



LYCÉE MICHEL MONTAIGNE

NOTES DE COURS

Physique-Chimie MP

Régis Santet

Cours réalisé par
Professeur N. CHOIMET

Année scolaire 2015/2016

Table des matières

I	Électromagnétisme	5
1	Le champ électromagnétique : sources et symétries	7
1.1	Charges et courants	8
1.1.1	Distributions discrètes ou continue de charges. Densité volumique de charge	8
1.1.2	Distribution de courant en volume. Densité de courant	11
1.2	Loi de conservation de la charge	13
1.2.1	Géométrie 1D	13
1.2.2	Équation intégrale de conservation de la charge	14
1.2.3	Flux et opérateur « divergence »	15
1.2.4	Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.	17
1.2.5	Cas du régime stationnaire/permanent	17
1.3	La loi de force de Lorentz	18
1.4	Propriétés de symétrie	20
1.4.1	Principe de Curie	20
1.4.2	Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants	20
1.4.3	Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique	21
1.4.4	Géométrie du champ sur un PS/PAS	21
1.4.5	Exemples	22
2	Électrostatique	23
2.1	Loi de Coulomb	24
2.1.1	Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle .	24
2.1.2	Principe de superposition	25
2.1.3	Ordres de grandeur	25

2.2	Circulation conservative du champ électrostatique. Potentiel électrostatique	26
2.2.1	Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle	26
2.2.2	Potentiel créé par une charge ponctuelle	27
2.2.3	Circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé orienté	27
2.2.4	Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient	27
2.2.5	Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique	28
2.3	Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss	29
2.3.1	Charge ponctuelle : flux à travers une sphère.	29
2.3.2	Théorème de Gauss	29
2.3.3	Quand et comment appliquer le théorème de Gauss	30
2.3.4	Exemples fondamentaux	31

Première partie

Électromagnétisme

Chapitre 1

Le champ électromagnétique : sources et symétries

Sommaire

1.1	Charges et courants	8
1.1.1	Distributions discrètes ou continue de charges. Densité volumique de charge	8
1.1.2	Distribution de courant en volume. Densité de courant	11
1.2	Loi de conservation de la charge	13
1.2.1	Géométrie 1D	13
1.2.2	Équation intégrale de conservation de la charge . .	14
1.2.3	Flux et opérateur « divergence »	15
1.2.4	Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.	17
1.2.5	Cas du régime stationnaire/permanent	17
1.3	La loi de force de Lorentz	18
1.4	Propriétés de symétrie	20
1.4.1	Principe de Curie	20
1.4.2	Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants . .	20
1.4.3	Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique	21
1.4.4	Géométrie du champ sur un PS/PAS	21

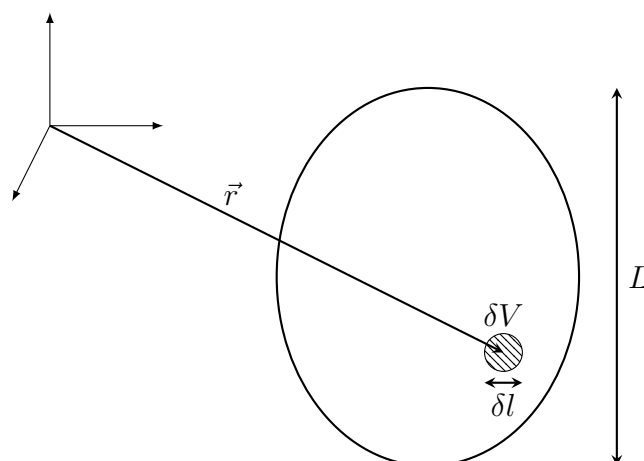


FIGURE 1.1 – Échelle mésoscopique pour une distribution continue de charges.

1.1 Source du champ électromagnétique : charges et courants

1.1.1 Distributions discrètes ou continue de charges. Densité volumique de charge

Distribution discrètes de charges

→ Nature « atomique » de la charge : $-e$ (électron), $+Ze$ (noyau) avec $Z \in \mathbb{N}^*$, ions ;

→ a priori, charges ne avec $n \in \mathbb{Z}$, localisées en des points précis.

A priori, il y a donc une distribution discrète de charges.

Échelle mésoscopique : distribution continue de charges

La Figure 1.1 présente la matière à l'échelle mésoscopique : on a $\delta V \sim (\delta l)^3$, L est une longueur typique de l'échelle macroscopique (1 mm jusqu'à

1 m). On se donne une longueur a qui est caractéristique de l'échelle microscopique voire nanoscopique, par exemple la distance interatomique ou le libre parcours moyen d'un gaz. Alors

$$a \ll \delta \ll L.$$

Cela vient du fait que dans δV , il y a un très grand nombre de constituants élémentaires, on peut donc faire un traitement statistique, d'autre part on cherche une description assez fine du phénomène. L'échelle mésoscopique est donc entre 0,1 μm et 1 μm . À l'échelle mésoscopique, on adopte une description continue (moyennée) de la matière. Ceci implique une distribution continue de charges.

