



LYCÉE MICHEL MONTAIGNE

NOTES DE COURS

Physique-Chimie L2

Régis Santet

Cours réalisé par
Professeur N. CHOIMET

Année scolaire 2015/2016

Table des matières

I	Mécanique	5
1	Référentiels non galiléens	7
1.1	Description du mouvement d'un point matériel	8
1.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre	8
1.1.2	Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif	9
1.1.3	Composition des vitesses et vitesse d'entraînement . . .	10
1.1.4	Composition des accélérations	12
1.2	Lois de la dynamique du point	13
1.2.1	Les trois lois de Newton	13
1.2.2	Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie	14
1.2.3	Référentiel entraîné en translation accélérée	15
1.2.4	Référentiel entraîné en rotation uniforme	18
1.3	Caractère galiléen de certains référentiels	20
1.3.1	Référentiel géocentrique et marée océanique	20
1.3.2	Référentiel terrestre	22
2	Frottement solide	29
2.1	Forces de frottement de glissement	30
2.1.1	Résultante des actions de contact entre deux solides . .	30
2.1.2	Les trois effets possibles des frottements solides	30
2.1.3	Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide	32
2.1.4	Effet d'arc-boutement	33
2.1.5	Effet « stick-slip »	35
2.2	Puissance des forces de frottement de glissement	37

2.2.1	Puissance totale des actions de contact entre deux solides	37
2.2.2	Exemple d'un pavé mis en mouvement par un tapis roulant : bilan énergétique	37

II Thermodynamique 39

3	Transferts thermiques par diffusion thermique	41
3.1	Phénoménologie des différents modes de transfert thermique .	42
3.1.1	Les trois modes de transfert thermique	42
3.1.2	Le flux thermique surfacique	43
3.1.3	Continuité du flux surfacique	44
3.1.4	Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (ETL)	45
3.2	Conduction/Diffusion thermique	45
3.2.1	Vecteur densité de courant thermique	45
3.2.2	Loi empirique de Fourier	46
3.2.3	Équation locale de la conservation de l'énergie	47
3.2.4	Équation de la chaleur/diffusion thermique	51
3.2.5	Création d'entropie par diffusion	53
3.3	Propriétés de l'équation de diffusion	54
3.3.1	Linéarité	54
3.3.2	Irréversibilité	54
3.3.3	Échelles de temps et de distance de diffusion	54
3.3.4	Conditions initiales. Conditions aux limites	55
3.3.5	Exemple de conditions aux limites : contact thermique parfait entre deux solides	56
3.3.6	Exemple de résolution numérique de l'équation de la diffusion	56
3.4	Conducto-convection à l'interface d'un solide et d'un fluide	57
3.4.1	Transfert conducto-convectif : loi de Newton empirique	57
3.4.2	Application : ailette de refroidissement	59
3.4.3	Nombre de Biot : conduction versus conducto-convection	61
3.5	Conductance et résistance thermique en régime permanent . .	62
3.5.1	Analogie conduction thermique et conduction électrique en régime permanent	62

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Référentiels non galiléens

La description du mouvement d'un objet dépend de l'observateur. Un observateur lié à un solide (par exemple un train ou un quai) est lié à un système d'axes, c'est-à-dire 3 axes rigidement liés ainsi que d'une horloge (unique en mécanique classique car le temps est universel).

En L1, on étudie les référentiels galiléens vérifiant le principe d'inertie (1ère loi de Newton). En L2, on étudie les référentiels non galiléens dans deux cas :

- les référentiels en translation accélérée,
- les référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Sommaire

1.1	Description du mouvement d'un point matériel	8
1.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre .	8
1.1.2	Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif	9
1.1.3	Composition des vitesses et vitesse d'entraînement	10
1.1.4	Composition des accélérations	12
1.2	Lois de la dynamique du point	13
1.2.1	Les trois lois de Newton	13
1.2.2	Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie	14
1.2.3	Référentiel entraîné en translation accélérée	15
1.2.4	Référentiel entraîné en rotation uniforme	18
1.3	Caractère galiléen de certains référentiels	20

1.3.1	Référentiel géocentrique et marée océanique	20
1.3.2	Référentiel terrestre	22

1.1 Description du mouvement d'un point matériel par rapport à deux référentiels mobiles l'un par rapport à l'autre

1.1.1 Mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre

Translation

On considère $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ (trièdres orthonormés directs pour simplifier).

Définition 1.1 (Référentiel en translation par rapport à un autre). \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} si ses axes gardent une orientation constante par rapport aux axes du référentiel \mathcal{R} .

Il y a donc une seule inconnue : $\vec{OO'}(t)$.

Exemple 1.1. Le référentiel géocentrique (origine au centre de la Terre et trois axes pointés vers trois étoiles lointaines « fixes ») est (environ) en translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic (origine au centre du système solaire et trois axes pointant vers trois étoiles « fixes »), voir la Figure 1.1.

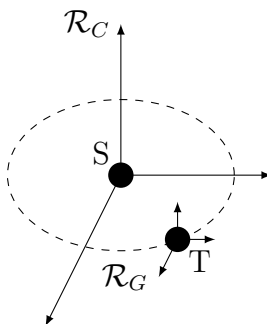


FIGURE 1.1 – Référentiel géocentrique et de Copernic.

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Exemple 1.2. La rotation propre de la Terre (référentiel \mathcal{R}_T) par rapport à l'axe reliant ses pôles, de vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ par rapport à l'axe de rotation (supposé selon l'axe z). On note alors le vecteur de rotation instantanée

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G) := \dot{\theta} \vec{u}_z,$$

où \mathcal{R}_G est le référentiel géocentrique, $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation et \vec{u}_z donne la direction et le sens de rotation.

1.1.2 Dérivée d'un vecteur exprimée dans deux référentiels en mouvement relatif

Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ et \vec{A} quelconque. On se demande quelle est la relation entre $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ et $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$. Pour cela, projetons \vec{A} sur les vecteurs de base de $\mathcal{R}'(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$:

$$\vec{A}(t) = a(t)\vec{u}_x' + b(t)\vec{u}_y' + c(t)\vec{u}_z'.$$

— Dans \mathcal{R}' , comme $(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$ est une base fixe dans \mathcal{R}' , on a

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{da}{dt}\vec{u}_x' + \frac{db}{dt}\vec{u}_y' + \frac{dc}{dt}\vec{u}_z'.$$

— Dans \mathcal{R} , on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= \frac{da}{dt}\vec{u}_x' + \frac{db}{dt}\vec{u}_y' + \frac{dc}{dt}\vec{u}_z' \\ &+ a(t)\left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + b(t)\left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + c(t)\left(\frac{d\vec{u}_z'}{dt}\right)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , alors $(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$ est fixe dans \mathcal{R} et ainsi

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}.$$

Si \mathcal{R}' est en rotation uniforme par rapport à l'axe (Oz) , on décompose les vecteurs de base :

$$\begin{cases} \vec{u}_x' = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_y' = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_z' = \vec{u}_z. \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y = \dot{\theta} \vec{u}_y' = \dot{\theta} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x'), \\ \left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y = -\dot{\theta} \vec{u}_x' = \dot{\theta} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y'). \end{aligned}$$

Or $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) := \dot{\theta} \vec{u}_z$, on écrit donc simplement

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_x', \\ \left(\frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_y'. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (a\vec{u}_x' + b\vec{u}_y' + c\vec{u}_z').$$

De manière générale, on a donc

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.}$$

1.1.3 Composition des vitesses et vitesse d'entraînement

Translation

Soit M un point matériel et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ un référentiel en translation par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$. La vitesse de M dans le référentiel \mathcal{R} est

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} := \left(\frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{dO\vec{O}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}} + \underbrace{\left(\frac{dO'\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}.$$

Définition 1.2 (Vitesse d'entraînement). $\vec{v}_e := \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$ est appelée la **vitesse d'entraînement**, qui est indépendante de n'importe quel point matériel considéré, mais vient juste du fait que \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} .

On a donc

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e.}$$

Mouvement de translation rectiligne uniforme. On considère qu'à $t = 0$, $O = O'$ et que le référentiel \mathcal{R}' est en translation rectiligne uniforme à la vitesse V selon l'axe (Ox) .

— Dans le cas non relativiste $v \ll c$, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V,$$

d'où $x = x' + Vt$: c'est une transformation de Galilée. Comme on a $y = y'$, $z = z'$ et $t = t'$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

— Dans le cas relativiste $v \lesssim c$, c'est la transformation de Poincaré-Lorentz :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix},$$

où $\beta := \frac{v}{c} \lesssim 1$ et $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$.

→ Dans la limite $\beta \ll 1$, on a $\gamma \approx 1$ et on retrouve la transformation de Galilée.

→ Le temps n'est plus absolu.

→ Il y a une « dilatation » des temps. En effet, soit un intervalle de temps propre dans \mathcal{R}' (i.e. séparant deux événements ayant lieu au même endroit dans \mathcal{R}'). Alors

$$c\Delta t = \beta\gamma \underbrace{\Delta x'}_{=0} + \gamma c\Delta t' = \gamma c\Delta t'.$$

Ainsi, si $\Delta x = 0$, Δt est « impropre ». On note que dans ce cas, $\Delta t_{\text{impropre}} = \gamma \Delta t_{\text{propre}}$ (et $\gamma > 1$ donc il y a une « dilatation »).

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

On note $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta} \vec{u}_z$. On a déjà vu que l'on a

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M),$$

avec $\vec{v}_e(M) = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge O\vec{M}$.

Pour simplifier, on notera \vec{v}' quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel \mathcal{R}' , et \vec{v} quand la vitesse sera calculée par rapport au référentiel \mathcal{R} (ce qui sera le cas par défaut).

1.1.4 Composition des accélérations

Translation

On a

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{0} := \vec{a}'(M)_{/\mathcal{R}'}} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{a}_e}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e,}$$

où $\vec{a}_e = \frac{d^2 O\vec{O}'}{dt^2}$.

Rotation uniforme

On a

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge O\vec{M}) \right)_{\mathcal{R}}, \\ &= \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\vec{\omega}$ est une constante. Comme

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M) = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{OM},$$

on a donc

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}.$$

On note alors $\vec{a}_e(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$ et $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ **l'accélération de Coriolis**.

Exemple 1.3. Dans le cas d'une rotation autour de l'axe (Oz) , on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 H \vec{M}$ où H est le projeté orthogonal sur l'axe (Oz) du point M .

1.2 Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen

1.2.1 Les trois lois de Newton

1. Principe d'inertie.
2. La dérivée de la quantité de mouvement est égal à la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système considéré dans un référentiel galiléen, c'est-à-dire

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \text{ dans } \mathcal{R}_{\text{galiléen}}.$$

3. Principe d'action-réaction.

On se place dans le cadre classique ou $\gamma = 1$.

