Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Intégration

Solution 1.1. S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $S' = f > 0$. Donc S définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a,b]$ dans $[S(a)=0, S(b)]$. COmme pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\frac{S(b)}{n} \in [0, S(b)]$, il existe un unique $x_k \in [a,b]$ tel que $S(x_k) = k\frac{S(b)}{n}$ qui est simplement donné par

$$\boxed{x_k = S^{-1}\left(k\frac{S(b)}{n}\right).} \tag{1.1}$$

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{S(b)}\left(\frac{S(b)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(S^{-1}\left(\frac{k}{n}S(b)\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{S(b)}\int_0^{S(b)} f\left(S^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t = I. \tag{1.2}$$

On effectue le changement de variable $u = S^{-1}(t)$ pour obtenir

$$\boxed{I = \frac{1}{S(b)}\int_0^b f(u)^2 \mathrm{d}u.} \tag{1.3}$$

■

Remarque 1.1. *On peut se demander si cela reste vrai si $f \geqslant 0$. On définit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,S(b)] & \to & [a,b] \\ & y & \mapsto & \min\left(\{x \in [a,b] | y = S(x)\}\right) \end{array} \tag{1.4}$$

On a $x_k = \varphi\left(k\frac{S(b)}{n}\right)$, $f\circ\varphi$ continue par morceaux sur $[0,S(b)]$ et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\varphi\left(k\frac{S(b)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{S(b)}\int_0^{S(b)} (f\circ\varphi)(t)\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

Solution 1.2.

1. Pour tout $x > 0$, on a $g(x) \leqslant \|f\|_\infty$. Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $|f|$, il existe $[a,b] \subset [0,1]$ avec $a < b$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $0 < |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} < |f(t)|$.

   D'où

   $$\left(\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant \left(\int_a^b |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant (b-a)^{\frac{1}{x}}\left(|f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

   Alors il existe $X_1 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant X_1$, $|f(t0)| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant g(x)$. D'où le résultat.

2. On pose $h_x(t) = \exp(x\ln(|f(t)|))$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lim\limits_{x\to 0} h_x(t) = 1$ et pour tout $x > 0$, pour tout $t \in [0,1]$ $h_x(t) \leqslant \max\left(1, \|f\|_\infty\right)$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\lim_{x\to 0} \int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t = 1. \tag{1.7}$$

Malheureusement, ce n'est pas suffisant.

Posons donc $k_x(t) = \frac{|f(t)|^x - 1}{x}$. Pour t fixé, on a $\lim\limits_{x\to 0} k_x(t) = \ln\left(|f(t)|\right)$. De plus, pour tout $0 < x \leqslant 1$, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\left||f(t)|^x - 1\right| = \left|\mathrm{e}^{x\ln(|f(t)|)} - \mathrm{e}^0\right| \begin{cases} \leqslant x\ln(|f(t)|), & \text{si } |f(t)| \leqslant 1, \\ \hline \leqslant x\ln(|f(t)|)\mathrm{e}^{x\ln(|f(t)|)} & \\ \leqslant x\ln(|f(t)|)\mathrm{e}^{\ln(|f(t)|)}, & \text{si } |f(t)| > 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ainsi $k_x(t) \leqslant \max\left(\ln\left(\|f\|_\infty\right), \|f\|_\infty \ln\left(\|f\|_\infty\right)\right)$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{x\to 0} \int_0^1 \frac{f(t)^x - 1}{x} \mathrm{d}t = \int_0^1 \ln\left(|f(t)|\right) \mathrm{d}t. \tag{1.9}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(1 + x\int_0^1 k_x(t)\mathrm{d}t\right)\right), & (1.10) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\left(x\int_0^1 \ln\left(|f(t)|\right) + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\right), & (1.11) \\ &= \exp\left(\int_0^1 \ln\left(|f(t)|\right) \mathrm{d}t + \underset{x\to 0}{o}(1)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp\left(\int_0^1 \ln\left(|f(t)|\right) \mathrm{d}t\right). & (1.12) \end{aligned}$$

■

Solution 1.3. On fixe $y \in [0, f(a)]$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,a] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x f + \int_0^y g - xy \end{array} \tag{1.13}$$

φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = f(x) - y$ donc φ décroît de 0 à $g(y)$ puis croît jusqu'en $x = a$. Son minimum vaut alors $\varphi(g(y)) = \int_0^x + \int_0^{f(x)} g - xf(x)$ avec $x = g(y)$.

