Lycée Michel Montaigne

Notes de cours

Physique-Chimie MP

Régis Santet

Cours réalisé par
Professeur N. Choimet

Année scolaire 2015/2016

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Référentiels non galiléens

La description du mouvement d'un objet dépend de l'observateur. Un observateur lié à un solide (par exemple un train ou un quai) est lié à un système d'axes, c'est-à-dire 3 axes rigidement liés ainsi que d'une horloge (unique en mécanique classique car le temps est universel).

En L1, on étudie les référentiels galiléens vérifiant le principe d'inertie (1ère loi de Newton). En L2, on étudie les référentiels non galiléens dans deux cas :

— les référentiels en translation accélérée,

— les référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Sommaire

1.1 Description du mouvement d'un point matériel par rapport à deux référentiels mobiles l'un par rapport à l'autre

1.1.1 Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre

Translation

On considère $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ (trièdres orthonormés directs pour simplifier).

Définition 1.1 (Référentiel en translation par rapport à un autre)**.** $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ si ses axes gardent une orientation constante par rapport aux axes du référentiel $\mathcal{R}$.

Il y a donc une seule inconnue : $\vec{OO'}(t)$.

Exemple 1.1. Le référentiel géocentrique (origine au centre de la Terre et trois axes pointés vers trois étoiles lointaines « fixes ») est (environ) en translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic (origine au centre du système solaire et trois axes pointant vers trois étoiles « fixes »), voir la Figure 1.1.

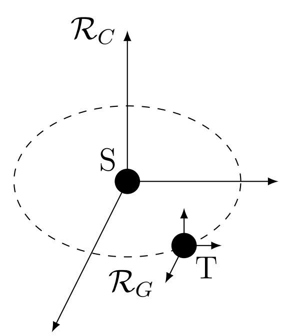

FIGURE 1.1 – Référentiel géocentrique et de Copernic.

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Exemple 1.2. La rotation propre de la Terre (référentiel $\mathcal{R}_T$) par rapport à l'axe reliant ses pôles, de vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ par rapport à l'axe de rotation (supposé selon l'axe z). On note alors le vecteur de rotation instantanée

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G) \coloneqq \dot{\theta}\, \vec{u_z},$$

où $\mathcal{R}_G$ est le référentiel géocentrique, $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation et $\vec{u_z}$ donne la direction et le sens de rotation.

1.1.2 Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif

Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ et $\vec{A}$ quelconque. On se demande quelle est la relation entre $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$ et $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$. Pour cela, projetons $\vec{A}$ sur les vecteurs de base de $\mathcal{R}'(\vec{u_x}', \vec{u_y}', \vec{u_z}')$:

$$\vec{A}(t) = a(t)\vec{u_x}' + b(t)\vec{u_y}' + c(t)\vec{u_z}'.$$

— Dans $\mathcal{R}'$, comme $(\vec{u_x}', \vec{u_y}', \vec{u_z}')$ est une base fixe dans $\mathcal{R}'$, on a

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\vec{u_x}' + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\vec{u_y}' + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\vec{u_z}'.$$

— Dans $\mathcal{R}$, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = {} & \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\vec{u_x}' + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\vec{u_y}' + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\vec{u_z}' \\ & + a(t)\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u_x}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + b(t)\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u_y}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + c(t)\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u_z}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

Si $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$, alors $(\vec{u_x}', \vec{u_y}', \vec{u_z}')$ est fixe dans $\mathcal{R}$ et ainsi

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}.$$

Si $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme par rapport à l'axe (Oz), on décompose les vecteurs de base :

$$\begin{cases} \vec{u_x}' = \cos\theta \vec{u_x} + \sin\theta \vec{u_y}, \\ \vec{u_y}' = -\sin\theta \vec{u_x} + \cos\theta \vec{u_y}, \\ \vec{u_z}' = \vec{u_z}. \end{cases}$$

Alors on a

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u_x}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u_x} + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_y} = \dot{\theta}\,\vec{u_y}' = \dot{\theta}\left(\vec{u_z} \wedge \vec{u_x}'\right),$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u_y}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_x} - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u_y} = -\dot{\theta}\,\vec{u_x}' = \dot{\theta}\left(\vec{u_z} \wedge \vec{u_y}'\right).$$

Or $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \coloneqq \dot{\theta}\,\vec{u_z}$, on écrit donc simplement

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u_x}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u_x}',$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u_y}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u_y}'.$$

Ainsi,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (a\vec{u_x}' + b\vec{u_y}' + c\vec{u_z}').$$

De manière générale, on a donc

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.}$$

1.1.3 Composition des vitesses et vitesse d'entraînement

Translation

Soit M un point matériel et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ un référentiel en translation par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$. La vitesse de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \coloneqq \left(\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}} + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}.$$

Définition 1.2 (Vitesse d'entraînement)**.** $\vec{v}_e \coloneqq \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$ est appelée la **vitesse d'entraînement**, qui est indépendante de n'importe quel point matériel considéré, mais vient juste du fait que $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$.

On a donc

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e.}$$

Mouvement de translation rectiligne uniforme. On considère qu'à $t = 0$, $O = O'$ et que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme à la vitesse V selon l'axe (Ox).

— Dans le cas non relativiste $v \ll c$, on a

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} + V,$$

d'où $x = x' + Vt$: c'est une transformation de Galilée. Comme on a $y = y'$, $z = z'$ et $t = t'$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

— Dans le cas relativiste $v \lessapprox c$, c'est la transformation de Poincaré-Lorentz :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ xt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix},$$

où $\beta \coloneqq \frac{v}{c} \lessapprox 1$ et $\gamma \coloneqq \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$.

$\longrightarrow$ Dans la limite $\beta \ll 1$, on a $\gamma \approx 1$ et on retrouve la transformation de Galilée.

$\longrightarrow$ Le temps n'est plus absolu.

$\longrightarrow$ Il y a une « dilatation » des temps. En effet, soit un intervalle de temps propre dans $\mathcal{R}'$ (i.e. séparant deux évènements ayant lieu au même endroit dans $\mathcal{R}'$). Alors

$$c\Delta t = \beta\gamma \underbrace{\Delta x'}_{=0} + \gamma c \Delta t' = \gamma c \Delta t'.$$

Ainsi, si $\Delta x = 0$, Δt est « impropre ». On note que dans ce cas, $\Delta t_{\text{impropre}} = \gamma \Delta t_{\text{propre}}$ (et $\gamma > 1$ donc il y a une « dilatation »).

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

On note $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{u_z}$. On a déjà vu que l'on a

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M),$$

avec $\vec{v}_e(M) = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{OM}$.

Pour simplifier, on notera $\vec{v'}$ quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$, et $\vec{v}$ quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ (ce qui sera le cas par défaut).

1.1.4 Composition des accélérations

Translation

On a

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}+\vec{0}:=\vec{a'}(M)_{/\mathcal{R}'}} + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{a}_e}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{a}(M) = \vec{a'}(M) + \vec{a}_e,}$$

où $\vec{a}_e = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{OO'}}{\mathrm{d}t^2}$.

Rotation uniforme

On a

$$\begin{aligned}\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{OM}\right)\right)_{\mathcal{R}}, \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v'} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\vec{\omega}$ est une constante. Comme

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M) = \vec{v'} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM},$$

on a donc

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{OM}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'}.}$$

On note alors $\vec{a}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{OM}\right)$ et $\vec{a}_c(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{v'}$ **l'accélération de Coriolis**.

Exemple 1.3. Dans le cas d'une rotation autour de l'axe (Oz), on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{HM}$ où H est le projeté orthogonal sur l'axe (Oz) du point M.

1.2 Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen

1.2.1 Les trois lois de Newton

1. Principe d'inertie.
2. La dérivée de la quantité de mouvement est égal à la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système considéré dans un référentiel galiléen, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F^{\text{ext}}}, \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \text{ dans } \mathcal{R}_{\text{galiléen}}.$$

3. Principe d'action-réaction.

On se place dans le cadre classique ou $\gamma = 1$.

1.2.2 Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie

Loi de la quantité de mouvement

On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_{\text{galiléen}} \equiv \mathcal{R}$. Dans $\mathcal{R}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= m\vec{a}(M) = \vec{F},\\ &= m(\vec{a'}(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)) = \vec{F}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$m\vec{a'}(M) = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c,$$

où $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$ et $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$. Ce sont des « pseudo » forces d'inertie.

Loi du moment cinétique par rapport à O' fixe dans $\mathcal{R}'$ non galiléen.

Dans $\mathcal{R}'$, on a

$$\left(\vec{L}_{O'}\right)_{\mathcal{R}'} := \vec{O'M} \wedge \vec{p'} = \vec{O'M} \wedge m\vec{v'}(M).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{O'}}{\mathrm{d}t}\right) &= m \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}}_{\vec{v'}} \wedge \vec{v'} + \vec{O'M} \wedge \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'},\\ &= \underbrace{\vec{O'M} \wedge \vec{F}}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}} + \underbrace{\vec{O'M} \wedge \vec{F}_e}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{\text{ent}}} + \underbrace{\vec{O'M} \wedge \vec{F}_c}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{\text{coriolis}}}.\end{aligned}$$

Loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

Puissance des forces de Coriolis. On a

$$\vec{P}_{\text{cor}} = \vec{F}_e \cdot \vec{v'} = -m\left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v'}\right) \wedge \vec{v'} = 0.$$

Loi de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}'$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_c'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv'^2\right),\\ &= m\vec{v}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'},\\ &= \left(\vec{F}+\vec{F_e}+\vec{F_c}\right)\cdot\vec{v'},\\ &= \left(\vec{F}+\vec{F_e}\right)\cdot\vec{v'},\\ &= P'+P_e'.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\mathrm{d}E_c' = P'\mathrm{d}t + P_e'\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\underbrace{\vec{v'}\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}\vec{l'}} + \vec{F_e}\cdot\underbrace{\vec{v'}_e\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}\vec{l'}} = \delta W' + \delta W_e'.$$

En intégrant, on obtient donc

$$\boxed{\Delta E_c' = W' + W_e'.}$$

Formulation en terme d'énergie mécanique. Dans le cas où il existe des forces conservatives, on a $W_{\mathrm{cons}} = -\Delta E_p$ (ou $\delta W_{\mathrm{cons}} = -\mathrm{d}E_p$). Dans ce cas, on définit l'énergie mécanique par

$$\boxed{E_m \coloneqq E_c + E_p.}$$

Ainsi, $\mathrm{d}E_c' = \delta W_{\mathrm{nc}} - \mathrm{d}E_p' + \delta W_e'$ où W_{nc} représente le travail venant de forces non conservatives. Alors

$$\mathrm{d}E_m' = \delta W_{\mathrm{nc}}' + \delta W_e',$$

et on a donc

$$\boxed{\Delta E_m' = W_{\mathrm{nc}}' + W_e'.}$$

1.2.3 Référentiel entraîné en translation accélérée ($\vec{\omega} = \vec{0}$)

On a $\vec{F_e} = -m\vec{a}(O')$, force indépendante du point matériel M considéré, et $\vec{F_c} = \vec{0}$.

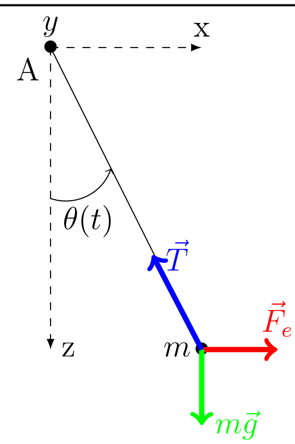

FIGURE 1.2 – Pendule secoué.

Freinage d'une voiture

On suppose que la voiture roule initialement à 50 km/h et qu'elle s'arrête en 1 seconde. Alors

$$\|\vec{a}_e\| \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = 14\ m.s^{-2} > g,$$
$$\left\|\vec{F_e}\right\| = m\,\|\vec{a}_e\| = 1400\ N.$$

Pendule secoué

On considère un pendule secoué, voir la Figure 1.2. Le référentiel est $\mathcal{R}' = (Axyz)$ (y est orienté vers nous). On suppose que le pendule situé en A est secoué selon l'axe x : $x_a(t) = \alpha\cos(\omega t)$. Le théorème du moment cinétique par rapport à A dans $\mathcal{R}'$ donne

$$\vec{L'_A} = J\dot{\theta}\vec{u_y} = ml^2\dot{\theta}\vec{u_y},$$

où J est le moment d'inertie. On calcule la force d'entraînement :

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \ddot{x_A}(t)\vec{u_x} = -\omega^2\alpha\cos(\omega t)\vec{u_x}, \\ \vec{F_e} = m\omega^2\alpha\cos(\omega t)\vec{u_x}. \end{cases}$$

Le théorème du moment cinétique selon $\vec{u_y}$ donne alors

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta + m\omega^2\alpha\cos(\omega t)l\cos\theta.$$

En notant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$, on a donc

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \cos(\omega t) \cos\theta.}$$

Pour des petits mouvements, on a $|\theta| \ll 1$ et on linéarise :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \cos(\omega t).$$

En régime sinusoïdal forcé, $\underline{\theta}(t) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ (où j est le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$). Ainsi,

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \underline{\theta}(t) = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.$$

En prenant la partie réelle, on obtient donc

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{\alpha}{l} \cos(\omega t).}$$

Si l'on suppose que le pendule est secoué selon l'axe z avec $z_A(t) = \alpha \cos(\omega t)$, on trouve pour équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{\alpha \omega^2}{g} \cos(\omega t)\right) \sin\theta = 0.$$

En posant $\Omega^2(t) = 1 + \dfrac{\alpha \omega^2}{g} \cos(\omega t)$, on voit qu'il s'agit d'un oscillateur paramétrique.

Énergie potentielle d'entraînement par translation uniformément accélérée

On a $\vec{a}_e = a \vec{u}_x$ et $\vec{F}_e = -ma\vec{u}_x$. Soit un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{l}' = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x' \\ \mathrm{d}y' \\ \mathrm{d}z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}'$. Alors

$$\delta W_e' = \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l}' = -ma\mathrm{d}x' = -\mathrm{d}(max') = -\mathrm{d}E_p^{\text{ent}}.$$

Ainsi, l'énergie potentielle d'entraînement vaut $E_p^{\text{ent}} = max'$ (à une constante près).

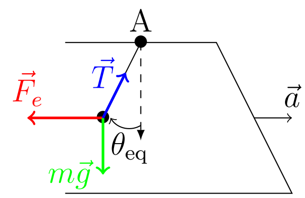

FIGURE 1.3 – Pendule dans un train en accélération uniforme.

Exemple 1.4. On considère un pendule dans un train, voir la Figure 1.3. On cherche la valeur de θ_{eq}.

— Première méthode : on utilise $\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{tot}} = \vec{0}$. En projetant, on trouve alors $mgl\sin\theta_{\text{eq}} = mal\cos\theta_{\text{eq}}$ d'où

$$\tan\theta_{\text{eq}} = \frac{a}{g}.$$

— Deuxième méthode : On a $E_p^{\text{ent}} = -mal\sin\theta$ et $E_p^{\text{poids}} = -mgl\cos\theta$ (avec éventuellement des constantes). Alors

$$\frac{\mathrm{d}E_p^{\text{tot}}}{\mathrm{d}\theta} = 0 = -mal\cos\theta + mgl\sin\theta,$$

d'où le résultat.

1.2.4 Référentiel entraîné en rotation uniforme par rapport à un axe fixe

On suppose que la rotation se fait selon l'axe (Oz) à une vitesse angulaire ω, voir la Figure 1.4. H est le projeté du point M sur l'axe (Oz). On a $\vec{F}_e = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$, qui est donc perpendiculaire au mouvement dans $\mathcal{R}'$.

Exemple

On considère le cas où l'on rajoute un ressort sur l'axe (Ox'), fixé en O, de constante de raideur k et de longueur au repos l_0, avec au bout une masse m, voir la Figure 1.5.

On cherche l'expression de $x'(t)$. On a

$$\begin{cases} \vec{F}_e = m\omega^2 x'(t)\vec{u_{x'}}, \\ \vec{F}_c = -2m\omega\vec{u_z} \wedge \dot{x}'(t)\vec{u_{x'}} = -2m\omega\dot{x}'(t)\vec{u_y}. \end{cases}$$

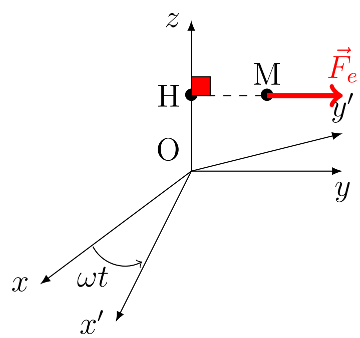

FIGURE 1.4 – Rotation uniforme autour de l'axe (Oz).

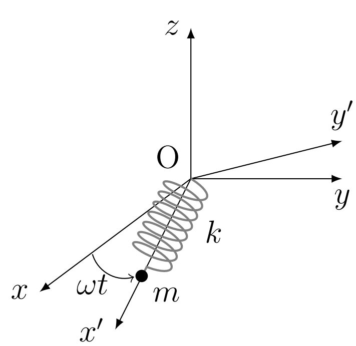

FIGURE 1.5 – Exemple de rotation uniforme autour de l'axe (Oz) : ressort avec une masse.

On projette le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{u'_x}$ pour obtenir

$$m\ddot{x}'(t) = -k\left(x'(t) - l_0\right) + m\omega^2 x'(t).$$

En posant $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$, on obtient

$$\ddot{x}'(t) + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) x'(t) = \omega_0^2 l_0.$$

Énergie potentielle d'entraînement « centrifuge »

Soit un déplacement $\vec{dl'} = dx'\vec{u_{x'}}$ dans $\mathcal{R}'$. On a

$$\delta W'_e = \vec{F}_e \cdot \vec{dl'} = m\omega^2 x' \mathrm{d}x' = \mathrm{d}\left(m\omega^2 \frac{x'^2}{2}\right) := -\mathrm{d}E_p^{\text{ent}},$$

d'où $E_p^{\text{ent}} = -m\omega^2 \frac{x'^2}{2}$.

Retour sur l'exemple

On applique le théorème d'énergie mécanique dans $\mathcal{R}'$:

$$E'_{m_{tot}} = \text{constante} = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - l_0)^2 - m\omega^2 \frac{x'^2}{2}.$$

On se donne comme conditions initiales $x'(0) = l_0$ et $\dot{x}'(0) = 0$. On a alors

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - l_0)^2 - \frac{m\omega^2 x'^2}{2} = -\frac{m\omega^2 l_0^2}{2}.}$$

1.3 Caractère galiléen approché de quelques référentiels courants

1.3.1 Référentiel géocentrique et marée océanique

On se place dans $\mathcal{R}_G$ en translation (environ) circulaire par rapport à $\mathcal{R}_C$, voir la Figure 1.1. On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m au voisinage de la surface de la Terre par rapport à $\mathcal{R}_G$. Alors

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_G} = \vec{f} + m\vec{g}_T(M) + \sum_{\neq i} m\vec{g}_i(M) - m\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C},$$

où $\vec{f}$ représentent les forces de contact (par exemple la pression), $\vec{g}_T$ est le champ de pesanteur dû à la Terre, $\vec{g}_i$ représente le champ de gravitation dû à un autre astre du système solaire, et $m\vec{a}_{T/\mathcal{R}_C}$ est simplement la force d'entraînement $\vec{F}_e$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la terre par rapport à $\mathcal{R}_C$, on obtient

$$M_T\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \vec{R}^{\text{ext}} = \sum_{\neq i} M_T\vec{g}_i(T),$$

où l'on a fait l'hypothèse que la Terre était sphérique pour la dernière égalité. Ainsi, on a

$$\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \sum_{\neq i} \vec{g}_i(T).$$

Alors

$$\boxed{m\vec{a}(M) = \vec{f} + m\vec{g}_T(M) + m\left(\sum_{\neq i} \vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T)\right).}$$

Définition 1.3 (Champ de marée)**.** L'expression

$$\vec{C}(M) \coloneqq \left(\sum_{\neq i} \vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T)\right),$$

définit le *champ de marée*. C'est un terme différentiel.

Notamment, le champ de marée dû à la Lune uniquement est

$$\vec{C}_L(M) = \vec{g}_L(M) - \vec{g}_L(T).$$

Ordre de grandeur de $\left\|\vec{C}_i\right\|_{\mathbf{max}}$. On a

$$\left\|\vec{C}_i\right\| = \mathcal{G}M_i\left|\frac{1}{(D_i - R_T)^2} - \frac{1}{D_i^2}\right|.$$

Si $D_i \gg R_T$, on a

$$\frac{1}{(D_i - R_T)^2} = \frac{1}{D_i^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{R_T}{D_i}\right)^2} \sim \frac{1}{D_i^2}\left(1 + \frac{2R_T}{D_i}\right).$$

	M (kg)	D_i	$\|\vec{g}_i\|$	$\|\vec{C}\|$
Soleil	2.10^{30}	1.10^{11}	1.10^{-2}	5.10^{-7}
Lune	7.10^{22}	4.10^{8}	3.10^{-5}	1.10^{-6}

TABLE 1.1 – Champs de marées dus au Soleil et à la Lune.

Ainsi,

$$\left\|\vec{C}_i\right\|_{\max} = \mathcal{G} M_i \frac{2R_T}{D_i^3} = \|\vec{g}_i(T)\| \underbrace{\frac{2R_T}{D_i}}_{\ll 1} \ll \|\vec{g}_i\| \,.$$

On donne dans la Table 1.1 les ordres de grandeur des champs de marées dus au Soleil et à la Lune. On voit donc que le champ de marée lunaire est environ deux fois supérieur au solaire.

Interprétation du phénomène des marées océaniques.

Effet dominant de la Lune. Comme la période de révolution de la Lune autour de la Terre (environ 27 jours) est beaucoup moins longue que la période de révolution de la Terre autour de ses pôles (environ 24h), il y a deux marées hautes et deux marées basses par jour. Il y a un décalage d'environ 50 minutes par jour dû à la rotation de la Lune par rapport à la Terre.

Rôle du Soleil. Selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil, les effets de marées peuvent être atténués ou renforcés, voir la Figure 1.6. Durant la nouvelle Lune et la pleine Lune, le Soleil renforce l'effet de la Lune, ce sont des marées de vives-eaux. Au contraire, lors du premier et du dernier quartier, il y a une compensant partielle de l'effet de la Lune par le Soleil. Ce sont les marées de mortes-eaux.

1.3.2 Référentiel terrestre

On suppose le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ galiléen. On ne regarde que les effets de la rotation propre de la Terre.

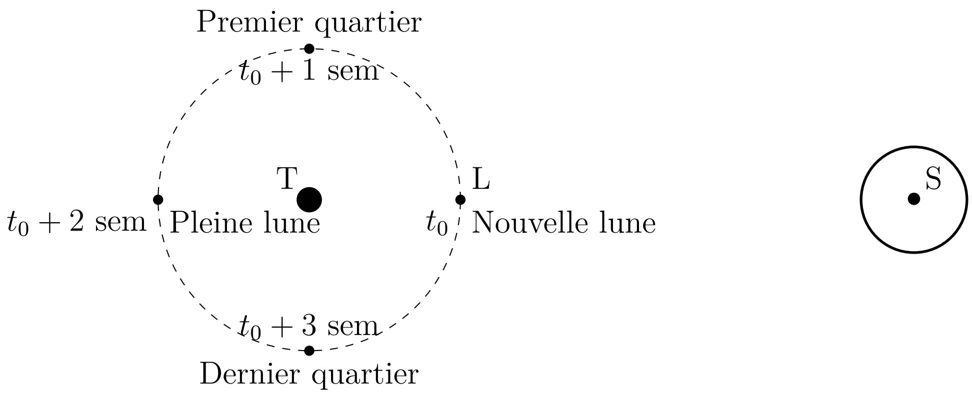

FIGURE 1.6 – Atténuation ou renforcement des effets de marées selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil.

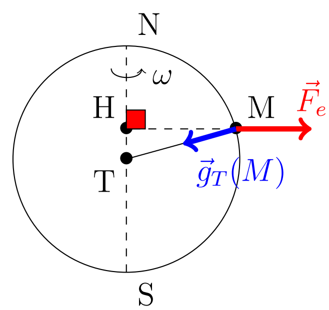

FIGURE 1.7 – Rotation de la Terre et définition du poids.

Effets de la force centrifuge

On regarde de plus près la définition du poids. $\mathcal{R}_T$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}_G$ à une rotation angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T_T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7.3.10^{-5}\text{rad}.s^{-1},$$

autour de l'axe $\vec{SN}$ fixe dans $\mathcal{R}_G$, voir la Figure 1.7.

