

*Exercices MP/MP**
Suites et séries de fonctions

Exercice 1. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n + kx)^{\frac{1}{n}}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(F_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 2. Soit $-\alpha \notin \mathbb{N}^*$. Pour $n \geq 1$, soit

$$u_n(x) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{(1+\alpha) \times \cdots \times (2n-1+\alpha)} x^n$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.
2. Trouver les valeurs de α telle que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.
3. Trouver les valeurs de α telle que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $] -1, 0]$

Exercice 3. On forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \arctan(k+x) - \arctan(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur ce domaine. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 4. On pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt})$$

Montrer que f est définie pour $t > 0$ et donner un équivalent de $f(t)$ quand $t \rightarrow 0^+$. On admet l'existence de $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \ln(1 - e^{-u}) du$.

Exercice 5. Soit

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{n^2 x^2}{1 + n^4 x^4} \end{aligned}$$

$(a_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $g_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p)$.

1. g_n est-elle définie ? Étudier la convergence simple de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \notin [a, b]$.

Exercice 6. Convergence simple de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

f est-elle \mathcal{C}^1 ? Donner la limite de f en 0 et $+\infty$. Donner un équivalent en 0.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ telle qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq M$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a, b]$. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 8. Soit $x \geq 1$. Soit $f_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}$. Étudier la convergence.

Exercice 9 (Produit Eulérien).

1. Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ une algèbre normée et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f_n : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ a &\mapsto \left(1_{\mathcal{A}} + \frac{a}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Montrer que

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} - f_n(a) \right\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{\|a\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|a\|}{n}\right)^n.$$

On pourra montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, n \rrbracket$, $\frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$. En déduire que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers \exp , avec convergence uniforme sur les compacts de \mathcal{A} .

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(X) = \frac{\left(1 + \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2i}.$$

Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers \sin sur \mathbb{C} .

3. Déterminer le degré de P_n , les racines de P_n et son coefficient en X . En déduire que

$$P_n = X \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).$$

4. Soit $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$. On suppose que

(i) Il existe $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$ et pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $|a_{n,p}| \leq \alpha_n$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $\beta_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} a_{n,p} \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$.

5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$. On pourra montrer que pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\tan(t)| \geq |t|$.

Exercice 10. Soit $[a, b] \subset]0, 1[$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x(1-x) \end{aligned}$$

On définit $f^1 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$.

1. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\frac{1}{2}$ sur $[a, b]$. A-t-on convergence uniforme sur $[0, 1]$?
2. Soit $\mathbb{Q}_2 = \left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q \in \mathbb{Q}_2[X]$ tel que $\|P - Q\|_{\infty, [a, b]} \leq \varepsilon$.
3. En déduire que pour tout $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, il existe $A \in \mathbb{Z}[X]$ telle que

$$\|f_n - A\|_{\infty, [a, b]} \leq \varepsilon.$$

Peut-on généraliser à d'autres intervalles ?

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications convexes de $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge simplement vers $u : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $[a, b] \subset \overset{\circ}{I}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in [a, b]$,

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq A |x - y|.$$

On pourra former $(\alpha, \beta) \in I^2$, $\alpha < a < b < \beta$, et étudier les taux d'accroissements des u_n .

2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers u sur $[a, b]$.

Exercice 12. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_{\infty}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\begin{aligned} \psi : E &\rightarrow E \\ f &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

est continue.

Exercice 13. On pose, sous réserve d'existence,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).$$

1. Donner le domaine de définition E de f .

2. f est-elle continue sur E ? Évaluer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

3. Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur $E \setminus \{0\}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par f .

Exercice 14. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{xe^{-nx}}{n^a} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Pour quelles valeurs de a a-t-on convergence normale sur $[0, 1]$?

3. Calculer S pour $a = 1$ et $a = 2$.

Exercice 15. Donner le domaine de définition de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + nx^{\frac{3}{2}}}.$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition. f est-elle intégrable sur son domaine de définition ?

Exercice 16.

1. Donner le domaine de définition de

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x).$$

2. Montrer que l'on a convergence uniforme sur $[0, \infty[$. A-t-on convergence normale ?

3. Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , mais n'est pas dérivable à droite en 0.

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^k} \right)$.

Exercice 17 (Théorème de Weierstrass trigonométrique). On pose, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Q_k : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto c_k \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^k \end{aligned}$$

où $c_k \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1$.

1. Montrer que pour tout $\delta \in]0, \pi]$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_k(t) = 0$.

2. Soit f continue 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . On définit

$$\begin{aligned} P_k : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds. \end{aligned}$$

Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} . On utilisera, en la justifiant, la continuité uniforme de f et son caractère borné sur \mathbb{R} .

3. On note, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{ikt}. \end{aligned}$$

On pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (« polynômes trigonométriques » 2π -périodiques). Montrer que F est dense dans E , \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions continues 2π -périodiques pour $\|\cdot\|_{\infty}$.

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions continues qui converge simplement vers u continue sur un compact $K \subset E$ où E est un espace vectoriel normé.

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de fonctions continues qui converge simplement vers 0.
2. Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n,\varepsilon} = \{x \in K | f_n(x) \geq \varepsilon\}$. Montrer que $F_{n,\varepsilon}$ est fermé, que $F_{n+1,\varepsilon} \subset F_{n,\varepsilon}$ et que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_{N,\varepsilon} = \emptyset$, puis que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur K .
3. Prouver le résultat en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$ tel que $f_n(x_n) = \max_{x \in K} f_n(x)$.

Exercice 19. On définit

$$\begin{aligned} f_0 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2} (x - f_n^2(x)).$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $\sqrt{\cdot}$.
2. Exhiber $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $|\cdot|$.
3. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.