



LYCÉE MICHEL MONTAIGNE

NOTES DE COURS

Physique-Chimie MP

Régis Santet

Cours réalisé par
Professeur N. CHOIMET

Année scolaire 2015/2016

Table des matières

I	Mécanique	17
1	Référentiels non galiléens	19
1.1	Description du mouvement d'un point matériel	20
1.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre . . .	20
1.1.2	Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif	21
1.1.3	Composition des vitesses et vitesse d'entraînement . . .	22
1.1.4	Composition des accélérations	24
1.2	Lois de la dynamique du point	25
1.2.1	Les trois lois de Newton	25
1.2.2	Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie	26
1.2.3	Référentiel entraîné en translation accélérée	28
1.2.4	Référentiel entraîné en rotation uniforme	30
1.3	Caractère galiléen de certains référentiels	32
1.3.1	Référentiel géocentrique et marée océanique	32
1.3.2	Référentiel terrestre	34
2	Frottement solide	41
2.1	Forces de frottement de glissement	42
2.1.1	Résultante des actions de contact entre deux solides . .	42
2.1.2	Les trois effets possibles des frottements solides	42
2.1.3	Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide	44
2.1.4	Effet d'arc-boutement	45
2.1.5	Effet « stick-slip »	47
2.2	Puissance des forces de frottement	49

2.2.1	Puissance totale instantanée des forces liées aux actions de contact entre deux solides	49
2.2.2	Exemple d'un pavé mis en mouvement par un tapis roulant : bilan énergétique	49

II Électromagnétisme 51

3 Le champ électromagnétique 53

3.1	Charges et courants	54
3.1.1	Distributions discrètes ou continues de charges	54
3.1.2	Distribution de courant en volume. Densité de courant	57
3.2	Loi de conservation de la charge	59
3.2.1	Géométrie 1D	59
3.2.2	Équation intégrale de conservation de la charge	60
3.2.3	Flux et opérateur « divergence »	61
3.2.4	Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.	63
3.2.5	Cas du régime stationnaire/permanent	63
3.3	La loi de force de Lorentz	64
3.4	Propriétés de symétrie	66
3.4.1	Principe de Curie	66
3.4.2	Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants	66
3.4.3	Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique	68
3.4.4	Géométrie du champ sur un PS/PAS	68
3.4.5	Exemples	68

4 Électrostatique 71

4.1	Loi de Coulomb	72
4.1.1	Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	72
4.1.2	Principe de superposition	73
4.1.3	Ordres de grandeur	73
4.2	Circulation du champ électrostatique	74
4.2.1	Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle	74
4.2.2	Potentiel créé par une charge ponctuelle	75
4.2.3	Circulation du champ le long d'un contour fermé orienté	75

4.2.4	Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient	76
4.2.5	Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique	77
4.3	Flux du champ électrostatique	77
4.3.1	Charge ponctuelle : flux à travers une sphère	77
4.3.2	Théorème de Gauss	78
4.3.3	Comment appliquer le théorème de Gauss	79
4.3.4	Exemples fondamentaux	79
4.3.5	Condensateur plan sans effet de bord. Capacité	84
4.4	Topographie du champ électrostatique	87
4.4.1	Lignes de champ. Tubes de champ	87
4.4.2	Surfaces équipotentielles	87
4.4.3	Resserrement ou évasement des lignes de champ	87
4.4.4	Visualisation de cartes de champ et de potentiel	89
4.5	Équations locales de l'électrostatique	89
4.5.1	Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss	89
4.5.2	Circulation conservative locale	90
4.5.3	Opérateur rotationnel	91
4.5.4	Équation de Maxwell-Faraday	92
4.5.5	Vue d'ensemble des différentes formulations des lois de l'électrostatique	92
4.6	Équations de Poisson et de Laplace	93
4.6.1	Équation de Poisson en présence de charges	93
4.6.2	Équation de Laplace. Résolution numérique	93
4.7	Analogies avec la gravitation universelle	94
4.7.1	Les deux lois de force. Grandeurs analogues	94
4.7.2	Potentiel gravitationnel	94
4.7.3	Théorème de Gauss gravitationnel	94
4.7.4	Équations locales de la gravitation universelle	95
4.7.5	Énergie potentielle de gravitation d'un astre à symétrie sphérique	95
5	Magnétostatique	99
5.1	Flux du champ magnétique	100
5.1.1	Nullité du flux magnétique à travers une surface fermée	100
5.1.2	Flux de \vec{B} à travers une section d'une tube de champ	100

5.1.3	Resserrement des lignes de champ magnétiques	100
5.1.4	Équation locale de Maxwell-Thompson	101
5.2	Circulation du champ magnétique	101
5.2.1	Théorème d'Ampère intégral	101
5.2.2	Quand et comment mettre en œuvre le théorème d'Ampère ?	101
5.2.3	Exemples fondamentaux	102
5.2.4	Ordres de grandeur	104
5.2.5	Équation de Maxwell–Ampère	105
5.2.6	Vue d'ensemble des lois de la magnétostatique	105
5.3	Topographie du champ magnétique	105
5.3.1	Fermeture et orientation des lignes de contour	105
5.3.2	Comparaison des lignes de champ électriques et magnétiques	105
6	Dipôles statiques	107
6.1	Dipôle électrostatique : E et V créés	108
6.1.1	Le modèle du dipôle électrostatique	108
6.1.2	Symétries du problème	108
6.1.3	Potentiel V dans l'approximation dipolaire	109
6.1.4	Champ E dans l'approximation dipolaire	110
6.1.5	Allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans l'approximation dipolaire	110
6.2	Actions mécaniques subies	111
6.2.1	Champ extérieur uniforme	111
6.2.2	Champ extérieur non uniforme	111
6.2.3	Énergie potentielle d'interaction avec un champ extérieur	112
6.3	Dipôle magnétique	113
6.3.1	Définition et ordre de grandeur	113
6.3.2	Champ magnétique créé par un dipôle	114
6.3.3	Actions mécaniques subies	115
7	Les équations de Maxwell	117
7.1	Équations de Maxwell locales	118
7.2	Équations intégrales	118
7.2.1	Théorème de Gauss et Maxwell-Gauss	118
7.2.2	Flux de \vec{B} conservatif et Maxwell-Thompson	119

7.2.3	Théorème d'Ampère généralisé et Maxwell-Ampère	119
7.2.4	Loi de Faraday et Maxwell-Faraday	119
7.3	Cas des champs statiques	121
7.3.1	Électrostatique	121
7.3.2	Magnétostatique	122
7.4	Densité de courant de déplacement	122
7.4.1	Densité de courant de déplacement et conservation de la charge	122
7.4.2	ARQS magnétique	123
7.5	Équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide	124
7.5.1	Équations dans le vide	124
7.5.2	Équations de propagation : équation de d'Alembert	124
8	Énergie électromagnétique	125
8.1	Interaction classique champ-matière	126
8.1.1	Densité volumique de force électromagnétique	126
8.1.2	Puissance volumique	126
8.1.3	Cas des conducteurs ohmiques	127
8.2	Équation locale de Poynting	128
8.2.1	Équation de Poynting	128
8.2.2	Densité volumique d'énergie électromagnétique et vec- teur de Poynting	129
8.2.3	Ordres de grandeurs	130
8.2.4	Propagation unidimensionnelle dans un milieu absor- bant. Loi de Beer-Lambert	130
8.3	Bilan intégral d'énergie électromagnétique	131
8.3.1	Bilan intégral sur un volume de contrôle	131
8.3.2	Exemple : conducteur ohmique en régime stationnaire	132
8.4	Cas de l'électrostatique	133
8.4.1	Énergie du champ électrostatique	133
8.4.2	Définition énergétique de la capacité d'un condensateur	134
8.5	Cas de la magnétostatique	134
8.5.1	Énergie magnétique	134
8.5.2	Définition énergétique de l'inductance d'un circuit	135

9 Ondes dans le vide	137
9.1 Solutions de l'équation de d'Alembert en OPP	138
9.1.1 Notion d'une onde plane. Équation de d'Alembert unidimensionnelle	138
9.1.2 Solution générale de d'Alembert en dimension un en ondes progressives	138
9.1.3 Solution générale de l'équation de d'Alembert en trois dimensions en OPP	139
9.1.4 La solution élémentaire en OPP Harmonique	139
 III Thermodynamique	 141
10 Systèmes ouverts	143
10.1 Bilans énergétique et entropique	144
10.1.1 Principes de la thermodynamique	144
10.1.2 Bilan de masse pour un fluide en écoulement permanent	146
10.1.3 Bilan énergétique en régime permanent	148
10.1.4 Bilan entropique en régime permanent	150
10.1.5 Exemples	151
10.2 Diagramme d'état et machines réelles	153
10.2.1 Lecture du diagramme ($\log P, h$) d'un fluide pur	153
10.2.2 Exemple : cycle moteur à vapeur d'une centrale électrique	156
10.2.3 Réfrigérateur à compresseur	158
 11 Transferts thermiques	 161
11.1 Modes de transfert thermique	162
11.1.1 Les trois modes de transfert thermique	162
11.1.2 Le flux thermique surfacique	163
11.1.3 Continuité du flux surfacique	164
11.1.4 Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (ETL)	165
11.2 Conduction/Diffusion thermique	165
11.2.1 Vecteur densité de courant thermique	165
11.2.2 Loi empirique de Fourier	166
11.2.3 Équation locale de la conservation de l'énergie	167
11.2.4 Équation de la chaleur/diffusion thermique	172
11.2.5 Création d'entropie par diffusion	173
11.3 Propriétés de l'équation de diffusion	174

11.3.1	Linéarité	174
11.3.2	Irréversibilité	174
11.3.3	Échelles de temps et de distance de diffusion	175
11.3.4	Conditions initiales. Conditions aux limites	176
11.3.5	Exemple de conditions aux limites	176
11.3.6	Exemple de résolution numérique de l'équation de la diffusion	177
11.4	Conducto-convection	178
11.4.1	Transfert conducto-convectif : loi de Newton empirique	178
11.4.2	Application : ailette de refroidissement	179
11.4.3	Nombre de Biot	181
11.5	Conductance et résistance thermique	182
11.5.1	Analogie conduction thermique et électrique en régime permanent	182
11.5.2	Résistance thermique conductive en une dimension . . .	182
11.5.3	Résistance thermique conducto-convective	184
11.5.4	Association en série : résistance « multicouche »	185
11.5.5	Association en parallèle	186
11.5.6	ARQS en thermique	187

Table des figures

1.1	Référentiel géocentrique et de Copernic.	20
1.2	Pendule secoué.	28
1.3	Pendule dans un train en accélération uniforme.	30
1.4	Rotation uniforme autour de l'axe (Oz).	31
1.5	Exemple de rotation uniforme autour de l'axe (Oz) : ressort avec une masse.	31
1.6	Atténuation ou renforcement des effets de marées selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil. . . .	35
1.7	Rotation de la Terre et définition du poids.	35
1.8	Expression de la force de Coriolis à la surface de la Terre. . .	38
1.9	Sens des anticyclones et dépressions dans l'hémisphère nord. .	39
2.1	Premier exemple de frottements solides et résultante.	42
2.2	Deuxième exemple de frottements solides et résultante. . . .	42
2.3	Premier exemple d'effet possible des frottements solides. . . .	43
2.4	Deuxième exemple d'effet possible des frottements solides . . .	43
2.5	Troisième exemple d'effet possible des frottements solides. . .	43
2.6	Notion de vitesse de glissement.	44
2.7	Non glissement et cône de frottement statique.	45
2.8	Glissement et cône de frottement dynamique.	45
2.9	Modèle d'arc-boutement.	46
2.10	Effet « stick-slip ».	47
2.11	Système modèle pour l'étude de la puissance des forces de frottement de glissement.	49
2.12	Pavé mis en mouvement par un tapis roulant.	50
3.1	Échelle mésoscopique pour une distribution de charges. . . .	54
3.2	Distribution de charges en surface.	56

3.3	Distribution linéique de charges.	56
3.4	Courant algébrique traversant une surface orientée.	57
3.5	Densité de courant \vec{j} : modèle introductif.	58
3.6	Loi de conservation de la charge 1D.	59
3.7	Équation intégrale de conservation de la charge.	60
3.8	Flux de courant sortant en trois dimensions.	61
3.9	Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz.	65
3.10	Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un solénoïde.	67
3.11	Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un condensateur plan.	67
4.1	Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.	73
4.2	Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle.	75
4.3	Sphère uniformément chargée en volume ou en surface.	79
4.4	Plan uniformément chargé en surface.	82
4.5	Couche de charges infinie uniformément chargée en volume.	84
4.6	Condensateur plan sans effet de bord.	84
4.7	Expression du champ électrostatique dans un condensateur plan.	86
4.8	Topographie du champ électrostatique : exemples de lignes de champ.	88
4.9	Resserrement des lignes de champ : principe du paratonnerre.	89
4.10	Circulation conservative locale en coordonnées cartésiennes.	90
5.1	Flux du champ magnétique à travers une section d'un tube de champ.	100
5.2	Circulation du champ magnétique : enlacement des fils et intensité du courant.	102
5.3	Champ magnétique pour un câble rectiligne infini épais.	103
5.4	Champ magnétique dans un solénoïde infini.	104
6.1	Modèle d'une distribution neutre.	108
6.2	Moment dipolaire magnétique d'une spire de courant plane.	113
6.3	Moment magnétique orbital d'un électron dans un atome.	114
7.1	Deux bobines en influence mutuelle.	121
8.1	Puissance dissipée dans un conducteur cylindrique.	128

8.2	Propagation unidimensionnelle dans un milieu absorbant. . .	131
9.1	Invariance par translation parallèlement à un plan de direction fixé.	139
10.1	Débit de masse dans un fluide en écoulement permanent. . .	146
10.2	Bilan de masse en régime permanent, une entrée et une sortie.	147
10.3	Bilan de masse en régime permanent, une entrée et une sortie, système fermé.	147
10.4	Bilan de masse en régime permanent, plusieurs entrées et plusieurs sorties.	148
10.5	Bilan d'énergie en régime permanent.	149
10.6	Détente de Joule-Kelvin.	152
10.7	Compresseur ou turbine.	152
10.8	Tuyère.	153
10.9	Partition du plan $(\log P, h)$	154
10.10	Théorème des moments pour le titre massique en vapeur. . .	155
10.11	Isotitres massique en vapeur pour le diagramme $(\log P, h)$. .	155
10.12	Cycle de Rankine pour une centrale électrique.	157
10.13	Cycle d'un réfrigérateur à compresseur.	159
11.1	Exemple d'un transfert thermique par conduction.	162
11.2	Exemple d'un transfert thermique par convection.	163
11.3	Définition du flux thermique surfacique.	164
11.4	Continuité du flux thermique surfacique.	164
11.5	Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.	165
11.6	Définition du vecteur densité de courant thermique.	166
11.7	Équation locale de la conservation de l'énergie, cas unidimensionnel en géométrie cartésienne.	168
11.8	Équation locale de la conservation de l'énergie en géométrie cylindrique.	169
11.9	Équation locale de la conservation de l'énergie en géométrie sphérique.	170
11.10	Exemple de conditions aux limites pour la diffusion thermique.	176
11.11	Discrétisation de l'équation diffusion bidimensionnelle. . . .	177
11.12	Flux surfacique conducto-convectif.	178
11.13	Application du flux conducto-convectif : ailette de refroidissement.	180

11.14	Profil de température d'un système unidimensionnel pour établir l'expression de la résistance thermique.	183
11.15	Schéma équivalent pour la résistance/conductance thermique.	184
11.16	Exemple d'association de résistances en série : cas d'un mur.	185
11.17	Schéma équivalent pour l'association en série de résistances thermiques.	186
11.18	Exemple d'association en parallèle de résistances thermiques.	186
11.19	Schéma équivalent pour l'exemple d'association en parallèle de résistances thermiques.	187
11.20	Exemple de de l'ARQS en thermique.	187
11.21	Schéma équivalent dans l'ARQS thermique	188

Liste des tableaux

1.1	Champs de marées dus au Soleil et à la Lune.	34
2.1	Ordre de grandeur du coefficient de frottement pour quelques matériaux.	46
2.2	Puissance des forces de frottements de glissement selon certains référentiels.	50
4.1	Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : les deux lois de force.	95
4.2	Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : potentiel gravitationnel et énergie potentielle d'une masse plongée dans un champ extérieur.	96
4.3	Théorème de Gauss gravitationnel	96
4.4	Équations locales de la gravitation universelle	97
11.1	Quelques valeurs de référence pour la conductivité thermique.	167
11.2	Analogie entre conduction thermique et électrique en régime permanent.	183

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Référentiels non galiléens

La description du mouvement d'un objet dépend de l'observateur. Un observateur lié à un solide (par exemple un train ou un quai) est lié à un système d'axes, c'est-à-dire 3 axes rigidement liés ainsi que d'une horloge (unique en mécanique classique car le temps est universel).

En L1, on étudie les référentiels galiléens vérifiant le principe d'inertie (1ère loi de Newton). En L2, on étudie les référentiels non galiléens dans deux cas :

- les référentiels en translation accélérée,
- les référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Sommaire

1.1	Description du mouvement d'un point matériel	20
1.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre .	20
1.1.2	Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif	21
1.1.3	Composition des vitesses et vitesse d'entraînement	22
1.1.4	Composition des accélérations	24
1.2	Lois de la dynamique du point	25
1.2.1	Les trois lois de Newton	25
1.2.2	Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie	26
1.2.3	Référentiel entraîné en translation accélérée	28
1.2.4	Référentiel entraîné en rotation uniforme	30
1.3	Caractère galiléen de certains référentiels	32

1.3.1	Référentiel géocentrique et marée océanique	32
1.3.2	Référentiel terrestre	34

1.1 Description du mouvement d'un point matériel par rapport à deux référentiels mobiles l'un par rapport à l'autre

1.1.1 Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre

Translation

On considère $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ (trièdres orthonormés directs pour simplifier).

Définition 1.1 (Référentiel en translation par rapport à un autre). \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} si ses axes gardent une orientation constante par rapport aux axes du référentiel \mathcal{R} .

Il y a donc une seule inconnue : $\overrightarrow{OO'}(t)$.

Exemple 1.1. Le référentiel géocentrique (origine au centre de la Terre et trois axes pointés vers trois étoiles lointaines « fixes ») est (environ) en translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic (origine au centre du système solaire et trois axes pointant vers trois étoiles « fixes »), voir la Figure 1.1.

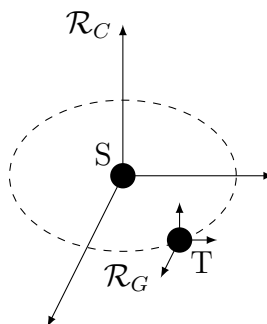


FIGURE 1.1 – Référentiel géocentrique et de Copernic.

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Exemple 1.2. La rotation propre de la Terre (référentiel \mathcal{R}_T) par rapport à l'axe reliant ses pôles, de vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ par rapport à l'axe de rotation (supposé selon l'axe z). On note alors le vecteur de rotation instantanée

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G) := \dot{\theta} \vec{u}_z,$$

où \mathcal{R}_G est le référentiel géocentrique, $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation et \vec{u}_z donne la direction et le sens de rotation.

1.1.2 Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif

Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ et \vec{A} quelconque. On se demande quelle est la relation entre $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ et $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$. Pour cela, projetons \vec{A} sur les vecteurs de base de $\mathcal{R}'(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\vec{A}(t) = a(t)\vec{u}_x + b(t)\vec{u}_y + c(t)\vec{u}_z.$$

— Dans \mathcal{R}' , comme $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base fixe dans \mathcal{R}' , on a

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{da}{dt}\vec{u}_x + \frac{db}{dt}\vec{u}_y + \frac{dc}{dt}\vec{u}_z.$$

— Dans \mathcal{R} , on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= \frac{da}{dt}\vec{u}_x + \frac{db}{dt}\vec{u}_y + \frac{dc}{dt}\vec{u}_z \\ &+ a(t) \left(\frac{d\vec{u}_x}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + b(t) \left(\frac{d\vec{u}_y}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + c(t) \left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , alors $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est fixe dans \mathcal{R} et ainsi

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}.$$

Si \mathcal{R}' est en rotation uniforme par rapport à l'axe (Oz) , on décompose les vecteurs de base :

$$\begin{cases} \vec{u}_x' = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_y' = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_z' = \vec{u}_z. \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y = \dot{\theta} \vec{u}_y' = \dot{\theta} (\vec{u}_z' \wedge \vec{u}_x'), \\ \left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y = -\dot{\theta} \vec{u}_x' = \dot{\theta} (\vec{u}_z' \wedge \vec{u}_y'). \end{aligned}$$

Or $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) := \dot{\theta} \vec{u}_z'$, on écrit donc simplement

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_x', \\ \left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_y'. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (a\vec{u}_x' + b\vec{u}_y' + c\vec{u}_z').$$

De manière générale, on a donc

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.}$$

1.1.3 Composition des vitesses et vitesse d'entraînement

Translation

Soit M un point matériel et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ un référentiel en translation par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$. La vitesse de M dans le référentiel

\mathcal{R} est

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} := \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}} + \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}.$$

Définition 1.2 (Vitesse d'entraînement). $\vec{v}_e := \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$ est appelée la **vitesse d'entraînement**, qui est indépendante de n'importe quel point matériel considéré, mais vient juste du fait que \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} .

On a donc

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e.}$$

Mouvement de translation rectiligne uniforme. On considère qu'à $t = 0$, $O = O'$ et que le référentiel \mathcal{R}' est en translation rectiligne uniforme à la vitesse V selon l'axe (Ox) .

— Dans le cas non relativiste $v \ll c$, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V,$$

d'où $x = x' + Vt$: c'est une transformation de Galilée. Comme on a $y = y'$, $z = z'$ et $t = t'$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

— Dans le cas relativiste $v \lesssim c$, c'est la transformation de Poincaré-Lorentz :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix},$$

où $\beta := \frac{v}{c} \lesssim 1$ et $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$.

→ Dans la limite $\beta \ll 1$, on a $\gamma \approx 1$ et on retrouve la transformation de Galilée.

—> Le temps n'est plus absolu.

—> Il y a une « dilatation » des temps. En effet, soit un intervalle de temps propre dans \mathcal{R}' (i.e. séparant deux événements ayant lieu au même endroit dans \mathcal{R}'). Alors

$$c\Delta t = \beta\gamma \underbrace{\Delta x'}_{=0} + \gamma c\Delta t' = \gamma c\Delta t'.$$

Ainsi, si $\Delta x = 0$, Δt est « impropre ». On note que dans ce cas, $\Delta t_{\text{impropre}} = \gamma \Delta t_{\text{propre}}$ (et $\gamma > 1$ donc il y a une « dilatation »).

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

On note $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{u}_z$. On a déjà vu que l'on a

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M),$$

avec $\vec{v}_e(M) = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$.

Pour simplifier, on notera \vec{v}' quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel \mathcal{R}' , et \vec{v} quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel \mathcal{R} (ce qui sera le cas par défaut).

1.1.4 Composition des accélérations

Translation

On a

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{0} := \vec{a}'(M)_{/\mathcal{R}'}} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{a}_e}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e,}$$

où $\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2}$.

Rotation uniforme

On a

$$\begin{aligned}\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \right)_{\mathcal{R}}, \\ &= \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\vec{\omega}$ est une constante. Comme

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M) = \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM},$$

on a donc

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}.}$$

On note alors $\vec{a}_e(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$ et $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ **l'accélération de Coriolis**.

Exemple 1.3. Dans le cas d'une rotation autour de l'axe (Oz) , on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal sur l'axe (Oz) du point M .

1.2 Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen

1.2.1 Les trois lois de Newton

1. Principe d'inertie.

2. La dérivée de la quantité de mouvement est égal à la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système considéré dans un référentiel galiléen, c'est-à-dire

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \text{ dans } \mathcal{R}_{\text{galiléen}}.$$

3. Principe d'action-réaction.

On se place dans le cadre classique ou $\gamma = 1$.

1.2.2 Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie

Loi de la quantité de mouvement

On considère un référentiel \mathcal{R}' en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_{\text{galiléen}} \equiv \mathcal{R}$. Dans \mathcal{R} , on a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= m \vec{a}(M) = \vec{F}, \\ &= m(\vec{a}^i(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)) = \vec{F}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$m \vec{a}^i(M) = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c,$$

où $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$ et $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$. Ce sont des « pseudo » forces d'inertie.

Loi du moment cinétique par rapport à O' fixe dans \mathcal{R}' non galiléen.

Dans \mathcal{R}' , on a

$$(\vec{L}_{O'})_{\mathcal{R}'} := \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{O'M} \wedge m \vec{v}^i(M).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} \right) &= m \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{\vec{v}} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{O'M} \wedge \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}, \\ &= \underbrace{\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}} + \underbrace{\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_e}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{\text{ent}}} + \underbrace{\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_c}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{\text{coriolis}}}. \end{aligned}$$

Loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen**Puissance des forces de Coriolis.** On a

$$\vec{P}_{\text{cor}} = \vec{F}_e \cdot \vec{v} = -m \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v} \right) \wedge \vec{v} = 0.$$

Loi de l'énergie cinétique dans \mathcal{R}' . On a

$$\begin{aligned} \frac{dE'_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v'^2 \right), \\ &= m \vec{v}' \cdot \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}, \\ &= (\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c) \cdot \vec{v}', \\ &= (\vec{F} + \vec{F}_e) \cdot \vec{v}', \\ &= P' + P'_e. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$dE'_c = P' dt + P'_e dt = \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}' dt}_{d\vec{l}'} + \vec{F}_e \cdot \underbrace{\vec{v}'_e dt}_{d\vec{l}'_e} = \delta W' + \delta W'_e.$$

En intégrant, on obtient donc

$$\boxed{\Delta E'_c = W' + W'_e.}$$

Formulation en terme d'énergie mécanique. Dans le cas où il existe des forces conservatives, on a $W_{\text{cons}} = -\Delta E_p$ (ou $\delta W_{\text{cons}} = -dE_p$). Dans ce cas, on définit l'énergie mécanique par

$$\boxed{E_m := E_c + E_p.}$$

Ainsi, $dE'_c = \delta W_{\text{nc}} - dE'_p + \delta W'_e$ où W_{nc} représente le travail venant de forces non conservatives. Alors

$$dE'_m = \delta W'_{\text{nc}} + \delta W'_e,$$

et on a donc

$$\boxed{\Delta E'_m = W'_{\text{nc}} + W'_e.}$$

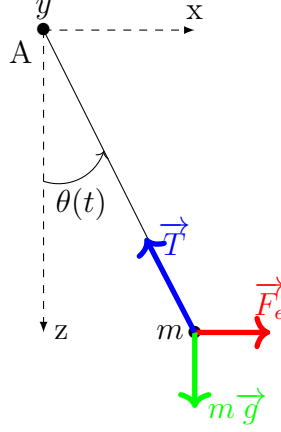


FIGURE 1.2 – Pendule secoué.

1.2.3 Référentiel entraîné en translation accélérée

On a $\vec{F}_e = -m \vec{a}(O')$, force indépendante du point matériel M considéré, et $\vec{F}_c = \vec{0}$.

Freinage d'une voiture

On suppose que la voiture roule initialement à 50 km/h et qu'elle s'arrête en 1 seconde. Alors

$$\begin{aligned} \|\vec{a}_e\| &\approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = 14 \text{ m.s}^{-2} > g, \\ \|\vec{F}_e\| &= m \|\vec{a}_e\| = 1400 \text{ N}. \end{aligned}$$

Pendule secoué

On considère un pendule secoué, voir la Figure 1.2. Le référentiel est $\mathcal{R}' = (Axyz)$ (y est orienté vers nous). On suppose que le pendule situé en A est secoué selon l'axe x : $x_a(t) = \alpha \cos(\omega t)$. Le théorème du moment cinétique par rapport à A dans \mathcal{R}' donne

$$\vec{L}'_A = J \dot{\theta} \vec{u}_y = ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_y,$$

où J est le moment d'inertie. On calcule la force d'entraînement :

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \ddot{x}_A(t) \vec{u}_x = -\omega^2 \alpha \cos(\omega t) \vec{u}_x, \\ \vec{F}_e = m\omega^2 \alpha \cos(\omega t) \vec{u}_x. \end{cases}$$

Le théorème du moment cinétique selon \vec{u}_y donne alors

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta + m\omega^2 \alpha \cos(\omega t) l \cos \theta.$$

En notant $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, on a donc

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \cos(\omega t) \cos \theta.$$

Pour des petits mouvements, on a $|\theta| \ll 1$ et on linéarise :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \cos(\omega t).$$

En régime sinusoïdal forcé, $\theta(t) \propto e^{j\omega t}$ (où j est le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$). Ainsi,

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \theta(t) = \frac{\omega^2 \alpha}{l} e^{j\omega t}.$$

En prenant la partie réelle, on obtient donc

$$\theta(t) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{\alpha}{l} \cos(\omega t).$$

Si l'on suppose que le pendule est secoué selon l'axe z avec $z_A(t) = \alpha \cos(\omega t)$, on trouve pour équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{\alpha \omega^2}{g} \cos(\omega t) \right) \sin \theta = 0.$$

En posant $\Omega^2(t) = 1 + \frac{\alpha \omega^2}{g} \cos(\omega t)$, on voit qu'il s'agit d'un oscillateur paramétrique.

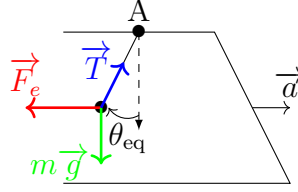


FIGURE 1.3 – Pendule dans un train en accélération uniforme.

Énergie potentielle d'entraînement par translation uniformément accélérée

On a $\vec{a}_e = a\vec{u}_x$ et $\vec{F}_e = -ma\vec{u}_x$. Soit un déplacement élémentaire $\vec{dl}' = \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix}$ dans \mathcal{R}' . Alors

$$\delta W'_e = \vec{F}_e \cdot \vec{dl}' = -madx' = -d(max') = -dE_p^{\text{ent}}.$$

Ainsi, l'énergie potentielle d'entraînement vaut $E_p^{\text{ent}} = max'$ (à une constante près).

Exemple 1.4. On considère un pendule dans un train, voir la Figure 1.3. On cherche la valeur de θ_{eq} .

- Première méthode : on utilise $\overrightarrow{\mathcal{M}_A^{\text{tot}}} = \vec{0}$. En projetant, on trouve alors $mgl \sin \theta_{\text{eq}} = mal \cos \theta_{\text{eq}}$ d'où

$$\tan \theta_{\text{eq}} = \frac{a}{g}.$$

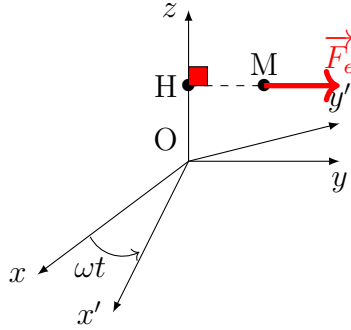
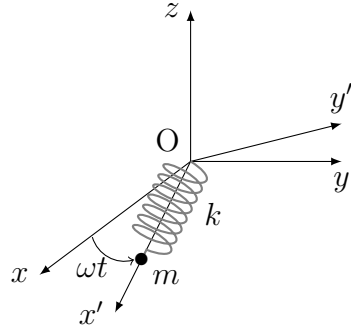
- Deuxième méthode : On a $E_p^{\text{ent}} = -mal \sin \theta$ et $E_p^{\text{poids}} = -mgl \cos \theta$ (avec éventuellement des constantes). Alors

$$\frac{dE_p^{\text{tot}}}{d\theta} = 0 = -mal \cos \theta + mgl \sin \theta,$$

d'où le résultat.