Densité volumique de charges

Dorénavant, on adopte le modèle continu. La quantité de charge δQ dans un volume δV est proportionnel à ce même volume, on définit alors la **densité volumique de charges** $\rho(\vec{r}, t)$ par

$$\delta Q = \rho(\vec{r}, t) \delta V.$$

Son unité est C m^{-3} .

Exemple 1.1. Dans un conducteur métallique (par exemple le cuivre), il y a n_e électrons libres et n_i ions fixes. Alors

$$\rho = (n_i - n_e)e = 0,$$

à cause de la neutralité du métal.

Exemple 1.2. Dans un semi-conducteur, il y a des électrons (mobiles), des trous (places vides positives) et des ions fixes. Ainsi,

$$\rho = (n_t - n_e + n_i)e.$$

Exemple 1.3. Dans une électrolyte, par exemple (Na^+, Cl^-), on a

$$\rho = (n_{\text{Na}^+} - n_{\text{Cl}^-})e.$$

Ainsi, en général, on a

$$\rho = \sum_{\substack{\neq \text{types} \\ \text{de porteurs}}} n_k q_k,$$

où n_k est en m^{-3} et q_k est en C et représente la charge algébrique d'un « k » porteur.

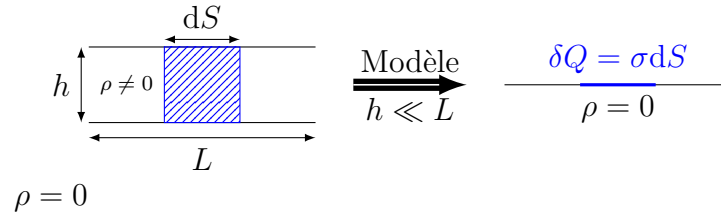


FIGURE 1.2 – Distribution de charges en surface.

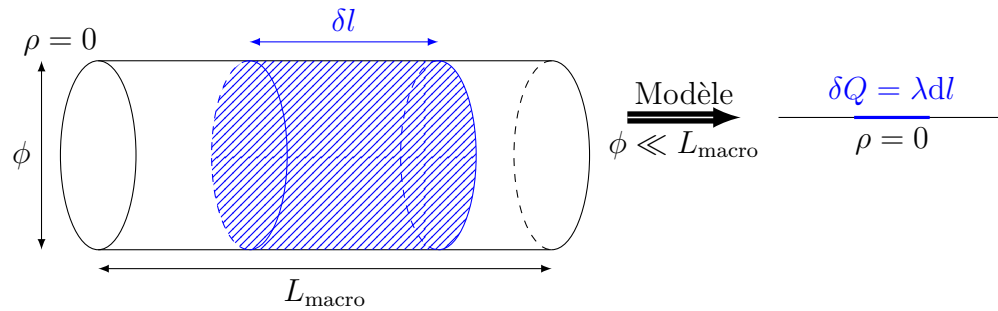


FIGURE 1.3 – Distribution linéique de charges.

Modèles surfacique et linéique

Distribution de charges en surface : « nappe » de charge. Les charges sont localisées au voisinage d'une surface. On considère la Figure 1.2. On considère que l'on a $h \ll L$, et le volume $\delta V = h dS$ contient $\delta Q = \rho h dS$ charges. On modélise donc cette nappe de charge par une distribution surfacique de charges, avec une **densité superficielle de charge** $\sigma = \rho \times h$, en C m^{-2} . Ainsi, on a

$$\delta Q = \sigma dS.$$

Exemple 1.4. On peut penser à un conducteur plan.

Distribution linéique de charges. On considère la Figure 1.3. Il y a $\delta Q = \rho S \delta l$ charges dans la volume bleu. On définit alors la **densité linéique de charge** $\lambda = \rho S$, d'unité C m^{-1} . On a alors

$$\delta Q = \lambda \delta l.$$

Exemple 1.5. On peut penser à un faisceau d'électrons.

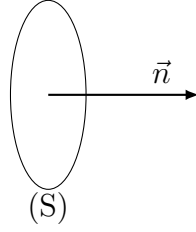


FIGURE 1.4 – Courant algébrique traversant une surface orientée.

1.1.2 Distribution de courant en volume. Densité de courant

Courant algébrique traversant une surface orientée

Pendant dt , δQ traverse algébriquement une surface S . $\delta Q > 0$ si la charge est effectivement transportée selon \vec{n} , voir la Figure 1.4.

Le courant $i(t)$ est alors défini par

$$\delta Q = i(t)dt.$$

Son unité est $A = C s^{-1}$. C'est la charge algébrique traversant la surface orientée (S) par unité de temps.

Densité de courant

Cas à une dimension et un seul type de porteur libre. On considère qu'il y a n porteur libres par mètre cube, q est la charge algébrique d'un porteur, \vec{v} est la vitesse d'ensemble, qui est uniforme et perpendiculaire à (S) , voir la Figure 1.5.

