$, pour tout $h>0$, on a $a=x-h$ et $b=x+h\in I^2$, $2hf(x)\leqslant \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Si f est convexe, soit $a < b \in I^2$. Soit φ affine sur $[a, b]$ telle que $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. On a

$$\varphi' = \lambda = \frac{1}{2}\left(f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{9.111}$$

par convexité et en notant $\varphi(t) = \lambda t + \mu$. En notant φ_1 la demi-tangente à f en $\frac{a+b}{2}$, on a pour tout $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$,

$$\varphi(t) \leqslant \varphi_1(t) \leqslant f(t). \tag{9.112}$$

φ_1 est affine sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\varphi_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\varphi'_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right)$. De la même façon, pour tout $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, on a

$$\varphi(t) \leqslant \varphi_2(t) \leqslant f(t), \tag{9.113}$$

avec φ_2 affine sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, $\varphi_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\varphi'_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

On a donc $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f$.

Réciproquement, si pour tout $a < b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, soient $x < y \in I^2$ fixés. On pose $g = f - \varphi$ avec $\varphi(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$. g vérifie l'inégalité de l'énoncé car pour φ on a égalité (car affine). On veut montrer que $g \leqslant 0$ sur $[x, y]$. On a $g(x) = g(y) = 0$. Soit $g(x_0) = \max\limits_{t \in [x,y]} g(t)$. Si $g(x_0) > 0$, on a $x_0 \in]x, y[$ car $g(x) = g(y) = 0$. Soit $h > 0$ tel que $x_0 - h$ et $x_0 + h \in [x, y]$. On applique l'inégalité de l'énoncé à g :

$$2hg(x_0) \leqslant \int_{x_0-h}^{x_0+h} g(t)\mathrm{d}t = 2g(x_0), \tag{9.114}$$

donc

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} (g(x_0) - g(t))\mathrm{d}t = 0, \tag{9.115}$$

et l'intégrande est positive et continue. Donc pour tout $t \in [x_0 - h, x_0 + h]$, on a $g(t) = g(x_0)$. On pose $h = \min(y - x_0, x - x_0)$. On obtient $g(x) = 0 = g(x_0) > 0$ (ou $g(y) = g(x_0)$) ce qui est absurde. Donc $g \leqslant 0$ sur $[x, y]$ et f est convexe. ■

Remarque 9.8. *Notons que si pour tout $(h, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathring{I}$ tels que $(x-h, x+h) \in I^2$, $2hf(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$, alors pour $x \in \mathring{I}$ et h fixé, $x \mapsto \int_{x-h}^{x+h} f$ est $\mathcal{C}^1$ donc f l'est. Par récurrence, f est $\mathcal{C}^\infty$, et en dérivant deux fois par rapport à h (pour $x \in \mathring{I}$ fixé), on a $0 = f'(x+h) - f'(x-h)$ donc f est affine.*

Solution 9.20.

1. Soit $f_n\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t)=0$ si $t>n$ et $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ si $t\leqslant n$. f_n est continue par morceaux, positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car équivalente à 0 en $+\infty$ et à t^{x-1} en 0. Soit $t\in]0,+\infty[$ fixé, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_0$, $n>t$ et pour tout $n\geqslant N_0$,

$$f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}, \tag{9.116}$$

$$=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1}, \tag{9.117}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{e}^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}t^{x-1}, \tag{9.118}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}. \tag{9.119}$$

On a donc convergence simple vers $f(t)=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$, fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\geqslant 1$ et $t\in[0,n[$, on a

$$0\leqslant f_n(t)\leqslant f(t), \tag{9.120}$$

car $\ln(1+x)\leqslant x$ pour tout $x>-1$. D'après le théorème de convergence dominée, on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t.} \tag{9.121}$$

2. On pose $u=\frac{t}{n}$ et on a

$$I_n(x)=\int_0^1(1-u)^n(nu)^{x-1}n\mathrm{d}u, \tag{9.122}$$

$$=n^x\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u, \tag{9.123}$$

$$=n^x\left(\left[(1-u)^n\frac{u^x}{x}\right]_0^1+\int_0^1 n(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\mathrm{d}u\right). \tag{9.124}$$

Le terme entre crochets est nul car $u\geqslant 1$ et $x>0$.

Si on pose $B_n(x)=\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u$, on a

$$B_n(x)=\frac{n}{x}B_{n-1}(x+1)=\cdots=\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}B_0(x+n)=\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{9.125}$$

On a donc

$$\boxed{\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n).}} \tag{9.126}$$

3. Par définition, on a $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$. On a

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{1\times 2\times\cdots\times n}\mathrm{e}^{-x\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} x\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]\mathrm{e}^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+o(1)\right)}\mathrm{e}^{\gamma x}, \tag{9.127}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}} \times \underbrace{\mathrm{e}^{o(1)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}. \tag{9.128}$$

Donc on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}. \tag{9.129}$$

4. On remarque que $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = (\ln\Gamma)'(x)$. On a

$$\ln\Gamma(x) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)}_{f_k(x)\geqslant 0}. \tag{9.130}$$

On a convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $k > 1$, f_k est $\mathcal{C}^1$, et pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_k'(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geqslant 0$ car $x > 0$.

Soit $A > 0$, pour tout $x \in]0, A]$, on a

$$0 < f_k(x) \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+A} = \frac{A}{k(k+A)} \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{9.131}$$

Donc pour tout $A > 0$, $\sum f_k(x)$ converge normalement sur $]0, A]$. $\ln\Gamma$ est donc $\mathcal{C}^1$ (en tant que série de fonction) et on a

$$\boxed{\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).} \tag{9.132}$$

■

Remarque 9.9. *En particulier, comme $\Gamma(1) = 1$, on a*

$$\Gamma'(1) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -\gamma, \tag{9.133}$$

car la série est téléscopique.

Remarque 9.10. *On a*

$$(\ln\Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}. \tag{9.134}$$

Par ailleurs,

$$0 \leqslant \Gamma'^2(x) = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \times \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \Gamma''(x)\Gamma(x), \tag{9.135}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ona égalité stricte car $\ln(t)$ *n'est pas constante. Ainsi,* $\ln\Gamma$ *est strictement convexe.*

Remarque 9.11. *On peut vérifier que* $\ln\Gamma$ *est l'unique fonction de* $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *telle que*

1. $\ln\Gamma$ *est convexe,*
2. $\forall x > 0$, $(\ln\Gamma)(x+1) = (\ln\Gamma)(x) + \ln(x)$,
3. $(\ln\Gamma)(1) = 0$.