1.2.4 Référentiel entraîné en rotation uniforme par rapport à un axe fixe

On suppose que la rotation se fait selon l'axe (Oz) à une vitesse angulaire ω , voir la Figure 1.4. H est le projeté du point M sur l'axe (Oz) . On a

FIGURE 1.4 – Rotation uniforme autour de l'axe (Oz) .FIGURE 1.5 – Exemple de rotation uniforme autour de l'axe (Oz) : ressort avec une masse.

$\vec{F}_e = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$, qui est donc perpendiculaire au mouvement dans \mathcal{R}' .

Exemple

On considère le cas où l'on rajoute un ressort sur l'axe (Ox') , fixé en O , de constante de raideur k et de longueur au repos l_0 , avec au bout une masse m , voir la Figure 1.5.

On cherche l'expression de $x'(t)$. On a

$$\begin{cases} \vec{F}_e = m\omega^2 x'(t) \vec{u}_{x'}, \\ \vec{F}_c = -2m\omega \vec{u}_z \wedge \dot{x}'(t) \vec{u}_{x'} = -2m\omega \dot{x}'(t) \vec{u}_y. \end{cases}$$

On projette le principe fondamental de la dynamique selon \vec{u}_x pour obtenir

$$m\ddot{x}'(t) = -k(x'(t) - l_0) + m\omega^2 x'(t).$$

En posant $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$, on obtient

$$\ddot{x}'(t) + (\omega_0^2 - \omega^2) x'(t) = \omega_0^2 l_0.$$

Énergie potentielle d'entraînement « centrifuge »

Soit un déplacement $d\vec{l}' = dx' \vec{u}_x$ dans \mathcal{R}' . On a

$$\delta W'_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}' = m\omega^2 x' dx' = d\left(m\omega^2 \frac{x'^2}{2}\right) := -dE_p^{\text{ent}},$$

d'où $E_p^{\text{ent}} = -m\omega^2 \frac{x'^2}{2}$.

Retour sur l'exemple

On applique le théorème d'énergie mécanique dans \mathcal{R}' :

$$E'_{m_{\text{tot}}} = \text{constante} = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - l_0)^2 - m\omega^2 \frac{x'^2}{2}.$$

On se donne comme conditions initiales $x'(0) = l_0$ et $\dot{x}'(0) = 0$. On a alors

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - l_0)^2 - \frac{m\omega^2 x'^2}{2} = -\frac{m\omega^2 l_0^2}{2}}.$$

1.3 Caractère galiléen approché de quelques référentiels courants

1.3.1 Référentiel géocentrique et marée océanique

On se place dans \mathcal{R}_G en translation (environ) circulaire par rapport à \mathcal{R}_C , voir la Figure 1.1. On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m au voisinage de la surface de la Terre par rapport à \mathcal{R}_G . Alors

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_G} = \vec{f} + m\vec{g}_T(M) + \sum_{\neq i} m\vec{g}_i(M) - m\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_G},$$

où \vec{f} représentent les forces de contact (par exemple la pression), \vec{g}_T est le champ de pesanteur dû à la Terre, \vec{g}_i représente le champ de gravitation dû à un autre astre du système solaire, et $m\vec{a}_{T/\mathcal{R}_C}$ est simplement la force d'entraînement \vec{F}_e .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la terre par rapport à \mathcal{R}_C , on obtient

$$M_T \vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \vec{R}^{\text{ext}} = \sum_{\neq i} M_T \vec{g}_i(T),$$

où l'on a fait l'hypothèse que la Terre était sphérique pour la dernière égalité. Ainsi, on a

$$\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \sum_{\neq i} \vec{g}_i(T).$$

Alors

$$m\vec{a}(M) = \vec{f} + m\vec{g}_T(M) + m \left(\sum_{\neq i} \vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) \right).$$

Définition 1.3 (Champ de marée). L'expression

$$\vec{C}(M) := \left(\sum_{\neq i} \vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) \right),$$

définit le *champ de marée*. C'est un terme différentiel.

Notamment, le champ de marée dû à la Lune uniquement est

$$\vec{C}_L(M) = \vec{g}_L(M) - \vec{g}_L(T).$$

Ordre de grandeur de $\|\vec{C}_i\|_{\text{max}}$. On a

$$\|\vec{C}_i\| = \mathcal{G}M_i \left| \frac{1}{(D_i - R_T)^2} - \frac{1}{D_i^2} \right|.$$

Si $D_i \gg R_T$, on a

$$\frac{1}{(D_i - R_T)^2} = \frac{1}{D_i^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_T}{D_i}\right)^2} \sim \frac{1}{D_i^2} \left(1 + \frac{2R_T}{D_i}\right).$$

	M (kg)	D_i	$\ \vec{g}_i\ $	$\ \vec{C}\ $
Soleil	2.10^{30}	1.10^{11}	1.10^{-2}	5.10^{-7}
Lune	7.10^{22}	4.10^8	3.10^{-5}	1.10^{-6}

TABLE 1.1 – Champs de marées dus au Soleil et à la Lune.

Ainsi,

$$\|\vec{C}_i\|_{\max} = \mathcal{G} M_i \frac{2R_T}{D_i^3} = \|\vec{g}_i(T)\| \underbrace{\frac{2R_T}{D_i}}_{\ll 1} \ll \|\vec{g}_i\|.$$

On donne dans la Table 1.1 les ordres de grandeur des champs de marées dus au Soleil et à la Lune. On voit donc que le champ de marée lunaire est environ deux fois supérieur au solaire.

Interprétation du phénomène des marées océaniques.

Effet dominant de la Lune. Comme la période de révolution de la Lune autour de la Terre (environ 27 jours) est beaucoup moins longue que la période de révolution de la Terre autour de ses pôles (environ 24h), il y a deux marées hautes et deux marées basses par jour. Il y a un décalage d'environ 50 minutes par jour dû à la rotation de la Lune par rapport à la Terre.

Rôle du Soleil. Selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil, les effets de marées peuvent être atténués ou renforcés, voir la Figure 1.6. Durant la nouvelle Lune et la pleine Lune, le Soleil renforce l'effet de la Lune, ce sont des marées de vives-eaux. Au contraire, lors du premier et du dernier quartier, il y a une compensation partielle de l'effet de la Lune par le Soleil. Ce sont les marées de mortes-eaux.

1.3.2 Référentiel terrestre

On suppose le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G galiléen. On ne regarde que les effets de la rotation propre de la Terre.

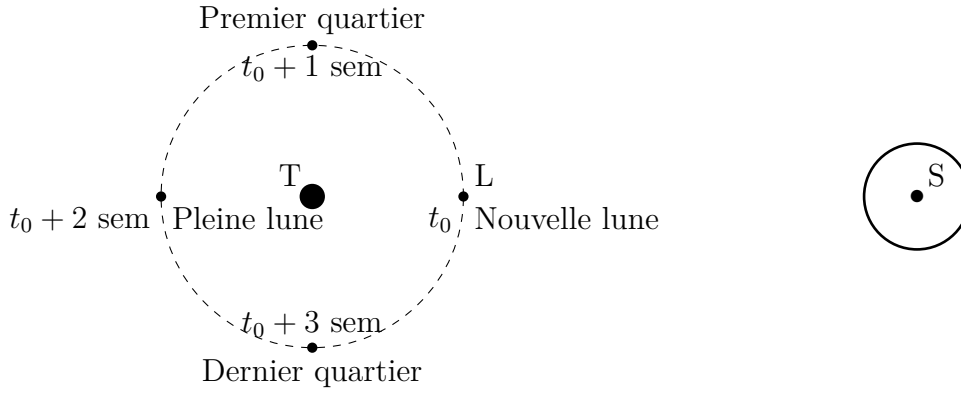


FIGURE 1.6 – Atténuation ou renforcement des effets de marées selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil.

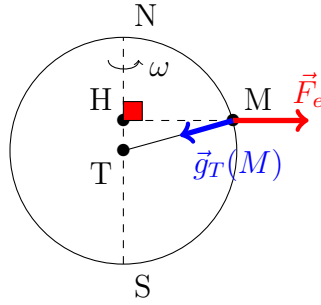


FIGURE 1.7 – Rotation de la Terre et définition du poids.

Effets de la force centrifuge

On regarde de plus près la définition du poids. \mathcal{R}_T est en rotation par rapport à \mathcal{R}_G à une rotation angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T_T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1},$$

autour de l'axe \overrightarrow{SN} fixe dans \mathcal{R}_G , voir la Figure 1.7.

Équation du mouvement de M dans \mathcal{R}_T . On a

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_e + m \vec{g}_T(M) + m \omega^2 \overrightarrow{HM} - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}.$$

Définition du poids/de la pesanteur. Supposons qu'un fil à plomb soit en équilibre dans \mathcal{R}_T et induise une tension (verticale) \vec{T} . Alors on a

$$\vec{0} = m\vec{g}_T + m\omega^2\overrightarrow{HM} + \vec{0} + \vec{T}.$$

Ainsi, \vec{T} , qui indique la verticale du lieu, est donné par

$$\vec{T} = -m(g_T + \omega^2\overrightarrow{HM}).$$

Définition 1.4 (Champ de pesanteur et champ de gravité). En notant \vec{g} le champ de pesanteur et \vec{g}_T le champ de gravité, on a

$$\boxed{\vec{g} := \vec{g}_T + \omega^2\overrightarrow{HM}.}$$

\vec{g} n'est donc pas tout à fait diriger vers \vec{T} . À l'équateur, $\omega^2 R_t \approx 0.03 \text{ m.s}^{-2}$ avec $R_T \approx 6400 \text{ km}$. En dynamique terrestre, \vec{g} inclut la force centrifuge.

Effets qualitatifs de la force de Coriolis

Dans \mathcal{R}_T , on a

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{f} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T},$$

où $m\vec{g}$ représente le poids.

Ordre de grandeur.

Composante verticale de \vec{F}_{cor} . Elle est à comparer au poids. Elle vaut au maximum $2m\omega v$. Ainsi,

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{cor}}\|_{\text{max}}}{mg} = \frac{2\omega v}{g} \# \frac{14.10^{-5}}{10} \times v = 1,4.10^{-5}v.$$

Le plus souvent, la composante vertical est négligeable devant le poids. L'effet dominant est celui de la composante horizontale.

Échelles de temps. On compare le temps de l'expérience T_{exp} au temps de révolution de la Terre T_T . On a

$$\frac{\|\vec{a}_{\text{cor}}\|}{\|\vec{a}(M)_{/\mathcal{RT}}\|} \# \frac{2\omega v}{v/T_{\text{exp}}} = 2\omega T_{\text{exp}} = 4\pi \frac{T_{\text{exp}}}{T_T}.$$

Le référentiel terrestre est quasi galiléen si $T_{\text{exp}} \ll 24h$.

Échelles de distance. On compare la longueur caractéristique présente dans l'expérience et L_c (taille typique des déplacements dus à \vec{F}_{cor}). On a

$$L_c \approx a_{\text{cor}} \times T_{\text{exp}}^2 = 2\omega v T_{\text{exp}}^2,$$

$$L_{\text{exp}} \approx v \times T_{\text{exp}},$$

d'où

$$\frac{L_c}{L_{\text{exp}}} \# 2\omega T_{\text{exp}} = 4\pi \frac{T_{\text{exp}}}{T_T}.$$

Expression de \vec{F}_{cor} à la surface de la Terre. On note λ la latitude, voir la Figure 1.8. On note (X, Y, Z) la base de projection (voir la Figure). On note

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{RT}} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}_{u_X, u_Y, u_Z}.$$

Alors

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \lambda \\ 0 \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix},$$

d'où

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \lambda \\ 0 \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \dot{Y} \sin \lambda \\ \omega \dot{X} \sin \lambda + \omega \dot{Z} \cos \lambda \\ -\omega \dot{X} \cos \lambda \end{pmatrix},$$

et

$$\vec{F}_{\text{cor}} = 2m\omega \begin{pmatrix} \omega \dot{Y} \sin \lambda \\ \omega \dot{X} \sin \lambda + \omega \dot{Z} \cos \lambda \\ -\omega \dot{X} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

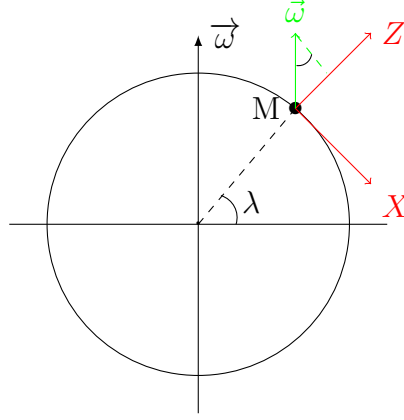


FIGURE 1.8 – Expression de la force de Coriolis à la surface de la Terre.

Mouvements horizontaux : $\dot{Z} = 0$. On a

$$\vec{F}_{cor,horizontale} = 2m\omega \sin \lambda \begin{pmatrix} \dot{Y} \\ -\dot{X} \\ 0 \end{pmatrix} = -2m\omega \sin \lambda \vec{u}_Z \wedge \vec{v}.$$

Ainsi, dans l'hémisphère sud, on a $\lambda < 0$ et \vec{F}_{cor} est dans le même sens que $\vec{u}_Z \wedge \vec{v}$: il y a une déviation vers la gauche. Dans l'hémisphère nord, on a $\lambda > 0$ et on voit donc une déviation vers la droite.

Anticyclones et dépressions. La force de Coriolis justifie les mouvements des anticyclones et dépressions. On montre ce qu'il se passe dans l'hémisphère nord sur la Figure 1.9. En ordre de grandeur, on a $L_{exp} \approx 1000 \text{ km}$ et $v \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$. Ainsi, $T_{exp} \# 10^5 \text{ s}$. Or $T_T = 86400 \text{ s} \# 10^5 \text{ s}$. Ainsi, $L_c \approx L_{exp}$.

Tourbillons dans un lavabo. On a $L_{exp} \approx 10 \text{ cm}$, $v \approx 10 \text{ cm.s}^{-1}$, $T_{exp} \approx 1 \text{ s}$, ainsi

$$L_{cor} \# L_{exp} \frac{T_{exp}}{T_T} = 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}.$$

Pendule de Foucault (1851). Ce pendule dévie vers la droite. À l'équateur, on a $\lambda = 0$ donc il n'y a pas de déviation. Au pôle nord, l'effet est maximum. Le plan d'oscillation tourne à ω par rapport à \mathcal{R}_G .

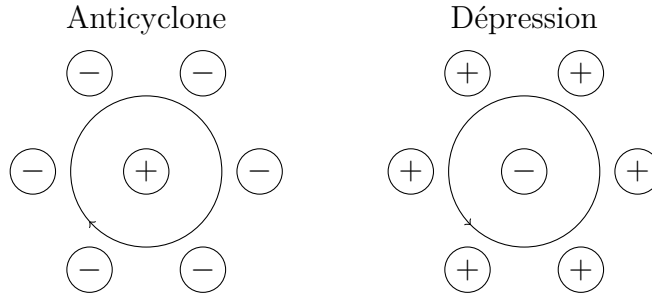


FIGURE 1.9 – Sens des anticyclones et dépressions dans l'hémisphère nord.

Mouvement vertical de chute libre : déviation vers l'est. Expérience de Reich (1833). On considère un puits de mine de profondeur $h = 100 \text{ m}$. Lorsqu'un objet tombe dans ce puits, on observe une légère déviation vers l'est (quelques millimètres). On reprend la Figure 1.8 et on considère que $|\dot{X}|, |\dot{Y}| \ll |\dot{Z}|$. Alors

$$\vec{F}_c = -2m\omega\dot{Z} \cos \lambda \vec{u}_Y,$$

et $\dot{Z} < 0$ donc \vec{F}_c est dirigé vers l'est. En ordre de grandeur, on a

$$L = \frac{1}{2}gt^2,$$

donc

$$T_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \# \sqrt{\frac{h}{g}},$$

et ainsi

$$L_c \# \underbrace{L_{\text{exp}}}_h \times \frac{T_{\text{exp}}}{T_T} = \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}T_T} \# 10^{-3} \text{ m}.$$

Chapitre 2

Frottement solide

Cette étude s'appelle la tribologie (étude de l'adhésion, des frottements solides). On va s'intéresser aux actions de contact entre solide. L'origine microscopique de ces contacts est l'interaction électromagnétique. On se limite aux seuls mouvements de translation.

Sommaire

2.1	Forces de frottement de glissement	42
2.1.1	Résultante des actions de contact entre deux solides	42
2.1.2	Les trois effets possibles des frottements solides . .	42
2.1.3	Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide	44
2.1.4	Effet d'arc-boutement	45
2.1.5	Effet « stick-slip »	47
2.2	Puissance des forces de frottement	49
2.2.1	Puissance totale instantanée des forces liées aux actions de contact entre deux solides	49
2.2.2	Exemple d'un pavé mis en mouvement par un tapis roulant : bilan énergétique	49

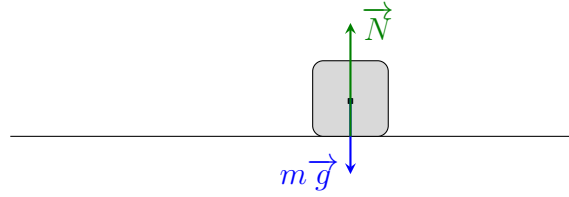


FIGURE 2.1 – Premier exemple de frottements solides et résultante.

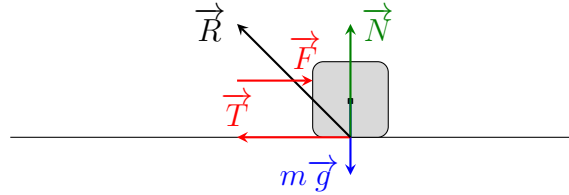


FIGURE 2.2 – Deuxième exemple de frottements solides et résultante.

2.1 Forces de frottement de glissement

2.1.1 Résultante des actions de contact entre deux solides

Les actions de contact sont réparties sur la surface de contact. Pour modéliser ces actions, on introduit un modèle qu'est la résultante (ou somme) des actions de contact en un point I de l'interface. Un premier exemple est donné à la Figure 2.1, où l'équilibre s'écrit $\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$. Un deuxième exemple est donné à la Figure 2.2 où l'équilibre s'écrit $\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$ et $\vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$.

Le solide subit donc une résultante $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. \vec{N} traduit l'existence de contact, \vec{T} le frottement de glissement. \vec{T} s'oppose au glissement, mais pas au mouvement.

2.1.2 Les trois effets possibles des frottements solides

On donne différents exemples :

1. la Figure 2.3 décrit un maintien à l'équilibre possible grâce aux frottements.

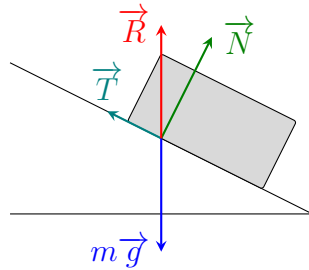


FIGURE 2.3 – Premier exemple d’effet possible des frottements solides.

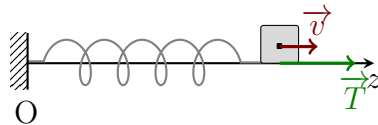


FIGURE 2.4 – Deuxième exemple d’effet possible des frottements solides. L’axe est un tapis roulant vers la droite.

2. la Figure 2.4 décrit un premier mouvement gauche-droite où le frottement est responsable du mouvement, c’est une phase de non glissement. Pour le mouvement droite-gauche, la phase de glissement existe à cause de la force de rappel du fil élastique. Les frottements sont responsables d’un freinage.
3. Lors de la marche à pied, pour se déplacer, il faut une composante tangentielle venant du sol sur les semelles des chaussures.
4. Les roues des voitures : lors de l’accélération (roues qui patinent), il y a des frottements moteurs, voir la Figure 2.5. Lors du freinage (roues bloquées), c’est l’inverse.

Ainsi, il y a trois effets possibles : maintien à l’équilibre, mise en mouvement et freinage.

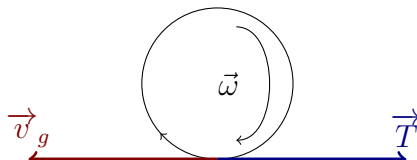


FIGURE 2.5 – Troisième exemple d’effet possible des frottements solides.

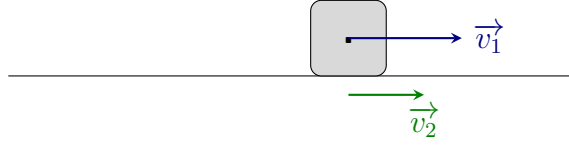


FIGURE 2.6 – Notion de vitesse de glissement.

2.1.3 Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide

Notions de vitesse de glissement. La Figure 2.6 présente un solide en mouvement du solide (1) par rapport au sol (2). Alors la vitesse de glissement est définie par

$$\vec{v}_g(1/2) := \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Il faut noter que cette définition est indépendante du référentiel : si \mathcal{R}_2 est un référentiel lié à 2, alors

$$\vec{v}'_{1/2} - \vec{v}'_{2/\mathcal{R}_2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_g.$$

Cas du glissement. On est donc dans le cas où $\vec{v}_g \neq \vec{0}$. Alors

1. $\vec{T} \parallel \vec{v}_g$ et $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$: \vec{T} et \vec{v}_g sont de sens opposés.
2. On a $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$. f_d est le coefficient de frottement dynamique : il est indépendant de $\|\vec{N}\|$ et de la surface de contact, mais dépend de la nature des matériaux et de l'état des surfaces.

Cas du non glissement. On est donc dans le cas où $\vec{v}_g = \vec{0}$. Alors on a

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|,$$

où f_s est le coefficient de frottement statique. f_s et f_d ont les mêmes propriétés et en général, $f_s \geq f_d$.

Cône de frottement.

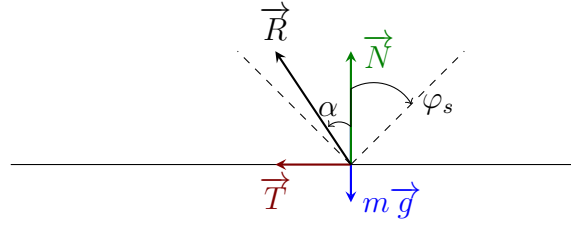


FIGURE 2.7 – Non glissement et cône de frottement statique.

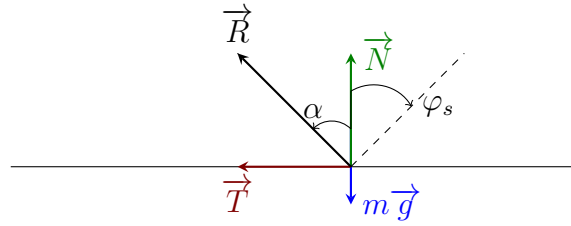


FIGURE 2.8 – Glissement et cône de frottement dynamique.

Non glissement. Soit φ_s tel que $f_s = \tan \varphi_s$. Alors

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\| \Leftrightarrow \tan(\alpha) \leq \tan \varphi_s \Leftrightarrow \alpha \leq \varphi_s.$$

Il y a non glissement si la résultante \vec{R} reste à l'intérieur du cône de frottement statique, voir la Figure 2.7.

Glissement. Soit φ_d tel que $f_d = \tan \varphi_d$. Alors

$$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \tan \varphi_d \Leftrightarrow \alpha = \varphi_d.$$

Il y a glissement si la résultante \vec{R} coïncide avec le bord du cône de frottement dynamique, voir la Figure 2.8.

Ordres de grandeur. Le plus souvent, on a $f_s \approx f_d := f$. On donne quelques valeurs de référence dans la Table 2.1.

2.1.4 Effet d'arc-boutement

Le modèle est présenté à la Figure 2.9. On prend pour axe (Ox) le plan incliné, orienté de gauche vers la droite, et l'axe (Oy) est perpendiculaire à

Type de contact	f
acier/acier	0.2
acier/garniture de freins	0.4
pneu/route sèche	0.8
acier/bois	0.5
bois/bois	0.5
téflon/matière lisse	0.04

TABLE 2.1 – Ordre de grandeur du coefficient de frottement pour quelques matériaux.

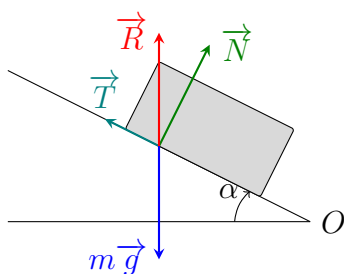


FIGURE 2.9 – Modèle d’arc-boutement.

(Ox) (orienté selon \vec{N}).

On se demande la condition sur α pour éviter tout glissement pour toute masse m . La condition de l’équilibre s’écrit $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$. En projetant sur (Ox) puis (Oy) , on obtient

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - T &= 0, \\ -mg \cos \alpha + N &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\frac{T}{N} = \tan \alpha$. On a donc non glissement si $T \leq f_s N$ ou bien $\alpha \leq \varphi_s$. C’est l’effet d’arc-boutement : pas de glissement quelque soit la charge.

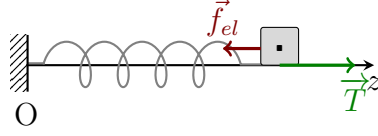


FIGURE 2.10 – Effet « stick-slip ». L'axe (Ox) est un tapis roulant vers la droite de vitesse $\vec{v} = V\vec{u}_x$

Condition de non-basculement. Les équations en translation et rotation s'écrivent

$$\begin{aligned}\vec{R}^{\text{ext}} &= \vec{0} = \vec{R} + m\vec{g}, \\ \vec{M}_G^{\text{ext}} &= \vec{0} = \vec{G}\vec{G} \wedge m\vec{g} + \vec{G}\vec{I} \wedge \vec{I},\end{aligned}$$

où G est le centre de masse de la masse m , et I est le point d'application de \vec{R} . Donc $\vec{G}\vec{I} \parallel \vec{R} \parallel \vec{g}$. I est donc à la vertical de G . On a non-basculement si I reste sur la surface de contact : la limite du basculement est quand I est sur l'arête. Ainsi, l'angle limite est tel que $\tan \alpha_{\text{lim}} = \frac{l}{h}$, où l est la longueur de la masse et h sa hauteur. Pour savoir s'il y a glissement ou basculement, il faut comparer $\frac{l}{h}$ et f_s .

2.1.5 Effet « stick-slip »

C'est typiquement ce qu'il se passe en utilisant un archet enduit de colophane. Dans ce cas, on a $f_s \gg f_d$ (ici $f_d \approx 0$). On considère le système présenté à la Figure 2.10, la raideur du ressort est notée k , la masse de l'objet m .

— Phase 1 : non glissement sur $[0, t_1]$. On a

$$m\ddot{x} = 0 = -kx + T,$$

doù $x(t) = Vt$. La fin de la phase 1 à t_1 a lieu quand $T = f_s N$. On a $T(t_1) = kx(t_1) = kVt_1$ et $N = mg$. Ainsi,

$$f_1 = f_s \frac{mg}{kV} = \frac{f_s g}{\omega_0^2 V},$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

- Phase 2 : on a glissement. $f_d \approx 0$ donc il y a glissement sans frottement. Ainsi,

$$m\ddot{x} = -kx + 0,$$

d'où $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Alors $x(t \geq t_1) = A \cos(\omega_0(t - t_1) + \alpha)$. La condition initiale est en $t = t_1$: on a $x(t_1) = Vt_1 = \frac{f_s g}{\omega_0^2} = A \cos \alpha$, et $\dot{x}(t_1) = V = -A\omega_0 \sin \alpha$. Alors

$$\tan \alpha = -\frac{\omega_0 V}{f_s g}, \quad A^2 = \left(\frac{f_s g}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{V}{\omega_0}\right)^2.$$

On a fin du glissement à $t = t_2$, c'est-à-dire $Vg(t_2) = 0$, d'où $\dot{x}(t_2) = V$. Alors

$$-A\omega_0 \sin(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = V = -A\omega_0 \sin \alpha,$$

puis

$$\sin(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = \sin \alpha,$$

d'où $\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha = \pi - \alpha$, ce qui donne enfin

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{2\alpha}{\omega_0}.$$

- Phase 3 : non glissement sur $[t_2, t_3]$, on a

$$\dot{x}(t_2 \leq t \leq t_3) = V,$$

d'où $x(t_2 \leq t \leq t_3) = V(t - t_2) + K$. La condition initiale donne

$$K = x(t_2) = A \cos(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = A \cos(\pi - \alpha) = -A \cos \alpha.$$

Ainsi,

$$x(t_2 \leq t \leq t_3) = V(t - t_2) - A \cos \alpha.$$

Le fin de la phase 3 a lieu en t_3 quand $T(t_3) = f_s N = f_s mg$. Or $m\ddot{x} = 0 = T - kx$, donc $kx(t_3) = f_s mg$. Donc

$$kV(t_3 - t_2) - k\frac{f_s g}{\omega_0^2} = f_s mg.$$

Donc

$$t_3 - t_2 = 2\frac{f_s g}{\omega_0^2 V}.$$

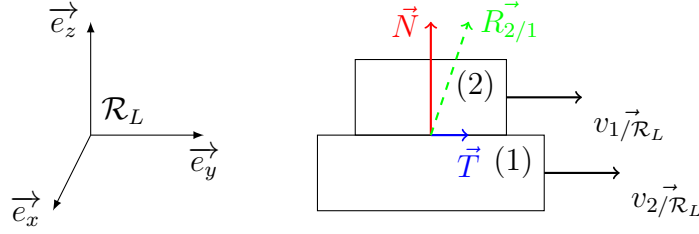


FIGURE 2.11 – Système modèle pour l'étude de la puissance des forces de frottement de glissement.

2.2 Puissance instantanée des forces de frottement de glissement

2.2.1 Puissance totale instantanée des forces liées aux actions de contact entre deux solides

On considère le système présenté à la Figure 2.11.

On a $(P_{2 \rightarrow 1})_{/R_L} = \overrightarrow{R_{2/1}} \cdot \overrightarrow{v_{1/R_L}}$ et $(P_{1 \rightarrow 2})_{/R_L} = -\overrightarrow{R_{2/1}} \cdot \overrightarrow{v_{2/R_L}}$. Ainsi, la puissance totale est

$$P_{\text{tot}} = \overrightarrow{R_{2/1}} \cdot (\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{R_{2/1}} \cdot \overrightarrow{v}_{g(1/2)} = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{v}_{g(1/2)} \leq 0.$$

Condition pour avoir $P_{\text{tot}} = 0$. On a

- soit $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$: il y a glissement sans frottement ($f_d = 0$) (exemple : ski, patinage) ;
- soit $\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{0}$: il y a roulement sans glissement (exemple : voiture qui démarre sans les roues qui patinent, freinage sans blocage).

2.2.2 Exemple d'un pavé mis en mouvement par un tapis roulant : bilan énergétique

On considère une boîte b mise sur un tapis roulant t dans un supermarché, comme décrit à la Figure 2.12. On fait l'hypothèse que $u > v$, ainsi on a $\overrightarrow{v}_g(b/t) = (v - u)\overrightarrow{u}_x$, d'où $\overrightarrow{T} = T\overrightarrow{u}_x$ avec $T > 0$.

Les valeurs des différentes puissances des forces de frottements de glissement selon le référentiel choisi sont données dans la Table 2.2.

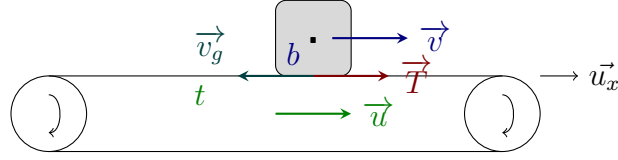


FIGURE 2.12 – Pavé mis en mouvement par un tapis roulant.

