

*Solutions MP/MP^**

Intégration

Solution 1. S est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ avec $S' = f > 0$. Donc S définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[a, b]$ dans $[S(a) = 0, S(b)]$. Comme pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \frac{S(b)}{n} \in [0, S(b)]$, il existe un unique $x_k \in [a, b]$ tel que $S(x_k) = k \frac{S(b)}{n}$ qui est simplement donné par

$$\boxed{x_k = S^{-1} \left(k \frac{S(b)}{n} \right)}. \quad (1)$$

On a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{1}{S(b)} \left(\frac{S(b)}{n} \sum_{k=1}^n f \left(S^{-1} \left(k \frac{S(b)}{n} \right) \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S(b)} \int_0^{S(b)} f(S^{-1}(t)) dt = I. \quad (2)$$

On effectue le changement de variable $u = S^{-1}(t)$ pour obtenir

$$\boxed{I = \frac{1}{S(b)} \int_0^b f(u)^2 du.} \quad (3)$$

■

Remarque 1. On peut se demander si cela reste vrai si $f \geq 0$ (mais $f \neq 0$). On définit

$$\begin{aligned} \varphi : [0, S(b)] &\rightarrow [a, b] \\ y &\mapsto \min(\{x \in [a, b] | y = S(x)\}) \end{aligned} \quad (4)$$

On a $x_k = \varphi \left(k \frac{S(b)}{n} \right)$, $f \circ \varphi$ continue par morceaux sur $[0, S(b)]$ et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\varphi \left(k \frac{S(b)}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S(b)} \int_0^{S(b)} (f \circ \varphi)(t) dt. \quad (5)$$

Cela marche aussi si $\{t \in [a, b], f(t) = 0\}$ est discret car S reste strictement croissante. Cela marche aussi si $\int f > 0$ (poser $f_p = f + \frac{1}{p} > 0$ et passer à la limite).

Solution 2.

1. Pour tout $x > 0$, on a $g(x) \leq \|f\|_\infty$. Soit $t_0 \in [0, 1]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.

Par continuité de $|f|$, il existe $[a, b] \subset [0, 1]$ avec $a < b$ tel que pour tout $t \in [a, b]$, $0 < |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} < |f(t)|$.

D'où

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^x dt \right)^{\frac{1}{x}} \geq \left(\int_a^b |f(t)|^x dt \right)^{\frac{1}{x}} \geq (b-a)^{\frac{1}{x}} \left(|f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} |f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Alors il existe $X_1 > 0$ tel que pour tout $x \geq X_1$, $|f(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \varepsilon \leq g(x)$. D'où le résultat.

2. On pose $h_x(t) = \exp(x \ln(|f(t)|))$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} h_x(t) = 1$ et pour tout $x > 0$, pour tout $t \in [0, 1]$ $h_x(t) \leq \max(1, \|f\|_\infty)$ qui est intégrable sur $[0, 1]$. D'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 |f(t)|^x dt = 1. \quad (7)$$

Malheureusement, ce n'est pas suffisant.

Posons donc $k_x(t) = \frac{|f(t)|^x - 1}{x}$. Pour t fixé, on a $\lim_{x \rightarrow 0} k_x(t) = \ln(|f(t)|)$. De plus, pour tout $0 < x \leq 1$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$||f(t)|^x - 1| = |e^{x \ln(|f(t)|)} - e^0| \begin{cases} \leq x \ln(|f(t)|), & \text{si } |f(t)| \leq 1, \\ \leq x \ln(|f(t)|) e^{x \ln(|f(t)|)} \\ \leq x \ln(|f(t)|) e^{\ln(|f(t)|)}, & \text{si } |f(t)| > 1. \end{cases} \quad (8)$$

Ainsi $k_x(t) \leq \max(\ln(\|f\|_\infty), \|f\|_\infty \ln(\|f\|_\infty))$ qui est intégrable sur $[0, 1]$. D'après le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{f(t)^x - 1}{x} dt = \int_0^1 \ln(|f(t)|) dt. \quad (9)$$

Ainsi,

$$g(x) = \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(1 + x \int_0^1 k_x(t) dt \right) \right), \quad (10)$$

$$= \exp \left(\frac{1}{x} \left(x \int_0^1 \ln(|f(t)|) dt + o_{x \rightarrow 0}(x) \right) \right), \quad (11)$$

$$= \exp \left(\int_0^1 \ln(|f(t)|) dt + o_{x \rightarrow 0}(1) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp \left(\int_0^1 \ln(|f(t)|) dt \right). \quad (12)$$

■

Solution 3. On fixe $y \in [0, f(a)]$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi : [0, a] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f + \int_0^y g - xy \end{aligned} \quad (13)$$

φ est \mathcal{C}^1 et $\varphi'(x) = f(x) - y$ donc φ décroît de 0 à $g(y)$ puis croît jusqu'en $x = a$. Son minimum vaut alors $\varphi(g(y)) = \int_0^x + \int_0^{f(x)} g - xf(x)$ avec $x = g(y)$.

Si f est \mathcal{C}^1 , alors g l'est aussi car f définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$. On effectue le changement de variable $u = f(t)$ et on obtient $\varphi(g(y)) = \int_0^x (tf'(t) + f(t))dt - xf(x) = [tf(t)]_0^x - xf(x) = 0$. De même si f est \mathcal{C}^1 par morceaux (utiliser la relation de Chasles).

Plus généralement, on a le lemme

Lemme 1. Soit pour $n \geq 1$, $f_n : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ affine par morceaux continue telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_n(\frac{k}{n}a) = f(\frac{k}{n}a)$. Alors $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$ et $(f_n^{-1})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, f(a)]$.

Preuve du lemme. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f , il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, pour tout $x \in [\frac{ka}{n}, \frac{k+1}{n}a]$, on a $|f(x) - f(\frac{k}{n}a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \left| f(x) - f\left(\frac{ka}{n}\right) \right| + \left| f_n\left(\frac{k}{n}a\right) - f_n(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (14)$$

On fait de même pour $(f_n^{-1})_{n \geq 1}$. ■

f_n et f_n^{-1} sont \mathcal{C}^1 par morceaux continues et $g_n = f_n^{-1}$. On a $\int_0^x f_n + \int_0^{f_n(x)} f_n = xf_n(x)$. Quand $n \rightarrow +\infty$, par convergence uniforme, on a $\int_0^{f_n(x)} g_n = \int_0^{f(x)} g_n + \int_{f_n(x)}^{f(x)} g_n$ et le dernier terme est uniformément borné par $\|f^{-1}\|_\infty |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, le cas d'égalité est quand

$$\boxed{\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x).} \quad (15)$$

■

Solution 4. On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. f est continue sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{x-1}{2\sqrt{2(1-x)}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$. On effectue le changement de variable $x = \cos(t)$ d'où $dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. On a alors

$$I = - \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\ln(\cos(t))}{1 + \cos(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos(t))}{2 \cos^2(\frac{t}{2})} dt. \quad (16)$$

Or $\tan' \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)}$ donc par intégrations par parties,

$$I = \left[\ln(\cos(t)) \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \tan \left(\frac{t}{2} \right) dt. \quad (17)$$

Le premier terme vaut $\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$. Pour le deuxième terme, on utilise la formule d'addition $\tan \left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2} \right) = \frac{2 \tan \left(\frac{t}{2} \right)}{1 - \tan^2 \left(\frac{t}{2} \right)}$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t) \tan \left(\frac{t}{2} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \tan^2 \left(\frac{t}{2} \right)}{1 - \tan^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{1 - u^2} \frac{du}{1 + u}, \quad (18)$$

en ayant effectué le changement de variables $u = \tan \left(\frac{t}{2} \right)$, d'où $dt = \frac{2du}{1+u^2}$. Il ne reste plus qu'à faire une décomposition en éléments simples. ■

Solution 5.

1. I_n est bien définie. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) (1 + \tan^2(x)) dx, \quad (19)$$

$$= [\tan^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) (1 + \tan^2(x)) dx, \quad (20)$$

$$= 1 - n(I_n + I_{n+2}). \quad (21)$$

Donc $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. On a $I_0 = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - I_{2p-2} = \dots = (-1)^p \left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p-1} \right). \quad (22)$$

On a $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln(2)$. Ainsi,

$$I_{2p+1} = (-1)^p \left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p} \right). \quad (23)$$

2. On pose $f_n(x) = \tan^n(x)$. Si $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Si $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 0 partout sauf en $\frac{\pi}{4}$ où elle vaut 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. On a $|f_n(x)| \leq 1$ intégrable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.} \quad (24)$$

3. D'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \\ \ln(2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.\end{aligned}} \quad (25)$$

■

Remarque 2. On peut donner un équivalent de I_n . Comme pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $0 \leq \tan(x) \leq 1$, on a $I_{n+2} \leq I_n$. Ainsi,

$$2I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \leq 2I_n, \quad (26)$$

et donc

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}, \quad (27)$$

d'où

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}. \quad (28)$$

Solution 6.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à \sqrt{f} et $\frac{1}{\sqrt{f}}$, on a

$$\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geq \left(\int_a^b 1 \right)^2 = (b-a)^2. \quad (29)$$

$f: x \mapsto 1$ pour tout $x \in [a, b]$ donne l'égalité, et d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a égalité si et seulement si \sqrt{f} et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont proportionnelles, donc si et seulement si f est constante.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $c < a$. Soit

$$\begin{aligned} f_{\alpha,c} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t &\mapsto (t-c)^\alpha \end{aligned} \quad (30)$$

On a

$$\phi(f_{\alpha,c}) = \frac{1}{\alpha^2 - 1} [(b-c)^{\alpha+1} - (a-c)^{\alpha+1}] [(a-c)^{-\alpha+1} - (b-c)^{-\alpha+1}], \quad (31)$$

$$\underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^2} \left[(b-c)^{\alpha+1} \times \frac{1}{(a-c)^{\alpha-1}} \right], \quad (32)$$

$$\underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(b-a)(a-c)}{\alpha^2} \left(\frac{b-c}{a-c} \right)^\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty, \quad (33)$$

car $b-c > a-c$.