Solution 9.21.

1. On a

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi d(f)} = \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} \mathrm{d}t\right). \tag{9.136}$$

   Posons $g(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} \mathrm{d}t\right)$. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)$. On a $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - f'g}{g^2} = 0$ donc $\frac{g}{f} = \alpha \in \mathbb{C}$. En particulier, $g(0) = g(2\pi) = 1$ donc $d(f) \in \mathbb{Z}$.

2. f_0 est constante égale à $P(0)$ donc $d(f_0) = 0$ car c'est une fonction constante. Soit $r \geqslant 0$, on a

$$d(f_r) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_r'(t)}{f_r(t)} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \mathrm{d}t. \tag{9.137}$$

   On note $g(r,t)$ la fonction intégrande définit sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. $r \mapsto g(r,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n. \tag{9.138}$$

   Alors

$$h(z) = \frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{a_1 z + \cdots + n a_n z^n}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} \tag{9.139}$$

   est continue sur $\mathbb{C}$ et pour $z \neq 0$, on a

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{\frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + n a_n}{\frac{a_0}{z^n} + a_n} \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} n. \tag{9.140}$$

Donc h est bornée sur $\mathbb{C}$, soit $M = \|h\|_\infty$. On a $|g(r,t)| \leqslant M \in L^1([0,2\pi])$. Donc $r \mapsto d(f_r)$ est continue et pour t fixé, on a $\lim_{r\to+\infty} g(r,t) = n$. Par convergence dominée, on a $\lim_{r\to+\infty} d(f_r) = n$. $r \mapsto d(f_r)$ est continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc constante et $d(f_0) = 0$, $\lim_{r\to+\infty} d(f_r) = n \neq 0$: c'est absurde. Donc P s'annule.

∎

Remarque 9.12. *Le théorème de relèvement permet d'écrire $f(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ avec $\rho(t) = |f(t)|$ et $(\rho,\theta)\colon \mathbb{R} \to \left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ est $\mathcal{C}^1$. On a alors*

$$\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'}{\rho} + \mathrm{i}\left(\theta(2\pi) - \theta(0)\right). \tag{9.141}$$

Le premier terme vaut $[\ln(\rho)]_0^{2\pi} = 0$ car $\rho = |f|$ est 2π-périodique, et le deuxième terme vaut $2\mathrm{i}\pi\times$ le nombre de tours que décrit f autour de l'origine.

Solution 9.22. En appliquant l'inégalité de Taylor avec reste intégral à f de classe $\mathcal{C}^n$, on a

$$R_n = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t. \tag{9.142}$$

Soit $m_n = \min_{[a,b]} f^{(n)}$ et $M_n = \max_{[a,b]} f^{(n)}$. Alors

$$m_n \frac{|b-a|^n}{n!} \leqslant \left| \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant M_n \frac{|b-a|^n}{n!}. \tag{9.143}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$.

On a

$$v_n - \int_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right] - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f. \tag{9.144}$$

On prend d'abord $a = \frac{k}{n}$ et $b = \frac{k+1}{n}$, il existe $\xi_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3} f^{(2)}(\xi_k). \tag{9.145}$$

Puis avec $a = \frac{k+1}{n}$ et $b = \frac{k}{n}$, il existe $\eta_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que

$$F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) = -\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f^{(2)}(\eta_k). \tag{9.146}$$

En faisant la différence des deux égalités et en divisant par deux, on a

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t, \tag{9.147}$$

$$=\frac{1}{2n}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right)+\frac{1}{4n^2}\left(f'\left(\frac{k}{n}\right)-f'\left(\frac{k+1}{n}\right)\right), \tag{9.148}$$

$$+\frac{1}{12n^3}\left(f^{(2)(\xi_k)}+f^{(2)}(\eta_k)\right). \tag{9.149}$$

En sommant, on obtient (par le théorème de Riemann car on a une subdivision pointée)

$$v_n-\int_0^1 f=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4n^2}\left(f'\left(\frac{k+1}{n}\right)-f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)-\frac{1}{12n^3}\left(f^{(2)}(\xi_k)+f^{(2)}(\eta_k)\right), \tag{9.150}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{4n^2}\left[f'(1)-f'(0)\right]-\frac{1}{6n^2}\left[\int_0^1 f'^{(2)}(t)\mathrm{d}t+o(1)\right], \tag{9.151}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{4n^2}\left[f'(1)-f'(0)\right]-\frac{1}{6n^2}\left(f'(1)-f'(0)+o(1)\right). \tag{9.152}$$

Donc on a

$$\boxed{v_n=\int_0^1 f+\frac{1}{12n^2}\left(f'(1)-f'(0)\right)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).} \tag{9.153}$$

■

Solution 9.23. On a

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2(x)+1-1\right)\tan^{n-2}(x)\mathrm{d}x, \tag{9.154}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan'(x)-1\right)\tan^{n-2}(x)\mathrm{d}x, \tag{9.155}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\tan^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_{n-2}. \tag{9.156}$$

Donc

$$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}. \tag{9.157}$$

On a $I_0=\frac{\pi}{4}$ et $I_1=\left[-\ln|\cos|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln(2)$.

On a donc

$$I_{2p}=(-1)^p\left(\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^p}{2p+1}\right), \tag{9.158}$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2}\left(\ln(2) - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^p}{p}\right). \tag{9.159}$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.} \tag{9.160}$$

Comme on a $2I_n \leqslant I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \leqslant 2I_{n-2}$ d'où

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}, \tag{9.161}$$

ainsi

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.} \tag{9.162}$$

■

Solution 9.24. On note g la fonction intégrande. g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1]$. On a

$$f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} g(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} g(t)\mathrm{d}t, \tag{9.163}$$

donc f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = g(x) - 2xg'(x^2)$.

En 0, e^t se comporte comme 1 et $\frac{1}{\arcsin(t)}$ comme en $\frac{1}{t}$. Donc, au voisinage de 0,

$$h(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{\arcsin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t\mathrm{e}^t - \arcsin(t)}{t\arcsin(t)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{t^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} \xrightarrow[t\to0^+]{} 1. \tag{9.164}$$

Donc h est bornée sur $]0, 1]$, soit $M = \sup_{t\in]0,1]} |h(t)|$. On a

$$\left|\int_{x^2}^{x} h(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x}^{x^2} |h(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(x - x^2) \xrightarrow[x\to0]{} 0. \tag{9.165}$$

Comme $\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x)$, on a $f(x) \underset{x\to0}{=} -\ln(x) + o(1)$.

