Lycée Michel Montaigne

Notes de cours

Physique-Chimie MP

Régis Santet

Cours réalisé par
Professeur N. Choimet

Année scolaire 2015/2016

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Première partie

Électromagnétisme

Chapitre 1

Le champ électromagnétique : sources et symétries

Sommaire

1.1 Source du champ électromagnétique : charges et courants

1.1.1 Distributions discrètes ou continues de charges. Densité volumique de charge

Distribution discrètes de charges

$\longrightarrow$ Nature « atomique » de la charge : $-$e (électron), $+Z$e (noyau) avec $Z \in \mathbb{N}^*$, ions ;

$\longrightarrow$ a priori, charges ne avec $n \in \mathbb{Z}$, localisées en des points précis.

A priori, il y a donc une distribution discrète de charges.

Échelle mésoscopique : distribution continue de charges

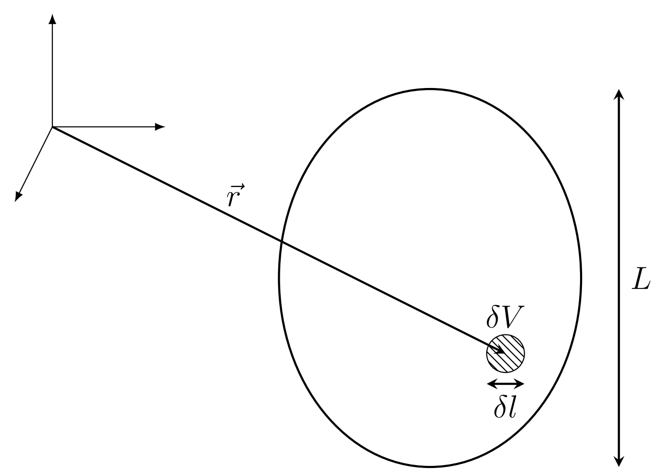

FIGURE 1.1 – Échelle mésoscopique pour une distribution continue de charges.

La Figure 1.1 présente la matière à l'échelle mésoscopique : on a $\delta V \sim (\delta l)^3$, L est une longueur typique de l'échelle macroscopique (1 mm jusqu'à 1 m). On se donne un longueur a qui est caractéristique de l'échelle microscopique voire nanoscopique, par exemple la distance interatomique ou le libre parcours moyen d'un gaz. Alors

$$\boxed{a \ll \delta \ll L.}$$

Cela vient du fait que dans δV, il y a un très grand nombres de constituants élémentaires, on peut donc faire un traitement statistique, d'autre part on cherche une description assez fine du phénomène. L'échelle mésoscopique est donc entre 0,1 µm et 1 µm. À l'échelle mésoscopique, on adopte une description continue (moyennée) de la matière. Ceci implique une distribution continue de charges.

Densité volumique de charges

Dorénavant, on adopte le modèle continu. La quantité de charge δQ dans un volume δV est proportionnel à ce même volume, on définit alors la **densité volumique de charges** $\rho(\vec{r}, t)$ par

$$\boxed{\delta Q = \rho(\vec{r}, t)\delta V.}$$

Son unité est $\mathrm{C\,m^{-3}}$.

Exemple 1.1. Dans un conducteur métallique (par exemple le cuivre), il y a n_e électrons libres et n_i ions fixes. Alors

$$\rho = (n_i - n_e)\mathrm{e} = 0,$$

à cause de la neutralité du métal.

Exemple 1.2. Dans un semi-conducteur, il y a des électrons (mobiles), des trous (places vides positives) et des ions fixes. Ainsi,

$$\rho = (n_t - n_e + n_i)\mathrm{e}.$$

Exemple 1.3. Dans une électrolyte, par exemple ($\mathrm{Na^+}$,$\mathrm{Cl^-}$), on a

$$\rho = (n_{\mathrm{Na^+}} - n_{\mathrm{Cl^-}})\mathrm{e}.$$

Ainsi, en général, on a

$$\rho = \sum_{\substack{\neq \text{ types} \\ \text{de porteurs}}} n_k q_k,$$

où n_k est en $\mathrm{m^{-3}}$ et q_k est en C et représente la charge algébrique d'un « k » porteur.

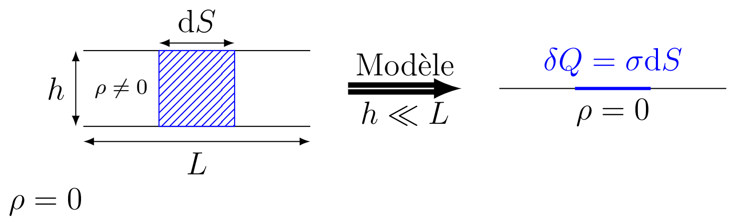

FIGURE 1.2 – Distribution de charges en surface.

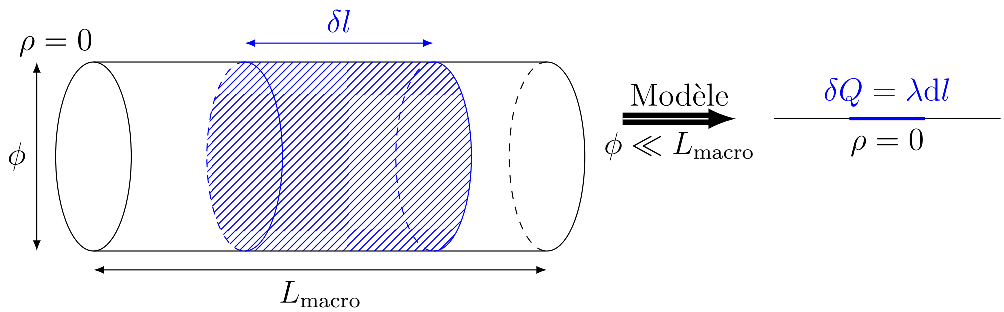

FIGURE 1.3 – Distribution linéique de charges.

Modèles surfacique et linéique

Distribution de charges en surface : « nappe » de charge. Les charges sont localisées au voisinage d'une surface. On considère la Figure 1.2. On considère que l'on a $h \ll L$, et le volume $\delta V = h\mathrm{d}S$ contient $\delta Q = \rho h \mathrm{d}S$ charges. On modélise donc cette nappe de charge par une distribution surfacique de charges, avec une **densité superficielle de charge** $\sigma = \rho \times h$, en $\mathrm{C\,m^{-2}}$. Ainsi, on a

$$\boxed{\delta Q = \sigma \mathrm{d}S.}$$

Exemple 1.4. On peut penser à un conducteur plan.

Distribution linéique de charges. On considère la Figure 1.3. Il y a $\delta Q = \rho S \mathrm{d}l$ charges dans la volume bleu. On définit alors la **densité linéique de charge** $\lambda = \rho S$, d'unité $\mathrm{C\,m^{-1}}$. On a alors

$$\boxed{\delta Q = \lambda \mathrm{d}l.}$$

Exemple 1.5. On peut penser à un faisceau d'électrons.

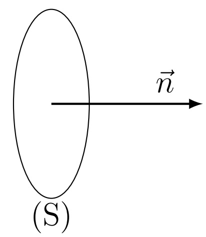

FIGURE 1.4 – Courant algébrique traversant une surface orientée.

1.1.2 Distribution de courant en volume. Densité de courant

Courant algébrique traversant une surface orientée

Pendant dt, δQ traverse algébriquement une surface S. $\delta Q > 0$ si la charge est effectivement transportée selon $\vec{n}$, voir la Figure 1.4.

Le courant $i(t)$ est alors défini par

$$\boxed{\delta Q = i(t)\mathrm{d}t.}$$

Son unité est A=C s^{-1}. C'est la charge algébrique traversant la surface orientée (S) par unité de temps.

Densité de courant

Cas à une dimension et un seul type de porteur libre. On considère qu'il y a n porteur libres par metre cube, q est la charge algébrique d'un porteur, $\vec{v}$ est la vitesse d'ensemble, qui est uniforme et perpendiculaire à (S), voir la Figure 1.5.

Le nombre δN de porteurs traversant (S) pendant dt est

$$\delta N = nSv\mathrm{d}t = n\vec{v}\cdot(S\vec{n})\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\delta Q = \delta N \times q = nq\vec{v}\cdot(S\vec{n})\mathrm{d}t$$

et finalement

$$\boxed{i = nq\vec{v}\cdot\vec{n}S = \vec{j}\cdot(S\vec{n}),}$$

où $\vec{j} = nq\vec{v}$ est la **densité de courant**, d'unité A m^{-2}.

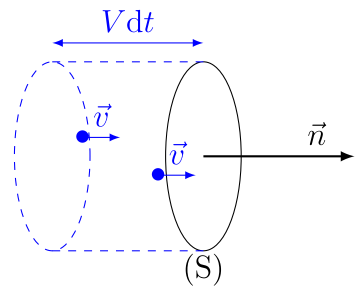

FIGURE 1.5 – Densité de courant $\vec{j}$: modèle introductif.

Dans le cas où la vitesse n'est pas perpendiculaire à (S), le calcul reste le même (en prenant bien en compte le produit scalaire avec la normale extérieure $\vec{n}$).

Définition de $\vec{j}$. De manière générale, on définit la densité de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$ par

$$\boxed{i_s(t) := \iint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S.}$$

$i_s(t)$ est le flux de $\vec{j}$ à travers la surface S.

Expression de $\vec{j}$ dans différents milieux conducteurs

Métal. Les électrons libres génèrent une densité de courant

$$\vec{j} = -n\mathrm{e}\langle\vec{v}\rangle.$$

Dans un fil de cuivre pour 1 A et une longueur 2 mm, on a

$$n_\mathrm{e} \sim \frac{1}{(\mathrm{qq}.10^{10})^3} \sim 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Ainsi, l'ordre de grandeur de la vitesse des électrons dans le métal est

$$\langle v\rangle \sim \frac{1}{10^{29} \times 10^{19} \times 2.10^{-6}} \sim 3.10^{-5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

En considérant les électrons comme des particules classiques indépendantes, on a

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{3}{2}k_bT,$$

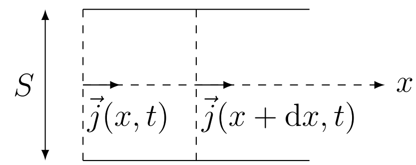

FIGURE 1.6 – Loi de conservation de la charge 1D.

avec $k_B = R/\mathcal{N}_A \approx 1.38.10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$.

Ainsi,

$$v = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \sim 10^5\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

pour $m = 0.9^{-30\ \mathrm{kg}}$ et $T = 300$ K.

