



LYCÉE MICHEL MONTAIGNE

NOTES DE COURS

# Physique-Chimie L2

*Régis Santet*

Cours réalisé par  
Professeur N. CHOIMET

Année scolaire 2015/2016



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Mécanique</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Référentiels non galiléens</b>	<b>7</b>
1.1	Description du mouvement d'un point matériel . . . . .	8
1.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre . . .	8
1.1.2	Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif . . . . .	9
1.1.3	Composition des vitesses et vitesse d'entraînement . . .	10
1.1.4	Composition des accélérations . . . . .	12
1.2	Lois de la dynamique du point . . . . .	13
1.2.1	Les trois lois de Newton . . . . .	13
1.2.2	Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie . . . . .	14
1.2.3	Référentiel entraîné en translation accélérée . . . . .	15
1.2.4	Référentiel entraîné en rotation uniforme . . . . .	18
1.3	Caractère galiléen de certains référentiels . . . . .	20
1.3.1	Référentiel géocentrique et marée océanique . . . . .	20
1.3.2	Référentiel terrestre . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Frottement solide</b>	<b>29</b>
2.1	Forces de frottement de glissement . . . . .	29
2.1.1	Résultante des actions de contact entre deux solides . .	29
2.1.2	Les trois effets possibles des frottements solides . . . .	30
2.1.3	Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide . . . . .	31
2.1.4	Effet d'arc-boutement . . . . .	33
2.1.5	Effet « stick-slip » . . . . .	34



# Première partie

## Mécanique



# Chapitre 1

## Référentiels non galiléens

La description du mouvement d'un objet dépend de l'observateur. Un observateur lié à un solide (par exemple un train ou un quai) est lié à un système d'axes, c'est-à-dire 3 axes rigidement liés ainsi que d'une horloge (unique en mécanique classique car le temps est universel).

En L1, on étudie les référentiels galiléens vérifiant le principe d'inertie (1ère loi de Newton). En L2, on étudie les référentiels non galiléens dans deux cas :

- les référentiels en translation accélérée,
- les référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Description du mouvement d'un point matériel</b>	<b>8</b>
1.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre .	8
1.1.2	Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif . . . . .	9
1.1.3	Composition des vitesses et vitesse d'entraînement	10
1.1.4	Composition des accélérations . . . . .	12
<b>1.2</b>	<b>Lois de la dynamique du point</b> . . . . .	<b>13</b>
1.2.1	Les trois lois de Newton . . . . .	13
1.2.2	Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie . . . . .	14
1.2.3	Référentiel entraîné en translation accélérée . . . .	15
1.2.4	Référentiel entraîné en rotation uniforme . . . . .	18
<b>1.3</b>	<b>Caractère galiléen de certains référentiels</b> . . . .	<b>20</b>

1.3.1	Référentiel géocentrique et marée océanique . . . .	20
1.3.2	Référentiel terrestre . . . . .	22

---

## 1.1 Description du mouvement d'un point matériel par rapport à deux référentiels mobiles l'un par rapport à l'autre

### 1.1.1 Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre

#### Translation

On considère  $\mathcal{R}(Oxyz)$  et  $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$  (trièdres orthonormés directs pour simplifier).

**Définition 1.1** (Référentiel en translation par rapport à un autre).  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  si ses axes gardent une orientation constante par rapport aux axes du référentiel  $\mathcal{R}$ .

Il y a donc une seule inconnue :  $\vec{OO'}(t)$ .

*Exemple 1.1.* Le référentiel géocentrique (origine au centre de la Terre et trois axes pointés vers trois étoiles lointaines « fixes ») est (environ) en translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic (origine au centre du système solaire et trois axes pointant vers trois étoiles « fixes »), voir la Figure 1.1.

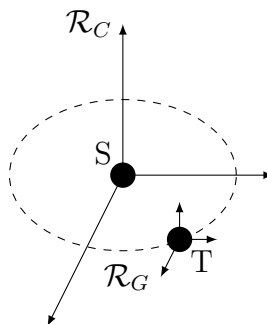


FIGURE 1.1 – Référentiel géocentrique et de Copernic.



### Rotation uniforme autour d'un axe fixe

*Exemple 1.2.* La rotation propre de la Terre (référentiel  $\mathcal{R}_T$ ) par rapport à l'axe reliant ses pôles, de vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta}$  par rapport à l'axe de rotation (supposé selon l'axe  $z$ ). On note alors le vecteur de rotation instantanée

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G) := \dot{\theta} \vec{u}_z,$$

où  $\mathcal{R}_G$  est le référentiel géocentrique,  $\dot{\theta}$  est la vitesse angulaire de rotation et  $\vec{u}_z$  donne la direction et le sens de rotation.

### 1.1.2 Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif

Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  et  $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$  et  $\vec{A}$  quelconque. On se demande quelle est la relation entre  $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$  et  $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$ . Pour cela, projetons  $\vec{A}$  sur les vecteurs de base de  $\mathcal{R}'(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$  :

$$\vec{A}(t) = a(t)\vec{u}_x' + b(t)\vec{u}_y' + c(t)\vec{u}_z'.$$

— Dans  $\mathcal{R}'$ , comme  $(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$  est une base fixe dans  $\mathcal{R}'$ , on a

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{da}{dt}\vec{u}_x' + \frac{db}{dt}\vec{u}_y' + \frac{dc}{dt}\vec{u}_z'.$$

— Dans  $\mathcal{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= \frac{da}{dt}\vec{u}_x' + \frac{db}{dt}\vec{u}_y' + \frac{dc}{dt}\vec{u}_z' \\ &+ a(t)\left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + b(t)\left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + c(t)\left(\frac{d\vec{u}_z'}{dt}\right)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ , alors  $(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$  est fixe dans  $\mathcal{R}$  et ainsi

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}.$$

Si  $\mathcal{R}'$  est en rotation uniforme par rapport à l'axe  $(Oz)$ , on décompose les vecteurs de base :

$$\begin{cases} \vec{u}_x' = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_y' = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_z' = \vec{u}_z. \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y = \dot{\theta} \vec{u}_y' = \dot{\theta} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x'), \\ \left( \frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y = -\dot{\theta} \vec{u}_x' = \dot{\theta} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y'). \end{aligned}$$

Or  $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) := \dot{\theta} \vec{u}_z$ , on écrit donc simplement

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_x', \\ \left( \frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_y'. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (a\vec{u}_x' + b\vec{u}_y' + c\vec{u}_z').$$

De manière générale, on a donc

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.}$$

### 1.1.3 Composition des vitesses et vitesse d'entraînement

#### Translation

Soit  $M$  un point matériel et  $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$  un référentiel en translation par rapport à un autre référentiel  $\mathcal{R}(Oxyz)$ . La vitesse de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} := \left( \frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left( \frac{dO\vec{O}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}} + \underbrace{\left( \frac{dO'\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}.$$

**Définition 1.2** (Vitesse d'entraînement).  $\vec{v}_e := \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$  est appelée la **vitesse d'entraînement**, qui est indépendante de n'importe quel point matériel considéré, mais vient juste du fait que  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ .

On a donc

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e.}$$

**Mouvement de translation rectiligne uniforme.** On considère qu'à  $t = 0$ ,  $O = O'$  et que le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $V$  selon l'axe  $(Ox)$ .

— Dans le cas non relativiste  $v \ll c$ , on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V,$$

d'où  $x = x' + Vt$  : c'est une transformation de Galilée. Comme on a  $y = y'$ ,  $z = z'$  et  $t = t'$ , on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

— Dans le cas relativiste  $v \lesssim c$ , c'est la transformation de Poincaré-Lorentz :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix},$$

où  $\beta := \frac{v}{c} \lesssim 1$  et  $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$ .

→ Dans la limite  $\beta \ll 1$ , on a  $\gamma \approx 1$  et on retrouve la transformation de Galilée.

→ Le temps n'est plus absolu.

→ Il y a une « dilatation » des temps. En effet, soit un intervalle de temps propre dans  $\mathcal{R}'$  (i.e. séparant deux événements ayant lieu au même endroit dans  $\mathcal{R}'$ ). Alors

$$c\Delta t = \beta\gamma \underbrace{\Delta x'}_{=0} + \gamma c\Delta t' = \gamma c\Delta t'.$$

Ainsi, si  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta t$  est « impropre ». On note que dans ce cas,  $\Delta t_{\text{impropre}} = \gamma \Delta t_{\text{propre}}$  (et  $\gamma > 1$  donc il y a une « dilatation »).

### Rotation uniforme autour d'un axe fixe

On note  $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta} \vec{u}_z$ . On a déjà vu que l'on a

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M),$$

avec  $\vec{v}_e(M) = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge O\vec{M}$ .

Pour simplifier, on notera  $\vec{v}'$  quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$ , et  $\vec{v}$  quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  (ce qui sera le cas par défaut).

### 1.1.4 Composition des accélérations

#### Translation

On a

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{0} := \vec{a}'(M)_{/\mathcal{R}'}} + \underbrace{\left( \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{a}_e}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e,}$$

où  $\vec{a}_e = \frac{d^2 O\vec{O}'}{dt^2}$ .

#### Rotation uniforme

On a

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \left( \frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left( \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge O\vec{M}) \right)_{\mathcal{R}}, \\ &= \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \left( \frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que  $\vec{\omega}$  est une constante. Comme

$$\left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M) = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{OM},$$

on a donc

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}.$$

On note alors  $\vec{a}_e(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$  et  $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$  **l'accélération de Coriolis**.

*Exemple 1.3.* Dans le cas d'une rotation autour de l'axe  $(Oz)$ , on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Donc  $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 H \vec{M}$  où  $H$  est le projeté orthogonal sur l'axe  $(Oz)$  du point  $M$ .

## 1.2 Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen

### 1.2.1 Les trois lois de Newton

1. Principe d'inertie.
2. La dérivée de la quantité de mouvement est égal à la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système considéré dans un référentiel galiléen, c'est-à-dire

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \text{ dans } \mathcal{R}_{\text{galiléen}}.$$

3. Principe d'action-réaction.

On se place dans le cadre classique ou  $\gamma = 1$ .

### 1.2.2 Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie

#### Loi de la quantité de mouvement

On considère un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_{\text{galiléen}} \equiv \mathcal{R}$ . Dans  $\mathcal{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= m\vec{a}(M) = \vec{F}, \\ &= m(\vec{a}'(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)) = \vec{F}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$m\vec{a}'(M) = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c,$$

où  $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$  et  $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ . Ce sont des « pseudo » forces d'inertie.

#### Loi du moment cinétique par rapport à $O'$ fixe dans $\mathcal{R}'$ non galiléen.

Dans  $\mathcal{R}'$ , on a

$$(\vec{L}_{O'})_{\mathcal{R}'} := O'\vec{M} \wedge \vec{p}' = O'\vec{M} \wedge m\vec{v}'(M).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} \right) &= m \underbrace{\left( \frac{dO'\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{\vec{v}'} \wedge \vec{v}' + O'\vec{M} \wedge \left( \frac{d\vec{p}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}, \\ &= \underbrace{O'\vec{M} \wedge \vec{F}}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}} + \underbrace{O'\vec{M} \wedge \vec{F}_e}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{\text{ent}}} + \underbrace{O'\vec{M} \wedge \vec{F}_c}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{\text{coriolis}}}. \end{aligned}$$

#### Loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

**Puissance des forces de Coriolis.** On a

$$\vec{P}_{\text{cor}} = \vec{F}_c \cdot \vec{v}' = -m \left( 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \right) \cdot \vec{v}' = 0.$$

**Loi de l'énergie cinétique dans  $\mathcal{R}'$ .** On a

$$\begin{aligned}
 \frac{dE'_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v'^2 \right), \\
 &= m \vec{v} \cdot \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}, \\
 &= (\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c) \cdot \vec{v}', \\
 &= (\vec{F} + \vec{F}_e) \cdot \vec{v}', \\
 &= P' + P'_e.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$dE'_c = P' dt + P'_e dt = \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}' dt}_{d\vec{l}'} + \vec{F}_e \cdot \underbrace{\vec{v}'_e dt}_{d\vec{l}'_e} = \delta W' + \delta W'_e.$$