Pour aller plus loin dans le développement limité, on pousse plus loin le développement limité de $h(t)$ dans 0^+. ■

Solution 9.25. On note f la fonction intégrande. $x \mapsto x^2+x+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}$. Donc d'après le critère de Riemann, l'intégrale converge absolument.

Pour le calcul, on on

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)\right)^2+1\right). \tag{9.166}$$

On pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)$ et on a

$$I_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}. \tag{9.167}$$

On note J_n l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u^2+1)^{n-1}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}. \tag{9.168}$$

On pose $\theta = \arctan(u)$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0,+\infty[\to [0,\frac{\pi}{2}[$. On a $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ et $\frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} = \cos^{2n-2}(\theta)$.

On retrouve les intégrales de Wallis, d'où on en tire

$$J_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!}\frac{\pi}{2}. \tag{9.169}$$

Donc

$$\boxed{I_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!}\frac{\pi}{2}.} \tag{9.170}$$

■

Solution 9.26. Soit $M_0 = \sup\limits_{[0,1]}|f|$ et $M_1 = \sup\limits_{[0,1]}|f'|$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\left|f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M_1}{n}. \tag{9.171}$$

Donc, par la formule de la somme de Riemann, on a

$$\left|u_n - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) f'\left(\frac{i+1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 ff'}\right| \leqslant \underbrace{\frac{M_1^2}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}, \tag{9.172}$$

donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(f^2(1) - f^2(0)\right).} \tag{9.173}$$

■

Solution 9.27. Ici, l'intégrale diverge, mais comme on fait tendre l'intervalle d'intégration à un singleton, cela aura une limite finie.

Formons

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{\ln(t)} \end{array} \tag{9.174}$$

Si $x < 1$, x^a et x^b sont < 1, et si $x > 1$, alors x^a et x^b sont > 1. $\int_{x^a}^{x^b} f(t)\mathrm{d}t$ est donc bien définie.

On a

$$\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} = \frac{1}{\ln(1+(t-1))} - \frac{1}{t-1} = \frac{(t-1) - \ln(1+(t-1))}{(t-1)\ln(1+(t-1))} \underset{t\to1}{\sim} \frac{\frac{(t-1)^2}{2}}{(t-1)^2} = \frac{1}{2}. \tag{9.175}$$

Soit $h\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $h(1) = \frac{1}{2}$. h est continue donc bornée au voisinage de 1. Il existe $\alpha_0 > 0$ et $M_0 \geqslant 0$ tels que pour tout $t \in [1-\alpha_0, 1+\alpha_0]$, on ait

$$\left| \int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} - \int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \right| \leqslant M_0 \left|x^b - x^a\right| \xrightarrow[x\to1]{} 0. \tag{9.176}$$

Or, si $x = 1 + x'$, on a

$$\int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \left[\ln|t-1|\right]_{x^a}^{x^b}, \tag{9.177}$$

$$= \ln\left|x^b - 1\right| - \ln\left|x^a - 1\right|, \tag{9.178}$$

$$= \ln\left|(1+x')^b - 1\right| - \ln\left|(1+x')^a - 1\right|, \tag{9.179}$$

$$\underset{x'\to0}{=} \ln\left|bx" + o(x')\right| - \ln\left|ax' + o(x')\right|, \tag{9.180}$$

$$\underset{x'\to0}{=} \ln(b) + \ln(x') + o(1) - \left[\ln(a) + \ln(x') + o(1)\right], \tag{9.181}$$

$$\underset{x'\to0}{=} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + o(1) \xrightarrow[x'\to0]{} \ln\left(\frac{a}{b}\right). \tag{9.182}$$

D'où le résultat. ■

Solution 9.28.

1. Soit $n \geqslant 1$, on a

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f. \tag{9.183}$$

Par convexité, on a

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} S_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right), \tag{9.184}$$

donc en passant à la limite $n \to +\infty$, par continuité, on a

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t.} \tag{9.185}$$

2. Soit $c \in]a, b[$. En cas d'égalité dans ce qui précède, on a

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \varphi\left(\frac{c-a}{b-a}\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \frac{b-c}{b-a}\frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right), \tag{9.186}$$

$$\leqslant \frac{c-a}{b-a}\varphi\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right) + \frac{b-c}{b-a}\varphi\left(\frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right), \tag{9.187}$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\left(\int_a^c \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t, \tag{9.188}$$

par convexité et par ce qui précède. Par hypothèse, on a égalité partout, Par stricte convexité, on a

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\mathrm{d}t, \tag{9.189}$$

d'où $(b-c)\int_a^c g(t)\mathrm{d}t = (c-a)\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$. En dérivant par rapport à c, on obtient

$$(b-a)f(c) - \int_a^c f(t)\mathrm{d}t = -(c-a)f(c) + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t, \tag{9.190}$$

soit $(b-a)f(c) = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ et $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $c \in]a, b[$. Donc f est constante sur $[a, b]$.

■

Remarque 9.13. *Pour la première question, on aurait aussi pu passer par des fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f.*

Solution 9.29. Si $f = 0$, ça marche. Sinon, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)} \int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t)\mathrm{d}t. \tag{9.191}$$

Par récurrence, f est $\mathcal{C}^1$ (d'après l'expression) et si f est $\mathcal{C}^k$, alors elle est $\mathcal{C}^{k+1}$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$. Par ailleurs, $f(y_0)f(-x) = -f(y_0)f(y)$ donc f est impaire. On dérive par rapport à x : $f(x+y)-f(x-y) = f'(x)f(y)$, et en dérivant à nouveau par rapport à x, on a $f'(x+y) - f'(x-y) = f''(x)f(y)$.

Même chose par rapport à y : $f(x+y) - f(x-y) = f(x)f'(y)$ puis $f' - x + y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$. On pose alors $\alpha = \frac{f''(y_0)}{f(y_0)}$, on a $f''(x) - \alpha f(x) = 0$.

