

*Exercices MP/MP**
Espaces euclidiens

Exercice 1. Soit $X = (x_1 \dots x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_2 = 1$. On lui associe $H_X = I_n - 2XX^\top$.

1. Reconnaître l'endomorphisme canoniquement associée à H_x (géométriquement).
2. Montrer que $(H_X)_{X \in S(0,1)}$ engendre $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $p \in [0, \frac{4}{27}]$ telle que a, b, c soient les racines de $X^3 - X^2 + p$.
2. Déterminer alors les ingrédients de cette rotation.

Exercice 3. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ distincts, et $A_n = \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Montrer que A_n est diagonalisable sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. On choisit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \det(A_n) = 0$.

Exercice 4.

1. Montrer que $\text{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On définit

$$\begin{aligned} N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} |\text{Tr}(AU)| \end{aligned} \quad (1)$$

Montrer que N est définie et que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que pour tout $(A, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$, on a $N(VA) = N(A)$.
4. Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, calculer $N(S)$.
5. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \text{Tr}(\sqrt{AA^\top})$.

Exercice 5. Soit $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$0 \leq X^\top AX \leq X^\top BX. \quad (2)$$

Montrer que $0 \leq \det(A) \leq \det(B)$. On montrera que si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $A^{-1}B$ est semblable à $\sqrt{A^{-1}B} \sqrt{A^{-1}B} = C$ et on vérifiera que $\min \text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \geq 1$.

Exercice 6. Soit (r, s) deux rotations de \mathbb{R}^3 , reconnaître $r' = s \circ r \circ s^{-1}$. A quelles conditions nécessaires et suffisantes r et s commutent-elles ?

Exercice 7. Soit $D = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid I_n + A \in GL_n(\mathbb{R})\}$ et

$$D' = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = -M\}.$$

1. Montrer que $D \subset SO_n(\mathbb{R})$.

2. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : D &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Montrer que φ définit une bijection de D dans D' .

Exercice 8. Soit $(A, B) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$, montrer que $\sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)} \leq \sqrt[n]{\det(A+B)}$. Si A est inversible, on montrera que $A^{-1}B$ est semblable à $C = \sqrt{A^{-1}B}\sqrt{A^{-1}}$, puis que $\varphi: x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est strictement convexe. Donner le cas d'égalité (pour A inversible).

Exercice 9. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} < 0$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on

note $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $0 \leq |X|^\top A |X| \leq X^\top A X$.
2. Montrer que si $X \neq 0$ et $AX = 0$, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y^\top A |X| = 0$ et en déduire que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \neq 0$.
3. Montrer que $\text{rg}(A) \geq n - 1$.
4. Soit $\lambda = \min \text{Sp}(A)$, montrer que λ est valeur propre simple de A .

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dans E euclidien tel que $\text{Tr}(u) = 0$. Montrer qu'il existe (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(u(e_i)|e_i) = 0$.

Exercice 11. Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est antisymétrique si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$, $(u(x)|y) = -(x|u(y))$.

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) = 0$.
2. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée de E .
3. Montrer que $\text{Sp}(u) \subset \{0\}$, et que si la dimension de E est impaire, $\text{Sp}(u) = \{0\}$.
4. Montrer qu'il existe B base orthonormée de E , il existe $r \in \mathbb{N}$, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -a_2 & \\ & & & a_2 & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

5. Montrer $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12.

1. Montrer que \exp induit une bijection de $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$. On note \ln la réciproque.
2. Justifier que \exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = M$. Soit $\alpha = \min(\text{Sp}(M)) > 0$ et $\beta = \max(\text{Sp}(M))$. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, pour tout $X \in S(0, 1)$,

$$\frac{\alpha}{2} \leq X^\top M_k X \leq \beta + 1. \quad (5)$$

4. En déduire que $(\ln(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.
5. Prouver que $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Exercice 13. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Pour F sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , on pose

$$\Phi(F) = \max_{X \in F} \frac{(AX|X)}{X^\top AX}. \quad (6)$$

Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=k}} \Phi(F). \quad (7)$$

Exercice 14. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{Sp}(A) = \{a_{1,1}, \dots, a_{n,n}\}$. Montrer que A est diagonale. On pourra considérer $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$a_{i_0, i_0} = \min(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n},$$

et former

$$\begin{aligned} \varphi: \quad (\mathbb{R}^n)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \varphi(X, Y) = Y^\top (A - a_{i_0, i_0} I_n) X \end{aligned} \quad (8)$$

Exercice 15 (Intercalation des valeurs propres). Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit $A' = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ ses valeurs propres.

Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

On pourra utiliser le résultat de l'Exercice 13.

Exercice 16. Soit C un convexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel, on dit que $x \in C$ est extrémal si et seulement si pour tout $(y, z) \in C^2$, si $x = \frac{x+y}{2}$, alors $x = y = z$. On munit \mathbb{R}^n de $\|\cdot\|_2$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de norme $\|\cdot\|$ associée.

1. Montrer que si $u \in O(E)$, u est extrémal dans $\overline{B_{\|\cdot\|}(0, 1)} = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \|v\| \leq 1\}$.
2. Soit $u \in \overline{B_{\|\cdot\|}(0, 1)}$ qui n'est pas une isométrie. Montrer qu'il existe $(v, w) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $v \in O(E)$, $w \in S^+(E)$, $\text{Sp}(w) \subset [0, 1]$ et il existe $\lambda \in \text{Sp}(w)$ tel que $\lambda \in [0, 1[$. En déduire que u n'est pas extrémal.

3. Montrer qu'il n'existe pas de produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$ tel que $\|\cdot\|$ soit la norme euclidienne associée.

Exercice 17. Soit $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 = B^3$ (ou $A^5 = B^5$ ou $A^{2k+1} = B^{2k+1}$). Montrer que $A = B$.

Exercice 18. Soit la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^{n+1}

$$\begin{aligned} q : (\mathbb{R}^{n+1})^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \end{aligned} \quad (9)$$

Montrer que c'est un produit scalaire.

Exercice 19. Soit $(E, \|\cdot\|_2)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ tel que pour tout $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| = 1$.

Exercice 20. Soit

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Pour quelles valeurs de α q est-elle une forme quadratique définie positive ?

Exercice 21. Soit E un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ tel que pour tout $i \neq j$, $(e_i | e_j) \leq 0$.

1. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, montrer que si $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^p |\lambda_i| e_i = 0$.
2. Montrer que s'il existe $\varepsilon \in E$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $(\varepsilon, e_i) > 0$ alors (e_1, \dots, e_p) est libre.
3. Montrer que si (e_1, \dots, e_p) est une base de E et si $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ avec pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $(x | e_i) > 0$ alors pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $x_i > 0$. On pourra former $(-x, e_1, \dots, e_p)$.

Exercice 22 (Famille obtusangle). Soit E euclidien de dimension n . Quel est le cardinal maximal r_n d'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ telle que pour tout $i \neq j$, $(x_i | x_j) < 0$?

Exercice 23. Soit E euclidien de dimension n .

1. Montrer qu'il existe $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ unitaire tel que pour tout $i \neq j$, $\|u_i - u_j\| = 1$.
2. Montrer que (u_1, \dots, u_n) est une base de E .
3. Soit (e_1, \dots, e_n) la famille résultant du processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de (u_1, \dots, u_n) . Montrer qu'il existe $(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_j = \sum_{1 \leq i < j} b_i e_i + a_j e_j$.

Exercice 24. Soit E un espace euclidien, $p \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \in E^{2p}$. Montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i = u(x_i)$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $(y_i | y_j) = (x_i | x_j)$.

Exercice 25. Soit E euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que

$$E = \ker(f - \text{id}) \oplus^\perp \text{Im}(f - \text{id}). \quad (11)$$

Exercice 26. Soit E un espace euclidien, C une partie convexe fermée non vide de E .

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $c_x \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - c_x\|$. On note $c_x = p_C(x)$.
2. Montrer que $p_C(x)$ est l'unique vecteur dans C tel que pour tout $y \in C$, $(x - p_C(x)|y - p_C(x)) \leq 0$.
3. Montrer que $p_C: E \rightarrow C$ est 1-Lipschitzienne.

Exercice 27. Soit G un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{K}^n)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

1. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on forme

$$\varphi(x, y) = \sum_{g \in G} (gx|gy). \quad (12)$$

Montrer que c'est un produit scalaire sur \mathbb{K}^n , et que pour tout $g_0 \in G$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^n$, $\varphi(g_0x, g_0y) = \varphi(x, y)$.

2. Montrer que pour tout $f \in G$, on a $\text{Tr}(f^{-1}) = \overline{\text{Tr}(f)}$.
3. Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{R})$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 28. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $0 \leq \det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$. Étudier le cas d'égalité.
2. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|\det(M)| \leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2}$. Étudier le cas d'égalité.
3. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\det(B) = 1$. Montrer que $\text{Tr}(AB) \geq n(\det A)^{\frac{1}{n}}$. Étudier le cas d'égalité.