



LYCÉE MICHEL MONTAIGNE

NOTES DE COURS

Physique-Chimie L2

Régis Santet

Cours réalisé par
Professeur N. CHOIMET

Année scolaire 2015/2016

Table des matières

I	Mécanique	5
1	Référentiels non galiléens	7
1.1	Description du mouvement d'un point matériel	8
1.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre . . .	8
1.1.2	Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif	9
1.1.3	Composition des vitesses. Vitesse d'entraînement. . . .	10
1.1.4	Composition des accélérations	12
1.2	Lois de la dynamique du point	13

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Référentiels non galiléens

La description du mouvement d'un objet dépend de l'observateur. Un observateur lié à un solide (par exemple un train ou un quai) est lié à un système d'axes, c'est-à-dire 3 axes rigidement liés ainsi que d'une horloge (unique en mécanique classique car le temps est universel).

En L1, on étudie les référentiels galiléens vérifiant le principe d'inertie (1ère loi de Newton). En L2, on étudie les référentiels non galiléens dans deux cas :

- les référentiels en translation accélérée,
- les référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Sommaire

1.1	Description du mouvement d'un point matériel	8
1.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre .	8
1.1.2	Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif	9
1.1.3	Composition des vitesses. Vitesse d'entraînement. .	10
1.1.4	Composition des accélérations	12
1.2	Lois de la dynamique du point	13

1.1 Description du mouvement d'un point matériel par rapport à deux référentiels mobiles l'un par rapport à l'autre

1.1.1 Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre

Translation

On considère $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ (trièdres orthonormés directs pour simplifier).

Définition 1.1 (Référentiel en translation par rapport à un autre). \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} si ses axes gardent une orientation constante par rapport aux axes du référentiel \mathcal{R} .

Il y a donc une seule inconnue : $\vec{OO'}(t)$.

Exemple 1.1. Le référentiel géocentrique (origine au centre de la Terre et trois axes pointés vers trois étoiles lointaines « fixes ») est (environ) en translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic (origine au centre du système solaire et trois axes pointant vers trois étoiles « fixes »).

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Exemple 1.2. La rotation propre de la Terre (référentiel \mathcal{R}_T) par rapport à l'axe reliant ses pôles, de vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ par rapport à l'axe de rotation (supposé selon l'axe z). On note alors le vecteur de rotation instantanée

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G) := \dot{\theta} \vec{u}_z,$$

où \mathcal{R}_G est le référentiel géocentrique, $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation et \vec{u}_z donne la direction et le sens de rotation.

1.1.2 Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif

Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ et \vec{A} quelconque. On se demande quelle est la relation entre $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ et $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$. Pour cela, projetons \vec{A} sur les vecteurs de base de $\mathcal{R}'(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$:

$$\vec{A}(t) = a(t)\vec{u}_x' + b(t)\vec{u}_y' + c(t)\vec{u}_z'.$$

— Dans \mathcal{R}' , comme $(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$ est une base fixe dans \mathcal{R}' , on a

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{da}{dt}\vec{u}_x' + \frac{db}{dt}\vec{u}_y' + \frac{dc}{dt}\vec{u}_z'.$$

— Dans \mathcal{R} , on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= \frac{da}{dt}\vec{u}_x' + \frac{db}{dt}\vec{u}_y' + \frac{dc}{dt}\vec{u}_z' \\ &+ a(t)\left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + b(t)\left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + c(t)\left(\frac{d\vec{u}_z'}{dt}\right)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , alors $(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$ est fixe dans \mathcal{R} et ainsi

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}.$$

Si \mathcal{R}' est en rotation uniforme par rapport à l'axe (Oz) , on décompose les vecteurs de base :

$$\begin{cases} \vec{u}_x' = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_y' = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_z' = \vec{u}_z. \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y = \dot{\theta} \vec{u}_y' = \dot{\theta} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x'), \\ \left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y = -\dot{\theta} \vec{u}_x' = \dot{\theta} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y'). \end{aligned}$$

Or $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) := \dot{\theta} \vec{u}_z$, on écrit donc simplement

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_x', \\ \left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_y'. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (a\vec{u}_x' + b\vec{u}_y' + c\vec{u}_z').$$

De manière générale, on a donc

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.}$$

1.1.3 Composition des vitesses. Vitesse d'entraînement.

Translation

Soit M un point matériel et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ un référentiel en translation par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$. La vitesse de M dans le référentiel \mathcal{R} est

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} := \left(\frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{dO\vec{O}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}} + \underbrace{\left(\frac{dO'\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}.$$

Définition 1.2 (Vitesse d'entraînement). $\vec{v}_e := \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$ est appelée la **vitesse d'entraînement**, qui est indépendante de n'importe quel point matériel considéré, mais vient juste du fait que \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} .

On a donc

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e.}$$

Mouvement de translation rectiligne uniforme. On considère qu'à $t = 0$, $O = O'$ et que le référentiel \mathcal{R}' est en translation rectiligne uniforme à la vitesse V selon l'axe (Ox) .

— Dans le cas non relativiste $v \ll c$, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V,$$

d'où $x = x' + Vt$: c'est une transformation de Galilée. Comme on a $y = y'$, $z = z'$ et $t = t'$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

— Dans le cas relativiste $v \lesssim c$, c'est la transformation de Poincaré-Lorentz :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ xt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix},$$

où $\beta := \frac{v}{c} \lesssim 1$ et $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$.

→ Dans la limite $\beta \ll 1$, on a $\gamma \approx 1$ et on retrouve la transformation de Galilée.

→ Le temps n'est plus absolu.

→ Il y a une « dilatation » des temps. En effet, soit un intervalle de temps propre dans \mathcal{R}' (i.e. séparant deux évènements ayant lieu au même endroit dans \mathcal{R}'). Alors

$$c\Delta t = \beta\gamma \underbrace{\Delta x'}_{=0} + \gamma c\Delta t' = \gamma c\Delta t'.$$

Ainsi, si $\Delta x = 0$, Δt est « impropre ». On note que dans ce cas, $\Delta t_{\text{impropre}} = \gamma \Delta t_{\text{propre}}$ (et $\gamma > 1$ donc il y a une « dilatation »).

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

On note $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{u}_z$. On a déjà vu que l'on a

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M),$$

avec $\vec{v}_e(M) = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge O\vec{M}$.

Pour simplifier, on notera \vec{v}' quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel \mathcal{R}' , et \vec{v} quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel \mathcal{R} (ce qui sera le cas par défaut).

1.1.4 Composition des accélérations

Translation

On a

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{0} := \vec{a}'(M)_{/\mathcal{R}'}} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{a}_e}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e,}$$

$$\text{où } \vec{a}_e = \frac{d^2 O\vec{O}'}{dt^2}.$$

Rotation uniforme

On a

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge O\vec{M}) \right)_{\mathcal{R}}, \\ &= \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\vec{\omega}$ est une constante. Comme

$$\left(\frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M) = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge O\vec{M},$$

on a donc

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O\vec{M}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}.$$

On note alors $\vec{a}_e(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O\vec{M})$ et $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ l'**accélération de Coriolis**.

Exemple 1.3. Dans le cas d'une rotation autour de l'axe (Oz) , on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 H \vec{M}$ où H est le projeté orthogonal sur l'axe (Oz) du point M .

1.2 Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen