*Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Intégration

Exercice 1.1. *Soit f continue strictement positive de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et*

$$\begin{array}{rccl} S: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f \end{array} \tag{1}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $x_k \in [a,b]$ tel que $S(x_k) = k\frac{S(b)}{n}$. Évaluer ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 1.2. *Soit f continue non identiquement nulle et $g(x) = \left(\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}}$.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \|f\|_\infty$.*
2. *On suppose $|f| > 0$, calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.*

Exercice 1.3. *Soit $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ strictement croissante continue avec $f(0) = 0$. Soit $g\colon [0,f(a)] \to [0,a] = f^{-1}$ (continue strictement croissante). Soit $(x,y) \in [0,a] \times [0,f(a)]$. Montrer que*

$$xy \leqslant \int_0^x f + \int_0^y g. \tag{2}$$

Expliciter le cas d'égalité.

Exercice 1.4. *Existence et calcul de*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Exercice 1.5. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.*

1. *Exprimer I_n en fonction de n.*
2. *Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ (sous réserve d'existence) ?*
3. *En déduire $\frac{\pi}{4}$ et $\ln(2)$ comme somme de séries.*

Exercice 1.6. *Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)\right\}$. On définit*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \end{array} \tag{4}$$

1. *Montrer que l'on peut définir* $m = \min_{f\in E} \phi(f)$ *et évaluer* m. *Déterminer les* $f \in E$ *tels que* $\phi(f) = m$.

2. *Montrer que* f *n'est pas majorée sur* E.

3. *Déterminer* $\phi(E)$.

Exercice 1.7. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 1.8. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t(1-t)^3}}\mathrm{d}t$.

Exercice 1.9. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(t)}{\sqrt{\cos(2t)}}\mathrm{d}t$.

Exercice 1.10. *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *continue par morceaux et* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *continue par morceaux* T*-périodique* ($T > 0$). *Évaluer* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t$. *Cas particulier : pour* $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ *continue, évaluer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{3+2\cos(nt)}\mathrm{d}t$.

Exercice 1.11. *Soit* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *uniformément continue et intégrable.*

1. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. *Montrer que* $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 1.12. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2} \end{array} \tag{5}$$

1. *Étudier la convergence simple, la convergence uniforme et en moyenne.*

2. *Soit* g *continue et bornée sur* $\mathbb{R}$, *évaluer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 1.13. *Existence et calcul de* $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 1.14. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$. *On pourra poser* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$.

Exercice 1.15. *Pour* $\alpha > 1$, *on note*

$$\begin{array}{rccc} f_\alpha : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{1+x^\alpha|\sin(x)|} \end{array} \tag{6}$$

Montrer que f_α *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.16.

1. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f = 0$.*
2. *Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\mathrm{d}t$.*
3. *En déduire $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ non nulle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$ (avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \to t^n f(t)$ intégrables sur $\mathbb{R}_+$).*

Exercice 1.17 (Transformée de Laplace)**.** *Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{L}f(a)$ converge. On définit $g(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-au} f(u)\mathrm{d}u$.*

1. *Montrer que pour tout $b > a$, $\mathcal{L}f(b)$ converge et que*
$$\mathcal{L}f(b) = (b-a)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-a)t} g(t)\mathrm{d}t. \tag{7}$$
2. *Soit h vérifiant les mêmes conditions que f, montrer que si pour tout $b \geqslant a$, $\mathcal{L}f(b) = \mathcal{L}h(b)$, alors $f = h$ (injectivité de la transformée de Laplace).*

Exercice 1.18. *On dit que f est continue à support compact si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue et il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant A$, $f(x) = 0$.*

1. *Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t)\mathrm{d}t$, et que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *On suppose que $\widehat{f}$ est continue à support compact, montrer que $f = 0$.*

Exercice 1.19. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue, montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

Exercice 1.20. *Soit $x > 0$.*

1. *Montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t}_{I_n(x)} = \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{8}$$
2. *En déduire que*
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{9}$$
3. *Montrer que*
$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}, \tag{10}$$
où γ est la constante d'Euler.

4. Donner un développement en série de $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$.

Exercice 1.21 (Théorème de D'Alembert-Gauss par l'indice)**.**

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$. On définit l'indice de f par

$$d(f) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}. \tag{11}$$

Montrer que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi d(f)} = 1$ si et seulement si $d(f) \in \mathbb{Z}$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, de coefficient $a_n \neq 0$, on suppose que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Soit $t \geqslant 0$, on pose

$$\begin{array}{rccc} f_r : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^* \\ & t & \mapsto & P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \end{array} \tag{12}$$

3. Évaluer $d(f_0)$ et $\lim\limits_{r \to +\infty} d(f_r)$, montrer que $r \mapsto d(f_r)$ est continue. Conclure.

Exercice 1.22. *Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\left(f(0) + f(1)\right). \tag{13}$$

Donner un développement à l'ordre 2 de v_n quand $n \to +\infty$. On pourra montrer l'égalité de Taylor-Lagrange : si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, $a < b$, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \tag{14}$$

et et l'appliquer à $F(x) = \int_0^x f$.

Exercice 1.23. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Exprimer I_n sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$. Qu'en déduit-on sur $\frac{\pi}{4}$?