Si f est $\mathcal{C}^1$, alors g l'est aussi car f définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0,a]$ dans $[0,f(a)]$. On effectue le changement de variable $u=f(t)$ et on obtient $\varphi(g(y)) = \int_0^x (tf'(t)+f(t))\mathrm{d}t - xf(x) = [tf(t)]_0^x - xf(x) = 0$. De même si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux (utiliser la relation de Chasles).

Plus généralement, on a le lemme

Lemme 1.1. *Soit pour $n \geqslant 1$, $f_n : [0,a] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux continue telle que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f_n\left(\frac{k}{n}a\right) = f\left(\frac{k}{n}a\right)$. Alors $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$ et $(f_n^{-1})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,f(a)]$.*

Preuve du lemme. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, pour tout $x \in \left[\frac{ka}{n}, \frac{k+1}{n}a\right]$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}a\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \left|f(x) - f\left(\frac{ka}{n}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{k}{n}a\right) - f_n(x)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{1.14}$$

On fait de même pour $(f_n^{-1})_{n\geqslant 1}$. ■

f_n et f_n^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux continues et $g_n = f_n^{-1}$. On a $\int_0^x f_n + \int_0^{f_n(x)} f_n = xf_n(x)$. Quand $n \to +\infty$, par convergence uniforme, on a $\int_0^{f_n(x)} g_n = \int_0^{f(x)} g_n + \int_{f_n(x)}^{f(x)} g_n$ et le dernier terme est uniformément borné par $\|f^{-1}\|_\infty |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, le cas d'égalité est quand

$$\boxed{\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x).} \tag{1.15}$$

■

Solution 1.4. On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{x-1}{2\sqrt{2(1-x)}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$. On effectue le changement de variable $x = \cos(t)$ d'où $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. On a alors

$$I = -\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\ln(\cos(t))}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos(t))}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t. \tag{1.16}$$

Or $\tan'\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ donc par intégrations par parties,

$$I = \left[\ln(\cos(t))\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

Le premier terme vaut $\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$. Pour le deuxième terme, on utilise la formule d'addition $\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\tan\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{1-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{1+u}, \tag{1.18}$$

en ayant effectué le changement de variables $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, d'où $\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Il ne reste plus qu'à faire une décomposition en éléments simples. ■

Solution 1.5.

1. I_n est bien définie. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x, \tag{1.19}$$

$$= [\tan^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x, \tag{1.20}$$

$$= 1 - n(I_n + I_{n+2}). \tag{1.21}$$

   Donc $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. On a $I_0 = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - I_{2p-2} = \cdots = (-1)^p\left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p-1}\right). \tag{1.22}$$

   On a $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln(2)$. Ainsi,

$$I_{2p+1} = (-1)^p\left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p}\right). \tag{1.23}$$

2. On pose $f_n(x) = \tan^n(x)$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Si $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 partout sauf en $\frac{\pi}{4}$ où elle vaut 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $|f_n(x)| \leqslant 1$ intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.} \tag{1.24}$$

3. D'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \\ \ln(2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}. \end{aligned}} \tag{1.25}$$

$\blacksquare$

Remarque 1.2. *On peut donner un équivalent de* I_n*. Comme pour tout* $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$*, on a* $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$*, on a* $I_{n+2} \leqslant I_n$*. Ainsi,*

$$2I_{n+2} \leqslant I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n, \tag{1.26}$$

et donc

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}, \tag{1.27}$$

d'où

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.} \tag{1.28}$$

Solution 1.6.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$, on a

$$\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geqslant \left(\int_a^b 1\right)^2 = (b-a)^2. \tag{1.29}$$

   $f\colon x \mapsto 1$ pour tout $x \in [a,b]$ donne l'égalité, et d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a égalité si et seulement si $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont proportionnelles, donc si et seulement si f est constante.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $c < a$. Soit

$$\begin{array}{rccl} f_{\alpha,c}: & [a,b] & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & t & \mapsto & (t-c)^\alpha \end{array} \tag{1.30}$$

   On a

$$\begin{aligned} \phi(f_{\alpha,c}) &= \frac{1}{\alpha^2-1}\left[(b-c)^{\alpha+1}-(a-c)^{\alpha+1}\right]\left[(a-c)^{-\alpha+1}-(b-c)^{-\alpha+1}\right], && (1.31)\\ &\underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^2}\left[(b-c)^{\alpha+1}\times\frac{1}{(a-c)^{\alpha-1}}\right], && (1.32)\\ &\underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{(b-a)(a-c)}{\alpha^2}\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} +\infty, && (1.33) \end{aligned}$$

   car $b-c > a-c$.