Semi-conducteur. On a

$$\vec{j} = n_t \mathrm{e}\langle \vec{v}_t \rangle - n_\mathrm{e}\mathrm{e}\langle \vec{v}_\mathrm{e} \rangle.$$

Solution de NaCl. On a

$$\vec{j} = n_{\mathrm{Na}^+}\mathrm{e}\langle \vec{v}_{\mathrm{Na}^+} \rangle - n_{\mathrm{Cl}^-}\mathrm{e}\langle \vec{v}_{\mathrm{Cl}^-} \rangle.$$

Finalement, on a

$$\boxed{\vec{j} = \sum_{\substack{\neq \text{ types} \\ \text{de particules libres}}} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle.}$$

1.2 Loi de conservation de la charge

1.2.1 Géométrie 1D

On considère la Figure 1.6.

La charge entrant algébriquement dans $S\mathrm{d}x$ pendant $\mathrm{d}t$ est

$$\begin{aligned}\delta Q_e &= j(x,t)S\mathrm{d}t - j(x+\mathrm{d}x,t)S\mathrm{d}t, \\ &= S\mathrm{d}t\left[j(x,t) - j(x+\mathrm{d}x,t)\right], \\ &= -S\mathrm{d}t\mathrm{d}x\frac{\partial j}{\partial x}(x,t).\end{aligned}$$

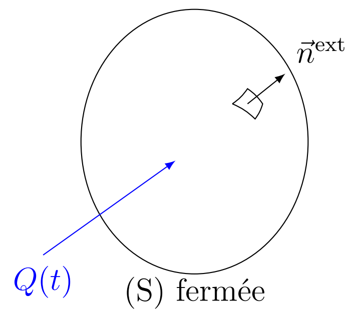

FIGURE 1.7 – Équation intégrale de conservation de la charge.

La variation dQ de la charge dans la tranche $S\mathrm{d}x$ est

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Q &= \rho(x, t + \mathrm{d}t)S\mathrm{d}x - \rho(x,t)S\mathrm{d}x,\\ &= S\mathrm{d}x\left(\rho(x,t+\mathrm{d}t) - \rho(x,t)\right),\\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)S\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Postulat : conservation de la charge. On doit avoir

$$\boxed{\mathrm{d}Q = \delta Q_e.}$$

Alors l'équation locale de la conservation de la charge s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x,t) = 0.}$$

1.2.2 Équation intégrale de conservation de la charge

Dans le cas général, on se reporte à la Figure 1.7.
Le flux sortant de $\vec{j}$ est

$$i_S^{\text{ext}} = \oiint_S \vec{j}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S.$$

La conservation de la charge s'écrit alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -i_S^{\text{ext}}(t) = -\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S.}$$

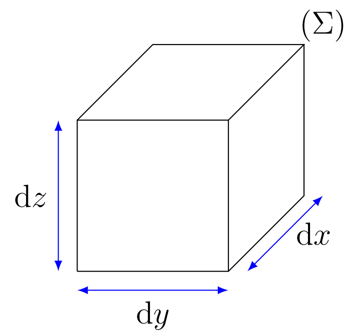

FIGURE 1.8 – Flux de courant sortant en trois dimensions.

1.2.3 Flux et opérateur « divergence »

Dans le cas unidimensionnel de la Figure 1.6, en notant (Σ) la surface fermée comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ et les bords en haut et en bas, on a

$$\begin{aligned} i_\Sigma^{\text{ext}}(t) &= \oiint_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}\Sigma, \\ &= \iint_{\text{bords}} \vec{j} \cdot \vec{n}_{\text{bords}} \mathrm{d}\Sigma + (-\vec{j}(x,t) \times S) + (j(x+\mathrm{d}x, t) \times S), \\ &= 0 + \frac{\partial j}{\partial x}(x,t) \times S\mathrm{d}x, \\ &= \frac{\partial j}{\partial x}(x,t) \times V. \end{aligned}$$

Ainsi, le flux est proportionnel au volume.

Dans le cas à trois dimensions, on se reporte à la Figure 1.8. On se donne un champ $\vec{A}(x, y, z, t)$, et on suppose le cube assez petit pour qu'il soit uniforme sur chaque face. On numérote les faces (1 : gauche, 2 : droite, 3 : bas, 4 :haut, 5 : derrière, 6 : devant).

On cherche la quantité $\delta\phi^{\text{ext}}$ sortant du cube à cause du flux de $\vec{A}$ via la surface de (Σ). On définit donc

$$\delta\phi^{\text{ext}} := \oiint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}\Sigma.$$

On a alors

(1) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u_y}$: $\delta\phi_1^{\text{ext}} = -A_y(x, y, z, t) \times (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$;

(2) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u_y} : \delta\phi_2^{\text{ext}} = +A_y(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$;
(3) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u_z} : \delta\phi_3^{\text{ext}} = -A_z(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$;
(4) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u_z} : \delta\phi_4^{\text{ext}} = +A_z(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$;
(5) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u_x} : \delta\phi_5^{\text{ext}} = -A_x(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$;
(6) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u_x} : \delta\phi_6^{\text{ext}} = +A_x(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$.

On fait la somme algébrique

$$\begin{aligned}1+2 &: \frac{\partial A_y}{\partial y}(x,y,z,t) \times \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\\ 3+4 &: \frac{\partial A_z}{\partial z}(x,y,z,t) \times \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ 5+6 &: \frac{\partial A_x}{\partial x}(x,y,z,t) \times \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\delta\phi^{\text{ext}} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right] \times \mathrm{d}V = (\mathrm{div}\ \vec{A})\mathrm{d}V.}$$

Théorème-définition d'Ostrogradski. Soit $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(x,y,z,t)$ champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a

$$\boxed{\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{A}\mathrm{d}V.}$$

En coordonnées cartésiennes, la divergence de $\vec{A}$ s'écrit

$$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.}$$

L'opérateur symbolique (réservé aux coordonnées cartésiennes) est « nabla », qui s'écrit

$$\boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.}$$

On a alors div $\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

1.2.4 Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.

Pour une géométrie quelconque, la variation de $Q(t)$ contenue dans un volume V est

$$\mathrm{d}Q = \iiint_V \left[\rho(\vec{r},t) - \rho(\vec{r},t+\mathrm{d}t)\right] \mathrm{d}V,$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}Q = \left(\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r},t)\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t.}$$

La charge algébrique δQ_S^{ext} traversant une surface S orientée vers l'extérieur pendant dt est

$$\delta Q_S^{\text{ext}} = i_S^{\text{ext}}(t) \times \mathrm{d}t = \left[\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t.$$

Or on a

$$\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div}\vec{j}\cdot\mathrm{d}V,$$

donc

$$\boxed{\delta Q_S^{\text{ext}} = \left(\iiint_V (\operatorname{div}\vec{j}\mathrm{d}V)\right)\mathrm{d}t.}$$

La conservation de la charge s'écrit alors $\mathrm{d}Q = -\delta Q_S^{\text{ext}}$, qui est une équation globale :

$$\iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}\right)\mathrm{d}V = 0.$$

Ceci ayant lieu pour tout volume V de taille au moins mésoscopique, on a l'équation locale de la conservation de la charge :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0.}$$

1.2.5 Cas du régime stationnaire/permanent

Dans de cas, on a

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{j} = 0.}$$

En conséquence,

(i) $\vec{j}$ est à flux conservatif. En effet,

$$i_S^{\text{ext}} = \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \mathrm{d}V = 0.$$

(ii) i =constante le long d'un tube de courant (régime permanent). Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. Ces lignes de courant sont des courbes tangentes à $\vec{j}$ en tout point.

(iii) Loi des nœuds : en un nœud où différents courants arrivent, on a

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k i_k = 0,}$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$.

1.3 Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz

On se demande quelle est l'action (à distance) de la distribution de charges et courants sur une particule chargée q de vitesse $\vec{v}$, voir la Figure 1.9.

Cette action se fait via le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$, conséquence directe de $[\rho, \vec{j}]$. La loi de force de Lorentz s'écrit

$$\boxed{\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right).}$$

C'est un postulat. $\vec{E}$ est polaire et est considéré comme un « vrai » vecteur. $\vec{B}$ est axial est est considéré comme un « pseudo-vecteur ».

Force de Lorentz méso/macroscopique : distribution continue de charges et courants. Il y a des porteurs de charges de type k : charges q_k, nombre par unité de volume $n_k[\mathrm{m}^3]$ et vitesse moyenne $\langle \vec{v_k} \rangle$. Soit $\mathrm{d}V$ un volume mésoscopique contenant ces porteurs. Quelle est la force $\mathrm{d}\vec{F}_{em}$ subie par ce volume ? Un charge k subit en moyenne

$$\vec{F}_{L_k} = q_k\left(\vec{E} + \langle \vec{v_k} \rangle \wedge \vec{B}\right).$$

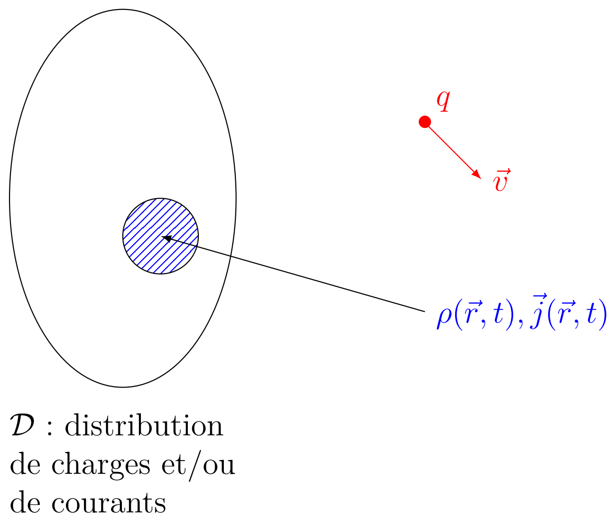

FIGURE 1.9 – Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz.

Dans $\mathrm{d}V$, il y a $n_k \mathrm{d}V$ porteurs k. Ainsi, ils subissent

$$n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v_k} \rangle \wedge \vec{B}\right) \mathrm{d}V.$$

En sommant sur tout les porteurs k, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F}_{\text{em}} &= \left[\sum_{\neq\ k} n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v_k} \rangle \wedge \vec{B}\right)\right] \mathrm{d}V, \\
&= \left(\left(\sum_{\neq\ k} n_k q_k\right) \vec{E} + \left(\sum_{\neq\ k} n_k q_k \langle \vec{v_k} \rangle\right) \wedge \vec{B}\right), \\
&= \left(\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}\right) \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Ainsi, la force volumique est

$$\boxed{\vec{f}_{\text{vol}}^{\text{em}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.}$$

Exemple 1.6. Dans un métal, c'est le force de Laplace : on a $\rho = 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{em}} = (\vec{j} \wedge \vec{B})\mathrm{d}V.}$$

Pour une géométrie filiforme, on a $\vec{j}\mathrm{d}V = js\mathrm{d}l = i\mathrm{d}\vec{l}$, où s est la section du fil. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{em}} = i\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}.}$$

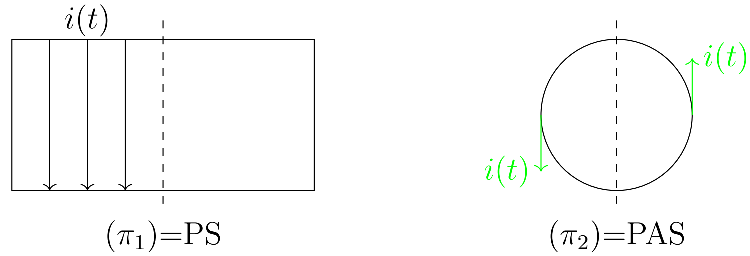

FIGURE 1.10 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un solénoïde.