	$\mathcal{R}_{\text{supermarché}}$	$\mathcal{R}_{\text{tapis}}$	$\mathcal{R}_{\text{boîte}}$
$P_{t \rightarrow b}$	$T \times v > 0$	$T \times (v - u) < 0$	$T \times 0 = 0$
$P_{b \rightarrow t}$	$(-T) \times u < 0$	$(-T) \times 0 = 0$	$(-T) \times (u - v) > 0$
P_{tot}	$T \times (v - u) = T \times v_g < 0$	$T \times (v - u) < 0$	$T \times (v - u) < 0$

TABLE 2.2 – Puissance des forces de frottements de glissement selon certains référentiels.

Ainsi, même si elle sont motrices, les forces de frottement sont toujours globalement dissipatives : $P_{\text{tot}} < 0$. P_{tot} est indépendant du référentiel d'étude. On peut généraliser le résultat : les puissances intérieures P_{int} sont indépendantes du référentiel (en prenant la réunion des deux systèmes boîte/tapis).

Deuxième partie

Électromagnétisme

Chapitre 3

Le champ électromagnétique : sources et symétries

Sommaire

3.1	Charges et courants	54
3.1.1	Distributions discrètes ou continues de charges	54
3.1.2	Distribution de courant en volume. Densité de courant	57
3.2	Loi de conservation de la charge	59
3.2.1	Géométrie 1D	59
3.2.2	Équation intégrale de conservation de la charge	60
3.2.3	Flux et opérateur « divergence »	61
3.2.4	Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.	63
3.2.5	Cas du régime stationnaire/permanent	63
3.3	La loi de force de Lorentz	64
3.4	Propriétés de symétrie	66
3.4.1	Principe de Curie	66
3.4.2	Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants	66
3.4.3	Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique	68
3.4.4	Géométrie du champ sur un PS/PAS	68
3.4.5	Exemples	68

3.1 Source du champ électromagnétique : charges et courants

3.1.1 Distributions discrètes ou continues de charges. Densité volumique de charge

Distribution discrètes de charges

→ Nature « atomique » de la charge : $-e$ (électron), $+Ze$ (noyau) avec $Z \in \mathbb{N}^*$, ions ;

→ a priori, charges ne avec $n \in \mathbb{Z}$, localisées en des points précis.

A priori, il y a donc une distribution discrète de charges.

Échelle mésoscopique : distribution continue de charges

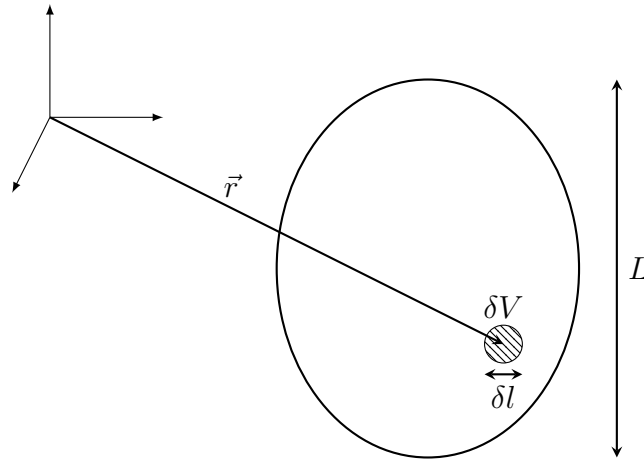


FIGURE 3.1 – Échelle mésoscopique pour une distribution continue de charges.

La Figure 3.1 présente la matière à l'échelle mésoscopique : on a $\delta V \sim (\delta l)^3$, L est une longueur typique de l'échelle macroscopique (1 mm jusqu'à 1 m). On se donne une longueur a qui est caractéristique de l'échelle microscopique voire nanoscopique, par exemple la distance interatomique ou le libre parcours moyen d'un gaz. Alors

$$a \ll \delta \ll L.$$

Cela vient du fait que dans δV , il y a un très grand nombre de constituants élémentaires, on peut donc faire un traitement statistique, d'autre part on cherche une description assez fine du phénomène. L'échelle mésoscopique est donc entre 0,1 μm et 1 μm . À l'échelle mésoscopique, on adopte une description continue (moyennée) de la matière. Ceci implique une distribution continue de charges.

Densité volumique de charges

Dorénavant, on adopte le modèle continu. La quantité de charge δQ dans un volume δV est proportionnel à ce même volume, on définit alors la **densité volumique de charges** $\rho(\vec{r}, t)$ par

$$\boxed{\delta Q = \rho(\vec{r}, t) \delta V.}$$

Son unité est C m^{-3} .

Exemple 3.1. Dans un conducteur métallique (par exemple le cuivre), il y a n_e électrons libres et n_i ions fixes. Alors

$$\rho = (n_i - n_e)e = 0,$$

à cause de la neutralité du métal.

Exemple 3.2. Dans un semi-conducteur, il y a des électrons (mobiles), des trous (places vides positives) et des ions fixes. Ainsi,

$$\rho = (n_t - n_e + n_i)e.$$

Exemple 3.3. Dans une électrolyte, par exemple (Na^+, Cl^-), on a

$$\rho = (n_{\text{Na}^+} - n_{\text{Cl}^-})e.$$

Ainsi, en général, on a

$$\rho = \sum_{\substack{\neq \text{ types} \\ \text{de porteurs}}} n_k q_k,$$

où n_k est en m^{-3} et q_k est en C et représente la charge algébrique d'un « k » porteur.

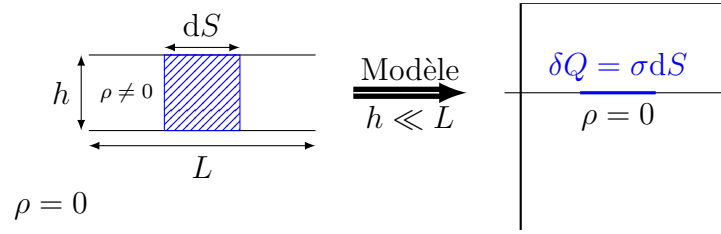


FIGURE 3.2 – Distribution de charges en surface.

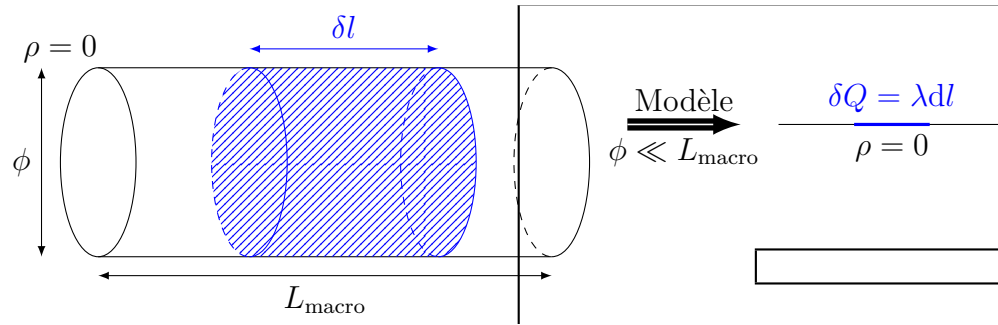


FIGURE 3.3 – Distribution linéique de charges.

Modèles surfacique et linéique

Distribution de charges en surface : « nappe » de charge. Les charges sont localisées au voisinage d'une surface. On considère la Figure 3.2. On considère que l'on a $h \ll L$, et le volume $\delta V = h dS$ contient $\delta Q = \rho h dS$ charges. On modélise donc cette nappe de charge par une distribution surfacique de charges, avec une **densité superficielle de charge** $\sigma = \rho \times h$, en C m^{-2} . Ainsi, on a

$$\delta Q = \sigma dS.$$

Exemple 3.4. On peut penser à un conducteur plan.

Distribution linéique de charges. On considère la Figure 3.3. Il y a $\delta Q = \rho S dl$ charges dans la volume bleu. On définit alors la **densité linéique de charge** $\lambda = \rho S$, d'unité C m^{-1} . On a alors

$$\delta Q = \lambda dl.$$

Exemple 3.5. On peut penser à un faisceau d'électrons.

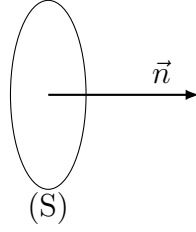


FIGURE 3.4 – Courant algébrique traversant une surface orientée.

3.1.2 Distribution de courant en volume. Densité de courant

Courant algébrique traversant une surface orientée

Pendant dt , δQ traverse algébriquement une surface S . $\delta Q > 0$ si la charge est effectivement transportée selon \vec{n} , voir la Figure 3.4.

Le courant $i(t)$ est alors défini par

$$\delta Q = i(t)dt.$$

Son unité est $A = C s^{-1}$. C'est la charge algébrique traversant la surface orientée (S) par unité de temps.

Densité de courant

Cas à une dimension et un seul type de porteur libre. On considère qu'il y a n porteur libres par mètre cube, q est la charge algébrique d'un porteur, \vec{v} est la vitesse d'ensemble, qui est uniforme et perpendiculaire à (S) , voir la Figure 3.5.

Le nombre δN de porteurs traversant (S) pendant dt est

$$\delta N = nSvdt = n\vec{v} \cdot (S\vec{n})dt,$$

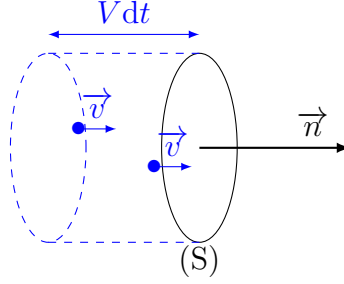
d'où

$$\delta Q = \delta N \times q = nq\vec{v} \cdot (S\vec{n})dt$$

et finalement

$$i = nq\vec{v} \cdot \vec{n}S = \vec{j} \cdot (S\vec{n}),$$

où $\vec{j} = nq\vec{v}$ est la **densité de courant**, d'unité $A m^{-2}$.

FIGURE 3.5 – Densité de courant \vec{j} : modèle introductif.

Dans le cas où la vitesse n'est pas perpendiculaire à (S), le calcul reste le même (en prenant bien en compte le produit scalaire avec la normale extérieure \vec{n}).

Définition de \vec{j} . De manière générale, on définit la densité de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$ par

$$i_s(t) := \iint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS.$$

$i_s(t)$ est le flux de \vec{j} à travers la surface S .

Expression de \vec{j} dans différents milieux conducteurs

Métal. Les électrons libres génèrent une densité de courant

$$\vec{j} = -ne\langle \vec{v} \rangle.$$

Dans un fil de cuivre pour 1 A et une longueur 2 mm, on a

$$n_e \sim \frac{1}{(\text{qq} \cdot 10^{10})^3} \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}.$$

Ainsi, l'ordre de grandeur de la vitesse des électrons dans le métal est

$$\langle v \rangle \sim \frac{1}{10^{29} \times 10^{19} \times 2 \cdot 10^{-6}} \sim 3 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1}.$$

En considérant les électrons comme des particules classiques indépendantes, on a

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{3}{2}k_bT,$$

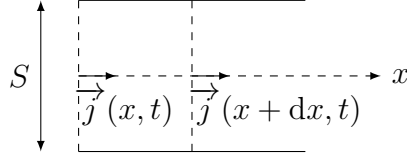


FIGURE 3.6 – Loi de conservation de la charge 1D.

avec $k_B = R/\mathcal{N}_A \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Ainsi,

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \sim 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

pour $m = 0.9 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ et $T = 300 \text{ K}$.

Semi-conducteur. On a

$$\vec{j} = n_t e \langle \vec{v}_t \rangle - n_e e \langle \vec{v}_e \rangle.$$

Solution de NaCl. On a

$$\vec{j} = n_{\text{Na}^+} e \langle \vec{v}_{\text{Na}^+} \rangle - n_{\text{Cl}^-} e \langle \vec{v}_{\text{Cl}^-} \rangle.$$

Finalement, on a

$$\boxed{\vec{j} = \sum_{\substack{\neq \text{types} \\ \text{de particules libres}}} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle.}$$

3.2 Loi de conservation de la charge

3.2.1 Géométrie 1D

On considère la Figure 3.6.

La charge entrant algébriquement dans Sdx pendant dt est

$$\begin{aligned} \delta Q_e &= j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt, \\ &= S dt [j(x, t) - j(x + dx, t)], \\ &= -S dt dx \frac{\partial j}{\partial x}(x, t). \end{aligned}$$

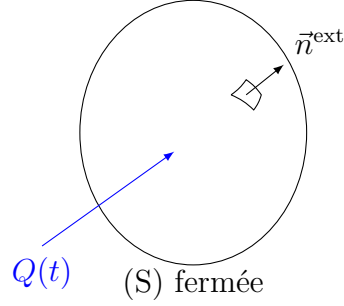


FIGURE 3.7 – Équation intégrale de conservation de la charge.

La variation dQ de la charge dans la tranche Sdx est

$$\begin{aligned} dQ &= \rho(x, t + dt)Sdx - \rho(x, t)Sdx, \\ &= Sdx (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)), \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t)Sdxdt. \end{aligned}$$

Postulat : conservation de la charge. On doit avoir

$$dQ = \delta Q_e.$$

Alors l'équation locale de la conservation de la charge s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = 0.$$

3.2.2 Équation intégrale de conservation de la charge

Dans le cas général, on se reporte à la Figure 3.7.

Le flux sortant de \vec{j} est

$$i_S^{\text{ext}} = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS.$$

La conservation de la charge s'écrit alors

$$\frac{dQ}{dt} = -i_S^{\text{ext}}(t) = -\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS.$$

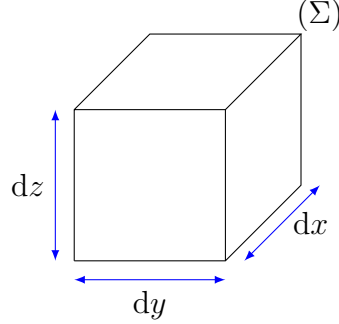


FIGURE 3.8 – Flux de courant sortant en trois dimensions.

3.2.3 Flux et opérateur « divergence »

Dans le cas unidimensionnel de la Figure 3.6, en notant (Σ) la surface fermée comprise entre x et $x + dx$ et les bords en haut et en bas, on a

$$\begin{aligned}
 i_{\Sigma}^{\text{ext}}(t) &= \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma, \\
 &= \iint_{\text{bords}} \vec{j} \cdot \vec{n}_{\text{bords}} d\Sigma + (-\vec{j}(x, t) \times S) + (j(x + dx, t) \times S), \\
 &= 0 + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \times S dx, \\
 &= \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \times V.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le flux est proportionnel au volume.

Dans le cas à trois dimensions, on se reporte à la Figure 3.8. On se donne un champ $\vec{A}(x, y, z, t)$, et on suppose le cube assez petit pour qu'il soit uniforme sur chaque face. On numérote les faces (1 : gauche, 2 : droite, 3 : bas, 4 : haut, 5 : derrière, 6 : devant).

On cherche la quantité $\delta\phi^{\text{ext}}$ sortant du cube à cause du flux de \vec{A} via la surface de (Σ) . On définit donc

$$\delta\phi^{\text{ext}} := \oiint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma.$$

On a alors

$$(1) \quad \vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_y : \delta\phi_1^{\text{ext}} = -A_y(x, y, z, t) \times (dx dz);$$

- (2) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u}_y : \delta\phi_2^{\text{ext}} = +A_y(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}z) ;$
- (3) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_z : \delta\phi_3^{\text{ext}} = -A_z(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}y) ;$
- (4) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u}_z : \delta\phi_4^{\text{ext}} = +A_z(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}y) ;$
- (5) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_x : \delta\phi_5^{\text{ext}} = -A_x(x, y, z, t) \times (\text{d}y\text{d}z) ;$
- (6) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u}_x : \delta\phi_6^{\text{ext}} = +A_x(x, y, z, t) \times (\text{d}y\text{d}z).$

On fait la somme algébrique

$$\begin{aligned}
 1 + 2 : & \frac{\partial A_y}{\partial y}(x, y, z, t) \times \text{d}y\text{d}x\text{d}z, \\
 3 + 4 : & \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z, t) \times \text{d}z\text{d}x\text{d}y, \\
 5 + 6 : & \frac{\partial A_x}{\partial x}(x, y, z, t) \times \text{d}x\text{d}y\text{d}z.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\delta\phi^{\text{ext}} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \times \text{d}V = (\text{div } \vec{A})\text{d}V.$$

Théorème-définition d'Ostrogradski. Soit $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 . Alors on a

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \text{d}S = \iiint_V \text{div } \vec{A} \text{d}V.$$

En coordonnées cartésiennes, la divergence de \vec{A} s'écrit

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

L'opérateur symbolique (réservé aux coordonnées cartésiennes) est « na-
bla », qui s'écrit

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

On a alors $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

3.2.4 Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.

Pour une géométrie quelconque, la variation de $Q(t)$ contenue dans un volume V est

$$dQ = \iiint_V [\rho(\vec{r}, t) - \rho(\vec{r}, t + dt)] dV,$$

d'où

$$dQ = \left(\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) dV \right) dt.$$

La charge algébrique δQ_S^{ext} traversant une surface S orientée vers l'extérieur pendant dt est

$$\delta Q_S^{\text{ext}} = i_S^{\text{ext}}(t) \times dt = \left[\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS \right] dt.$$

Or on a

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{j} \cdot dV,$$

donc

$$\delta Q_S^{\text{ext}} = \left(\iiint_V (\text{div } \vec{j} dV) \right) dt.$$

La conservation de la charge s'écrit alors $dQ = -\delta Q_S^{\text{ext}}$, qui est une équation globale :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) dV = 0.$$

Ceci ayant lieu pour tout volume V de taille au moins mésoscopique, on a l'équation locale de la conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

3.2.5 Cas du régime stationnaire/permanent

Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{j} = 0.$$

En conséquence,

(i) \vec{j} est à flux conservatif. En effet,

$$i_S^{\text{ext}} = \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{j} dV = 0.$$

- (ii) $i = \text{constante}$ le long d'un tube de courant (régime permanent). Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. Ces lignes de courant sont des courbes tangentes à \vec{j} en tout point.
- (iii) Loi des nœuds : en un nœud où différents courants arrivent, on a

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k i_k = 0,}$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$.

3.3 Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz

On se demande quelle est l'action (à distance) de la distribution de charges et courants sur une particule chargée q de vitesse \vec{v} , voir la Figure 3.9.

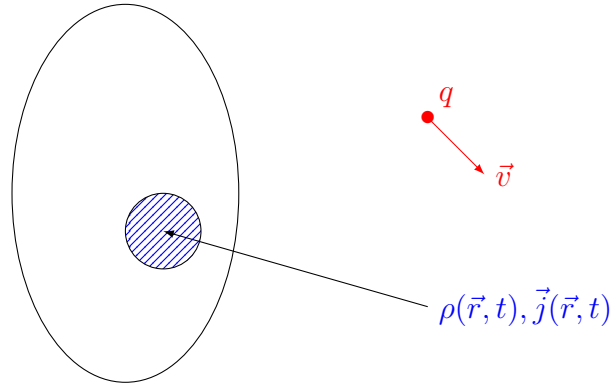
Cette action se fait via le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$, conséquence directe de $[\rho, \vec{j}]$. La loi de force de Lorentz s'écrit

$$\boxed{\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) .}$$

C'est un postulat. \vec{E} est polaire et est considéré comme un « vrai » vecteur. \vec{B} est axial et est considéré comme un « pseudo-vecteur ».

Force de Lorentz méso/macroscopique : distribution continue de charges et courants. Il y a des porteurs de charges de type k : charges q_k , nombre par unité de volume $n_k[\text{m}^{-3}]$ et vitesse moyenne $\langle \vec{v}_k \rangle$. Soit dV un volume mésoscopique contenant ces porteurs. Quelle est la force $d\vec{F}_{em}$ subie par ce volume ? Un charge k subit en moyenne

$$\vec{F}_{L_k} = q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right) .$$



\mathcal{D} : distribution
de charges et/ou
de courants

FIGURE 3.9 – Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz.

Dans dV , il y a $n_k dV$ porteurs k . Ainsi, ils subissent

$$n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right) dV.$$

En sommant sur tout les porteurs k , on a

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{em}} &= \left[\sum_{\neq k} n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right) \right] dV, \\ &= \left(\left(\sum_{\neq k} n_k q_k \right) \vec{E} + \left(\sum_{\neq k} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle \right) \wedge \vec{B} \right), \\ &= (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dV. \end{aligned}$$

Ainsi, la force volumique est

$$\boxed{\vec{f}_{\text{vol}}^{\text{em}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.}$$

Exemple 3.6. Dans un métal, c'est le force de Laplace : on a $\rho = 0$ d'où

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{em}} = (\vec{j} \wedge \vec{B}) dV.}$$

Pour une géométrie filiforme, on a $\vec{j} dV = jsdl = i d\vec{l}$, où s est la section du fil. Ainsi

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{em}} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}.}$$

3.4 Propriétés de symétrie du champ électromagnétique

3.4.1 Principe de Curie

Énoncé en 1905 par Pierre Curie :

[P. Curie, 1905] Les effets ont au moins les symétries (et invariances) des causes.

3.4.2 Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants

(π) est un plan de symétrie pour une distribution de charges et de courants \mathcal{D} si

$$\rho(\pi(M), t) = \rho(M, t), \quad \vec{j}(\pi(M), t) = S_\pi(\vec{j}(M, t)),$$

où $\pi(M)$ désigne le symétrique du point M et S_π désigne l'application symétrie liée au plan (π) .

C'est un plan d'anti-symétrie si

$$\rho(\pi(M), t) = -\rho(M, t), \quad \vec{j}(\pi(M), t) = -S_\pi(\vec{j}(M, t)).$$

Exemple 3.7 (Solénoïde fini). Un solénoïde (enroulement jointif) contenant N spires possède un PS et un PAS, voir la Figure 3.10. Notons que si le solénoïde est considéré comme infini, alors tout plan perpendiculaire à l'axe est un plan de symétrie.

Exemple 3.8 (Condensateur plan à armatures circulaires). Tout plan contenant l'axe est un plan de symétrie. Tout plan qui y est perpendiculaire est un plan d'antisymétrie, voir la Figure 3.11.

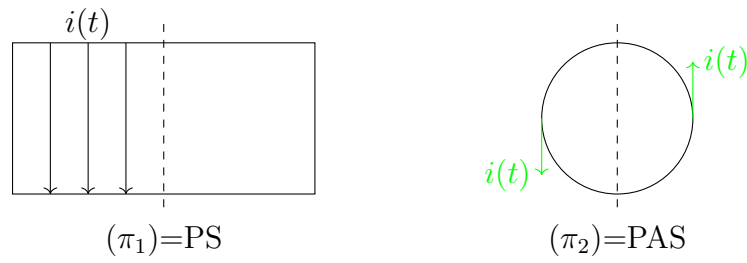


FIGURE 3.10 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un solénoïde.

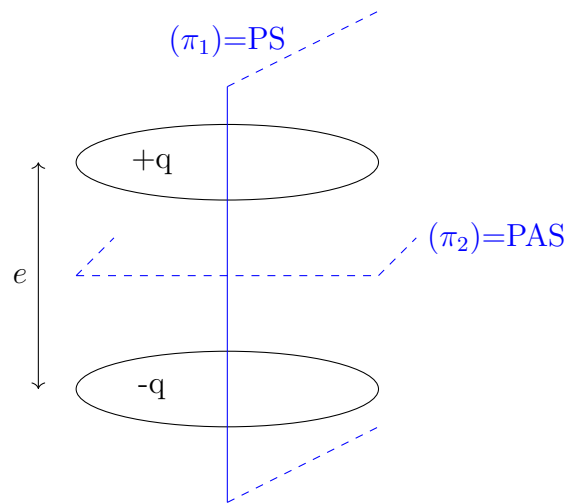


FIGURE 3.11 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un condensateur plan.

3.4.3 Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique

Principe de Curie : si la cause (charges, courants) présente une propriété de symétrie, alors l'effet (\vec{F}_L) présente aussi cette propriété de symétrie. Pour le champ électromagnétique, on en déduit :

- un PS pour \mathcal{D} est un PS pour \vec{E} et un PAS pour \vec{B} ;
- un PAS pour \mathcal{D} est un PAS pour \vec{E} et un PS pour \vec{B} .

3.4.4 Géométrie du champ électromagnétique sur un PS/PAS

On en déduit donc que

- Pour un PS, on a

$$\vec{E}(\pi(M)) = \vec{E}(M) = S_\pi(\vec{E}(M)),$$

donc \vec{E} appartient au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie. Au contraire, on a

$$\vec{B}(\pi(M)) = \vec{B}(M) = -S_\pi(\vec{B}(M)),$$

donc \vec{B} est perpendiculaire au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie.

- Pour un PAS, on a

$$\vec{E} = -S_\pi(\vec{E}),$$

donc $\vec{E} \perp \text{PAS}$, et

$$\vec{B} = S_\pi(\vec{B}),$$

donc $\vec{B} \in \text{PAS}$.

3.4.5 Exemples

La méthode est la suivante :

1. Faire un choix d'un système de coordonnées adapté ;
2. Observer les invariances par translation/rotation de la distribution ;

3. Appliquer le principe de Curie : symétries et géométrie du champ.

Pour un condensateur plan d'axe (Oz) , ou un solénoïde d'axe (Oz) , toute rotation autour de l'axe (Oz) laisse la distribution invariante (symétrie de révolution d'axe (Oz)). Ainsi, la variable θ est non pertinente. De plus, tout plan contenant l'axe est un PAS. Donc $\vec{E}(r, z, t) = E(r, z, t)\vec{u}_\theta$ et $\vec{B}(r, z, t) = \begin{pmatrix} B_r(r, z, t) \\ 0 \\ B_z(r, z, t) \end{pmatrix}$.

Chapitre 4

Électrostatique

Les charges sont immobiles et on est en régime stationnaire. Il n'y a donc pas de courants.

Sommaire

4.1	Loi de Coulomb	72
4.1.1	Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	72
4.1.2	Principe de superposition	73
4.1.3	Ordres de grandeur	73
4.2	Circulation du champ électrostatique	74
4.2.1	Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle	74
4.2.2	Potentiel créé par une charge ponctuelle	75
4.2.3	Circulation du champ le long d'un contour fermé orienté	75
4.2.4	Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient	76
4.2.5	Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique	77
4.3	Flux du champ électrostatique	77
4.3.1	Charge ponctuelle : flux à travers une sphère	77
4.3.2	Théorème de Gauss	78
4.3.3	Comment appliquer le théorème de Gauss	79
4.3.4	Exemples fondamentaux	79

4.3.5	Condensateur plan sans effet de bord. Capacité . .	84
4.4	Topographie du champ électrostatique	87
4.4.1	Lignes de champ. Tubes de champ	87
4.4.2	Surfaces équipotentielles	87
4.4.3	Resserrement ou évasement des lignes de champ .	87
4.4.4	Visualisation de cartes de champ et de potentiel .	89
4.5	Équations locales de l'électrostatique	89
4.5.1	Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss .	89
4.5.2	Circulation conservative locale	90
4.5.3	Opérateur rotationnel	91
4.5.4	Équation de Maxwell-Faraday	92
4.5.5	Vue d'ensemble des différentes formulations des lois de l'électrostatique	92
4.6	Équations de Poisson et de Laplace	93
4.6.1	Équation de Poisson en présence de charges	93
4.6.2	Équation de Laplace. Résolution numérique	93
4.7	Analogies avec la gravitation universelle	94
4.7.1	Les deux lois de force. Grandeurs analogues	94
4.7.2	Potentiel gravitationnel	94
4.7.3	Théorème de Gauss gravitationnel	94
4.7.4	Équations locales de la gravitation universelle . . .	95
4.7.5	Énergie potentielle de gravitation d'un astre à sy- métrie sphérique	95

4.1 Loi de Coulomb

4.1.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On considère le système de deux particules chargées donné à la Figure 4.1.
On a

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

ϵ_0 est la permittivité électrique absolue du vide, avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et

$$c \approx 3.10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad \mu_0 := 4\pi.10^{-7} \text{ H m}^{-1}, \quad \epsilon_0 \approx 8.8.10^{-12} \text{ F m}^{-1}.$$

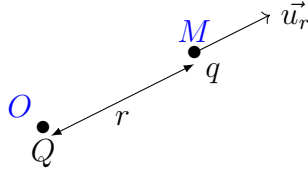


FIGURE 4.1 – Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

Champ électrostatique On a une interaction à distance. Notamment,

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = q \vec{E}(M),$$

avec $\vec{E}(M)$ indépendant de q . Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

C'est la Loi de Coulomb. On a $[\vec{E}] = \text{V m}^{-1}$.

4.1.2 Principe de superposition

C'est une conséquence de la linéarité des équations de Maxwell. S'il y a N particules de charge Q_i , alors le champ électrostatique créé au point M sur la particule de charge q est

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}.$$

4.1.3 Ordres de grandeur

Champ électrostatique de l'atome d'hydrogène L'électron autour du noyau de l'atome d'hydrogène est à une distance $a_0 = 53 \text{ pm}$ du noyau (rayon de Bohr). On a

$$\vec{F} = -q \vec{E},$$

avec

$$E_{\text{proton}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \approx 5.10^{11} \text{ V m}^{-1}.$$

Notons que le rapport entre la force de gravitation et la force électrostatique exercée sur l'électron est

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{gravitation}}^{p \rightarrow e}\|}{\|\vec{F}_{\text{es}}^{p \rightarrow e}\|} = \frac{\mathcal{G}m_p m_e}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \approx 4.10^{-40}.$$

Champ disruptif de l'air On a $E \sim 10^6 \text{ V m}^{-1}$.

Échelle macroscopique La batterie d'un téléphone portable génère un champ électrostatique d'environ

$$E \approx \frac{V}{d} \approx \frac{\text{qq V}}{\text{qq cm}} \approx 10^2 \text{ V m}^{-1}.$$

4.2 Circulation conservative du champ électrostatique

4.2.1 Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle

On considère le système décrit par la Figure 4.2.

On cherche la circulation de \vec{E} entre A et B, c'est-à-dire

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

En coordonnées sphériques, on a

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi.$$

Ainsi,

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right),$$

qui ne dépend que de A et B et pas du chemin choisi. Par définition, le potentiel électrostatique $V(M) = V(x, y, z) = V(r, \theta, \varphi)$ est défini par

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B),$$

et on a $[V] = \text{V}$.

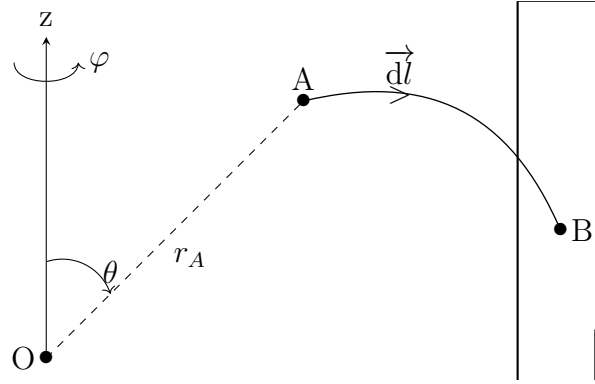


FIGURE 4.2 – Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle.

4.2.2 Potentiel créé par une charge ponctuelle

On a

$$V(M) = V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

où l'on prend la constante nulle à l'infini. Pour une collection de charges ponctuelles, on utilise le principe de superposition :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}.$$

4.2.3 Circulation du champ le long d'un contour fermé orienté

Pour deux points A et B du contour \mathcal{C} , si \vec{dl}_1 connecte A à B et \vec{dl}_2 connecte B à A , alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}_1 + \int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl}_2 = V(A) - V(B) + V(B) - V(A) = 0,$$

donc \vec{E} est à circulation conservative. C'est une équation intégrale.