3. Soit $f, g \in E^2$ et $\lambda \in [0,1]$. $\lambda f + (1-\alpha)g$ est continue et strictement positive. E est convexe dans $\left(\mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{R}_+^*\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ donc connexe par arcs.

Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions convergent uniformément vers f. Par convergence uniforme, on a $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$. De plus, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{f_n(x) \times f(x)} \leqslant \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\min_{y\in[a,b]} f_n(y) \times f(y)}. \tag{1.34}$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\min f}{2}$ et pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(x) \geqslant \frac{\min f}{2}$. Alors

$$\left\|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right\|_\infty \leqslant \frac{2\,\|f_n - f\|_\infty}{(\min f)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.35}$$

Ainsi, $\int_a^b \frac{1}{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \frac{1}{f}$ et $\phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(f)$. ϕ est donc continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc

$$\boxed{\phi(E) = [(b-a)^2, +\infty[.} \tag{1.36}$$

■

Solution 1.7. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2} \end{array} \tag{1.37}$$

f est continue. On a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\int_0^1 f$ converge. On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} f$ converge.

On pose $x = u^2$ et on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2\ln(u^2)}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u, \tag{1.38}$$

$$= 4\int_0^{+\infty} \frac{u^2\ln(u)}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u, \tag{1.39}$$

$$= 2\left(\left[-\frac{1}{(1+u^2)} \times u\ln(u)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\left(\ln(u) + 0\right)\mathrm{d}u\right), \tag{1.40}$$

$$= 2\left(\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\right). \tag{1.41}$$

Noter que l'intégration par parties faite en 1.40 est correcte car tout converge en 0 et $+\infty$ (passer à la limite $\alpha, \beta \to 0, +\infty$ pour être plus rigoureux).

La première intégrale est nulle. En effet, on pose $x = \frac{1}{u}$ d'où $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u = -\int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x. \tag{1.42}$$

La deuxième intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. Finalement, on a

$$\boxed{I = \pi.} \tag{1.43}$$

■

Solution 1.8. On note f la fonction intégrande. f est continue négative. On a $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \left|\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\right| = \underset{t\to 0}{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)$ donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f$ converge. On a $|f(t)| \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 f$ converge.

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}. \tag{1.44}$$

Comme $t(1-t) = -(t^2-t) = -\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(1-(2t-1)^2)$, on pose $2t-1 = \cos\theta$. On a alors $t = \frac{\cos\theta+1}{2}$ et $\mathrm{d}\theta = \frac{-2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. Ainsi,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\ln\left(\frac{\cos\theta+1}{2}\right)}{\frac{1-\cos\theta}{2}}\mathrm{d}\theta. \tag{1.45}$$

On a $\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. En posant $u = \frac{\theta}{2}$, on a donc

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos u)}{\sin^2 u}\mathrm{d}u. \tag{1.46}$$

En fixant $0 < \varepsilon < \alpha < 1$ et en posant $I_{\varepsilon,\alpha} = \int_\varepsilon^\alpha f$, on a en faisant une intégration par parties :

$$I_{\varepsilon,\alpha} = 4\left([-\cot u \times \ln(\cos u)]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha 1\mathrm{d}u\right). \tag{1.47}$$

Le deuxième terme tend vers $\frac{\pi}{2}$,. Pour le premier, si $\alpha = \frac{\pi}{2} - h$, on a

$$-\cot\alpha\ln\cos\alpha = -\tan h\ln\sin h = -\tan h\left[\ln h + \underset{h\to 0}{o}(1)\right] \underset{h\to 0}{\sim} -h\ln(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \tag{1.48}$$

De même, on a

$$-\cot\varepsilon\ln\cos\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\frac{1}{\varepsilon}\times\frac{-\varepsilon^2}{2} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{1.49}$$

Ainsi,

$$\boxed{I = -2\pi.} \tag{1.50}$$

■

Solution 1.9. On note f la fonction intégrande. Si $h = \frac{\pi}{4} - t$, on a $\cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) = \sin(2h) \underset{h \to 0}{\sim} 2h$. Ainsi,

$$f(t) \underset{t \to \frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}}, \tag{1.51}$$

donc l'intégrale existe (critère de Riemann).