1.4 Propriétés de symétrie du champ électromagnétique

1.4.1 Principe de Curie

Énoncé en 1905 par Pierre Curie :

> [P. Curie, 1905] Les effets on au moins les symétries (et invariances) des causes.

1.4.2 Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants

(π) est un plan de symétrie pour une distribution de charges et de courants $\mathcal{D}$ si

$$\rho(\pi(M),t) = \rho(M,t), \qquad \vec{j}(\pi(M),t) = S_\pi(\vec{j}(M,t)),$$

où $\pi(M)$ désigne le symétrique du point M et S_π désigne l'application symétrie liée au plan (π).

C'est un plan d'anti-symétrie si

$$\rho(\pi(M),t) = -\rho(M,t), \qquad \vec{j}(\pi(M),t) = -S_\pi(\vec{j}(M,t)).$$

Exemple 1.7 (Solénoïde fini). Un solénoïde (enroulement jointif) contenant N spires possède un PS et un PAS, voir la Figure 1.10. Notons que si le solénoïde est considéré comme infini, alors tout plan perpendiculaire à l'axe est un plan de symétrie.

Exemple 1.8 (Condensateur plan à armatures circulaire). Tout plan contenant l'axe est un plan de symétrie. Tout plan qui y est perpendiculaire est un plan d'antisymétrie, voir la Figure 1.11.

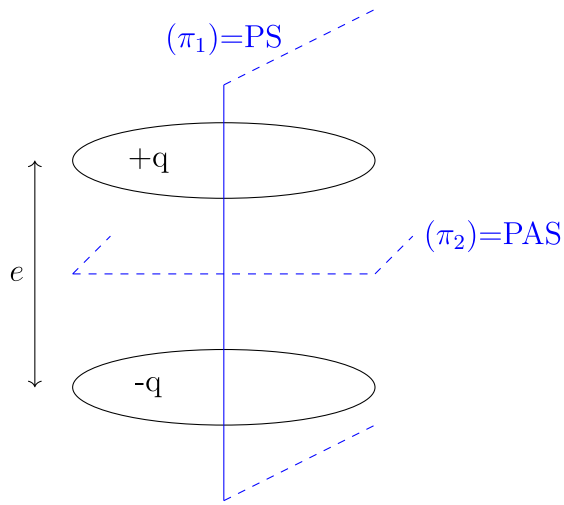

FIGURE 1.11 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un condensateur plan.

1.4.3 Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique

Principe de Curie : si la cause (charges, courants) présente une propriété de symétrie, alors l'effet ($\vec{F}_L$) présente aussi cette propriété de symétrie. Pour le champ électromagnétique, on en déduit :

— un PS pour $\mathcal{D}$ est un PS pour $\vec{E}$ et un PAS pour $\vec{B}$;

— un PAS pour $\mathcal{D}$ est un PAS pour $\vec{E}$ et un PS pour $\vec{B}$.

1.4.4 Géométrie du champ électromagnétique sur un PS/PAS

On en déduit donc que

— Pour un PS, on a

$$\vec{E}(\pi(M)) = \vec{E}(M) = S_\pi(\vec{E}(M)),$$

donc $\vec{E}$ appartient au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie. Au contraire, on a

$$\vec{B}(\pi(M)) = \vec{B}(M) = -S_\pi(\vec{B}(M)),$$

donc $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie.

— Pour un PAS, on a
$$\vec{E} = -S_\pi(\vec{E}),$$
donc $\vec{E} \perp$ PAS, et
$$\vec{B} = S_\pi(\vec{B}),$$
donc $\vec{B} \in$ PAS.

1.4.5 Exemples

La méthode est la suivante :

1. Faire un choix d'un système de coordonnées adapté ;
2. Observer les invariances par translation/rotation de la distribution ;
3. Appliquer le principe de Curie : symétries et géométrie du champ.

Pour un condensateur plan d'axe (Oz), ou un solénoïde d'axe (Oz), toute rotation autour de l'axe (Oz) laisse la distribution invariante (symétrie de révolution d'axe (Oz)). Ainsi, la variable θ est non pertinente. De plus, tout plan contenant l'axe est un PAS. Donc $\vec{E}(r,z,t) = E(r,z,t)\vec{u_\theta}$ et $\vec{B}(r,z,t) = \begin{pmatrix} B_r(r,z,t) \\ 0 \\ B_z(r,z,t) \end{pmatrix}$.

Chapitre 2

Électrostatique

Les charges sont immobiles et on est en régime stationnaire. Il n'y a donc aps de courants.

Sommaire

2.1 Loi de Coulomb

2.1.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On considère le système de deux particules chargées donné à la Figure 2.1. On a

$$\boxed{\vec{F}_{Q\to q} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.}$$

ε_0 est la permittivité électrique absolue du vide, avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ et

$$\boxed{c \approx 3.10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}},\quad \mu_0 \coloneqq 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}},\quad \varepsilon_0 \approx 8.8.10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}.}$$

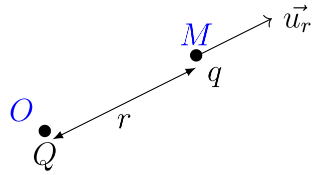

FIGURE 2.1 – Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

Champ électrostatique On a une interaction à distance. Notamment,

$$\vec{F}_{Q\to q} = q\vec{E}(M),$$

avec $\vec{E}(M)$ indépendant de q. Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.}$$

C'est la Loi de Coulomb. On a $[\vec{E}] = \mathrm{V\,m^{-1}}$.

2.1.2 Principe de superposition

C'est une conséquence de la linéarité des équations de Maxwell. S'il y a N particules de charge Q_i, alors le champ électrostatique créé au point M sur la particule de charge q est

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u_{r_i}}.}$$

2.1.3 Ordres de grandeur

Champ électrostatique de l'atome d'hydrogène L'électron autour du noyau de l'atome d'hydrogène est à une distance $a_0 = 53$ pm du noyau (rayon de Bohr). On a

$$\vec{F} = -q\vec{E},$$

avec

$$E_{\text{proton}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} \approx 5.10^{11}\ \mathrm{V\,m^{-1}}.$$

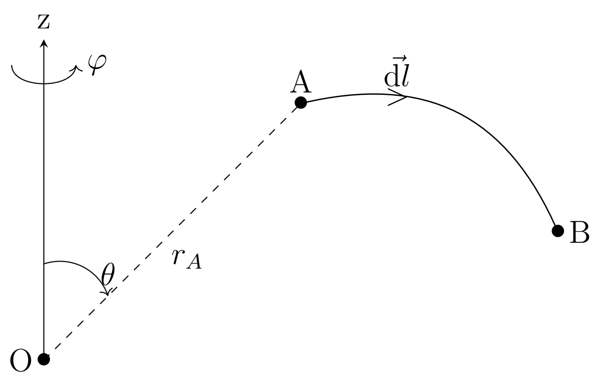

FIGURE 2.2 – Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle.

Notons que le rapport entre la force de gravitation et la force électrostatique exercée sur l'électron est

$$\frac{\left\|\vec{F}^{p\to e}_{\text{gravitation}}\right\|}{\left\|\vec{F}^{p\to e}_{\text{es}}\right\|} = \frac{\mathcal{G}m_p m_e}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \approx 4.10^{-40}.$$

Champ disruptif de l'air On a $E \sim 10^6\ \mathrm{V\,m^{-1}}$.

Échelle macroscopique La batterie d'un téléphone portable génère un champ électrostatique d'environ

$$E \approx \frac{V}{d} \approx \frac{\text{qq } V}{\text{qq cm}} \approx 10^2\ \mathrm{V\,m^{-1}}.$$

2.2 Circulation conservative du champ électrostatique

2.2.1 Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle

On considère le système décrit par la Figure 2.2.

On cherche la circulation de $\vec{E}$ entre A et B, c'est-à-dire

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}.$$

En coordonnées sphériques, on a

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\vec{u_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u_\varphi}.$$

Ainsi,

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right),$$

qui ne dépend que de A et B et pas du chemin choisi. Par définition, le potentiel électrostatique $V(M) = V(x,y,z) = V(r,\theta,\varphi)$ est défini par

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = V(A) - V(B),$$

et on a $[V] = \mathrm{V}$.

2.2.2 Potentiel créé par une charge ponctuelle

On a

$$\boxed{V(M) = V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},}$$

où l'on prend la constante nulle à l'infini. Pour une collection de charges ponctuelles, on utilise le principe de superposition :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}.}$$

2.2.3 Circulation du champ le long d'un contour fermé orienté

Pour deux points A et B du contour $\mathcal{C}$, si $\mathrm{d}\vec{l}_1$ connecte A à B et $\mathrm{d}\vec{l}_2$ connecte B à A, alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_1 + \int_B^A \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2 = V(A) - V(B) + V(B) - V(A) = 0,$$

donc $\vec{E}$ est à circulation conservative. C'est une équation intégrale.

2.2.4 Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient

Pour deux points $M(x,y,z)$ et $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ connectés par $\vec{\mathrm{d}l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, on a

$$\begin{aligned}
\vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} &= \vec{E}\cdot \vec{MM'},\\
&= V(M) - V(M'),\\
&= E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z,\\
&= V(x,y,z) - V(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z),\\
&= \mathrm{d}x\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) + \mathrm{d}y\frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) + \mathrm{d}z\frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z),
\end{aligned}$$

ceci étant valide pour tout déplacement $\vec{\mathrm{d}l}$, donc

$$E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z = -\mathrm{d}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E} = -\begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial V}{\partial z}\end{pmatrix} = -\vec{\mathrm{grad}}V.}$$

En coordonnées cartésiennes, on a simplement $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. C'est une équation locale.

2.2.5 Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique

On reprend le système décrit par la Figure 2.2. On souhaite calculer cette fois-ci le travail développé par la force électrostatique. On a

$$\begin{aligned}
W^{\mathrm{el}}_{A\to B} &= \int_A^B \vec{F}_{\mathrm{el}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \\
&= \int_A^B q\vec{E}^{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \\
&= -q\int_A^B \mathrm{d}V^{\mathrm{ext}}, \\
&= -q\left[V^{\mathrm{ext}}(B) - V^{\mathrm{ext}}(A)\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une énergie potentielle E_p^{ext} telle que

$$W^{\mathrm{el}}_{A\to B} = -\Delta E_p^{\mathrm{ext}},$$

d'où $E_p^{\mathrm{ext}} = qV^{\mathrm{ext}}$. Par convention, on prend $E_p^{\mathrm{ext}}(\infty) = 0$.