Si $\alpha = 0$, comme f est impaire, on a $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ et en reportant, on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = a\left[\frac{u^2}{2}\right]_{x-y}^{x+y} = 2axy. \tag{9.192}$$

Or $f(x)f(y) = a^2xy$ donc ou bien $a = 0$, ce qui est exclu, ou bien $a = 2$.

Si $\alpha > 0$, on a $f(x) = a_1 \sinh(\sqrt{\alpha}x)$. En reportant, on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2a_1}{\sqrt{\alpha}} \sinh(\sqrt{\alpha}x)\sinh(\sqrt{\alpha}y), \tag{9.193}$$

et $f(x) = f(y) = a_1^2 \sinh(\sqrt{\alpha}x)\sinh(\sqrt{\alpha}y)$ d'où $a_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$.

Si $\alpha < 0$, on trouve $f(x) = a_2 \sin(\sqrt{-\alpha}x)$ avec $a_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}$. ■

Solution 9.30. Soit f une fonction constante égale à c sur $[a,b]$. On a alors $I_n = (b-a)^{\frac{1}{n}}|c| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |c|$.

Plus généralement, on a

$$I_n \leqslant \left(\int_a^b \|f\|_\infty^n\right)^{\frac{1}{n}} = (b-a)^{\frac{1}{n}}\|f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty. \tag{9.194}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a $I_n \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon$. $|f|$ est continue sur le compact $[a,b]$, donc il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$. Par continuité de $|f|$, il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ avec $c < d$ tel que pour tout $t \in [c,d]$, on ait $|f(t)| \geqslant \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors

$$\int_a^b |f|^n \geqslant \int_c^b |f|^n \geqslant (d-c)\left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n, \tag{9.195}$$

donc

$$I_n \geqslant \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.196}$$

Il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on a $I_n \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$. Donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a

$$\|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant I_n \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon, \tag{9.197}$$

donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \|f\|_\infty .} \tag{9.198}$$

■

Remarque 9.14. *Soit $u_n = I_n^n$ avec f continue non nulle. On a $u_n > 0$ et $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|$. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $|f|^{\frac{n}{2}}$ et $|f|^{\frac{n}{2}+1}$, on a*

$$0 < u_{n+1} = \int_a^b |f|^{n+1} \leqslant \sqrt{u_n}\sqrt{u_n+2} \tag{9.199}$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}. \tag{9.200}$$

$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ *est croissante et strictement positive, donc converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$. On a*

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l). \tag{9.201}$$

D'après le théorème de Césaro, on a donc

$$\frac{\ln(u_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l), \tag{9.202}$$

d'où $\ln\left(u_n^{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\|f\|_\infty = \ln(l)$ par unicité de la limite.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \|f\|_\infty . \tag{9.203}$$

Solution 9.31.

1. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, comme $\rho \neq 1$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, donc $t \mapsto \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| > 0$ et $t \mapsto \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|$ est continue, 2π-périodique sur $[-\pi, \pi]$ donc $F(\rho, \theta)$ existe.

2. On a
$$F(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\theta)} - \rho\right| \mathrm{d}t = \int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - \rho\right| \mathrm{d}u, \tag{9.204}$$
et comme l'intégrande est une fonction 2π-périodique,
$$F(\rho, \theta) = \int_{0}^{2\pi} \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - \rho\right| \mathrm{d}u, \tag{9.205}$$
est indépendant de θ.

3. Soit $n \geqslant 1$, on a
$$S_n = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} - \rho\right| = \frac{2\pi}{n} \ln\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1}\left(\rho - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)\right|\right) = \frac{2\pi}{n} \ln\left(|\rho^n - 1|\right). \tag{9.206}$$
Si $\rho > 1$, on a
$$S_n = \frac{2\pi}{n} \ln\left(\rho^n - 1\right), \tag{9.207}$$
$$= \frac{2\pi}{n} \left[\ln(\rho^n) + \ln\left(1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)^n\right)\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\pi \ln(\rho). \tag{9.208}$$
Donc $F(\rho, \theta) = 2\pi \ln(\rho)$.

Si $\rho < 1$, $S_n = \frac{2\pi}{n} \ln(1 - \rho^n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $F(\rho, \theta) = 0$.

■

Remarque 9.15. *On a*
$$F(\rho, 0) = \int_{0}^{2\pi} \ln\left|\cos(u) - \rho + \mathrm{i}\sin(u)\right| \mathrm{d}u, \tag{9.209}$$
$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \ln\left(\rho^2 - 2\rho\cos(u) + 1\right) \mathrm{d}u, \tag{9.210}$$
$$= 2\pi \ln(\rho) + F\left(\frac{1}{\rho}, 0\right). \tag{9.211}$$

Remarque 9.16. *On peut se demander si l'on a convergence de* $F(1, 0) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(2(1 - \cos(u))\right) \mathrm{d}u$. *On vérifie que*
$$\left|\ln(2(1 - \cos(u)))\right| \underset{u \to 0}{\sim} 2\left|\ln u\right| = \underset{u \to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right). \tag{9.212}$$

Donc $F(1,0)$ converge. Pour le calcul, on a

$$2F(1,0) = 2\pi\ln(2) + 2\int_0^{\pi} \ln(1-\cos(u))\mathrm{d}u, \tag{9.213}$$

$$= 2\pi\ln(2) + 4\int_0^{\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\mathrm{d}u, \tag{9.214}$$

$$= 2\pi\ln(2) + 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(v\right)\right)\mathrm{d}v. \tag{9.215}$$

D'après un exercice précédent, l'intégrale vaut $-\frac{\pi}{2}\ln(2)$ et finalement $F(1,0) = 0$.

Solution 9.32. Toutes les intégrales existent car les fonctions sont à support compact.

1. Montrons la contraposée. Soit $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $f(\delta) \neq 0$. On suppose que $f(\delta) > 0$. Par continuité, il existe $\eta 0$ tel que $f \geqslant 0$ sur $[\delta-\eta, \delta+\eta]$. $f \times \varphi$ est continue sur $[\delta-\eta, \delta+\eta]$, positive et $(f\varphi)(\delta) > 0$ donc $\int_{\mathbb{R}} f\varphi > 0$ (en choisissant $\varphi \geqslant 0$ définie sur le support $[\delta-\eta, \delta+\eta]$).