En posant $u = \sin(t)$, puis $v = \sqrt{2}u$, puis $\theta = \arcsin(v)$, on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 - \sin^2(t)\right)\cos(t)}{\sqrt{1 - 2\sin^2(t)}} \mathrm{d}t, && (1.52)\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - u^2}{\sqrt{1 - 2u^2}} \mathrm{d}u, && (1.53)\\
&= \int_0^1 \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}}, && (1.54)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \frac{\sin^2\theta}{2}}{\sqrt{2}} \mathrm{d}\theta, && (1.55)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2\theta)\mathrm{d}\theta\right), && (1.56)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right), && (1.57)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3\pi}{8}. && (1.58)
\end{aligned}$$

■

Solution 1.10. Si $f = c \in \mathbb{C}$ est constante, on a

$$\gamma = \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t = c\int_a^b g(\lambda t)\mathrm{d}t. \tag{1.59}$$

On pose $u = \lambda t$ et on pose $k(\lambda) = \left\lfloor \frac{\lambda b - \lambda a}{T} \right\rfloor \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{\lambda(b-a)}{T}$. Alors

$$\gamma = \frac{c}{\lambda} k(\lambda) \int_0^T g + \frac{c}{\lambda} \int_{\lambda a + k(\lambda)T}^{\lambda b} g. \tag{1.60}$$

Le deuxième terme est majoré par $\frac{|c|}{\lambda} T \|g\|_\infty \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$. Finalement,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \gamma = \frac{c(b-a)}{T} \int_0^T g = \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f. \tag{1.61}$$

C'est la même chose pour les fonctions en escalier (par combinaison linéaire).

Pour une fonction quelconque f continue par morceaux, soit $\varepsilon > 0$. Il existe f_ε une fonction en escalier telle que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On forme

$$\Gamma = \left| \int_a^b (f(t)g(\lambda t))\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f \right|. \tag{1.62}$$

On a

$$\Gamma = \left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t + \int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t))g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon - \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b (f - f_\varepsilon) \right|, \tag{1.63}$$

$$\leqslant \left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f_\varepsilon \right| + \left| \int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t))g(\lambda t)\mathrm{d}t \right| + \left| \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b (f - f_\varepsilon) \right|. \tag{1.64}$$

Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$\left| \int_a^b f_\varepsilon(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T \int_a^b f_\varepsilon \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.65}$$

Ainsi, $\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \times 3 = \varepsilon$. Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f.} \tag{1.66}$$

Pour le cas particulier, on a $g(t) = \frac{1}{3+2\cos(t)}$. g est 2π-périodique, paire et strictement positive. On pose $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on a $\cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$. Par parité, on a $\int_0^{2\pi} g = 2\int_0^\pi g$, et

$$\int_0^\pi g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}x}{(1+x^2)\left(3 + 2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)}, \tag{1.67}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}, \tag{1.68}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}, \tag{1.69}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{2}, \tag{1.70}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \tag{1.71}$$

Donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)}{3+2\cos(nt)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}f.} \tag{1.72}$$

■

Remarque 1.3. *Pour calculer $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(t)}$, on peut écrire*
$$\frac{1}{3+2\cos(t)}=\frac{1}{3+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1}. \tag{1.73}$$
On décompose $F(X)=\frac{X}{X^2+3X+1}=\frac{\alpha}{X-\lambda}+\frac{\beta}{X-\mu}$ avec $\lambda=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\in]-1,0[$, $\mu=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\in]-\infty,-1[$, $\alpha=\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$, $\beta=\frac{\mu}{\mu-\lambda}$ avec $\lambda-\mu=\sqrt{5}$ et $\lambda=\frac{1}{\mu}$. Ainsi,
$$\frac{1}{3+2\cos(t)}=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\lambda}-\frac{\mu}{\sqrt{5}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mu}, \tag{1.74}$$
$$=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{1-\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mu}}, \tag{1.75}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \tag{1.76}$$
car $\left|\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right|<1$ et $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mu}\right|<1$. Comme on a $\left|\lambda^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|\leqslant|\lambda|^n$, on a convergence normale sur $[0,2\pi]$ car $|\lambda|<1$. Ainsi,
$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(nt)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \tag{1.77}$$

Solution 1.11.

1. Si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $A>0$, il existe $x_A\geqslant A$ tel que $|f(x_A)|>\varepsilon_0$. On sait qu'il existe $\alpha_0>0$ tel que pour tout $(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_+)^2$, si $|x_1-x_2|\leqslant\alpha_0$ alors $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $A\geqslant 0$, pour tout $x\in[x_A-\alpha_0,x_A+\alpha_0]$, on a $|f(x)-f(x_A)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Donc $f(x)$ est du signe de $f(x_A)$ et $|f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors on a
$$\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}f(x)\mathrm{d}x\right|=\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x>\varepsilon_0\alpha_0>0. \tag{1.78}$$
Or
$$\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_A-\alpha_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x-\int_{x_A+\alpha_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\xrightarrow[A\to+\infty]{}0. \tag{1.79}$$
C'est absurde, donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.} \tag{1.80}$$

2. Il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$, on ait $|f(x)| < 1$. Donc pour tout $x > x_0$, on a $|f^2(x_0)| \leqslant |f(x)|$ d'où $f^2 = \underset{+\infty}{O}(f)$ et f^2 est intégrable.