On définit aussi l'électron-volt. Il s'agit de l'énergie à fournir pour amener un électron du potentiel 0V au potentiel 1V. Ainsi,

$$\boxed{1\mathrm{eV} = e \times 1\mathrm{V} = 1,6.10^{-19}\mathrm{J}.}$$

2.3 Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss

2.3.1 Charge ponctuelle : flux à travers une sphère

On considère une charge ponctuelle Q en un point O et une sphère S de rayon r de centre O. On note

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.$$

Alors en notant $\vec{n}^{\text{ext}}$ le vecteur normal à la surface S,

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oiint \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}.}$$

2.3.2 Théorème de Gauss

Une charge ponctuelle à l'intérieur d'une surface fermée

Soit V un volume quelconque de l'espace contenant une charge Q. On note S une sphère centrée en Q contenue dans V, et S' le reste de la surface correspondant à V.En un point M quelconque du volume, on a

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.$$

On a

$$\oiint_{S\cup S'} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}\mathrm{d}V,$$

et pour un problème à symétrie sphérique, on a pour tout $r \neq 0$,

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right).$$

Ainsi, $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ pour tout $r \neq 0$, d'où

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{E}\mathrm{d}V = 0 = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S + \oiint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S',$$

et les deux normales extérieures sont opposées l'une de l'autre. Finalement,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{u_r} \mathrm{d}S' = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi, si une surface S contient une charge Q, on a toujours

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}.}$$

Charge ponctuelle à l'extérieur d'une surface fermée

Dans ce cas, on a directement

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}\mathrm{d}V = 0.}$$

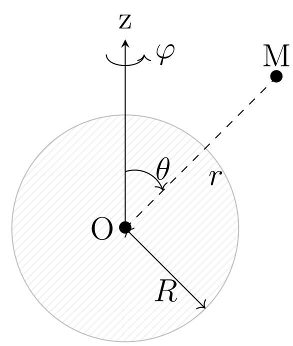

FIGURE 2.3 – Sphère uniformément chargée en volume ou en surface.

Bilan

Si $\vec{E}$ est le champ total créé par N charges Q_i, alors

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \frac{Q^{\text{int}}}{\varepsilon_0}.}$$

Ici, Q^{int} est la somme de toutes les charges qui sont à l'intérieur de la surface S.

2.3.3 Comment appliquer le théorème de Gauss

Le but est de calculer des champs électrostatiques $\vec{E}$ dans des cas de hautes symétries. La méthode est la suivante :

(α) Invariance et symétries : donne la géométrie de $\vec{E}$;

(β) Choisir une surface de Gauss adaptée (ou bien $\vec{E} \parallel \vec{n}^{\text{ext}}$ avec E qui est constant sur la surface ou bien $\vec{E} \perp \vec{n}^{\text{ext}}$) avec un dessin ;

(γ) Conclure.

2.3.4 Exemples fondamentaux

Sphère uniformément chargée en volume ou en surface

On considère le système donnée à la Figure 2.3.

(α) Toute rotation d'axe passant par O laisse la distribution invariant, donc

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = \vec{E}(r) = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ E_\theta(r) \\ E_\varphi(r) \end{pmatrix}.$$

Les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ sont des PS valable pour tout point M. Ainsi, $\vec{E}$ est radial et $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}$.

(β) La bonne surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r variable.

(γ) On a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}R = \oiint_S E(r) \mathrm{d}S = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.}$$

Boule uniformément chargée en volume. La densité ρ est constante et vaut $\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ où Q est la charge présente dans l'entièreté de la boule. Ainsi, pour $r \geqslant R$, on a

$$Q_{\text{int}}(r \geqslant R) = Q,$$

d'où

$$\boxed{\vec{E}(r \geqslant R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.}$$

Si $r \leqslant R$, alors on a

$$Q_{\text{int}}(r \leqslant R) = \iiint \rho \mathrm{d}V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\vec{E}(r \leqslant R) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{u_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{r}{R}\right)\vec{u_r}.}$$

Sphère uniformément chargée en surface. Pour $r > R$, on a le même résultat que précédemment. Pour $r < R$, on a $Q_{\text{int}}(r < R) = 0$, donc $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. $\vec{E}$ est donc discontinu à la surface de la sphère (variation d'amplitude égal à σ/ε_0). C'est un modèle non physique.

Cylindre infini uniformément chargé en volume ou en surface

On considère un cylindre de rayon R d'axe (Oz). La distribution de charge est à symétrie cylindrique « infinie ».

(α) Il y a une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) et une invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz). De plus, tout plan perpendiculaire à (Oz) est un plan de symétrie. Enfin, tout plan contenant (Oz) est un plan de symétrie. Finalement, on a

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}.}$$

Remarque 2.1. Si la distribution est non infinie, a priori on a

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_r(r,z) \\ 0 \\ e_z(r,z) \end{pmatrix}.$$

(β) La surface de Gauss que l'on prend est un cylindre d'axe (Oz) de rayon r, de hauteur de h, formé par deux disques perpendiculaires à l'axe (Oz).

(γ) Le théorème de Gauss donne

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0},$$

où $S = \Sigma \cup S_1 \cup S_2$ où S_1 et S_2 correspondent aux disques. Ainsi,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0 + 0 + \iint_\Sigma E(r)\vec{u_r} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}\Sigma = E(r) \times 2\pi r h.$$

Ainsi,

$$\boxed{E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{2\pi\varepsilon_0 h r}.}$$

Cylindre uniformément charge en volume. On considère une tranche d'hauteur h, on a $Q = \rho h \pi R^2$. On introduit donc

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{h} = \rho\pi R^2.}$$

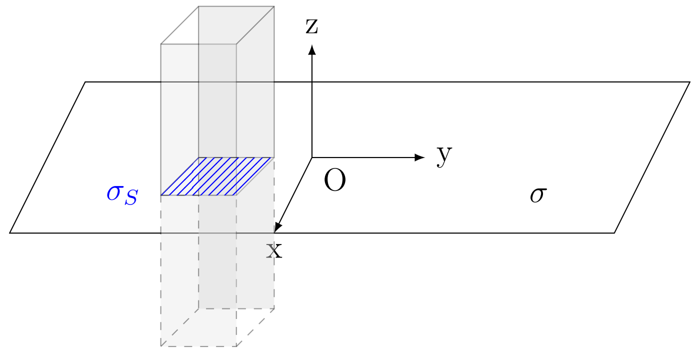

FIGURE 2.4 – Plan uniformément chargé en surface.

C'est la charge linéique en $\mathrm{C\,m^{-1}}$. Pour $r \geqslant R$, on a $Q_{\text{int}}(r \geqslant R) = \lambda h$, d'où

$$\boxed{\vec{E}(r \geqslant R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}.}$$

Si $r \leqslant R$, on a $Q_{\text{int}}(r \leqslant R) = \rho\pi r^2 h = \lambda h \left(\frac{r}{R}\right)^2$. Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(r \leqslant R) = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u_r}.}$$

Cylindre uniformément chargé en surface. Si $r < R$, on a $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. Si $r > R$, on a $Q_{\text{int}}(r > R) = Q = \lambda h$, donc $\vec{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$. À nouveau, il y a une discontinuité égale à $\sigma/@\varepsilon_0$ avec $\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R}$. Elle est due au modèle surfacique.

Plan infini uniformément chargé en surface

On considère le système décrit à la Figure 2.4.

Par plan infini, on entend que les longueurs caractéristiques du plan selon les axes x et y sont très grandes devant l'épaisseur du plan : $L_x, L_y \gg e$.

(α) Il y a invariance par translation par rapport aux axes (Ox) et (Py). Ainsi, le champ ne dépend pas de x ni de y. Pour les symétries, tout plan parallèle à (xOy) est un PS, donc $E_y = 0$. Tout plan parallèle à (yOz) est un PS, donc $E_x = 0$. Ainsi, on a $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$. Enfin, le fait que la plan (xOy) est un PS implique $E(-z) = -E(z)$.

(β) La surface de Gauss est un cylindre de générateur parallèle à (Oz), de hauteur 2z centré sur le plan $z = 0$.

(γ) On a

$$\begin{aligned}\oiint_{S=S_1\cup S_2\cup\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0},\\ &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},\\ &= 0 + \iint_{S_1} E(z)\vec{u}_z\cdot\vec{u}_z\mathrm{d}S\\ &\quad + \iint_{S_2} E(-z)\vec{u}_z\cdot\left(-\vec{u}_z\right)\mathrm{d}S,\\ &= E(z)S + E(z)S.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z,}$$

et

$$\boxed{\vec{E}(z<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z.}$$

La différence en $z = 0$ vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Couche de charges infinie uniformément chargée en volume. On se réfère à la Figure 2.5.

(α) Il y a invariance par translation selon (Ox) et (Oy), donc $\vec{E}$ ne dépend ni de x, ni de y. Les symétries sont les mêmes que précédemment, on a donc $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ et $E(-z) = -E(z)$.

(β) La surface de Gauss est la même que précédemment, mais avec la base dans le plan $z = 0$.

(γ) On a donc

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = 0 + 0 + E(z)\times S = \frac{Q_{\text{int}}(z)}{\varepsilon_0}.$$

Si $z \geqslant e/2$, on a $Q_{\text{int}}(z \geqslant e/2) = \rho\times S\times e/2$, donc

$$\boxed{E(z\geqslant e/2) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}, \qquad E(z\leqslant -e/2) = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}.}$$

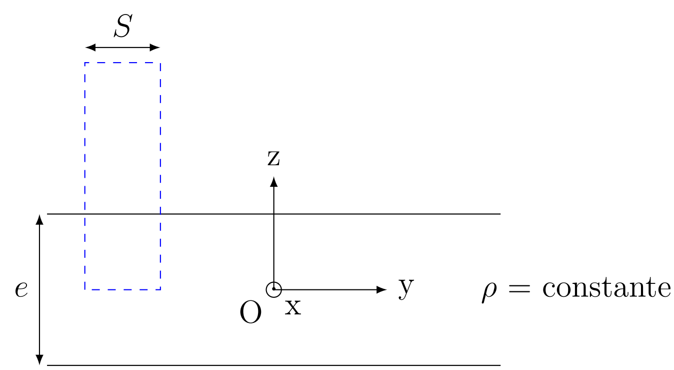

FIGURE 2.5 – Couche de charges infinie uniformément chargée en volume.

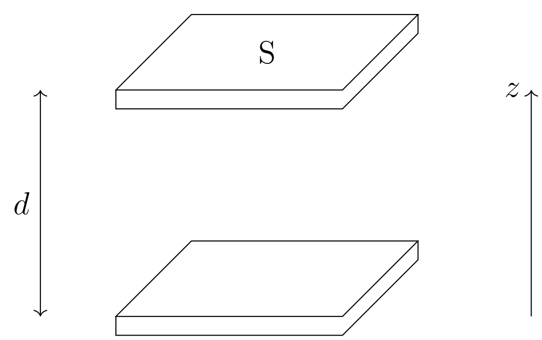

FIGURE 2.6 – Condensateur plan sans effet de bord.

