*Exercices MP/MP**

Suites et séries de fonctions

Exercice 1. *Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (n+kx)^{\frac{1}{n}}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(F_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 2. *Soit $-\alpha \notin \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, soit*

$$u_n(x) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{(1+\alpha) \times \cdots \times (2n-1+\alpha)} x^n$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

1. *Donner la nature de $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$.*
2. *Trouver les valeurs de α telle que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.*
3. *Trouver les valeurs de α telle que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $]-1, 0]$*

Exercice 3. *On forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \arctan(k+x) - \arctan(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 4. *On pose*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-nt}\right)$$

Montrer que f est définie pour $t > 0$ et donner un équivalent de $f(t)$ quand $t \to 0^+$. On admet l'existence de $I = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \ln(1 - \mathrm{e}^{-u})\, du$.

Exercice 5. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{n^2 x^2}{1+n^4 x^4} \end{array} \tag{1}$$

$(a_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $g_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p)$.

1. *g_n est-elle définie ? Étudier la convergence simple de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

2. *Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \notin [a,b]$.*

Exercice 6. *Convergence simple de*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x). \tag{2}$$

f est-elle $\mathcal{C}^1$? Donner la limite de f en 0 et $+\infty$. Donner un équivalent en 0.

Exercice 7. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant M$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. Montrer qu'il y a convergence uniforme.*

Exercice 8. *Soit $x \geqslant 1$. Soit $f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}}$. Étudier la convergence.*

Exercice 9 (Produit Eulérien)**.**

1. *Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ une algèbre normée et pour $n \geqslant 1$*

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ & a & \mapsto & \left(1_{\mathcal{A}} + \frac{a}{n}\right)^n. \end{array} \tag{3}$$

Montrer que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - f_n(a) \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\|a\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|a\|}{n}\right)^n. \tag{4}$$

On pourra montrer que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times [\![0,n]\!]$, $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leqslant \frac{1}{k!}$. En déduire que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers exp*, avec convergence uniforme sur les compacts de $\mathcal{A}$.*

2. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$P_n(X) = \frac{\left(1 + \frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2\mathrm{i}}. \tag{5}$$

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers sin *sur $\mathbb{C}$.*

3. *Déterminer le degré de P_n, les racines de P_n et son coefficient en X. En déduire que*

$$P_n = X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right). \tag{6}$$

4. *Soit $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$. On suppose que*

(i) Il existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^N$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$ et pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $|a_{n,p}| \leqslant \alpha_n$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $\beta_n = \lim\limits_{p\to+\infty} a_{n,p} \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$.

5. *En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. On pourra montrer que pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(t)| \geqslant |t|$.*

Exercice 10. *Soit $[a,b] \subset]0,1[$ et*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x(1-x) \end{array} \tag{7}$$

On définit $f^1 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} * f \circ f_n$.

1. *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\frac{1}{2}$ sur $[a,b]$. A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$?*
2. *Soit $\mathbb{Q}_2 = \left\{\frac{p}{2^n} \middle| p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q \in \mathbb{Q}_n[X]$ tel que $\|P - Q\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$.*
3. *En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, il existe $A \in \mathbb{Z}[X]$ telle que*

$$\|f_n - A\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Peut-on généraliser à d'autres intervalles ?

Exercice 11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications convexes de $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers $u\colon I \to \mathbb{R}$.*

1. *Soit $[a,b] \subset \mathring{I}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]$,*

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leqslant A\,|x-y|\,. \tag{9}$$

On pourra former $(\alpha,\beta) \in I^2$, $\alpha < a < b < \beta$, et étudier les taux d'accroissements des u_n.

2. *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u sur $[a,b]$.*

Exercice 12. *Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varphi\colon\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} \tag{10}$$

est continue.

Exercice 13. *On pose, sous réserve d'existence,*

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t). \tag{11}$$

1. *Donner le domaine de définition E de f.*

2. *f est-elle continue sur E ? Évaluer $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$.*

3. *Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $E\setminus\{0\}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par f.*

Exercice 14. *Soit $a\in\mathbb{R}$ et*

$$\begin{array}{rccc} u_n: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n^a} \end{array} \tag{12}$$

1. *Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ converge simplement sur $[0,1]$. On note $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.*

2. *Pour quelles valeurs de a a-t-on convergence normale sur $[0,1]$?*

3. *Calculer S pour $a=1$ et $a=2$.*

Exercice 15. *Donner le domaine de définition de*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{1+nx^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition. f est-elle intégrable sur son domaine de définition ?

Exercice 16.

1. *Donner le domaine de définition de*

$$S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}=\sum_{n=2}^{+\infty}f_n(x). \tag{14}$$

2. *Montrer que l'on a converge uniforme sur $[0,\infty[$. A-t-on convergence normale ?*

3. *Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais n'est pas dérivable à droite en 0.*

4. *Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $S(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^k}\right)$.*

Exercice 17 (Théorème de Weierstrass trigonométrique)**.** *On pose, pour $k\in\mathbb{N}$,*

$$\begin{array}{rccc} Q_k: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & c_k\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k \end{array} \tag{15}$$

où $c_k\in\mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_k(t)\mathrm{d}t=1$.

1. *Montrer que pour tout* $\delta \in]0, \pi]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \sup\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} Q_k(t) = 0$.
2. *Soit* f *continue* 2π*-périodique de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$. *On définit*

$$\begin{array}{rccl} P_k : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) \mathrm{d}s. \end{array} \tag{16}$$

   Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$. *On utilisera, en la justifiant, la continuité uniforme de* f *et son caractère borné sur* $\mathbb{R}$.
3. *On note, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon_k : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}. \end{array} \tag{17}$$

   On pose $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *(« polynômes trigonométriques »*2π*-périodiques). Montrer que* F *est dense dans* E, $\mathbb{C}$*-espace vectoriel des fonctions continues* 2π*-périodiques pour* $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 18. *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite monotone de fonctions continues qui converge simplement vers* u *continue sur un compact* $K \subset E$ *où* E *est un espace vectoriel normé.*

1. *Montrer que l'on peut se ramener au cas d'une suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *décroissante de fonctions continues qui converge simplement vers 0.*
2. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $F_{n,\varepsilon} = \{x \in K | f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$. *Montrer que* $F_{n,\varepsilon}$ *est fermé, que* $F_{n+1,\varepsilon} \subset F_{n,\varepsilon}$ *et que* $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. *En déduire qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $F_{N,\varepsilon} = \emptyset$, *puis que* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers 0 sur* K.
3. *Prouver le résultat en considérant pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$ *tel que* $f_n(x_n) = \max\limits_{x \in K} f_n(x)$.