Solutions MP/MP*
Séries numériques et familles sommables

Solution 1.

1. On a $b_0 = a_1 = 5, b_1 = a_3 = 13$ et pour $p \geqslant 2$, $b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$.
   On a donc l'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les deux solutions sont 3 et -1. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$.
   On a alors $b_0 = 5 = \lambda + \mu$ et $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$. On trouve alors
   $$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}}$$
2. On le montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
3. Si $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, on a $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$. Alors
   $$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p}$$
   Soit $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
   $$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$
   Soit $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{p_n} \leqslant \sigma(n) < 3^{p_n+1}$. On a
   $$p_n = \lfloor \log_3(\sigma(n)) \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
   En reportant, on a $\frac{3}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{9}{2}$.
   Si $\sigma(n) = 3^n$, on a
   $$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{9}{2}$$
   Si $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$, on a
   $$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$$
   Soit $\mu \in [1, 3[$ et $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n \mu$. Alors
   $$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{9}{2\mu}$$
   $$\boxed{\text{Donc tout réel compris dans } \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right] \text{ est valeur d'adhérence.}}$$

■

Solution 2.

1. $$g: \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array} \tag{1}$$

   est continue, $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $l \in [a,b]$ avec $g(l)=0$, d'où

   $$\boxed{f(l)=l}$$

2. On note $A = \{\lambda \mid \lambda \text{ est valeur d'adhérence}\}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que A est non vide. De plus, A est borné car $A \subset [a,b]$. Soit $\lambda = \inf(A)$ et $\mu = \sup(A)$.
   Si $\lambda = b$, on a $\mu = b$ et $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$.
   Si $\lambda < b$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \notin A$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in]\lambda, \lambda+\varepsilon[\}$ est infini. Par définition, λ est valeur d'adhérence. Donc $\lambda \in A$, et de même $\mu \in A$.
   Soit $\nu \in]\lambda,\mu[$ avec $\lambda < \mu$. Si $\nu \notin A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$ est fini. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $x_n \notin]\nu-\varepsilon_0, \nu+\varepsilon_0[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|x_{n+1}-x_n| < 2\varepsilon_0$. Soit alors $n \geqslant \max(N_0, N_1)$. Si $x_n \leqslant \nu - \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \leqslant \nu - \varepsilon_0$. Si $x_n \geqslant \nu + \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \geqslant \nu + \varepsilon_0$. Ceci contredit que λ et μ sont valeur d'adhérence.
   Ainsi, $\nu \in A$ et

   $$\boxed{[\lambda,\mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}}$$

3. Si (x_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, d'après 2., on a $A = [\lambda,\mu]$. On suppose $\lambda < \nu$. Ainsi, $\frac{\lambda+\nu}{2} = \alpha$ est valeur d'adhérence. Donc il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$ par continuité de f et c'est aussi égale à $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Ainsi,

   $$\boxed{f(\alpha)=\alpha}$$

   Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda,\mu]$ et $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x_n = x_{n_0}$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lambda = \mu$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et a une unique valeur d'adhérence.

   $$\boxed{\text{Donc } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

■

Solution 3. On a $u_n = e^{i2^n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ car $l = l^2$ et $|l| = 1$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique au-delà d'un certain rang, il existe $T \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_{n+T} = u_n$. En particulier, $u_{N_0+T} = u_{N_0}$. On veut alors $2^{N_0+T}\theta \equiv 2^{N_0}\theta[2\pi]$. D'où $2^{N_0+T}\theta = 2\theta + 2k\pi$ donc $2^{N_0}(2^T - 1)\theta = 2k\pi$. Donc $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $U_{N+1} = U_N = U_{N^2}$. Comme $|U_N| = 1$, alors $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $\frac{\theta}{2\pi}$ est dyadique.

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$ (nombre dyadique). Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $u_n = u_{n_0} = 1$.

Pour la densité, on prend une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant successivement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous les paquets de k entiers sont dans $\{0, 1\}^k$. Soit $x \in [0, 1[$ tel que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $p_N \in \mathbb{N}$,

$$2^{p_N}\theta = 2\pi\underbrace{(\dots)}_{\in\mathbb{N}} + 2\pi\Big(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in[0,\frac{1}{2^N}[}\Big)$$

On a alors

$$e^{i2^{p_N}\theta} = e^{i2\pi(\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_N}{2^N}+\dots)}$$

et

$$\left|\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} - x\right| \leqslant \frac{1}{2^N}$$

D'où $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{p_N} = e^{i2\pi x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{U}$. ■

Solution 4. Si $a = 0$ et $b = 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou inversement), $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a > 0$ ou $b > 0$, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(\frac{e^{\frac{1}{n}\ln(a)} + e^{\frac{1}{n}\ln(b)}}{2}\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(n^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + \frac{1}{4n^2}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(\frac{n}{2}\ln(ab) + \frac{1}{4}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2) - \frac{1}{8}\ln(ab)^2 + o(1)\Big)
\end{aligned}$$

Si $ab > 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Si $ab < 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

Si $ab = 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}\ln(a)^2}}$$

■

Solution 5.

1. Soit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 0$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$).

$$J = \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; x_k \geqslant \frac{M}{2} \right\}$$

est fini car $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et est non vide. On définit

$$\varphi(0) = \min\left\{ k \in J \;\middle|\; x_k = \max\{x_n \mid n \in J\} \right\}$$

Pour tout $n \in J$, $x_{\varphi(0)} \geqslant x_n$. Si $n \notin J$, $x_n \leqslant \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$. Ainsi,

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

Puis on recommence avec

$$\left\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\} \right\}$$

2. Pour $l = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_N < \varepsilon$. On pose

$$\boxed{I = \{N\}}$$

et on a bien

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leqslant \varepsilon$$

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{N} x_k > A$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$). Donc on peut prendre

$$\boxed{I = \{0, \dots, N\}}$$

Si $l \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < l$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $x_n < \varepsilon$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$. Donc il existe un plus petit entier N_1 tel que $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geqslant l - \varepsilon$. Comme $x_{N_1} < \varepsilon$, on a $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leqslant l + \varepsilon$. Donc

$$\boxed{I = \{N_0, \dots, N_1\}}$$

■

Solution 6. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$$

Montrons que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. D'abord, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} >$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l \in \overline{R}_+^*$. Si $l < +\infty$, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l}$ et donc $u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l^2}$ et la série diverge. Donc $l = +\infty$ et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On observe ensuite que $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$ donc $S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n$. Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{=\ (S_n - S_{n-1})S_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{=\ S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

On applique le théorème de Césaro à la suite $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$, et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a bien

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Réciproquement, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ avec $u_0 = 1$. On a

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}}$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}}$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1}$$

■

Remarque 1. *On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour $\alpha < 1$,*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha}$$

Solution 7. Tout d'abord, on montre que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$$

en posant

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{array} \tag{2}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et on a $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geqslant 0$ et $f'(0) = 0$. Comme $f(0) = 0$, on a pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant 0$.

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur f, on a

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leqslant \cosh(1)} \leqslant x^4$$

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - 1\right]$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1)$$

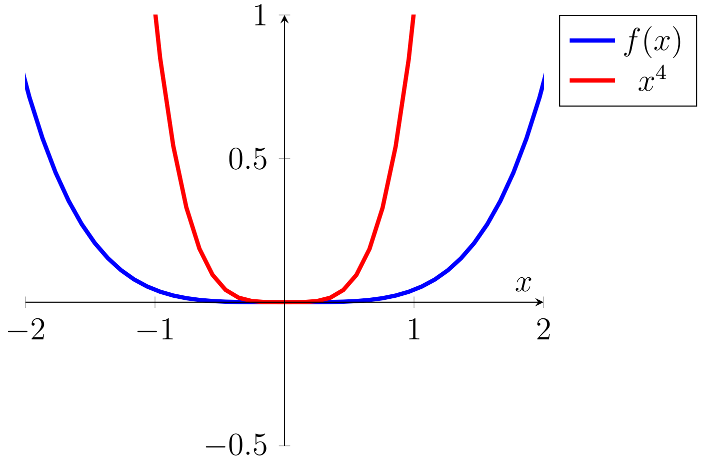

FIGURE 1 – $0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}}$$

■

Solution 8. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$.

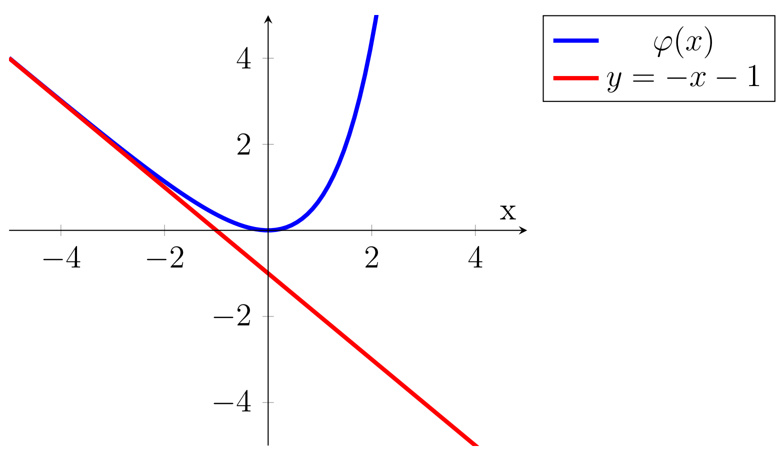

FIGURE 2 – $e^x - x - 1 \geqslant -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$0\varphi(a_n) \leqslant \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$$

Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| > \varepsilon$. Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geqslant \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0$$

ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

et c'est pareil pour b_n et c_n. ∎

Solution 9.

