



LYCÉE MICHEL MONTAIGNE

NOTES DE COURS

Physique-Chimie MP

Régis Santet

Cours réalisé par
Professeur N. CHOIMET

Année scolaire 2015/2016

Table des matières

I	Électromagnétisme	13
1	Le champ électromagnétique	15
1.1	Charges et courants	16
1.1.1	Distributions discrètes ou continues de charges	16
1.1.2	Distribution de courant en volume. Densité de courant	19
1.2	Loi de conservation de la charge	21
1.2.1	Géométrie 1D	21
1.2.2	Équation intégrale de conservation de la charge	22
1.2.3	Flux et opérateur « divergence »	23
1.2.4	Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.	25
1.2.5	Cas du régime stationnaire/permanent	25
1.3	La loi de force de Lorentz	26
1.4	Propriétés de symétrie	28
1.4.1	Principe de Curie	28
1.4.2	Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants	28
1.4.3	Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique	28
1.4.4	Géométrie du champ sur un PS/PAS	30
1.4.5	Exemples	30
2	Électrostatique	33
2.1	Loi de Coulomb	34
2.1.1	Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	34
2.1.2	Principe de superposition	35
2.1.3	Ordres de grandeur	35
2.2	Circulation du champ électrostatique	36

2.2.1	Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle	36
2.2.2	Potentiel créé par une charge ponctuelle	37
2.2.3	Circulation du champ le long d'un contour fermé orienté	37
2.2.4	Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient	38
2.2.5	Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique	39
2.3	Flux du champ électrostatique	39
2.3.1	Charge ponctuelle : flux à travers une sphère	39
2.3.2	Théorème de Gauss	40
2.3.3	Comment appliquer le théorème de Gauss	41
2.3.4	Exemples fondamentaux	41
2.3.5	Condensateur plan sans effet de bord. Capacité	46
2.4	Topographie du champ électrostatique	49
2.4.1	Lignes de champ. Tubes de champ	49
2.4.2	Surfaces équipotentielles	49
2.4.3	Resserrement ou évasement des lignes de champ	49
2.4.4	Visualisation de cartes de champ et de potentiel	51
2.5	Équations locales de l'électrostatique	51
2.5.1	Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss	51
2.5.2	Circulation conservative locale	52
2.5.3	Opérateur rotationnel	53
2.5.4	Équation de Maxwell-Faraday	54
2.5.5	Vue d'ensemble des différentes formulations des lois de l'électrostatique	54
2.6	Équations de Poisson et de Laplace	55
2.6.1	Équation de Poisson en présence de charges	55
2.6.2	Équation de Laplace. Résolution numérique	55
2.7	Analogies avec la gravitation universelle	56
2.7.1	Les deux lois de force. Grandeurs analogues	56
2.7.2	Potentiel gravitationnel	56
2.7.3	Théorème de Gauss gravitationnel	56
2.7.4	Équations locales de la gravitation universelle	57
2.7.5	Énergie potentielle de gravitation d'un astre à symétrie sphérique	57

3	Magnétostatique	61
3.1	Flux du champ magnétique	62
3.1.1	Nullité du flux magnétique à travers une surface fermée	62
3.1.2	Flux de \vec{B} à travers une section d'une tube de champ .	62
3.1.3	Resserrement des lignes de champ magnétiques	62
3.1.4	Équation locale de Maxwell-Thompson	63
3.2	Circulation du champ magnétique	63
3.2.1	Théorème d'Ampère intégral	63
3.2.2	Quand et comment mettre en œuvre le théorème d'Ampère ?	63
3.2.3	Exemples fondamentaux	64
3.2.4	Ordres de grandeur	66
3.2.5	Équation de Maxwell–Ampère	67
3.2.6	Vue d'ensemble des lois de la magnétostatique	67
3.3	Topographie du champ magnétique	67
3.3.1	Fermeture et orientation des lignes de contour	67
3.3.2	Comparaison des lignes de champ électriques et magnétiques	67
4	Dipôles statiques	69
4.1	Dipôle électrostatique : E et V créés	70
4.1.1	Le modèle du dipôle électrostatique	70
4.1.2	Symétries du problème	70
4.1.3	Potentiel V dans l'approximation dipolaire	71
4.1.4	Champ E dans l'approximation dipolaire	72
4.1.5	Allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans l'approximation dipolaire	72
4.2	Actions mécaniques subies	73
4.2.1	Champ extérieur uniforme	73
4.2.2	Champ extérieur non uniforme	73
4.2.3	Énergie potentielle d'interaction avec un champ extérieur	74
4.3	Dipôle magnétique	75
4.3.1	Définition et ordre de grandeur	75
4.3.2	Champ magnétique créé par un dipôle	76
4.3.3	Actions mécaniques subies	77

5	Les équations de Maxwell	79
5.1	Équations de Maxwell locales	80
5.2	Équations intégrales	80
5.2.1	Théorème de Gauss et Maxwell-Gauss	80
5.2.2	Flux de \vec{B} conservatif et Maxwell-Thompson	81
5.2.3	Théorème d'Ampère généralisé et Maxwell-Ampère	81
5.2.4	Loi de Faraday et Maxwell-Faraday	81
5.3	Cas des champs statiques	83
5.3.1	Électrostatique	83
5.3.2	Magnétostatique	84
5.4	Densité de courant de déplacement	84
5.4.1	Densité de courant de déplacement et conservation de la charge	84
5.4.2	ARQS magnétique	85
5.5	Équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide	86
5.5.1	Équations dans le vide	86
5.5.2	Équations de propagation : équation de d'Alembert	86
6	Énergie électromagnétique	87
6.1	Interaction classique champ-matière	88
6.1.1	Densité volumique de force électromagnétique	88
6.1.2	Puissance volumique	88
6.1.3	Cas des conducteurs ohmiques	89
6.2	Équation locale de Poynting	90
6.2.1	Équation de Poynting	90
6.2.2	Densité volumique d'énergie électromagnétique et vec- teur de Poynting	91
6.2.3	Ordres de grandeurs	92
6.2.4	Propagation unidimensionnelle dans un milieu absor- bant. Loi de Beer-Lambert	92
6.3	Bilan intégral d'énergie électromagnétique	93
6.3.1	Bilan intégral sur un volume de contrôle	93
6.3.2	Exemple : conducteur ohmique en régime stationnaire	94
6.4	Cas de l'électrostatique	95
6.4.1	Énergie du champ électrostatique	95

6.4.2	Définition énergétique de la capacité d'un condensateur	96
6.5	Cas de la magnétostatique	96
6.5.1	Énergie magnétique	96
6.5.2	Définition énergétique de l'inductance d'un circuit	97
7	Ondes dans le vide	99
7.1	Solutions de l'équation de d'Alembert en OPP	100
7.1.1	Notion d'une plane. Équation de d'Alembert unidimensionnelle	100
7.1.2	Solution générale de d'Alembert en dimension un en ondes progressives	101
7.1.3	Solution générale de l'équation de d'Alembert en trois dimensions en OPP	102
7.1.4	La solution élémentaire en OPP Harmonique	102
7.2	La solution en OPPH	103
7.2.1	Opérateurs de dérivation en notation complexe	103
7.2.2	Structure d'une OPP(H) dans le vide	103
7.2.3	Polarisation de la lumière. OPPH polarisée rectilignement (PR)	104
7.2.4	Obtention d'une onde PR : polarisation par dichroïsme	106
7.3	Propagation de l'énergie par une OPP(H)	107
7.3.1	Grandeurs énergétiques associées à une OPP(H)	107
7.3.2	Analyse d'une vibration rectiligne : loi de Malus	108
7.3.3	Vitesse de propagation de l'énergie	109
7.4	Rayonnement dipolaire électrique	109
7.4.1	Le modèle du dipôle électrique oscillant	110
7.4.2	Les trois échelles de longueur	110
7.4.3	Champ électromagnétique dans la zone de rayonnement : approche qualitative	111
7.4.4	Le champ rayonné : raisonnement en ordres de grandeur	113
7.4.5	Bilan : propriétés essentielles du champ électromagnétique rayonné dans la ZR	114
7.4.6	Vecteur de Poynting de la zone de rayonnement	115
7.4.7	Puissance rayonnée dans tout l'espace	116
8	Dispersion et atténuation	119
8.1	Modèle de la conductivité complexe	120

8.1.1	Le modèle	120
8.1.2	Plasmas dilués et métaux hautes fréquences	121
8.1.3	Métaux en basses fréquences	122

Table des figures

1.1	Échelle mésoscopique pour une distribution de charges. . . .	16
1.2	Distribution de charges en surface.	18
1.3	Distribution linéique de charges.	18
1.4	Courant algébrique traversant une surface orientée.	19
1.5	Densité de courant \vec{j} : modèle introductif.	20
1.6	Loi de conservation de la charge 1D.	21
1.7	Équation intégrale de conservation de la charge.	22
1.8	Flux de courant sortant en trois dimensions.	23
1.9	Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz.	27
1.10	Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un solénoïde.	29
1.11	Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un condensateur plan.	29
2.1	Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.	35
2.2	Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle.	36
2.3	Sphère uniformément chargée en volume ou en surface.	41
2.4	Plan uniformément chargé en surface.	44
2.5	Couche de charges infinie uniformément chargée en volume.	46
2.6	Condensateur plan sans effet de bord.	46
2.7	Expression du champ électrostatique dans un condensateur plan.	48
2.8	Topographie du champ électrostatique : exemples de lignes de champ.	50
2.9	Resserrement des lignes de champ : principe du paratonnerre.	51
2.10	Circulation conservative locale en coordonnées cartésiennes.	52

3.1	Flux du champ magnétique à travers une section d'un tube de champ.	62
3.2	Circulation du champ magnétique : enlacement des fils et intensité du courant.	64
3.3	Champ magnétique pour un câble rectiligne infini épais. . . .	65
3.4	Champ magnétique dans un solénoïde infini.	66
4.1	Modèle d'une distribution neutre.	70
4.2	Moment dipolaire magnétique d'une spire de courant plane. .	75
4.3	Moment magnétique orbital d'un électron dans un atome. . .	76
5.1	Deux bobines en influence mutuelle.	83
6.1	Puissance dissipée dans un conducteur cylindrique.	90
6.2	Propagation unidimensionnelle dans un milieu absorbant. . .	93
7.1	Invariance par translation parallèlement à un plan de direction fixé.	101
7.2	Modélisation d'un atome par un dipôle électrique oscillant. .	110
7.3	Directivité de l'émission : moyenne du vecteur de Poynting selon l'angle θ	116

Liste des tableaux

2.1	Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : les deux lois de force.	57
2.2	Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : potentiel gravitationnel et énergie potentielle d'une masse plongée dans un champ extérieur.	58
2.3	Théorème de Gauss gravitationnel	58
2.4	Équations locales de la gravitation universelle	59

Première partie

Électromagnétisme

Chapitre 1

Le champ électromagnétique : sources et symétries

Sommaire

1.1	Charges et courants	16
1.1.1	Distributions discrètes ou continues de charges	16
1.1.2	Distribution de courant en volume. Densité de courant	19
1.2	Loi de conservation de la charge	21
1.2.1	Géométrie 1D	21
1.2.2	Équation intégrale de conservation de la charge	22
1.2.3	Flux et opérateur « divergence »	23
1.2.4	Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.	25
1.2.5	Cas du régime stationnaire/permanent	25
1.3	La loi de force de Lorentz	26
1.4	Propriétés de symétrie	28
1.4.1	Principe de Curie	28
1.4.2	Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants	28
1.4.3	Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique	28
1.4.4	Géométrie du champ sur un PS/PAS	30
1.4.5	Exemples	30

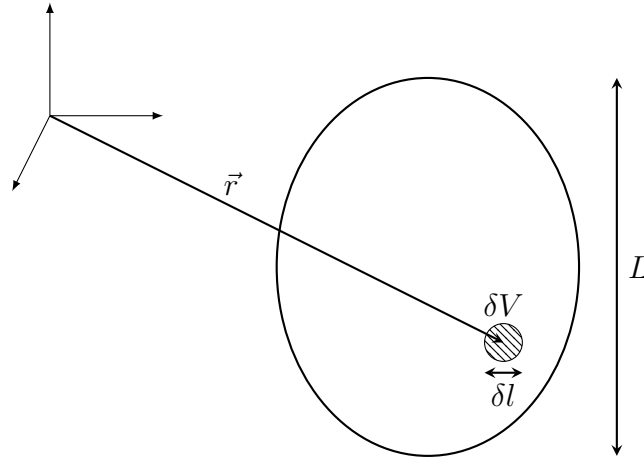


FIGURE 1.1 – Échelle mésoscopique pour une distribution continue de charges.

1.1 Source du champ électromagnétique : charges et courants

1.1.1 Distributions discrètes ou continues de charges. Densité volumique de charge

Distribution discrètes de charges

- Nature « atomique » de la charge : $-e$ (électron), $+Ze$ (noyau) avec $Z \in \mathbb{N}^*$, ions ;
- a priori, charges ne avec $n \in \mathbb{Z}$, localisées en des points précis.

A priori, il y a donc une distribution discrète de charges.

Échelle mésoscopique : distribution continue de charges

La Figure 1.1 présente la matière à l'échelle mésoscopique : on a $\delta V \sim (\delta l)^3$, L est une longueur typique de l'échelle macroscopique (1 mm jusqu'à 1 m). On se donne une longueur a qui est caractéristique de l'échelle microscopique voire nanoscopique, par exemple la distance interatomique ou le libre parcours moyen d'un gaz. Alors

$$a \ll \delta \ll L.$$

Cela vient du fait que dans δV , il y a un très grand nombre de constituants élémentaires, on peut donc faire un traitement statistique, d'autre part on cherche une description assez fine du phénomène. L'échelle mésoscopique est donc entre $0,1 \mu\text{m}$ et $1 \mu\text{m}$. À l'échelle mésoscopique, on adopte une description continue (moyennée) de la matière. Ceci implique une distribution continue de charges.

Densité volumique de charges

Dorénavant, on adopte le modèle continu. La quantité de charge δQ dans un volume δV est proportionnel à ce même volume, on définit alors la **densité volumique de charges** $\rho(\vec{r}, t)$ par

$$\boxed{\delta Q = \rho(\vec{r}, t) \delta V.}$$

Son unité est C m^{-3} .

Exemple 1.1. Dans un conducteur métallique (par exemple le cuivre), il y a n_e électrons libres et n_i ions fixes. Alors

$$\rho = (n_i - n_e)e = 0,$$

à cause de la neutralité du métal.

Exemple 1.2. Dans un semi-conducteur, il y a des électrons (mobiles), des trous (places vides positives) et des ions fixes. Ainsi,

$$\rho = (n_t - n_e + n_i)e.$$

Exemple 1.3. Dans une électrolyte, par exemple $(\text{Na}^+, \text{Cl}^-)$, on a

$$\rho = (n_{\text{Na}^+} - n_{\text{Cl}^-})e.$$

Ainsi, en général, on a

$$\rho = \sum_{\substack{\neq \text{ types} \\ \text{de porteurs}}} n_k q_k,$$

où n_k est en m^{-3} et q_k est en C et représente la charge algébrique d'un « k » porteur.

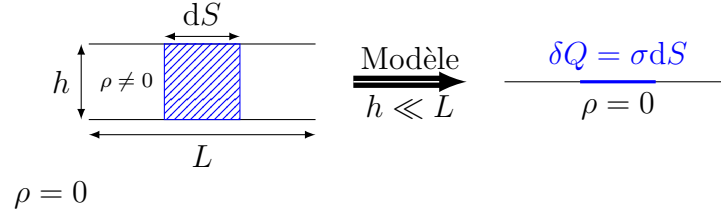


FIGURE 1.2 – Distribution de charges en surface.

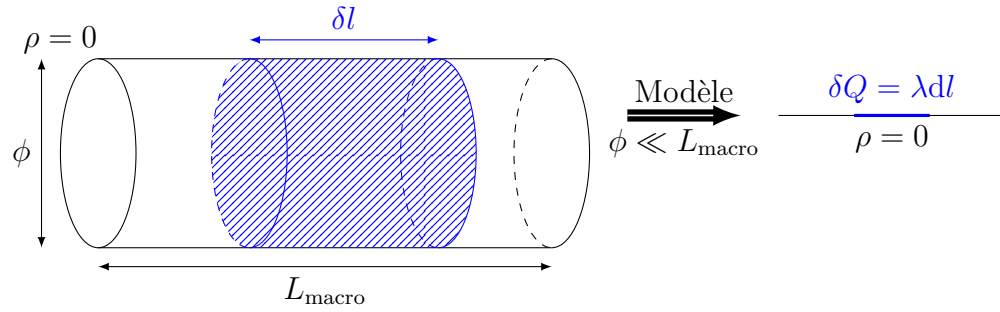


FIGURE 1.3 – Distribution linéique de charges.

Modèles surfacique et linéique

Distribution de charges en surface : « nappe » de charge. Les charges sont localisées au voisinage d'une surface. On considère la Figure 1.2. On considère que l'on a $h \ll L$, et le volume $\delta V = h dS$ contient $\delta Q = \rho h dS$ charges. On modélise donc cette nappe de charge par une distribution surfacique de charges, avec une **densité superficielle de charge** $\sigma = \rho \times h$, en C m^{-2} . Ainsi, on a

$$\delta Q = \sigma dS.$$

Exemple 1.4. On peut penser à un conducteur plan.

Distribution linéique de charges. On considère la Figure 1.3. Il y a $\delta Q = \rho S \delta l$ charges dans la volume bleu. On définit alors la **densité linéique de charge** $\lambda = \rho S$, d'unité C m^{-1} . On a alors

$$\delta Q = \lambda \delta l.$$

Exemple 1.5. On peut penser à un faisceau d'électrons.

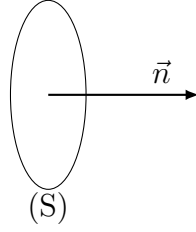


FIGURE 1.4 – Courant algébrique traversant une surface orientée.

1.1.2 Distribution de courant en volume. Densité de courant

Courant algébrique traversant une surface orientée

Pendant dt , δQ traverse algébriquement une surface S . $\delta Q > 0$ si la charge est effectivement transportée selon \vec{n} , voir la Figure 1.4.

Le courant $i(t)$ est alors défini par

$$\delta Q = i(t)dt.$$

Son unité est $A = C s^{-1}$. C'est la charge algébrique traversant la surface orientée (S) par unité de temps.

Densité de courant

Cas à une dimension et un seul type de porteur libre. On considère qu'il y a n porteur libres par mètre cube, q est la charge algébrique d'un porteur, \vec{v} est la vitesse d'ensemble, qui est uniforme et perpendiculaire à (S) , voir la Figure 1.5.

Le nombre δN de porteurs traversant (S) pendant dt est

$$\delta N = nSvdt = n\vec{v} \cdot (S\vec{n})dt,$$

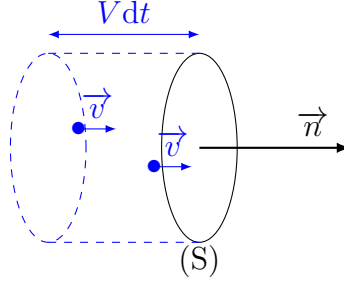
d'où

$$\delta Q = \delta N \times q = nq\vec{v} \cdot (S\vec{n})dt$$

et finalement

$$i = nq\vec{v} \cdot \vec{n}S = \vec{j} \cdot (S\vec{n}),$$

où $\vec{j} = nq\vec{v}$ est la **densité de courant**, d'unité $A m^{-2}$.

FIGURE 1.5 – Densité de courant \vec{j} : modèle introductif.

