*Solutions MP/MP**
Réduction des endomorphismes

Solution 1.

1. On a
$$f^k : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & A^k M \end{array} \tag{1}$$
donc pour tout polynôme P, on a $P(f) = P(A)M$ par combinaison linéaire. Si $P(A) = 0$, alors $P(f) = 0$. Donc si A est diagonalisable, f l'est aussi. Si $P(f) = 0$ alors avec $M = I_n$, on a $P(A) = 0$ et A est diagonalisable si f l'est.

   Même résultat avec g et B.

2. Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ tel que $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{i,j} X_i Y_j^\top = 0$. Alors on a
$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_i \right) Y_j^\top = 0 \tag{2}$$
Soit $k \in [\![1,n]\!]$, la k-ième ligne de notre matrice est
$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_{i,k} \right) Y_j^\top = 0 \tag{3}$$
Puisque $(Y_j^\top)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est libre, on a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,
$$\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_{i,k} = 0 \tag{4}$$
Puisque $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda_{i,j} = 0$, d'où le résultat.

3. Puisque B est diagonalisable, $B^\top$ l'est aussi. On prend $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de A avec pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$. Prenons $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de $B^\top$ avec pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $B^\top Y_j = \mu_j Y_j$ et $Y_j B^\top = \mu_j Y_j^\top$. Ainsi,
$$h\left(X_i Y_j^\top\right) = AX_i Y_j^\top B = \mu_j AX_i Y_j^\top = \mu_j \lambda_i X_i Y_j^\top \tag{5}$$
et les $(X_i Y_j^\top)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ forment une base de E d'après ce qui précède. Donc h est diagonalisable.

   Réciproquement, on a le contre-exemple $A = 0$ et B non diagonalisable : h est l'endomorphisme nul.

■

Remarque 1. *Généralement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit*
$$h_{A,B} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AMB \end{array} \tag{6}$$

La matrice de $h_{A,B}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'appelle le produit tensoriel de A et B noté

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \tag{7}$$

On a toujours

$$\operatorname{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \operatorname{Tr}(B) = \operatorname{Tr}(A) \operatorname{Tr}(B) \tag{8}$$

Si A et B sont diagonalisables, $h_{A,B}$ l'est.

Solution 2. On pose $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$. Il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ telles que $UP_1 + VQ_1 = 1$. On a $MD = PQ$ donc $M = DP_1Q_1 = PQ_1 = P_1Q$.

1. Soit $x \in \ker(D(f))$. On a

$$P(f)(x) = DP_1(f)(x) = P_1(f) \circ D(f)(x) = 0 \tag{9}$$

De même pour $Q(f)(x) = 0$, donc

$$\ker(D(f)) \subset \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) \tag{10}$$

Soit $x \in \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f))$. On a

$$DUP_1 + DVQ_1 = 0 \tag{11}$$

d'où

$$UP + VQ = 0 \tag{12}$$

et

$$D(f)(x) = UP(f)(x) + VQ(f)(x) = 0 \tag{13}$$

Donc

$$\boxed{\ker(D(f)) = \ker(P(f)) \cap \ker(M(f))} \tag{14}$$

2. On a $P \mid M$ donc $\ker(P(f)) \subset \ker(M(f))$. De même, $\ker(Q(f)) \subset \ker(M(f))$ donc

$$\ker(P(f)) + \ker(Q(f)) \subset \ker(M(f)) \tag{15}$$

Si $x \in \ker(M(f))$, on a

$$x = \underbrace{UP_1(f)(x)}_{\in \ker(Q(f))} + \underbrace{VQ_1(f)(x)}_{\in \ker(P(f))} \tag{16}$$

car $M = P_1Q = Q_1P$. Donc

$$\boxed{\ker(M(f)) = \ker(P(f)) + \ker(Q(f))} \tag{17}$$

3. Si $i \in \mathrm{Im}(P(f))$, il existe $x \in E$ tel que $y = P(f)(x) = D(f) \circ P_1(f)(x) \in \mathrm{Im}(D(f))$. De même pour $\mathrm{Im}(Q(f)) \subset \mathrm{Im}(D(f))$. Donc

$$\mathrm{Im}(P(f)) + \mathrm{Im}(Q(f)) \subset \mathrm{Im}(D(f)) \tag{18}$$

Soit $y \in \mathrm{Im}(D(f))$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = D(f)(x) = \underbrace{UP(f)(x)}_{\in \mathrm{Im}(P(f))} + \underbrace{VQ(f)(x)}_{\in \mathrm{Im}(Q(f))} \tag{19}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(D(f)) = \mathrm{Im}(P(f)) + \mathrm{Im}(Q(f))} \tag{20}$$

4. On a $P \mid M$ d'où $\mathrm{Im}(M(f)) \subset \mathrm{Im}P(f)$ et $\mathrm{Im}(M(f)) \subset \mathrm{Im}Q(f)$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(M(f)) \subset \mathrm{Im}(Q(f)) \cap \mathrm{Im}\mathrm{Im}(Q(f)) \tag{21}$$

Si $y \in \mathrm{Im}(P(f)) \cap \mathrm{Im}(Q(f))$ alors il existe $(x, x') \in E^2$ tels que

$$y = P(f)(x) = P(f)(x') \tag{22}$$

Or $M = P_1 Q = PQ_1$ donc

$$y = UP_1(f)(y) + VQ_1(f)(y) = UP_1Q(f)(x') + VQ_1P(f)(x) \in \mathrm{Im}(M(f)) \tag{23}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(M(f)) = \mathrm{Im}(P(f)) \cap \mathrm{Im}(Q(f))} \tag{24}$$

■

Solution 3. On a

$$A\left(\frac{-1}{5}A + \frac{4}{5}I_n\right) = I_n \tag{25}$$

donc A est inversible.

$$X^2 - 4X + 5 = (X - 2 + \mathrm{i})(X - 2 - \mathrm{i}) \tag{26}$$

est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{pmatrix} \tag{27}$$

où $\lambda_1 = 2 + \mathrm{i}$ et $\lambda_2 = 2 - \mathrm{i}$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Tr}(A) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 \in \mathbb{R}$

Donc

$$\Im(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2) = 0 = n_1 - n_2 \tag{28}$$

Ainsi $n_1 = n_2$ donc n est pair.
A est semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Soit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{30}$$

On a $\chi_{A_0} = X^2 - 4X + 5$. A_0 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Donc A est semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$\begin{pmatrix} A_0 & & \\ & \ddots & \\ & & A_0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

donc A est semblable sur $\mathbb{R}$ à cette même matrice.

Soit $l \in \mathbb{N}$, on a

$$X^l = Q_p(X^2 - 4X + 5) + \alpha_l X + \beta_l \tag{33}$$

par division euclidienne. Donc

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \tag{34}$$

On a notamment

$$\begin{cases} (2+\mathrm{i})^l = \alpha_l(2+\mathrm{i}) + \beta_l \\ (2-\mathrm{i})^l = \alpha_l(2-\mathrm{i}) + \beta_l \end{cases} \tag{35}$$

On a donc

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_l = \frac{(2+\mathrm{i})^l - (2-\mathrm{i})^l}{2\mathrm{i}} \\ \beta_l = (2+\mathrm{i})^l - \frac{(2+\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\left[(2+\mathrm{i})^l - (2-\mathrm{i})^l\right] \end{cases}} \tag{36}$$

■

Remarque 2. *On a* $2 + \mathrm{i} = \sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *avec* $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in]0, \pi[$. *Donc* $\alpha_l = \left(\sqrt{5}\right)^l \sin(l\theta)$.

Remarque 3. *On a*

$$I_n - 4A^{-1} + 5A^{-2} = 0 \tag{37}$$

De même, $\left(X - \frac{1}{2-\mathrm{i}}\right)\left(X - \frac{1}{2+\mathrm{i}}\right)$ *annule* A^{-1} *et on a pour tout* $l \in -\mathbb{N}^*$,

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \tag{38}$$

Remarque 4. $(A-2I_n)^2 = -I_n$ *donc* $\det(-I_n) = (-1)^n > 0$ *donc* n *est pair.*

Solution 4.

1. On a
$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \tag{39}$$
et $\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T} \neq 0$ donc
$$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} \tag{40}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_n\end{pmatrix}^\mathsf{T} \neq 0$ associé à λ. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a
$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \tag{41}$$
Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| > 0$ car $X \neq 0$. On a alors
$$|\lambda|\,|x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\,|x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| \tag{42}$$
donc
$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1} \tag{43}$$

3. Soit $J_i = \{j \in [\![1,n]\!] | a_{i,j} > 0\}$. On a
$$|\lambda|\,|x_{i_0}| = \left|\sum_{j\in J_{i_0}} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j\in J_{i_0}} a_{i_0,j}\,|x_j| \leqslant \left(\sum_{j\in J_{i_0}} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| = |x_{i_0}| \tag{44}$$
On a égalité partout donc pour tout $j \in J_{i_0}$, $|x_j| = |x_{i_0}|$ et $x_j = |x_{i_0}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. En reportant, on a
$$\lambda\,|x_{i_0}| = \sum_{j\in J_{i_0}} a_{i_0,j}\,|x_{i_0}| \tag{45}$$
donc
$$\boxed{\lambda = 1} \tag{46}$$

4. Si $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$, on a $i_0 \notin J_{i_0}$ car sinon $\lambda = 1$. Donc il existe $i_1 \in J_{i_0} \setminus \{i_0\}$ tel que $x_{i_1} = |x_{i_0}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \lambda x_{i_0}$. Ainsi, il existe $i_2 \neq i_1$ tel que $x_{i_2} = \lambda x_{i_1}$. De proche en proche, il existe $i_q \neq i_{q-1}$ tel que $x_{i_q} = \lambda x_{i_{q-1}}$ (avec $q \geqslant 1$) et $x_{i_q} = \lambda^q x_{i_0}$. Or
$$\varphi : \begin{array}{rcl}\mathbb{N} & \to & [\![1,n]\!]\\ k & \mapsto & i_k\end{array} \tag{47}$$

n'est pas injective. Donc il existe $k > l$ tel que $i_k = i_l$ et $x_{i_k} = \lambda^{k-k} x_{i_k}$ et $k - l > 1$ donc

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{U}_{k-l}} \tag{48}$$

5. L'identité convient, les matrices de permutation aussi. En effet, si $\sigma \in \Sigma_n$, on a $P_\sigma^{n!} = I_n$ donc les valeurs propres sont racines de $X^{n!} - 1$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P_\sigma) \subset \mathbb{U}_{n!}$.
   Réciproquement, soit A stochastique telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset (\mathbb{U})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, supposons $|J_{i_0}| \geqslant 2$. D'après la décomposition de Dunford, il existe D diagonale et N nilpotente qui commutent telles que $A = D + N$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Si N est nilpotente d'indice $r \geqslant 2$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geqslant r$, on a

$$A^k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} N^j D^{k-j} = \sum_{j=1}^{r} \binom{k}{j} N^j D^{k-j} \tag{49}$$

   Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on a

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^j}{j!} \tag{50}$$

   Comme $N^{r-1} \neq 0$, on a

$$A^k \underset{k \to +\infty}{sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \tag{51}$$

   et les coefficients de D^{k-r+1} sont bornés car $\mathrm{Sp}(D) \subset \mathbb{U}$.
   Or, notons que si A et B sont stochastiques, AB l'est aussi ($\mathbf{1}$ est toujours valeur propre). Par récurrence, A^k l'est. Donc $A^k \in \mathcal{M}_n([0, 1])$, et l'équivalent est impossible si $r \geqslant 2$. Donc $r = 1$ donc $N = 0$ et $A = D$ est diagonalisable.
   Les valeurs propres de A sont des racines de l'unité, soit m le ppcm des ordres de ces racines (dans $(\mathbb{U}, \times)$). On a alors

$$A = P \,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \tag{52}$$

   d'où

$$A^m = P \,\mathrm{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) P^{-1} \tag{53}$$

   Notons $M = \max\limits_{j \in J_{i_0}} |a_{i_0,j}| < 1$ (car $|J_{i_0}| \geqslant 2$ donc pour tout $j \in J_{i_0}$, $a_{i_0,j} \neq 1$). On note $a_{i_0,i_0}^{(m)}$ le coefficient (i_0, i_0) de A^m. On a alors

$$a_{i_0,i_0}^{(m)} = 1 = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} a_{j,i_0}^{(m-1)} \leqslant M \sum_{j \in J_{i_0}} a_{j,i_0}^{(m-1)} \leqslant M \sum_{j=1}^{n} a_{j,i_0}^{(m-1)} = M \tag{54}$$

   car A^{m-1} est stochastique. Donc $M = 1$ ce qui n'est pas possible (par définition de M). Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|J_i| = 1$ donc il existe un unique $j_i \in [\![1, n]\!]$ avec $a_{i,j_i} = 1$ et pour tout $j \neq j_i$, $a_{i,j} = 0$.
   $i \mapsto j_i$ est injective, sinon $\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 1$ et $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

■

Remarque 5. *On peut avoir* $|\lambda| < 1$ *pour la question 2, par exemple*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \tag{55}$$

On a $A^2 = A$ *et* $\mathrm{rg}(A) = 1$, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

Remarque 6. *Par exemple, pour 4, on a*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

On a $\chi_A = X^2 - 1$ *et* $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

Remarque 7. *Si pour tout* $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} > 0$ *(i.e. pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $J_i = [\![1, n]\!]$*). D'après 3, on a* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{U} = \{1\}$*. De plus, si* $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ *vérifie* $AX = X$*, d'après ce qui précède, on a* $x_1 = \cdots = x_n$ *et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1.*

Solution 5.

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. On a $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B^\top)$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ. On pose $M = XY^\top$. Alors

$$\Phi_{A,B}(M) = AXY^\top - XY^\top B = (\lambda - \mu)XY^\top = (\lambda - \mu)M \tag{57}$$

donc

$$\boxed{\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(\Phi_{A,B})} \tag{58}$$

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathrm{Sp}(\Phi_{A,B})$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que l'on ait $AM - MB = \alpha M$ d'où $AM = M(\alpha I_n + B)$. Par récurrence, $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$ et par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ on a $P(A)M = MP(\alpha I_n + B)$. En particulier, on prend $P = \chi_A$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$0 = M\chi_A(\alpha I_n + B) \tag{59}$$

On a $M \neq 0$ donc $\chi_A(\alpha I_n + B)$ n'est pas inversible. On écrit

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) \tag{60}$$

d'où

$$\chi_A(\alpha I_n + B) = \prod_{k=1}^{n} (B + (\alpha - \lambda_k) I_n) \tag{61}$$

donc il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $B + (\alpha - \lambda_{k_0}) I_n$ est non inversible. Donc $\lambda_{k_0} - \alpha \in \mathrm{Sp}(B)$ et donc α est une différence d'un élément de $\mathrm{Sp}(A)$ et de $\mathrm{Sp}(B)$.

2. On forme

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \tag{62}$$

et

$$g_B : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & MB \end{array} \tag{63}$$

Toujours par récurrence et combinaison linéaires, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(f_A)M = P(A)M \tag{64}$$

Si $P(A) = 0$, on a $P(f_A) = 0$. Si $P(f_A) = 0$, pour $M = I_n$, on a $P(A) = 0$. De même pour B. Donc $\Pi_A = \Pi_{f_A}$ (polynômes minimaux) et A est diagonalisable si et seulement si $f_A(M)$ est diagonalisable. f_A et g_B commutent car

$$(f_A \circ g_B)(M) = AMB = (g_B \circ f_A)(M) \tag{65}$$

Donc f_A et g_B sont codiagonalisables et donc $\Phi_{A,B}$ l'est.

■

Remarque 8. *Si $(X_1, \dots, X_n)$ (respectivement $(Y_1, \dots, Y_n)$) est une base de vecteurs propres de A (respectivement de $B^\top$), alors $(X_i Y_j^\top)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de vecteurs propres pour $\Phi_{A,B}$.*

Remarque 9. *C'est faux sur $\mathbb{R}$, par exemple*

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{66}$$

On a $\mathrm{Sp}_\mathbb{R} = \emptyset$ et $\Phi_{A,A}(I_2) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Sp}_{\Phi_{A,A}}$.

Remarque 10. *Si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, soit $(M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(B)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $BX = \lambda X$. On a*

$$AM_{i,j} = M_{i,j}(B + \lambda_{i,j} I_n) \tag{67}$$

avec $\Phi_{A,B}(M_{i,j}) = \lambda_{i,j} M_{i,j}$. Donc

$$AM_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j}) M_{i,j} X \tag{68}$$

Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $X_0 = MX$. $M \in \mathrm{Vect}(M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ donc

$$\mathrm{Vect}(M_{i,j}X)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \tag{69}$$

On peut donc en extraire une base : c'est une base de vecteurs propres de A.

Solution 6.

1. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^kM = \theta^k MA^k$, or F est un sous-espace vectoriel donc par combinaisons linéaires, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$.
2. Soit $X \in \ker(A - \lambda I_n)$. On a $AMX = \theta MAX = \lambda\theta MX$. On a donc $MX \in \ker(A - \lambda\theta I_n)$.

   Si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a $\theta\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \ker(A-\lambda I_n)$, alors $\ker(A - \lambda\theta I_n) = \{0\}$. Donc $MX = 0$. Or les vecteurs propres forment une famille génératrice donc $M = 0$ et $F = \{0\}$.

   S'il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\theta\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Soit X_1 un vecteur propre de A associé à λ_0. On complète (X_1) en $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ base de $\mathbb{C}^n$ formé de vecteurs propres de A. On définit $MX_1 = Y_1 \in \ker(A - \lambda_0\theta I_n) \setminus \{0\}$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a $MX_i = 0$. Ainsi, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a

   $$AMX_i = 0 = \theta MAX_i = \theta\lambda_i MX_i \tag{70}$$

   et

   $$AMX_1 = AY_1 = \lambda_0\theta Y_1 = \theta MAX_1 = \theta\lambda_0 X_1 \tag{71}$$

   Donc $M \neq 0$ et $M \in F$. Finalement, on a $F = \{0\}$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \theta\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
3. On écrit $\chi_A = \prod_{j=1}^{r}(X - \lambda_j)^{m_j}$ avec λ_j distincts et $m_j \geqslant 1$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

   $$\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^{r} \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \tag{72}$$

   Supposons $\theta \neq 0$. Si $M \in F$ et si $x \in \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$. On a

   $$\left(\left(\frac{X}{\theta} - \lambda_j\right)^{m_j}\right)(A)(Mx) = M\left(A - \lambda_j I_n\right)^{m_j}(x) = 0 \tag{73}$$

   Donc

   $$Mx \in \ker\left(\frac{1}{\theta}A - \lambda_j I_n\right)^{m_j} = \ker\left(A - \theta\lambda_j I_n\right)^{m_j} \tag{74}$$

   car $\theta \neq 0$.

   De plus, $\ker(A - \theta\lambda_j I_n)^{m_j} \neq \{0\}0$ si et seulement si $\ker(A - \theta\lambda_j I_n) \neq \{0\}$ car

   $$\det\left[(A - \theta\lambda_j I_n)^{m_j}\right] = \det\left[(A - \theta\lambda_j I_n)\right]^{m_j} \tag{75}$$

   Si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\lambda\theta \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, soit $x \in \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$. On a

   $$Mx \in \ker(A - \theta\lambda_j I_n)^{m_j} = \{0\} \tag{76}$$

   donc $M = 0$ car $\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^{r} \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$.

S'il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\lambda_0\theta \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, soit $x_1 \in \ker(A - \lambda_0 I_n) \neq \{0\}$. On pose

$$Mx_1 = y_1 \in \ker(A - \lambda_0\theta I_n) \setminus \{0\} \tag{77}$$

On complète (x_1) en $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs appartenant à

$$\bigcup_{j=1}^{r} \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \tag{78}$$

On a pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $Mx_i = 0$. On a $M \neq 0$ et

$$AMx_1 = Ay_1 = \theta\lambda_0 y_1 = \theta\lambda_0 Mx_1 \tag{79}$$

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a $AMx_i = 0$ si $x_i \in \ker(A - \lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$ et si $\lambda_{j_i} \neq \lambda_0$. On a $Ax_i \in \ker(A - \lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$ donc

$$Ax_i \in \mathrm{Vect}(x_2, \dots, x_n) \tag{80}$$

et $MAx_i = 0$ donc $AMx_i = \theta MAx_i$.
Si $F \neq \{0\}$, il existe $M \neq 0$ tel que $AM = \theta MA$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$. En particulier, pour $P = \chi_A$, on a

$$M\chi_A(\theta A) = 0 \tag{81}$$

$M \neq 0$ et donc $\chi_A(\theta A)$ n'est pas inversible. Si $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$, $(\theta A - \lambda_k I_n)$ est non inversible, d'où

$$\boxed{\lambda_k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\theta A)} \tag{82}$$

■

Solution 7. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} && (83)\\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} && (84)\\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} && (85)\\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} && (86)\\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} && (87)\\
&= (\lambda-3)(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} && (88)\\
&= (\lambda-3)(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} && (89)\\
&= (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda^2+1) && (90)
\end{aligned}$$

où l'on a fait successivement les opérations suivantes : $L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3+L_4$, $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i \in \{2,3,4\}$, développement selon la première ligne, $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$, $L_i \leftarrow L_i + L_1$ pour $i \in \{2,3\}$, développement selon la première colonne.

χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable. On trouve ensuite un vecteur propre dans chaque sous-espace propre (qui sont de dimension un). ■

Solution 8.

1. On a $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $AX = \lambda X$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sum_{i\neq 1} a_i x_i &=& \lambda x_1 \\ \vdots && \\ \sum_{i\neq j} a_i x_i &=& \lambda x_1 \\ \vdots && \\ \sum_{i\neq n} a_i x_i &=& \lambda x_1 \end{array}\right. \tag{91}$$

Soit $S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Ce système équivaut à

$$S = (\lambda + a_1)x_1 = \cdots = (\lambda + a_n)x_n \tag{92}$$

Si $S = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda = -a_i$ ou $x_i = 0$ (et $X \neq 0$). Les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, il existe un unique $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda = -a_{i_0}$ et pour tout $i \neq i_0$, on a $x_i = 0$. En reportant, on a $S = 0 = \lambda x_{i_0}$ donc $\lambda = 0$ ce qui est impossible car $0 = \lambda = -a_{i_0} > 0$. Donc $S \neq 0$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda + a_i \neq 0$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \frac{S}{\lambda + a_i}$. On a alors

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i S}{\lambda + a_i} \tag{93}$$

donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1} \tag{94}$$

Réciproquement, on prend $x_i = \frac{1}{\lambda + a_i}$ et on a bien $AX = \lambda X$.

2. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-a_n, \ldots, -a_1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x+a_i} \end{array} \tag{95}$$

3. Posons $-a_{n+1} = -\infty$ et $-a_0 = +\infty$. Sur $] - a_{k+1}, -a_k[$, on a

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{-a_i}{(x + a_i)^2} \tag{96}$$

Les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant positifs, on a $\lim\limits_{x\to -a_{k+1}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -a_k^-} f(x) = -\infty$ (si $k \neq n$) (et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique $\lambda_k \in] - a_{k+1}, -a_k[$ tel que $f(\lambda_k) = 1$. Donc A admet exactement n valeurs propres réelles distinctes. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

■

Remarque 11. *Soit*

$$F(X) = -\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X + a_k} + 1 = \frac{P(X)}{(X + a_1 \ldots (X + a_n))} \tag{97}$$

avec $P = (X + a_1)\ldots(X + a_n) - \sum_{k=1}^n a_k P_k$ *où* $P_k = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}(X + a_i)$ *de degré* $n - 1$*. On a* $\deg(P) = n$ *et son coefficient dominant est 1. De plus, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a* $P(\lambda) = 0$ *si et seulement si* $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$ *si et seulement si* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ *donc* $P = \chi_A$*.*

Solution 9. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \frac{\lambda}{j} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \times \operatorname{diag}(1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{98}$$

où le coefficient est à la i-ième ligne et la j-ième colonne. La matrice à gauche est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Donc les matrices de transvections sont dans G. De plus, les matrices de dilatations sont aussi dans G. Donc $G = GL_n(\mathbb{R})$. ■

Solution 10. Supposons u diagonalisable, il existe un base $\mathcal{B}$ telle que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \tag{99}$$

avec $\lambda_i \neq 0$. Donc $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = A^p) \operatorname{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p)$ donc u^p est diagonalisable. On a toujours $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et la forme diagonale implique $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Supposons u^p diagonalisable, on écrit $\Pi_{u^p} = (X - \lambda_0) \dots (X - \lambda_r) = R$ (avec $\lambda_k \neq 0$ pour tout $k \geqslant k$) qui est scindé à racines simples. On a

$$P(u^p) = 0 = (u^p - \lambda_0 id_E) \circ \dots \circ (u^p - \lambda_r id_E) = Q(u) \tag{100}$$

avec $Q(X) = P(X^p)$.

Si $\lambda_0 \neq 0$, chaque λ_k admet p racines p-ièmes distinctes et si μ_k est l'une de ses racines, on a

$$X^p - \lambda_k = \prod_{j=1}^{p} \left(X - \mu_k e^{i \frac{2j\pi}{p}} \right) \tag{101}$$

De plus, les racines p-ièmes des $(\lambda_k)_{kk \in [\![1,r]\!]}$ sont deux à deux distinctes. Donc Q est scindé à racines simples, et donc u est diagonalisable.

Si $\lambda_0 = 0$, on a $Q = X^p A(X)$ avec A scindé à racines simples non nulles et $X^p \wedge A = 1$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker(Q(u)) = \mathbb{C}^n = \ker(u^p) \otimes \ker(A(u)) = \ker(u^p) \otimes_{i \in I} \ker(u - \mu_i id) \tag{102}$$

car A est scindé à racines simples. Montrons que $\ker(u) = \ker(u^p)$. L'inclusion directe est évidente. Réciproquement, montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$ et si $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$, alors $\ker(u^{k+1}) = \ker(u^{k+2})$. L'inclusion est évidente, et si on a l'égalité, si $x \in \ker(u^{k+2})$, on a $u(x) \in \ker(u^{k+1}) = \ker(u^k)$ donc $x \in \ker(u^{k+1})$. Comme $\ker(u) = \ker(u^2)$, d'après ce qui précède, par récurrence, on a $\ker(u) = \ker(u^p)$, donc u est diagonalisable. ■

Solution 11. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, u canoniquement associée à

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{103}$$

. On a

$$\begin{cases} u(e_1) & = & e_n \\ u(e_2) & = & e_1 \\ \vdots & & \\ u(e_n) & = & e_{n-1} \end{cases} \tag{104}$$

d'où

$$\begin{cases} u^k(e_1) & = & e_{n+1-k} \\ \vdots u^k(e_{k-1}) & = & e_{n-1} \\ \vdots & & \\ u^k(e_n) & = & e_{n-k} \end{cases} \tag{105}$$

et donc

$$J_n^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{106}$$

où les 1 commencent à la $k+1$-ième colonne sur la première ligne et à la $n-k+1$-ième ligne sur la première colonne. Notamment, le 1 sur la dernière colonne est à la $n-k$-ième ligne.

On a $A(a_0,\dots,a_n)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kJ_n^k$. En développant par rapport à la première ligne, on a

$$\chi_{J_n}(X)=X\begin{vmatrix}X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & X\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & X & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X\end{vmatrix}\tag{107}$$

Le premier déterminant vaut X^{n-1} et le deuxième vaut $-(-1)^n\times(-1)^{n-2}=-1$ donc $\chi_{J_n}(X)=X^n-1$. Ainsi, χ_{J_n} est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc J_n est diagonalisable avec des sous-espaces propres de dimension 1. Soit $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$, on a $\mathrm{Sp}(J_n)=\left\{\omega^k,0\leqslant k\leqslant n-1\right\}$. On a $J_nX=\omega^kX$ si et seulement si

$$\begin{cases}x_2 &= \omega^kx_1\\ \vdots & \\ x_n &= =\omega^kx_{n-1}\\ x_1 &= \omega^kx_n\end{cases}\tag{108}$$

si et seulement si

$$X=x_1\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ (\omega^k)^{n-1}\end{pmatrix}=x_1X_k\tag{109}$$

avec X_k vecteur propre de J_n associé à ω^k. Posons

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \omega & & \omega^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1}\end{pmatrix}\tag{110}$$

et $P^{-1}J_nP=\mathrm{diag}(1,\omega,\dots,\omega^{n-1})$. On a donc $P^{-1}A(a_0,\dots,a_n)P=\mathrm{diag}(Q(1),Q(\omega),\dots,Q(\omega^{n-1}))$ où $Q=\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$. Donc A est diagonalisable de valeurs propres $Q(1),\dots,Q(\omega^{n-1})$ et donc

$$\boxed{\det(A)=\prod_{k=0}^{n-1}Q(\omega^k)}\tag{111}$$

■

Remarque 12. *On a*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\mathrm{j}b+\mathrm{j}^2c)(a+\mathrm{j}^2b+\mathrm{j}c) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \quad (112)$$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ vérifient $a+b+c=1$, on a

$$\left|a+\mathrm{j}b+\mathrm{j}^2c\right| = \left|a+\mathrm{j}^2b+\mathrm{j}c\right| \leqslant a+b+c = 1 \quad (113)$$

si et seulement si $a, \mathrm{j}b, \mathrm{j}^2c$ ont même argument si et seulement si $\{a, b, c\} = \{1, 0, 0\}$.

Solution 12. On sait que que $f^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^m)$ pour tout $m \geqslant k$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et

$$u : \begin{array}{ccc} \ker(f^{+1}) & \to & \ker(f^k) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \quad (114)$$

est bien définie car si $x \in \ker(f^{k+1})$, $f(x) \in \ker(f^k)$. Comme $\ker(f) \subset \ker(f^{k+1})$, $\ker(u) = \ker(f)$ et $\dim(\ker(u)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f^{k+1})) = \mathrm{rg}(u)+1 \leqslant \dim(\ker(f^k))+1$. Par récurrence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dim(\ker(f^k)) \leqslant k$ (car on ne peut croître au lus de 1 à chaque itération).

Si $f^{n-1} = 0$, on a $\dim(\ker(f^{n-1})) = n \leqslant n-1$ ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{f^{n-1} \neq 0} \quad (115)$$

Soit $x \notin \ker(f^{n-1})$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Si $\alpha_0 x + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$, en appliquant f^{n-1}, on a $\alpha_0 f^{n-1}(x) = 0$ donc $\alpha_0 = 0$. Puis on applique f^{n-2}, etc. De proche en proche, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Ainsi, $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre en dimension n, c'est donc une base et on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (116)$$

qui est une matrice nilpotente d'indice n. Matriciellement, on a $\ker(f^k) = \mathrm{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$. ■

Solution 13. Supposons qu'il existe $x \in V$, $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de V. Notons $u^n(x) = a_0 x + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$. Soit $y \in V$ tel que $u(y) = \lambda y$. Pour $y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^i(x)$. On a donc

$$u(y) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^{i+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda y_i u^i(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1} u^i(x) + y_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x) \quad (117)$$

Donc $u(y) = \sum_{i=1}^{n-1} u^i(x)(y_{i-1} + y_{n-1}a_i) + y_{n-1}a_0 x$ donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda y_0 & = & y_{n-1}a_0 \\ \lambda y_1 & = & y_0 + a_1 y_{n-1} \\ \vdots & & \\ \lambda y_{n-2} & = & y_{n-3} + a_{n-2}y_{n-1} \\ \lambda y_{n-1} & = & y_{n-2} + a_{n-1}y_{n-1} \end{array}\right. \tag{118}$$

donc par récurrence

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda y_{n-2} & = & (\lambda - a_{n-1})y_{n-1} \\ \lambda y_{n-3} & = & (\lambda(\lambda - a_{n-1}) - a_{n-2})y_{n-1} \\ \vdots & & \\ \lambda y_0 & = & (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1)y_{n-1} \end{array}\right. \tag{119}$$

Donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Supposons que les sous-espaces propres de u sont de dimension 1. On écrit $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$V = \bigotimes_{i=1}^r \underbrace{\ker(u - \lambda_i id_V)^{n_i}}_{F_i} \tag{120}$$

et les sous-espaces caractéristiques F_i sont stables par u. Soit $v_i = u_{|F_i} - \lambda_i id_{F_i}$. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^r \chi_{u_{|F_i}}$ (matrice diagonale par blocs dans un base adaptée). $(X - \lambda_i)^n$ annule $u_{|F_i}$ et $\mathrm{Sp}_{F_i}(u_{|F_i}) = \{\lambda_i\}$. Alors $\chi_{u_{|F_i}} = (X - \lambda_i)^{\dim(F_i)}$. En reportant, on a $\dim(F_i) = n_i$. De plus, $V_i^{n_i} = 0$ donc v_i est nilpotent. On a donc $\dim(\ker(v_i)) = \dim(\ker(u - \lambda_i id_E)) = 1$. Donc il existe $x_i \in F_i$ tel que $(x_i, v_i(x_i), \ldots, v_i^{n_i-1}(x_i))$ soit une base de F_i.

