

*Exercices MP/MP\**  
*Calcul matriciel*

**Exercice 1.** Soit  $M = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k, l \leq n}$  où  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Montrer que  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  et calculer  $M^{-1}$ . Que vaut  $\det(M)$  ?

**Exercice 2.** On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est positive et on note  $A \geq 0$  si et seulement si tous ses coefficients le sont.

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A \geq 0$  si et seulement si pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , si  $X \geq 0$  alors  $AX \geq 0$ .
2. Quelles sont les matrices  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  telles que  $A \geq 0$  et  $A^{-1} \geq 0$  ?

**Exercice 3.** Soit  $A = \left( \binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Calculer  $A^{-1}$  et  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 4.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique non nulle ( $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ ). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $\text{Tr}(A) = 0$ .

1. Montrer que  $A$  est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra procéder par récurrence, en distinguant selon qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $A = \lambda I_n$  ou non. Dans le deuxième cas, pour  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  canoniquement associée à  $A$ , on montrera qu'il existe  $e_1 \in \mathbb{K}^n$  telle que  $(e_1, u(e_1))$  est libre.
2. Montrer qu'il existe  $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  tel que  $A = [X, Y] = XY - YX$ . On pourra considérer

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto DM - MD \end{aligned} \quad (1)$$

avec  $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$  et déterminer  $\ker(\varphi)$ .

**Exercice 5.** Soit  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$ .

1. Pour quelles valeurs de  $\lambda$ ,  $I_n + \lambda XY^T$  est inversible ?
2. Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . A quelle condition nécessaire et suffisante  $A + \lambda XY^T \in GL_n(\mathbb{R})$  ? Montrer alors que

$$(A + \lambda XY^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{\lambda}{1 + \lambda Y^T A^{-1} X} A^{-1} X Y^T A^{-1}$$

**Exercice 6.** Soit  $n \geq 1$  et pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $S_j = X^j(1 - X)^{n-j}$ . Montrer que c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  et exprimer  $(1, X, \dots, X^n)$  en fonction de  $(S_0, \dots, S_n)$ .

**Exercice 7.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $H$  un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$  pour  $n \geq 2$ .

**Exercice 8.** Soit  $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

- (i)  $\forall \lambda \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N(\lambda A) = \lambda N(A)$ ,
- (ii)  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, N(A + B) \leq N(A) + N(B)$ ,
- (iii)  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, N(AB) = N(BA)$ .

1. Calculer  $N(0)$ .

2. Évaluer  $N(E_{i,j})$  pour  $i \neq j$  (matrice élémentaire de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).
3. Montrer que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est telle que  $\text{Tr}(A) = 0$ , alors  $A$  est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra procéder par récurrence, en distinguant selon qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $A = \lambda I_n$  ou non. Dans le deuxième cas, pour  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  canoniquement associée à  $A$ , on montrera qu'il existe  $e_1 \in \mathbb{K}^n$  telle que  $(e_1, u(e_1))$  est libre.
4. En déduire  $N(A)$  si  $\text{Tr}(A) = 0$ .
5. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}^+$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $N(A) = a|\text{Tr}(A)|$ .

**Exercice 9.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f \in GL(E)$  et  $g$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1. Montrer que  $f + g \in GL(E)$  si et seulement  $\text{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq 1$ .

**Exercice 10.** On considère un carré dans  $\mathbb{Z}^2$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , quel est le nombre de chemins de longueur  $n$  qui relie un sommet à un autre ? Généraliser à un cube dans  $\mathbb{Z}^3$ .

**Exercice 11** (Matrice à diagonale strictement dominante). Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$   $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ . On dit que  $A$  est à diagonale strictement dominante. Montrer que  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . Est-ce encore vrai si on a seulement l'inégalité large ?

**Exercice 12.** Calculer, pour  $n \geq 1$ ,  $\det\left((i \wedge j)_{1 \leq i,j \leq n}\right)$ . On pourra utiliser, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n = \sum_{k|n} \varphi(k)$ .