1. Soit

$$f: \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(1-x) \end{array} \tag{3}$$

On a $f(x) \in]0, \frac{1}{4}]$. Pour tout $n \in\geqslant 1$, $u_n \in]0, \frac{1}{4}]$. Par récurrence, on a donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } v_n \text{ est bien définie.}}$$

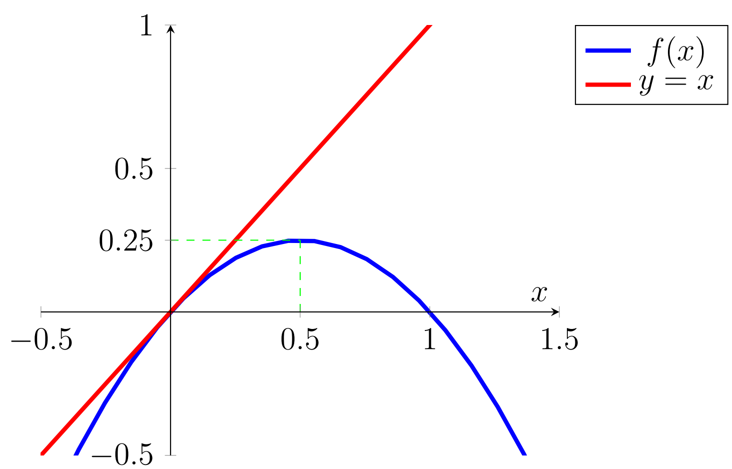

FIGURE 3 – $x(1-x) \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ pour $x \in]0,1[$.

2. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1)$$

Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. D'après le théorème de Césaro, on a

$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
On a
$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{=O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
donc
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. En sommant, on a donc
$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)$$
On a alors
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n + \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})} \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{=\,\alpha_n} \end{aligned}$$
α_n est le terme genéral d'une série à termes positifs convergentes car $\alpha_n = O\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$.
Donc
$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
et en sommant,
$$\boxed{v_n = n + \ln(n) + O(1)}$$
et comme montré auparavant,
$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}$$
■

Solution 10.

1. Soit
$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n - x - n \end{array} \tag{4}$$
On a $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 = 0$ si et seulement si
$$x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n$$
$f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. f_n est monotone strictement sur $]\alpha_n, +\infty[$.
$$\boxed{\text{Donc il existe un unique } x_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$$
On a $f_n(1) = -n < 0$ donc $x_n > 1$ et $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ pour $n \geqslant 3$ (on a $x_2 = 2$). Donc pour $n \geqslant 3$, $x_n \in]1, 2[$.

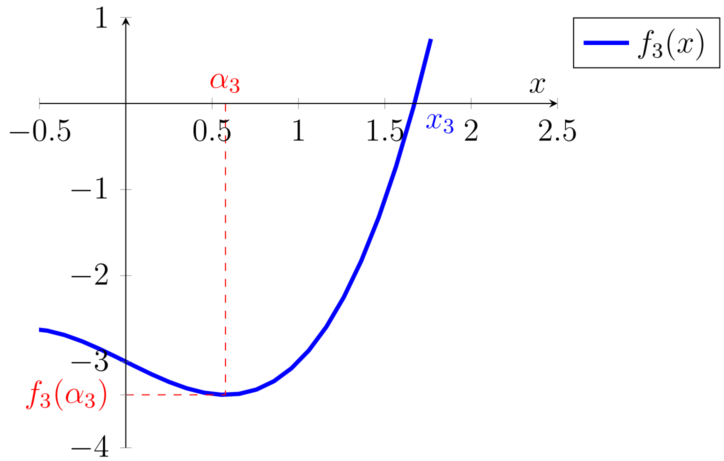

Figure 4 – $x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur $\mathbb{R}_+$.

2. On a $x_n^n = x_n + n \leqslant 2 + n$ donc
$$1 \leqslant x_n \leqslant (2+n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(2+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
Donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$$
3. On peut poser $x_n = 1 + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On a
$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n$$

donc

$$n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln(1+\varepsilon_n+n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\Big(1+\frac{1+\varepsilon_n}{n}\Big)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}}$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)$$

On a enfin

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1+\varepsilon_n+n = 1+n+\frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)$$

d'où

$$\begin{aligned}\ln(1+\varepsilon_n) &= \frac{1}{n}\ln(n+1+\frac{\ln(n)}{n}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big))\\ &= \frac{1}{n}\Big[\ln(n)+\ln\Big(1+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{\ln(n)}{n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{=o\left(\frac{1}{n}\right)}\Big)\Big]\\ &= \frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\end{aligned}$$

donc

$$1+\varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)}$$

■

Solution 11. On note

$$v_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_na_0+u_{n-1}a_1+\cdots+u_0a_n}{u_0+\cdots+u_n}$$

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=a$ alors $v_n = a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. De manière générale, on a

$$v_n - a = v_n - a\frac{u_n+\cdots+u_0}{u_0+\cdots+u_n} = \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}(a_k-a)}{u_0+\cdots+u_n}$$

Ainsi,
$$|u_n - a| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}|a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n}$$
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $|a_k - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, on note $M = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k - a|$. Soit $n \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}|v_n - a| &\leqslant \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k}|a_k - a| + \sum_{k=N}^{n} |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \\ &\leqslant \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} u_k M}{u_0 + \cdots + u_n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N}^{n} u_{n-k}\frac{\varepsilon}{2}}{u_0 + \cdots + u_n}}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}}\end{aligned}$$

car les u_i sont positifs.

On remarque enfin que

$$\begin{array}{rcl} u_n &=& o(u_0 + \cdots + u_n) \\ u_{n-1} &=& o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\ \vdots && \\ u_{n-N+1} &=& o(u_0 + \cdots + u_n) \end{array}$$

Donc
$$M\frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et il existe $N' \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, on a
$$M\frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
et donc pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a $|v_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = a}$$

■

Solution 12.

1. Pour $n \geqslant 2$, (iii) donne

$$x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}$$

où l'inégalité est stricte d'après (ii). Pour $n \geqslant 2$, on a

$$x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2!}$$

donc

$$0 \leqslant 2x - \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Donc $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$. On a ensuite

$$0 \leqslant n!\left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

donc

$$\boxed{a_n = \left\lfloor n!\left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right)\right\rfloor}$$

On a donc bien unicité.
Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus. On a, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant n!\left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Or

$$0 - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$$

donc

$$a_n \in \{0, \dots, n-1\}$$

et (i) est vérifié.
On a

$$0 \leqslant x - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k!} < \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc (iii) est vérifié, et supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $m \geqslant n_0 + 1$, on a $a_m = m - 1$. Alors

$$x = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!}$$

et

$$x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n_0!}$$

donc

$$n_0!\Big(x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!}\Big) = 1$$

et

$$n_0!\Big(x - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_{n_0-1}}{(n_0-1)!}\Big) - a_{n_0} = 1$$

En prenant la partie entière, on a donc $0 = 1$ ce qui est absurde.
Donc (ii) est vérifié.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = 0$ alors $x \in \mathbb{Q}$.
Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a

$$x = \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n!}$$

si et seulement si

$$a_n = n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big)$$

si et seulement si

$$n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) \in \mathbb{N}$$

ce qui est vrai dès que $n \geqslant q$. Donc pour tout $n > q$, on a $a_n = 0$ par unicité.

3. Soit $l \in [-1, 1]$. Soit $x \in [0, 1[$ avec

$$x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

On a alors

$$n!2\pi x = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \underbrace{\sum_{k \geqslant n+2} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{=\ \varepsilon_n}$$

On a

$$0 \leqslant \varepsilon_n < \frac{2\pi n!}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc

$$\sin(n!2\pi x) = \sin\Big(\frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \varepsilon_n\Big)$$

et il suffit d'avoir, comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\arcsin(l)}{2\pi} \in \Big[0, \frac{1}{4}\Big]$$

On pose alors

$$\boxed{a_n = \left\lfloor \frac{n\arcsin(l)}{2\pi} \right\rfloor}$$

pour $n \geqslant 2$ et on a $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{4} < n-1$ pour tout $n \geqslant 2$. On a donc le résultat.

■

Remarque 2. *Il n'y a pas unicité. Par exemple, pour $l = 0$, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ convient. Plus généralement, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \geqslant q$, on a*

$$\sin\left(n!2\pi\left(x + \frac{p}{q}\right)\right) = \sin(n!2\pi x)$$

Solution 13. Par récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\ln(1+x) - x \end{array} \tag{5}$$

et

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\ln(1+x) \end{array} \tag{6}$$

g est dérivable est

$$g'(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

donc g est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $l \in]0,+\infty[$ tel que $g(l) = 0$ d'où $f(l) = l$.

Pour tout $x \in]0,l]$, on a $x \leqslant f(x) \leqslant l$ et pour tout $x > l$, on a $l \leqslant f(x) \leqslant x$.

Soit $n \geqslant 1$. Si $u_n \geqslant l$ et $u_{n-1} \geqslant l$, on a $m_n = l$ et $M_n \in \{u_n, u_{n-1}\}$. Il vient donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(f(u_n) + f(u_{n-1})) \geqslant f(l) = l$$

et

$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \leqslant M_n$$

Donc $m_{n+1} = l = m_n$ et $M_{n+1} \leqslant M_n$.

Par récurrence, on a pour tout $k \geqslant n$, $u_k \geqslant l$ et $(M_k)_{k \geqslant n}$ converge vers $\lambda \geqslant l$ (car décroissante et plus grande que l) et $m_k = l$ pour tout $k \geqslant n$.

De plus pour tout $k \geqslant n$, on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(f(u_k) + f(u_{k-1})) \leqslant f(M_k)$$

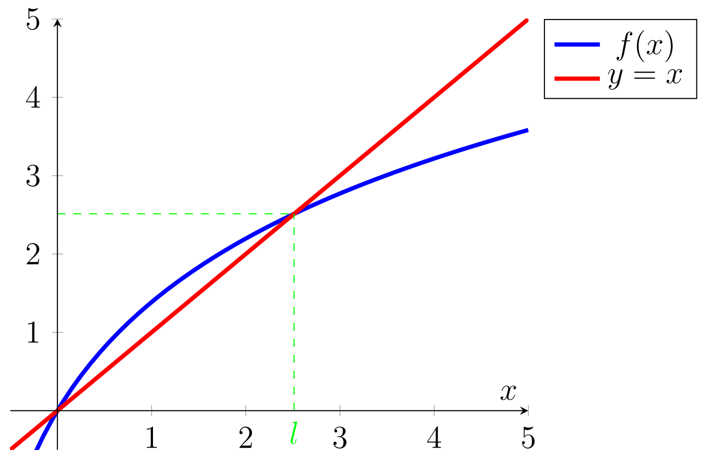

FIGURE 5 – $x \mapsto 2\ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$.

car f est croissante et donc

$$u_{k+2} \leqslant f(M_{k+1}) \leqslant f(M_k)$$

Par passage à la limite, on a $\lambda \leqslant f(\lambda)$ donc $\lambda = f(\lambda)$ et donc $\lambda = l$. Or pout tout $k \geqslant n$, on a

$$\underbrace{m_k}_{=\,l} \leqslant u_k \leqslant M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$$

donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l}$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0-1} \geqslant l$ et $u_{n_0} \geqslant l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Or même s'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_1-1} \leqslant l$ et $u_{n_1} \leqslant l$, alors on inverse les rôles de M_{n_1} et m_{n_1}.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n - l)(u_{n+1} - l) \leqslant 0$$

Supposons par exemple $u_0 \geqslant l$ et $u_1 \leqslant l$. Alors

$$0 \leqslant u_2 - l \leqslant \frac{u_0 - l}{2}$$

et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_{2k} - l \leqslant \frac{u_0 - l}{2^k}$. Donc $u_{2k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$ et de même $u_{2k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$ (par valeurs inférieures). Donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l}$$

■

Solution 14. Soit $(\theta, \theta') \in [2, 2\pi[^2$ tel que

$$\lim_{k\to+\infty} e^{\mathrm{i}px_n} = e^{\mathrm{i}\theta}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} e^{\mathrm{i}qx_n} = e^{\mathrm{i}\theta'}$$

Soient x, x' deux valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distinctes. On a

$$\begin{cases} e^{\mathrm{i}px} = e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}px'} \\ e^{\mathrm{i}qx} = e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}qx'} \end{cases}$$

Il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} px = px' + 2k\pi \\ qx = qx' + 2k\pi \end{cases}$$

et donc $p(x - x') = 2k\pi$ et $q(x - x') = 2k'\pi$ et alors $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence. Comme elle est bornée,

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut prendre

$$\boxed{x_n = n!}$$

On a

$$e^{2\mathrm{i}\pi n!} = 1$$

et

$$n!e = n!\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$$

Si on veut x_n divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut prendre

$$\boxed{x_n = (-1)^n n!}$$

■

Solution 15.

1. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leqslant \boxed{\frac{n^k}{k!}}$$

2. On a

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} |z|^k \underbrace{\left|\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right|}_{\geqslant 0} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n}\frac{|z|^k}{n^k} \\ &\boxed{= \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

3. On sait que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{|z|}$$

et

$$\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{|z|}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{|z|}{n}+o\left(\frac{|z|}{n}\right)\right)} = e^{|z|}e^{o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{|z|}$$

En reportant dans la question précédente, on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z}$$

■

Remarque 3. *Une autre méthode est d'écrire, pour $z = a + \mathrm{i}b$,*

$$1+\frac{z+\mathrm{i}b}{n} = 1+\frac{a}{n}+\mathrm{i}\frac{b}{n} = \rho_n e^{\mathrm{i}\theta_n}$$

. On a alors

$$\left|1+\frac{a+\mathrm{i}b}{n}\right| = \sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}} = \rho_n$$

et alors

$$\begin{aligned}\rho_n^n &= \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)\right|^n \\ &= e^{\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}\right)} \\ &= e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{a+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a = |e^z|\end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$1+\frac{a+\mathrm{i}b}{n} = \rho_n\Big(\underbrace{\frac{1+\frac{a}{n}}{\rho_n}}_{=\ \cos(\theta_n)} + \mathrm{i} \underbrace{\frac{b}{n\rho_n}}_{=\ \sin(\theta_n)}\Big)$$

On a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b}{n\rho_n} = 0 \textit{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{a}{n}}{\rho_n} = 1$$

On peut imposer $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ *et il existe alors* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$, $\cos(\theta_n) \geqslant 0$. *Pour* $n \geqslant N$, *on a alors* $\theta_n \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *donc*

$$\theta_n = \arcsin\left(\frac{b}{n\rho_n}\right)$$

et $n\theta_n = n\arcsin\left(\frac{b}{n\rho_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} b$. *Finalement, on a bien*

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \rho_n^n e^{\mathrm{i}\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a e^{\mathrm{i}b} = e^z$$

Solution 16. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > 0$. On a

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}}_{<1} u_n$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc converge. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}_{=\ v_k} < 0$$

Ensuite,

$$v_k = -\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{k}}$$

Comme $\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = -\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

On a ensuite

$$u_n = \exp\left(\sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right]\right)$$

et

$$\ln\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Donc

$$v_k = -\frac{2}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Le terme dans le O est le terme générale d'une série absolument convergent donc convergent, on note ce terme α_k. On a alors

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{2}{\sqrt{k}}+\alpha_k\right) = -2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty}\alpha_k}_{=C}+o\left(1\right)$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \int_2^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{k\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Posons

$$w_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$$

On étudie la série de terme général $w_n - w_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ converge et ainsi $(w_n)_{n\geqslant 2}$ converge : il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + C' + o(1)$$

On a donc
$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} v_k = -4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)$$

Ainsi,
$$u_n = \exp\left(-4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} Ke^{-4\sqrt{n}}$$

où $K = e^{-2C'+C} > 0$.

Donc
$$u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} K^\alpha e^{-4\alpha\sqrt{n}}$$

Si $\alpha \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^\alpha \not\to 0$ donc

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ diverge.}}$$

Si $\alpha > 0$, $u_n^\alpha = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ converge.}}$$

■

Solution 17. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a
$$u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \geqslant nu_{2n} \geqslant 0$$

Si (S_n) converge alors $S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$.

Comme on a $(2n+1)u_{2n} \geqslant (2n+1)u_{2n+1} \geqslant 0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)u_{2n} = 0$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0 \text{ et donc } u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Si $\{p \in \mathbb{N} | pu_p \geqslant 1\}$ est infini, alors $u_p \neq o\left(\frac{1}{p}\right)$ donc

$$\boxed{\sum u_p \text{ diverge.}}$$

■

Remarque 4. *Ce n'est pas vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, par exemple si $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré et 0 sinon.*

Solution 18. 1. C'est une série à termes positifs. On a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Ainsi

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

2. C'est une série à termes positifs. On a

$$u_n \geqslant \int_1^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(1)dt = \frac{\sin(1)}{n+1} \times \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

3. On écrit

$$\frac{n!}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^k}_{\in\mathbb{Z}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k$$

et

$$\left|\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k\right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

d'après le critère spécial des séries alternées.
Donc

$$\begin{aligned}
\sin\left(2\pi\frac{n!}{e}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\substack{\text{terme général}\\\text{d'une série alternée}\\\text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\substack{\text{terme général}\\\text{d'une série absolument}\\\text{convergente}}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

4. Si $\alpha \leqslant 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ et comme $\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

Si $\alpha > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge.}}$$

Si $\alpha \in]0,1]$, on écrit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \underbrace{(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} \quad \underbrace{-\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}\right)}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} < 0 \\ \text{terme général} \\ \text{d'une série convergente} \\ \text{ssi } \alpha > \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

■

Remarque 5. *Soit* $\alpha \in [0,1]$ *et*

$$u_n = \int_0^\alpha t^n \sin(t) dt \geqslant 0$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \leqslant \alpha^{n+1}$, *terme général d'une série convergente donc* $\sum u_n$ *converge.*

Si $\alpha = 1$, *on utilise*

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi} t$$

Alors $u_n \geqslant \frac{2}{\pi(n+2)}$, *terme générale d'une série divergente donc* $\sum u_n$ *diverge.*

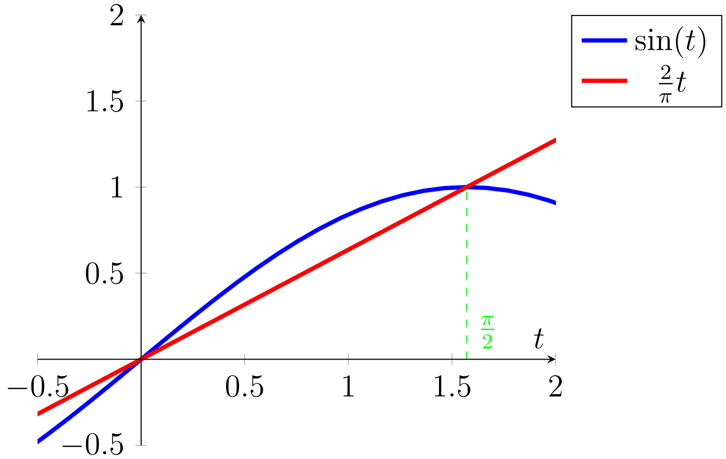

FIGURE 6 – $\sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution 19.