1.2.2 Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie

Loi de la quantité de mouvement

On considère un référentiel \mathcal{R}' en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_{\text{galiléen}} \equiv \mathcal{R}$. Dans \mathcal{R} , on a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= m\vec{a}(M) = \vec{F}, \\ &= m(\vec{a}'(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)) = \vec{F}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$m\vec{a}'(M) = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c,$$

où $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$ et $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$. Ce sont des « pseudo » forces d'inertie.

Loi du moment cinétique par rapport à O' fixe dans \mathcal{R}' non galiléen.

Dans \mathcal{R}' , on a

$$(\vec{L}_{O'})_{\mathcal{R}'} := O'\vec{M} \wedge \vec{p}' = O'\vec{M} \wedge m\vec{v}'(M).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} \right) &= m \underbrace{\left(\frac{dO'\vec{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{\vec{v}'} \wedge \vec{v}' + O'\vec{M} \wedge \left(\frac{d\vec{p}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}, \\ &= \underbrace{O'\vec{M} \wedge \vec{F}}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}} + \underbrace{O'\vec{M} \wedge \vec{F}_e}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{\text{ent}}} + \underbrace{O'\vec{M} \wedge \vec{F}_c}_{\vec{\mathcal{M}}_{O'}^{\text{coriolis}}}. \end{aligned}$$

Loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

Puissance des forces de Coriolis. On a

$$\vec{P}_{\text{cor}} = \vec{F}_c \cdot \vec{v}' = -m \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \right) \cdot \vec{v}' = 0.$$

Loi de l'énergie cinétique dans \mathcal{R}' . On a

$$\begin{aligned}
 \frac{dE'_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v'^2 \right), \\
 &= m \vec{v} \cdot \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}, \\
 &= (\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c) \cdot \vec{v}', \\
 &= (\vec{F} + \vec{F}_e) \cdot \vec{v}', \\
 &= P' + P'_e.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$dE'_c = P' dt + P'_e dt = \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}' dt}_{d\vec{l}'} + \vec{F}_e \cdot \underbrace{\vec{v}'_e dt}_{d\vec{l}'} = \delta W' + \delta W'_e.$$

En intégrant, on obtient donc

$$\boxed{\Delta E'_c = W' + W'_e.}$$

Formulation en terme d'énergie mécanique. Dans le cas où il existe des forces conservatives, on a $W_{\text{cons}} = -\Delta E_p$ (ou $\delta W_{\text{cons}} = -dE_p$). Dans ce cas, on définit l'énergie mécanique par

$$\boxed{E_m := E_c + E_p.}$$

Ainsi, $dE'_c = \delta W_{\text{nc}} - dE'_p + \delta W'_e$ où W_{nc} représente le travail venant de forces non conservatives. Alors

$$dE'_m = \delta W'_{\text{nc}} + \delta W'_e,$$

et on a donc

$$\boxed{\Delta E'_m = W'_{\text{nc}} + W'_e.}$$

1.2.3 Référentiel entraîné en translation accélérée ($\vec{\omega} = \vec{0}$)

On a $\vec{F}_e = -m\vec{a}(O')$, force indépendante du point matériel M considéré, et $\vec{F}_c = \vec{0}$.

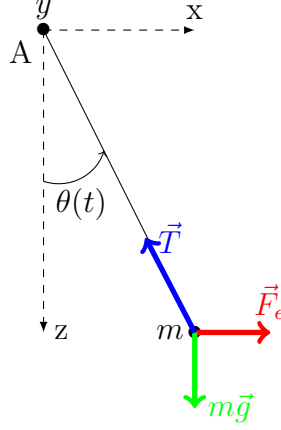


FIGURE 1.2 – Pendule secoué.

Freinage d'une voiture

On suppose que la voiture roule initialement à 50 km/h et qu'elle s'arrête en 1 seconde. Alors

$$\begin{aligned}\|\vec{a}_e\| &\approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = 14 \text{ m.s}^{-2} > g, \\ \|\vec{F}_e\| &= m \|\vec{a}_e\| = 1400 \text{ N}.\end{aligned}$$

Pendule secoué

On considère un pendule secoué, voir la Figure 1.2. Le référentiel est $\mathcal{R}' = (Axyz)$ (y est orienté vers nous). On suppose que le pendule situé en A est secoué selon l'axe x : $x_a(t) = \alpha \cos(\omega t)$. Le théorème du moment cinétique par rapport à A dans \mathcal{R}' donne

$$\vec{L}_A = J \dot{\theta} \vec{u}_y = ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_y,$$

où J est le moment d'inertie. On calcule la force d'entraînement :

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \ddot{x}_A(t) \vec{u}_x = -\omega^2 \alpha \cos(\omega t) \vec{u}_x, \\ \vec{F}_e = m \omega^2 \alpha \cos(\omega t) \vec{u}_x. \end{cases}$$

Le théorème du moment cinétique selon \vec{u}_y donne alors

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta + m \omega^2 \alpha \cos(\omega t) l \cos \theta.$$

En notant $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, on a donc

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \cos(\omega t) \cos \theta.$$

Pour des petits mouvements, on a $|\theta| \ll 1$ et on linéarise :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{\omega^2 \alpha}{l} \cos(\omega t).$$

En régime sinusoïdal forcé, $\theta(t) \propto e^{j\omega t}$ (où j est le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$). Ainsi,

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \theta(t) = \frac{\omega^2 \alpha}{l} e^{j\omega t}.$$

En prenant la partie réelle, on obtient donc

$$\theta(t) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{\alpha}{l} \cos(\omega t).$$

Si l'on suppose que le pendule est secoué selon l'axe z avec $z_A(t) = \alpha \cos(\omega t)$, on trouve pour équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{\alpha \omega^2}{g} \cos(\omega t) \right) \sin \theta = 0.$$

En posant $\Omega^2(t) = 1 + \frac{\alpha \omega^2}{g} \cos(\omega t)$, on voit qu'il s'agit d'un oscillateur paramétrique.

Énergie potentielle d'entraînement par translation uniformément accélérée

On a $\vec{a}_e = a\vec{u}_x$ et $\vec{F}_e = -ma\vec{u}_x$. Soit un déplacement élémentaire $d\vec{l}' = \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix}$ dans \mathcal{R}' . Alors

$$\delta W'_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}' = -madx' = -d(max') = -dE_p^{\text{ent}}.$$

Ainsi, l'énergie potentielle d'entraînement vaut $E_p^{\text{ent}} = max'$ (à une constante près).

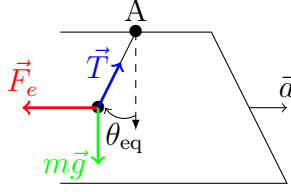


FIGURE 1.3 – Pendule dans un train en accélération uniforme.

Exemple 1.4. On considère un pendule dans un train, voir la Figure 1.3. On cherche la valeur de θ_{eq} .

- Première méthode : on utilise $\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{tot}} = \vec{0}$. En projetant, on trouve alors $mgl \sin \theta_{\text{eq}} = mal \cos \theta_{\text{eq}}$ d'où

$$\tan \theta_{\text{eq}} = \frac{a}{g}.$$

- Deuxième méthode : On a $E_p^{\text{ent}} = -mal \sin \theta$ et $E_p^{\text{poids}} = -mgl \cos \theta$ (avec éventuellement des constantes). Alors

$$\frac{dE_p^{\text{tot}}}{d\theta} = 0 = -mal \cos \theta + mgl \sin \theta,$$

d'où le résultat.

1.2.4 Référentiel entraîné en rotation uniforme par rapport à un axe fixe

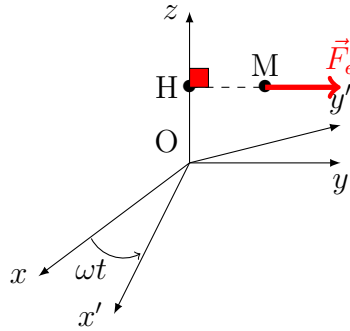
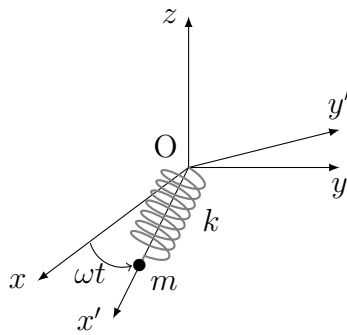
On suppose que la rotation se fait selon l'axe (Oz) à une vitesse angulaire ω , voir la Figure 1.4. H est le projeté du point M sur l'axe (Oz) . On a $\vec{F}_e = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$, qui est donc perpendiculaire au mouvement dans \mathcal{R}' .

Exemple

On considère le cas où l'on rajoute un ressort sur l'axe (Ox') , fixé en O , de constante de raideur k et de longueur au repos l_0 , avec au bout une masse m , voir la Figure 1.5.

On cherche l'expression de $x'(t)$. On a

$$\begin{cases} \vec{F}_e = m\omega^2 x'(t) \vec{u}_{x'}, \\ \vec{F}_c = -2m\omega \vec{u}_z \wedge \dot{x}'(t) \vec{u}_{x'} = -2m\omega \dot{x}'(t) \vec{u}_y. \end{cases}$$

FIGURE 1.4 – Rotation uniforme autour de l'axe (Oz) .FIGURE 1.5 – Exemple de rotation uniforme autour de l'axe (Oz) : ressort avec une masse.

On projette le principe fondamental de la dynamique selon \vec{u}_x pour obtenir

$$m\ddot{x}'(t) = -k(x'(t) - l_0) + m\omega^2 x'(t).$$

En posant $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$, on obtient

$$\ddot{x}'(t) + (\omega_0^2 - \omega^2) x'(t) = \omega_0^2 l_0.$$

Énergie potentielle d'entraînement « centrifuge »

Soit un déplacement $d\vec{l}' = dx' \vec{u}_{x'}$ dans \mathcal{R}' . On a

$$\delta W'_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}' = m\omega^2 x' dx' = d\left(m\omega^2 \frac{x'^2}{2}\right) := -dE_p^{\text{ent}},$$

d'où $E_p^{\text{ent}} = -m\omega^2 \frac{x'^2}{2}$.