On forme $x = \sum_{i=1}^r x_i$. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1})$ tel que $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x) = 0 = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i)\right)$. Les F_i sont en somme directe donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i) = 0 \tag{121}$$

Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$. $I_{x_i} = \{A \in \mathbb{C}[X] | A(u)(x_i) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ donc est principal et il existe $\Pi_i \in I_{x_i}$ minimal et

$$\Pi_i \mid P \tag{122}$$

On a $(X - \lambda_i)^{n_i}(u)(x_i) = 0$ et $(x_i, u(x_i), \ldots, u^{n_i-1}(x))$ est libre, donc si $P \in I_{x_i}$, $\deg(P) \geqslant n_i$ donc $\deg(\Pi_i) = n_i$ et $\Pi_i = (X - \lambda_i)^{n_i}$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\Pi_i \mid P$ et donc

$$\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i} \mid P \tag{123}$$

Mais P est de degré $\leqslant n - 1$, nécessairement $P = 0$ et $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre. ■

Remarque 13. *Autre méthode pour le sens direct : on a*

$$\mathrm{mat}_{(x,u(x),\dots,u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = A \tag{124}$$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, *on a*

$$A - \lambda I_n = \mathrm{mat}_{(x,u(x),\dots,u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \tag{125}$$

qui est non inversible, mais donc les $(n-1)$ *première colonnes sont libres, donc est de rang* $n-1$.

Solution 14.

1. On utilise le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^k)$ alors pour tout $l \geqslant k$, $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^l)$.
   En effet, si $x = f^{k+1}(x') \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$,, on a $x = f^k(f(x)) \in \mathrm{Im}(f^k)$. Si on a égalité des espaces, soit $x = f^{k+1}(x') = f(f^k(x')) \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$. Alors $f^k(x') \in \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$ donc il existe x'' tel que $f^k(x') = f^{k+1}(x'')$, mais alors $x = f^{k+2}(x'') \in \mathrm{Im}(f^{k+2})$. On a donc le résultat en itérant.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant d$, on a $\mathrm{rg}(f^n) = \mathrm{rg}(f^d)$ donc $(\mathrm{rg}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire au moins à partir de d et $r(f) = \mathrm{rg}(f^d)$.
2. Comme f et g commutent, on a

$$(f+g)^{2d} = \sum_{k=0}^{2d} \binom{2d}{k} f^k g^{2d-k} \tag{126}$$

   Pour tot $k \in [\![0, 2d]\!]$, on a $k \geqslant d$ ou $2d - k \geqslant d$ donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \mathrm{Im}(f^d) \\ \text{ou} \\ \mathrm{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \mathrm{Im}(g^d) \end{array} \right. \tag{127}$$

et donc $\mathrm{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \mathrm{Im}(f^d)+\mathrm{Im}(g^d)$. Finalement, $\mathrm{Im}(f+g)^{2d} \subset \mathrm{Im}(f^d)+\mathrm{Im}(g^d)$. On a donc

$$\begin{aligned} r(f+g) &= \dim(\mathrm{Im}(f+g)^{2d}) && (128)\\ &\leqslant \dim(\mathrm{Im}(f^d)+\mathrm{Im}(g^d)) && (129)\\ &\leqslant \dim(\mathrm{Im}(f^d))+\mathrm{Im}(g^d) && (130)\\ &\leqslant r(f)+r(g) && (131)\end{aligned}$$

Pour un contre-exemple, on utilise $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^{\mathsf{T}}$. On a $A^2 = B^2$ donc $r(A^2) = r(B^2) = 0$ et $A+B$ inversible donc $r(A+B) = 2 > r(A)+r(B)$.

3. On a $\chi_f = X^{m_0} Q$ avec $\deg(Q) = d - m_0$ et $Q(0) = 0$. D'après le lemme des noyaux, on a
$$V = \ker(f^{m_0}) \otimes \ker(Q(f)) \tag{132}$$
Dans une base adaptée $\mathcal{B}$, on a $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A^{m_0} = 0$ et B inversible. Alors pour tout $k \geqslant m_0$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(f^k) = \mathrm{rg}(B^k) = d - m_0 = r(f)$.

■

Solution 15. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $|||A||| = \sup\limits_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty$. Notons que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| \leqslant |||A|||$. En effet, si X est un vecteur propre associé à λ, on a

$$\|AX\|_\infty = |\lambda|\,\|X\|_\infty \leqslant |||A|||\,\|X\|_\infty \tag{133}$$

et $X \neq 0$ donc $\|X\|_\infty \neq 0$.

Soit $A = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}} I_n$, soit $B \in \mathcal{G}_q$ telle que $|||B-A||| \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, on a $\mu \in \mathbb{U}_q$ car $B^q = I_n$. Donc $\mu - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B-A)$ et

$$\left|\mu - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}}\right| \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \tag{134}$$

Si $\mu = \mathrm{e}^{\frac{2il\pi}{q}}$, on a
$$\left|\mu - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{(l-k)\,\pi}{q}\right)\right| > \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \tag{135}$$
si $l \neq k$. Nécessairement, on a $\mu = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}}$, donc $B = A$ car B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{q}}\right\}$. Donc A est un point isolé de $\mathcal{G}_q$.

Soit maintenant $A \in \mathcal{G}_q$, on suppose que A n'est pas une matrice scalaire, donc $|\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)| \geqslant 2$. Soit $\lambda \in (\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_r)$

avec $\mu_1, \ldots, \mu_r \neq \lambda$. Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$A_\varepsilon = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \varepsilon & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \mu_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \mu_r \end{pmatrix} P^{-1} \tag{136}$$

On a $A_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} A$ et $A_\varepsilon \neq A$. Montrons que $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$. On a $\chi_{A_\varepsilon} = \chi_A$, $\mathrm{rg}\,(A_\varepsilon - \lambda I_n) = \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ (observer les colonnes) et pour $\mu_l \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mu_l \neq \lambda$, on a $\mathrm{rg}\,(A_\varepsilon - \mu_l I_n) = \mathrm{rg}\,(A - \mu_l I_n)$ (observer les lignes). La dimension des sous-espaces propres de A et A_ε sont les mêmes donc A_ε est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A_\varepsilon) \subset \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{U}_q$ donc $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$. Ainsi, A n'est pas isolé dans $\mathcal{G}_q$. ■

Solution 16. On a

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1) - ((\lambda-1)-1) = \lambda(\lambda-2)^2 \tag{137}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathsf{T}$. On a $MX = 0$ si et seulement si $y = x$ et $z = -x$ donc $E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$.

On a $(M - 2I_3)X = 0$ si et seulement si $y = z = -x$ donc $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$.

M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais trigonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u) \otimes \ker(u - 2id)^2 \tag{138}$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \star \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{139}$$

avec $\varepsilon_3 \in \ker(u - 2id)^2$ et $\varepsilon_3 \notin \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$. On a

$$(M - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{140}$$

donc $(M-2I_3)^2X=0$ si et seulement si $2x-y+z=0$. On pose $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. On a $M\varepsilon_3=-\varepsilon_2+2\varepsilon_3$ donc si

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\tag{141}$$

on a

$$P^{-1}MP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\tag{142}$$

Les sous-espaces stables de dimension 0 : $\{0\}$. Les sous-espaces stables de dimension 1 : ils sont engendrés par les vecteurs propres, ce sont donc $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$. Si maintenant F est un sous-espace stable de dimension 2, montrons que l'on a

$$F=(F\cap\ker(u))\otimes\left(F\cap\ker(u-2id)^2\right)=F_0\otimes F_2\tag{143}$$

En effet, on a $F_0\otimes F_2\subset F$. Si maintenant $x\in F$, a priori on a $x=x_0+x_2$ avec $x_0\in\ker(u)$ et $x_2\in\ker(u-2id)^2$. On a $u(x)=u(x_2)\in F$ par stabilité, $u^2(x)=u^2(x_2)\in F$, et $(u-2id)^2(x_2)=0$ donc $x_2=\frac{1}{4}\left(-u^2(x)+4u(x_2)\right)\in F$ et $x_0=x-x_2\in F$.

On a $F_0=\{0\}$ ou $\ker(u)$. Si $F_0=\{0\}$, on a $F=F_2$. Si $F_0=\ker(u)$, on a $\dim(F_2)=1$ donc $F_2=\mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$.

Donc les sous-espaces stables de dimension 2 sont $\ker(u-2id)^2$ et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Enfin, les sous-espaces stables de dimension 3 : $\mathbb{R}^3$. ■

Remarque 14. *Plus généralement, si $\chi_u=\prod_{i=1}^r(X-\lambda_i)^{m_i}$. On écrit*

$$E=\bigotimes_{i=1}^r\ker(u-\lambda_i id_E)^{m_i}=\bigotimes_{i=1}^r F_i\tag{144}$$

Si F est stable, on note Π_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigotimes_{\substack{j=1\\j\neq i}}^r F_i\in\mathbb{K}[u]$. On a pour tout $x\in F$, $\Pi_i(x)\in F$ par stabilité, il s'ensuit que

$$\boxed{F=\bigotimes_{i=1}^r(F\cap F_i)}\tag{145}$$

Solution 17.