On a

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

u_n est le reste d'ordre n d'une série alternée, donc u_n est du signe de $\frac{(-1)^n}{n}$. Donc on a

$$u_{n+1} \times u_n \leqslant 0$$

Par ailleurs,

$$|u_n| = \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{=\frac{1}{n(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{=\frac{1}{(n+2)(n+3)}} + \cdots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)}$$

Donc $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Pour calculer la somme, on peut chercher si la famille $(u_{n,p})_{\substack{n\geqslant 1\\ p\in\mathbb{N}}}$ est sommable où

$$u_{n,p} = \frac{(-1)^n}{(n+2p)(n+2p+1)}$$

Soit $p \geqslant 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p} - \frac{1}{n+2p+1} \right) = \frac{1}{2p+1}$$

Donc

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{n\geqslant 1}|u_{n,p}| = +\infty$$

Ainsi, cette famille n'est pas sommable. Essayons plutôt de calculer u_n d'abord : soit $n \geqslant 1$ fixé et $N \geqslant n$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=n}^{N}(-1)^k\int_0^1 t^{k-1}dt\\ &= -\sum_{k=n}^{N}\int_0^1(-t)^{k-1}dt\\ &= -\int_0^1\sum_{k=n}^{N}(-t)^{k-1}dt\\ &= \int_0^1(-t)^n\frac{1-(-t)^{N-n+1}}{1+t}dt\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}dt + \int_0^1\frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt$$

et

$$\left|\int_0^1\frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{N+1}dt = \frac{1}{N+2}$$

Donc

$$u_n = -\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}dt$$

Soit alors $M \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M}u_n &= \sum_{n=1}^{M}\left(-\int_0^1\frac{(-t)^n}{t+1}dt\right)\\ &= -\int_0^1\frac{1}{1+t}\sum_{n=1}^{M}(-t)^n dt\\ &= -\int_0^1\frac{-t}{1+t}\frac{1-(-t)^M}{1+t}dt\\ &= \int_0^1\frac{t}{(1+t)^2}dt + \int_0^1\frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2}dt\end{aligned}$$

Comme

$$\left|\int_0^1\frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{M+1}dt = \frac{1}{M+2}\xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$$

on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{(t+1)-1}{(1+t)^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt \\
&= [\ln(1+t)]_0^1 + \left[\frac{1}{2} - 1\right] \\
&= \ln(2) - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{(3n)!} = \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Posons

$$\left\{\begin{array}{rcl}
S_0 &=& \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \\
S_1 &=& \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \\
S_2 &=& \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}
\end{array}\right.$$

On a

$$\left\{\begin{array}{rcl}
S_0 + S_1 + S_2 &=& e \\
S_0 + jS_1 + j^2 S_2 &=& \exp(j) \\
S_0 + j^2 S_1 + jS_2 &=& \exp(j^2)
\end{array}\right.$$

où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. En sommant les trois lignes, on a

$$3S_0 = e + \exp(j) + \exp(j^2) = e + e^{-\frac{1}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3}\left(e + e^{-\frac{1}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)}$$

S'il existe $p \geqslant 0$ tel que $n = p^3$, alors

$$\left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p$$

et

$$\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor \left(p^3 - 1\right)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p - 1$$

Sinon, $n^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{N}$. Soit $k = \left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$. Alors $k^3 < n \leqslant (k+1)^3$ donc $k^3 \leqslant n - 1 < (k+1)^3$ d'où $k \leqslant (n-1)^{\frac{1}{3}} < k+1$. Donc $\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = k$.

Donc $\sum u_n$ est une série lacunaire. Comme $u_{p^3} = O\left(\frac{1}{p^3}\right)$, d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^3 - p}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x(4x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1}$$

Donc la somme partielle jusqu'au rang n vaut

$$\begin{aligned}
S_n &= -\underbrace{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}_{=\ H_n} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p+1} \\
&= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \\
&= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k}}_{=\ H_{2n-1}} - 1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}}_{=\ \frac{1}{2}H_{n-1}}\right) \\
&= -H_n + 2H_{2n-1} - H_{n-1} - 1 + \frac{1}{2n+1} \\
&= -\ln(n) + 2\ln(2n-1) - \ln(n-1) - 1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{=\ o(1)} + o\left(1\right) \\
&= \ln\left(\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)}\right) - 1 + o\left(1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(4) - 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(4) - 1}$$

■

Solution 20. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$a - \varepsilon \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant a + \varepsilon$$

Alors

$$(a - \varepsilon)f(x) \leqslant f'(x) \leqslant (+\varepsilon)f(x)$$

On voit donc que

$$f'(x) - f(x)(a + \varepsilon) \leqslant 0$$

On pose alors (sorte d'inéquation différentielle)

$$g_1(x) = f(x)e^{-(a+\varepsilon)x}$$

On a

$$g_1'(x) = e^{-(a+\varepsilon)x} \left(f'(x) - f(x)(a + \varepsilon)\right) \leqslant 0$$

pour tout $x \geqslant A$. Donc g_1 est décroissante sur $[A, +\infty[$. Alors

$$0 < g_1(x) \leqslant g_1(A) = f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}$$

Alors

$$0 < f(x) \leqslant \left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right) e^{(a+\varepsilon)x}$$

De même, pour $x \geqslant A$,

$$\left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right) e^{(a-\varepsilon)x} \leqslant f(x)$$

car $g_2(x) = f(x)e^{-(a-\varepsilon)x}$ est croissante sur $[A, +\infty[$.

Donc

$$f(n) \leqslant \left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right) e^{(a+\varepsilon)n}$$

Comme $a + \varepsilon < 0$,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} f(n) \text{ converge.}}$$

De plus

$$f(A)e^{-(a-\varepsilon)A} \frac{e^{(a-\varepsilon)N}}{1 - e^{a-\varepsilon}} \leqslant R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leqslant f(A)e^{-(a+\varepsilon)A} \frac{e^{(a+\varepsilon)N}}{1 + e^{a+\varepsilon}}$$

Donc

$$\boxed{R_N = \underset{n\to+\infty}{O}\left(e^{aN}\right) \text{ et } e^{aN} = \underset{n\to+\infty}{O}(R_N)}$$

■

Solution 21. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{e^k}{k}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

On utilise la règle d'Abel : on écrit $e^k = B_k - B_{k-1}$ avec

$$\begin{cases} B_k = \sum_{j=0}^{k} e^j = \frac{e^{k+1}-1}{e-1} \\ B_{-1} = 0 \end{cases}$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k+1} = \underbrace{-1 + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{B_k}{k(k+1)}}_{\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{e^{k+1}}{(e-1)k^2}}}_{= \underset{n\to+\infty}{o}(S_n)} + \underbrace{\frac{B_n}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n e}{n(e-1)}}$$

Donc

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{n(e-1)}}$$

■

Solution 22.

1. $u_n > 0$ et

$$u_n = e^{n^\alpha \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n^\alpha\left(-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n^{\alpha-1}+O\left(n^{\alpha-2}\right)}$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Si $\alpha = 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}}$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$-n^{\alpha-1} + O\left(n^{\alpha-2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^{\alpha-1}$$

donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$,

$$-n^{\alpha-1} + O\left(n^{\alpha-2}\right) \leqslant \frac{-n^{\alpha-1}}{2}$$

d'où

$$u_n \leqslant e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

2. On a $u_n > 0$ et

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{k}\ln(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$

donc par comparaison des sommes partielles, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

3. On écrit $n!e = \lfloor n!e \rfloor + \alpha_n$. Alors

$$\sin(n!\pi e) = (-1)^{\lfloor n!e \rfloor} \sin(\alpha_n \pi)$$

On écrit

$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$$

On pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{n \times n!}$. On a

$$v_n \leqslant e \leqslant w_n$$

donc

$$0 \leqslant e - v_n \leqslant \frac{1}{n \times n!}$$

d'où

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leqslant \frac{n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc

$$n!e\pi = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!}}_{\text{pair}} \pi + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement,a

$$\frac{\sin(n!e\pi)}{\ln(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln(n)} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\ln(n)(n+1)}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

■

Solution 23.