Retour sur l'exemple

On applique le théorème d'énergie mécanique dans \mathcal{R}' :

$$E'_{m_{\text{tot}}} = \text{constante} = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - l_0)^2 - m\omega^2 \frac{x'^2}{2}.$$

On se donne comme conditions initiales $x'(0) = l_0$ et $\dot{x}'(0) = 0$. On a alors

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x' - l_0)^2 - \frac{m\omega^2 x'^2}{2} = -\frac{m\omega^2 l_0^2}{2}}.$$

1.3 Caractère galiléen approché de quelques référentiels courants

1.3.1 Référentiel géocentrique et marée océanique

On se place dans \mathcal{R}_G en translation (environ) circulaire par rapport à \mathcal{R}_C , voir la Figure 1.1. On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m au voisinage de la surface de la Terre par rapport à \mathcal{R}_G . Alors

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_G} = \vec{f} + m\vec{g}_T(M) + \sum_{i \neq T} m\vec{g}_i(M) - m\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C},$$

où \vec{f} représentent les forces de contact (par exemple la pression), \vec{g}_T est le champ de pesanteur dû à la Terre, \vec{g}_i représente le champ de gravitation dû à un autre astre du système solaire, et $m\vec{a}_{T/\mathcal{R}_C}$ est simplement la force d'entraînement \vec{F}_e .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la terre par rapport à \mathcal{R}_C , on obtient

$$M_T \vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \vec{R}^{\text{ext}} = \sum_{\neq i} M_T \vec{g}_i(T),$$

où l'on a fait l'hypothèse que la Terre était sphérique pour la dernière égalité. Ainsi, on a

$$\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_C} = \sum_{\neq i} \vec{g}_i(T).$$

Alors

$$m\vec{a}(M) = \vec{f} + m\vec{g}_T(M) + m \left(\sum_{\neq i} \vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) \right).$$

Définition 1.3 (Champ de marée). L'expression

$$\vec{C}(M) := \left(\sum_{\neq i} \vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) \right),$$

définit le *champ de marée*. C'est un terme différentiel.

Notamment, le champ de marée dû à la Lune uniquement est

$$\vec{C}_L(M) = \vec{g}_L(M) - \vec{g}_L(T).$$

Ordre de grandeur de $\|\vec{C}_i\|_{\max}$. On a

$$\|\vec{C}_i\| = \mathcal{G}M_i \left| \frac{1}{(D_i - R_T)^2} - \frac{1}{D_i^2} \right|.$$

Si $D_i \gg R_T$, on a

$$\frac{1}{(D_i - R_T)^2} = \frac{1}{D_i^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_T}{D_i}\right)^2} \sim \frac{1}{D_i^2} \left(1 + \frac{2R_T}{D_i}\right).$$

	M (kg)	D_i	$\ \vec{g}_i\ $	$\ \vec{C}\ $
Soleil	2.10^{30}	1.10^{11}	1.10^{-2}	5.10^{-7}
Lune	7.10^{22}	4.10^8	3.10^{-5}	1.10^{-6}

TABLE 1.1 – Champs de marées dus au Soleil et à la Lune.

Ainsi,

$$\|\vec{C}_i\|_{\max} = \mathcal{G}M_i \frac{2R_T}{D_i^3} = \|\vec{g}_i(T)\| \underbrace{\frac{2R_T}{D_i}}_{\ll 1} \ll \|\vec{g}_i\|.$$

On donne dans la Table 1.1 les ordres de grandeur des champs de marées dus au Soleil et à la Lune. On voit donc que le champ de marée lunaire est environ deux fois supérieur au solaire.

Interprétation du phénomène des marées océaniques.

Effet dominant de la Lune. Comme la période de révolution de la Lune autour de la Terre (environ 27 jours) est beaucoup moins longue que la période de révolution de la Terre autour de ses pôles (environ 24h), il y a deux marées hautes et deux marées basses par jour. Il y a un décalage d'environ 50 minutes par jour dû à la rotation de la Lune par rapport à la Terre.

Rôle du Soleil. Selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil, les effets de marées peuvent être atténués ou renforcés, voir la Figure 1.6. Durant la nouvelle Lune et la pleine Lune, le Soleil renforce l'effet de la Lune, ce sont des marées de vives-eaux. Au contraire, lors du premier et du dernier quartier, il y a une compensation partielle de l'effet de la Lune par le Soleil. Ce sont les marées de mortes-eaux.

1.3.2 Référentiel terrestre

On suppose le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G galiléen. On ne regarde que les effets de la rotation propre de la Terre.

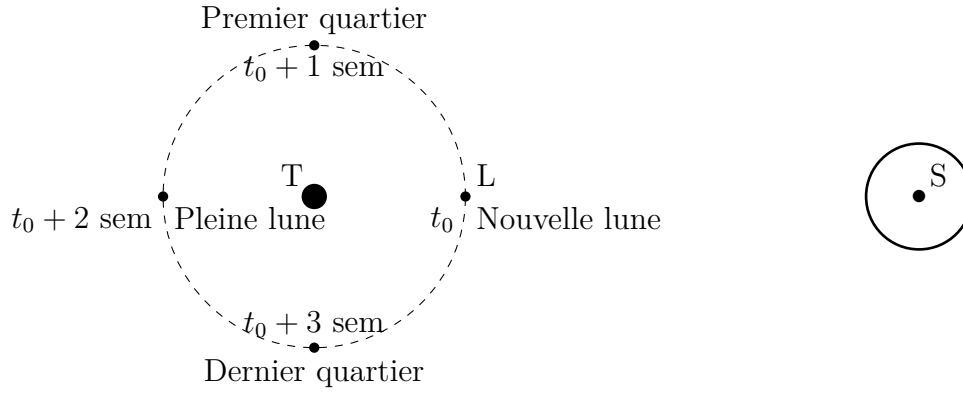


FIGURE 1.6 – Atténuation ou renforcement des effets de marées selon la position de la Lune par rapport à la Terre et au Soleil.

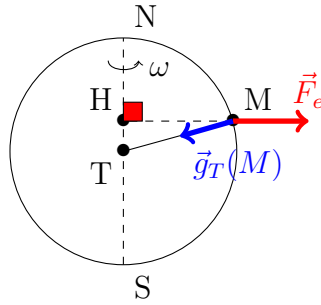


FIGURE 1.7 – Rotation de la Terre et définition du poids.

Effets de la force centrifuge

On regarde de plus près la définition du poids. \mathcal{R}_T est en rotation par rapport à \mathcal{R}_G à une rotation angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T_T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1},$$

autour de l'axe $S\vec{N}$ fixe dans \mathcal{R}_G , voir la Figure 1.7.

Équation du mouvement de M dans \mathcal{R}_T . On a

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_e + m\vec{g}_T(M) + m\omega^2 H\vec{M} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}.$$

Définition du poids/de la pesanteur. Supposons qu'un fil à plomb soit en équilibre dans \mathcal{R}_T et induise une tension (verticale) \vec{T} . Alors on a

$$\vec{0} = m\vec{g}_T + m\omega^2 H\vec{M} + \vec{0} + \vec{T}.$$

Ainsi, \vec{T} , qui indique la verticale du lieu, est donné par

$$\vec{T} = -m \left(g_T + \omega^2 H\vec{M} \right).$$

Définition 1.4 (Champ de pesanteur et champ de gravité). En notant \vec{g} le champ de pesanteur et \vec{g}_T le champ de gravité, on a

$$\boxed{\vec{g} := \vec{g}_T + \omega^2 H\vec{M}.}$$

\vec{g} n'est donc pas tout à fait diriger vers \vec{T} . À l'équateur, $\omega^2 R_t \approx 0.03 \text{ m.s}^{-2}$ avec $R_T \approx 6400 \text{ km}$. En dynamique terrestre, \vec{g} inclut la force centrifuge.

Effets qualitatifs de la force de Coriolis

Dans \mathcal{R}_T , on a

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{f} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T},$$

où $m\vec{g}$ représente le poids.

Ordre de grandeur.

Composante verticale de \vec{F}_{cor} . Elle est à comparer au poids. Elle vaut au maximum $2m\omega v$. Ainsi,

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{cor}}\|_{\text{max}}}{mg} = \frac{2\omega v}{g} \# \frac{14.10^{-5}}{10} \times v = 1,4.10^{-5}v.$$

Le plus souvent, la composante vertical est négligeable devant le poids. L'effet dominant est celui de la composante horizontale.

Échelles de temps. On compare le temps de l'expérience T_{exp} au temps de révolution de la Terre T_T . On a

$$\frac{\|\vec{a}_{\text{cor}}\|}{\|\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T}\|} \# \frac{2\omega v}{v/T_{\text{exp}}} = 2\omega T_{\text{exp}} = 4\pi \frac{T_{\text{exp}}}{T_T}.$$

Le référentiel terrestre est quasi galiléen si $T_{\text{exp}} \ll 24h$.

Échelles de distance. On compare la longueur caractéristique présente dans l'expérience et L_c (taille typique des déplacements dus à \vec{F}_{cor}). On a

$$L_c \approx a_{\text{cor}} \times T_{\text{exp}}^2 = 2\omega v T_{\text{exp}}^2,$$

$$L_{\text{exp}} \approx v \times T_{\text{exp}},$$

d'où

$$\frac{L_c}{L_{\text{exp}}} \# 2\omega T_{\text{exp}} = 4\pi \frac{T_{\text{exp}}}{T_T}.$$

Expression de \vec{F}_{cor} à la surface de la Terre. On note λ la latitude, voir la Figure 1.8. On note (X, Y, Z) la base de projection (voir la Figure). On note

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}_{u_X, u_Y, u_Z}.$$

Alors

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \lambda \\ 0 \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix},$$

d'où

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \lambda \\ 0 \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \dot{Y} \sin \lambda \\ \omega \dot{X} \sin \lambda + \omega \dot{Z} \cos \lambda \\ -\omega \dot{X} \cos \lambda \end{pmatrix},$$

et

$$\vec{F}_{\text{cor}} = 2m\omega \begin{pmatrix} \omega \dot{Y} \sin \lambda \\ \omega \dot{X} \sin \lambda + \omega \dot{Z} \cos \lambda \\ -\omega \dot{X} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

Mouvements horizontaux : $\dot{Z} = 0$. On a

$$\vec{F}_{\text{cor,horizontale}} = 2m\omega \sin \lambda \begin{pmatrix} \dot{Y} \\ -\dot{X} \\ 0 \end{pmatrix} = -2m\omega \sin \lambda \vec{u}_Z \wedge \vec{v}.$$

Ainsi, dans l'hémisphère sud, on a $\lambda < 0$ et \vec{F}_{cor} est dans le même sens que $\vec{u}_Z \wedge \vec{v}$: il y a une déviation vers la gauche. Dans l'hémisphère nord, on a $\lambda > 0$ et on voit donc une déviation vers la droite.