3. Soit $f, g \in E^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. $\lambda f + (1 - \alpha)g$ est continue et strictement positive. E est convexe dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*), \|\cdot\|_\infty)$ donc connexe par arcs.

Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions convergent uniformément vers f . Par convergence uniforme, on a $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$. De plus, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{f_n(x) \times f(x)} \leq \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\min_{y \in [a, b]} f_n(y) \times f(y)}. \quad (34)$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\min f}{2}$ et pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $n \geq n_0$, $f_n(x) \geq \frac{\min f}{2}$. Alors

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\|_\infty \leq \frac{2 \|f_n - f\|_\infty}{(\min f)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (35)$$

Ainsi, $\int_a^b \frac{1}{f_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{f}$ et $\phi(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(f)$. ϕ est donc continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc

$$\boxed{\phi(E) = [(b - a)^2, +\infty[.} \quad (36)$$

■

Solution 7. Soit

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{(1+x)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

f est continue. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $\int_0^1 f$ converge. On a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x) \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = O\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} f$ converge.

On pose $x = u^2$ et on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2 \ln(u^2)}{(1+u^2)^2} du, \quad (38)$$

$$= 4 \int_0^{+\infty} \frac{u^2 \ln(u)}{(1+u^2)^2} du, \quad (39)$$

$$= 2 \left(\left[-\frac{1}{(1+u^2)} \times u \ln(u) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} (\ln(u) + 0) du \right), \quad (40)$$

$$= 2 \left(\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du \right). \quad (41)$$

Noter que l'intégration par parties faite en 40 est correcte car tout converge en 0 et $+\infty$ (passer à la limite $\alpha, \beta \rightarrow 0, +\infty$ pour être plus rigoureux).

La première intégrale est nulle. En effet, on pose $x = \frac{1}{u}$ d'où $dx = -\frac{du}{u^2}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = - \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}} \frac{dx}{x^2} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx. \quad (42)$$

La deuxième intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. Finalement, on a

$$\boxed{I = \pi.} \quad (43)$$

■

Solution 8. On note f la fonction intégrande. f est continue négative. On a $|f(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left| \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \right| = O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)$ donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f$ converge. On a $|f(t)| \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 f$ converge.

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}. \quad (44)$$

Comme $t(1-t) = -(t^2 - t) = -\left((t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(1 - (2t - 1)^2)$, on pose $2t - 1 = \cos \theta$. On a alors $t = \frac{\cos \theta + 1}{2}$ et $d\theta = \frac{-2dt}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \frac{-dt}{\sqrt{t(1-t)}}$. Ainsi,

$$I = \int_0^\pi \frac{\ln\left(\frac{\cos \theta + 1}{2}\right)}{\frac{1 - \cos \theta}{2}} d\theta. \quad (45)$$

On a $\frac{1 + \cos \theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\frac{1 - \cos \theta}{2} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. En posant $u = \frac{\theta}{2}$, on a donc

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos u)}{\sin^2 u} du. \quad (46)$$

En fixant $0 < \varepsilon < \alpha < 1$ et en posant $I_{\varepsilon, \alpha} = \int_\varepsilon^\alpha f$, on a en faisant une intégration par parties :

$$I_{\varepsilon, \alpha} = 4 \left([-\cot u \times \ln(\cos u)]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha 1 du \right). \quad (47)$$

Le deuxième terme tend vers $\frac{\pi}{2}$,. Pour le premier, si $\alpha = \frac{\pi}{2} - h$, on a

$$-\cot \alpha \ln \cos \alpha = -\tan h \ln \sin h = -\tan h \left[\ln h + o_{h \rightarrow 0}(1) \right] \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -h \ln(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (48)$$

De même, on a

$$-\cot \varepsilon \ln \cos \varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\varepsilon} \times \frac{-\varepsilon^2}{2} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (49)$$

Ainsi,

$$\boxed{I = -2\pi.} \quad (50)$$

■

Solution 9. On note f la fonction intégrande. Si $h = \frac{\pi}{4} - t$, on a $\cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) = \sin(2h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 2h$. Ainsi,

$$f(t) \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}}, \quad (51)$$

donc l'intégrale existe (critère de Riemann).

En posant $u = \sin(t)$, puis $v = \sqrt{2}u$, puis $\theta = \arcsin(v)$, on a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin^2(t)) \cos(t)}{\sqrt{1 - 2\sin^2(t)}} dt, \quad (52)$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - u^2}{\sqrt{1 - 2u^2}} du, \quad (53)$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (54)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}}{\sqrt{2}} d\theta, \quad (55)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \right), \quad (56)$$

$$= \frac{3\pi - 1}{8\sqrt{2}}. \quad (57)$$

■

Solution 10. Si $f = c \in \mathbb{C}$ est constante, on a

$$\gamma = \int_a^b f(t)g(\lambda t) dt = c \int_a^b g(\lambda t) dt. \quad (58)$$

On pose $u = \lambda t$ et on pose $k(\lambda) = \lfloor \frac{\lambda b - \lambda a}{T} \rfloor \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda(b-a)}{T}$. Alors

$$\gamma = \frac{c}{\lambda} k(\lambda) \int_0^T g + \frac{c}{\lambda} \int_{\lambda a + k(\lambda)T}^{\lambda b} g. \quad (59)$$

Le deuxième terme est majoré par $\frac{|c|}{\lambda} T \|g\|_{\infty} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$. Finalement,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \gamma = \frac{c(b-a)}{T} \int_0^T g = \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f. \quad (60)$$

C'est la même chose pour les fonctions en escalier (par combinaison linéaire).

Pour une fonction quelconque f continue par morceaux, soit $\varepsilon > 0$. Il existe f_{ε} une fonction en escalier telle que $\|f - f_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq \varepsilon$. On forme

$$\Gamma = \left| \int_a^b (f(t)g(\lambda t))dt - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f \right|. \quad (61)$$

On a

$$\Gamma = \left| \int_a^b f_{\varepsilon}(t)g(\lambda t)dt + \int_a^b (f(t) - f_{\varepsilon}(t))g(\lambda t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f_{\varepsilon} - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b (f - f_{\varepsilon}) \right|, \quad (62)$$

$$\leq \left| \int_a^b f_{\varepsilon}(t)g(\lambda t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f_{\varepsilon} \right| + \left| \int_a^b (f(t) - f_{\varepsilon}(t))g(\lambda t)dt \right| + \left| \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b (f - f_{\varepsilon}) \right|. \quad (63)$$

Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\left| \int_a^b f_{\varepsilon}(t)g(\lambda t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f_{\varepsilon} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (64)$$

Ainsi, $\Gamma \leq \frac{\varepsilon}{3} \times 3 = \varepsilon$. Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T g \int_a^b f.} \quad (65)$$

Pour le cas particulier, on a $g(t) = \frac{1}{3+2\cos(t)}$. g est 2π -périodique, paire et strictement positive.

On pose $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on a $\cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$. Par parité, on a $\int_0^{2\pi} g = 2 \int_0^{\pi} g$, et

$$\int_0^{\pi} g(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{(1+x^2)\left(3+2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)}, \quad (66)$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5}, \quad (67)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dx}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}, \quad (68)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{2}, \quad (69)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \quad (70)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{3 + 2 \cos(nt)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} f.} \quad (71)$$

■

Remarque 3. Pour calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos(t)}$, on peut écrire

$$\frac{1}{3 + 2 \cos(t)} = \frac{1}{3 + e^{it} + e^{-it}} = \frac{e^{it}}{e^{2it} + 3e^{it} + 1}. \quad (72)$$

On décompose $F(X) = \frac{X}{X^2+3X+1} = \frac{\alpha}{X-\lambda} + \frac{\beta}{X-\mu}$ avec $\lambda = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \in]-1, 0[$, $\mu = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \in]-\infty, -1[$, $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}$, $\beta = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$ avec $\lambda - \mu = \sqrt{5}$ et $\lambda = \frac{1}{\mu}$. Ainsi,

$$\frac{1}{3 + 2 \cos(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \frac{1}{e^{it} - \lambda} - \frac{\mu}{\sqrt{5}} \frac{1}{e^{it} - \mu}, \quad (73)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \frac{e^{-it}}{1 - \lambda e^{-it}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{\mu}}, \quad (74)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^n e^{int}, \quad (75)$$

car $|\lambda e^{-it}| < 1$ et $\left| \frac{e^{it}}{\mu} \right| < 1$. Comme on a $|\lambda^n e^{int}| \leq |\lambda|^n$, on a convergence normale sur $[0, 2\pi]$ car $|\lambda| < 1$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2 \cos(nt)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \quad (76)$$

Solution 11.

1. Si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $A > 0$, il existe $x_A \geq A$ tel que $|f(x_A)| > \varepsilon_0$. On sait qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $|x_1 - x_2| \leq \alpha_0$ alors $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $A \geq 0$, pour tout $x \in [x_A - \alpha_0, x_A + \alpha_0]$, on a $|f(x) - f(x_A)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Donc $f(x)$ est du signe de $f(x_A)$ et $|f(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors on a

$$\left| \int_{x_A - \alpha_0}^{x_A + \alpha_0} f(x) dx \right| = \int_{x_A - \alpha_0}^{x_A + \alpha_0} |f(x)| dx > \varepsilon_0 \alpha_0 > 0. \quad (77)$$

Or

$$\left| \int_{x_A - \alpha_0}^{x_A + \alpha_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_A - \alpha_0}^{+\infty} f(x) dx - \int_{x_A + \alpha_0}^{+\infty} f(x) dx \right| \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0. \quad (78)$$

C'est absurde, donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.} \quad (79)$$

2. Il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$, on ait $|f(x)| < 1$. Donc pour tout $x > x_0$, on a $|f^2(x_0)| \leq |f(x)|$ d'où $f^2 = O_{+\infty}(f)$ et f^2 est intégrable.