En intégrant, on obtient donc

$$\boxed{\Delta E'_c = W' + W'_e.}$$

**Formulation en terme d'énergie mécanique.** Dans le cas où il existe des forces conservatives, on a  $W_{\text{cons}} = -\Delta E_p$  (ou  $\delta W_{\text{cons}} = -dE_p$ ). Dans ce cas, on définit l'énergie mécanique par

$$\boxed{E_m := E_c + E_p.}$$

Ainsi,  $dE'_c = \delta W_{\text{nc}} - dE'_p + \delta W'_e$  où  $W_{\text{nc}}$  représente le travail venant de forces non conservatives. Alors

$$dE'_m = \delta W'_{\text{nc}} + \delta W'_e,$$

et on a donc

$$\boxed{\Delta E'_m = W'_{\text{nc}} + W'_e.}$$

### 1.2.3 Référentiel entraîné en translation accélérée ( $\vec{\omega} = \vec{0}$ )

On a  $\vec{F}_e = -m\vec{a}(O')$ , force indépendante du point matériel  $M$  considéré, et  $\vec{F}_c = \vec{0}$ .

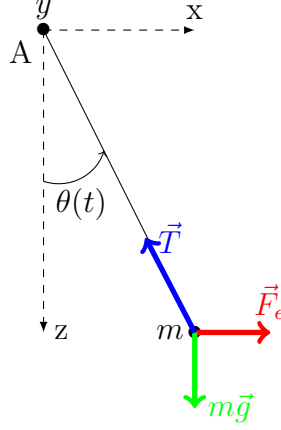


FIGURE 1.2 – Pendule secoué.

### Freinage d'une voiture

On suppose que la voiture roule initialement à 50 km/h et qu'elle s'arrête en 1 seconde. Alors

$$\begin{aligned}\|\vec{a}_e\| &\approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = 14 \text{ m.s}^{-2} > g, \\ \|\vec{F}_e\| &= m \|\vec{a}_e\| = 1400 \text{ N}.\end{aligned}$$

### Pendule secoué

On considère un pendule secoué, voir la Figure 1.2. Le référentiel est  $\mathcal{R}' = (Axyz)$  ( $y$  est orienté vers nous). On suppose que le pendule situé en  $A$  est secoué selon l'axe  $x$  :  $x_a(t) = \alpha \cos(\omega t)$ . Le théorème du moment cinétique par rapport à  $A$  dans  $\mathcal{R}'$  donne

$$\vec{L}_A = J \dot{\theta} \vec{u}_y = ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_y,$$

où  $J$  est le moment d'inertie. On calcule la force d'entraînement :

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \ddot{x}_A(t) \vec{u}_x = -\omega^2 \alpha \cos(\omega t) \vec{u}_x, \\ \vec{F}_e = m \omega^2 \alpha \cos(\omega t) \vec{u}_x. \end{cases}$$

Le théorème du moment cinétique selon  $\vec{u}_y$  donne alors

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta + m \omega^2 \alpha \cos(\omega t) l \cos \theta.$$



En notant  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ , on a donc

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \cos(\omega t) \cos \theta.$$

Pour des petits mouvements, on a  $|\theta| \ll 1$  et on linéarise :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \cos(\omega t).$$

En régime sinusoïdal forcé,  $\theta(t) \propto e^{j\omega t}$  (où  $j$  est le nombre imaginaire tel que  $j^2 = -1$ ). Ainsi,

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \theta(t) = \frac{\omega^2 \alpha}{l} e^{j\omega t}.$$

En prenant la partie réelle, on obtient donc

$$\theta(t) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{\alpha}{l} \cos(\omega t).$$

Si l'on suppose que le pendule est secoué selon l'axe  $z$  avec  $z_A(t) = \alpha \cos(\omega t)$ , on trouve pour équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left( 1 + \frac{\alpha \omega^2}{g} \cos(\omega t) \right) \sin \theta = 0.$$

En posant  $\Omega^2(t) = 1 + \frac{\alpha \omega^2}{g} \cos(\omega t)$ , on voit qu'il s'agit d'un oscillateur paramétrique.

### Énergie potentielle d'entraînement par translation uniformément accélérée

On a  $\vec{a}_e = a\vec{u}_x$  et  $\vec{F}_e = -ma\vec{u}_x$ . Soit un déplacement élémentaire  $d\vec{l}' = \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{R}'$ . Alors

$$\delta W'_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}' = -madx' = -d(max') = -dE_p^{\text{ent}}.$$

Ainsi, l'énergie potentielle d'entraînement vaut  $E_p^{\text{ent}} = max'$  (à une constante près).

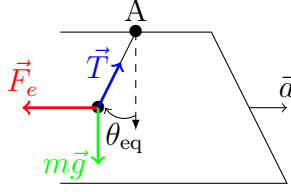


FIGURE 1.3 – Pendule dans un train en accélération uniforme.

*Exemple 1.4.* On considère un pendule dans un train, voir la Figure 1.3. On cherche la valeur de  $\theta_{\text{eq}}$ .

- Première méthode : on utilise  $\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{tot}} = \vec{0}$ . En projetant, on trouve alors  $mgl \sin \theta_{\text{eq}} = mal \cos \theta_{\text{eq}}$  d'où

$$\tan \theta_{\text{eq}} = \frac{a}{g}.$$

- Deuxième méthode : On a  $E_p^{\text{ent}} = -mal \sin \theta$  et  $E_p^{\text{poids}} = -mgl \cos \theta$  (avec éventuellement des constantes). Alors

$$\frac{dE_p^{\text{tot}}}{d\theta} = 0 = -mal \cos \theta + mgl \sin \theta,$$

d'où le résultat.