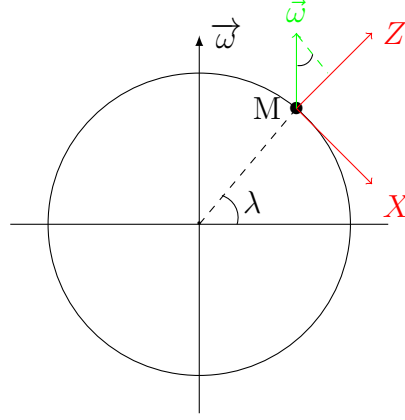


FIGURE 1.8 – Expression de la force de Coriolis à la surface de la Terre.

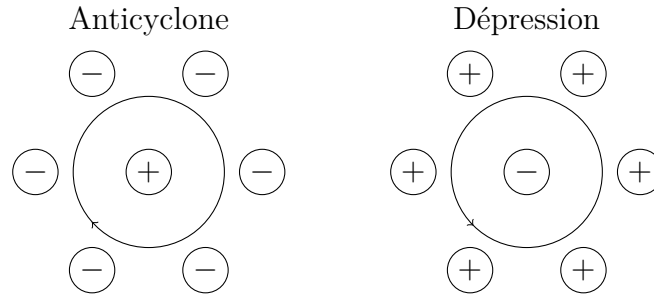


FIGURE 1.9 – Sens des anticyclones et dépressions dans l'hémisphère nord.

Anticyclones et dépressions. La force de Coriolis justifie les mouvements des anticyclones et dépressions. On montre ce qu'il se passe dans l'hémisphère nord sur la Figure 1.9. En ordre de grandeur, on a $L_{\text{exp}} \approx 1000 \text{ km}$ et $v \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$. Ainsi, $T_{\text{exp}} \# 10^5 \text{ s}$. Or $T_T = 86400 \text{ s} \# 10^5 \text{ s}$. Ainsi, $L_c \approx L_{\text{exp}}$.

Tourbillons dans un lavabo. On a $L_{\text{exp}} \approx 10 \text{ cm}$, $v \approx 10 \text{ cm.s}^{-1}$, $T_{\text{exp}} \approx 1 \text{ s}$, ainsi

$$L_{\text{cor}} \# L_{\text{exp}} \frac{T_{\text{exp}}}{T_T} = 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}.$$

Pendule de Foucault (1851). Ce pendule dévie vers la droite. À l'équateur, on a $\lambda = 0$ donc il n'y a pas de déviation. Au pôle nord, l'effet est maximum. Le plan d'oscillation tourne à ω par rapport à \mathcal{R}_G .

Mouvement vertical de chute libre : déviation vers l'est. Expérience de Reich (1833). On considère un puits de mine de profondeur $h = 100 \text{ m}$. Lorsqu'un objet tombe dans ce puits, on observe une légère déviation vers l'est (quelques millimètres). On reprend la Figure 1.8 et on considère que $|\dot{X}|, |\dot{Y}| \ll |\dot{Z}|$. Alors

$$\vec{F}_c = -2m\omega\dot{Z} \cos \lambda \vec{u}_Y,$$

et $\dot{Z} < 0$ donc \vec{F}_c est dirigé vers l'est. En ordre de grandeur, on a

$$L = \frac{1}{2}gt^2,$$

donc

$$T_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \# \sqrt{\frac{h}{g}},$$

et ainsi

$$L_c \# \underbrace{L_{\text{exp}}}_h \times \frac{T_{\text{exp}}}{T_T} = \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}T_T} \# 10^{-3} \text{ m}.$$

Chapitre 2

Frottement solide

Cette étude s'appelle la tribologie (étude de l'adhésion, des frottements solides). On va s'intéresser aux actions de contact entre solide. L'origine microscopique de ces contacts est l'interaction électromagnétique. On se limite aux seuls mouvements de translation.

Sommaire

2.1	Forces de frottement de glissement	30
2.1.1	Résultante des actions de contact entre deux solides	30
2.1.2	Les trois effets possibles des frottements solides . .	30
2.1.3	Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide	32
2.1.4	Effet d'arc-boutement	33
2.1.5	Effet « stick-slip »	35
2.2	Puissance des forces de frottement de glissement	37
2.2.1	Puissance totale des actions de contact entre deux solides	37
2.2.2	Exemple d'un pavé mis en mouvement par un tapis roulant : bilan énergétique	37

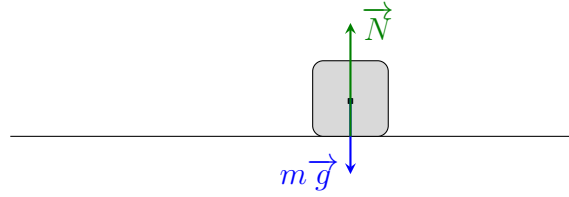


FIGURE 2.1 – Premier exemple de frottements solides et résultante.

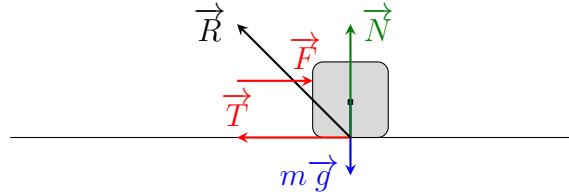


FIGURE 2.2 – Deuxième exemple de frottements solides et résultante.

2.1 Forces de frottement de glissement

2.1.1 Résultante des actions de contact entre deux solides

Les actions de contact sont réparties sur la surface de contact. Pour modéliser ces actions, on introduit un modèle qu'est la résultante (ou somme) des actions de contact en un point I de l'interface. Un premier exemple est donné à la Figure 2.1, où l'équilibre s'écrit $\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$. Un deuxième exemple est donné à la Figure 2.2 où l'équilibre s'écrit $\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$ et $\vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$.

Le solide subit donc une résultante $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. \vec{N} traduit l'existence de contact, \vec{T} le frottement de glissement. \vec{T} s'oppose au glissement, mais pas au mouvement.

2.1.2 Les trois effets possibles des frottements solides

On donne différents exemples :

1. la Figure 2.3 décrit un maintien à l'équilibre possible grâce aux frottements.
2. la Figure 2.4 décrit un premier mouvement gauche-droite où le frottement est responsable du mouvement, c'est une phase de non glissement.

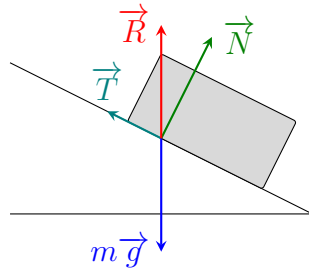


FIGURE 2.3 – Premier exemple d’effet possible des frottements solides.

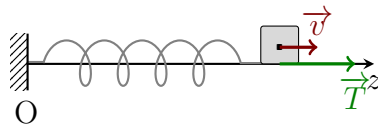


FIGURE 2.4 – Deuxième exemple d’effet possible des frottements solides. L’axe est un tapis roulant vers la droite.

Pour le mouvement droite-gauche, la phase de glissement existe à cause de la force de rappel du fil élastique. Les frottements sont responsables d’un freinage.

3. Lors de la marche à pied, pour se déplacer, il faut une composante tangentielle venant du sol sur les semelles des chaussures.
4. Les roues des voitures : lors de l’accélération (roues qui patinent), il y a des frottements moteurs, voir la Figure 2.5. Lors du freinage (roues bloquées), c’est l’inverse.

Ainsi, il y a trois effets possibles : maintien à l’équilibre, mise en mouvement et freinage.

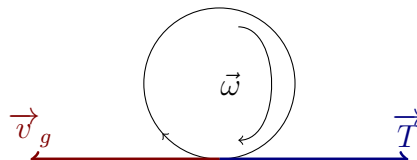


FIGURE 2.5 – Troisième exemple d’effet possible des frottements solides.

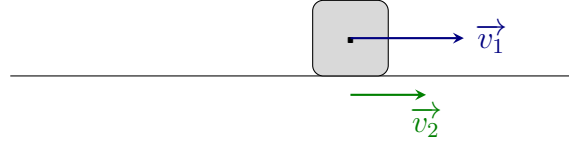


FIGURE 2.6 – Notion de vitesse de glissement.

2.1.3 Lois empiriques de Coulomb–Amontons du frottement solide

Notions de vitesse de glissement. La Figure 2.6 présente un solide en mouvement du solide (1) par rapport au sol (2). Alors la vitesse de glissement est définie par

$$\vec{v}_g(1/2) := \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Il faut noter que cette définition est indépendante du référentiel : si \mathcal{R}_2 est un référentiel lié à 2, alors

$$\vec{v}'_{1/2} - \vec{v}'_{2/\mathcal{R}_2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_g.$$

Cas du glissement. On est donc dans le cas où $\vec{v}_g \neq \vec{0}$. Alors

1. $\vec{T} \parallel \vec{v}_g$ et $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$: \vec{T} et \vec{v}_g sont de sens opposés.
2. On a $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$. f_d est le coefficient de frottement dynamique : il est indépendant de $\|\vec{N}\|$ et de la surface de contact, mais dépend de la nature des matériaux et de l'état des surfaces.

Cas du non glissement. On est donc dans le cas où $\vec{v}_g = \vec{0}$. Alors on a

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|,$$

où f_s est le coefficient de frottement statique. f_s et f_d ont les mêmes propriétés et en général, $f_s \geq f_d$.

Cône de frottement.

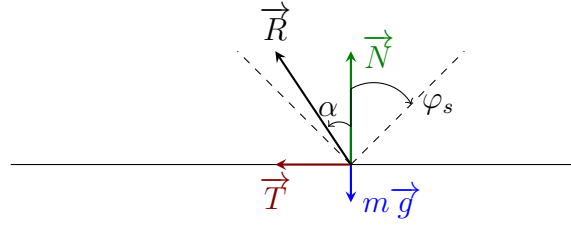


FIGURE 2.7 – Non glissement et cône de frottement statique.

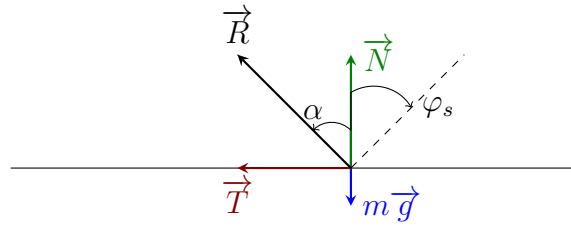


FIGURE 2.8 – Glissement et cône de frottement dynamique.

Non glissement. Soit φ_s tel que $f_s = \tan \varphi_s$. Alors

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\| \Leftrightarrow \tan(\alpha) \leq \tan \varphi_s \Leftrightarrow \alpha \leq \varphi_s.$$

Il y a non glissement si la résultante \vec{R} reste à l'intérieur du cône de frottement statique, voir la Figure 2.7.