Équation du mouvement de M dans $\mathcal{R}_T$. On a

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_e + m\vec{g_T}(M) + m\omega^2 \vec{HM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}.$$

Définition du poids/de la pesanteur. Supposons qu'un fil à plomb soit en équilibre dans $\mathcal{R}_T$ et induise une tension (verticale) $\vec{T}$. Alors on a

$$\vec{0} = m\vec{g}_T + m\omega^2 H\vec{M} + \vec{0} + \vec{T}.$$

Ainsi, $\vec{T}$, qui indique la verticale du lieu, est donné par

$$\vec{T} = -m\left(g_T + \omega^2 H\vec{M}\right).$$

Définition 1.4 (Champ de pesanteur et champ de gravité)**.** En notant $\vec{g}$ le champ de pesanteur et $\vec{g}_T$ le champ de gravité, on a

$$\boxed{\vec{g} \coloneqq \vec{g}_T + \omega^2 H\vec{M}.}$$

$\vec{g}$ n'est donc pas tout à fait diriger vers $\vec{T}$. À l'équateur, $\omega^2 R_t \approx 0.03\, m.s^{-2}$ avec $R_T \approx 6400\ km$. En dynamique terrestre, $\vec{g}$ inclut la force centrifuge.

Effets qualitatifs de la force de Coriolis

Dans $\mathcal{R}_T$, on a

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{f} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T},$$

où $m\vec{g}$ représente le poids.

Ordre de grandeur.

Composante verticale de $\vec{F}_{\mathbf{cor}}$. Elle est à comparer au poids. Elle vaut au maximum $2m\omega v$. Ainsi,

$$\frac{\left\|\vec{F}_{\text{cor}}\right\|_{\text{max}}}{mg} = \frac{2\omega v}{g} \# \frac{14.10^{-5}}{10} \times v = 1,4.10^{-5} v.$$

Le plus souvent, la composante vertical est négligeable devant le poids. L'effet dominant est celui de la composante horizontale.

Échelles de temps. On compare le temps de l'expérience T_{exp} au temps de révolution de la Terre T_T. On a

$$\frac{\|\vec{a}_{\text{cor}}\|}{\left\|\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}T}\right\|} \# \frac{2\omega v}{v/T_{\text{exp}}} = 2\omega T_{\text{exp}} = 4\pi\frac{T_{\text{exp}}}{T_T}.$$

Le référentiel terrestre est quasi galiléen si $T_{\text{exp}} \ll 24h$.

Échelles de distance. On compare la longueur caractéristique présente dans l'expérience et L_c (taille typique des déplacements dus à $\vec{F}_{\text{cor}}$). On a

$$L_c \approx a_{\text{cor}} \times T_{\text{exp}}^2 = 2\omega v T_{\text{exp}}^2,$$
$$L_{\text{exp}} \approx v \times T_{\text{exp}},$$

d'où

$$\frac{L_c}{L_{\text{exp}}} \# 2\omega T_{\text{exp}} = 4\pi \frac{T_{\text{exp}}}{T_T}.$$

Expression de $\vec{F}_{\text{cor}}$ à la surface de la Terre. On note λ la latitude, voir la Figure 1.8. On note (X, Y, Z) la base de projection (voir la Figure). On note

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}_{u_X, u_Y, u_Z}.$$

Alors

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \cos\lambda \\ 0 \\ \omega \sin\lambda \end{pmatrix},$$

d'où

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega \cos\lambda \\ 0 \\ omega \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \dot{Y} \sin\lambda \\ \omega \dot{X} \sin\lambda + \omega \dot{Z} \cos\lambda \\ -\omega \dot{Y} \cos\lambda \end{pmatrix},$$

et

$$\vec{F}_{\text{cor}} = 2m\omega \begin{pmatrix} \omega \dot{Y} \sin\lambda \\ \omega \dot{X} \sin\lambda + \omega \dot{Z} \cos\lambda \\ -\omega \dot{Y} \cos\lambda \end{pmatrix}.$$

Mouvements horizontaux : $\dot{Z} = 0$. On a

$$\vec{F}_{cor,\text{horizontale}} = 2m\omega \sin\lambda \begin{pmatrix} \dot{Y} \\ -\dot{X} \\ 0 \end{pmatrix} = -2m\omega \sin\lambda \vec{u}_Z \wedge \vec{v}.$$

Ainsi, dans l'hémisphère sud, on a $\lambda < 0$ et $\vec{F}_{\text{cor}}$ est dans le même sens que $\vec{u_Z} \wedge \vec{v}$: il y a une déviation vers la gauche. Dans l'hémisphère nord, on a $\lambda > 0$ et on voit donc une déviation vers la droite.

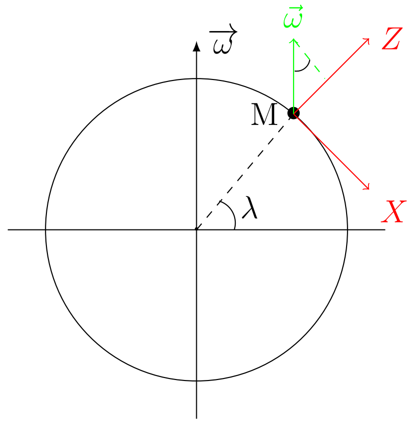

Figure 1.8 – Expression de la force de Coriolis à la surface de la Terre.

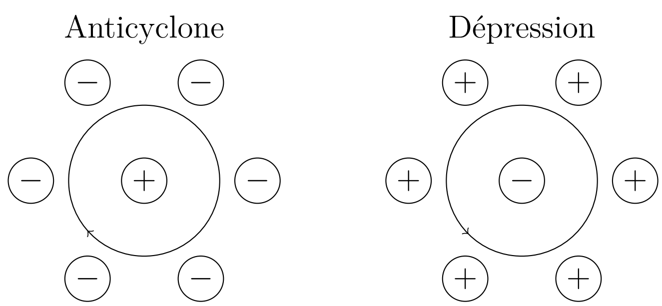

Figure 1.9 – Sens des anticyclones et dépressions dans l'hémisphère nord.

Anticyclones et dépressions. La force de Coriolis justifie les mouvements des anticyclones et dépressions. On montre ce qu'il se passe dans l'hémisphère nord sur la Figure 1.9. En ordre de grandeur, on a $L_{\text{exp}} \approx 1000\ km$ et $v \approx 10\ m.s^{-1}$. Ainsi, $T_{\text{exp}} \# 10^5\ s$. Or $T_T = 86400\ s \# 10^5\ s$. Ainsi, $L_c \approx L_{\text{exp}}$.

Tourbillons dans un lavabo. On a $L_{\text{exp}} \approx 10\ cm$, $v \approx 10\ cm.s^{-1}$, $T_{\text{exp}} \approx 1\ s$, ainsi

$$L_{\text{cor}} \# L_{\text{exp}} \frac{T_{\text{exp}}}{T_T} = 10^{-6}\ m = 1\ \mu m.$$

Pendule de Foucault (1851). Ce pendule dévie vers la droite. À l'équateur, on a $\lambda = 0$ donc il n'y a pas de déviation. Au pôle nord, l'effet est maximum. Le plan d'oscillation tourne à ω par rapport à $\mathcal{R}_G$.

Mouvement vertical de chute libre : déviation vers l'est. Expérience de Reich (1833). On considère un puits de mine de profondeur $h = 100\, m$. Lorsqu'un objet tombe dans ce puits, on observe une légère déviation vers l'est (quelques millimètres). On reprend la Figure 1.8 et on considère que $\left|\dot{X}\right|, \left|\dot{Y}\right| \ll \left|\dot{Z}\right|$. Alors

$$\vec{F_c} = -2m\omega\dot{Z}\cos\lambda\vec{u_Y},$$

et $\dot{Z} < 0$ donc $\vec{F_c}$ est dirigé vers l'est. En ordre de grandeur, on a

$$L = \frac{1}{2}gt^2,$$

donc

$$T_{\exp} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \# \sqrt{\frac{h}{g}},$$

et ainsi

$$L_c \# \underbrace{L_{\exp}}_{h} \times \frac{T_{\exp}}{T_T} = \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}T_T} \# 10^{-3}\ m.$$

Chapitre 2

Frottement solide

Cette étude s'appelle la tribologie (étude de l'adhésion, des frottements solides). On va s'intéresser aux actions de contact entre solide. L'origine microscopique de ces contacts est l'interaction électromagnétique. On se limite aux seuls mouvements de translation.

Sommaire

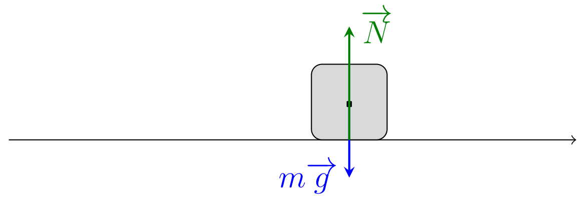

FIGURE 2.1 – Premier exemple de frottements solides et résultante.

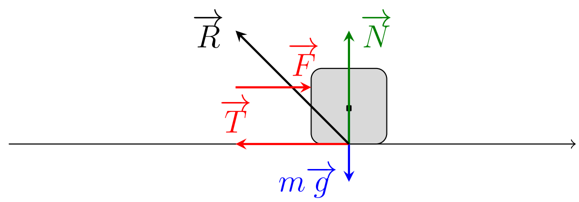

FIGURE 2.2 – Deuxième exemple de frottements solides et résultante.

2.1 Forces de frottement de glissement

2.1.1 Résultante des actions de contact entre deux solides

Les actions de contact sont réparties sur la surface de contact. Pour modéliser ces actions, on introduit un modèle qu'est la résultante (ou somme) des actions de contact en un point I de l'interface. Un premier exemple est donné à la Figure 2.1, où l'équilibre s'écrit $\vec{N}+m\vec{g}=\vec{0}$. Un deuxième exemple est donné à la Figure 2.2 où l'équilibre s'écrit $\vec{N}+m\vec{g}=\vec{0}$ et $\vec{F}+\vec{T}=\vec{0}$.

Le solide subit donc une résultante $\vec{R}=\vec{N}+\vec{T}$. $\vec{N}$ traduit l'existence de contact, $\vec{T}$ le frottement de glissement. $\vec{T}$ s'oppose au glissement, mais pas au mouvement.

2.1.2 Les trois effets possibles des frottements solides

On donne différents exemples :

1. la Figure 2.3 décrit un maintien à l'équilibre possible grâce aux frottements.
2. la Figure 2.4 décrit un premier mouvement gauche-droite où le frottement est responsable du mouvement, c'est une phase de non glissement.

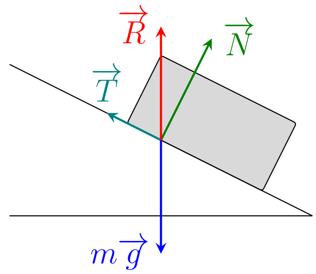

Figure 2.3 – Premier exemple d'effet possible des frottements solides.

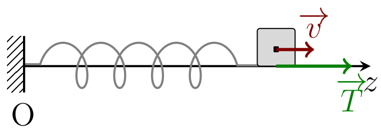

Figure 2.4 – Deuxième exemple d'effet possible des frottements solides. L'axe est un tapis roulant vers la droite.

Pour le mouvement droite-gauche, la phase de glissement existe à cause de la force de rappel du fil élastique. Les frottements sont responsables d'un freinage.

3. Lors de la marche à pied, pour se déplacer, il faut une composante tangentielle venant du sol sur les semelles des chaussures.

4. Les roues des voitures : lors de l'accélération (roues qui patinent), il y a des frottements moteurs, voir la Figure 2.5. Lors du freinage (roues bloquées), c'est l'inverse.

Ainsi, il y a trois effets possibles : maintien à l'équilibre, mise en mouvement et freinage.

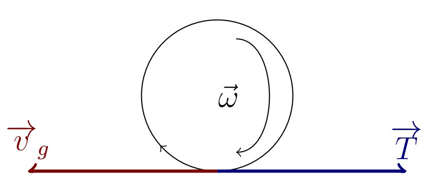

Figure 2.5 – Troisième exemple d'effet possible des frottements solides.

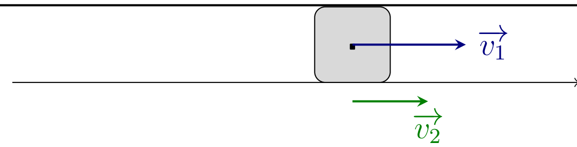

FIGURE 2.6 – Notion de vitesse de glissement.

2.1.3 Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide

Notions de vitesse de glissement. La Figure 2.6 présente un solide en mouvement du solide (1) par rapport au sol (2). Alors la vitesse de glissement est définie par

$$\vec{v}_g(1/2) :== \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Il faut noter que cette définition est indépendante du référentiel : si $\mathcal{R}_2$ est un référentiel lié à 2, alors

$$\vec{v}'_{1/2} - \vec{v}'_{2/\mathcal{R}_2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_g.$$

Cas du glissement. On est donc dans le cas où $\vec{v}_g \neq \vec{0}$. Alors

1. $\vec{T} \parallel \vec{v}_g$ et $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$: $\vec{T}$ et $\vec{v}_g$ sont de sens opposés.
2. On a $\left\|\vec{T}\right\| = f_d \left\|\vec{N}\right\|$. f_g est le coefficient de frottement dynamique : il est indépendant de $\left\|\vec{N}\right\|$ et de la surface de contact, mais dépend de la nature des matériaux et de l'état des surfaces.

Cas du non glissement. On est donc dans le cas où $\vec{v}_g = \vec{0}$. Alors on a

$$\left\|\vec{T}\right\| \leqslant f_s \left\|\vec{N}\right\|,$$

où f_s est le coefficient de frottement statique. f_s et f_d ont les mêmes propriétés et en général, $f_s \geqslant f_d$.

Cône de frottement.

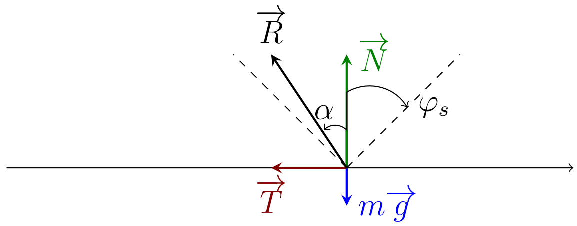

FIGURE 2.7 – Non glissement et cône de frottement statique.

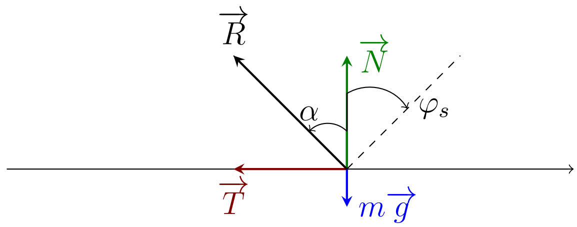

FIGURE 2.8 – Glissement et cône de frottement dynamique.

Non glissement. Soit φ_s tel que $f_s = \tan\varphi_s$. Alors

$$\left\|\vec{T}\right\| \leqslant f_s \left\|\vec{N}\right\| \Leftrightarrow \tan(\alpha) \leqslant \tan\varphi_s \Leftrightarrow \alpha \leqslant \varphi_s.$$

Il y a non glissement si la résultante $\vec{R}$ reste à l'intérieur du cône de frottement statique, voir la Figure 2.7.

Glissement. Soit φ_d tel que $f_d = \tan\varphi_d$. Alors

$$\left\|\vec{T}\right\| = f_d \left\|\vec{N}\right\| \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \tan\varphi_d \Leftrightarrow \alpha = \varphi_d.$$

Il y a glissement si la résultante $\vec{R}$ coïncide avec le bord du cône de frottement dynamique, voir la Figure 2.8.

Ordres de grandeur. Le plus souvent, on a $f_s \approx f_d \coloneqq f$. On donne quelques valeurs de référence dans la Table 2.1.

2.1.4 Effet d'arc-boutement

Le modèle est présenté à la Figure 2.9. On prend pour axe (Ox) le plan incliné, orienté de gauche vers la droite, et l'axe (Oy) est perpendiculaire à

Type de contact	f
acier/acier	0.2
acier/garniture de freins	0.4
pneu/route sèche	0.8
acier/bois	0.5
bois/bois	0.5
téflon/matière lisse	0.04

TABLE 2.1 – Ordre de grandeur du coefficient de frottement pour quelques matériaux.

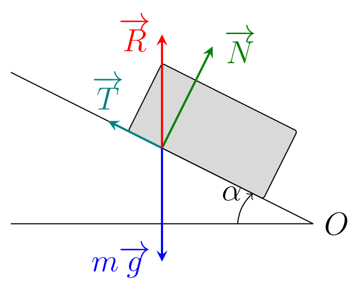

FIGURE 2.9 – Modèle d'arc-boutement.

(Ox) (orienté selon $\vec{N}$).

On se demande la condition sur α pour éviter tout glissement pour toute masse m. La condition de l'équilibre s'écrit $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$. En projetant sur (Ox) puis (Oy), on obtient

$$mg\sin\alpha - T = 0,$$
$$-mg\cos\alpha + N = 0.$$

Ainsi, on a $\frac{T}{N} = \tan\alpha$. On a donc non glissement si $T \leqslant f_s N$ ou bien $\alpha \leqslant \varphi_s$. C'est l'effet d'arc-boutement : pas de glissement quelque soit la charge.

Condition de non-basculement. Les équations en translation et rotation s'écrivent

$$\vec{R^{\text{ext}}} = \vec{0} = \vec{R} + m\vec{g},$$
$$\vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}} = \vec{0} = \vec{GG} \wedge m\vec{g} + \vec{GI} \wedge \vec{I},$$

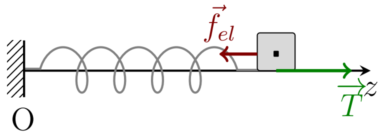

FIGURE 2.10 – Effet « stick-slip ». L'axe (Ox) est un tapis roulant vers la droite de vitesse $\vec{v} = V\vec{u_x}$

où G est le centre de masse de la masse m, et I est le point d'application de $\vec{R}$. Donc $\vec{GI} \parallel \vec{R} \parallel \vec{g}$. I est donc à la vertical de G. On a non-basculement si I reste sur la surface de contact : la limite du basculement est quand I est sur l'arête. Ainsi, l'angle limite est tel que $\tan\alpha_{\text{lim}} = \frac{l}{h}$, où l est la longueur de la masse et h sa hauteur. Pour savoir s'il y a glissement ou basculement, il faut comparer $\frac{l}{h}$ et f_s.

2.1.5 Effet « stick-slip »

C'est typiquement ce qu'il se passe en utilisant un archet enduit de colophane. Dans ce cas, on a $f_s \gg f_s$ (ici $f_d \approx 0$). On considère le système présenté à la Figure 2.10, la raideur du ressort est notée k, la masse de l'objet m.

— Phase 1 : non glissement sur $[0, t_1]$. On a

$$m\ddot{x} = 0 = -kx + T,$$

doù $x(t) = Vt$. La fin de la phase 1 à t_1 a lieu quand $T = f_s N$. On a $T(t_1) = kx(t_1) = kVt_1$ et $N = mg$. Ainsi,

$$f_1 = f_s\frac{mg}{kV} = \frac{f_s g}{\omega_0^2 V},$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

— Phase 2 : on a glissement. $f_d \approx 0$ donc il y a glissement sans frottement. Ainsi,

—

$$m\ddot{x} = -kx + 0,$$

d'où $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Alors $x(t \geqslant t_1) = A\cos(\omega_0(t - t_1) + \alpha)$. La condition initiale est en $t = t_1$: on a $x(t_1) = Vt_1 = \frac{f_s g}{\omega_0^2} = A\cos\alpha$, et $\dot{x}(t_1) = V =$

$-A\omega_0 \sin\alpha$. Alors

$$\tan\alpha = -\frac{\omega_0 V}{f_s g}, \qquad A^2 = \left(\frac{f_s g}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{V}{\omega_0}\right)^2.$$

On a fin du glissement à $t = t_2$, c'est-à-dire $Vg(t_2) = 0$, d'où $\dot{x}(t_2) = V$. Alors

$$-A\omega_0 \sin\left(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha\right) = V = -A\omega_0 \sin\alpha,$$

puis

$$\sin\left(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha\right) = \sin\alpha,$$

d'où $\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha = \pi - \alpha$, ce qui donne enfin

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{2\alpha}{\omega_0}.$$

— Phase 3 : non glissement sur $[t_2, t_3]$, on a

$$\dot{x}(t_2 \leqslant t \leqslant t_3) = V,$$

d'où $x(t_2 \leqslant t_{\leqslant} t_3) = V(t - t_2) + K$. La condition initiale donne

$$K = x(t_2) = A\cos\left(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha\right) = A\cos\left(\pi - \alpha\right) = -A\cos\alpha.$$

Ainsi,

$$x(t_2 \leqslant t \leqslant t_3) = V(t - t_2) - A\cos\alpha.$$

Le fin de la phase 3 a lieu en t_3 quand $T(t_3) = f_s N = f_s mg$. Or $m\ddot{x} = 0 = T - kx$, donc $kx(t_3) = f_s mg$. Donc

$$kV(t_3 - t_2) - k\frac{f_s g}{\omega_0^2} = f_s mg.$$

Donc

$$t_3 - t_2 = 2\frac{f_s g}{\omega_0^2 V}.$$

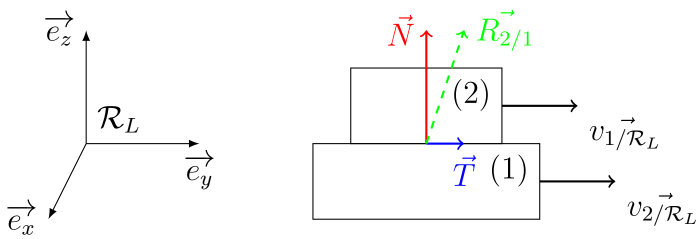

FIGURE 2.11 – Système modèle pour l'étude de la puissance des forces de frottement de glissement.

2.2 Puissance instantanée des forces de frottement de glissement

2.2.1 Puissance totale instantanée des forces liées aux actions de contact entre deux solides

On considère le système présenté à la Figure 2.11.

On a $(P_{2\to1})_{/\mathcal{R}_L} = \vec{R_{2/1}} \cdot v_{1/\vec{\mathcal{R}_L}}$ et $(P_{1\to2})_{/\mathcal{R}_L} = -\vec{R}_{2/1} \cdot v_{2/\vec{\mathcal{R}_L}}$. Ainsi, la puissance totale est

$$P_{\text{tot}} = \vec{R_{2/1}} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{R_{2/1}} \cdot \vec{v_{g}}_{(1/2)} = \vec{T} \cdot \vec{v_{g}}_{(1/2)} \leqslant 0.$$

Condition pour aoivr $P_{\text{tot}} = 0$. On a

— soit $\vec{T} = \vec{0}$: il y a glissement sans frottement ($f_d = 0$) (exemple : ski, patinage) ;

— soit $\vec{v}_g = \vec{0}$: il y a roulement sans glissement (exemple : voiture qui démarre sans les roues qui patinent, freinage sans blocage).

2.2.2 Exemple d'un pavé mis en mouvement par un tapis roulant : bilan énergétique

On considère une boîte b mise sur un tapis roulant t dans un supermarché, comme décrit à la Figure 2.12. On fait l'hypothèse que $u > v$, ainsi on a $\vec{v}_g(b/t) = (v - u)\vec{u_x}$, d'où $\vec{T} = T\vec{u_x}$ avec $T > 0$.

Les valeurs des différentes puissances des forces de frottements de glissement selon le référentiel choisi sont données dans la Table 2.2.

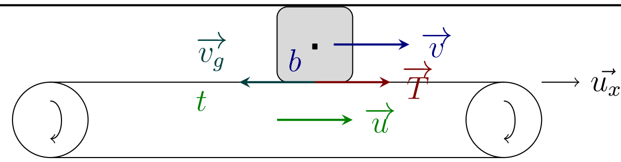

FIGURE 2.12 – Pavé mis en mouvement par un tapis roulant.

	$\mathcal{R}_{\text{supermarché}}$	$\mathcal{R}_{\text{tapis}}$	$\mathcal{R}_{\text{boîte}}$
$P_{t\to b}$	$T \times v > 0$	$T \times (v-u) < 0$	$T \times 0 = 0$
$P_{b\to t}$	$(-T) \times u < 0$	$(-T) \times 0 = 0$	$(-T) \times (u-v) > 0$
P_{tot}	$T \times (v-u) = T \times v_g < 0$	$T \times (v-u) < 0$	$T \times (v-u) < 0$

TABLE 2.2 – Puissance des forces de frottements de glissement selon certains référentiels.

Ainsi, même si elle sont motrices, les forces de frottement sont toujours globalement dissipatives : $P_{\text{tot}} < 0$. P_{tot} est indépendant du référentiel d'étude. On peut généraliser le résultat : les puissances intérieures P_{int} sont indépendantes du référentiel (en prenant la réunion des deux systèmes boîte/tapis).

Deuxième partie

Électromagnétisme

Chapitre 3

Le champ électromagnétique : sources et symétries

Sommaire

3.1 Source du champ électromagnétique : charges et courants

3.1.1 Distributions discrètes ou continues de charges. Densité volumique de charge

Distribution discrètes de charges

$\longrightarrow$ Nature « atomique » de la charge : $-\mathrm{e}$ (électron), $+Z\mathrm{e}$ (noyau) avec $Z \in \mathbb{N}^*$, ions ;

$\longrightarrow$ a priori, charges $n\mathrm{e}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, localisées en des points précis.