■

Remarque 1.4. *Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors il faut raisonner sur $\Im(f)$ et $\Re(f)$ et le résultat reste vrai.*

Solution 1.12.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Si $x \neq 0$, alors f_n converge simplement vers 0. On n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car on pourrait intervertir les limites en 0. Soit $a > 0$, soit $x \in [a, +\infty[$. f étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $|f_n(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

   Notons que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrable vaut 1. Enfin, pour tout $a > 0$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (reste d'intégrale convergente).

2. Notons $g_n(u) = \frac{g\left(\frac{u}{n}\right)}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}$ de telle sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\mathrm{d}u$.

   Soit u fixé dans $\mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} g_n(u) = \frac{g(0)}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}$ par continuité de g, et pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|g_n(u)| \leqslant \frac{\|g\|_\infty}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-u^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de converge dominée, on peut intervertir limite et intégrale, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t)f_n(t)\mathrm{d}t = g(0)} \tag{1.81}$$

■

Remarque 1.5. *Généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_n \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t)f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$ par théorème de convergence dominée.*

Remarque 1.6. *Si g est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que si $|t| \leqslant \alpha$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x-t) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors*

$$|(f_n \star g)(x) - g(x)| \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |g(x-t) - g(x)|\, f_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} 2\,\|g\|_\infty\, f_n(t)\mathrm{d}t. \tag{1.82}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $(f_n \star g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.7. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Soit pour $n \geqslant 1$,*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & t & \mapsto & nf(nt) \end{array} \tag{1.83}$$

Par changement de variable, on a $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\alpha^{+\infty} f = 0$ pour $\alpha > 0$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Solution 1.13. Si $x \geqslant 2$, on a $\frac{1}{x} \in]0,1]$ donc on peut définir

$$\begin{array}{rccc} f : & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \tag{1.84}$$

f est continue et $\arcsin(t) \underset{t\to 0}{=} t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ implique $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{6x^3}$, donc d'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Soit $A \geqslant 1$, on pose $I_A = \int_1^A \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \ln(A) - \int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$. On a

$$\int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = [x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)]_1^A + \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x, \tag{1.85}$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{A}\right) + \ln(A + \sqrt{A^2-1}) - \frac{\pi}{2}, \tag{1.86}$$

$$\underset{A\to+\infty}{=} 1 + \ln(A) + \ln(2) - \frac{\pi}{2} + o(1), \tag{1.87}$$

donc

$$\boxed{I = \lim_{A\to+\infty} = -1 + \frac{\pi}{2} - \ln(2).} \tag{1.88}$$

■

Solution 1.14. On a $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t) \underset{t\to 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc I existe, et en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on a $I = J$. On a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) \mathrm{d}t, \tag{1.89}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\mathrm{d}t, \tag{1.90}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2), \tag{1.91}$$

$$= I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2). \tag{1.92}$$

On a

$$I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(v))\mathrm{d}v = I. \tag{1.93}$$

Finalement, on a $I + J = I - \frac{\pi}{2}\ln(2)$ donc

$$\boxed{I = J = -\frac{\pi}{2}\ln(2).} \tag{1.94}$$

■

Solution 1.15. f_α est positive, continue et $f_\alpha \leqslant 1$. f_α est intégrable si et seulement si $\sum u_k$ converge avec

$$\begin{aligned}
u_k &= \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^\alpha \left|\sin(x)\right|}, && (1.95)\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (t + k\pi)^\alpha \left|\sin(t)\right|}, && (1.96)\\
&\leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2}{\pi}\left|t\right|}, && (1.97)\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2}{\pi}t}, && (1.98)\\
&= \frac{\pi}{\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha} \ln\left(1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha\right), && (1.99)\\
&\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ln(k)}{(k\pi)^\alpha} \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right). && (1.100)
\end{aligned}$$

Donc $\sum u_k$ converge et $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge. ■

Solution 1.16.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_a^b P(t)f(t)\mathrm{d}t = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $(P_n) \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telle que $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur $[a,b]$. $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b P_n f = 0$ donne par convergence uniforme $\int_a^b f^2 = 0$. Comme f^2 est continue positive, on a $f^2 = 0$ donc $f = 0$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on a par intégration par parties,

$$I_n = \frac{n}{1 - \mathrm{i}} I_{n-1}. \tag{1.101}$$

On a $I_0 = \frac{1}{1-\mathrm{i}}$. Par récurrence, on a

$$I_n = \frac{n!}{(1-\mathrm{i})^{n+1}} = \frac{n!}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\pi}{4}}. \tag{1.102}$$