Si $0 \leqslant z \leqslant e/2$, on a $Q_{\text{int}}(z) = \rho \times S \times z$, donc

$$\boxed{E(0 \leqslant z \leqslant e/2) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}, \qquad E(-e/2 \leqslant z \leqslant 0) = -\frac{\rho z}{\varepsilon_0}.}$$

Ainsi, E est continu. Dans le limite $e \to 0$, on retrouve le modèle de la nappe de charges avec $\rho e = \sigma$ fini.

2.3.5 Condensateur plan sans effet de bord. Capacité

Condensateur plan sans effet de bord

Le condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques se faisant face, séparées par un isolant ou un diélectrique. On se réfère à la Figure 2.6.

On fait l'hypothèse que $d \ll \sqrt{S}$, ce qui correspond au fait que les armatures sont « infinies » : il n'y a pas d'effet de bords. Chaque armature est donc un plan infini sans épaisseur.

Les deux plans sont soumis à une tension U : il y a une accumulation de charges opposées sur les deux plans en regard.

Champ électrique

(α) Il y a invariance par translation sur (Ox) et (Oy), donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$. Tout plan parallèle à (xOz) et (yoZ) est un PS, donc $E_x = E_y = 0$. Finalement,

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z.$$

Ainsi, $\vec{E}$ est perpendiculaire aux armatures. Si $\mathrm{d}\vec{l}$ est un déplacement infinitésimal sur l'armature, on a

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 = -\mathrm{d}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + 0\right].$$

Donc $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0$ sur une armature, donc V est constant sur une armature. On note V_1 le potentiel de l'armature située en $z = d/2$ et V_2 celle en $z = -d/2$. On a $U = V_1 - V_2$. Or V est défini) une constante près. On choisit donc $V_1 = U/2$ et $V_2 = -U/2$. Cela entraîne donc que le plan $z = 0$ est un PAS. Donc les charges (surfaciques) valent $+\sigma$ sur l'armature haute, et $-\sigma$ sur l'armature basse. On applique le théorème de superposition comme selon la Figure 2.7.

Ainsi, entre les armatures, on a

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z,}$$

qui est uniforme (lié aux effets de bord non présents). En dehors du condensateur, on a $\vec{E} = \vec{0}$.

Capacité

En notant Q les charges sur les armatures ($+Q$ en haut, $-Q$ en bas), on définit la capacité du condensateur par

$$\boxed{C = \frac{Q}{U},}$$

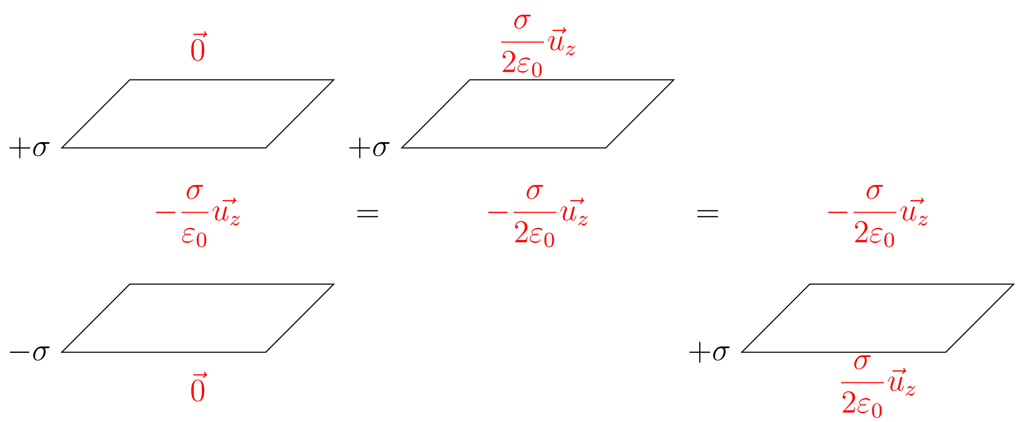

FIGURE 2.7 – Théorème de superposition pour établir l'expression du champ électrostatique dans un condensateur plan.

qui est strictement positif et qui est en F. On peut exprimer la capacité avec les distances caractéristiques présentées à la Figure 2.6. En effet, en notant M_1 un point de l'armature haute et M_2 un point de l'armature basse, on a

$$\begin{aligned}\int_1^2 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \int_1^2 -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot \vec{u}_z\left(\mathrm{d}x\vec{u}_x+\mathrm{d}y\vec{u}_y+\mathrm{d}z\vec{u}_z\right),\\ &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_1^2 \mathrm{d}z,\\ &= \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Or

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = V_1 - V_2 = U,$$

et finalement

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.}$$

Ordre de grandeur. Pour $d = 0,1\text{mm}$, $S = 1\text{cm}^2$, on a

$$C\#10\text{pF}.$$

De plus, plus S augmente, plus la capacité augmente. Enfin, en utilisant un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ avec $\varepsilon_r > 1$, on augmente la capacité. On peut arriver à des capacités de l'ordre du µF.

2.4 Topographie du champ électrostatique

2.4.1 Lignes de champ. Tubes de champ

Ligne de champ. Une ligne de champ est une courbe tangente en tout point au champ électrostatique $\vec{E}$. Quelques exemples sont donnés à la Figure 2.8.

Les lignes de champ divergent à partir des $q > 0$ et convergent vers les $q < 0$.

Tube de champ. Un tube de champ est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

2.4.2 Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est définie par

$$\{M \,|\, V(M) = \text{constante}\}\,.$$

Sur une surface équipotentielle, on a $\mathrm{d}V = 0 = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Ceci vaut pour tout déplacement le long de la surface $\mathrm{d}\vec{l}$.

Otientation des lignes de champ et sens de variation de V. On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. Soit une ligne de champ (orientée selon $\vec{E}$). Alors

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}V > 0,$$

donc V décroît le long de la ligne de champ. On peut dire que $\vec{E}$ « descend » les potentiels.

2.4.3 Resserrement ou évasement des lignes de champ

C'est le principe du paratonnerre, voir la Figure 2.9.

On a

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0 = 0 + E_2 S_2 - E_1 S_1,$$

d'où

$$\boxed{E_2 = E_1 \times \frac{S_1}{S_2} > E_1.}$$

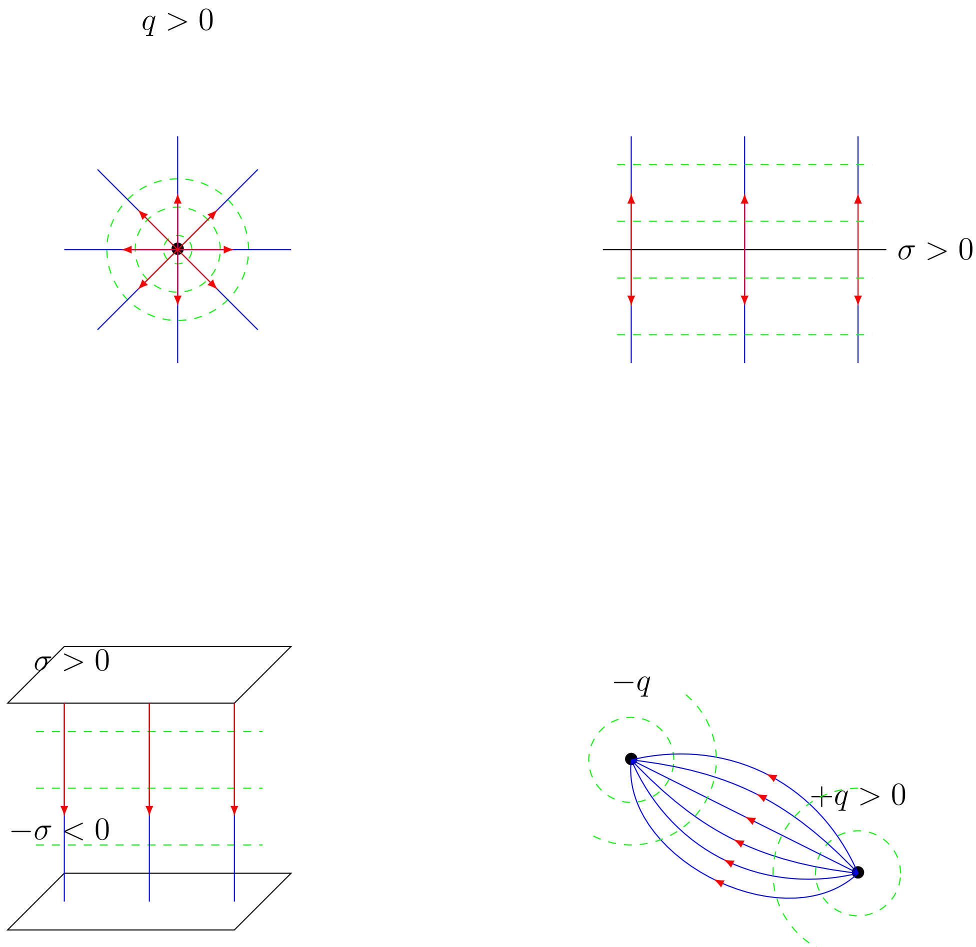

FIGURE 2.8 – Topographie du champ électrostatique : exemples de lignes de champ. Les courbes en vert sont les équipotentielles.

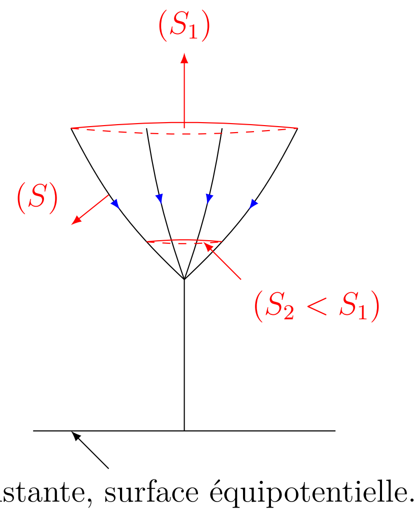

FIGURE 2.9 – Resserrement des lignes de champ : principe du paratonnerre.

Ainsi, $\left\|\vec{E}\right\|$ augmente si les lignes de champ se resserrent, et diminue si les lignes de champ s'écartent.

2.4.4 Visualisation de cartes de champ et de potentiel

Un exemple interactif est disponible sur le site de Geneviève Tulloue via l'université de Nantes.