1. Si $(a_1,\dots,a_n)\neq(0,\dots,0)$, on a

$$A-I_{n+1}=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1\\ & 0_n & & \vdots\\ & & & a_n\\ \hline a_1 & \dots & a_n & 0\end{array}\right)\tag{146}$$

donc $\mathrm{rg}(A-I_{n+1})=2$ et $\chi_{A-I_{n+1}}=X^{n-1}(X-\lambda)(X-\mu)$ (sur $\mathbb{C}$). On a $\mathrm{Tr}(A-I_{n+1})=0=\mu+\lambda$ et $\mathrm{Tr}(A-I_{n+1})^2=2\sum_{i=1}^n a_i^2=\lambda^2+\mu^2$ donc $\{\lambda,\mu\}\in\left\{\pm\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\right\}$ et $A-I_{n+1}$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{147}$$

2. On note $\lambda=\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. Soit X tel que $A'X=\pm\lambda$ où $A'=A-I_{n+1}$. Alors en écrivant le système, on vérifie que l'on peut prendre

$$f_\pm=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{148}$$

et si X est tel que $A'X=0$, si i_0 est tel que $a_{i_0}\neq 0$, on récupère une bas de $\ker(A')$ avec

$$f_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{149}$$

où $i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}$. Le 1 est à la i-ième ligne, $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$ est à la ligne i_0.

■

Solution 18. On pose $|\!|\!|A|\!|\!|=\sup\limits_{\|X\|_\infty=1}\|AX\|_\infty$. On montre d'abord que si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ $|\lambda|\leqslant|\!|\!|A|\!|\!|$. En effet, si X non nul est tel que $AX=\lambda X$, on a $\|AX\|_\infty\leqslant|\!|\!|A|\!|\!|\,\|X\|_\infty$ donc $|\lambda|\,\|X\|_\infty\leqslant|\!|\!|A|\!|\!|\,\|X\|_\infty$, d'où le résultat.

Soit alors $m=\sup\{|\!|\!|M|\!|\!| \mid M\in G\}$. Soit $M\in G$ et $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a $|\lambda|\leqslant m$. Comme $M^k\in G$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a aussi $|\lambda|^k\leqslant m$ donc $|\lambda|=1$ (faire tendre k vers $-\infty$ et $+\infty$).

Grâce à la décomposition de Dunford, on a $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et D et N qui commutent. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^{r-1} \neq 0$ et $N^r = 0$. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$ donc $G \in GL_n(\mathbb{C})$ et $MD^{-1} = I_n + ND^{-1}$ avec ND^{-1} est nilpotente d'indice r. On a pour tout $k \geqslant r$, on a

$$\begin{aligned}(MD^{-1})^k &= M^k(D^{-1})^k && (150)\\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (ND^{-1})^i && (151)\\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{k}{i} (ND^{-1})^i && (152)\\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} && (153)\end{aligned}$$

Notons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si $\|X\|_\infty = 1$, on a

$$\|(AB)X\|_\infty \leqslant |||A|||\, \|BX\|_\infty \leqslant |||A||| |||B||| \tag{154}$$

donc $|||AB||| \leqslant |||A||| |||B|||$.

La suite $(MD^{-1})^k$ est bornée, donc $r = 1$ et $N = 0$, donc M est diagonalisable.

Prenons ensuite $\alpha = \sqrt{3}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on a $\lambda - 1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M - I_n)$. Si $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1\right| < \sqrt{3}$ si et seulement si $2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < \sqrt{3}$ si et seulement si $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$. Donc on a aussi $\left|\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Quitte à changer θ en $-\theta$, on peut supposer $\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$. Si $\theta \geqslant 0$, posons l'unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\theta \geqslant \frac{2\pi}{3}$ et $(k-1)\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$. On a alors

$$k\theta = (k-1)\theta + \theta < \frac{4\pi}{3} \tag{155}$$

ce qui est absurde si et seulement si $\left|\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\right| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $\theta = 0$ et $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$, et puisque M est diagonalisable, $M = I_n$ et $G = \{I_n\}$. ■

Remarque 15. *Soit $\alpha > \sqrt{3}$ et $G = \{I_n, \mathrm{j}I_n, \mathrm{j}^2 I_n\}$. Pour tout $M \in G$, $|||M - I_n||| < \alpha$ et $G \neq \{I_n\}$.*

Solution 19.

1. On vérifie que $\chi_A(\lambda) = \lambda^3$. On a $AX = 0$ si et seulement si $x_1 = x_3$ et $x_2 = -2x_1$. On prend $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. u est nilpotente et $\dim(\ker(u)) = 1$. On a $u^3 = 0$ et on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{156}$$

Soit $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, on a $u^2(e_1) \neq 0$ donc $(u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{157}$$

$\dim(\ker(u^k)) = k$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$, notamment car $\mathrm{rg}(u^2) = 1$ pour justifier que $\dim(\ker(u^2)) = 2$.

Soit F stable par u de dimension $i \in \{0,1,2,3\}$. $u_{|F}$ est nimpotente et $u_{|F}^i = 0$. Donc $F \subset \ker(u^i)$ qui est de dimension i. Donc $F = \ker(u^i)$.

2. Si $B^2 = A$, $B^6 = 0$ donc $B^3 = 0$. Alors $B^4 = 0 = A^2$ ce qui n'est pas vrai. Donc il n'y a pas de B tel que $B^2 = A$.

■

Solution 20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A. On a $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u + id) \otimes \underbrace{\ker(u^2 + id)}_{F} \tag{158}$$

On a $F \neq \{0\}$ car $u \neq -id$. On note $v = u_{|F}$. On a $v^2 = -id_F$ et $\det(v^2) = (\det(v))^2 = (-1)^{\dim(F)} > 0$ donc $\dim(F)$ est pair. Nécessairement, on a $\dim(F) = 2$ et $\dim(\ker(u + id)) = 1$. Soit ε_3 vecteur propre associé à -1. Soit $x \in F \setminus \{0\}$. Si $(x, u(x))$ est lié, x est vecteur propre de v et $v^2 + id_F = 0$ ce qui est impossible car il n'y a pas de valeur propre réelle. Donc on pose $\mathcal{B} = (x, u(x), \varepsilon_3)$ base de $\mathbb{R}^3$. On a $u^2(x) = -x$, donc

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}} \tag{159}$$

■

Remarque 16. *Sur $\mathbb{C}$, on peut prendre*

$$A = \begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{160}$$

ou $\mathrm{i}I_3$.

Solution 21.

1. $I_x = \{A \in \mathbb{K}[X] | A(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non vide car $\mu_f \in I_x$. Donc il existe un unique P_x unitaire tel que $I_x = P_x\mathbb{K}[X]$.
2. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, on a $A(f) = 0$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $P_x \mid A$ si et seulement si $\vee_{x\in E} P_x \mid A$ donc $\mu_f = \vee_{x\in E} P_x$.
3. On a

$$\begin{aligned} P_xP_y(f)(x+y) &= P_xP_y(f)(x) + P_xP_y(f)(y) && (161)\\ &= P_f(f)\left(P_x(f)(x)\right) + P_x(f)\left(P_y(f)(y)\right) && (162)\\ &= 0 && (163)\end{aligned}$$

Donc $P_{x+y} \mid P_xP_y$.
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Supposons $A(f)(x+y) = 0$. On a $P_x(f)\left(A(f)(x+y)\right) = 0$, $P_x(f)\left(A(f)(x)\right) = A(f)\left(P_x(f)(x)\right) = 0 = -AP_x(f)(y)$. Donc $P_y \mid AP_x$. D'après le théorème de Gauss, $P_y \mid A$. De même, $P_x \mid A$. On prend $A = P_{x+y}$. Comme $P_x \wedge P_y = 1$ et $P_xP_y \mid P_{x+y}$, on a

$$\boxed{P_xP_y = P_{x+y}} \quad (164)$$

4. On décompose $\mu_f = \prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}$ avec pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, A_i irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_i \geqslant 1$. Comme $\mu_f = \vee_{x\in E} P_x$, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe $y_i \in E$ tel que $P_{y_i} = A_i^{\alpha_i} Q_i$. On pose $x_i = Q_i(f)(y_i)$. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, on a $A(f)(x_i) = 0$ si et seulement si $AQ_i(f)(y_i) = 0$ si et seulement si $A_i^{\alpha_i} Q_i \mid AQ_i$ si et seulement si $A_i^{\alpha_i} \mid A$. Ainsi, $P_{x_i} = A_i^{\alpha_i}$. En utilisant le point précédent par récurrence, on a $\mu_f = P_{\sum_{i=1}^r x_i}$ et on pose donc $x = \sum_{i=1}^r x_i$.
5. Supposons que ce v existe. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\deg(\mu_f) \leqslant n$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Si $\alpha_0 id + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$. En appliquant en v, comme la famille est libre, on a de proche en proche $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Donc pour tout $A \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, si $A(f) = 0$, alors $A = 0$. Donc $\deg(\mu_f) \geqslant n$, donc $\deg(\mu_f) = n$.
Réciproquement, soit $v \in E$ tel que $P_v = \mu_f$ qui existe d'après le point précédent. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\alpha_0 v + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$. On forme $A = \alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$. On a $A(f)(v) = 0$, donc $P_v \mid A$ mais P_v est de degré n donc $A = 0$. Donc la famille est libre et de cardinal n : c'est une base.

■

Solution 22.

1. φ est linéaire, soit $(s, t) \in S^2$. On a $\varphi(s) = t$ si et seulement si $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k = t_n$ pour

tout $n \geqslant 1$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_1 & = & t_1 \\ s_1+s_2 & = & 2t_2 \\ \vdots & & \\ s_1+\cdots+s_{n-1} & = & (n-1)t_{n-1} \\ s_1+\cdots+s_n & = & nt_n \\ \vdots & & \end{array}\right. \tag{165}$$

si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_1 & = & t_1 \\ s_2 & = & 2t_2-t_1 \\ \vdots & & \\ s_n = nt_n-(n-1)t_{n-1} & & \\ \vdots & & \end{array}\right. \tag{166}$$

donc φ est bijective.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $s \in S\setminus\{0\}$ tel que $\varphi(s) = \lambda s$ si et seulement si $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \lambda s_n$ pour tout $n \geqslant 1$ si et seulement si $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $s = \lambda\varphi^{-1}(s)$ si et seulement si $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $s_1 = \lambda s_1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $s_n = \lambda(ns_n - (n-1)s_{n-1})$ i.e. $(\lambda n - 1)s_n = \lambda(n-1)s_{n-1}$.
Si c'est le cas, si $s_1 \neq 0$, on a $\lambda = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $s_n = s_{n-1}$ donc s est constante.
Sinon, soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^*|s_{n_0} \neq 0\}$. On a $(\lambda n_0 - 1)s_{n_0} = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{n_0}$ et pour tout $n > n_0$, on a $s_n = \frac{\frac{1}{n_0}(n-1)}{\frac{n}{n_0}-1}s_{n-1} = \frac{n-1}{n-n_0}s_{n-1}$. Ainsi,

$$s_n = \frac{(n-1)!}{(n_0-1)!(n-n_0)!}s_{n_0} = \binom{n-1}{n_0-1}s_{n_0} \tag{167}$$

Réciproquement, en posant $s_{n_0} = 1$ et en définissant pour tout $n > n_0$, $s_n = \binom{n-1}{n_0-1}$ et pour tout $n \leqslant n_0 - 1$, $s_n = 0$, alors on a $\varphi(s) = \frac{1}{n_0}s$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}} \tag{168}$$

et les sous-espaces propres sont de dimension 1.