3. Pour $n = 4k-1$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Im(I_{4k-1}) = 0 = \int_0^{+\infty} t^{4k-1} \sin(t) \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t. \tag{1.103}$$

On pose $u = t^4$, $t = u^{\frac{1}{4}}$ et $\mathrm{d}t = \frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} \mathrm{d}u$. Ainsi, en posant $f(u) = \sin\left(u^{\frac{1}{4}}\right) \mathrm{e}^{-u^{\frac{1}{4}}}$,

$$\boxed{0 = \int_0^{+\infty} f(u) u^{k-1} \mathrm{d}u.} \tag{1.104}$$

■

Solution 1.17.

1. g est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et en tout point de continuité de f, on a $g'(t) = \mathrm{e}^{-at} f(t)$. On a $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \mathcal{L}f(a)$.

   Soit $X \geqslant 0$, on a grâce à une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^X \mathrm{e}^{-bt} f(t) \mathrm{d}t &= \int_0^X \mathrm{e}^{-(b-a)t} \mathrm{e}^{-at} f(t) \mathrm{d}t, \qquad (1.105) \\ &= \left[g(t) \mathrm{e}^{-(b-a)t}\right]_0^X + (b-a) \int_0^X \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t) \mathrm{d}t. \qquad (1.106) \end{aligned}$$

   Le terme entre crochet s'annule car $g(0) = 0$, et $b > a$ donc $g(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \mathcal{L}f(a)$. g est continue, admet une limite finie en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\left|\mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t)\right| \leqslant \|g\|_\infty \mathrm{e}^{-(b-a)t}, \tag{1.107}$$

   qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)} g(t) \mathrm{d}t, \tag{1.108}$$

   converge absolument et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bt} f(t) \mathrm{d}t$ converge et

$$\boxed{\mathcal{L}f(b) = (b-a) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t) \mathrm{d}t.} \tag{1.109}$$

2. En raisonnant sur $f-h$, on se ramène à $\mathcal{L}f=0$. Pour tout $b>a$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t)\mathrm{d}t = 0$, donc pour tout $x>0$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} g(t)\mathrm{d}t = 0$. Si $g=0$, alors en dérivant, on a $f=0$. On pose $u=\mathrm{e}^{-t}$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $[0,+\infty[\to]0,1]$. On a donc, pour tout $x>0$, $\int_0^1 u^{x-1} g\left(-\ln(u)\right) \mathrm{d}u = 0$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n g\left(-\ln(u)\right)\mathrm{d}u = 0 = \int_0^1 u^n k(u)\mathrm{d}u$ avec $k\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $k(0)=\mathcal{L}f(a)$ et $k(x)=g\left(-\ln(x)\right)$ si $x\in]0,1]$. k est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de Weierstrass, $k=0$ donc $g=0$ puis $f=0$.

■

Solution 1.18.

1. Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} f(t)\right| = |f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $f(t) \underset{|t|\to+\infty}{\sim} 0$. $\widehat{f}$ est définie et $\widehat{f}(x) = \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t)\mathrm{d}t$.

   Posons
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t) \end{array} \tag{1.110}$$
   Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x\mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\frac{\partial^k g}{\partial x^k} = (\mathrm{i}t)^k g(x,t)$. On a
$$\left|\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial x^k}\right| = |t|^k \left|f(t)\right|, \tag{1.111}$$
   majoration indépendante de x et intégrable sur $[-A,A]$. Donc $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\widehat{f}^{(k)}(x) = \int_{-A}^{A} (\mathrm{i}t)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t)\mathrm{d}t$.

2. Soit $B>0$ tel que si $x>B$, $\widehat{f}(x)=0$. Soit $x_0=B+1$, alors $\widehat{f}=0$ sur $]x_0-1,+\infty[$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\widehat{f}^{(k)}(x_0) = 0 = \int_{-A}^{A} t^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_0} f(t)\mathrm{d}t$. D'après le théorème de Weierstrass, on a $f(t)=0$ pour tout $t\in[-A,A]$.