A priori, il y a donc une distribution discrète de charges.

Échelle mésoscopique : distribution continue de charges

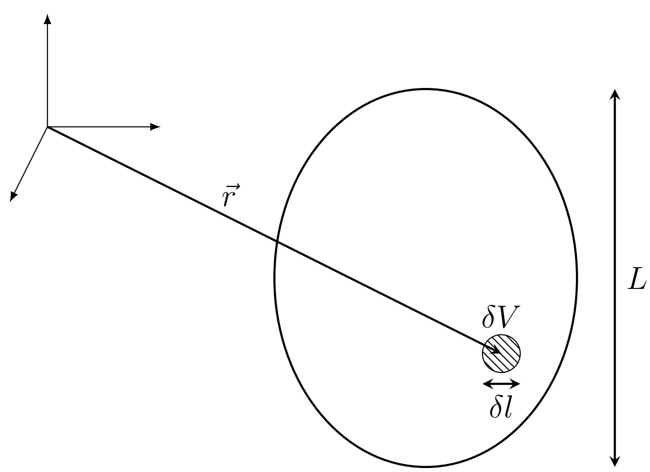

Figure 3.1 – Échelle mésoscopique pour une distribution continue de charges.

La Figure 3.1 présente la matière à l'échelle mésoscopique : on a $\delta V \sim (\delta l)^3$, L est une longueur typique de l'échelle macroscopique (1 mm jusqu'à 1 m). On se donne un longueur a qui est caractéristique de l'échelle microscopique voire nanoscopique, par exemple la distance interatomique ou le libre parcours moyen d'un gaz. Alors

$$\boxed{a \ll \delta \ll L.}$$

Cela vient du fait que dans δV, il y a un très grand nombres de constituants élémentaires, on peut donc faire un traitement statistique, d'autre part on cherche une description assez fine du phénomène. L'échelle mésoscopique est donc entre 0,1 µm et 1 µm. À l'échelle mésoscopique, on adopte une description continue (moyennée) de la matière. Ceci implique une distribution continue de charges.

Densité volumique de charges

Dorénavant, on adopte le modèle continu. La quantité de charge δQ dans un volume δV est proportionnel à ce même volume, on définit alors la **densité volumique de charges** $\rho(\vec{r}, t)$ par

$$\boxed{\delta Q = \rho(\vec{r}, t)\delta V.}$$

Son unité est $\mathrm{C\,m^{-3}}$.

Exemple 3.1. Dans un conducteur métallique (par exemple le cuivre), il y a n_e électrons libres et n_i ions fixes. Alors

$$\rho = (n_i - n_e)\mathrm{e} = 0,$$

à cause de la neutralité du métal.

Exemple 3.2. Dans un semi-conducteur, il y a des électrons (mobiles), des trous (places vides positives) et des ions fixes. Ainsi,

$$\rho = (n_t - n_e + n_i)\mathrm{e}.$$

Exemple 3.3. Dans une électrolyte, par exemple (Na^+,Cl^-), on a

$$\rho = (n_{\mathrm{Na^+}} - n_{\mathrm{Cl^-}})\mathrm{e}.$$

Ainsi, en général, on a

$$\rho = \sum_{\substack{\neq \text{ types} \\ \text{de porteurs}}} n_k q_k,$$

où n_k est en $\mathrm{m^{-3}}$ et q_k est en C et représente la charge algébrique d'un « k » porteur.

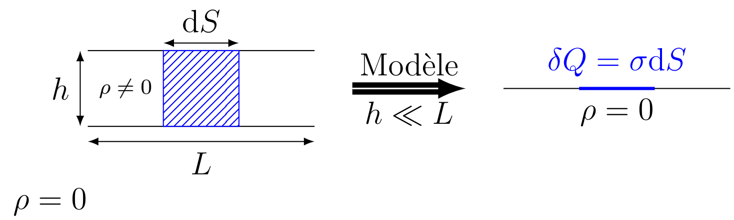

FIGURE 3.2 – Distribution de charges en surface.

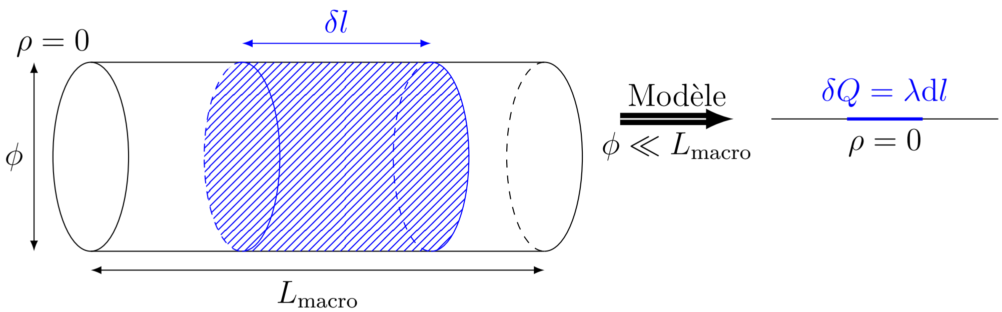

FIGURE 3.3 – Distribution linéique de charges.

Modèles surfacique et linéique

Distribution de charges en surface : « nappe » de charge. Les charges sont localisées au voisinage d'une surface. On considère la Figure 3.2. On considère que l'on a $h \ll L$, et le volume $\delta V = h\mathrm{d}S$ contient $\delta Q = \rho h \mathrm{d}S$ charges. On modélise donc cette nappe de charge par une distribution surfacique de charges, avec une **densité superficielle de charge** $\sigma = \rho \times h$, en $\mathrm{C\,m^{-2}}$. Ainsi, on a

$$\boxed{\delta Q = \sigma \mathrm{d}S.}$$

Exemple 3.4. On peut penser à un conducteur plan.

Distribution linéique de charges. On considère la Figure 3.3. Il y a $\delta Q = \rho S \mathrm{d}l$ charges dans la volume bleu. On définit alors la **densité linéique de charge** $\lambda = \rho S$, d'unité $\mathrm{C\,m^{-1}}$. On a alors

$$\boxed{\delta Q = \lambda \mathrm{d}l.}$$

Exemple 3.5. On peut penser à un faisceau d'électrons.

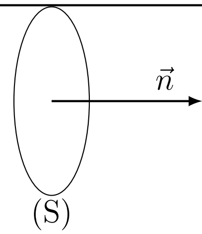

FIGURE 3.4 – Courant algébrique traversant une surface orientée.

3.1.2 Distribution de courant en volume. Densité de courant

Courant algébrique traversant une surface orientée

Pendant dt, δQ traverse algébriquement une surface S. $\delta Q > 0$ si la charge est effectivement transportée selon $\vec{n}$, voir la Figure 3.4.

Le courant $i(t)$ est alors défini par

$$\boxed{\delta Q = i(t)\mathrm{d}t.}$$

Son unité est A=C s^{-1}. C'est la charge algébrique traversant la surface orientée (S) par unité de temps.

Densité de courant

Cas à une dimension et un seul type de porteur libre. On considère qu'il y a n porteur libres par metre cube, q est la charge algébrique d'un porteur, $\vec{v}$ est la vitesse d'ensemble, qui est uniforme et perpendiculaire à (S), voir la Figure 3.5.

Le nombre δN de porteurs traversant (S) pendant dt est

$$\delta N = nSv\mathrm{d}t = n\vec{v}\cdot(S\vec{n})\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\delta Q = \delta N \times q = nq\vec{v}\cdot(S\vec{n})\mathrm{d}t$$

et finalement

$$\boxed{i = nq\vec{v}\cdot\vec{n}S = \vec{j}\cdot(S\vec{n}),}$$

où $\vec{j} = nq\vec{v}$ est la **densité de courant**, d'unité A m^{-2}.

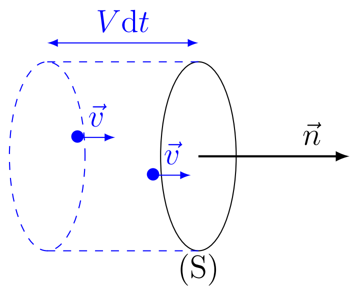

FIGURE 3.5 – Densité de courant $\vec{j}$: modèle introductif.

Dans le cas où la vitesse n'est pas perpendiculaire à (S), le calcul reste le même (en prenant bien en compte le produit scalaire avec la normale extérieure $\vec{n}$).

Définition de $\vec{j}$. De manière générale, on définit la densité de courant $\vec{j}(\vec{r},t)$ par

$$\boxed{i_s(t) := \iint_S \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S.}$$

$i_s(t)$ est le flux de $\vec{j}$ à travers la surface S.

Expression de $\vec{j}$ dans différents milieux conducteurs

Métal. Les électrons libres génèrent une densité de courant

$$\vec{j} = -n\mathrm{e}\langle\vec{v}\rangle.$$

Dans un fil de cuivre pour 1 A et une longueur 2 mm, on a

$$n_\mathrm{e} \sim \frac{1}{(\mathrm{qq}.10^{10})^3} \sim 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Ainsi, l'ordre de grandeur de la vitesse des électrons dans le métal est

$$\langle v\rangle \sim \frac{1}{10^{29}\times 10^{19}\times 2.10^{-6}} \sim 3.10^{-5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

En considérant les électrons comme des particules classiques indépendantes, on a

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{3}{2}k_bT,$$

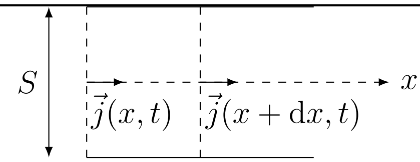

FIGURE 3.6 – Loi de conservation de la charge 1D.

avec $k_B = R/\mathcal{N}_A \approx 1.38.10^{-23}$ J K^{-1}.

Ainsi,

$$v = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \sim 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

pour $m = 0.9^{-30 \text{ kg}}$ et $T = 300$ K.

Semi-conducteur. On a

$$\vec{j} = n_t \mathrm{e}\langle \vec{v}_t \rangle - n_\mathrm{e} \mathrm{e}\langle \vec{v}_\mathrm{e} \rangle.$$

Solution de NaCl. On a

$$\vec{j} = n_{\mathrm{Na}^+} \mathrm{e}\langle \vec{v}_{\mathrm{Na}^+} \rangle - n_{\mathrm{Cl}^-} \mathrm{e}\langle \vec{v}_{\mathrm{Cl}^-} \rangle.$$

Finalement, on a

$$\boxed{\vec{j} = \sum_{\substack{\neq \text{ types} \\ \text{de particules libres}}} n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle.}$$

3.2 Loi de conservation de la charge

3.2.1 Géométrie 1D

On considère la Figure 3.6.

La charge entrant algébriquement dans $S\mathrm{d}x$ pendant $\mathrm{d}t$ est

$$\begin{aligned} \delta Q_e &= j(x,t)S\mathrm{d}t - j(x+\mathrm{d}x,t)S\mathrm{d}t, \\ &= S\mathrm{d}t\left[j(x,t) - j(x+\mathrm{d}x,t)\right], \\ &= -S\mathrm{d}t\mathrm{d}x\frac{\partial j}{\partial x}(x,t). \end{aligned}$$

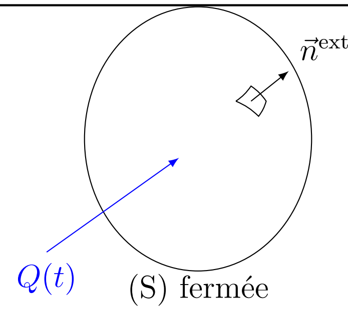

FIGURE 3.7 – Équation intégrale de conservation de la charge.

La variation dQ de la charge dans la tranche $S\mathrm{d}x$ est

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Q &= \rho(x, t+\mathrm{d}t)S\mathrm{d}x - \rho(x,t)S\mathrm{d}x,\\
&= S\mathrm{d}x\left(\rho(x,t+\mathrm{d}t) - \rho(x,t)\right),\\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)S\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Postulat : conservation de la charge. On doit avoir

$$\boxed{\mathrm{d}Q = \delta Q_e.}$$

Alors l'équation locale de la conservation de la charge s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x,t) = 0.}$$

3.2.2 Équation intégrale de conservation de la charge

Dans le cas général, on se reporte à la Figure 3.7.
Le flux sortant de $\vec{j}$ est

$$i_S^{\mathrm{ext}} = \oiint_S \vec{j}\cdot\vec{n}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}S.$$

La conservation de la charge s'écrit alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -i_S^{\mathrm{ext}}(t) = -\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{n}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}S.}$$

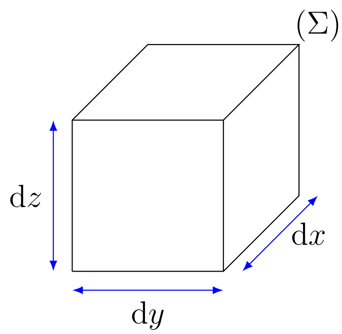

FIGURE 3.8 – Flux de courant sortant en trois dimensions.

3.2.3 Flux et opérateur « divergence »

Dans le cas unidimensionnel de la Figure 3.6, en notant (Σ) la surface fermée comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$ et les bords en haut et en bas, on a

$$\begin{aligned} i_\Sigma^{\text{ext}}(t) &= \oiint_\Sigma \vec{j}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}\Sigma, \\ &= \iint_{\text{bords}} \vec{j}\cdot\vec{n}_{\text{bords}}\mathrm{d}\Sigma + (-\vec{j}(x,t)\times S) + (j(x+\mathrm{d}x,t)\times S), \\ &= 0 + \frac{\partial j}{\partial x}(x,t)\times S\mathrm{d}x, \\ &= \frac{\partial j}{\partial x}(x,t)\times V. \end{aligned}$$

Ainsi, le flux est proportionnel au volume.

Dans le cas à trois dimensions, on se reporte à la Figure 3.8. On se donne un champ $\vec{A}(x,y,z,t)$, et on suppose le cube assez petit pour qu'il soit uniforme sur chaque face. On numérote les faces (1 : gauche, 2 : droite, 3 : bas, 4 :haut, 5 : derrière, 6 : devant).

On cherche la quantité $\delta\phi^{\text{ext}}$ sortant du cube à cause du flux de $\vec{A}$ via la surface de (Σ). On définit donc

$$\delta\phi^{\text{ext}} := \oiint_{(\Sigma)} \vec{A}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}\Sigma.$$

On a alors

(1) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u_y}$: $\delta\phi_1^{\text{ext}} = -A_y(x,y,z,t)\times(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$;

(2) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u_y}$: $\delta\phi_2^{\text{ext}} = +A_y(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$;
(3) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u_z}$: $\delta\phi_3^{\text{ext}} = -A_z(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$;
(4) $\vec{n}^{\text{ext}} = \vec{u_z}$: $\delta\phi_4^{\text{ext}} = +A_z(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$;
(5) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u_x}$: $\delta\phi_5^{\text{ext}} = -A_x(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$;
(6) $\vec{n}^{\text{ext}} = -\vec{u_x}$: $\delta\phi_6^{\text{ext}} = +A_x(x,y,z,t) \times (\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$.

On fait la somme algébrique

$$\begin{aligned}
1+2 &: \frac{\partial A_y}{\partial y}(x,y,z,t) \times \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\\
3+4 &: \frac{\partial A_z}{\partial z}(x,y,z,t) \times \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\
5+6 &: \frac{\partial A_x}{\partial x}(x,y,z,t) \times \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\delta\phi^{\text{ext}} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right] \times \mathrm{d}V = (\text{div } \vec{A})\mathrm{d}V.}$$

Théorème-définition d'Ostrogradski. Soit $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(x,y,z,t)$ champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a

$$\boxed{\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \iiint_V \text{div } \vec{A}\mathrm{d}V.}$$

En coordonnées cartésiennes, la divergence de $\vec{A}$ s'écrit

$$\boxed{\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.}$$

L'opérateur symbolique (réservé aux coordonnées cartésiennes) est « nabla », qui s'écrit

$$\boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.}$$

On a alors div $\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

3.2.4 Équation locale de conservation de la charge en trois dimensions.

Pour une géométrie quelconque, la variation de $Q(t)$ contenue dans un volume V est

$$\mathrm{d}Q = \iiint_V \left[\rho(\vec{r},t) - \rho(\vec{r},t+\mathrm{d}t)\right] \mathrm{d}V,$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}Q = \left(\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r},t)\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t.}$$

La charge algébrique $\delta Q_S^{\mathrm{ext}}$ traversant une surface S orientée vers l'extérieur pendant dt est

$$\delta Q_S^{\mathrm{ext}} = i_S^{\mathrm{ext}}(t) \times \mathrm{d}t = \left[\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}} \mathrm{d}S\right] \mathrm{d}t.$$

Or on a

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}} \mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{j} \cdot \mathrm{d}V,$$

donc

$$\boxed{\delta Q_S^{\mathrm{ext}} = \left(\iiint_V (\mathrm{div}\ \vec{j}\mathrm{d}V)\right)\mathrm{d}t.}$$

La conservation de la charge s'écrit alors $\mathrm{d}Q = -\delta Q_S^{\mathrm{ext}}$, qui est une équation globale :

$$\iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{j}\right) \mathrm{d}V = 0.$$

Ceci ayant lieu pour tout volume V de taille au moins mésoscopique, on a l'équation locale de la conservation de la charge :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{j} = 0.}$$

3.2.5 Cas du régime stationnaire/permanent

Dans de cas, on a

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}\ \vec{j} = 0.}$$

En conséquence,

(i) $\vec{j}$ est à flux conservatif. En effet,

$$i_S^{\text{ext}} = \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \iiint_V \text{div } \vec{j} \mathrm{d}V = 0.$$

(ii) i =constante le long d'un tube de courant (régime permanent). Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. Ces lignes de courant sont des courbes tangentes à $\vec{j}$ en tout point.

(iii) Loi des nœuds : en un nœud où différents courants arrivent, on a

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k i_k = 0,}$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$.

3.3 Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz

On se demande quelle est l'action (à distance) de la distribution de charges et courants sur une particule chargée q de vitesse $\vec{v}$, voir la Figure 3.9.

Cette action se fait via le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$, conséquence directe de $[\rho, \vec{j}]$. La loi de force de Lorentz s'écrit

$$\boxed{\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right).}$$

C'est un postulat. $\vec{E}$ est polaire et est considéré comme un « vrai » vecteur. $\vec{B}$ est axial est est considéré comme un « pseudo-vecteur ».

Force de Lorentz méso/macroscopique : distribution continue de charges et courants. Il y a des porteurs de charges de type k : charges q_k, nombre par unité de volume $n_k[\mathrm{m}^3]$ et vitesse moyenne $\langle \vec{v_k} \rangle$. Soit $\mathrm{d}V$ un volume mésoscopique contenant ces porteurs. Quelle est la force $\mathrm{d}\vec{F}_{em}$ subie par ce volume ? Un charge k subit en moyenne

$$\vec{F}_{L_k} = q_k\left(\vec{E} + \langle \vec{v_k} \rangle \wedge \vec{B}\right).$$

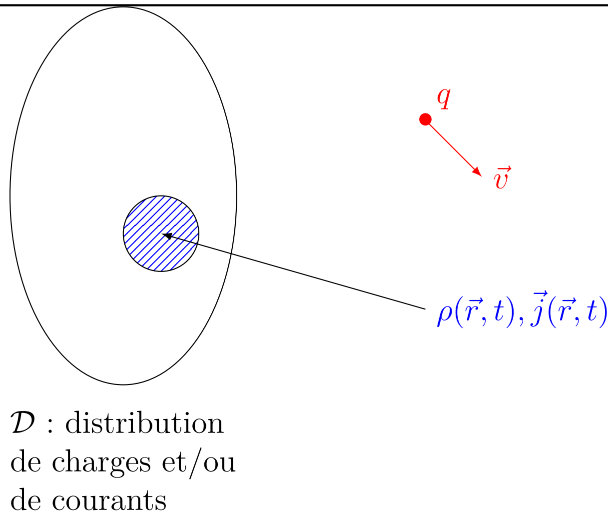

FIGURE 3.9 – Définition du champ électromagnétique : la loi de force de Lorentz.

Dans $\mathrm{d}V$, il y a $n_k \mathrm{d}V$ porteurs k. Ainsi, ils subissent

$$n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v_k} \rangle \wedge \vec{B}\right) \mathrm{d}V.$$

En sommant sur tout les porteurs k, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F}_{\text{em}} &= \left[\sum_{\neq\ k} n_k q_k \left(\vec{E} + \langle \vec{v_k} \rangle \wedge \vec{B}\right)\right] \mathrm{d}V, \\
&= \left(\left(\sum_{\neq\ k} n_k q_k\right) \vec{E} + \left(\sum_{\neq\ k} n_k q_k \langle \vec{v_k} \rangle\right) \wedge \vec{B}\right), \\
&= \left(\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}\right) \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Ainsi, la force volumique est

$$\boxed{\vec{f}_{\text{vol}}^{\text{em}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.}$$

Exemple 3.6. Dans un métal, c'est le force de Laplace : on a $\rho = 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{em}} = (\vec{j} \wedge \vec{B})\mathrm{d}V.}$$

Pour une géométrie filiforme, on a $\vec{j}\mathrm{d}V = js\mathrm{d}l = i\mathrm{d}\vec{l}$, où s est la section du fil. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{em}} = i\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}.}$$

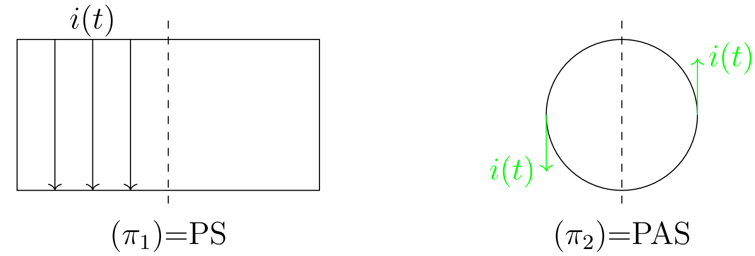

FIGURE 3.10 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un solénoïde.

3.4 Propriétés de symétrie du champ électromagnétique

3.4.1 Principe de Curie

Énoncé en 1905 par Pierre Curie :

> [P. Curie, 1905] Les effets on au moins les symétries (et invariances) des causes.

3.4.2 Plans de symétrie (PS) ou d'antisymétrie (PAS) pour une distribution de charges et de courants

(π) est un plan de symétrie pour une distribution de charges et de courants $\mathcal{D}$ si

$$\rho(\pi(M), t) = \rho(M, t), \qquad \vec{j}(\pi(M), t) = S_\pi(\vec{j}(M, t)),$$

où $\pi(M)$ désigne le symétrique du point M et S_π désigne l'application symétrie liée au plan (π).

C'est un plan d'anti-symétrie si

$$\rho(\pi(M), t) = -\rho(M, t), \qquad \vec{j}(\pi(M), t) = -S_\pi(\vec{j}(M, t)).$$

Exemple 3.7 (Solénoïde fini)*.* Un solénoïde (enroulement jointif) contenant N spires possède un PS et un PAS, voir la Figure 3.10. Notons que si le solénoïde est considéré comme infini, alors tout plan perpendiculaire à l'axe est un plan de symétrie.

Exemple 3.8 (Condensateur plan à armatures circulaire)*.* Tout plan contenant l'axe est un plan de symétrie. Tout plan qui y est perpendiculaire est un plan d'antisymétrie, voir la Figure 3.11.

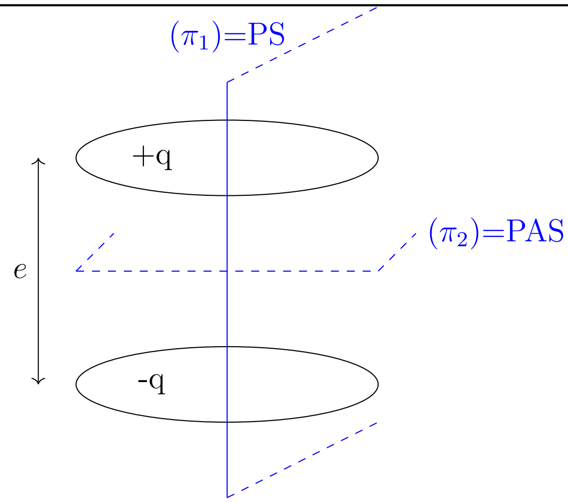

FIGURE 3.11 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un condensateur plan.

3.4.3 Propriétés de symétrie pour le champ électromagnétique

Principe de Curie : si la cause (charges, courants) présente une propriété de symétrie, alors l'effet ($\vec{F_L}$) présente aussi cette propriété de symétrie. Pour le champ électromagnétique, on en déduit :

— un PS pour $\mathcal{D}$ est un PS pour $\vec{E}$ et un PAS pour $\vec{B}$;

— un PAS pour $\mathcal{D}$ est un PAS pour $\vec{E}$ et un PS pour $\vec{B}$.

3.4.4 Géométrie du champ électromagnétique sur un PS/PAS

On en déduit donc que

— Pour un PS, on a

$$\vec{E}(\pi(M)) = \vec{E}(M) = S_\pi(\vec{E}(M)),$$

donc $\vec{E}$ appartient au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie. Au contraire, on a

$$\vec{B}(\pi(M)) = \vec{B}(M) = -S_\pi(\vec{B}(M)),$$

donc $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de symétrie en tout point du plan de symétrie.

— Pour un PAS, on a
$$\vec{E} = -S_\pi(\vec{E}),$$
donc $\vec{E} \perp$ PAS, et
$$\vec{B} = S_\pi(\vec{B}),$$
donc $\vec{B} \in$ PAS.

3.4.5 Exemples

La méthode est la suivante :

1. Faire un choix d'un système de coordonnées adapté ;
2. Observer les invariances par translation/rotation de la distribution ;
3. Appliquer le principe de Curie : symétries et géométrie du champ.

Pour un condensateur plan d'axe (Oz), ou un solénoïde d'axe (Oz), toute rotation autour de l'axe (Oz) laisse la distribution invariante (symétrie de révolution d'axe (Oz)). Ainsi, la variable θ est non pertinente. De plus, tout plan contenant l'axe est un PAS. Donc $\vec{E}(r,z,t) = E(r,z,t)\vec{u_\theta}$ et $\vec{B}(r,z,t) = \begin{pmatrix} B_r(r,z,t) \\ 0 \\ B_z(r,z,t) \end{pmatrix}$.

Chapitre 4

Électrostatique

Les charges sont immobiles et on est en régime stationnaire. Il n'y a donc aps de courants.

Sommaire

4.1 Loi de Coulomb

4.1.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On considère le système de deux particules chargées donné à la Figure 4.1. On a

$$\boxed{\vec{F}_{Q\to q} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.}$$

ε_0 est la permittivité électrique absolue du vide, avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ et

$$\boxed{c \approx 3.10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}, \quad \mu_0 := 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}, \quad \varepsilon_0 \approx 8.8.10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}.}$$

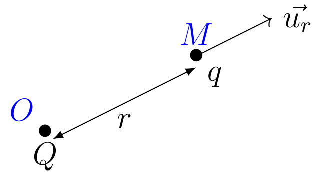

FIGURE 4.1 – Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

Champ électrostatique On a une interaction à distance. Notamment,

$$\vec{F}_{Q\to q} = q\vec{E}(M),$$

avec $\vec{E}(M)$ indépendant de q. Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.}$$

C'est la Loi de Coulomb. On a $[\vec{E}] = \mathrm{V\,m^{-1}}$.

4.1.2 Principe de superposition

C'est une conséquence de la linéarité des équations de Maxwell. S'il y a N particules de charge Q_i, alors le champ électrostatique créé au point M sur la particule de charge q est

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u_{r_i}}.}$$

4.1.3 Ordres de grandeur

Champ électrostatique de l'atome d'hydrogène L'électron autour du noyau de l'atome d'hydrogène est à une distance $a_0 = 53$ pm du noyau (rayon de Bohr). On a

$$\vec{F} = -q\vec{E},$$

avec

$$E_{\text{proton}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} \approx 5.10^{11}\ \mathrm{V\,m^{-1}}.$$

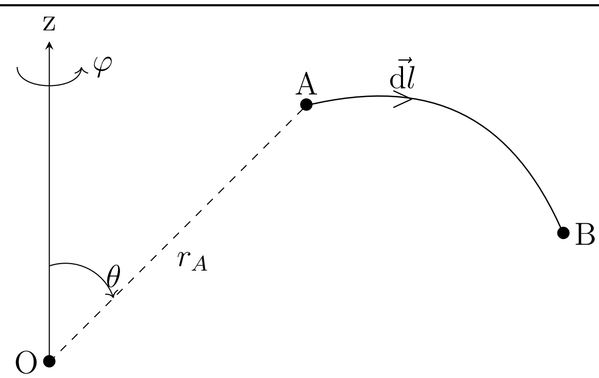

FIGURE 4.2 – Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle.

Notons que le rapport entre la force de gravitation et la force électrostatique exercée sur l'électron est

$$\frac{\left\|\vec{F}^{p\to e}_{\text{gravitation}}\right\|}{\left\|\vec{F}^{p\to e}_{\text{es}}\right\|} = \frac{\mathcal{G}m_p m_e}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \approx 4.10^{-40}.$$

Champ disruptif de l'air On a $E \sim 10^6$ V m^{-1}.

Échelle macroscopique La batterie d'un téléphone portable génère un champ électrostatique d'environ

$$E \approx \frac{V}{d} \approx \frac{\text{qq } V}{\text{qq cm}} \approx 10^2 \text{ V m}^{-1}.$$

4.2 Circulation conservative du champ électrostatique

4.2.1 Circulation entre deux points du champ créé par une charge ponctuelle

On considère le système décrit par la Figure 4.2.

On cherche la circulation de $\vec{E}$ entre A et B, c'est-à-dire

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

En coordonnées sphériques, on a

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\vec{u_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u_\varphi}.$$

Ainsi,

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right),$$

qui ne dépend que de A et B et pas du chemin choisi. Par définition, le potentiel électrostatique $V(M) = V(x, y, z) = V(r, \theta, \varphi)$ est défini par

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(A) - V(B),$$

et on a $[V] = \mathrm{V}$.

4.2.2 Potentiel créé par une charge ponctuelle

On a

$$\boxed{V(M) = V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},}$$

où l'on prend la constante nulle à l'infini. Pour une collection de charges ponctuelles, on utilise le principe de superposition :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}.}$$

4.2.3 Circulation du champ le long d'un contour fermé orienté

Pour deux points A et B du contour $\mathcal{C}$, si $\mathrm{d}\vec{l}_1$ connecte A à B et $\mathrm{d}\vec{l}_2$ connecte B à A, alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1 + \int_B^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2 = V(A) - V(B) + V(B) - V(A) = 0,$$

donc $\vec{E}$ est à circulation conservative. C'est une équation intégrale.

4.2.4 Lien local entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Opérateur gradient

Pour deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$ connectés par $\mathrm{d}\vec{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, on a

$$
\begin{aligned}
\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \vec{E} \cdot M\vec{M}', \\
&= V(M) - V(M'), \\
&= E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y + E_z \mathrm{d}z, \\
&= V(x, y, z) - V(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z), \\
&= \mathrm{d}x \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) + \mathrm{d}y \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) + \mathrm{d}z \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z),
\end{aligned}
$$

ceci étant valide pour tout déplacement $\mathrm{d}\vec{l}$, donc

$$E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y + E_z \mathrm{d}z = -\mathrm{d}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\mathrm{grad}} V.}$$

En coordonnées cartésiennes, on a simplement $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. C'est une équation locale.

4.2.5 Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ extérieur : sens physique du potentiel électrostatique

On reprend le système décrit par la Figure 4.2. On souhaite calculer cette fois-ci le travail développé par la force électrostatique. On a

$$\begin{aligned} W^{\text{el}}_{A\to B} &= \int_A^B \vec{F}_{\text{el}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \\ &= \int_A^B q\vec{E}^{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \\ &= -q\int_A^B \mathrm{d}V^{\text{ext}}, \\ &= -q\left[V^{\text{ext}}(B) - V^{\text{ext}}(A)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une énergie potentielle E_p^{ext} telle que

$$W^{\text{el}}_{A\to B} = -\Delta E_p^{\text{ext}},$$

d'où $E_p^{\text{ext}} = qV^{\text{ext}}$. Par convention, on prend $E_p^{\text{ext}}(\infty) = 0$.

On définit aussi l'électron-volt. Il s'agit de l'énergie à fournir pour amener un électron du potentiel 0V au potentiel 1V. Ainsi,

$$\boxed{1\text{eV} = e \times 1\text{V} = 1,6.10^{-19}\text{J}.}$$

4.3 Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss

4.3.1 Charge ponctuelle : flux à travers une sphère

On considère une charge ponctuelle Q en un point O et une sphère S de rayon r de centre O. On note

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.$$

Alors en notant $\vec{n}^{\text{ext}}$ le vecteur normal à la surface S,

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oiint \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}.}$$

4.3.2 Théorème de Gauss

Une charge ponctuelle à l'intérieur d'une surface fermée

Soit V un volume quelconque de l'espace contenant une charge Q. On note S une sphère centrée en Q contenue dans V, et S' le reste de la surface correspondant à V.En un point M quelconque du volume, on a

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.$$

On a

$$\oiint_{S\cup S'} \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}\mathrm{d}V,$$

et pour un problème à symétrie sphérique, on a pour tout $r \neq 0$,

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right).$$

Ainsi, $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ pour tout $r \neq 0$, d'où

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{E}\mathrm{d}V = 0 = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S + \oiint_{S'} \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S',$$

et les deux normales extérieures sont opposées l'une de l'autre. Finalement,

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{u_r}\mathrm{d}S' = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi, si une surface S contient une charge Q, on a toujours

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}.}$$

Charge ponctuelle à l'extérieur d'une surface fermée

Dans ce cas, on a directement

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}\mathrm{d}V = 0.}$$

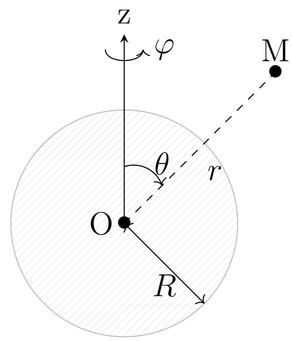

FIGURE 4.3 – Sphère uniformément chargée en volume ou en surface.

Bilan

Si $\vec{E}$ est le champ total créé par N charges Q_i, alors

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \frac{Q^{\text{int}}}{\varepsilon_0}.}$$

Ici, Q^{int} est la somme de toutes les charges qui sont à l'intérieur de la surface S.

4.3.3 Comment appliquer le théorème de Gauss

Le but est de calculer des champs électrostatiques $\vec{E}$ dans des cas de hautes symétries. La méthode est la suivante :

(α) Invariance et symétries : donne la géométrie de $\vec{E}$;

(β) Choisir une surface de Gauss adaptée (ou bien $\vec{E} \parallel \vec{n}^{\text{ext}}$ avec E qui est constant sur la surface ou bien $\vec{E} \perp \vec{n}^{\text{ext}}$) avec un dessin ;

(γ) Conclure.

4.3.4 Exemples fondamentaux

Sphère uniformément chargée en volume ou en surface

On considère le système donnée à la Figure 4.3.

(α) Toute rotation d'axe passant par O laisse la distribution invariant, donc

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = \vec{E}(r) = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ E_\theta(r) \\ E_\varphi(r) \end{pmatrix}.$$

Les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ sont des PS valable pour tout point M. Ainsi, $\vec{E}$ est radial et $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}$.

(β) La bonne surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r variable.

(γ) On a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}R = \oiint_S E(r)\mathrm{d}S = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.}$$

Boule uniformément chargée en volume. La densité ρ est constante et vaut $\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ où Q est la charge présente dans l'entièreté de la boule. Ainsi, pour $r \geqslant R$, on a

$$Q_{\text{int}}(r \geqslant R) = Q,$$

d'où

$$\boxed{\vec{E}(r \geqslant R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.}$$

Si $r \leqslant R$, alors on a

$$Q_{\text{int}}(r \leqslant R) = \iiint \rho \mathrm{d}V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\vec{E}(r \leqslant R) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{u_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{r}{R}\right)\vec{u_r}.}$$

Sphère uniformément chargée en surface. Pour $r > R$, on a le même résultat que précédemment. Pour $r < R$, on a $Q_{\text{int}}(r < R) = 0$, donc $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. $\vec{E}$ est donc discontinu à la surface de la sphère (variation d'amplitude égal à σ/ε_0). C'est un modèle non physique.

Cylindre infini uniformément chargé en volume ou en surface

On considère un cylindre de rayon R d'axe (Oz). La distribution de charge est à symétrie cylindrique « infinie ».

(α) Il y a une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz) et une invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz). De plus, tout plan perpendiculaire à (Oz) est un plan de symétrie. Enfin, tout plan contenant (Oz) est un plan de symétrie. Finalement, on a

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}.}$$

Remarque 4.1. Si la distribution est non infinie, a priori on a

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_r(r,z) \\ 0 \\ e_z(r,z) \end{pmatrix}.$$

(β) La surface de Gauss que l'on prend est un cylindre d'axe (Oz) de rayon r, de hauteur de h, formé par deux disques perpendiculaires à l'axe (Oz).

(γ) Le théorème de Gauss donne

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0},$$

où $S = \Sigma \cup S_1 \cup S_2$ où S_1 et S_2 correspondent aux disques. Ainsi,

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = 0 + 0 + \iint_\Sigma E(r)\vec{u_r}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}\Sigma = E(r)\times 2\pi r h.$$

Ainsi,

$$\boxed{E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{2\pi\varepsilon_0 h r}.}$$

Cylindre uniformément charge en volume. On considère une tranche d'hauteur h, on a $Q = \rho h\pi R^2$. On introduit donc

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{h} = \rho\pi R^2.}$$

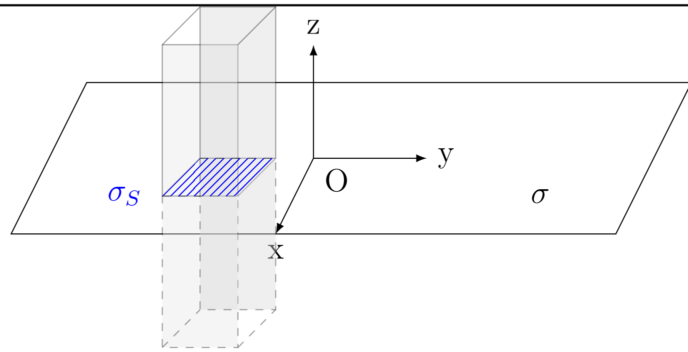

FIGURE 4.4 – Plan uniformément chargé en surface.

C'est la charge linéique en $\mathrm{C\,m^{-1}}$. Pour $r \geqslant R$, on a $Q_{\text{int}}(r \geqslant R) = \lambda h$, d'où

$$\boxed{\vec{E}(r \geqslant R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}.}$$

Si $r \leqslant R$, on a $Q_{\text{int}}(r \leqslant R) = \rho\pi r^2 h = \lambda h \left(\frac{r}{R}\right)^2$. Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(r \leqslant R) = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u_r}.}$$

Cylindre uniformément chargé en surface. Si $r < R$, on a $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$. Si $r > R$, on a $Q_{\text{int}}(r > R) = Q = \lambda h$, donc $\vec{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$. À nouveau, il y a une discontinuité égale à $\sigma/@\varepsilon_0$ avec $\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R}$. Elle est due au modèle surfacique.

Plan infini uniformément chargé en surface

On considère le système décrit à la Figure 4.4.

Par plan infini, on entend que les longueurs caractéristiques du plan selon les axes x et y sont très grandes devant l'épaisseur du plan : $L_x, L_y \gg e$.

(α) Il y a invariance par translation par rapport aux axes (Ox) et (Py). Ainsi, le champ ne dépend pas de x ni de y. Pour les symétries, tout plan parallèle à (xOy) est un PS, donc $E_y = 0$. Tout plan parallèle à (yOz) est un PS, donc $E_x = 0$. Ainsi, on a $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$. Enfin, le fait que la plan (xOy) est un PS implique $E(-z) = -E(z)$.

(β) La surface de Gauss est un cylindre de générateur parallèle à (Oz), de hauteur 2z centré sur le plan $z = 0$.

(γ) On a

$$\begin{aligned}\oiint_{S=S_1\cup S_2\cup\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0},\\ &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},\\ &= 0 + \iint_{S_1} E(z)\vec{u}_z\cdot\vec{u}_z\mathrm{d}S\\ &\quad + \iint_{S_2} E(-z)\vec{u}_z\cdot(-\vec{u}_z)\,\mathrm{d}S,\\ &= E(z)S + E(z)S.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z,}$$

et

$$\boxed{\vec{E}(z<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z.}$$

La différence en $z = 0$ vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Couche de charges infinie uniformément chargée en volume. On se réfère à la Figure 4.5.

(α) Il y a invariance par translation selon (Ox) et (Oy), donc $\vec{E}$ ne dépend ni de x, ni de y. Les symétries sont les mêmes que précédemment, on a donc $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ et $E(-z) = -E(z)$.

(β) La surface de Gauss est la même que précédemment, mais avec la base dans le plan $z = 0$.

(γ) On a donc

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\mathrm{d}S = 0 + 0 + E(z)\times S = \frac{Q_{\text{int}}(z)}{\varepsilon_0}.$$

Si $z \geqslant e/2$, on a $Q_{\text{int}}(z \geqslant e/2) = \rho\times S\times e/2$, donc

$$\boxed{E(z\geqslant e/2) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}, \qquad E(z\leqslant -e/2) = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}.}$$

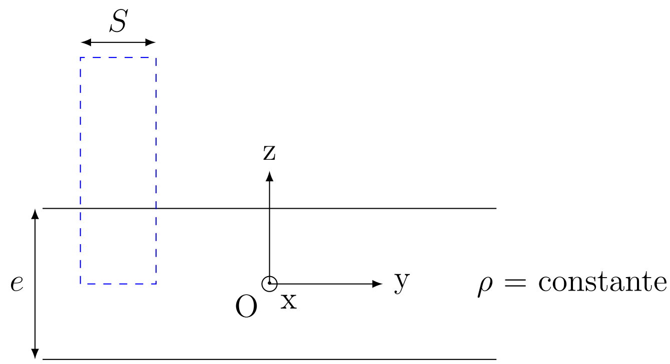

FIGURE 4.5 – Couche de charges infinie uniformément chargée en volume.

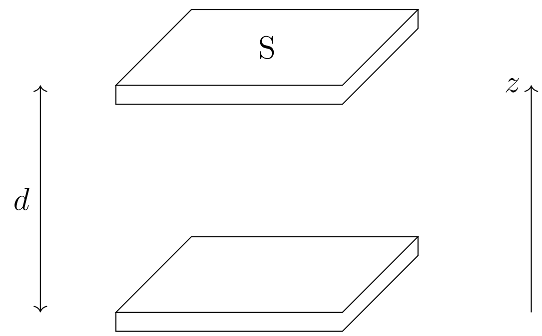

FIGURE 4.6 – Condensateur plan sans effet de bord.

Si $0 \leqslant z \leqslant e/2$, on a $Q_{\text{int}}(z) = \rho \times S \times z$, donc

$$\boxed{E(0 \leqslant z \leqslant e/2) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}, \qquad E(-e/2 \leqslant z \leqslant 0) = -\frac{\rho z}{\varepsilon_0}.}$$

Ainsi, E est continu. Dans le limite $e \to 0$, on retrouve le modèle de la nappe de charges avec $\rho e = \sigma$ fini.

4.3.5 Condensateur plan sans effet de bord. Capacité

Condensateur plan sans effet de bord

Le condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques se faisant face, séparées par un isolant ou un diélectrique. On se réfère à la Figure 4.6.

On fait l'hypothèse que $d \ll \sqrt{S}$, ce qui correspond au fait que les armatures sont « infinies » : il n'y a pas d'effet de bords. Chaque armature est donc un plan infini sans épaisseur.

Les deux plans sont soumis à une tension U : il y a une accumulation de charges opposées sur les deux plans en regard.

Champ électrique

(α) Il y a invariance par translation sur (Ox) et (Oy), donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$. Tout plan parallèle à (xOz) et (yoZ) est un PS, donc $E_x = E_y = 0$. Finalement,

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z.$$

Ainsi, $\vec{E}$ est perpendiculaire aux armatures. Si $\mathrm{d}\vec{l}$ est un déplacement infinitésimal sur l'armature, on a

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 = -\mathrm{d}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + 0\right].$$

Donc $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0$ sur une armature, donc V est constant sur une armature. On note V_1 le potentiel de l'armature située en $z = d/2$ et V_2 celle en $z = -d/2$. On a $U = V_1 - V_2$. Or V est défini) une constante près. On choisit donc $V_1 = U/2$ et $V_2 = -U/2$. Cela entraîne donc que le plan $z = 0$ est un PAS. Donc les charges (surfaciques) valent $+\sigma$ sur l'armature haute, et $-\sigma$ sur l'armature basse. On applique le théorème de superposition comme selon la Figure 4.7.

Ainsi, entre les armatures, on a

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z,}$$

qui est uniforme (lié aux effets de bord non présents). En dehors du condensateur, on a $\vec{E} = \vec{0}$.

Capacité

En notant Q les charges sur les armatures ($+Q$ en haut, $-Q$ en bas), on définit la capacité du condensateur par

$$\boxed{C = \frac{Q}{U},}$$

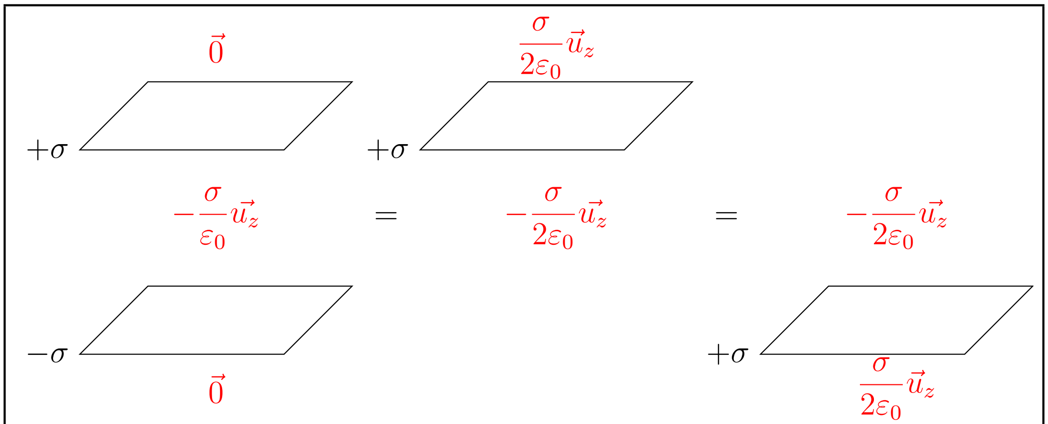

Figure 4.7 – Théorème de superposition pour établir l'expression du champ électrostatique dans un condensateur plan.

qui est strictement positif et qui est en F. On peut exprimer la capacité avec les distances caractéristiques présentées à la Figure 4.6. En effet, en notant M_1 un point de l'armature haute et M_2 un point de l'armature basse, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} &= \int_1^2 -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\vec{u}_z\left(\mathrm{d}x\vec{u}_x+\mathrm{d}y\vec{u}_y+\mathrm{d}z\vec{u}_z\right),\\
&= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_1^2 \mathrm{d}z,\\
&= \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Or

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = V_1 - V_2 = U,$$

et finalement

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.}$$

Ordre de grandeur. Pour $d = 0,1\mathrm{mm}$, $S = 1\mathrm{cm}^2$, on a

$$C\#10\mathrm{pF}.$$

De plus, plus S augmente, plus la capacité augmente. Enfin, en utilisant un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ avec $\varepsilon_r > 1$, on augmente la capacité. On peut arriver à des capacités de l'ordre du µF.

4.4 Topographie du champ électrostatique

4.4.1 Lignes de champ. Tubes de champ

Ligne de champ. Une ligne de champ est une courbe tangente en tout point au champ électrostatique $\vec{E}$. Quelques exemples sont donnés à la Figure 4.8.

Les lignes de champ divergent à partir des $q > 0$ et convergent vers les $q < 0$.

Tube de champ. Un tube de champ est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

4.4.2 Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est définie par

$$\{M \,|\, V(M) = \text{constante}\}\,.$$

Sur une surface équipotentielle, on a $\mathrm{d}V = 0 = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Ceci vaut pour tout déplacement le long de la surface $\mathrm{d}\vec{l}$.

Otientation des lignes de champ et sens de variation de V. On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$. Soit une ligne de champ (orientée selon $\vec{E}$). Alors

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}V > 0,$$

donc V décroît le long de la ligne de champ. On peut dire que $\vec{E}$ « descend » les potentiels.

4.4.3 Resserrement ou évasement des lignes de champ

C'est le principe du paratonnerre, voir la Figure 4.9.