2.5 Équations locales de l'électrostatique

2.5.1 Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss

Le théorème de Gauss couplé ai théorème d'Ostrogradski donne

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \iiint_V \text{div }\vec{E}\mathrm{d}V = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\mathrm{d}V.$$

Ainsi, pour tout volume V, on a

$$\iiint_V \left(\text{div }\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}V = 0,$$

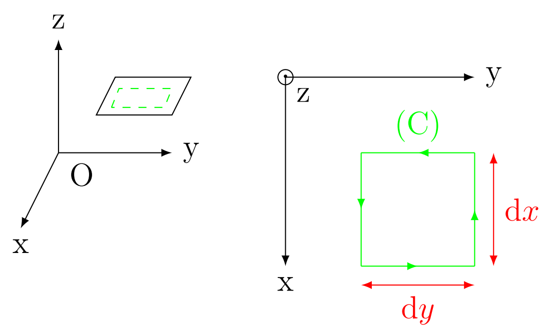

FIGURE 2.10 – Circulation conservative locale en coordonnées cartésiennes.

d'où on entire l'équation de Maxwell-Gauss, qui est une version locale du théorème de Gauss :

$$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.}$$

2.5.2 Circulation conservative locale

On se réfère à la Figure 2.10.

On se place dans un lan parallèle à (xOy), de côté z. On a

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0,\\ &= E_x(x,y,z)\mathrm{d}x + E_y(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\\ &\quad - E_x(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x - E_y(x,y,z)\mathrm{d}y,\\ &= -\mathrm{d}y\frac{\partial E_x}{\partial y}(x,y,z)\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\frac{\partial E_y}{\partial x}(x,y,z)\mathrm{d}y = 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,}$$

la circulation est donc proportionnelle à l'aire du carré. De même dans les autres plans, on obtient

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0,$$
$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

La circulation du champ est donc proportionnelle à l'aire sur laquelle s'appuie le contour. L'idée est donc de passer d'une circulation $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ à un flux à travers une surface.

2.5.3 Opérateur rotationnel

Théorème-définition de Stokes. Soit $\vec{A}(x, y, z)$ champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$. Alors on a

$$\boxed{\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_\Sigma \left(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\right) \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma.}$$

Ici, (Σ) est une surface (non fermée) s'appuyant sur (C) et orientée selon la règle du tire-bouchon.

Expression de $\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{A}$ en cartésienne. On a

$$\begin{aligned}
\oint_{C \in (xOy)} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \times \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\
&= \left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_z \mathrm{d}y\mathrm{d}y, \\
&= \left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) \cdot \vec{u}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.}$$

De même pour les deux autres coordonnées, donc

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.}$$

Avec l'opérateur nabla (en cartésienne), on a

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{A}}.$$

2.5.4 Équation de Maxwell–Faraday

Sur un contour fermé C avec une surface Σ supportée par ce contour, on a

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 = \iint_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{E}\mathrm{d}\Sigma,$$

ceci vaut pour tout contour C, d'où on en tire l'équation de Maxwell-Faraday, qui ets une équation locale :

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}.}$$

Lien avec le potentiel. Soit $f(\vec{r}) = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}f) = \vec{0}$ car

$$\oint_C \vec{\mathrm{grad}}f \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 = \iint_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}f) \cdot \vec{N}\mathrm{d}\Sigma,$$

donc

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V.}$$

2.5.5 Vue d'ensemble des différentes formulations des lois de l'électrostatique

On choisit un des points de vue, qui sont tous équivalents.

<u>Loi fondamentale</u>

- Loi de Coulomb : $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
- Principe de superposition

<u>Formulation intégrale</u>

- Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}S = \frac{Q^{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$
- Circulation conservative de $\vec{E}$: $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(A) - V(B)$

<u>Formulation locale</u>

- Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (flux de $\vec{E}$)
- Maxwell-Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V$ (circulation de $\vec{E}$)

2.6 Équations de Poisson et de Laplace

2.6.1 Équation de Poisson en présence de charges

On a $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V$, d'où $-\mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\vec{\mathrm{grad}}V\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} := \Delta V.}$$

L'équation de Poisson (locale) s'écrit donc

$$\boxed{\Delta V(x,y,z) = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}.}$$

Cette équation contient « toute l'électrostatique ».

2.6.2 Équation de Laplace. Résolution numérique

Dans le vide, en l'absence de charges, on a

$$\boxed{\Delta V(x,y,z) = 0.}$$

C'est l'équation de Laplace.

On a le théorème d'unicité suivant : pour des conditions aux limites données (sur V ou ses dérivées), et pour une géométrie donnée, l'équation de Laplace admet une unique solution. On donne le principe de la résolution numérique de $\Delta V = 0$ en deux dimensions sur un domaine maillé uniforme de pas constant l. On note $V_{n,m} = V(nl, ml)$. Alors

$$\begin{aligned}
V_{n-1,m} &= V_{n,m} - l\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{n,m} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{n,m} + o(l^2),\\
V_{n+1,m} &= V_{n,m} + l\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{n,m} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{n,m} + o(l^2),\\
V_{n,m-1} &= V_{n,m} - l\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{n,m} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{n,m} + o(l^2),\\
V_{n,m+1} &= V_{n,m} + l\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{n,m} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{n,m} + o(l^2),
\end{aligned}$$

Comme $\Delta V = 0$, la somme donne

$$\boxed{V_{n,m} = \frac{V_{n-1,m} + V_{n+1,m} + V_{n,m-1} + V_{n,m+1}}{4},}$$

que l'on résout avec un tableur.

2.7 Analogies avec la gravitation universelle

2.7.1 Les deux lois de force. Grandeurs analogues

On compare dans la Table 2.1 les lois et les grandeurs de l'électrostatique et de la gravitation.

2.7.2 Potentiel gravitationnel. Énergie potentielle d'une masse plongée dans un champ extérieur

Dans la Table 2.2, on dérive le potentiel gravitationnel grâce à l'analogie avec l'électrostatique.

2.7.3 Théorème de Gauss gravitationnel

On a noté μ la masse volumique. Vu de l'extérieur, l'astre à symétrie sphérique est équivalent à une masse ponctuelle.

Électrostatique	Gravitation
$\vec{F} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, attractive ou répulsive	$\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$, attractive
charge (<0,>0)	masse (>0)
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-\mathcal{G}$
Champ $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, $\vec{F} = q\vec{E}$	Champ $\vec{g} = -\mathcal{G}\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$, $\vec{F} = m\vec{g}$ (mais $\vec{g}$ n'est pas le champ de pesanteur)

TABLE 2.1 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : les deux lois de force.

2.7.4 Équations locales de la gravitation universelle

On a donc $\Delta\varphi = 0$ entre les astres (équivalent à l'équation de Laplace).

2.7.5 Énergie potentielle de gravitation d'un astre à symétrie sphérique

On fait l'hypothèse que μ=constante=$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. On se demande quelle a été l'énergie de constitution de l'astre.

L'astre s'est formé par agrégations successives de couches minces : on apporte depuis l'infini la masse $\mathrm{d}m = \mu \times 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ dans le potentiel

$$\varphi(r) = -\mathcal{G}\frac{M(r)}{r} = -\mathcal{G}\frac{\mu \times \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = -\mathcal{G}\frac{4\mu\pi r^2}{3}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{gravitationnel}} &= \int_\infty^r \mathrm{d}\vec{F}_{\text{grav}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \\
&= \int_\infty^r \mathrm{d}m\vec{g}(s)\mathrm{d}\vec{l}, \\
&= \mathrm{d}m\left[\varphi(\infty) - \varphi(r)\right], \\
&= -\mathrm{d}E_p,
\end{aligned}$$

Électrostatique	Gravitation
$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ $\Updownarrow$ $\exists V, \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(B) - V(A)$ $\Updownarrow$ $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}} V$ $\Updownarrow$ $\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0}$	$\oint_C \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ $\Updownarrow$ $\exists \varphi(\vec{r}), \int_A^B \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi(A) - \varphi(B)$ $\Updownarrow$ $\vec{g} = -\vec{\mathrm{grad}} \varphi$ $\Updownarrow$ $\vec{\mathrm{rot}}\vec{g} = \vec{0}$
Source ponctuelle (charge)	Source ponctuelle (masse)
$V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\varphi(r) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{r}$
$E_p^{\mathrm{ext}} = qV^{\mathrm{ext}} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$E_p^{\mathrm{ext}} = m\varphi^{\mathrm{ext}} = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{r}$

TABLE 2.2 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : potentiel gravitationnel et énergie potentielle d'une masse plongée dans un champ extérieur.

Électrostatique	Gravitation
$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}} \mathrm{d}S = \dfrac{Q^{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_S \vec{g} \cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}} \mathrm{d}S = -4\pi\mathcal{G}M^{\mathrm{int}}$
Distribution sphérique	Distribution sphérique
$\vec{E}(r \geqslant R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ $\vec{E}(r \leqslant R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\dfrac{r}{R}\vec{u}_r$ (si ρ=constante)	$\vec{g}(r \geqslant R) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$ $\vec{g}(r \leqslant R) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{R^2}\dfrac{r}{R}\vec{u}_r$ (si μ=constante)

TABLE 2.3 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : théorème de Gauss gravitationnel.

Électrostatique	Gravitation
$\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\vec{g} = -4\pi\mathcal{G}\mu$
$\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V$	$\vec{\mathrm{rot}}\vec{g} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{g} = -\vec{\mathrm{grad}}\varphi$
$\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\Delta\varphi = 4\pi\mathcal{G}\mu$

Table 2.4 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : équations locales de la gravitation universelle.

avec $\varphi(\infty) = 0$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_p &= \mathrm{d}m\varphi(r),\\ &= \mu \times 4\pi r^2\mathrm{d}r\left(-\mathcal{G}\mu\frac{4}{3}\pi r^2\right),\\ &= -\mathcal{G}\mu^2\frac{(4\pi)^2}{3}r^4\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant, on a

$$\boxed{E_p = \int_0^R \mathrm{d}E_p = -\mathcal{G}\mu^2\frac{(4\pi)^2}{3}\frac{R^5}{5} = -\frac{3\mathcal{G}M^2}{5R}.}$$

Ainsi, E_p diminue quand R diminue : c'est l'effondrement gravitationnel. En transposant à l'électrostatique, on obtient l'énergie potentielle de constitution d'une boule chargée :

$$\boxed{E_p = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} > 0.}$$

Chapitre 3

Magnétostatique

Les courants sont stationnaires : $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})$. Ils circulent dans des conducteurs neutres : $\rho(\vec{r}) = 0$. Ainsi $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$.

Sommaire

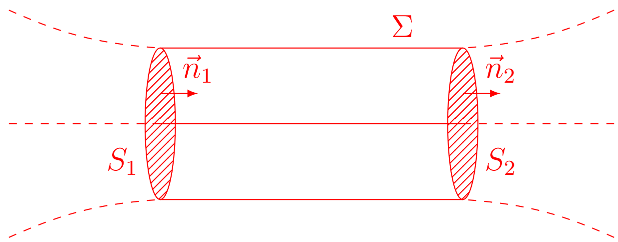

FIGURE 3.1 – Flux du champ magnétique à travers une section d'un tube de champ.