■

Solution 1.19. Si f est affine avec $f(x)=\alpha x+\beta$. On a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \alpha\frac{(b^2-a^2)}{2} + \beta(b-a)$ et $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left(\alpha\frac{(a+b)}{2}+\beta\right)$ d'où $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Notons que l'inégalité de l'énoncé équivaut à pour tout $x\in\mathring{I}$, pour tout $h>0$, on a $a=x-h$ et $b=x+h\in I^2$, $2hf(x) \leqslant \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Si f est convexe, soit $a < b \in I^2$. Soit φ affine sur $[a,b]$ telle que $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. On a

$$\varphi' = \lambda = \frac{1}{2}\left(f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{1.112}$$

par convexité et en notant $\varphi(t) = \lambda t + \mu$. En notant φ_1 la demi-tangente à f en $\frac{a+b}{2}$, on a pour tout $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$,

$$\varphi(t) \leqslant \varphi_1(t) \leqslant f(t). \tag{1.113}$$

φ_1 est affine sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\varphi_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\varphi_1'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right)$. De la même façon, pour tout $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, on a

$$\varphi(t) \leqslant \varphi_2(t) \leqslant f(t), \tag{1.114}$$

avec φ_2 affine sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, $\varphi_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\varphi_2'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

On a donc $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f$.

Réciproquement, si pour tout $a < b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, soient $x < y \in I^2$ fixés. On pose $g = f - \varphi$ avec $\varphi(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$. g vérifie l'inégalité de l'énoncé car pour φ on a égalité (car affine). On veut montrer que $g \leqslant 0$ sur $[x,y]$. On a $g(x) = g(y) = 0$. Soit $g(x_0) = \max\limits_{t\in[x,y]} g(t)$. Si $g(x_0) > 0$, on a $x_0 \in]x,y[$ car $g(x) = g(y) = 0$. Soit $h > 0$ tel que $x_0 - h$ et $x_0 + h \in [x,y]$. On applique l'inégalité de l'énoncé à g :

$$2hg(x_0) \leqslant \int_{x_0-h}^{x_0+h} g(t)\mathrm{d}t = 2g(x_0), \tag{1.115}$$

donc

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} (g(x_0) - g(t))\mathrm{d}t = 0, \tag{1.116}$$

et l'intégrande est positive et continue. Donc pour tout $t \in [x_0 - h, x_0 + h]$, on a $g(t) = g(x_0)$. On pose $h = \min(y - x_0, x - x_0)$. On obtient $g(x) = 0 = g(x_0) > 0$ (ou $g(y) = g(x_0)$) ce qui est absurde. Donc $g \leqslant 0$ sur $[x,y]$ et f est convexe. ■

Remarque 1.8. *Notons que si pour tout $(h,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathring{I}$ tels que $(x-h, x+h) \in I^2$, $2hf(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$, alors pour $x \in \mathring{I}$ et h fixé, $x \mapsto \int_{x-h}^{x+h} f$ est $\mathcal{C}^1$ donc f l'est. Par récurrence, f est $\mathcal{C}^\infty$, et en dérivant deux fois par rapport à h (pour $x \in \mathring{I}$ fixé), on a $0 = f'(x+h) - f'(x-h)$ donc f est affine.*

Solution 1.20.

1. Soit $f_n\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(t)=0$ si $t>n$ et $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ si $t\leqslant n$. f_n est continue par morceaux, positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car équivalente à 0 en $+\infty$ et à t^{x-1} en 0. Soit $t\in]0,+\infty[$ fixé, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_0$, $n>t$ et pour tout $n\geqslant N_0$,
$$f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}, \tag{1.117}$$
$$=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1}, \tag{1.118}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{e}^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}t^{x-1}, \tag{1.119}$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}. \tag{1.120}$$
On a donc convergence simple vers $f(t)=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$, fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\geqslant 1$ et $t\in[0,n[$, on a
$$0\leqslant f_n(t)\leqslant f(t), \tag{1.121}$$
car $\ln(1+x)\leqslant x$ pour tout $x>-1$. D'après le théorème de convergence dominée, on a bien
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t.} \tag{1.122}$$

2. On pose $u=\frac{t}{n}$ et on a
$$I_n(x)=\int_0^1(1-u)^n(nu)^{x-1}n\mathrm{d}u, \tag{1.123}$$
$$=n^x\int_0^1(1-u)^nu^{x-1}\mathrm{d}u, \tag{1.124}$$
$$=n^x\left(\left[(1-u)^n\frac{u^x}{x}\right]_0^1+\int_0^1 n(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\mathrm{d}u\right). \tag{1.125}$$
Le terme entre crochets est nul car $u\geqslant 1$ et $x>0$.