On a

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0 = 0 + E_2 S_2 - E_1 S_1,$$

d'où

$$\boxed{E_2 = E_1 \times \frac{S_1}{S_2} > E_1.}$$

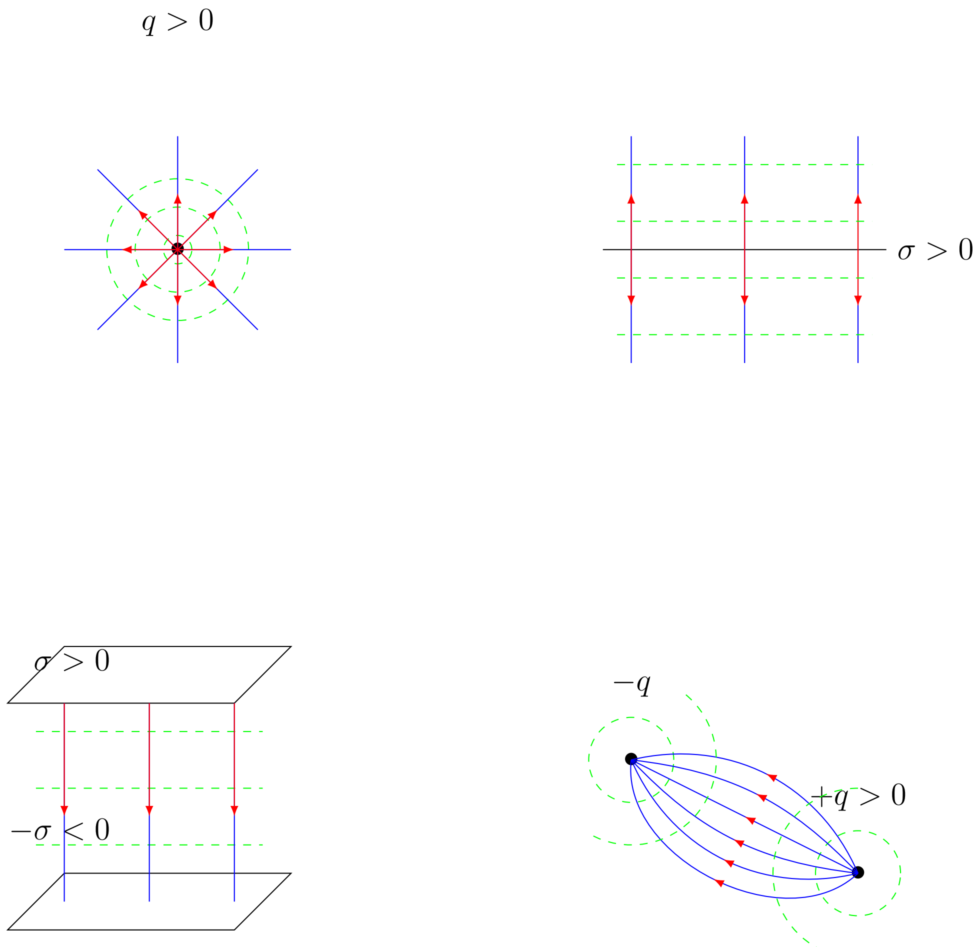

FIGURE 4.8 – Topographie du champ électrostatique : exemples de lignes de champ. Les courbes en vert sont les équipotentielles.

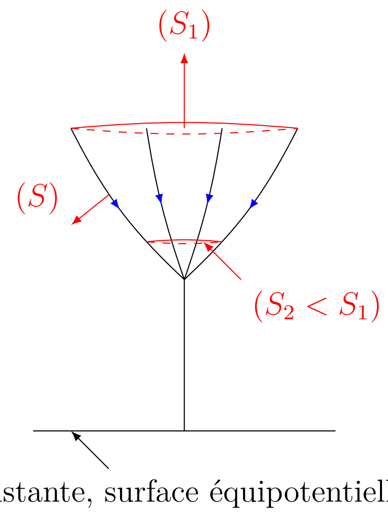

Figure 4.9 – Resserrement des lignes de champ : principe du paratonnerre.

Ainsi, $\left\|\vec{E}\right\|$ augmente si les lignes de champ se resserrent, et diminue si les lignes de champ s'écartent.

4.4.4 Visualisation de cartes de champ et de potentiel

Un exemple interactif est disponible sur le site de Geneviève Tulloue via l'université de Nantes.

4.5 Équations locales de l'électrostatique

4.5.1 Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss

Le théorème de Gauss couplé ai théorème d'Ostrogradski donne

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = \iiint_V \text{div } \vec{E} \mathrm{d}V = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \mathrm{d}V.$$

Ainsi, pour tout volume V, on a

$$\iiint_V \left(\text{div } \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \mathrm{d}V = 0,$$

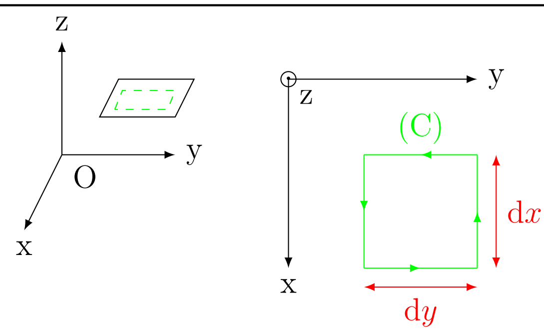

FIGURE 4.10 – Circulation conservative locale en coordonnées cartésiennes.

d'où on entire l'équation de Maxwell-Gauss, qui est une version locale du théorème de Gauss :

$$\boxed{\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.}$$

4.5.2 Circulation conservative locale

On se réfère à la Figure 4.10.

On se place dans un lan parallèle à (xOy), de côté z. On a

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0,\\
&= E_x(x,y,z)\mathrm{d}x + E_y(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\\
&\quad - E_x(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x - E_y(x,y,z)\mathrm{d}y,\\
&= -\mathrm{d}y\frac{\partial E_x}{\partial y}(x,y,z)\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\frac{\partial E_y}{\partial x}(x,y,z)\mathrm{d}y = 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,}$$

la circulation est donc proportionnelle à l'aire du carré. De même dans les autres plans, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0,\\
\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.\end{aligned}$$

La circulation du champ est donc proportionnelle à l'aire sur laquelle s'appuie le contour. L'idée est donc de passer d'une circulation $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ à un flux à travers une surface.

4.5.3 Opérateur rotationnel

Théorème-définition de Stokes. Soit $\vec{A}(x, y, z)$ champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$. Alors on a

$$\boxed{\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_\Sigma \left(\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\right) \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma.}$$

Ici, (Σ) est une surface (non fermée) s'appuyant sur (C) et orientée selon la règle du tire-bouchon.

Expression de $\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{A}$ **en cartésienne.** On a

$$\begin{aligned}\oint_{C\in(xOy)} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \times \mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ &= \left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_z \mathrm{d}y\mathrm{d}y,\\ &= \left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) \cdot \vec{u}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.}$$

De même pour les deux autres coordonnées, donc

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.}$$

Avec l'opérateur nabla (en cartésienne), on a

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{A}.}$$

4.5.4 Équation de Maxwell–Faraday

Sur un contour fermé C avec une surface Σ supportée par ce contour, on a

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = 0 = \iint_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{E}\mathrm{d}\Sigma,$$

ceci vaut pour tout contour C, d'où on en tire l'équation de Maxwell-Faraday, qui ets une équation locale :

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}.}$$

Lien avec le potentiel. Soit $f(\vec{r}) = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}f) = \vec{0}$ car

$$\oint_C \vec{\mathrm{grad}}f\cdot\vec{\mathrm{d}l} = 0 = \iint_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}f)\cdot\vec{N}\mathrm{d}\Sigma,$$

donc

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V.}$$

4.5.5 Vue d'ensemble des différentes formulations des lois de l'électrostatique

On choisit un des points de vue, qui sont tous équivalents.

<u>Loi fondamentale</u>

— Loi de Coulomb : $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

— Principe de superposition

<u>Formulation intégrale</u>

— Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}S = \frac{Q^{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$

— Circulation conservative de $\vec{E}$: $\oint \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = 0 \Leftrightarrow \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = V(A) - V(B)$

<u>Formulation locale</u>

— Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (flux de $\vec{E}$)

— Maxwell-Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V$ (circulation de $\vec{E}$)

4.6 Équations de Poisson et de Laplace

4.6.1 Équation de Poisson en présence de charges

On a div$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$, d'où $-\text{div}(\vec{\text{grad}}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

et donc

$$\boxed{\text{div}\left(\vec{\text{grad}}V\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} := \Delta V.}$$

L'équation de Poisson (locale) s'écrit donc

$$\boxed{\Delta V(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}.}$$

Cette équation contient « toute l'électrostatique ».

4.6.2 Équation de Laplace. Résolution numérique

Dans le vide, en l'absence de charges, on a

$$\boxed{\Delta V(x, y, z) = 0.}$$

C'est l'équation de Laplace.

On a le théorème d'unicité suivant : pour des conditions aux limites données (sur V ou ses dérivées), et pour une géométrie donnée, l'équation de Laplace admet une unique solution. On donne le principe de la résolution numérique de $\Delta V = 0$ en deux dimensions sur un domaine maillé uniforme de pas constant l. On note $V_{n,m} = V(nl, ml)$. Alors

$$V_{n-1,m} = V_{n,m} - l\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{n,m} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{n,m} + o(l^2),$$
$$V_{n+1,m} = V_{n,m} + l\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{n,m} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{n,m} + o(l^2),$$
$$V_{n,m-1} = V_{n,m} - l\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{n,m} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{n,m} + o(l^2),$$
$$V_{n,m+1} = V_{n,m} + l\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{n,m} + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{n,m} + o(l^2),$$

Comme $\Delta V = 0$, la somme donne

$$\boxed{V_{n,m} = \frac{V_{n-1,m} + V_{n+1,m} + V_{n,m-1} + V_{n,m+1}}{4},}$$

que l'on résout avec un tableur.

4.7 Analogies avec la gravitation universelle

4.7.1 Les deux lois de force. Grandeurs analogues

On compare dans la Table 4.1 les lois et les grandeurs de l'électrostatique et de la gravitation.

4.7.2 Potentiel gravitationnel. Énergie potentielle d'une masse plongée dans un champ extérieur

Dans la Table 4.2, on dérive le potentiel gravitationnel grâce à l'analogie avec l'électrostatique.

4.7.3 Théorème de Gauss gravitationnel

On a noté μ la masse volumique. Vu de l'extérieur, l'astre à symétrie sphérique est équivalent à une masse ponctuelle.

Électrostatique	Gravitation
$\vec{F} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, attractive ou répulsive	$\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$, attractive
charge (<0,>0)	masse (>0)
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-\mathcal{G}$
Champ $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, $\vec{F} = q\vec{E}$	Champ $\vec{g} = -\mathcal{G}\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$, $\vec{F} = m\vec{g}$ (mais $\vec{g}$ n'est pas le champ de pesanteur)

Table 4.1 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : les deux lois de force.

4.7.4 Équations locales de la gravitation universelle

On a donc $\Delta\varphi = 0$ entre les astres (équivalent à l'équation de Laplace).

4.7.5 Énergie potentielle de gravitation d'un astre à symétrie sphérique

On fait l'hypothèse que μ=constante=$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. On se demande quelle a été l'énergie de constitution de l'astre.

L'astre s'est formé par agrégations successives de couches minces : on apporte depuis l'infini la masse $\mathrm{d}m = \mu \times 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ dans le potentiel

$$\varphi(r) = -\mathcal{G}\frac{M(r)}{r} = -\mathcal{G}\frac{\mu \times \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = -\mathcal{G}\frac{4\mu\pi r^2}{3}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{gravitationnel}} &= \int_\infty^r \mathrm{d}\vec{F_{\text{grav}}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \\
&= \int_\infty^r \mathrm{d}m\vec{g}(s)\mathrm{d}\vec{l}, \\
&= \mathrm{d}m\left[\varphi(\infty) - \varphi(r)\right], \\
&= -\mathrm{d}E_p,
\end{aligned}$$

Électrostatique	Gravitation
$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ $\Updownarrow$ $\exists V, \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(B) - V(A)$ $\Updownarrow$ $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}} V$ $\Updownarrow$ $\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0}$	$\oint_C \vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ $\Updownarrow$ $\exists \varphi(\vec{r}), \int_A^B \vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi(A) - \varphi(B)$ $\Updownarrow$ $\vec{g} = -\vec{\mathrm{grad}} \varphi$ $\Updownarrow$ $\vec{\mathrm{rot}}\vec{g} = \vec{0}$
Source ponctuelle (charge)	Source ponctuelle (masse)
$V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\varphi(r) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{r}$
$E_p^{\mathrm{ext}} = qV^{\mathrm{ext}} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$E_p^{\mathrm{ext}} = m\varphi^{\mathrm{ext}} = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{r}$

TABLE 4.2 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : potentiel gravitationnel et énergie potentielle d'une masse plongée dans un champ extérieur.

Électrostatique	Gravitation
$\oiint_S \vec{E}\cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}S = \dfrac{Q^{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_S \vec{g}\cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}S = -4\pi\mathcal{G}M^{\mathrm{int}}$
Distribution sphérique	Distribution sphérique
$\vec{E}(r \geqslant R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ $\vec{E}(r \leqslant R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\dfrac{r}{R}\vec{u}_r$ (si ρ=constante)	$\vec{g}(r \geqslant R) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$ $\vec{g}(r \leqslant R) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{R^2}\dfrac{r}{R}\vec{u}_r$ (si μ=constante)

TABLE 4.3 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : théorème de Gauss gravitationnel.

Électrostatique	Gravitation
$\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\vec{g} = -4\pi\mathcal{G}\mu$
$\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V$	$\vec{\mathrm{rot}}\vec{g} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{g} = -\vec{\mathrm{grad}}\varphi$
$\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\Delta\varphi = 4\pi\mathcal{G}\mu$

TABLE 4.4 – Analogies entre électrostatique et gravitation universelle : équations locales de la gravitation universelle.

avec $\varphi(\infty) = 0$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_p &= \mathrm{d}m\varphi(r), \\ &= \mu \times 4\pi r^2 \mathrm{d}r \left(-\mathcal{G}\mu\frac{4}{3}\pi r^2\right), \\ &= -\mathcal{G}\mu^2\frac{(4\pi)^2}{3}r^4\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant, on a

$$\boxed{E_p = \int_0^R \mathrm{d}E_p = -\mathcal{G}\mu^2\frac{(4\pi)^2}{3}\frac{R^5}{5} = -\frac{3\mathcal{G}M^2}{5R}.}$$

Ainsi, E_p diminue quand R diminue : c'est l'effondrement gravitationnel. En transposant à l'électrostatique, on obtient l'énergie potentielle de constitution d'une boule chargée :

$$\boxed{E_p = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} > 0.}$$

Chapitre 5

Magnétostatique

Les courants sont stationnaires : $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})$. Ils circulent dans des conducteurs neutres : $\rho(\vec{r}) = 0$. Ainsi $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$.

Sommaire

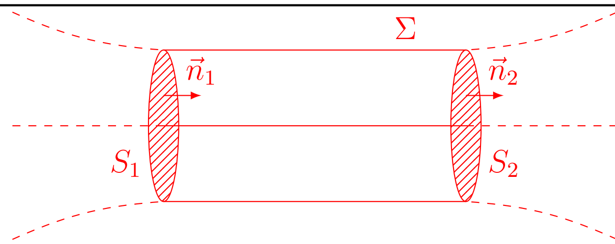

FIGURE 5.1 – Flux du champ magnétique à travers une section d'un tube de champ.

5.1 Flux conservatif du champ magnétique : formulations intégrale et locale

5.1.1 Nullité du flux magnétique à travers une surface fermée

On a le postulat suivant :

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0.}$$

Ainsi, il n'existe pas de « masses » ni de « charges » magnétiques.

5.1.2 Flux de $\vec{B}$ à travers une section d'une tube de champ

On se réfère à la Figure 5.1. On note $\varphi_i = \iint_{S_i} \vec{B} \cdot \vec{n}_i \mathrm{d}S_i$. Alors

$$\oiint_{S_1 \cup S_2 \cup \Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0,$$

implique

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2.}$$

5.1.3 Resserrement des lignes de champ magnétiques

En notant $\bar{B}_i$ la valeur moyenne sur S_i et en supposant $S_1 > S_2$, on a

$$\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} = \frac{S_1}{S_2} > 1.$$

Ainsi, $\left\|\vec{B}\right\|$ est plus intense où les lignes de champ sont plus serrées.

5.1.4 Équation locale de Maxwell-Thompson

D'après le théorème d'Ostrogradski, on a

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{div}\vec{B} = 0.}$$

L'équation est locale et universelle.

5.2 Circulation du champ magnétique : théorème d'Ampère intégral et local

5.2.1 Théorème d'Ampère intégral

En L1, on voit que les lignes de champ de $\vec{B}$ s'enroulent autour des courants, et que $\vec{B} \times l \propto I$ si I est l'intensité d'un courant le long d'un fil de longueur l (par linéarité).

On a le postulat suivant :

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I_{\text{enl}},}$$

où I_{enl} est l'intensité des fils « enlacés », voir la Figure 5.2. Dans ce cas, on a

$$I_{\text{enl}} = I_1 - I_2 - I_3.$$

Le postulat s'écrit aussi

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma.}$$

5.2.2 Quand et comment mettre en œuvre le théorème d'Ampère ?

On l'utilise en cas de haute symétrie : cylindrique ou plane. La méthode est la suivante :

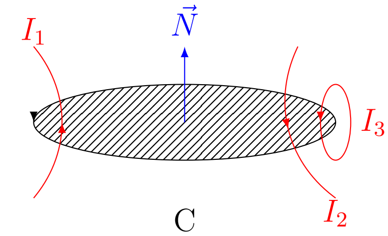

FIGURE 5.2 – Circulation du champ magnétique : enlacement des fils et intensité du courant.

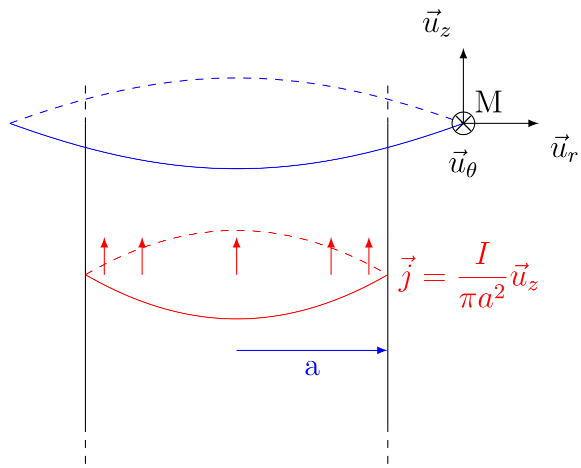

FIGURE 5.3 – Champ magnétique pour un câble rectiligne infini épais.

(α) Choisir le bon système de coordonnées ;

(β) Donner les invariances et les symétries pour obtenir la géométrie de $\vec{B}$;

(γ) Choisir le bon contour et l'orienter arbitrairement. Ou bien $\vec{B}$ est parallèle à C et constant, ou bien $\vec{B}$ est perpendiculaire à C.

(δ) Faire un dessin et l'application.

5.2.3 Exemples fondamentaux

Câble rectiligne infini épais

La longueur du fil l est supposée très grande devant son épaisseur a : $l \gg a$, voir la Figure 5.3.

Pour les invariances et symétries :

— symétrie de révolution par rapport à (Oz) : pas de dépendance en θ ;

— invariance par translation par rapport à (Oz) : pas de dépendant en z ;

— tout plan inclus dans (Oz) est un PS : $B_r = B_z = 0$.

Finalement, on a $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$. Le théorème d'Ampère donne alors

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{enl}}(r).$$

Pour $r \geqslant a$, on a $I_{\mathrm{enl}}(r \geqslant a) = I$, d'où

$$\boxed{\vec{B}(r \geqslant a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta.}$$

Si $r \leqslant a$, on a

$$I_{\mathrm{enl}}(r \leqslant a) = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma = \frac{I}{\pi a^2} \times \pi r^2 = I\left(\frac{r}{a}\right)^2,$$

d'où

$$\boxed{\vec{B}(r \leqslant a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \times \frac{r}{a}\vec{u}_\theta.}$$

En variante, on peut supposer que I ne circule qu'à la surface du cylindre sur une épaisseur nulle. Alors $\vec{j}(r < a) = \vec{0} = \vec{j}(r > a)$, donc $\vec{B}(r < a) = \vec{0}$ et $\vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$.

Solénoïde "infini"

On considère que le rayon du solénoïde a est négligeable devant sa longueur l : $l \gg a$. On se réfère à la Figure 5.4.

Il y a invariance de révolution selon l'ae (Oz) et invariance par translation parallèlement à l'axe (Oz), donc le champ ne dépend que de la variable r. Tout plan perpendiculaire à (Oz) est un PS, donc

$$\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u}_z.}$$

Notons que si la longueur est finie, tout plan inclue dans (Oz) est un PAS, donc $B_\theta = 0$. Pour contour d'Ampère, on choisit un contour rectangulaire

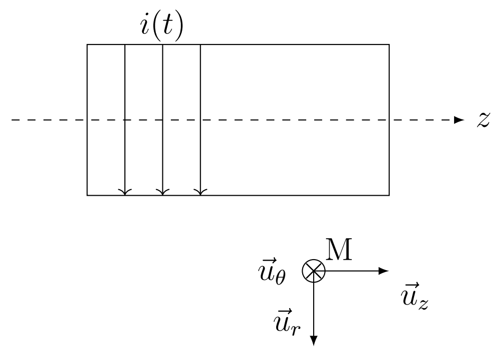

FIGURE 5.4 – Champ magnétique dans un solénoïde infini.

contenu dans un plan contenant l'axe (Oz) dont un des côtés est sur l'axe. Alors

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}}(r) = B(0) \times h - B(r) \times h,$$

donc si $r < a$, $B(r < a) = B(0) =$ constante. Si $r > a$, $B(r > a) = 0$ par hypothèse, donc $B(0) = \mu_0 ni$.

5.2.4 Ordres de grandeur

Pour un fil infini (ou une spire, à très faible distance), alors

$$B \sim \frac{\mu_0 i}{2\pi a}.$$

Si $i = 1\text{A}, a = 2\text{mm}, \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\text{H m}^{-1}$, alors $B \sim 10^{-4}\text{T} = 1\text{gauss}$. S'il y a 10000 spires sur 20cm, alors

$$B_{\text{int}} = \mu_0 ni \sim 60\text{mT}.$$

Pour augmenter la valeur du champ magnétique :

— pour augmenter i, l'effet Joule est limitant (sauf supraconducteur) ;

— on peut augmenter n ;

— on peut augmenter μ_0 en utilisant des matériaux ferromagnétiques, B peut alors atteindre quelques Tesla.

5.2.5 Théorème d'Ampère local : équation de Maxwell–Ampère

Si $\mathcal{C}$ est un contour orienté et Σ est une surface supportée par $\mathcal{C}$ avec $\vec{N}$ un vecteur normal extérieur normalisé, alors d'après le théorème de Stokes, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma = \iint_{\Sigma} \left(\vec{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) \cdot \vec{N} \mathrm{d}\Sigma.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}).}$$

5.2.6 Vue d'ensemble des lois de la magnétostatique

Pour le flux, on a l'équivalence intégrale/locale suivante :

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \mathrm{d}S = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{div}\vec{B} = 0.}$$

Pour la circulation, on a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} \Longleftrightarrow \vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.}$$

5.3 Topographie du champ magnétique

5.3.1 Fermeture et orientation des lignes de contour

Comme le flux du champ est nul, toute ligne de champ magnétique est fermée sur elle-même. De plus, comme $\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, les lignes de champ tournent autour des courants dans le sens donné par la règle du tire-bouchon.

5.3.2 Comparaison des lignes de champ électriques et magnétiques

Une ligne de champ fermée sur elle-même est une ligne de champ magnétique, tandis qu'une ligne de champ convergente ou divergente en un point est une ligne de champ électrique. Au voisinage des sources, les lignes de champ électriques divergent ou convergent radialement, tandis que les lignes de champ magnétiques tournent autour de la source. Loin des sources, les deux champs sont régis par les mêmes équations ($\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \vec{0}$ et $\mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}\vec{E} = 0$), la distinction n'est donc pas évidente a priori.

Troisième partie

Thermodynamique

Chapitre 6

Systèmes ouverts en écoulement permanent

Sommaire

6.1 Bilans énergétique et entropique sur un système ouvert en écoulement permanent

6.1.1 Formulation infinitésimale des deux principes de la thermodynamique

Premier principe ou de « conservation » (de l'énergie)

En L1. Pour tout système fermé σ, il existe une fonction U, dite « énergie interne », telle que

1. U est additive (extensive). Cela implique des interactions de deux systèmes à très courte portée.
2. Si Σ subit une évolution de $i \to f$, on a
$$\boxed{\Delta U + \Delta E_c^{\text{macro}} = W^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}},}$$
ou bien
$$W^{\text{ext}} = W_{\text{cons}}^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}}$$
avec $W_{\text{cons}}^{\text{ext}} = -\Delta E_p^{\text{ext}}$, d'où
$$\boxed{\Delta E_{\text{tot}} = W_{nc}^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}},}$$
où $E_{\text{tot}} = U + E_c^{\text{macro}} + E_p^{\text{ext}}$.
3. Si Σ est à l'équilibre thermodynamique, U est une fonction d'était, c'est-à-dire qu'elle est fonction d'un petit nombre de paramètres du système.