#### 1.2.4 Référentiel entraîné en rotation uniforme par rapport à un axe fixe

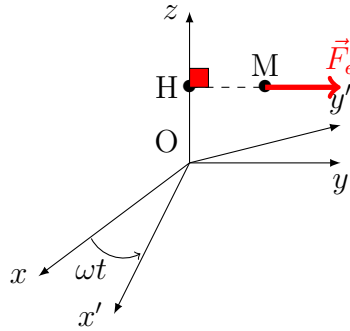
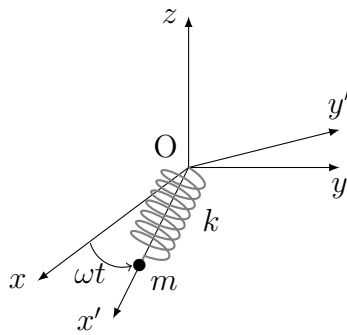
On suppose que la rotation se fait selon l'axe  $(Oz)$  à une vitesse angulaire  $\omega$ , voir la Figure 1.4.  $H$  est le projeté du point  $M$  sur l'axe  $(Oz)$ . On a  $\vec{F}_e = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ , qui est donc perpendiculaire au mouvement dans  $\mathcal{R}'$ .

##### Exemple

On considère le cas où l'on rajoute un ressort sur l'axe  $(Ox')$ , fixé en  $O$ , de constante de raideur  $k$  et de longueur au repos  $l_0$ , avec au bout une masse  $m$ , voir la Figure 1.5.

On cherche l'expression de  $x'(t)$ . On a

$$\begin{cases} \vec{F}_e = m\omega^2 x'(t) \vec{u}_{x'}, \\ \vec{F}_c = -2m\omega \vec{u}_z \wedge \dot{x}'(t) \vec{u}_{x'} = -2m\omega \dot{x}'(t) \vec{u}_y. \end{cases}$$

FIGURE 1.4 – Rotation uniforme autour de l'axe  $(Oz)$ .FIGURE 1.5 – Exemple de rotation uniforme autour de l'axe  $(Oz)$  : ressort avec une masse.

On projette le principe fondamental de la dynamique selon  $\vec{u}_x$  pour obtenir

$$m\ddot{x}'(t) = -k(x'(t) - l_0) + m\omega^2 x'(t).$$

En posant  $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$ , on obtient

$$\ddot{x}'(t) + (\omega_0^2 - \omega^2) x'(t) = \omega_0^2 l_0.$$

### Énergie potentielle d'entraînement « centrifuge »

Soit un déplacement  $d\vec{l}' = dx' \vec{u}_{x'}$  dans  $\mathcal{R}'$ . On a

$$\delta W'_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}' = m\omega^2 x' dx' = d\left(m\omega^2 \frac{x'^2}{2}\right) := -dE_p^{\text{ent}},$$

d'où  $E_p^{\text{ent}} = -m\omega^2 \frac{x'^2}{2}$ .

### Retour sur l'exemple

On applique le théorème d'énergie mécanique dans  $\mathcal{R}'$  :

$$E'_{m_{\text{tot}}} = \text{constante} = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - l_0)^2 - m\omega^2 \frac{x'^2}{2}.$$

On se donne comme conditions initiales  $x'(0) = l_0$  et  $\dot{x}'(0) = 0$ . On a alors

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - l_0)^2 - \frac{m\omega^2 x'^2}{2} = -\frac{m\omega^2 l_0^2}{2}}.$$

## 1.3 Caractère galiléen approché de quelques référentiels courants

### 1.3.1 Référentiel géocentrique et marée océanique

On se place dans  $\mathcal{R}_G$  en translation (environ) circulaire par rapport à  $\mathcal{R}_C$ , voir la Figure 1.1. On considère le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  au voisinage de la surface de la Terre par rapport à  $\mathcal{R}_G$ . Alors

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_G} = \vec{f} + m\vec{g}_T(M) + \sum_{i \neq T} m\vec{g}_i(M) - m\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C},$$

où  $\vec{f}$  représentent les forces de contact (par exemple la pression),  $\vec{g}_T$  est le champ de pesanteur dû à la Terre,  $\vec{g}_i$  représente le champ de gravitation dû à un autre astre du système solaire, et  $m\vec{a}_{T/\mathcal{R}_C}$  est simplement la force d'entraînement  $\vec{F}_e$ .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la terre par rapport à  $\mathcal{R}_C$ , on obtient

$$M_T \vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \vec{R}^{\text{ext}} = \sum_{\neq i} M_T \vec{g}_i(T),$$

où l'on a fait l'hypothèse que la Terre était sphérique pour la dernière égalité. Ainsi, on a

$$\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \sum_{\neq i} \vec{g}_i(T).$$

Alors

$$m\vec{a}(M) = \vec{f} + m\vec{g}_T(M) + m \left( \sum_{\neq i} \vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) \right).$$

**Définition 1.3** (Champ de marée). L'expression

$$\vec{C}(M) := \left( \sum_{\neq i} \vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) \right),$$

définit le *champ de marée*. C'est un terme différentiel.

Notamment, le champ de marée dû à la Lune uniquement est

$$\vec{C}_L(M) = \vec{g}_L(M) - \vec{g}_L(T).$$

**Ordre de grandeur de  $\|\vec{C}_i\|_{\text{max}}$ .** On a

$$\|\vec{C}_i\| = \mathcal{G}M_i \left| \frac{1}{(D_i - R_T)^2} - \frac{1}{D_i^2} \right|.$$

Si  $D_i \gg R_T$ , on a

$$\frac{1}{(D_i - R_T)^2} = \frac{1}{D_i^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_T}{D_i}\right)^2} \sim \frac{1}{D_i^2} \left(1 + \frac{2R_T}{D_i}\right).$$

	M (kg)	$D_i$	$\ \vec{g}_i\ $	$\ \vec{C}\ $
Soleil	$2.10^{30}$	$1.10^{11}$	$1.10^{-2}$	$5.10^{-7}$
Lune	$7.10^{22}$	$4.10^8$	$3.10^{-5}$	$1.10^{-6}$

TABLE 1.1 – Champs de marées dus au Soleil et à la Lune.

Ainsi,

$$\|\vec{C}_i\|_{\max} = \mathcal{G}M_i \frac{2R_T}{D_i^3} = \|\vec{g}_i(T)\| \underbrace{\frac{2R_T}{D_i}}_{\ll 1} \ll \|\vec{g}_i\|.$$

On donne dans la Table 1.1 les ordres de grandeur des champs de marées dus au Soleil et à la Lune. On voit donc que le champ de marée lunaire est environ deux fois supérieur au solaire.