Dans le cas où la vitesse n'est pas perpendiculaire à (S), le calcul reste le même (en prenant bien en compte le produit scalaire avec la normale extérieure \vec{n}).

Définition de \vec{j} . De manière générale, on définit la densité de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$ par

$$i_s(t) := \iint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS.$$

$i_s(t)$ est le flux de \vec{j} à travers la surface S .

Expression de \vec{j} dans différents milieux conducteurs

Métal. Les électrons libres génèrent une densité de courant

$$\vec{j} = -ne\langle \vec{v} \rangle.$$

Dans un fil de cuivre pour 1 A et une longueur 2 mm, on a

$$n_e \sim \frac{1}{(\text{qq} \cdot 10^{10})^3} \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}.$$

Ainsi, l'ordre de grandeur de la vitesse des électrons dans le métal est

$$\langle v \rangle \sim \frac{1}{10^{29} \times 10^{19} \times 2 \cdot 10^{-6}} \sim 3 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1}.$$

En considérant les électrons comme des particules classiques indépendantes, on a

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{3}{2} k_b T,$$

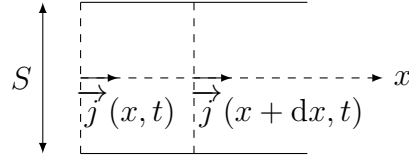


FIGURE 1.6 – Loi de conservation de la charge 1D.

avec $k_B = R/\mathcal{N}_A \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Ainsi,

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \sim 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

pour $m = 0.9^{-30} \text{ kg}$ et $T = 300 \text{ K}$.

Semi-conducteur. On a

$$\vec{j} = n_t e \langle \vec{v}_t \rangle - n_e e \langle \vec{v}_e \rangle.$$

Solution de NaCl. On a

$$\vec{j} = n_{\text{Na}^+} e \langle \vec{v}_{\text{Na}^+} \rangle - n_{\text{Cl}^-} e \langle \vec{v}_{\text{Cl}^-} \rangle.$$

Finalement, on a

$$\boxed{\vec{j} = \sum_{\substack{\neq \text{types} \\ \text{de particules libres}}} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle.}$$

1.2 Loi de conservation de la charge

1.2.1 Géométrie 1D

On considère la Figure 1.6.

La charge entrant algébriquement dans Sdx pendant dt est

$$\begin{aligned} \delta Q_e &= j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt, \\ &= S dt [j(x, t) - j(x + dx, t)], \\ &= -S dt dx \frac{\partial j}{\partial x}(x, t). \end{aligned}$$

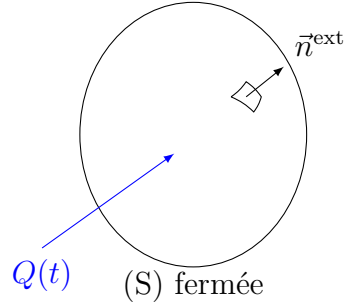


FIGURE 1.7 – Équation intégrale de conservation de la charge.

La variation dQ de la charge dans la tranche Sdx est

$$\begin{aligned} dQ &= \rho(x, t + dt)Sdx - \rho(x, t)Sdx, \\ &= Sdx (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)), \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t)Sdxdt. \end{aligned}$$

Postulat : conservation de la charge. On doit avoir

$$dQ = \delta Q_e.$$

Alors l'équation locale de la conservation de la charge s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = 0.$$

1.2.2 Équation intégrale de conservation de la charge

Dans le cas général, on se reporte à la Figure 1.7.

Le flux sortant de \vec{j} est

$$i_S^{\text{ext}} = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS.$$

La conservation de la charge s'écrit alors

$$\frac{dQ}{dt} = -i_S^{\text{ext}}(t) = -\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS.$$

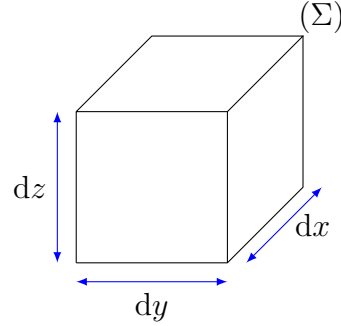


FIGURE 1.8 – Flux de courant sortant en trois dimensions.

1.2.3 Flux et opérateur « divergence »

Dans le cas unidimensionnel de la Figure 1.6, en notant (Σ) la surface fermée comprise entre x et $x + dx$ et les bords en haut et en bas, on a

$$\begin{aligned}
 i_{\Sigma}^{\text{ext}}(t) &= \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma, \\
 &= \iint_{\text{bords}} \vec{j} \cdot \vec{n}_{\text{bords}} d\Sigma + (-\vec{j}(x, t) \times S) + (j(x + dx, t) \times S), \\
 &= 0 + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \times S dx, \\
 &= \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \times V.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le flux est proportionnel au volume.

Dans le cas à trois dimensions, on se reporte à la Figure 1.8. On se donne un champ $\vec{A}(x, y, z, t)$, et on suppose le cube assez petit pour qu'il soit uniforme sur chaque face. On numérote les faces (1 : gauche, 2 : droite, 3 : bas, 4 : haut, 5 : derrière, 6 : devant).

On cherche la quantité $\delta\phi^{\text{ext}}$ sortant du cube à cause du flux de \vec{A} via la surface de (Σ) . On définit donc

$$\delta\phi^{\text{ext}} := \oiint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma.$$

On a alors

$$(1) \quad \vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_y : \delta\phi_1^{\text{ext}} = -A_y(x, y, z, t) \times (dx dz);$$

- (2) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u}_y : \delta\phi_2^{\text{ext}} = +A_y(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}z) ;$
- (3) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_z : \delta\phi_3^{\text{ext}} = -A_z(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}y) ;$
- (4) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u}_z : \delta\phi_4^{\text{ext}} = +A_z(x, y, z, t) \times (\text{d}x\text{d}y) ;$
- (5) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u}_x : \delta\phi_5^{\text{ext}} = -A_x(x, y, z, t) \times (\text{d}y\text{d}z) ;$
- (6) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u}_x : \delta\phi_6^{\text{ext}} = +A_x(x, y, z, t) \times (\text{d}y\text{d}z).$

On fait la somme algébrique

$$\begin{aligned}
 1 + 2 : & \frac{\partial A_y}{\partial y}(x, y, z, t) \times \text{d}y\text{d}x\text{d}z, \\
 3 + 4 : & \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z, t) \times \text{d}z\text{d}x\text{d}y, \\
 5 + 6 : & \frac{\partial A_x}{\partial x}(x, y, z, t) \times \text{d}x\text{d}y\text{d}z.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\delta\phi^{\text{ext}} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \times \text{d}V = (\text{div } \vec{A})\text{d}V.$$

Théorème-définition d'Ostrogradski. Soit $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 . Alors on a

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \text{d}S = \iiint_V \text{div } \vec{A} \text{d}V.$$

En coordonnées cartésiennes, la divergence de \vec{A} s'écrit

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

L'opérateur symbolique (réservé aux coordonnées cartésiennes) est « na-
bla », qui s'écrit

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

On a alors $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

1.2.4 Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.

Pour une géométrie quelconque, la variation de $Q(t)$ contenue dans un volume V est

$$dQ = \iiint_V [\rho(\vec{r}, t) - \rho(\vec{r}, t + dt)] dV,$$

d'où

$$dQ = \left(\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) dV \right) dt.$$

La charge algébrique δQ_S^{ext} traversant une surface S orientée vers l'extérieur pendant dt est

$$\delta Q_S^{\text{ext}} = i_S^{\text{ext}}(t) \times dt = \left[\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS \right] dt.$$

Or on a

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{j} \cdot dV,$$

donc

$$\delta Q_S^{\text{ext}} = \left(\iiint_V (\text{div } \vec{j} dV) \right) dt.$$

La conservation de la charge s'écrit alors $dQ = -\delta Q_S^{\text{ext}}$, qui est une équation globale :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) dV = 0.$$

Ceci ayant lieu pour tout volume V de taille au moins mésoscopique, on a l'équation locale de la conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

1.2.5 Cas du régime stationnaire/permanent

Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{j} = 0.$$

En conséquence,

(i) \vec{j} est à flux conservatif. En effet,

$$i_S^{\text{ext}} = \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{j} dV = 0.$$

- (ii) $i = \text{constante}$ le long d'un tube de courant (régime permanent). Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. Ces lignes de courant sont des courbes tangentes à \vec{j} en tout point.
- (iii) Loi des nœuds : en un nœud où différents courants arrivent, on a

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k i_k = 0,}$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$.

1.3 Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz

On se demande quelle est l'action (à distance) de la distribution de charges et courants sur une particule chargée q de vitesse \vec{v} , voir la Figure 1.9.

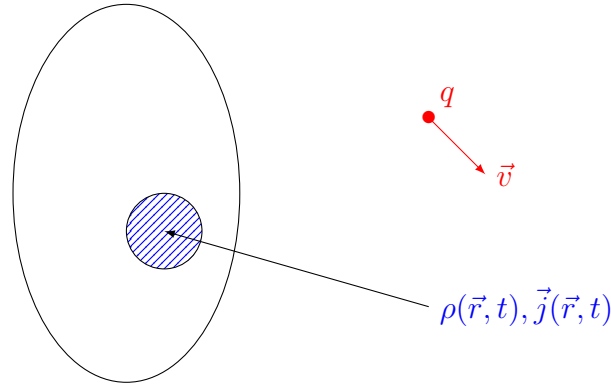
Cette action se fait via le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$, conséquence directe de $[\rho, \vec{j}]$. La loi de force de Lorentz s'écrit

$$\boxed{\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) .}$$

C'est un postulat. \vec{E} est polaire et est considéré comme un « vrai » vecteur. \vec{B} est axial et est considéré comme un « pseudo-vecteur ».

Force de Lorentz méso/macroscopique : distribution continue de charges et courants. Il y a des porteurs de charges de type k : charges q_k , nombre par unité de volume $n_k [\text{m}^{-3}]$ et vitesse moyenne $\langle \vec{v}_k \rangle$. Soit dV un volume mésoscopique contenant ces porteurs. Quelle est la force $d\vec{F}_{em}$ subie par ce volume ? Un charge k subit en moyenne

$$\vec{F}_{L_k} = q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right) .$$



\mathcal{D} : distribution
de charges et/ou
de courants

FIGURE 1.9 – Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz.

Dans dV , il y a $n_k dV$ porteurs k . Ainsi, ils subissent

$$n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right) dV.$$

En sommant sur tout les porteurs k , on a

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{em}} &= \left[\sum_{\neq k} n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B} \right) \right] dV, \\ &= \left(\left(\sum_{\neq k} n_k q_k \right) \vec{E} + \left(\sum_{\neq k} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle \right) \wedge \vec{B} \right), \\ &= (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dV. \end{aligned}$$

Ainsi, la force volumique est

$$\boxed{\vec{f}_{\text{vol}}^{\text{em}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.}$$

Exemple 1.6. Dans un métal, c'est le force de Laplace : on a $\rho = 0$ d'où

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{em}} = (\vec{j} \wedge \vec{B}) dV.}$$

Pour une géométrie filiforme, on a $\vec{j} dV = jsdl = i\vec{dl}$, où s est la section du fil. Ainsi

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{em}} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}.}$$

1.4 Propriétés de symétrie du champ électromagnétique

1.4.1 Principe de Curie

[P. Curie, 1905] Les effets ont au moins les symétries (et invariances) des causes.

1.4.2 Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants

(π) est un plan de symétrie pour une distribution de charges et de courants \mathcal{D} si

$$\rho(\pi(M), t) = \rho(M, t), \quad \vec{j}(\pi(M), t) = S_\pi(\vec{j}(M, t)),$$

où $\pi(M)$ désigne le symétrique du point M et S_π désigne l'application symétrie liée au plan (π) .

C'est un plan d'anti-symétrie si

$$\rho(\pi(M), t) = -\rho(M, t), \quad \vec{j}(\pi(M), t) = -S_\pi(\vec{j}(M, t)).$$

Exemple 1.7 (Solénoïde fini). Un solénoïde (enroulement jointif) contenant N spires possède un PS et un PAS, voir la Figure 1.10. Notons que si le solénoïde est considéré comme infini, alors tout plan perpendiculaire à l'axe est un plan de symétrie.

Exemple 1.8 (Condensateur plan à armatures circulaires). Tout plan contenant l'axe est un plan de symétrie. Tout plan qui y est perpendiculaire est un plan d'antisymétrie, voir la Figure 1.11.

1.4.3 Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique

Principe de Curie : si la cause (charges, courants) présente une propriété de symétrie, alors l'effet (\vec{F}_L) présente aussi cette propriété de symétrie.

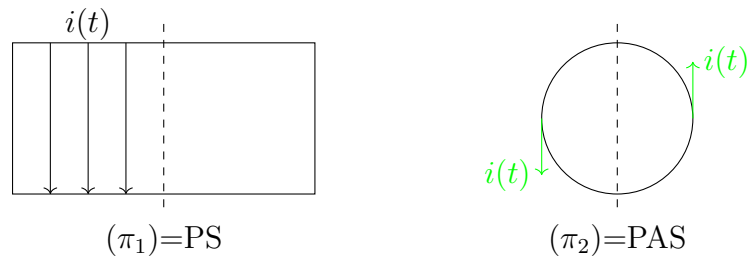


FIGURE 1.10 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un solénoïde.

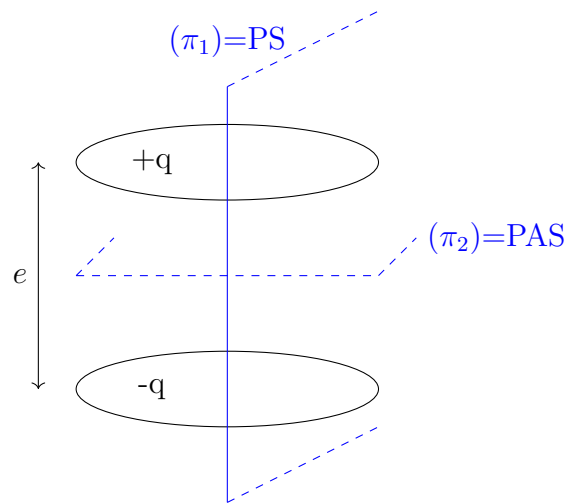


FIGURE 1.11 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un condensateur plan.

Pour le champ électromagnétique, on en déduit :

- un PS pour \mathcal{D} est un PS pour \vec{E} et un PAS pour \vec{B} ;
- un PAS pour \mathcal{D} est un PAS pour \vec{E} et un PS pour \vec{B} .

1.4.4 Géométrie du champ électromagnétique sur un PS/PAS

On en déduit donc que

- Pour un PS, on a

$$\vec{E}(\pi(M)) = \vec{E}(M) = S_\pi(\vec{E}(M)),$$

donc \vec{E} appartient au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie. Au contraire, on a

$$\vec{B}(\pi(M)) = \vec{B}(M) = -S_\pi(\vec{B}(M)),$$

donc \vec{B} est perpendiculaire au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie.

- Pour un PAS, on a

$$\vec{E} = -S_\pi(\vec{E}),$$

donc $\vec{E} \perp \text{PAS}$, et

$$\vec{B} = S_\pi(\vec{B}),$$

donc $\vec{B} \in \text{PAS}$.

1.4.5 Exemples

La méthode est la suivante :

1. Faire un choix d'un système de coordonnées adapté ;
2. Observer les invariances par translation/rotation de la distribution ;
3. Appliquer le principe de Curie : symétries et géométrie du champ.

Pour un condensateur plan d'axe (Oz) , ou un solénoïde d'axe (Oz) , toute rotation autour de l'axe (Oz) laisse la distribution invariante (symétrie de révolution d'axe (Oz)). Ainsi, la variable θ est non pertinente. De plus, tout

plan contenant l'axe est un PAS. Donc $\vec{E}(r, z, t) = E(r, z, t)\vec{u}_\theta$ et $\vec{B}(r, z, t) = \begin{pmatrix} B_r(r, z, t) \\ 0 \\ B_z(r, z, t) \end{pmatrix}$.

Chapitre 2

Électrostatique

Les charges sont immobiles et on est en régime stationnaire. Il n'y a donc pas de courants.

Sommaire

2.1	Loi de Coulomb	34
2.1.1	Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	34
2.1.2	Principe de superposition	35
2.1.3	Ordres de grandeur	35
2.2	Circulation du champ électrostatique	36
2.2.1	Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle	36
2.2.2	Potentiel créé par une charge ponctuelle	37
2.2.3	Circulation du champ le long d'un contour fermé orienté	37
2.2.4	Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient	38
2.2.5	Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique	39
2.3	Flux du champ électrostatique	39
2.3.1	Charge ponctuelle : flux à travers une sphère	39
2.3.2	Théorème de Gauss	40
2.3.3	Comment appliquer le théorème de Gauss	41
2.3.4	Exemples fondamentaux	41

2.3.5	Condensateur plan sans effet de bord. Capacité . .	46
2.4	Topographie du champ électrostatique	49
2.4.1	Lignes de champ. Tubes de champ	49
2.4.2	Surfaces équipotentielles	49
2.4.3	Resserrement ou évasement des lignes de champ .	49
2.4.4	Visualisation de cartes de champ et de potentiel .	51
2.5	Équations locales de l'électrostatique	51
2.5.1	Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss .	51
2.5.2	Circulation conservative locale	52
2.5.3	Opérateur rotationnel	53
2.5.4	Équation de Maxwell-Faraday	54
2.5.5	Vue d'ensemble des différentes formulations des lois de l'électrostatique	54
2.6	Équations de Poisson et de Laplace	55
2.6.1	Équation de Poisson en présence de charges	55
2.6.2	Équation de Laplace. Résolution numérique	55
2.7	Analogies avec la gravitation universelle	56
2.7.1	Les deux lois de force. Grandeurs analogues	56
2.7.2	Potentiel gravitationnel	56
2.7.3	Théorème de Gauss gravitationnel	56
2.7.4	Équations locales de la gravitation universelle . . .	57
2.7.5	Énergie potentielle de gravitation d'un astre à sy- métrie sphérique	57

2.1 Loi de Coulomb

2.1.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On considère le système de deux particules chargées donné à la Figure 2.1.

On a

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

ϵ_0 est la permittivité électrique absolue du vide, avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et

$$c \approx 3.10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad \mu_0 := 4\pi.10^{-7} \text{ H m}^{-1}, \quad \epsilon_0 \approx 8.8.10^{-12} \text{ F m}^{-1}.$$

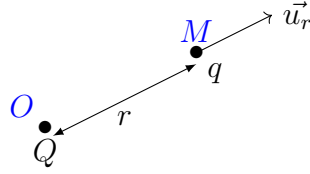


FIGURE 2.1 – Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

Champ électrostatique On a une interaction à distance. Notamment,

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = q \vec{E}(M),$$

avec $\vec{E}(M)$ indépendant de q . Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

C'est la Loi de Coulomb. On a $[\vec{E}] = \text{V m}^{-1}$.

2.1.2 Principe de superposition

C'est une conséquence de la linéarité des équations de Maxwell. S'il y a N particules de charge Q_i , alors le champ électrostatique créé au point M sur la particule de charge q est

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}.$$

2.1.3 Ordres de grandeur

Champ électrostatique de l'atome d'hydrogène L'électron autour du noyau de l'atome d'hydrogène est à une distance $a_0 = 53 \text{ pm}$ du noyau (rayon de Bohr). On a

$$\vec{F} = -q \vec{E},$$

avec

$$E_{\text{proton}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \approx 5.10^{11} \text{ V m}^{-1}.$$

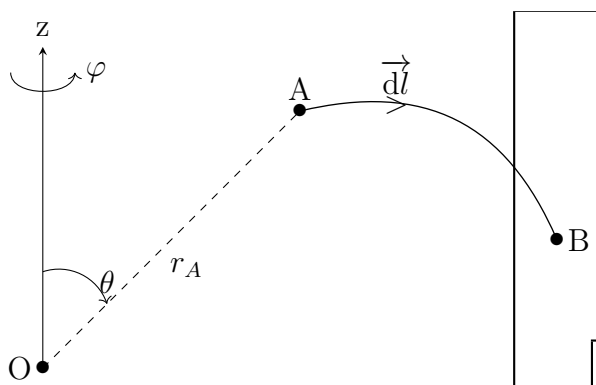


FIGURE 2.2 – Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle.

Notons que le rapport entre la force de gravitation et la force électrostatique exercée sur l'électron est

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{gravitation}}^{p \rightarrow e}\|}{\|\vec{F}_{\text{es}}^{p \rightarrow e}\|} = \frac{\mathcal{G}m_p m_e}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \approx 4.10^{-40}.$$

Champ disruptif de l'air On a $E \sim 10^6 \text{ V m}^{-1}$.

Échelle macroscopique La batterie d'un téléphone portable génère un champ électrostatique d'environ

$$E \approx \frac{V}{d} \approx \frac{\text{qq V}}{\text{qq cm}} \approx 10^2 \text{ V m}^{-1}.$$

2.2 Circulation conservative du champ électrostatique

2.2.1 Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle

On considère le système décrit par la Figure 2.2.

On cherche la circulation de \vec{E} entre A et B, c'est-à-dire

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

En coordonnées sphériques, on a

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi.$$

Ainsi,

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right),$$

qui ne dépend que de A et B et pas du chemin choisi. Par définition, le potentiel électrostatique $V(M) = V(x, y, z) = V(r, \theta, \varphi)$ est défini par

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B),$$

et on a $[V] = V$.

2.2.2 Potentiel créé par une charge ponctuelle

On a

$$V(M) = V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

où l'on prend la constante nulle à l'infini. Pour une collection de charges ponctuelles, on utilise le principe de superposition :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}.$$

2.2.3 Circulation du champ le long d'un contour fermé orienté

Pour deux points A et B du contour \mathcal{C} , si $d\vec{l}_1$ connecte A à B et $d\vec{l}_2$ connecte B à A, alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 = V(A) - V(B) + V(B) - V(A) = 0,$$

donc \vec{E} est à circulation conservative. C'est une équation intégrale.

2.2.4 Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient

Pour deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ connectés par $\vec{dl} = (dx, dy, dz)$, on a

$$\begin{aligned}
 \vec{E} \cdot \vec{dl} &= \vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'}, \\
 &= V(M) - V(M'), \\
 &= E_x dx + E_y dy + E_z dz, \\
 &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz), \\
 &= dx \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) + dy \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) + dz \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z),
 \end{aligned}$$

ceci étant valide pour tout déplacement \vec{dl} , donc

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Ainsi,

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

En coordonnées cartésiennes, on a simplement $\vec{E} = - \vec{\nabla} V$. C'est une équation locale.

2.2.5 Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique

On reprend le système décrit par la Figure 2.2. On souhaite calculer cette fois-ci le travail développé par la force électrostatique. On a

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}^{\text{el}} &= \int_A^B \vec{F}_{\text{el}} \cdot d\vec{l}, \\ &= \int_A^B q \vec{E}^{\text{ext}} \cdot d\vec{l}, \\ &= -q \int_A^B dV^{\text{ext}}, \\ &= -q [V^{\text{ext}}(B) - V^{\text{ext}}(A)]. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une énergie potentielle E_p^{ext} telle que

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{el}} = -\Delta E_p^{\text{ext}},$$

d'où $E_p^{\text{ext}} = qV^{\text{ext}}$. Par convention, on prend $E_p^{\text{ext}}(\infty) = 0$.

On définit aussi l'électron-volt. Il s'agit de l'énergie à fournir pour amener un électron du potentiel 0V au potentiel 1V. Ainsi,

$$\boxed{1\text{eV} = e \times 1\text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}.}$$

2.3 Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss

2.3.1 Charge ponctuelle : flux à travers une sphère

On considère une charge ponctuelle Q en un point O et une sphère S de rayon r de centre O . On note

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Alors en notant \vec{n}^{ext} le vecteur normal à la surface S ,

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.}$$

2.3.2 Théorème de Gauss

Une charge ponctuelle à l'intérieur d'une surface fermée

Soit V un volume quelconque de l'espace contenant une charge Q . On note S une sphère centrée en Q contenue dans V , et S' le reste de la surface correspondant à V . En un point M quelconque du volume, on a

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

On a

$$\oiint_{S \cup S'} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV,$$

et pour un problème à symétrie sphérique, on a pour tout $r \neq 0$,

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r).$$

Ainsi, $\text{div } \vec{E} = 0$ pour tout $r \neq 0$, d'où

$$\iiint_V \text{div } \vec{E} dV = 0 = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS + \oiint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS',$$

et les deux normales extérieures sont opposées l'une de l'autre. Finalement,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \oiint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{u}_r dS' = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ainsi, si une surface S contient une charge Q , on a toujours

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.}$$

Charge ponctuelle à l'extérieur d'une surface fermée

Dans ce cas, on a directement

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV = 0.}$$

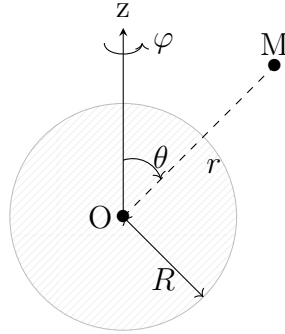


FIGURE 2.3 – Sphère uniformément chargée en volume ou en surface.

Bilan

Si \vec{E} est le champ total créé par N charges Q_i , alors

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Ici, Q^{int} est la somme de toutes les charges qui sont à l'intérieur de la surface S .

2.3.3 Comment appliquer le théorème de Gauss

Le but est de calculer des champs électrostatiques \vec{E} dans des cas de hautes symétries. La méthode est la suivante :

- (α) Invariance et symétries : donne la géométrie de \vec{E} ;
- (β) Choisir une surface de Gauss adaptée (ou bien $\vec{E} \parallel \vec{n}^{\text{ext}}$ avec E qui est constant sur la surface ou bien $\vec{E} \perp \vec{n}^{\text{ext}}$) avec un dessin ;
- (γ) Conclure.

2.3.4 Exemples fondamentaux**Sphère uniformément chargée en volume ou en surface**

On considère le système donnée à la Figure 2.3.

(α) Toute rotation d'axe passant par O laisse la distribution invariante, donc

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r) = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ E_\theta(r) \\ E_\varphi(r) \end{pmatrix}.$$

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des PS valable pour tout point M . Ainsi, \vec{E} est radial et $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

(β) La bonne surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r variable.

(γ) On a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dR = \oiint_S E(r) dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r.}$$

Boule uniformément chargée en volume. La densité ρ est constante et vaut $\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ où Q est la charge présente dans l'entièreté de la boule. Ainsi, pour $r \geq R$, on a

$$Q_{\text{int}}(r \geq R) = Q,$$

d'où

$$\boxed{\vec{E}(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r.}$$

Si $r \leq R$, alors on a

$$Q_{\text{int}}(r \leq R) = \iiint \rho dV = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\vec{E}(r \leq R) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \left(\frac{r}{R}\right) \vec{u}_r.}$$

Sphère uniformément chargée en surface. Pour $r > R$, on a le même résultat que précédemment. Pour $r < R$, on a $Q_{\text{int}}(r < R) = 0$, donc $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. \vec{E} est donc discontinu à la surface de la sphère (variation d'amplitude égal à σ/ε_0). C'est un modèle non physique.

Cylindre infini uniformément chargé en volume ou en surface

On considère un cylindre de rayon R d'axe (Oz) . La distribution de charge est à symétrie cylindrique « infinie ».

- (α) Il y a une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) et une invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz) . De plus, tout plan perpendiculaire à (Oz) est un plan de symétrie. Enfin, tout plan contenant (Oz) est un plan de symétrie. Finalement, on a

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.}$$

Remarque 2.1. Si la distribution est non infinie, a priori on a

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_r(r, z) \\ 0 \\ e_z(r, z) \end{pmatrix}.$$

- (β) La surface de Gauss que l'on prend est un cylindre d'axe (Oz) de rayon r , de hauteur de h , formé par deux disques perpendiculaires à l'axe (Oz) .
- (γ) Le théorème de Gauss donne

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0},$$

où $S = \Sigma \cup S_1 \cup S_2$ où S_1 et S_2 correspondent aux disques. Ainsi,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 + 0 + \iint_{\Sigma} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\Sigma = E(r) \times 2\pi rh.$$

Ainsi,

$$\boxed{E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{2\pi\varepsilon_0 hr}.$$

Cylindre uniformément chargé en volume. On considère une tranche d'hauteur h , on a $Q = \rho h\pi R^2$. On introduit donc

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{h} = \rho\pi R^2.}$$

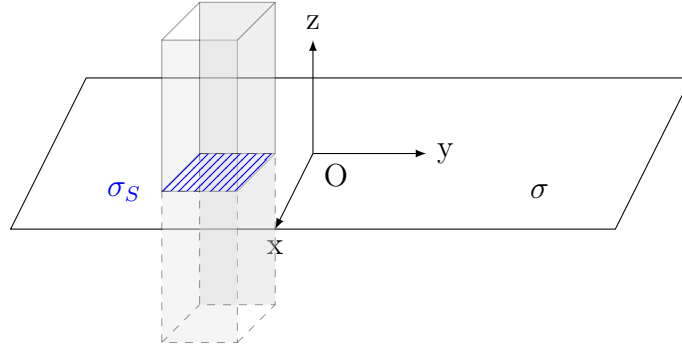


FIGURE 2.4 – Plan uniformément chargé en surface.

C'est la charge linéique en C m^{-1} . Pour $r \geq R$, on a $Q_{\text{int}}(r \geq R) = \lambda h$, d'où

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

Si $r \leq R$, on a $Q_{\text{int}}(r \leq R) = \rho\pi r^2 h = \lambda h \left(\frac{r}{R}\right)^2$. Ainsi,

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r.$$

Cylindre uniformément chargé en surface. Si $r < R$, on a $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. Si $r > R$, on a $Q_{\text{int}}(r > R) = Q = \lambda h$, donc $\vec{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$. À nouveau, il y a une discontinuité égale à σ/ϵ_0 avec $\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R}$. Elle est due au modèle surfacique.

Plan infini uniformément chargé en surface

On considère le système décrit à la Figure 2.4.

Par plan infini, on entend que les longueurs caractéristiques du plan selon les axes x et y sont très grandes devant l'épaisseur du plan : $L_x, L_y \gg e$.

- (α) Il y a invariance par translation par rapport aux axes (Ox) et (Py) . Ainsi, le champ ne dépend pas de x ni de y . Pour les symétries, tout plan parallèle à (xOy) est un PS, donc $E_y = 0$. Tout plan parallèle à (yOz) est un PS, donc $E_x = 0$. Ainsi, on a $\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$. Enfin, le fait que la plan (xOy) est un PS implique $E(-z) = -E(z)$.

- (β) La surface de Gauss est un cylindre de générateur parallèle à (Oz) , de hauteur $2z$ centré sur le plan $z = 0$.
- (γ) On a

$$\begin{aligned}
 \oiint_{S=S_1 \cup S_2 \cup \Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \\
 &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \\
 &= 0 + \iint_{S_1} E(z) \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z dS \\
 &\quad + \iint_{S_2} E(-z) \vec{u}_z \cdot (-\vec{u}_z) dS, \\
 &= E(z)S + E(z)S.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z,}$$

et

$$\boxed{\vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z.}$$

La différence en $z = 0$ vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Couche de charges infinie uniformément chargée en volume. On se réfère à la Figure 2.5.

- (α) Il y a invariance par translation selon (Ox) et (Oy) , donc \vec{E} ne dépend ni de x , ni de y . Les symétries sont les mêmes que précédemment, on a donc $\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$ et $E(-z) = -E(z)$.
- (β) La surface de Gauss est la même que précédemment, mais avec la base dans le plan $z = 0$.
- (γ) On a donc

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 + 0 + E(z) \times S = \frac{Q_{\text{int}}(z)}{\varepsilon_0}.$$

Si $z \geq e/2$, on a $Q_{\text{int}}(z \geq e/2) = \rho \times S \times e/2$, donc

$$\boxed{E(z \geq e/2) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}, \quad E(z \leq -e/2) = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}.}$$

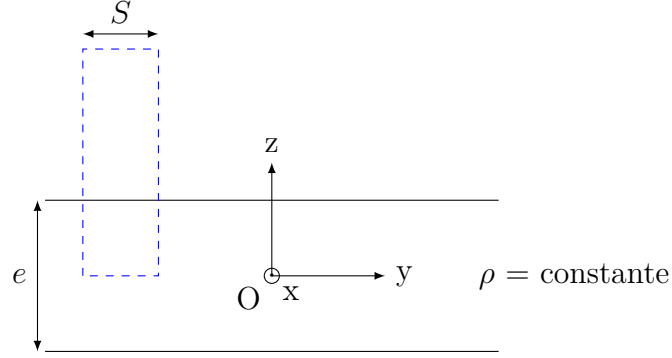


FIGURE 2.5 – Couche de charges infinie uniformément chargée en volume.

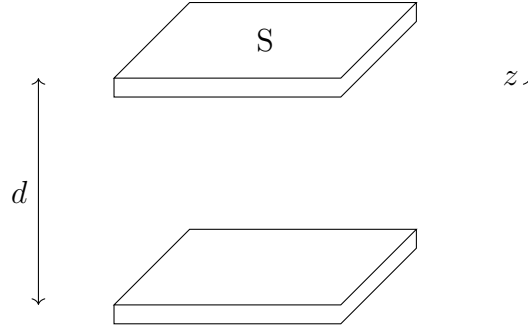


FIGURE 2.6 – Condensateur plan sans effet de bord.

Si $0 \leq z \leq e/2$, on a $Q_{\text{int}}(z) = \rho \times S \times z$, donc

$$E(0 \leq z \leq e/2) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}, \quad E(-e/2 \leq z \leq 0) = -\frac{\rho z}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi, E est continu. Dans le limite $e \rightarrow 0$, on retrouve le modèle de la nappe de charges avec $\rho e = \sigma$ fini.

2.3.5 Condensateur plan sans effet de bord. Capacité

Condensateur plan sans effet de bord

Le condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques se faisant face, séparées par un isolant ou un diélectrique. On se réfère à la Figure 2.6.

On fait l'hypothèse que $d \ll \sqrt{S}$, ce qui correspond au fait que les armatures sont « infinies » : il n'y a pas d'effet de bords. Chaque armature est donc un plan infini sans épaisseur.

Les deux plans sont soumis à une tension U : il y a une accumulation de charges opposées sur les deux plans en regard.

Champ électrique

- (α) Il y a invariance par translation sur (Ox) et (Oy) , donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$.
 Tout plan parallèle à (xOz) et (yoZ) est un PS, donc $E_x = E_y = 0$.
 Finalement,

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z.$$

Ainsi, \vec{E} est perpendiculaire aux armatures. Si \vec{dl} est un déplacement infinitésimal sur l'armature, on a

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 = -dV = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + 0 \right].$$

Donc $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ sur une armature, donc V est constant sur une armature. On note V_1 le potentiel de l'armature située en $z = d/2$ et V_2 celle en $z = -d/2$. On a $U = V_1 - V_2$. Or V est défini à une constante près. On choisit donc $V_1 = U/2$ et $V_2 = -U/2$. Cela entraîne donc que le plan $z = 0$ est un PAS. Donc les charges (surfaiques) valent $+\sigma$ sur l'armature haute, et $-\sigma$ sur l'armature basse. On applique le théorème de superposition comme selon la Figure 2.7.

Ainsi, entre les armatures, on a

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z,}$$

qui est uniforme (lié aux effets de bord non présents). En dehors du condensateur, on a $\vec{E} = \vec{0}$.

Capacité

En notant Q les charges sur les armatures ($+Q$ en haut, $-Q$ en bas), on définit la capacité du condensateur par

$$\boxed{C = \frac{Q}{U},}$$

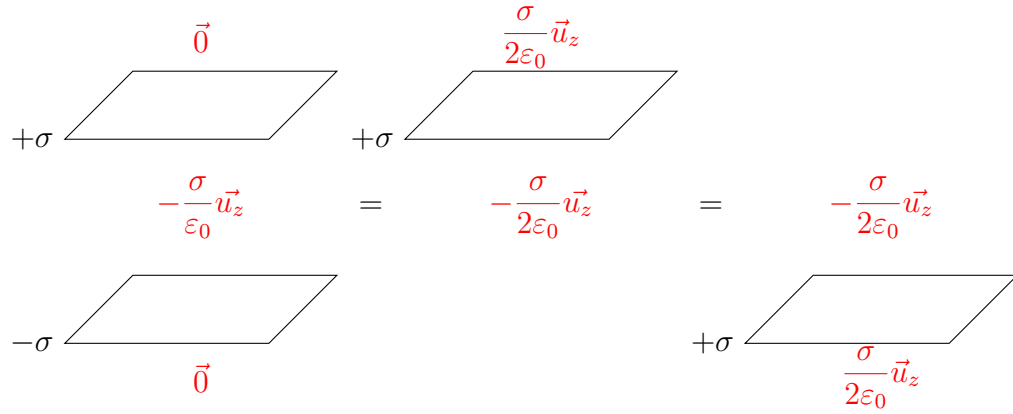


FIGURE 2.7 – Théorème de superposition pour établir l'expression du champ électrostatique dans un condensateur plan.

qui est strictement positif et qui est en F. On peut exprimer la capacité avec les distances caractéristiques présentées à la Figure 2.6. En effet, en notant M_1 un point de l'armature haute et M_2 un point de l'armature basse, on a

$$\begin{aligned} \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_1^2 -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z), \\ &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_1^2 dz, \\ &= \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2 = U,$$

et finalement

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}.$$

Ordre de grandeur. Pour $d = 0,1\text{mm}$, $S = 1\text{cm}^2$, on a

$$C \# 10\text{pF}.$$

De plus, plus S augmente, plus la capacité augmente. Enfin, en utilisant un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ avec $\varepsilon_r > 1$, on augmente la capacité. On peut arriver à des capacités de l'ordre du μF .

2.4 Topographie du champ électrostatique

2.4.1 Lignes de champ. Tubes de champ

Ligne de champ. Une ligne de champ est une courbe tangente en tout point au champ électrostatique \vec{E} . Quelques exemples sont donnés à la Figure 2.8.

Les lignes de champ divergent à partir des $q > 0$ et convergent vers les $q < 0$.

Tube de champ. Un tube de champ est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

2.4.2 Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est définie par

$$\{M \mid V(M) = \text{constante}\}.$$

Sur une surface équipotentielle, on a $dV = 0 = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Ceci vaut pour tout déplacement le long de la surface $d\vec{l}$.

Orientement des lignes de champ et sens de variation de V . On a $\vec{E} = -\text{grad } V$. Soit une ligne de champ (orientée selon \vec{E}). Alors

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV > 0,$$

donc V décroît le long de la ligne de champ. On peut dire que \vec{E} « descend » les potentiels.

2.4.3 Resserrement ou évasement des lignes de champ

C'est le principe du paratonnerre, voir la Figure 2.9.