2. Montrons un petit lemme : si $\psi \in C_0$, il existe $\varphi \in C_1$ tel que $\psi = \varphi'$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$. Pour le sens direct, on a $\int_{\mathbb{R}} \psi = \int_{\mathbb{R}} \varphi' = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) - \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$. Pour le sens indirect, on définit $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi$ (possible car $\psi \in C_0$). φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi' = \psi$. φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi' = \psi$. Soit $A \geqslant 0$ tel que pour tout $|t| \geqslant A$, on a $\psi(t) = 0$. Alors pour tout $t \leqslant -A$, on a $\varphi(t) = 0$ et pour tout $t \geqslant A$, $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} \psi = \int_{-A}^{A} \psi = 0$. Donc *varphi* est à support compact.

   Pour montrer le résultat, montrons la contraposée. Supposons f non constante, il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ distincts tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Quitte à remplacer f par $f - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, on peut supposer que $f(x_2) = -f(x_1)$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [x_1-\eta, x_1+\eta]$, $f(t) \geqslant 0$ et pour tout $t \in [x_2-\eta, x_2+\eta]$, $f(t) \leqslant 0$.

   On a $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$. On pose $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} \psi(x)\mathrm{d}x$. Alors $\varphi \in C_1$ et $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' > 0$.

3. Soit G une primitive de g. On a alors, pour tout $\varphi \in C_1$,

   $$\int_{\mathbb{R}} g\varphi = [G\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} G\varphi' = \int_{\mathbb{R}} f\varphi'. \tag{9.216}$$

   D'après ce qui précède, on a, pour tout $\varphi \in C_1$, $\int_{\mathbb{R}} (f+G)\varphi' = 0$ et donc $f = -G$ à une constante près.

■

Solution 9.33. On note

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t} \end{array} \tag{9.217}$$

f est continue, tend vers 1 en 0 et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc I existe.

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t, \tag{9.218}$$

$$= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t, \tag{9.219}$$

$$= \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t. \tag{9.220}$$

La fonction $\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}$ tend vers -1 quand $t \to 0$, donc elle est bornée au voisinage de 0 et est continue. Donc

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \ln(2) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \tag{9.221}$$

donc

$$\boxed{I = \ln(2).} \tag{9.222}$$

On note maintenant f la fonction intégrande de J. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0, \tag{9.223}$$

et

$$\int_1^X \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_1^X}_{\xrightarrow[X\to+\infty]{} -\sin(1)} + \int_1^X \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t, \tag{9.224}$$

et l'intégrale de droite converge absolument. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge, et c'est donc aussi le cas pour $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t$. Donc J existe.

Soit $\varepsilon > 0$ et $X \geqslant \varepsilon$, on a

$$\int_\varepsilon^X \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^X \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^X \frac{\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t, \tag{9.225}$$

$$= \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_X^{2X} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t. \tag{9.226}$$

La deuxième intégrale tend vers 0 quand $X \to +\infty$ (car l'intégrale est semi-convergente), et de même, on a $\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ donc

$$\boxed{J = \ln(2).} \tag{9.227}$$

■

Remarque 9.17. *Généralement, pour $a < b$ et $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 et telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge. Alors on a $f(u) = f(0) + uf'(0) + \underset{u\to 0}{o}(u)$ et*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\mathrm{d}t, \tag{9.228}$$

existe. En notant g la fonction intégrande, g tend vers $(b-a)f'(0)$ en 0. Et en séparant pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{9.229}$$

Solution 9.34. f est continue par morceaux, positive. On a $0 \leqslant f \leqslant 2$ donc f est intégrable sur $]0,1]$. On écrit

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{k}{k(k+1)}, \tag{9.230}$$

et en prenant les sommes partielles et en passant à la limite, on trouve

$$\boxed{I = 1 - \gamma.} \tag{9.231}$$

■

Solution 9.35. On note

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \end{array} \tag{9.232}$$

g est continue positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)/$ Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t, && (9.233) \\ &= \left[\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)\right]_x^{+\infty}, && (9.234) \\ &= -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right). && (9.235) \end{aligned}$$

f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} -\ln(x+o(x)) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x) = \underset{x\to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. D'où l'existence de I. On pose $u = \mathrm{e}^{-x}$ soit $x = -\ln(u)$ et $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$. C'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0,1[$. On a alors

$$I = -\int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u. \tag{9.236}$$

On pose $v = 1-u$ pour avoir

$$I = \int_0^1 \frac{-\ln(v)}{1-v}\mathrm{d}v. \tag{9.237}$$

Pour $v \in]0,1[$, on développe

$$\frac{-\ln(v)}{1-v} = \sum_{k=0}^{+\infty} -v^k \ln(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(v). \tag{9.238}$$

f_k est positive intégrable sur $]0,1[$.

On forme $u_k = \int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors $u_k = \int_0^1 -t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)^2}$. Donc $\sum u_k$ converge et on peut intervertir. Finalement, on a

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{6}.} \tag{9.239}$$

■

Remarque 9.18. *On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée à* $(\sum_{k=0}^n f_k)$ *car les* f_k *sont positifs.*

Remarque 9.19. *On a*

$$f(x) = \underbrace{\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1}}_{\underset{x\to 0}{\sim}\int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x) = \underset{x\to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \tag{9.240}$$

car la fonction est positive, et

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{9.241}$$

Solution 9.36.

1. On pose $f_n(t) = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, continue positive sur $[-n,+\infty[$. I_n est donc bien définie. On pose $u = t+n$, et alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n^n}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^n \mathrm{d}u, \tag{9.242}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}\int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u, \tag{9.243}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}\Gamma(n+1), \tag{9.244}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}n!. \tag{9.245}$$

2. On pose $t = \sqrt{n}u$ et on a

$$J_n = \sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}u}\mathrm{d}u. \tag{9.246}$$

On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $f(u) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}u}$ sur $[-\sqrt{n},\sqrt{n}]$ et 0 ailleurs. f_n est continue par morceaux (intégrable) sur $\mathbb{R}$. Soit $u\in\mathbb{R}$, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_0$, $\sqrt{n}\geqslant |u|$. Alors pour tout $n\geqslant N_0$, on a

$$f_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}-\frac{u^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)-\sqrt{n}u}, \tag{9.247}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{9.248}$$

Ainsi, on a convergence simple de $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(u) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$.