■

Remarque 17. *Si on se limite à $\mathbb{R}^p$, en définissant $\varphi_p(s_1,\ldots,s_p) = (s_1, \frac{s_1+s_2}{2},\ldots,\frac{s_1+\cdots+s_p}{p})$. Alors en écrivant la matrice de φ_p dans la base canonique, on a $\chi_{\varphi_p} = (X-1)(X-\frac{1}{2})\ldots(X-\frac{1}{p})$.*

Solution 23.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Supposons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda - a_{i,i}| > L_i$. $\lambda I_n - A$ est une matrice à diagonale strictement dominante donc inversible : absurde. Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda \in D_i$. Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^\mathsf{T})$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda \in S_i$. D'où le résultat.
2. Soit X non nul (dans $\mathbb{C}^n$) tel que $AX = \lambda X$. Soit $i_1 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty > 0$. On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j$.
   Soit $i_2 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_2}| = \max_{i \neq i_1} |x_i|$.
   Si $x_{i_2} = 0$, on a $\lambda = a_{i_1,i_1}$ et $|\lambda - a_{i_1,a_1}| = 0$ et $|\lambda - a_{i_1,a_1}|\,|\lambda - a_{i_2,i_2}| = 0 \leqslant L_{i_1} L_{i_2}$.
   Sinon, on a $|\lambda - a_{i_1,i_1}|\,|x_{i_1}| \leqslant |x_{i_2}|\, L_{i_1}$ et de même $|\lambda - a_{i_2,i_2}|\,|x_{i_2}| \leqslant |x_{i_1}|\, L_{i_2}$ d'où le résultat.

■

Remarque 18. *On peut avoir égalité, par exemple avec la matrice nulle.*

Solution 24. A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = 0$ alors $A = 0$.

Sinon, $\mathrm{rg}(A) = 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ canoniquement associée à A. On a $\dim(\ker(u)) = n - 1$ et $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$ sur $\mathbb{C}$. On a $\mathrm{Tr}(A) = \lambda + \mu = 0$ donc $\mu = -\lambda$ et $\mathrm{Tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 2\sum_{i=1}^n a_i^2$ donc

$$\{\lambda, \mu\} = \left\{ \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\} \tag{169}$$

Les deux valeurs propres sont de multiplicité 1 dans χ_A : les sous-espaces propres sont de dimension 1.

A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, semblable à $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, -\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2})$.

On a $AX = 0$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 x_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_n x_{n+1} & = & 0 \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{170}$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 0 \\ x_{i_0} & = & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}} a_i x_i \end{array} \right. \tag{171}$$

avec i_0 indice tel que $a_{i_0} \neq 0$. Une base de $\ker(u)$ est donc

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{172}$$

où $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_0\}$. Le 1 est à la i-ième ligne, $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$ est à la ligne i_0.

On a $AX = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} X = \alpha X$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 x_{n+1} & = & \alpha x_1 \\ \vdots & & \\ a_n x_{n+1} & = & \alpha x_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & = & \alpha x_{n+1} \end{cases} \tag{173}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{a_1}{\alpha} x_{n+1} \\ \vdots & & \\ x_n & = & \frac{a_n}{\alpha} x_{n+1} \end{cases} \tag{174}$$

Une base de $ker(u - \alpha id)$ est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\alpha} \\ \dots \\ \frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{175}$$

De même pour $-\alpha$, on vérifie qu'une base de $\ker(u + \alpha id)$ est

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_1}{\alpha} \\ \dots \\ -\frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{176}$$

$\blacksquare$

Solution 25. Pour le sens direct, f et g ont les mêmes espaces propres distincts. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $E_i = \ker(f - \lambda_i id) = \ker(g - \mu_i id)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ valeurs propres distinctes deux à deux de f et $\mu_1, \dots, \mu_r$ pour g.

On pose

$$\begin{array}{rcl} Q & = & \sum_{i=1}^r \mu_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^r \frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \\ P & = & \sum_{i=1}^r \lambda_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^r \frac{X-\mu_j}{\mu_i-\mu_j} \end{array} \tag{177}$$

Soit $i \in [\![1, r]\!]$ et $x \in E_i$. On a $Q(f)(x) = Q(\lambda_i)x = \mu_i x = g(x)$. $Q(f)$ et g coïncident sur les vecteurs d'une base, donc ils sont égaux, donc $Q(f) = g$. De même, $f = P(g)$.

Réciproquement, s'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]^2$ tel que $f = P(g)$ et $g = Q(f)$. On prend $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, soit $x \in \ker(f - \lambda id)$. On a $g(x) = Q(f)(x) = Q(\lambda)x$ donc $x \in \ker(g - Q(\lambda)id)$. On a

$$\ker(f - \lambda id) \subset \ker(g - Q(\lambda)id) \subset \ker(f - P(Q(\lambda))id) \tag{178}$$

Or $P(Q(\lambda)) = \lambda$ car pour $x \in \ker(f - \lambda id) \setminus \{0\}$, on a $\lambda x = P(Q(\lambda))x$. Donc $\ker(f - \lambda id) = \ker(g - Q(\lambda)id)$ donc f et g ont les mêmes sous-espaces propres. ■

Remarque 19. *C'est faux si f et g ne sont pas diagonalisables, par exemple*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{179}$$

A et B ont les mêmes sous-espaces propres (un seul : $\mathrm{Vect}(e_1, e_4)$). On a $A^2 = 0$ donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,

$$P(A) = \alpha I_4 + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq B \tag{180}$$

Solution 26. Soit $m = |G|$. On a pour tout $M \in G$, on a $M^m = I_2$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_m$. Notons que G étant abélien, toutes les matrices sont co-diagonalisables.

Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$, alors $M = I_2$. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1\}$, alors $M = -I_2$. Dans ces deux cas, on a $\det(M) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = \pm 2$. On note ce cas 1.

Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1, 1\}$, M est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^2 = I_2$. Dans ce cas, on a $\det(M) = -1$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$. On note ce cas 2.

Notons que l'on a $\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}(M)X + \det(M)$ et $\Delta = (\mathrm{Tr}(M))^2 - 4\det(M)$. Comme χ_M est un polynôme réel, si $\delta < 0$, on écrit $\chi_M(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$. Comme $\mathrm{Tr}(M) = 2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$, on a $\theta \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

Si $\theta = \frac{2\pi}{3}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \tag{181}$$

et $M^3 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = -1$. On note ce cas 3.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \tag{182}$$

et $M^4 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$. On note ce cas 4.

Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \tag{183}$$

et $M^6 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = 1$. On note ce cas 5.

Par ailleurs, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout $M \in G$, $P^{-1}MP = I_2$.

S'il existe $M \in G$ du type 2, alors les types 3 et 5 sont exclus car on obtiendrait par produit $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\theta} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{Tr}(M) = 0$ car χ_m est un polynôme réel, et $\theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$, ce qui n'est pas.

Ainsi,

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\} \tag{184}$$

Ainsi,

$$G = \begin{cases} \{I_2\} & \\ \{-I_2, I_2\} & \\ \{I_2, B\} & B \text{ matrice de type 2} \\ \{I_2, A, A^2, A^3\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & A \text{ matrice de type 4} \\ \{I_2, A, B, A^2, A^3, -B\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & A, B \text{ matrices de type 4, 2} \\ \{I_2, B, -B, -I_2\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & B \text{ matrice de type 2} \end{cases} \tag{185}$$

S'il n'y a pas de matrice de type 2, on a

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j^2 & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \right\} \tag{186}$$

On ne peut pas avoir une matrice de type 3 ou 5 car $\pm ij$ et $\pm ij^2$ ne sont pas des valeurs propres possibles. Donc

$$G = \begin{cases} \{I_2, C, C^2\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & C \text{ matrice de type 3} \\ \{I_2, D, D^2, D^3, D^4, D^5\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & D \text{ matrice de type 5} \end{cases} \tag{187}$$

Notons que dans le deuxième cas, D^2 est de type 3.

On a donc bien $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. ∎

Solution 27. Si u est diagonalisable, la famille des vecteurs propres est génératrice. En prenant un sous-espace de E de base $\mathcal{B}$, on complète avec des vecteurs propres, ce qui forme un sous-espace stable par u.

Réciproquement, soit

$$F = \bigotimes_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda id) \tag{188}$$

stable par u. F admet un supplémentaire stable qu'on nommera G. Si $G \neq \{0\}$, $u_{|G}$ admet nécessairement un vecteur propre, or les vecteurs propres sont dans $F \setminus \{0\}$; absurde. Donc $G = \{0\}$ et $E = F$ donc u est diagonalisable. ∎

Solution 28. Plus généralement, soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{k,l}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit

$$M = B \otimes A = \begin{pmatrix} b_{1,1}A & \dots & b_{1,p}A \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1}A & \dots & b_{p,p}A \end{pmatrix} \tag{189}$$

Si B est diagonalisable, il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(\mu_1, dots, \mu_p)$. On note $Q = (q_{i,j})$ et $Q^{-1} = (q'_{i,j})$. Par produits par blocs, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q'_{1,1}I_n & \dots & q'_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q'_{p,1}I_n & \dots & q'_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{=Q^{-1}\otimes I_n = (Q\otimes I_n)^{-1}} M \underbrace{\begin{pmatrix} q_{1,1}I_n & \dots & q_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p,1}I_n & \dots & q_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{Q\otimes I_n} = \mathrm{diag}(\mu_1 A, \dots, \mu_p A) = M_1 \tag{190}$$

Si de plus A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, dots, \lambda_n)$. Alors

$$\mathrm{diag}(P^{-1}, \dots, P^{-1}) M_1 \,\mathrm{diag}(P, \dots, P) = \mathrm{diag}(\mu_1, \lambda_1, \dots, \mu_1, \lambda_n, \dots, \mu_p\lambda_1, \dots, \mu_p\lambda_n) \tag{191}$$

Donc $B \otimes A$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B \otimes A) = \{\lambda_i \mu_j | 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p\}$. ∎

Remarque 20. *On a* $\mathrm{Tr}(B \otimes A) = \mathrm{Tr}(B) \times \mathrm{Tr}(A)$ *et* $\det(B \otimes A) = \det(B)^n \det(A)^p$.

