

相対論的量子力学／場の理論序説

佐藤亮介

2025 年 6 月 18 日

2025 年前期の相対論的量子力学／場の理論序説の講義ノートです。誤植や間違いなど見つけた場合は rsato@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp までお願いいたします。講義に関する情報は <http://kabuto.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~rsato/> や CLE をご覧ください。教科書は特に指定しませんが、以下の文献、教科書、講義ノートが参考になると思います。

- 相対論的量子力学（西島和彦、培風館）
- 場の量子論: 不変性と自由場を中心にして（坂本真人、裳華房）
- 演習 場の量子論（柏太郎、SGC books）
- スピンはめぐる（朝永振一郎、みすず書房）
- Relativistic quantum physics : from advanced quantum mechanics to introductory quantum field theory (Tommy Ohlsson, Cambridge University Press)
- <http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~yamaguch/j/pdf/rqmnote.pdf>
- <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/four.pdf>
- [http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/QFT/qftilec\(kazama\)2012.pdf](http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/QFT/qftilec(kazama)2012.pdf)

目 次

0	講義の概要	4
0.1	特殊相対論と量子力学を合体させたい	5
0.2	最終目標は場の量子論	6
1	復習と準備	6
1.1	自然単位系	6
1.2	ローレンツ変換	7
1.2.1	z 軸方向に相対運動する座標系	7
1.2.2	一般的なローレンツ変換	8
1.3	ベクトル、テンソル、いろいろ	9
1.3.1	反変ベクトル、共変ベクトル、添え字の上げ下げ	9

1.3.2	反変ベクトル、共変ベクトル、テンソル	10
1.3.3	微分演算子	11
1.3.4	電荷密度、電流	12
1.4	マックスウェル方程式（特殊相対論風に）	13
1.5	まとめ	15
1.6	（非相対論的）量子力学	15
2	クラインゴルドン（Klein-Gordon）方程式	16
2.1	クラインゴルドン方程式の平面波解	17
2.2	確率解釈できるか？	17
3	ディラック（Dirac）方程式	18
3.1	\hat{H} を行列にすれば上手くいきそう	19
3.2	$\beta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ の解	20
3.3	後々のためディラック方程式ちょっと書き直す	22
3.4	連続の方程式をチェックしよう	23
3.5	ディラック方程式の平面波解	23
3.6	ディラック（Dirac）の海、反粒子	25
3.7	積み残した疑問	26
4	ローレンツ変換とディラック方程式	26
4.1	方程式とローレンツ変換	26
4.1.1	クラインゴルドン方程式	26
4.1.2	ディラック方程式はどう？	27
4.2	スピノルの無限小ローレンツ変換	28
4.2.1	無限小ローレンツ変換の性質	28
4.2.2	無限小ローレンツ変換に対応する $U(\Lambda)$	28
4.3	スピノルの有限ローレンツ変換	30
4.3.1	z 軸まわりの回転	31
4.3.2	z 軸方向のブースト	32
4.4	ディラック方程式とスピン	34
5	群と表現（スピン角運動量とか昇降演算子とかの復習を添えて）	35
5.1	群の定義	35
5.2	群の例	35
5.2.1	離散群の例	35
5.2.2	三次元空間の回転	36
5.3	無限小回転と Lie 代数	36
5.4	表現	37
5.5	交換関係 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ を満たす、三つ組みの行列 J_i を分類してみよう	38
5.6	2π 回して元に戻るか？: $SO(3)$ と $SU(2)$	41

6	ローレンツ群とその表現	42
6.1	ローレンツ群の代数	43
6.2	ローレンツ群の表現の一般論 (A スピン、B スピン)	44
6.3	ローレンツ群の既約表現の具体例	45
6.3.1	スカラー	45
6.3.2	ワイルスピノル	45
6.3.3	ベクトル	46
6.4	ディラック方程式のスピノルはなんだったのか	46
6.4.1	ローレンツ群の表現としてのディラックスピノル	46
6.4.2	質量 0 の時のディラック方程式	47
6.4.3	2つのワイルスピノルの物理的意味	48
6.5	カイラリティとヘリシティのまとめ	49
6.6	パリティ	49
6.7	ローレンツ群のまとめ	50
7	電磁場中のディラック (Dirac) 方程式	50
7.1	ゲージ対称性について復習	50
7.1.1	古典電磁気学のゲージ対称性	50
7.1.2	電磁場中の古典粒子	51
7.1.3	電磁場中の量子力学	52
7.1.4	量子力学とゲージ対称性	52
7.2	電磁場中のディラック (Dirac) 方程式と g 因子	52
7.3	g 因子の測定値と比較してみよう	54
7.3.1	電子とミュー粒子	54
7.3.2	陽子	55
7.4	ディラック方程式の限界	55
8	ローレンツ不変な自由スカラー場の量子論	56
8.1	相互作用しないスピン 0 粒子ってどんな感じ?	56
8.2	正準量子化	57
8.2.1	自由スカラー場のラグランジアン	57
8.2.2	共役運動量とハミルトニアン	58
8.2.3	演算子への置き換え	59
8.3	生成消滅演算子	60
8.3.1	場を生成消滅演算子で書こう	60
8.3.2	ハミルトニアンを生成消滅演算子で書こう	61
8.4	ネーターの定理と保存量	62
8.4.1	複素スカラー場	62
8.4.2	時間空間並進 (ハミルトニアン、運動量演算子)	63
8.5	局所因果律と異時刻交換関係	64
8.5.1	space-like な点	64

8.5.2 time-like な点	65
8.6 局所因果律と反粒子	65
8.7 相互作用のある場の量子論にむけて	65
A ローレンツ変換の簡単なまとめ	66
A.1 導出その 1	66
A.2 導出その 2	68
B $SU(2)$ リー代数について	69
C $SO(3)$ と $SU(2)$	73
C.1 $SU(2)$	73
C.2 $SU(2)$	74
C.3 $SO(3)$ と $SU(2)$ を比べてみよう	74
D 一次元弦の量子論	75
D.1 連成ばねの古典力学と連続極限	75
D.1.1 連成ばねについて復習	75
D.1.2 連続極限としての古典場	76
D.1.3 古典場の解析力学	77
D.2 連成ばねの量子力学と連続極限	79
D.2.1 調和振動子について復習	79
D.2.2 連成ばねの正準量子化	81
D.2.3 連続極限としての量子場	82
D.3 一次元弦の量子論	83
D.3.1 一次元弦の正準量子化	83
D.3.2 $L \rightarrow \infty$ 極限	85
D.4 有効理論という考え方	86
E スカラー場の異時刻交換関係	86

0 講義の概要

この講義のおおまかな学習目標は、

特殊相対論と（非相対論的）量子力学を復習しつつ、場の量子論の入口までたどり着く。

というものである。より具体的なトピックの内容としては、

- ディラック方程式とスピノル、その物理的解釈
- ローレンツ対称性、ローレンツ群とその表現
- 電磁場との相互作用とゲージ対称性の役割

- 量子力学の極限としての場の量子論
- 自由スカラー場の量子論

を学習する。ディラック方程式はある意味で相対論版のシュレーディンガー方程式とみなすことができ、スピンという概念が自然にあらわれるなど面白い性質がある。また、物理学において対称性は理論の性質を調べる道具として非常に重要な概念であるが、相対論的量子力学で重要な役割を果たすローレンツ対称性とゲージ対称性について学ぶ。さらに、場の量子論の一番簡単な例として、自由スカラー場の量子論を学ぶ。

0.1 特殊相対論と量子力学を合体させたい

	$v \ll c$	$v \sim c$
マクロ	ニュートン力学	特殊相対論
ミクロ	(非相対論的) 量子力学	場の量子論

これまでの物理学科の講義で、

- 原子を始めとするミクロな世界では、古典力学は必ずしも正しい記述を与えることはなく、量子力学を使う必要があること
- 光の速さに近い速度があらわれる状況では、ニュートン力学は必ずしも正しい記述を与えることはなく、特殊相対論を使う必要があること

の2つを学んだ。すると、ミクロな世界で光に近い速度が出てきたらどうなるか、すなわち、特殊相対論と量子力学を同時に使うことはあるだろうか、というのが自然な疑問として浮かび上がるのではないだろうか。¹

また、特殊相対論と量子力学を同時に使う必要性は、粒子の生成・消滅といった、粒子の種類や数が変化する反応が自然界で見られることから分かる。例えば、エネルギーが 1.02 MeV を超えるガンマ線は、物質と相互作用して電子・陽電子対を生成する。また、原子核のベータ崩壊もそのような例である。放射性炭素年代測定で使用する炭素 14 は、半減期 5730 年で ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$ という崩壊をするが、この過程で粒子の数は変化している。一方、特殊相対論の議論によれば、運動量が 0 で粒子であっても静止質量エネルギーを持っているはずである。ということは、エネルギー保存則により、粒子が生成あるいは消滅する過程では、ある粒子の静止質量エネルギーが他の粒子の運動エネルギーとして転換されたりその逆のことが起きているはずだ。このような状況では特殊相対論を議論に組み込む必要がある。また、電子などのミクロな粒子は量子力学に従って記述される。よって、特殊相対論と量子力学を同時に考慮に入れる必要がある。

相対論的量子力学の重要な帰結のひとつに反粒子の存在がある。反粒子は、ある粒子と質量が等しく、電荷の符号が逆で、性質のよく似た²粒子である。たとえば、電子の反粒子は陽電子、陽子の反粒子は反陽子、などである。(反粒子は粒子自分自身でもよいが、その場合は電荷を持たない中性粒子となる。中性パイ中間子、光子、ヒッグス粒子、などがその例。³) ディラック方程式の負エネルギー解は、反粒子として解釈される。また、場の量子論では、反粒子の存在は因果律を満たすように相互作用させるために必要である。

¹ちなみに、一般相対論(重力)と量子力学を同時に使うとどうなるか、は人類未解決の難問。

²粒子と反粒子の性質が“同じ”かどうかについては、C 対称性、CP 対称性がキーワード。

³ニュートリノは電荷を持たない中性粒子であるが、反粒子が自分自身(ニュートリノがマヨラナ粒子)かそうでない(ニュートリノがディラック粒子)かは未だに良く分かっていない!それを調べるための実験が阪大でも行われている。<https://www.rcnp.osaka-u.ac.jp/candles/>

0.2 最終目標は場の量子論

特殊相対論を取り入れた量子力学をちゃんとやるには、(相対論的) 場の量子論をやる必要がある。本講義では場の量子論についてカバーすることはできない⁴が、なぜ場の量子論をやる必要があるかについて理解すること、場の量子論のごく簡単な例を学ぶこと、が本講義の目標である。

1 復習と準備

相対論的量子力学を学ぶために必要な知識を簡単に復習しつつ準備しよう。

1.1 自然単位系

量子力学の計算にはディラック定数 \hbar (もしくはプランク定数 $h = 2\pi\hbar$)、特殊相対論の計算には光の速度 c が大事だった。⁵

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-25} \text{ GeV} \cdot \text{s}, \quad (1.1)$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (1.2)$$

相対論的量子力学をやると、いろんなところに \hbar と c が出てきてすごく面倒。思い切って $\hbar = c = 1$ という単位系を採用してしまおう。これまでは [質量]、[長さ]、[時間] の3つの次元があったが、 $\hbar = 1$ と $c = 1$ を採用したせいで、3つの次元に関係がつく。たとえば、 $c = 1$ により [長さ] と [時間] が同じ次元であることが分かる。また、 $\hbar/c^2 = 1.17 \times 10^{-51} \text{ kg s}$ であるから、[質量] の次元は [時間] の次元の逆数。まとめると、

$$[\text{質量}] = \frac{1}{[\text{長さ}]} = \frac{1}{[\text{時間}]} \quad (1.3)$$

という関係がつく。例えば、 $c = 1$ を使うと、

$$1 \text{ s} = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \quad (1.4)$$

例えば、 $\hbar = 1$ を使うと、

$$1 \text{ s}^{-1} = 6.58 \times 10^{-25} \text{ GeV} \quad (1.5)$$

などである。自然単位系を採用したことにより、次元を持つ量が [質量] の何乗かで数えられるようになる。これを質量次元 (mass dimension) と呼ぶ。質量は質量次元 1、長さは質量次元 -1 、時間は質量次元 -1 、速度は質量次元 0。また、

$$\hbar c = 0.197 \text{ GeV fm}. \quad (1.6)$$

という公式を憶えておくと便利。⁶

⁴典型的な場の量子論の教科書は 500 ページ以上あり、通常、素粒子理論を専攻する大学院生は教科書を読み込むことで修士の一年目を丸々溶かすことになる。

⁵ $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ であり、 $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ 。1 eV は、素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ が 1 V の電位差で得るエネルギーで、 $1 \text{ eV} = 1 \text{ C} \times 1 \text{ V}$ 。

⁶忘れた時は google で「hbar * c in GeV * fm」と検索すると、「0.197326979 GeV * fm」という結果が返ってくる。この例に限らず google の単位換算機能はすごく便利。

特に、エネルギーは質量次元 1。自然単位系を導入する前は、粒子の静止エネルギーを $E = mc^2$ と書いていたが、自然単位系を導入すると、 $E = m$ とかける。粒子の質量を keV、MeV、GeV といったエネルギーの単位で書くのがならわし。例えば、

$$m_{\text{電子}} = 511 \text{ keV}, \quad (1.7)$$

$$m_{\text{陽子}} = 938 \text{ MeV}, \quad (1.8)$$

$$m_{\text{ヒッグス粒子}} = 125 \text{ GeV}. \quad (1.9)$$

などなど。他の例は、Particle Data Group(<https://pdglive.lbl.gov/>) とか、Wikipedia(https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles) をみてみよう。

1.2 ローレンツ変換

まずは座標のローレンツ変換について簡単に復習しておこう。

1.2.1 z 軸方向に相対運動する座標系

ある慣性系 O に対し、相対速度 v で z 軸方向に等速運動している別の慣性系 O' を考えよう。学部 1 年で習う力学（ニュートン力学）では、この二つの慣性系の座標は、

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt. \quad (1.10)$$

という変換で結ばれていた。この変換は**ガリレイ変換**と呼ばれる。一方、特殊相対論では、

$$t' = \gamma t - \gamma\beta z, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma z - \gamma\beta t. \quad (1.11)$$

という関係で結ばれる。これが**ローレンツ変換**である。（光速度 c を 1 とする単位系をとっていることに注意！）付録 A も参照のこと。ただし、 γ と β は、相対速度 v と光速度 c を用いて、

$$\beta \equiv v, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.12)$$

と定義した。

行列の形で書くと、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & & & -\gamma\beta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\gamma\beta & & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

と書ける。

1.2.2 一般的なローレンツ変換

もっと一般のローレンツ変換を考えてみよう。慣性系 O に対して別の慣性系 O' が等速運動しているとす。 O の時刻 $t = 0$ における原点と O' の時刻 $t' = 0$ における原点が同じ点であるとしよう。⁷すなわち、 $t = x = y = z = 0$ と $t' = x' = y' = z' = 0$ が物理的に同じ点であるとする。このとき、 O 系と O' 系の座標の間には、

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1.15)$$

が成立する。このことを足掛かりにしてローレンツ変換について考えてみよう。時間 t と空間座標 x, y, z はひとまとめにベクトルとして扱うのが便利。

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

このようなベクトルは四元ベクトル (four vector) と呼ばれる。座標変換はベクトルに対する行列の演算の形で書くことができる。式を簡潔に書くために、アインシュタインの縮約規則

$$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0,1,2,3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1.17)$$

を導入しよう。ひとつの項の中で、上付きの添え字と下付きの添え字で同じ文字がひとつずつある場合は、右辺のような総和の記号が省略されていると思って欲しい。⁸これにより、座標変換は

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1.18)$$

と簡潔に書けるようになった。

式 (1.15) もアインシュタインの縮約規則を使った形で書いておくのが便利。メトリック $g_{\mu\nu}$ を導入する。添え字の μ と ν はそれぞれ 0, 1, 2, 3 の値をとりうる。この講義では、メトリック $g_{\mu\nu}$ を

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (1.19)$$

と定義しよう。(教科書によっては $g_{00} = -1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ のメトリックを採用していることもあるので注意。⁹) このように添え字が複数あるものはテンソルと呼ばれる。(あとでもうちょっとやる。)

このメトリック $g_{\mu\nu}$ を使うと、式 (1.15) を

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.20)$$

⁷さらに一般化して、 O の時刻 $t = 0$ における原点と O' の時刻 $t' = 0$ における原点が同じ点とならない変換を考えてもよい。このような変換を考えると、ある定数ベクトル a^μ を導入して、座標の変換則は

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.14)$$

と書ける。このような変換はポアンカレ変換と呼ばれる。

⁸上付きの μ がひとつ、下付きの μ がふたつ、とかになってしまうと、どうやって和をとるのか定まらなくなってしまう。書き損じや添え字の文字の使い分けに注意しよう。

⁹矛盾なく使えばどちらのメトリックでもいいのだが、人(と分野?)によって好みはある。[1] の footnote 2 など参照。場の量子論の教科書なら、Weinberg と Srednicki は $(-1, 1, 1, 1)$ 。Peskin-Schroeder、九後は $(1, -1, -1, -1)$ 。

と書くことができる。式 (1.18) を代入すると、

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta x^\alpha x^\beta = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \quad (1.21)$$

これが x^μ に依らず成立するので

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (1.22)$$

と書かれる。¹⁰ (式 (1.13) のローレンツ変換について確かめてみよう。)

ローレンツ変換

ローレンツ変換による座標の変換は

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.25)$$

と書ける。ただし、 Λ^μ_ν は

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (1.26)$$

を満たす。

1.3 ベクトル、テンソル、いろいろ

4 元ベクトルとして書ける例をいくつかみておこう。

1.3.1 反変ベクトル、共変ベクトル、添え字の上げ下げ

添え字が下についている x_μ を以下のように定義する。

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu}x^\nu \quad (1.27)$$

また、添え字が上についているメトリック $g^{\mu\nu}$ を以下のように定義する。

$$g^{00} = 1, \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1, \quad g^{\mu\nu} = 0 \ (\mu \neq \nu) \quad (1.28)$$

$g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ について以下のような関係が成立することがすぐ分かる。

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda \quad (1.29)$$

¹⁰この関係式は行列のように書くこともできる。行列 Λ と \mathbf{g} を

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

というふうに定義してみよう。すると、式 (1.26) は

$$\Lambda^T \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g} \quad (1.24)$$

と書くこともできる。

ここで、 δ^μ_λ はクロネッカーのデルタ。

$$\delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 1 & (\mu = \lambda) \\ 0 & (\mu \neq \lambda) \end{cases} \quad (1.30)$$

式 (1.27) と式 (1.28) を用いると

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (1.31)$$

が成立することが分かる。

x_μ がローレンツ変換でどのように変換されるかみてみよう。定義により

$$\begin{aligned} x_\mu \rightarrow x'_\mu &= g_{\mu\nu} x'^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\lambda x^\lambda \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\lambda g^{\lambda\rho} x_\rho \end{aligned} \quad (1.32)$$

ここで、 x^μ や x_μ と同様に、 Λ^μ_ν も添え字の上げ下げをメトリックとの縮約で行うことにしてみる。これにより、 Λ_μ^ν は

$$\Lambda_\mu^\nu \equiv g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\beta g^{\beta\nu} \quad (1.33)$$

と書け、 x_μ のローレンツ変換、式 (1.32) が簡潔に書けるようになった。

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu \quad (1.34)$$

(注：添え字の左右、上下に注意しよう。 Λ^μ_ν と Λ_ν^μ は一般には違うし、 Λ^μ_ν と Λ_ν^μ も一般には違う。)

1.3.2 反変ベクトル、共変ベクトル、テンソル

座標 x^μ と同じように、ローレンツ変換にしたがって、

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \quad (1.35)$$

と変換されるものを**反変ベクトル**と呼ぶ。また、 $x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$ と同じように、ローレンツ変換にしたがって、

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = \Lambda_\mu^\nu B_\nu \quad (1.36)$$

と変換されるものを**共変ベクトル**と呼ぶ。上付き添字の反変ベクトルと、下付き添字の共変ベクトルのローレンツ変換は、

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu, \quad (1.37)$$

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = \Lambda_\mu^\nu B_\nu. \quad (1.38)$$

反変ベクトルを2つもってきて、メトリックで足をつぶすと定義によりローレンツ不変。

$$g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g_{\mu\nu} A'^\mu B'^\nu \quad (1.39)$$

また、反変ベクトルと共変ベクトルの足をつぶすと、やはりローレンツ不変。

$$A^\mu B_\mu = A'^\mu B'_\mu \quad (1.40)$$

添字を増やした場合にも一般化できる。

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \rightarrow T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\alpha_m} \Lambda^{\beta_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\beta_n}_{\nu_n} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \quad (1.41)$$

添字が2つ以上あると、**テンソル**、と呼ばれるようになる。添え字が増えても、もれなく足を潰せばローレンツ不変になる。たとえばこんな感じ。

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} A^{\nu_1} \dots A^{\nu_n} B_{\mu_1} \dots B_{\mu_m} \quad (1.42)$$

反変ベクトル、共変ベクトル、添え字の上げ下げ（まとめ）

- 反変ベクトル x^μ $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
- 共変ベクトル x_μ $x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$

反変ベクトルと共変ベクトルは、メトリックをかけることで移り変わることができる。（添え字の上げ下げができる）

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (1.43)$$

また、

$$\Lambda_\mu^\nu = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\beta g^{\beta\nu} \quad (1.44)$$

1.3.3 微分演算子

合成関数の微分公式を使うと、座標変換により微分演算子は次のように変換される。

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \sum_\nu \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}. \quad (1.45)$$

両辺に、 $\Lambda^\nu_\mu (\Lambda^{-1})^\mu_\lambda = \delta^\nu_\lambda$ をみだす逆行列 $(\Lambda^{-1})^\mu_\lambda$ をかけて μ で和をとってみよう。すると、

$$\begin{aligned} \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Lambda^{-1})^\mu_\lambda &= \sum_{\nu, \mu} \Lambda^\nu_\mu (\Lambda^{-1})^\mu_\lambda \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

を得た。ところで、式 (1.26) の両辺に $g^{\lambda\alpha} (\Lambda^{-1})^\beta_\rho$ をかけて変形してみよう。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g^{\lambda\alpha} (\Lambda^{-1})^\beta_\rho &= g_{\alpha\beta} g^{\lambda\alpha} (\Lambda^{-1})^\beta_\rho \\ g_{\mu\rho} \Lambda^\mu_\alpha g^{\lambda\alpha} &= (\Lambda^{-1})^\lambda_\rho \\ \Lambda_\rho^\lambda &= (\Lambda^{-1})^\lambda_\rho. \end{aligned} \quad (1.47)$$

これを使うと、微分演算子の変換則は以下のように書くこともできる。

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad (1.48)$$

おもむろに、式 (1.36) と比較してみよう。微分演算子が共変ベクトルに他ならないことが分かる！というわけで、微分演算子を下付き添え字のベクトルとして

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad \partial'_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \quad (1.49)$$

と書くことにしよう。すると、微分演算子の変換則は、

$$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu} \quad (1.50)$$

といい感じに書ける。

1.3.4 電荷密度、電流

電荷密度 ρ 、電流 \vec{j} に対して、連続の方程式が成立することを電磁気学で学んだ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.51)$$

これは、空間全体で電荷は保存しており、いきなり電荷が現れたり消えたりすることないということ意味する重要な式である。そのため、ローレンツ変換しても、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}' = 0 \quad (1.52)$$

が成立するはずだ。実は電荷密度と電流は反変ベクトル j^{μ} として

$$j^{\mu} = (\rho, \vec{j}) \quad (1.53)$$

のようにまとめることができ、ローレンツ変換に対して、

$$j^{\mu} \rightarrow j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} j^{\nu} \quad (1.54)$$