Le nombre δN de porteurs traversant (S) pendant dt est

$$\delta N = nSvdt = n\vec{v} \cdot (S\vec{n})dt,$$

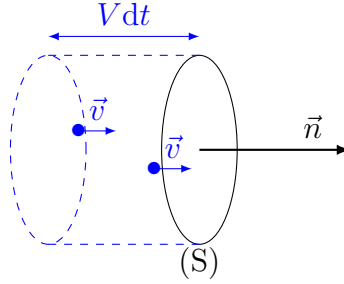
d'où

$$\delta Q = \delta N \times q = nq\vec{v} \cdot (S\vec{n})dt$$

et finalement

$$i = nq\vec{v} \cdot \vec{n}S = \vec{j} \cdot (S\vec{n}),$$

où $\vec{j} = nq\vec{v}$ est la **densité de courant**, d'unité $A m^{-2}$.

FIGURE 1.5 – Densité de courant \vec{j} : modèle introductif.

Dans le cas où la vitesse n'est pas perpendiculaire à (S) , le calcul reste le même (en prenant bien en compte le produit scalaire avec la normale extérieure \vec{n}).

Définition de \vec{j} . De manière générale, on définit la densité de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$ par

$$i_s(t) := \iint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS.$$

$i_s(t)$ est le flux de \vec{j} à travers la surface S .

Expression de \vec{j} dans différents milieux conducteurs

Métal. Les électrons libres génèrent une densité de courant

$$\vec{j} = -ne\langle \vec{v} \rangle.$$

Dans un fil de cuivre pour 1 A et une longueur 2 mm, on a

$$n_e \sim \frac{1}{(\text{qq}.10^{10})^3} \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}.$$

Ainsi, l'ordre de grandeur de la vitesse des électrons dans le métal est

$$\langle v \rangle \sim \frac{1}{10^{29} \times 10^{19} \times 2 \cdot 10^{-6}} \sim 3 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1}.$$

En considérant les électrons comme des particules classiques indépendantes, on a

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_b T,$$

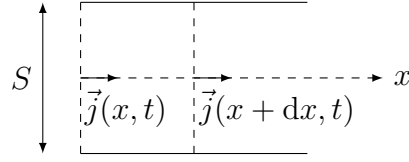


FIGURE 1.6 – Loi de conservation de la charge 1D.

avec $k_B = R/\mathcal{N}_A \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Ainsi,

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \sim 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

pour $m = 0.9 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ et $T = 300 \text{ K}$.

Semi-conducteur. On a

$$\vec{j} = n_t e \langle \vec{v}_t \rangle - n_e e \langle \vec{v}_e \rangle.$$

Solution de NaCl. On a

$$\vec{j} = n_{\text{Na}^+} e \langle \vec{v}_{\text{Na}^+} \rangle - n_{\text{Cl}^-} e \langle \vec{v}_{\text{Cl}^-} \rangle.$$

Finalement, on a

$$\boxed{\vec{j} = \sum_{\substack{\neq \text{ types} \\ \text{de particules libres}}} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle.}$$

1.2 Loi de conservation de la charge

1.2.1 Géométrie 1D

On considère la Figure 1.6.

La charge entrant algébriquement dans Sdx pendant dt est

$$\begin{aligned} \delta Q_e &= j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt, \\ &= S dt [j(x, t) - j(x + dx, t)], \\ &= -S dt dx \frac{\partial j}{\partial x}(x, t). \end{aligned}$$

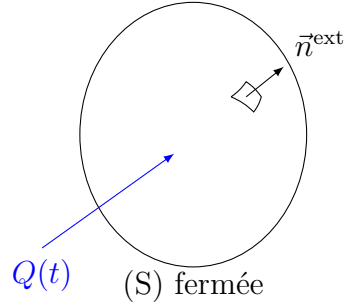


FIGURE 1.7 – Équation intégrale de conservation de la charge.

La variation dQ de la charge dans la tranche Sdx est

$$\begin{aligned} dQ &= \rho(x, t + dt)Sdx - \rho(x, t)Sdx, \\ &= Sdx (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)), \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t)Sdxdt. \end{aligned}$$

Postulat : conservation de la charge. On doit avoir

$$dQ = \delta Q_e.$$

Alors l'équation locale de la conservation de la charge s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = 0.$$

1.2.2 Équation intégrale de conservation de la charge

Dans le cas général, on se reporte à la Figure 1.7.

Le flux sortant de \vec{j} est

$$i_S^{\text{ext}} = \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS.$$

La conservation de la charge s'écrit alors

$$\frac{dQ}{dt} = -i_S^{\text{ext}}(t) = -\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS.$$

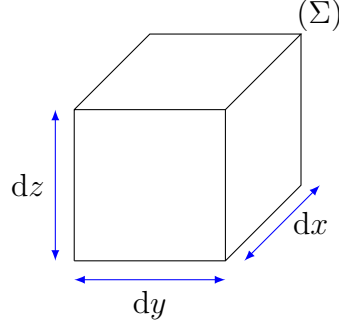


FIGURE 1.8 – Flux de courant sortant en trois dimensions.

1.2.3 Flux et opérateur « divergence »

Dans le cas unidimensionnel de la Figure 1.6, en notant (Σ) la surface fermée comprise entre x et $x + dx$ et les bords en haut et en bas, on a

$$\begin{aligned}
 i_{\Sigma}^{\text{ext}}(t) &= \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma, \\
 &= \iint_{\text{bords}} \vec{j} \cdot \vec{n}_{\text{bords}} d\Sigma + (-\vec{j}(x, t) \times S) + (j(x + dx, t) \times S), \\
 &= 0 + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \times S dx, \\
 &= \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \times V.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le flux est proportionnel au volume.