1. On a

$$\begin{aligned} u_n &= (a+b+c)\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right), \\ &= (a+b+c)\ln(n) + \frac{b+2c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+2c &= 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si} a = b \text{ et } b = -2c \text{ avec } c \in \mathbb{R}}$$

Prenons $c = 1$ pour calculer la somme. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) - \ln(n+1) \\ &= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) \\ &= \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)}$$

2. On a $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

On écrit

$$u_n = \frac{2^n\left(3^{2^{n-1}} - 1\right)}{\left(3^{2^{-1}} + 1\right)\left(3^{2^n} - 1\right)} = \frac{2^n\left(3^{2^{n-1}} + 1 - 2\right)}{3^{2^n} - 1} = \underbrace{\frac{2^n}{3^{2^{n-1}} - 1}}_{=\ v_n} - \underbrace{\frac{2^{n+1}}{3^{2^n} - 1}}_{=\ v_{n+1}}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 = 1}$$

3. On remarque que $k - n\left\lfloor\frac{k}{n}\right\rfloor$ est le reste de la division euclidienne de k par n. Donc ce reste est borné par $k-1$. Donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

On note alors

$$J_r = \{n \in \mathbb{N}^* | n \equiv r[k]\}$$

$(J_r)_{r\in\{0,\dots,k-1\}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{n\in J_r} \frac{r}{n(n+1)} = 0$$

si $r=0$. Si $r\in\{1,\dots,k-1\}$, on a

$$S_r = r\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)}$$

et par sommabilité on a

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n-k\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor}{n(n+1)} = \sum_{r=1}^{k-1} S_r = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)}$$

Soit $p\in\mathbb{N}$ fixé. On a

$$\begin{aligned}
v_p &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{(kp+r)(kp+r+1)} \\
&= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r+1} \\
&= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=2}^{k} \frac{r-1}{kp+r} \\
&= \frac{1}{kp+1} + \sum_{r=2}^{k-1} \frac{1}{kp+r} - \frac{k-1}{k(p+1)} \\
&= \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{kp+r} - \frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^{N} v_p = \sum_{n=1}^{k(N+1)} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{k(N+1)}{N+1}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) = \ln(k) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(k)}$$

4. On a

$$\arctan(u) + \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

donc

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(n)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

■

Solution 24. On a

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = u_1 - n u_{n+1} + \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$$

Si $(nu_n)_{n \geqslant 1}$, on a donc évidemment d'après ce qui précède

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

Si $(u_n)_{n \geqslant 1}$ décroît, $v_n \geqslant 0$ et on a

$$\frac{v_k}{k} = u_k - u_{k+1}$$

et donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k,n}$$

en définissant $w_{n,k} = \frac{v_k}{k}$ si $k \geqslant n$ et 0 sinon. On a $w_{k,n} \geqslant 0$ car $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

Ainsi, $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sommable, donc si et seulement si $(w_{n,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ si et seulement si (d'après le théorème de Fubini)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{\sum_{n=1}^{k} \frac{v_k}{k} = v_k} < +\infty$$

Et dans ce cas (toujours d'après le théorème de Fubini),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= u_n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= v_k} < +\infty$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$$

et

$$v_n = \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} - \frac{n}{(n+1)\dots(n+p+1)} = \frac{p+1}{(n+1)\dots(n+p+1)}$$

Soit

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1)\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1)\left(S_p - \frac{1}{p!}\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}} = \frac{p+1}{p(p!)}$$

■

Solution 25. Montrons d'une manière générale que si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ est telle que

$$u_k = \underset{k\to+\infty}{o}(u_{k+1})$$

, alors $\sum u_k$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

En effet, on a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = +\infty$ et d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_k$ diverge. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$,

$$0 \leqslant \frac{u_k}{u_{k+1}} \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \geqslant N$. Pour $k \geqslant N+1$, on a

$$u_k \leqslant \varepsilon u_{k+1} \leqslant \dots \leqslant \varepsilon^{n-k} u_n$$

pour $k \leqslant n-1$.

Alors

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} u_k \leqslant \left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-N-1} u_n\right)$$

On peut supposer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ et alors

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_n \leqslant 2\varepsilon u_n$$

Donc on a bien le résultat voulu.

Pour revenir à l'exercice, on a alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+q)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^q}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente. Donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

■

Solution 26. On a

$$\left|\frac{z^{nb}}{z^{na+c}+1}\right| = \frac{|z|^{nb}}{|1+z^{na+c}|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^{nb}$$

car $|z| < 1$. $|z|^{nb}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour n fini, on a

$$\frac{1}{1+z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z^{na+c})^k$$

Montrons donc que $\left(z^{nb}\left((-z^{na+c})^k\right)\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |z|^{nb}|z|^{k(na+c)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{nb}}{1-|z|^{na+c}} < +\infty$$

d'après ce qui précède. On a sommabilité, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{nb}(-z^{na+c})^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{ck} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n(b+ak)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1-z^{b+ak}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1-z^{b+ak}}}$$

■

Solution 27. On a

$$b_q = \sum_{n=1}^{q} u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q}$$

Montrons donc que la famille des $(u_{n,q})_{(n,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} |u_{n,q}| &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=n}^{+\infty} \frac{n|a_n|}{q(q+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| \left(\sum_{q=n}^{+\infty} \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty
\end{aligned}$$

Donc le théorème de Fubini s'applique et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Donc

$$\boxed{\sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

■

Solution 28. D'après l'exercice précédent, $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

On applique l'inégalité de la moyenne géométrique et arithmétique à $(u_1, 2u_2, \ldots, nu_n)$:

$$\sqrt[n]{u_1 \times 2u_2 \times \cdots \times nu_n} = w_n \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{1}{n}(u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n) = (n+1)v_n$$

Donc on a

$$w_n \leqslant \frac{(n+1)v_n}{\sqrt[n]{n!}}$$

On étudie donc $\sqrt[n]{n!}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n!} &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n!)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\left(n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(\pi n) + \ln\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)\right)\\ &= n\exp\left(-1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Ainsi, $w_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}}$$

Montrons que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant e$$

Cela équivaut à $(n+1)^n \leqslant e^n n!$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^k \leqslant n!e^n$$

ce qui est vrai car pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ on a $\frac{1}{(n-k)!} \leqslant 1$. Donc $w_n \leqslant ev_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = e\sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$$

Pour montrer que e est la meilleure constante possible, on forme pour $N \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,N} = \frac{1}{n}$ si $n \leqslant N$ et 0 sinon. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = H_n < +\infty$$

Dans ce cas, on a

$$w_{n,N} = \sqrt[n]{u_{1,N}\dots w_{n,N}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}v_n$$

pour $n \leqslant N$ et 0 sinon. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N} = \sum_{n=1}^{N} w_{n,N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n$$

En divisant par $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, on a donc

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N}}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N}} = \frac{\sum_{n=1}^{N} v_{n,N} \times \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

d'après le théorème de Césaro.

On a trouvé une suite donc la constante C est égale à e. D'après ce qui précède,

$$\boxed{e \text{ est la meilleure constante possible.}}$$

■

Remarque 6. *Pour la fin de l'exercice précédent, on peut utiliser le fait que* $H_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$ *et alors*

$$\sum_{n=1}^{N} w_{n,N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{1}{n+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} e\ln(N)$$

par le théorème de sommation des relations de comparaison.

Solution 29.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$I_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\} \middle| p+q=n\right\}$$

On a alors

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n+1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

$$\boxed{\text{Donc la condition nécessaire et suffisante est } \alpha > 2.}$$

Dans ce cas, par le théorème des sommation par paquets, on a

$$\boxed{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1)+\zeta(\alpha)}$$

2. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{(p+q)^2}{2} \leqslant p^2+q^2 \leqslant (p+q)^2$$

Pour $\alpha \leqslant 0$, il est clair que l'on a divergence. Pour $\alpha > 0$, on a donc

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{(p^2+q^2)^{\alpha}} \leqslant \frac{2^{\alpha}}{(p+q)^{2\alpha}}$$

$$\boxed{\text{Donc la condition nécessaire et suffisante est } \alpha > 1.}$$

d'après le 1.

■

Solution 30. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{m+n^2-1} = \frac{1}{n^2} = \Sigma_n$$

par téléscopage. $\sum_{n\geqslant 1} \Sigma_n$ converge et

$$\sum_{n\geqslant 1} \Sigma_n = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\boxed{\text{Donc } \left(\frac{1}{(m+n^2)\,(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \text{ est sommable et la somme vaut } \frac{\pi^2}{6}.}$$

Posons, pour $k \geqslant 1$,

$$I_k = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \middle| m+n^2 = k\right\}$$

On a $n^2 \in \{1,\dots,k\}$ si et seulement si $n \in \left\{1,\dots,\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor\right\}$ et $(m,n) \in I_k$ si et seulement si $m = k-n^2$.

On a $|I_k| = \left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$ et par sommation par paquets,

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lfloor k\rfloor}{k(k+1)}}$$

■

Remarque 7. *Grâce à une transformation d'Abel, on a aussi, pour $N \geqslant 1$,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{N} \underbrace{\frac{\lfloor k \rfloor - \lfloor k-1 \rfloor}{k}}_{\neq 0 \textit{ ssi } k=p^2} + \underbrace{\frac{\lfloor N \rfloor}{N+1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}\end{aligned}$$

et on retrouve le résultat.

Solution 31.

1.

$$\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k\geqslant 1} -\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k\geqslant 1} -\ln\left(1 - -\frac{1}{p_k}\right)$$

converge si et seulement si (car $-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} p_k > 0$ vu que $p_k \geqslant k$ pour tout $k \geqslant 1$)

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k}$$

converge.