という変換をするとすれば辻褄があう。¹¹これにより、連続の方程式が

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \quad (1.56)$$

という形に書くことができる。脚をつぶした形になっているので、ローレンツ不変であることが一目瞭然。

¹¹時間のある人は、密度と電流密度の定義に立ち返り、なぜ、ローレンツ変換してうつった先の慣性系での j^{μ} が

$$j^{\mu} \rightarrow j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} j^{\nu} \quad (1.55)$$

と書かれるのか、考えてみよう。

1.4 マックスウェル方程式（特殊相対論風に）

マックスウェル方程式を思い出してみよう。真空の誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 は光速 c と $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ という関係で結ばれているが、自然単位系をとって $c = 1$ としているため、 $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ とするのが便利。このとき、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0, \quad (1.57)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}. \quad (1.58)$$

これを特殊相対論っぽくいい感じで書き直してみよう。

式 (1.57) を満たすような電場と磁場は、スカラーポテンシャル $\phi(t, \vec{x})$ とベクトルポテンシャル $\vec{A}(t, \vec{x})$ を導入することにより、（少なくとも局所的に）次のように書ける。

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.59)$$

これを式 (1.58) に代入すると、 $\nabla \times (\nabla \times A) = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla A)$ を使ったのち、

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \rho, \quad (1.60)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = \vec{j}. \quad (1.61)$$

を得る。もうちょっと整理すると、

$$-\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\phi - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \rho, \quad (1.62)$$

$$-\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \vec{\nabla}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\phi - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \vec{j}. \quad (1.63)$$

(1 本目の左辺には $\partial^2 \phi / \partial t^2$ を足して引いた。2 本目は並べ替えただけ。)

式 (1.62) と式 (1.63) の右辺は反変ベクトルである電流密度 j^μ の成分なのが分かる。ここから察するに ϕ と \vec{A} から、

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}). \quad (1.64)$$

という反変ベクトルが定義できそうだ。 A^μ と j^μ を用いると、式 (1.62) と式 (1.63) は一本にまとめられる。

$$\partial^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \quad (1.65)$$

ここで、 ∂^2 はダランベール (d'Alembert) 演算子、ダランベルシアン (d'Alembertian) などと呼ばれ、

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad (1.66)$$

で定義されている。

さて一本にまとまったマックスウェル方程式 (式 (1.65)) は

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = j^\nu \quad (1.67)$$

と書ける。二つの添え字を持つ電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ を

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.68)$$

と定義すると、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (1.69)$$

と書き直すことができる。ということで、式 (1.58) が一本にまとめられた。

実は、電場 \vec{E} や磁場 \vec{B} は電磁場テンソルの成分だったのだ。確かめてみよう。

$$F^{01} = \dot{A}_x + \partial_x \phi = -E_x, \quad (1.70)$$

$$F^{02} = \dot{A}_y + \partial_y \phi = -E_y, \quad (1.71)$$

$$F^{03} = \dot{A}_z + \partial_z \phi = -E_z, \quad (1.72)$$

$$F^{12} = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z, \quad (1.73)$$

$$F^{23} = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -B_x, \quad (1.74)$$

$$F^{31} = -\partial_z A_x + \partial_x A_z = -B_y \quad (1.75)$$

マックスウェル方程式もあらわにチェックできる。

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \rho, \quad (1.76)$$

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = j^1, \quad (1.77)$$

$$\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} = j^2, \quad (1.78)$$

$$\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} = j^3 \quad (1.79)$$

また、式 (1.57) を次のように書き直すこともできる。

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (1.80)$$

$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ は次のような性質を持つ完全反対称テンソルである。

$$\epsilon^{0123} = 1, \quad \epsilon_{0123} = -1, \quad (1.81)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\rho\nu\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (1.82)$$

これにより $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ の各成分が決まる。たとえば、 $\epsilon_{0012} = 0$ 、 $\epsilon^{1230} = -1$ など。¹²

ローレンツ変換を考えてみよう。4 元ベクトルポテンシャルのローレンツ変換は、

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \quad (1.84)$$

電磁場のローレンツ変換は、

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x') = \partial'_\mu A'_\nu(x') - \partial'_\nu A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}(x) \quad (1.85)$$

¹² $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は、ローレンツ変換に対して、

$$\Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \Lambda_\gamma^\rho \Lambda_\delta^\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \pm \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (1.83)$$

という性質を持つ。この性質を使うことにより、式 (1.80) がローレンツ変換で不変であると分かる。

x 座標では

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (1.86)$$

が成立していた。 x' 座標では、

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = j'^\nu, \quad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial'_\mu F'_{\nu\lambda} = 0. \quad (1.87)$$

が成立する！

また、 ϕ と \vec{A} に対するゲージ変換は、

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\lambda \quad (1.88)$$

と与えられる。 $\partial^0\lambda = \partial\lambda/\partial t$ と $\partial^i\lambda = -\partial\lambda/\partial x^i$ に注意すると、 A^μ に対するゲージ変換は

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\lambda \quad (1.89)$$

と簡潔に書ける。

1.5 まとめ

まとめ

- 添え字が上付きか下付きかで、ベクトルやテンソルがローレンツ変換でどのように変換されるか一発で分かる。
- 上下の添え字を全てペアにすれば、ローレンツ不変なものが作れる。

1.6 (非相対論的) 量子力学

量子力学では、波動関数 ψ を使い、 $|\psi|^2$ を粒子をその場所に見出す確率の密度と解釈することができた。 ψ の時間発展はシュレーディンガー (Schrödinger) 方程式で記述できる。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi. \quad (1.90)$$

\hat{H} はハミルトニアン演算子である。古典的なハミルトニアン $H(x, p)$ が得られたとき、上のシュレーディンガー方程式に出てくるハミルトニアン演算子は、

$$\hat{H} = H\left(x, p = -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (1.91)$$

という古典ハミルトニアンの中の p を $-i(\partial/\partial x)$ に置き換えるような操作で得られた。とくに、 $H = p^2/2m + V(x)$ のとき、シュレーディンガー方程式のハミルトニアンは、

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V \quad (1.92)$$

シュレーディンガー方程式をみると、左辺には時間の一階微分。右辺には空間の二階微分。ローレンツ変換は時間と空間を線形に混ぜる。シュレーディンガー方程式では時間と空間は対等ではなく、ローレンツ対称性のもとで良い性質を持っていない。

確率密度 ρ は、

$$\rho = |\psi|^2 \quad (1.93)$$

と定義される。規格化された波動関数を用いると、

$$\int d^3x \rho = \int d^3x |\psi|^2 = 1 \quad (1.94)$$

である。確率密度の時間発展は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \\ &= \left(\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi \right) \psi^* - \left(\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi^* \right) \psi \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{i}{2m} \vec{\nabla} \psi \right) \psi^* - \left(\frac{i}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \right) \psi \right] \end{aligned} \quad (1.95)$$

と計算される。ベクトル \vec{j} を

$$\vec{j} \equiv \frac{i}{2m} (\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \frac{i}{2m} (\vec{\nabla} \psi) \psi^*. \quad (1.96)$$

と定義すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.97)$$

と綺麗に書くことができる。 \vec{j} は確率密度の流れを記述するベクトルと解釈できる。この方程式により、確率が各点各点で勝手に湧き出したり吸い込まれたりすることがなく、確率が全体として保存していることが分かる。

2 クラインゴルドン (Klein-Gordon) 方程式

正準量子化における演算子の置き換えルールを思い出してみよう。

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (2.1)$$

というハミルトニアン H が与えられた時、

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i \vec{\nabla} \quad (2.2)$$

という置き換えを採用すると、シュレーディンガー方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (2.3)$$

がえられたのだった。(自然単位系 $\hbar = c = 1$ をとってしまったことに注意！)

…ということは $E^2 = m^2 + p^2$ にこの置き換えルールを適用して、

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = (m^2 - \nabla^2)\psi \quad (2.4)$$

とすれば良いのでは？¹³ この方程式はクラインゴルドン (Klein-Gordon) 方程式と呼ばれる。

2.1 クラインゴルドン方程式の平面波解

クラインゴルドン方程式 (2.4) の平面波解がどんなものか見てみよう。

$$\psi = \exp(ip_x x + ip_y y + ip_z z - iEt). \quad (2.6)$$

と試しにおいてみよう。 E, p_x, p_y, p_z はクラインゴルドン方程式 (2.4) が満たされるように、このあと選べばよい。さっそく、クラインゴルドン方程式 (2.4) にこの解を代入すると、

$$E^2 = m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (2.7)$$

を得る。 p_x, p_y, p_z の値を固定したとき、 E の解は次の2つ。

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad -\sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (2.8)$$

エネルギーが正の解にくわえて、負となる解もある！（あとで分かるように負エネルギー解の存在は、反粒子の存在と関係している）

2.2 確率解釈できるか？

クラインゴルドン方程式に従う ψ は確率解釈できるだろうか？確率が保存しているならば、確率密度 ρ とその流速 \vec{j} が存在して、非相対論的量子力学と同様に次のような確率保存の式を満たす。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (2.9)$$

さて、おもむろに、 ψ を使って ρ と \vec{j} を次のように定義してみよう。

$$\rho = -\frac{i}{2m} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right], \quad (2.10)$$

$$\vec{j} = \frac{i}{2m} [(\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \psi^* (\vec{\nabla} \psi)]. \quad (2.11)$$

¹³かわりに

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \sqrt{m^2 - \nabla^2} \psi \quad (2.5)$$

とするのはどうか？まず、時間 t と空間座標 x の扱われ方が同等でないので良くない。次に、右辺の演算子に意味を持たせるために微分演算子の級数展開を考えてみるとどうしても無限階微分をどうしても含んでしまう。これは、 $\sqrt{m^2 - \nabla^2}$ が non-local な演算子となっていることを示唆しており、ちょっと使えない。

この ρ と \vec{j} は確率保存の式をみたすことが、クラインゴールドン方程式を使ってチェックできる。計算してみよう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{i}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \psi - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] \\ &= -\left(\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi^* \right) \psi + \left(\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi \right) \psi^* \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[-\left(\frac{i}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \right) \psi + \left(\frac{i}{2m} \vec{\nabla} \psi \right) \psi^* \right]\end{aligned}\quad (2.12)$$

確かに式 (2.9) が満たされている。¹⁴

一見良さそうだが、この ρ は、非相対論的な場合 (1.93) と異なり、 $\rho \geq 0$ が保証されていない。(positive-definite ではない、とも言う。) つまり、負になってしまうこともありうる。例えば、 $\psi = \psi_0 e^{-iEt}$ という解を考えてみると、

$$\rho = \frac{E}{m} |\psi_0|^2 \quad (2.14)$$

となる。さきにみたようにクラインゴールドン方程式には E が負となる解もあり、このとき、 ρ も負になってしまう。確率が負になってしまったらおかしい。確率密度と解釈するのはなんか無理そう…。

3 ディラック (Dirac) 方程式

シュレーディンガー方程式を手直しすることを考えてみよう。手直しの結果、次のような条件を満たすようにしたい。

- ローレンツ変換によって、その形を変えない。
- 確率解釈ができる波動関数 ψ がある。(クラインゴールドン方程式の場合と違って、非負になることが保証されているような定義の確率密度がほしい。)

前の章では波動関数は一成分としていたが、一般化して n 成分あってもいい。この場合、固有値が全ての正である $n \times n$ エルミート行列 A を使って

$$\rho = \psi^\dagger A \psi. \quad (3.1)$$

と書けたら $\rho \geq 0$ が保証できそう。ここで ψ は成分を n 個並べたもの。ためしに A を単位行列にしてみよう。¹⁵ そうすると、

$$\rho = \sum_{i=1}^n |\psi_i|^2 \quad (3.2)$$

¹⁴四元ベクトルとして $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ と定義すると、

$$j^\mu = -\frac{i}{2m} [\psi \partial^\mu \psi^* - \psi^* \partial^\mu \psi] \quad (2.13)$$

というように簡潔に書ける。このとき、確率保存の式は $\partial_\mu j^\mu = 0$ と書ける。

¹⁵単位行列じゃない場合も ψ を適当に再定義すれば、単位行列にとりなおすことができる。

と書ける。このとき、 ρ の時間微分は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left(\psi_i^* \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \psi_i \frac{\partial \psi_i^*}{\partial t} \right). \quad (3.3)$$

右辺が、なんらかのベクトル \vec{j} を使って、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ という形になってほしい。 ψ は時間についての一階微分方程式を満たしてもらうのがよさそう。きっとこんな形になるはずだ。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (3.4)$$

\hat{H} は空間の一階微分を含む演算子。(一見、シュレーディンガー方程式とほぼ一緒の形だが、 \hat{H} は一階微分しか含まないから、 $H = p^2/2m$ とは違うもの。) さらに、 $E^2 = m^2 + p^2$ の量子論バージョンとして、

$$\hat{H}^2 = m^2 - \vec{\nabla}^2 \quad (3.5)$$

という関係が成り立ってほしい…。

まとめると、

- $\rho = \psi^\dagger \psi$
- $i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$
- $\hat{H}^2 = m^2 - \vec{\nabla}^2$

を満たしてほしい。

3.1 \hat{H} を行列にすれば上手くいきそう

特殊相対論では時間と空間はほとんど同等の立場。ということは、 H はきっと空間の一階微分を含むだろう。しかし、適当に

$$\hat{H} = m + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} ??? \quad (3.6)$$

とかやってしまうと、

$$\hat{H}^2 = m^2 + 2m \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 ??? \quad (3.7)$$

みたいな感じになり、どう見ても上手くいっていない。どうしたらいいだろうか？

ディラックは H を行列にした。 $n \times n$ の行列 $\beta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ を使って

$$\hat{H} = m\beta - i\partial_x\alpha_x - i\partial_y\alpha_y - i\partial_z\alpha_z \quad (3.8)$$

と書いてみよう。そうすると、みたすべき式 (3.5) は

$$\hat{H}^2 = (m^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2)I \quad (3.9)$$

と書ける。 I は $n \times n$ の単位行列。ここに式 (3.8) の H を代入してみよう。以下のような行列の間の関係式があれば、式 (3.9) は満たされる。

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = I, \quad (3.10)$$

$$\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = 0, \quad (3.11)$$

$$\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = 0, \quad (3.12)$$

$$\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z = 0, \quad (3.13)$$

$$\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0, \quad (3.14)$$

$$\alpha_y \beta + \beta \alpha_y = 0, \quad (3.15)$$

$$\alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0. \quad (3.16)$$

これを満たす解を見つければ、欲しい方程式が手に入るはずだ。

3.2 $\beta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ の解

式 (3.14) の両辺左側から α_x を掛けてみよう。

$$\alpha_x^2 \beta + \alpha_x \beta \alpha_x = 0. \quad (3.17)$$

次に上の式の両辺のトレースをとり、さらに $\alpha_x^2 = I$ を使って整理すると、

$$\text{tr} \beta = 0. \quad (3.18)$$

$\text{tr} \alpha_x = 0, \text{tr} \alpha_y = 0, \text{tr} \alpha_z = 0$ も同様に示せる。¹⁶ $\beta^2 = I$ かつ $\text{tr} \beta = 0$ であることから、 β の固有値は、 $+1$ が $n/2$ 個、 -1 が $n/2$ 個である。さらに、 n は偶数でなければならない。 $n = 2$ では、式 (3.10) から式 (3.16) の全てを満たすような $\beta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ の組を上手く見つけられない。¹⁷ ということで、 $n = 4$ を考えてみよう。 β を対角化して次の形にとる基底で考えてみる。

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

そうすると、次のような $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ が解 (の一つ) になっていることが分かる。

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} & \sigma_z \\ \sigma_z & \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

ここで、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ はパウリ (Pauli) 行列。以下で定義される。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

¹⁶時間のある人は示してみてください

¹⁷時間のある人は示してみてください

パウリ行列は

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I_2, \quad (3.22)$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0, \quad (3.23)$$

$$\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0, \quad (3.24)$$

$$\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0. \quad (3.25)$$

を満たす。まとめて

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I_2 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (3.26)$$

とも書かれる。

例えば、式 (3.14) をチェックしてみよう。

$$\begin{aligned} \alpha_x \beta + \beta \alpha_x &= \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & -\sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ -\sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

また、式 (3.11) もチェックできる。

$$\begin{aligned} \alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x &= \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma_z & \\ & i\sigma_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\sigma_z & \\ & -i\sigma_z \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

同様に、式 (3.15)、式 (3.16)、式 (3.12)、式 (3.13) も確かめることができる。¹⁸

まとめると、次のような方程式が得られた。

ディラック (Dirac) 方程式

$$i\partial_t \psi = (-i\alpha_x \partial_x - i\alpha_y \partial_y - i\alpha_z \partial_z + m\beta) \psi \quad (3.29)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

ψ は 4 成分。これがディラック (Dirac) 方程式だ。ちなみにディラックによる原論文は [2].

¹⁸時間のある人は示してみてください

3.3 後々のためディラック方程式ちょっと書き直す

式 (3.29) のままでは、ローレンツ対称性の議論がちょっとやりにくい。空間微分のところには行列が掛かっているのに、時間微分のところには行列が掛かっていない（単位行列が掛かっている）ので、なんとなく時間と空間が対等に扱えているかどうかが見づらい。

この点はちょっとした手直しで改善できる。式 (3.29) の両辺に左から β をかけると、

$$(i\beta\partial_t + i\beta\alpha_x\partial_x + i\beta\alpha_y\partial_y + i\beta\alpha_z\partial_z)\psi = m\psi \quad (3.31)$$

と書ける。

次のような行列 $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ を定義してみよう。

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \equiv \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.32)$$

この行列はガンマ行列、あるいは、ディラック行列などと呼ばれる。このガンマ行列を使うと、アインシュタインの縮約を上手く使えるようになり、ディラック方程式は以下のように書ける。¹⁹

ディラック (Dirac) 方程式

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (3.36)$$

また、式 (3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16) とガンマ行列の定義を使うと、ガンマ行列の反交換関係は、

$$\gamma^0\gamma^0 = \beta^2 = I_4, \quad (3.37)$$

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \beta^2\alpha_i + \beta\alpha_i\beta = \alpha_i - \alpha_i = 0, \quad (3.38)$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \beta\alpha_i\beta\alpha_j + \beta\alpha_j\beta\alpha_i = -\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i = -2\delta_{ij}I_4. \quad (3.39)$$

この関係式は、メトリックを使ってまとめることができる。

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I_4. \quad (3.40)$$

簡潔に書けるようになっていい感じ。

¹⁹式 (3.30) で与えられた $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ は解のひとつであり、ガンマ行列もひとつには定まらない。式 (3.32) で与えられたガンマ行列は、Dirac-Pauli 表現 (Dirac-Pauli representation) とも呼ばれている。適当なユニタリ行列 U を使って、

$$\alpha'_{x,y,z} = U\alpha_{x,y,z}U^\dagger, \quad \beta' = U\beta U^\dagger. \quad (3.33)$$

と定義しても $\alpha'_{x,y,z}$ と β' は同様の関係式を満たす。例えば、

$$\beta' = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha'_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

というのも別解になっている。これを使うと、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

このガンマ行列は Weyl representation もしくは chiral representation などと呼ばれている。教科書によって違う定義を使っているため注意が必要。

3.4 連続の方程式をチェックしよう

せっかくディラック方程式が導出できたので、連続の方程式を満たすことを確認しよう。 $\rho = \psi^\dagger \psi$ であることから、式 (3.29) のディラック方程式を使うことにより、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) &= \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi + \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= (-\partial_x \psi^\dagger \alpha_x - \partial_y \psi^\dagger \alpha_y - \partial_z \psi^\dagger \alpha_z + im \psi^\dagger \beta) \psi + \psi^\dagger (-\alpha_x \partial_x \psi - \alpha_x \partial_y \psi - \alpha_x \partial_z \psi - im \beta \psi) \\ &= -\partial_x (\psi^\dagger \alpha_x \psi) - \partial_y (\psi^\dagger \alpha_y \psi) - \partial_z (\psi^\dagger \alpha_z \psi)\end{aligned}\quad (3.41)$$

が示せる。ということで、

$$\vec{j} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \quad (3.42)$$

と定義すれば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (3.43)$$

が成り立つ。連続の式が成り立っている。うれしい！

3.5 ディラック方程式の平面波解

ディラック方程式の解にはどんなものがあるのだろうか。平面波解を求めてみよう。 z 軸方向に運動量を持つと仮定して、次のような形を考えてみる。

$$\psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \exp(ip_z z - iEt). \quad (3.44)$$

u_1, u_2, u_3, u_4 は、ディラック方程式を満たすように決める必要がある。上の形をディラック方程式 (3.29) に代入すると、

$$\begin{pmatrix} -E + m & & p_z & \\ & -E + m & & -p_z \\ p_z & & -E - m & \\ & -p_z & & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.45)$$

がえられる。上の形をディラック方程式 (3.36) に代入すると、

$$\begin{pmatrix} E - m & & -p_z & \\ & E - m & & p_z \\ p_z & & -E - m & \\ & -p_z & & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.46)$$

がえられる。 $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ はいつでも解になるけど、当然そうじゃない解が欲しい！そのためには左辺にかかっている 4×4 行列の行列式が 0 にならないといけない。行列式は、

$$(E^2 - m^2 - p_z^2)^2 \quad (3.47)$$

なので、

$$E^2 - m^2 - p_z^2 = 0. \quad (3.48)$$

を満たす必要がある。これを E についてとくと、

$$E = \pm \sqrt{m^2 + p_z^2}. \quad (3.49)$$

エネルギーが正になる解と負になる解の二種類がある！

まず、正のエネルギー解 ($E = +\sqrt{m^2 + p_z^2}$) について考えてみよう。

$$p_z u_1 - (E + m) u_3 = 0, \quad (3.50)$$

$$-p_z u_2 - (E + m) u_4 = 0 \quad (3.51)$$

を解くと、

$$\psi = \left[u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z/(E+m) \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -p_z/(E+m) \end{pmatrix} \right] \times \exp(ip_z z - iEt) \quad (3.52)$$

u_1 と u_2 は好きな値にとれるので、独立な解が 2 つある！

運動量がエネルギーに比べて小さい極限、 $p_z \ll E$ を考えてみよう。このとき、 $E = \sqrt{m^2 + p_z^2}$ なので、 $E \sim m$ かつ、 $p_z \ll m$ 。運動エネルギーが静止質量エネルギーと比較して無視できる。

$$\frac{p_z^2}{2m} \ll m \quad (3.53)$$

こういう極限は、「非相対論的な極限」と呼ばれる。これまでに習った量子力学に近づいていく極限。この極限で、

$$\psi \simeq \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \exp(ip_z z - iEt) \quad (3.54)$$

ということで、非相対論的な極限でも 2 つの自由度は残る。実はこれがスピンの自由度と解釈できる。なぜスピンと言えるのかについて詳しくは後でみる。

同様に、負のエネルギー解 ($E = -\sqrt{m^2 + p_z^2}$) について考えてみよう。

$$-(|E| + m) u_1 - p_z u_3 = 0, \quad (3.55)$$

$$-(|E| + m) u_2 + p_z u_4 = 0 \quad (3.56)$$

今度は u_3, u_4 について解いてみよう。

$$\psi = \left[u_3 \begin{pmatrix} -p_z/(|E| + m) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ p_z/(|E| + m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \exp(ip_z z - iEt) \quad (3.57)$$

u_3 と u_4 は好きな値にとれるので、この場合も独立な解が2つある！

結局、同じ p_z の値に対して、正のエネルギー解は2つ、負のエネルギー解が2つ、の合計4つの解が現れた。それぞれ、どういった意味を持つか考えていこう。

3.6 ディラック (Dirac) の海、反粒子

エネルギーの低い準位があるとエネルギーを放出して遷移が起きる（例：水素原子の $n = 2$ から $n = 1$ への遷移に伴う Lyman α 線の放出、など）。負のエネルギー解があるので、そっちに遷移していってしまう？しかも、エネルギーに下限がない！電子が安定に存在できなくなるのではないか…。