Dans le cas à trois dimensions, on se reporte à la Figure 1.8. On se donne un champ $\vec{A}(x, y, z, t)$, et on suppose le cube assez petit pour qu'il soit uniforme sur chaque face. On numérote les faces (1 : gauche, 2 : droite, 3 : bas, 4 : haut, 5 : derrière, 6 : devant).

On cherche la quantité $\delta\phi^{\text{ext}}$ sortant du cube à cause du flux de \vec{A} via la surface de (Σ) . On définit donc

$$\delta\phi^{\text{ext}} := \oiint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma.$$

On a alors

$$(1) \quad \vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_y : \delta\phi_1^{\text{ext}} = -A_y(x, y, z, t) \times (dx dz);$$

- (2) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u}_y : \delta\phi_2^{\text{ext}} = +A_y(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}z) ;$
- (3) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_z : \delta\phi_3^{\text{ext}} = -A_z(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}y) ;$
- (4) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u}_z : \delta\phi_4^{\text{ext}} = +A_z(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}y) ;$
- (5) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_x : \delta\phi_5^{\text{ext}} = -A_x(x, y, z, t) \times (\text{d}y\text{d}z) ;$
- (6) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_x : \delta\phi_6^{\text{ext}} = +A_x(x, y, z, t) \times (\text{d}y\text{d}z).$

On fait la somme algébrique

$$\begin{aligned}
 1 + 2 : & \frac{\partial A_y}{\partial y}(x, y, z, t) \times \text{d}y\text{d}x\text{d}z, \\
 3 + 4 : & \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z, t) \times \text{d}z\text{d}x\text{d}y, \\
 5 + 6 : & \frac{\partial A_x}{\partial x}(x, y, z, t) \times \text{d}x\text{d}y\text{d}z.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\delta\phi^{\text{ext}} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \times \text{d}V = (\text{div } \vec{A})\text{d}V.$$

Théorème-définition d'Ostrogradski. Soit $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$ champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 . Alors on a

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \text{d}S = \iiint_V \text{div } \vec{A} \text{d}V.$$

En coordonnées cartésiennes, la divergence de \vec{A} s'écrit

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

L'opérateur symbolique (réservé aux coordonnées cartésiennes) est « na-bla », qui s'écrit

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

On a alors $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

1.2.4 Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.

Pour une géométrie quelconque, la variation de $Q(t)$ contenue dans un volume V est

$$dQ = \iiint_V [\rho(\vec{r}, t) - \rho(\vec{r}, t + dt)] dV,$$

d'où

$$dQ = \left(\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) dV \right) dt.$$

La charge algébrique δQ_S^{ext} traversant une surface S orientée vers l'extérieur pendant dt est

$$\delta Q_S^{\text{ext}} = i_S^{\text{ext}}(t) \times dt = \left[\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS \right] dt.$$

Or on a

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{j} \cdot dV,$$

donc

$$\delta Q_S^{\text{ext}} = \left(\iiint_V (\text{div } \vec{j} dV) \right) dt.$$

La conservation de la charge s'écrit alors $dQ = -\delta Q_S^{\text{ext}}$, qui est une équation globale :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) dV = 0.$$

Ceci ayant lieu pour tout volume V de taille au moins mésoscopique, on a l'équation locale de la conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

1.2.5 Cas du régime stationnaire/permanent

Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{j} = 0.$$

En conséquence,

(i) \vec{j} est à flux conservatif. En effet,

$$i_S^{\text{ext}} = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{j} dV = 0.$$

(ii) $i = \text{constante}$ le long d'un tube de courant (régime permanent). Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. Ces lignes de courant sont des courbes tangentes à \vec{j} en tout point.

(iii) Loi des nœuds : en un nœud où différents courants arrivent, on a

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0,$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$.

1.3 Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz

On se demande quelle est l'action (à distance) de la distribution de charges et courants sur une particule chargée q de vitesse \vec{v} , voir la Figure 1.9.

Cette action se fait via le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$, conséquence directe de $[\rho, \vec{j}]$. La loi de force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right).$$

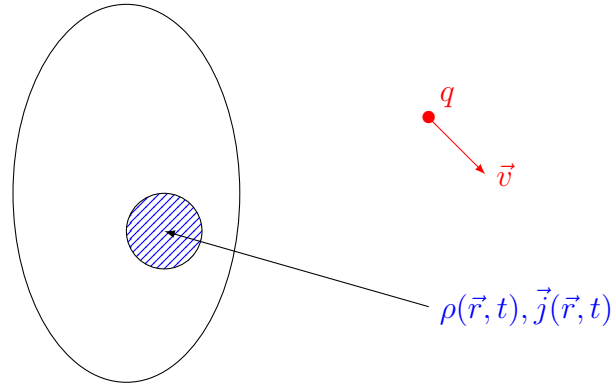
C'est un postulat. \vec{E} est polaire et est considéré comme un « vrai » vecteur. \vec{B} est axial et est considéré comme un « pseudo-vecteur ».