■

Remarque 4. Si f est à valeurs dans \mathbb{C} , alors il faut raisonner sur $\Im(f)$ et $\Re(f)$ et le résultat reste vrai.

Solution 12.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Si $x \neq 0$, alors f_n converge simplement vers 0. On n'a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}_+^* car on pourrait intervertir les limites en 0. Soit $a > 0$, soit $x \in [a, +\infty[$. f étant décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on a $|f_n(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

Notons que f_n est intégrable sur \mathbb{R} et que son intégrale vaut 1. Enfin, pour tout $a > 0$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (reste d'intégrale convergente).

2. Notons $g_n(u) = \frac{g(\frac{u}{n})}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ de telle sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u) du$.

Soit u fixé dans \mathbb{R} , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = \frac{g(0)}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ par continuité de g , et pour tout $n \geq 1$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|g_n(u)| \leq \frac{\|g\|_\infty}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ intégrable sur \mathbb{R} . D'après le théorème de convergence dominée, on peut intervertir limite et intégrale, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t) f_n(t) dt = g(0) \quad (80)$$

■

Remarque 5. Généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_n \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$ par théorème de convergence dominée.

Remarque 6. Si g est bornée et uniformément continue sur \mathbb{R} , soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que si $|t| \leq \alpha$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x-t) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$|(f_n \star g)(x) - g(x)| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |g(x-t) - g(x)| f_n(t) dt + \int_{\mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]} 2 \|g\|_\infty f_n(t) dt. \quad (81)$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc $(f_n \star g)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur \mathbb{R} .

Remarque 7. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Soit pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto nf(nt) \end{aligned} \quad (82)$$

Par changement de variable, on a $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} f = 0$ pour $\alpha > 0$. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Solution 13. Si $x \geq 2$, on a $\frac{1}{x} \in]0, 1]$ donc on peut définir

$$\begin{aligned} f: [1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \quad (83)$$

f est continue et $\arcsin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ implique $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{6x^3}$, donc d'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Soit $A \geq 1$, on pose $I_A = \int_1^A \frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln(A) - \int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx$. On a

$$\int_1^A \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx, \quad (84)$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{A}\right) + \ln(A + \sqrt{A^2 - 1}) - \frac{\pi}{2}, \quad (85)$$

$$\underset{A \rightarrow +\infty}{=} 1 + \ln(A) + \ln(2) - \frac{\pi}{2} + o(1), \quad (86)$$

donc

$$I = \lim_{A \rightarrow +\infty} = -1 + \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

(87)

■

Solution 14. On a $\ln(\sin(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc I existe, et en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on a $I = J$.

On a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt, \quad (88)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) dt, \quad (89)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \frac{\pi}{2} \ln(2), \quad (90)$$

$$= I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \frac{\pi}{2} \ln(2). \quad (91)$$

On a

$$I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(v)) dv = I. \quad (92)$$

Finalement, on a $I + J = I - \frac{\pi}{2} \ln(2)$ donc

$$\boxed{I = J = -\frac{\pi}{2} \ln(2).} \quad (93)$$

■

Solution 15. f_α est positive, continue et $f_\alpha \leq 1$. f_α est intégrable si et seulement si $\sum u_k$ converge avec

$$u_k = \int_{k\pi - \frac{\pi}{2}}^{k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + x^\alpha |\sin(x)|}, \quad (94)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (t + k\pi)^\alpha |\sin(t)|}, \quad (95)$$

$$\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2}{\pi} |t|}, \quad (96)$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2}{\pi} t}, \quad (97)$$

$$= \frac{\pi}{\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha} \ln \left(1 + \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha \right), \quad (98)$$

$$\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ln(k)}{(k\pi)^\alpha} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right). \quad (99)$$

Donc $\sum u_k$ converge et $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ converge. ■

Solution 16.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $(P_n) \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telle que $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ sur $[a, b]$. $(P_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a, b]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b P_n f = 0$ donne par convergence uniforme $\int_a^b f^2 = 0$. Comme f^2 est continue positive, on a $f^2 = 0$ donc $f = 0$.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a par intégration par parties,

$$I_n = \frac{n}{1-i} I_{n-1}. \quad (100)$$

On a $I_0 = \frac{1}{1-i}$. Par récurrence, on a

$$I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{n!}{(\sqrt{2})^{n+1}} e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}}. \quad (101)$$

3. Pour $n = 4k - 1$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Im(I_{4k-1}) = 0 = \int_0^{+\infty} t^{4k-1} \sin(t) e^{-t} dt. \quad (102)$$

On pose $u = t^4$, $t = u^{\frac{1}{4}}$ et $dt = \frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} du$. Ainsi, en posant $f(u) = \sin\left(u^{\frac{1}{4}}\right) e^{-u^{\frac{1}{4}}}$,

$$0 = \int_0^{+\infty} f(u) u^{k-1} du. \quad (103)$$

■

Solution 17.

1. g est continue, \mathcal{C}^1 par morceaux et en tout point de continuité de f , on a $g'(t) = e^{-at} f(t)$.

On a $g(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \mathcal{L}f(a)$.

Soit $X \geq 0$, on a grâce à une intégration par parties,

$$\int_0^X e^{-bt} f(t) dt = \int_0^X e^{-(b-a)t} e^{-at} f(t) dt, \quad (104)$$

$$= [g(t) e^{-(b-a)t}]_0^X + (b-a) \int_0^X e^{-(b-a)t} g(t) dt. \quad (105)$$

Le terme entre crochet s'annule car $g(0) = 0$, et $b > a$ donc $g(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \mathcal{L}f(a)$. g est continue, admet une limite finie en $+\infty$, donc est bornée sur \mathbb{R}_+ . Ainsi,

$$|e^{-(b-a)t} g(t)| \leq \|g\|_{\infty} e^{-(b-a)t}, \quad (106)$$

qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Finalement,

$$\int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t) dt, \quad (107)$$

converge absolument et $\int_0^{+\infty} e^{-bt} f(t) dt$ converge et

$$\mathcal{L}f(b) = (b-a) \int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t) dt. \quad (108)$$

2. En raisonnant sur $f - h$, on se ramène à $\mathcal{L}f = 0$. Pour tout $b > a$, $\int_0^{+\infty} e^{-(b-a)t} g(t) dt = 0$, donc pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt = 0$. Si $g = 0$, alors en dérivant, on a $f = 0$. On pose $u = e^{-t}$ qui est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de $[0, +\infty[\rightarrow]0, 1]$. On a donc, pour tout $x > 0$, $\int_0^1 u^{x-1} g(-\ln(u)) du = 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n g(-\ln(u)) du = 0 = \int_0^1 u^n k(u) du$ avec $k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $k(0) = \mathcal{L}f(a)$ et $k(x) = g(-\ln(x))$ si $x \in]0, 1]$. k est continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème de Weierstrass, $k = 0$ donc $g = 0$ puis $f = 0$. ■

Solution 18.

1. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|e^{ixt} f(t)| = |f(t)|$ est intégrable sur \mathbb{R} car $f(t) \underset{|t| \rightarrow +\infty}{\sim} 0$. \widehat{f} est définie et $\widehat{f}(x) = \int_{-A}^A e^{itx} f(t) dt$.

Posons

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\mapsto e^{itx} f(t) \end{aligned} \tag{109}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x, t)$ est \mathcal{C}^∞ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k g}{\partial x^k} = (it)^k g(x, t)$. On a

$$\left| \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial x^k} \right| = |t|^k |f(t)|, \tag{110}$$

majoration indépendante de x et intégrable sur $[-A, A]$. Donc \widehat{f} est \mathcal{C}^∞ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}^{(k)}(x) = \int_{-A}^A (it)^k e^{itx} f(t) dt$.

2. Soit $B > 0$ tel que si $x > B$, $\widehat{f}(x) = 0$. Soit $x_0 = B + 1$, alors $\widehat{f} = 0$ sur $]x_0 - 1, +\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{f}^{(k)}(x_0) = 0 = \int_{-A}^A t^k e^{itx_0} f(t) dt$. D'après le théorème de Weierstrass, on a $f(t) = 0$ pour tout $t \in [-A, A]$. ■

Solution 19. Si f est affine avec $f(x) = \alpha x + \beta$. On a $\int_a^b f(t) dt = \alpha \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \beta(b - a)$ et $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b - a) \left(\alpha \frac{(a+b)}{2} + \beta \right)$ d'où $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b f(t) dt$.

Notons que l'inégalité de l'énoncé équivaut à pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, pour tout $h > 0$, on a $a = x - h$ et $b = x + h \in I^2$, $2hf(x) \leq \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$.

Si f est convexe, soit $a < b \in I^2$. Soit φ affine sur $[a, b]$ telle que $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. On a

$$\varphi' = \lambda = \frac{1}{2} \left(f'_g \left(\frac{a+b}{2} \right) + f'_d \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \geq f'_g \left(\frac{a+b}{2} \right), \quad (111)$$

par convexité et en notant $\varphi(t) = \lambda t + \mu$. En notant φ_1 la demi-tangente à f en $\frac{a+b}{2}$, on a pour tout $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$,

$$\varphi(t) \leq \varphi_1(t) \leq f(t). \quad (112)$$

φ_1 est affine sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\varphi_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\varphi'_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_g\left(\frac{a+b}{2}\right)$. De la même façon, pour tout $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, on a

$$\varphi(t) \leq \varphi_2(t) \leq f(t), \quad (113)$$

avec φ_2 affine sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, $\varphi_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\varphi'_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

On a donc $\int_a^b \varphi(t) dt = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f$.