Dirac はこの問題を次のように考えることで回避することを提案した。

- 「真空」では $E = -m$ から $-\infty$ までのすべての負エネルギー状態が完全に満員になっている。
- 真空状態の負エネルギー電子は、観測可能量に影響しない。真空からのズレのみが観測される。

フェルミオンには排他律があるので、同じ準位にはひとつの粒子しか入ることはできない。ひとつめの仮定により、正のエネルギーを持った粒子がエネルギーを放出して、負のエネルギーに落ち込むことはなくなる。つまり、系が安定して存在できることになる。実際、負のエネルギー準位を占める電子がいた方がエネルギーが下げられるので、負のエネルギー準位が満員になっている状態は最もエネルギーの低い状態とみなせる。ということで、「真空」がこのようなものであると考えるのは自然だ。これは、Dirac の海 (Dirac sea)、と呼ばれている。

電子がひとついる状態は、正のエネルギー準位を占める粒子がひとついる状態。確かに真空に比べてエネルギーが増加している。負のエネルギー準位から粒子をひとつ抜いてみよう。空孔 (hole) ができる。この状態も真空よりエネルギーが高い。負電荷を持つ粒子が一つなくなったので、真空に比べて電荷が +1 増加した。これは電荷が正の粒子がひとついる状態と解釈できる。このようにディラック方程式を考えると電荷の値が正反対の粒子の存在が必然的に示唆される。このような粒子は反粒子と呼ばれる。電子に対応する反粒子は陽電子 (positron) と呼ばれる。

正のエネルギーを持つ電子が、エネルギーを放出して、負のエネルギー準位の空孔に落ち込んだ状況を考えてみよう。これは、電子と陽電子が消えてしまいエネルギーに変わった状況とみなせる。これは対消滅 (annihilation) とよばれる。逆に、外からエネルギーを与えて、負のエネルギー準位を埋めている電子を正のエネルギー準位に励起させてみよう。これは、エネルギーが電子と陽電子に変わったとみなすことができる。これを対生成 (pair creation) と呼ぶ。（この状況をきちんと記述するには、電子と光子などとの相互作用を入れる必要があるので、場の量子論が必要。）

[3]

3.7 積み残した疑問

まだ答えてない疑問が残っている。

- なぜ正エネルギーと負エネルギーの解がそれぞれ2つずつ？
- ローレンツ変換に対して、ディラック方程式は形を変えないという性質を持っているのか？

次の章で議論するよ！

4 ローレンツ変換とディラック方程式

特殊相対論をやってるので、座標系に依らず物理法則が同じ、ということを要請したい。これはつまり、 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ という座標間のローレンツ変換が与えられたとき、 x' 座標でも x 座標でも “同じ形” の方程式が成立してほしい、ということを意味する。

“同じ形” の方程式が成立する様子を、クラインゴールドン方程式とマクスウェル方程式を例にみてみよう。さらに、ディラック方程式にもこの性質を要求することで、スピノルというものが現れるものをみる。結果、ディラック方程式にスピンという概念が自然に導入されることをみる。

4.1 方程式とローレンツ変換

どの座標系で見ても、物理法則が一緒。つまり、“同じ” 方程式が成立する。場や方程式がローレンツ変換に対してどのように振る舞うか、クラインゴールドン方程式とマックスウェル方程式を例に見る。そして、ディラック方程式についても議論する。前の章で出てきた4成分の ψ が、スカラーでもない、ベクトルでもない、テンソルでもない。スピノルであることを見る。

4.1.1 クラインゴールドン方程式

クラインゴールドン方程式がローレンツ変換でどう振る舞うか詳しくみてみよう。微分演算子もテンソルっぽく書けたので、クラインゴールドン方程式は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(x) = (\partial^2 + m^2) \phi(x) = 0 \quad (4.1)$$

といういい感じで書けるようになった。ここで $\partial^2 \equiv g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$ 。

x' 座標で ϕ はどういう値になるだろう。よくわかんないけど、物理的に同じ点を見れば x 座標でみた時と同じ値になってる気がする………ので、いったん、

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \quad (4.2)$$

としてみよう。これを認めると、 x' 座標でも、同じ形の方程式が成立することを見てみよう。

$$\begin{aligned} (g^{\mu\nu} \partial'_{\mu} \partial'_{\nu} - m^2) \phi'(x') &= (g^{\mu\nu} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} - m^2) \phi(x) \\ &= (g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} - m^2) \phi(x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

確かに

$$(\partial'^2 + m^2)\phi' = 0 \quad (4.4)$$

が成立する！ x 座標でも x' 座標でも「物理法則が同じ」と言えそう。

4.1.2 ディラック方程式はどう？

ローレンツ変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ を考えた時、 x' 座標でも、ディラック方程式 (3.36) が成立してほしい：

$$(i\partial'_\mu \gamma^\mu - m)\psi'(x') = 0. \quad (4.5)$$

スカラー場の場合は $\phi'(x') = \phi(x)$ だったし、電磁場に関しては $A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(x)$ となっていた。 $\psi'(x')$ と $\psi(x)$ とは、どういう関係にあるだろうか？

$$\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x). \quad (4.6)$$

のように線形変換で関係づけられるとしよう。ここで $U(\Lambda)$ はローレンツ変換 Λ ごとに決まる 4×4 行列。

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi' &= (i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - m)U(\Lambda)\psi \\ &= i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu U(\Lambda)\psi - U(\Lambda)i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= U(\Lambda)[U(\Lambda)^{-1}i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu U(\Lambda)\psi - i\gamma^\nu]\partial_\nu \psi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

ということで、式 (3.36) と式 (4.5) が同時に満たされると要求すると、

$$\begin{aligned} U(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu U(\Lambda) &= \gamma^\nu \\ U(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu U(\Lambda)\Lambda_\nu^\rho &= \Lambda_\nu^\rho \gamma^\nu \\ U(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu U(\Lambda) &= \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ということで、ガンマ行列 γ^μ と $U(\Lambda)$ が次のような関係を満たしていればよいことが分かった。

$$U(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu. \quad (4.9)$$

相対論で出てくる量は、ローレンツ変換のもとでどう振る舞うかで名前がついていた。

- スカラー： $\phi'(x') = \phi(x)$
- ベクトル： $p'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu p_\nu(x)$
- テンソル： $F'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}(x)$

結局、 μ の足が 0 個か、1 個か、2 個以上かの分類だった。

ψ はスカラーでもベクトルでもテンソルでもない。ではなんだと…。 ψ はスピノルと呼ばれている。

- スピノル： $\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x)$

式 (4.9) をみたら $U(\Lambda)$ はどんな形をしているだろうか？このあと具体的に見ていこう。

4.2 スピノルの無限小ローレンツ変換

Λ が与えられたとき、式 (4.9) をみたすような $U(\Lambda)$ を見つけるのが目標。とりあえず、無限小ローレンツ変換について考えてみよう。無限小ローレンツ変換とはほぼ恒等変換の変換。ちゃんというと、

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (4.10)$$

と書いて、 $|\omega^\mu{}_\nu| \ll 1$ をみたすようなもの。この無限小に対する適切な $U(\Lambda)$ を探す。

4.2.1 無限小ローレンツ変換の性質

式 (1.26) ($g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$) の両辺の ω の一次の項を比較すると、

$$g_{\mu\alpha}\omega^\mu{}_\nu g^\alpha{}_\beta + g_{\mu\alpha}g^\mu{}_\nu \omega^\alpha{}_\beta = 0 \quad (4.11)$$

となり、整理すると、

$$\omega_{\beta\nu} = -\omega_{\nu\beta} \quad (4.12)$$

が得られる。つまり、無限小ローレンツ変換は、2つの添字を持つ反対称テンソルで指定できる。このテンソルの独立な成分の数は、

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6 \quad (4.13)$$

となり、6成分だ。あらわに書くとこんな感じ。

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \eta_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ \eta_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

のちの目的のために、 $\omega^\mu{}_\nu$ も計算しておく。同じように行列の形で書くと、

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \omega^0_0 & \omega^0_1 & \omega^0_2 & \omega^0_3 \\ \omega^1_0 & \omega^1_1 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ \omega^2_0 & \omega^2_1 & \omega^2_2 & \omega^2_3 \\ \omega^3_0 & \omega^3_1 & \omega^3_2 & \omega^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ -\eta_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\eta_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\eta_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$\omega_{1,2,3}$ は x, y, z 軸方向のローレンツブースト、 $\theta_{1,2,3}$ は空間の回転の自由度に対応する。これはあとで確認する。

4.2.2 無限小ローレンツ変換に対応する $U(\Lambda)$

次に無限小ローレンツ変換に対する $U(\Lambda)$ の形を考察してみよう。恒等変換 ($\Lambda = 1$ もしくは $\omega_{\mu\nu} = 0$) に対し、 $U(\Lambda) = I_4$ なので、 $U(\Lambda)$ を ω の一次の項まで残すと、

$$U(\Lambda) = I_4 - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

と書けるはず。ここで、 $\sigma^{\mu\nu}$ は各 μ, ν の組み合わせに対して決まる 4×4 行列。さきに見たように、 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ なので $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ としよう。

式 (4.9) の両辺はそれぞれ、以下のように展開できる。

$$\begin{aligned} \text{(式 (4.9) の左辺)} &\simeq \left(I_4 + \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) \gamma^\mu \left(I_4 - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) \\ &\simeq \gamma^\mu + \frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \gamma^\mu - \frac{i}{4} \gamma^\mu \omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\text{(式 (4.9) の右辺)} \simeq \gamma^\mu + \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (4.18)$$

ということで、式 (4.9) の両辺を比較すると、

$$\frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = \omega_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} \gamma^\beta \quad (4.19)$$

$\omega_{\alpha\beta}$ の係数を比較したいが、このままでは上手くいかない。左辺の $\omega_{\alpha\beta}$ の係数は、 α と β の入れ替えに対して反対称なテンソルだが、右辺はそうっていない。 $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ を用いて、上の式の右辺をちょっとお直しする。

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] &= \omega_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} \gamma^\beta \\ &= \omega_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \gamma^\beta + \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \gamma^\alpha + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \gamma^\beta - \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \gamma^\alpha \right) \\ &= \omega_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \gamma^\beta + \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \gamma^\alpha \right) + \omega_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \gamma^\beta - \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \gamma^\alpha \right) \\ &= \omega_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \gamma^\beta - \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \gamma^\alpha \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

これで、両辺の $\omega_{\alpha\beta}$ の係数が、どちらも α と β の入れ替えに対して反対称なテンソルとなった。両辺比較すると、

$$[\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = -2ig^{\mu\alpha} \gamma^\beta + 2ig^{\mu\beta} \gamma^\alpha \quad (4.21)$$

これが $\sigma^{\mu\nu}$ の満たすべき式。

実は、式 (4.21) を満たす $\sigma^{\alpha\beta}$ はガンマ行列を使って、

$\sigma^{\mu\nu}$ のかたち

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad (4.22)$$

と書ける！これが確かに式 (4.21) の解であることをチェックしてみよう。式 (3.40) を用いて、評価していく。

$$\begin{aligned} \text{(式 (4.21) の左辺)} &= \frac{i}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu - \frac{i}{2} \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\mu - \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta + \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha \\ &= \frac{i}{2} \gamma^\alpha (2g^{\beta\mu} - \gamma^\mu \gamma^\beta) - \frac{i}{2} \gamma^\beta (2g^{\alpha\mu} - \gamma^\mu \gamma^\alpha) - \frac{i}{2} (2g^{\alpha\mu} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) \gamma^\beta + \frac{i}{2} (2g^{\beta\mu} - \gamma^\beta \gamma^\mu) \gamma^\alpha \\ &= 2ig^{\mu\beta} \gamma^\alpha - 2ig^{\mu\alpha} \gamma^\beta \end{aligned} \quad (4.23)$$

ということで確かにみたされていることが分かった。

$\sigma^{\alpha\beta}$ を式 (3.32) の γ^μ の定義使って書くと、

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \epsilon_{ijk}\sigma^k \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\sigma^{0i} = -\sigma^{i0} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

4.3 スピノルの有限ローレンツ変換

無限小ローレンツ変換について式 (4.9) がみたされるようにした。

$$\left[\frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu \right] = \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (4.26)$$

無限小でない有限のローレンツ変換についても式 (4.9) ってみたされるのだろうか？

ローレンツ変換に続けて微小ローレンツ変換をやると、ちょっとだけ違うローレンツ変換ができる。

$$\Lambda'^\mu{}_\nu = (\delta^\mu{}_\lambda + \omega^\mu{}_\lambda) \Lambda^\lambda{}_\nu + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (4.27)$$

差分に書き直すとこんな感じ。

$$\Lambda'^\mu{}_\nu - \Lambda^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_\lambda \Lambda^\lambda{}_\nu + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (4.28)$$

左辺と $\omega^\mu{}_\lambda$ はそれぞれ微量であるから、 $\Delta \Lambda^\mu{}_\nu$ 、 $\omega^\mu{}_\lambda = \Omega^\mu{}_\lambda \Delta\tau$ とおきかえることができる。ここで、 $\Omega_{\mu\nu}$ は反対称テンソル。これより、

$$\frac{\Delta \Lambda^\mu{}_\nu}{\Delta\tau} = \Omega^\mu{}_\lambda \Lambda^\lambda{}_\nu \quad (4.29)$$

$\Delta\tau \rightarrow 0$ の極限で、以下のローレンツ変換に対する微分方程式ができる。

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda^\mu{}_\nu(\tau) = \Omega^\mu{}_\lambda \Lambda^\lambda{}_\nu(\tau) \quad (4.30)$$

これにより、連続パラメーター τ でパラメトライズできる一連のローレンツ変換ができる。この微分方程式の解は、

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= [\exp(\tau\Omega)]^\mu{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu + \tau\Omega^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}\tau^2\Omega^\mu{}_\lambda\Omega^\lambda{}_\nu + \cdots \end{aligned} \quad (4.31)$$

みたいな感じで指数関数にまとまる。

$U(\Lambda)$ についても同様に、

$$\frac{d}{d\tau} U(\Lambda(\tau)) = -\frac{i}{4} \Omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} U(\Lambda(\tau)) \quad (4.32)$$

という微分方程式が導出できる。解は、

$$U(\Lambda(\tau)) = \exp\left(-\frac{i\tau}{4} \Omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}\right). \quad (4.33)$$

とかける。

τ の値は $\Omega_{\mu\nu}$ に吸収して新しい $\Omega_{\mu\nu}$ と思いなおすことができる。ということで、以下のようにして、有限ローレンツ変換を適当な反対称テンソル $\Omega_{\mu\nu}$ を用いて、

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\exp(\Omega)]^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Omega^\mu{}_\nu + \frac{1}{2!}\Omega^\mu{}_\alpha\Omega^\alpha{}_\nu + \cdots, \quad (4.34)$$

$$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\Omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right). \quad (4.35)$$

と書くことができる。²⁰これが、式 (4.9) をみたすことを確認するには、この公式も便利。²¹

$$Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \cdots = e^{-X}Y e^X \quad (4.36)$$

ためしに、 z 軸まわりの回転と z 軸方向のローレンツブーストについて、 $U(\Lambda)$ を計算してみよう。

4.3.1 z 軸まわりの回転

まず $\Lambda^\mu{}_\nu$ を指数関数の形から評価してみよう。 z 軸まわりに角度 θ 回転させると、

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

ちなみに、ほぼ同じ計算を量子力学で回転群やったときにやってるはずだ。ということで、こういう関係が成立しているはずだ。

$$\Lambda^0{}_\nu \gamma^\nu = \gamma^0, \quad (4.38)$$

$$\Lambda^1{}_\nu \gamma^\nu = \cos \theta \gamma^1 + \sin \theta \gamma^2, \quad (4.39)$$

$$\Lambda^2{}_\nu \gamma^\nu = -\sin \theta \gamma^1 + \cos \theta \gamma^2, \quad (4.40)$$

$$\Lambda^3{}_\nu \gamma^\nu = \gamma^3. \quad (4.41)$$

²⁰このようにして書くことができるのは、恒等変換 $U(\Lambda) = I_4$ (すなわち $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ の場合) と連続的につながっているローレンツ変換の場合。そのような変換は、 $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ 、 $\det \Lambda = 1$ をみたし、本義ローレンツ変換などと呼ばれることもある。より一般の $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$ をみたすローレンツ変換は、本義ローレンツ変換、パリティ変換 ($\Lambda^\mu{}_\nu = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$)、時間反転変換 ($\Lambda^\mu{}_\nu = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$) の適当な組み合わせで書くことができる。

²¹いわゆる Campbell-Baker-Hausdorff の公式。http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~akio.tomiya/filebox/Campbell-Baker-Hausdorff.pdf などを参照のこと。

さて、 $U(\Lambda)$ を評価してみよう。

$$\begin{aligned}
U(\Lambda) &= \exp\left(-\frac{i}{4}\Omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta\sigma_{12}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & & & \\ & e^{-i\theta/2} & & \\ & & e^{i\theta/2} & \\ & & & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (4.42) \\
U^{-1}(\Lambda)\gamma^1 U(\Lambda) &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & & & \\ & e^{i\theta/2} & & \\ & & e^{-i\theta/2} & \\ & & & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & & & \\ & e^{-i\theta/2} & & \\ & & e^{i\theta/2} & \\ & & & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & & & \\ & e^{i\theta} & & \\ & & e^{-i\theta} & \\ -e^{i\theta} & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & & & \cos\theta - i\sin\theta \\ & & \cos\theta + i\sin\theta & \\ & -\cos\theta + i\sin\theta & & \\ -\cos\theta - i\sin\theta & & & \end{pmatrix} \\
&= \cos\theta\gamma^1 + \sin\theta\gamma^2 \quad (4.43)
\end{aligned}$$

式 (4.39) がチェックできた。やったね。式 (4.40) も同じような計算でチェックできるし、 $U(\Lambda)$ は γ^0, γ^3 と交換するので式 (4.38, 4.41) も成り立つ。²²²³

4.3.2 z 軸方向のブースト

z 軸方向のブーストも計算してみよう。

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu_\nu &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\eta + \frac{\eta^3}{3!} + \frac{\eta^5}{5!} + \dots\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} + \dots\right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\eta & & & -\sinh\eta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\sinh\eta & & & \cosh\eta \end{pmatrix} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

²²時間のある人は示してみてください

²³ $\theta = 2\pi$ に対し $U(\Lambda) = -1$ となることも分かる。つまり、360 度回転でもとに戻らない！ $\theta = 4\pi$ で $U(\Lambda) = 1$ となり、720 度回転でもとに戻ることから。 <https://www.youtube.com/watch?v=zAHS0kY7h1o> も参照されたい。

ちなみに、 η は擬ラピディティ (pseudo-rapidity) とか呼ばれたりするパラメーター。ということで、こういう関係が成立しているはずだ。

$$\Lambda^0{}_\nu \gamma^\nu = \cosh \eta \gamma^0 - \sinh \eta \gamma^3, \quad (4.45)$$

$$\Lambda^1{}_\nu \gamma^\nu = \gamma^1, \quad (4.46)$$

$$\Lambda^2{}_\nu \gamma^\nu = \gamma^2, \quad (4.47)$$

$$\Lambda^3{}_\nu \gamma^\nu = -\sinh \eta \gamma^0 + \cosh \eta \gamma^3 \quad (4.48)$$

さて、 $U(\Lambda)$ を評価してみよう。

$$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\Omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) = \exp(i\eta\sigma_{03}) = \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & & -\sinh \eta/2 & \\ & \cosh \eta/2 & & \sinh \eta/2 \\ -\sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 & \\ & \sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} U(\Lambda)^{-1}\gamma^0 U(\Lambda) &= \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & & \sinh \eta/2 & -\sinh \eta/2 \\ \sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 \\ & -\sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 \\ & & \sinh \eta/2 & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & & -\sinh \eta/2 & \sinh \eta/2 \\ -\sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 \\ & \sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 \\ & & \sinh \eta/2 & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & & \sinh \eta/2 & -\sinh \eta/2 \\ \sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 \\ & -\sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 \\ & & \sinh \eta/2 & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & & -\sinh \eta/2 & \sinh \eta/2 \\ \sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 \\ & -\sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 \\ & & \sinh \eta/2 & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & & -y & \\ y & x & & y \\ & -y & -x & \\ & & & -x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$x = \cosh^2 \eta/2 + \sinh^2 \eta/2 = \cosh \eta$ と $y = 2 \sinh(\eta/2) \cosh(\eta/2) = \sinh \eta$ ということで、

$$U(\Lambda)^{-1}\gamma^0 U(\Lambda) = \cosh \eta \gamma^0 - \sinh \eta \gamma^3 \quad (4.51)$$

式 (4.45) が確かに満たされている。式 (4.46, 4.47, 4.48) もチェックできる。²⁴

というわけで、たしかに

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\exp(\Omega)]^\mu{}_\nu \quad (4.52)$$

に対し、

$$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\Omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \quad (4.53)$$

とおくと、

$$U(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (4.54)$$

(式 (4.9)) が満たされているのが確かにチェックできる。

²⁴時間のある人は示してみてください

4.4 ディラック方程式とスピン

同じ座標における波動関数を比較してみよう。ローレンツスカラーの ϕ について、

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \phi(\Lambda^{-1}x) \\ &\simeq \phi(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu) \\ &\simeq \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \\ &\simeq \phi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \phi(x) \end{aligned} \quad (4.56)$$

特に z 軸まわりの微小回転を考えてみたい。 $\omega_{12} = -\omega_{21} = -\theta$ とすると、

$$\begin{aligned} \phi'(x) - \phi(x) &\simeq \theta \times -(x^1 \partial^2 - x^2 \partial^1) \phi \\ &\simeq i\theta \times (ix^1 \partial^2 - ix^2 \partial^1) \phi \end{aligned} \quad (4.57)$$

運動量演算子が $p^\mu = i\partial^\mu$ と書けていたことを思い出すと、 $ix^1 \partial^2 - ix^2 \partial^1$ は角運動量演算子の z 成分であることがわかる。

スピノルについても同じ計算をやってみよう。 $\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x)$ であるから、

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= U(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x), \\ &\simeq \left(I_4 - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) \psi(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu), \\ &\simeq \psi(x) + \left(-\omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) \psi(x) \\ &\simeq \psi(x) + \omega_{\mu\nu} \left(-x^\nu \partial^\mu - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \right) \psi(x) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$\omega_{12} = -\omega_{21} = -\theta$ とすると、

$$\psi'(x) - \psi(x) \simeq i\theta \times \left(ix^1 \partial^2 - ix^2 \partial^1 + \frac{1}{2} \sigma^{12} \right) \psi \quad (4.59)$$

微分が入っている項は軌道角運動量と解釈できる。 σ^{12} は軌道角運動量ではない角運動量。つまり、スピン角運動量！ σ^{12} の形をあらわに書くと、

$$\frac{1}{2} \sigma^{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

ここでディラック方程式の平面波解を思い出そう。式 (3.52) で与えられた正エネルギー解のうち、 u_1 に比例する成分は $J_z = +1/2$ 、 u_2 に比例する成分は $J_z = -1/2$ を持つことが分かる。また、式 (3.57) で与えられた負エネルギー解のうち、 u_3 に比例する成分は $J_z = +1/2$ 、 u_4 に比例する成分は $J_z = -1/2$ を持つことが分かる。特に、静止している ($p_z = 0$) 解を考えたとしても角運動量を持っていることが分かり、これはスピン角運動量と解釈できる。つまり、ディラック方程式はスピン $1/2$ の粒子を表すことができています！