Force de Lorentz méso/macrosopique : distribution continue de charges et courants. Il y a des porteurs de charges de type $k : q_k, n_k [\text{m}^3], \langle \vec{v}_k \rangle$. Soit dV un volume mésoscopique contenant ces porteurs. Quelle est la force $d\vec{F}_{em}$ subie par ce volume ? Un charge k subit en moyenne

$$\vec{F}_{L_k} = q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right).$$

Dans dV , il y a $n_k dV$ porteurs k . Ainsi, ils subissent

$$n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right) dV.$$



\mathcal{D} : distribution
de charges et/ou
de courants

FIGURE 1.9 – Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz.

En sommant sur tout les porteurs k , on a

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{em}} &= \left[\sum_{\neq k} n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right) \right] dV, \\ &= \left(\left(\sum_{\neq k} n_k q_k \right) \vec{E} + \left(\sum_{\neq k} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle \right) \wedge \vec{B} \right), \\ &= (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dV. \end{aligned}$$

Ainsi, la force volumique est

$$\boxed{f_{\text{vol}}^{\text{em}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.}$$

Exemple 1.6. Dans un métal, c'est le force de Laplace : on a $\rho = 0$ d'où

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{em}} = (\vec{j} \wedge \vec{B}) dV.}$$

Pour une géométrie filiforme, on a $\vec{j} dV = j s dl = i d\vec{l}$, où s est la section du fil. Ainsi

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{em}} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}.}$$

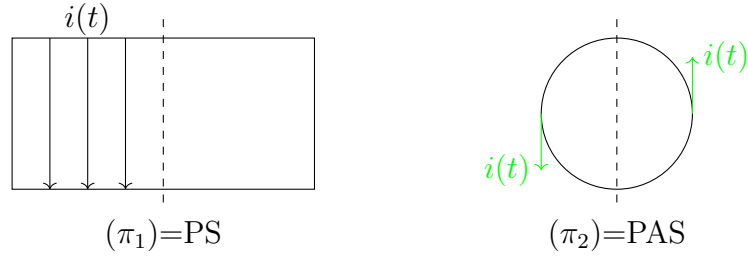


FIGURE 1.10 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un solénoïde.

1.4 Propriétés de symétrie du champ électromagnétique

1.4.1 Principe de Curie

Énoncé en 1905 par Pierre Curie :

[P. Curie, 1905] Les effets ont au moins les symétries (et invariances) des causes.

1.4.2 Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants

(π) est un plan de symétrie pour une distribution de charges et de courants \mathcal{D} si

$$\rho(\pi(M), t) = \rho(M, t), \quad \vec{j}(\pi(M), t) = S_\pi(\vec{j}(M, t)),$$

où $\pi(M)$ désigne le symétrique du point M et S_π désigne l'application symétrie liée au plan (π) .

C'est un plan d'anti-symétrie si

$$\rho(\pi(M), t) = -\rho(M, t), \quad \vec{j}(\pi(M), t) = -S_\pi(\vec{j}(M, t)).$$

Exemple 1.7 (Solénoïde fini). Un solénoïde (enroulement jointif) contenant N spires possède un PS et un PAS, voir la Figure 1.10. Notons que si le solénoïde est considéré comme infini, alors tout plan perpendiculaire à l'axe est un plan de symétrie.

Exemple 1.8 (Condensateur plan à armatures circulaires). Tout plan contenant l'axe est un plan de symétrie. Tout plan qui y est perpendiculaire est un plan d'antisymétrie, voir la Figure 1.11.

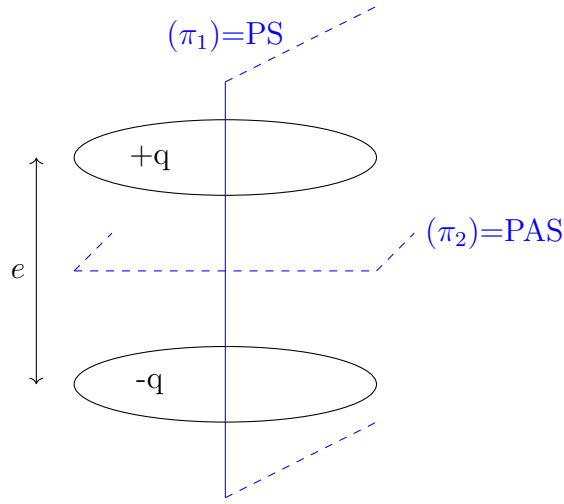


FIGURE 1.11 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un condensateur plan.

1.4.3 Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique

Principe de Curie : si la cause (charges, courants) présente une propriété de symétrie, alors l'effet (\vec{F}_L) présente aussi cette propriété de symétrie. Pour le champ électromagnétique, on en déduit :

- un PS pour \mathcal{D} est un PS pour \vec{E} et un PAS pour \vec{B} ;
- un PAS pour \mathcal{D} est un PAS pour \vec{E} et un PS pour \vec{B} .