Donc

$$\boxed{\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \text{ converge si et seulement si } \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k} \text{ converge.}}$$

Fixons alors $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{n_k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{n_k}}\right)$$

où la série est à termes positifs et est convergent. Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{p_1^{n_1} \dots p_N^{n_N}}\right)_{n_1,\dots,n_N \in \mathbb{N}^N}$$

est sommable et on a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} &= \sum_{(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{N}^N}\frac{1}{p_1^{n_1}\dots p_N^{n_N}}\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{p_{N+1}-1}\frac{1}{k}\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty\end{aligned}$$

car dans la première somme, tous les inverses (et une seule fois) des nombres dont les facteurs premiers sont dans $\{p_1,\dots,p_N\}$ apparaissent.
Donc

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{p_k}\text{ diverge.}}$$

2. Posons

$$\Pi_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$$

On a

$$\ln(\Pi_n)=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{-\ln\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}\right)}_{\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{p_k^s}=\underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^s}\right)}$$

car $p_k\geqslant k$. Donc

$$\boxed{(\Pi_n)\text{ converge dans }\mathbb{R}_+^*.}$$

Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{(p_1^s)^{j_1}\dots(p_n^s)^{j_n}}\right)_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\Pi_n=\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n}\left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^s &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}\\ &=\zeta(s)\end{aligned}$$

car dans la première somme, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, chaque k n'apparaît qu'une unique fois. Comme on a

$$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1}\frac{1}{k^s}\leqslant\Pi_n$$

Donc $\Pi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(s)$ et ainsi

$$\boxed{\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} = \zeta(s)}$$

3. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Si $a > 1$, on a

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^a}$$

Donc $\sum \frac{1}{n^z}$ converge absolument. On peut donc prolonger ζ à $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}$.
De même que précédemment, puisque

$$\left|\left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^z\right| = \frac{1}{\left(p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}\right)^a}$$

la famille

$$\left(\left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^z\right)_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n}$$

est sommable. On peut aussi développer et

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^z}} = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^z$$

On a

$$\begin{aligned}
|\Pi_n - \zeta(z)| &= \left| \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^z - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z} \right| \\
&= \left| \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus J_n} \frac{1}{k^z} \right| \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus J_n} \frac{1}{k^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

où l'on a noté $J_n = \{k \geqslant 1 |$ les facteurs premiers de k sont dans $\{p_1,\dots,p_n\}\}$ et où l'on a appliqué l'inégalité triangulaire et le résultat de 2. pour conclure.
Ainsi, on a bien

$$\boxed{\zeta(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}}$$

$\blacksquare$

Solution 32. Pour $\alpha > 2$, puisque $\varphi(n) \geqslant n$, on a

$$\frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour $\alpha = 2$, si $n = p_k$ est premier, on a $\varphi(p_k) = p_k - 1$ et

$$\frac{\varphi(p_k)}{p_k^2} = \frac{p_k - 1}{p_k^2} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$$

et $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.

De même pour $\alpha < 2$, $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ diverge car $\frac{\varphi(n)}{n^2} = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)$.

Donc

$$\boxed{\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.}$$

Pour $\alpha > 1$, on calcule

$$S = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^\alpha} \times \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_2^\alpha} = \sum_{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2} \frac{\varphi(n_1)}{(n_1 n_2)^\alpha}$$

ce qui est légitime car il s'agit de deux séries à termes positifs convergentes. Soit, pour $n \geqslant 1$, $D_n = \left\{(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \middle| n = n_1 n_2\right\}$. Par sommation par paquets, on a,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(n_1,n_2) \in D_n} \frac{\varphi(n_1)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{n_1 | n} \varphi(n_1)\right)$$

et grâce à la formule d'Euler-Möbius, on a

$$\sum_{n_1 | n} \varphi(n_1) = n$$

Ainsi, $S = \zeta(\alpha - 1)$ et donc

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha - 1)}{\zeta(\alpha)}}$$

$\blacksquare$

Solution 33. Soit $A \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. S'il y a n indices $k \in \mathbb{N}$ tels que $z_k \in B(A, R)$, alors pour ces indices k, on a $B(z_k, \frac{1}{2}) \subset B(A, R + \frac{1}{2})$. Donc (faire un dessin !), on a

$$n\frac{\pi}{4} \leqslant \pi \left(R + \frac{1}{2}\right)^2$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{i \in \mathbb{N} | z_i \in B(0, n)\}$. De l'inégalité précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est fini. Il existe $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective qui permet d'ordonner les z_n par module croissante et à même module par indice croissant.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $R = \left|z_{\sigma(n)}\right|$, on a pour tout $k \leqslant n$, $z_{\sigma(k)} \in B(0, R)$.

Donc

$$n\frac{\pi}{4} \leqslant \pi \left(\left|z_{\sigma(n)}\right| + \frac{1}{2}\right)^2$$

d'où

$$\left|z_{\sigma(n)}\right| \geqslant \left|z_{\sigma(n)} + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2}$$

Donc

$$\left|\frac{1}{z_{\sigma(n)}}\right|^3 = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Donc

$$\boxed{\sum \frac{1}{z^3_{\sigma(n)}} \text{ est absolument convergente.}}$$

■

Solution 34. On a $k = \lfloor n \rfloor$ si et seulement si $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$. Il y a $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ entiers.

Posons

$$B_p = \sum_{n=1}^{p} (-1)^{\lfloor n \rfloor}$$

et $B_{-1} = 0$. Si $k^2 \leqslant p \leqslant (k+1)^2$, on a

$$B_p = \underbrace{B_k^2}_{\text{signe de } (-1)^k} + (-1)^k \underbrace{(p-k)^2}_{|\cdot| \leqslant 2k+1}$$

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|B_p| \leqslant 2 \lfloor p \rfloor + 1$$

Donc avec une transformation d'Abel, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{(B_n - B_{n-1})}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{B_n}{n+1} \\
&= \underbrace{\frac{B_N}{N}}_{\underset{N\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} - B_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{n(n+1)}}_{\underset{N\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}
\end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann, la dernière somme converge absolument et donc

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} \text{ converge.}}$$

■

Solution 35.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n u_{n+1} > 0$. On a

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{N_0}}\right) = \sum_{k=N_0+1}^{n} \ln\left(\frac{a+k}{n+k}\right) = \sum_{k=N_0+1} \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{k}\right)$$

Alors

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{N_0}}\right) = \sum_{k=N_0+1}^{n} \frac{a-b}{k} + \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = (a-b)\ln(n) + \underbrace{C}_{\in\mathbb{R}} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Ainsi,

$$u_n = u_{N_0} n^{a-b} \underbrace{k^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}}_{>0} \underset{n\to+\infty}{\sim} U_{N_0} n^{a-b} k$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a>1}$$

2. On a

$$u_{n+1}(b+n+1) = u_n(a+n+1)$$

donc

$$(a+1)u_n = bu_{n+1} + (n+1)u_{n+1} - nu_n$$

En sommant sur $\mathbb{N}$, on a

$$(a+1)\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = b\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + u_1 = b\sum_{n=1}^{+\infty} + \underbrace{u_1 - bu_0}_{=\frac{a(a+1)}{b(b+1)}-a}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{a\,(a+1-b\,(b+1))}{b\,(b+1)\,(a+1-b)} = a\left(\frac{1}{b(b+1)} - \frac{b}{(b+1)(a+1-b)}\right)}$$

3. Pour $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$, on a

$$\boxed{u_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\dots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} = \frac{-\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}}{(n+1)!} = -\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)}\binom{2n}{n}}$$

■

Solution 36.

1. u_n est une série à termes positifs et

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

$\sum v_n$ est une série alternée. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et en formant

$$f: \begin{array}{ccc} [2,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array} \tag{7}$$

On a $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ qui est négatif dès que $x > e$. Donc $(v_n)_{n\geqslant 3}$ décroît. D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

2. f décroît sur $[,+\infty[$ donc pour tout $k \geqslant 4$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

d'où

$$\underbrace{\int_4^{N+1} \frac{\ln(x)}{x} dx}_{=\ \frac{1}{2}\left[\ln^2(N+1)-\ln^2(4)\right]} \leqslant \sum_{k=4}^{N} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \underbrace{\int_3^{N} \frac{\ln(x)}{x} dx}_{=\ \frac{1}{2}\left[\ln^2(N)-\ln^2(3)\right]}$$

Donc

$$\boxed{S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln^2(N)}$$

Formons $w_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n - w_{n-1}$ converge. On a

$$w_n - w_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln^2(n-1)}{2}$$

On a

$$\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln(n) - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\ln^2(n-1) = \ln^2(n) - \frac{2\ln(n)}{n} + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

Donc

$$w_n - w_{n-1} = \underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{\text{terme général d'une série absolument convergente}}$$

Donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + L + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}$$

3. On a

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(2k)}{2k}}_{=\ I_N} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}_{=\ J_N}$$

Donc
$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = I_N - (S_{2N} - I_N)$$
On a
$$S_{2N} = \frac{\ln^2(2N)}{2} + L + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{\ln^2(2)}{2} + \frac{\ln^2(N)}{2} + \ln(2)\ln(N) + L + \underset{N\to+\infty}{o}(1)$$
De plus,
$$I_N = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(2)}{2k}}_{=\frac{\ln(2)}{2}\left(\ln(N)+\gamma+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\right)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2k}}_{=\frac{1}{2}S_N=\frac{\ln^2(N)}{4}+\frac{L}{2}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)}$$
Finalement, on a bien
$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{2N} v_n &= 2I_n - S_{2N}\\ &= \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2} + \underset{N\to+\infty}{o}(1)\end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2}}$$
■

Solution 37. Si $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_{n+1} = 10^{\alpha_n - 1}$. Alors $q_1(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$, $q_k(\alpha_n) = \alpha_{n-k}$, $q_n(\alpha_n) = 2$ et $q_{n+1}(\alpha_n) = 1$.