Réciproquement, si pour tout $a < b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt$, soient $x < y \in I^2$ fixés. On pose $g = f - \varphi$ avec $\varphi(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$. g vérifie l'inégalité de l'énoncé car pour φ on a égalité (car affine). On veut montrer que $g \leq 0$ sur $[x, y]$. On a $g(x) = g(y) = 0$. Soit $g(x_0) = \max_{t \in [x, y]} g(t)$. Si $g(x_0) > 0$, on a $x_0 \in]x, y[$ car $g(x) = g(y) = 0$. Soit $h > 0$ tel que $x_0 - h$ et $x_0 + h \in [x, y]$. On applique l'inégalité de l'énoncé à g :

$$2hg(x_0) \leq \int_{x_0-h}^{x_0+h} g(t) dt = 2g(x_0), \quad (114)$$

donc

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} (g(x_0) - g(t)) dt = 0, \quad (115)$$

et l'intégrande est positive et continue. Donc pour tout $t \in [x_0 - h, x_0 + h]$, on a $g(t) = g(x_0)$. On pose $h = \min(y - x_0, x_0 - x)$. On obtient $g(x) = 0 = g(x_0) > 0$ (ou $g(y) = g(x_0)$) ce qui est absurde. Donc $g \leq 0$ sur $[x, y]$ et f est convexe. ■

Remarque 8. Notons que si pour tout $(h, x) \in \mathbb{R}_+ \times \overset{\circ}{I}$ tels que $(x-h, x+h) \in I^2$, $2hf(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$, alors pour $x \in \overset{\circ}{I}$ et h fixé, $x \mapsto \int_{x-h}^{x+h} f$ est \mathcal{C}^1 donc f l'est. Par récurrence, f est \mathcal{C}^∞ , et en dérivant deux fois par rapport à h (pour $x \in \overset{\circ}{I}$ fixé), on a $0 = f'(x+h) - f'(x-h)$ donc f est affine.

Solution 20.

1. Soit $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = 0$ si $t > n$ et $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ si $t \leq n$. f_n est continue par morceaux, positive, intégrable sur \mathbb{R}_+ car équivalente à 0 en $+\infty$ et à t^{x-1} en 0. Soit $t \in]0, +\infty[$ fixé, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $n > t$ et pour tout $n \geq N_0$,

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}, \quad (116)$$

$$= e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} t^{x-1}, \quad (117)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n(-\frac{t}{n} + o(\frac{1}{n}))} t^{x-1}, \quad (118)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-t} t^{x-1}. \quad (119)$$

On a donc convergence simple vers $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$, fonction continue sur \mathbb{R}_+^* intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Soit $n \geq 1$ et $t \in [0, n]$, on a

$$0 \leq f_n(t) \leq f(t), \quad (120)$$

car $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$. D'après le théorème de convergence dominée, on a bien

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt.} \quad (121)$$

2. On pose $u = \frac{t}{n}$ et on a

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du, \quad (122)$$

$$= n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du, \quad (123)$$

$$= n^x \left(\left[(1-u)^n \frac{u^x}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x} du \right). \quad (124)$$

Le terme entre crochets est nul car $u \geq 1$ et $x > 0$.

Si on pose $B_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$, on a

$$B_n(x) = \frac{n}{x} B_{n-1}(x+1) = \dots = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} B_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}. \quad (125)$$

On a donc

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n).}} \quad (126)$$

3. Par définition, on a $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$. On a

$$\frac{x(x+1) \dots (x+n)}{1 \times 2 \times \dots \times n} e^{-x \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} x \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right] e^{-x(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + o(1))} e^{\gamma x}, \quad (127)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \times \underbrace{e^{o(1)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}. \quad (128)$$

Donc on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}. \quad (129)$$

4. On remarque que $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = (\ln \Gamma)'(x)$. On a

$$\ln \Gamma(x) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)}_{f_k(x) \geq 0}. \quad (130)$$

On a convergence simple sur \mathbb{R}_+^* . On a pour tout $k > 1$, f_k est \mathcal{C}^1 , et pour tout $k \geq 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geq 0$ car $x > 0$.

Soit $A > 0$, pour tout $x \in]0, A]$, on a

$$0 < f_k(x) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+A} = \frac{A}{k(k+A)} \underset{k \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (131)$$

Donc pour tout $A > 0$, $\sum f_k(x)$ converge normalement sur $]0, A]$. $\ln \Gamma$ est donc \mathcal{C}^1 (en tant que série de fonction) et on a

$$\boxed{\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)}. \quad (132)$$

■

Remarque 9. En particulier, comme $\Gamma(1) = 1$, on a

$$\Gamma'(1) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -\gamma, \quad (133)$$

car la série est télescopique.

Remarque 10. On a

$$(\ln \Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}. \quad (134)$$

Par ailleurs,

$$0 \leq \Gamma'^2(x) = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma''(x) \Gamma(x), \quad (135)$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a égalité stricte car $\ln(t)$ n'est pas constante. Ainsi, $\ln \Gamma$ est strictement convexe.

Remarque 11. On peut vérifier que $\ln \Gamma$ est l'unique fonction de $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. $\ln \Gamma$ est convexe,
2. $\forall x > 0, (\ln \Gamma)(x+1) = (\ln \Gamma)(x) + \ln(x),$
3. $(\ln \Gamma)(1) = 0.$

Solution 21.

1. On a

$$e^{2i\pi d(f)} = \exp \left(\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt \right). \quad (136)$$

Posons $g(x) = \exp \left(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \right)$. g est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)$. On a $\left(\frac{g}{f} \right)' = \frac{g'f - f'g}{f^2} = 0$ donc $\frac{g}{f} = \alpha \in \mathbb{C}$. En particulier, $g(0) = g(2\pi) = 1$ donc $d(f) \in \mathbb{Z}$.

2. f_0 est constante égale à $P(0)$ donc $d(f_0) = 0$ car c'est une fonction constante. Soit $r \geq 0$, on a

$$d(f_r) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'_r(t)}{f_r(t)} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} P'(re^{it})}{P(re^{it})} dt. \quad (137)$$

On note $g(r, t)$ la fonction intégrande définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$. $r \mapsto g(r, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ , et soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n. \quad (138)$$

Alors

$$h(z) = \frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{a_1 z + \cdots + na_n z^n}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} \quad (139)$$

est continue sur \mathbb{C} et pour $z \neq 0$, on a

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{\frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + na_n}{\frac{a_0}{z^n} + a_n} \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} n. \quad (140)$$

Donc h est bornée sur \mathbb{C} , soit $M = \|h\|_\infty$. On a $|g(r, t)| \leq M \in L^1([0, 2\pi])$. Donc $r \mapsto d(f_r)$ est continue et pour t fixé, on a $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r, t) = n$. Par convergence dominée, on a $\lim_{r \rightarrow +\infty} d(f_r) = n$. $r \mapsto d(f_r)$ est continue à valeurs dans \mathbb{Z} donc constante et $d(f_0) = 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} d(f_r) = n \neq 0$: c'est absurde. Donc P s'annule. ■

Remarque 12. Le théorème de relèvement permet d'écrire $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ avec $\rho(t) = |f(t)|$ et $(\rho, \theta) : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est \mathcal{C}^1 . On a alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'}{\rho} + i(\theta(2\pi) - \theta(0)). \quad (141)$$

Le premier terme vaut $[\ln(\rho)]_0^{2\pi} = 0$ car $\rho = |f|$ est 2π -périodique, et le deuxième terme vaut $2i\pi \times$ le nombre de tours que décrit f autour de l'origine.

Solution 22. En appliquant l'inégalité de Taylor avec reste intégral à f de classe \mathcal{C}^n , on a

$$R_n = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt. \quad (142)$$

Soit $m_n = \min_{[a,b]} f^{(n)}$ et $M_n = \max_{[a,b]} f^{(n)}$. Alors

$$m_n \frac{|b-a|^n}{n!} \leq \left| \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \right| \leq M_n \frac{|b-a|^n}{n!}. \quad (143)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$.

On a

$$v_n - \int_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right] - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f. \quad (144)$$

On prend d'abord $a = \frac{k}{n}$ et $b = \frac{k+1}{n}$, il existe $\xi_k \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ tel que

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3} f^{(2)}(\xi_k). \quad (145)$$

Puis avec $a = \frac{k+1}{n}$ et $b = \frac{k}{n}$, il existe $\eta_k \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ tel que

$$F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) = -\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f^{(2)}(\eta_k). \quad (146)$$

En faisant la différence des deux égalités et en divisant par deux, on a

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt, \quad (147)$$

$$= \frac{1}{2n} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right) + \frac{1}{4n^2} \left(f'\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k+1}{n}\right) \right), \quad (148)$$

$$+ \frac{1}{12n^3} (f^{(2)}(\xi_k) + f^{(2)}(\eta_k)). \quad (149)$$

En sommant, on obtient (par le théorème de Riemann car on a une subdivision pointée)

$$v_n - \int_0^1 f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4n^2} \left(f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right) - \frac{1}{12n^3} (f^{(2)}(\xi_k) + f^{(2)}(\eta_k)), \quad (150)$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{4n^2} [f'(1) - f'(0)] - \frac{1}{6n^2} \left[\int_0^1 f^{(2)}(t)dt + o(1) \right], \quad (151)$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{4n^2} [f'(1) - f'(0)] - \frac{1}{6n^2} (f'(1) - f'(0) + o(1)). \quad (152)$$

Donc on a

$$\boxed{v_n = \int_0^1 f + \frac{1}{12n^2} (f'(1) - f'(0)) + \frac{o}{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)}. \quad (153)$$

■

Solution 23. On a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2(x) + 1 - 1) \tan^{n-2}(x)dx, \quad (154)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan'(x) - 1) \tan^{n-2}(x)dx, \quad (155)$$

$$= \frac{1}{n-1} [\tan^{n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-2}. \quad (156)$$

Donc

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}. \quad (157)$$

On a $I_0 = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = [-\ln |\cos|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln(2)$.

On a donc

$$I_{2p} = (-1)^p \left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} \right), \quad (158)$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2} \left(\ln(2) - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^p}{p} \right). \quad (159)$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.} \quad (160)$$

Comme on a $2I_n \leq I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \leq 2I_{n-2}$ d'où

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}, \quad (161)$$

ainsi

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.} \quad (162)$$

■

Solution 24. On note g la fonction intégrande. g est \mathcal{C}^∞ sur $]0, 1]$. On a

$$f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x g(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} g(t) dt, \quad (163)$$

donc f est \mathcal{C}^∞ et $f'(x) = g(x) - 2xg'(x^2)$.

En 0, e^t se comporte comme 1 et $\frac{1}{\arcsin(t)}$ comme en $\frac{1}{t}$. Donc, au voisinage de 0,

$$h(t) = \frac{e^t}{\arcsin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{te^t - \arcsin(t)}{t \arcsin(t)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{t^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1. \quad (164)$$

Donc h est bornée sur $]0, 1]$, soit $M = \sup_{t \in]0, 1]} |h(t)|$. On a

$$\left| \int_{x^2}^x h(t) dt \right| \leq \int_x^{x^2} |h(t)| dt \leq M(x - x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \quad (165)$$

Comme $\int_{x^2}^x \frac{dt}{t} = -\ln(x)$, on a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\ln(x) + o(1)$.

Pour aller plus loin dans le développement limité, on pousse plus loin le développement limité de $h(t)$ dans 0^+ . ■

Solution 25. On note f la fonction intégrande. $x \mapsto x^2 + x + 1$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} . f est continue sur \mathbb{R} et positive, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}$. Donc d'après le critère de Riemann, l'intégrale converge absolument.

Pour le calcul, on on

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1) \right)^2 + 1 \right). \quad (166)$$

On pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1)$ et on a

$$I_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^n \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^n}. \quad (167)$$

On note J_n l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u^2 + 1)^{n-1}} \frac{du}{1 + u^2}. \quad (168)$$

On pose $\theta = \arctan(u)$, \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, +\infty[\rightarrow [0, \frac{\pi}{2}[$. On a $d\theta = \frac{du}{1+u^2}$ et $\frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} = \cos^{2n-2}(\theta)$.

On retrouve les intégrales de Wallis, d'où on en tire

$$J_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!} \frac{\pi}{2}. \quad (169)$$

Donc

$$I_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!} \frac{\pi}{2}. \quad (170)$$

■

Solution 26. Soit $M_0 = \sup_{[0,1]} |f|$ et $M_1 = \sup_{[0,1]} |f'|$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\left| f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{M_1}{n}. \quad (171)$$

Donc, par la formule de la somme de Riemann, on a

$$\left| u_n - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) f'\left(\frac{i+1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f f'} \right| \leq \underbrace{\frac{M_1^2}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}, \quad (172)$$

donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f^2(1) - f^2(0)) .} \quad (173)$$

■

Solution 27. Ici, l'intégrale diverge, mais comme on fait tendre l'intervalle d'intégration à un singleton, cela aura une limite finie.

Formons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{\ln(t)} \end{aligned} \quad (174)$$

Si $x < 1$, x^a et x^b sont < 1 , et si $x > 1$, alors x^a et x^b sont > 1 . $\int_{x^a}^{x^b} f(t)dt$ est donc bien définie.

On a

$$\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} = \frac{1}{\ln(1+(t-1))} - \frac{1}{t-1} = \frac{(t-1) - \ln(1+(t-1))}{(t-1)\ln(1+(t-1))} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{\frac{(t-1)^2}{2}}{(t-1)^2} = \frac{1}{2}. \quad (175)$$

Soit $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $h(1) = \frac{1}{2}$. h est continue donc bornée au voisinage de 1. Il existe $\alpha_0 > 0$ et $M_0 \geq 0$ tels que pour tout $t \in [1 - \alpha_0, 1 + \alpha_0]$, on ait

$$\left| \int_{x^a}^{x^b} \frac{dt}{\ln(t)} - \int_{x^a}^{x^b} \frac{dt}{t-1} \right| \leq M_0 |x^b - x^a| \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0. \quad (176)$$

Or, si $x = 1 + x'$, on a

$$\int_{x^a}^{x^b} \frac{dt}{t-1} = [\ln |t-1|]_{x^a}^{x^b}, \quad (177)$$

$$= \ln |x^b - 1| - \ln |x^a - 1|, \quad (178)$$

$$= \ln |(1+x')^b - 1| - \ln |(1+x')^a - 1|, \quad (179)$$

$$\underset{x' \rightarrow 0}{=} \ln |bx'' + o(x')| - \ln |ax' + o(x')|, \quad (180)$$

$$\underset{x' \rightarrow 0}{=} \ln(b) + \ln(x') + o(1) - [\ln(a) + \ln(x') + o(1)], \quad (181)$$

$$\underset{x' \rightarrow 0}{=} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + o(1) \xrightarrow{x' \rightarrow 0} \ln \left(\frac{a}{b} \right). \quad (182)$$

D'où le résultat. ■

Solution 28.

1. Soit $n \geq 1$, on a

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f. \quad (183)$$

Par convexité, on a

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} S_n\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right), \quad (184)$$

donc en passant à la limite $n \rightarrow +\infty$, par continuité, on a

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt.} \quad (185)$$

2. Soit $c \in]a, b[$. En cas d'égalité dans ce qui précède, on a

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) = \varphi\left(\frac{c-a}{b-a} \frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt + \frac{b-c}{b-a} \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt\right), \quad (186)$$

$$\leq \frac{c-a}{b-a} \varphi\left(\frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt\right) + \frac{b-c}{b-a} \varphi\left(\frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt\right), \quad (187)$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^c \varphi \circ f(t) dt + \int_c^b \varphi \circ f(t) dt \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt, \quad (188)$$

par convexité et par ce qui précède. Par hypothèse, on a égalité partout, Par stricte convexité, on a

$$\frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt = \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt, \quad (189)$$

d'où $(b-c) \int_a^c g(t) dt = (c-a) \int_c^b f(t) dt$. En dérivant par rapport à c , on obtient

$$(b-a)f(c) - \int_a^c f(t) dt = -(c-a)f(c) + \int_c^b f(t) dt, \quad (190)$$

soit $(b-a)f(c) = \int_c^b f(t) dt$ et $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ pour tout $c \in]a, b[$. Donc f est constante sur $[a, b]$.

■

Remarque 13. Pour la première question, on aurait aussi pu passer par des fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f .

Solution 29. Si $f = 0$, ça marche. Sinon, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)} \int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t) dt. \quad (191)$$

Par récurrence, f est \mathcal{C}^1 (d'après l'expression) et si f est \mathcal{C}^k , alors elle est \mathcal{C}^{k+1} , donc f est \mathcal{C}^∞ . Par ailleurs, $f(y_0)f(-x) = -f(y_0)f(y)$ donc f est impaire. On dérive par rapport à x : $f(x+y) - f(x-y) = f'(x)f(y)$, et en dérivant à nouveau par rapport à x , on a $f'(x+y) - f'(x-y) = f''(x)f(y)$.

Même chose par rapport à y : $f(x+y) - f(x-y) = f(x)f'(y)$ puis $f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$. On pose alors $\alpha = \frac{f''(y_0)}{f(y_0)}$, on a $f''(x) - \alpha f(x) = 0$.

Si $\alpha = 0$, comme f est impaire, on a $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ et en reportant, on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = a \left[\frac{t^2}{2} \right]_{x-y}^{x+y} = 2axy. \quad (192)$$

Or $f(x)f(y) = a^2xy$ donc ou bien $a = 0$, ce qui est exclu, ou bien $a = 2$.

Si $\alpha > 0$, on a $f(x) = a_1 \sinh(\sqrt{\alpha}x)$. En reportant, on a

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{2a_1}{\sqrt{\alpha}} \sinh(\sqrt{\alpha}x) \sinh(\sqrt{\alpha}y), \quad (193)$$

et $f(x) = f(y) = a_1^2 \sinh(\sqrt{\alpha}x) \sinh(\sqrt{\alpha}y)$ d'où $a_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$.

Si $\alpha < 0$, on trouve $f(x) = a_2 \sin(\sqrt{-\alpha}x)$ avec $a_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}$. ■

Solution 30. Soit f une fonction constante égale à c sur $[a, b]$. On a alors $I_n = (b-a)^{\frac{1}{n}} |c| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |c|$.

Plus généralement, on a

$$I_n \leq \left(\int_a^b \|f\|_\infty^n \right)^{\frac{1}{n}} = (b-a)^{\frac{1}{n}} \|f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty. \quad (194)$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $I_n \leq \|f\|_\infty + \varepsilon$. $|f|$ est continue sur le compact $[a, b]$, donc il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$. Par continuité de $|f|$, il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ avec $c < d$ tel que pour tout $t \in [c, d]$, on ait $|f(t)| \geq \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors

$$\int_a^b |f|^n \geq \int_c^d |f|^n \geq (d-c) \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right)^n, \quad (195)$$

donc

$$I_n \geq \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right) (d - c)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (196)$$

Il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on a $I_n \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. Donc pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$\|f\|_\infty - \varepsilon \leq I_n \leq \|f\|_\infty + \varepsilon, \quad (197)$$

donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \|f\|_\infty.} \quad (198)$$

■

Remarque 14. Soit $u_n = I_n^n$ avec f continue non nulle. On a $u_n > 0$ et $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|$. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $|f|^{\frac{n}{2}}$ et $|f|^{\frac{n}{2}+1}$, on a

$$0 < u_{n+1} = \int_a^b |f|^{n+1} \leq \sqrt{u_n} \sqrt{u_n + 2} \quad (199)$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}. \quad (200)$$

$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \geq 0}$ est croissante et strictement positive, donc converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$. On a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(l). \quad (201)$$

D'après le théorème de Césaro, on a donc

$$\frac{\ln(u_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(l), \quad (202)$$

d'où $\ln \left(u_n^{\frac{1}{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \|f\|_\infty = \ln(l)$ par unicité de la limite.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \|f\|_\infty. \quad (203)$$

Solution 31.

1. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, comme $\rho \neq 1$, on a $e^{it} \neq \rho e^{i\theta}$, donc $t \mapsto |e^{it} - \rho e^{i\theta}| > 0$ et $t \mapsto \ln |e^{it} - \rho e^{i\theta}|$ est continue, 2π -périodique sur $[-\pi, \pi]$ donc $F(\rho, \theta)$ existe.

2. On a

$$F(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |e^{i(t-\theta)} - \rho| dt = \int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} \ln |e^{iu} - \rho| du, \quad (204)$$

et comme l'intégrande est une fonction 2π -périodique,

$$F(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} \ln |e^{iu} - \rho| du, \quad (205)$$

est indépendant de θ .

3. Soit $n \geq 1$, on a

$$S_n = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - \rho \right| = \frac{2\pi}{n} \ln \left(\left| \prod_{k=0}^{n-1} \left(\rho - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \right| \right) = \frac{2\pi}{n} \ln (|\rho^n - 1|). \quad (206)$$

Si $\rho > 1$, on a

$$S_n = \frac{2\pi}{n} \ln (\rho^n - 1), \quad (207)$$

$$= \frac{2\pi}{n} \left[\ln(\rho^n) + \ln \left(1 - \left(\frac{1}{\rho} \right)^n \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\pi \ln(\rho). \quad (208)$$

Donc $F(\rho, \theta) = 2\pi \ln(\rho)$.

Si $\rho < 1$, $S_n = \frac{2\pi}{n} \ln(1 - \rho^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $F(\rho, \theta) = 0$.

■

Remarque 15. On a

$$F(\rho, 0) = \int_0^{2\pi} \ln |\cos(u) - \rho + i \sin(u)| du, \quad (209)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln (\rho^2 - 2\rho \cos(u) + 1) du, \quad (210)$$

$$= 2\pi \ln(\rho) + F\left(\frac{1}{\rho}, 0\right). \quad (211)$$

Remarque 16. On peut se demander si l'on a convergence de $F(1, 0) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln (2(1 - \cos(u))) du$.

On vérifie que

$$|\ln(2(1 - \cos(u)))| \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 2|\ln u| = \underset{u \rightarrow 0}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right). \quad (212)$$

Donc $F(1, 0)$ converge. Pour le calcul, on a

$$2F(1, 0) = 2\pi \ln(2) + 2 \int_0^\pi \ln(1 - \cos(u)) du, \quad (213)$$

$$= 2\pi \ln(2) + 4 \int_0^\pi \ln\left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right) du, \quad (214)$$

$$= 2\pi \ln(2) + 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(v)) dv. \quad (215)$$

D'après un exercice précédent, l'intégrale vaut $-\frac{\pi}{2} \ln(2)$ et finalement $F(1, 0) = 0$.

Solution 32. Toutes les intégrales existent car les fonctions sont à support compact.

1. Montrons la contraposée. Soit $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $f(\delta) \neq 0$. On suppose que $f(\delta) > 0$. Par continuité, il existe $\eta > 0$ tel que $f \geq 0$ sur $[\delta - \eta, \delta + \eta]$. $f \times \varphi$ est continue sur $[\delta - \eta, \delta + \eta]$, positive et $(f\varphi)(\delta) > 0$ donc $\int_{\mathbb{R}} f\varphi > 0$ (en choisissant $\varphi \geq 0$ définie sur le support $[\delta - \eta, \delta + \eta]$).
2. Montrons un petit lemme : si $\psi \in C_0$, il existe $\varphi \in C_1$ tel que $\psi = \varphi'$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$. Pour le sens direct, on a $\int_{\mathbb{R}} \psi = \int_{\mathbb{R}} \varphi' = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$. Pour le sens indirect, on définit $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi$ (possible car $\psi \in C_0$). φ est \mathcal{C}^1 et $\varphi' = \psi$. φ est \mathcal{C}^1 et $\varphi' = \psi$. Soit $A \geq 0$ tel que pour tout $|t| \geq A$, on a $\psi(t) = 0$. Alors pour tout $t \leq -A$, on a $\varphi(t) = 0$ et pour tout $t \geq A$, $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \psi = \int_{-A}^A \psi = 0$. Donc φ est à support compact. Pour montrer le résultat, montrons la contraposée. Supposons f non constante, il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ distincts tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Quitte à remplacer f par $f - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, on peut supposer que $f(x_2) = -f(x_1)$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [x_1 - \eta, x_1 + \eta]$, $f(t) \geq 0$ et pour tout $t \in [x_2 - \eta, x_2 + \eta]$, $f(t) \leq 0$.

On a $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$. On pose $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \psi(x) dx$. Alors $\varphi \in C_1$ et $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' > 0$.

3. Soit G une primitive de g . On a alors, pour tout $\varphi \in C_1$,

$$\int_{\mathbb{R}} g\varphi = [G\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} G\varphi' = \int_{\mathbb{R}} f\varphi'. \quad (216)$$

D'après ce qui précède, on a, pour tout $\varphi \in C_1$, $\int_{\mathbb{R}} (f + G)\varphi' = 0$ et donc $f = -G$ à une constante près.

■

Solution 33. On note

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \end{aligned} \quad (217)$$

f est continue, tend vers 1 en 0 et $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc I existe.

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt, \quad (218)$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (219)$$

$$= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (220)$$

La fonction $\frac{e^{-t}-1}{t}$ tend vers -1 quand $t \rightarrow 0$, donc elle est bornée au voisinage de 0 et est continue.

Donc

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (221)$$

donc

$$\boxed{I = \ln(2).} \quad (222)$$

On note maintenant f la fonction intégrande de J . f est continue sur \mathbb{R}_+^* , on a

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \quad (223)$$

et

$$\int_1^X \frac{\cos(t)}{t} dt = \underbrace{\left[\frac{\sin(t)}{t} \right]_1^X}_{\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} -\sin(1)} + \int_1^X \frac{\sin(t)}{t^2} dt, \quad (224)$$

et l'intégrale de droite converge absolument. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge, et c'est donc aussi le cas pour $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$. Donc J existe.

Soit $\varepsilon > 0$ et $X \geq \varepsilon$, on a

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} dt = \int_{\varepsilon}^X \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_{\varepsilon}^X \frac{\cos(2t)}{t} dt, \quad (225)$$

$$= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_X^{2X} \frac{\cos(t)}{t} dt. \quad (226)$$

La deuxième intégrale tend vers 0 quand $X \rightarrow +\infty$ (car l'intégrale est semi-convergente), et de même, on a $\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)-1}{t} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ donc

$$\boxed{J = \ln(2).} \quad (227)$$

■

Remarque 17. Généralement, pour $a < b$ et $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 et telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge. Alors on a $f(u) = f(0) + uf'(0) + o_{u \rightarrow 0}(u)$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt, \quad (228)$$

existe. En notant g la fonction intégrande, g tend vers $(b-a)f'(0)$ en 0. Et en séparant pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (229)$$

Solution 34. f est continue par morceaux, positive. On a $0 \leq f \leq 2$ donc f est intégrable sur $]0, 1]$.

On écrit

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{t} - \frac{k}{k(k+1)}, \quad (230)$$

et en prenant les sommes partielles et en passant à la limite, on trouve

$$\boxed{I = 1 - \gamma.} \quad (231)$$

■

Solution 35. On note

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{e^t - 1} \end{aligned} \quad (232)$$

g est continue positive sur \mathbb{R}_+^* et $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt, \quad (233)$$

$$= [\ln(1 - e^{-t})]_x^{+\infty}, \quad (234)$$

$$= -\ln(1 - e^{-x}). \quad (235)$$

f est continue et positive sur \mathbb{R}_+^* . On a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\ln(x+o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. D'où l'existence de I . On pose $u = e^{-x}$ soit $x = -\ln(u)$ et $dx = -\frac{du}{u}$. C'est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}_+^* dans $]0, 1[$. On a alors

$$I = - \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du = \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du. \quad (236)$$

On pose $v = 1 - u$ pour avoir

$$I = \int_0^1 \frac{-\ln(v)}{1-v} dv. \quad (237)$$

Pour $v \in]0, 1[$, on développe

$$\frac{-\ln(v)}{1-v} = \sum_{k=0}^{+\infty} -v^k \ln(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(v). \quad (238)$$

f_k est positive intégrable sur $]0, 1[$.

On forme $u_k = \int_0^1 |f_k(t)| dt$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors $u_k = \int_0^1 -t^k \ln(t) dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Donc $\sum u_k$ converge et on peut intervertir. Finalement, on a

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{6}}. \quad (239)$$

■

Remarque 18. On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée à $(\sum_{k=0}^n f_k)$ car les f_k sont positifs.

Remarque 19. On a

$$f(x) = \underbrace{\int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1}}_{\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t} dt} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad (240)$$

car la fonction est positive, et

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (241)$$

Solution 36.

1. On pose $f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2}\right)$, continue positive sur $[-n, +\infty[$. I_n est donc bien définie. On pose $u = t + n$, et alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n^n} e^{-u} e^n du, \quad (242)$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du, \quad (243)$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \Gamma(n+1), \quad (244)$$

$$= \frac{e^n}{n^n} n!. \quad (245)$$

2. On pose $t = \sqrt{n}u$ et on a

$$J_n = \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}u} du. \quad (246)$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(u) = e^{n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}u}$ sur $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ et 0 ailleurs. f_n est continue par morceaux (intégrable) sur \mathbb{R} . Soit $u \in \mathbb{R}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $\sqrt{n} \geq |u|$. Alors pour tout $n \geq N_0$, on a

$$f_n(u) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n\left(\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) - \sqrt{n}u}, \quad (247)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-\frac{u^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (248)$$

Ainsi, on a convergence simple de $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ sur \mathbb{R} avec $f(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

C'est un cas particulier où trouver la dominante (pour appliquer le théorème de convergence dominée) est difficile. On propose $\varphi(u) = e^{-\frac{u^2}{4}}$ (plus grand que f et toujours intégrable). Soit $n \geq 1$ et $u \in]-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, soit

$$g_n(u) = n \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}u - \left(-\frac{u^2}{4}\right), \quad (249)$$

dérivable sur $] -\sqrt{n}, \sqrt{n}]$. On a

$$g'_n(u) = \frac{-\frac{u}{2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{1 + \frac{u}{\sqrt{n}}}, \quad (250)$$

donc $g'_n \leq 0$ si $u \geq 0$ et $g_n > 0$ si $u < 0$. Comme $g_n(0) = 0$, on a $g_n(u) \leq 0$ pour tout $u \in]-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ et donc pour tout $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_n(u) \leq e^{-\frac{u^2}{4}}$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\boxed{\frac{J_n}{\sqrt{n}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.} \quad (251)$$

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$K_n = \int_{-n}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt, \quad (252)$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \int_{2n}^{+\infty} u^n e^{-u} du. \quad (253)$$

On écrit $u^n e^{-u} = u^n e^{-\frac{u}{2}} e^{-\frac{u}{2}} = h(u) e^{-\frac{u}{2}}$. Alors h est dérivable sur $]2n, +\infty[$ et $h'(u) = u^{n-1} \left(n - \frac{u}{2}\right) e^{-\frac{u}{2}}$ donc

$$0 \leq h(u) \leq (2n)^n e^{-n}. \quad (254)$$

Donc

$$K_n \leq 2^n \int_{2n}^{+\infty} e^{-\frac{u}{2}} du = 2^n \times 2e^{-n}. \quad (255)$$

Or $e > 2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$. Donc $K_n = o_{n \rightarrow +\infty}(I_n)$ et $I_n = J_n + K_n$ donc $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} J_n$ et

$$\boxed{n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}.} \quad (256)$$

■

Solution 37.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f_x(t) = O_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f_x(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{\frac{x^2}{2}}$ donc $I(x)$ est bien définie.
2. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f_x(t)$ est de classe \mathcal{C}^2 . D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $a \neq 0$, on a

$$|\cos(a) - 1| = |\cos(a) - \cos(0) - a \cos'(0)| \leq \frac{a^2}{2} \sup_{[0,a]} |\cos''| \leq \frac{a^2}{2}. \quad (257)$$

Donc $|1 - \cos(tx)| \leq \frac{t^2 x^2}{2}$. Ainsi, pour tout $t > 0$, on a $|f_x(t)| \leq \frac{x^2}{2} e^{-t}$. Fixons $a \geq 0$, on a pour tout $x \in [-a, a]$, pour tout $t > 0$, $|f_x(t)| \leq \frac{a^2}{2} e^{-t}$, fonction indépendante de x et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de continuité, I est continue sur $[-a, a]$, pour tout $a \geq 0$, donc sur \mathbb{R} .

On a $\frac{\partial f_x}{\partial x}(t) = \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t}$, $\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}(t) = \cos(tx) e^{-t}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$ donc pour tout $t > 0$, pour tout $x \in [-a, a]$,

$$\left| \frac{\partial f_x}{\partial x}(t) \right| \leq |x| e^{-t} \leq a e^{-t}, \quad (258)$$

$$\left| \frac{\partial^2 f_x(t)}{\partial x^2} \right| \leq e^{-t}. \quad (259)$$

Donc d'après le théorème de dérivation, I est de classe \mathcal{C}^2 et on a

$$I''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t} dt, \quad (260)$$

$$= \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t} dt \right), \quad (261)$$

$$= \Re \left(\frac{1}{1-ix} \right), \quad (262)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}. \quad (263)$$

Donc $I'(x) = \lambda + \arctan(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $I'(0) = 0$, $I'(x) = \arctan(x)$. On a $I(0) = 0$ donc

$$I(x) = \int_0^x \arctan(u) du, \quad (264)$$

$$= [u \arctan(u)]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2} du, \quad (265)$$

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad (266)$$

■

Remarque 20. En posant $v = xt$ pour $x > 0$, on a

$$I(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(v)}{v^2} e^{-\frac{v}{x}} dv, \quad (267)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(v)}{v^2} dv = \frac{\pi}{2}, \quad (268)$$

et par intégration par parties, cette intégrale vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv$. C'est une autre preuve de l'intégrale de Dirichlet.

Solution 38. Soit $x \geq 0$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ définie continue sur \mathbb{R} . On a

$$\int_x^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \underbrace{\left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_x^X}_{\xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{\frac{1 - \cos(x)}{x}}} + \int_x^X \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt. \quad (269)$$

L'intégrale est absolument convergente, donc $f(x)$ est définie et on a

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt. \quad (270)$$

f est de classe \mathcal{C}^1 et $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$. Soit $X > 0$ fixé, on a

$$\int_0^X f(x) dx = [xf(x)]_0^X - \int_0^X f'(x) x dx, \quad (271)$$

$$= Xf(X) + \int_0^X \sin(x) dx, \quad (272)$$

$$= Xf(X) + (1 - \cos(X)), \quad (273)$$

$$= X \int_X^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt, \quad (274)$$

$$= 1 - X \int_X^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt. \quad (275)$$

Par intégrations par parties, on a

$$\int_X^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \left[\frac{1}{t^2} \sin(t) \right]_X^{+\infty} + \int_X^{+\infty} \frac{2}{t^2} \sin(t) dt, \quad (276)$$

$$= -\frac{\sin(X)}{X^2} + \int_X^{+\infty} \frac{2 \sin(t)}{t^3} dt, \quad (277)$$

$$= {}_{X \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{X^2}\right), \quad (278)$$

car la deuxième intégrale est majorée par $\int_X^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt = \frac{1}{X^2}$. Finalement, on a

$$\int_0^X f(x) dx = 1 + {}_{X \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{X}\right), \quad (279)$$

donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1.} \quad (280)$$

■

Solution 39. Définissons f_h pour $h > 0$ par $f_h(t) = f(nh)$ si $t \in [nh, (n+1)h[$ ($n \lfloor \frac{t}{h} \rfloor$). Pour h fixé, $f(nh) = {}_{n \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\phi(h)$ est bien définie. f_h est continue par morceaux et $f_h(t) = {}_{t \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f_h est intégrable sur \mathbb{R}_+ et

$$\phi(h) = \int_0^{+\infty} f_h(t) dt. \quad (281)$$

Soit t fixé, on a $\lim_{h \rightarrow 0^+} h \lfloor \frac{t}{h} \rfloor = t$. Donc par continuité de f , $f_h(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(t)$.

On sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$. Donc

$$|f_h(t)| \leq \frac{M}{\left(h \lfloor \frac{t}{h} \rfloor\right)^2} \leq \frac{M}{(t-h)^2}. \quad (282)$$

On s'impose $h < 1$. Dans ce cas, pour tout $t > 2$, $|f_h(t)| \leq \frac{M}{(t-1)^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ et indépendant de h . Pour tout $t \in [0, 2]$, $|f_h(t)| \leq \|f\|_\infty$ intégrable sur $[0, 2]$ et indépendant de h .

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \|f\|_\infty & \text{si } t \in [0, 2], \\ \frac{M}{(t-1)^2} & \text{si } t > 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (283)$$

φ est continue par morceaux intégrable sur \mathbb{R}_+ et indépendante de h . Donc, par convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = \int_0^{+\infty} f(t) dt.} \quad (284)$$

■

Solution 40. f est impaire donc on se limite à $x > 0$. On pose $g(x, t)$ l'intégrande. $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , $g(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{(x-1)t}}{2t}$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $x < 1$. Donc le domaine de définition est $] -1, 1[$. Enfin, $x \mapsto g(x, t)$ est \mathcal{C}^∞ .

On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \cosh(xt)e^{-t} = \frac{e^{(x-1)t} + e^{-(x+1)t}}{2}$. Fixons $a \in [0, 1[$, soit $x \in [0, a]$. Si $t \geq 1$, on a $0 \leq \sinh(xt) \leq \frac{e^{xt}}{2}$ et

$$0 \leq g(x, t) \leq \frac{e^{(x-1)t}}{2t} \leq \frac{e^{(a-1)t}}{2t}. \quad (285)$$

Par ailleurs, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sinh(u)}{u} = 1$, donc il existe $M \geq 0$ tel que si $|u| \leq a$, $\left| \frac{\sinh(u)}{u} \right| \leq M$. Si $t \in]0, 1]$, $xt \in]0, a]$, $0 \leq g(x, t) \leq M_a$. En définissant

$$\begin{aligned} \phi_0 : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \begin{cases} M_a & \text{si } t \in]0, 1], \\ \frac{e^{(a-1)t}}{2t} & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (286)$$

ϕ_0 est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et $|g(x, t)| \leq \phi_0(t)$. Or \sinh est croissante et $|g(x, t)| \leq \frac{\sinh(at)}{t}e^{-t}$, intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Par ailleurs, $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \leq \cosh(at)e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* car $a < 1$. D'après le théorème de continuité dérivabilité, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, a]$ pour tout $a < 1$, donc sur $[0, 1[$.

Alors

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \cosh(xt)e^{-t}dt, \quad (287)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{(x-1)t} + e^{-(x+1)t}) dt, \quad (288)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} \right). \quad (289)$$

Comme $f(0) = 0$, pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ et si $x \in]-1, 0]$, $f(x) = -f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. ■

Solution 41. On a $|f(x, t)| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ et est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ en 0. Donc F existe et est continue sur \mathbb{R} . De plus,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \sqrt{t}e^{-t}, \quad (290)$$

est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Donc F est \mathcal{C}^1 et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{t(ix-1)}dt, \quad (291)$$

$$= \left[\frac{i\sqrt{t}e^{t(ix-1)}}{ix-1} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{ie^{t(ix-1)}}{2\sqrt{t}(ix-1)}dt, \quad (292)$$

$$= -\frac{i}{2(ix-1)}F(x). \quad (293)$$

On a

$$\frac{i}{2(ix-1)} = \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{i}{2(x^2+1)}, \quad (294)$$

donc

$$F(x) = A \exp \left(-\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \arctan(x) \right). \quad (295)$$

Comme

$$F(0) = A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\pi}, \quad (296)$$

on a

$$F(x) = \sqrt{\pi} \exp \left(-\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \arctan(x) \right). \quad (297)$$

■

Solution 42.