1.4.4 Géométrie du champ électromagnétique sur un PS/PAS

On en déduit donc que

- Pour un PS, on a

$$\vec{E}(\pi(M)) = \vec{E}(M) = S_\pi(\vec{E}(M)),$$

donc \vec{E} appartient au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie. Au contraire, on a

$$\vec{B}(\pi(M)) = \vec{B}(M) = -S_\pi(\vec{B}(M)),$$

donc \vec{B} est perpendiculaire au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie.

— Pour un PAS, on a

$$\vec{E} = -S_\pi(\vec{E}),$$

donc $\vec{E} \perp \text{PAS}$, et

$$\vec{B} = S_\pi(\vec{B}),$$

donc $\vec{B} \in \text{PAS}$.

1.4.5 Exemples

La méthode est la suivante :

1. Faire un choix d'un système de coordonnées adapté ;
2. Observer les invariances par translation/rotation de la distribution ;
3. Appliquer le principe de Curie : symétries et géométrie du champ.

Pour un condensateur plan d'axe (Oz) , ou un solénoïde d'axe (Oz) , toute rotation autour de l'axe (Oz) laisse la distribution invariante (symétrie de révolution d'axe (Oz)). Ainsi, la variable θ est non pertinente. De plus, tout plan contenant l'axe est un PAS. Donc $\vec{E}(r, z, t) = E(r, z, t)\vec{u}_\theta$ et $\vec{B}(r, z, t) = \begin{pmatrix} B_r(r, z, t) \\ 0 \\ B_z(r, z, t) \end{pmatrix}$.

Chapitre 2

Électrostatique

Les charges sont immobiles et on est en régime stationnaire. Il n'y a donc pas de courants.

Sommaire

2.1	Loi de Coulomb	24
2.1.1	Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	24
2.1.2	Principe de superposition	25
2.1.3	Ordres de grandeur	25
2.2	Circulation conservative du champ électrostatique. Potentiel électrostatique	26
2.2.1	Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle	26
2.2.2	Potentiel créé par une charge ponctuelle	27
2.2.3	Circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé orienté	27
2.2.4	Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient	27
2.2.5	Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique	28
2.3	Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss	29
2.3.1	Charge ponctuelle : flux à travers une sphère.	29
2.3.2	Théorème de Gauss	29
2.3.3	Quand et comment appliquer le théorème de Gauss	30

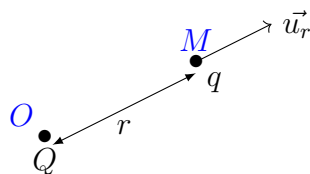


FIGURE 2.1 – Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

2.3.4 Exemples fondamentaux 31

2.1 Loi de Coulomb

2.1.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On considère le système de deux particules chargées donné à la Figure 2.1.

On a

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

ϵ_0 est la permittivité électrique absolue du vide, avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et

$$c \approx 3.10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad \mu_0 := 4\pi.10^{-7} \text{ H m}^{-1}, \quad \epsilon_0 \approx 8.8.10^{-12} \text{ F m}^{-1}.$$

Champ électrostatique On a une interaction à distance. Notamment,

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = q\vec{E}(M),$$

avec $\vec{E}(M)$ indépendant de q . Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

C'est la Loi de Coulomb. On a $[\vec{E}] = \text{V m}^{-1}$.

2.1.2 Principe de superposition

C'est une conséquence de la linéarité des équations de Maxwell. S'il y a N particules de charge Q_i , alors le champ électrostatique créé au point M sur la particule de charge q est

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}.$$

2.1.3 Ordres de grandeur

Champ électrostatique de l'atome d'hydrogène L'électron autour du noyau de l'atome d'hydrogène est à une distance $a_0 = 53$ pm du noyau (rayon de Bohr). On a

$$\vec{F} = -q\vec{E},$$

avec

$$E_{\text{proton}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \approx 5.10^{11} \text{ V m}^{-1}.$$

Notons que le rapport entre la force de gravitation et la force électrostatique exercée sur l'électron est

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{gravitation}}^{p \rightarrow e}\|}{\|\vec{F}_{\text{es}}^{p \rightarrow e}\|} = \frac{\mathcal{G}m_p m_e}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \approx 4.10^{-40}.$$

Champ disruptif de l'air On a $E \sim 10^6 \text{ V m}^{-1}$.

Échelle macroscopique La batterie d'un téléphone portable crée un champ électrostatique est

$$E \approx \frac{V}{d} \approx \frac{\text{qq V}}{\text{qq cm}} \approx 10^2 \text{ V m}^{-1}.$$

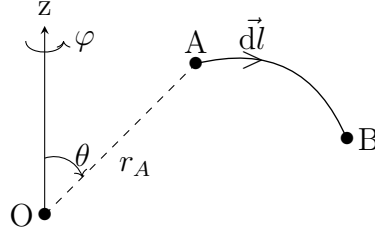


FIGURE 2.2 – Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle.

2.2 Circulation conservative du champ électrostatique. Potentiel électrostatique

2.2.1 Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle

On considère le système décrit par la Figure 2.2.

On cherche la circulation de \vec{E} entre A et B, c'est-à-dire

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

En coordonnées sphériques, on a

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi.$$

Ainsi,

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right),$$

qui ne dépend que de A et B et pas du chemin choisi. Par définition, le potentiel électrostatique $V(M) = V(x, y, z) = V(r, \theta, \varphi)$ est défini par

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B),$$

et on a $[V] = \text{V}$.