Glissement. Soit φ_d tel que $f_d = \tan \varphi_d$. Alors

$$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \tan \varphi_d \Leftrightarrow \alpha = \varphi_d.$$

Il y a glissement si la résultante \vec{R} coïncide avec le bord du cône de frottement dynamique, voir la Figure 2.8.

Ordres de grandeur. Le plus souvent, on a $f_s \approx f_d := f$. On donne quelques valeurs de référence dans la Table 2.1.

2.1.4 Effet d'arc-boutement

Le modèle est présenté à la Figure 2.9. On prend pour axe (Ox) le plan incliné, orienté de gauche vers la droite, et l'axe (Oy) est perpendiculaire à

Type de contact	f
acier/acier	0.2
acier/garniture de freins	0.4
pneu/route sèche	0.8
acier/bois	0.5
bois/bois	0.5
téflon/matière lisse	0.04

TABLE 2.1 – Ordre de grandeur du coefficient de frottement pour quelques matériaux.

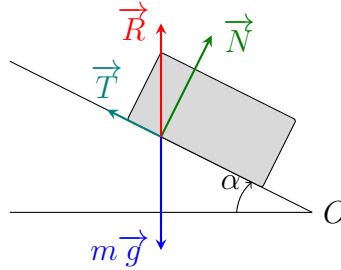


FIGURE 2.9 – Modèle d’arc-boutement.

(Ox) (orienté selon \vec{N}).

On se demande la condition sur α pour éviter tout glissement pour toute masse m . La condition de l’équilibre s’écrit $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$. En projetant sur (Ox) puis (Oy), on obtient

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - T &= 0, \\ -mg \cos \alpha + N &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\frac{T}{N} = \tan \alpha$. On a donc non glissement si $T \leq f_s N$ ou bien $\alpha \leq \varphi_s$. C’est l’effet d’arc-boutement : pas de glissement quelque soit la charge.

Condition de non-basculement. Les équations en translation et rotation s’écrivent

$$\begin{aligned} R^{\text{ext}} &= \vec{0} = \vec{R} + m\vec{g}, \\ \mathcal{M}_G^{\text{ext}} &= \vec{0} = \vec{G}G \wedge m\vec{g} + \vec{G}I \wedge \vec{I}, \end{aligned}$$

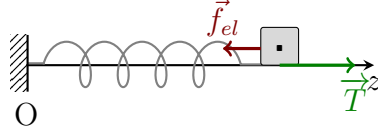


FIGURE 2.10 – Effet « stick-slip ». L'axe (Ox) est un tapis roulant vers la droite de vitesse $\vec{v} = V\vec{u}_x$

où G est le centre de masse de la masse m , et I est le point d'application de \vec{R} . Donc $\vec{GI} \parallel \vec{R} \parallel \vec{g}$. I est donc à la vertical de G . On a non-bascullement si I reste sur la surface de contact : la limite du basculement est quand I est sur l'arête. Ainsi, l'angle limite est tel que $\tan \alpha_{\text{lim}} = \frac{l}{h}$, où l est la longueur de la masse et h sa hauteur. Pour savoir s'il y a glissement ou basculement, il faut comparer $\frac{l}{h}$ et f_s .

2.1.5 Effet « stick-slip »

C'est typiquement ce qu'il se passe en utilisant un archet enduit de colophane. Dans ce cas, on a $f_s \gg f_d$ (ici $f_d \approx 0$). On considère le système présenté à la Figure 2.10, la raideur du ressort est notée k , la masse de l'objet m .

— Phase 1 : non glissement sur $[0, t_1]$. On a

$$m\ddot{x} = 0 = -kx + T,$$

doù $x(t) = Vt$. La fin de la phase 1 à t_1 a lieu quand $T = f_s N$. On a $T(t_1) = kx(t_1) = kVt_1$ et $N = mg$. Ainsi,

$$f_1 = f_s \frac{mg}{kV} = \frac{f_s g}{\omega_0^2 V},$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

— Phase 2 : on a glissement. $f_d \approx 0$ donc il y a glissement sans frottement. Ainsi,

$$m\ddot{x} = -kx + 0,$$

d'où $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Alors $x(t \geq t_1) = A \cos(\omega_0(t - t_1) + \alpha)$. La condition initiale est en $t = t_1$: on a $x(t_1) = Vt_1 = \frac{f_s g}{\omega_0^2} = A \cos \alpha$, et $\dot{x}(t_1) = V =$

$-A\omega_0 \sin \alpha$. Alors

$$\tan \alpha = -\frac{\omega_0 V}{f_s g}, \quad A^2 = \left(\frac{f_s g}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{V}{\omega_0} \right)^2.$$

On a fin du glissement à $t = t_2$, c'est-à-dire $Vg(t_2) = 0$, d'où $\dot{x}(t_2) = V$.
Alors

$$-A\omega_0 \sin (\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = V = -A\omega_0 \sin \alpha,$$

puis

$$\sin (\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = \sin \alpha,$$

d'où $\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha = \pi - \alpha$, ce qui donne enfin

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{2\alpha}{\omega_0}.$$

— Phase 3 : non glissement sur $[t_2, t_3]$, on a

$$\dot{x}(t_2 \leq t \leq t_3) = V,$$

d'où $x(t_2 \leq t \leq t_3) = V(t - t_2) + K$. La condition initiale donne

$$K = x(t_2) = A \cos (\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = A \cos (\pi - \alpha) = -A \cos \alpha.$$

Ainsi,

$$x(t_2 \leq t \leq t_3) = V(t - t_2) - A \cos \alpha.$$

Le fin de la phase 3 a lieu en t_3 quand $T(t_3) = f_s N = f_s mg$. Or $m\ddot{x} = 0 = T - kx$, donc $kx(t_3) = f_s mg$. Donc

$$kV(t_3 - t_2) - k\frac{f_s g}{\omega_0^2} = f_s mg.$$

Donc

$$t_3 - t_2 = 2\frac{f_s g}{\omega_0^2 V}.$$

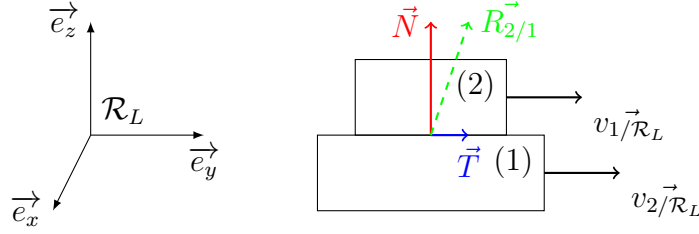


FIGURE 2.11 – Système modèle pour l'étude de la puissance des forces de frottement de glissement.

2.2 Puissance des forces de frottement de glissement

2.2.1 Puissance totale des actions de contact entre deux solides

On considère le système présenté à la Figure 2.11.

On a $(P_{2 \rightarrow 1})_{/R_L} = R_{2/1} \cdot v_{1/R_L}$ et $(P_{1 \rightarrow 2})_{/R_L} = -R_{2/1} \cdot v_{2/R_L}$. Ainsi, la puissance totale est

$$P_{\text{tot}} = R_{2/1} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = R_{2/1} \cdot \vec{v}_{g(1/2)} = \vec{T} \cdot \vec{v}_{g(1/2)} \leq 0.$$

Condition pour avoir $P_{\text{tot}} = 0$. On a

- soit $\vec{T} = \vec{0}$: il y a glissement sans frottement ($f_d = 0$) (exemple : ski, patinage) ;
- soit $\vec{v}_g = \vec{0}$: il y a roulement sans glissement (exemple : voiture qui démarre sans les roues qui patinent, freinage sans blocage).

2.2.2 Exemple d'un pavé mis en mouvement par un tapis roulant : bilan énergétique

On considère une boîte b mise sur un tapis roulant t dans un supermarché, comme décrit à la Figure 2.12. On fait l'hypothèse que $u > v$, ainsi on a $\vec{v}_g(b/t) = (v - u)\vec{u}_x$, d'où $\vec{T} = T\vec{u}_x$ avec $T > 0$.

Les valeurs des différentes puissances des forces de frottements de glissement selon le référentiel choisi sont données dans la Table 2.2.

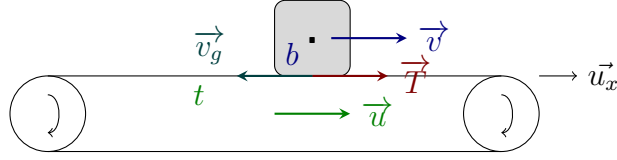


FIGURE 2.12 – Pavé mis en mouvement par un tapis roulant.

	$\mathcal{R}_{\text{supermarché}}$	$\mathcal{R}_{\text{tapis}}$	$\mathcal{R}_{\text{boîte}}$
$P_{t \rightarrow b}$	$T \times v > 0$	$T \times (v - u) < 0$	$T \times 0 = 0$
$P_{b \rightarrow t}$	$(-T) \times u < 0$	$(-T) \times 0 = 0$	$(-T) \times (u - v) > 0$
P_{tot}	$T \times (v - u) = T \times v_g < 0$	$T \times (v - u) < 0$	$T \times (v - u) < 0$

TABLE 2.2 – Puissance des forces de frottements de glissement selon certains référentiels.

Ainsi, même si elle sont motrices, les forces de frottement sont toujours globalement dissipatives : $P_{\text{tot}} < 0$. P_{tot} est indépendant du référentiel d'étude. On peut généraliser le résultat : les puissances intérieures P_{int} sont indépendantes du référentiel (en prenant la réunion des deux systèmes boîte/tapis).

Deuxième partie

Thermodynamique

Chapitre 3

Transferts thermiques par diffusion thermique

Sommaire

3.1	Phénoménologie des différents modes de transfert thermique	42
3.1.1	Les trois modes de transfert thermique	42
3.1.2	Le flux thermique surfacique	43
3.1.3	Continuité du flux surfacique	44
3.1.4	Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (ETL)	45
3.2	Conduction/Diffusion thermique	45
3.2.1	Vecteur densité de courant thermique	45
3.2.2	Loi empirique de Fourier	46
3.2.3	Équation locale de la conservation de l'énergie . .	47
3.2.4	Équation de la chaleur/diffusion thermique	51
3.2.5	Création d'entropie par diffusion	53
3.3	Propriétés de l'équation de diffusion	54
3.3.1	Linéarité	54
3.3.2	Irréversibilité	54
3.3.3	Échelles de temps et de distance de diffusion . . .	54
3.3.4	Conditions initiales. Conditions aux limites	55
3.3.5	Exemple de conditions aux limites : contact thermique parfait entre deux solides	56

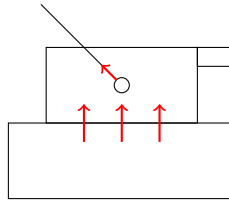


FIGURE 3.1 – Exemple d’un transfert thermique par conduction : casserole sur une plaque à induction avec une cuillère.