Si $k < \alpha_n$, $q_n(k) = 1$. Soit
$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} u_k$$
Comme c'est une série à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge si et seulement $\sum_{n\geqslant 0} S_n$ converge.

Par définition, pour tout $k \in \{\alpha_n, \ldots, \alpha_{n+1}-1\}$, on a $q_{n+1}(k) = 1$ et pour tout $p \geqslant n+1$, $q_p(k) = 1$. Donc
$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{kq_1(k)\ldots \underbrace{q_n(k)}_{\geqslant 2}}$$

Posons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \log_{10}(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(10)} \end{array} \tag{8}$$

Il vient $q_1(t) = \lfloor f(t) \rfloor + 1 > f(t)$. Par récurrence, on a

$$q_n(t) \geqslant f^n(t)$$

défini pour $t \geqslant \alpha_n$. On a donc

$$S_n \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k(f(k)) \ldots f^n(k)}$$

On forme

$$g_n : \begin{array}{ccc} [\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1 & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{tf(t) \ldots f^n(t)} \end{array} \tag{9}$$

qui est décroissante. Ainsi, pour tout $k \in \{\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a

$$\int_k^{k+1} g_n(t) \leqslant u_k \leqslant \int_{k-1}^k g_n(t)$$

d'où en faisant le changement de variables $u = \log_{10}(t)$, on a

$$\int_{\alpha_{n-1}-1}^{\alpha_n - 1} g_{n-1}(u) du(\ln(10)) \leqslant S_n \leqslant \int_{\alpha_n - 1}^{\alpha_{n+1}-1} g_n(t) dt$$

On obtient donc une minoration par $C \times (\ln(10))^n$ donc

$$\boxed{\text{la série diverge.}}$$

■

Solution 38.

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_0 = 1 > 0$ et

$$P_1(x) = 1 + x$$

s'annule en -1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat au rang n. On a

$$P'_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x),$$

par hypothèse P_{2n+1} s'annule uniquement en $\alpha_{2n+1} < 0$. Donc $P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) = \frac{(\alpha_{2n+1})^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$ donc $P_{2n+2} > 0$. Comme $P'_{2n+3} = P_{2n+2} > 0$ donc P_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P_{2n+3} = \pm\infty$. Donc il existe un unique $\alpha_{2n+3} \in \mathbb{R}$ tel que $P_{2n+3}(\alpha_{2n+3}) = 0$. Comme $P_{2n+3}(0) = 1 \geqslant 1$, $\alpha_{2n+3} < 0$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}}$$

2. Soit $x < 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = e^x > 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $P_{2n+1}(x) > 0$. En particulier, $\alpha_{2n+1} < x$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_{2n+1} = -\infty}$$

■

Solution 39. On pose $f_n(x) = e^x - x - n$, on a $f_n'(x) = e^x - 1$. Donc $x_1 = 0$ et ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \exists! x_n \geqslant 0\colon e^{x_n} = x_n + n}$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -1 < 0$ donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0$ et $x_n < x_{n+1}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, de plus $e^{x_n} = x_n + n \geqslant n$ donc $x_n \geqslant \ln(n)$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$$

De plus, $x_n = \ln(x_n + n)$ et $f_n(n) = e^n - 2n > 0$ (par récurrence), donc $x_n < n$ par stricte croissante de f_n donc

$$x_n = \ln(x_n + n) \leqslant \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2)$$

Ainsi, $x_n = \underset{n\to+\infty}{O}(\ln(n))$. En reportant, on a

$$x_n = \ln(n + \underset{n\to+\infty}{O}(\ln(n))) = \ln(n) + \ln(1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

donc

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

En reportant, on a

$$\boxed{x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$$

■

Solution 40.

1. Si $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \in \mathbb{R}_+^+$, on a

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{S^\alpha}$$

Comme u_n est le terme générale d'une série convergente donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

2. On a $\alpha = 1$ donc $v_n = \frac{u_n}{S_n}$, soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i = \sum_{i=1}^{n+p} \frac{u_i}{S_i}$$

où $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $i \in \{n+1, n+p\}$, $S_i \leqslant S_{n+p}$ donc

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geqslant \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i = \frac{1}{S_{n+p}}\left(S_{n+p} - S_n\right) = 1 - \frac{S_n}{S_{p+n}}$$

et ainsi,

$$\boxed{\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}}$$

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour n fixé, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} S_{n+p} = +\infty$ (car $\sum u_n$ diverge). Donc lorsque $p \to +\infty$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i \geqslant 1$$

ce qui est absurde puisque la limite en $+\infty$ du reste est 0. Ainsi,

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et

$$v_n = \frac{1}{\alpha - 1}\left(S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}\right)$$

avec $(S_n^{1-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc $\sum w_n$ est une série téléscopique convergente. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, on a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant w_n \leqslant \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha}$$

car $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $\sum w_n$ converge,

$$\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge.}}$$

Si $\alpha < 1$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{\alpha-1} = 0$,

$$\frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{u_n}{S_n^\alpha}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ par convergence et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et de plus $u_n = R_n - R_{n+1}$. On pose

$$\alpha_n = \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(R_{n+1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right)$$

si $\alpha \neq 1$.
Si $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n^{1-\alpha} = 0$ donc $\sum \alpha_n$ est une série téléscopique convergente et de même que précédemment, on a

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} \leqslant \alpha_n$$

donc $w_n \leqslant \alpha_n$ et

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}}$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$\alpha_n = \ln(R_n) - \ln(R_{n+1})$$

où $\ln(R_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Donc $\sum \alpha_n$ est une série téléscopique divergente. De plus

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n} = 1 - \frac{R_{n+1}}{R_n}$$

donc

$$\ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n}{R_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n}{R_n}$$

On a donc

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}}$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{u_n}{R_n^\alpha}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}}$$

■

Solution 41.

1. Pour tout $x \in [0, 1[$ il existe un unique $q_x \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $x \in [\frac{q_x}{n}, \frac{q_x+1}{n}]$ avec $q_x = \lfloor nx \rfloor$ et

$$\begin{array}{rccl} h: & \{0,\ldots,n\} & \to & \{0,\ldots,n-1\} \\ & k & \mapsto & q_{x_k} = \lfloor nx_k \rfloor \end{array} \tag{10}$$

n'est pas injective donc il existe $k > k'$ tel que $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$ avec $(k, k') \in \{0, \ldots, n\}^2$ d'où

$$|kx - \lfloor kx \rfloor - (k'x - \lfloor k'x \rfloor)| < \frac{1}{n}$$

d'où

$$|(k-k')x - p| < \frac{1}{n}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$ et pour $q = (k - k') \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\boxed{\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}}$$

2. D'après ce qui précède, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, n\}$ tels que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n} \leqslant \frac{1}{q_n^2}$$

car $n \geqslant q_n$. Donc

$$\boxed{\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}}$$

On a donc $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si q_n ne tend pas vers $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n > N$ avec $q_n < A$. Donc $\{n \in \mathbb{N} | q_n < A\}$ est infini : on peut extraire $(q_{\sigma(n)})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q_{\sigma(n)} < A$. D'après le théorème

de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire $(q_{\varphi(n)})$ qui converge vers $q \in \mathbb{R}$. Notons que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang donc $q \in \mathbb{N}^*$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{\varphi(n)} = \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} q_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha q$. $(p_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers relatifs stationnaire, donc $\alpha q \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.
Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty}$$

3. On sait qu'il existe $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante telle que $\sin(\sigma(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sigma(n)\sin(\sigma(n))} = 0$$

donc si la suite converge, alors elle converge vers 0.
Appliquons ce qui précède à $\alpha = \frac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0$ et

$$\left|\frac{1}{\pi} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Alors

$$|q_n - \pi p_n| < \frac{\pi}{q_n} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

pour n suffisamment grand. Quitte à extraire, on peut supposer que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a

$$|\sin(x)| = |\sin(q_n - \pi q_n)|$$

donc

$$|\sin(q_n)| \leqslant \left|\sin\left(\frac{\pi}{q_n}\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{q_n}$$

car sin est croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
Donc

$$\underbrace{\frac{1}{|q_n \sin(q_n)|}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \geqslant \frac{1}{\pi}$$

ce qui est absurde.
Donc

$$\boxed{\left(\frac{1}{n\sin(n)}\right)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas.}}$$

■

Solution 42.