1. On a

$$\left| \widehat{f}(\nu) e^{i\nu x} e^{-\lambda|\nu|} \right| \leq \left| \widehat{f}(\nu) \right|. \quad (298)$$

Donc g_x est bien définie. On pose

$$h(t, \nu) = f(t) e^{i\nu(x-t)} e^{-\lambda|\nu|}. \quad (299)$$

On a

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \nu) dt \right) d\nu, \quad (300)$$

et comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t, \nu)| dt d\nu = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|\nu|} d\nu \times \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty, \quad (301)$$

d'après le théorème de Fubini,

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\nu(x-t)} e^{-\lambda|\nu|} d\nu \right) f(t) dt, \quad (302)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{i\nu(x-t)} e^{\lambda\nu} d\nu + \int_0^{+\infty} e^{i\nu(x-t)} e^{-\lambda\nu} d\nu \right) f(t) dt, \quad (303)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - i(t-x)} + \frac{1}{\lambda - i(x-t)} \right) f(t) dt, \quad (304)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\lambda f(t)}{\lambda^2 + (t-x)^2} dt. \quad (305)$$

On pose $t' = t - x$ et on a bien

$$\boxed{g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\lambda f(t+x)}{\lambda^2 + t^2} dt.} \quad (306)$$

2. On pose $u = \frac{t}{\lambda}$ pour $\lambda > 0$. Alors

$$g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda u + x)}{1 + u^2} du, \quad (307)$$

et pour u fixé, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2f(\lambda u + x)}{1 + u^2} = \frac{2f(x)}{1 + u^2}$ par continuité de f . Comme

$$\left| \frac{2f(\lambda u + x)}{1 + u^2} \right| \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{1 + u^2}, \quad (308)$$

fonction de u intégrable sur \mathbb{R} indépendante de λ . Par le théorème de continuité, on a

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2f(x)}{1 + u^2} du = f(x).} \quad (309)$$

3. Pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \widehat{f}(\nu)e^{i\nu x}e^{-\lambda|\nu|}$ est continue sur \mathbb{R}_+ , et on a

$$\left| \widehat{f}(\nu)e^{i\nu x}e^{-\lambda|\nu|} \right| \leq \left| \widehat{f}(\nu) \right|, \quad (310)$$

fonction indépendante de λ intégrable sur \mathbb{R} . Par le théorème de continuité, g_x est continue sur \mathbb{R}_+ , donc en 0. Ainsi,

$$g_x(0) = f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} g_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)e^{i\nu x} d\nu. \quad (311)$$

■

Remarque 21. *En exemple, soit $a > 0$ et*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-a|x|} \end{aligned} \quad (312)$$

f est continue, intégrable et bornée. On a

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\nu t} dt, \quad (313)$$

$$= \frac{2a}{a^2 + \nu^2}. \quad (314)$$

\widehat{f} est intégrable sur \mathbb{R} , donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$2\pi e^{-a|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{2a}{a^2 + \nu^2} e^{i\nu x} d\nu. \quad (315)$$

Remarque 22. *Si $\widehat{f} = 0$, elle est intégrable et d'après la formule, on a $f = 0$.*

Solution 43.

1. $D_n = 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kt)$ est paire, 2π -périodique et \mathcal{C}^∞ . Sa moyenne est 1, et comme pour

$t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{it} \neq 1$, on a

$$D_n(t) = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}, \quad (316)$$

$$= e^{-int} \left(\frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} \right), \quad (317)$$

$$= e^{-int} \frac{e^{i\frac{(2n+1)t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \left(\frac{e^{-i\frac{(2n+1)t}{2}} - e^{i\frac{(2n+1)t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \right), \quad (318)$$

$$= e^{-int} e^{int} \left(\frac{-2i \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right), \quad (319)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \quad (320)$$

2. On pose $u = \frac{2t}{2n+1}$.

3. Elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$. Pour tout $u > 0$,

$$\varphi(u) = \frac{\frac{u}{2} - \sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{u}{2}\right)^3}{\left(\frac{u^2}{4}\right)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0. \quad (321)$$

On pose $\varphi(0) = 0$. φ ainsi prolongée est continue sur $[0, 2\pi]$. On a

$$\varphi'(u) = -\frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{2}{u^2}, \quad (322)$$

$$= \frac{4 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) - u^2 \cos\left(\frac{u}{2}\right)}{2u^2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}, \quad (323)$$

$$\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^4 \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{u^4}{2}\right)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{1}{12}. \quad (324)$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée, φ est \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$.

4. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du &= \left[-\frac{2}{n+1} \cos\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \varphi(u) \right]_0^\pi \\ &\quad + \frac{2}{n+1} \int_0^\pi \varphi'(u) \cos\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du, \end{aligned} \quad (325)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (326)$$

car φ et φ' sont bornées. De plus,

$$\int_0^\pi \varphi(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du = \int_0^\pi D_n(u) du - \int_0^\pi \frac{2 \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{u} du, \quad (327)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi D_n(u) du - 2u_n, \quad (328)$$

$$= \pi - 2u_n. \quad (329)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.} \quad (330)$$

■

Remarque 23. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} intégrable sur un intervalle I . On a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_I f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $[a, b] \subset I$ tel que $\int_{I \setminus [a, b]} |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$\left| \int_I f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_{I \setminus [a, b]} |f| + \left| \int_{[a, b]} f(t) e^{i\lambda t} dt \right|, \quad (331)$$

et le deuxième terme tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow \pm\infty$, donc inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ pour λ suffisamment grand. En particulier, si f est intégrable sur \mathbb{R} , on a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\lambda) = 0$.

Solution 44.

1. g est de classe \mathcal{C}^1 . On a $g'(t) = f(t)e^{-at}$, $g(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = Lf(a)$. Donc g est bornée sur \mathbb{R}_+ . Soit $X > 0$, on a

$$\int_0^X f(t) e^{-(a+x)t} dt = [e^{-xt} g(t)]_0^X + x \int_0^X g(t) e^{-xt} dt. \quad (332)$$

Le terme entre crochet tend vers 0 quand $X \rightarrow +\infty$ car $x > 0$ et $|g(t)e^{-xt}| \leq \|g\|_\infty e^{-xt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Donc $Lf(a+x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-it(a+x)} dt$ existe et vaut $x \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt$.

2. On pose $u = e^{-t}$, \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, +\infty[\rightarrow]0, 1]$. On a alors

$$Lf(a+x) = x \int_0^1 g(-\ln(u)) u^{x-1} du. \quad (333)$$

Or $\lim_{u \rightarrow 0^+} g(-\ln(u)) = Lf(a)$. On définit

$$\begin{aligned} h : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ u &\mapsto \begin{cases} g(-\ln(u)) & \text{si } u \neq 0, \\ Lf(a) & \text{si } u = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (334)$$

h est continue et $Lf(a+x) = x \int_0^1 h(u)u^{x-1}du$. Si pour tout $x > 0$, $Lf(a+x) = 0$, on a pour tout $x > 0$, $\int_0^1 h(u)u^{x-1}du = 0$. Par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\int_0^1 \ln(u)P(u)du = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, on prend $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers \bar{h} . Donc $\int_0^1 |h|^2 = 0$ donc $h = 0$. Ainsi, $g = 0$ et $g'(t) = 0 = f(t)e^{-at}$ donc $f = 0$. ■

Remarque 24. Il suffit qu'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Lf(a_0 + n) = 0$.

Solution 45. Pour $x > 0$, $\sum g_n(x)$ est alternée car $|g_n(x)| = e^{-a_n x}$ est décroissante car $a_n \leq a_{n+1}$ et tend vers 0 car $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. Donc g est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $N \in \mathbb{N}$, d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} \right| \leq e^{-a_N x}. \quad (335)$$

Soit $\alpha > 0$. Alors pour tout $x \geq \alpha$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} \right| \leq e^{-a_N x} \leq e^{-a_N \alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \quad (336)$$

car $\alpha > 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N = +\infty$.

Ainsi, $\sum g_n$ converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$, donc g est continue sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$ donc sur \mathbb{R}_+^* . De plus, toujours d'après le critère spécial des séries alternées, pour tout $x > 0$,

$$|g(x)| \leq e^{-a_0 x}, \quad (337)$$

fonction de x intégrable sur \mathbb{R}_+^* car continue et est $O_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$. Donc g est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

On forme $u_n = \int_0^{+\infty} |g_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-a_n x} dx = \frac{1}{a_n}$. On n'est pas sûr que $\sum \frac{1}{a_n}$ converge. Mais on a

$$0 \leq \sum_{n=0}^N (-1)^n e^{-a_n x} = S_N(x) \leq e^{-a_0 x}, \quad (338)$$

fonction intégrable sur \mathbb{R}_+^* . D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} g(x) dx. \quad (339)$$

■

Solution 46. Soit $x > 0$, notons $f_n(x) = (-1)^n e^{-a_n x}$ continue. $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ est une série alternée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_{n+1}(x)| = e^{-a_{n+1} x} \leq |f_n(x)|$ car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ et $x > 0$. Donc $S(x)$ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue. Soit $\alpha > 0$, pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$, $|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)| \leq e^{-a_N x} \leq e^{-a_N \alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ d'après le critère spécial des séries alternées. Il y a donc convergence uniforme sur $[\alpha, +\infty[$, donc S est continue sur \mathbb{R}_+^* . On a $|S(x)| \leq e^{-a_0 x}$ intégrable sur \mathbb{R}_+^* (encore une fois via le critère spécial des séries alternées). Donc S est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Enfin, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ existe.

Problème : $\sum \int |f_n|$ ne converge pas forcément, on ne peut pas appliquer le théorème d'inter-version. On le fait donc à la main : pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}. \quad (340)$$

Soit $R_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) dx$. On a $|R_N(x)| \leq e^{-a_N x} \leq e^{-a_0 x}$ indépendant de N et intégrable sur \mathbb{R}_+^* . D'après le théorème de convergence dominée, on peut intervertir, d'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) dx = 0$. ■