5 群と表現（スピン角運動量とか昇降演算子とかの復習を添えて）

前の章でスピノルというのをみた。このあたりの理解を深めるために、群、表現、という数学の道具を学ぶ。数学と聞いて構える必要はない。なぜならば、群の表現には、実は、量子力学の講義で出会っているはずだ。角運動量 $1/2$ 、 1 、 $3/2$ などといった状態にたいして、 J_x 、 J_y 、 J_z という演算子がどのような行列の形となるかを学んだ。 J_x 、 J_y 、 J_z という演算子は回転群 ($SO(3)$) の生成子であり、角運動量の値ごとに回転群の表現があると理解できる。この章では、まず、量子力学の講義で学んだことを、群、表現、という言葉を使って整理しなおす。この講義では、群論の一般論を詳細にやる時間的余裕はないが、以下の講義ノートや書籍を参考にされたい。

- http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/lecture/MP3_16/MP3_16.html
- <https://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/lectures/2018-butsurisuugaku3/>
- 物理学におけるリー代数—アイソスピンから統一理論へ（ジョージアイ、吉岡書店）
- 量子力学 I（猪木慶治、川合光、講談社）第 7 章

5.1 群の定義

まず、群とは、次のような性質をみたす元の集合 G をいう。

- 任意の $g_1 \in G$ と $g_2 \in G$ に対し、積 $g_1 g_2 \in G$ が定義されている
- 単位元 $e \in G$ が存在する。（任意の $g \in G$ に対し、 $eg = ge = g$ ）
- 任意の $g \in G$ に対し逆元 $g^{-1} \in G$ が存在する。（ $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ ）
- 積に対して結合則が成立する。任意の $g_1, g_2, g_3 \in G$ に対して、 $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$ が成立する。

5.2 群の例

5.2.1 離散群の例

$$G = \{e, g\}, \quad g^2 = e \quad (5.1)$$

$$G = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}, \quad g^n = e \quad (5.2)$$

5.2.2 三次元空間の回転

三次元空間の回転は、 3×3 行列 R を使って、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

と書ける。回転により原点からの距離が不変に保たれる ($\vec{x}^2 = \vec{x}'^2$) ので、 R は

$$R^T R = I_3 \quad (5.4)$$

を満たす。このとき、 $\det R = \pm 1$ であることが分かる。 $\det R = -1$ は空間の反転を含むため、(反転を含まない) 回転と解釈できる R は

$$\det R = 1 \quad (5.5)$$

をみたす。よって、 R は $\det R = 1$ の実直交行列である。

行列の積演算の性質から、直交行列の集合は上の群の四条件をみたしている。

- 実直交行列 R_1 と R_2 の積 $R_1 R_2$ も直交行列。
- I_3 は実直交行列のひとつであり、 $R I_3 = I_3 R = R$
- 実直交行列 R の逆行列 R^{-1} も実直交行列であり、 $R R^{-1} = R^{-1} R = I_3$
- 行列の積は結合則が成立するので、 $R_1 (R_2 R_3) = (R_1 R_2) R_3$ 。

回転の操作のなす群は回転群とよばれる。 $SO(3)$ とも呼ばれる (特殊直交群ともいう。 S は Special、 O は Orthogonal group からきている)。²⁵

回転群の元は連続的なパラメーターを使って指定される。このような群を**連続群**もしくは**Lie 群**と呼ぶ。

5.3 無限小回転と Lie 代数

無限小回転を議論してみよう。直交行列 R を

$$R = I + \delta \quad (5.6)$$

と書いてみる。直交行列であるという条件 $R R^T = I$ を δ 無限小として展開する。両辺の δ の一次の項だけ比較すると、次の関係式をえる。

$$\delta^T + \delta = 0. \quad (5.7)$$

このような δ の一般的な解は、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ という 3 つのパラメーターを使って

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

²⁵ $\det R = +1$ だけでなく $\det R = -1$ のものも含めた群は、 $O(3)$ と呼ばれる。

と書ける。 J_1, J_2, J_3 は次のように定義された 3×3 行列を定義してみよう。

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

これを使うと δ は簡単に書ける。

$$\delta = i\theta_1 J_1 + i\theta_2 J_2 + i\theta_3 J_3 \quad (5.10)$$

J_1, J_2, J_3 は回転群の生成子と呼ばれる。有限の回転も生成子を使って書ける。(無限小とは限らない)
 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を使って、直交行列 R を

$$R = \exp(i\theta_1 J_1 + i\theta_2 J_2 + i\theta_3 J_3) \quad (5.11)$$

と書くことができる。

さて、式 (5.9) で得られた行列を使って、交換関係 $[J_i, J_j] \equiv J_i J_j - J_j J_i$ を計算してみよう。以下のような交換関係が成り立っていることが確認できる。

回転群の生成子の交換関係

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2. \quad (5.12)$$

レヴィ＝チビタ (Levi-Civita) 記号 ϵ_{ijk} ²⁶ を使って、

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad (5.13)$$

と書くと、式がひとまとめになって便利。この交換関係が超重要。**Lie 代数**ともよばれる。以下のような重要な性質がある。

- ベクトル空間。足し算とスカラー倍が定義されている。
- 双線形な演算 $[,]$ が定義されている。
- $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobi 恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ が成立する。

5.4 表現

一般にある群 G の各元に対して $n \times n$ 行列 $D(g)$ が対応して、

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2), \quad (5.14)$$

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1}, \quad (5.15)$$

$$D(e) = 1_n \quad (5.16)$$

²⁶ $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ 、 $\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$ 。 i, j, k に同じ数字が入っているときは 0。

を満たすとき、 $D(g)$ を表現行列という。直交行列は回転群の表現行列の一つである。しかし、唯一の表現行列ではない。例えば、回転群の全ての元に対して 1×1 行列の 1 を割り当てるとこれも表現行列になっていることが分かる。他にもあるだろうか？すなわち、

$$\exp(i\alpha_1 J_1 + i\alpha_2 J_2 + i\alpha_3 J_3) \exp(i\beta_1 J_1 + i\beta_2 J_2 + i\beta_3 J_3) = \exp(i\gamma_1 J_1 + i\gamma_2 J_2 + i\gamma_3 J_3) \quad (5.17)$$

ならば

$$\exp(i\alpha_1 J'_1 + i\alpha_2 J'_2 + i\alpha_3 J'_3) \exp(i\beta_1 J'_1 + i\beta_2 J'_2 + i\beta_3 J'_3) = \exp(i\gamma_1 J'_1 + i\gamma_2 J'_2 + i\gamma_3 J'_3) \quad (5.18)$$

も必ず成立するような 3 つ組の $n \times n$ 行列 J'_1, J'_2, J'_3 が存在するか？という質問である。Campbell-Baker-Hausdorff の公式 $e^A e^B = \exp(A + B + [A, B]/2 + [A, [A, B]]/12 + [B, [B, A]]/12 + \dots)$ を思い出すと、どうも、 J'_1, J'_2, J'_3 に式 (5.12) と同じ形の交換関係を要求する必要があるそう。

とりあえず、この交換関係を手掛かりにして回転群の一般の表現行列を考察していこう。 $n \times n$ 行列の 3 つ組 J'_1, J'_2, J'_3 が存在して、

$$[J'_1, J'_2] = iJ'_3, \quad [J'_2, J'_3] = iJ'_1, \quad [J'_3, J'_1] = iJ'_2. \quad (5.19)$$

を満たすものを探す。このような三つ組みにはどれだけバリエーションがあるだろうか？

また、表現行列はうまいユニタリ変換を選ぶとブロック対角化できるものがある。このような表現を可約表現と呼ぶ。ブロック対角化できるようなユニタリ変換を探せないものを既約表現と呼ぶ。定義により、全ての可約表現は既約表現のいくつかの直和で書ける。そのため、既約表現を分類できれば、ありうる表現の種類は全て分かることになる。

5.5 交換関係 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ を満たす、三つ組みの行列 J_i を分類してみよう

さて、回転群の表現行列を考えると、無限小回転から生成子が出てきたので、生成子も行列として書くことができる。次のような行列を定義してみよう。

$$J_+ \equiv J_1 + iJ_2, \quad J_- \equiv J_1 - iJ_2 \quad (5.20)$$

容易に次の交換関係がチェックできる。

$$[J_3, J_+] = J_+, \quad [J_3, J_-] = -J_-. \quad (5.21)$$

J_3 の固有ベクトル v について、

$$J_3 v = \lambda v. \quad (5.22)$$

$J_+ v$ と $J_- v$ に J_3 を作用させてみよう。

$$J_3(J_+ v) = (J_+ J_3 + J_+) v = (\lambda + 1) J_+ v, \quad (5.23)$$

$$J_3(J_- v) = (J_- J_3 - J_-) v = (\lambda - 1) J_- v. \quad (5.24)$$

J_+ と J_- はそれぞれ、 J_3 の固有値を 1 増やしたり 1 減らしたりする。

表現が有限次元であることから、 J_3 の固有値には最大値 λ_{\max} と最小値 λ_{\min} が存在する。その固有ベクトル v_{\max} と v_{\min} は

$$J_+ v_{\max} = 0, \quad J_- v_{\min} = 0. \quad (5.25)$$

を満たす。(右辺が 0 じゃないと固有値 $\lambda_{\max} + 1$ もしくは $\lambda_{\min} - 1$ の固有ベクトルが作れてしまうので矛盾する。)

代数から次の関係式が作れる。

$$J_- J_+ = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) - J_3^2 - J_3, \quad (5.26)$$

$$J_+ J_- = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) - J_3^2 + J_3. \quad (5.27)$$

これを用いて、以下が示せる。

$$J_- J_+ v_{\max} \Rightarrow (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) v_{\max} = \lambda_{\max}(\lambda_{\max} + 1) v_{\max}, \quad (5.28)$$

$$J_+ J_- v_{\min} \Rightarrow (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) v_{\min} = \lambda_{\min}(\lambda_{\min} - 1) v_{\min}. \quad (5.29)$$

ある整数 n を使って、

$$(J_-)^n v_{\max} \propto v_{\min} \quad (5.30)$$

と書けるとしよう。既約表現を考えるとこの性質がみたされている。²⁷ すると、

$$\lambda_{\min} = \lambda_{\max} - n \quad (5.31)$$

であり、

$$[J_{\pm}, J_1^2 + J_2^2 + J_3^2] = 0 \quad (5.32)$$

を使うと、

$$\lambda_{\max}(\lambda_{\max} + 1) = \lambda_{\min}(\lambda_{\min} - 1) \quad (5.33)$$

代入して整理すると、

$$(n - 2\lambda_{\max})(n + 1) = 0 \quad (5.34)$$

n は自然数なので、結局、以下を得る。

$$n = 2\lambda_{\max}, \quad \lambda_{\min} = -\lambda_{\max}. \quad (5.35)$$

実は、 J_1 、 J_2 、 J_3 の行列表示は、スピン $j (= \lambda_{\max})$ の角運動量演算子の行列表示と同じ形をしていることが分かる。以下で、具体的にみてみよう。 $j = \lambda_{\max}$ とし、 J_3 を対角化する基底をとってみよう。

$$J_3 = \begin{pmatrix} j & & & \\ & j-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -j \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

²⁷このような性質が満たされない場合、すなわち、ある v' と n' が存在して、 $(J_-)^{n'} v_{\max} \propto v'$ かつ $J_- v' = 0$ かつ $v' \neq v_{\min}$ の場合、このあとの議論を適用すると J がブロック対角化された行列になることが分かる。すなわち、この場合は、可約表現となる。

$J_3 = j$ の成分について $J_- J_+ = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - J_3^2 - J_3 = 0$ であることと、 $J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ は J_\pm と可換であることから、

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \begin{pmatrix} j(j+1) & & & \\ & j(j+1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & j(j+1) \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

$J_- J_+ = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - J_3^2 - J_3$ と $J_+ J_- = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - J_3^2 + J_3$ を使うと、

$$J_+ J_- = \begin{pmatrix} 2j & & & & \\ & 2(2j-1) & & & \\ & & 3(2j-2) & & \\ & & & 4(2j-3) & \\ & & & & 5(2j-4) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

$$J_- J_+ = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 2j & & & \\ & & 2(2j-1) & & \\ & & & 3(2j-2) & \\ & & & & 4(2j-3) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 2j \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

結局、

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2j} & & & \\ & 0 & \sqrt{2(2j-1)} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \sqrt{2j} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = J_+^\dagger \quad (5.40)$$

$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ を使うと、

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2j} & & & \\ \sqrt{2j} & 0 & \sqrt{2(2j-1)} & & \\ & \sqrt{2(2j-1)} & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{2j} \\ & & & \sqrt{2j} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

$$J_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2j} & & & \\ \sqrt{2j} & 0 & -\sqrt{2(2j-1)} & & \\ & \sqrt{2(2j-1)} & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\sqrt{2j} \\ & & & \sqrt{2j} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

ということで、 J_1 、 J_2 、 J_3 の形は $j = \lambda_{\max}$ を指定することで決まることが分かった。また、式 (5.41)、(5.42)、(5.37) で与えられた具体的な行列の形は、スピン j の角運動量演算子の行列表示と同じであることも分かる。

5.6 2π 回して元に戻るか?: $SO(3)$ と $SU(2)$

さて、ここまでは式 (5.12) の交換関係をみたす生成子の分類をし、それを使って $\exp(i\theta_1 J_1 + i\theta_2 J_2 + i\theta_3 J_3)$ のようにして表現行列を作ることを目指してきた。生成子は無限小回転の性質を決めるため、回転させる角度が比較的小さい回転操作については問題がない。しかし、回転させる角度が大きい場合にも $SO(3)$ と同じ性質を持つような行列を与えることができていくかは自明ではなく、少し慎重にみておく必要がある。

スピン 1 の J_3 を対角化する基底をとると、

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

と書ける。 z 軸まわりに 2π 回転させる行列を計算してみると、

$$\exp(2\pi i J_3) = \begin{pmatrix} \exp(2\pi i) & & \\ & \exp(2\pi i \times 0) & \\ & & \exp(-2\pi i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

単位行列があらわれた。つまり、なにもしないのと同じになったので辻褄があっている。

スピン $1/2$ だとどうだろう。 J_3 を対角化する基底では、

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

と書ける。 z 軸まわりに 2π 回転させる行列を計算してみると、

$$\exp(2\pi i J_3) = \begin{pmatrix} \exp(\pi i) & \\ & \exp(-\pi i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

単位行列にならない！

さて、一般のスピンについてどうなるか、同じような計算が簡単にできる。結果をまとめると、

- スピン j が整数 $(0, 1, \dots)$ のとき、 $\exp(2\pi i J_3) = I_{2j+1}$ で単位行列になる。
- スピン j が半整数 $(1/2, 3/2, \dots)$ のとき、 $\exp(2\pi i J_3) = -I_{2j+1}$ で単位行列にならない。

もう一度、表現の定義を思い出すと、回転の操作ひとつに対して行列がひとつ定まっておく必要があった。つまり、0 度回転と 360 度回転は回転の操作として同じなのだから、同じ行列が対応していないと表現の定義と矛盾する。この観点からすると、スピン整数は文句なしに $SO(3)$ の表現となっている。一方、スピン半整数はそうっていない。しかし、スピン半整数の方も 360 度回転で元に戻るという大域的な性質をのぞきスピン $1/2$ の J_1, J_2, J_3 を使って、 2×2 行列の U を

$$U = \exp(i\theta_1 J_1 + i\theta_2 J_2 + i\theta_3 J_3) = \exp\left(\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix}\right) \quad (5.47)$$

と計算してみる。すると、 U は、 $\det U = 1$ のユニタリ行列であることが分かる。さらに、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を適当にとることによって、任意の 2×2 で行列式が 1 のユニタリ行列を表せることも分かる。スピン $1/2$ の U は $SU(2)$ という群を表している！スピン半整数、整数ともに $SU(2)$ の表現になっている。

$SO(3)$ と $SU(2)$ は密接な関係がある。²⁸ まとめると、

- $SO(3)$ の Lie 代数と $SU(2)$ の Lie 代数は、どちらも $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ 。群の単位元近くの構造は Lie 代数で決まるから、 $SO(3)$ と $SU(2)$ は局所的には同じ。
- $SO(3)$ と $SU(2)$ は大域的な構造が違う。
 - $SO(3)$ は 360 度回転するとともにもどる。
 - $SU(2)$ は “720 度回転” するとともにもどる。²⁹
- $SO(3)$ の表現は、整数スピン。
- $SU(2)$ の表現は、整数スピンおよび半整数スピン。

6 ローレンツ群とその表現

この章の目的は、スピノルはローレンツ群の表現の一つである、ということを理解することである。前の章では、量子力学の講義で学んだことを、回転群、表現、という言葉を使って整理しなおした。この章では、同じ議論を、ローレンツ変換のなす群であるローレンツ群について適用してみる。スピノルがローレンツ群の表現の一つであることを学ぶ。

²⁸ $SU(2)$ は $SO(3)$ の普遍被覆群である、という言い方がある。 $SU(2)$ の中心 (center) は Z_2 であるが、 $SO(3)$ は $SU(2)/Z_2$ と同一視できる。

²⁹ フェルミオン体操 (<https://www.youtube.com/watch?v=ZT1rUfULy1E>, <https://www.youtube.com/shorts/zAHS0kY7h1o>, <https://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/lectures/2020-komaba/notes2.pdf>) も参照のこと。

6.1 ローレンツ群の代数

回転群でやった議論をローレンツ群にも適用してみよう。

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (6.1)$$

Λ^{μ}_{ν} は次のような性質をみたす。

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}. \quad (6.2)$$

ローレンツ変換の行列を $\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha} + \omega^{\mu}_{\alpha}$ と分解してみよう。 δ が無限小とすると、次の関係式を得る。

$$g_{\mu\alpha} \omega^{\mu}_{\beta} + g_{\mu\beta} \omega^{\mu}_{\alpha} = 0. \quad (6.3)$$

[式 (5.7) と式 (6.3) を比較]

一般解は 6 つのパラメーターを使って次のように書ける。

$$\omega^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ -\eta_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\eta_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\eta_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

[式 (5.8) と式 (6.4) を比較]

以下のように分解できる。

$$\omega^{\mu}_{\nu} = i \sum_{k=1}^3 \theta_k (J_k)^{\mu}_{\nu} + i \sum_{k=1}^3 \eta_k (K_k)^{\mu}_{\nu} \quad (6.5)$$

[式 (5.10) と式 (6.5) を比較]

J_i は回転の生成子。 K_i は i 軸方向のローレンツブーストの生成子。具体的に書いてみると、

$$(J_1)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

$$(J_2)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

$$(J_3)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

$$(K_1)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

$$(K_2)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$(K_3)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

z 軸周りの回転が $\exp(i\theta J_3)$ と書けるように、 z 軸方向のローレンツブーストは $\exp(i\eta K_3)$ と書ける！
次の交換関係（代数）を得る。（具体的な計算は省略）

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (6.12)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k, \quad (6.13)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k. \quad (6.14)$$

[式 (5.12) と式 (6.12, 6.13, 6.14) を比較]

6.2 ローレンツ群の表現の一般論（A スピン、B スピン）

ローレンツ群の表現の一般論をやるために、A スピン、B スピンを定義してみよう。

$$A_i \equiv \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad (6.15)$$

$$B_i \equiv \frac{1}{2}(J_i - iK_i). \quad (6.16)$$

式 (6.12, 6.13, 6.14) を使うと、 A_i と B_i について次の交換関係（代数）を得る。

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, \quad (6.17)$$

$$[B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k, \quad (6.18)$$

$$[A_i, B_j] = 0. \quad (6.19)$$

A_i 、 B_i はそれぞれ回転群と同じ代数を為していることが分かり、さらに A_i と B_i は可換なことも分かる。 A に対する“スピン”と B に対する“スピン”を、それぞれ A スピン、 B スピンと呼ぶことにしてみよう。 A スピンと B スピンの大きさを指定することにより、ローレンツ群の既約表現が一つ決まる。³⁰ 表現の次元は $(2A+1)(2B+1)$ になる。ということで、ローレンツ群は回転群を 2 つ組み合わせたものみたいな感じになっている。³¹

まとめると、

- 回転群の既約表現：スピン j で指定。 j_z の値は、 $j_z = j, j-1, \dots, -j$ 。 $2j+1$ 次元。
- ローレンツ群の表現：スピン A と B で指定。 A_3 の値は、 $A, A-1, \dots, -A$ 。 B_3 の値は、 $B, B-1, \dots, -B$ 。結果、 $(2A+1)(2B+1)$ 次元。

6.3 ローレンツ群の既約表現の具体例

回転群の表現はスピンの値を半整数で指定すれば一意に決まった。ローレンツ群の表現は A スピン、 B スピンの値のそれぞれを半整数で指定すれば決まる。

6.3.1 スカラー

A スピン、 B スピンをともに 0 としてみよう。 $(0, 0)$ と書く。この表現の次元は

$$(2 \times 0 + 1)(2 \times 0 + 1) = 1 \quad (6.20)$$

であり、

$$J_i = 0, \quad K_i = 0. \quad (6.21)$$

ローレンツ変換に対し不変なことが分かる。これはローレンツスカラー。

6.3.2 ワイルスピノル

$(1/2, 0)$ という表現を考えてみよう。この表現の次元は、

$$(2 \times 1/2 + 1)(2 \times 0 + 1) = 2 \quad (6.22)$$

³⁰ 回転群の時と同様に、 $A+B$ が半整数の時は、360 度回転してももとに戻らず、720 度回転してようやく元に戻る。このような表現は、厳密にはローレンツ群の表現ではなく、ローレンツ群の普遍被覆群である $SL(2, C)$ の表現である。

³¹ ローレンツ群は回転群 2 つというのはちょっとごまかしがある。ローレンツ群は $SO(1, 3)$ 。 $SO(4)$ は $SU(2) \times SU(2)$ と同じ代数。

である。 A_i と B_i は具体的には、 2×2 行列で、

$$A_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad B_i = 0. \quad (6.23)$$

と書くことができる。 $A_i = (J_i + iK_i)/2$ 、 $B_i = (J_i - iK_i)/2$ と定義したことから、

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i. \quad (6.24)$$

これは、左手型ワイルスピノル (left-handed Weyl spinor)。あとで詳しくみる。

また、 $(0, 1/2)$ という表現も考えることができる。この表現の次元も同様に 2 であり、具体的な A_i と B_i の形は 2×2 行列で、

$$A_i = 0, \quad B_i = \frac{1}{2}\sigma_i. \quad (6.25)$$

と書ける。 J_i と K_i は、

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad K_i = \frac{i}{2}\sigma_i. \quad (6.26)$$

と書ける。これは、右手型ワイルスピノル (right-handed Weyl spinor)。これもあとで詳しくみる。

6.3.3 ベクトル

ベクトルは既約表現で、A スピン B スピンの言葉でいうと $(1/2, 1/2)$ と理解できる。これは確かに $2 \times 2 = 4$ 成分。また、回転群の表現としては $1/2 \times 1/2 = 0 + 1$ となっているので、確かに 4 成分ベクトルっぽい。³²

6.4 ディラック方程式のスピノルはなんだったのか

ローレンツ群の既約表現の作り方を学んだ。結局、ディラック方程式にあらわれる 4 成分のスピノルは、どんな表現だったのか？ワイルスピノルというのがでてきたが、それとの関係は？