3.3.6	Exemple de résolution numérique de l’équation de la diffusion	56
3.4	Conducto-convection à l’interface d’un solide et d’un fluide	57
3.4.1	Transfert conducto-convectif : loi de Newton empirique	57
3.4.2	Application : ailette de refroidissement	59
3.4.3	Nombre de Biot : conduction versus conducto-convection	61
3.5	Conductance et résistance thermique en régime permanent	62
3.5.1	Analogie conduction thermique et conduction électrique en régime permanent	62

3.1 Phénoménologie des différents modes de transfert thermique

3.1.1 Les trois modes de transfert thermique

Conduction thermique

C’est un transfert thermique des zones les plus chaudes vers les plus froides **sans mouvement macroscopique du milieu**. C’est le seul transfert thermique possible dans **un solide opaque**. La Figure 3.1 donne un exemple.

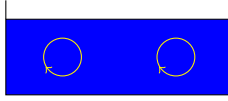


FIGURE 3.2 – Exemple d’un transfert thermique par convection : mouvements naturels dans un bassin d’eau chaude.

Convection thermique

C’est un transfert thermique dû aux mouvement macroscopique du milieu. C’est le transfert dominant **dans les fluides**, il peut être forcé ou naturel. La Figure 3.2 donne un exemple.

Rayonnement thermique

Tout corps opaque chauffé à une température T rayonne une puissance surfacique

$$\frac{dP}{dS} \propto T^4.$$

Un exemple est le rayonnement électromagnétique. Le rayonnement se propage dans un milieu transparent (notamment dans le vide).

Exemple 3.1 (Chauffage central). La pompe électrique implique une convection forcée dans le circuit. Le radiateur implique une conduction à travers la paroi, un rayonnement thermique et une convection naturelle du sol vers le plafond.

Exemple 3.2 (Feu de cheminée). L’écran de verre stoppe le rayonnement.

3.1.2 Le flux thermique surfacique

On considère une section infinitésimale dS avec une normale extérieure \vec{n} et une quantité de chaleur δQ qui passe à travers cette surface, voir la Figure 3.3.

Définition 3.1 (Puissance thermique et flux thermique surfacique). On définit **la puissance thermique** par

$$P_{\text{th}} = \frac{\delta Q}{dt},$$

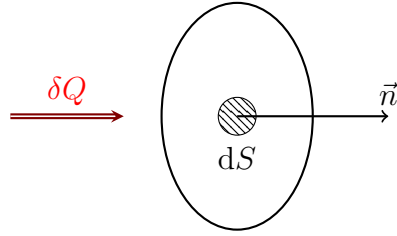


FIGURE 3.3 – Définition du flux thermique surfacique.

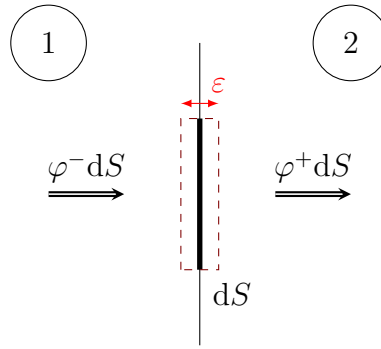


FIGURE 3.4 – Continuité du flux thermique surfacique.

qui est une quantité algébrique : si le transfert se fait selon \vec{n} , alors P_{th} , et sinon $P_{\text{th}} < 0$. ON a P_{th} et on définit donc **le flux thermique surfacique** φ par

$$P_{\text{th}} = \iint_S \varphi \, dS.$$

L'unité de φ est W m^{-2} .

3.1.3 Continuité du flux surfacique

On considère le système présenté à la Figure 3.4.

Le principe de la thermodynamique sur le tube de volume εdS s'écrit

$$\frac{dU}{dt} = \varphi^- dS - \varphi^+ dS.$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $U \rightarrow 0$ donc $\frac{dU}{dt} \rightarrow 0$. Ainsi, $\varphi^- = \varphi^+$: le flux surfacique est continu.

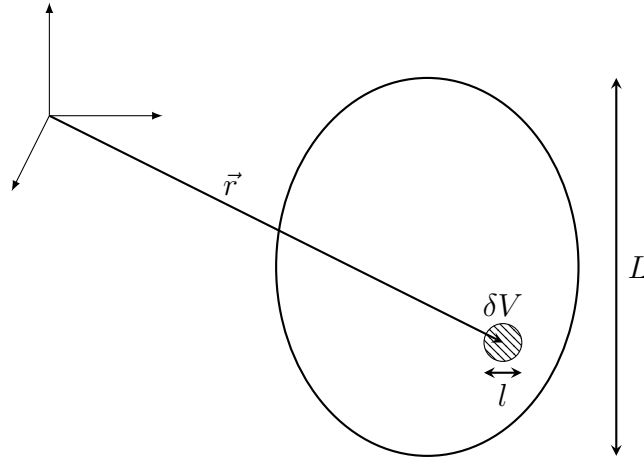


FIGURE 3.5 – Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.

3.1.4 Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (ETL)

S'il existe un transfert thermique, le système est hors d'équilibre. Dans ce cas, « la » température du système n'est pas définie à l'échelle macroscopique. À l'échelle microscopique, on fait donc l'hypothèse de l'ETL. Si d est la distance typique microscopique, l est la distance typique mésoscopique et L la distance typique macroscopique, alors

- $d \ll l$: on fait un traitement statistique,
- $l \ll L$: la description est locale,

voir la Figure 3.5.

On définit $T(\vec{r}, t)$ la température du volume mésoscopique δV à l'instant t . Ainsi, à l'échelle mésoscopique, on a l'hypothèse ETL, et à l'échelle macroscopique, il persiste un déséquilibre.

3.2 Conduction/Diffusion thermique

3.2.1 Vecteur densité de courant thermique

On modélise le caractère directionnel du flux thermique surfacique φ par un vecteur densité de courant thermique, voir la Figure 3.6.

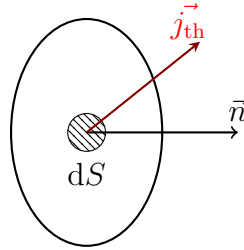


FIGURE 3.6 – Définition du vecteur densité de courant thermique.

Définition 3.2 (Vecteur densité de courant thermique). On définit le **vecteur densité de courant thermique** par la formule

$$\varphi = \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}.$$

Ainsi, la puissance thermique est

$$P_{\text{th}} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n} \, dS.$$

L'unité de \vec{j}_{th} est W m^{-2} .

3.2.2 Loi empirique de Fourier

On se demande quel est le lien entre \vec{j}_{th} et l'inhomogénéité de température T . On observe que

- si T est uniforme ($\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$), il y a un équilibre thermodynamique. Donc $\vec{j}_{\text{th}} = \vec{0}$ en tout point : pas de travail thermique.
- Si le système est hors d'équilibre, la température est non uniforme ($\overrightarrow{\text{grad}} T \neq \vec{0}$), il y a un transfert thermique des zones les plus chaudes vers les plus froides.

La loi de Fourier s'écrit

$$\vec{j}_{\text{th}}(\vec{r}, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(\vec{r}, t).$$

λ est la **conductivité thermique**. Son unité est $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Remarque 3.1. — En régime permanent dans le cas de l'électrostatique, on a

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

		λ (W m ⁻¹ K ⁻¹)
Métaux	Cuivre	400
	Acier	15
Non métaux	Verre	1
	Béton	0.9
	Bois	0.2
Liquides	Eau	0.6
Gaz	Air	0.02

TABLE 3.1 – Quelques valeurs de référence pour la conductivité thermique.

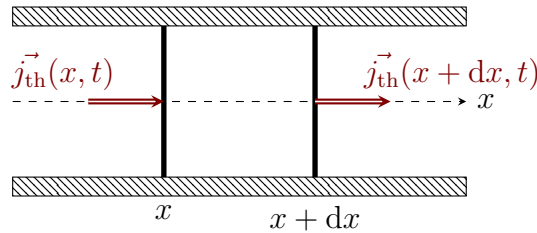


FIGURE 3.7 – Équation locale de la conservation de l'énergie, cas unidimensionnel en géométrie cartésienne.

- L'expression est valable que si T varie assez lentement dans le temps et dans l'espace.

On donne quelques ordres de grandeurs de λ dans la Table 3.1.

On note que les métaux sont de bons conducteurs, et dans ce cas on a $\lambda/\sigma \approx$ constante : ce sont les électrons de conduction qui s'occupent du travail. Les gaz sont quant à eux de très bons isolants (tout comme les matériaux poreux).

3.2.3 Équation locale de la conservation de l'énergie

Cas 1D en géométrie cartésienne

On fait l'hypothèse que la température dépend de la position x et de l'instant t , et que $\vec{j}_{th} = j_{th}\vec{u}_x$, voir la Figure 3.7.

Bilan énergétique sur $[x, x + dx]$. On a

$$\begin{aligned} d(\delta U) &= \delta U(t + dt) - \delta U(t), \\ &= \delta Q^{\text{ext}}, \\ &= j_{\text{th}}(x, t) S dt - j_{\text{th}}(x + dx, t) S dt. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = S (j_{\text{th}}(x, t) - j_{\text{th}}(x + dx, t)) \approx -S dx \frac{\partial j_{\text{th}}(x, t)}{\partial x}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta U) &= \frac{d}{dt}(\delta mcT(x, t)), \\ &= \delta mc \frac{\partial T}{\partial t}(x, t), \\ &= \mu c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) S dx, \end{aligned}$$

où $[c] = \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ et on a utilisé le fait que l'on considèrerait une phase condensée. Ainsi,

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = 0.}$$

Géométrie cylindrique

On fait l'hypothèse que la température $T(r, t)$ dépend juste du rayon r et du temps t , et que $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r, t) \vec{u}_r$, voir la Figure 3.8.