### Interprétation du phénomène des marées océaniques.

**Effet dominant de la Lune.** Comme la période de révolution de la Lune autour de la Terre (environ 27 jours) est beaucoup moins longue que la période de révolution de la Terre autour de ses pôles (environ 24h), il y a deux marées hautes et deux marées basses par jour. Il y a un décalage d'environ 50 minutes par jour dû à la rotation de la Lune par rapport à la Terre.

**Rôle du Soleil.** Selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil, les effets de marées peuvent être atténués ou renforcés, voir la Figure 1.6. Durant la nouvelle Lune et la pleine Lune, le Soleil renforce l'effet de la Lune, ce sont des marées de vives-eaux. Au contraire, lors du premier et du dernier quartier, il y a une compensation partielle de l'effet de la Lune par le Soleil. Ce sont les marées de mortes-eaux.

### 1.3.2 Référentiel terrestre

On suppose le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$  galiléen. On ne regarde que les effets de la rotation propre de la Terre.

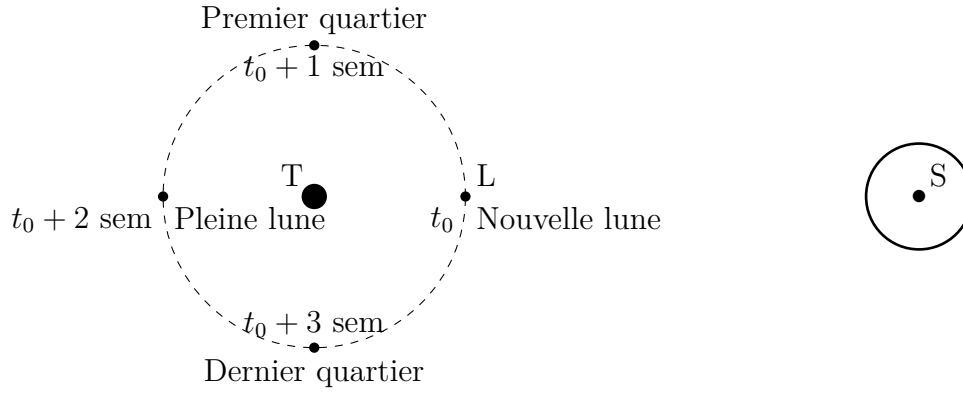


FIGURE 1.6 – Atténuation ou renforcement des effets de marées selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil.

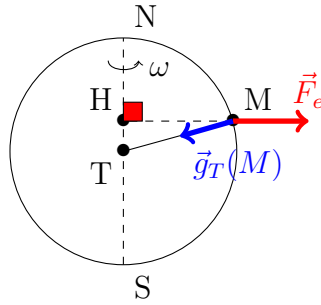


FIGURE 1.7 – Rotation de la Terre et définition du poids.

### Effets de la force centrifuge

On regarde de plus près la définition du poids.  $\mathcal{R}_T$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}_G$  à une rotation angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T_T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1},$$

autour de l'axe  $S\vec{N}$  fixe dans  $\mathcal{R}_G$ , voir la Figure 1.7.

**Équation du mouvement de M dans  $\mathcal{R}_T$ .** On a

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_e + m\vec{g}_T(M) + m\omega^2 H\vec{M} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}.$$

**Définition du poids/de la pesanteur.** Supposons qu'un fil à plomb soit en équilibre dans  $\mathcal{R}_T$  et induise une tension (verticale)  $\vec{T}$ . Alors on a

$$\vec{0} = m\vec{g}_T + m\omega^2 H\vec{M} + \vec{0} + \vec{T}.$$

Ainsi,  $\vec{T}$ , qui indique la verticale du lieu, est donné par

$$\vec{T} = -m \left( g_T + \omega^2 H\vec{M} \right).$$

**Définition 1.4** (Champ de pesanteur et champ de gravité). En notant  $\vec{g}$  le champ de pesanteur et  $\vec{g}_T$  le champ de gravité, on a

$$\boxed{\vec{g} := \vec{g}_T + \omega^2 H\vec{M}.}$$

$\vec{g}$  n'est donc pas tout à fait diriger vers  $\vec{T}$ . À l'équateur,  $\omega^2 R_t \approx 0.03 \text{ m.s}^{-2}$  avec  $R_T \approx 6400 \text{ km}$ . En dynamique terrestre,  $\vec{g}$  inclut la force centrifuge.

### Effets qualitatifs de la force de Coriolis

Dans  $\mathcal{R}_T$ , on a

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{f} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T},$$

où  $m\vec{g}$  représente le poids.

### Ordre de grandeur.

**Composante verticale de  $\vec{F}_{\text{cor}}$ .** Elle est à comparer au poids. Elle vaut au maximum  $2m\omega v$ . Ainsi,

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{cor}}\|_{\text{max}}}{mg} = \frac{2\omega v}{g} \# \frac{14.10^{-5}}{10} \times v = 1,4.10^{-5}v.$$

Le plus souvent, la composante vertical est négligeable devant le poids. L'effet dominant est celui de la composante horizontale.

**Échelles de temps.** On compare le temps de l'expérience  $T_{\text{exp}}$  au temps de révolution de la Terre  $T_T$ . On a

$$\frac{\|\vec{a}_{\text{cor}}\|}{\|\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T}\|} \# \frac{2\omega v}{v/T_{\text{exp}}} = 2\omega T_{\text{exp}} = 4\pi \frac{T_{\text{exp}}}{T_T}.$$

Le référentiel terrestre est quasi galiléen si  $T_{\text{exp}} \ll 24h$ .