On a

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 = 0 + E_2 S_2 - E_1 S_1,$$

d'où

$$E_2 = E_1 \times \frac{S_1}{S_2} > E_1.$$

$$q > 0$$

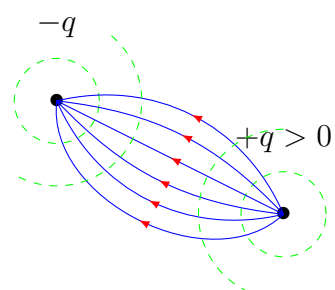
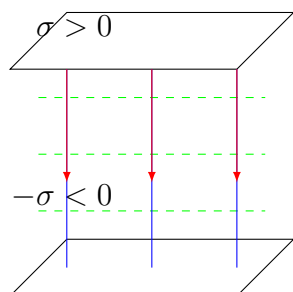
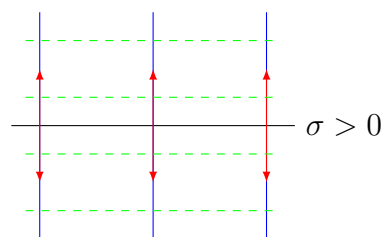
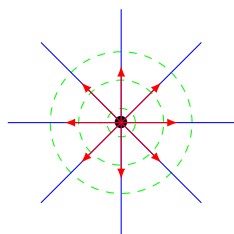


FIGURE 2.8 – Topographie du champ électrostatique : exemples de lignes de champ. Les courbes en vert sont les équipotentiels.

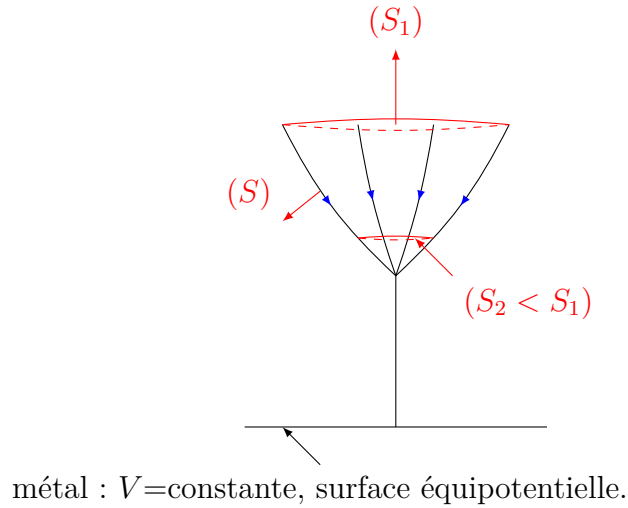


FIGURE 2.9 – Resserrement des lignes de champ : principe du paratonnerre.

Ainsi, $\|\vec{E}\|$ augmente si les lignes de champ se resserrent, et diminue si les lignes de champ s'écartent.

2.4.4 Visualisation de cartes de champ et de potentiel

Un exemple interactif est disponible [sur le site de Geneviève Tulloue via l'université de Nantes](#).

2.5 Équations locales de l'électrostatique

2.5.1 Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss

Le théorème de Gauss couplé au théorème d'Ostrogradski donne

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV.$$

Ainsi, pour tout volume V , on a

$$\iiint_V \left(\text{div } \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0,$$

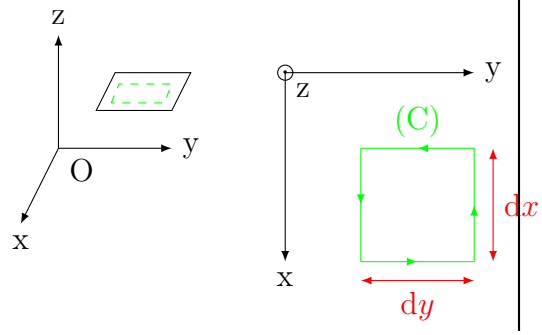


FIGURE 2.10 – Circulation conservative locale en coordonnées cartésiennes.

d'où on entre l'équation de Maxwell-Gauss, qui est une version locale du théorème de Gauss :

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.$$

2.5.2 Circulation conservative locale

On se réfère à la Figure 2.10.

On se place dans un plan parallèle à (xOy) , de côté z . On a

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0, \\ &= E_x(x, y, z)dx + E_y(x + dx, y, z)dy \\ &\quad - E_x(x, y + dy, z)dx - E_y(x, y, z)dy, \\ &= -dy \frac{\partial E_x}{\partial y}(x, y, z)dx + dx \frac{\partial E_y}{\partial x}(x, y, z)dy = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

la circulation est donc proportionnelle à l'aire du carré. De même dans les autres plans, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dx dz &= 0, \\ \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy dz &= 0. \end{aligned}$$

La circulation du champ est donc proportionnelle à l'aire sur laquelle s'appuie le contour. L'idée est donc de passer d'une circulation $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ à un flux à travers une surface.

2.5.3 Opérateur rotationnel

Théorème-définition de Stokes. Soit $\vec{A}(x, y, z)$ champ de vecteurs \mathcal{C}^1 . Alors on a

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) \cdot \vec{N} d\Sigma.$$

Ici, (Σ) est une surface (non fermée) s'appuyant sur (C) et orientée selon la règle du tire-bouchon.

Expression de $\vec{\text{rot}} \vec{A}$ en cartésienne. On a

$$\begin{aligned} \oint_{C \in (xOy)} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \times dx dy, \\ &= (\vec{\text{rot}} \vec{A})_z dy dx, \\ &= (\vec{\text{rot}} \vec{A}) \cdot \vec{u}_z dx dy, \end{aligned}$$

donc

$$(\vec{\text{rot}} \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

De même pour les deux autres coordonnées, donc

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Avec l'opérateur nabla (en cartésienne), on a

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \vec{\text{rot}} \vec{A}.$$

2.5.4 Équation de Maxwell–Faraday

Sur un contour fermé C avec une surface Σ supportée par ce contour, on a

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} d\Sigma,$$

ceci vaut pour tout contour C , d'où on en tire l'équation de Maxwell–Faraday, qui est une équation locale :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} .}$$

Lien avec le potentiel. Soit $f(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$ car

$$\oint_C \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = 0 = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot \vec{N} d\Sigma,$$

donc

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \iff \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V .}$$

2.5.5 Vue d'ensemble des différentes formulations des lois de l'électrostatique

On choisit un des points de vue, qui sont tous équivalents.

Loi fondamentale

- Loi de Coulomb : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$
- Principe de superposition

Formulation intégrale

- Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$
- Circulation conservative de \vec{E} : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$

Formulation locale

- Maxwell–Gauss : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (flux de \vec{E})
- Maxwell–Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \iff \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ (circulation de \vec{E})

2.6 Équations de Poisson et de Laplace

2.6.1 Équation de Poisson en présence de charges

On a $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$, d'où $-\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right),$$

et donc

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} := \Delta V.$$

L'équation de Poisson (locale) s'écrit donc

$$\Delta V(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}.$$

Cette équation contient « toute l'électrostatique ».

2.6.2 Équation de Laplace. Résolution numérique

Dans le vide, en l'absence de charges, on a

$$\Delta V(x, y, z) = 0.$$

C'est l'équation de Laplace.

On a le théorème d'unicité suivant : pour des conditions aux limites données (sur V ou ses dérivées), et pour une géométrie donnée, l'équation de Laplace admet une unique solution. On donne le principe de la résolution numérique de $\Delta V = 0$ en deux dimensions sur un domaine maillé uniforme

de pas constant l . On note $V_{n,m} = V(nl, ml)$. Alors

$$\begin{aligned} V_{n-1,m} &= V_{n,m} - l \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{n,m} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{n,m} + o(l^2), \\ V_{n+1,m} &= V_{n,m} + l \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{n,m} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{n,m} + o(l^2), \\ V_{n,m-1} &= V_{n,m} - l \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{n,m} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{n,m} + o(l^2), \\ V_{n,m+1} &= V_{n,m} + l \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{n,m} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{n,m} + o(l^2), \end{aligned}$$

Comme $\Delta V = 0$, la somme donne

$$V_{n,m} = \frac{V_{n-1,m} + V_{n+1,m} + V_{n,m-1} + V_{n,m+1}}{4},$$

que l'on résout avec un tableur.

2.7 Analogies avec la gravitation universelle

2.7.1 Les deux lois de force. Grandeurs analogues

On compare dans la Table 2.1 les lois et les grandeurs de l'électrostatique et de la gravitation.

2.7.2 Potentiel gravitationnel. Énergie potentielle rmd'une masse plongée dans un champ extérieur

Dans la Table 2.2, on dérive le potentiel gravitationnel grâce à l'analogie avec l'électrostatique.

2.7.3 Théorème de Gauss gravitationnel

On a noté μ la masse volumique. Vu de l'extérieur, l'astre à symétrie sphérique est équivalent à une masse ponctuelle.

Électrostatique	Gravitation
$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, attractive ou répulsive	$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$, attractive
charge (<0,>0)	masse (>0)
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-\mathcal{G}$
Champ $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, $\vec{F} = q\vec{E}$	Champ $\vec{g} = -\mathcal{G} \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$, $\vec{F} = m\vec{g}$ (mais \vec{g} n'est pas le champ de pesanteur)

TABLE 2.1 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : les deux lois de force.

2.7.4 Équations locales de la gravitation universelle

On a donc $\Delta\varphi = 0$ entre les astres (équivalent à l'équation de Laplace).

2.7.5 Énergie potentielle de gravitation d'un astre à symétrie sphérique

On fait l'hypothèse que $\mu = \text{constante} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. On se demande quelle a été l'énergie de constitution de l'astre.

L'astre s'est formé par agrégations successives de couches minces : on apporte depuis l'infini la masse $dm = \mu \times 4\pi r^2 dr$ dans le potentiel

$$\varphi(r) = -\mathcal{G} \frac{M(r)}{r} = -\mathcal{G} \frac{\mu \times \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = -\mathcal{G} \frac{4\mu\pi r^2}{3}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{gravitationnel}} &= \int_{\infty}^r \overrightarrow{dF_{\text{grav}}} \cdot \vec{dl}, \\ &= \int_{\infty}^r dm \vec{g}(s) \vec{dl}, \\ &= dm [\varphi(\infty) - \varphi(r)], \\ &= -dE_p, \end{aligned}$$

Électrostatique	Gravitation
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0$
\Updownarrow	\Updownarrow
$\exists V, \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(B) - V(A)$	$\exists \varphi(\vec{r}), \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{l} = \varphi(A) - \varphi(B)$
\Updownarrow	\Updownarrow
$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$	$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}\varphi}$
\Updownarrow	\Updownarrow
$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{g} = \vec{0}$
Source ponctuelle (charge)	Source ponctuelle (masse)
$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\varphi(r) = -\mathcal{G}\frac{M}{r}$
$E_p^{\text{ext}} = qV^{\text{ext}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$	$E_p^{\text{ext}} = m\varphi^{\text{ext}} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}$

TABLE 2.2 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : potentiel gravitationnel et énergie potentielle d’une masse plongée dans un champ extérieur.

Électrostatique	Gravitation
$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \vec{g} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = -4\pi\mathcal{G}M^{\text{int}}$
Distribution sphérique	Distribution sphérique
$\vec{E}(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$	$\vec{g}(r \geq R) = -\mathcal{G}\frac{M}{r^2} \vec{u}_r$
$\vec{E}(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} \vec{u}_r$	$\vec{g}(r \leq R) = -\mathcal{G}\frac{M}{R^2} \frac{r}{R} \vec{u}_r$
(si $\rho=\text{constante}$)	(si $\mu=\text{constante}$)

TABLE 2.3 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : théorème de Gauss gravitationnel.

Électrostatique	Gravitation
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi\mathcal{G}\mu$
$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$	$\operatorname{rot} \vec{g} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{g} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$
$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\Delta \varphi = 4\pi\mathcal{G}\mu$

TABLE 2.4 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : équations locales de la gravitation universelle.

avec $\varphi(\infty) = 0$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
 dE_p &= dm\varphi(r), \\
 &= \mu \times 4\pi r^2 dr \left(-\mathcal{G}\mu \frac{4}{3}\pi r^2 \right), \\
 &= -\mathcal{G}\mu^2 \frac{(4\pi)^2}{3} r^4 dr.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant, on a

$$E_p = \int_0^R dE_p = -\mathcal{G}\mu^2 \frac{(4\pi)^2}{3} \frac{R^5}{5} = -\frac{3\mathcal{G}M^2}{5R}.$$

Ainsi, E_p diminue quand R diminue : c'est l'effondrement gravitationnel. En transposant à l'électrostatique, on obtient l'énergie potentielle de constitution d'une boule chargée :

$$E_p = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} > 0.$$

Chapitre 3

Magnétostatique

Les courants sont stationnaires : $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})$. Ils circulent dans des conducteurs neutres : $\rho(\vec{r}) = 0$. Ainsi $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$.

Sommaire

3.1	Flux du champ magnétique	62
3.1.1	Nullité du flux magnétique à travers une surface fermée	62
3.1.2	Flux de \vec{B} à travers une section d'une tube de champ	62
3.1.3	Resserrement des lignes de champ magnétiques . .	62
3.1.4	Équation locale de Maxwell-Thompson	63
3.2	Circulation du champ magnétique	63
3.2.1	Théorème d'Ampère intégral	63
3.2.2	Quand et comment mettre en œuvre le théorème d'Ampère ?	63
3.2.3	Exemples fondamentaux	64
3.2.4	Ordres de grandeur	66
3.2.5	Équation de Maxwell–Ampère	67
3.2.6	Vue d'ensemble des lois de la magnétostatique . .	67
3.3	Topographie du champ magnétique	67
3.3.1	Fermeture et orientation des lignes de contour . . .	67
3.3.2	Comparaison des lignes de champ électriques et magnétiques	67

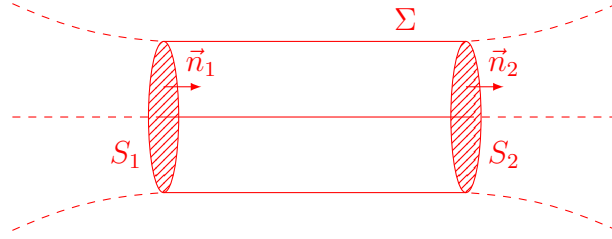


FIGURE 3.1 – Flux du champ magnétique à travers une section d'un tube de champ.

3.1 Flux conservatif du champ magnétique : formulations intégrale et locale

3.1.1 Nullité du flux magnétique à travers une surface fermée

On a le postulat suivant :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0.$$

Ainsi, il n'existe pas de « masses » ni de « charges » magnétiques.

3.1.2 Flux de \vec{B} à travers une section d'une tube de champ

On se réfère à la Figure 3.1. On note $\varphi_i = \iint_{S_i} \vec{B} \cdot \vec{n}_i dS_i$. Alors

$$\oiint_{S_1 \cup S_2 \cup \Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0,$$

implique

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

3.1.3 Resserrement des lignes de champ magnétiques

En notant \bar{B}_i la valeur moyenne sur S_i et en supposant $S_1 > S_2$, on a

$$\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} = \frac{S_1}{S_2} > 1.$$

Ainsi, $\|\vec{B}\|$ est plus intense où les lignes de champ sont plus serrées.

3.1.4 Équation locale de Maxwell-Thompson

D'après le théorème d'Ostrogradski, on a

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 \iff \text{div} \vec{B} = 0.$$

L'équation est locale et universelle.

3.2 Circulation du champ magnétique : théorème d'Ampère intégral et local

3.2.1 Théorème d'Ampère intégral

En L1, on voit que les lignes de champ de \vec{B} s'enroulent autour des courants, et que $\vec{B} \times l \propto I$ si I est l'intensité d'un courant le long d'un fil de longueur l (par linéarité).

On a le postulat suivant :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}},$$

où I_{enl} est l'intensité des fils « enlacés », voir la Figure 3.2. Dans ce cas, on a

$$I_{\text{enl}} = I_1 - I_2 - I_3.$$

Le postulat s'écrit aussi

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d\Sigma.$$

3.2.2 Quand et comment mettre en œuvre le théorème d'Ampère ?

On l'utilise en cas de haute symétrie : cylindrique ou plane. La méthode est la suivante :

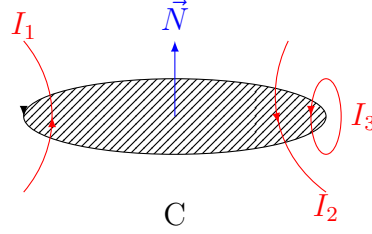


FIGURE 3.2 – Circulation du champ magnétique : enlacement des fils et intensité du courant.

- (α) Choisir le bon système de coordonnées ;
- (β) Donner les invariances et les symétries pour obtenir la géométrie de \vec{B} ;
- (γ) Choisir le bon contour et l'orienter arbitrairement. Ou bien \vec{B} est parallèle à C et constant, ou bien \vec{B} est perpendiculaire à C .
- (δ) Faire un dessin et l'application.

3.2.3 Exemples fondamentaux

Câble rectiligne infini épais

La longueur du fil l est supposée très grande devant son épaisseur a : $l \gg a$, voir la Figure 3.3.

Pour les invariances et symétries :

- symétrie de révolution par rapport à (Oz) : pas de dépendance en θ ;
- invariance par translation par rapport à (Oz) : pas de dépendance en z ;
- tout plan inclus dans (Oz) est un PS : $B_r = B_z = 0$.

Finalement, on a $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$. Le théorème d'Ampère donne alors

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enl}}(r).$$

Pour $r \geq a$, on a $I_{\text{enl}}(r \geq a) = I$, d'où

$$\boxed{\vec{B}(r \geq a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.}$$

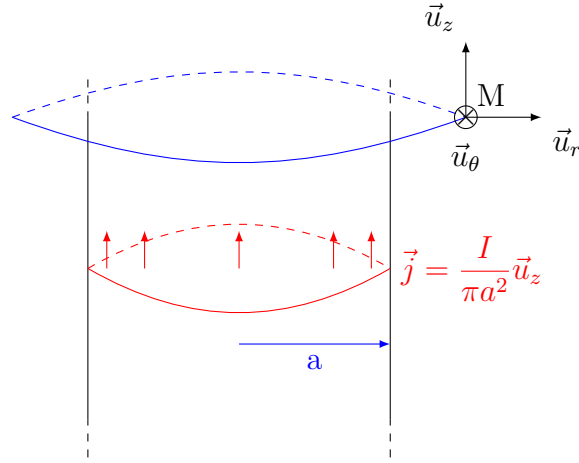


FIGURE 3.3 – Champ magnétique pour un câble rectiligne infini épais.

Si $r \leq a$, on a

$$I_{\text{enl}}(r \leq a) = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d\Sigma = \frac{I}{\pi a^2} \times \pi r^2 = I \left(\frac{r}{a} \right)^2,$$

d'où

$$\boxed{\vec{B}(r \leq a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \times \frac{r}{a} \vec{u}_\theta.}$$

En variante, on peut supposer que I ne circule qu'à la surface du cylindre sur une épaisseur nulle. Alors $\vec{j}(r < a) = \vec{0} = \vec{j}(r > a)$, donc $\vec{B}(r < a) = \vec{0}$ et $\vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.

Solénoïde "infini"

On considère que le rayon du solénoïde a est négligeable devant sa longueur l : $l \gg a$. On se réfère à la Figure 3.4.