On a, via un développement limité de $r j_{\text{th}}(r, t)$,

$$\delta P_{\text{th}}^{\text{ext}} = j_{\text{th}}(r, t) \times 2\pi r L - j_{\text{th}}(r + dr, t) \times 2\pi(r + dr)L = -2\pi L dr \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\text{th}}(r, t)).$$

Le premier principe s'écrit

$$\frac{d}{dt}(\delta U) = \delta P_{\text{th}}^{\text{ext}} = -2\pi L dr \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\text{th}}(r, t)) = u_{\text{vol}}(r, t) \times 2\pi r dr L.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{vol}}(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\text{th}}(r, t)) = 0.}$$

En phase condensée, on a $\frac{\partial u_{\text{vol}}(r, t)}{\partial t} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$, où $[c] = \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

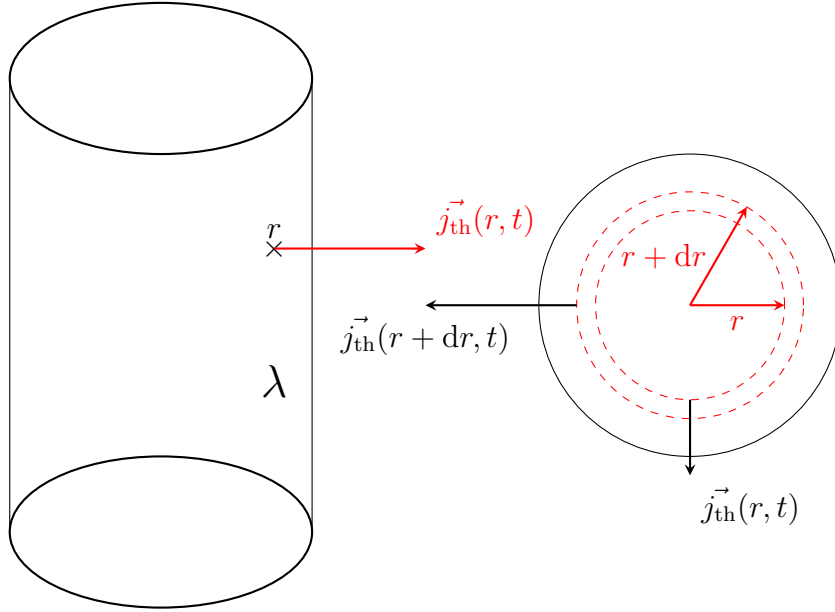


FIGURE 3.8 – Équation locale de la conservation de l'énergie en géométrie cylindrique.

Géométrie sphérique

On fait l'hypothèse que la température $T(r, t)$ dépend juste du rayon r et du temps t , et que $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r, t)\vec{u}_r$, voir la Figure 3.9. On considère l'espace entre deux sphères de rayon r et $r + dr$.

En effectuant un développement de Taylor de $r^2 j_{\text{th}}(r, t)$, on a

$$\begin{aligned} \delta P_{\text{th}}^{\text{ext}} &= j_{\text{th}}(r, t) \times 4\pi r^2 - j_{\text{th}}(r + dr, t) \times 4\pi(r + dr)^2, \\ &= -4\pi dr \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_{\text{th}}(r, t)). \end{aligned}$$

Le premier principe s'écrit

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \delta P_{\text{th}}^{\text{ext}} = 4\pi r^2 dr \frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_{\text{th}}(r, t)) = 0.}$$

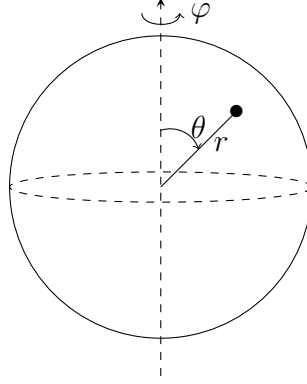


FIGURE 3.9 – Équation locale de la conservation de l'énergie en géométrie sphérique.

Généralisation en 3D dans une géométrie quelconque

Dans un volume \mathcal{V} quelconque, on écrit

$$U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{\text{vol}}(\vec{r}, t) d\tau,$$

$$U(t + dt) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{\text{vol}}(\vec{r}, t + dt) d\tau,$$

où $d\tau$ est un volume infinitésimal. Alors

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t}(\vec{r}, t) dt d\tau.$$

On fait l'hypothèse que l'on peut « sortir » le terme dt de l'intégrale. On écrit

$$P_{\text{th}}^{\text{ext}} = - \oint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS,$$

car il y a une perte si $\vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} > 0$. Le premier principe s'écrit

$$\frac{dU}{dt} = P_{\text{th}}^{\text{ext}},$$

et en utilisant le théorème d'Ostrogradski,

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{\text{vol}}(\vec{r}, t)}{\partial t} d\tau = - \oint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{j}_{\text{th}}(\vec{r}, t) d\tau.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = 0.}$$

Généralisation avec terme source

En plus de la conduction thermique, on a un apport énergétique en volume.

Exemple 3.3. L'effet Joule ajoute une puissance dû au travail électrique

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} > 0.$$

Exemple 3.4. L'énergie dégagée par une réaction chimique exothermique rajoute une puissance

$$P_{\text{vol}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \Delta_r H^0 \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

On adapte donc le bilan précédent en écrivant

$$\frac{dU}{dt} = P_{\text{th}}^{\text{ext}} + \iiint_{\mathcal{V}} P_{\text{vol}}(\vec{r}, t) d\tau,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}}.}$$

Exemple 3.5. Dans le cas de l'effet Joule, on a

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} > 0.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \text{div } \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E} < 0.$$

Cela caractérise le changement de point de vue champ/conducteur.

3.2.4 Équation de la chaleur/diffusion thermique

On fait l'hypothèse qu'il n'y a que de la conduction pure. L'idée est que l'on a deux ingrédients : la loi de Fourier, et l'équation locale de la conservation de l'énergie. On peut donc combiner les choses pour obtenir l'équation de la chaleur.

Cas 1D en géométrie cartésienne

On a

$$\vec{j}_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \text{grad } T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \vec{u}_x,$$

et

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = 0.$$

Ainsi, en posant

$$D = \frac{\lambda}{\mu c},$$

le coefficient de diffusion thermique, on a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

L'unité de D est le m s^{-2} .

Géométrie cylindrique

On écrit

$$\vec{j}_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r,$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\text{th}}(\vec{r}, t)) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Géométrie sphérique

On écrit

$$\vec{j}_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r,$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_{\text{th}}(\vec{r}, t)) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Géométrie quelconque

On écrit

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\text{th}} &= -\lambda \vec{\text{div}} T, \\ \mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} &= 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T.}$$

Avec terme source

C'est la même chose sauf que l'on a

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = P_{\text{vol}},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T + \frac{P_{\text{vol}}}{\mu c}.}$$

3.2.5 Création d'entropie par diffusion

On se place dans le cas unidimensionnel et que l'on est en régime stationnaire. On a donc $T(x)$ et $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$. On fait l'hypothèse que l'on a $\frac{dT}{dx} < 0$. On reprend la Figure 3.7 et on applique le second principe à $[x, x + dx]$, on a

$$d(\delta S) = \delta S_e + \delta S_c,$$

pendant dt . Comme on est en régime stationnaire, on a $d(\delta S) = 0$. Ainsi, $\delta S_c = -\delta S_e$. Or, en notant A la section verticale, on a

$$\delta S_e = \frac{j_{\text{th}}(x) A dt}{T(x)} + \frac{-j_{\text{th}}(x + dx) A dt}{T(x + dx)}.$$

On est en régime permanent, on a donc

$$\frac{\partial u_{\text{vol}}}{\partial t} = 0 = -\text{div } \vec{j}_{\text{th}} = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = 0.$$

Donc

$$j_{\text{th}}(x) = \text{constante} = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}.$$

On a alors

$$\delta S_e = j_{\text{th}} A dt \left[\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T(x + dx)} \right] = A dt \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \right) dx \frac{\frac{dT}{dx}}{T(x)^2},$$

donc $\delta S_e = -\delta S_c < 0$, et ce peu importe le signe de $\frac{dT}{dx}$. Ainsi, $\delta S_c > 0$: **c'est le caractère fondamentalement irréversible des phénomènes de diffusion.**

3.3 Propriétés de l'équation de diffusion

3.3.1 Linéarité

On a le théorème de superposition. Une analyse harmonique est donc possible.

3.3.2 Irréversibilité

Soit un processus diffusif décrit par $T(x, t)$ vérifiant

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Posons $t' = -t$. Soit $\tilde{T}(t', x) = T(-t, x)$. Alors

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t'} = \frac{\partial T}{\partial(-t)} = -\frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t'} = -D \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}.$$

Ce n'est donc pas une équation de diffusion.

3.3.3 Échelles de temps et de distance de diffusion

On se demande quelle est la durée typique τ du phénomène de diffusion sur une distance L .

- Réponse 1 : un seul paramètre dimensionnel dans l'équation de propagation. On cherche $\tau = f(L, D)$ si et seulement si $\tau = \text{constante} \times L^\alpha D^\beta$, d'où $\beta = -1$ et $\alpha = 2$ par analyse dimensionnelle. Donc

$$\tau \approx \frac{L^2}{D}.$$

- Réponse 2 : équation de la chaleur adimensionnelle. On note T_0 la température caractéristique du problème. On note $T^*(x, t) = T(x, t)/T_0$, $x^* = x/L$ et $t^* = t/\tau$. Alors

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{D\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}.$$

Si les échelles τ et L sont adaptées, on a

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \approx \frac{\partial T^*}{\partial t^*},$$

et donc

$$\tau \approx \frac{L^2}{D}.$$

Nombre de Fourier

On note le **nombre de Fourier**

$$F_0(t) := \frac{t}{\tau} = \frac{Dt}{L^2}.$$

Ainsi,

- Si $F_0 \ll 1$, on a $t \ll \tau$: le phénomène de diffusion thermique est trop lent pour avoir lieu. On est dans l'hypothèse adiabatique.
- Si $F_0 \gg 1$, on a $t \gg \tau$: la diffusion est quasi instantanée.

3.3.4 Conditions initiales. Conditions aux limites

En 1D, l'équation aux dérivées partielles et du premier ordre par rapport à t et du second ordre par rapport à x : il y a donc une condition initiale et deux conditions aux limites. Par exemple, $T(x, 0) = T_0(x)$ pour tout x et $T(0, t) = T_1$, $T(L, t) = T_2$ pour tout t .

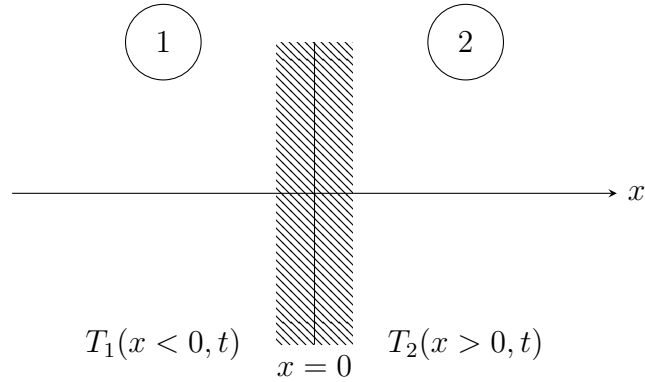


FIGURE 3.10 – Exemple de conditions aux limites pour la diffusion thermique.