4.2.4 Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient

Pour deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ connectés par $\vec{dl} = (dx, dy, dz)$, on a

$$\begin{aligned}
 \vec{E} \cdot \vec{dl} &= \vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'}, \\
 &= V(M) - V(M'), \\
 &= E_x dx + E_y dy + E_z dz, \\
 &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz), \\
 &= dx \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) + dy \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) + dz \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z),
 \end{aligned}$$

ceci étant valide pour tout déplacement \vec{dl} , donc

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Ainsi,

$$\vec{E} = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

En coordonnées cartésiennes, on a simplement $\vec{E} = - \vec{\nabla} V$. C'est une équation locale.

4.2.5 Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique

On reprend le système décrit par la Figure 4.2. On souhaite calculer cette fois-ci le travail développé par la force électrostatique. On a

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}^{\text{el}} &= \int_A^B \vec{F}_{\text{el}} \cdot d\vec{l}, \\ &= \int_A^B q \vec{E}^{\text{ext}} \cdot d\vec{l}, \\ &= -q \int_A^B dV^{\text{ext}}, \\ &= -q [V^{\text{ext}}(B) - V^{\text{ext}}(A)]. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une énergie potentielle E_p^{ext} telle que

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{el}} = -\Delta E_p^{\text{ext}},$$

d'où $E_p^{\text{ext}} = qV^{\text{ext}}$. Par convention, on prend $E_p^{\text{ext}}(\infty) = 0$.

On définit aussi l'électron-volt. Il s'agit de l'énergie à fournir pour amener un électron du potentiel 0V au potentiel 1V. Ainsi,

$$\boxed{1\text{eV} = e \times 1\text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}.}$$

4.3 Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss

4.3.1 Charge ponctuelle : flux à travers une sphère

On considère une charge ponctuelle Q en un point O et une sphère S de rayon r de centre O . On note

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Alors en notant \vec{n}^{ext} le vecteur normal à la surface S ,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

4.3.2 Théorème de Gauss

Une charge ponctuelle à l'intérieur d'une surface fermée

Soit V un volume quelconque de l'espace contenant une charge Q . On note S une sphère centrée en Q contenue dans V , et S' le reste de la surface correspondant à V . En un point M quelconque du volume, on a

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

On a

$$\oint_{S \cup S'} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV,$$

et pour un problème à symétrie sphérique, on a pour tout $r \neq 0$,

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r).$$

Ainsi, $\text{div } \vec{E} = 0$ pour tout $r \neq 0$, d'où

$$\iiint_V \text{div } \vec{E} dV = 0 = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS + \oint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS',$$

et les deux normales extérieures sont opposées l'une de l'autre. Finalement,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \oint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{u}_r dS' = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ainsi, si une surface S contient une charge Q , on a toujours

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Charge ponctuelle à l'extérieur d'une surface fermée

Dans ce cas, on a directement

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV = 0.$$

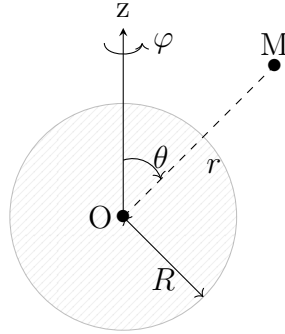


FIGURE 4.3 – Sphère uniformément chargée en volume ou en surface.

Bilan

Si \vec{E} est le champ total créé par N charges Q_i , alors

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Ici, Q^{int} est la somme de toutes les charges qui sont à l'intérieur de la surface S .

4.3.3 Comment appliquer le théorème de Gauss

Le but est de calculer des champs électrostatiques \vec{E} dans des cas de hautes symétries. La méthode est la suivante :

- (α) Invariance et symétries : donne la géométrie de \vec{E} ;
- (β) Choisir une surface de Gauss adaptée (ou bien $\vec{E} \parallel \vec{n}^{\text{ext}}$ avec E qui est constant sur la surface ou bien $\vec{E} \perp \vec{n}^{\text{ext}}$) avec un dessin ;
- (γ) Conclure.

4.3.4 Exemples fondamentaux**Sphère uniformément chargée en volume ou en surface**

On considère le système donnée à la Figure 4.3.

(α) Toute rotation d'axe passant par O laisse la distribution invariante, donc

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r) = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ E_\theta(r) \\ E_\varphi(r) \end{pmatrix}.$$

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des PS valable pour tout point M . Ainsi, \vec{E} est radial et $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

(β) La bonne surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r variable.

(γ) On a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dR = \oiint_S E(r) dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r.}$$

Boule uniformément chargée en volume. La densité ρ est constante et vaut $\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ où Q est la charge présente dans l'entièreté de la boule. Ainsi, pour $r \geq R$, on a

$$Q_{\text{int}}(r \geq R) = Q,$$

d'où

$$\boxed{\vec{E}(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r.}$$

Si $r \leq R$, alors on a

$$Q_{\text{int}}(r \leq R) = \iiint \rho dV = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\vec{E}(r \leq R) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \left(\frac{r}{R}\right) \vec{u}_r.}$$

Sphère uniformément chargée en surface. Pour $r > R$, on a le même résultat que précédemment. Pour $r < R$, on a $Q_{\text{int}}(r < R) = 0$, donc $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. \vec{E} est donc discontinu à la surface de la sphère (variation d'amplitude égal à σ/ε_0). C'est un modèle non physique.

Cylindre infini uniformément chargé en volume ou en surface

On considère un cylindre de rayon R d'axe (Oz) . La distribution de charge est à symétrie cylindrique « infinie ».

- (α) Il y a une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) et une invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz) . De plus, tout plan perpendiculaire à (Oz) est un plan de symétrie. Enfin, tout plan contenant (Oz) est un plan de symétrie. Finalement, on a

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.}$$

Remarque 4.1. Si la distribution est non infinie, a priori on a

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_r(r, z) \\ 0 \\ e_z(r, z) \end{pmatrix}.$$

- (β) La surface de Gauss que l'on prend est un cylindre d'axe (Oz) de rayon r , de hauteur de h , formé par deux disques perpendiculaires à l'axe (Oz) .
- (γ) Le théorème de Gauss donne

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0},$$

où $S = \Sigma \cup S_1 \cup S_2$ où S_1 et S_2 correspondent aux disques. Ainsi,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 + 0 + \iint_{\Sigma} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma = E(r) \times 2\pi r h.$$

Ainsi,

$$\boxed{E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{2\pi\varepsilon_0 h r}.}$$

Cylindre uniformément chargé en volume. On considère une tranche d'hauteur h , on a $Q = \rho h \pi R^2$. On introduit donc

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{h} = \rho \pi R^2.}$$

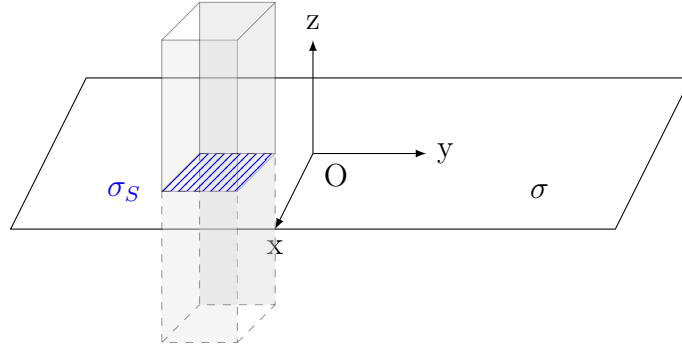


FIGURE 4.4 – Plan uniformément chargé en surface.

C'est la charge linéique en C m^{-1} . Pour $r \geq R$, on a $Q_{\text{int}}(r \geq R) = \lambda h$, d'où

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

Si $r \leq R$, on a $Q_{\text{int}}(r \leq R) = \rho\pi r^2 h = \lambda h \left(\frac{r}{R}\right)^2$. Ainsi,

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r.$$

Cylindre uniformément chargé en surface. Si $r < R$, on a $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. Si $r > R$, on a $Q_{\text{int}}(r > R) = Q = \lambda h$, donc $\vec{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$. À nouveau, il y a une discontinuité égale à σ/ϵ_0 avec $\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R}$. Elle est due au modèle surfacique.

Plan infini uniformément chargé en surface

On considère le système décrit à la Figure 4.4.

Par plan infini, on entend que les longueurs caractéristiques du plan selon les axes x et y sont très grandes devant l'épaisseur du plan : $L_x, L_y \gg e$.

- (α) Il y a invariance par translation par rapport aux axes (Ox) et (Py) . Ainsi, le champ ne dépend pas de x ni de y . Pour les symétries, tout plan parallèle à (xOy) est un PS, donc $E_y = 0$. Tout plan parallèle à (yOz) est un PS, donc $E_x = 0$. Ainsi, on a $\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$. Enfin, le fait que la plan (xOy) est un PS implique $E(-z) = -E(z)$.

- (β) La surface de Gauss est un cylindre de générateur parallèle à (Oz) , de hauteur $2z$ centré sur le plan $z = 0$.
- (γ) On a

$$\begin{aligned}
 \oiint_{S=S_1 \cup S_2 \cup \Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \\
 &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \\
 &= 0 + \iint_{S_1} E(z) \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z dS \\
 &\quad + \iint_{S_2} E(-z) \vec{u}_z \cdot (-\vec{u}_z) dS, \\
 &= E(z)S + E(z)S.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z},$$

et

$$\boxed{\vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z}.$$

La différence en $z = 0$ vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Couche de charges infinie uniformément chargée en volume. On se réfère à la Figure 4.5.

- (α) Il y a invariance par translation selon (Ox) et (Oy) , donc \vec{E} ne dépend ni de x , ni de y . Les symétries sont les mêmes que précédemment, on a donc $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ et $E(-z) = -E(z)$.
- (β) La surface de Gauss est la même que précédemment, mais avec la base dans le plan $z = 0$.
- (γ) On a donc

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 + 0 + E(z) \times S = \frac{Q_{\text{int}}(z)}{\varepsilon_0}.$$

Si $z \geq e/2$, on a $Q_{\text{int}}(z \geq e/2) = \rho \times S \times e/2$, donc

$$\boxed{E(z \geq e/2) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}, \quad E(z \leq -e/2) = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}.$$

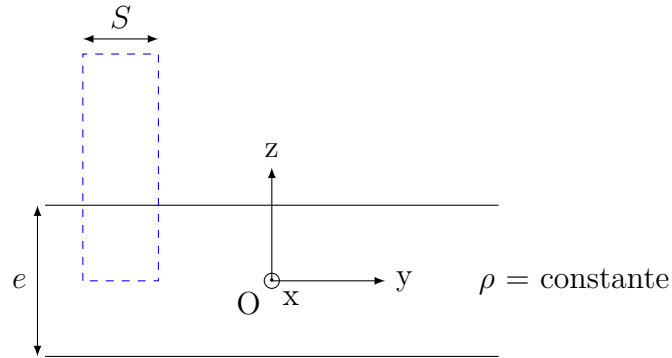


FIGURE 4.5 – Couche de charges infinie uniformément chargée en volume.

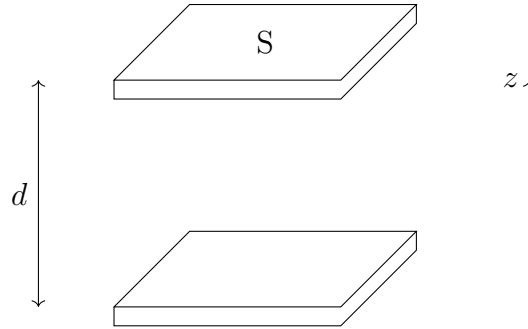


FIGURE 4.6 – Condensateur plan sans effet de bord.

Si $0 \leq z \leq e/2$, on a $Q_{\text{int}}(z) = \rho \times S \times z$, donc

$$E(0 \leq z \leq e/2) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}, \quad E(-e/2 \leq z \leq 0) = -\frac{\rho z}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi, E est continu. Dans le limite $e \rightarrow 0$, on retrouve le modèle de la nappe de charges avec $\rho e = \sigma$ fini.

4.3.5 Condensateur plan sans effet de bord. Capacité

Condensateur plan sans effet de bord

Le condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques se faisant face, séparées par un isolant ou un diélectrique. On se réfère à la Figure 4.6.

On fait l'hypothèse que $d \ll \sqrt{S}$, ce qui correspond au fait que les armatures sont « infinies » : il n'y a pas d'effet de bords. Chaque armature est donc un plan infini sans épaisseur.

Les deux plans sont soumis à une tension U : il y a une accumulation de charges opposées sur les deux plans en regard.

Champ électrique

- (α) Il y a invariance par translation sur (Ox) et (Oy) , donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$.
 Tout plan parallèle à (xOz) et (yoZ) est un PS, donc $E_x = E_y = 0$.
 Finalement,

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z.$$

Ainsi, \vec{E} est perpendiculaire aux armatures. Si \vec{dl} est un déplacement infinitésimal sur l'armature, on a

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 = -dV = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + 0 \right].$$

Donc $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ sur une armature, donc V est constant sur une armature. On note V_1 le potentiel de l'armature située en $z = d/2$ et V_2 celle en $z = -d/2$. On a $U = V_1 - V_2$. Or V est défini à une constante près. On choisit donc $V_1 = U/2$ et $V_2 = -U/2$. Cela entraîne donc que le plan $z = 0$ est un PAS. Donc les charges (surfaiques) valent $+\sigma$ sur l'armature haute, et $-\sigma$ sur l'armature basse. On applique le théorème de superposition comme selon la Figure 4.7.

Ainsi, entre les armatures, on a

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z},$$

qui est uniforme (lié aux effets de bord non présents). En dehors du condensateur, on a $\vec{E} = \vec{0}$.

Capacité

En notant Q les charges sur les armatures ($+Q$ en haut, $-Q$ en bas), on définit la capacité du condensateur par

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}},$$

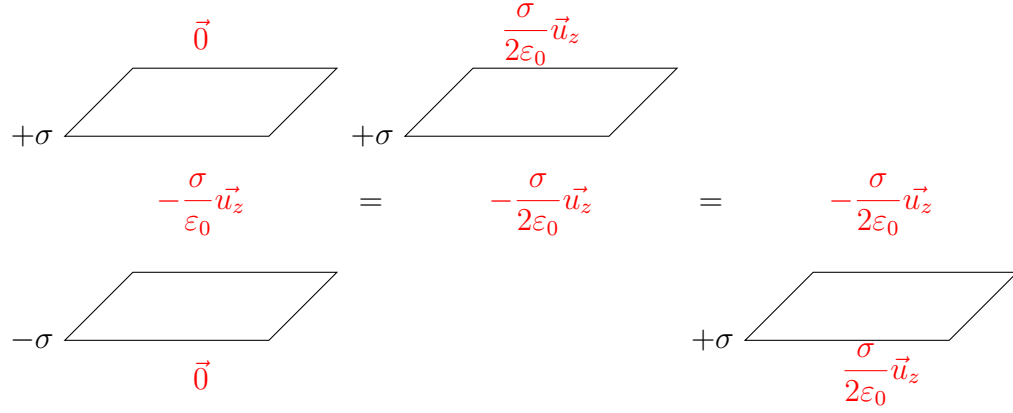


FIGURE 4.7 – Théorème de superposition pour établir l'expression du champ électrostatique dans un condensateur plan.

qui est strictement positif et qui est en F. On peut exprimer la capacité avec les distances caractéristiques présentées à la Figure 4.6. En effet, en notant M_1 un point de l'armature haute et M_2 un point de l'armature basse, on a

$$\begin{aligned} \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_1^2 -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z), \\ &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_1^2 dz, \\ &= \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2 = U,$$

et finalement

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}.$$

Ordre de grandeur. Pour $d = 0,1\text{mm}$, $S = 1\text{cm}^2$, on a

$$C \# 10\text{pF}.$$

De plus, plus S augmente, plus la capacité augmente. Enfin, en utilisant un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ avec $\varepsilon_r > 1$, on augmente la capacité. On peut arriver à des capacités de l'ordre du μF .

4.4 Topographie du champ électrostatique

4.4.1 Lignes de champ. Tubes de champ

Ligne de champ. Une ligne de champ est une courbe tangente en tout point au champ électrostatique \vec{E} . Quelques exemples sont donnés à la Figure 4.8.

Les lignes de champ divergent à partir des $q > 0$ et convergent vers les $q < 0$.

Tube de champ. Un tube de champ est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

4.4.2 Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est définie par

$$\{M \mid V(M) = \text{constante}\}.$$

Sur une surface équipotentielle, on a $dV = 0 = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Ceci vaut pour tout déplacement le long de la surface $d\vec{l}$.

Orientaion des lignes de champ et sens de variation de V . On a $\vec{E} = -\text{grad } V$. Soit une ligne de champ (orientée selon \vec{E}). Alors

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV > 0,$$

donc V décroît le long de la ligne de champ. On peut dire que \vec{E} « descend » les potentiels.

4.4.3 Resserrement ou évasement des lignes de champ

C'est le principe du paratonnerre, voir la Figure 4.9.

On a

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 = 0 + E_2 S_2 - E_1 S_1,$$

d'où

$$E_2 = E_1 \times \frac{S_1}{S_2} > E_1.$$

$$q > 0$$

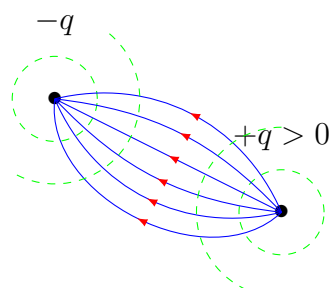
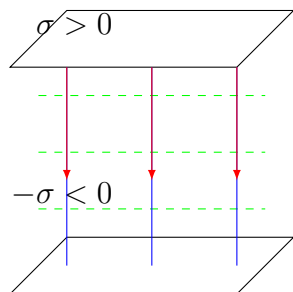
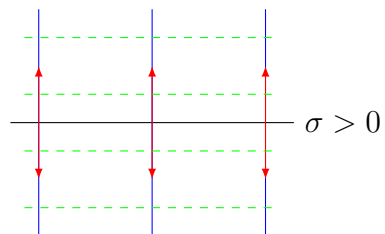
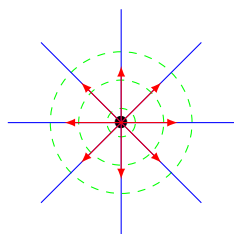


FIGURE 4.8 – Topographie du champ électrostatique : exemples de lignes de champ. Les courbes en vert sont les équipotentiels.

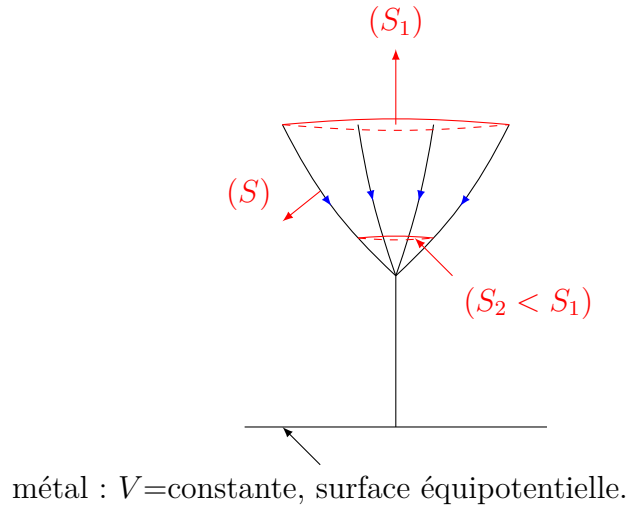


FIGURE 4.9 – Resserrement des lignes de champ : principe du paratonnerre.

Ainsi, $\|\vec{E}\|$ augmente si les lignes de champ se resserrent, et diminue si les lignes de champ s'écartent.

4.4.4 Visualisation de cartes de champ et de potentiel

Un exemple interactif est disponible [sur le site de Geneviève Tulloue via l'université de Nantes](#).

4.5 Équations locales de l'électrostatique

4.5.1 Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss

Le théorème de Gauss couplé au théorème d'Ostrogradski donne

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV.$$

Ainsi, pour tout volume V , on a

$$\iiint_V \left(\text{div } \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0,$$

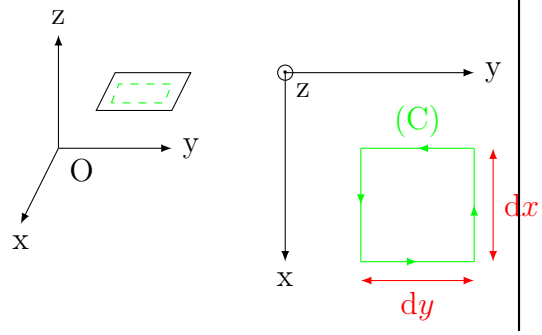


FIGURE 4.10 – Circulation conservative locale en coordonnées cartésiennes.

d'où on entre l'équation de Maxwell-Gauss, qui est une version locale du théorème de Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.$$

4.5.2 Circulation conservative locale

On se réfère à la Figure 4.10.

On se place dans un plan parallèle à (xOy) , de côté z . On a

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0, \\ &= E_x(x, y, z)dx + E_y(x + dx, y, z)dy \\ &\quad - E_x(x, y + dy, z)dx - E_y(x, y, z)dy, \\ &= -dy \frac{\partial E_x}{\partial y}(x, y, z)dx + dx \frac{\partial E_y}{\partial x}(x, y, z)dy = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

la circulation est donc proportionnelle à l'aire du carré. De même dans les autres plans, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dx dz &= 0, \\ \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy dz &= 0. \end{aligned}$$

La circulation du champ est donc proportionnelle à l'aire sur laquelle s'appuie le contour. L'idée est donc de passer d'une circulation $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ à un flux à travers une surface.

4.5.3 Opérateur rotationnel

Théorème-définition de Stokes. Soit $\vec{A}(x, y, z)$ champ de vecteurs \mathcal{C}^1 . Alors on a

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{N} d\Sigma.$$

Ici, (Σ) est une surface (non fermée) s'appuyant sur (C) et orientée selon la règle du tire-bouchon.

Expression de $\text{rot } \vec{A}$ en cartésienne. On a

$$\begin{aligned} \oint_{C \in (xOy)} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \times dx dy, \\ &= (\text{rot } \vec{A})_z dy dx, \\ &= (\text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{u}_z dx dy, \end{aligned}$$

donc

$$(\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

De même pour les deux autres coordonnées, donc

$$\text{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Avec l'opérateur nabla (en cartésienne), on a

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{A}.$$

4.5.4 Équation de Maxwell–Faraday

Sur un contour fermé C avec une surface Σ supportée par ce contour, on a

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} d\Sigma,$$

ceci vaut pour tout contour C , d'où on en tire l'équation de Maxwell–Faraday, qui est une équation locale :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} .}$$

Lien avec le potentiel. Soit $f(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$ car

$$\oint_C \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = 0 = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot \vec{N} d\Sigma,$$

donc

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \iff \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V .}$$

4.5.5 Vue d'ensemble des différentes formulations des lois de l'électrostatique

On choisit un des points de vue, qui sont tous équivalents.

Loi fondamentale

- Loi de Coulomb : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$
- Principe de superposition

Formulation intégrale

- Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$
- Circulation conservative de \vec{E} : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$

Formulation locale

- Maxwell–Gauss : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (flux de \vec{E})
- Maxwell–Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \iff \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ (circulation de \vec{E})

4.6 Équations de Poisson et de Laplace

4.6.1 Équation de Poisson en présence de charges

On a $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$, d'où $-\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right),$$

et donc

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} := \Delta V.$$

L'équation de Poisson (locale) s'écrit donc

$$\Delta V(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}.$$

Cette équation contient « toute l'électrostatique ».

4.6.2 Équation de Laplace. Résolution numérique

Dans le vide, en l'absence de charges, on a

$$\Delta V(x, y, z) = 0.$$

C'est l'équation de Laplace.

On a le théorème d'unicité suivant : pour des conditions aux limites données (sur V ou ses dérivées), et pour une géométrie donnée, l'équation de Laplace admet une unique solution. On donne le principe de la résolution numérique de $\Delta V = 0$ en deux dimensions sur un domaine maillé uniforme

de pas constant l . On note $V_{n,m} = V(nl, ml)$. Alors

$$\begin{aligned} V_{n-1,m} &= V_{n,m} - l \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{n,m} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{n,m} + o(l^2), \\ V_{n+1,m} &= V_{n,m} + l \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{n,m} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{n,m} + o(l^2), \\ V_{n,m-1} &= V_{n,m} - l \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{n,m} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{n,m} + o(l^2), \\ V_{n,m+1} &= V_{n,m} + l \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{n,m} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{n,m} + o(l^2), \end{aligned}$$

Comme $\Delta V = 0$, la somme donne

$$V_{n,m} = \frac{V_{n-1,m} + V_{n+1,m} + V_{n,m-1} + V_{n,m+1}}{4},$$

que l'on résout avec un tableur.

4.7 Analogies avec la gravitation universelle

4.7.1 Les deux lois de force. Grandeurs analogues

On compare dans la Table 4.1 les lois et les grandeurs de l'électrostatique et de la gravitation.

4.7.2 Potentiel gravitationnel. Énergie potentielle rmd'une masse plongée dans un champ extérieur

Dans la Table 4.2, on dérive le potentiel gravitationnel grâce à l'analogie avec l'électrostatique.

4.7.3 Théorème de Gauss gravitationnel

On a noté μ la masse volumique. Vu de l'extérieur, l'astre à symétrie sphérique est équivalent à une masse ponctuelle.

Électrostatique	Gravitation
$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, attractive ou répulsive	$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$, attractive
charge (<0,>0)	masse (>0)
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-\mathcal{G}$
Champ $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, $\vec{F} = q\vec{E}$	Champ $\vec{g} = -\mathcal{G} \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$, $\vec{F} = m\vec{g}$ (mais \vec{g} n'est pas le champ de pesanteur)

TABLE 4.1 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : les deux lois de force.

4.7.4 Équations locales de la gravitation universelle

On a donc $\Delta\varphi = 0$ entre les astres (équivalent à l'équation de Laplace).

4.7.5 Énergie potentielle de gravitation d'un astre à symétrie sphérique

On fait l'hypothèse que $\mu = \text{constante} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. On se demande quelle a été l'énergie de constitution de l'astre.

L'astre s'est formé par agrégations successives de couches minces : on apporte depuis l'infini la masse $dm = \mu \times 4\pi r^2 dr$ dans le potentiel

$$\varphi(r) = -\mathcal{G} \frac{M(r)}{r} = -\mathcal{G} \frac{\mu \times \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = -\mathcal{G} \frac{4\mu\pi r^2}{3}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{gravitationnel}} &= \int_{\infty}^r \overrightarrow{dF_{\text{grav}}} \cdot \vec{dl}, \\ &= \int_{\infty}^r dm \vec{g}(s) \vec{dl}, \\ &= dm [\varphi(\infty) - \varphi(r)], \\ &= -dE_p, \end{aligned}$$

Électrostatique	Gravitation
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0$
\Updownarrow	\Updownarrow
$\exists V, \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(B) - V(A)$	$\exists \varphi(\vec{r}), \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{l} = \varphi(A) - \varphi(B)$
\Updownarrow	\Updownarrow
$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$	$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}\varphi}$
\Updownarrow	\Updownarrow
$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{g} = \vec{0}$
Source ponctuelle (charge)	Source ponctuelle (masse)
$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\varphi(r) = -\mathcal{G} \frac{M}{r}$
$E_p^{\text{ext}} = qV^{\text{ext}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$	$E_p^{\text{ext}} = m\varphi^{\text{ext}} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}$

TABLE 4.2 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : potentiel gravitationnel et énergie potentielle d’une masse plongée dans un champ extérieur.

Électrostatique	Gravitation
$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \vec{g} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = -4\pi\mathcal{G}M^{\text{int}}$
Distribution sphérique	Distribution sphérique
$\vec{E}(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$	$\vec{g}(r \geq R) = -\mathcal{G} \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$
$\vec{E}(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} \vec{u}_r$	$\vec{g}(r \leq R) = -\mathcal{G} \frac{M}{R^2} \frac{r}{R} \vec{u}_r$
(si $\rho=\text{constante}$)	(si $\mu=\text{constante}$)

TABLE 4.3 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : théorème de Gauss gravitationnel.

Électrostatique	Gravitation
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi\mathcal{G}\mu$
$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$	$\operatorname{rot} \vec{g} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{g} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$
$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\Delta \varphi = 4\pi\mathcal{G}\mu$

TABLE 4.4 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : équations locales de la gravitation universelle.

avec $\varphi(\infty) = 0$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
 dE_p &= dm\varphi(r), \\
 &= \mu \times 4\pi r^2 dr \left(-\mathcal{G}\mu \frac{4}{3}\pi r^2 \right), \\
 &= -\mathcal{G}\mu^2 \frac{(4\pi)^2}{3} r^4 dr.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant, on a

$$E_p = \int_0^R dE_p = -\mathcal{G}\mu^2 \frac{(4\pi)^2}{3} \frac{R^5}{5} = -\frac{3\mathcal{G}M^2}{5R}.$$

Ainsi, E_p diminue quand R diminue : c'est l'effondrement gravitationnel. En transposant à l'électrostatique, on obtient l'énergie potentielle de constitution d'une boule chargée :

$$E_p = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} > 0.$$

Chapitre 5

Magnétostatique

Les courants sont stationnaires : $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})$. Ils circulent dans des conducteurs neutres : $\rho(\vec{r}) = 0$. Ainsi $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$.

Sommaire

5.1	Flux du champ magnétique	100
5.1.1	Nullité du flux magnétique à travers une surface fermée	100
5.1.2	Flux de \vec{B} à travers une section d'une tube de champ	100
5.1.3	Resserrement des lignes de champ magnétiques	100
5.1.4	Équation locale de Maxwell-Thompson	101
5.2	Circulation du champ magnétique	101
5.2.1	Théorème d'Ampère intégral	101
5.2.2	Quand et comment mettre en œuvre le théorème d'Ampère ?	101
5.2.3	Exemples fondamentaux	102
5.2.4	Ordres de grandeur	104
5.2.5	Équation de Maxwell–Ampère	105
5.2.6	Vue d'ensemble des lois de la magnétostatique	105
5.3	Topographie du champ magnétique	105
5.3.1	Fermeture et orientation des lignes de contour	105
5.3.2	Comparaison des lignes de champ électriques et magnétiques	105

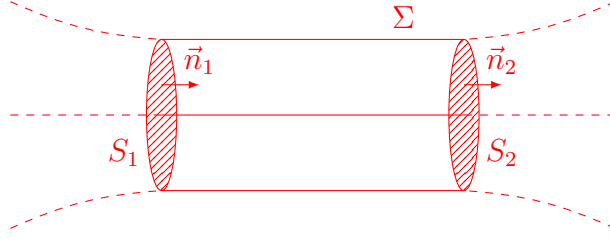


FIGURE 5.1 – Flux du champ magnétique à travers une section d'un tube de champ.

5.1 Flux conservatif du champ magnétique : formulations intégrale et locale

5.1.1 Nullité du flux magnétique à travers une surface fermée

On a le postulat suivant :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0.$$

Ainsi, il n'existe pas de « masses » ni de « charges » magnétiques.

5.1.2 Flux de \vec{B} à travers une section d'une tube de champ

On se réfère à la Figure 5.1. On note $\varphi_i = \iint_{S_i} \vec{B} \cdot \vec{n}_i dS_i$. Alors

$$\oiint_{S_1 \cup S_2 \cup \Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0,$$

implique

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

5.1.3 Resserrement des lignes de champ magnétiques

En notant \bar{B}_i la valeur moyenne sur S_i et en supposant $S_1 > S_2$, on a

$$\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} = \frac{S_1}{S_2} > 1.$$

Ainsi, $\|\vec{B}\|$ est plus intense où les lignes de champ sont plus serrées.