**Exercice 13.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On pose, pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ . On suppose que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_k \in GL_k(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe une unique décomposition  $(L, U) \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{C}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$  (matrices triangulaires inférieures et supérieures) où  $L$  a des 1 sur la diagonale et  $A = LU$ .

**Exercice 14.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_1, \dots, a_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$ , il existe des parties disjointes  $A_i$  et  $B_i$  de  $\{1, \dots, 2n+1\} \setminus \{i\}$  avec  $|A_i| = |B_i| = n$  et  $\sum_{k \in A_i} a_k = \sum_{k \in B_i} a_k$ .  
Montrer que  $a_1 = \dots = a_{2n+1}$ .

**Exercice 15.** Soit  $M \in GL_n(\mathbb{C})$ , montrer qu'il existe une unique permutation  $\sigma \in \Sigma_n$  et il existe  $(T, T') \in (\mathcal{T}_n^+)^2$  telles que  $M = TP_\sigma T'$  où  $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Cette décomposition est-elle unique ?

**Exercice 16.** Soit  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $J$  un idéal non nul de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que si  $J \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ , alors  $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que  $J$  contient une matrice de rang 1.
3. Montrer que  $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 17.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda \neq 0$  avec  $\lambda AB + A + B = 0$ , montrer que  $A$  et  $B$  commutent.

**Exercice 18.** Soit  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Inverser, si possible,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 19.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{i,i} = 0$  et pour tout  $i \neq j$ ,  $a_{i,j} + a_{j,i} = 1$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  canoniquement associé à  $A$ . Soit  $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ .

1. Déterminer  $\ker(u) \cap H$ . En déduire que  $\text{rg}(A) \in \{n-1, n\}$ .
2. Est-il possible que toutes les matrices  $A$  vérifiant ces conditions soient de rang  $n-1$  ?
3. Même question avec  $n$ .

**Exercice 20.** Soit  $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$  tel que  $\text{rg}(M) = \text{rg}(N) = 1$ . Montrer que  $M$  et  $N$  sont semblables si et seulement si  $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$ .

**Exercice 21.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $r = \max\{\text{rg}(M) \mid M \in F\}$ .

1. Montrer qu'il existe  $(P_0, Q_0) \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P_0^{-1} \underbrace{\left( \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{array} \right)}_{J_r} Q_0 \in F$$

On note  $F_0 = \{P_0 M Q_0^{-1} \mid M \in F\}$ .

2. Montrer que  $F_0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  isomorphe à  $F$ , et que  $r = \max\{\text{rg}(M_0) \mid M_0 \in F_0\}$ .
3. On définit

$$G_0 = \left( \begin{array}{c|c} 0_r & B^\top \\ \hline B & C \end{array} \right)$$

où  $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ . Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par  $G_0$  ?

4. Soit  $M_0 \in G_0 \cap F_0$  avec

$$M_0 = \left( \begin{array}{c|c} 0_r & B^\top \\ \hline B & C \end{array} \right) \in F_0$$

Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\left( \begin{array}{c|c} \lambda I_r & B^\top \\ \hline B & C \end{array} \right) \in F_0$$

En déduire que pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n-r\}^2$ , pour tout  $\lambda \neq 0$ ,

$$\det \left( \begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & & & \vdots \\ & \lambda I_r & & b_{j,r} \\ \hline b_{i,1} & \dots & b_{i,r} & c_{i,j} \end{array} \right) = 0$$

5. Montrer que  $C = 0$ , puis que  $B = 0$ .

6. Conclure.

7. Si  $\dim(F) \geq n^2 - n + 1$ , montrer que  $F \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ .

8. Et sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?

**Exercice 22.** Soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  non constante telle que pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ ,  $f(AB) = f(A) \times f(B)$ . Montrer que  $f(M) \neq 0$  si et seulement si  $M \in GL_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 23.** Soit  $(A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^k$  tels que

(i)  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_i^2 = A_i$ ,

(ii)  $\sum_{i=1}^k A_i = I_n$ .

Montrer que pour tout  $i \neq j$ ,  $A_i A_j = 0$ .