3.3.5 Exemple de conditions aux limites : contact thermique parfait entre deux solides

On considère la Figure 3.10.

La continuité du flux thermique s'écrit $j_{\text{th}}(x = 0^-, t) = j_{\text{th}}(x = 0^+, t)$, donc

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0^-, t) = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0^+, t).$$

Le contact thermique parfait impose la continuité de la température T . Ainsi,

$$T_1(0^-, t) = T_2(0^+, t).$$

3.3.6 Exemple de résolution numérique de l'équation de la diffusion

Problème bidimensionnel en régime permanent

$T(x, y)$ est régit par $\Delta T = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Avec une discrétisation donnée par la Figure 3.11.

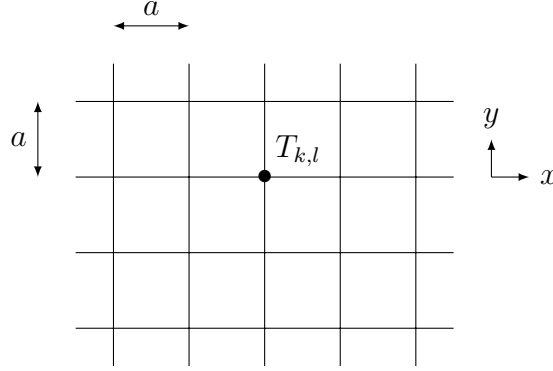


FIGURE 3.11 – Discrétisation de l'équation diffusion bidimensionnelle.

On écrit

$$T(x \pm a, y) = T(x, y) \pm a \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pm a^3 \frac{\partial^3 T}{\partial^3 x} + \mathcal{O}(a^4),$$

$$T(x, y \pm a) = T(x, y) \pm a \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \pm a^3 \frac{\partial^3 T}{\partial^3 y} + \mathcal{O}(a^4).$$

Ainsi,

$$T_{k+1,l} + T_{k-1,l} + T_{k,l+1} + T_{k,l-1} = 4T_{k,l} + \mathcal{O}(a^4).$$

3.4 Conducto-convection à l'interface d'un solide et d'un fluide

3.4.1 Transfert conducto-convectif : loi de Newton empirique

Flux surfacique conducto-convectif

On fait l'hypothèse que le fluide est brassé par convection : T_f est uniforme, voir la Figure 3.12.

Le flux surfacique conducto-convectif est proportionnel à $T_s - T_f$. La loi de Newton s'écrit dans ce cas

$$\varphi_{cc} = h (T_s - T_f).$$

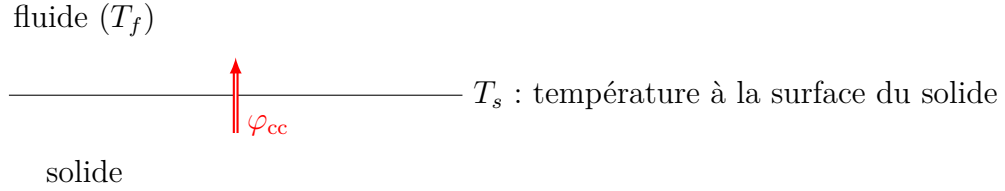


FIGURE 3.12 – Flux surfacique conducto-convectif.

L'unité de φ_{cc} est W m^{-1} et est orienté du solide vers le fluide. Le facteur h est le coefficient de transfert conducto-convectif d'unité $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-2}$. Ainsi,

$$P_{s \rightarrow f} = \varphi_{cc} \times S = hS (T_s - T_f).$$

Ordre de grandeur. Pour le gaz, $h \sim 5$ à $30 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-2}$, pour le liquide, $h \sim 400$ à $10000 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-2}$, les deux pour la convection naturelle. Si le convection est forcée, on a un rapport

$$\frac{h_{\text{forcée}}}{h_{\text{naturelle}}} \sim 10 \text{ à } 50.$$

Interprétation

Lors d'un écoulement fluide, il y a deux zones : une proche du sol, dite « couche limite ». L'autre est lointaine, c'est l'écoulement extérieur. Alors

$$\varphi_{cc} = j_{\text{th}, C.L} = -\lambda_f \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{fluide}} \approx -\lambda_f \frac{T_f - T_s}{\delta},$$

où $\delta \ll$ taille macroscopique de l'écoulement (taille de la couche limite). Dans la couche limite, le transfert thermique (pas dû à la convection mais à la conduction thermique dans la couche limite) a lieu perpendiculairement aux mouvement du fluide. Donc

$$\varphi_{cc} \approx \frac{\lambda_f}{\delta} (T_s - T_f),$$

d'où

$$h = \frac{\lambda_f}{\delta}.$$

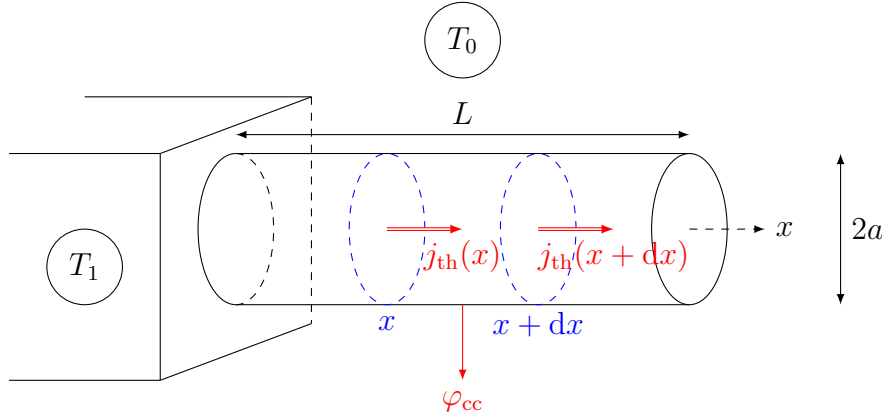


FIGURE 3.13 – Application du flux conducto-convectif : ailette de refroidissement.

Comme $h \propto \lambda_f$, on a

$$h_{\text{liquide}} \gg h_{\text{gaz}}.$$

Comme $h \propto 1/\delta$, et δ diminue si le brassage augmente, on a

$$h_{\text{forcée}} \gg h_{\text{naturelle}}.$$

3.4.2 Application : ailette de refroidissement

On considère le système présent à la Figure 3.13. On fait l'hypothèse que l'on est en régime stationnaire, que le problème est unidimensionnel (T ne dépend que de x), et que la longueur de l'ailette est « infinie ».

Profil $T(x)$

On ne peut pas utiliser l'équation de la chaleur, il faut passer par un bilan d'énergie local sur $[x, x + dx]$. En régime permanent, on a

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta U)}{dt} &= 0, \\ &= P_{\text{th}}^{\text{ext}}, \\ &= j_{\text{th}}(x)\pi a^2 - j_{\text{th}}(x + dx)\pi a^2 - h(T(x) - T_0)2\pi a dx. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\pi a^2 \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} dx + h(T(x) - T_0) = 0.$$

On pose $\theta(x) = T(x) - T_0$, et $\delta := \sqrt{\frac{a\lambda}{2h}}$, et on obtient

$$\theta(x) = \alpha e^{-x/\delta} + \beta e^{x/\delta}.$$

On a $\beta = 0$ car θ est fini en $+\infty$, et $\theta(0) = T_1 - T_0 = \alpha$. Finalement,

$$\boxed{T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-x/\delta}.}$$

Notons que si l'ailette est « finie », c'est-à-dire $L \sim \delta$, la condition au limite est alors donnée par la **continuité du flux en $x = L$** , c'est-à-dire

$$\varphi_{\text{cc}}(L) = j_{\text{th}}(L),$$

soit

$$\boxed{h(T(L) - T_0) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_L.}$$

Efficacité

Sans l'ailette, la puissance thermique est $P_{\text{sans}} = h(T_1 - T_0)S$, et la puissance avec l'ailette est $P_{\text{avec}} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 S$. Ainsi, l'efficacité est

$$\begin{aligned} \eta &:= \frac{P_{\text{avec}}}{P_{\text{sans}}}, \\ &= \frac{\lambda \left(\frac{T_1 - T_0}{\delta} \right) S}{h(T_1 - T_0)S}, \\ &= \frac{\lambda}{\delta h} = \sqrt{\frac{2\lambda}{ah}}. \end{aligned}$$

On a $\eta \sim 30$ pour $\lambda \approx 100 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $h \approx 10 \text{ W m}^{-1}$ et $a \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

3.4.3 Nombre de Biot : conduction versus conducto-convection

Validité de l'hypothèse de l'ailette

L'hypothèse de l'ailette est que la température est uniforme sur une section. Si T n'est pas uniforme sur une section, on décompose le flux $\vec{j}_{\text{th}} = \vec{j}_{\text{th},\perp} + \vec{j}_{\text{th},\parallel}$ en ses composantes selon l'ailette (l'axe x) et selon l'axe perpendiculaire. Ainsi, si

$$\frac{\|\vec{j}_{\text{th},\perp}\|}{\|\vec{j}_{\text{th},\parallel}\|} \ll 1,$$

alors l'approximation de l'ailette est bonne. Par continuité du flux, on a

$$\|\vec{j}_{\text{th},\perp}\| = \varphi_{\text{cc}} = h(T_S(x) - T_0),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\|\vec{j}_{\text{th},\perp}\|}{\|\vec{j}_{\text{th},\parallel}\|} &\approx \frac{h(T(x) - T_0)}{-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}}, \\ &= \frac{h(T_1 - T_0)e^{-x/\delta}}{\frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_0)e^{-x/\delta}}, \\ &= \frac{h\delta}{\lambda} = \sqrt{\frac{ah}{2\lambda}} \sim 10^{-2} \ll 1. \end{aligned}$$

Nombre de Biot

On note

$$B_i := \left(\frac{\varphi_{\text{cc},\perp}}{j_{\text{th},\parallel}} \right)^2 = \frac{ah}{2\lambda} \approx \frac{ah}{\lambda}.$$

Si $B_i \ll 1$, l'hypothèse de l'ailette est bonne. Le milieu thermique est mince, et c'est à favoriser pour augmenter l'efficacité η . Si $B_i \gg 1$, l'hypothèse de l'ailette est mauvaise : le milieu thermique est épais.

3.5 Conductance et résistance thermique en régime permanent

3.5.1 Analogie conduction thermique et conduction électrique en régime permanent