5.1.4 Équation locale de Maxwell-Thompson

D'après le théorème d'Ostrogradski, on a

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 \iff \text{div} \vec{B} = 0.$$

L'équation est locale et universelle.

5.2 Circulation du champ magnétique : théorème d'Ampère intégral et local

5.2.1 Théorème d'Ampère intégral

En L1, on voit que les lignes de champ de \vec{B} s'enroulent autour des courants, et que $\vec{B} \times l \propto I$ si I est l'intensité d'un courant le long d'un fil de longueur l (par linéarité).

On a le postulat suivant :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}},$$

où I_{enl} est l'intensité des fils « enlacés », voir la Figure 5.2. Dans ce cas, on a

$$I_{\text{enl}} = I_1 - I_2 - I_3.$$

Le postulat s'écrit aussi

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d\Sigma.$$

5.2.2 Quand et comment mettre en œuvre le théorème d'Ampère ?

On l'utilise en cas de haute symétrie : cylindrique ou plane. La méthode est la suivante :

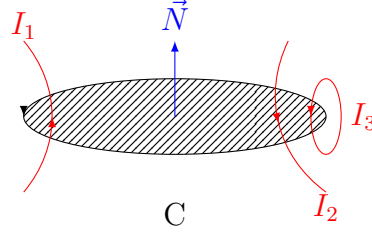


FIGURE 5.2 – Circulation du champ magnétique : enlacement des fils et intensité du courant.

- (α) Choisir le bon système de coordonnées ;
- (β) Donner les invariances et les symétries pour obtenir la géométrie de \vec{B} ;
- (γ) Choisir le bon contour et l'orienter arbitrairement. Ou bien \vec{B} est parallèle à C et constant, ou bien \vec{B} est perpendiculaire à C .
- (δ) Faire un dessin et l'application.

5.2.3 Exemples fondamentaux

Câble rectiligne infini épais

La longueur du fil l est supposée très grande devant son épaisseur a : $l \gg a$, voir la Figure 5.3.

Pour les invariances et symétries :

- symétrie de révolution par rapport à (Oz) : pas de dépendance en θ ;
- invariance par translation par rapport à (Oz) : pas de dépendance en z ;
- tout plan inclus dans (Oz) est un PS : $B_r = B_z = 0$.

Finalement, on a $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$. Le théorème d'Ampère donne alors

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enl}}(r).$$

Pour $r \geq a$, on a $I_{\text{enl}}(r \geq a) = I$, d'où

$$\boxed{\vec{B}(r \geq a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.}$$

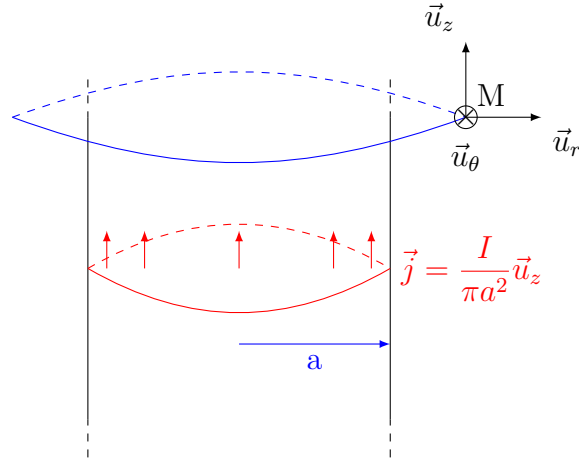


FIGURE 5.3 – Champ magnétique pour un câble rectiligne infini épais.

Si $r \leq a$, on a

$$I_{\text{enl}}(r \leq a) = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d\Sigma = \frac{I}{\pi a^2} \times \pi r^2 = I \left(\frac{r}{a} \right)^2,$$

d'où

$$\boxed{\vec{B}(r \leq a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \times \frac{r}{a} \vec{u}_{\theta}.}$$

En variante, on peut supposer que I ne circule qu'à la surface du cylindre sur une épaisseur nulle. Alors $\vec{j}(r < a) = \vec{0} = \vec{j}(r > a)$, donc $\vec{B}(r < a) = \vec{0}$ et $\vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_{\theta}$.

Solénoïde "infini"

On considère que le rayon du solénoïde a est négligeable devant sa longueur l : $l \gg a$. On se réfère à la Figure 5.4.

Il y a invariance de révolution selon l'axe (Oz) et invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz) , donc le champ ne dépend que de la variable r . Tout plan perpendiculaire à (Oz) est un PS, donc

$$\boxed{\vec{B} = B(r) \vec{u}_z.}$$

Notons que si la longueur est finie, tout plan inclue dans (Oz) est un PAS, donc $B_{\theta} = 0$. Pour contour d'Ampère, on choisit un contour rectangulaire

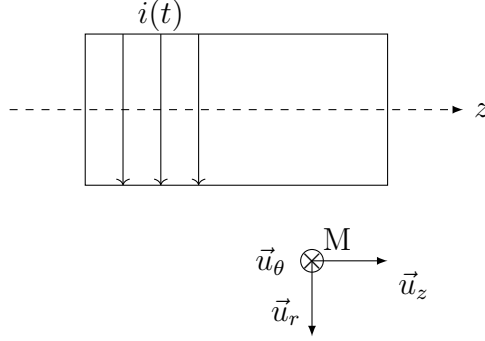


FIGURE 5.4 – Champ magnétique dans un solénoïde infini.

contenu dans un plan contenant l'axe (Oz) dont un des côtés est sur l'axe. Alors

$$\int_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}}(r) = B(0) \times h - B(r) \times h,$$

donc si $r < a$, $B(r < a) = B(0) = \text{constante}$. Si $r > a$, $B(r > a) = 0$ par hypothèse, donc $B(0) = \mu_0 n i$.

5.2.4 Ordres de grandeur

Pour un fil infini (ou une spire, à très faible distance), alors

$$B \sim \frac{\mu_0 i}{2\pi a}.$$

Si $i = 1\text{A}$, $a = 2\text{mm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H m}^{-1}$, alors $B \sim 10^{-4} \text{T} = 1\text{gauss}$. S'il y a 10000 spires sur 20cm, alors

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n i \sim 60\text{mT}.$$

Pour augmenter la valeur du champ magnétique :

- pour augmenter i , l'effet Joule est limitant (sauf supraconducteur) ;
- on peut augmenter n ;
- on peut augmenter μ_0 en utilisant des matériaux ferromagnétiques, B peut alors atteindre quelques Tesla.

5.2.5 Théorème d'Ampère local : équation de Maxwell–Ampère

Si \mathcal{C} est un contour orienté et Σ est une surface supportée par \mathcal{C} avec \vec{N} un vecteur normal extérieur normalisé, alors d'après le théorème de Stokes, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d\Sigma = \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{B}) \cdot \vec{N} d\Sigma.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\text{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}).}$$

5.2.6 Vue d'ensemble des lois de la magnétostatique

Pour le flux, on a l'équivalence intégrale/locale suivante :

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 \iff \text{div} \vec{B} = 0.}$$

Pour la circulation, on a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} \iff \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.}$$

5.3 Topographie du champ magnétique

5.3.1 Fermeture et orientation des lignes de contour

Comme le flux du champ est nul, toute ligne de champ magnétique est fermée sur elle-même. De plus, comme $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, les lignes de champ tournent autour des courants dans le sens donné par la règle du tire-bouchon.

5.3.2 Comparaison des lignes de champ électriques et magnétiques

Une ligne de champ fermée sur elle-même est une ligne de champ magnétique, tandis qu'une ligne de champ convergente ou divergente en un point

est une ligne de champ électrique. Au voisinage des sources, les lignes de champ électriques divergent ou convergent radialement, tandis que les lignes de champ magnétiques tournent autour de la source. Loin des sources, les deux champs sont régis par les mêmes équations ($\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ et $\text{div} \vec{B} = \text{div} \vec{E} = 0$), la distinction n'est donc pas évidente a priori.

Chapitre 6

Dipôles statiques

Sommaire

6.1	Dipôle électrostatique : E et V créés	108
6.1.1	Le modèle du dipôle électrostatique	108
6.1.2	Symétries du problème	108
6.1.3	Potentiel V dans l'approximation dipolaire	109
6.1.4	Champ E dans l'approximation dipolaire	110
6.1.5	Allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans l'approximation dipolaire	110
6.2	Actions mécaniques subies	111
6.2.1	Champ extérieur uniforme	111
6.2.2	Champ extérieur non uniforme	111
6.2.3	Énergie potentielle d'interaction avec un champ extérieur	112
6.3	Dipôle magnétique	113
6.3.1	Définition et ordre de grandeur	113
6.3.2	Champ magnétique créé par un dipôle	114
6.3.3	Actions mécaniques subies	115

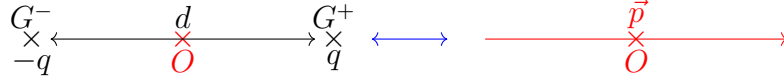


FIGURE 6.1 – Modèle d'une distribution neutre.

6.1 Dipôle électrostatique : \mathbf{E} et \mathbf{V} créés

6.1.1 Le modèle du dipôle électrostatique

On sait qu'il y a neutralité de la matière. Comment concilier cela avec les distributions de charges non nulles ?

Modèle d'une distribution neutre. La distribution est constituée de charges positives $Q^+ = q$ et négatives $Q^- = -q$. On se réfère à la Figure 6.1. Alors pour avoir $Q = 0$ (neutralité de la matière), on doit avoir $Q^+ + Q^- = 0$. Les barycentres des charges positives et négatives sont notées G^+ et G^- . Par définition, on définit le moment dipolaire par

$$\boxed{\vec{p} := q \overrightarrow{G^- G^+}},$$

et son unité est le C m. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène, $\vec{p} \parallel \vec{E}^{\text{ext}}$ et $\vec{p} \cdot \vec{E}^{\text{ext}} > 0$. Pour une molécule présentant une symétrie centrale, on a $\vec{p} = \vec{0}$. Sinon, les molécules peuvent être polaires.

Ordre de grandeur. On a $p \sim 10^{-19} \times 10^{-10} = 10^{-29} \text{C m}$. On introduit donc le Debye D , où $1 D = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{C m}$. Pour un condensateur plan, on a $\|\vec{p}\| = Qe \sim 10^{-13} \text{C m}$. Pour un potentiel de 10V, avec $e = 1 \text{mm}$ et $S = 10 \text{cm}^2$, on a $Q = CU = \frac{\epsilon_0 S U}{e} \sim 10^{-10} \text{C}$.

6.1.2 Symétries du problème

Pour un dipôle, en coordonnées sphériques où il y a un potentiel $V(r, \theta, \varphi)$ et $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$. Il y a cependant une invariance par symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) , donc il n'y a pas de dépendance en φ . De plus, tout

plan contenant (Oz) est un plan de symétrie. Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} V(r, \theta), \\ \vec{E}(r, \theta) = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta) \\ E_\theta(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}}$$

6.1.3 Potentiel V dans l'approximation dipolaire

L'approximation dipolaire est $r \gg q$, où r est la distance à laquelle se trouve le point M dont on voit le dipôle. Dans ce cas, on a

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 G^+ M} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 G^- M}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} G^+ M^2 &= \left\| \overrightarrow{G^+ M} \right\|^2 = \left(\overrightarrow{G^+ O} + \overrightarrow{OM} \right)^2, \\ &= \frac{d^2}{4} + r^2 - 2 \underbrace{\overrightarrow{OG^+} \cdot \overrightarrow{OM}}_{\frac{d}{2} r \cos \theta}, \\ &= r^2 \left[1 - \frac{d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{G^+ M} &= (G^+ M^2)^{-1/2}, \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2} \right]^{-1/2}, \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\frac{1}{G^- M} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 V(r, \theta) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta - 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right), \\
 &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}, \\
 &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}, \\
 &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Il y a donc une décroissance en $\frac{1}{r^2}$, qui est beaucoup plus rapide que pour une charge qui est en $\frac{1}{r}$.

6.1.4 Champ E dans l'approximation dipolaire

En coordonnées sphériques, on a

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \propto \frac{1}{r^3}.$$

6.1.5 Allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans l'approximation dipolaire

Soit un déplacement $d\vec{l}$ le long d'une ligne de champ $d\vec{l} \parallel \vec{E}$ i.e. $d\vec{l} \wedge \vec{E} = \vec{0}$. On trouve alors $-dr E_\theta - r d\theta E_r = 0$, d'où $d\varphi = 0$ donc $\varphi = \text{constante}$ le long d'une ligne de champ. De plus, on a

$$-dr E_\theta - r d\theta E_r = 0,$$

d'où

$$dr \sin \theta = 2r \cos \theta d\theta.$$

On trouve alors $\frac{dr}{d\theta} = 2r \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, d'où $r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta$. Alors, les équipotentielles dans l'approximation dipolaire ont pour équation $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0$.

6.2 Actions mécaniques subies par un dipôle électrostatique plongé dans \vec{E}^{ext}

6.2.1 Champ extérieur uniforme

Résultante nulle

Comme un dipôle est composé de deux charges de signe opposées séparées par une distance constante, si l'on soumet un dipôle à un champ extérieur uniforme \vec{E}^{ext} , le dipôle subit une force

$$\vec{F} = -q\vec{E}^{\text{ext}} + q\vec{E}^{\text{ext}} = \vec{0},$$

il n'y a donc pas de mouvement de translation provoqué par le champ uniforme.

Couple de rappel

Cependant, selon l'orientation de ce champ uniforme, un couple de rappel apparaît et vaut

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{p} \times \vec{E}^{\text{ext}}}.$$

Il a tendance à provoquer un alignement du moment dipolaire \vec{p} sur \vec{E}^{ext} .

6.2.2 Champ extérieur non uniforme

Résultante

En supposant $\vec{E}^{\text{ext}} = E(x)\vec{u}_x$ avec $\frac{dE_x}{dx} > 0$ et $\vec{p} = p\vec{u}_x \parallel \vec{E}^{\text{ext}}$, on a

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E}^{\text{ext}}(x+d) - q\vec{E}^{\text{ext}}(x) \\ &= qd\frac{\partial \vec{E}^{\text{ext}}}{\partial x} = \left(p\vec{u}_x \cdot \frac{\partial \vec{u}_x}{\partial x}\right) \vec{E}^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

De manière générale, on a donc

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}^{\text{ext}}}.$$

Ainsi, il y a une translation vers les zones de plus fort champ.

Moment résultat

On admet que l'on a toujours

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}^{\text{ext}}.}$$

Il y a donc une tendance à l'alignement de \vec{p} sur \vec{E}^{ext} .

6.2.3 Énergie potentielle d'interaction avec un champ extérieur

Expression

Si les charges sont en A ($-q$) et B ($+q$), on a

$$\begin{aligned} E_p^{\text{ext}} &= qV^{\text{ext}}(B) - qV^{\text{ext}}(A) \\ &= q \int_B^A \vec{E}^{\text{ext}} \cdot d\vec{l} \\ &\approx q \vec{E}^{\text{ext}} \cdot \int_B^A d\vec{l} \\ &= q \vec{E}^{\text{ext}} \cdot \vec{BA} = -\vec{p} \cdot \vec{E}^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Interprétation

Si \vec{p} fait un angle θ avec le champ extérieur, alors l'énergie potentielle est $E_p^{\text{ext}} = -p \|\vec{E}^{\text{ext}}\| \cos(\theta)$, donc

- si \vec{p} et \vec{E}^{ext} sont alignés, E_p^{ext} est minimal, il y a un équilibre stable ;
- s'ils sont anti-parallèles, E_p^{ext} est maximal, et l'équilibre est instable.

Une fois que \vec{p} est aligné avec \vec{E}^{ext} , on a $\theta = 0$ et donc E_p^{ext} est minimal si $\|\vec{E}^{\text{ext}}(M)\|$ est maximal : il y a une translation de \vec{p} vers la zone où $\|\vec{E}^{\text{ext}}\|$ est maximal.

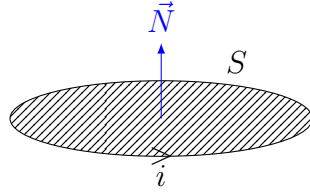


FIGURE 6.2 – Moment dipolaire magnétique d’une spire de courant plane.

6.3 Dipôle magnétique

6.3.1 Définition et ordre de grandeur

On considère une spire de courant plane présentée à la Figure 6.2. On définit le moment dipolaire magnétique, d’unité A m^2 par

$$\boxed{\vec{m} := iS\vec{N}.}$$

Pour une bobine plate avec 10000 spires, on a $m = niS \approx 1 \text{ A m}^2$.

On considère maintenant un électron autour dans un atome à la Figure 6.3. Par un raisonnement équivalent, on a $i = -e/T$ avec T la période de révolution de l’électron autour du noyau. Alors

$$\vec{m} = iS\vec{u}_z = -\frac{e}{T}\pi r^2\vec{u}_z.$$

Le moment cinétique de l’électron est

$$\vec{L}_O = r\vec{u}_r \wedge m\vec{v} = mrv\vec{u}_z,$$

d’où

$$\boxed{\vec{m} = \gamma\vec{L}_O,}$$

avec $\gamma = -e/(2m)$ le rapport gyromagnétique. À l’échelle atomique, on a $\|\vec{L}_O\| \approx \hbar \approx 10^{-34} \text{ J s}$. Alors $\|\vec{m}\| \sim 10^{-23} \text{ A m}^2$.

Au niveau de la terre, le moment magnétique est de l’ordre de 6.10^2 A m^2 (déduit des mesures de \vec{B}_{terre}).

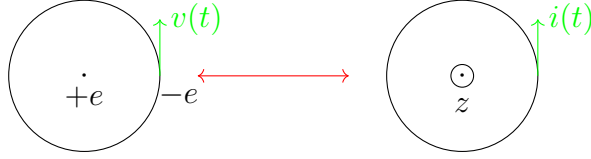


FIGURE 6.3 – Moment magnétique orbital d'un électron dans un atome.

6.3.2 Champ magnétique créé par un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire

Analyse des symétries

On fait l'hypothèse que l'on a une spire circulaire de rayon a , et on se place en coordonnées cylindriques, l'axe \vec{u}_z passant au centre de la spire, perpendiculairement à celle-ci. On note α l'angle entre l'altitude z du point projeté de M sur l'axe (Oz) et la spire. Alors il y a une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) , et tout plan contenant (Oz) est un plan d'antisymétrie, on en déduit donc que

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta) \\ B_\theta(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Champ dans l'approximation dipolaire

Donnée : sur l'axe (Oz) , on a $\vec{B}_{\text{axe}}(M) = \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3(\alpha) \vec{u}_z$. On note que $\sin(\alpha) = a/(a^2 + z^2)^{1/2}$, et dans l'hypothèse de l'approche dipolaire, c'est-à-dire $|z| \gg a$, alors

$$\vec{B}_{\text{axe}}(z) \approx \frac{\mu_0 i}{2a} \frac{a^3}{z^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 i a^2}{2z^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \vec{u}_z.$$

On admet que cette forme s'adapte autre part que sur l'axe : dans l'approximation dipolaire, on a

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par rapport à la formulation pour le champ électrostatique, il suffit de remplacer \vec{p} par \vec{m} , $1/\varepsilon_0$ par μ_0 et \vec{E} par \vec{B} .

Allure des lignes de champ

Dans l'approximation dipolaire, il y a les mêmes lignes de champ que \vec{E} . Mais près de la source, c'est très différent (voir le chapitre sur la magnéto-statique).

6.3.3 Actions mécaniques subies par un dipôle magnétique plongé dans B

Champ extérieur uniforme

On a

$$\vec{F}_{\text{lor}} = \oint i \vec{dl} \wedge \vec{B}^{\text{ext}} = i \left[\oint \vec{dl} \right] \wedge \vec{B}^{\text{ext}},$$

donc pour un champ magnétique uniforme, on a $\vec{F}_{\text{lor}} = \vec{0}$.

On peut aussi montrer que le couple de rappel est

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}},$$

il y a donc un alignement de \vec{m} sur \vec{B}^{ext} .

Champ non uniforme

On admet que l'on a

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F}_{\text{lor}} = (\vec{m} \cdot \text{grad}) \vec{B}^{\text{ext}}, \\ \vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}. \end{cases}}$$

Il y a donc un alignement avec le champ magnétique extérieur, et il y a une attraction vers les zones de plus fort champ.

Énergie potentielle d'interaction

On retrouve le même résultat formel

$$\boxed{E_p^{\text{ext}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}^{\text{ext}}},$$

et les mêmes discontinuités sur les équilibres stables et instables.

Chapitre 7

Les équations de Maxwell

On se place dans un régime quelconque. Les équations viennent de James Clark Maxwell (écossais, 1865), puis retravaillées par Heaviside et Hertz (1887).

Sommaire

7.1	Équations de Maxwell locales	118
7.2	Équations intégrales	118
7.2.1	Théorème de Gauss et Maxwell-Gauss	118
7.2.2	Flux de \vec{B} conservatif et Maxwell-Thompson	119
7.2.3	Théorème d'Ampère généralisé et Maxwell-Ampère	119
7.2.4	Loi de Faraday et Maxwell-Faraday	119
7.3	Cas des champs statiques	121
7.3.1	Électrostatique	121
7.3.2	Magnétostatique	122
7.4	Densité de courant de déplacement	122
7.4.1	Densité de courant de déplacement et conservation de la charge	122
7.4.2	ARQS magnétique	123
7.5	Équation de propagation du champ électroma- gnétique dans le vide	124
7.5.1	Équations dans le vide	124
7.5.2	Équations de propagation : équation de d'Alembert	124

7.1 Équations de Maxwell locales

Elles régissent le champ électromagnétique. Il y a d'abord les équations de structure :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 & \text{Maxwell-Thompson,} \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) & \text{Maxwell-Faraday.} \end{array}$$

Il y a ensuite le lien avec les sources :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss,} \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \text{Maxwell-Ampère.} \end{array}$$

En plus de l'expression de la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

on a condensé tout l'électromagnétisme. Il faut remarquer que :

- il y a un couplage spatio-temporel de \vec{E} et \vec{B} via Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère ;
- Maxwell-Gauss et Maxwell-Thompson sont toujours vraies ;
- il apparaît une constante c telle que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ (invariance par changement de référentiel galiléen), c'est le cadre naturel de l'électromagnétisme est relativiste ;
- les équations sont linéaires, on peut donc utiliser le théorème de superposition.

7.2 Équations intégrales

7.2.1 Théorème de Gauss et Maxwell-Gauss

On a $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)/\varepsilon_0$, équivalent à

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0}.$$

7.2.2 Flux de \vec{B} conservatif et Maxwell-Thompson

On a $\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$, équivalent à

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0.$$

7.2.3 Théorème d'Ampère généralisé et Maxwell-Ampère

On a $\vec{\text{rot}} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$, et en utilisant le théorème de Stokes,

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma + \frac{1}{c^2} \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot \vec{N} d\Sigma,$$

et finalement

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\Sigma}^{\text{int}}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\iint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma \right).$$

7.2.4 Loi de Faraday et Maxwell-Faraday

À nouveau, en utilisant le théorème de Stokes sur

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} &= - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\iint_{\Sigma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma \right), \end{aligned}$$

puis la loi de Faraday (1831) :

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi_m(t)}{dt}.$$

On voit donc qu'a priori, on n'a pas $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, et donc $\vec{E} \neq -\vec{\text{grad}} V$.

Lien avec la loi de Faraday d'électrocinétique

Soit un circuit fermé \mathcal{C} , de résistance totale R , avec un générateur de tension $e(t) = -\frac{d\varphi_m}{dt}(t) = Ri(t)$. On se donne la loi d'Ohm locale qui s'écrit $\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$ où σ est la conductivité du milieu en $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$. Alors sous l'hypothèse de l'ARQS magnétique, on a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = i(t) \frac{l}{\sigma S} = Ri(t).$$

C'est l'expression de la force électromagnétique induite dans le circuit, et on a

$$e(t) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi_m}{dt}(t).$$

Cette expression ne vaut que pour le cas de Neumann (circuit fixe dans un champ magnétique \vec{B} variable). S'il y a une auto-inductance et une induction mutuelle, c'est par exemple le cas de Lorentz (circuit mobile dans un champ \vec{B} stationnaire), alors $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ mais $e(t) = -\frac{d\varphi_m}{dt}(t) \neq 0$ due au mouvement du circuit. Par exemple, si l'on prend deux bobines en influence mutuelle comme à la Figure 7.1, alors on a

$$\begin{cases} e_1(t) = -\frac{d\varphi_1}{dt}(t), \\ e_2(t) = -\frac{d\varphi_2}{dt}(t), \\ \varphi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t), \\ \varphi_2(t) = L_2 i_2(t) + M i_1(t). \end{cases}$$

D'après la loi des mailles, on obtient

$$\begin{cases} v_1(t) = r_1 u_1(t) - e_1(t) = r_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t), \\ v_2(t) = r_2 u_2(t) - e_2(t) = r_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t). \end{cases}$$

— Application 1 : on a un transformateur de tension. On néglige la résistance des fils, la secondaire est à vide ($i_2 = 0$) et on se place en régime sinusoïdal forcé. Alors

$$\underline{v}_1 = jL_1\omega i_1, \quad \underline{v}_2 = jM\omega i_1,$$

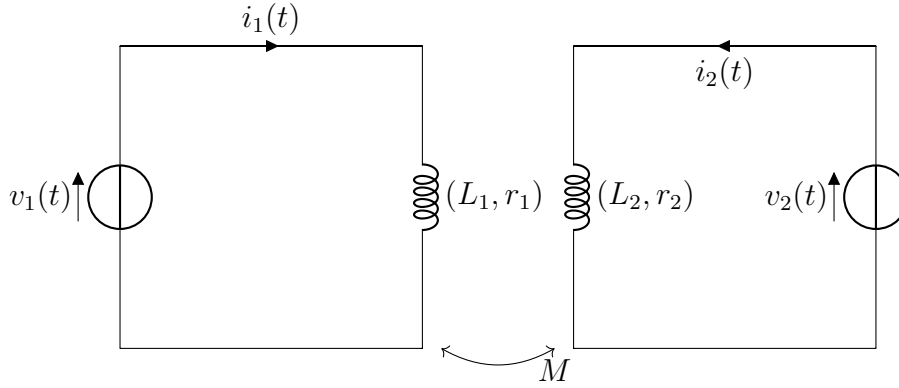


FIGURE 7.1 – Deux bobines en influence mutuelle.

d'où

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M}{L_1} \sim \frac{N_2}{N_1},$$

où N_i est le nombre de spires de la bobine i , car $L_1 \propto N_1^2$ et $M \propto N_1 N_2$. Ainsi, si $N_1 > N_2$, on a un transformateur abaisseur de tension, et sinon un transformateur élévateur de tension.

- Application 2 : on a un transformateur de courant (secondaire en courant continu). Alors $v_2 = 0 = jL_2\omega i_2 + jM\omega i_1$ d'où

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{M}{L_2} \sim -\frac{N_1}{N_2}.$$

7.3 Cas des champs statiques

7.3.1 Électrostatique

En régime permanent, on a $\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$ et $\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$ pour tout \vec{r} , on $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} \text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}. \end{cases}}$$

Ainsi \vec{E} est à circulation conservative.

7.3.2 Magnétostatique

En régime permanent, on a aussi $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 0$ et $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$, d'où

$$\boxed{\begin{cases} \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0, \\ \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \end{cases}}$$

7.4 Densité de courant de déplacement. ARQS magnétique

7.4.1 Densité de courant de déplacement et conservation de la charge

L'idée est de rajouter un terme supplémentaire, que l'on note pour l'instant $\vec{?}$, à l'équation de Maxwell-Ampère pour la rendre compatible avec l'équation de la conservation de la charge $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. On écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 [\vec{j} + \vec{?}],$$

puis on prend la divergence :

$$0 = \mu_0 [\text{div } \vec{j} + \text{div } \vec{?}],$$

et en utilisant $\rho = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E}$, on a

$$\text{div} \left(\vec{?} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Il se trouve que la bonne solution est $\vec{?} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, d'où

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.}$$

Ainsi, Maxwell-Ampère et Maxwell-Gauss contiennent la conservation de la charge.

7.4.2 ARQS magnétique

Définition

C'est de dire que c'est « lentement variable ». Le temps caractéristique est très grand devant le temps de propagation : $\tau \gg \frac{L}{c}$. Ainsi la propagation est négligeable. Dans le cas du magnétisme, c'est de dire que les effets des courants sont très très grands devant les effets des charges (neutralité des conducteurs), et donc

$$\boxed{j \gg \rho c.}$$

Dans l'ARQS magnétique, l'équation de Maxwell-Ampère se simplifie car

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\|} \sim \frac{\tau \tilde{j}}{\varepsilon_0 \tilde{E}} \sim \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \times \frac{\tau}{L/c} \gg 1.$$

Ainsi, dans l'ARQS magnétique, on a

$$\boxed{\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t).}$$

Pour une fréquence de 50Hz, on a l'ARQS si $L \ll c\tau = c/f = 6000\text{km}$. Pour une fréquence de 10^{15}Hz (optique), c'est le cas seulement si $L \ll 0.3\mu\text{m}$, donc la propagation est dominante.

Champ magnétique dans l'ARQS magnétique et induction

On a les mêmes lois qu'en magnétostatique stationnaire, mais à chaque temps. Ainsi, dans l'ARQS magnétique, \vec{B} est le même qu'en stationnaire (mais dépend quand même du temps). Par exemple, pour un solénoïde infini parcouru par $i(t)$, on a $\vec{B}_{\text{int}}(t) = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$ et $\vec{B}_{\text{ext}}(t) = \vec{0}$.

Dans le cas de l'ARQS magnétique, le plus souvent, on a $\rho \approx 0$ donc $\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ et $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: c'est la loi de Faraday (induction).

Loi des nœuds dans l'ARQS magnétique

On a

$$\text{div } [\vec{j}(\vec{r}, t)] = \frac{1}{\mu_0} \text{div } \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0.$$

Dans l'ARQS magnétique, \vec{j} est à flux conservatif. Ainsi $i(t)$ est le même en tout point d'un fil, et la loi des nœuds est vraie à chaque instant.

7.5 Équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide

On a $\rho(\vec{r}, t) = 0$ et $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{0}$.

7.5.1 Équations dans le vide

Pour un régime quelconque, on a

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t), \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{r}, t). \end{cases}$$

7.5.2 Équations de propagation : équation de d'Alembert

On se donne la formule : $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{W})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{W}) - \Delta \vec{W}$. Alors

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E},$$

d'où

$$\boxed{\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

On fait la même chose pour le champ magnétique et on trouve

$$\boxed{\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

Nécessité du couplage spatio-temporel du champ électromagnétique

Dans l'ARQS magnétique, on a $\operatorname{rot} \vec{B} \approx \vec{0}$, donc $\Delta \vec{E} = \vec{0}$ et $\Delta \vec{B} = \vec{0}$: il n'y a aucune propagation.