C'est un cas particulier où trouver la dominante (pour appliquer le théorème de convergence dominée) est difficile. On propose $\varphi(u) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$ (plus grand que f et toujours intégrable). Soit $n\geqslant 1$ et $u\in]-\sqrt{n},\sqrt{n}]$, soit

$$g_n(u) = n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}u - \left(-\frac{u^2}{4}\right), \tag{9.249}$$

dérivable sur $]-\sqrt{n},\sqrt{n}]$. On a

$$g_n'(u) = \frac{-\frac{u}{2}\left(1-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{1+\frac{u}{\sqrt{n}}}, \tag{9.250}$$

donc $g_n' \leqslant 0$ si $u\geqslant 0$ et $g_n > 0$ si $u < 0$. Comme $g_n(0) = 0$, on a $g_n(u)\leqslant 0$ pour tout $u\in]-\sqrt{n},\sqrt{n}]$ et donc pour tout $u\in\mathbb{R}$, $0\leqslant f_n(u)\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\boxed{\frac{J_n}{\sqrt{n}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.} \tag{9.251}$$

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$K_n = \int_{-n}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \tag{9.252}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n} \int_{2n}^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u. \tag{9.253}$$

On écrit $u^n \mathrm{e}^{-u} = u^n \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} = h(u) \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}$. Alors h est dérivable sur $]2n, +\infty[$ et $h'(u) = u^{n-1} \left(n - \frac{u}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}$ donc

$$0 \leqslant h(u) \leqslant (2n)^n \mathrm{e}^{-n}. \tag{9.254}$$

Donc

$$K_n \leqslant 2^n \int_{2n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} \mathrm{d}u = 2^n \times 2\mathrm{e}^{-n}. \tag{9.255}$$

Or $\mathrm{e} > 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n = 0$. Donc $K_n = \underset{n \to +\infty}{o}(I_n)$ et $I_n = J_n + K_n$ donc $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} J_n$ et

$$\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \sqrt{2\pi n}.} \tag{9.256}$$

■

Solution 9.37.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f_x(t) = \underset{t \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f_x(t) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{x^2}{2}$ donc $I(x)$ est bien définie.
2. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f_x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $a \neq 0$, on a

$$|\cos(a) - 1| = |\cos(a) - \cos(0) - a\cos'(0)| \leqslant \frac{a^2}{2} \sup_{[0,a]} |\cos''| \leqslant \frac{a^2}{2}. \tag{9.257}$$

Donc $|1 - \cos(tx)| \leqslant \frac{t^2 x^2}{2}$. Ainsi, pour tout $t > 0$, on a $|f_x(t)| \leqslant \frac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-t}$. Fixons $a \geqslant 0$, on a pour tout $x \in [-a, a]$, pour tout $t > 0$, $|f_x(t)| \leqslant \frac{a^2}{2} \mathrm{e}^{-t}$, fonction indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de continuité, I est continue sur $[-a, a]$, pour tout $a \geqslant 0$, donc sur $\mathbb{R}$. On a $\frac{\partial f_x}{\partial x}(t) = \frac{\sin(t)x}{t} \mathrm{e}^{-t}$, $\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}(t) = \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leqslant |u|$ donc pour tout $t > 0$, pour tout $x \in [-a, a]$,

$$\left|\frac{\partial f_x}{\partial x}(t)\right| \leqslant |x| \mathrm{e}^{-t} \leqslant a\mathrm{e}^{-t}, \tag{9.258}$$

$$\left|\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}(t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}. \tag{9.259}$$

Donc d'après le théorème de dérivation, I est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a

$$\begin{aligned} I''(x) &= \int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, &(9.260)\\ &= \Re\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}x)t}\mathrm{d}t\right), &(9.261)\\ &= \Re\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}x}\right), &(9.262)\\ &= \frac{1}{1+x^2}. &(9.263)\end{aligned}$$

Donc $I'(x) = \lambda + \arctan(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $I'(0) = 0$, $I'(x) = \arctan(x)$. On a $I(0) = 0$ donc

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x \arctan(u)\mathrm{d}u, &(9.264)\\ &= [u\arctan(u)]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u, &(9.265)\\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right). &(9.266)\end{aligned}$$

■

Remarque 9.20. *En posant $v = xt$ pour $x > 0$, on a*

$$I(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(v)}{v^2}\mathrm{e}^{-\frac{v}{x}}\mathrm{d}v, \tag{9.267}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(v)}{v^2}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}, \tag{9.268}$$

et par intégration par parties, cette intégrale vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v}\mathrm{d}v$. C'est une autre preuve de l'intégrale de Dirichlet.

Solution 9.38. Soit $x \geqslant 0$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ définie continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\int_x^X \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_x^X}_{\xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{1-\cos(x)}{x}} + \int_x^X \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t. \tag{9.269}$$

L'intégrale est absolument convergente, donc $f(x)$ est définie et on a

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t. \tag{9.270}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$. Soit $X > 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^X f(x)\mathrm{d}x &= [xf(x)]_0^X - \int_0^X f'(x)x\mathrm{d}x, && (9.271)\\
&= Xf(X) + \int_0^X \sin(x)\mathrm{d}x, && (9.272)\\
&= Xf(X) + (1 - \cos(X)), && (9.273)\\
&= X \int_X^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t, && (9.274)\\
&= 1 - X \int_X^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t. && (9.275)
\end{aligned}$$

Par intégrations par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_X^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{t^2}\sin(t)\right]_X^{+\infty} + \int_X^{+\infty} \frac{2}{t^2}\sin(t)\mathrm{d}t, && (9.276)\\
&= -\frac{\sin(X)}{X^2} + \int_X^{+\infty} \frac{2\sin(t)}{t^3}\mathrm{d}t, && (9.277)\\
&= \underset{X\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{X^2}\right), && (9.278)
\end{aligned}$$

car la deuxième intégrale est majorée par $\int_X^{+\infty} \frac{2}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{X^2}$. Finalement, on a

$$\int_0^X f(x)\mathrm{d}x = 1 + \underset{X\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{X}\right), \tag{9.279}$$

donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.} \tag{9.280}$$

■

Solution 9.39. Définissons f_h pour $h > 0$ par $f_h(t) = f(nh)$ si $t \in [nh, (n+1)h[$ ($n \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor$). Pour h fixé, $f(nh) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\phi(h)$ est bien définie. f_h est continue par morceaux et $f_h(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f_h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\phi(h) = \int_0^{+\infty} f_h(t)\mathrm{d}t. \tag{9.281}$$

Soit t fixé, on a $\lim_{h\to 0^+} h\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor = t$. Donc par continuité de f, $f_h(t) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(t)$.

On sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^2}$. Donc

$$|f_h(t)| \leqslant \frac{M}{\left(h\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor\right)^2} \leqslant \frac{M}{(t-h)^2}. \tag{9.282}$$

On s'impose $h < 1$. Dans ce cas, pour tout $t > 2$, $|f_h(t)| \leqslant \frac{M}{(t-1)^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ et indépendant de h. Pour tout $t \in [0, 2]$, $|f_h(t)| \leqslant \|f\|_\infty$ intégrable sur $[0, 2]$ et indépendant de h.

Soit

$$\begin{aligned} \varphi :\ \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \|f\|_\infty & \text{si } t \in [0,2], \\ \frac{M}{(t-1)^2} & \text{si } t > 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.283}$$

φ est continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendante de h. Donc, par convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \phi(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.} \tag{9.284}$$

■

Solution 9.40. f est impaire donc on se limite à $x > 0$. On pose $g(x,t)$ l'intégrande. $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} x$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{(x-1)t}}{2t}$, donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x < 1$. Donc le domaine de définition est $]-1, 1[$. Enfin, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \cosh(xt)\mathrm{e}^{-t} = \frac{\mathrm{e}^{(x-1)t} + \mathrm{e}^{-(x+1)t}}{2}$. Fixons $a \in [0, 1[$, soit $x \in [0, a]$. Si $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \sinh(xt) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{xt}}{2}$ et

$$0 \leqslant g(x,t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{(x-1)t}}{2t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{(a-1)t}}{2t}. \tag{9.285}$$

Par ailleurs, $\lim_{u\to 0} \frac{\sinh(u)}{u} = 1$, donc il existe $M \geqslant 0$ tel que si $|u| \leqslant a$, $\left|\frac{\sinh(u)}{u}\right| \leqslant M$. Si $t \in]0, 1]$, $xt \in]0, a]$, $0 \leqslant g(x,t) \leqslant M_a$. En définissant

$$\begin{aligned} \phi_0 :\ \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \begin{cases} M_a & \text{si } t \in]0,1], \\ \frac{\mathrm{e}^{(a-1)t}}{2t} & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.286}$$

ϕ_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $|g(x,t)| \leqslant \phi_0(t)$. Or sinh est croissante et $|g(x,t)| \leqslant \frac{\sinh(at)}{t}\mathrm{e}^{-t}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \cosh(at)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $a<1$. D'après le théorème de continuité dérivabilité, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ pour tout $a<1$, donc sur $[0,1[$.

Alors

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \cosh(xt)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \tag{9.287}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{(x-1)t} + \mathrm{e}^{-(x+1)t}\right)\mathrm{d}t, \tag{9.288}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1}\right). \tag{9.289}$$

Comme $f(0)=0$, pour $x \in [0,1[$, $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et si $x \in]-1,0]$, $f(x) = -f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. ■

Solution 9.41. On a $|f(x,t)| = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et est équivalent) $\frac{1}{\sqrt{t}}$ en 0. Donc F existe et est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}, \tag{9.290}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc F est $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{i}\sqrt{t}\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}x-1)}\mathrm{d}t, \tag{9.291}$$

$$= \left[\frac{\mathrm{i}\sqrt{t}\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}x-1)}}{\mathrm{i}x-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}x-1)}}{2\sqrt{t}(\mathrm{i}x-1)}\mathrm{d}t, \tag{9.292}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2(\mathrm{i}x-1)}F(x). \tag{9.293}$$

On a

$$\frac{\mathrm{i}}{2(\mathrm{i}x-1)} = \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{\mathrm{i}}{2(x^2+1)}, \tag{9.294}$$

donc

$$F(x) = A\exp\left(-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\arctan(x)\right). \tag{9.295}$$

Comme

$$F(0) = A = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}, \tag{9.296}$$

on a

$$\boxed{F(x) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\arctan(x)\right).} \tag{9.297}$$

■

Solution 9.42.

1. On a
$$\left|\widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{e}^{-\lambda|\lambda|}\right| \leqslant \left|\widehat{f}(\nu)\right|. \tag{9.298}$$
Donc g_x est bien définie. On pose
$$h(t,\nu) = f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}. \tag{9.299}$$
On a
$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\nu)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\nu, \tag{9.300}$$
et comme
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t,\nu)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}\mathrm{d}\nu \times \int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty, \tag{9.301}$$
d'après le théorème de Fubini,
$$\begin{aligned}
g_x(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}\mathrm{d}\nu\right)f(t)\mathrm{d}t, && (9.302)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}\mathrm{e}^{\lambda\nu}\mathrm{d}\nu + \int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}\mathrm{e}^{-\lambda\nu}\right)f(t)\mathrm{d}t, && (9.303)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\lambda-\mathrm{i}(t-x)} + \frac{1}{\lambda-\mathrm{i}(x-t)}\right)f(t)\mathrm{d}t, && (9.304)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{2\lambda f(t)}{\lambda^2+(t-x)^2}\mathrm{d}t. && (9.305)
\end{aligned}$$
On pose $t' = t - x$ et on a bien
$$\boxed{g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{2\lambda f(t+x)}{\lambda^2+t^2}\mathrm{d}t.} \tag{9.306}$$

2. On pose $u = \frac{t}{\lambda}$ pour $\lambda > 0$. Alors
$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\lambda u + x)}{1+u^2}\mathrm{d}u, \tag{9.307}$$
et pour u fixé, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{2f(\lambda u+x)}{1+u^2} = \frac{2f(x)}{1+u^2}$ par continuité de f. Comme
$$\left|\frac{2f(\lambda u+x)}{1+u^2}\right| \leqslant \frac{2\left\|f\right\|_\infty}{1+u^2}, \tag{9.308}$$
fonction de u intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendante de λ. Par le théorème de continuité, on a
$$\boxed{\lim_{\lambda\to 0} g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{2f(x)}{1+u^2}\mathrm{d}u = f(x).} \tag{9.309}$$

3. Pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et on a

$$\left|\widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}\right| \leqslant \left|\widehat{f}(\nu)\right|, \tag{9.310}$$

fonction indépendante de λ intégrable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de continuité, g_x est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en 0. Ainsi,

$$\boxed{g_x(0) = f(x) = \lim_{\lambda \to 0} g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{d}\nu.} \tag{9.311}$$

■

Remarque 9.21. *En exemple, soit $a > 0$ et*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{e}^{-a|x|} \end{aligned} \tag{9.312}$$

f est continue, intégrable et bornée. On a

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\mathrm{d}t, \tag{9.313}$$

$$= \frac{2a}{a^2+\nu^2}. \tag{9.314}$$

$\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$2\pi\mathrm{e}^{-a|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{2a}{a^2+\nu^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{d}\nu. \tag{9.315}$$

Remarque 9.22. *Si $\widehat{f} = 0$, elle est intégrable et d'après la formule, on a $f = 0$.*

Solution 9.43.