Il y a invariance de révolution selon l'axe (Oz) et invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz) , donc le champ ne dépend que de la variable r . Tout plan perpendiculaire à (Oz) est un PS, donc

$$\boxed{\vec{B} = B(r) \vec{u}_z.}$$

Notons que si la longueur est finie, tout plan inclue dans (Oz) est un PAS, donc $B_\theta = 0$. Pour contour d'Ampère, on choisit un contour rectangulaire

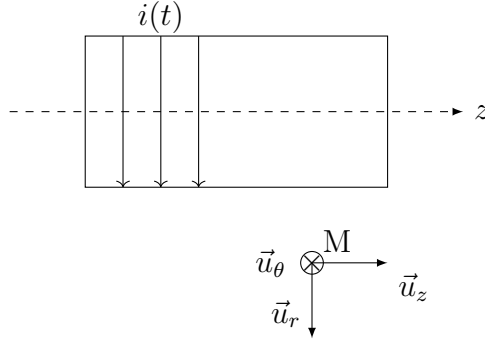


FIGURE 3.4 – Champ magnétique dans un solénoïde infini.

contenu dans un plan contenant l'axe (Oz) dont un des côtés est sur l'axe. Alors

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}}(r) = B(0) \times h - B(r) \times h,$$

donc si $r < a$, $B(r < a) = B(0) = \text{constante}$. Si $r > a$, $B(r > a) = 0$ par hypothèse, donc $B(0) = \mu_0 n i$.

3.2.4 Ordres de grandeur

Pour un fil infini (ou une spire, à très faible distance), alors

$$B \sim \frac{\mu_0 i}{2\pi a}.$$

Si $i = 1\text{A}$, $a = 2\text{mm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H m}^{-1}$, alors $B \sim 10^{-4} \text{T} = 1\text{gauss}$. S'il y a 10000 spires sur 20cm, alors

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n i \sim 60\text{mT}.$$

Pour augmenter la valeur du champ magnétique :

- pour augmenter i , l'effet Joule est limitant (sauf supraconducteur) ;
- on peut augmenter n ;
- on peut augmenter μ_0 en utilisant des matériaux ferromagnétiques, B peut alors atteindre quelques Tesla.

3.2.5 Théorème d'Ampère local : équation de Maxwell–Ampère

Si \mathcal{C} est un contour orienté et Σ est une surface supportée par \mathcal{C} avec \vec{N} un vecteur normal extérieur normalisé, alors d'après le théorème de Stokes, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d\Sigma = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{N} d\Sigma.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}).}$$

3.2.6 Vue d'ensemble des lois de la magnétostatique

Pour le flux, on a l'équivalence intégrale/locale suivante :

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 \iff \text{div } \vec{B} = 0.}$$

Pour la circulation, on a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} \iff \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.}$$

3.3 Topographie du champ magnétique

3.3.1 Fermeture et orientation des lignes de contour

Comme le flux du champ est nul, toute ligne de champ magnétique est fermée sur elle-même. De plus, comme $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, les lignes de champ tournent autour des courants dans le sens donné par la règle du tire-bouchon.

3.3.2 Comparaison des lignes de champ électriques et magnétiques

Une ligne de champ fermée sur elle-même est une ligne de champ magnétique, tandis qu'une ligne de champ convergente ou divergente en un point

est une ligne de champ électrique. Au voisinage des sources, les lignes de champ électriques divergent ou convergent radialement, tandis que les lignes de champ magnétiques tournent autour de la source. Loin des sources, les deux champs sont régis par les mêmes équations ($\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ et $\text{div} \vec{B} = \text{div} \vec{E} = 0$), la distinction n'est donc pas évidente a priori.

Chapitre 4

Dipôles statiques

Sommaire

4.1	Dipôle électrostatique : E et V créés	70
4.1.1	Le modèle du dipôle électrostatique	70
4.1.2	Symétries du problème	70
4.1.3	Potentiel V dans l'approximation dipolaire	71
4.1.4	Champ E dans l'approximation dipolaire	72
4.1.5	Allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans l'approximation dipolaire	72
4.2	Actions mécaniques subies	73
4.2.1	Champ extérieur uniforme	73
4.2.2	Champ extérieur non uniforme	73
4.2.3	Énergie potentielle d'interaction avec un champ extérieur	74
4.3	Dipôle magnétique	75
4.3.1	Définition et ordre de grandeur	75
4.3.2	Champ magnétique créé par un dipôle	76
4.3.3	Actions mécaniques subies	77

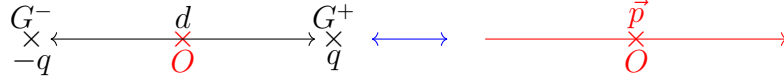


FIGURE 4.1 – Modèle d'une distribution neutre.

4.1 Dipôle électrostatique : \mathbf{E} et \mathbf{V} créés

4.1.1 Le modèle du dipôle électrostatique

On sait qu'il y a neutralité de la matière. Comment concilier cela avec les distributions de charges non nulles ?

Modèle d'une distribution neutre. La distribution est constituée de charges positives $Q^+ = q$ et négatives $Q^- = -q$. On se réfère à la Figure 4.1. Alors pour avoir $Q = 0$ (neutralité de la matière), on doit avoir $Q^+ + Q^- = 0$. Les barycentres des charges positives et négatives sont notées G^+ et G^- . Par définition, on définit le moment dipolaire par

$$\boxed{\vec{p} := q \overrightarrow{G^- G^+}},$$

et son unité est le C m. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène, $\vec{p} \parallel \vec{E}^{\text{ext}}$ et $\vec{p} \cdot \vec{E}^{\text{ext}} > 0$. Pour une molécule présentant une symétrie centrale, on a $\vec{p} = \vec{0}$. Sinon, les molécules peuvent être polaires.

Ordre de grandeur. On a $p \sim 10^{-19} \times 10^{-10} = 10^{-29} \text{C m}$. On introduit donc le Debye D , où $1 D = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{C m}$. Pour un condensateur plan, on a $\|\vec{p}\| = Qe \sim 10^{-13} \text{C m}$. Pour un potentiel de 10V, avec $e = 1 \text{mm}$ et $S = 10 \text{cm}^2$, on a $Q = CU = \frac{\epsilon_0 S U}{e} \sim 10^{-10} \text{C}$.

4.1.2 Symétries du problème

Pour un dipôle, en coordonnées sphériques où il y a un potentiel $V(r, \theta, \varphi)$ et $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$. Il y a cependant une invariance par symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) , donc il n'y a pas de dépendance en φ . De plus, tout

plan contenant (Oz) est un plan de symétrie. Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} V(r, \theta), \\ \vec{E}(r, \theta) = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta) \\ E_\theta(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}}$$

4.1.3 Potentiel V dans l'approximation dipolaire

L'approximation dipolaire est $r \gg q$, où r est la distance à laquelle se trouve le point M dont on voit le dipôle. Dans ce cas, on a

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 G^+ M} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 G^- M}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} G^+ M^2 &= \left\| \overrightarrow{G^+ M} \right\|^2 = \left(\overrightarrow{G^+ O} + \overrightarrow{OM} \right)^2, \\ &= \frac{d^2}{4} + r^2 - 2 \underbrace{\overrightarrow{OG^+} \cdot \overrightarrow{OM}}_{\frac{d}{2} r \cos \theta}, \\ &= r^2 \left[1 - \frac{d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{G^+ M} &= (G^+ M^2)^{-1/2}, \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2} \right]^{-1/2}, \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\frac{1}{G^- M} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 V(r, \theta) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta - 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right), \\
 &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}, \\
 &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}, \\
 &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Il y a donc une décroissance en $\frac{1}{r^2}$, qui est beaucoup plus rapide que pour une charge qui est en $\frac{1}{r}$.

4.1.4 Champ E dans l'approximation dipolaire

En coordonnées sphériques, on a

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}} \propto \frac{1}{r^3}.$$

4.1.5 Allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans l'approximation dipolaire

Soit un déplacement $d\vec{l}$ le long d'une ligne de champ $d\vec{l} \parallel \vec{E}$ i.e. $d\vec{l} \wedge \vec{E} = \vec{0}$. On trouve alors $-dr E_\theta - r d\theta E_r = 0$, d'où $d\varphi = 0$ donc $\varphi = \text{constante}$ le long d'une ligne de champ. De plus, on a

$$-dr E_\theta - r d\theta E_r = 0,$$

d'où

$$dr \sin \theta = 2r \cos \theta d\theta.$$

On trouve alors $\frac{dr}{d\theta} = 2r \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, d'où $r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta$. Alors, les équipotentielles dans l'approximation dipolaire ont pour équation $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0$.

4.2 Actions mécaniques subies par un dipôle électrostatique plongé dans \vec{E}^{ext}

4.2.1 Champ extérieur uniforme

Résultante nulle

Comme un dipôle est composé de deux charges de signe opposées séparées par une distance constante, si l'on soumet un dipôle à un champ extérieur uniforme \vec{E}^{ext} , le dipôle subit une force

$$\vec{F} = -q\vec{E}^{\text{ext}} + q\vec{E}^{\text{ext}} = \vec{0},$$

il n'y a donc pas de mouvement de translation provoqué par le champ uniforme.

Couple de rappel

Cependant, selon l'orientation de ce champ uniforme, un couple de rappel apparaît et vaut

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{p} \times \vec{E}^{\text{ext}}}.$$

Il a tendance à provoquer un alignement du moment dipolaire \vec{p} sur \vec{E}^{ext} .

4.2.2 Champ extérieur non uniforme

Résultante

En supposant $\vec{E}^{\text{ext}} = E(x)\vec{u}_x$ avec $\frac{dE_x}{dx} > 0$ et $\vec{p} = p\vec{u}_x \parallel \vec{E}^{\text{ext}}$, on a

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E}^{\text{ext}}(x+d) - q\vec{E}^{\text{ext}}(x) \\ &= qd\frac{\partial \vec{E}^{\text{ext}}}{\partial x} = \left(p\vec{u}_x \cdot \frac{\partial \vec{u}_x}{\partial x}\right) \vec{E}^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

De manière générale, on a donc

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}^{\text{ext}}}.$$

Ainsi, il y a une translation vers les zones de plus fort champ.

Moment résultat

On admet que l'on a toujours

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}^{\text{ext}}.}$$

Il y a donc une tendance à l'alignement de \vec{p} sur \vec{E}^{ext} .

4.2.3 Énergie potentielle d'interaction avec un champ extérieur

Expression

Si les charges sont en A ($-q$) et B ($+q$), on a

$$\begin{aligned} E_p^{\text{ext}} &= qV^{\text{ext}}(B) - qV^{\text{ext}}(A) \\ &= q \int_B^A \vec{E}^{\text{ext}} \cdot d\vec{l} \\ &\approx q \vec{E}^{\text{ext}} \cdot \int_B^A d\vec{l} \\ &= q \vec{E}^{\text{ext}} \cdot \vec{BA} = -\vec{p} \cdot \vec{E}^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Interprétation

Si \vec{p} fait un angle θ avec le champ extérieur, alors l'énergie potentielle est $E_p^{\text{ext}} = -p \|\vec{E}^{\text{ext}}\| \cos(\theta)$, donc

- si \vec{p} et \vec{E}^{ext} sont alignés, E_p^{ext} est minimal, il y a un équilibre stable ;
- s'ils sont anti-parallèles, E_p^{ext} est maximal, et l'équilibre est instable.

Une fois que \vec{p} est aligné avec \vec{E}^{ext} , on a $\theta = 0$ et donc E_p^{ext} est minimal si $\|\vec{E}^{\text{ext}}(M)\|$ est maximal : il y a une translation de \vec{p} vers la zone où $\|\vec{E}^{\text{ext}}\|$ est maximal.

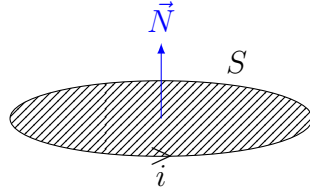


FIGURE 4.2 – Moment dipolaire magnétique d’une spire de courant plane.

4.3 Dipôle magnétique

4.3.1 Définition et ordre de grandeur

On considère une spire de courant plane présentée à la Figure 4.2. On définit le moment dipolaire magnétique, d’unité A m^2 par

$$\boxed{\vec{m} := iS\vec{N}.}$$

Pour une bobine plate avec 10000 spires, on a $m = niS \approx 1 \text{ A m}^2$.

On considère maintenant un électron autour dans un atome à la Figure 4.3. Par un raisonnement équivalent, on a $i = -e/T$ avec T la période de révolution de l’électron autour du noyau. Alors

$$\vec{m} = iS\vec{u}_z = -\frac{e}{T}\pi r^2\vec{u}_z.$$

Le moment cinétique de l’électron est

$$\vec{L}_O = r\vec{u}_r \wedge m\vec{v} = mrv\vec{u}_z,$$

d’où

$$\boxed{\vec{m} = \gamma\vec{L}_O,}$$

avec $\gamma = -e/(2m)$ le rapport gyromagnétique. À l’échelle atomique, on a $\|\vec{L}_O\| \approx \hbar \approx 10^{-34} \text{ J s}$. Alors $\|\vec{m}\| \sim 10^{-23} \text{ A m}^2$.

Au niveau de la terre, le moment magnétique est de l’ordre de 6.10^2 A m^2 (déduit des mesures de \vec{B}_{terre}).

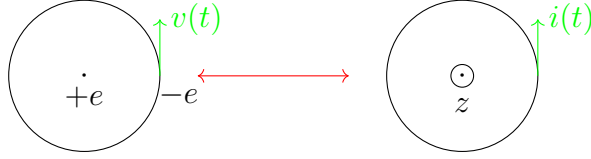


FIGURE 4.3 – Moment magnétique orbital d'un électron dans un atome.

4.3.2 Champ magnétique créé par un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire

Analyse des symétries

On fait l'hypothèse que l'on a une spire circulaire de rayon a , et on se place en coordonnées cylindriques, l'axe \vec{u}_z passant au centre de la spire, perpendiculairement à celle-ci. On note α l'angle entre l'altitude z du point projeté de M sur l'axe (Oz) et la spire. Alors il y a une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) , et tout plan contenant (Oz) est un plan d'antisymétrie, on en déduit donc que

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta) \\ B_\theta(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Champ dans l'approximation dipolaire

Donnée : sur l'axe (Oz) , on a $\vec{B}_{\text{axe}}(M) = \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3(\alpha) \vec{u}_z$. On note que $\sin(\alpha) = a/(a^2 + z^2)^{1/2}$, et dans l'hypothèse de l'approche dipolaire, c'est-à-dire $|z| \gg a$, alors

$$\vec{B}_{\text{axe}}(z) \approx \frac{\mu_0 i}{2a} \frac{a^3}{z^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 i a^2}{2z^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \vec{u}_z.$$

On admet que cette forme s'adapte autre part que sur l'axe : dans l'approximation dipolaire, on a

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par rapport à la formulation pour le champ électrostatique, il suffit de remplacer \vec{p} par \vec{m} , $1/\varepsilon_0$ par μ_0 et \vec{E} par \vec{B} .

Allure des lignes de champ

Dans l'approximation dipolaire, il y a les mêmes lignes de champ que \vec{E} . Mais près de la source, c'est très différent (voir le chapitre sur la magnéto-statique).

4.3.3 Actions mécaniques subies par un dipôle magnétique plongé dans B

Champ extérieur uniforme

On a

$$\vec{F}_{\text{lor}} = \oint i \vec{dl} \wedge \vec{B}^{\text{ext}} = i \left[\oint \vec{dl} \right] \wedge \vec{B}^{\text{ext}},$$

donc pour un champ magnétique uniforme, on a $\vec{F}_{\text{lor}} = \vec{0}$.

On peut aussi montrer que le couple de rappel est

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}},$$

il y a donc un alignement de \vec{m} sur \vec{B}^{ext} .

Champ non uniforme

On admet que l'on a

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F}_{\text{lor}} = (\vec{m} \cdot \text{grad}) \vec{B}^{\text{ext}}, \\ \vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}. \end{cases}}$$

Il y a donc un alignement avec le champ magnétique extérieur, et il y a une attraction vers les zones de plus fort champ.

Énergie potentielle d'interaction

On retrouve le même résultat formel

$$\boxed{E_p^{\text{ext}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}^{\text{ext}}},$$

et les mêmes discontinuités sur les équilibres stables et instables.

Chapitre 5

Les équations de Maxwell

On se place dans un régime quelconque. Les équations viennent de James Clark Maxwell (écossais, 1865), puis retravaillées par Heaviside et Hertz (1887).

Sommaire

5.1	Équations de Maxwell locales	80
5.2	Équations intégrales	80
5.2.1	Théorème de Gauss et Maxwell-Gauss	80
5.2.2	Flux de \vec{B} conservatif et Maxwell-Thompson	81
5.2.3	Théorème d'Ampère généralisé et Maxwell-Ampère	81
5.2.4	Loi de Faraday et Maxwell-Faraday	81
5.3	Cas des champs statiques	83
5.3.1	Électrostatique	83
5.3.2	Magnétostatique	84
5.4	Densité de courant de déplacement	84
5.4.1	Densité de courant de déplacement et conservation de la charge	84
5.4.2	ARQS magnétique	85
5.5	Équation de propagation du champ électroma- gnétique dans le vide	86
5.5.1	Équations dans le vide	86
5.5.2	Équations de propagation : équation de d'Alembert	86

5.1 Équations de Maxwell locales

Elles régissent le champ électromagnétique. Il y a d'abord les équations de structure :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 & \text{Maxwell-Thompson,} \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) & \text{Maxwell-Faraday.} \end{array}$$

Il y a ensuite le lien avec les sources :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss,} \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \text{Maxwell-Ampère.} \end{array}$$

En plus de l'expression de la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

on a condensé tout l'électromagnétisme. Il faut remarquer que :

- il y a un couplage spatio-temporel de \vec{E} et \vec{B} via Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère ;
- Maxwell-Gauss et Maxwell-Thompson sont toujours vraies ;
- il apparaît une constante c telle que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ (invariance par changement de référentiel galiléen), c'est le cadre naturel de l'électromagnétisme est relativiste ;
- les équations sont linéaires, on peut donc utiliser le théorème de superposition.

5.2 Équations intégrales

5.2.1 Théorème de Gauss et Maxwell-Gauss

On a $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)/\varepsilon_0$, équivalent à

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0}.$$

5.2.2 Flux de \vec{B} conservatif et Maxwell-Thompson

On a $\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$, équivalent à

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0.$$

5.2.3 Théorème d'Ampère généralisé et Maxwell-Ampère

On a $\vec{\text{rot}} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$, et en utilisant le théorème de Stokes,

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma + \frac{1}{c^2} \iint_\Sigma \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot \vec{N} d\Sigma,$$

et finalement

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_\Sigma^{\text{int}}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\iint_\Sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma \right).$$

5.2.4 Loi de Faraday et Maxwell-Faraday

À nouveau, en utilisant le théorème de Stokes sur

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} &= - \iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\iint_\Sigma \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{N} d\Sigma \right), \end{aligned}$$

puis la loi de Faraday (1831) :

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi_m(t)}{dt}.$$

On voit donc qu'a priori, on n'a pas $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, et donc $\vec{E} \neq -\overrightarrow{\text{grad}} V$.