Chapitre 8

Énergie électromagnétique

Sommaire

8.1	Interaction classique champ-matière	126
8.1.1	Densité volumique de force électromagnétique . . .	126
8.1.2	Puissance volumique	126
8.1.3	Cas des conducteurs ohmiques	127
8.2	Équation locale de Poynting	128
8.2.1	Équation de Poynting	128
8.2.2	Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting	129
8.2.3	Ordres de grandeurs	130
8.2.4	Propagation unidimensionnelle dans un milieu ab- sorbant. Loi de Beer-Lambert	130
8.3	Bilan	intégral
	d'énergie électromagnétique	131
8.3.1	Bilan intégral sur un volume de contrôle	131
8.3.2	Exemple : conducteur ohmique en régime station- naire	132
8.4	Cas de l'électrostatique	133
8.4.1	Énergie du champ électrostatique	133
8.4.2	Définition énergétique de la capacité d'un condensateur	134
8.5	Cas de la magnétostatique	134
8.5.1	Énergie magnétique	134

8.1 Interaction classique champ-matière

8.1.1 Densité volumique de force électromagnétique

Au niveau microscopique, on a la force de Lorentz $\vec{F}_L = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Au niveau mésoscopique, la force moyenne $d\vec{F}$ subie par les charges dans un élément de volume $d\tau$ est alors

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sum_{\substack{\neq \text{types} \\ \text{de porteurs "k"}}} q_k (\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B}) n_k d\tau \\ &= \left(\left(\sum_{\text{"k"}} n_k q_k \right) \vec{E} + \left(\sum_{\text{"k"}} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle \right) \wedge \vec{B} \right) d\tau \\ &= (\rho(\vec{r}, t) \vec{E} + \vec{j}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}) d\tau \\ &= \vec{f}_{\text{vol}} d\tau, \end{aligned}$$

où

$$\boxed{\vec{f}_{\text{vol}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.}$$

8.1.2 Puissance volumique fournie par le champ aux charges

Au niveau microscopique, on a

$$P = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Au niveau microscopique, en notant dP_k la puissance reçue par les charges "k" dans $d\tau$:

$$dP_k = q_k \vec{E} \cdot (n_k d\tau) \langle \vec{v}_k \rangle.$$

Ainsi, la puissance totale reçue par les charges dans $d\tau$:

$$dP = \sum_{\neq \text{"k"}} dP_k = \left(\sum_{\neq \text{"k"}} n_k q_k \langle v_k \rangle \right) \cdot \vec{E} d\tau = (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau.$$

La puissance volumique reçue par les charges de la part du champ électromagnétique est donc

$$P_{\text{vol}}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t).$$

8.1.3 Cas des conducteurs ohmiques

Loi d'Ohm locale

C'est une loi phénoménologique (pas comme les équations de Maxwell). L'idée est que si $\vec{E} = \vec{0}$, alors $\vec{j} = \vec{0}$ et si $\vec{E} \neq \vec{0}$ alors $\vec{j} \neq \vec{0}$. De plus, si $\|\vec{E}\|$ n'est « pas trop grand », et que $\|\vec{E}\|$ ne varie pas trop vite, alors $\vec{j} \propto \vec{E}$. On se donne alors la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

où σ est la conductivité électrique, en $\Omega^{-1}\text{m}$, ou bien

$$\vec{E} = \rho \vec{j},$$

avec $\rho = \sigma^{-1}$ est la résistivité électrique.

Ordre de grandeurs :

- Cuivre : $\sigma \sim 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$;
- Silice (à 300K) : $\sigma \sim 10^{-4} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$;
- eau de mer : $\sigma \sim 1 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$.

Loi de Joule locale

La puissance volumique s'écrit

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}.$$

On a $P_{\text{vol}} > 0$. Cette puissance est de nature mécanique (et non thermique), mais provoque un échauffement du réseau, par collisions des électrons de conduction sur les défauts du réseau cristallin. C'est l'effet Joule.

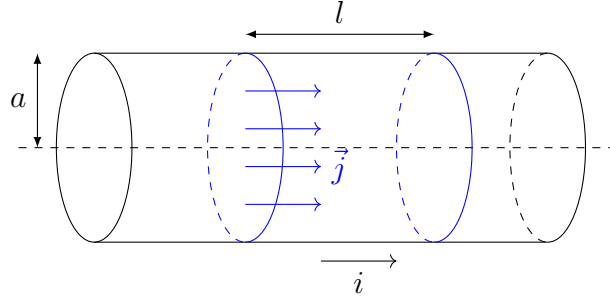


FIGURE 8.1 – Puissance dissipée dans un conducteur cylindrique.

Puissance dissipée dans un conducteur ohmique cylindrique

On se réfère à la Figure 8.1. La puissance volumique s'écrit

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{i^2}{\sigma(\pi a)^2} = \text{constante.}$$

La puissance par effet Joule est donc

$$P_{\text{Joule}} = P_{\text{vol}} \times \pi a^2 l = \frac{i^2 l}{\sigma(\pi a)^2} = Ri^2,$$

avec

$$R = \frac{l}{\sigma \pi a^2} = \frac{l}{\sigma S}.$$

8.2 Équation locale de Poynting : conservation de l'énergie électromagnétique

On se place dans un cas général (pas nécessairement un conducteur ohmique).

8.2.1 Équation de Poynting

L'idée est d'avoir une équation locale traduisant les échanges d'énergie champ/matière. On part de

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \left(\vec{\text{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

On se donne la formule suivante :

$$\operatorname{div}(\vec{C} \wedge \vec{D}) = \vec{D} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{C} - \vec{C} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{D}.$$

On obtient alors

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \left(\vec{\operatorname{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

puis

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}.}$$

8.2.2 Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting

On a le postulat suivant :

Là où est le champ, là est l'énergie.

Ainsi, l'énergie électromagnétique est localisée, non dans les sources $[\rho, \vec{j}]$ ou dans la matière, mais dans le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$.

On définit la densité volumique d'énergie électromagnétique par

$$\boxed{u_{\text{em}}(\vec{r}, t) := \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r}, t)}{2} + \frac{B^2(\vec{r}, t)}{2\mu_0}.}$$

Son unité est le J m^{-3} .

On définit le vecteur de Poynting, qui correspond au vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, par

$$\boxed{\vec{\Pi}(\vec{r}, t) := \vec{E}(\vec{r}, t) \wedge \frac{\vec{B}(\vec{r}, t)}{\mu_0}.}$$

Son unité est le W m^{-2} . Alors on a l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique suivante :

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E} = -P_{\text{vol}}.}$$

Du point de vue du champ électromagnétique, si $P_{\text{vol}} > 0$ (conducteur ohmique) alors c'est un terme « puits », et si $P_{\text{vol}} < 0$ (milieu amplificateur comme dans un LASER), alors c'est un terme « source ».

La puissance électromagnétique sortant d'une surface orientée S est donnée par

$$P_S^{\text{em}} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS,$$

8.2.3 Ordres de grandeurs

LASER Helium-Néon

$$\langle P \rangle \approx 1 \text{ mW} \text{ et } S \approx 1 \text{ mm}, \text{ donc } \langle \Pi \rangle \approx 1 \text{ kW m}^{-2}.$$

Soleil sur la Terre

$$\varphi_{\text{sol}} \sim 1 \text{ kW m}^{-2} = \langle \Pi \rangle.$$

Téléphone portable

En mode « passif », on a $\langle \Pi \rangle \sim 10 \text{ mW m}^{-2}$. En mode « actif », on a $\langle \Pi \rangle \sim 100 \text{ mW m}^{-2}$.

8.2.4 Propagation unidimensionnelle dans un milieu absorbant. Loi de Beer-Lambert

On se place dans le cas de la Figure 8.2. On fait l'hypothèse que l'on a

$$\langle P_{\text{vol}}(x) \rangle = \alpha \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle(x),$$

avec $\alpha > 0$. L'équation de Poynting donne alors

$$\left\langle \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial \langle \Pi \rangle}{\partial x} = -\langle P_{\text{vol}} \rangle.$$

Remarquons alors que pour une fonction f T -périodique, on a

$$\left\langle \frac{\partial f^2}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int \frac{\partial f^2}{\partial t} dt = \frac{1}{T} (f^2(t_0 + T) - f^2(t_0)) = 0.$$

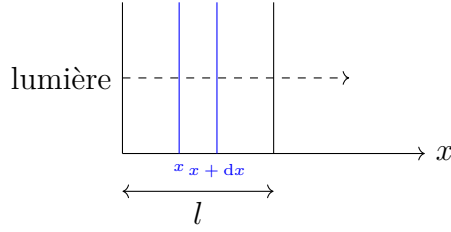


FIGURE 8.2 – Propagation unidimensionnelle dans un milieu absorbant.

Ainsi, on obtient

$$\frac{d\langle\Pi\rangle}{dx} = -\alpha\langle\Pi\rangle,$$

car $\left\langle\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}\right\rangle = 0$ (\vec{E} et \vec{B} sont périodiques). Donc $\langle\Pi\rangle(x) = \langle\Pi\rangle_0 e^{-\alpha x}$. On a alors

$$\langle\Pi\rangle_{\text{out}} = \langle\Pi\rangle_{\text{in}} e^{-\alpha l},$$

et donc

$$\ln\left(\frac{\langle\Pi\rangle_{\text{in}}}{\langle\Pi\rangle_{\text{out}}}\right) = \alpha l.$$

Le terme de gauche est appelée l'absorbance A , et α dépend de la longueur d'onde λ de la lumière émise et du type de la solution, et on obtient la loi de Beer-Lambert :

$$A(\lambda, \text{sol}, l) = \alpha(\lambda, \text{sol})l.$$

8.3 Bilan intégral d'énergie électromagnétique

8.3.1 Bilan intégral sur un volume de contrôle

On note le volume de contrôle V . On intègre l'équation de Poynting sur V , on note

$$U_{\text{em}}(t) = \iiint_V u_{\text{em}}(\vec{r}, t) d\tau$$

l'énergie totale du champ régnant dans V ,

$$P_{S, \text{rayon}}^{\text{ext}}(t) = \iiint_V \text{div } \vec{\Pi} d\tau,$$

et

$$P_{\text{champ} \rightarrow \text{matiere}}(t) = \iiint_V P_{\text{vol}}(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Alors le bilan intégral d'énergie électromagnétique est

$$\boxed{\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -P_{S, \text{rayon}}^{\text{ext}} - P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}}.}$$

En particulier, si V est vide, on a $P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} = 0$ d'où

$$\boxed{\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -P_{S, \text{ray}}^{\text{ext}}.}$$

Si $\vec{\Pi} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} > 0$, on a $P_{S, \text{ray}}^{\text{ext}} > 0$ et donc U_{em} décroît avec le temps.

Dans un autre cas, si $P_{S, \text{ray}}^{\text{ext}} = 0$ (comme dans une cavité électromagnétique, ou un four micro-ondes), alors

$$\boxed{\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}}.}$$

Usuellement, on va avoir $P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} > 0$ et donc U_{em} décroît avec le temps. Cependant, dans un LASER, c'est l'inverse.

8.3.2 Exemple : conducteur ohmique en régime stationnaire

On se place dans le cas d'un conducteur ohmique cylindrique comme à la Figure 8.1. L'expression du champ magnétique est

$$\begin{cases} \vec{B}(r \geq a) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta, \\ \vec{B}(r \leq a) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \left(\frac{r}{a}\right) \vec{u}_\theta. \end{cases}$$

La loi d'ohm s'écrit

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{i}{\sigma \pi a^2} \vec{u}_z$$

dans le conducteur (pour $r \leq a$). En régime permanent, on a $\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = 0$ car les champs sont statiques. On a

$$\vec{\Pi}(r \leq a) = \vec{E}(r \leq a) \wedge \frac{\vec{B}(r \leq a)}{\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{\mu_0 \sigma 2\pi^2 a^3} \left(\frac{r}{a}\right) (-\vec{u}_r).$$

On a aussi

$$\vec{\Pi}(r = a) = -\frac{i^2}{\sigma 2\pi^2 a^3} \vec{u}_r.$$

Le vecteur de Poynting est donc radial rentrant, et l'énergie pénètre latéralement dans le conducteur. On a donc

$$P_{S,\text{ray}}^{\text{ext}} = \iint_S \vec{\Pi}(r = a) \cdot \vec{u}_r dS = -\frac{i^2 l}{\sigma \pi a^2} = -Ri^2 < 0.$$

Enfin,

$$P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \sigma E^2 \times \pi a^2 l = \sigma \left(\frac{i}{\sigma \pi a^2} \right)^2 \pi a^2 l,$$

donc

$$P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} = \frac{l}{\sigma \pi a^2} i^2 = Ri^2.$$

On a alors l'équilibre suivant :

$$P_{S,\text{ray}}^{\text{ext}} + P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} = 0.$$

Ainsi, toute la puissance apportée par le rayonnement est transférée à la matière.

8.4 Cas de l'électrostatique

On a $\vec{B} = \vec{0}$ et donc $\vec{\Pi} = \vec{0}$.

8.4.1 Énergie du champ électrostatique

On a

$$u_{\text{em}}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r}, t)}{2} + 0.$$

L'énergie du champ créé par la distribution de charges créant le champ électrostatique est alors

$$U_{\text{es}} = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r})}{2} d\tau.$$

8.4.2 Définition énergétique de la capacité d'un condensateur

On considère que \vec{E} est localisé entre les armatures. Par exemple, dans un condensateur plan sans effets de bords, on a $\vec{E} = -U/e\vec{u}_z$ avec e la distance entre les deux armatures, disposées perpendiculairement par rapport à l'axe \vec{u}_z et U est la tension appliquée entre les deux armatures. Le champ est nul en dehors des armatures. Alors

$$\begin{aligned} U_{\text{es}} &= \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau \\ &= \iiint_{\substack{\text{espaces} \\ \text{inter-armatures}}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{U^2}{e^2} \times (eS) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{e} U^2 := \frac{1}{2} CU^2. \end{aligned}$$

La définition générale est donnée par

$$\boxed{\frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau.}$$

8.5 Cas de la magnétostatique et de l'ARQS magnétique

8.5.1 Énergie magnétique

On se place dans le cas de la magnétostatique, c'est-à-dire $\vec{E} = \vec{0}$, ou bien dans l'ARQS magnétique où $\vec{E} \neq \vec{0}$ régi par $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ mais $\frac{B^2}{2\mu_0} \gg \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$. Dans les deux cas,

$$\boxed{u_{\text{em}}(\vec{r}, t) = \frac{B^2(\vec{r}, t)}{2\mu_0}.$$

L'énergie magnétique créée par la distribution de courants stationnaires (ou quasi-stationnaires) est

$$\boxed{U_{\text{mag}} = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.}$$

8.5.2 Définition énergétique de l'inductance d'un circuit

On se place dans l'exemple d'un solénoïde de longueur l parcouru par un courant i stationnaire avec n spires par mètre, comme dans la Figure 5.4. Alors $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n i \vec{u}_z$, et le champ est nul à l'extérieur du solénoïde. Alors

$$U_{\text{mag}} = \frac{\mu_0 n^2 i^2}{2} \times \pi a^2 l,$$

et en notant $N = nl$, on a

$$U_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} i^2 := \frac{1}{2} L i^2.$$

Ainsi, on peut définir l'inductance L d'un circuit par

$$\frac{1}{2} L i^2 = \iiint_{\text{espace entier}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.$$

Chapitre 9

Ondes électromagnétiques dans le vide. Propagation et rayonnement

On a vu que, du point de vue du vide, sans charges ni courants, le champ électromagnétique est régi par

$$\begin{cases} \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}, \\ \Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}, \end{cases}$$

où $c := 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$.

L'équation de d'Alembert en trois dimensions est

- (i) linéaire ;
- (ii) invariante par renversement du temps car seule une dérivée seconde du temps intervient ;
- (iii) l'espace et le temps sont couplés via la constante c .

Sommaire

9.1	Solutions de l'équation de d'Alembert en OPP	138
9.1.1	Notion d'une plane. Équation de d'Alembert unidimensionnelle	138

9.1.2	Solution générale de d'Alembert en dimension un en ondes progressives	138
9.1.3	Solution générale de l'équation de d'Alembert en trois dimensions en OPP	139
9.1.4	La solution élémentaire en OPP Harmonique . . .	139

9.1 Solutions de l'équation de d'Alembert en OPP

9.1.1 Notion d'une onde plane. Équation de d'Alembert unidimensionnelle

Soit $f(\vec{r}, t)$ solution de $\Delta f(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$. f représente une composante de \vec{E} ou de \vec{B} .

On dit que f est une onde plane si

- (i) f est solution de $\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$;
- (ii) f est invariante par translation parallèlement au plan de direction fixé : $f(\vec{r}, t) = f(X, t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r}, t)$. Voir la Figure 9.1.

Si $f(\vec{r}, t) = f(X, t)$, on a $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$, donc $f(X, t)$ vérifie aussi l'équation de d'Alembert en dimension un.

9.1.2 Solution générale de d'Alembert en dimension un en ondes progressives

Naturellement, il y a une dépendance de f en $X \pm ct$. On remarque rapidement que $F(X - ct)$ et $G(X + ct)$ sont solutions. Donc toute fonction de la forme $f(X, t) = F(X - ct) + G(X + ct)$ est solution de l'équation de d'Alembert en dimension un. On admet que c'est la solution la plus générale.

$F(X - ct)$ représente une onde progressive vers les X croissants à vitesse c sans déformation. De même, $G(X + ct)$ représente une onde progressive vers les X décroissants à la vitesse c sans déformation.

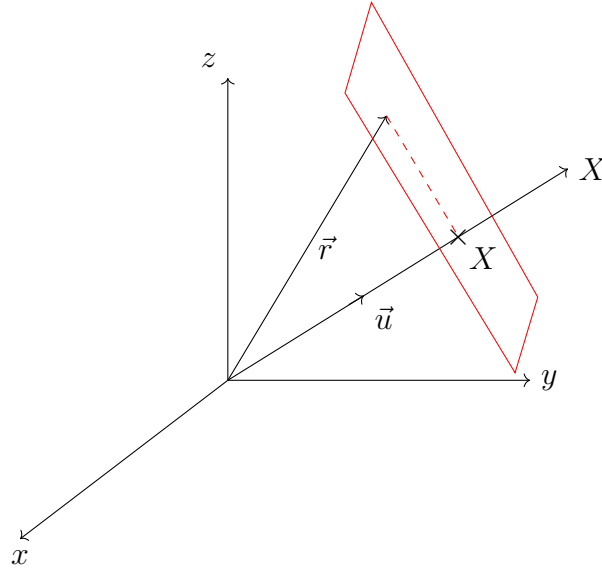


FIGURE 9.1 – Invariance par translation parallèlement à un plan de direction fixé.

9.1.3 Solution générale de l'équation de d'Alembert en trois dimensions en OPP

En trois dimensions, toute solution de l'équation des ondes est une superposition d'OPP se propageant selon toutes les directions possibles :

$$f(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{u} \neq 0} f_{\vec{u}}(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct).$$

Notamment,

$$E(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{u} \neq 0} E_{\vec{u}}(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct).$$

9.1.4 La solution élémentaire en OPP Harmonique

Par linéarité et Fourier,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{u}} \sum_{\omega} \vec{E}_{\vec{u}, \omega} e^{i\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})}.$$

La solution élémentaire est

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

avec $\vec{k} = k \vec{u} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ et $\omega = 2\pi/T$ donc $k = 2\pi/(cT) = 2\pi/\lambda$. C'est une OPPH. On a choisit la convention $e^{i\omega t}$, mais les solution en $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ sont aussi bonnes (partie réelle égale), c'est une convention $e^{-i\omega t}$.

Caractère non physique de l'OPPH.

- onde éternelle : $\Delta f \times \tau$ devrait être d'ordre 1 mais $\Delta f = 0$ donc $\tau = +\infty$: absurde expérimentalement ;
- spatialement : $\cos(kx) = \cos(2\pi x/\lambda) = \cos(2\pi \sigma x)$ et alors $\Delta \sigma = 0$ et $\Delta \sigma \times L$ devrait être d'ordre 1 donc $L = +\infty$. Le support spatial du signal est infini.
- Onde d'amplitude constante dans tout l'espace. L'énergie du champ électromagnétique de cette onde est donc infini.

Ainsi, l'OPPH n'existe pas mais très utile car cela simplifie les calculs, et elles permettent de reconstituer une solution quelconque par superposition d'OPPH.

Troisième partie

Thermodynamique

Chapitre 10

Systèmes ouverts en écoulement permanent

Sommaire

10.1 Bilans énergétique et entropique	144
10.1.1 Principes de la thermodynamique	144
10.1.2 Bilan de masse pour un fluide en écoulement per- manent	146
10.1.3 Bilan énergétique en régime permanent	148
10.1.4 Bilan entropique en régime permanent	150
10.1.5 Exemples	151
10.2 Diagramme d'état et machines réelles	153
10.2.1 Lecture du diagramme ($\log P, h$) d'un fluide pur .	153
10.2.2 Exemple : cycle moteur à vapeur d'une centrale électrique	156
10.2.3 Réfrigérateur à compresseur	158

10.1 Bilans énergétique et entropique sur un système ouvert en écoulement permanent

10.1.1 Formulation infinitésimale des deux principes de la thermodynamique

Premier principe ou de « conservation » (de l'énergie)

En L1. Pour tout système fermé σ , il existe une fonction U , dite « énergie interne », telle que

1. U est additive (extensive). Cela implique des interactions de deux systèmes à très courte portée.
2. Si Σ subit une évolution de $i \rightarrow f$, on a

$$\Delta U + \Delta E_c^{\text{macro}} = W^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}},$$

ou bien

$$W^{\text{ext}} = W_{\text{cons}}^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}}$$

avec $W_{\text{cons}}^{\text{ext}} = -\Delta E_p^{\text{ext}}$, d'où

$$\Delta E_{\text{tot}} = W_{nc}^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}},$$

où $E_{\text{tot}} = U + E_c^{\text{macro}} + E_p^{\text{ext}}$.

3. Si Σ est à l'équilibre thermodynamique, U est une fonction d'état, c'est-à-dire qu'elle est fonction d'un petit nombre de paramètres du système.

Remarque 10.1. Le plus souvent, $\Delta E_c^{\text{macro}}$ est négligeable d'où

$$\Delta U = W^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}}.$$

Remarque 10.2. Si on considère une transformation monobare sans autre travail que celui des forces de pression, on a $P^{\text{ext}} = \text{constante}$, d'où $P_f = P_i = P^{\text{ext}}$ et

$$\delta W^{\text{ext}} = -P^{\text{ext}} dV.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} W^{\text{ext}} = W &= - \int_i^f P^{\text{ext}} dV, \\ &= -P^{\text{ext}} \Delta V = -(P_f V_f - P_i V_i). \end{aligned}$$

On a donc

$$\Delta U = U_f - U_i = -(P_f V_f - P_i V_i) + Q^{\text{ext}}.$$

Donc si $H = U + PV$, on a

$$\boxed{\Delta H = Q^{\text{ext}}}.$$

Exemple 10.1. Pour un gaz avec $N \sim 10^{23}$ particules, a priori U est une fonction de $6N \times$ variables (positions et vitesses). À l'équilibre, U est une fonction de la température et du volume uniquement (par exemple).

En L2. On considère deux états infiniment proches :

$$\boxed{dU + dE_c^{\text{macro}} = \delta W^{\text{ext}} + \delta Q^{\text{ext}}}.$$

Le cas fréquent est $dU = \delta W^{\text{ext}} + \delta Q^{\text{ext}}$.

Deuxième principe « d'évolution »

En L1. Pour tout système fermé Σ , il existe une fonction S « entropie » telle que

1. S est additive (extensive)
2. Si Σ subit une évolution de $i \rightarrow f$, alors

$$\boxed{\Delta S = S_{\text{créée}} + S_{\text{échangée}},}$$

avec

$$S_{\text{échangée}} = \sum_i \frac{Q_i^{\text{ext}}}{T_i^{\text{ext}}}, \quad S_{\text{créée}} \geq 0.$$

T_i^{ext} représente l'interaction avec un thermostat. Le signe de l'entropie créée implique une évolution du système.

3. À l'équilibre thermodynamique, S est une fonction d'état.

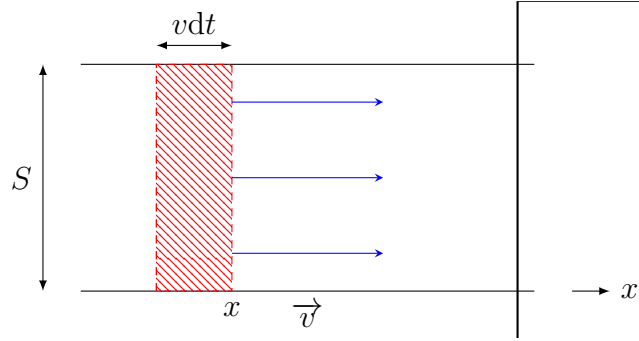


FIGURE 10.1 – Débit de masse dans un fluide en écoulement permanent.

Si le système Σ est isolé (évolution adiabatique), on a

$$S_{\text{échangée}} = 0, \quad \Delta S = S_{\text{créée}} \geq 0.$$

Si l'évolution est réversible, on a $S_{\text{créée}} = 0$, d'où

$$\Delta S = S_{\text{échangée}}.$$

En L2. On considère une transformation infinitésimale, d'où

$$dS = \delta S_{\text{échangée}} + \delta S_{\text{créée}}, \quad \delta S_{\text{créée}} \geq 0, \quad \delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q^{\text{ext}}}{T_{\text{ext}}}.$$

Une conséquence directe est

$$S_{\text{échangée}} = \int_i^f \frac{\delta Q^{\text{ext}}}{T_{\text{ext}}}.$$

10.1.2 Bilan de masse pour un fluide en écoulement permanent

Débit de masse (1D)

On se réfère à la Figure 10.1. Le fluide est caractérisé par une masse volumique μ supposée uniforme et constante.

Une quantité de masse δm du fluide traverse une section S pendant une période de temps dt . Ainsi,

$$\delta m = (S \times vdt) \times \mu = \mu v S dt.$$

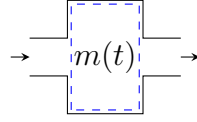


FIGURE 10.2 – Bilan de masse en régime permanent, une entrée et une sortie.

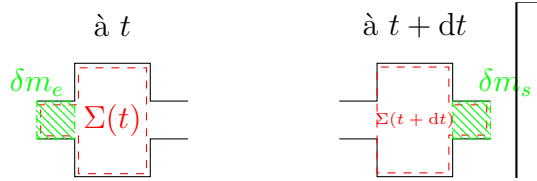


FIGURE 10.3 – Bilan de masse en régime permanent, une entrée et une sortie, système fermé.

On pose alors

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} = \mu v S.$$

C'est la quantité de masse traversant une section S par unité de temps. Notons que $[\mu] = \text{kg m}^{-3}$, $[v] = \text{m s}^{-1}$ et $[S] = \text{m}^2$.

Bilan de masse en régime permanent

Une entrée, une sortie. On est en écoulement permanent et on considère un système ouvert $\Sigma(t)$ et V est un volume de contrôle (fixe), voir la Figure 10.2.

Il faut définir un système fermé Σ^* (donc de masse constante m^*). On considère donc la Figure 10.3.

Σ^* est fermé, on a $m^*(t) = m^*(t + dt)$ d'où

$$m(t) + \delta m_e = m(t + dt) + \delta m_s = m(t) + D_m^e dt = m(t + dt) + D_m^s dt.$$

En régime permanent, on a $m(t + dt) = m(t)$, donc

$$D_m^e = D_m^s.$$

Plusieurs entrées, plusieurs sorties. On considère le système présenté à la Figure 10.4.

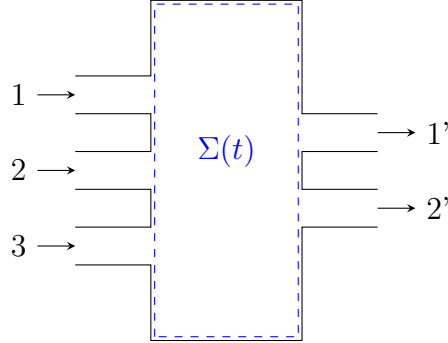


FIGURE 10.4 – Bilan de masse en régime permanent, plusieurs entrées et plusieurs sorties.

En régime permanent le même raisonnement amène à

$$\sum_i D_{m_i}^e = \sum_j D_{m_j}^s.$$

10.1.3 Bilan énergétique en régime permanent

On considère le système présenté à la Figure 10.5. Les entrées sont u_e, v_e et P_e . Les sorties sont u_s, v_s, P_s . Comme précédemment, on note $\Sigma^*(t)$ le système fermé considéré au temps t , et $\Sigma^*(t + dt)$ le système fermé considéré au temps $t + dt$. Les flèches autour du système indique les forces de pression.

Bilan énergétique

On définit $E := U + E_c^{\text{macro}} + E_p^{\text{pes}}$. Σ^* étant fermé, on a

$$\begin{aligned} E^*(t) &= E(t) + \delta E_e = E(t) + \delta m_e \left[u_e + \frac{v_e^2}{2} + g z_e \right], \\ &= E^*(t + dt), \\ &= E(t + dt) + \delta E_s = E(t + dt) + \delta m_s \left[u_s + \frac{v_s^2}{2} + g z_s \right]. \end{aligned}$$

En régime permanent, on a $E(t + dt) = E(t)$ et $\delta m_e = \delta m_s = D_m dt$, d'où

$$\frac{dE^*}{dt} = D_m \left[\left(u_s + \frac{v_s^2}{2} + g z_s \right) - \left(u_e + \frac{v_e^2}{2} + g z_e \right) \right].$$

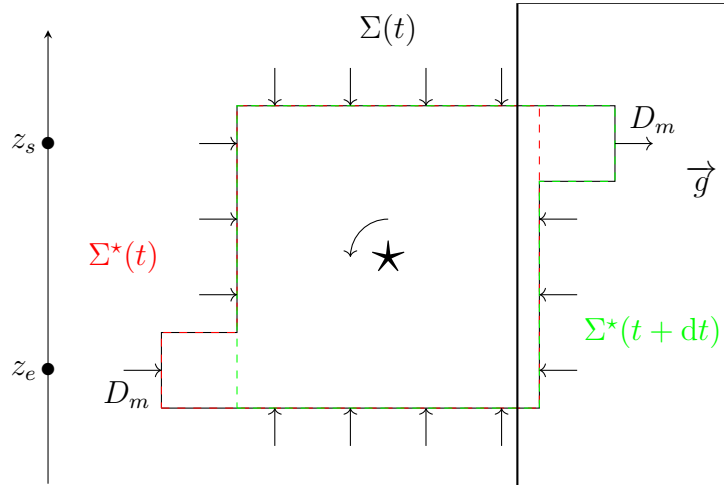


FIGURE 10.5 – Bilan d'énergie en régime permanent.