**Échelles de distance.** On compare la longueur caractéristique présente dans l'expérience et  $L_c$  (taille typique des déplacements dus à  $\vec{F}_{\text{cor}}$ ). On a

$$L_c \approx a_{\text{cor}} \times T_{\text{exp}}^2 = 2\omega v T_{\text{exp}}^2,$$

$$L_{\text{exp}} \approx v \times T_{\text{exp}},$$

d'où

$$\frac{L_c}{L_{\text{exp}}} \# 2\omega T_{\text{exp}} = 4\pi \frac{T_{\text{exp}}}{T_T}.$$

**Expression de  $\vec{F}_{\text{cor}}$  à la surface de la Terre.** On note  $\lambda$  la latitude, voir la Figure 1.8. On note  $(X, Y, Z)$  la base de projection (voir la Figure). On note

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}_{u_X, u_Y, u_Z}.$$

Alors

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \lambda \\ 0 \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix},$$

d'où

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \lambda \\ 0 \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \dot{Y} \sin \lambda \\ \omega \dot{X} \sin \lambda + \omega \dot{Z} \cos \lambda \\ -\omega \dot{X} \cos \lambda \end{pmatrix},$$

et

$$\vec{F}_{\text{cor}} = 2m\omega \begin{pmatrix} \omega \dot{Y} \sin \lambda \\ \omega \dot{X} \sin \lambda + \omega \dot{Z} \cos \lambda \\ -\omega \dot{X} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

**Mouvements horizontaux :  $\dot{Z} = 0$ .** On a

$$\vec{F}_{\text{cor,horizontale}} = 2m\omega \sin \lambda \begin{pmatrix} \dot{Y} \\ -\dot{X} \\ 0 \end{pmatrix} = -2m\omega \sin \lambda \vec{u}_Z \wedge \vec{v}.$$

Ainsi, dans l'hémisphère sud, on a  $\lambda < 0$  et  $\vec{F}_{\text{cor}}$  est dans le même sens que  $\vec{u}_Z \wedge \vec{v}$  : il y a une déviation vers la gauche. Dans l'hémisphère nord, on a  $\lambda > 0$  et on voit donc une déviation vers la droite.

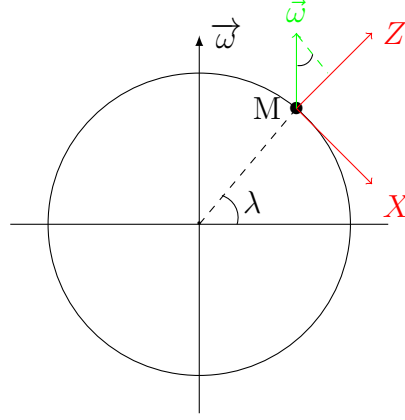


FIGURE 1.8 – Expression de la force de Coriolis à la surface de la Terre.

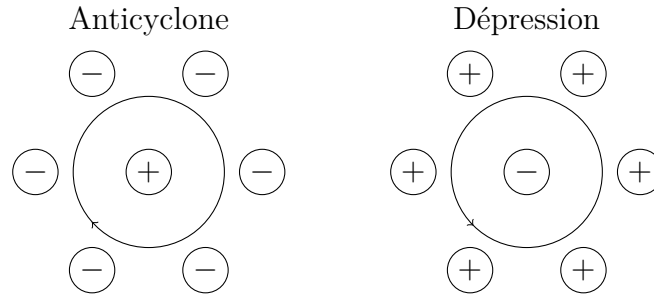


FIGURE 1.9 – Sens des anticyclones et dépressions dans l'hémisphère nord.

**Anticyclones et dépressions.** La force de Coriolis justifie les mouvements des anticyclones et dépressions. On montre ce qu'il se passe dans l'hémisphère nord sur la Figure 1.9. En ordre de grandeur, on a  $L_{\text{exp}} \approx 1000 \text{ km}$  et  $v \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$ . Ainsi,  $T_{\text{exp}} \# 10^5 \text{ s}$ . Or  $T_T = 86400 \text{ s} \# 10^5 \text{ s}$ . Ainsi,  $L_c \approx L_{\text{exp}}$ .

**Tourbillons dans un lavabo.** On a  $L_{\text{exp}} \approx 10 \text{ cm}$ ,  $v \approx 10 \text{ cm.s}^{-1}$ ,  $T_{\text{exp}} \approx 1 \text{ s}$ , ainsi

$$L_{\text{cor}} \# L_{\text{exp}} \frac{T_{\text{exp}}}{T_T} = 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}.$$

**Pendule de Foucault (1851).** Ce pendule dévie vers la droite. À l'équateur, on a  $\lambda = 0$  donc il n'y a pas de déviation. Au pôle nord, l'effet est maximum. Le plan d'oscillation tourne à  $\omega$  par rapport à  $\mathcal{R}_G$ .

**Mouvement vertical de chute libre : déviation vers l'est. Expérience de Reich (1833).** On considère un puits de mine de profondeur  $h = 100 \text{ m}$ . Lorsqu'un objet tombe dans ce puits, on observe une légère déviation vers l'est (quelques millimètres). On reprend la Figure 1.8 et on considère que  $|\dot{X}|, |\dot{Y}| \ll |\dot{Z}|$ . Alors

$$\vec{F}_c = -2m\omega\dot{Z} \cos \lambda \vec{u}_Y,$$

et  $\dot{Z} < 0$  donc  $\vec{F}_c$  est dirigé vers l'est. En ordre de grandeur, on a

$$L = \frac{1}{2}gt^2,$$

donc

$$T_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \# \sqrt{\frac{h}{g}},$$

et ainsi

$$L_c \# \underbrace{L_{\text{exp}}}_h \times \frac{T_{\text{exp}}}{T_T} = \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}T_T} \# 10^{-3} \text{ m}.$$



# Chapitre 2

## Frottement solide

Cette étude s'appelle la tribologie (étude de l'adhésion, des frottements solides). On va s'intéresser aux actions de contact entre solide. L'origine microscopique de ces contacts est l'interaction électromagnétique. On se limite aux seuls mouvements de translation.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Forces de frottement de glissement . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1.1	Résultante des actions de contact entre deux solides	29
2.1.2	Les trois effets possibles des frottements solides . .	30
2.1.3	Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide . . . . .	31
2.1.4	Effet d'arc-boutement . . . . .	33
2.1.5	Effet « stick-slip » . . . . .	34

---

## 2.1 Forces de frottement de glissement

### 2.1.1 Résultante des actions de contact entre deux solides

Les actions de contact sont réparties sur la surface de contact. Pour modéliser ces actions, on introduit un modèle qu'est la résultante (ou somme) des actions de contact en un point  $I$  de l'interface. Un premier exemple est donné à la Figure 2.1, où l'équilibre s'écrit  $\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$ . Un deuxième exemple est donné à la Figure 2.2 où l'équilibre s'écrit  $\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$  et  $\vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$ .