6.4.1 ローレンツ群の表現としてのディラックスピノル

ワイルスピノルと区別するために、ディラック方程式に出てきた 4 成分スピノルを、ディラックスピノルと呼ぶことにしよう。

$U(\Lambda) \simeq I_4 - (i/4)\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ を思い出そう。ディラックスピノルに対する回転の生成子 $J_i^{(D)}$ ($i = 1, 2, 3$) およびローレンツブーストの生成子 $K_i^{(D)}$ ($i = 1, 2, 3$) を導入し、微小ローレンツ変換が、 $U(\Lambda) = I_4 + \sum_k i\theta_k J_k^{(D)} + i \sum_k \eta K_k^{(D)}$ と書けるとすると、

$$J_i^{(D)} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

$$K_i^{(D)} = \sigma^{0i} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

³² J_i と K_i を具体的に構成してベクトルになっていることをチェックすることもできるけど省略。腕試しにやってみるのもよいかも。

実はこの生成子は、ユニタリ変換によって基底を変えてみると、すごく見やすい形になる。

唐突だが、ディラックスピノルについてこんな基底変換をしてみよう。

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi, \quad (6.29)$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

すると、この基底におけるローレンツ変換の生成子はこんな形だ。

$$U^{-1}J_i^{(D)}U = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

$$U^{-1}K_i^{(D)}U = \begin{pmatrix} -i\sigma^i & 0 \\ 0 & i\sigma^i \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

ブロック対角化できた！つまり、ディラックスピノルは2つの既約表現の直和として書くことができる可約表現であることが分かる。前の subsection で得られた結果を比較すると、上二成分が $(1/2, 0)$ のワイルスピノル、下二成分が $(0, 1/2)$ のワイルスピノルであることが分かる。つまり、4成分のディラックスピノルは、A スピン B スピンの言葉でいうと、

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (6.33)$$

と書ける。

6.4.2 質量 0 の時のディラック方程式

実は、ワイルスピノルは質量 0 のフェルミオンを記述する。確認してみよう。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (6.34)$$

スピノルの上下 2 成分ずつで分けてみよう。

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - m & i\partial_i \sigma^i \\ -i\partial_i \sigma^i & -i\partial_t - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0. \quad (6.35)$$

突然だが、こんな組み合わせを取ってみよう。

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ - \psi_-), \quad (6.36)$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ + \psi_-). \quad (6.37)$$

すると、2 成分ずつに分けたディラック方程式は、 $\psi_{L,R}$ で以下のように書くことができる。

$$(i\partial_t - i\partial_i \sigma^i)\psi_L - m\psi_R = 0, \quad (6.38)$$

$$(i\partial_t + i\partial_i \sigma^i)\psi_R - m\psi_L = 0. \quad (6.39)$$

ψ_L と ψ_R が交じる式になっているが、 $m = 0$ とすると、

$$(i\partial_t - i\partial_i\sigma^i)\psi_L = 0, \quad (6.40)$$

$$(i\partial_t + i\partial_i\sigma^i)\psi_R = 0. \quad (6.41)$$

となって、 ψ_L と ψ_R が分離する!³³

6.4.3 2つのワイルスピノルの物理的意味

運動量固有状態（平面波）についてみてみよう。 ψ_L に対し、 z 軸正の向きに進む粒子を考えて、

$$\psi_L \propto \exp(-iEt + iEz) \quad (6.43)$$

とおく（質量 0 の粒子を考えているので $E = |\vec{p}|$ であることに注意！）と、

$$\sigma^3\psi_L = -\psi_L \quad (6.44)$$

が満たされることが分かる。4.4 章の議論を思い出すと、これはスピンの下向き（ z 軸負方向）に決まったことをあらわしている！運動量の向きを変えて同じような議論ができるが、スピンと運動量が反対の向きになるという事情は変わらない。

スピンと運動量を持つ粒子に対し、ヘリシティ (helicity) という量を定義するのが便利。

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (6.45)$$

ψ_L はヘリシティ $-1/2$ の粒子を表す。

同様に、 ψ_R に対し、

$$\psi_R \propto \exp(-iEt + iEz) \quad (6.46)$$

とおくと、

$$\sigma^3\psi_R = +\psi_R \quad (6.47)$$

ψ_R のスピンは上向きに決まった！運動量の向きを変えると、必ずスピンは運動量と同じ向きになる。 ψ_R はヘリシティ $+1/2$ の粒子を表す。

ヘリシティが $+1/2$ の粒子を考えてみよう。この粒子の速度が光速より遅ければ（すなわち 0 でない質量を持てば）、十分大きな速度で観測者が運動することにより追い越すことができる。そうすると、運動量が反転して見えるが、スピンは反転しない。すなわち、粒子を追い越すとヘリシティが $-1/2$ になってみえる。粒子の速度が光速より遅いと追い越すことができる。そうすると、ヘリシティが反転してみえる。一方、粒子の速度が光速（すなわち質量 0）だと追い越せない。ヘリシティは反転できない。

³³式 (3.35) で与えられている Weyl representation のガンマ行列をとると、ディラックスピノルの 4 成分の上下 2 成分ずつが、

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

というように 2 つのワイルスピノルで分かれた形で書かれる。

6.5 カイラリティとヘリシティのまとめ

ローレンツ群の既約表現として 2 成分のワイルスピノルがあることを見てきた。ワイルスピノルには次の 2 種類がある。

- $(1/2, 0)$ は左手型 (left-handed)
- $(0, 1/2)$ は右手型 (right-handed)

この左手型か右手型かという性質のことを**カイラリティ** (chirality) と呼ぶ。

また、ヘリシティは粒子の運動量とスピンから定義される量である。すでに見たように、質量 0 の粒子に対しては、ヘリシティとカイラリティは次のような一対一対応がある。

- 質量 0 ヘリシティ $-1/2$: 左手型 (left-handed)
- 質量 0 ヘリシティ $+1/2$: 右手型 (right-handed)

ヘリシティとカイラリティは異なる概念であるので混同しないように注意してほしい。質量が 0 でない場合は、ヘリシティとカイラリティの一対一対応は崩れている。

6.6 パリティ

ローレンツ変換の定義は $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$ であったが、この中には連続的な変換として書けないものが存在する。そのうちの 하나가パリティ変換である。

$$P^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

この操作により、空間が鏡に映したように反転する。連続的に書けるローレンツ変換は一般にはパリティ変換と可換ではない。生成子の行列の形をつかうと、

$$P^{-1}J_iP = J_i, \quad P^{-1}K_iP = -K_i. \quad (6.49)$$

が示せる。

これを使うと、パリティで A スピンと B スピンが入れ替わることが分かる。

$$P^{-1}A_iP = B_i, \quad P^{-1}B_iP = A_i. \quad (6.50)$$

つまり、パリティ変換で $(1/2, 0)$ と $(0, 1/2)$ は入れ替わる！つまり、パリティ変換で left-handed Weyl spinor と right-handed Weyl spinor は入れ替わる！³⁴

³⁴電磁気学の法則も重力の法則もパリティ変換 ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) に対して形を変えない。すなわち、電磁気学と重力の法則にはパリティ対称性がある。しかし、素粒子物理の知見によるとこの自然界の物理法則はパリティ対称性を破っている！具体的には、原子核のベータ崩壊を引き起こす弱い相互作用 (weak interaction) は左手型のクォークやレプトンと相互作用するが、右手型のクォークやレプトンとは相互作用しない。(より正確に言うと、 W ボソンとは相互作用しない。 Z ボソンとは右手型クォークおよびレプトンも相互作用するが、やはり左手型と Z ボソンとの相互作用の強さと一致はしていない。) 弱い相互作用がパリティ対称性を破り得る可能性は 1956 年に李政道 (Tsung-Dao Lee) と楊振寧 (Chen-Ning Yang) により指摘され、呉健雄 (Chien-Shiung Wu) により実験的に確かめられた。この業績により李政道と楊振寧は 1957 年にノーベル賞を受賞している。https://en.wikipedia.org/wiki/Wu_experiment なども参照のこと。

6.7 ローレンツ群のまとめ

ローレンツ群の性質は回転群の性質と良く似ているので、比較をまとめた。実は三次元回転群 $SO(3)$ より、四次元回転群 $SO(4)$ の方が良く似ている。詳しくは、教科書（物理学におけるリー代数—アイソスピンから統一理論へ、ジョージ・ヤイ、など）を参考にしてください。

普遍被覆群	三次元回転群 $SU(2)$	四次元ローレンツ群 $SL(2, C)$
群の定義	$RR^T = I_3$	$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$
代数	$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$	$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ $[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$ $[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$
既約表現	スピンの指定	2つの“スピン”（A スピン、B スピン）で指定
表現の具体例	スピン 0 スピン 1/2 ...	スカラー 左手型ワイルスピノル 右手型ワイルスピノル ディラックスピノル ...

表 1: 回転群とローレンツ群の比較

7 電磁場中のディラック (Dirac) 方程式

電磁場中の電子のふるまいについて、相対論的効果を取り入れて議論できるのが、ディラック方程式の醍醐味のひとつ。何が起きるかみてみよう！

7.1 ゲージ対称性について復習

電磁場をディラック方程式に入れたいが、いったいどうやればいいのか。まず、電磁気学がゲージ対称性もつゲージ理論であることを復習し、さらに、ゲージ対称性を利用することにより荷電粒子の従う方程式を簡単に導いてみよう。

ゲージ対称性（ゲージ理論）はめちゃくちゃ大事な考え方。 β 崩壊を引き起こす弱い相互作用はゲージ理論で記述される。また、クォークを3つひとまとめにして陽子や中性子を作る強い相互作用もゲージ理論で記述される。重力も一種のゲージ理論。[4, 5]

7.1.1 古典電磁気学のゲージ対称性

電磁気学からゲージ対称性を見出してみよう。電磁気学では電場 \vec{E} とか磁場 \vec{B} の振る舞いが記述される。マクスウェル方程式の一部 [式 (1.57)] を満たす解を構成するために、電磁場をスカラーポテンシャル ϕ と

かベクトルポテンシャル \vec{A} の微分として書くと色々便利なのだった。

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (7.1)$$

上の定義からすぐわかるように、任意の関数 $\lambda(t, \vec{x})$ を使い、

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\lambda. \quad (7.2)$$

という風に ϕ と \vec{A} を取り替えても、同じ電磁場が得られる。異なる ϕ と \vec{A} が得られたが、電磁場 \vec{E} と \vec{B} はあくまで一緒なので、物理が全く同じ状況を記述する方法を複数見つけたことになる。物理の記述にある種の冗長性がある。こういうのを、ゲージ対称性がある、と言い、上で定義したような ϕ と \vec{A} の変換をゲージ変換と呼ぶのだった。(なぜわざわざ冗長なやり方で物理を記述するのだろうか？ゲージ場の量子論まで学ぶといろいろ見えてくるが、それはこの講義の範囲を越えるので割愛)

特殊相対論のテンソルの形式で書くと、簡潔にかける。ゲージ変換は任意の関数 $\lambda(t, \vec{x})$ に対して、

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (7.3)$$

に対して、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \rightarrow \quad \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \lambda) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \quad (7.4)$$

ということで、 $F_{\mu\nu}$ は不変。つまり電磁場は不変。

7.1.2 電磁場中の古典粒子

電磁場中の荷電粒子の運動方程式は次のようなものだった。

$$m\ddot{\vec{x}} = e(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}). \quad (7.5)$$

以下のラグランジアンから運動方程式が得られることを見てみよう。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - e\phi + e\vec{A}\dot{\vec{x}}. \quad (7.6)$$

オイラーラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial L}{\partial x_i} \\ \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + eA_i) &= -e\partial_i\phi + e\dot{x}_j\partial_iA_j \\ m\ddot{x}_i + e\dot{x}_j\partial_jA_i + e\dot{A}_i &= -e\partial_i\phi + e\dot{x}_j\partial_iA_j \\ m\ddot{x}_i &= e(-\partial_i\phi - \dot{A}_i) + e\dot{x}_j(\partial_iA_j - \partial_jA_i). \end{aligned} \quad (7.7)$$

確かに荷電粒子の運動方程式がえられた。

さて、ラグランジアンをルジャンドル変換することにより、ハミルトニアンが次のように書けることも分かる。

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi. \quad (7.8)$$

どうも、電磁場なしのハミルトニアンに対して、以下の置き換えルールを適用すれば、電磁場中のハミルトニアンが得られるようだ。

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}, \quad H \rightarrow H - e\phi. \quad (7.9)$$

7.1.3 電磁場中の量子力学

量子力学では、式 (7.9) を参考にして、次のような演算子の「置き換えルール」を採用すると上手く行く。

$$-i\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{\nabla} - e\vec{A}, \quad i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi. \quad (7.10)$$

ハミルトニアンは次のようになる。

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}(i\vec{\nabla} + e\vec{A})^2 + e\phi \\ &= -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + e\phi \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.1.4 量子力学とゲージ対称性

違う論理を使って、式 (7.11) のハミルトニアンにたどり着くこともできる。波動関数 ψ の位相を回転されるような

$$\psi \rightarrow e^{-ie\lambda}\psi \quad (7.12)$$

変換に対して対称性があることを要求してみよう。そうすると、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを導入して、それらが変換のもとで以下のように振る舞うことが要求される。

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\lambda. \quad (7.13)$$

この考え方はとても便利。これはゲージ対称性を原理として話を始めていることになる。マックスウェル方程式とも良く馴染むし、むしろこうやって議論する方が自然。

7.2 電磁場中のディラック (Dirac) 方程式と g 因子

さて、前の章で、

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ie\lambda(x)}\psi(x) \quad (7.14)$$

というゲージ変換に対する共変性を要求すれば、必然的にスカラーポテンシャルとベクトル・ポテンシャルを導入することになり、電磁場との相互作用が入ることが分かった。この手続きにより、ディラック方程式に電磁場を導入してみよう。具体的な手続きとしては、以下のような微分演算子の置き換えを行えばいい。

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - eA^\mu. \quad (7.15)$$

結果として、電磁場中のディラック方程式は次のようになる。

電磁場中のディラック方程式

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi = 0. \quad (7.16)$$

式 (7.16) は、次のような変換に対して共変。

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ie\lambda(x)}\psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda(x). \quad (7.17)$$

非相対論的極限 ($v \ll c$) での電磁場との相互作用を計算してみよう。ディラックスピノルの上 2 成分を ψ_+ 、下 2 成分を ψ_- と名付けてみる。つまり、次のように分解する。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

ガンマ行列は次のように書けた。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

ディラック方程式を ψ_+ と ψ_- で書くと、

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - e\phi - m & (i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \\ -(i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} & -i\partial_t + e\phi - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0. \quad (7.20)$$

式を整理するために次のような $\tilde{\psi}_+$ と $\tilde{\psi}_-$ を定義してみよう。

$$\tilde{\psi}_+ = e^{imt}\psi_+, \quad \tilde{\psi}_- = e^{imt}\psi_-. \quad (7.21)$$

ディラック方程式を $\tilde{\psi}_+$ と $\tilde{\psi}_-$ で書くと、

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - e\phi & (i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \\ -(i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} & -i\partial_t + e\phi - 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_+ \\ \tilde{\psi}_- \end{pmatrix} = 0. \quad (7.22)$$

非相対論的な極限、つまり電子の運動エネルギーが静止エネルギーに比べて小さい極限を考えてみよう。 $|m\tilde{\psi}_-| \gg |(i\partial_t - e\phi)\tilde{\psi}_-|$ に違いない。ということは、

$$(i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \tilde{\psi}_+ + 2m\tilde{\psi}_- \simeq 0. \quad (7.23)$$

これを式 (7.22) の一行目に代入すると、

$$(i\partial_t - e\phi)\tilde{\psi}_+ + (i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \left[-\frac{1}{2m}(i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \tilde{\psi}_+ \right] = 0. \quad (7.24)$$

左辺の第二項がゴチャゴチャしている。ちょっと整理してみよう。特にこの関係式を使う。

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j \times (i\partial_i + eA_i)(i\partial_j + eA_j) &= (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) \times (i\partial_i + eA_i)(i\partial_j + eA_j) \\ &= -(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k(i\partial_i + eA_i)(i\partial_j + eA_j) \\ &= -(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 - e\epsilon_{ijk}\sigma_k(\partial_i A_j) \end{aligned} \quad (7.25)$$

結局まとめると、

$$i\frac{\partial \tilde{\psi}_+}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 \tilde{\psi}_+ - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \tilde{\psi}_+ - e\phi \tilde{\psi}_+. \quad (7.26)$$

電荷を持った粒子のシュレーディンガー方程式と比較してみよう。右辺第一項と第三項と同じものは式 (7.11) のハミルトニアンにある。新しいのは右辺第二項の $\vec{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{A})$ を含む項。

今、 $\tilde{\psi}_+$ はディラックスピノルの上二成分を取り出したもの。4.4 章の議論を思い出そう。一番上の成分は角運動量 (つまりスピン) が $J_z = +1/2$ の成分、二番目の成分は $J_z = -1/2$ の成分であった。なので、

このパウリ行列 $\vec{\sigma}$ はスピン演算子 \vec{s} を用いて、 $\vec{\sigma} = 2\vec{s}$ と読み替えてよい。 $\nabla \times A$ は磁場。結局、以下のようなハミルトニアンが得られたことになる。

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e}{m}\vec{s} \cdot \vec{B} - e\phi \quad (7.27)$$

面白いのは右辺の第2項。磁場とスピンの相互作用項が生まれている！

磁場とスピンの相互作用項は g 因子というパラメーターを使って、

$$H = -\frac{ge}{2m}\vec{s} \cdot \vec{B}. \quad (7.28)$$

と書かれることが多い。ディラック方程式を使うと $g = 2$ が得られたことになる。

7.3 g 因子の測定値と比較してみよう

ディラック方程式によると、ディラックスピノルで記述される荷電粒子の g 因子は2になるはず。この計算はどれくらい上手くいっているのだろうか？Particle Data Group³⁵などを見ると、実験で測定された様々な粒子に関数 g 因子の値が分かる。

7.3.1 電子とミュー粒子

例えば、電子の g 因子は次のような値。

$$g_e = 2.00231930436182 \pm 0.00000000000052 \quad (7.29)$$

また、ミュー粒子と呼ばれる電荷 -1 の質量が約 106 MeV の粒子³⁶についても g 因子を見てみよう。

$$g_\mu = 2.0023318412 \pm 0.0000000004. \quad (7.30)$$

それぞれ 0.1 % くらいの精度で g 因子は2とみなせる。どうやらだいたい上手くいっているようだ。

しかし、これで満足していいのか？電子の g 因子は 10^{-13} 程度の精度で測られていて、ミュー粒子の g 因子は 10^{-10} 程度の精度で測られていて、あらゆる自然科学の中でも屈指の精密測定。 g の2からのずれは 0.002 程度であるものの、実験精度がそれより何桁も小さいので、 $g - 2$ が0でないことは確立している。どう解釈したらいいだろう？ディラック方程式が上手くいっていない？

このズレは異常磁気モーメントと呼ばれていて、ディラック方程式の限界を示しているとも見こともできる。ディラック方程式で g 因子を計算するときには、電磁場を外場とみなしていた。（つまり、電磁場がディラックスピノルで記述される粒子の影響を受けないと思って計算している。）でももちろんこれは近似にすぎない。電磁場はもちろん荷電粒子の影響を受ける。その影響を量子論的に記述する必要がある。電磁場も量子化しなくてはならない。ちゃんと計算するには、場の量子論が必要。（例えば Peskin-Schroeder の教科書の 6.3 章など）

³⁵<https://pdglive.lbl.gov/Particle.action?node=S003&init=0>

³⁶電子とミュー粒子はそれぞれレプトンと呼ばれるカテゴリーに属する素粒子である。他のレプトンの例は、タウ粒子やニュートリノである。

詳細は場の量子論の教科書にゆずるが、場の量子論（正確には量子電磁気学、QED, quantum electrodynamics）を使うと、摂動計算を使うことにより、異常磁気モーメントが微細構造定数 $\alpha = e^2/4\pi$ の級数として展開して書ける。特に、 α の一次の項が一番主要な項で、

$$\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (7.31)$$

と書ける。これを計算したのが、シュウィンガー (Schwinger)[6]³⁷。 $\alpha \approx 1/137$ とすると、数値的に上手くいってるのが分かります。³⁸

7.3.2 陽子

陽子の磁気双極子モーメントはもっとずれている！最新の測定値はこんな感じ。

$$\frac{\mu_p}{e\hbar/2m_p} = 2.79284734463 \pm 0.00000000082 \quad (7.32)$$

ちなみに、1933年に陽子の磁気双極子モーメントをはじめて測定したシュテルン (Stern) は1943年にこの業績でノーベル賞を貰っている。³⁹ Stern が Pauli にディスられたエピソードが『スピンはめぐる』に載っていて興味深い。

『さっき、シュテルンたちが陽子の磁気能率を測定した話をしましたね。ところがそのころ或る日、パウリがシュテルンの研究室を訪ねたことがあったそうです。そのときパウリはシュテルンに向かって、いまだんことをやっているか、と聞いたそうです。そこでシュテルンは、いま陽子の磁気能率をはかっている、と答えました。そしたらパウリ曰く、いまごろそんなことやったって意味ないじゃないか、あんたはディラックの理論を知らんのか、ディラック方程式からそれは $\frac{e\hbar}{2m_p}$ になるにきまっている、と。』（「スピンはめぐる」より一部抜粋）

7.4 ディラック方程式の限界

これまで相対論的に量子力学を記述しようとしてディラック方程式を調べてきた。ディラック方程式は色々上手く行く点もあるが、同時に限界も見えてきた。まず、そもそも、スピン 1/2 は相対論+量子力学の必然ではありえない。スピン 0⁴⁰ とか 1 の粒子いるし。さらに、相対論では静止質量もエネルギーに過ぎないので、それを運動エネルギーなどに転換できる。原子核反応における質量欠損はその例となっているが、 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ などの重い素粒子が複数の軽い素粒子に崩壊することもできるようになっている。こういった粒子数が変わる反応は、あきらかにディラック方程式では扱えない。さらに、前の章で見たように g 因子の 2 からのズレが説明できない。ということでディラック方程式に対する不満のまとめ。

³⁷シュウィンガー (Julian Schwinger) の墓にはこの公式が刻んである。"Schwinger gravestone"で画像検索してみよう <https://www.google.com/search?q=schwinger+gravestone&tbm=isch>

³⁸ちなみに、電子の異常磁気モーメントは量子電磁力学の検証にとって非常に重要。さらに、ミュー粒子の磁気双極子モーメントは素粒子現象論のホットピックの一つ [7]。以下のようなページを参照のこと。

<http://comet.phys.sci.osaka-u.ac.jp/research/r000.html>

<https://g-2.kek.jp/portal/index.html>

³⁹<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01330773>

<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01330774>

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1943/summary/>

⁴⁰Pauli & Weisskopf https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-322-90270-2_36 <https://inspirehep.net/literature/25368>

- スピン 1/2 以外の粒子も扱える必要がある。
- 粒子数が代わる反応を扱えるようになるために、多粒子系を扱える枠組みが必要。
- g 因子を測定したら 2 からズレている。

上記の不満を解決しつつ相対論的な量子力学をつくるには場の量子論を導入しなければならない。残りの章で、場の量子論の初歩的なことを学んでいく。

8 ローレンツ不変な自由スカラー場の量子論

この章では、ローレンツ不変な相互作用を持たない古典スカラー場のラグランジアンを正準量子化してみる。スピン 0 の粒子の特殊相対論的なハミルトニアンがえられることをみてみよう。

8.1 相互作用しないスピン 0 粒子ってどんな感じ？

場の量子論をやるまえに、どんな結果が得られたら良いのか当たりをつけておこう。相互作用しないスピン 0 の粒子を考えてみる。どんな量子系になっているだろうか。相互作用がない系なので、どうなるかは見当が付けられる。

この系にはどんな状態が存在するだろうか。まず、粒子が一つもない状態、すなわち最もエネルギーが低い状態である、真空 $|0\rangle$ が存在しているはずだ。粒子が 1 ついる状態、2 ついる状態、3 ついる状態...がないといけない。粒子は運動量 \vec{p} を持ち、その場合のエネルギーは $\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ だ。そして、運動量が等しい同種粒子は区別がつかない。スピン 0 の粒子はボゾンなのでボーズ統計に従うだろう。⁴¹ ということは、生成消滅演算子のセット $\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger$ があるはずで、それらは

$$\hat{a}_p|0\rangle = 0, \quad (8.1)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - q), \quad (8.2)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_q] = [\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_q^\dagger] = 0. \quad (8.3)$$