Exercice 1.24. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f : &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_{x^2}^x \frac{\mathrm{e}^t}{\arcsin(t)}\mathrm{d}t \end{array} \tag{16}$$

Analyser la continuité, la dérivabilité et le comportement au voisinage de 0.

Exercice 1.25. *Existence et calcul de*

$$I_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^n}, \tag{17}$$

pour $n \geqslant 1$.

Exercice 1.26. *Soit* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) f'\left(\frac{i}{n}\right). \tag{18}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 1.27. *Soit* $a, b > 0$. *Montrer que*

$$\lim_{x\to 1} \int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{19}$$

Exercice 1.28. *Soit* φ *convexe de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(donc continue). Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue avec* $a < b$.

1. *Montrer que*

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\mathrm{d}t. \tag{20}$$

2. *On suppose de plus* φ *strictement convexe, montrer que l'on a égalité dans ce qui précède si et seulement si* f *est constante.*

Exercice 1.29. *Trouver toutes les fonctions* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues telles que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = f(x)f(y). \tag{21}$$

Exercice 1.30. *Soit* f *continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *avec* $a < b$. *On pose*

$$I_n = \left(\int_a^b |f(t)|^n\right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_n. \tag{22}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 1.31. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $\rho \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. *Montrer que* $F(\rho,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| \mathrm{d}t$ *existe.*

2. *Montrer que* $F(\rho,\theta)$ *ne dépend pas de* θ.

3. *Calculer $F(\rho,\theta)$ en utilisant une somme de Riemann sur $[0,2\pi]$.*

Exercice 1.32. *On définit C_0 l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, i.e. si $f \in C_0$, alors il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $|t| \geqslant A$, alors $f(t) = 0$. On note C_1 l'ensemble des fonctions de C_0 de classe $\mathcal{C}^1$.*

1. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $\varphi \in C_0$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0$. Montrer que $f = 0$.*
2. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $\varphi \in C_1$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = 0$. Montrer que f est constante.*
3. *Soit $f \in C_0$ telle qu'il existe $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $\varphi \in C_1$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = \int_{\mathbb{R}} g\varphi$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = -g$.*

Exercice 1.33. *Existence et calcul de*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t, \tag{23}$$

et de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t}\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Exercice 1.34. *On note*

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \end{array} \tag{25}$$

Calculer

$$I = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t. \tag{26}$$

Exercice 1.35. *Existence de*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1} \end{array} \tag{27}$$

Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{28}$$

est définie et donner sa valeur.

Exercice 1.36.

1. *Soit $n \geqslant 1$, calculer*

$$I_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{29}$$

2. *DOnner un équivalent en* $+\infty$ *de*

$$J_n = \int_{-n}^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{30}$$

On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

3. *En déduire la formule de Stirling.*

Exercice 1.37.

1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t, \tag{31}$$

est définie.

2. *Montrer que* I *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.

3. *Calculer* $I(x)$.

Exercice 1.38. *Montrer que pour tout* $x \geqslant 0$, *on peut définir* $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. *Prouver l'existence et calculer* $I = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 1.39. *Soit* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *continue telle que* $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. *On pose, pour* $h > 0$,

$$\phi(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh). \tag{32}$$

Calculer $\lim\limits_{h\to 0^+} \phi(h)$.

Exercice 1.40. *Déterminer le domaine de définition et calculer*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{33}$$

Exercice 1.41. *Déterminer le domaine de définition et calculer*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}x-1)}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t. \tag{34}$$

Exercice 1.42 (Transformée de Fourier)**.** *Soit* f *continue, bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *intégrable sur* $\mathbb{R}$. *On peut définir*

$$\begin{array}{rccc} \widehat{f}\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & \nu & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\mathrm{d}t \end{array} \tag{35}$$

On suppose que $\widehat{f}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et on veut montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{d}\nu. \tag{36}$$

1. *On définit, pour tout $\lambda \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}\mathrm{e}^{-\lambda|\nu|}\mathrm{d}\nu. \tag{37}$$

   Montrer que pour $\lambda > 0$, on a

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2+t^2} f(x+t)\mathrm{d}t. \tag{38}$$

2. *Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to 0} g_x(\lambda) = f(x)$.*
3. *Conclure.*

Exercice 1.43 (Intégrale de Dirichlet)**.**

1. *On forme, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{array}{rccc} D_n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \end{array} \tag{39}$$

   Montrer que D_n est paire, $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique, et calcule $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{40}$$

2. *On pose $u_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. Montrer que*

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{u}\mathrm{d}u. \tag{41}$$

3. *Montrer que l'on peut prolonger $u \mapsto \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)}$ en une fonction $\mathcal{C}^1$, notée φ, sur $[0,1]$.*
4. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(u)\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u$. Conclure.*

Exercice 1.44 (Transformée de Laplace)**.** *Soit f continue de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^t f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ converge.*

1. *Montrer que pour tout $x > 0$, on peut définir $Lf(a+x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(a+x)t}\mathrm{d}t$ et que $Lf(a+x) = x\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$, où $g(t) = \int_0^t f(v)\mathrm{e}^{-av}\mathrm{d}v$.*
2. *On suppose que pour tout $x \geqslant 0$, $Lf(a+x) = 0$, montrer que $f = 0$. On pourra montrer que $Lf(a+x) = x\int_0^1 h(u)u^{x-1}\mathrm{d}u$, où $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue.*