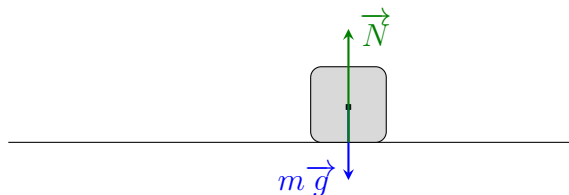


FIGURE 2.1 – Premier exemple de frottements solides et résultante.

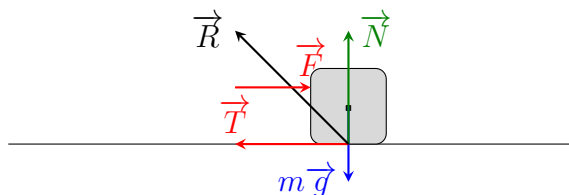


FIGURE 2.2 – Deuxième exemple de frottements solides et résultante.

Le solide subit donc une résultante  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ .  $\vec{N}$  traduit l'existence de contact,  $\vec{T}$  le frottement de glissement.  $\vec{T}$  s'oppose au glissement, mais pas au mouvement.

### 2.1.2 Les trois effets possibles des frottements solides

On donne différents exemples :

1. la Figure 2.3 décrit un maintien à l'équilibre possible grâce aux frottements.
2. la Figure 2.4 décrit un premier mouvement gauche-droite où le frottement est responsable du mouvement, c'est une phase de non glissement. Pour le mouvement droite-gauche, la phase de glissement existe à cause de la force de rappel du fil élastique. Les frottements sont responsables d'un freinage.
3. Lors de la marche à pied, pour se déplacer, il faut une composante tangentielle venant du sol sur les semelles des chaussures.
4. Les roues des voitures : lors de l'accélération (roues qui patinent), il y a des frottements moteurs, voir la Figure 2.5. Lors du freinage (roues bloquées), c'est l'inverse.

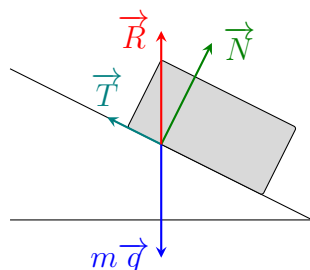


FIGURE 2.3 – Premier exemple d’effet possible des frottements solides.

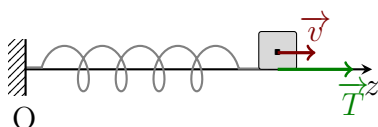


FIGURE 2.4 – Deuxième exemple d’effet possible des frottements solides. L’axe est un tapis roulant vers la droite.

Ainsi, il y a trois effets possibles : maintien à l’équilibre, mise en mouvement et freinage.

### 2.1.3 Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide

**Notions de vitesse de glissement.** La Figure 2.6 présente un solide en mouvement du solide (1) par rapport au sol (2). Alors la vitesse de glissement est définie par

$$\vec{v}_g(1/2) := \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Il faut noter que cette définition est indépendante du référentiel : si  $\mathcal{R}_2$

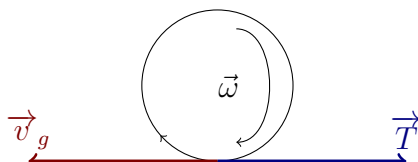


FIGURE 2.5 – Troisième exemple d’effet possible des frottements solides.

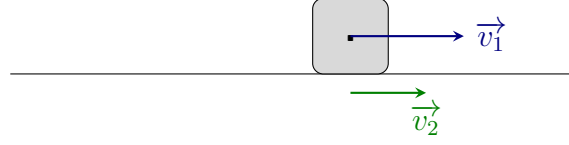


FIGURE 2.6 – Notion de vitesse de glissement.

est un référentiel lié à 2, alors

$$\vec{v}'_{1/2} - \vec{v}'_{2/\mathcal{R}_2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_g.$$

**Cas du glissement.** On est donc dans le cas où  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ . Alors

1.  $\vec{T} \parallel \vec{v}_g$  et  $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$  :  $\vec{T}$  et  $\vec{v}_g$  sont de sens opposés.
2. On a  $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$ .  $f_g$  est le coefficient de frottement dynamique : il est indépendant de  $\|\vec{N}\|$  et de la surface de contact, mais dépend de la nature des matériaux et de l'état des surfaces.

**Cas du non glissement.** On est donc dans le cas où  $\vec{v}_g = \vec{0}$ . Alors on a

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|,$$

où  $f_s$  est le coefficient de frottement statique.  $f_s$  et  $f_d$  ont les mêmes propriétés et en général,  $f_s \geq f_d$ .

**Cône de frottement.**

**Non glissement.** Soit  $\varphi_s$  tel que  $f_s = \tan \varphi_s$ . Alors

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\| \Leftrightarrow \tan(\alpha) \leq \tan \varphi_s \Leftrightarrow \alpha \leq \varphi_s.$$

Il y a non glissement si la résultante  $\vec{R}$  reste à l'intérieur du cône de frottement statique, voir la Figure 2.7.

**Glissement.** Soit  $\varphi_d$  tel que  $f_d = \tan \varphi_d$ . Alors

$$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \tan \varphi_d \Leftrightarrow \alpha = \varphi_d.$$

Il y a glissement si la résultante  $\vec{R}$  coïncide avec le bord du cône de frottement dynamique, voir la Figure 2.8.



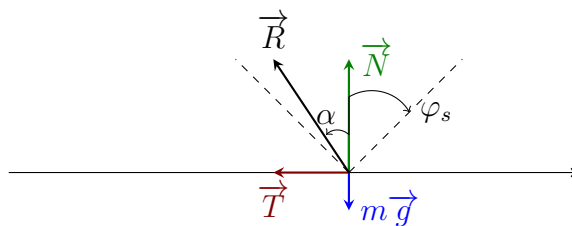


FIGURE 2.7 – Non glissement et cône de frottement statique.

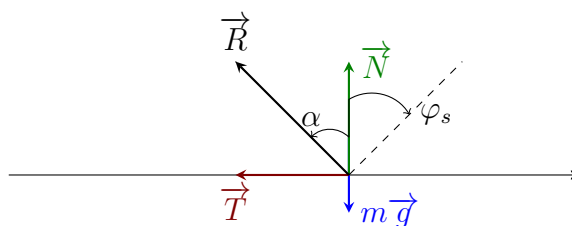


FIGURE 2.8 – Glissement et cône de frottement dynamique.