を満たす。粒子の数を数える演算子は

$$\hat{N} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \quad (8.4)$$

と書けるだろう。生成演算子により粒子が 1 つ存在する状態は、

$$\hat{a}_p^\dagger|0\rangle \quad (8.5)$$

と表せる。 $\hat{N}\hat{a}_p^\dagger|0\rangle = \hat{a}_p^\dagger|0\rangle$ がすぐ分かる。

ハミルトニアンは、粒子の数を数えてエネルギーをかければよいので、こうなるはず。

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p. \quad (8.6)$$

⁴¹ スピン整数の粒子がボゾンで半整数の粒子がフェルミオンとなるのは場の量子論の議論から決まる。本講義の範囲を超えるので詳しく説明しないが、例えば Weinberg の教科書の section 5 を参照してください。

運動量演算子も

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p. \quad (8.7)$$

となるはず。

この生成消滅演算子、ハミルトニアン、運動量演算子が出てくれば勝ち。これらが出てくることを具体的に見ていこう。

この章では場の演算子

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) \quad (8.8)$$

が登場する。なぜこんなものを持ち出すのだろうか？「こうすれば8.1章で欲しいと思ったものが、式(8.45)で見るように、最終的に手に入る」というのが正しくてつまらない答えだが、もうちょっと、場の演算子を入れたくなる気分をみておこう。

1. これまで習った量子力学と比較してみよう。ハイゼンベルク描像では演算子 $\hat{q}(t)$ は時刻 t のみを引数として持つ演算子であった。一方、場の演算子 $\hat{\phi}$ は、時刻 t と空間座標 \vec{x} を引数に持ち、同等に扱っていることになる。この方が特殊相対論すなわちローレンツ対称性と相性がよさそう。
2. 古典電磁気学をすでに知っているので古典場が存在することは知っている。すると、光電効果やコンプトン散乱から電磁気学に量子論的な効果を組み入れる必要があるのは明らかなので、場を量子化してみようというのは自然な発想ではないだろうか。（ここでは電磁場の量子論は議論しないが、スカラー場の量子論は場の量子論として一番簡単なもの）

8.2 正準量子化

ハイゼンベルク描像を取った際の正準量子化の手続きを復習しておこう。

1. ラグランジアン $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$ を書く。
2. 共役運動量 $p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}_i$ を定義し、ハミルトニアン $H(\{p_i\}, \{q_i\}) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ を導く。
3. 同時刻交換関係 $[\hat{q}_i(t), \hat{p}(t)] = i\delta_{ij}$ を満たす演算子 \hat{q} 、 \hat{p} を導入し、ハミルトニアン $\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{q})$ を得る。
4. 演算子の時間発展をハミルトン方程式 $\dot{\hat{q}}(t) = i[\hat{H}, \hat{q}]$ のより与える。

場の量子論でもやることは同じ。以下、同様の手順に従い、自由スカラー場の量子論を構成していく。

8.2.1 自由スカラー場のラグランジアン

場としてスカラー場 $\phi(\vec{x}, t)$ を導入する。（この段階では ϕ はあくまで古典場。）特に ϕ は実数の値を取るとしよう。 ϕ は実スカラー場と呼ばれる。ベクトルやスピノルの添え字を持たないスカラー場は場の中では一番単純なもの。ローレンツ変換 $x \rightarrow x' = \Lambda x$ に対し、

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \quad (8.9)$$

と振る舞う。

次にラグランジアンを与えよう。一般に⁴²ラグランジアン L はラグランジアン密度 \mathcal{L} の積分のかたちで書ける。

$$L = \int d^3x \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] \quad (8.10)$$

ラグランジアン密度の方がより基本的な量ということになる。⁴³ここでは、 ϕ のラグランジアン密度は次のように与えることにしよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (8.11)$$

なぜこんなラグランジアン密度を採用するのだろうか？

- スカラー場の微分を含み、
- ローレンツ不変で、
- ϕ の二次の項からなる

ラグランジアン密度はこの形！

微分を含む項は、

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \quad (8.12)$$

と書ける。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}\rho v^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2. \quad (8.13)$$

と比較してみよう。 $\sqrt{\rho}z$ を ϕ に、 v を $1(=c)$ に置き換え、空間を 1 次元から 3 次元にしたものになっている。ということは、連成ばねの系は実は質量 0 のスカラー場と繋がっていたのだった。(質量を持つスカラー場と繋がるような連成ばねの系も工夫すると作ることができる。山口さんの相対論的量子力学の講義ノートを参照のこと。<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~yamaguch/j/class.html>)

8.2.2 共役運動量とハミルトニアン

ϕ の共役運動量を議論しよう。質点の力学で $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ とやっていた。離散的な添え字 i が連続的な “添え字” \vec{x} に化けたとみなすことができる。いま、ラグランジアン L は ϕ と ϕ の微分の汎関数だから、汎関数微分として、

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \quad (8.14)$$

とするのがよさそう。ラグランジアン L がラグランジアン密度 \mathcal{L} の積分で書けていることから、

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x}, t)}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \quad (8.15)$$

⁴²非局所的な項を持たないとする

⁴³ラグランジアン密度のことを単にラグランジアンと言うってしまう場合がほとんどである。

となることも分かる。今のラグランジアン（式 8.11）を使うと

$$\pi(\vec{x}, t) = \dot{\phi}(\vec{x}, t) \quad (8.16)$$

となる。

次にハミルトニアンがどうなるか考えてみよう。質点の力学では $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ であった。ここから察するに、

$$H = \left[\int d^3x \pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t) \right] - L \quad (8.17)$$

と書くことができるはずだ。ハミルトニアン密度

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (8.18)$$

を用いて、

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad (8.19)$$

と書くこともできる。

さて、もともとのラグランジアン（式 8.11）からは、クラインゴールドン方程式

$$\partial^2 \phi - m^2 \phi = 0 \quad (8.20)$$

が導出できる。ハミルトニアン（8.19）を用いて、ハミルトン方程式

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{\delta H}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} = \pi(\vec{x}, t), \quad (8.21)$$

$$\dot{\pi}(\vec{x}, t) = -\frac{\delta H}{\delta \phi(\vec{x}, t)} = \nabla^2 \phi(\vec{x}, t) - m^2 \phi(\vec{x}, t). \quad (8.22)$$

をたてると、クラインゴールドン方程式と同等のものになることが分かる。⁴⁴

8.2.3 演算子への置き換え

さて、正準量子化しよう。まず、場の演算子 $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ と、その共役運動量 $\hat{\pi}(\vec{x}, t)$ が導入される。とくに、もともとの ϕ は実数値をとる実スカラー場であったことから、

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t) \quad (8.23)$$

である。 $\hat{\phi}$ と $\hat{\pi}$ は次のような同時刻交換関係を満たすものである。

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (8.24)$$

次に、古典場で与えられたハミルトニアン（8.19）から、ハミルトニアン演算子 \hat{H} が次のように与えられる。

$$\hat{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 \right]. \quad (8.25)$$

ハイゼンベルク描像では、演算子の時間発展はハイゼンベルク方程式に従う。古典場のハミルトン方程式が、以下の場の演算子に対するハイゼンベルク方程式に置き換わった。

$$\dot{\hat{\phi}} = i[\hat{H}, \hat{\phi}] = \hat{\pi}, \quad (8.26)$$

$$\dot{\hat{\pi}} = i[\hat{H}, \hat{\pi}] = \nabla^2 \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi}. \quad (8.27)$$

⁴⁴時間のある人は示してみてください

8.3 生成消滅演算子

8.3.1 場を生成消滅演算子で書こう

$\hat{\pi}$ を消去すると $\hat{\phi}$ の従う運動方程式として以下を得る。

$$\ddot{\hat{\phi}} = \nabla^2 \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi}. \quad (8.28)$$

$\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$ を満たす一般解は次のようになる。

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \hat{\alpha}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_p t} + h.c. \quad (8.29)$$

$\hat{\alpha}_{\vec{p}}$ は時間によらない係数である。ただし、 $\hat{\phi}$ が演算子なので $\hat{\alpha}$ も演算子である。 $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ と $\hat{\pi}(t, \vec{x})$ のフーリエ変換は次のように与えられる。

$$\int d^3 x e^{-i\vec{p}\vec{x}} \hat{\phi}(t, \vec{x}) = \hat{\alpha}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + \hat{\alpha}_{-\vec{p}}^\dagger e^{iE_p t}, \quad (8.30)$$

$$\int d^3 x e^{-i\vec{p}\vec{x}} \hat{\pi}(t, \vec{x}) = -iE_p \hat{\alpha}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + iE_p \hat{\alpha}_{-\vec{p}}^\dagger e^{iE_p t}. \quad (8.31)$$

$\hat{\alpha}_{\vec{p}}$ のみたすべき性質を見るために、 $[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})]$ をフーリエ変換してみよう。

$$\int d^3 x d^3 y e^{-i\vec{p}\vec{x}} e^{i\vec{q}\vec{y}} [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = \int d^3 x d^3 y e^{-i\vec{p}\vec{x}} e^{i\vec{q}\vec{y}} i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (8.32)$$

両辺はそれぞれ

$$\text{式 (8.32) の左辺} = iE_p [\hat{\alpha}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + \hat{\alpha}_{-\vec{p}}^\dagger e^{iE_p t}, -\hat{\alpha}_{\vec{q}} e^{-iE_q t} + \hat{\alpha}_{-\vec{q}}^\dagger e^{iE_q t}], \quad (8.33)$$

$$\text{式 (8.32) の右辺} = i\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (8.34)$$

と評価される。式 (8.32) は t に依らず満たされるので、次の交換関係が得られる。

$$[\hat{\alpha}_{\vec{p}}, \hat{\alpha}_{\vec{q}}^\dagger] = \frac{1}{2E_p} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (8.35)$$

$$[\hat{\alpha}_{\vec{p}}, \hat{\alpha}_{\vec{q}}] = [\hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{\alpha}_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \quad (8.36)$$

$\hat{a}_{\vec{p}} \equiv \sqrt{2E_p} \hat{\alpha}_{\vec{p}}$ を定義すると、

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (8.37)$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}] = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \quad (8.38)$$

$\hat{\phi}$ と $\hat{\pi}$ は \hat{a} と \hat{a}^\dagger を使って書ける。

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} [\hat{a}_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_{\vec{p}} t} + h.c.], \quad (8.39)$$

$$\hat{\pi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} [-i\hat{a}_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_{\vec{p}} t} + h.c.] \quad (8.40)$$

8.3.2 ハミルトニアンを生成消滅演算子で書こう

$\hat{\phi}$ や $\hat{\pi}$ を生成消滅演算子 \hat{a} , \hat{a}^\dagger を使って書けたので、ハミルトニアン \hat{H} を \hat{a} , \hat{a}^\dagger で書いてみよう。

$$\hat{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 \right]. \quad (8.41)$$

時刻 $t = 0$ として、右辺の項はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \int d^3x \frac{1}{2} \hat{\pi}^2 &= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p E_q}}{4} \left(-\hat{a}_p \hat{a}_q e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} - \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{4} \left(-\hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p - \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (8.42)$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \frac{1}{2} (\nabla \pi)^2 &= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}\vec{q}}{4\sqrt{E_p E_q}} \left(-\hat{a}_p \hat{a}_q e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} - \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{4E_p} \left(\hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (8.43)$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \frac{m^2}{2} \hat{\phi}^2 &= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{4\sqrt{E_p E_q}} \left(\hat{a}_p \hat{a}_q e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{4E_p} \left(\hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (8.44)$$

全部足して次のようなハミルトニアンを得る。

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} \delta^{(3)}(0) \end{aligned} \quad (8.45)$$

最終行の一つめの項はまさに欲しかったもの！二つめの項はなんだろう？なんだか発散しているのが気になるけど、定数なので落としてしまってよい。なぜなら物理的に意味のあるのはある状態と別のある状態のエネルギー差なのだから。⁴⁵

ハミルトニアンとの交換関係を計算してみよう。

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}_p] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_p [\hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q, \hat{a}_p] \\ &= - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_q (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ &= -E_p \hat{a}_p \end{aligned} \quad (8.46)$$

同様に、

$$[\hat{H}, \hat{a}_p^\dagger] = E_p \hat{a}_p^\dagger. \quad (8.47)$$

ということは、 $\hat{H}|\psi\rangle = E_\psi|\psi\rangle$ のとき、

$$\hat{H} \hat{a}_{\vec{p}} |\psi\rangle = (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{H} + [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}]) |\psi\rangle = (E_\psi - E_p) \hat{a}_{\vec{p}} |\psi\rangle, \quad (8.48)$$

$$\hat{H} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |\psi\rangle = (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{H} + [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger]) |\psi\rangle = (E_\psi + E_p) \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |\psi\rangle \quad (8.49)$$

⁴⁵重力があるとうまいかなくなってくる。実際、ダークエネルギーの大きさは謎。ちなみに超対称性というのを入れると、ボゾンとフェルミオンでキャンセルしあって上手いこと消えたりする。が、今の所、超対称性の証拠は残念ながら見つかっていない。

つまり、 \hat{a}_p を作用させるとエネルギー固有値が E_p 減り、 \hat{a}_p^\dagger を作用させるとエネルギー固有値が E_p 増えることが分かる。

8.4 ネーターの定理と保存量

対称性があればそれに対応する保存量があること、という事情は場の量子論でも同じである。とりあえず古典場で議論する。運動方程式が、次の無限小変換のもとで不変だとしよう。

$$\phi_i \rightarrow \phi_i + \epsilon G_i(\phi(x)) \quad (8.50)$$

例えば、この変換のもとでラグランジアン密度が不変であれば、運動方程式も変わらない。より一般には、ある $X(\phi(x))^\mu$ が存在して、

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \epsilon \partial_\mu X^\mu(\phi) \quad (8.51)$$

と変換されればよい。2つ目の項は積分すると表面積分になる。(電磁気のガウスの法則を思い出そう。あれの4次元版をやればよい) 運動方程式を導出するときには表面項は影響がないので、2つ目の項は考えなくてよい。ということで、

$$\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} G_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \partial_\mu G_i \right) = \partial_\mu X^\mu \quad (8.52)$$

が成立する。

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} G_i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} G_i \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \right) G_i \right] = \partial_\mu X^\mu \quad (8.53)$$

ということは運動方程式が満たされていると、

$$\partial_\mu \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} G_i - X^\mu \right] = 0. \quad (8.54)$$

保存するカレントが作れた。対称性があると、それに対応する保存カレントがある。これがネーター (Noether) の定理。

8.4.1 複素スカラー場

自由複素スカラー場を考えてみよう。

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi \Phi^\dagger \quad (8.55)$$

次の対称性を見出すことができる。

$$\Phi \rightarrow \Phi + i\epsilon \Phi, \quad \Phi^\dagger \rightarrow \Phi^\dagger - i\epsilon \Phi^\dagger. \quad (8.56)$$

G と X^μ を読み取ると、

$$G_\Phi = i\Phi, \quad G_{\Phi^\dagger} = i\Phi^\dagger, \quad X^\mu = 0. \quad (8.57)$$

保存カレントは、

$$j^\mu = i\Phi \partial^\mu \Phi^\dagger - i\Phi^\dagger \partial^\mu \Phi. \quad (8.58)$$

8.4.2 時間空間並進（ハミルトニアン、運動量演算子）

自由実スカラー場を考えてみよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2. \quad (8.59)$$

次の並進対称性を見出すことができる。

$$\phi \rightarrow \phi + \epsilon a^\mu \partial_\mu \phi \quad (8.60)$$

G と X^μ を読み取ると、

$$G_\phi = a^\mu \partial_\mu \phi, \quad X^\mu = a^\mu \mathcal{L}. \quad (8.61)$$

対応する保存カレントは

$$j^\mu = (\partial^\mu \phi) a^\nu (\partial_\nu \phi) - a^\mu \mathcal{L} \quad (8.62)$$

とあたえられる。 $\partial_\mu j^\nu = 0$ がみたされるが、 a^μ はどんな定数ベクトルでも良かったことに着目すると、

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (8.63)$$

がみたされるテンソルとして、

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (8.64)$$

と書ける。

$$T^{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (8.65)$$

$$T^{0i} = \dot{\phi}\partial^i\phi = \pi\partial^i\phi. \quad (8.66)$$

である。 $\partial^i = -\partial_i$ に注意すると、保存するベクトル P^μ は、 ϕ と π を使って、

$$P^0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right], \quad (8.67)$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \pi \vec{\nabla} \phi \quad (8.68)$$

と書ける。

式 (8.39, 8.40) を使うと、生成消滅演算子を使って運動量演算子を書くことができる。

$$\begin{aligned} \hat{\vec{P}} &= - \int d^3x \hat{\pi} \vec{\nabla} \hat{\phi} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}. \end{aligned} \quad (8.69)$$

運動量演算子と生成消滅演算子の交換関係は以下のようになる。

$$[\hat{\vec{P}}, \hat{a}_{\vec{q}}] = -\vec{q} \hat{a}_{\vec{q}}, \quad [\hat{\vec{P}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = \vec{q} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger. \quad (8.70)$$

8.5 局所因果律と異時刻交換関係

正準量子化で同時刻交換関係が要求されている。

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{y})] = 0. \quad (8.71)$$

異なる時刻だとどうなるんだろう？式 (8.39) を使って、異なる時刻、空間の $\hat{\phi}$ の交換関係を計算してみよう。

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(0, \vec{0})] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] \exp(i\vec{p}\vec{x} - iE_p t) + [\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_{p'}] \exp(-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t)}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [\exp(i\vec{p}\vec{x} - iE_p t) - \exp(-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t)] \end{aligned} \quad (8.72)$$

右辺がローレンツ不変性をみてみよう。ローレンツ変換が次のように与えられたとする。

$$E' = \gamma E + \gamma \beta p_z, \quad (8.73)$$

$$p'_x = p_x, \quad (8.74)$$

$$p'_y = p_y, \quad (8.75)$$

$$p'_z = \gamma \beta E + \gamma p_z. \quad (8.76)$$

すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_z}{\partial p_z} &= \gamma \beta \frac{\partial E}{\partial p_z} + \gamma \\ &= \gamma \beta \frac{p_z}{E} + \gamma \\ &= \frac{E'}{E}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

ということで、

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} = \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \quad (8.78)$$

また、

$$\vec{p}\vec{x} - E_p t = -p_\mu x^\mu = -p'_\mu x'^\mu = \vec{p}'\vec{x}' - E_{p'} t'. \quad (8.79)$$

ということで、確かに、式 (8.72) はローレンツ不変（ローレンツ変換しても同じ形が保たれる）であることが分かる。

ローレンツスカラー場の交換関係なのでローレンツ不変になるべくしてなっている。

8.5.1 space-like な点

2つの座標の関係が space-like なときは、ローレンツ変換をうまく使うと計算がずっと簡単になる。時刻が同じになるような座標をとることができる。その座標系で計算すると、

$$\Delta = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (e^{-ip_z z} - e^{ip_z z}) = 0. \quad (8.80)$$

これは、結局、同時刻交換関係とローレンツ変換で関係づいているということ。この結果は直感的。 ϕ が観測量だと思えば、space-like な二点の ϕ は同時対角化できる。space-like な二点は因果関係を持つことができないということに対応している。局所因果律 (microcausality) とも呼ばれる。

8.5.2 time-like な点

一方、座標の関係が time-like なときは、交換関係は 0 にならない。 $t \neq 0$ として、

$$\Delta = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (e^{-iE_p t} - e^{iE_p t}) = \frac{mK_1(imt)}{4\pi^2 it} \quad (8.81)$$

K_1 は第 2 種変形ベッセル関数。導出は付録 E を参照されたい。

8.6 局所因果律と反粒子

複素スカラー場を考えてみよう。

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)(\partial_\mu \Phi)^* - m^2 \Phi \Phi^* \quad (8.82)$$

場の演算子の同時刻交換関係は次のようになる。

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}(t, \vec{y})] = [\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}^*(t, \vec{y})] = 0, \quad (8.83)$$

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}^*(t, \vec{y})] = [\hat{\Phi}^*(t, \vec{x}), \hat{\Phi}(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (8.84)$$

ハイゼンベルク方程式により $\hat{\Phi}$ の共役運動量は $\hat{\Phi}^*$ を関係づけることを使った。生成消滅演算子を使うと

$$\hat{\Phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_p t} + b_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t}). \quad (8.85)$$

と書けることになる。 a_p^\dagger で作れる粒子と、 b_p^\dagger で作れる粒子の二種類が出てきた。二つの粒子は反対の”電荷”を持つ。これが**反粒子**。場の交換関係を計算してみよう。

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}^*(0, \vec{0})] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{[\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger] \exp(i\vec{p}\vec{x} - iE_p t) + [\hat{b}_p^\dagger, \hat{b}_q] \exp(-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t)}{2\sqrt{E_p E_q}}. \quad (8.86)$$

space-like($t^2 < r^2$) なときには、 $[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}^*(0, \vec{0})] = 0$ が満たされる。このとき、 $[a, a^\dagger]$ が寄与する第一項と $[b^\dagger, b]$ が寄与する第二項がキャンセルしあっている。これは、反粒子の存在が場の同時刻交換関係および time-like な二点の交換関係をキープする上で非常に重要であることを示しており、反粒子の存在により局所因果律が保たれていることを示している。 Φ は電荷 +1 を持つ場合、ローレンツ不変性を守るために +1 の粒子の生成演算子と -1 の粒子の消滅演算子が必要！つまりこれは反粒子が必要なことを意味している。(反粒子は自分自身であってもよい。が、その場合には保存電荷が持てなくなる。)

8.7 相互作用のある場の量子論にむけて

さて、ここまで相互作用のないスカラー場の量子化について議論してきた。しかし粒子の散乱など、なんらかの物理的な過程を記述するには相互作用が必要である。ここでは、相互作用のある場の量子論を考えると、どんなことがおきるか概観する。詳細は場の量子論の教科書を参照していただきたい。

相互作用を入れた場の量子論では、計算の途中で発散する項があらわれる。もちろん、物理的に意味のある量は有限の値を持つはずなので、発散する量をなんとか有限な量にする処理（正則化とくりこみ）が必要になる。朝永振一郎が、場の量子論が出来ていく課程で発散の処理に悩まされる様子を日記に記している。

『計算すすめたら積分が発散した、おかしい。こういうことをやっているのだ。 U [中間子] が直接に e [電子] と ν [中性微子] にこわれずに、 U は一度 p [陽子] と n [中性子] を作り、それをさらに e と ν にこわれると考えようというのだ。ところが中間状態の p , n の状態がやたらにたくさんあって、積分が発散してしまうのである。こういう種類の発散は今まで一度も出てきていない。自己エネルギー的の発散ならめずらしくないが、どうもおかしい。』(滞独日記 (朝永振一郎) より一部抜粋 (1938 年 12 月 14 日の日記))

電子磁気双極子モーメント

場の量子論の成功例として最も顕著なものの一つは電子の磁気双極子モーメントの計算だろう。量子電磁気学 (quantum electrodynamics) を使うと、色んな量が微細構造定数 $\alpha (\simeq 1/137)$ のべき級数として計算できる。

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} = c_1 \frac{\alpha}{\pi} + c_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + c_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + c_4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + c_5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \mathcal{O}((\alpha/\pi)^6) \quad (8.87)$$

<https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.416>, Sommerfield/Petermann, 1957-1958], <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9602417>, <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0507249>, 1205.5368

A ローレンツ変換の簡単なまとめ

自然単位系 ($c = 1$) を採用して、座標系 O 系から (t, x, y, z) から O' 系 (t', x', y', z') への変換を議論しよう。時間と空間の一様性からこの変換は一次変換のはずだ。(でなければ、時間もしくは空間の等しい間隔で並んだ点が返還後に等間隔にならない) 時刻 $t = 0$ における O 系の原点と時刻 $t' = 0$ における O' 系の原点が一致しているとする、一般の一次変換は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & \Lambda_0^3 \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & \Lambda_1^2 & \Lambda_1^3 \\ \Lambda_2^0 & \Lambda_2^1 & \Lambda_2^2 & \Lambda_2^3 \\ \Lambda_3^0 & \Lambda_3^1 & \Lambda_3^2 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

A.1 導出その 1

O' 系は O 系に対して x 軸に沿って速度 β で等速運動しているとし、 x 軸と x' 軸は平行であるとしよう。 yz 軸および $y'z'$ 軸は相対速度と直交する方向であるから、 yz 平面 (または $y'z'$ 平面) 内で違う方向にとりなおしても同じ変換が得られるはずだ。このことから yz 軸と $y'z'$ 軸の関係を適切にとれば (つまりお互いに平行になるようにとれば) 以下のように簡単に書くことができる。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & 0 & 0 \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (A.2)$$

ここまでは O 系から O' 系への変換を考えてきたが、逆変換である O' 系から O 系への座標変換を考えてみよう。相対速度の大きさが同じで向きが逆向きの変換を考えればよい。この変換はたとえば x 軸を反転させる操作で得ることができる。 (xy) 平面で 180 度回転させてもよい) よって、 O' 系から O 系への座標変換は次のようになるはずだ。

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & -\Lambda_0^1 & 0 & 0 \\ -\Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ここから以下の関係式が導ける。

$$\Lambda_0^0 \Lambda_0^0 - \Lambda_0^1 \Lambda_1^0 = 1, \quad (\text{A.4})$$

$$\Lambda_0^0 \Lambda_1^0 - \Lambda_0^1 \Lambda_1^1 = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$-\Lambda_1^0 \Lambda_0^0 + \Lambda_1^1 \Lambda_1^0 = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$-\Lambda_1^0 \Lambda_1^0 + \Lambda_1^1 \Lambda_1^1 = 1, \quad (\text{A.7})$$

$$(\Lambda_2^2)^2 = 1 \quad (\text{A.8})$$

yz 平面の反転や回転を含まないとする $\Lambda_2^2 \geq 0$ なので、整理すると以下を得る。

$$\Lambda_0^0 = \Lambda_1^1, \quad \Lambda_2^2 = 1 \quad (\text{A.9})$$

x 軸正方向に発射された光の軌跡は $t = x$ である。 O' 系でみても光の速度が同じにみえる ($t' = x'$) ことから、

$$\Lambda_0^0 + \Lambda_0^1 = \Lambda_1^0 + \Lambda_1^1 \quad (\text{A.10})$$

であり、

$$\Lambda_1^0 = \Lambda_1^1 \quad (\text{A.11})$$

が導ける。また、 y 軸正方向に発射された光の軌跡は $t = y$ である。 O' 系でみても光の速度が同じに見える ($t' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$) ことから、

$$\Lambda_0^0 = \sqrt{(\Lambda_1^0)^2 + (\Lambda_2^2)^2} = \sqrt{(\Lambda_1^0)^2 + 1} \quad (\text{A.12})$$

まとめると、

$$\Lambda_1^0 = \Lambda_0^1 \beta \quad (\text{A.13})$$

と書くと、

$$\Lambda_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma. \quad (\text{A.14})$$

が得られる。まとめると、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

A.2 導出その2

O 系から O' 系への座標変換を以下のように書く。

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vec{B}^T \\ \vec{C} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

O 系で時刻 $t = 0$ に原点から方向 \vec{n} へ発射された光の描く軌跡は以下のように書ける。

$$\vec{x} = t\vec{n} \quad (\text{A.17})$$

ここで $|\vec{n}| = 1$ である。この軌跡は O' 系で次のようにみえる。

$$\vec{x}' = \frac{\vec{C} + D\vec{n}}{A + \vec{B} \cdot \vec{n}} t' \quad (\text{A.18})$$

光の速度が O' 系でも同じであるとする、

$$(A + \vec{B} \cdot \vec{n})^2 = |\vec{C} + D\vec{n}|^2 \quad (\text{A.19})$$

が満たされている。 $|\vec{n}| = 1$ である任意の \vec{n} に対し、上の式が満たされるような A, \vec{B}, \vec{C}, D を探す。

ラグランジュ未定乗数 λ を用いて、以下の X を定義してみる。

$$X \equiv (A + \vec{B} \cdot \vec{n})^2 - |\vec{C} + D\vec{n}|^2 + \lambda(\vec{n}^2 - 1) \quad (\text{A.20})$$

X の値は \vec{n} に依らないことから、

$$2A\vec{B} + 2\vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{n}) - 2D^T\vec{C} - 2D^TD\vec{n} + 2\lambda\vec{n} = 0. \quad (\text{A.21})$$

を得る。上の式があらゆる方向の \vec{n} について満たされなければならないので、

$$A\vec{B} = D^T\vec{C}, \quad (\text{A.22})$$

$$D^TD = \lambda I_3 + \vec{B}\vec{B}^T \quad (\text{A.23})$$

を満たす必要がある。式 (A.23) を満たす D は一般に以下のように書ける。

$$D = O \left(dP_b + \sqrt{d^2 - \vec{B}^2} P_\perp \right), \quad \lambda = d^2 - \vec{B}^2 \quad (\text{A.24})$$

O は $O^TO = I_3$ を満たす。 $d \geq 0$ として一般性を失わない。 P_b および P_\perp は以下のように定義した。

$$P_b \equiv \frac{\vec{B}\vec{B}^T}{\vec{B}^2}, \quad P_\perp \equiv I_3 - P_b \quad (\text{A.25})$$

式 (A.22) を満たす \vec{C} は次のように書ける。

$$\vec{C} = \frac{A}{d} O\vec{B} \quad (\text{A.26})$$

式 (A.19) は任意の単位ベクトル \vec{n} について満たされるが、試しに $\vec{n} = \vec{B}/|\vec{B}|$ としてみよう。すると、以下の式を得る。

$$(A + b)^2 = \left(\frac{Ab}{d} + d \right)^2 \quad (\text{A.27})$$

これを d について解くと、

$$d = \pm A, \pm b \quad (\text{A.28})$$

$d = \pm b$ の時は $\lambda = 0$ になってしまい変換が可逆でない。変換の可逆性を要求すると、

$$d = \pm A \quad (\text{A.29})$$

まとめると一般の変換行列は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \vec{B}^T \\ \vec{B} & AP_b + \sqrt{A^2 - \vec{B}^2} P_\perp \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

左上が $+1$ で右下が $O = I_3$ の場合に注目する。 $\vec{x} = 0$ が描く軌跡は

$$\vec{x}' = \frac{t}{A} \vec{B} \quad (\text{A.31})$$

である。よって O' 系の速度を $\vec{\beta}$ とおくと、変換行列は

$$A \begin{pmatrix} 1 & -\vec{\beta}^T \\ -\vec{\beta} & P_b + \sqrt{1^2 - \vec{\beta}^2} P_\perp \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

と書ける。速度が逆向きで $-\vec{\beta}$ の場合は座標を回転もしくは反転されれば得られる。

$$A \begin{pmatrix} 1 & \vec{\beta}^T \\ \vec{\beta} & P_b + \sqrt{1^2 - \vec{\beta}^2} P_\perp \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

これが逆変換になっていることを要求すると、

$$A^2(1 - \beta^2) = 1 \quad (\text{A.34})$$

$A \geq 0$ を要求して、

$$A = \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{A.35})$$

を得る。

B $SU(2)$ リー代数について

有限次元の $n \times n$ 行列、 A_1 、 A_2 、 A_3 が交換関係

$$[A_1, A_2] = iA_3, \quad [A_2, A_3] = iA_1, \quad [A_3, A_1] = iA_2. \quad (\text{B.1})$$

を満たすとする。 A_1 、 A_2 、 A_3 がエルミートな行列に限定した場合、量子力学の回転群の時の議論が使える。その場合の解は、

$$A_i = U \begin{pmatrix} J_i^{(s_1)} & & & \\ & J_i^{(s_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_i^{(s_n)} \end{pmatrix} U^\dagger \quad (\text{B.2})$$

と書けるはずだ。\$U\$ は適当なユニタリ行列であり、\$J_i^{(s)}\$ はスピン \$s\$ の回転の生成子である \$(2s+1) \times (2s+1)\$ 行列。

(ユニタリとは限らない) 正則行列 \$P\$ を用いて

$$A_i = P \begin{pmatrix} J_i^{(s_1)} & & & \\ & J_i^{(s_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_i^{(s_n)} \end{pmatrix} P^{-1} \quad (\text{B.3})$$

と書くと、これは非エルミートな解となっている。このように書けない非エルミートな解があるだろうか？
ここでは、かならずこの形になることを行列の具体的な計算で示す。⁴⁶

\$A_3\$ は、ある正則行列 \$P\$ を用いて、ジョルダン標準形である \$\tilde{A}_3\$ に変形できる。

$$\tilde{A}_3 = P^{-1} A_3 P, \quad (\text{B.4})$$

次のような行列 \$\tilde{A}_\pm\$ を定義してみよう。

$$\tilde{A}_+ = P(A_1 + iA_2)P^{-1}, \quad \tilde{A}_- = P(A_1 - iA_2)P^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

次のような関係を示すことができる。

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_+ - \tilde{A}_+ \tilde{A}_3 = \tilde{A}_+, \quad (\text{B.6})$$

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_- - \tilde{A}_- \tilde{A}_3 = -\tilde{A}_-, \quad (\text{B.7})$$

$$\tilde{A}_+ \tilde{A}_- = \tilde{A}^2 - \tilde{A}_3^2 + \tilde{A}_3, \quad (\text{B.8})$$

$$\tilde{A}_- \tilde{A}_+ = \tilde{A}^2 - \tilde{A}_3^2 - \tilde{A}_3, \quad (\text{B.9})$$

$$[\tilde{A}^2, \tilde{A}_i] = 0. \quad (\text{B.10})$$

ここで、\$\tilde{A}^2\$ は次のように定義されている。

$$\tilde{A}^2 \equiv \tilde{A}_1^2 + \tilde{A}_2^2 + \tilde{A}_3^2 \quad (\text{B.11})$$

各ジョルダン細胞に対して、\$\tilde{A}_3\$ はひとつ固有ベクトルを持つ。

$$\tilde{A}_3 v_i = \lambda_i v_i. \quad (\text{B.12})$$

この固有ベクトルに対して、次のような関係式を示せる。

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_+ v_i = (\tilde{A}_+ \tilde{A}_3 + \tilde{A}_+) v_i = (\lambda_i + 1) \tilde{A}_+ v_i, \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_- v_i = (\tilde{A}_- \tilde{A}_3 + \tilde{A}_-) v_i = (\lambda_i - 1) \tilde{A}_- v_i. \quad (\text{B.14})$$

これは、\$\tilde{A}_\pm v_i \neq 0\$ であれば、\$\tilde{A}_\pm v_i\$ が固有値 \$\lambda_i \pm 1\$ を持つ固有ベクトルであることを示している。\$n\$ は有限の値なので、どんな固有ベクトル \$v_i\$ にたいしても、次の関係式を満たすある自然数 \$m_+\$ と \$m_-\$ が存在する。

$$(\tilde{A}_+)^{m_+} v_i = 0, \quad (\tilde{A}_-)^{m_-} v_i = 0. \quad (\text{B.15})$$

⁴⁶ 佐藤が Physics Stack Exchange でも質問してみたところ、リー群、リー代数の定理を使った返答が帰ってきた。 <https://physics.stackexchange.com/questions/711278/non-hermitian-solution-for-su2-lie-algebra> ただし、佐藤はリー群、リー代数の深い知識が無いのでちゃんと理解できていない。誰か教えてください…。

v_{\max} と v_{\min} を定義しよう。

$$v_{\max} \equiv (\tilde{A}_+)^{m_+-1} v_i = 0, \quad v_{\min} \equiv (\tilde{A}_-)^{m_--1} v_i = 0. \quad (\text{B.16})$$

v_{\max} と v_{\min} は \tilde{A}_3 の固有ベクトルであり、その固有値をそれぞれ λ_{\max} と λ_{\min} と呼ぶことにしよう。すなわち、

$$\tilde{A}_3 v_{\max} = \lambda_{\max} v_{\max}, \quad \tilde{A}_3 v_{\min} = \lambda_{\min} v_{\min}. \quad (\text{B.17})$$

式 (B.9) と $A_+ v_{\max} = 0$ を使うと、

$$\tilde{A}^2 v_{\max} = (\tilde{A}_3^2 + \tilde{A}_3) v_{\max} = (\lambda_{\max}^2 + \lambda_{\max}) v_{\max}. \quad (\text{B.18})$$

同様に、式 (B.8) と $A_- v_{\min} = 0$ を使うと、

$$\tilde{A}^2 v_{\min} = (\tilde{A}_3^2 - \tilde{A}_3) v_{\min} = (\lambda_{\min}^2 + \lambda_{\min}) v_{\min}. \quad (\text{B.19})$$

すなわち、 v_{\max} と v_{\min} は \tilde{A}^2 の固有ベクトル。次の関係式を満たす N が存在する。

$$v_{\min} \propto (\tilde{A}_-)^{N-1} v_{\max}. \quad (\text{B.20})$$

また、式 (B.10) を使うと、

$$\lambda_{\max}^2 + \lambda_{\max} = \lambda_{\min}^2 - \lambda_{\min}, \quad (\text{B.21})$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_{\max} - N + 1. \quad (\text{B.22})$$

この関係式を解くことにより、

$$\lambda_{\max} = -\lambda_{\min} = \frac{N-1}{2}. \quad (\text{B.23})$$

を得る。ここまでの、次の性質をみたす固有ベクトル v_k ($k = 1, 2, \dots, N (= 2\lambda_{\max} + 1)$) の集合を得た。

$$\tilde{A}_3 v_k = (\lambda_{\max} - k + 1) v_k, \quad (\text{B.24})$$

$$\tilde{A}^2 v_k = \lambda_{\max}(\lambda_{\max} + 1) v_k, \quad (\text{B.25})$$

$$\tilde{A}_+ v_k \propto v_{k-1}, \quad (\text{B.26})$$

$$\tilde{A}_- v_k \propto v_{k+1}. \quad (\text{B.27})$$

v_k たちはノルムが 1 のベクトルだとして。交換関係を使って、次の関係式が示せる。

$$\tilde{A}_+ \tilde{A}_- v_k = (\tilde{A}^2 - \tilde{A}_3 + \tilde{A}_3) v_k = k(2\lambda_{\max} - k + 1) v_k, \quad (\text{B.28})$$

$$\tilde{A}_- \tilde{A}_+ v_{k+1} = (\tilde{A}^2 - \tilde{A}_3 - \tilde{A}_3) v_{k+1} = k(2\lambda_{\max} - k + 1) v_{k+1}. \quad (\text{B.29})$$

式 (B.26, B.27, B.28, B.29) を満たすには次の関係式が満たされている。

$$\tilde{A}_- v_k = z_k \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} v_{k+1}, \quad (\text{B.30})$$

$$\tilde{A}_+ v_{k+1} = z_k^{-1} \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} v_k. \quad (\text{B.31})$$

z_k は未知の複素数。 $v'_i \equiv r_i v_i$ を定義すると、

$$\tilde{A}_- v'_k = \frac{r_k z_k}{r_{k+1}} \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} v'_{k+1}, \quad (\text{B.32})$$

$$\tilde{A}_+ v'_{k+1} = \frac{r_{k+1}}{r_k z_k} \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} v'_k. \quad (\text{B.33})$$

を得る。すなわち、 $r_k z_k / r_{k+1} = 1$ を満たすような r_k を定義できる。これは P を次のように変更することに相当する。

$$P \rightarrow P \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_N \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

ここからは、式 (B.30, B.31) において $z_i = 1$ が満たされるように P が選ばれているとする。この v_i の基底では、 \tilde{A}_i は

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} J_i^{(\lambda_{\max})} & \cdots \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

と書かれる。 $J_3^{(\lambda_{\max})}$ はスピン (or 角運動量) λ_{\max} 表現の z 軸まわり回転の生成子。

大きさが 2×2 以上のジョルダン細胞があったとしよう。これは次のような性質を満たすベクトル u_k (ただし v_k とは直交) の存在を意味する。

$$\tilde{A}_3 u_k = (\lambda_{\max} - k + 1) u_k + v_k. \quad (\text{B.36})$$

式 (B.6) を使うと、次の式が示せる。

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_{\pm} u_k = (\lambda_{\max} - k + 1 \pm 1) \tilde{A}_{\pm} u_k + \tilde{A}_{\pm} v_k. \quad (\text{B.37})$$

ということは次の性質を持つ $u_{k\pm 1}$ が存在する。

$$\tilde{A}_3 u_{k\pm 1} = (\lambda_{\max} - k + 1 \pm 1) u_{k\pm 1} + v_{k\pm 1}. \quad (\text{B.38})$$

どんな x に対しても、次の関係が満たされることに注意。

$$\tilde{A}_3 (u_{k\pm 1} + x v_{k\pm 1}) = (\lambda_{\max} - k + 1 \pm 1) (u_{k\pm 1} + x v_{k\pm 1}) + v_{k\pm 1}. \quad (\text{B.39})$$

式 (B.37, B.38, B.39) を比較すると、 $u_{k\pm 1}$ は $\tilde{A}_{\pm} u_k$ と $v_{k\pm 1}$ の線型結合であるはず。 $\tilde{A}_{\pm} u_k$ の係数は式 (B.30, B.31) から決定できるが、 $v_{k\pm 1}$ の係数は分からない。ということで、未知の数 x_k と y_k を用いて、

$$\tilde{A}_- u_k = \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} u_{k+1} + x_k v_{k+1}, \quad (\text{B.40})$$

$$\tilde{A}_+ u_{k+1} = \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} u_k + y_k v_k. \quad (\text{B.41})$$

と書ける。

式 (B.24, B.36, B.38) を使うと、 v_k, u_k の基底で \tilde{A}_3 は次のように書ける。

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} J_3^{(\lambda_{\max})} & I & \cdots \\ 0 & J_3^{(\lambda_{\max})} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{B.42})$$

ただし $J_3^{(\lambda_{\max})}$ はスピン (or 角運動量) λ_{\max} 表現における z 軸まわり回転の生成子。式 (B.30, B.31, B.41, B.40) を使うと、 v_k, u_k 基底では、 \tilde{A}_{\pm} は次のように書ける。

$$\tilde{A}_+ = \begin{pmatrix} J_+^{(\lambda_{\max})} & X_+ & \cdots \\ 0 & J_+^{(\lambda_{\max})} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_- = \begin{pmatrix} J_-^{(\lambda_{\max})} & X_- & \cdots \\ 0 & J_-^{(\lambda_{\max})} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{B.43})$$

これを使うと次のような式をえる。

$$[\tilde{A}_+, \tilde{A}_-] = \begin{pmatrix} [J_+^{(\lambda_{\max})}, J_-^{(\lambda_{\max})}] & Z & \cdots \\ 0 & [J_+^{(\lambda_{\max})}, J_-^{(\lambda_{\max})}] & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B.44})$$

ただし

$$Z = J_+^{(\lambda_{\max})} X_- + X_+ J_-^{(\lambda_{\max})} - J_-^{(\lambda_{\max})} X_+ - X_- J_+^{(\lambda_{\max})}. \quad (\text{B.45})$$

容易に次の式が示せる。

$$\text{tr} Z = 0. \quad (\text{B.46})$$

式 (B.42) と比較すると

$$[\tilde{A}_+, \tilde{A}_-] \neq 2A_3. \quad (\text{B.47})$$

となり矛盾する。つまり式 (B.36) を満たす u_k は存在せず、ジョルダン細胞の大きさは 1×1 。 \tilde{A}_3 は対角化可能。

C $SO(3)$ と $SU(2)$

単位ベクトル $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ を回転軸として Θ 回転させる操作を考えて、 $SU(2)$ と $SO(3)$ を比較しよう。

C.1 $SU(2)$

一般の $\det U = 1$ をみたす 2×2 ユニタリ行列 U は、 $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 1$ をみたす 4 つの実パラメータを用いて、

$$U = \begin{pmatrix} w_4 + iw_3 & iw_1 + w_2 \\ iw_1 - w_2 & w_4 - iw_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

と書くことができる。このため、 $SU(2)$ のなす空間は三次元超球面 (S^3) に等しいことが分かる。 U を次のように書いてみよう。

$$U = \exp(i\Theta X), \quad (\text{C.2})$$

$$X = \frac{1}{2}n_1\sigma_1 + \frac{1}{2}n_2\sigma_2 + \frac{1}{2}n_3\sigma_3 \quad (\text{C.3})$$

ここで、 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ が満たされているとする。すると、

$$X^2 = \frac{1}{4}I_2 \quad (\text{C.4})$$

が示せる。これを用いて、

$$\begin{aligned} U &= I_2 + i\Theta X + \frac{1}{2!}(i\Theta)^2 X^2 + \frac{1}{3!}(i\Theta)^3 X^3 + \cdots \\ &= I_2 \cos \frac{\Theta}{2} + iX \sin \frac{\Theta}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) + in_3 \sin(\Theta/2) & (in_1 + n_2) \sin(\Theta/2) \\ (in_1 - n_2) \sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) - in_3 \sin(\Theta/2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

よって、 (w_1, w_2, w_3, w_4) と Θ , (n_1, n_2, n_3) の対応づけは、

$$w_1 = n_1 \sin(\Theta/2), \quad w_2 = n_2 \sin(\Theta/2), \quad w_3 = n_3 \sin(\Theta/2), \quad w_4 = \cos(\Theta/2) \quad (\text{C.6})$$

C.2 $SU(2)$

$\det R = 1$ をみたす 3×3 実直行行列は、

$$R = \exp(i\Theta Y), \quad (\text{C.7})$$

$$(Y)_{ij} = i\epsilon_{ijk}n_k \quad (\text{C.8})$$

と書ける。 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ を用いると、

$$(Y^2)_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j \quad (\text{C.9})$$

を示せる。これを用いて、

$$\begin{aligned} R &= I_3 + i\Theta Y + \frac{1}{2!}(i\Theta)^2 Y^2 + \frac{1}{3!}(i\Theta)^3 Y^3 + \cdots \\ R_{ij} &= \delta_{ij} - \sin \Theta \epsilon_{ijk} n_k + (\cos \Theta - 1)(\delta_{ij} - n_i n_j) \\ &= \cos \Theta (\delta_{ij} - n_i n_j) - \sin \Theta \epsilon_{ijk} n_k + n_i n_j \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

C.3 $SO(3)$ と $SU(2)$ を比べてみよう

適当な、 n_1 、 n_2 、 n_3 を決めた時、 $SO(3)$ は $\Theta = 0$ から Θ を増やしていくと $\Theta = 2\pi$ ではじめて $R = I_3$ に戻ってくるのが分かる。一方、 $SU(2)$ は $\Theta = 0$ から Θ を増やしていくと $\Theta = 4\pi$ でやっと $U = I_2$ に戻ってくる。 $\Theta = 2\pi$ のときは $U = -I_2$ である。

$SU(2)$ のなす空間は S^3 とみなせるが、 $SO(3)$ のなす空間は超球面 $S^3 : w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 1$ について $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (-w_1, -w_2, -w_3, -w_4)$ を同一視したものとみなせる。 S^3/Z_2 という書き方もよくされる。