2.2. CIRCULATION CONSERVATIVE DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE. POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

2.2.2 Potentiel créé par une charge ponctuelle

On a

$$V(M) = V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

où l'on prend la constante nulle à l'infini. Pour une collection de charges ponctuelles, on utilise le principe de superposition :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}.$$

2.2.3 Circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé orienté

Pour deux points A et B du contour \mathcal{C} , si $d\vec{l}_1$ connecte A à B et $d\vec{l}_2$ connecte B à A , alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 = V(A) - V(B) + V(B) - V(A) = 0,$$

donc \vec{E} est à circulation conservative. C'est une équation intégrale.

2.2.4 Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient

Pour deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ connectés par $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$, on a

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \vec{E} \cdot M\vec{M}', \\ &= V(M) - V(M'), \\ &= E_x dx + E_y dy + E_z dz, \\ &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz), \\ &= dx \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) + dy \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) + dz \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z), \end{aligned}$$

ceci étant valide pour tout déplacement $d\vec{l}$, donc

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Ainsi,

$$\vec{E} = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right) = -\vec{\text{grad}}V.$$

En coordonnées cartésiennes, on a simplement $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. C'est une équation locale.

2.2.5 Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique

On reprend le système décrit par la Figure 2.2. On souhaite calculer cette fois-ci le travail développé par la force électrostatique. On a

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}^{\text{el}} &= \int_A^B \vec{F}_{\text{el}} \cdot d\vec{l}, \\ &= \int_A^B q \vec{E}^{\text{ext}} \cdot d\vec{l}, \\ &= -q \int_A^B dV^{\text{ext}}, \\ &= -q [V^{\text{ext}}(B) - V^{\text{ext}}(A)]. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une énergie potentielle E_p^{ext} telle que

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{el}} = -\Delta E_p^{\text{ext}},$$

d'où $E_p^{\text{ext}} = qV^{\text{ext}}$. Par convention, on prend $E_p^{\text{ext}}(\infty) = 0$.

On définit aussi l'électron-volt. Il s'agit de l'énergie à fournir pour amener un électron du potentiel 0V au potentiel 1V. Ainsi,

$$1\text{eV} = e \times 1\text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}.$$

2.3 Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss

2.3.1 Charge ponctuelle : flux à travers une sphère.

On considère une charge ponctuelle Q en un point O et une sphère S de rayon r de centre O . On note

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Alors en notant \vec{n}^{ext} le vecteur normal à la surface S ,

$$\boxed{\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint_S dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.}$$

2.3.2 Théorème de Gauss

Une charge ponctuelle à l'intérieur d'une surface fermée

Soit V un volume quelconque de l'espace contenant une charge Q . On note S une sphère centrée en Q contenue dans V , et S' le reste de la surface correspondant à V . En un point M quelconque du volume, on a

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

On a

$$\iint_{S \cup S'} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div} \vec{E} dV,$$

et pour un problème à symétrie sphérique, on a pour tout $r \neq 0$,

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r).$$

Ainsi, $\text{div} \vec{E} = 0$ pour tout $r \neq 0$, d'où

$$\iiint_V \text{div} \vec{E} dV = 0 = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS + \iint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS',$$

et les deux normales extérieures sont opposées l'une de l'autre. Finalement,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_r dS' = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi, si une surface S contient une charge Q , on a toujours

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Charge ponctuelle à l'extérieur d'une surface fermée

Dans ce cas, on a directement

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div} \vec{E} dV = 0.}$$

Bilan

Si \vec{E} est le champ total créé par N charges Q_i , alors

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Ici, Q^{int} est la somme de toutes les charges qui sont à l'intérieur de la surface S .

2.3.3 Quand et comment appliquer le théorème de Gauss

Le but est de calculer des champs électrostatiques \vec{E} dans des cas de hautes symétries. La méthode est la suivante :

- (α) Invariance et symétries : donne la géométrie de \vec{E} ;
- (β) Choisir une surface de Gauss adaptée (ou bien $\vec{E} \parallel \vec{n}^{\text{ext}}$ avec $E = \text{constante}$ sur la surface ou bien $\vec{E} \perp \vec{n}^{\text{ext}}$) avec un dessin ;
- (γ) Conclure.

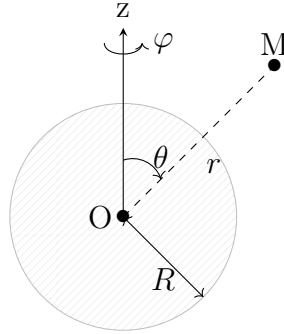


FIGURE 2.3 – Sphère uniformément chargée en volume ou en surface.

2.3.4 Exemples fondamentaux

Sphère uniformément chargée en volume ou en surface

On considère le système donnée à la Figure 2.3.

(α) Toute rotation d'axe passant par O laisse la distribution invariant, donc

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r) = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ E_\theta(r) \\ E_\varphi(r) \end{pmatrix}.$$

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des PS valable pour tout point M . Ainsi, \vec{E} est radial et $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

(β) La bonne surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r variable.

(γ) On a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dR = \oiint_S E(r) dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r.}$$

Boule uniformément chargée en volume. La densité ρ est constante et vaut $\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ où Q est la charge présente dans l'entièreté de la boule. Ainsi, pour $r \geq R$, on a

$$Q_{\text{int}}(r \geq R) = Q,$$

d'où

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Si $r \leq R$, alors on a

$$Q_{\text{int}}(r \leq R) = \iiint \rho dV = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Ainsi, on a

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{r}{R}\right) \vec{u}_r.$$

Sphère uniformément chargée en surface. Pour $r > R$, on a le même résultat que précédemment. Pour $r < R$, on a $Q_{\text{int}}(r < R) = 0$, donc $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. \vec{E} est donc discontinu à la surface de la sphère (variation d'amplitude égal à σ/ϵ_0). C'est un modèle non physique.

Cylindre infini uniformément chargé en volume ou en surface

On considère un cylindre de rayon R d'axe (Oz) . La distribution de charge est à symétrie cylindrique « infinie ».

- (α) Il y a une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) et une invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz) . De plus, tout plan perpendiculaire à (Oz) est un plan de symétrie. Enfin, tout plan contenant (Oz) est un plan de symétrie. Finalement, on a

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r.$$

Remarque 2.1. Si la distribution est non infinie, a priori on a

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_r(r, z) \\ 0 \\ e_z(r, z) \end{pmatrix}.$$

- (β) La surface de Gauss que l'on prend est un cylindre d'axe (Oz) de rayon r , de hauteur de h , formé par deux disques perpendiculaires à l'axe (Oz) .

2.3. FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE. THÉORÈME DE GAUSS 33

(γ) Le théorème de Gauss donne

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0},$$

où $S = \Sigma \cup S_1 \cup S_2$ où S_1 et S_2 correspondent aux disques. Ainsi,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 + 0 + \iint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma = E(r) \times 2\pi r h.$$

Ainsi,

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{2\pi\varepsilon_0 h r}.$$

Cylindre uniformément charge en volume. On considère une tranche d'hauteur h , on a $Q = \rho h \pi R^2$. On introduit donc

$$\lambda = \frac{Q}{h} = \rho \pi R^2.$$

C'est la charge linéique en C m^{-1} . Pour $r \geq R$, on a $Q_{\text{int}}(r \geq R) = \lambda h$, d'où

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

Si $r \leq R$, on a $Q_{\text{int}}(r \leq R) = \rho \pi r^2 h = \lambda h \left(\frac{r}{R}\right)^2$. Ainsi,

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{u}_r.$$

Cylindre uniformément chargé en surface. Si $r < R$, on a $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. Si $r > R$, on a $Q_{\text{int}}(r > R) = Q = \lambda h$, donc $\vec{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$. À nouveau, il y a une discontinuité égale à σ/ε_0 avec $\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R}$. Elle est due au modèle surfacique.

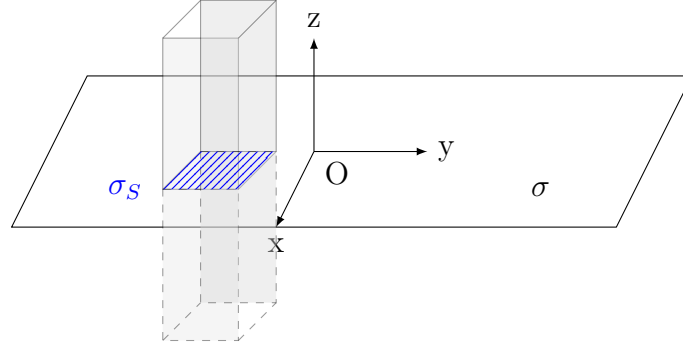


FIGURE 2.4 – Plan uniformément chargé en surface.

Plan infini uniformément chargé en surface

On considère le système décrit à la Figure 2.4.

Par plan infini, on entend que les longueurs caractéristiques du plan selon les axes x et y sont très grandes devant l'épaisseur du plan : $L_x, L_y \gg e$.

- (α) Il y a invariance par translation par rapport aux axes (Ox) et (Py) . Ainsi, le champ ne dépend pas de x ni de y . Pour les symétries, tout plan parallèle à (xOy) est un PS, donc $E_y = 0$. Tout plan parallèle à (yOz) est un PS, donc $E_x = 0$. Ainsi, on a $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$. Enfin, le fait que la plan (xOy) est un PS implique sur $E(-z) = E(z)$.
- (β) La surface de Gauss est un cylindre de générateur parallèle à (Oz) , de hauteur $2z$ centré sur le plan $z = 0$.
- (γ) On a

$$\begin{aligned}
 \oiint_{S=S_1 \cup S_2 \cup \Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \\
 &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \\
 &= 0 + \iint_{S_1} E(z)\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z dS + \iint_{S_2} E(-z)\vec{u}_z \cdot (-\vec{u}_z) dS, \\
 &= E(z)S + E(z)S.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z,$$

2.3. FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE. THÉORÈME DE GAUSS35

et

$$\vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z.$$