Si on pose $B_n(x)=\int_0^1(1-u)^nu^{x-1}\mathrm{d}u$, on a
$$B_n(x)=\frac{n}{x}B_{n-1}(x+1)=\cdots=\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}B_0(x+n)=\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{1.126}$$
On a donc
$$\boxed{\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n).}} \tag{1.127}$$

3. Par définition, on a $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$. On a

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{1\times 2\times\cdots\times n}\mathrm{e}^{-x\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} x\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]\mathrm{e}^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+o(1)\right)}\mathrm{e}^{\gamma x}, \tag{1.128}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}} \times \underbrace{\mathrm{e}^{o(1)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}. \tag{1.129}$$

Donc on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}. \tag{1.130}$$

4. On remarque que $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = (\ln\Gamma)'(x)$. On a

$$\ln\Gamma(x) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)}_{f_k(x)\geqslant 0}. \tag{1.131}$$

On a convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $k > 1$, f_k est $\mathcal{C}^1$, et pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_k'(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geqslant 0$ car $x > 0$.

Soit $A > 0$, pour tout $x \in]0, A]$, on a

$$0 < f_k(x) \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+A} = \frac{A}{k(k+A)} \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{1.132}$$

Donc pour tout $A > 0$, $\sum f_k(x)$ converge normalement sur $]0, A]$. $\ln\Gamma$ est donc $\mathcal{C}^1$ (en tant que série de fonction) et on a

$$\boxed{\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).} \tag{1.133}$$

■

Remarque 1.9. *En particulier, comme $\Gamma(1) = 1$, on a*

$$\Gamma'(1) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -\gamma, \tag{1.134}$$

car la série est téléscopique.

Remarque 1.10. *On a*

$$(\ln\Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}. \tag{1.135}$$

Par ailleurs,

$$0 \leqslant \Gamma'^2(x) = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} \ln^2(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \times \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma''(x)\Gamma(x), \tag{1.136}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ona égalité stricte car $\ln(t)$ *n'est pas constante. Ainsi,* $\ln\Gamma$ *est strictement convexe.*

Remarque 1.11. *On peut vérifier que* $\ln\Gamma$ *est l'unique fonction de* $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *telle que*

1. $\ln\Gamma$ *est convexe,*
2. $\forall x > 0,\ (\ln\Gamma)(x+1) = (\ln\Gamma)(x) + \ln(x),$
3. $(\ln\Gamma)(1) = 0.$

Solution 1.21.

1. On a
$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi d(f)} = \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\right). \tag{1.137}$$
Posons $g(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}g(x)$. On a $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - f'g}{g^2} = 0$ donc $\frac{g}{f} = \alpha \in \mathbb{C}$. En particulier, $g(0) = g(2\pi) = 1$ donc $d(f) \in \mathbb{Z}$.
2. f_0 est constante égale à $P(0)$ donc $d(f_0) = 0$ car c'est une fonction constante. Soit $r \geqslant 0$, on a
$$d(f_r) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_r'(t)}{f_r(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\mathrm{d}t. \tag{1.138}$$
On note $g(r,t)$ la fonction intégrande définit sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. $r \mapsto g(r,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et soit $z \in \mathbb{C}$, on a
$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n. \tag{1.139}$$
Alors
$$h(z) = \frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{a_1 z + \cdots + n a_n z^n}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} \tag{1.140}$$
est continue sur $\mathbb{C}$ et pour $z \neq 0$, on a
$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{\frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + n a_n}{\frac{a_0}{z^n} + a_n} \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} n. \tag{1.141}$$

Donc h est bornée sur $\mathbb{C}$, soit $M = \|h\|_\infty$. On a $|g(r,t)| \leqslant M \in L^1([0,2\pi])$. Donc $r \mapsto d(f_r)$ est continue et pour t fixé, on a $\lim_{r\to+\infty} g(r,t) = n$. Par convergence dominée, on a $\lim_{r\to+\infty} d(f_r) = n$. $r \mapsto d(f_r)$ est continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc constante et $d(f_0) = 0$, $\lim_{r\to+\infty} d(f_r) = n \neq 0$: c'est absurde. Donc P s'annule.

■

Remarque 1.12. *Le théorème de relèvement permet d'écrire $f(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ avec $\rho(t) = |f(t)|$ et $(\rho,\theta)\colon \mathbb{R} \to \left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ est $\mathcal{C}^1$. On a alors*

$$\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'}{\rho} + \mathrm{i}\left(\theta(2\pi) - \theta(0)\right). \tag{1.142}$$

Le premier terme vaus $[\ln(\rho)]_0^{2\pi} = 0$ car $\rho = |f|$ est 2π-périodique, et le deuxième terme vaut $2\mathrm{i}\pi\times$ le nombre de tours que décrit f autour de l'origine.

Table des figures