Premier principe

On a

$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{\delta W_{nc}^{ext}}{dt} + \frac{\delta Q^{ext}}{dt} = P_{méca,nc}^{ext} + P_{th}^{ext}.$$

Notamment,

$$P_{méca,nc}^{ext} = P_{press}^{ext} + P_{indiquées},$$

où le deuxième terme vient des échanges avec les parties mobiles. Comme $D_m = \mu SV$, on a

$$\begin{aligned} P_{press}^{ext} &= P_e S_e \vec{u}_x \cdot v_e \vec{u}_x + (-P_s S_s \vec{u}_x) \cdot v_s \vec{u}_x, \\ &= P_e S_e V_e - P_s S_s V_s = D_m \left[\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s} \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$D_m \left[\left(u_s + \frac{v_s^2}{2} + g z_s + \frac{P_s}{\mu_s} \right) - \left(u_e + \frac{v_e^2}{2} + g z_e + \frac{P_e}{\mu_e} \right) \right] = P_i + P_{th}^{ext}.$$

En notant $H = U + PV$, et $h = u + P v_m$ où $v_m = \frac{1}{\mu}$, on a

$$D_m \left[\left(h_s + \frac{v_s^2}{2} + g z_s \right) - \left(h_e + \frac{v_e^2}{2} + g z_e \right) \right] = P_i + P_{th}^{ext}.$$

En formulation intensive, on note le travail indiqué massique

$$\frac{P_i}{D_m} := \omega_i,$$

d'unité W s kg^{-1} . On note le transfert thermique massique

$$\frac{P_{\text{th}}}{D_m} := q.$$

Alors

$$\left(h_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s \right) - \left[h_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \right] = \omega_i + q.$$

10.1.4 Bilan entropique en régime permanent

Bilan entropique

On considère toujours le système présenté à la Figure 10.5. On a

$$\begin{aligned} S^*(t) &= S(t) + \delta S_e = S(t) + \delta m_e s_e, \\ S^*(t + dt) &= S(t + dt) + \delta m_s s_s. \end{aligned}$$

En régime permanent, on a donc

$$\frac{dS^*}{dt} = D_m (S_s - S_e).$$

Second principe

On a

$$\frac{dS^*}{dt} = \frac{\delta S_{\text{ech}}}{dt} + \frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt},$$

où le deuxième terme est positif. Ainsi,

$$D_m [S_s - S_e] = \frac{\delta S_{\text{ech}}}{dt} + \frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt}.$$

En formulation intensive, on note l'entropie échangée par unité de masse

$$\frac{1}{D_m} \frac{\delta S_{\text{ech}}}{dt} = s_{\text{ech}}.$$

L'entropie créée par unité de masse est donnée par

$$\frac{1}{D_m} \frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt} = s_{\text{cr}}.$$

En régime permanent, on a donc

$$s_s - s_e = s_{\text{ech}} + s_{\text{cr}}.$$

Dans le cas monotherme, on a

$$\frac{\delta S_{\text{ech}}}{dt} = \frac{P_{\text{th}}^{\text{ext}}}{T_{\text{ext}}},$$

et

$$s_{\text{ech}} = \frac{q}{T_{\text{ext}}}.$$

Finalement, en régime permanent et dans le cas monotherme, on a

$$s_s - s_e = \frac{q}{T_{\text{ext}}} + s_{\text{cr}}.$$

Dans le cas adiabatique, on a

$$s_s - s_e = s_{\text{cr}} \geq 0.$$

10.1.5 Exemples

Détente de Joule-Kelvin/Joule-Thompson

C'est un écoulement adiabatique, lent et permanent, considéré à la Figure 10.6, où l'on a $P_e > P_s$.

Dans le bilan énergétique, on considère que les vitesses sont lentes (donc négligeables dans le bilan) et que la variation de hauteur est de l'ordre d'une dizaine de centimètres (négligeable dans le bilan). Ainsi,

$$h_s - h_e = \omega_i + q = 0,$$

car il n'y a pas de transferts thermique ni de travail. Finalement, on a

$$h_s = h_e, \quad s_s > s_e.$$

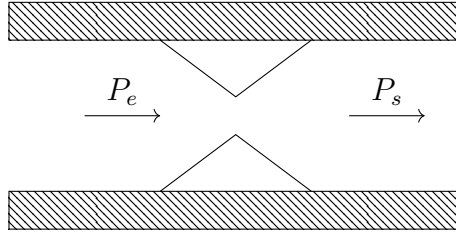


FIGURE 10.6 – Détente de Joule-Kelvin.

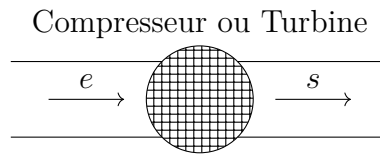


FIGURE 10.7 – Compresseur ou turbine.

Compresseur/Turbine

Dans un compresseur, il y a une augmentation de la pression du fluide en lui fournissant du travail $\omega_i > 0$. Dans une turbine, le fluide entraîne la turbine donc $\omega_i < 0$. On modélise ces deux systèmes par la Figure 10.7.

À nouveau, en négligeant les vitesses et la variation de hauteur, et en supposant que les transferts thermiques sont négligeables, on a

$$\Delta h = \omega_i, \quad \Delta s \gtrapprox 0.$$

Tuyère

On considère une tuyère à la Figure 10.8. La vitesse augment du gaz augmente de gauche à droite, c_s est la vitesse du son.. L'écoulement est rapide, il n'y a pas de parties mobiles ($\omega_i = 0$) et il n'y a pas le temps pour qu'il y ait des transferts thermiques (évolution adiabatique, $q \approx 0$).

Ainsi,

$$\Delta h + \Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

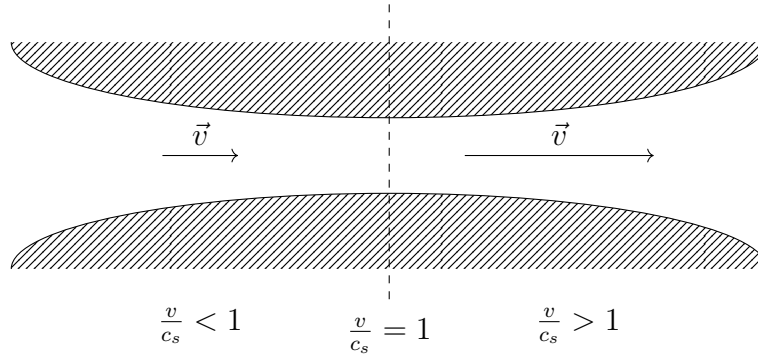


FIGURE 10.8 – Tuyère.

Pour $v_s \gg v_e$, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{v_s^2}{2} &\approx -\Delta h, \\
 &= -C_{p,m} \Delta T, \\
 &= -\frac{\gamma r}{(\gamma - 1) M} \Delta T > 0,
 \end{aligned}$$

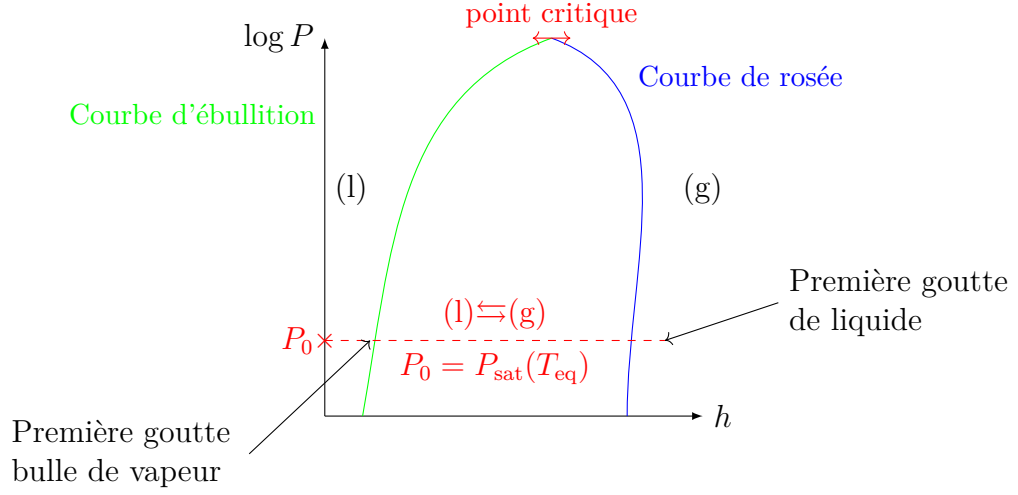
où l'on a utilisé la loi des gaz parfaits et l'on a noté $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$. Ainsi, $\Delta T < 0$.

10.2 Diagramme d'état ($\log P, h$) d'un fluide et fonctionnement de machines thermiques réelles

10.2.1 Lecture du diagramme ($\log P, h$) d'un fluide pur

On veut caractériser l'état d'un fluide pur déterminé par la donnée de deux grandeurs intensives :

- (P, v_m) [Clapeyron] ;
- (P, h) ;
- (T, s) ;
- (h, s) [Mollier].

FIGURE 10.9 – Partition du plan $(\log P, h)$.

Partition du plan $(\log P, h)$

On donne la partition du plan $(\log P, h)$ à la Figure 10.9. La courbe d'ébullition jointe avec la courbe de rosée s'appelle la **courbe de saturation**. On note x le titre massique vapeur : pour une masse m de fluide donnée, on a

$$x := \frac{m_{\text{gaz}}}{m}, \quad x_l = 1 - x.$$

Pour le calculer, on considère la situation de la Figure 10.10.

L'enthalpie H de la masse m représenté par le point M est

$$H(T, m, x) = m_g h_g(T_{\text{eq}}) + m_l h_l(T_{\text{eq}}) = m [x h_g + (1 - x) h_l],$$

en utilisant le fait que l'enthalpie est une fonction extensive. Ainsi,

$$h(T_{\text{eq}}, x) = h(P_0, x) = x h_g(P_0) + (1 - x) h_l(P_0).$$

Ainsi, en M , on a

$$x = \frac{h - h_l}{h_g - h_l} = \frac{LM}{LG}.$$

C'est le **théorème des moments**. Les courbes isotitres sont représentées à la Figure 10.11.

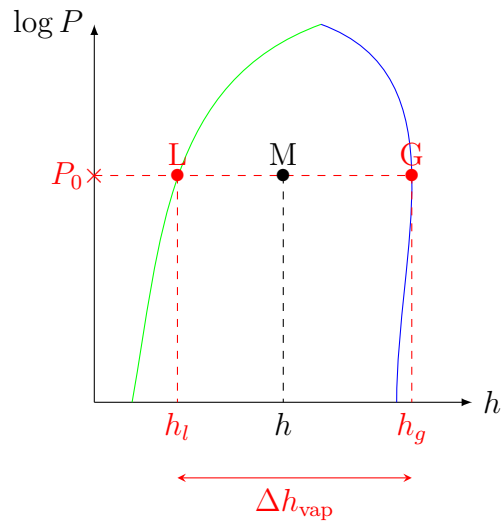
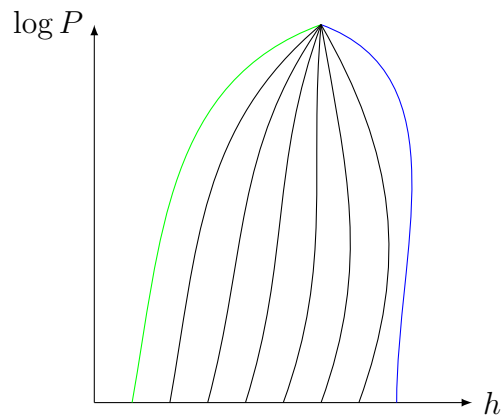


FIGURE 10.10 – Théorème des moments pour le titre massique en vapeur.

FIGURE 10.11 – Isotitres massique en vapeur pour le diagramme $(\log P, h)$.

Les différents réseaux de courbes

- Isobares : horizontales (bar) ;
- Isenthalpiques : verticales (kJ kg^{-1}) ;
- Isothermes ($^{\circ}\text{C}$) :
 - horizontales dans la zone $((l) \rightleftharpoons (g))$;
 - environ verticales dans la zone (l), car

$$dh_l = c_d T,$$

donc $h_l(T)$;

- environ verticales à basse pression et pas trop près de la courbe de saturation car, dans ce cas, c'est environ un gaz parfait et la deuxième loi de Joule pour les gaz parfaits implique $h_g(T)$.
- isochores : courbes croissantes (avec rupture de pente sur la courbe de rosée) $\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$;
- isentropiques : courbes croissantes sans rupture de pente $\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$, environ verticales dans la zone (l) car

$$s_l = C_{p,m} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + s_0.$$

Intérêt pour les écoulements permanents

Un fluide en écoulement permanent a une variation d'enthalpie massique égale à

$$\Delta h = \omega_i + q.$$

Exemple 10.2. Pour un compresseur isentropique, on a $\Delta h = \omega_i$: la transition suit une courbe isenthalpique croissante car $\omega_i > 0$.

Exemple 10.3. Pour une chaudière, on a $\Delta h = q$: la transition suit une transition isobare (courbe horizontale) de gauche à droite car $q > 0$.

10.2.2 Exemple : cycle moteur à vapeur d'une centrale électrique

La combustion du carbone ou la fission nucléaire introduit un transfert thermique (chaudière) qui crée un travail mécanique (turbine). Le **cycle de Rankine** est présenté à la Figure [10.12](#).

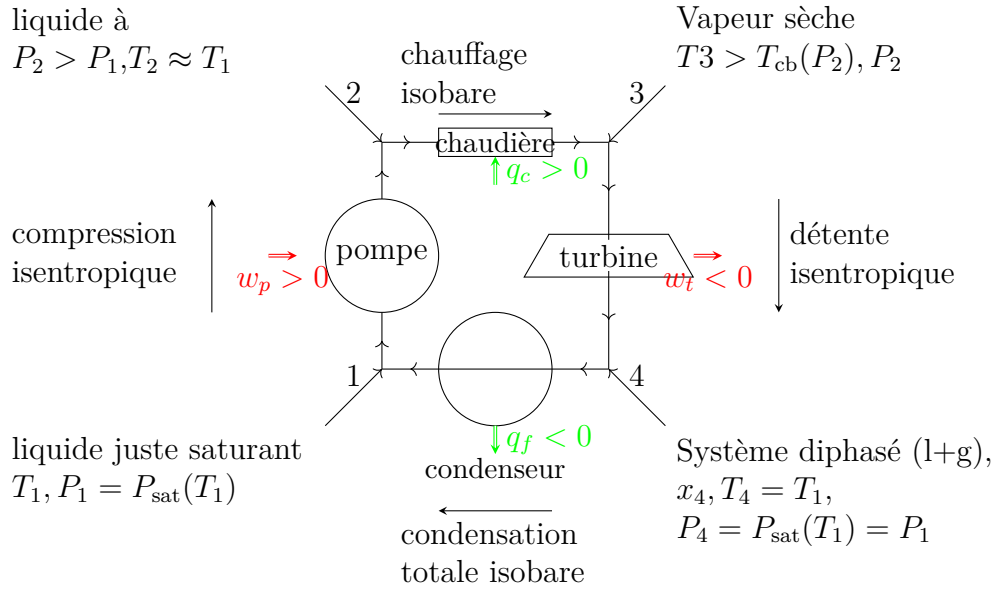


FIGURE 10.12 – Cycle de Rankine pour une centrale électrique.

On donne $P_1 = P_4 = 0,2 \text{ bar}$, $P_2 = P_3 = 10 \text{ bar}$, $T_3 = 340 \text{ °C}$. L'eau est en écoulement permanent donc

$$\Delta h + \Delta \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) = \omega_i + q.$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta h &\sim 100 \text{ kJ kg}^{-1}, \\ \Delta e_c &= \frac{v^2}{2} - 0 \sim 1000 \text{ kJ kg}^{-1}, \\ v &\sim 1400 \text{ m s}^{-1}, \\ \Delta(gz) &\sim 10 \Delta z, \\ \Delta z &\sim 100 \text{ km}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta e_c \ll \Delta h$ et $\Delta(gz) \ll \Delta h$. Ainsi,

$$\boxed{\Delta h = \omega_i + q.}$$

- Pompe : $\omega_p = h_2 - h_1, s_2 = s_1$;
- Chaudière : $q_c = h_3 - h_2, s_3 - s_2 > s_e > 0$, et $s_e \neq q_c/T_3$ (car il n'y a pas qu'un changement d'état) ;

- Turbine : $\omega_t = h_4 - h_3, s_4 = s_3$;
- $q_f = h_1 - h_4, s_1 - s_4 = s_e + s_c = s_e = q_f/T_1$ car c'est un changement d'état.

Le rendement est donné par

$$\begin{aligned}\eta &= \left| \frac{\text{grandeur désirée}}{\text{grandeur coûteuse}} \right|, \\ &= \frac{-\omega_t - \omega_p}{q_c}.\end{aligned}$$

On a typiquement

$$\begin{aligned}\omega_p &\sim 15 \text{ kJ kg}^{-1}, \\ q_c &\sim 2800 \text{ kJ kg}^{-1}, \\ \omega_t &\sim -750 \text{ kJ kg}^{-1}, \\ q_f &\sim -2000 \text{ kJ kg}^{-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\eta \approx \frac{-\omega_t}{q_c} \approx 0.26.}$$

Notons que pour un moteur de Carnot entre T_1 et T_3 (60 °C et 340 °C), on a (température en K)

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0.46.$$

10.2.3 Réfrigérateur à compresseur

Le cycle est donné à la Figure 10.13.

On donne $P_1 = 1,3 \text{ bar}$ et $T_3 = 31 \text{ °C}$. Le premier principe donne (données dans une annexe) :

- Compression : $\omega_c = h_2 - h_1 = 40 \text{ kJ kg}^{-1}$;
- Condenseur : $q_c = -180 \text{ kJ kg}^{-1}$;
- Détendeur : $h_4 = h_3$;
- Évaporateur : $q_f = h_1 - h_4 = 140 \text{ kJ kg}^{-1}$.

Le deuxième principe donne :

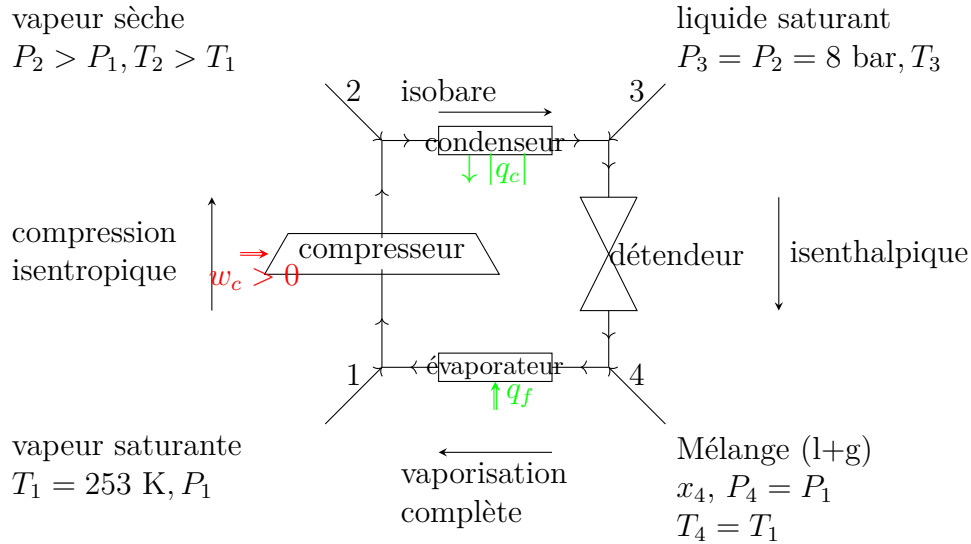


FIGURE 10.13 – Cycle d'un réfrigérateur à compresseur.

- Compression : $s_2 = s_1$;
- Condenseur : $s_3 - s_2 = s_{\text{ech}} + s_{\text{cr}} > q_c/T_3$;
- Détendeur : $s_4 - s_3 = 0 + s_{\text{cr}} > 0$ donc $s_4 > s_3$;
- Évaporateur : $s_4 - s_1 \geq q_f/T_c$.

Le coefficient de performance est

$$\text{COP} = \frac{q_f}{\omega_c} \approx 3.5.$$

Le cycle de Carnot donne

$$\text{COP} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 5.6,$$

avec $T_c = 25 \text{ °C}$ et $T_f = T_1 = -20 \text{ °C}$.

Chapitre 11

Transferts thermiques par diffusion thermique

Sommaire

11.1 Modes de transfert thermique	162
11.1.1 Les trois modes de transfert thermique	162
11.1.2 Le flux thermique surfacique	163
11.1.3 Continuité du flux surfacique	164
11.1.4 Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (ETL)	165
11.2 Conduction/Diffusion thermique	165
11.2.1 Vecteur densité de courant thermique	165
11.2.2 Loi empirique de Fourier	166
11.2.3 Équation locale de la conservation de l'énergie	167
11.2.4 Équation de la chaleur/diffusion thermique	172
11.2.5 Création d'entropie par diffusion	173
11.3 Propriétés de l'équation de diffusion	174
11.3.1 Linéarité	174
11.3.2 Irréversibilité	174
11.3.3 Échelles de temps et de distance de diffusion	175
11.3.4 Conditions initiales. Conditions aux limites	176
11.3.5 Exemple de conditions aux limites	176
11.3.6 Exemple de résolution numérique de l'équation de la diffusion	177

11.4 Conducto-convection	178
11.4.1 Transfert conducto-convectif : loi de Newton empirique	178
11.4.2 Application : ailette de refroidissement	179
11.4.3 Nombre de Biot	181
11.5 Conductance et résistance thermique	182
11.5.1 Analogie conduction thermique et électrique en régime permanent	182
11.5.2 Résistance thermique conductive en une dimension	182
11.5.3 Résistance thermique conducto-convective	184
11.5.4 Association en série : résistance « multicouche »	185
11.5.5 Association en parallèle	186
11.5.6 ARQS en thermique	187

11.1 Phénoménologie des différents modes de transfert thermique

11.1.1 Les trois modes de transfert thermique

Conduction thermique

C'est un transfert thermique des zones les plus chaudes vers les plus froides **sans mouvement macroscopique du milieu**. C'est le seul transfert thermique possible dans **un solide opaque**. La Figure 11.1 donne un exemple.

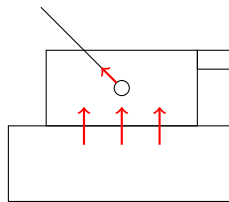


FIGURE 11.1 – Exemple d'un transfert thermique par conduction : casserole sur une plaque à induction avec une cuillère.

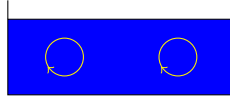


FIGURE 11.2 – Exemple d’un transfert thermique par convection : mouvements naturels dans un bassin d’eau chaude.

Convection thermique

C’est un transfert thermique dû aux mouvement macroscopique du milieu. C’est le transfert dominant **dans les fluides**, il peut être forcé ou naturel. La Figure 11.2 donne un exemple.

Rayonnement thermique

Tout corps opaque chauffé à une température T rayonne une puissance surfacique

$$\frac{dP}{dS} \propto T^4.$$

Un exemple est le rayonnement électromagnétique. Le rayonnement se propage dans un milieu transparent (notamment dans le vide).

Exemple 11.1 (Chauffage central). La pompe électrique implique une convection forcée dans le circuit. Le radiateur implique une conduction à travers la paroi, un rayonnement thermique et une convection naturelle du sol vers le plafond.

Exemple 11.2 (Feu de cheminée). L’écran de verre stoppe le rayonnement.

11.1.2 Le flux thermique surfacique

On considère une section infinitésimale dS avec une normale extérieure \vec{n} et une quantité de chaleur δQ qui passe à travers cette surface, voir la Figure 11.3.

Définition 11.1 (Puissance thermique et flux thermique surfacique). On définit **la puissance thermique** par

$$P_{\text{th}} = \frac{\delta Q}{dt},$$

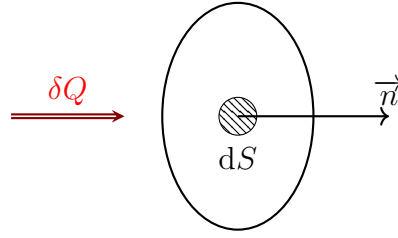


FIGURE 11.3 – Définition du flux thermique surfacique.

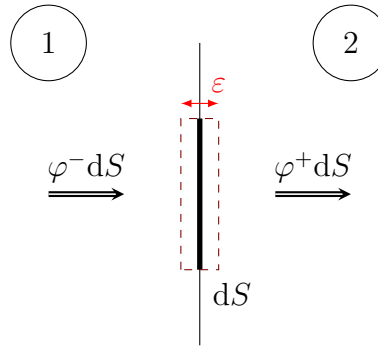


FIGURE 11.4 – Continuité du flux thermique surfacique.

qui est une quantité algébrique : si le transfert se fait selon \vec{n} , alors P_{th} , et sinon $P_{\text{th}} < 0$. ON a P_{th} et on définit donc **le flux thermique surfacique** φ par

$$P_{\text{th}} = \iint_S \varphi \, dS.$$

L'unité de φ est W m^{-2} .

11.1.3 Continuité du flux surfacique

On considère le système présenté à la Figure 11.4.

Le principe de la thermodynamique sur le tube de volume εdS s'écrit

$$\frac{dU}{dt} = \varphi^- dS - \varphi^+ dS.$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $U \rightarrow 0$ donc $\frac{dU}{dt} \rightarrow 0$. Ainsi, $\varphi^- = \varphi^+$: le flux surfacique est continu.

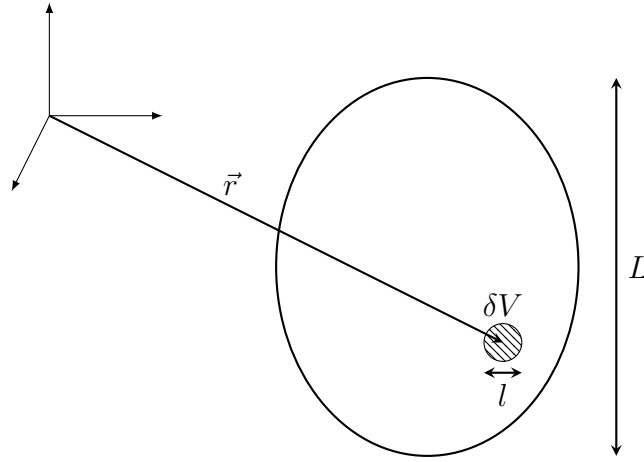


FIGURE 11.5 – Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.

11.1.4 Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (ETL)

S'il existe un transfert thermique, le système est hors d'équilibre. Dans ce cas, « la » température du système n'est pas définie à l'échelle macroscopique. À l'échelle microscopique, on fait donc l'hypothèse de l'ETL. Si d est la distance typique microscopique, l est la distance typique mésoscopique et L la distance typique macroscopique, alors

- $d \ll l$: on fait un traitement statistique,
- $l \ll L$: la description est locale,

voir la Figure 11.5.

On définit $T(\vec{r}, t)$ la température du volume mésoscopique δV à l'instant t . Ainsi, à l'échelle mésoscopique, on a l'hypothèse ETL, et à l'échelle macroscopique, il persiste un déséquilibre.

11.2 Conduction/Diffusion thermique

11.2.1 Vecteur densité de courant thermique

On modélise le caractère directionnel du flux thermique surfacique φ par un vecteur densité de courant thermique, voir la Figure 11.6.

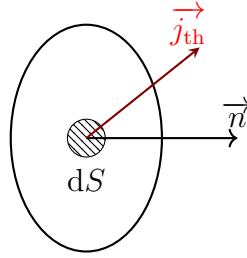


FIGURE 11.6 – Définition du vecteur densité de courant thermique.

Définition 11.2 (Vecteur densité de courant thermique). On définit le **vecteur densité de courant thermique** par la formule

$$\varphi = \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}.$$

Ainsi, la puissance thermique est

$$P_{\text{th}} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n} \, dS.$$

L'unité de \vec{j}_{th} est W m^{-2} .

11.2.2 Loi empirique de Fourier

On se demande quel est le lien entre \vec{j}_{th} et l'inhomogénéité de température T . On observe que

- si T est uniforme ($\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$), il y a un équilibre thermodynamique. Donc $\vec{j}_{\text{th}} = \vec{0}$ en tout point : pas de travail thermique.
- Si le système est hors d'équilibre, la température est non uniforme ($\overrightarrow{\text{grad}} T \neq \vec{0}$), il y a un transfert thermique des zones les plus chaudes vers les plus froides.

La loi de Fourier s'écrit

$$\vec{j}_{\text{th}}(\vec{r}, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(\vec{r}, t).$$

λ est la **conductivité thermique**. Son unité est $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$.

		λ (W m ⁻¹ K ⁻¹)
Métaux	Cuivre	400
	Acier	15
Non métaux	Verre	1
	Béton	0.9
	Bois	0.2
Liquides	Eau	0.6
Gaz	Air	0.02

TABLE 11.1 – Quelques valeurs de référence pour la conductivité thermique.

Remarque 11.1. — En régime permanent dans le cas de l'électrostatique, on a

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

— L'expression est valable que si T varie assez lentement dans le temps et dans l'espace.

On donne quelques ordres de grandeurs de λ dans la Table 11.1.

On note que les métaux sont de bons conducteurs, et dans ce cas on a $\lambda/\sigma \approx \text{constante}$: ce sont les électrons de conduction qui s'occupent du travail. Les gaz sont quant à eux de très bons isolants (tout comme les matériaux poreux).

11.2.3 Équation locale de la conservation de l'énergie

Cas 1D en géométrie cartésienne

On fait l'hypothèse que la température dépend de la position x et de l'instant t , et que $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}} \vec{u}_x$, voir la Figure 11.7.

Bilan énergétique sur $[x, x + dx]$. On a

$$\begin{aligned} d(\delta U) &= \delta U(t + dt) - \delta U(t), \\ &= \delta Q^{\text{ext}}, \\ &= j_{\text{th}}(x, t) S dt - j_{\text{th}}(x + dx, t) S dt. \end{aligned}$$

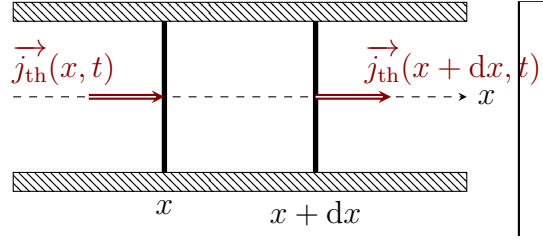


FIGURE 11.7 – Équation locale de la conservation de l'énergie, cas unidimensionnel en géométrie cartésienne.

Ainsi, on a

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = S(j_{\text{th}}(x, t) - j_{\text{th}}(x + dx, t)) \approx -Sdx \frac{\partial j_{\text{th}}(x, t)}{\partial x}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta U) &= \frac{d}{dt}(\delta mcT(x, t)), \\ &= \delta mc \frac{\partial T}{\partial t}(x, t), \\ &= \mu c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) Sdx, \end{aligned}$$

où $[c] = \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ et on a utilisé le fait que l'on considèrerait une phase condensée. Ainsi,

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = 0.}$$

Géométrie cylindrique

On fait l'hypothèse que la température $T(r, t)$ dépend juste du rayon r et du temps t , et que $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r, t)\vec{u}_r$, voir la Figure 11.8.

On a, via un développement limité de $rj_{\text{th}}(r, t)$,

$$\delta P_{\text{th}}^{\text{ext}} = j_{\text{th}}(r, t) \times 2\pi rL - j_{\text{th}}(r + dr, t) \times 2\pi(r + dr)L = -2\pi Ldr \frac{\partial}{\partial r}(rj_{\text{th}}(r, t)).$$

Le premier principe s'écrit

$$\frac{d}{dt}(\delta U) = \delta P_{\text{th}}^{\text{ext}} = -2\pi Ldr \frac{\partial}{\partial r}(rj_{\text{th}}(r, t)) = u_{\text{vol}}(r, t) \times 2\pi rdrL.$$

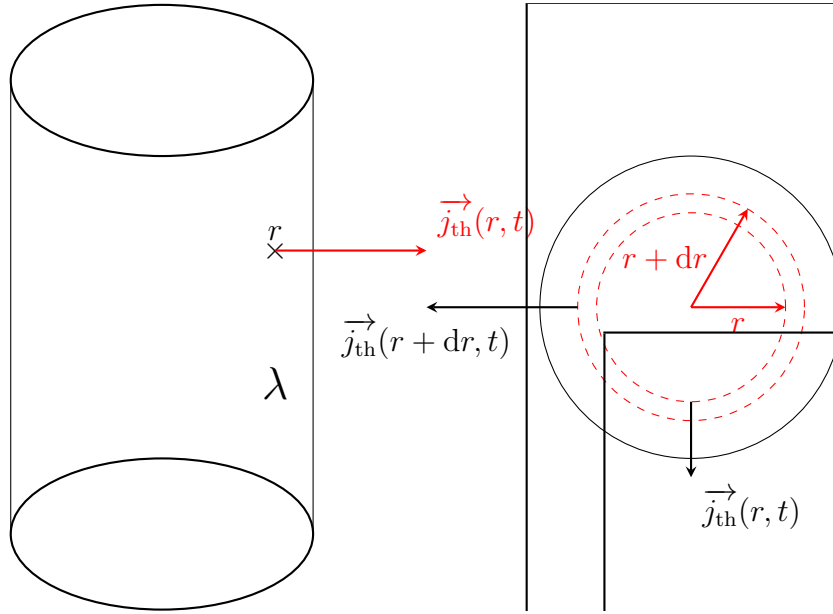


FIGURE 11.8 – Équation locale de la conservation de l'énergie en géométrie cylindrique.