Remarque 6.1. Le plus souvent, $\Delta E_c^{\text{macro}}$ est négligeable d'où
$$\boxed{\Delta U = W^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}}.}$$

Remarque 6.2. Si on considère une transformation monobare sans autre travail que celui des forces de pression, on a $P^{\text{ext}} =$ constante, d'où $P_f = P_i = P^{\text{ext}}$ et
$$\delta W^{\text{ext}} = -P^{\text{ext}} \mathrm{d}V.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} W^{\text{ext}} = W &= -\int_i^f P^{\text{ext}} \mathrm{d}V, \\ &= -P^{\text{ext}} \Delta V = -(P_f V_f - P_i V_i). \end{aligned}$$

On a donc

$$\Delta U = U_f - U_i = -(P_f V_f - P_i V_i) + Q^{\text{ext}}.$$

Donc si $H = U + PV$, on a

$$\boxed{\Delta H = Q^{\text{ext}}.}$$

Exemple 6.1. Pour un gaz avec $N \sim 10^{23}$ particules, a priori U est une fonction de $6N\times$ variables (positions et vitesses). Àl 'équilibre, U est une fonction de la température et du volume uniquement (par exemple).

En L2. On considère deux états infiniment proches :

$$\boxed{\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_c^{\text{macro}} = \delta W^{\text{ext}} + \delta Q^{\text{ext}}.}$$

Le cas fréquent est $\mathrm{d}U = \delta W^{\text{ext}} + \delta Q^{\text{ext}}$.

Deuxième principe « d'évolution »

En L1. Pour tout système fermé Σ, il existe une fonction S « entropie » telle que

1. S est additive (extensive)
2. Si Σ subit une évolution de $i \to f$, alors

   $$\boxed{\Delta S = S_{\text{créée}} + S_{\text{échangée}},}$$

   avec

   $$S_{\text{échangée}} = \sum_i \frac{Q_i^{\text{ext}}}{T_i^{\text{ext}}}, \qquad S_{\text{créée}} \geqslant 0.$$

   T_i^{ext} représente l'interaction avec un thermostat. Le signe de l'entropie créée implique une évolution du système.
3. À l'équilibre thermodynamique, S est une fonction d'état.

Si le système Σ est isolé (évolution adiabatique), on a

$$\boxed{S_{\text{échangée}} = 0, \qquad \Delta S = S_{\text{créée}} \geqslant 0.}$$

Si l'évolution est réversible, on a $S_{\text{créée}} = 0$, d'où

$$\boxed{\Delta S = S_{\text{échangée}}.}$$

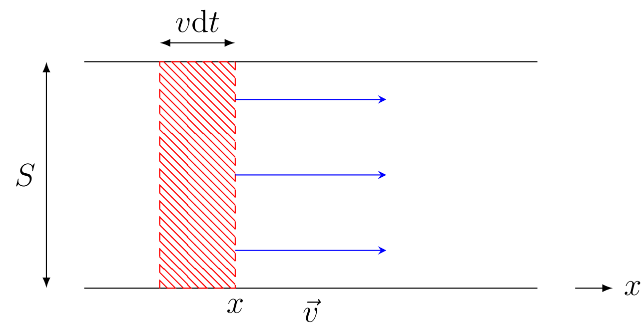

FIGURE 6.1 – Débit de masse dans un fluide en écoulement permanent.

En L2. On considère une transformation infinitésimale, d'où

$$\boxed{\mathrm{d}S = \delta S_{\text{échangée}} + \delta S_{\text{créée}}, \quad \delta S_{\text{créée}} \geqslant 0, \quad \delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q^{\text{ext}}}{T^{\text{ext}}}.}$$

Une conséquence directe est

$$S_{\text{échangée}} = \int_i^f \frac{\delta Q^{\text{ext}}}{T^{\text{ext}}}.$$

6.1.2 Bilan de masse pour un fluide en écoulement permanent

Débit de masse (1D)

On se réfère à la Figure 6.1. Le fluide est caractérisé par une masse volumique μ supposée uniforme et constante.

Une quantité de masse δm du fluide traverse une section S pendant une période de temps dt. Ainsi,

$$\delta m = (S \times v\mathrm{d}t) \times \mu = \mu v S \mathrm{d}t.$$

On pose alors

$$\boxed{D_m = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t} = \mu v S.}$$

C'est la quantité de masse traversant une section S par unité de temps. Notons que $[\mu]$=kg m^{-3}, $[v]$=m s^{-1} et $[S]$=m^2.

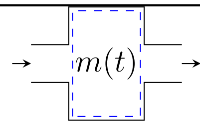

FIGURE 6.2 – Bilan de masse en régime permanent, une entrée et une sortie.

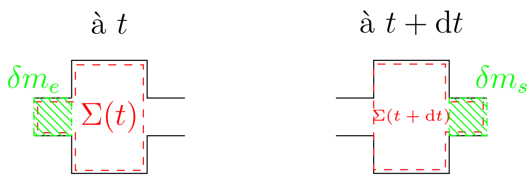

FIGURE 6.3 – Bilan de masse en régime permanent, une entrée et une sortie, système fermé.

Bilan de masse en régime permanent

Une entrée, une sortie. On est en écoulement permanent et on considère un système ouvert $\Sigma(t)$ et V est un volume de contrôle (fixe), voir la Figure 6.2.

Il faut définir un système fermé $\Sigma^\star$ (donc de masse constante $m^\star$). On considère donc la Figure 6.3.

$\sigma^\star$ est fermé, on a $m^\star(t) = m^\star(t+\mathrm{d}t)$ d'où

$$m(t) + \delta m_e = m(t+\mathrm{d}t) + \delta m_s = m(t) + D_m^e \mathrm{d}t = m(t+\mathrm{d}t) + D_m^s \mathrm{d}t.$$

En régime permanent, on a $m(t+\mathrm{d}t) = m(t)$, donc

$$\boxed{D_m^e = D_m^s.}$$

Plusieurs entrées, plusieurs sorties. On considère le système présenté à la Figure 6.4.

En régime permanent le même raisonnement amène à

$$\boxed{\sum_i D_{m_i}^e = \sum_j D_{m_j}^s.}$$

6.1.3 Bilan énergétique en régime permanent

On considère le système présenté à la Figure 6.5. Les entrées sont u_e, v_e et P_e. Les sorties sont u_s, v_s, P_s. Comme précédemment, on note $\Sigma^\star(t)$ le

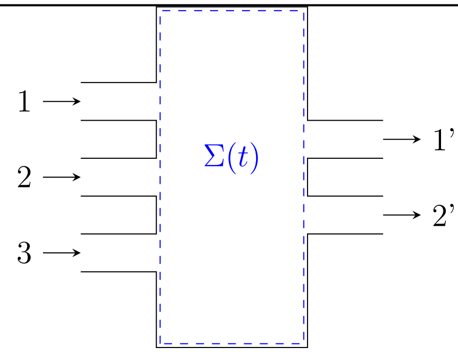

Figure 6.4 – Bilan de masse en régime permanent, plusieurs entrées et plusieurs sorties.

système fermé considéré au temps t, et $\Sigma^\star(t+\mathrm{d}t)$ le système fermé considéré au temps $t+\mathrm{d}t$. Les flèches autour du système indique les forces de pression.

Bilan énergétique

On définit $E \coloneqq U + E_c^{\text{macro}} + E_p^{\text{pes}}$. $\Sigma^\star$ étant fermé, on a

$$\begin{aligned}
E^\star(t) &= E(t) + \delta E_e = E(t) + \delta m_e \left[u_e + \frac{v_e^2}{2} + g z_e\right], \\
&= E^\star(t+\mathrm{d}t), \\
&= E(t+\mathrm{d}t) + \delta E_s = E(t+\mathrm{d}t) + \delta m_s \left[u_s + \frac{v_s^2}{2} + g z_s\right].
\end{aligned}$$

En régime permanent, on a $E(t+\mathrm{d}t) = E(t)$ et $\delta m_e = \delta m_s = D_m \mathrm{d}t$, d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E^\star}{\mathrm{d}t} = D_m \left[\left(u_s + \frac{v_s^2}{2} + g z_s\right) - \left(u_e + \frac{v_e^2}{2} + g z_e\right)\right].}$$

Premier principe

On a

$$\frac{\mathrm{d}E^\star}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta W_{\text{nc}}^{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q^{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = P_{\text{méca,nc}^{\text{ext}}} + P_{\text{th}}^{\text{ext}}.$$

Notamment,

$$P_{\text{méca,nc}}^{\text{ext}} = P_{\text{press}}^{\text{ext}} + P_{\text{indiquées}},$$

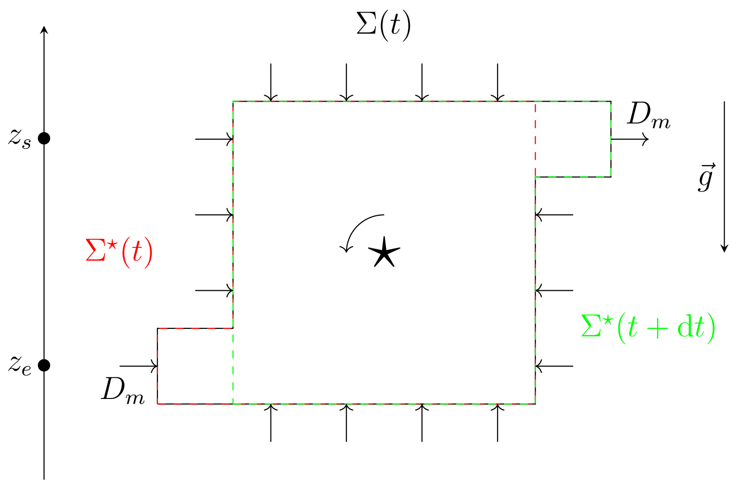

FIGURE 6.5 – Bilan d'énergie en régime permanent.

où le deuxième terme vient des échanges avec les parties mobiles. Comme $D_m = \mu S V$, on a

$$\begin{aligned} P_{\text{press}}^{\text{ext}} &= PeS_e\vec{u_x}\cdot v_e\vec{u_x} + (-P_sS_s\vec{u_x})\cdot v_s\vec{u_x}, \\ &= P_eS_eV_e - P_sS_sV_s = D_m\left[\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s}\right]. \end{aligned}$$

Donc

$$D_m\left[\left(u_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s + \frac{P_s}{\mu_s}\right) - \left[u_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e + \frac{P_e}{\mu_e}\right]\right] = P_i + P_{\text{th}}^{\text{ext}}.$$

En notant $H = U + PV$, et $h = u + Pv_m$ où $v_m = \frac{1}{\mu}$, on a

$$\boxed{D_m\left[\left(h_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s\right) - \left(h_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e\right)\right] = P_i + P_{\text{th}}^{\text{ext}}.}$$

En formulation intensive, on note le travail indiqué massique

$$\boxed{\frac{P_i}{D_m} := \omega_i,}$$

d'unité $\mathrm{W\,s\,kg^{-1}}$. On note le transfert thermique massique

$$\boxed{\frac{P_{\text{th}}}{D_m} := q.}$$

Alors
$$\left(h_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s\right) - \left[h_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e\right] = \omega_i + q.$$

6.1.4 Bilan entropique en régime permanent

Bilan entropique

On considère toujours le système présenté à la Figure 6.5. On a

$$S^\star(t) = S(t) + \delta S_e = S(t) + \delta m_e s_e,$$
$$S^\star(t + \mathrm{d}t) = S(t + \mathrm{d}t) + \delta m_s s_s.$$

En régime permanent, on a donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}S^\star}{\mathrm{d}t} = D_m \left(S_s - S_e\right).}$$

Second principe

On a
$$\frac{\mathrm{d}S^\star}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta S_{\mathrm{ech}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta S_{\mathrm{cr}}}{\mathrm{d}t},$$
où le deuxième terme est positif. Ainsi,

$$\boxed{D_m \left[S_s - S_e\right] = \frac{\delta S_{\mathrm{ech}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta S_{\mathrm{cr}}}{\mathrm{d}t}.}$$

En formulation intensive, on note l'entropie échangée par unité de masse

$$\boxed{\frac{1}{D_m}\frac{\delta S_{\mathrm{ech}}}{\mathrm{d}t} = s_{\mathrm{ech}}.}$$

L'entropie créée par unité de masse est donnée par

$$\boxed{\frac{1}{D_m}\frac{\delta S_{\mathrm{cr}}}{\mathrm{d}t} = s_{\mathrm{cr}}.}$$

En régime permanent, on a donc

$$\boxed{s_s - s_e = s_{\mathrm{ech}} + s_{\mathrm{cr}}}.$$

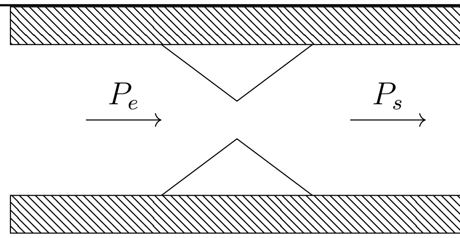

FIGURE 6.6 – Détente de Joule-Kelvin.

Dans le cas monotherme, on a

$$\frac{\delta S_{\text{ech}}}{\mathrm{d}t} = \frac{P_{\text{th}}^{\text{ext}}}{T^{\text{ext}}},$$

et

$$\boxed{s_{\text{ech}} = \frac{q}{T^{\text{ext}}}.}$$

Finalement, en régime permanent et dans le cas monotherme, on a

$$\boxed{s_s - s_e = \frac{q}{T^{\text{ext}}} + s_c.}$$

Dans le cas adiabatique, on a

$$\boxed{s_s - s_e = s_c \geqslant 0.}$$

6.1.5 Exemples

Détente de Joule-Kelvin/Joule-Thompson

C'est un écoulement adiabatique, lent et permanent, considéré à la Figure 6.6, où l'on a $P_e > P_s$.

Dans le bilan énergétique, on considère que les vitesses sont lentes (donc négligeables dans le bilan) et que la variation de hauteur est de l'ordre d'une dizaine de centimètres (négligeable dans le bilan). Ainsi,

$$h_s - h_s = \omega_i + q = 0,$$

car il n'y a pas de transferts thermique ni de travail. Finalement, on a

$$\boxed{h_s = h_e, \quad s_s > s_e.}$$

Compresseur ou Turbine

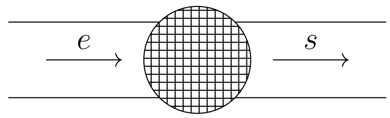

FIGURE 6.7 – Compresseur ou turbine.

Compresseur/Turbine

Dans un compresseur, il y a une augmentation de la pression du fluide en lui fournissant du travail $\omega_i > 0$. Dans une turbine, le fluide entraîne la turbine donc $\omega_i < 0$. On modélise ces deux systèmes par la Figure 6.7.

À nouveau, en négligeant les vitesses et la variation de hauteur, et en supposant que les transferts thermiques sont négligeables, on a

$$\boxed{\Delta h = \omega_i, \quad \Delta s \gtrapprox 0.}$$

Tuyère

On considère une tuyère à la Figure 6.8. La vitesse augment du gaz augmente de gauche à droite, c_s est la vitesse du son.. L'écoulement est rapide, il n'y a pas de parties mobiles ($\omega_i = 0$) et il n'y a pas le temps pour qu'il y ait des transferts thermiques (évolution adiabatique, $q \approx 0$).

Ainsi,

$$\Delta h + \Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

Pour $v_s \gg v_e$, on a

$$\begin{aligned} \frac{v_s^2}{2} &\approx -\Delta h, \\ &= -C_{p,m} \Delta T, \\ &= -\frac{\gamma r}{(\gamma - 1) M} \Delta T > 0, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la loi des gaz parfaits et l'on a noté $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$. Ainsi, $\Delta T < 0$.

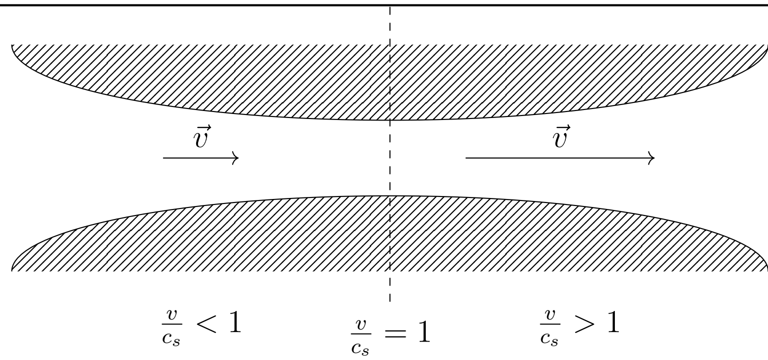

Figure 6.8 – Tuyère.

6.2 Diagramme d'état $(\log P, h)$ d'un fluide et fonctionnement de machines thermiques réelles

6.2.1 Lecture du diagramme $(\log P, h)$ d'un fluide pur

On veut caractériser l'état d'un fluide pur déterminé par la donnée de deux grandeurs intensives :
— (P, v_m) [Clapeyron] ;
— (P, h) ;
— (T, s) ;
— (h, s) [Mollier].

Partition du plan $(\log P, h)$

On donne la partition du plan $(\log P, h)$ à la Figure 6.9. La courbe d'ébullition jointe avec la courbe de rosée s'appelle la **courbe de saturation**. On note x le titre massique vapeur : pour une masse m de fluide donnée, on a

$$\boxed{x \coloneqq \frac{m_{\text{gaz}}}{m}, \qquad x_l = 1 - x.}$$

Pour le calculer, on considère la situation de la Figure 6.10.
L'enthalpie H de la masse m représenté par le point M est

$$H(T, m, x) = m_g h_g(T_{\text{eq}}) + m_l h_l(T_{\text{eq}}) = m\left[x h_g + (1-x) h_l\right],$$

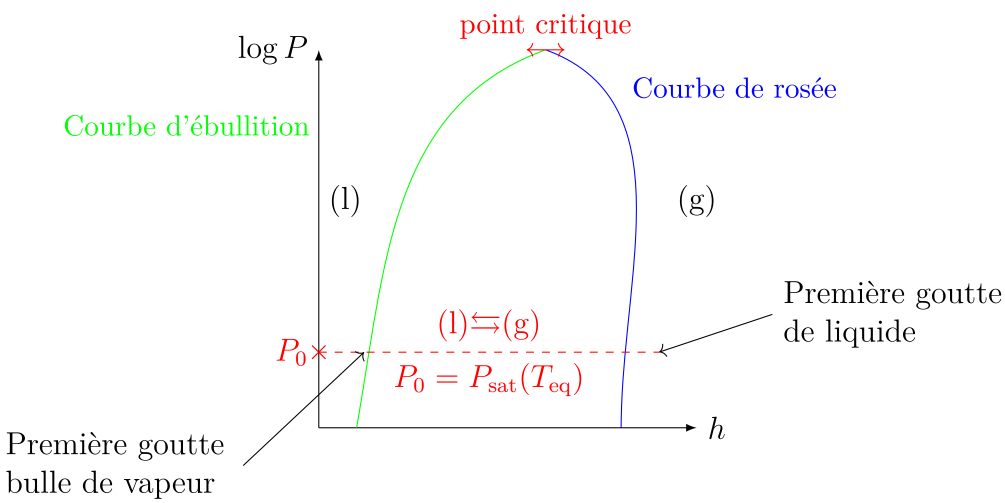

FIGURE 6.9 – Partition du plan $(\log P, h)$.

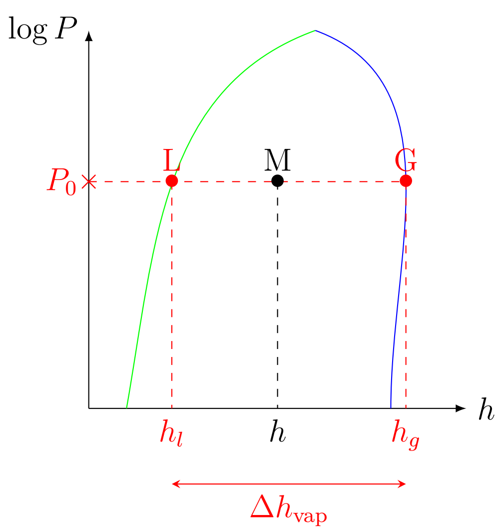

FIGURE 6.10 – Théorème des moments pour le titre massique en vapeur.

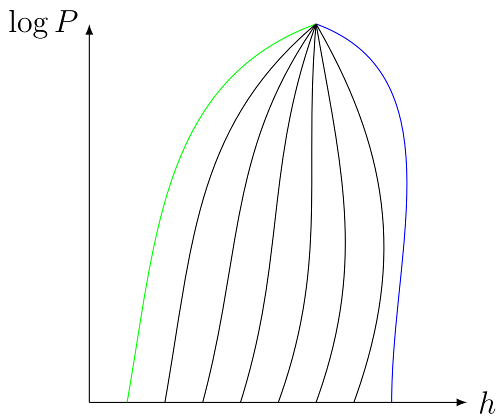

FIGURE 6.11 – Isotitres massique en vapeur pour le diagramme $(\log P, h)$.

en utilisant le fait que l'enthalpie est une fonction extensive. Ainsi,

$$\boxed{h(T_{\text{eq}}, x) = h(P_0, x) = xh_g(P_0) + (1-x)h_l(P_0).}$$

Ainsi, en M, on a

$$\boxed{x = \frac{h - h_l}{h_g - h_l} = \frac{LM}{LG}.}$$

C'est le **théorème des moments**. Les courbes isotitres sont représentées à la Figure 6.11.

Les différents réseaux de courbes

- Isobares : horizontales (bar) ;
- Isenthalpiques : verticales ($\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$) ;
- Isothermes (°C) :
  - horizontales dans la zone $((l) \leftrightarrows (g))$;
  - environ verticales dans la zone (l), car

    $$\mathrm{d}h_l = c\mathrm{d}T,$$

    donc $h_l(T)$;
  - environ verticales à basse pression et pas trop près de la courbe de saturation car, dans ce cas, c'est environ un gaz parfait et la deuxième loi de Joule pour les gaz parfaits implique $h_g(T)$.

— isochores : courbes croissantes (avec rupture de pente sur la courbe de rosée) $\mathrm{m^3\,kg^{-1}}$;

— isentropiques : courbes croissantes sans rupture de pente $\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, environ verticales dans la zone (l) car

$$s_l = C_{p,m} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0.$$

Intérêt pour les écoulements permanents

Un fluide en écoulement permanent a une variation d'enthalpie massique égale à

$$\Delta h = \omega_i + q.$$

Exemple 6.2. Pour un compresseur isentropique, on a $\Delta h = \omega_i$: la transition suit une courbe isenthalpique croissante car $\omega_i > 0$.

Exemple 6.3. Pour une chaudière, on a $\Delta h = q$: la transition suit une transition isobare (courbe horizontale) de gauche à droite car $q > 0$.

6.2.2 Exemple : cycle moteur à vapeur d'une centrale électrique

La combustion du carbone ou la fission nucléaire introduit un transfert thermique (chaudière) qui crée un travail mécanique (turbine). Le **cycle de Rankine** est présenté à la Figure 6.12.

On donne $P_1 = P_4 = 0{,}2$ bar, $P_2 = P_3 = 10$ bar, $T_3 = 340$ °C. L'eau est en écoulement permanent donc

$$\Delta h + \Delta\left(\frac{v^2}{2} + gz\right) = \omega_i + q.$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta h &\sim 100\ \mathrm{kJ\,kg^{-1}},\\
\Delta e_c = \frac{v^2}{2} - 0 &\sim 1000\ \mathrm{kJ\,kg^{-1}},\\
v &\sim 1400\ \mathrm{m\,s^{-1}},\\
\Delta(gz) &\sim 10\Delta z,\\
\Delta z &\sim 100\ \mathrm{km}.
\end{aligned}$$

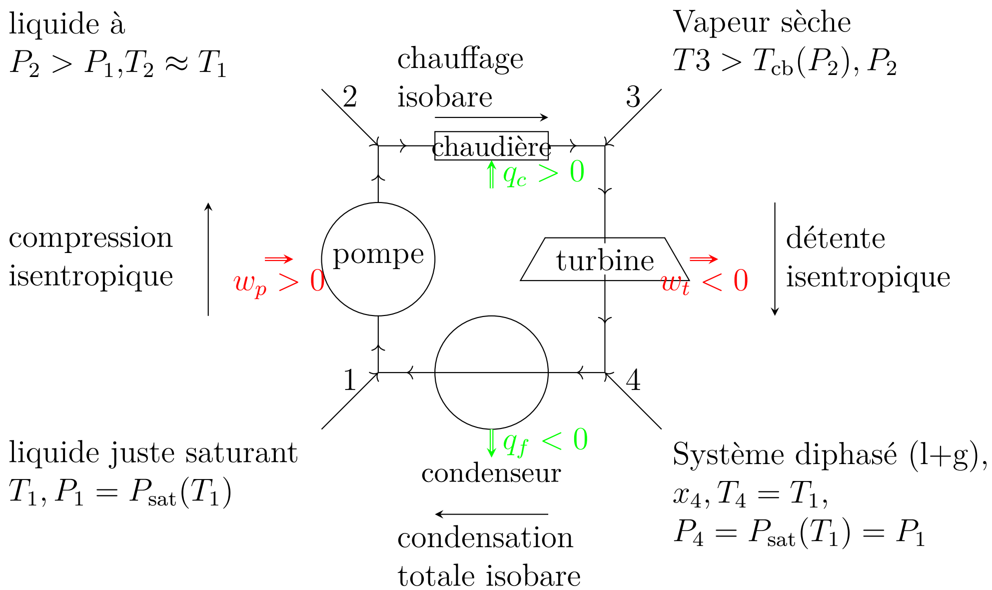

FIGURE 6.12 – Cycle de Rankine pour une centrale électrique.