1. On a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| = \left|\sum_{p=1}^{n} (a_{n,p} - a_p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p\right| =\leqslant \sum_{p=1}^{n} |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=n+1}^{+\infty} |a_p|$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geqslant N$, on a

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{n,p} - a_p| = \sum_{p=1}^{N} |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=N+1}^{n} |a_{n,p} - a_p|$$

Pour p fixé, on a $|a_p| \leqslant b_p$ donc

$$\sum_{p=N+1}^{n} |a_{n,p} - a_p| \leqslant 2 \sum_{p=N+1}^{n} b_p$$

Ainsi,

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| \leqslant \sum_{p=1}^{N} |a_{n,p} - a_p| + 3 \sum_{p=N+1}^{+\infty} b_p$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ converge, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$3 \sum_{p=N_1+1}^{+\infty} b_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

donc pour tout $n \geqslant N_1$, on a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p|$$

N_1 étant fixé, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on a

$$\sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| = 0$$

Donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| < \varepsilon$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p}$$

2. On fixe $p \in \mathbb{N}$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{p}{n}\right)^n = e^{-p}$$
Pour $x \geqslant -1$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$ donc $\ln\left(1-\frac{p}{n}\right) \leqslant -\frac{p}{n}$ et $a_{n,p} = e^{n\ln\left(1-\frac{p}{n}\right)} \leqslant e^{-p} = b_p$ Donc d'après ce qui précède,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{e-1}$$

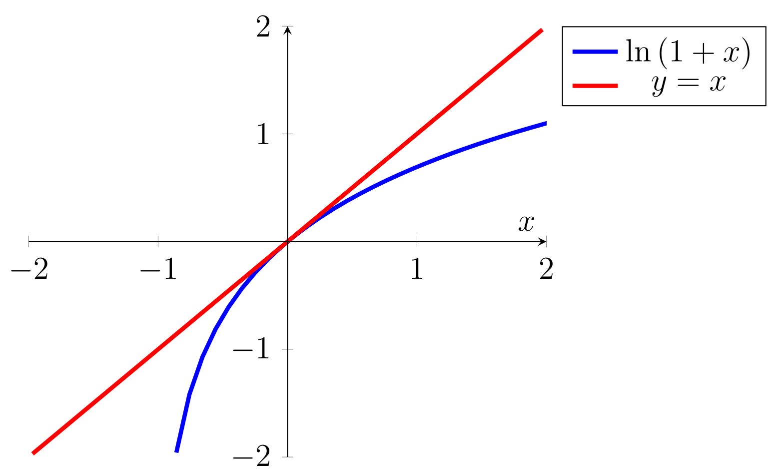

FIGURE 7 – $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$.

■

Remarque 8. *C'est faux si on n'a pas l'hypothèse (ii). Par exemple,*
$$a_{n,p} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
pour p fixé mais
$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Solution 43.

1. Pour tout $k \geqslant 1$, $(u_{kn})_{n\geqslant 1}$ est une sous-famille de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sommable, donc $(u_{kn})_{n\geqslant 1}$ est sommable.

$$\boxed{\text{Donc } S_k \text{ existe.}}$$

2. On a

$$\left\{\begin{array}{rrr} S_1 - S_2 = & u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} + \ldots = & 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 + S_6 = & u_1 + u_5 + u_7 + u_{11} + \ldots = & 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 - S_5 + S_6 + S_{10} + S_{15} - S_{10} = & u_1 + u_7 + u_{11} + \ldots = & 0 \end{array}\right.$$

A la première ligne on enlève les multiples de 2, à la deuxième ligne on enlève les multiples de 2 et 3, à la troisième ligne on enlève les multiples de 2, 3 et 5. Et ainsi de suite.

Soient donc $p_1, \ldots, p_N$ les N premiers nombres premiers. On a

$$0 = \sum_{k=1}^{p_1 \ldots p_N} \mu(k) S_k = \sum_{k \in \left\{p_1^{\alpha_1} \ldots p_N^{\alpha_N} \middle| (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\right\}} \mu(k) S_k$$

où si $k = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, $\mu(k) = 0$ s'il existe $\alpha_i \geqslant 2$ et $\mu\left(p_{i_1} \ldots p_{i_s}\right) = (-1)^s$ sinon (fonction de Möbius).

Soit $n = p_1^{\beta_1} \ldots p_N^{\beta_N}$. On cherche le coefficient en u_n dans la somme. Si $n = 1$, c'est 1. Si $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0$$

donc

$$\sum_{k \in \left\{p_1^{\alpha_1} \ldots p_N^{\alpha_N} \middle| (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\right\}} \mu(k) S_k = u_1 + \alpha_N$$

avec

$$\alpha_N = \sum_{k \in B_N} u_k$$

où $B_N \subset \mathbb{N}^*$ est tel que $\min\left(B_N\right) = p_{N+1}$. On a

$$|\alpha_N| \leqslant \sum_{k \geqslant p_{N+1}} |u_k| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

car c'est le reste de $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$ convergente.

Donc $u_1 + \alpha_N = 0 \xrightarrow[N \to +\infty]{} u_1$ donc $u_1 = 0$.

Avec $u_1 = 0$,

$$\left\{\begin{array}{lcll} S_n & = & u_n + u_{2n} + u_{3n} + \ldots & = 0 \\ S_{2n} & = & u_{2n} + u_{4n} + u_{6n} + \ldots & = 0 \end{array}\right.$$

et en recommençant avec u_n pour tout $n \geqslant 1$, on obtient bien

$$\boxed{u_n = 0}$$

$\blacksquare$

Solution 44.

1. On prend $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum u_n = 0$ converge donc $\sum f(u_n) = \sum f(0)$ converge. Donc

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Supposons que f n'est pas continue en 0. Alors il existe $\varepsilon_0 >$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [-\alpha, \alpha] : |f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Pour $\alpha \equiv \alpha_n = \frac{1}{n^2}$, il existe $x_n \in \left[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right] : |f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$. $\sum x_n$ converge absolument mais $\sum f(x_n)$ diverge grossièrement ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{f est continue en 0.}}$$

2. Supposons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]-\alpha, \alpha[: f(-x) \neq -f(x)$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ telle que $f(-x_n) + f(x_n) \neq 0$. Il existe $N_n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$N_n \left|f(-x_n) + f(x_n)\right| \geqslant 1$$

(il suffit de prendre $N_n = \left\lfloor \frac{1}{|f(x_n)+f(-x_n)|} \right\rfloor + 1$)
On définit

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots, \dots, x_n, -x_n, \dots, \dots)$$

où $(x_n, -x_n)$ apparaît N_n fois. On a $\sum_{k=0}^{2N} u_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{2N+1} u_k = x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\sum u_n$ converge.
Si $\sum f(u_n)$ convergeait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ alors

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(x_k)\right| < \frac{1}{2}$$

De plus, pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \dots + f(x_n) + f(-x_n) + f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2}$$

où $(f(x_n), f(-x_n))$ apparaît N_n fois. Comme

$$|f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2}$$

on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \dots + f(x_n) + f(-x_n)| = N_n \left|f(x_n) + f(-x_n)\right| < 1$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc f est impaire au voisinage de 0.}}$$

3. Supposons que pour tout $\beta > 0$, il existe $(x, y) \in]-\beta, \beta[^2$ avec $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$. Alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_n \in \mathbb{N}$,
$$M_n \left| f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n) \right| \geqslant 1$$
On définit alors
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \ldots, x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \ldots, x_n + y_n, -x_n, -y_n, \ldots)$$
où $(x_n + y_n, -x_n, -y_n)$ apparaît M_n fois. On a
$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } N \equiv 0[3] \\ x_n + y_n & \text{si } N \equiv 1[3] \\ y_n & \text{si } N \equiv 2[3] \end{cases} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$
donc $\sum u_n$ converge.
Si $\sum f(u_n)$ convergeait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(u_k) \right| < \frac{1}{2}$$
De plus, d'après 2., il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on a $f(-x_n) + f(-y_n) = -f(x_n) - f(y_n)$ donc pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a
$$\left| f(x_n + y_n) + f(-x_n) + f(-y_n) \right| \times M_n = \left| f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n) \right| \times M_n < 1$$
ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc f est linéaire au voisinage de 0.}}$$

4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*, x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant \frac{\beta}{|k|}$. Par récurrence, on a $f(kx) = kf(x)$.
Si $|x| < \beta$ et si $\frac{x}{\beta} \in \mathbb{Q}$, on a
$$\frac{x}{\frac{\beta}{2}} = \frac{p}{q}$$
donc en posant $\lambda = \frac{2}{\beta} f\left(\frac{\beta}{2}\right)$, on a
$$f(x) = f\left(\frac{p\beta}{2q}\right) = \frac{p}{q} f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{p}{q}\frac{\beta}{2}\lambda = \lambda x$$
Si $\frac{x}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{x}{\frac{\beta}{2}}$. On a alors
$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + r_n\frac{\beta}{2}\right) \\ &= f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + f\left(\frac{r_n\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

et $x - \frac{r_n\beta}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après 1. et $r_n f\left(\frac{\beta}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x$

$$\boxed{\text{Donc f est une homothétie au voisinage de 0.}}$$

■

Solution 45. On a $0 \leqslant r_k := k - n\lfloor \frac{k}{n} \rfloor < n$ donc $0 \leqslant u_k < \frac{n}{k(k+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ donc S existe. On écrit $k = n\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + r_k$, comme S est une série à termes positifs, on regroupe les terms suivant les valeurs de r_k (sommation par paquets). Alors

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r}{(jn+r)(jn+r+1)} \right), \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(jn+r)(jn+r+1)}. \end{aligned}$$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} V_j :&= \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{r}{jn+r} - \frac{r}{jn+r+1} \right), \\ &= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{jn+r} - \frac{1}{j+1}. \end{aligned}$$

On pose $H_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{1}$ pour $m \geqslant 1$ et $H_0 = 0$. On a $H_m = \ln(m) + \gamma + o(1)$ d'où $v_j = H_{n(j+1)} - H_{jn} - \frac{1}{j+1}$. Ainsi,

$$\sum_{j=0}^{N-1} V_j = H_{nN} - H_0 - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} = \ln(n) + o(1),$$

donc $S = \ln(n)$. ■