1. $D_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt)$ est paire, 2π-périodique et $\mathcal{C}^\infty$. Sa moyenne est 1, et comme pour

$t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$, on a

$$D_n(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \tag{9.316}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \right), \tag{9.317}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)t}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(2n+1)t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)t}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}} \right), \tag{9.318}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \left(\frac{-2\mathrm{i} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{-2\mathrm{i} \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right), \tag{9.319}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{9.320}$$

2. On pose $u = \frac{2t}{2n+1}$.

3. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sir $]0, \pi]$. Pour tout $u > 0$,

$$\varphi(u) = \frac{\frac{u}{2} - \sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}\right)^3}{\left(\frac{u^2}{4}\right)} \xrightarrow[u\to 0]{} 0. \tag{9.321}$$

On pose $\varphi(0) = 0$. φ ainsi prolongée est continue sur $[0, 2\pi]$. On a

$$\varphi'(u) = -\frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{2}{u^2}, \tag{9.322}$$

$$= \frac{4\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) - u^2 \cos\left(\frac{u}{2}\right)}{2u^2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}, \tag{9.323}$$

$$\underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^4\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{u^4}{2}\right)} \xrightarrow[u\to 0]{} \frac{1}{12}. \tag{9.324}$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

4. On a

$$\int_0^\pi \varphi(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u = \left[-\frac{2}{n+1} \cos\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \varphi(u) \right]_0^\pi + \frac{2}{n+1} \int_0^\pi \varphi'(u) \cos\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u, \tag{9.325}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \tag{9.326}$$

car φ et φ' sont bornées. De plus,

$$\int_0^\pi \varphi(u)\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^\pi D_n(u)\mathrm{d}u - \int_0^\pi \frac{2\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{u}\mathrm{d}u, \tag{9.327}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\mathrm{d}u - 2u_n, \tag{9.328}$$

$$= \pi - 2u_n. \tag{9.329}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.} \tag{9.330}$$

■

Remarque 9.23. *Soit $f\colon I\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intégrable sur un intervalle I. On a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_I f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t = 0$.*

En effet, soit $\varepsilon>0$, il existe $[a,b]\subset I$ tel que $\int_{I\setminus[a,b]}|f|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$\left|\int_I f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{I\setminus[a,b]}|f| + \left|\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right|, \tag{9.331}$$

et le deuxième terme tend vers 0 quand $\lambda\to\pm\infty$, donc inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ pour λ suffisamment grand. En particulier, si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\widehat{f}(\lambda)=0$.

Solution 9.44.

1. g est de classe $\mathcal{C}^1$. On a $g'(t)=f(t)\mathrm{e}^{-at}$, $g(0)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = Lf(a)$. Donc g est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Soit $X>0$, on a

$$\int_0^X f(t)\mathrm{e}^{-(a+x)t}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-xt}g(t)\right]_0^X + x\int_0^X g(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t. \tag{9.332}$$

Le terme entre crochet tend vers 0 quand $X\to+\infty$ car $x>0$ et $|g(t)\mathrm{e}^{-xt}|\leqslant\|g\|_\infty|\mathrm{e}^{-xt}| = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc $t\mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc $Lf(a+x)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(a+x)}\mathrm{d}t$ existe et vaut $x\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

2. On pose $u=\mathrm{e}^{-t}$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0,+\infty[\to]0,1]$. On a alors

$$Lf(a+x) = x\int_0^1 g\left(-\ln(u)\right)u^{x-1}\mathrm{d}u. \tag{9.333}$$

Or $\lim_{u\to 0^+} g\left(-\ln(u)\right) = Lf(a)$. On définit

$$\begin{array}{rccl} h: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & u & \mapsto & \begin{cases} g\left(-\ln(u)\right) & \text{si } u \neq 0, \\ LF(a) & \text{si } u = 0. \end{cases} \end{array} \tag{9.334}$$

h est continue et $Lf(a+x) = x\int_0^1 h(u)u^{x-1}\mathrm{d}u$. Si pour tout $x > 0$, $Lf(a+x) = 0$, on a pour tout > 0, $\int_0^1 h(u)u^{x-1}\mathrm{d}u = 0$. Par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\int_0^1 \ln(u)P(u) = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, on prend $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\overline{h}$. Donc $\int_0^1 |h|^2 = 0$ donc $h = 0$. Ainsi, $g = 0$ et $g'(t) = 0 = f(t)\mathrm{e}^{-at}$ donc $f = 0$.

■

Remarque 9.24. *Il suffit qu'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Lf(a_0 + n) = 0$.*

Solution 9.45. Pour $x > 0$, $\sum g_n(x)$ est alternée car $|g_n(x)| = \mathrm{e}^{-a_n x}$ est décroissante car $a_n \leqslant a_{n+1}$ et tend vers 0 car $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Donc g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-a_N x}. \tag{9.335}$$

Soit $\alpha > 0$. Alors pout tout $x \geqslant \alpha$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-a_N x} \leqslant \mathrm{e}^{-a_N \alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0, \tag{9.336}$$

car $\alpha > 0$ et $\lim_{N\to+\infty} a_N = +\infty$.

Ainsi, $\sum g_n$ converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$, donc g est continue sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, toujours d'après le critère spécial des séries alternées, pour tout $x > 0$,

$$|g(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-a_0 x}, \tag{9.337}$$

fonction de x intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue et est $\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On forme $u_n = \int_0^{+\infty} |g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a_n x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a_n}$. On n'est pas sûr que $\sum \frac{1}{a_n}$ converge. Mais on a

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x} = S_N(x) \leqslant \mathrm{e}^{-a_0 x}, \tag{9.338}$$

fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x. \tag{9.339}$$

■

10 Séries entières

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires

Table des figures