Ainsi, $\Delta e_c \ll \Delta h$ et $\Delta(gz) \ll \Delta h$. Ainsi,

$$\boxed{\Delta h = \omega_i + q.}$$

— Pompe : $\omega_p = h_2 - h_1, s_2 = s_1$;

— Chaudière : $q_c = h_3 - h_2, s_3 - s_2 > s_e > 0$, et $s_e \neq q_c/T_3$ (car il n'y a pas qu'un changement d'état) ;

— Turbine : $\omega_t = h_4 - h_3, s_4 = s_3$;

— $q_f = h_1 - h_4, s_1 - s_4 = s_e + s_c = s_e = q_f/T_1$ car c'est un changement d'état.

Le rendement est donné par

$$\eta = \left|\frac{\text{grandeur désirée}}{\text{grandeur coûteuse}}\right|,$$
$$= \frac{-\omega_t - \omega_p}{q_c}.$$

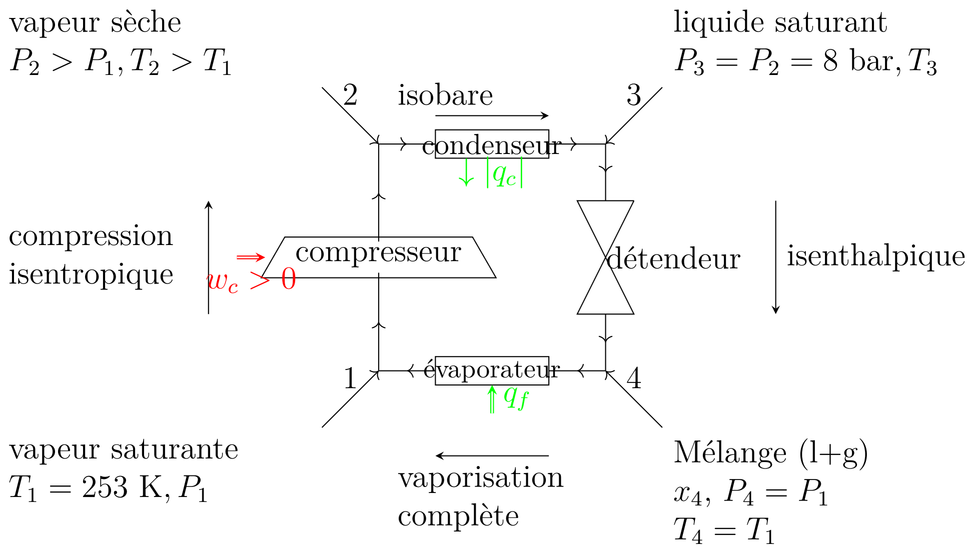

FIGURE 6.13 – Cycle d'un réfrigérateur à compresseur.

On a typiquement

$$\omega_p \sim 15 \text{ kJ kg}^{-1},$$
$$q_c \sim 2800 \text{ kJ kg}^{-1},$$
$$\omega_t \sim -750 \text{kJ kg}^{-1},$$
$$q_f \sim -2000 \text{ kJ kg}^{-1}.$$

Donc

$$\boxed{\eta \approx \frac{-\omega_t}{q_c} = \approx 0.26.}$$

Notons que pour un moteur de Carnot entre T_1 et T_3 (60 °C et 340 °C), on a (température en K)

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0.46.$$

6.2.3 Réfrigérateur à compresseur

Le cycle est donné à la Figure 6.13.

On donne $P_1 = 1,3$ bar et $T_3 = 31$ °C. Le premier principe donne (données dans une annexe) :

— Compression : $\omega_c = h_2 - h_1 = 40$ kJ kg^{-1} ;
— Condenseur : $q_c = -180$ kJ kg^{-1} ;
— Détendeur : $h_4 = h_3$;
— Évaporateur : $q_f = h_1 - h_4 = 140$ kJ kg^{-1}.

Le deuxième principe donne :

— Compression : $s_2 = s_1$;
— Condenseur : $s_3 - s_2 = s_{\text{ech}} + s_{\text{cr}} > q_c/T_3$;
— Détendeur : $s_4 - s_3 = 0 + s_{\text{cr}} > 0$ donc $s_4 > s_3$;
— Évaporateur : $s_4 - s_1 \geqslant q_f/T_c$.

Le coefficient de performance est

$$\text{COP} = \frac{q_f}{\omega_c} \approx 3.5.$$

Le cycle de Carnot donne

$$\text{COP} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 5.6,$$

avec $T_c = 25$ °C et $T_f = T_1 = -20$ °C.

Chapitre 7

Transferts thermiques par diffusion thermique

Sommaire

7.1 Phénoménologie des différents modes de transfert thermique

7.1.1 Les trois modes de transfert thermique

Conduction thermique

C'est un transfert thermique des zones les plus chaudes vers les plus froides **sans mouvement macroscopique du milieu**. C'est le seul transfert thermique possible dans **un solide opaque**. La Figure 7.1 donne un exemple.

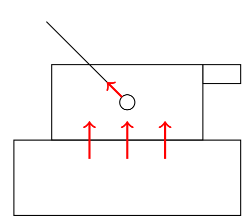

FIGURE 7.1 – Exemple d'un transfert thermique par conduction : casserole sur une plaque à induction avec une cuillère.

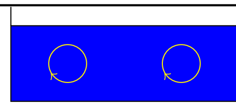

FIGURE 7.2 – Exemple d'un transfert thermique par convection : mouvements naturels dans un bassin d'eau chaude.

Convection thermique

C'est un transfert thermique dû aux mouvement macroscopique du milieu. C'est le transfert dominant **dans les fluides**, il peut être forcé ou naturel. La Figure 7.2 donne un exemple.

Rayonnement thermique

Tout corps opaque chauffé à une température T rayonne une puissance surfacique

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} \propto T^4.$$

Un exemple est le rayonnement électromagnétique. Le rayonnement se propage dans un milieu transparent (notamment dans le vide).

Exemple 7.1 (Chauffage central)*.* La pompe électrique implique une convection forcée dans le circuit. Le radiateur implique une conduction à travers la paroi, un rayonnement thermique et une convection naturelle du sol vers le plafond.

Exemple 7.2 (Feu de cheminée)*.* L'écran de verre stoppe le rayonnement.

7.1.2 Le flux thermique surfacique

On considère une section infinitésimale dS avec une normale extérieure $\vec{n}$ et une quantité de chaleur δQ qui passe à travers cette surface, voir la Figure 7.3.

Définition 7.1 (Puissance thermique et flux thermique surfacique)**.** On définit **la puissance thermique** par

$$P_{\mathrm{th}} = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t},$$

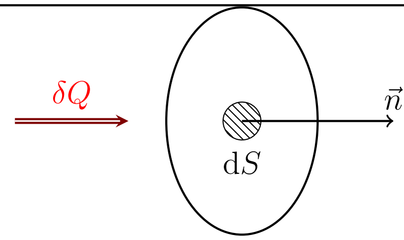

FIGURE 7.3 – Définition du flux thermique surfacique.

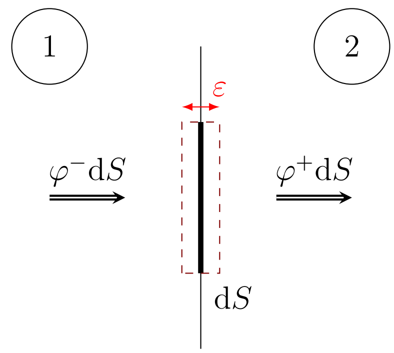

FIGURE 7.4 – Continuité du flux thermique surfacique.

qui est une quantité algébrique : si le transfert se fait selon $\vec{n}$, alors P_{th}, et sinon $P_{\mathrm{th}} < 0$. ON a P_{th} et on définit donc **le flux thermique surfacique** φ par

$$\boxed{P_{\mathrm{th}} = \iint_S \varphi \, \mathrm{d}S.}$$

L'unité de φ est $\mathrm{W\,m^{-2}}$.

7.1.3 Continuité du flux surfacique

On considère le système présenté à la Figure 7.4.

Le principe de la thermodynamique sur le tube de volume $\varepsilon \mathrm{d}S$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \varphi^{-}\mathrm{d}S - \varphi^{+}\mathrm{d}S.$$

Si $\varepsilon \to 0$, on a $U \to 0$ donc $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \to 0$. Ainsi, $\varphi^{-} = \varphi^{+}$: le flux surfacique est continu.

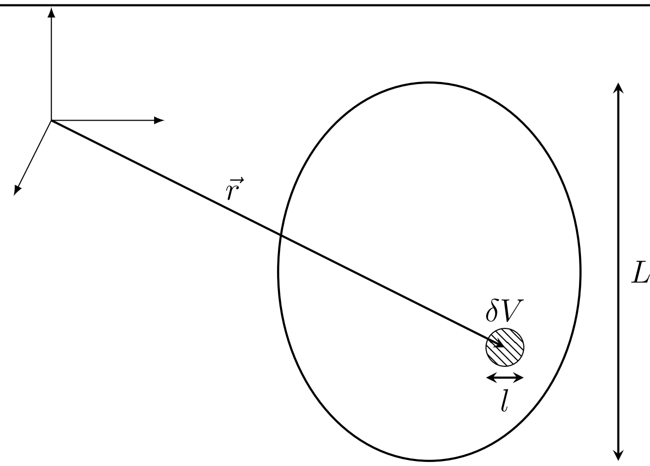

Figure 7.5 – Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.

7.1.4 Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (ETL)

S'il existe un transfert thermique, le système est hors d'équilibre. Dans ce cas, « la » température du système n'est pas définie à l'échelle macroscopique. À l'échelle microscopique, on fait donc l'hypothèse de l'ETL. Si d est la distance typique microscopique, l est la distance typique mésoscopique et L la distance typique macroscopique, alors

— $d \ll l$: on fait un traitement statistique,

— $l \ll L$: la description est locale,

voir la Figure 7.5.

On définit $T(\vec{r}, t)$ **la** température du volume mésoscopique δV à l'instant t. Ainsi, à l'échelle mésoscopique, on a l'hypothèse ETL, et à l'échelle macroscopique, il persiste un déséquilibre.

7.2 Conduction/Diffusion thermique

7.2.1 Vecteur densité de courant thermique

On modélise le caractère directionnel du flux thermique surfacique φ par un vecteur densité de courant thermique, voir la Figure 7.6.

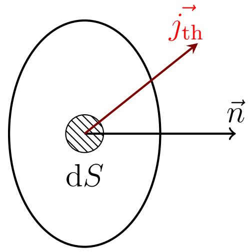

FIGURE 7.6 – Définition du vecteur densité de courant thermique.

Définition 7.2 (Vecteur densité de courant thermique)**.** On définit le **vecteur densité de courant thermique** par la formule

$$\varphi = \vec{j_{\text{th}}} \cdot \vec{n}.$$

Ainsi, la puissance thermique est

$$\boxed{P_{\text{th}} = \iint_S \vec{j_{\text{th}}} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S.}$$

L'unité de $\vec{j_{\text{th}}}$ est $\mathrm{W\,m^{-2}}$.

7.2.2 Loi empirique de Fourier

On se demande quel est le lien entre $\vec{j_{\text{th}}}$ et l'inhomogénéité de température T. On observe que

— si T est uniforme ($\overrightarrow{\text{grad}}\, T = \vec{0}$), il y a un équilibre thermodynamique. Donc $\vec{j_{\text{th}}} = \vec{0}$ en tout point : pas de travail thermique.

— Si le système est hors d'équilibre, la température est non uniforme ($\overrightarrow{\text{grad}}\, T \neq \vec{0}$), il y a un transfert thermique des zones les plus chaudes vers les plus froides.

La loi de Fourier s'écrit

$$\boxed{\vec{j_{\text{th}}}(\vec{r}, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T(\vec{r}, t).}$$

λ est la **conductivité thermique**. Son unité est $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Remarque 7.1. — En régime permanent dans le cas de l'électrostatique, on a

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}}\, V.$$

		λ ($\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$)
Métaux	Cuivre	400
	Acier	15
Non métaux	Verre	1
	Béton	0.9
	Bois	0.2
Liquides	Eau	0.6
Gaz	Air	0.02

Table 7.1 – Quelques valeurs de référence pour la conductivité thermique.

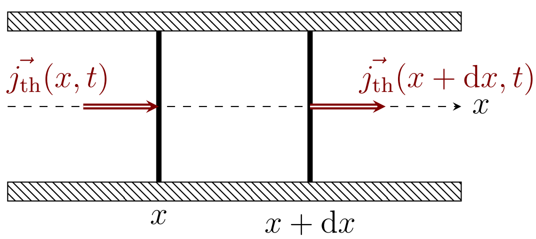

Figure 7.7 – Équation locale de la conservation de l'énergie, cas unidimensionnel en géométrie cartésienne.

— L'expression est valable que si T varie assez lentement dans le temps et dans l'espace.

On donne quelques ordres de grandeurs de λ dans la Table 7.1.

On note que les métaux sont de bons conducteurs, et dans ce cas on a $\lambda/\sigma \approx$ constante : ce sont les électrons de conduction qui s'occupent du travail. Les gaz sont quant à eux de très bons isolants (tout comme les matériaux poreux).

7.2.3 Équation locale de la conservation de l'énergie

Cas 1D en géométrie cartésienne

On fait l'hypothèse que la température dépend de la position x et de l'instant t, et que $\vec{j}_{\mathrm{th}} = j_{\mathrm{th}}\vec{u}_x$, voir la Figure 7.7.

Bilan énergétique sur $[x, x + \mathrm{d}x]$**.** On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,(\delta U) &= \delta U(t + \mathrm{d}t) - \delta U(t), \\
&= \delta Q^{\mathrm{ext}}, \\
&= j_{\mathrm{th}}(x,t)S\mathrm{d}t - j_{\mathrm{th}}(x + \mathrm{d}x, t)S\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\frac{\mathrm{d}\,(\delta U)}{\mathrm{d}t} = S\left(j_{\mathrm{th}}(x,t) - j_{\mathrm{th}}(x + \mathrm{d}x, t)\right) \approx -S\mathrm{d}x \frac{\partial j_{\mathrm{th}}(x,t)}{\partial x}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta U\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta m c T(x,t)\right), \\
&= \delta m c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t), \\
&= \mu c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) S \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

où [c]=J kg^{-1} K^{-1} et on a utilisé le fait que l'on considérait une phase condensée. Ainsi,

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\mathrm{th}}}{\partial x} = 0.}$$

Géométrie cylindrique

On fait l'hypothèse que la température $T(r,t)$ dépend juste du rayon r et du temps t, et que $\vec{j_{\mathrm{th}}} = j_{\mathrm{th}}(r,t)\vec{u_r}$, voir la Figure 7.8.

On a, via un développement limité de $r j_{\mathrm{th}}(r,t)$,

$$\delta P_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ext}} = j_{\mathrm{th}}(r,t) \times 2\pi r L - j_{\mathrm{th}}(r + \mathrm{d}r, t) \times 2\pi (r + \mathrm{d}r) L = -2\pi L \mathrm{d}r \frac{\partial}{\partial r}\left(r j_{\mathrm{th}}(r,t)\right).$$

Le premier principe s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta U) = \delta P_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ext}} = -2\pi L \mathrm{d}r \frac{\partial}{\partial r}\left(r j_{\mathrm{th}}(r,t)\right) = u_{\mathrm{vol}}(r,t) \times 2\pi r \mathrm{d}r L.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\frac{\partial u_{\mathrm{vol}}(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r j_{\mathrm{th}}(r,t)\right) = 0.}$$

En phase condensée, on a $\dfrac{\partial u_{\mathrm{vol}}(r,t)}{\partial t} = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t}$, où [c]=J kg^{-1} K^{-1}.

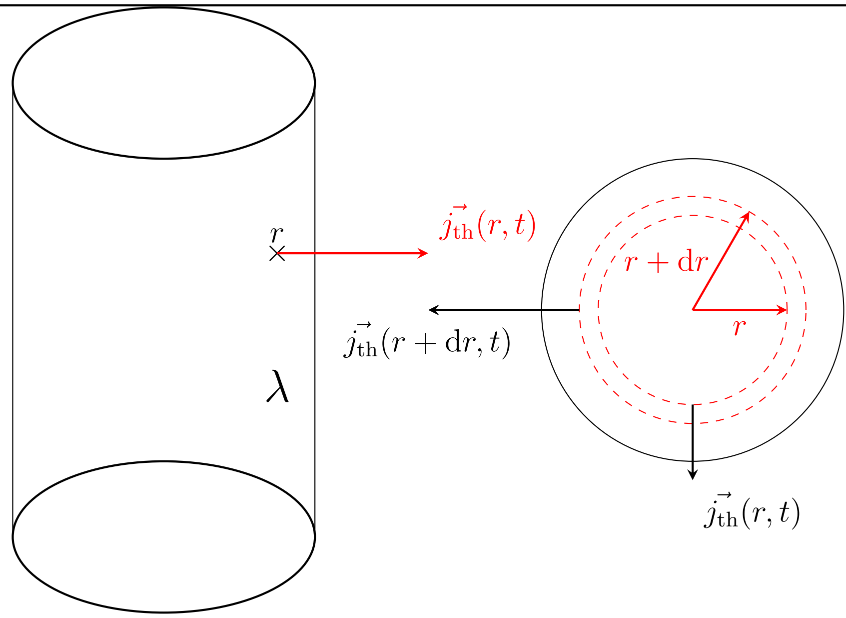

FIGURE 7.8 – Équation locale de la conservation de l'énergie en géométrie cylindrique.

Géométrie sphérique

On fait l'hypothèse que la température $T(r,t)$ dépend juste du rayon r et du temps t, et que $\vec{j_{\mathrm{th}}} = j_{\mathrm{th}}(r,t)\vec{u_r}$, voir la Figure 7.9. On considère l'espace entre deux sphères de rayon r et $r + \mathrm{d}r$.

En effectuant un développement deTaylor de $r^2 j_{\mathrm{th}}(r,t)$, on a

$$\begin{aligned}\delta P_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ext}} &= j_{\mathrm{th}}(r,t) \times 4\pi r^2 - j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t) \times 4\pi(r+\mathrm{d}r)^2,\\ &= -4\pi \mathrm{d}r \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_{\mathrm{th}}(r,t)\right).\end{aligned}$$

Le premier principe s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}(\delta U)}{\mathrm{d}t} = \delta P_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ext}} = 4\pi r^2 \mathrm{d}r \frac{\partial u_{\mathrm{vol}}}{\partial t},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u_{\mathrm{vol}}}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_{\mathrm{th}}(r,t)\right) = 0.}$$

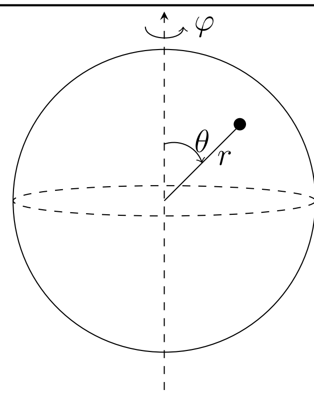

FIGURE 7.9 – Équation locale de la conservation de l'énergie en géométrie sphérique.

Généralisation en 3D dans une géométrie quelconque

Dans un volume $\mathcal{V}$ quelconque, on écrit

$$U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{\mathrm{vol}}(\vec{r}, t)\mathrm{d}\tau,$$
$$U(t + \mathrm{d}t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{\mathrm{vol}}(\vec{r}, t + \mathrm{d}t)\mathrm{d}\tau,$$

où $\mathrm{d}\tau$ est un volume infinitésimal. Alors

$$\mathrm{d}U = U(t + \mathrm{d}t) - U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{\mathrm{vol}}}{\partial t}(\vec{r}, t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau.$$

On fait l'hypothèse que l'on peut « sortir » le terme dt de l'intégrale. On écrit

$$P_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ext}} = -\oiint_S \vec{j}_{\mathrm{th}} \cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}S,$$

car il y a une perte si $\vec{j}_{\mathrm{th}} \cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}} > 0$. Le premier principe s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = P_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ext}},$$

et en utilisant le théorème d'Ostrogradski,

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{\mathrm{vol}}(\vec{r}, t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau = -\oiint_S \vec{j}_{\mathrm{th}} \cdot \vec{n}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}S = -\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\ \vec{j}_{\mathrm{th}}(\vec{r}, t)\mathrm{d}\tau.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\frac{\partial u_{\mathrm{vol}}}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{j}_{\mathrm{th}} = 0.}$$

Généralisation avec terme source

En plus de la conduction thermique, on a un apport énergétique en volume.

Exemple 7.3. L'effet Joule ajoute une puissance dû au travail électrique

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} > 0.$$

Exemple 7.4. L'énergie dégagée par une réaction chimique exothermique rajoute une puissance

$$P_{\text{vol}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \Delta_r H^0 \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

On adapte donc le bilan précédent en écrivant

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = P_{\text{th}}^{\text{ext}} + \iiint_{\mathcal{V}} P_{\text{vol}}(\vec{r}, t) \mathrm{d}\tau,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}}.}$$

Exemple 7.5. Dans le cas de l'effet Joule, on a

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} > 0.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E} < 0.$$

Cela caractérise le changement de point de vue champ/conducteur.

7.2.4 Équation de la chaleur/diffusion thermique

On fait l'hypothèse qu'il n'y a que de la conduction pure. L'idée est que l'on a deux ingrédients : la loi de Fourier, et l'équation locale de la conservation de l'énergie. On peut donc combiner les choses pour obtenir l'équation de la chaleur.

Cas 1D en géométrie cartésienne

On a

$$\vec{j}_{\mathrm{th}}(x,t) = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\vec{u_x},$$

et

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\mathrm{th}}}{\partial x} = 0.$$

Ainsi, en posant

$$\boxed{D = \frac{\lambda}{\mu c},}$$

le coefficient de diffusion thermique, on a

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.}$$

L'unité de D est le $\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Géométrie cylindrique

On écrit

$$\vec{j}_{\mathrm{th}}(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\vec{u_r},$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r j_{\mathrm{th}}(\vec{r},t)\right) = 0,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(r \frac{\partial T}{\partial t}\right).}$$

Géométrie sphérique

On écrit

$$\vec{j}_{\mathrm{th}}(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\vec{u_r},$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_{\mathrm{th}}(\vec{r},t)\right) = 0,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial t}\right).}$$

Géométrie quelconque

On écrit

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \vec{\text{div}}\, T,$$
$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}\, \vec{j}_{\text{th}} = 0,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T.}$$

Avec terme source

C'est la même chose sauf que l'on a

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}\, \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T + \frac{P_{\text{vol}}}{\mu c}.}$$

7.2.5 Création d'entropie par diffusion

On se place dans le cas unidimensionnel et que l'on est en régime stationnaire. On a donc $T(x)$ et $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u_x}$. On fait l'hypothèse que l'on a $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} < 0$. On reprend la Figure 7.7 et on applique le second principe à $[x, x + \mathrm{d}x]$, on a

$$\mathrm{d}(\delta S) = \delta S_e + \delta S_c,$$

pendant $\mathrm{d}t$. Comme on est en régime stationnaire, on a $\mathrm{d}(\delta S) = 0$. Ainsi, $\delta S_c = -\delta S_c$. Or, en notant A la section verticale, on a

$$\delta S_e = \frac{j_{\text{th}}(x) A \mathrm{d}t}{T(x)} + \frac{-j_{\text{th}}(x + \mathrm{d}x) A \mathrm{d}t}{T(x + \mathrm{d}x)}.$$

On est en régime permanent, on a donc

$$\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} = 0 = -\text{div}\, \vec{j}_{\text{th}} = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = 0.$$

Donc

$$j_{\text{th}}(x) = \text{constante} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}.$$

On a alors

$$\delta S_e = j_{\text{th}} A \mathrm{d}t \left[\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T(x+\mathrm{d}x)} \right] = A \mathrm{d}t \left(-\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x \frac{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}}{T(x)^2},$$

donc $\delta S_e = -\delta S_c < 0$, et ce peu importe le signe de $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$. Ainsi, $\delta S_c > 0$: **c'est le caractère fondamentalement irréversible des phénomènes de diffusion**.

7.3 Propriétés de l'équation de diffusion

7.3.1 Linéarité

On a le théorème de superposition. Une analyse harmonique est donc possible.

7.3.2 Irréversibilité

Soit un processus diffusif décrit par $T(x,t)$ vérifiant

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Posons $t' = -t$. Soit $\widetilde{T}(t',x) = T(-t,x)$. Alors

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t'} = \frac{\partial T}{\partial(-t)} = -\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t'} = -D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Ce n'est donc pas une équation de diffusion.

7.3.3 Échelles de temps et de distance de diffusion

On se demande quelle est la durée typique τ du phénomène de diffusion sur une distance L.