Lien avec la loi de Faraday d'électrocinétique

Soit un circuit fermé \mathcal{C} , de résistance totale R , avec un générateur de tension $e(t) = -\frac{d\varphi_m}{dt}(t) = Ri(t)$. On se donne la loi d'Ohm locale qui s'écrit $\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$ où σ est la conductivité du milieu en $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$. Alors sous l'hypothèse de l'ARQS magnétique, on a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = i(t) \frac{l}{\sigma S} = Ri(t).$$

C'est l'expression de la force électromagnétique induite dans le circuit, et on a

$$e(t) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi_m}{dt}(t).$$

Cette expression ne vaut que pour le cas de Neumann (circuit fixe dans un champ magnétique \vec{B} variable). S'il y a une auto-inductance et une induction mutuelle, c'est par exemple le cas de Lorentz (circuit mobile dans un champ \vec{B} stationnaire), alors $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ mais $e(t) = -\frac{d\varphi_m}{dt}(t) \neq 0$ due au mouvement du circuit. Par exemple, si l'on prend deux bobines en influence mutuelle comme à la Figure 5.1, alors on a

$$\begin{cases} e_1(t) = -\frac{d\varphi_1}{dt}(t), \\ e_2(t) = -\frac{d\varphi_2}{dt}(t), \\ \varphi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t), \\ \varphi_2(t) = L_2 i_2(t) + M i_1(t). \end{cases}$$

D'après la loi des mailles, on obtient

$$\begin{cases} v_1(t) = r_1 u_1(t) - e_1(t) = r_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t), \\ v_2(t) = r_2 u_2(t) - e_2(t) = r_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t). \end{cases}$$

— Application 1 : on a un transformateur de tension. On néglige la résistance des fils, la secondaire est à vide ($i_2 = 0$) et on se place en régime sinusoïdal forcé. Alors

$$\underline{v}_1 = jL_1\omega i_1, \quad \underline{v}_2 = jM\omega i_1,$$

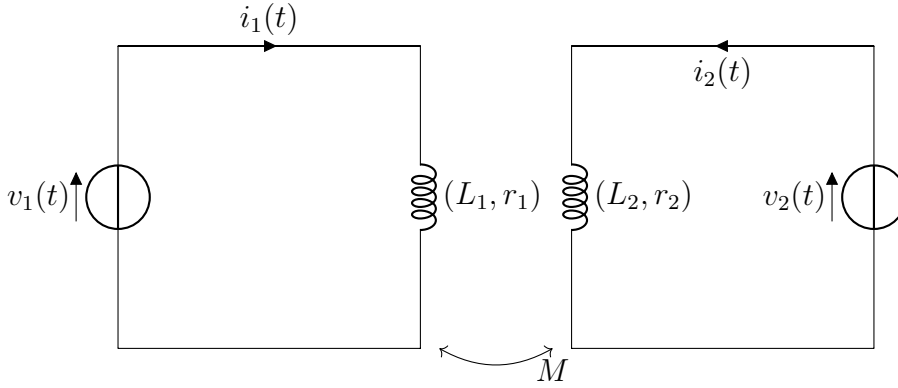


FIGURE 5.1 – Deux bobines en influence mutuelle.

d'où

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M}{L_1} \sim \frac{N_2}{N_1},$$

où N_i est le nombre de spires de la bobine i , car $L_1 \propto N_1^2$ et $M \propto N_1 N_2$. Ainsi, si $N_1 > N_2$, on a un transformateur abaisseur de tension, et sinon un transformateur élévateur de tension.

- Application 2 : on a un transformateur de courant (secondaire en courant continu). Alors $v_2 = 0 = jL_2\omega i_2 + jM\omega i_1$ d'où

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{M}{L_2} \sim -\frac{N_1}{N_2}.$$

5.3 Cas des champs statiques

5.3.1 Électrostatique

En régime permanent, on a $\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$ et $\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$ pour tout \vec{r} , on $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} \text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}. \end{cases}}$$

Ainsi \vec{E} est à circulation conservative.

5.3.2 Magnétostatique

En régime permanent, on a aussi $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 0$ et $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$, d'où

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0, \\ \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \end{cases}$$

5.4 Densité de courant de déplacement. ARQS magnétique

5.4.1 Densité de courant de déplacement et conservation de la charge

L'idée est de rajouter un terme supplémentaire, que l'on note pour l'instant $\vec{?}$, à l'équation de Maxwell-Ampère pour la rendre compatible avec l'équation de la conservation de la charge $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. On écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 [\vec{j} + \vec{?}],$$

puis on prend la divergence :

$$0 = \mu_0 [\text{div } \vec{j} + \text{div } \vec{?}],$$

et en utilisant $\rho = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E}$, on a

$$\text{div} \left(\vec{?} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Il se trouve que la bonne solution est $\vec{?} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, d'où

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Ainsi, Maxwell-Ampère et Maxwell-Gauss contiennent la conservation de la charge.

5.4.2 ARQS magnétique

Définition

C'est de dire que c'est « lentement variable ». Le temps caractéristique est très grand devant le temps de propagation : $\tau \gg \frac{L}{c}$. Ainsi la propagation est négligeable. Dans le cas du magnétisme, c'est de dire que les effets des courants sont très très grands devant les effets des charges (neutralité des conducteurs), et donc

$$\boxed{j \gg \rho c.}$$

Dans l'ARQS magnétique, l'équation de Maxwell-Ampère se simplifie car

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\|} \sim \frac{\tau \tilde{j}}{\varepsilon_0 \tilde{E}} \sim \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \times \frac{\tau}{L/c} \gg 1.$$

Ainsi, dans l'ARQS magnétique, on a

$$\boxed{\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t).}$$

Pour une fréquence de 50Hz, on a l'ARQS si $L \ll c\tau = c/f = 6000\text{km}$. Pour une fréquence de 10^{15}Hz (optique), c'est le cas seulement si $L \ll 0.3\mu\text{m}$, donc la propagation est dominante.

Champ magnétique dans l'ARQS magnétique et induction

On a les mêmes lois qu'en magnétostatique stationnaire, mais à chaque temps. Ainsi, dans l'ARQS magnétique, \vec{B} est le même qu'en stationnaire (mais dépend quand même du temps). Par exemple, pour un solénoïde infini parcouru par $i(t)$, on a $\vec{B}_{\text{int}}(t) = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$ et $\vec{B}_{\text{ext}}(t) = \vec{0}$.

Dans le cas de l'ARQS magnétique, le plus souvent, on a $\rho \approx 0$ donc $\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ et $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: c'est la loi de Faraday (induction).

Loi des nœuds dans l'ARQS magnétique

On a

$$\text{div } [\vec{j}(\vec{r}, t)] = \frac{1}{\mu_0} \text{div } \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0.$$

Dans l'ARQS magnétique, \vec{j} est à flux conservatif. Ainsi $i(t)$ est le même en tout point d'un fil, et la loi des nœuds est vraie à chaque instant.

5.5 Équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide

On a $\rho(\vec{r}, t) = 0$ et $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{0}$.

5.5.1 Équations dans le vide

Pour un régime quelconque, on a

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t), \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{r}, t). \end{cases}$$

5.5.2 Équations de propagation : équation de d'Alembert

On se donne la formule : $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{W})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{W}) - \Delta \vec{W}$. Alors

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E},$$

d'où

$$\boxed{\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

On fait la même chose pour le champ magnétique et on trouve

$$\boxed{\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

Nécessité du couplage spatio-temporel du champ électromagnétique

Dans l'ARQS magnétique, on a $\operatorname{rot} \vec{B} \approx \vec{0}$, donc $\Delta \vec{E} = \vec{0}$ et $\Delta \vec{B} = \vec{0}$: il n'y a aucune propagation.

Chapitre 6

Énergie électromagnétique

Sommaire

6.1	Interaction classique champ-matière	88
6.1.1	Densité volumique de force électromagnétique . . .	88
6.1.2	Puissance volumique	88
6.1.3	Cas des conducteurs ohmiques	89
6.2	Équation locale de Poynting	90
6.2.1	Équation de Poynting	90
6.2.2	Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting	91
6.2.3	Ordres de grandeurs	92
6.2.4	Propagation unidimensionnelle dans un milieu ab- sorbant. Loi de Beer-Lambert	92
6.3	Bilan	intégral
	d'énergie électromagnétique	93
6.3.1	Bilan intégral sur un volume de contrôle	93
6.3.2	Exemple : conducteur ohmique en régime station- naire	94
6.4	Cas de l'électrostatique	95
6.4.1	Énergie du champ électrostatique	95
6.4.2	Définition énergétique de la capacité d'un condensateur	96
6.5	Cas de la magnétostatique	96
6.5.1	Énergie magnétique	96

6.1 Interaction classique champ-matière

6.1.1 Densité volumique de force électromagnétique

Au niveau microscopique, on a la force de Lorentz $\vec{F}_L = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Au niveau mésoscopique, la force moyenne \overrightarrow{dF} subie par les charges dans un élément de volume $d\tau$ est alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dF} &= \sum_{\substack{\neq \text{ types} \\ \text{de porteurs "k"}}} q_k (\vec{E} + \langle \vec{v}_k \rangle \wedge \vec{B}) n_k d\tau \\ &= \left(\left(\sum_{\text{"k"}} n_k q_k \right) \vec{E} + \left(\sum_{\text{"k"}} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle \right) \wedge \vec{B} \right) d\tau \\ &= (\rho(\vec{r}, t) \vec{E} + \vec{j}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}) d\tau \\ &= \vec{f}_{\text{vol}} d\tau, \end{aligned}$$

où

$$\boxed{\vec{f}_{\text{vol}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.}$$

6.1.2 Puissance volumique fournie par le champ aux charges

Au niveau microscopique, on a

$$P = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Au niveau microscopique, en notant dP_k la puissance reçue par les charges "k" dans $d\tau$:

$$dP_k = q_k \vec{E} \cdot (n_k d\tau) \langle \vec{v}_k \rangle.$$

Ainsi, la puissance totale reçue par les charges dans $d\tau$:

$$dP = \sum_{\neq \text{"k"}} dP_k = \left(\sum_{\neq \text{"k"}} n_k q_k \langle v_k \rangle \right) \cdot \vec{E} d\tau = (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau.$$

La puissance volumique reçue par les charges de la part du champ électromagnétique est donc

$$P_{\text{vol}}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t).$$

6.1.3 Cas des conducteurs ohmiques

Loi d'Ohm locale

C'est une loi phénoménologique (pas comme les équations de Maxwell). L'idée est que si $\vec{E} = \vec{0}$, alors $\vec{j} = \vec{0}$ et si $\vec{E} \neq \vec{0}$ alors $\vec{j} \neq \vec{0}$. De plus, si $\|\vec{E}\|$ n'est « pas trop grand », et que $\|\vec{E}\|$ ne varie pas trop vite, alors $\vec{j} \propto \vec{E}$. On se donne alors la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

où σ est la conductivité électrique, en Ω/m , ou bien

$$\vec{E} = \rho \vec{j},$$

avec $\rho = \sigma^{-1}$ est la résistivité électrique.

Ordre de grandeurs :

- Cuivre : $\sigma \sim 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$;
- Silice (à 300K) : $\sigma \sim 10^{-4} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$;
- eau de mer : $\sigma \sim 1 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$.

Loi de Joule locale

La puissance volumique s'écrit

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}.$$

On a $P_{\text{vol}} > 0$. Cette puissance est de nature mécanique (et non thermique), mais provoque un échauffement du réseau, par collisions des électrons de conduction sur les défauts du réseau cristallin. C'est l'effet Joule.

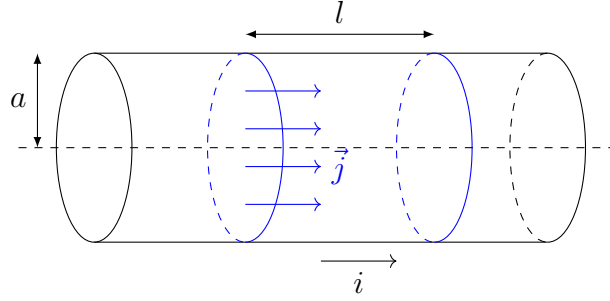


FIGURE 6.1 – Puissance dissipée dans un conducteur cylindrique.

Puissance dissipée dans un conducteur ohmique cylindrique

On se réfère à la Figure 6.1. La puissance volumique s'écrit

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{i^2}{\sigma(\pi a)^2} = \text{constante.}$$

La puissance par effet Joule est donc

$$P_{\text{Joule}} = P_{\text{vol}} \times \pi a^2 l = \frac{i^2 l}{\sigma(\pi a)^2} = Ri^2,$$

avec

$$R = \frac{l}{\sigma \pi a^2} = \frac{l}{\sigma S}.$$

6.2 Équation locale de Poynting : conservation de l'énergie électromagnétique

On se place dans un cas général (pas nécessairement un conducteur ohmique).

6.2.1 Équation de Poynting

L'idée est d'avoir une équation locale traduisant les échanges d'énergie champ/matière. On part de

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \left(\vec{\text{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

On se donne la formule suivante :

$$\operatorname{div}(\vec{C} \wedge \vec{D}) = \vec{D} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{C} - \vec{C} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{D}.$$

On obtient alors

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \left(\vec{\operatorname{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

puis

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}.}$$

6.2.2 Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting

On a le postulat suivant :

Là où est le champ, là est l'énergie.

Ainsi, l'énergie électromagnétique est localisée, non dans les sources $[\rho, \vec{j}]$ ou dans la matière, mais dans le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$.

On définit la densité volumique d'énergie électromagnétique par

$$\boxed{u_{\text{em}}(\vec{r}, t) := \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r}, t)}{2} + \frac{B^2(\vec{r}, t)}{2\mu_0}.$$

Son unité est le J m^{-3} .

On définit le vecteur de Poynting, qui correspond au vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, par

$$\boxed{\vec{\Pi}(\vec{r}, t) := \vec{E}(\vec{r}, t) \wedge \frac{\vec{B}(\vec{r}, t)}{\mu_0}.$$

Son unité est le W m^{-2} . Alors on a l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique suivante :

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E} = -P_{\text{vol}}.}$$

Du point de vue du champ électromagnétique, si $P_{\text{vol}} > 0$ (conducteur ohmique) alors c'est un terme « puits », et si $P_{\text{vol}} < 0$ (milieu amplificateur comme dans un LASER), alors c'est un terme « source ».

La puissance électromagnétique sortant d'une surface orientée S est donnée par

$$P_S^{\text{em}} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS,$$

6.2.3 Ordres de grandeurs

LASER Helium-Néon

$$\langle P \rangle \approx 1 \text{ mW} \text{ et } S \approx 1 \text{ mm}, \text{ donc } \langle \Pi \rangle \approx 1 \text{ kW m}^{-2}.$$

Soleil sur la Terre

$$\varphi_{\text{sol}} \sim 1 \text{ kW m}^{-2} = \langle \Pi \rangle.$$

Téléphone portable

En mode « passif », on a $\langle \Pi \rangle \sim 10 \text{ mW m}^{-2}$. En mode « actif », on a $\langle \Pi \rangle \sim 100 \text{ mW m}^{-2}$.

6.2.4 Propagation unidimensionnelle dans un milieu absorbant. Loi de Beer-Lambert

On se place dans le cas de la Figure 6.2. On fait l'hypothèse que l'on a

$$\langle P_{\text{vol}}(x) \rangle = \alpha \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle (x),$$

avec $\alpha > 0$. L'équation de Poynting donne alors

$$\left\langle \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial \langle \Pi \rangle}{\partial x} = - \langle P_{\text{vol}} \rangle.$$

Remarquons alors que pour une fonction f T -périodique, on a

$$\left\langle \frac{\partial f^2}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int \frac{\partial f^2}{\partial t} dt = \frac{1}{T} (f^2(t_0 + T) - f^2(t_0)) = 0.$$

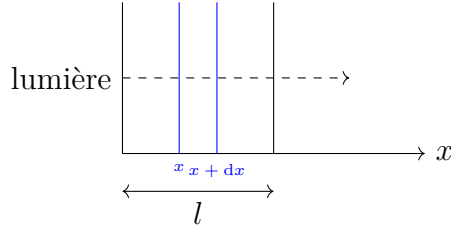


FIGURE 6.2 – Propagation unidimensionnelle dans un milieu absorbant.

Ainsi, on obtient

$$\frac{d \langle \Pi \rangle}{dx} = -\alpha \langle \Pi \rangle,$$

car $\left\langle \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \right\rangle = 0$ (\vec{E} et \vec{B} sont périodiques). Donc $\langle \Pi \rangle(x) = \langle \Pi \rangle_0 e^{-\alpha x}$. On a alors

$$\langle \Pi \rangle_{out} = \langle \Pi \rangle_{in} e^{-\alpha l},$$

et donc

$$\ln \left(\frac{\langle \Pi \rangle_{in}}{\langle \Pi \rangle_{out}} \right) = \alpha l.$$

Le terme de gauche est appelée l'absorbance A , et α dépend de la longueur d'onde λ de la lumière émise et du type de la solution, et on obtient la loi de Beer-Lambert :

$$A(\lambda, \text{sol}, l) = \alpha(\lambda, \text{sol})l.$$

6.3 Bilan intégral d'énergie électromagnétique

6.3.1 Bilan intégral sur un volume de contrôle

On note le volume de contrôle V . On intègre l'équation de Poynting sur V , on note

$$U_{em}(t) = \iiint_V u_{em}(\vec{r}, t) d\tau$$

l'énergie totale du champ régnant dans V ,

$$P_{S, \text{rayon}}^{\text{ext}}(t) = \iiint_V \text{div } \vec{\Pi} d\tau,$$

et

$$P_{\text{champ} \rightarrow \text{matiere}}(t) = \iiint_V P_{\text{vol}}(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Alors le bilan intégral d'énergie électromagnétique est

$$\boxed{\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -P_{S, \text{rayon}}^{\text{ext}} - P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}}.}$$

En particulier, si V est vide, on a $P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} = 0$ d'où

$$\boxed{\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -P_{S, \text{ray}}^{\text{ext}}.}$$

Si $\vec{\Pi} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} > 0$, on a $P_{S, \text{ray}}^{\text{ext}} > 0$ et donc U_{em} décroît avec le temps.

Dans un autre cas, si $P_{S, \text{ray}}^{\text{ext}} = 0$ (comme dans une cavité électromagnétique, ou un four micro-ondes), alors

$$\boxed{\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}}.}$$

Usuellement, on va avoir $P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} > 0$ et donc U_{em} décroît avec le temps. Cependant, dans un LASER, c'est l'inverse.

6.3.2 Exemple : conducteur ohmique en régime stationnaire

On se place dans le cas d'un conducteur ohmique cylindrique comme à la Figure 6.1. L'expression du champ magnétique est

$$\begin{cases} \vec{B}(r \geq a) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta, \\ \vec{B}(r \leq a) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \left(\frac{r}{a}\right) \vec{u}_\theta. \end{cases}$$

La loi d'ohm s'écrit

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{i}{\sigma \pi a^2} \vec{u}_z$$

dans le conducteur (pour $r \leq a$). En régime permanent, on a $\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = 0$ car les champs sont statiques. On a

$$\vec{\Pi}(r \leq a) = \vec{E}(r \leq a) \wedge \frac{\vec{B}(r \leq a)}{\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{\mu_0 \sigma 2\pi^2 a^3} \left(\frac{r}{a}\right) (-\vec{u}_r).$$

On a aussi

$$\vec{\Pi}(r = a) = -\frac{i^2}{\sigma 2\pi^2 a^3} \vec{u}_r.$$

Le vecteur de Poynting est donc radial rentrant, et l'énergie pénètre latéralement dans le conducteur. On a donc

$$P_{S,\text{ray}}^{\text{ext}} = \iint_S \vec{\Pi}(r = a) \cdot \vec{u}_r dS = -\frac{i^2 l}{\sigma \pi a^2} = -Ri^2 < 0.$$

Enfin,

$$P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \sigma E^2 \times \pi a^2 l = \sigma \left(\frac{i}{\sigma \pi a^2} \right)^2 \pi a^2 l,$$

donc

$$P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} = \frac{l}{\sigma \pi a^2} i^2 = Ri^2.$$

On a alors l'équilibre suivant :

$$P_{S,\text{ray}}^{\text{ext}} + P_{\text{chp} \rightarrow \text{mat}} = 0.$$

Ainsi, toute la puissance apportée par le rayonnement est transférée à la matière.

6.4 Cas de l'électrostatique

On a $\vec{B} = \vec{0}$ et donc $\vec{\Pi} = \vec{0}$.

6.4.1 Énergie du champ électrostatique

On a

$$u_{\text{em}}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r}, t)}{2} + 0.$$

L'énergie du champ créé par la distribution de charges créant le champ électrostatique est alors

$$U_{\text{es}} = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r})}{2} d\tau.$$

6.4.2 Définition énergétique de la capacité d'un condensateur

On considère que \vec{E} est localisé entre les armatures. Par exemple, dans un condensateur plan sans effets de bords, on a $\vec{E} = -U/e\vec{u}_z$ avec e la distance entre les deux armatures, disposées perpendiculairement par rapport à l'axe \vec{u}_z et U est la tension appliquée entre les deux armatures. Le champ est nul en dehors des armatures. Alors

$$\begin{aligned} U_{\text{es}} &= \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau \\ &= \iiint_{\text{espaces inter-armatures}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{U^2}{e^2} \times (eS) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{e} U^2 := \frac{1}{2} CU^2. \end{aligned}$$

La définition générale est donnée par

$$\boxed{\frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau.}$$

6.5 Cas de la magnétostatique et de l'ARQS magnétique

6.5.1 Énergie magnétique

On se place dans le cas de la magnétostatique, c'est-à-dire $\vec{E} = \vec{0}$, ou bien dans l'ARQS magnétique où $\vec{E} \neq \vec{0}$ régi par $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ mais $\frac{B^2}{2\mu_0} \gg \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$. Dans les deux cas,

$$\boxed{u_{\text{em}}(\vec{r}, t) = \frac{B^2(\vec{r}, t)}{2\mu_0}.$$

L'énergie magnétique créée par la distribution de courants stationnaires (ou quasi-stationnaires) est

$$\boxed{U_{\text{mag}} = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.}$$

6.5.2 Définition énergétique de l'inductance d'un circuit

On se place dans l'exemple d'un solénoïde de longueur l parcouru par un courant i stationnaire avec n spires par mètre, comme dans la Figure 3.4. Alors $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n i \vec{u}_z$, et le champ est nul à l'extérieur du solénoïde. Alors

$$U_{\text{mag}} = \frac{\mu_0 n^2 i^2}{2} \times \pi a^2 l,$$

et en notant $N = nl$, on a

$$U_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} i^2 := \frac{1}{2} L i^2.$$

Ainsi, on peut définir l'inductance L d'un circuit par

$$\frac{1}{2} L i^2 = \iiint_{\text{espace entier}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.$$

Chapitre 7

Ondes électromagnétiques dans le vide. Propagation et rayonnement

On a vu que, du point de vue du vide, sans charges ni courants, le champ électromagnétique est régi par

$$\begin{cases} \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}, \\ \Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}, \end{cases}$$

où $c := 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$.

L'équation de d'Alembert en trois dimensions est

- (i) linéaire ;
- (ii) invariante par renversement du temps car seule une dérivée seconde du temps intervient ;
- (iii) l'espace et le temps sont couplés via la constante c .

Sommaire

7.1	Solutions de l'équation de d'Alembert en OPP	100
7.1.1	Notion d'une plane. Équation de d'Alembert unidimensionnelle	100

7.1.2	Solution générale de d'Alembert en dimension un en ondes progressives	101
7.1.3	Solution générale de l'équation de d'Alembert en trois dimensions en OPP	102
7.1.4	La solution élémentaire en OPP Harmonique	102
7.2	La solution en OPPH	103
7.2.1	Opérateurs de dérivation en notation complexe	103
7.2.2	Structure d'une OPP(H) dans le vide	103
7.2.3	Polarisation de la lumière. OPPH polarisée rectilignement (PR)	104
7.2.4	Obtention d'une onde PR : polarisation par dichroïsme	106
7.3	Propagation de l'énergie par une OPP(H)	107
7.3.1	Grandeurs énergétiques associées à une OPP(H)	107
7.3.2	Analyse d'une vibration rectiligne : loi de Malus	108
7.3.3	Vitesse de propagation de l'énergie	109
7.4	Rayonnement dipolaire électrique	109
7.4.1	Le modèle du dipôle électrique oscillant	110
7.4.2	Les trois échelles de longueur	110
7.4.3	Champ électromagnétique dans la zone de rayonnement : approche qualitative	111
7.4.4	Le champ rayonné : raisonnement en ordres de grandeur	113
7.4.5	Bilan : propriétés essentielles du champ électromagnétique rayonné dans la ZR	114
7.4.6	Vecteur de Poynting de la zone de rayonnement	115
7.4.7	Puissance rayonnée dans tout l'espace	116

7.1 Solutions de l'équation de d'Alembert en OPP

7.1.1 Notion d'une onde plane. Équation de d'Alembert unidimensionnelle

Soit $f(\vec{r}, t)$ solution de $\Delta f(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$. f représente une composante de \vec{E} ou de \vec{B} .

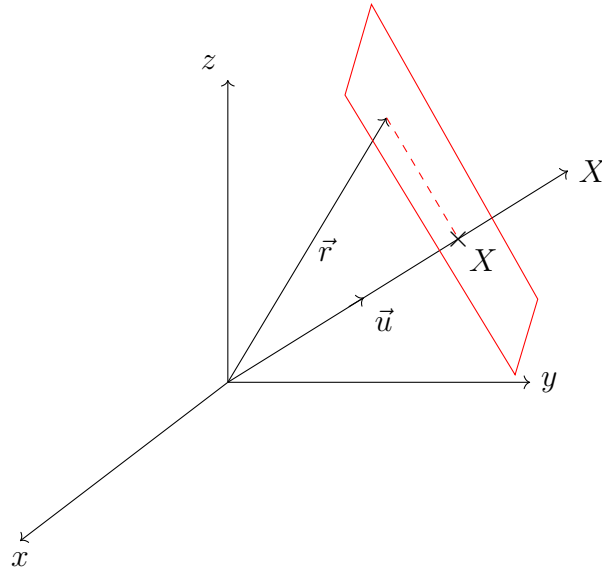


FIGURE 7.1 – Invariance par translation parallèlement à un plan de direction fixé.

On dit que f est une onde plane si

- (i) f est solution de $\Delta t - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$;
- (ii) f est invariante par translation parallèlement au plan de direction fixé : $f(\vec{r}, t) = f(X, t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r}, t)$. Voir la Figure 7.1.

Si $f(\vec{r}, t) = f(X, t)$, on a $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$, donc $f(X, t)$ vérifie aussi l'équation de d'Alembert en dimension un.

7.1.2 Solution générale de d'Alembert en dimension un en ondes progressives

Naturellement, il y a une dépendance de f en $X \pm ct$. On remarque rapidement que $F(X - ct)$ et $G(X + ct)$ sont solutions. Donc toute fonction de la forme $f(X, t) = F(X - ct) + G(X + ct)$ est solution de l'équation de d'Alembert en dimension un. On admet que c'est la solution la plus générale.

$F(X - ct)$ représente une onde progressive vers les X croissants à vitesse c sans déformation. De même, $G(X + ct)$ représente une onde progressive vers les X décroissants à la vitesse c sans déformation.

7.1.3 Solution générale de l'équation de d'Alembert en trois dimensions en OPP

En trois dimensions, toute solution de l'équation des ondes est une superposition d'OPP se propageant selon toutes les directions possibles :

$$f(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{u}} f_{\vec{u}}(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct).$$

Notamment,

$$E(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{u}} E_{\vec{u}}(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct).$$

7.1.4 La solution élémentaire en OPP Harmonique

Par linéarité et Fourier,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{u}} \sum_{\omega} \vec{E}_{\vec{u}, \omega} e^{i\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})}.$$

La solution élémentaire est

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

avec $\vec{k} = k \vec{u} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ et $\omega = 2\pi/T$ donc $k = 2\pi/(cT) = 2\pi/\lambda$. C'est une OPPH. On a choisit la convention $e^{i\omega t}$, mais les solution en $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ sont aussi bonnes (partie réelle égale), c'est une convention $e^{-i\omega t}$.

Caractère non physique de l'OPPH.

- onde éternelle : $\Delta f \times \tau$ devrait être d'ordre 1 mais $\Delta f = 0$ donc $\tau = +\infty$: absurde expérimentalement ;
- spatialement : $\cos(kx) = \cos(2\pi x/\lambda) = \cos(2\pi \sigma x)$ et alors $\Delta \sigma = 0$ et $\Delta \sigma \times L$ devrait être d'ordre 1 donc $L = +\infty$. Le support spatial du signal est infini.
- Onde d'amplitude constante dans tout l'espace. L'énergie du champ électromagnétique de cette onde est donc infini.

Ainsi, l'OPPH n'existe pas mais reste très utile car elle simplifie les calculs, et elle permet de reconstituer une solution quelconque par superposition.

7.2 La solution en OPPH

On suppose que

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \end{cases}$$

On choisit donc la convention $e^{i\omega t}$.

7.2.1 Opérateurs de dérivation en notation complexe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= i\omega, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= -ik_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= -ik_y, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= -ik_z, \\ \vec{\nabla} &= -i\vec{k}, \\ \text{div } \vec{E} &= -i\vec{k} \cdot \vec{E}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -i\vec{k} \wedge \vec{E}. \end{aligned}$$

7.2.2 Structure d'une OPP(H) dans le vide

Caractère Transverse Électrique et Magnétique (TEM).

- dans le vide, on a $\text{div } \vec{E} = 0 = -i\vec{k} \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}$, donc en prenant la partie réelle, on obtient $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$: \vec{E} est perpendiculaire à \vec{k} (TE) ;
- $\text{div } \vec{B} = 0$ implique de même que $\vec{B} \perp \vec{k}$ (TM) ;
- ceci est vrai pour tout ω : toute OPP(H) est TEM dans le vide.

relation de structure d'une OPP(H) dans le vide. On a $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, donc $-i \vec{k} \wedge \vec{E} = -(i\omega \vec{B})$. Cela implique $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}},$$

car $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ donc $\frac{k}{\omega} = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{c}$. Cette relation est vraie pour tout ω , c'est la relation de structure d'une OPP(H) dans le vide.

Remarque 7.1. En utilisant le relation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on obtient $-i \vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} (i\omega \vec{E})$, d'où $\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = c \vec{B} \wedge \vec{u}$: c'est équivalent (dans le vide). On note aussi que $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre perpendiculaire direct.

7.2.3 Polarisation de la lumière. OPPH polarisée rectilignement (PR)

On cherche à connaître l'évolution de la direction de \vec{E} à z fixé ($\vec{k} = k\vec{u}_z$) au cours du temps. C'est la notion de polarisation.

On prend une OPPH (\vec{u}_z, ω) : $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ où $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0,x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0,y} e^{i\varphi_y} \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $E_{0,x}, E_{0,y} > 0$. On a donc

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{0,x} e^{i(\omega t - kz + \varphi_x)} \\ E_{0,y} e^{i(\omega t - kz + \varphi_y)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0,y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, à z fixé, $\vec{E}(z, t)$ décrit une ellipse dans le cas général (OPPH polarisée électriquement).

OPPHPR

Une OPPHPR est une OPPH dont le champ \vec{E} garde une direction constante (et donc \vec{B} aussi). Par exemple, si une OPPHPR (\vec{u}_z, ω) selon \vec{u}_x est par exemple

$$\boxed{\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz)(\vec{u}_x),}$$

propagation selon \vec{u}_z et polarisée rectilignement parallèlement à \vec{u}_x . À $t = 0$, on a $\vec{E}(z, 0) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \vec{u}_x$ et $\vec{B}(z, 0) = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}(z, 0)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \vec{u}_y$.

L'OPPHPR est la solution la plus élémentaire de d'Alembert en 3D

Pour toute solution de d'Alembert 3D, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{u}} \sum_{\omega} E_{\vec{u}, \omega} \vec{E}_{\vec{u}, \omega}(\vec{r}, t)$, où $\vec{E}_{\vec{u}, \omega}$ est une OPPH. Or une OPPH (\vec{u}_z, ω) quelconque est donnée par la somme de 2 OPPHPR à $\frac{\pi}{2}$ l'une de l'autre : l'OPPHPR est la solution la plus élémentaire.

Une autre base de solutions élémentaires : les OPPHPC

On prend une OPPHPR (\vec{u}_z, ω) polarisée selon \vec{u}_x : $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$. On l'écrit sous la forme

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où le premier terme est une OPPHPC Gauche (tourne dans le sens trigonométrique) et l'autre une OPPHPC Droite (tourne dans le sens anti-trigonométrique). Il y a donc, au choix, deux familles de solutions élémentaires : les OPPHPR (à $\frac{\pi}{2}$ l'une de l'autre) ou les OPPHPC (G et D), utiles pour les milieux chiraux ou les milieux sièges d'un champ \vec{B}_0 stationnaire.

7.2.4 Obtention d'une onde PR : polarisation par dichroïsme

La lumière « naturelle » n'est pas polarisée

Par « naturelle », on entend qu'elle est issue d'une source primaire (comme le soleil) et non artificielle (LASER, lampe blanche, LED, lampe spectrale, etc.). L'évolution du champ $\vec{E}(z_0, t)$ est aléatoire au cours du temps dans un plan d'onde $z = z_0$. La direction de $\vec{E}(t)$ dans un plan perpendiculaire à la propagation ne suit pas une courbe identifiée. Tous les directions de polarisation sont équiprobables : c'est l'isotropie.

Polarisation rectiligne obtenue par dichroïsme

Polaroïd (ou polariseur rectiligne). C'est une mince feuille constituée de longueurs macromoléculaires étirées selon une direction donnée : c'est l'anisotropie. Si elles sont étirées selon \vec{u}_x , et que le champ \vec{E} incident se propage selon \vec{u}_z ,

- les électrons délocalisés sont mis en mouvement par $E_x(t)$ qui est absorbée ;
- par d'interaction avec $E_y(t)$: $E_y(t)$ est transmise, et donc le champ \vec{E} transmis est une OPPHR parallèlement à \vec{u}_y .

Par définition, la direction de transmission du polaroïd est l'azimut \vec{u}_p . Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}_{\text{trans}} = (\vec{E}_{\text{inc}} \cdot \vec{u}_p) \vec{u}_p.}$$

En application, on peut penser aux lunettes 3D dont chaque polaroïd a un azimut à 45 degrés par rapport à la verticale.

7.3 Propagation de l'énergie par une OPP(H)

7.3.1 Grandeurs énergétiques associées à une OPP(H)

Pour une OPP

On prend une OPP(H) se propageant selon \vec{u}_z . Comme $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$ et $\vec{u}_z \cdot \vec{E} = 0$ donc

$$\boxed{\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}}.$$

Densité d'énergie associée à l'onde. On a

$$u_{\text{em}}(\vec{r}, t) = u_{\text{em}}(z, t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(z, t)}{2} + \frac{B^2(z, t)}{2\mu_0}.$$

Or $\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, il y a donc une équirépartition de l'énergie entre \vec{E} et \vec{B} . Pour une OPP, on a donc

$$\boxed{u_{\text{em}}(z, t) = \varepsilon_0 E^2(z, t) = \frac{B^2(z, t)}{\mu_0}}.$$

Vecteur de Poynting. On a $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\mu_0 c}$. D'abord,

$$\vec{u}_z \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\vec{E} \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{E}) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_x^2 + E_y^2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\boxed{\vec{\Pi}(z, t) = \frac{E^2(z, t)}{\mu_0 c} \vec{u}_z = \varepsilon_0 c E^2(z, t) \vec{u}_z}.$$

Remarque 7.2. — $\vec{\Pi}$ est selon $+\vec{u}_z$ donc l'énergie se propage selon $+\vec{u}_z$;

- OPP $(+\vec{u}_z)$: $\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z - ct)$ donc $u_{\text{em}}(z, t) = u_{\text{em}}(z - ct)$ et $\vec{\Pi}(z, t) = \vec{\Pi}(z - ct)$. La propagation de l'énergie est selon $+\vec{u}_z$ à la vitesse c .

Pour une OPPH

On suppose

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0,y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $E^2(z, t) = E_{0,x}^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_x) + E_{0,y}^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_y)$. Ainsi,

$$\langle u_{\text{em}}(t) \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2(z, t) \rangle = \varepsilon_0 \left(\frac{E_{0,x}^2}{2} + \frac{E_{0,y}^2}{2} \right) = \text{constante},$$

ce qui confirme le caractère non physique de l'OPPH. De plus,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \varepsilon_0 c \langle E^2(z, t) \rangle \vec{u}_z = \frac{\varepsilon_0 c}{2} (E_{0,x}^2 + E_{0,y}^2) \vec{u}_z.$$

Notons qu'en notation complexe, on a $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*$ où \star est l'application conjuguée. On peut donc ré-écrire :

$$\begin{aligned} \langle u_{\text{em}}(t) \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*, \\ \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{\varepsilon_0 c}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Intensité lumineuse (ou éclairement). Par définition, $I := \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle$. Or pour une OPP, $\|\langle \vec{\Pi} \rangle\| = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle$. Donc, pour une OPP, on a

$$I = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\|.$$

7.3.2 Analyse d'une vibration rectiligne : loi de Malus

On suppose que l'on a le montage suivant : un LASER envoie une onde non polarisée (NP) d'intensité lumineuse I_0 suivant la direction \vec{u}_z , qui passe

par un polariseur P d'azimut $\vec{u}_p = \vec{u}_x$ (et devient donc PR parallèlement à \vec{u}_p d'intensité I_P) puis par un analyseur A dont l'azimut \vec{u}_A fait un angle α avec \vec{u}_x (et devient donc PR parallèlement à \vec{u}_A d'intensité I_A), et arrive enfin à une photodiode.

On se demande comment varie I_A avec l'angle α . Avant P , $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

est aléatoire. On a donc $I_0 = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle E_x^2 + E_y^2 \rangle = 2\varepsilon_0 c \langle E_x^2 \rangle$ d'après l'isotropie du champ. Entre P et A , on a une OPPHPR selon \vec{u}_p avec $\vec{u}_p = \vec{u}_x$, donc $I_p = \varepsilon_0 c \langle E_p^2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle E_x^2 \rangle = \frac{I_0}{2}$. Après A , on a une OPPHPR selon \vec{u}_A , d'où $\vec{E}(t) = (\vec{E}_p(t) \cdot \vec{u}_A) \vec{u}_A = E_x(t) \cos(\alpha) \vec{u}_A$. Donc $I_A = \varepsilon_0 c \langle E_A^2 \rangle = \varepsilon_0 c \cos^2(\alpha) \langle E_x^2 \rangle = \cos^2(\alpha) I_p$. Finalement, on obtient la loi de Malus

$$I_A(\alpha) = I_P \cos^2(\alpha).$$

Sur un tour, il y a donc deux maxima entrecoupés par deux extinctions.

7.3.3 Vitesse de propagation de l'énergie

Pour une OPP de vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$, on se demande quelle est la quantité d'énergie moyenne $\delta \langle \mathcal{E} \rangle$ traversant une section S pendant dt . On suppose que $T \ll dt \ll \Delta t_{\text{macro}}$.

D'abord, $\delta \langle \mathcal{E} \rangle = \langle P_s \rangle dt = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{n} S dt = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\| S dt$. Par ailleurs, on a $\delta \langle \mathcal{E} \rangle = \langle u_{\text{em}} \rangle S v_{\mathcal{E}} dt$ où $v_{\mathcal{E}}$ est la vitesse de propagation de l'énergie. Ainsi,

$$v_{\mathcal{E}} = \frac{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|}{\langle u_{\text{em}} \rangle} = \frac{\varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle}{\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle} = c.$$

7.4 Rayonnement dipolaire électrique

Le rayonnement électromagnétique est un phénomène fondamental. Toute charge en mouvement accéléré rayonne un champ $[\vec{E}, \vec{B}]$ et donc de l'énergie électromagnétique.