**Ordres de grandeur.** Le plus souvent, on a  $f_s \approx f_d := f$ . On donne quelques valeurs de référence dans la Table 2.1.

### 2.1.4 Effet d'arc-boutement

Le modèle est présenté à la Figure 2.9. On prend pour axe  $(Ox)$  le plan incliné, orienté de gauche vers la droite, et l'axe  $(Oy)$  est perpendiculaire à  $(Ox)$  (orienté selon  $\vec{N}$ ).

On se demande la condition sur  $\alpha$  pour éviter tout glissement pour toute

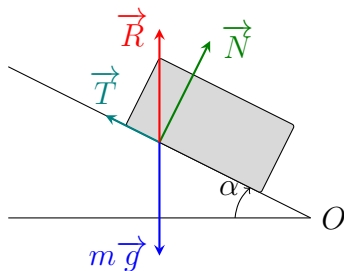


FIGURE 2.9 – Modèle d'arc-boutement.

Type de contact	$f$
acier/acier	0.2
acier/garniture de freins	0.4
pneu/route sèche	0.8
acier/bois	0.5
bois/bois	0.5
téflon/matière lisse	0.04

TABLE 2.1 – Ordre de grandeur du coefficient de frottement pour quelques matériaux.

masse  $m$ . La condition de l'équilibre s'écrit  $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$ . En projetant sur  $(Ox)$  puis  $(Oy)$ , on obtient

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - T &= 0, \\ -mg \cos \alpha + N &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $\frac{T}{N} = \tan \alpha$ . On a donc non glissement si  $T \leq f_s N$  ou bien  $\alpha \leq \varphi_s$ . C'est l'effet d'arc-boutement : pas de glissement quelque soit la charge.

**Condition de non-basculement.** Les équations en translation et rotation s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{R}^{\text{ext}} &= \vec{0} = \vec{R} + m\vec{g}, \\ \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}} &= \vec{0} = \vec{G} \wedge m\vec{g} + \vec{G}I \wedge \vec{I}, \end{aligned}$$

où  $G$  est le centre de masse de la masse  $m$ , et  $I$  est le point d'application de  $\vec{R}$ . Donc  $\vec{GI} \parallel \vec{R} \parallel \vec{g}$ .  $I$  est donc à la vertical de  $G$ . On a non-basculement si  $I$  reste sur la surface de contact : la limite du basculement est quand  $I$  est sur l'arête. Ainsi, l'angle limite est tel que  $\tan \alpha_{\text{lim}} = \frac{l}{h}$ , où  $l$  est la longueur de la masse et  $h$  sa hauteur. Pour savoir s'il y a glissement ou basculement, il faut comparer  $\frac{l}{h}$  et  $f_s$ .

### 2.1.5 Effet « stick-slip »

C'est typiquement ce qu'il se passe en utilisant un archet enduit de colophane. Dans ce cas, on a  $f_s \gg f_d$  (ici  $f_d \approx 0$ ). On considère le système

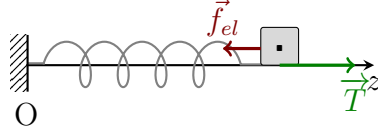


FIGURE 2.10 – Effet « stick-slip ». L'axe  $(Ox)$  est un tapis roulant vers la droite de vitesse  $\vec{v} = V\vec{u}_x$

présenté à la Figure 2.10, la raideur du ressort est notée  $k$ , la masse de l'objet  $m$ .

— Phase 1 : non glissement sur  $[0, t_1]$ . On a

$$m\ddot{x} = 0 = -kx + T,$$

doù  $x(t) = Vt$ . La fin de la phase 1 à  $t_1$  a lieu quand  $T = f_s N$ . On a  $T(t_1) = kx(t_1) = kVt_1$  et  $N = mg$ . Ainsi,

$$f_1 = f_s \frac{mg}{kV} = \frac{f_s g}{\omega_0^2 V},$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

— Phase 2 : on a glissement.  $f_d \approx 0$  donc il y a glissement sans frottement. Ainsi,

$$m\ddot{x} = -kx + 0,$$

d'où  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ . Alors  $x(t \geq t_1) = A \cos(\omega_0(t - t_1) + \alpha)$ . La condition initiale est en  $t = t_1$  : on a  $x(t_1) = Vt_1 = \frac{f_s g}{\omega_0^2} = A \cos \alpha$ , et  $\dot{x}(t_1) = V = -A\omega_0 \sin \alpha$ . Alors

$$\tan \alpha = -\frac{\omega_0 V}{f_s g}, \quad A^2 = \left( \frac{f_s g}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{V}{\omega_0} \right)^2.$$

On a fin du glissement à  $t = t_2$ , c'est-à-dire  $Vg(t_2) = 0$ , d'où  $\dot{x}(t_2) = V$ . Alors

$$-A\omega_0 \sin(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = V = -A\omega_0 \sin \alpha,$$

puis

$$\sin(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = \sin \alpha,$$

d'où  $\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha = \pi - \alpha$ , ce qui donne enfin

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{2\alpha}{\omega_0}.$$

— Phase 3 : non glissement sur  $[t_2, t_3]$ , on a

$$\dot{x}(t_2 \leq t \leq t_3) = V,$$

d'où  $x(t_2 \leq t \leq t_3) = V(t - t_2) + K$ . La condition initiale donne

$$K = x(t_2) = A \cos(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = A \cos(\pi - \alpha) = -A \cos \alpha.$$

Ainsi,

$$x(t_2 \leq t \leq t_3) = V(t - t_2) - A \cos \alpha.$$

Le fin de la phase 3 a lieu en  $t_3$  quand  $T(t_3) = f_s N = f_s mg$ . Or  $m\ddot{x} = 0 = T - kx$ , donc  $kx(t_3) = f_s mg$ . Donc

$$kV(t_3 - t_2) - k \frac{f_s g}{\omega_0^2} = f_s mg.$$

Donc

$$t_3 - t_2 = 2 \frac{f_s g}{\omega_0^2 V}.$$