Remarque 21. *Si B est diagonalisable et non nulle, si $B \otimes A$ est diagonalisable, il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\mu_i \neq 0$ et $\mu_i A$ est diagonalisable (restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable) donc A est diagonalisable.*

Solution 29.

1. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A.

   Si $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $k \in [\![1, m]\!]$, $F_k = \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_{n-k+1})$. On a $u(e_k) = x_k e_{n-k+1}$ et $u(e_{n-k+1}) = x_{n-k+1} e_k$ donc F_k est stable par u. Ainsi, $\mathrm{mat}_{(e_k, e_{n-k+1})}(u_{|F_k}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{n-k+1} \\ x_k & 0 \end{pmatrix}$.

   Étudions, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_M = X^2 - ab$.

Si $ab \neq 0$, on note λ une racine carrée de ab sur $\mathbb{C}$. On a $\chi_M(X-\lambda)(X+\lambda)$ qui est scindé à racines simples donc M est diagonalisable et semblable à $\operatorname{diag}(\lambda, -\lambda)$.

Si $ab = 0$: si $a = b = 0$ alors $M = 0$. Si a ou $b \neq 0$, alors M n'est pas diagonalisable puisque si elle l'était, comme sa seule valeur propre est 0, elle serait semblable donc égale à 0 ce qui n'est pas. Donc A est diagonalisable si et seulement si pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, x_k et x_{n-k+1} non nuls ou $x_k = 0 = x_{n-k+1}$.

Si $n = 2m+1$, on fait le même raisonnement avec $u(e_m) = x_m e_m$.

2. $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\left(u^p_{|F_k}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

   Soit $k \in [\![1, m]\!]$. Si $x_k x_{n+1-k} \neq 0$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda^2 = x_k x_{n+1-k}$. Dans une base de vecteurs propres $\mathcal{B}$, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u^p_{|F_k}) = \begin{pmatrix} \lambda^p & 0 \\ 0 & (-\lambda)^p \end{pmatrix} \tag{192}$$

   Cela converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ si et seulement si $|x_k x_{n+1-k}| < 1$.

   Si $x_k = x_{n+1-k} = 0$, alors pour tout $p \geqslant 2$, $u^p_{|F_k} = 0$ donc on a convergence.

■

Solution 30.

1. On a

$$\operatorname{mat}_{(1,X,\dots,X^n)}(\varphi) = \operatorname{diag}(-n, 1-n, \dots, 0) \tag{193}$$

   donc les valeurs propres sont $(k-n)_{k\in[\![0,n]\!]}$. On a $n+1$ valeurs propres distinctes donc φ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les vecteurs propres sont les (X^k) pour $k \in [\![1, n]\!]$.

2. Si $\varphi(P) = kP$, alors $\deg(P) = k$. Si $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ donc

$$XP' - nP'' - kP = 0 = \sum_{i=0}^{k-2} \left(ia_i - n(i+1)(i+2) - ka_i\right) X^i - a_{k-1}X^{k-1} \tag{194}$$

   Ainsi, par récurrence, pour tout $p \in \left\{0, ; \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor\right\}$, $a_{k-(2p+1)} = 0$ et pour tout $p \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right\}$,

$$a_{k-2p} = \frac{n^p(k-2p+1)\dots(k-1)k}{(-2p)\dots(-4)(-2)} a_k = \frac{n^p(-1)^p}{2^p p!} \times \frac{k!}{(k-2p)!} a_k \tag{195}$$

   donc les vecteurs propres correspondent aux polynômes ayant ces coefficients.

■

Solution 31.

1. On a
$$A = aI_3 + c\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{C} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}_{B} \tag{196}$$
avec $B = C^2$ et C est la matrice compagnon du polynôme X^3-1, donc $\chi_C = X^3-1$. Ainsi, C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$. On a
$$\begin{aligned} C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\ C\begin{pmatrix}1\\\mathrm{j}^2\\\mathrm{j}\end{pmatrix} &= \mathrm{j}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{j}^2\\\mathrm{j}\end{pmatrix}\\ C\begin{pmatrix}1\\\mathrm{j}\\\mathrm{j}^2\end{pmatrix} &= \mathrm{j}^2\begin{pmatrix}1\\\mathrm{j}\\\mathrm{j}^2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{197}$$
donc si
$$P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&\mathrm{j}^2&\mathrm{j}\\1&\mathrm{j}&\mathrm{j}^2\end{pmatrix} \tag{198}$$
alors on a
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}&0\\0&0&a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2\end{pmatrix} \tag{199}$$
et
$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{1, a+c\mathrm{j}+b\mathrm{j}^2, a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2\right\}} \tag{200}$$

2. On a
$$A^n = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j})^n&0\\0&0&(a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2)^n\end{pmatrix}P^{-1} \tag{201}$$
Tout d'abord, on a $|a+c\mathrm{j}+b\mathrm{j}^2| \leqslant |a|+|b|+|c| = 1$ et on a égalité si et seulement si $a, c\mathrm{j}$ et $b\mathrm{j}^2$ ont le même argument si et seulement si $\{a,b,c\} \in \{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,1\}\}$.
Si $a=1$ et $b=c=0$, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Si ($b=1$ et $a=c=0$) ou ($c=1$ et $a=b=0$), $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Sinon,
$$\boxed{A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}} \tag{202}$$

$\blacksquare$

Solution 32.

1. On vérifie en calculant les premiers termes puis par récurrence que
$$\boxed{A^k = \begin{pmatrix} B^k & \sum_{i=1}^{k} B^{i-1}CD^{k-i} \\ 0 & D^k \end{pmatrix}} \tag{203}$$
2. On a
$$\mu_A(A) = 0 = \begin{pmatrix} \mu_A(B) & \star \\ 0 & \mu_A(D) \end{pmatrix} \tag{204}$$
donc $\mu_A(B) = \mu_A(D) = 0$. Ainsi, $\mu_B \mid \mu_A$ et $\mu_D \mid \mu_A$ donc $\mu_B \vee \mu_D \mid \mu_A$.
Si B et D sont de tailles 1, $\chi_A(X) = (X-b)(X-d)$ d'où $\mu_B = X-b$ et $\mu_D = X-d$.
Si $b \neq d$, $X-b$ et $X-d$ divise μ_A donc $\mu_A \mid \chi_A$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
Si $b = d$, si $c = 0$ on a $\mu_A = X-b$ donc $\mu_A \mid \mu_B\mu_D = (X-b)^2$. Si $c \neq 0$, $\mu_A = X-b$ ou $\mu_A = (X-b)^2$ et $A - bI_n \neq 0$ donc $\mu_A = (X-b)^2$.
3. Si $C = 0$, on a $\mu_A = \mu_B \vee \mu_D$.
4. Si $B = D$ et $C = I_{n_1}$, on a $A^0 = I_{n_1+n_2}$ et pour $k \geqslant 1$,
$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & kB^{k-1} \\ 0 & B^k \end{pmatrix} \tag{205}$$
Ainsi
$$P(A) = \begin{pmatrix} P(B) & P'(B) \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = 0 \tag{206}$$
si et seulement si $P(B) = P'(B) = 0$ donc $\mu_B \mid P$ et $\mu_B \mid P'$ donc $\mu_B \mid P \vee P'$.
On a
$$\mu_B^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_B\mu_B'(B) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{207}$$
donc $\mu_A \mid \mu_B^2$.
On décompose $\mu_B = (X-\lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X-\lambda_r)^{m_r}$. On a $P(A) = 0$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, λ_i est racine de P d'ordre plus grand que $m_i + 1$.
5. On prend
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{208}$$
On a
$$B = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{209}$$
$\mu_B = \mu_D = X^2$, et $\mu_A \mid X^3$. Or $u^2(e_4) \neq 0$ donc $\mu_A = X^3 \neq X^2 = \mu_B \vee \mu_D \neq X^4 = \mu_B\mu_D$.

$\blacksquare$

Solution 33. On décompose sur $\mathbb{C}$: $P(X)-\lambda=\alpha\prod_{i=1}^{m}(X-\mu_i)$ avec $\alpha\neq 0$. On a

$$\underbrace{g-\lambda id}_{\substack{\text{non inversible}\\ \text{(respectivement non injectif)}}} = \alpha\prod_{i=1}^{m}(f-\mu_i id) \tag{210}$$

donc il existe $i\in[\![1,m]\!]$, $f-\mu_i id$ est non inversible (respectivement non injectif), d'où le résultat. $\blacksquare$

Solution 34.

1. Soit $(f_1,\dots,f_r)$ une base de V et $x\in E\setminus\{0\}$. Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{K}^r$ tels que $\alpha_1 f_1(x)+\cdots+\alpha_r f_r(x)=0$. Or V est un sous-espace, donc $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_r f_r\in V$ et $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_r f_r\notin GL(E)$ car $x\neq 0$. D'où $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_r f_r=0$ et donc $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=0$ car $(f_1,\dots,f_r)$ est une base de V.
   Ainsi $(f_1(x),\dots,f_r(x))$ est libre donc $r=\dim(V)\leqslant\dim(E)$.
2. Si $\dim(V)=1$, alors $V=\mathbb{C}f$ avec $f\in GL(E)$. Si $\dim(V)\geqslant 2$, soient $(f,g)\in V^2$ tels que (f,g) soit libre alors pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, $f+\alpha g\neq 0$ et $f+\alpha g\in V\setminus\{0\}$. Or $f+\alpha g=g(g^{-1}\circ f+\alpha id)$. Pour $\alpha\in\mathrm{Sp}(-g^{-1}\circ f)$ (existe car on est dans $\mathbb{C}$), on obtient une contradiction. Donc de même, $V=\mathbb{C}f$ avec $f\in GL(E)$.
3. Comme $\dim(E)=2$, on a $\dim(V)\leqslant 2$. Si $\dim(V)=1$, comme précédemment, on a $V=\mathbb{R}f$ avec $f\in GL(E)$. Si $\dim(V)=2$, soit (f,g) une base de V. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(g^{-1}\circ f)=\emptyset$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g)$. On écrit $\chi_{A^{-1}B}=(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ avec $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $\beta>0$. $A^{-1}B$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et semblable à $\mathrm{diag}(\lambda,\overline{\lambda})$ et $\frac{A^{-1}B-\alpha I_2}{\beta}$ est semblable sur $\mathbb{C}$ à $\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i})$ semblable sur $\mathbb{R}$ à $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ donc $\frac{A^{-1}B-\alpha I_2}{\beta}$ est semblable sur $\mathbb{R}$ à $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A^{-1}B=P\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}P^{-1} \tag{211}$$

   Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

$$\lambda A+\mu B=A(\lambda I_2+\mu A^{-1}B)=\underbrace{AP}_{\in GL_2(\mathbb{R})}\begin{pmatrix}\lambda+\alpha\mu&-\beta\\\beta&\lambda+\alpha\mu\end{pmatrix}\underbrace{P^{-1}}_{\in GL_2(\mathbb{R})} \tag{212}$$

   avec $\beta>0$,$\alpha\in\mathbb{R}$.
4. Avec les notations précédentes, si $(A,B)\in V^2$ est libre, on a

$$\mathrm{i}\in\mathrm{Sp}\left(\frac{A^{-1}B-\alpha I_2}{\beta}\right)=\mathrm{Sp}\left((BA)^{-1}(B-\alpha A)\right) \tag{213}$$

   et on pose $A'=\beta A\in V$ et $B'=B-\alpha A\in V$.

