*Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Intégration

Exercice 1.1. *Soit f continue strictement positive de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et*

$$\begin{array}{rccc} S: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f \end{array} \tag{1}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $x_k \in [a,b]$ tel que $S(x_k) = k\frac{S(b)}{n}$. Évaluer ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 1.2. *Soit f continue non identiquement nulle et $g(x) = \left(\int_0^1 |f(t)|^x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}}$.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \|f\|_\infty$.*
2. *On suppose $|f| > 0$, calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.*

Exercice 1.3. *Soit $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ strictement croissante continue avec $f(0) = 0$. Soit $g\colon [0, f(a)] \to [0,a] = f^{-1}$ (continue strictement croissante). Soit $(x,y) \in [0,a] \times [0,f(a)]$. Montrer que*

$$xy \leqslant \int_0^x f + \int_0^y g. \tag{2}$$

Expliciter le cas d'égalité.

Exercice 1.4. *Existence et calcul de*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Exercice 1.5. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.*

1. *Exprimer I_n en fonction de n.*
2. *Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ (sous réserve d'existence) ?*
3. *En déduire $\frac{\pi}{4}$ et $\ln(2)$ comme somme de séries.*

Exercice 1.6. *Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)\right\}$. On définit*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \end{array} \tag{4}$$

1. *Montrer que l'on peut définir* $m = \min_{f \in E} \phi(f)$ *et évaluer* m. *Déterminer les* $f \in E$ *tels que* $\phi(f) = m$.

2. *Montrer que* f *n'est pas majorée sur* E.

3. *Déterminer* $\phi(E)$.

Exercice 1.7. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 1.8. *Existence et calcul de* $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t(1-t)^3}} \mathrm{d}t$.

Exercice 1.9. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(t)}{\sqrt{\cos(2t)}} \mathrm{d}t$.

Exercice 1.10. *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *continue par morceaux et* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *continue par morceaux* T*-périodique* ($T > 0$). *Évaluer* $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)\mathrm{d}t$. *Cas particulier : pour* $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *continue, évaluer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{3+2\cos(nt)} \mathrm{d}t$.

Exercice 1.11. *Soit* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *uniformément continue et intégrable.*

1. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. *Montrer que* $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 1.12. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{n}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-n^2 x^2} \end{array} \tag{5}$$

1. *Étudier la convergence simple, la convergence uniforme et en moyenne.*

2. *Soit* g *continue et bornée sur* $\mathbb{R}$, *évaluer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 1.13. *Existence et calcul de* $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 1.14. *Existence et calcul de* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$. *On pourra poser* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$.