Ainsi, on a

$$\frac{\partial u_{\text{vol}}(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\text{th}}(r, t)) = 0.$$

En phase condensée, on a $\frac{\partial u_{\text{vol}}(r, t)}{\partial t} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$, où $[c] = \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Géométrie sphérique

On fait l'hypothèse que la température $T(r, t)$ dépend juste du rayon r et du temps t , et que $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r, t) \vec{u}_r$, voir la Figure 11.9. On considère l'espace entre deux sphères de rayon r et $r + dr$.

En effectuant un développement de Taylor de $r^2 j_{\text{th}}(r, t)$, on a

$$\begin{aligned} \delta P_{\text{th}}^{\text{ext}} &= j_{\text{th}}(r, t) \times 4\pi r^2 - j_{\text{th}}(r + dr, t) \times 4\pi (r + dr)^2, \\ &= -4\pi dr \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_{\text{th}}(r, t)). \end{aligned}$$

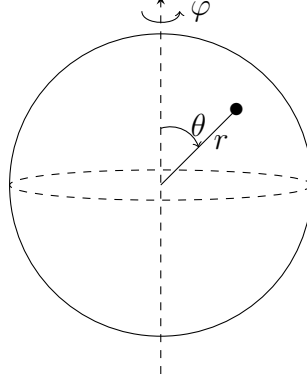


FIGURE 11.9 – Équation locale de la conservation de l'énergie en géométrie sphérique.

Le premier principe s'écrit

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \delta P_{\text{th}}^{\text{ext}} = 4\pi r^2 dr \frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_{\text{th}}(r, t)) = 0.}$$

Généralisation en 3D dans une géométrie quelconque

Dans un volume \mathcal{V} quelconque, on écrit

$$U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{\text{vol}}(\vec{r}, t) d\tau,$$

$$U(t + dt) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{\text{vol}}(\vec{r}, t + dt) d\tau,$$

où $d\tau$ est un volume infinitésimal. Alors

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t}(\vec{r}, t) dt d\tau.$$

On fait l'hypothèse que l'on peut « sortir » le terme dt de l'intégrale. On écrit

$$P_{\text{th}}^{\text{ext}} = - \oint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS,$$

car il y a une perte si $\vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} > 0$. Le premier principe s'écrit

$$\frac{dU}{dt} = P_{\text{th}}^{\text{ext}},$$

et en utilisant le théorème d'Ostrogradski,

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{\text{vol}}(\vec{r}, t)}{\partial t} d\tau = - \oiint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{j}_{\text{th}}(\vec{r}, t) d\tau.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = 0.}$$

Généralisation avec terme source

En plus de la conduction thermique, on a un apport énergétique en volume.

Exemple 11.3. L'effet Joule ajoute une puissance dû au travail électrique

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} > 0.$$

Exemple 11.4. L'énergie dégagée par une réaction chimique exothermique rajoute une puissance

$$P_{\text{vol}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \Delta_r H^0 \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

On adapte donc le bilan précédent en écrivant

$$\frac{dU}{dt} = P_{\text{th}}^{\text{ext}} + \iiint_{\mathcal{V}} P_{\text{vol}}(\vec{r}, t) d\tau,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}}.}$$

Exemple 11.5. Dans le cas de l'effet Joule, on a

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} > 0.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \text{div } \vec{\Pi} = - \vec{j} \cdot \vec{E} < 0.$$

Cela caractérise le changement de point de vue champ/conducteur.

11.2.4 Équation de la chaleur/diffusion thermique

On fait l'hypothèse qu'il n'y a que de la conduction pure. L'idée est que l'on a deux ingrédients : la loi de Fourier, et l'équation locale de la conservation de l'énergie. On peut donc combiner les choses pour obtenir l'équation de la chaleur.

Cas 1D en géométrie cartésienne

On a

$$\vec{j}_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \vec{u}_x,$$

et

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = 0.$$

Ainsi, en posant

$$D = \frac{\lambda}{\mu c},$$

le coefficient de diffusion thermique, on a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

L'unité de D est le m s^{-2} .

Géométrie cylindrique

On écrit

$$\vec{j}_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r,$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\text{th}}(\vec{r}, t)) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Géométrie sphérique

On écrit

$$\vec{j}_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r,$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 j_{\text{th}}(\vec{r}, t) \right) = 0,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}.$$

Géométrie quelconque

On écrit

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \vec{\text{div}} T,$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = 0,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T}.$$

Avec terme source

C'est la même chose sauf que l'on a

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T + \frac{P_{\text{vol}}}{\mu c}}.$$

11.2.5 Création d'entropie par diffusion

On se place dans le cas unidimensionnel et que l'on est en régime stationnaire. On a donc $T(x)$ et $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$. On fait l'hypothèse que l'on a $\frac{dT}{dx} < 0$. On reprend la Figure 11.7 et on applique le second principe à $[x, x + dx]$, on a

$$d(\delta S) = \delta S_e + \delta S_c,$$

pendant dt . Comme on est en régime stationnaire, on a $d(\delta S) = 0$. Ainsi, $\delta S_e = -\delta S_c$. Or, en notant A la section verticale, on a

$$\delta S_e = \frac{j_{\text{th}}(x)A dt}{T(x)} + \frac{-j_{\text{th}}(x + dx)A dt}{T(x + dx)}.$$

On est en régime permanent, on a donc

$$\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} = 0 = -\text{div } \vec{j}_{\text{th}} = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = 0.$$

Donc

$$j_{\text{th}}(x) = \text{constante} = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}.$$

On a alors

$$\delta S_e = j_{\text{th}} A dt \left[\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T(x + dx)} \right] = A dt \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \right) dx \frac{\frac{dT}{dx}}{T(x)^2},$$

donc $\delta S_e = -\delta S_c < 0$, et ce peu importe le signe de $\frac{dT}{dx}$. Ainsi, $\delta S_c > 0$: **c'est le caractère fondamentalement irréversible des phénomènes de diffusion.**

11.3 Propriétés de l'équation de diffusion

11.3.1 Linéarité

On a le théorème de superposition. Une analyse harmonique est donc possible.

11.3.2 Irréversibilité

Soit un processus diffusif décrit par $T(x, t)$ vérifiant

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Posons $t' = -t$. Soit $\tilde{T}(t', x) = T(-t, x)$. Alors

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t'} = \frac{\partial T}{\partial(-t)} = -\frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t'} = -D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Ce n'est donc pas une équation de diffusion.

11.3.3 Échelles de temps et de distance de diffusion

On se demande quelle est la durée typique τ du phénomène de diffusion sur une distance L .

- Réponse 1 : un seul paramètre dimensionnel dans l'équation de propagation. On cherche $\tau = f(L, D)$ si et seulement si $\tau = \text{constante} \times L^\alpha D^\beta$, d'où $\beta = -1$ et $\alpha = 2$ par analyse dimensionnelle. Donc

$$\tau \approx \frac{L^2}{D}.$$

- Réponse 2 : équation de la chaleur adimensionnelle. On note T_0 la température caractéristique du problème. On note $T^*(x, t) = T(x, t)/T_0$, $x^* = x/L$ et $t^* = t/\tau$. Alors

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{D\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}.$$

Si les échelles τ et L sont adaptées, on a

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \approx \frac{\partial T^*}{\partial t^*},$$

et donc

$$\tau \approx \frac{L^2}{D}.$$

Nombre de Fourier

On note le **nombre de Fourier**

$$F_0(t) := \frac{t}{\tau} = \frac{Dt}{L^2}.$$

Ainsi,

- Si $F_0 \ll 1$, on a $t \ll \tau$: le phénomène de diffusion thermique est trop lent pour avoir lieu. On est dans l'hypothèse adiabatique.
- Si $F_0 \gg 1$, on a $t \gg \tau$: la diffusion est quasi instantanée.

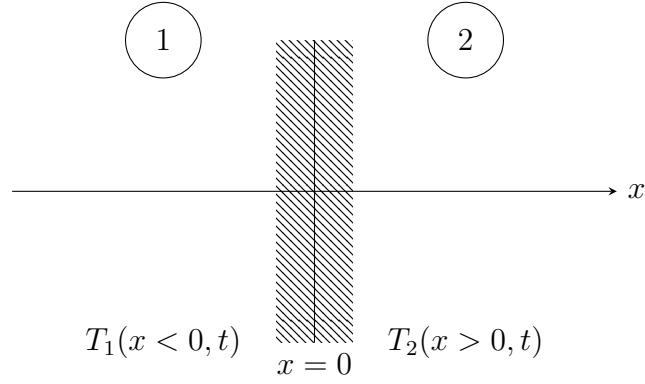


FIGURE 11.10 – Exemple de conditions aux limites pour la diffusion thermique.

11.3.4 Conditions initiales. Conditions aux limites

En 1D, l'équation aux dérivées partielles est du premier ordre par rapport à t et du second ordre par rapport à x : il y a donc une condition initiale et deux conditions aux limites. Par exemple, $T(x, 0) = T_0(x)$ pour tout x et $T(0, t) = T_1$, $T(L, t) = T_2$ pour tout t .

11.3.5 Exemple de conditions aux limites : contact thermique parfait entre deux solides

On considère la Figure 11.10.

La continuité du flux thermique s'écrit $j_{\text{th}}(x = 0^-, t) = j_{\text{th}}(x = 0^+, t)$, donc

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0^-, t) = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0^+, t).$$

Le contact thermique parfait impose la continuité de la température T . Ainsi,

$$T_1(0^-, t) = T_2(0^+, t).$$

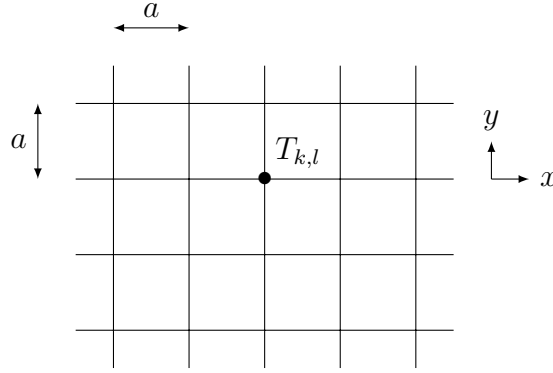


FIGURE 11.11 – Discretisation de l'équation de diffusion bidimensionnelle.

11.3.6 Exemple de résolution numérique de l'équation de la diffusion

Problème bidimensionnel en régime permanent

$T(x, y)$ est régit par $\Delta T = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Avec une discrétisation donnée par la Figure 11.11.

On écrit

$$\begin{aligned} T(x \pm a, y) &= T(x, y) \pm a \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pm a^3 \frac{\partial^3 T}{\partial^3 x} + \mathcal{O}(a^4), \\ T(x, y \pm a) &= T(x, y) \pm a \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \pm a^3 \frac{\partial^3 T}{\partial^3 y} + \mathcal{O}(a^4). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{T_{k+1,l} + T_{k-1,l} + T_{k,l+1} + T_{k,l-1} = 4T_{k,l} + \mathcal{O}(a^4).$$

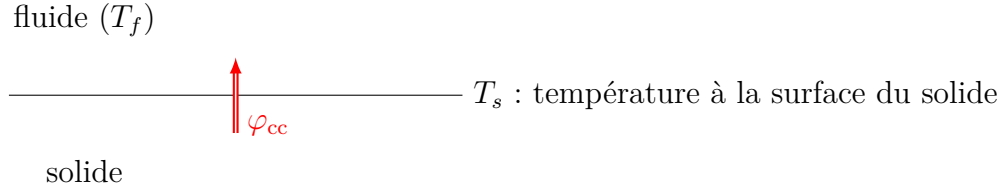


FIGURE 11.12 – Flux surfacique conducto-convectif.

11.4 Phénomène de conducto-convection présent à l'interface d'un solide et d'un fluide

11.4.1 Transfert conducto-convectif : loi de Newton empirique

Flux surfacique conducto-convectif

On fait l'hypothèse que le fluide est brassé par convection : T_f est uniforme, voir la Figure 11.12.

Le flux surfacique conducto-convectif est proportionnel à $T_s - T_f$. La loi de Newton s'écrit dans ce cas

$$\varphi_{cc} = h(T_s - T_f).$$

L'unité de φ_{cc} est W m^{-1} et est orienté du solide vers le fluide. Le facteur h est le coefficient de transfert conducto-convectif d'unité $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-2}$. Ainsi,

$$P_{s \rightarrow f} = \varphi_{cc} \times S = hS(T_s - T_f).$$

Ordre de grandeur. Pour le gaz, $h \sim 5$ à $30 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-2}$, pour le liquide, $h \sim 400$ à $10000 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-2}$, les deux pour la convection naturelle. Si le convection est forcée, on a un rapport

$$\frac{h_{\text{forcée}}}{h_{\text{naturelle}}} \sim 10 \text{ à } 50.$$

Interprétation

Lors d'un écoulement fluide, il y a deux zones : une proche du sol, dite « couche limite ». L'autre est lointaine, c'est l'écoulement extérieur. Alors

$$\varphi_{cc} = j_{th,C.L} = -\lambda_f \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{fluide}} \approx -\lambda_f \frac{T_f - T_s}{\delta},$$

où $\delta \ll$ taille macroscopique de l'écoulement (taille de la couche limite). Dans la couche limite, le transfert thermique (pas dû à la convection mais à la conduction thermique dans la couche limite) a lieu perpendiculairement aux mouvement du fluide. Donc

$$\varphi_{cc} \approx \frac{\lambda_f}{\delta} (T_s - T_f),$$

d'où

$$h = \frac{\lambda_f}{\delta}.$$

Comme $h \propto \lambda_f$, on a

$$h_{\text{liquide}} \gg h_{\text{gaz}}.$$

Comme $h \propto 1/\delta$, et δ diminue si le brassage augmente, on a

$$h_{\text{forcée}} \gg h_{\text{naturelle}}.$$

11.4.2 Application : ailette de refroidissement

On considère le système présent à la Figure 11.13. On fait l'hypothèse que l'on est en régime stationnaire, que le problème est unidimensionnel (T ne dépend que de x), et que la longueur de l'aillette est « infinie ».

Profil $T(x)$

On ne peut pas utiliser l'équation de la chaleur, il faut passer par un bilan d'énergie local sur $[x, x + dx]$. En régime permanent, on a

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta U)}{dt} &= 0, \\ &= P_{\text{th}}^{\text{ext}}, \\ &= j_{\text{th}}(x)\pi a^2 - j_{\text{th}}(x + dx)\pi a^2 - h(T(x) - T_0)2\pi a dx. \end{aligned}$$

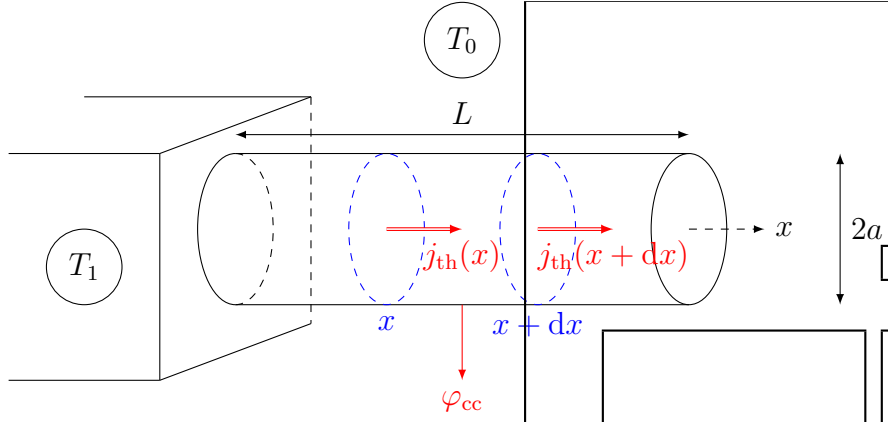


FIGURE 11.13 – Application du flux conducto-convectif : ailette de refroidissement.

Ainsi, on obtient

$$\pi a^2 \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} dx + h(T(x) - T_0) = 0.$$

On pose $\theta(x) = T(x) - T_0$, et $\delta := \sqrt{\frac{a\lambda}{2h}}$, et on obtient

$$\theta(x) = \alpha e^{-x/\delta} + \beta e^{x/\delta}.$$

On a $\beta = 0$ car θ est fini en $+\infty$, et $\theta(0) = T_1 - T_0 = \alpha$. Finalement,

$$\boxed{T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-x/\delta}.}$$

Notons que si l'ailette est « finie », c'est-à-dire $L \sim \delta$, la condition au limite est alors donnée par la **continuité du flux en $x = L$** , c'est-à-dire

$$\varphi_{\text{cc}}(L) = j_{\text{th}}(L),$$

soit

$$\boxed{h(T(L) - T_0) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_L.}$$

Efficacité

Sans l'ailette, la puissance thermique est $P_{\text{sans}} = h(T_1 - T_0)S$, et la puissance avec l'ailette est $P_{\text{avec}} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 S$. Ainsi, l'efficacité est

$$\begin{aligned} \eta &:= \frac{P_{\text{avec}}}{P_{\text{sans}}}, \\ &= \frac{\lambda \left(\frac{T_1 - T_0}{\delta} \right) S}{h(T_1 - T_0)S}, \\ &= \frac{\lambda}{\delta h} = \sqrt{\frac{2\lambda}{ah}}. \end{aligned}$$

On a $\eta \sim 30$ pour $\lambda \approx 100 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $h \approx 10 \text{ W m}^{-1}$ et $a \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

11.4.3 Nombre de Biot : conduction versus conducto-convection

Validité de l'hypothèse de l'ailette

L'hypothèse de l'ailette est que la température est uniforme sur une section. Si T n'est pas uniforme sur une section, on décompose le flux $\vec{j}_{\text{th}} = \vec{j}_{\text{th},\perp} + \vec{j}_{\text{th},\parallel}$ en ses composantes selon l'ailette (l'axe x) et selon l'axe perpendiculaire. Ainsi, si

$$\frac{\|\vec{j}_{\text{th},\perp}\|}{\|\vec{j}_{\text{th},\parallel}\|} \ll 1,$$

alors l'approximation de l'ailette est bonne. Par continuité du flux, on a

$$\|\vec{j}_{\text{th},\perp}\| = \varphi_{\text{cc}} = h(T_S(x) - T_0),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\|\vec{j}_{\text{th},\perp}\|}{\|\vec{j}_{\text{th},\parallel}\|} &\approx \frac{h(T(x) - T_0)}{-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}}, \\ &= \frac{h(T_1 - T_0)e^{-x/\delta}}{\frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_0)e^{-x/\delta}}, \\ &= \frac{h\delta}{\lambda} = \sqrt{\frac{ah}{2\lambda}} \sim 10^{-2} \ll 1. \end{aligned}$$

Nombre de Biot

On note

$$B_i := \left(\frac{\varphi_{cc,\perp}}{j_{th,\parallel}} \right)^2 = \frac{ah}{2\lambda} \approx \frac{ah}{\lambda}.$$

Si $B_i \ll 1$, l'hypothèse de l'ailette est bonne. Le milieu thermique est mince, et c'est à favoriser pour augmenter l'efficacité η . Si $B_i \gg 1$, l'hypothèse de l'ailette est mauvaise : le milieu thermique est épais.

11.5 Conductance et résistance thermique en régime permanent

11.5.1 Analogie conduction thermique et électrique en régime permanent

On donne à la Table 11.2 une comparaison entre les grandeurs et les lois apparaissant dans les phénomènes de conduction thermique et de conduction électrique.

Notons que l'on a le théorème d'unicité des solutions de $\Delta f = 0$ pour une géométrie et des conditions aux limites données. On peut donc transposer des solutions d'un domaine à l'autre.

11.5.2 Résistance thermique conductive en une dimension

Profil $T(x)$ en une dimension par conduction pure

On considère le système donnée à la Figure 11.14.

On a $\Delta T = 0 = \frac{d^2 T}{dx^2}$, donc $T(x) = \alpha + \beta x$. Avec les conditions aux limites, on a donc

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x.$$

Notons que l'on a $\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{T_2 - T_1}{L} \overrightarrow{u_x} = \text{constance}$.

	thermique	électricité
Grandeur transportée	énergie [J]	charge [C]
Vecteur densité de courant	\vec{j}_{th} [W m ⁻¹]	\vec{j} [A m ⁻¹]
Flux	$P_{\text{th}} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS}$ [W]	$i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ [A]
Équation locale de conservation de l'énergie en régime permanent	$\text{div } \vec{j}_{\text{th}} = 0$	$\text{div } \vec{j} = 0$
Loi de transport linéaire	$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ [Fourier]	$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$ [Ohm]
Conductivité	λ [W m ⁻¹ K ⁻¹]	σ [Ω^{-1} m ⁻¹]
Équation locale (en régime permanent)	$\Delta T = 0$	$\Delta V = 0$

TABLE 11.2 – Analogie entre conduction thermique et électrique en régime permanent.

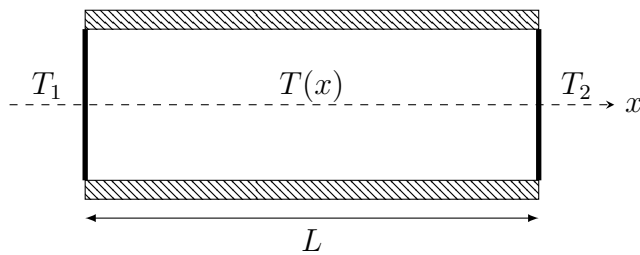


FIGURE 11.14 – Profil de température d'un système unidimensionnel pour établir l'expression de la résistance thermique.

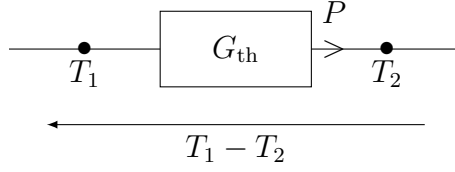


FIGURE 11.15 – Schéma équivalent pour la résistance/conductance thermique.

Résistance thermique

Pour la conduction thermique, on a $R = \frac{U}{I}$. Ainsi, pour la conduction thermique, on devrait avoir une expression du type

$$\frac{T_2 - T_1}{R_{\text{th}}} = \dots$$

On a

$$\begin{aligned} P_{\text{th}} &= \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}, \\ &= -\lambda \frac{dT}{dx} S, \\ &= \frac{\lambda(T_1 - T_2)S}{L}, \\ &= \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{\lambda S}{L}.$$

On a donc le schéma équivalent donné à la Figure 11.15.

C'est la même chose pour une géométrie cylindrique ou sphérique.

11.5.3 Résistance thermique conducto-convective

On reprend le système décrit à la Figure 11.12. On a

$$P_{\text{th}}^{\text{cc}} = \varphi_{\text{cc}} S = h(T_s - T_f) = hS(T_s - T_f),$$

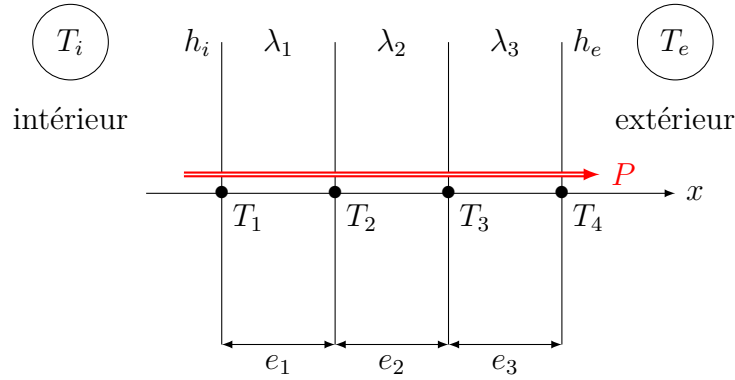


FIGURE 11.16 – Exemple d’association de résistances en série : cas d’un mur.

soit

$$G_{cc} = \frac{1}{R_{cc}} = hS.$$

11.5.4 Association en série : résistance « multicouche »

On prend l’exemple d’un mur comprenant une couche de plâtre, d’isolant puis de pierre, voir la Figure 11.16.

La même puissance P traverse toutes les couches : **elles sont montées en série**. On a alors

$$\begin{aligned} P &= h_i S (T_i - T_1) = \frac{\lambda_1 S}{e_1} (T_1 - T_2), \\ &= \frac{\lambda_2 S}{e_2} (T_2 - T_3) = \frac{\lambda_3 S}{e_3} (T_4 - T_3) = h_e S (T_4 - T_e). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} T_i - T_e &= (T_i - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_4) + (T_4 - T_e), \\ &= \left[\frac{1}{h_i S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{1}{h_e S} \right] P. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$T_i - T_e = R_{th}^{eq} P,$$

avec la résistance équivalente donnée par

$$R_{th}^{eq} = \sum_i R_{th,i}.$$

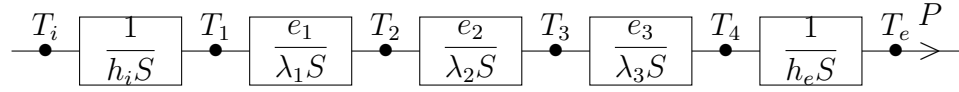


FIGURE 11.17 – Schéma équivalent pour l'association en série de résistances thermiques.

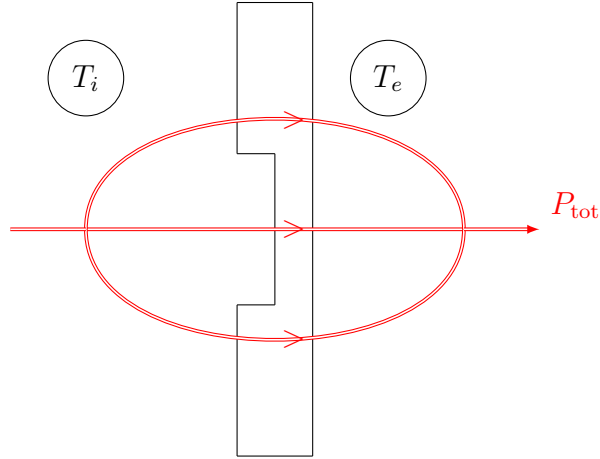


FIGURE 11.18 – Exemple d'association en parallèle de résistances thermiques.

Le schéma équivalent est donné à la Figure 11.17.

Ici, l'isolant est prédominant : on a $R_{\text{th}}^{\text{eq}} \approx R_{\text{th}}^{\text{iso}} = \frac{e_2}{\lambda_2 S}$.

11.5.5 Association en parallèle

On prend l'exemple d'un mur percé d'une fenêtre, que l'on modélise à la Figure 11.18.

L'équivalent de la loi des nœuds donne

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{mur}} + P_{\text{fenêtre}}.$$

Le schéma équivalent est donné à la Figure 11.19.

Ainsi,

$$P_{\text{tot}} = G_f \times (T_i - T_e) + G_m \times (T_i - T_e) = G_{\text{eq}} \times (T_i - T_e),$$

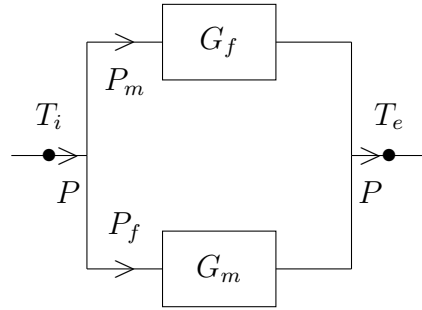


FIGURE 11.19 – Schéma équivalent pour l'exemple d'association en parallèle de résistances thermiques.

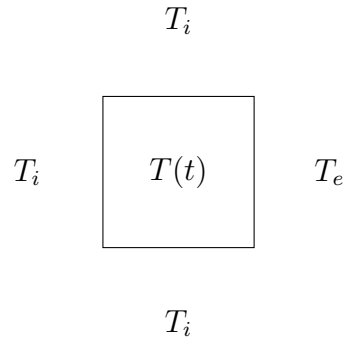


FIGURE 11.20 – Exemple de de l'ARQS en thermique.

avec

$$G_{\text{eq}} = \sum_i G_i, \quad \frac{1}{R_{\text{th}}^{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_{\text{th},i}}.$$

Il y a un « court-circuit thermique ». Notamment, s'il y a un pont thermique, alors $G_{\text{pont}} \gg G_i$ et ainsi $G_{\text{eq}} \approx G_{\text{pont}}$.

11.5.6 ARQS en thermique

Exemple : circuit thermique dans l'ARQS

On considère une chambre dont un côté donne sur l'extérieur (et les trois autres vers l'intérieur), voir la Figure 11.20.

On suppose que l'on a les paramètres suivants : pour le côté extérieur, on a la conductance G_e , pour le côté intérieur on a la conductance G_i , pour

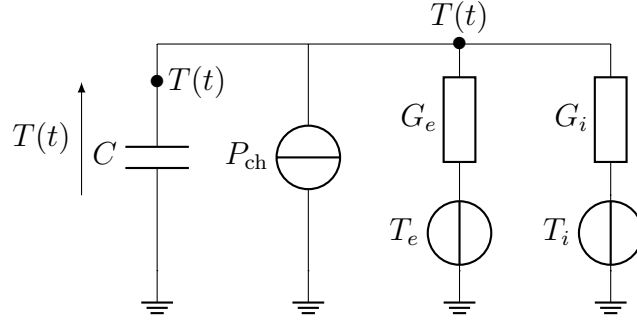


FIGURE 11.21 – Schéma équivalent dans l'ARQS thermique

la pièce il y a un chauffage $P_{\text{ch}} > 0$ en W, et la capacité thermique de la chambre est C en J K^{-1} . Alors on a

$$\frac{dU}{dt} = C \frac{dT}{dt} = P_{\text{ch}} - G_e(T(t) - T_e) - G_i(T(t) - T_i).$$

Ainsi,

$$\frac{dT}{dt} + \frac{G_e + G_i}{C} T = \frac{P_{\text{ch}} + G_e T_e + G_i T_i}{C},$$

ce qui donne le schéma équivalent donné à la Figure 11.21.

On pose

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{G_{\text{eq}}}{C}},$$

et on obtient

$$T(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{P_{\text{ch}}}{G_e + G_i} + \frac{G_e T_e + G_i T_i}{G_e + G_i}.$$

On résout ensuite avec d'éventuelles conditions initiales.

Qu'est-ce que l'ARQS ?

Ce qu'on a écrit suppose la validité du concept de résistance thermique. Dans chaque couche, on doit donc avoir un profil $T(x)$ environ affine. Cela suppose une diffusion thermique quasi instantanée, c'est-à-dire

$$\tau_{\text{diff}} \sim \frac{e^2}{D_{\text{th}}} \ll t,$$

i.e. $F_0(t) \gg 1$, c'est-à-dire

$$t \gg \frac{e^2}{\frac{\lambda}{\mu c}},$$

dans chaque couche d'épaisseur e .