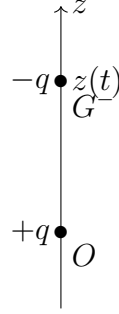


FIGURE 7.2 – Modélisation d'un atome par un dipôle électrique oscillant.

7.4.1 Le modèle du dipôle électrique oscillant

On a une distribution neutre, et on fait l'hypothèse que les charges mobiles sont en mouvement sinusoïdal. Par exemple, un atome possède une charge $q > 0$ fixe (le noyau) et une charge $-q < 0$ mobile (électrons). On peut donc le modéliser avec un dipôle comme à la Figure 7.2. Dans ce cas, le mouvement est $z(t) = z_0 \cos(\omega t)$ où z_0 est la distance typique entre le noyau et l'électron, et le moment dipolaire est donc

$$\boxed{\vec{p}(t) = q \overrightarrow{G^{-}O}(t) = -q z_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z.}$$

En ordre de grandeur, on a $p_0 \sim 10^{-29} \text{C m}$ (environ 1 Debye), et $\omega \sim 10^{15} \text{rad s}^{-1}$. Pour une antenne, on a $f \sim 100 \text{MHz}$ d'où $\lambda \sim 3 \text{m}$. Ainsi, la longueur d'une antenne est typiquement de l'ordre de la longueur d'onde.

7.4.2 Les trois échelles de longueur

On a accès à trois longueurs : z_0 qui est la longueur typique entre la charge positive et la charge négative, $\lambda = c/f$ qui est la longueur d'onde de l'onde sinusoïdale, et r qui est la distance de l'observateur au dipôle.

Plusieurs hypothèses permettent de distinguer ces trois longueurs :

- **Approximation dipolaire** : $z_0 \ll r$;
- **Mouvement des charges non relativiste** : la vitesse maximale entre les deux charges doit être bien plus petite que la vitesse de la lumière, d'où $\omega z_0 \ll c$, ce qui revient, comme $c/\omega = \lambda/(2\pi)$, à $z_0 \ll \lambda$.

- **Champ lointain ou zone de rayonnement** : on suppose le phénomène de propagation prépondérant, et donc le temps de propagation est très grand devant la période du dipôle, d'où $r/c \gg T$ (c'est l'inverse de l'ARQS), d'où $r \gg cT = \lambda$.

Ainsi, on a

$$z_0 \ll \lambda \ll r.$$

7.4.3 Champ électromagnétique dans la zone de rayonnement : approche qualitative

Symétries

On se place en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , le dipôle étant en O et orienté selon l'axe \vec{u}_z :

- symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) : pas de dépendance en φ ;
- tout plan qui contient (Oz) est un plan de symétrie : le champ magnétique est selon \vec{u}_φ et le champ électrique est nul selon cette même direction.

Finalement,

$$\vec{B} = B(r, \theta, t) \vec{u}_\varphi, \quad \vec{E} = E_r(r, \theta, t) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, t) \vec{u}_\theta.$$

Charges accélérées

L'électromagnétisme étant une théorie linéaire, l'intensité des champs magnétique et électrique sont proportionnels à l'accélération des charges :

$$E, B \propto q\ddot{z} \propto \ddot{p}.$$

Temps de propagation

La propagation de l'onde est radiale et à vitesse finie c . Ainsi, le temps de propagation est $\tau_{\text{propa}} = r/c$. Le champ électromagnétique en un point M à l'instant t généré par le dipôle \vec{p} est donc lié aux valeurs de \vec{p} à l'instant $t - \tau_{\text{propa}} = t - r/c$. Ainsi,

$$\vec{B}(M, t) \propto \ddot{p}(t - r/c) \vec{u}_\varphi,$$

et de même pour le champ électrique.

Conservation de l'énergie

Comme on suppose une propagation dans le vide, la moyenne de la puissance rayonnée reste constante sur une sphère S centrée autour du dipôle. Dans ce cas, on a

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = \oint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{u}_r dS \approx \|\langle \vec{\Pi} \rangle\|_{\infty} 4\pi r^2 \approx \text{constante}.$$

Donc $\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|_{\infty} \propto r^{-2}$. Or $\Pi \sim E^2, B^2$. Donc le champ électromagnétique décroît en $1/r$. Finalement,

$$\boxed{\vec{B}(M, t) \propto \frac{1}{r} \ddot{p}(t - r/c) \vec{u}_{\varphi},}$$

et de même pour le champ électrique.

Anisotropie du champ rayonné

Si on se place sur l'axe du dipôle ($\theta = 0, \pi$), alors le champ magnétique est nul et le champ électrique aussi. Donc $\vec{\Pi} = \vec{0}$ sur l'axe : il n'y a aucune puissance rayonnée selon l'axe.

Si on se place dans le plan perpendiculaire à l'axe du dipôle ($\theta = \pi/2$), a priori les champs sont non nuls. On fait alors la conjecture que le champ électromagnétique est maximal dans ce plan. Le plus simple pour satisfaire cette conjecture et l'observation précédente est que $E, B \propto \sin \theta$. Finalement,

$$\boxed{\vec{B}(M, t) \propto \frac{\sin \theta}{r} \ddot{p}(t - r/c) \vec{u}_{\varphi},}$$

et de même pour le champ électrique.

Structure locale d'OPP dans la ZR

Dans la zone de rayonnement, on a $r \gg \lambda$. La propagation est radiale, les surfaces d'onde sont strictement des sphères de centre le dipôle. Étant très loin du dipôle, les sphères sont quasiment des plans tangents. L'onde rayonnée est donc quasiment plane, et comme l'OPP est selon \vec{u}_r (on est

dans le vide), et que $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}_r$, on a $\vec{E} \propto cB\vec{u}_\theta$. Ainsi, dans la zone de rayonnement, on a

$$\vec{E}(M, t) \propto \frac{c \sin \theta}{r} \ddot{p}(t - r/c) \vec{u}_\theta,$$

car $|E_r| \ll |E_\theta|$ dans ce cas.

Analyse dimensionnelle

Pour obtenir les ingrédients restants, soit k tel que $\vec{B} = k \sin \theta \ddot{p}(t - z/c) \vec{u}_\varphi / r$. On sait que $[B] = [\mu_0][i]/[L] = [\mu_0] \text{C s}^{-1} \text{m}^{-1}$ via la formule du champ magnétique sur un solénoïde (par exemple). D'après ce qu'on a écrit, on a $[B] = [k][\ddot{p}]/[r] = [k] \text{C m s}^{-2} / \text{m}$. Finalement, $[k] = [\mu_0] \text{s m}^{-1} = [\mu_0] / (\text{m s}^{-1})$. On conjecture donc que $[k] = \text{constante} \mu_0 / c$. Il se trouve que c'est la bonne chose et que la constante est simplement $1/(4\pi)$. On obtient donc l'expression du champ électromagnétique dans la zone de rayonnement :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\varphi, \quad \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\theta.$$

7.4.4 Le champ rayonné : raisonnement en ordres de grandeur

Dans l'approximation dipolaire, on a $r \gg z_0$. Dans l'hypothèse non relativiste, on a $\lambda \gg z_0$. Mais λ/r est quelconque. Il se trouve que la champ électromagnétique est donné par

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \left(\frac{c^2}{r^2} p \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{c}{r} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \\ \sin \theta \left(\frac{c^2}{r^2} p \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{c}{r} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{c}{r} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{u}_\varphi.$$

Regardons si on peut négliger certains termes. Dans la zone de rayonnement, on a $r \gg \lambda$. Or,

$$\frac{|\ddot{p}|}{\left| \frac{c}{r} \dot{p} \right|} \sim \frac{\omega^2 p_0}{\frac{c}{r} \omega p_0} = \frac{r\omega}{c} = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1.$$

De plus,

$$\frac{\left| \frac{c}{r} \dot{p} \right|}{\left| \frac{c^2}{r^2} p \right|} \sim \frac{\omega r}{c} \gg 1.$$

Ainsi, on a $\ddot{p} \gg \frac{c}{r} \dot{p} \gg \frac{c^2}{r^2} p$. Dans la zone de rayonnement, on a donc bien $|E_r| \ll |E_\theta|$, et on retrouve bien l'expression précédente pour le champ électromagnétique.

Remarque 7.3. Dans la zone de champ proche (ARQS), on a $\tau_{\text{propa}} \ll T$, i.e. $r \ll \lambda$. Donc $\ddot{p} \ll \frac{c}{r} \dot{p} \ll \frac{c^2}{r^2} p$. En négligeant le temps de propagation, i.e. $t - r/c \approx t$, on obtient

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \frac{c^2}{r^2} p(t) \\ \sin \theta \frac{c^2}{r^2} p(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{p(t)}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \frac{c}{r} \dot{p}(t) \vec{u}_\varphi.$$

C'est la même expression qu'en statique.

On peut se demander si, dans la zone de rayonnement, on peut négliger le champ magnétique par rapport au champ électrique. On a

$$\frac{|E|}{c|B|} = \frac{\frac{p}{4\pi \varepsilon_0 r^3}}{c \frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi r^2}} = \frac{r^2}{\mu_0 \varepsilon_0 c \omega r^3} = \frac{c}{r \omega} = \frac{\lambda}{2\pi r} \gg 1.$$

C'est un bon début, mais il est encore plus pertinent de mesurer l'apport de chaque champ à l'énergie électromagnétique. On a alors

$$\frac{\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}{\frac{B^2}{2\mu_0}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{c^4}{r^2 \omega^2} = \frac{c^2}{r^2 \omega^2} \gg 1.$$

On peut donc considérer que l'on est dans l'ARQS électrique.

7.4.5 Bilan : propriétés essentielles du champ électromagnétique rayonné dans la ZR

Structure locale de l'OPP

Dans une zone de dimension $\sim \lambda$ ($\ll r$), on a $\frac{\sin \theta}{r} \approx \text{constante}$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi) \approx \text{constante}$. Ainsi, $\vec{E}(M, t) \approx \vec{E}(X, t) = \text{cte} \ddot{p} \left(t - \frac{X}{c} \right) \vec{u}_Y$ est transverse élec-

trique (vrai que dans la ZR car $|E_r| \ll |E_\theta|$), et $\vec{B}(M, t) = \vec{u}_X \wedge \frac{\vec{E}}{c}$. Localement, on a donc une OPP.

Anisotropie du rayonnement

Les champs sont proportionnels à $\sin \theta$: pas d'ondes rayonnées dans l'axe du dipôle, et rayonnement maximale à $\theta = \pi/2$.

Décroissance en $1/r$

Cette décroissance traduit la conservation de l'énergie. La décroissance en $1/r$ permet les télécommunications. En effet, supposons que le champ décroisse en $r^{-1-\varepsilon}$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$. Alors $\vec{\Pi} \propto r^{-2(1+\varepsilon)}$ et donc $\langle P \rangle \sim r^{-2\varepsilon} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$.

Polarisation rectiligne

On a $\vec{E}(M, t) \parallel \vec{u}_\theta$, donc l'onde est polarisée selon \vec{u}_θ . Un cas particulier important est la polarisation dans le plan $\theta = \pi/2$: dans ce cas, le champ électrique est parallèle au dipôle, c'est-à-dire $\vec{E} \parallel \vec{p}$.

7.4.6 Vecteur de Poynting de la zone de rayonnement

Valeur instantanée et moyenne

On a $\vec{\Pi}(M, t) = \frac{E^2(M, t)}{\mu_0 c} \vec{u}_r$ d'où

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \left(\ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 \vec{u}_r.$$

Ainsi, $\vec{\Pi} \parallel +\vec{u}_r$: la propagation de l'énergie est selon $+\vec{u}_r$. Localement, le vecteur de Poynting est une fonction de $t - r/c$, la propagation est à vitesse c . Enfin, on a $\|\vec{\Pi}\| \propto r^{-2}$.

Pour un mouvement sinusoïdal du dipôle $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$, on obtient

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0}{\pi^2 c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2 p_0^2 \omega^4 \vec{u}_r \propto \omega^4.$$

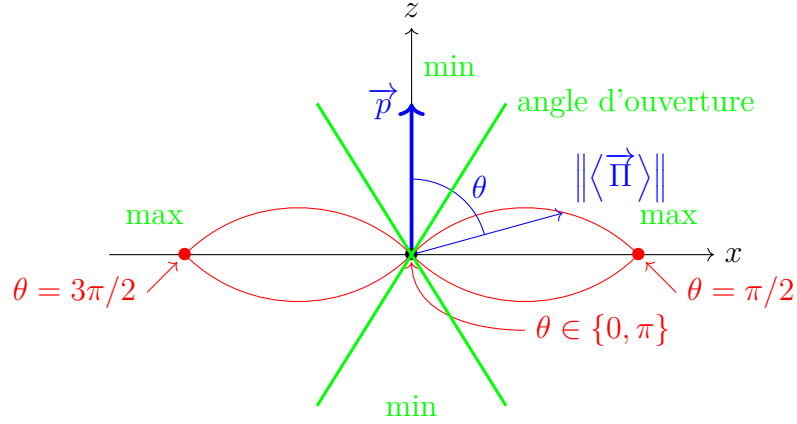


FIGURE 7.3 – Directivité de l'émission : moyenne du vecteur de Poynting selon l'angle θ .

Indicatrice de rayonnement

Il s'agit de la directivité de l'émission. Le vecteur de Poynting est une fonction de θ , à rayon r fixé, et qui varie selon $\sin^2 \theta$. On se réfère à la Figure 7.3.

7.4.7 Puissance rayonnée dans tout l'espace

Puissance instantanée et moyenne rayonnée

On intègre en coordonnées sphérique le vecteur de Poynting sur une sphère S de rayon r , sachant que la direction de propagation est selon $+\vec{u}_r$. Dans la zone de rayonnement, on a donc

$$P(t) = \oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{u}_r dS = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{\left(\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)^2}{r^2} 2\pi r^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{=\frac{4}{3}}.$$

On obtient ainsi

$$P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)^2,$$

et la puissance moyenne est

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^2 \omega^4.$$

La puissance moyenne est donc proportionnelle à ω^4 et est indépendante du rayon r .

Formule de Larmor

Comme $p(t) = -qz(t)$, on a $\ddot{p}(t) = -q\ddot{z}(t)$, d'où

$$P(t) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(\ddot{z} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2.$$

La puissance est donc proportionnelle à l'accélération au carré, c'est le rayonnement d'accélération. Ainsi, lorsque qu'une particule accélère (si elle a un mouvement circulaire par exemple), elle perd de l'énergie cinétique, d'où le besoin dans les accélérateurs de particules de les ré-accélérer avec des zones de forts champs électriques/magnétiques.

Chapitre 8

Dispersion et atténuation : des plasmas aux métaux

Le plasma est le quatrième état de la matière : c'est un gaz partiellement ou totalement ionisé. On en retrouve de manière naturelle dans la ionosphère ou dans la matière stellaire, et de manière artificielle dans les tokamaks (réacteurs de fusion nucléaire), laser mégajoules, plasmas basse température (circuits électriques). L'étude des plasmas est la magnéto-hydro-dynamique.

On retrouve dans les plasmas des cations $(+e, M, n^+)$, où n^+ est le nombre de particules par unité de volume (en m^{-3}), et des électrons $(-e, m, n^-)$. Dans la ionosphère (entre 60 et 800km d'altitude), on observe $n^- = n^+ = 10^{10}$ à 10^{12}m^{-3} .

Les métaux sont formés d'un réseau cristallin de cations (par exemple l'ion cuivre Cu^+) baignant dans une mer (gel ou « jelly » en anglais) d'électrons libres (on dit aussi de conduction). Dans ce cas, n^- représente le nombre d'électrons libres par unité de volume, et n^+ le nombre de cations par unité de volume. Dans le cuivre, on observe $n^+ = n^- \sim 10^{29}\text{m}^{-3}$.

Sommaire

8.1	Modèle de la conductivité complexe	120
8.1.1	Le modèle	120
8.1.2	Plasmas dilués et métaux hautes fréquences	121
8.1.3	Métaux en basses fréquences	122

8.1 Modèle de la conductivité complexe : plasmas et métaux

8.1.1 Le modèle

Hypothèse

- Les ions sont fixes : comme on a

$$\begin{aligned} M \frac{d\vec{v}^+}{dt} &= +e\vec{E}, \\ m \frac{d\vec{v}^-}{dt} &= -e\vec{E}, \end{aligned}$$

d'où $\left\| \frac{\vec{a}^-}{\vec{a}^+} \right\| = \frac{M}{m} \gg 1$: les cations sont fixes (plasmas et métaux).

- Le milieu est supposé localement neutre :

$$\boxed{n^- = n^+ = n_0.}$$

- Le mouvement des électrons est non relativiste : l'électron est soumis au champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ d'une onde électromagnétique. La force de Lorentz est $\vec{F}_L = -e(\vec{E} + \vec{v}^- \wedge \vec{B})$. Comme $\frac{\|\vec{v}^- \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1$ (le plasma est dilué, on a $\frac{B}{E} \sim \frac{1}{c}$: OPP dans le vide). Ainsi, l'influence de \vec{B} de l'onde est négligeable, et on retient donc

$$\boxed{\vec{F}_L = -e\vec{E}.}$$

- Processus collisionnels : il y a des phénomènes dissipatifs (interactions électrons/cations et électrons/électrons dans les plasmas, électrons libres et défauts du réseau : les « phonons »). On modélise ces collisions par une force moyenne

$$\boxed{\vec{f} = -\frac{m\vec{v}}{\tau},}$$

où τ est le temps de collision. Dans les métaux, on observe $\tau \sim 10^{-14}\text{s}$, et dans tous les cas, on a toujours $\tau \gg T$ où T est la période des variations du champ électrique de l'onde.

Conductivité complexe

On va établir le lien entre \vec{j} et \vec{E} . On applique la principe fondamental de la dynamique à un électron « moyen » :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e\vec{E}}{m}}.$$

On cherche alors la solution en régime sinusoïdal forcé imposé par l'onde électromagnétique. On adopte la conction $e^{i\omega t}$. On trouve alors

$$\boxed{\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \vec{E}}.$$

On calcule $\vec{j} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{cations fixes}} + (-n_0 e) \vec{v} = \sigma_{\text{comp}}(\omega) \vec{E}$ avec

$$\boxed{\sigma_{\text{comp}}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}, \quad \sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}}.$$

La quantité σ_0 est la conductivité statique du milieu. Cette expression est valable pour les plasmas et les métaux pour toutes les pulsations ω .

8.1.2 Plasmas dilués et métaux hautes fréquences

On se place dans l'hypothèse $\omega\tau \gg 1$. Dans ce cas,

$$\sigma_{\text{comp}}(\omega) \approx -i \frac{\sigma_0}{\omega\tau} = \boxed{-i \frac{n_0 e^2}{m\omega}} \in i\mathbb{R},$$

et est indépendante de τ . Ainsi, comme $\langle P_{\text{vol}} \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\vec{j} \cdot \vec{E}^*)$ et $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, on a

$$\boxed{\langle P_{\text{vol}} \rangle = \frac{|\vec{E}|^2}{2} \Re(\sigma) = 0}.$$

Ainsi, il n'y a aucun échange d'énergie en moyenne entre le champ et les charges.

8.1.3 Métaux en basses fréquences

On se place dans l'hypothèse $\omega\tau \ll 1$. Dans ce cas, on a

$$\sigma(\omega) \approx \sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m},$$

qui est une constante strictement positive. On retrouve alors la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}.$$

La moyenne de la puissance volumique est alors $\langle P_{\text{vol}} \rangle = \sigma_0 E_0^2 / 2 > 0$: c'est l'effet Joule. Pour le cuivre, on observe $\sigma_0 \sim 5.7 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$.