— Réponse 1 : un seul paramètre dimensionnel dans l'équation de propagation. On cherche $\tau = f(L, D)$ si et seulement si $\tau = \text{constante} \times L^\alpha D^\beta$, d'où $\beta = -1$ et $\alpha = 2$ par analyse dimensionnelle. Donc

$$\boxed{\tau \approx \frac{L^2}{D}.}$$

— Réponse 2 : équation de la chaleur adimensionnelle. On note T_0 la température caractéristique du problème. On note $T^\star(x, t) = T(x, t)/T_0$, $x^\star = x/L$ et $t^\star = t/\tau$. Alors

$$\frac{\partial T^\star}{\partial t^\star} = \frac{D\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T^\star}{\partial^2 x^{\star 2}}.$$

Si les échelles τ et L sont adaptées, on a

$$\frac{\partial^2 T^\star}{\partial x^{\star 2}} \approx \frac{\partial T^\star}{\partial t^\star},$$

et donc

$$\boxed{\tau \approx \frac{L^2}{D}.}$$

Nombre de Fourier

On note le **nombre de Fourier**

$$F_0(t) \coloneqq \frac{t}{\tau} = \frac{Dt}{L^2}.$$

Ainsi,

— Si $F_0 \ll 1$, on a $t \ll \tau$: le phénomène de diffusion thermique est trop lent pour avoir lieu. On est dans l'hypothèse adiabatique.

— Si $F_0 \gg 1$, on a $t \gg \tau$: la diffusion est quasi instantanée.

7.3.4 Conditions initiales. Conditions aux limites

En 1D, l'équation aux dérivées partielles et du premier ordre par rapport à t et du second ordre par rapport à x : il y a donc une condition initiale et deux conditions aux limites. Par exemple, $T(x, 0) = T_0(x)$ pour tout x et $T(0, t) = T_1$, $T(L, t) = T_2$ pour tout t.

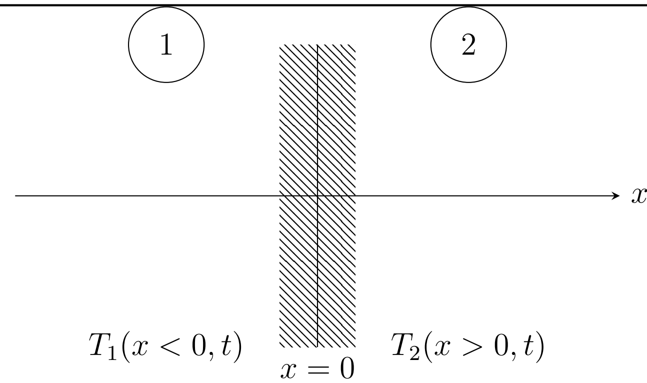

Figure 7.10 – Exemple de conditions aux limites pour la diffusion thermique.

7.3.5 Exemple de conditions aux limites : contact thermique parfait entre deux solides

On considère la Figure 7.10.

La continuité du flux thermique s'écrit $j_{\text{th}}(x = 0^-, t) = j_{\text{th}}(x = 0^+, t)$, donc

$$\boxed{-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0^-, t) = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0^+, t).}$$

Le contact thermique parfait impose la continuité de la température T. Ainsi,

$$\boxed{T_1(0^-, t) = T_2(0^+, t).}$$

7.3.6 Exemple de résolution numérique de l'équation de la diffusion

Problème bidimensionnel en régime permanent

$T(x, y)$ est régit par $\Delta T = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Avec une discrétisation donnée par la Figure 7.11.

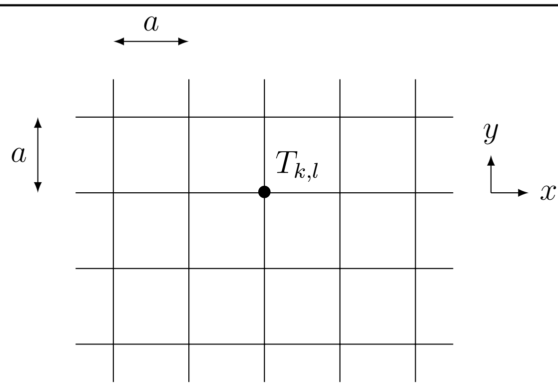

FIGURE 7.11 – Discrétisation de l'équation diffusion bidimensionnelle.

On écrit

$$T(x \pm a, y) = T(x, y) \pm a\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pm a^3\frac{\partial^3 T}{\partial^3 x} + \mathcal{O}(a^4),$$
$$T(x, y \pm a) = T(x, y) \pm a\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \pm a^3\frac{\partial^3 T}{\partial^3 y} + \mathcal{O}(a^4).$$

Ainsi,

$$\boxed{T_{k+1,l} + T_{k-1,l} + T_{k,l+1} + T_{k,l-1} = 4T_{k,l} + \mathcal{O}(a^4).}$$

7.4 Phénomène de conducto-convection présent à l'interface d'un solide et d'un fluide

7.4.1 Transfert conducto-convectif : loi de Newton empirique

Flux surfacique conducto-convectif

On fait l'hypothèse que le fluide est brassé par convection : T_f est uniforme, voir la Figure 7.12.

Le flux surfacique conducto-convectif est proportionnel à $T_s - T_f$. La loi de Newton s'écrit dans ce cas

$$\boxed{\varphi_{cc} = h\left(T_s - T_f\right).}$$

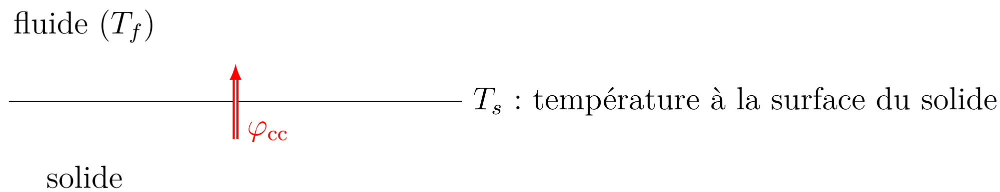

FIGURE 7.12 – Flux surfacique conducto-convectif.

L'unité de φ_{cc} est $\mathrm{W\,m^{-1}}$ et est orienté du solide vers le fluide. Le facteur h est le coefficient de transfert conducto-convectif d'unité $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}$. Ainsi,

$$\boxed{P_{s\to f} = \varphi_{cc} \times S = hS\left(T_s - T_f\right).}$$

Ordre de grandeur. Pour le gaz, $h \sim 5$ à $30\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}$, pour le liquide, $h \sim 400$ à $10000\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}$, les deux pour la convection naturelle. Si le convection est forcée, on a un rapport

$$\frac{h_{\text{forcée}}}{h_{\text{naturelle}}} \sim 10 \text{ à } 50.$$

Interprétation

Lors d'un écoulement fluide, il y a deux zones : une proche du sol, dite « couche limite ». L'autre est lointaine, c'est l'écoulement extérieur. Alors

$$\varphi_{cc} = j_{\text{th},C.L} = -\lambda_f \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{fluide}} \approx -\lambda_f \frac{T_f - T_s}{\delta},$$

où $\delta \ll$ taille macroscopique de l'écoulement (taille de la couche limite). Dans la couche limite, le transfert thermique (pas dû à la convection mais à la conduction thermique dans la couche limite) a lieu perpendiculairement aux mouvement du fluide. Donc

$$\varphi_{cc} \approx \frac{\lambda_f}{\delta}\left(T_s - T_f\right),$$

d'où

$$\boxed{h = \frac{\lambda_f}{\delta}.}$$

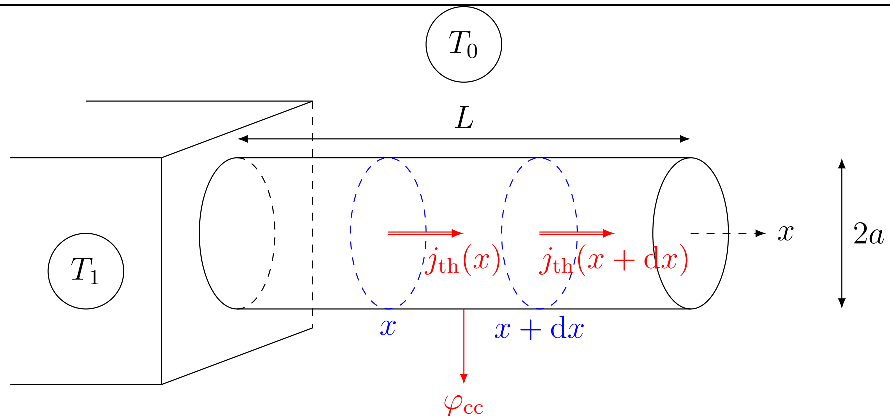

FIGURE 7.13 – Application du flux conducto-convectif : ailette de refroidissement.

Comme $h \propto \lambda_f$, on a

$$\boxed{h_{\text{liquide}} \gg h_{\text{gaz}}.}$$

Comme $h \propto 1/\delta$, et δ diminue si le brassage augmente, on a

$$\boxed{h_{\text{forcée}} \gg h_{\text{naturelle}}.}$$

7.4.2 Application : ailette de refroidissement

On considère le système présent à la Figure 7.13. On fait l'hypothèse que l'on est en régime stationnaire, que le problème est unidimensionnel (T ne dépend que de x), et que la longueur de l'ailette est « infinie ».

Profil $T(x)$

On ne peut pas utiliser l'équation de la chaleur, il faut passer par un bilan d'énergie local sur $[x, x+\mathrm{d}x]$. En régime permanent, on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,(\delta U)}{\mathrm{d}t} &= 0,\\ &= P_{\text{th}}^{\text{ext}},\\ &= j_{\text{th}}(x)\pi a^2 - j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x)\pi a^2 - h(T(x)-T_0)2\pi a \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\pi a^2 \frac{\partial j_{\mathrm{th}}}{\partial x} \mathrm{d}x + h(T(x) - T_0) = 0.$$

On pose $\theta(x) = T(x) - T_0$, et $\delta \coloneqq \sqrt{\frac{a\lambda}{2h}}$, et on obtient

$$\theta(x) = \alpha \mathrm{e}^{-x/\delta} + \beta \mathrm{e}^{x/\delta}.$$

On a $\beta = 0$ car θ est fini en $+\infty$, et $\theta(0) = T_1 - T_0 = \alpha$. Finalement,

$$\boxed{T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)\mathrm{e}^{-x/\delta}.}$$

Notons que si l'ailette est « finie », c'est-à-dire $L \sim \delta$, la condition au limite est alors donnée par la **continuité du flux en** $x = L$, c'est-à-dire

$$\varphi_{\mathrm{cc}}(L) = j_{\mathrm{th}}(L),$$

soit

$$\boxed{h(T(L) - T_0) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_L.}$$

Efficacité

Sans l'ailette, la puissance thermique est $P_{\mathrm{sans}} = h(T_1 - T_0)S$, et la puissance avec l'ailette est $P_{\mathrm{avec}} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 S$. Ainsi, l'efficacité est

$$\begin{aligned}
\eta \coloneqq &= \frac{P_{\mathrm{avec}}}{P_{\mathrm{sans}}}, \\
&= \frac{\lambda \left(\frac{T_1 - T_0}{\delta}\right) S}{h(T_1 - T_0)S}, \\
&= \frac{\lambda}{\delta h} = \sqrt{\frac{2\lambda}{ah}}.
\end{aligned}$$

On a $\eta \sim 30$ pour $\lambda \approx 100\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, $h \approx 10\mathrm{W\,m^{-1}}$ et $a \approx 2.10^{-2}\mathrm{m}$.

7.4.3 Nombre de Biot : conduction versus conducto-convection

Validité de l'hypothèse de l'ailette

L'hypothèse de l'ailette est que la température est uniforme sur une section. Si T n'est pas uniforme sur une section, on décompose le flux $\vec{j}_{\mathrm{th}} = \vec{j}_{\mathrm{th},\perp} + \vec{j}_{\mathrm{th},\parallel}$ en ses composantes selon l'ailette (l'axe x) et selon l'axe perpendiculaire. Ainsi, si

$$\frac{\left\|\vec{j}_{\mathrm{th},\perp}\right\|}{\left\|\vec{j}_{\mathrm{th},\parallel}\right\|} \ll 1,$$

alors l'approximation de l'ailette est bonne. Par continuité du flux, on a

$$\left\|\vec{j}_{\mathrm{th},\perp}\right\| = \varphi_{\mathrm{cc}} = h(T_S(x) - T_0),$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\left\|\vec{j}_{\mathrm{th},\perp}\right\|}{\left\|\vec{j}_{\mathrm{th},\parallel}\right\|} &\approx \frac{h(T(x) - T_0)}{-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}},\\ &= \frac{h(T_1 - T_0)\mathrm{e}^{-x/\delta}}{\frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_0)\mathrm{e}^{-x/\delta}},\\ &= \frac{h\delta}{\lambda} = \sqrt{\frac{ah}{2\lambda}} \sim 10^{-2} \ll 1.\end{aligned}$$

Nombre de Biot

On note

$$\boxed{B_i \coloneqq \left(\frac{\varphi_{\mathrm{cc},\perp}}{j_{\mathrm{th},\parallel}}\right)^2 = \frac{ah}{2\lambda} \approx \frac{ah}{\lambda}.}$$

Si $B_i \ll 1$, l'hypothèse de l'ailette est bonne. Le milieu thermique est mince, et c'est à favoriser pour augmenter l'efficacité η. Si $B_i \gg 1$, l'hypothèse de l'ailette est mauvaise : le milieu thermique est épais.

	thermique	électricité
Grandeur transportée	énergie [J]	charge [C]
Vecteur densité de courant	$\vec{j}_{\text{th}}$ [W m^{-1}]	$\vec{j}$ [A m^{-1}]
Flux	$P_{\text{th}} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} d\vec{S}$ [W]	$i = \iint_S \vec{j} d\vec{S}$ [A]
Équation locale de conservation de l'énergie en régime permanent	div $\vec{j}_{\text{th}} = 0$	div $\vec{j} = 0$
Loi de transport linéaire	$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\ T$ [Fourier]	$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}}\ V$ [Ohm]
Conductivité	λ [W m^{-1} K^{-1}]	σ [Ω^{-1} m^{-1}]
Équation locale (en régime permanent)	$\Delta T = 0$	$\Delta V = 0$

Table 7.2 – Analogie entre conduction thermique et électrique en régime permanent.

7.5 Conductance et résistance thermique en régime permanent

7.5.1 Analogie conduction thermique et électrique en régime permanent

On donne à la Table 7.2 une comparaison entre les grandeurs et les lois apparaissant dans les phénomènes de conduction thermique et de conduction électricité.

Notons que l'on a le théorème d'unicité des solutions de $\Delta f = 0$ pour une géométrie et des conditions aux limites données. On peut donc transposer des solutions d'un domaine à l'autre.

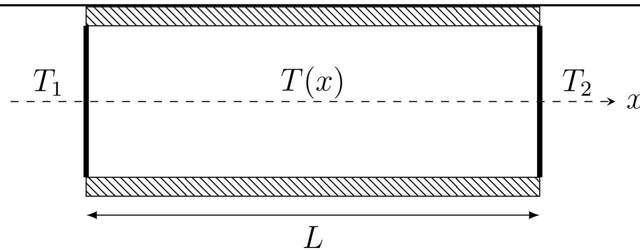

FIGURE 7.14 – Profil de température d'un système unidimensionnel pour établir l'expression de la résistance thermique.

7.5.2 Résistance thermique conductive en une dimension

Profil $T(x)$ en une dimension par conduction pure

On considère le système donnée à la Figure 7.14.

On a $\Delta T = 0 = \dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}$, donc $T(x) = \alpha + \beta x$. Avec les conditions aux limites, on a donc

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x.$$

Notons que l'on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T = \dfrac{T_2 - T_1}{L} \vec{u_x} = \overrightarrow{\mathrm{constance}}$.

Résistance thermique

Pour la conduction thermique, on a $R = \dfrac{U}{I}$. Ainsi, pour la conduction thermique, on devrait avoir une expression du type

$$\frac{T_2 - T_1}{R_{\mathrm{th}}} = \ldots$$

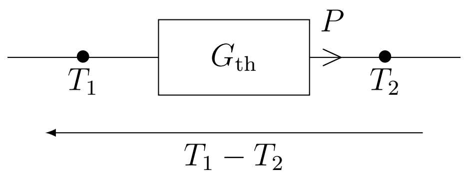

FIGURE 7.15 – Schéma équivalent pour la résistance/conductance thermique.

On a

$$\begin{aligned} P_{\text{th}} &= \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}, \\ &= -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S, \\ &= \frac{\lambda (T_1 - T_2) S}{L}, \\ &= \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{\lambda S}{L}.}$$

On a donc le schéma équivalent donné à la Figure 7.15.
C'est la même chose pour une géométrie cylindrique ou sphérique.

7.5.3 Résistance thermique conducto-convective

On reprend le système décrit à la Figure 7.12. On a

$$P_{\text{th}}^{\text{cc}} = \varphi_{\text{cc}} S = h(T_s - T_f) = hS(T_s - T_f),$$

soit

$$\boxed{G_{\text{cc}} = \frac{1}{R_{\text{cc}}} = hS.}$$

7.5.4 Association en série : résistance « multicouche »

On prend l'exemple d'um mur comprenant une couche de plâtre, d'isolant puis de pierre, voir la Figure 7.16.

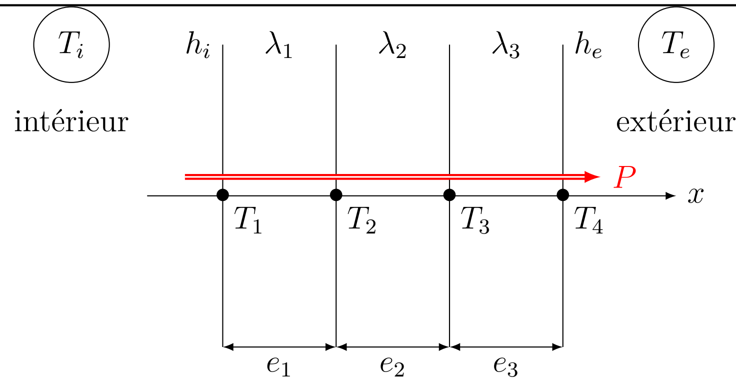

FIGURE 7.16 – Exemple d'association de résistances en série : cas d'un mur.

La même puissance P traverse toutes les couches : **elles sont montées en série**. On a alors

$$\begin{aligned} P = h_i S(T_i - T_1) &= \frac{\lambda_1 S}{e_1}(T_1 - T_2), \\ &= \frac{\lambda_2 S}{e_2}(T_2 - T_3) = \frac{\lambda_3 S}{e_3}(T_4 - T_3) = h_e S(T_4 - T_e). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} T_i - T_e &= (T_i - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_4) + (T_4 - T_e), \\ &= \left[\frac{1}{h_i S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{1}{h_e S}\right] P. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$T_i - T_e = R_{\text{th}}^{\text{eq}} P,$$

avec la résistance équivalente donnée par

$$\boxed{R_{\text{th}}^{\text{eq}} = \sum_i R_{\text{th},i}.}$$

Le schéma équivalent est donné à la Figure 7.17.

Ici, l'isolant est prédominant : on a $R_{\text{th}}^{\text{eq}} \approx R_{\text{th}}^{\text{iso}} = \dfrac{e_2}{\lambda_2 S}$.

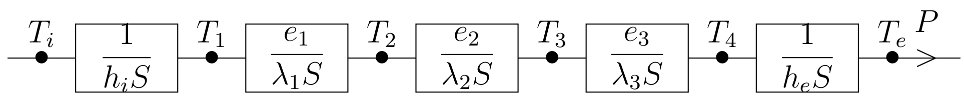

FIGURE 7.17 – Schéma équivalent pour l'association en série de résistances thermiques.

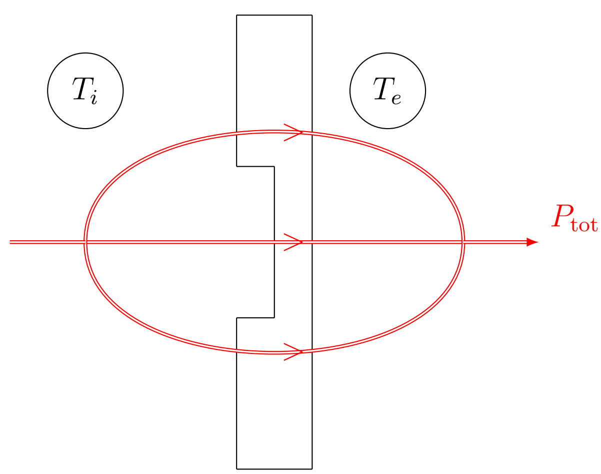

FIGURE 7.18 – Exemple d'association en parallèle de résistances thermiques.

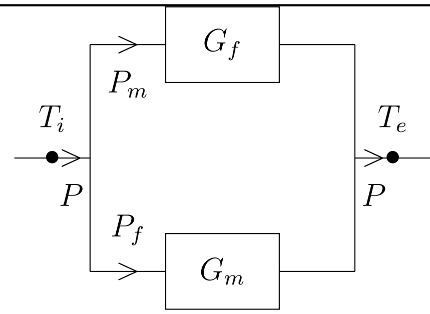

FIGURE 7.19 – Schéma équivalent pour l'exemple d'association en parallèle de résistances thermiques.

7.5.5 Association en parallèle

On prend l'exemple d'un mur percé d'une fenêtre, que l'on modélise à la Figure 7.18.

L'équivalent de la loi des nœuds donne

$$\boxed{P_{\text{tot}} = P_{\text{mur}} + P_{\text{fenêtre}}.}$$

Le schéma équivalent est donné à la Figure 7.19.

Ainsi,

$$P_{\text{tot}} = G_f \times (T_i - T_e) + G_m \times (T_i - T_e) = G_{\text{eq}} \times (T_i - T_e),$$

avec

$$\boxed{G_{\text{eq}} = \sum_i G_i, \qquad \frac{1}{R_{\text{th}}^{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_{\text{th,i}}}.}$$

Il y a un « court-circuit thermique ». Notamment, s'il y a un pont thermique, alors $G_{\text{pont}} \gg G_i$ et ainsi $G_{\text{eq}} \approx G_{\text{pont}}$.

7.5.6 ARQS en thermique

Exemple : circuit thermique dans l'ARQS

On considère une chambre dont un côté donne sur l'extérieur (et les trois autres vers l'intérieur), voir la Figure 7.20.

On suppose que l'on a les paramètres suivants : pour le côté extérieur, on a la conductance G_e, pour le côté intérieur on a la conductance G_i, pour

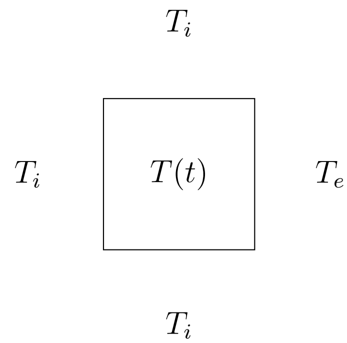

FIGURE 7.20 – Exemple de de l'ARQS en thermique.

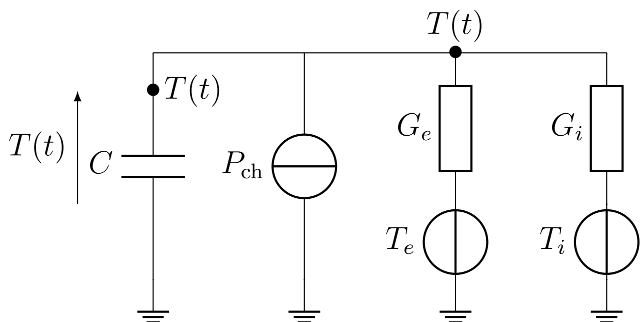

FIGURE 7.21 – Schéma équivalent dans l'ARQS thermique

la pièce il y a un chauffage $P_{\text{ch}} > 0$ en W, et la capacité thermique de la chambre est C en $\mathrm{J\,K^{-1}}$. Alors on a

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P_{\text{ch}} - G_e(T(t) - T_e) - G_i(T(t) - T_i).$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{G_e + G_i}{C}T = \frac{P_{\text{ch}} + G_eT_e + G_iT_i}{C},$$

ce qui donne le schéma équivalent donné à la Figure 7.21.

On pose

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{G_{\text{eq}}}{C},}$$

et on obtient

$$T(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{P_{\text{ch}}}{G_e + G_i} + \frac{G_eT_e + G_iT_i}{G_e + G_i}.$$

On résout ensuite avec d'éventuelles conditions initiales.

Qu'est-ce que l'ARQS ?

Ce qu'on a écrit suppose la validité du concept de résistance thermique. Dans chaque couche, on doit donc avoir un profil $T(x)$ environ affine. Cela suppose une diffusion thermique quasi instantanée, c'est-à-dire

$$\tau_{\text{diff}} \sim \frac{e^2}{D_{\text{th}}} \ll t,$$

i.e. $F_0(t) \gg 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{t \gg \frac{e^2}{\frac{\lambda}{\mu c}},}$$

dans chaque couche d'épaisseur e.