3.1 Flux conservatif du champ magnétique : formulations intégrale et locale

3.1.1 Nullité du flux magnétique à travers une surface fermée

On a le postulat suivant :

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0.}$$

Ainsi, il n'existe pas de « masses » ni de « charges » magnétiques.

3.1.2 Flux de $\vec{B}$ à travers une section d'une tube de champ

On se réfère à la Figure 3.1. On note $\varphi_i = \iint_{S_i} \vec{B} \cdot \vec{n}_i \mathrm{d}S_i$. Alors

$$\oiint_{S_1 \cup S_2 \cup \Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0,$$

implique

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2.}$$

3.1.3 Resserrement des lignes de champ magnétiques

En notant $\bar{B}_i$ la valeur moyenne sur S_i et en supposant $S_1 > S_2$, on a

$$\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} = \frac{S_1}{S_2} > 1.$$

Ainsi, $\left\|\vec{B}\right\|$ est plus intense où les lignes de champ sont plus serrées.

3.1.4 Équation locale de Maxwell-Thompson

D'après le théorème d'Ostrogradski, on a

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{div}\vec{B} = 0.}$$

L'équation est locale et universelle.

3.2 Circulation du champ magnétique : théorème d'Ampère intégral et local

3.2.1 Théorème d'Ampère intégral

En L1, on voit que les lignes de champ de $\vec{B}$ s'enroulent autour des courants, et que $\vec{B} \times l \propto I$ si I est l'intensité d'un courant le long d'un fil de longueur l (par linéarité).

On a le postulat suivant :

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}},}$$

où I_{enl} est l'intensité des fils « enlacés », voir la Figure 3.2. Dans ce cas, on a

$$I_{\text{enl}} = I_1 - I_2 - I_3.$$

Le postulat s'écrit aussi

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma.}$$

3.2.2 Quand et comment mettre en œuvre le théorème d'Ampère ?

On l'utilise en cas de haute symétrie : cylindrique ou plane. La méthode est la suivante :

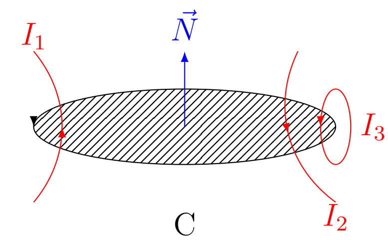

FIGURE 3.2 – Circulation du champ magnétique : enlacement des fils et intensité du courant.

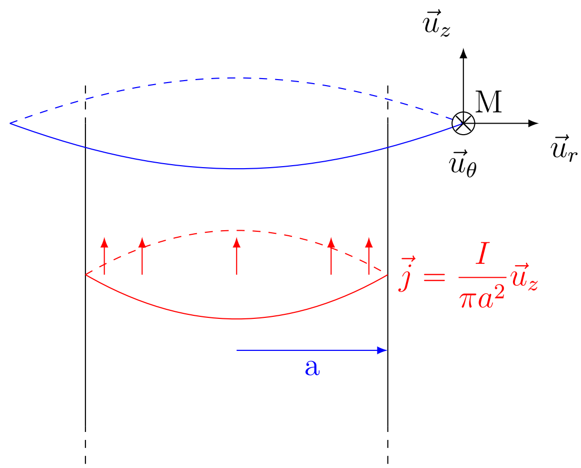

FIGURE 3.3 – Champ magnétique pour un câble rectiligne infini épais.

(α) Choisir le bon système de coordonnées;

(β) Donner les invariances et les symétries pour obtenir la géométrie de $\vec{B}$;

(γ) Choisir le bon contour et l'orienter arbitrairement. Ou bien $\vec{B}$ est parallèle à C et constant, ou bien $\vec{B}$ est perpendiculaire à C.

(δ) Faire un dessin et l'application.

3.2.3 Exemples fondamentaux

Câble rectiligne infini épais

La longueur du fil l est supposée très grande devant son épaisseur a : $l \gg a$, voir la Figure 3.3.

Pour les invariances et symétries :

— symétrie de révolution par rapport à (Oz) : pas de dépendance en θ ;

— invariance par translation par rapport à (Oz) : pas de dépendant en z ;

— tout plan inclus dans (Oz) est un PS : $B_r = B_z = 0$.

Finalement, on a $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$. Le théorème d'Ampère donne alors

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{enl}}(r).$$

Pour $r \geqslant a$, on a $I_{\mathrm{enl}}(r \geqslant a) = I$, d'où

$$\boxed{\vec{B}(r \geqslant a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta.}$$

Si $r \leqslant a$, on a

$$I_{\mathrm{enl}}(r \leqslant a) = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{N}\mathrm{d}\Sigma = \frac{I}{\pi a^2} \times \pi r^2 = I\left(\frac{r}{a}\right)^2,$$

d'où

$$\boxed{\vec{B}(r \leqslant a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \times \frac{r}{a}\vec{u}_\theta.}$$

En variante, on peut supposer que I ne circule qu'à la surface du cylindre sur une épaisseur nulle. Alors $\vec{j}(r < a) = \vec{0} = \vec{j}(r > a)$, donc $\vec{B}(r < a) = \vec{0}$ et $\vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$.

Solénoïde "infini"

On considère que le rayon du solénoïde a est négligeable devant sa longueur l : $l \gg a$. On se réfère à la Figure 3.4.

Il y a invariance de révolution selon l'ae (Oz) et invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz), donc le champ ne dépend que de la variable r. Tout plan perpendiculaire à (Oz) est un PS, donc

$$\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u}_z.}$$

Notons que si la longueur est finie, tout plan inclue dans (Oz) est un PAS, donc $B_\theta = 0$. Pour contour d'Ampère, on choisit un contour rectangulaire

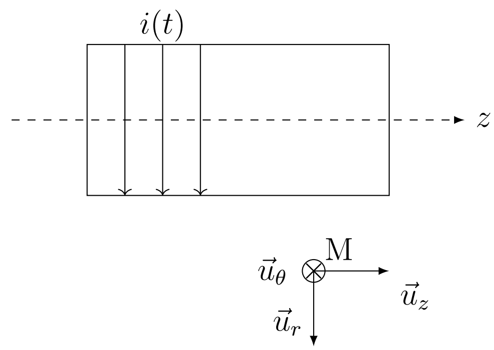

FIGURE 3.4 – Champ magnétique dans un solénoïde infini.

contenu dans un plan contenant l'axe (Oz) dont un des côtés est sur l'axe. Alors

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}}(r) = B(0) \times h - B(r) \times h,$$

donc si $r < a$, $B(r < a) = B(0) =$ constante. Si $r > a$, $B(r > a) = 0$ par hypothèse, donc $B(0) = \mu_0 n i$.

3.2.4 Ordres de grandeur

Pour un fil infini (ou une spire, à très faible distance), alors

$$B \sim \frac{\mu_0 i}{2\pi a}.$$

Si $i = 1\text{A}, a = 2\text{mm}, \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\text{H}\,\text{m}^{-1}$, alors $B \sim 10^{-4}\text{T} = 1\text{gauss}$. S'il y a 10000 spires sur 20cm, alors

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n i \sim 60\text{mT}.$$

Pour augmenter la valeur du champ magnétique :

— pour augmenter i, l'effet Joule est limitant (sauf supraconducteur) ;

— on peut augmenter n ;

— on peut augmenter μ_0 en utilisant des matériaux ferromagnétiques, B peut alors atteindre quelques Tesla.

3.2.5 Théorème d'Ampère local : équation de Maxwell–Ampère

Si $\mathcal{C}$ est un contour orienté et Σ est une surface supportée par $\mathcal{C}$ avec $\vec{N}$ un vecteur normal extérieur normalisé, alors d'après le théorème de Stokes, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma = \iint_{\Sigma} \left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}).}$$

3.2.6 Vue d'ensemble des lois de la magnétostatique

Pour le flux, on a l'équivalence intégrale/locale suivante :

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{div}\vec{B} = 0.}$$

Pour la circulation, on a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} \Longleftrightarrow \vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.}$$

3.3 Topographie du champ magnétique

3.3.1 Fermeture et orientation des lignes de contour

Comme le flux du champ est nul, toute ligne de champ magnétique est fermée sur elle-même. De plus, comme $\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, les lignes de champ tournent autour des courants dans le sens donné par la règle du tire-bouchon.

3.3.2 Comparaison des lignes de champ électriques et magnétiques

Une ligne de champ fermée sur elle-même est une ligne de champ magnétique, tandis qu'une ligne de champ convergente ou divergente en un point est une ligne de champ électrique. Au voisinage des sources, les lignes de champ électriques divergent ou convergent radialement, tandis que les lignes de champ magnétiques tournent autour de la source. Loin des sources, les deux champs sont régis par les mêmes équations ($\vec{\text{rot}}\vec{E} = \vec{\text{rot}}\vec{B} = \vec{0}$ et $\text{div}\vec{B} = \text{div}\vec{E} = 0$), la distinction n'est donc pas évidente a priori.

Chapitre 4

Dipôles Statiques

Sommaire

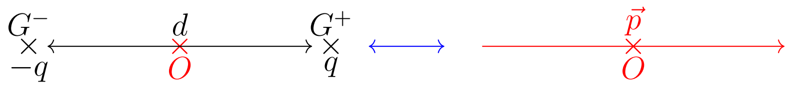

FIGURE 4.1 – Modèle d'une distribution neutre.

4.1 Dipôle électrostatique : E et V créés

4.1.1 Le modèle du dipôle électrostatique

On sait qu'il y a neutralité de la matière. Comment concilier cela avec les distributions de charges non nulles ?

Modèle d'une distribution neutre. La distribution est constituée de charges positives $Q^+ = q$ et négatives $Q^- = -q$. On se réfère à la Figure 4.1. Alors pour avoir $Q = 0$ (neutralité de la matière), on doit avoir $Q^+ + Q^- = 0$. Les barycentres des charges positives et négatives sont notées G^+ et G^-. Par définition, on définit le moment dipolaire par

$$\boxed{\vec{p} \coloneqq q\overrightarrow{G^-G^+},}$$

et son unité est le C m. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène, $\vec{p} \parallel \vec{E}^{\text{ext}}$ et $\vec{p} \cdot \vec{E}^{\text{ext}} > 0$. Pour une molécule présentant une symétrie centrale, on a $\vec{p} = \vec{0}$. Sinon, les molécules peuvent être polaires.

Ordre de grandeur. On a $p \sim 10^{-19} \times 10^{-10} = 10^{-29}$C m. On introduit donc le Debye D, où 1 $D = \frac{1}{3}10^{-29}$C m. Pour un condensateur plan, on a $\|\vec{p}\| = Qe \sim 10^{-13}$C m. Pour un potentiel de 10V, avec $e = 1$mm et $S = 10\text{cm}^2$, on a $Q = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{e} \sim 10^{-10}$C.