$\blacksquare$

Solution 35.

1. En notant $c_{i,j}$ les cofacteurs d'indice (j,i), on a
$$\left[\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\top\right]_{i,j} = (-1)^{i+j} c_{j,i}(\lambda - I_n) \tag{214}$$
En développant, on obtient des polynômes en λ de degré plus petit que $n-1$. En regroupant selon les puissances de λ, on a
$$\boxed{\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\top = M_0 + M_1\lambda + \cdots + \lambda^{n-1} M_{n-1}} \tag{215}$$
2. On a $(\lambda I_n - A)\,\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\top = \det(\lambda I_n - A) I_n = \chi_A(\lambda) I_n$
En identifiant les coefficients, on a
$$\left\{\begin{array}{lcl} M_{n-1} & = & I_n \\ M_{n-2} & = & A + a_{n-1} I_n \\ M_{n-3} & = & A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2} I_n \\ \vdots & & \\ M_{n-k} & = & A^{k-1} + a_{n-1}A^{k-2} + \cdots + a_{n-k+1} I_n \\ \vdots & & \\ M_0 & = & A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n \end{array}\right. \tag{216}$$
et $-AM_0 = a_0 I_n$. En reportant, on a bien $\chi_A(A) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$: on a une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On forme $\lambda I_n - A = (c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda))$ avec
$$c_j(\lambda) = \begin{pmatrix} -a_{1,j} \\ \cdots \\ -a_{j-1,j} \\ \lambda - a_{j,j} \\ -a_{j+1,j} \\ \cdots \\ -a_{n,j} \end{pmatrix} \tag{217}$$
On a $\chi_A(\lambda) = \det(c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda))$. det étant une forme n-linéaire, on a
$$\chi_A'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \det(c_1(\lambda), \ldots, c_{k-1}(\lambda), c_k'(\lambda), c_{k+1}(\lambda), \ldots, c_n(\lambda)) \tag{218}$$
En développant le terme k par rapport à la k-ième colonne, on trouve qu'il vaut $_{k,k}(\lambda I_n - A)$. Ainsi,
$$\boxed{\chi_A'(\lambda) = \mathrm{Tr}(\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\top)} \tag{219}$$

4. On a donc $a_1+2a_2\lambda+\cdots+(n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2}+n\lambda^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \operatorname{Tr}(M_k)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (par linéarité de Tr). Donc pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $\operatorname{Tr}(M_k)$, $\operatorname{Tr}(M_k) = (k+1)a_{k+1}$ (et $\operatorname{Tr}(M_{n-1}) = \operatorname{Tr}(I_n) = n$). On a $\operatorname{Tr}(M_{n-2}) = (n-1)a_{n-1} = \operatorname{Tr}(A) + na_{n-1}$ donc $a_{n-1} = \operatorname{Tr}(A)$. Puis $\operatorname{Tr}(M_{n-3}) = (n-2)a_{n-2} = \operatorname{Tr}(A^2) + a_{n-1}\operatorname{Tr}(A) + a_{n-2}n$ donc $a_{n-2} = -\frac{\operatorname{Tr}(A^2)}{2} + \frac{\operatorname{Tr}(A)^2}{2}$. De proche en proche, on a $a_{n-k} = f_k(\operatorname{Tr}(A), \ldots, \operatorname{Tr}(A^k))$ avec f_k indépendante de A.
5. D'après ce qui précède, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = b_k$ car f est indépendante de A. Donc $\chi_A = \chi_B$.

■

Remarque 22. *Si $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A^2) = \cdots = \operatorname{Tr}(A^n) = 0$, alors $\chi_A = \chi_0 = X^n$ et A est nilpotente. On peut le vérifier à la main sur $\mathbb{C}$: si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ sont les valeurs propres non nulles distinctes de A et m_i la multiplicité de λ_i dans χ_A, alors on a le système*

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \operatorname{Tr}(A) & = & m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r & = & 0 \\ \operatorname{Tr}(A^2) & = & m_1\lambda_1^2 + \cdots + m_r\lambda_r^2 & = & 0 \\ \vdots & & & & \\ \operatorname{Tr}(A^r) & = & m_1\lambda_1^r + \cdots + m_r\lambda_r^r & = & 0 \end{array}\right. \tag{220}$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \ldots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0 \tag{221}$$

et la matrice est inversible car les λ_i sont distincts non nuls. Donc $m_1 = \cdots = m_r = 0$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$.

Solution 36. On définit, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Comme p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. On a $\chi_A \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ donc il existe $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où χ_A est scindé sur $\mathbb{L}$. On écrit $\chi_A = (X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{L}$. On peut trigonaliser $\overline{A}$ sur $\mathbb{L}$ et on a $\operatorname{Tr}(\overline{A}^p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p$. Or la caractéristique de $\mathbb{L}$ vaut p donc on a $(x+y)^p = x^p + y^p$ (binôme de Newton et utiliser le fait que $p \mid \binom{p}{k}$ pour $k \in [\![1, p-1]\!]$). Ainsi,

$$\operatorname{Tr}(\overline{A}^p) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^p = \operatorname{Tr}(\overline{A})^p \tag{222}$$

et on peut appliquer le petit théorème de Fermat : on a bien $\operatorname{Tr}(\overline{A}^p) = \operatorname{Tr}(\overline{A})$ et en remontant dans $\mathbb{Z}$,

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A^p) \equiv \operatorname{Tr}(A)[p]} \tag{223}$$

■

Solution 37. Si on a (i), soit x un vecteur propre associé à $\rho(u) = \rho e^{i\theta}$. On a $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$ et comme $x \neq 0$, on a $\rho(u) \leqslant |||\rho(u)||| < 1$ d'où (ii).

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford $u = n + d$ avec n nilpotent, d diagonalisable et $dn = nd$. Soit $m = \dim(E)$. Pour tout $p \geqslant m$, on a

$$u^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0} \tag{224}$$

En effet, on a $k \geqslant m-1$ fixé, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\binom{p}{k} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_m^p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \tag{225}$$

car $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et

$$\binom{p}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\rho(u)^p}\right) \tag{226}$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit x un vecteur propré associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc en particulier, $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, donc $\rho(u)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\rho(u) \geqslant 0$ donc $\rho(u) < 1$. Posons encore $u = d + n$ la décomposition de Dunford de u. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E dans laquelle les coefficients de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$ sont en module $\leqslant \varepsilon$. Définissons sur E

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \right\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i| \tag{227}$$

Soit $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ triangulaire supérieure avec $m_{ii} = \lambda_i$ et pour tout $j \neq i$, $|m_{i,j}| < \varepsilon$. Soit donc $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \in \mathbb{C}^m$, on a

$$\|Mx\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^{m} m_{i,j} x_j \right|}_{(|\lambda_i| + (m-1)\varepsilon)\|x\|_\infty} \tag{228}$$

donc

$$|||u||| \leqslant \underbrace{\rho(u)}_{<1} + (m-1)\varepsilon \tag{229}$$

et on choisit

$$\varepsilon < \frac{1-\rho(u)}{\underbrace{m-1}_{>0}} \tag{230}$$

d'où $|||u||| < 1$ et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence. ■

Remarque 23. *$u \mapsto \rho(u)$ n'est pas une norme car pour u nilpotente non nulle, $\rho(u) = 0$.*

Solution 38. Supposons (i), soit Y un vecteur propre de A avec $AY = \lambda Y$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, BA^kY = \lambda^k BY$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^{k_0} BY \neq 0$ et $BY \neq 0$ donc on a (ii).

Si (ii), supposons qu'il existe $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\varphi = 0$. On note

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i} \tag{231}$$

avec les λ_i distincts. Alors $Y = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ où $Y_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)$. Il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $Y_{i_0} \neq 0$ car $Y \neq 0$. On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$B \exp(tA) Y = \sum_{i=1}^{r} B \exp(t\lambda_i) Y_i = 0 \tag{232}$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, on a $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{r} B\lambda_i^k \exp(t\lambda_i) Y_i = 0$. Pour $t = 0$ on a $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k BY_i = 0$ ce qui, pour $t = 0$, donne le système

$$\begin{cases} BY_1 + \cdots + BY_r & = & 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \cdots + \lambda_r BY_r & = & 0 \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{r-1} BY_1 + \cdots + \lambda_r^{r-1} BY_r & = & 0 \end{cases} \tag{233}$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$, on a donc $\sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) BY_i = 0$. Pour $i \in \{0, \dots, r-1\}$ et $P = \prod_{i \neq j} \frac{(X - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$, on obtient pour tout $i \in \{1, \dots, r\}, BY_i = 0$. En particulier, $BY_{i_0} = 0$ et Y_{i_0} est un vecteur propre de A car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).

Soit $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, supposons que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $BA^kY = 0$. Soit $k \geqslant n$, il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$X^k = Q_k \chi_A + R_k \tag{234}$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc $A^k = R_k(A)$ d'où $BA^kY = BR_k(A)Y = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} B \exp(tA) Y &= B \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} Y & (235) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (BA^kY)}{k!} & (236) \\ &= 0 & (237) \end{aligned}$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence. ■

Solution 39. Noter d'abord que le résultat ne dépend pas de la norme (équivalente). Si $A = \lambda I_n$ on vérifie que $\|A^p\|^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} |\lambda|$. On choisit $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$ et on vérifie que si A est diagonalisable avec $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|$ ses valeurs propres (complexes), alors le résultat est $|\lambda_2|$. Si A est juste trigonalisable (son spectre contient juste $\lambda \in \mathbb{C}$), on écrit A comme somme d'une matrice scalaire et d'une matrice nilpotente, et on calcule explicitement $\|A^p\|$. Le résultat est alors $|\lambda|$, et de manière générale, il s'agit du rayon spectral. En dimension quelconque, on utilise la décomposition de Dunford. ∎