4.1.2 Symétries du problème

Pour un dipôle, en coordonnées sphériques où il y a un potentiel $V(r, \theta, \varphi)$ et $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$. Il y a cependant une invariance par symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz), donc il n'y a pas de dépendance en φ. De plus, tout plan contenant (Oz) est un plan de symétrie. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} V(r,\theta), \\ \vec{E}(r,\theta) = \begin{pmatrix} E_r(r,\theta) \\ E_\theta(r,\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array}}$$

4.1.3 Potentiel V dans l'approximation dipolaire

L'approximation dipolaire est $r \gg q$, où r est la distance à laquelle se trouve le point M dont on voit le dipôle. Dans ce cas, on a

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 G^+M} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 G^-M}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} G^+M^2 = \left\|\overrightarrow{G^+M}\right\|^2 &= \left(\overrightarrow{G^+O} + \overrightarrow{OM}\right)^2, \\ &= \frac{d^2}{4} + r^2 - 2\,\underbrace{\overrightarrow{OG^+} \cdot \overrightarrow{OM}}_{\frac{d}{2} r\cos\theta}, \\ &= r^2\left[1 - \frac{d\cos\theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{G^+M} &= (G^+M^2)^{-1/2}, \\ &= \frac{1}{r}\left[1 - \frac{d\cos\theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2}\right]^{-1/2}, \\ &\approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\frac{1}{G^-M} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\frac{d}{2r}\cos\theta - 1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right), \\ &= \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}, \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}, \\ &= \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Il y a donc une décroissance en $\frac{1}{r^2}$, qui est beaucoup plus rapide que pour une charge qui est en $\frac{1}{r}$.

4.1.4 Champ $\vec{E}$ dans l'approximation dipolaire

En coordonnées sphériques, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}} \propto \frac{1}{r^3}.$$

4.1.5 Allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans l'approximation dipolaire

Soit un déplacement $\vec{\mathrm{d}l}$ le long d'une ligne de champ $\vec{\mathrm{d}l} \parallel \vec{E}$ *i.e.* $\vec{\mathrm{d}l} \wedge \vec{E} = \vec{0}$. On trouve alors $-0 - r\sin\theta E_\theta \mathrm{d}\varphi = 0$, d'où $\mathrm{d}\varphi = 0$ donc $\varphi =$constante le long d'une ligne de champ. De plus, on a

$$-\,\mathrm{d}r E_\theta - r\mathrm{d}\theta E_r = 0,$$

d'où

$$\mathrm{d}r\sin\theta = 2r\cos\theta\mathrm{d}\theta.$$

On trouve alors $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 2r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, d'où $r(\theta) = r_0\sin^2\theta$. Alors, les équipotentielles dans l'approximation dipolaire ont pour équation $V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = V_0$.

4.2 Actions mécaniques subies par un dipôle électrostatique plongé dans $\vec{E}^{\text{ext}}$

4.2.1 Champ extérieur uniforme

Résultante nulle

Comme un dipôle est composé de deux charges de signe opposées séparées par une distance constante, si l'on soumet un dipôle à un champ extérieur uniforme $\vec{E}^{\text{ext}}$, le dipôle subit une force

$$\vec{F} = -q\vec{E}^{\text{ext}} + q\vec{E}^{\text{ext}} = \vec{0},$$

il n'y a donc pas de mouvement de translation provoqué par le champ uniforme.

Couple de rappel

Cependant, selon l'orientation de ce champ uniforme, un couple de rappel apparaît et vaut

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{p}\vec{E}^{\text{ext}}.}$$

Il a tendance à provoquer un alignement du moment dipolaire $\vec{p}$ sur $\vec{E}^{\text{ext}}$.

4.2.2 Champ extérieur non uniforme

Résultante

En supposant $\vec{E}^{\text{ext}} = E(x)\vec{u}_x$ avec $\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} > 0$ et $\vec{p} = p\vec{u}_x \parallel \vec{E}^{\text{ext}}$, on a

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{E}^{\text{ext}}(x+d) - q\vec{E}^{\text{ext}}(x)\\ &= qd\frac{\partial \vec{E}^{\text{ext}}}{\partial x} = \left(p\vec{u}_x \cdot \frac{\partial \vec{u}_x}{\partial x}\right)\vec{E}^{\text{ext}}.\end{aligned}$$

De manière générale, on a donc

$$\boxed{\vec{F} = \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{E}^{\text{ext}}.}$$

Ainsi, il y a une translation vers les zones de plus fort champ.

Moment résultat

On admet que l'on a toujours

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}^{\text{ext}}.}$$

Il y a donc une tendance à l'alignement de $\vec{p}$ sur $\vec{E}^{\text{ext}}$.

4.2.3 Énergie potentielle d'interaction avec un champ extérieur

Expression

Si les charges sont en A $(-q)$ et B $(+q)$, on a

$$\begin{aligned} E_p^{\text{ext}} &= qV^{\text{ext}}(B) - qV^{\text{ext}}(A) \\ &= q \int_B^A \vec{E}^{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\ &\approx q\vec{E}^{\text{ext}} \cdot \int_B^A \mathrm{d}\vec{l} \\ &= q\vec{E}^{\text{ext}} \cdot \vec{BA} = -\vec{p} \cdot \vec{E}^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Interprétation

Si $\vec{p}$ fait un angle θ avec le champ extérieur, alors $E_p^{\text{ext}} = -p \left\| \vec{E}^{\text{ext}} \right\| \cos(\theta)$, donc

— si $\vec{p}$ et $\vec{E}^{\text{ext}}$ sont alignés, E_p^{ext} est minimal, il y a un équilibre stable ;

— s'ils sont anti-parallèles, E_p^{ext} est maximal, et l'équilibre est instable.

Une fois que $\vec{p}$ est aligné avec $\vec{E}^{\text{ext}}$, on a $\theta = 0$ et donc E_p^{ext} est minimal si $\left\| \vec{E}^{\text{ext}}(M) \right\|$ est maximal : il y a une translation de $\vec{p}$ vers la zone où $\left\| \vec{E}^{\text{ext}} \right\|$ est maximal.

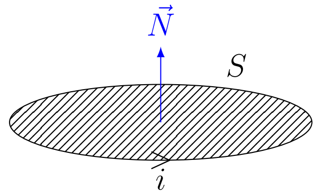

FIGURE 4.2 – Moment dipolaire magnétique d'une spire de courant plane.

4.3 Dipôle magnétique

4.3.1 Définition et ordre de grandeur

On considère une spire de courant plane présentée à la Figure 4.2. On définit le moment dipolaire magnétique, d'unité $\mathrm{A\,m^2}$ par

$$\boxed{\vec{m} := iS\vec{N}.}$$

Pour une bobine plate avec 10000 spires, on a $m = niS \approx 1\mathrm{A\,m^2}$.

On considère maintenant un électron autour dans un atome à la Figure 4.3. Par un raisonnement équivalent, on a $i = -e/T$ avec T la période de révolution de l'électron autour du noyau. Alors

$$\vec{m} = iS\vec{u}_z = -\frac{e}{T}\pi r^2\vec{u}_z.$$

Le moment cinétique de l'électron est

$$\vec{L}_O = r\vec{u}_r \wedge m\vec{v} = mrv\vec{u}_z,$$

d'où

$$\boxed{\vec{m} = \gamma\vec{L}_O,}$$

avec $\gamma = -e/(2m)$ le rapport gyromagnétique. À l'échelle atomique, on a $\left\|\vec{L}_O\right\| \approx \hbar \approx 10^{-34}\mathrm{J\,s}$. Alors $\|\vec{m}\| \sim 10^{-23}\mathrm{A\,m^2}$.

Au niveau de la terre, le moment magnétique est de l'ordre de $6.10^2\mathrm{A\,m^2}$ (déduit des mesures de $\vec{B}_{\text{terre}}$).

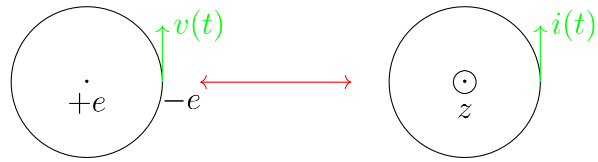

Figure 4.3 – Moment magnétique orbital d'un électron dans un atome.

4.3.2 Champ magnétique créé par un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire

Analyse des symétries

On fait l'hypothèse que l'on a une spire circulaire de rayon a, et on se place en coordonnées cylindriques, l'axe $\vec{u}_z$ passant au centre de la spire, perpendiculairement à celle-ci. On note α l'angle entre l'altitude z du point projeté de M sur l'axe (Oz) et la spire. Alors il y a une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz), et tout plan contenant (Oz) est un plan d'antisymétrie, on en déduit donc que

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} B_r(r,\theta) \\ B_\theta(r,\theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Champ dans l'approximation dipolaire

Donnée : sur l'axe (Oz), on a $\vec{B}_{\text{axe}}(M) = \frac{\mu_0 i}{2a}\sin^3(\alpha)\vec{u}_z$. On note que $\sin(\alpha) = a/(a^2+z^2)^{-1/2}$, et dans l'hypothèse de l'approche dipolaire, c'est-à-dire $|z| \gg a$, alors

$$\vec{B}_{\text{axe}}(z) \approx \frac{\mu_0 i}{2a}\frac{a^3}{z^3}\vec{u}_z = \frac{\mu_0 i a^2}{2z^3}\vec{u}_z = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}\vec{u}_z.$$

On admet que cette forme s'adapte autre part que sur l'axe : dans l'approximation dipolaire, on a

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

Ainsi, par rapport à la formulation pour le champ électrostatique, il suffit de remplacer $\vec{p}$ par $\vec{m}$, $1/\varepsilon_0$ par μ_0 et $\vec{E}$ par $\vec{B}$.

Allure des lignes de champ

Dans l'approximation dipolaire, il y a les mêmes lignes de champ que $\vec{E}$. Mais près de la source, c'est très différent (voir le chapitre sur la magnétostatique).

4.3.3 Actions mécaniques subies par un dipôle magnétique plongé dans $\vec{B}^{\text{ext}}$

Champ extérieur uniforme

On a

$$\vec{F}_{\text{lor}} = \oint i\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}^{\text{ext}} = i\left[\oint \mathrm{d}\vec{l}\right] \wedge \vec{B}^{\text{ext}},$$

donc pour un champ magnétique uniforme, on a $\vec{F}_{\text{lor}} = \vec{0}$.

On peut aussi montrer que le couple de rappel est

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}},}$$

il y a donc un alignement de $\vec{m}$ sur $\vec{B}^{\text{ext}}$.

Champ non uniforme

On admet que l'on a

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F}_{\text{lor}} = \left(\vec{m} \cdot \vec{\mathrm{grad}}\right) \vec{B}^{\text{ext}}, \\ \vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}. \end{cases}}$$

Il y a donc un alignement avec le champ magnétique extérieur, et il y a una attraction vers les zones de plus fort champ.

Énergie potentielle d'interaction

On retrouve le même résultat formel

$$\boxed{E_p^{\text{ext}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}^{\text{ext}},}$$

et les mêmes discontinuités sur les équilibres stables et instables.