D 一次元弦の量子論

場を量子論的に扱うことについて、(非相対論的な) 一次元弦の量子論で練習してみよう。一次元弦は連成振動子の多自由度極限としてあらわれる。

D.1 連成ばねの古典力学と連続極限

場は、質点系の自由度が大きくなときに、自然とあらわれる。このことを古典力学を例にみてみよう。

D.1.1 連成ばねについて復習

質量 m の質点を n 個用意し、ばね定数 $m\omega^2$ のばねで連結し輪にしてみよう。各質点の釣り合いの位置からの変位を z_j ($j = 1, 2, \dots, n$) と書く。このとき、 $z_{n+1} = z_1$ と便宜的に決めておくと、 z_j に関する運動方程式が簡単に書ける。

$$m\ddot{z}_j = m\omega^2(z_{j-1} - z_j) + m\omega^2(z_{j+1} - z_j), \quad (j = 1, \dots, n) \quad (\text{D.1})$$

行列の形で書くと、より見やすい。

$$m \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \vdots \\ \ddot{z}_n \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

この運動方程式の一般解を求めてみよう。見通しを良くするため、座標を

$$\vec{z} \equiv \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

とベクトルでまとめておく。さらに、以下で定義される、右辺の行列の n 個の固有ベクトルを使うのが便利。

$$\vec{u}_k = \sqrt{\frac{1}{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(2\pi i k/n) \\ \exp(4\pi i k/n) \\ \vdots \\ \exp((2n-2)\pi i k/n) \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

n が偶数のとき、 $k = -n/2 + 1, \dots, n/2$ 。 n が奇数のとき、 $k = -(n-1)/2, \dots, (n-1)/2$ とする。 \vec{z} を、時間に依存する係数 α_k を用いて、固有ベクトルで分解してみよう。

$$\vec{z} = \sum_k A_k(t) \vec{u}_k + h.c. \quad (\text{D.5})$$

なので、 $h.c.$ はそれまでの項の複素共役を意味する。 \vec{z} は実なので $h.c.$ を加えることで右辺も実となった。 $\alpha_k(t)$ の時間発展について、次の運動方程式が成立する。

$$\ddot{A}_k = -\omega_k^2 A_k, \quad \omega_k = \sqrt{4\omega^2 \sin^2 \frac{\pi k}{n}} \quad (\text{D.6})$$

この系には、 n 個の固有振動モードがあり、 ω_k は各モードの振動数と理解できる。結局一般解は、

$$\vec{z} = \sum_k \alpha_k e^{-i\omega_k t} \vec{u}_k + h.c. \quad (\text{D.7})$$

と書ける。 α_k は初期条件に応じて決まる複素数の定数である。

D.1.2 連続極限としての古典場

上で考えた連成ばねで、 n が十分 1 より大きい状況を考えてみよう。固有振動数 ω_k の最大値は (n によらず) 2ω 。 $|k| \ll n$ のモードの固有振動数を見てみよう。以下のように近似できる。

$$\omega_k \simeq 2\pi|k| \times \frac{\omega}{n} \quad (\text{D.8})$$

さて、 $|k| \ll n$ のモードについて、次のことがすぐ分かる。

- ω_k は ω よりずっと小さい
- ω_k の値は ω/n で決まるので、 ω と n をそれぞれ定数倍しても同じになる。

振動数が小さい、は、エネルギーが小さい、と同じ。 ω/n を一定に保ってしまえば、 n や ω の値が変わっても見分けがつかなくなる。低エネルギーの自由度を議論するのに便利な「有効理論」が作れそうだ！

m, n , そして ω を次のように書き換えてみよう。

$$m = \rho \Delta x, \quad n = \frac{L}{\Delta x}, \quad \omega = \frac{v}{\Delta x}. \quad (\text{D.9})$$

L, v, ρ を固定しながら、 Δx を小さく (N を大きく) しよう。この系は、 n 個の質点を長さ Δx のばねでつなぎ全体の長さが L となった弦とみなせる。 ρ はこの弦の単位長さあたりの質量である。また、 v は波が伝わる速度であることもこのあと分かる。

また、質点のラベル k の代わりに弦の中の“位置”を定義しよう。

$$x = j\Delta x, \quad (\text{D.10})$$

そうすると、運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial}{\partial t^2} z(x) = \rho v^2 \frac{z(x + \Delta x) - 2z(x) + z(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (\text{D.11})$$

と書けるので、 Δx を 0 にもっていく極限で、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (\text{D.12})$$

速度 v で伝わる波を記述している。

この方程式の固有振動の解としては以下のようなものがえられる。

$$z(x, t) \propto \sin\left(\frac{2\pi k(x - vt)}{L}\right), \quad (\text{D.13})$$

$$z(x, t) \propto \cos\left(\frac{2\pi k(x - vt)}{L}\right). \quad (\text{D.14})$$

固有振動数は

$$\frac{2\pi|k|v}{L} \quad (\text{D.15})$$

なので、確かに、質点系の低エネルギー解と一緒に、 v を光速と同定すれば、一次元のクラインゴールドン方程式と見ることもできる。スカラー場の量子論の予感！

D.1.3 古典場の解析力学

連続極限で場があらわれることをみだが、のちのちのために古典場の解析力学を整理しておこう。まず、ラグランジアン連続極限とおこう。

$$\begin{aligned} L &= \sum_j \left(\frac{1}{2} m \dot{z}_j^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (z_j - z_{j+1})^2 \right) \\ &= \Delta x \sum_j \left(\frac{1}{2} \frac{m}{\Delta x} \dot{z}_j^2 - \frac{1}{2} \frac{m}{\Delta x} (\omega \Delta x)^2 \left(\frac{z_j - z_{j+1}}{\Delta x} \right)^2 \right) \\ &\rightarrow \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \rho \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

このラグランジアンを使って、オイラーラグランジュ方程式を計算してみると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{z}(x)} &= \frac{\delta L}{\delta z(x)}, \\ \rho \ddot{z}(t, x) &= \rho v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

となり、確かに連続極限をとって得た運動方程式があらわれる。

ここからハミルトン形式にうつるために、場 $z(t, x)$ の共役運動量はどのように定義するのがよいか考えてみよう。 p_j は

$$p_j = m \dot{z}_j = \Delta x \times \rho \dot{z}_j \quad (\text{D.18})$$

と書き直せるので $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で無限小の量になってしまい、便利ではなさそう。かわりに、 π_j を次のように定義してみる。

$$\pi_j \equiv \frac{p_j}{\Delta x} = \rho \dot{z}_j \quad (\text{D.19})$$

これなら、 $\Delta x \rightarrow 0$ でも有限の量になり、都合がよい！

π_j の定義は、汎関数微分を使うと綺麗に書けて筋が良いのが分かる。汎関数微分の定義は、

$$\frac{\delta X}{\delta f(x_0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X[f(x) + \epsilon \delta(x - x_0)] - X[f(x)]}{\epsilon} \quad (\text{D.20})$$

例えば、

$$X = \int dx f(x)g(x), \quad \frac{\delta X}{\delta f(x)} = g(x). \quad (\text{D.21})$$

π_j の定義を計算してみると、

$$\begin{aligned} \pi_j &= \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(\{z_i\}, \{\dot{z}_i + \epsilon \delta_{ij}\}) - L(\{z_i\}, \{\dot{z}_i\})}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(\{z_i\}, \{\dot{z}_i + \epsilon \delta_{ij}/\Delta x\}) - L(\{z_i\}, \{\dot{z}_i\})}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

ここで、 $\epsilon \delta_{ij}/\Delta x \rightarrow \delta(x - x_0)$ に注目すると、連続極限で、

$$\pi_j = \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \quad \rightarrow \quad \pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{z}(x)} \quad (\text{D.23})$$

ポアソン括弧を連続極限を使って考えてみる。 $[z_i, p_j] = \delta_{ij}$ であるから、

$$[z_i, \pi_j] = \frac{\delta_{ij}}{\Delta x} \quad (\text{D.24})$$

素朴に考えると $\Delta x \rightarrow 0$ で発散してしまってよく分からない。実はもう少しよい見方がある。

$$\Delta x \sum_{j'} \frac{\delta_{jj'}}{\Delta x} = 1 \quad (\text{D.25})$$

という式が容易に確かめられるが、連続極限で離散和は以下のような積分になる。

$$\Delta x \sum_{j'} \quad \rightarrow \quad \int dx' \quad (\text{D.26})$$

すなわち、 $\delta_{jj'}$ の連続極限は、

$$\frac{\delta_{jj'}}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \delta(x - x') \quad (\text{D.27})$$

と理解してよい、連続極限 $\Delta x \rightarrow 0$ におけるポアソン括弧はデルタ関数を使って、

$$[z_j, \pi_{j'}] = \frac{\delta_{kk'}}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad [z(x), \pi(x')] = \delta(x - x') \quad (\text{D.28})$$

となる。ポアソン括弧は

$$[A, B] = \int_0^L dx \left[\frac{\delta A}{\delta z(x)} \frac{\delta B}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta A}{\delta \pi(x)} \frac{\delta B}{\delta z(x)} \right] \quad (\text{D.29})$$

ハミルトニアンを導出してみよう。

$$\begin{aligned} H &= \int_0^L dx \pi \dot{z} - L \\ &= \int_0^L dx \left[\frac{1}{2\rho} \pi^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

ハミルトン方程式は、

$$\dot{z} = [H, z] = \frac{\pi}{\rho}, \quad (\text{D.31})$$

$$\dot{\pi} = [H, \pi] = -\rho v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (\text{D.32})$$

確かにこの方程式は、オイラーラグランジュ方程式と矛盾しない。

まとめとして、多自由度の質点系と古典場の系を比較してみよう。

- 離散的な自由度に関する和が積分におきかわった
- 微分が汎関数微分におきかわった
- クロネッカーのデルタがデルタ関数におきかわった

といった違いを認めると、やっていることはほぼ変わらないのが分かると思う。

D.2 連成ばねの量子力学と連続極限

古典場の理論が、古典力学の質点系の自由度が大きな極限としてあらわれることをみた。次に、連成調和振動子の量子論について多自由度極限をとってみる。極限として、量子場の理論があらわれることをみる。なお、一貫してハイゼンベルク描像をとり議論する。

D.2.1 調和振動子について復習

調和振動子のラグランジアンは次のように与えられる。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 z^2. \quad (\text{D.33})$$

共役運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad (\text{D.34})$$

ハミルトニアンは、

$$H = p\dot{z} - L = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2. \quad (\text{D.35})$$

正準量子化しよう。 c 数と演算子は区別して、 \hat{z} 、 \hat{p} 、 \hat{H} のように書くことにしよう。演算子の交換関係は以下のように与えられる。

$$[\hat{z}, \hat{p}] = i. \quad (\text{D.36})$$

ハミルトニアン演算子は \hat{z} と \hat{p} を使って

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{z}^2. \quad (\text{D.37})$$

と書ける。

ハイゼンベルク描像をとると、演算子の時間発展は次のようなハイゼンベルク方程式で記述される。

$$\dot{\hat{z}} = i[\hat{H}, \hat{z}], \quad \dot{\hat{p}} = i[\hat{H}, \hat{p}]. \quad (\text{D.38})$$

式 (D.37) と式 (D.38) を使うと、

$$\dot{\hat{z}} = i[\hat{H}, \hat{z}] = i\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{z}\right] = i\frac{\hat{p}}{m}[\hat{p}, \hat{z}] = \frac{\hat{p}}{m}, \quad (\text{D.39})$$

$$\dot{\hat{p}} = i[\hat{H}, \hat{p}] = i\left[\frac{1}{2}m\omega^2\hat{z}^2, \hat{p}\right] = im\omega^2\hat{z}[\hat{z}, \hat{p}] = -m\omega^2\hat{z} \quad (\text{D.40})$$

が得られる。上の二つの方程式から、 \hat{z} に関する次の運動方程式を得る。

$$\ddot{\hat{z}} = -\omega^2\hat{z} \quad (\text{D.41})$$

この運動方程式は、古典的な調和振動子の運動方程式 $\ddot{z} = -\omega^2 z$ の z を演算子 \hat{z} に置き換えたものになっている。一般解は、演算子の係数を用いることで、

$$\hat{z}(t) = \hat{\alpha}e^{-i\omega t} + \hat{\alpha}^\dagger e^{i\omega t} \quad (\text{D.42})$$

とあらわせる。 $\hat{\alpha}$ は時間に依らない演算子。ハイゼンベルク方程式により、

$$\hat{p}(t) = m\dot{\hat{z}}(t) = -im\omega\hat{\alpha}e^{-i\omega t} + im\omega\hat{\alpha}^\dagger e^{i\omega t} \quad (\text{D.43})$$

式 (D.42) と式 (D.43) から交換関係を計算してみよう。

$$[\hat{z}(t), \hat{p}(t)] = 2im\omega[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] \quad (\text{D.44})$$

$\hat{\alpha}$ は

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (\text{D.45})$$

をみたす演算子 \hat{a} を使って、

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\hat{a}, \quad (\text{D.46})$$

と書ける。これを、式 (D.42)、式 (D.43) に代入すると、

$$\hat{z}(t) = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}), \quad (\text{D.47})$$

$$\hat{p}(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(-i\hat{a}e^{-i\omega t} + i\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}). \quad (\text{D.48})$$

がえられる。

さらに、ハミルトニアンを \hat{a} と \hat{a}^\dagger で書き直せる。

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\omega \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

さらにさらに、 \hat{a}, \hat{a}^\dagger と \hat{H} の交換関係も計算できる。

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\omega\hat{a}, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega\hat{a}^\dagger. \quad (\text{D.50})$$

\hat{a} がかかるとエネルギーが ω 減り、 \hat{a}^\dagger がかかるとエネルギーが ω 増える。

最低エネルギー状態 $|0\rangle$ は次のように書ける。

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (\text{D.51})$$

第 n 励起状態は

$$|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{D.52})$$

エネルギー固有値は

$$\hat{H}|n\rangle = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (\text{D.53})$$

D.2.2 連成ばねの正準量子化

バネ定数 $m\omega^2$ で連結された質量 m の質点を n 個繋げてみよう。

$$L = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} m \dot{z}_j^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (z_j - z_{j+1})^2 \right) \quad (\text{D.54})$$

$z_{n+1} = z_1$ とする。(周期境界条件) 座標 x_j の共役運動量は、

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{z}_j \quad (\text{D.55})$$

ハミルトニアンは、

$$H = \sum_j \left(\frac{1}{2m} p_j^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (z_j - z_{j+1})^2 \right) \quad (\text{D.56})$$

さて正準量子化を行う。交換関係は

$$[\hat{z}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad (\text{D.57})$$

であり、ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_j \left(\frac{1}{2m} \hat{p}_j^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (\hat{z}_j - \hat{z}_{j+1})^2 \right) \quad (\text{D.58})$$

である。ハイゼンベルク方程式は

$$\dot{\hat{z}}_j = i[\hat{H}, \hat{z}_j], \quad \dot{\hat{p}}_j = i[\hat{H}, \hat{p}_j]. \quad (\text{D.59})$$

である。ハイゼンベルク方程式を用いて、以下のような運動方程式をえる。

$$\ddot{\hat{z}}_j = m\omega^2(\hat{z}_{j-1} - \hat{z}_j) + m\omega^2(\hat{z}_{j+1} - \hat{z}_j) \quad (\text{D.60})$$

これは、古典的な系の運動方程式 (D.1) の座標を演算子に置き換えたものとなっている。方程式の形が同じなので、式 (D.4) で与えられた固有ベクトルを用いて、

$$\vec{z}(t) = \sum_k \hat{\alpha}_k e^{-i\omega_k t} \vec{u}_k + h.c. \quad (D.61)$$

と書ける。また、

$$\vec{p}(t) = \sum_k [-im\omega \hat{\alpha}_k e^{-i\omega_k t} \vec{u}_k + h.c.] \quad (D.62)$$

$\hat{\alpha}_k$ のみたすべき性質をみるために、 $[\hat{z}_i, \hat{p}_j] = i$ をフーリエ変換してみよう。

$$[\vec{u}_k^\dagger \vec{z}, \vec{p}^T \vec{u}_{k'}] = i \vec{u}_k^\dagger \vec{u}_{k'} \quad (D.63)$$

両辺はそれぞれ

$$\text{式 (D.63) の左辺} = im\omega [\hat{\alpha}_k e^{-i\omega_k t} + \hat{\alpha}_{-k} e^{i\omega_k t}, -\hat{\alpha}_k e^{-i\omega_k t} + \hat{\alpha}_{-k} e^{i\omega_k t}], \quad (D.64)$$

$$\text{式 (D.63) の右辺} = i\delta_{kk'}. \quad (D.65)$$

と評価される。式 (D.63) は t に依らず満たされるので、次の交換関係が得られる。

$$[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] = \frac{1}{2m\omega_k} \delta_{kk'}, \quad (D.66)$$

$$[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}] = [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (D.67)$$

$\hat{a}_k \equiv \sqrt{2m\omega_k} \hat{\alpha}_k$ を定義すると、

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad (D.68)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (D.69)$$

を用いて、

$$\hat{z}_j(t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2m\omega_k}} \left[\hat{a}_k \exp\left(\frac{2\pi i j k}{n}\right) + \hat{a}_k^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{n}\right) \right] \quad (D.70)$$

と書ける。

D.2.3 連続極限としての量子場

古典連成ばねの時と同様に

$$m = \rho \Delta x, \quad n = \frac{L}{\Delta x}, \quad \omega = \frac{v}{\Delta x} \quad (D.71)$$

という置き換えをしてみよう。古典連成ばね系で $\Delta x \rightarrow 0$ の連続極限をとると、古典スカラー場があらわれるのを見た。量子連成ばね系で $\Delta x \rightarrow 0$ の連続極限をしてみよう。古典論のときは古典スカラー場があらわれたが、今回は、スカラー場の量子論があらわれるはずだ。古典力学のときと同じように $\hat{p}_j = m \dot{\hat{z}}_j = \Delta x \times \rho \dot{\hat{z}}_j$ なので、

$$\hat{\pi}_j \equiv \frac{\hat{p}_j}{\Delta x} = \rho \dot{\hat{z}}_j \quad (D.72)$$

というのを定義しておくのが良い。

z_j との交換関係は、

$$[\hat{z}_j, \hat{\pi}_{j'}] = \frac{i\delta_{jj'}}{\Delta x} \quad (\text{D.73})$$

であるが、連続極限において $\frac{\delta_{jj'}}{\Delta x} \rightarrow \delta(x - x')$ となることを思い出すと、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で、

$$[\hat{z}_j, \hat{\pi}_{j'}] = \frac{i\delta_{jj'}}{\Delta x} \rightarrow [\hat{z}(x), \hat{\pi}(x')] = i\delta(x - x') \quad (\text{D.74})$$

となる。また、ハイゼンベルク方程式も、連続極限において

$$\dot{\hat{z}}_j = \frac{1}{\rho} \hat{\pi}_j \rightarrow \dot{\hat{z}}(x) = \frac{1}{\rho} \hat{\pi}(x), \quad (\text{D.75})$$

$$\dot{\hat{\pi}}_j = \rho v^2 \frac{\hat{z}_{j+1} - 2\hat{z}_j + \hat{z}_{j-1}}{\Delta x^2} \rightarrow \dot{\hat{\pi}}(x) = \rho v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{z}(x) \quad (\text{D.76})$$

となる。こうして場の演算子が自然とあらわれ、かつ、正準量子化の手続きが使えることが見える。

D.3 一次元弦の量子論

質点の量子力学をスタート地点として連続極限をとることにより、量子場があらわれるさまをみた。しかし、いちいち連続極限をとるのは面倒。ここでは、古典場のラグランジアンをスタート地点として、正準量子化をへて量子場を導出してみよう。

D.3.1 一次元弦の正準量子化

有限自由度の量子力学のとき、正準量子化は、

- まずラグランジアン L を書く。
- 共役運動量 $p_j = \partial L / \partial x_j$ に対して、 $[x_j, p_{j'}] = i\delta_{jj'}$ という交換関係を要求する。
- ハミルトニアンを $H = p\dot{q} - L$ として、 x_j と p_j で書く。

という手続きで行われた。

場の理論になってもやることは、結局一緒。つまり、

- まずラグランジアン密度 \mathcal{L} を書く。
- 共役運動量 $\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \phi(x)$ に対して、 $[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y)$ という交換関係を要求する。
- ハミルトニアン見るとを $\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$ として、 $\phi(x)$ と $\pi(x)$ で書く。

共役運動量の定義や場の交換関係がどのように置き換わりそうかが分かったので、古典場のラグランジアンをスタート地点として、正準量子化してみよう。次のラグランジアンからはじめる。

$$L = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{D.77})$$

ϕ の共役運動量は汎関数微分で定義される。

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{z}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}(x)} = \rho \dot{z}(x). \quad (\text{D.78})$$

ハミルトニアン H とハミルトニアン密度 \mathcal{H} は、

$$H = \int_0^L dx (\pi \dot{z}) - L = \int_0^L dx \mathcal{H}, \quad (\text{D.79})$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\rho} \pi^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{D.80})$$

正準量子化しよう。 \hat{z} と $\hat{\pi}$ の交換関係はデルタ関数で与えられる。

$$[\hat{z}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x - y) \quad (\text{D.81})$$

ハミルトニアンは次のとおり。

$$\hat{H} = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2\rho} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (\text{D.82})$$

ハイゼンベルク方程式は

$$\dot{\hat{z}} = i[\hat{H}, \hat{z}] = \frac{1}{\rho} \hat{\pi}, \quad (\text{D.83})$$

$$\dot{\hat{\pi}} = i[\hat{H}, \hat{\pi}] = -\rho v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \hat{z}. \quad (\text{D.84})$$

$\hat{\pi}$ を消去すると、

$$\ddot{\hat{z}}(x, t) = -v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{z}(x, t). \quad (\text{D.85})$$

一般的な解は、

$$\hat{z}(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_k \exp \left(-i\omega_k t + \frac{2\pi i k x}{L} \right) + h.c. \quad (\text{D.86})$$

また、

$$\hat{\pi}(t, x) = \rho \dot{\hat{z}}(t, x) = -i\rho \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k \hat{\alpha}_k \exp \left(-i\omega_k t + \frac{2\pi i k x}{L} \right) + h.c. \quad (\text{D.87})$$

$\hat{\alpha}_k$ のみたすべき性質をみるために、 $[\hat{z}(t, x), \hat{\pi}(t, y)] = i\delta(x - y)$ をフーリエ変換してみよう。

$$\int_0^L dx \int_0^L dy e^{-2\pi i k x/L} e^{2\pi i k' y/L} [\hat{z}(t, x), \hat{\pi}(t, y)] = \int_0^L dx \int_0^L dy e^{-2\pi i k x/L} e^{2\pi i k' y/L} i\delta(x - y) \quad (\text{D.88})$$

両辺はそれぞれ

$$\text{式 (D.88) の左辺} = -i\rho L^2 [\hat{\alpha}_k e^{-i\omega_k t} + \hat{\alpha}_{-k}^\dagger e^{i\omega_{-k} t}, \omega_{k'} \hat{\alpha}_{k'} e^{-i\omega_{k'} t} - \omega_{-k'} \hat{\alpha}_{-k'}^\dagger e^{i\omega_{-k'} t}], \quad (\text{D.89})$$

$$\text{式 (D.88) の右辺} = iL\delta_{k, k'} \quad (\text{D.90})$$

と評価される。式 (D.88) は t に依らず満たされるので、次の交換関係が得られる。

$$[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] = \frac{\delta_{k,k'}}{2\omega_k \rho L}, \quad (\text{D.91})$$

$$[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}] = [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (\text{D.92})$$

$\hat{a}_k \equiv \sqrt{2\omega_k \rho L} \hat{\alpha}_k$ を定義すると、

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad (\text{D.93})$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (\text{D.94})$$

\hat{z} と $\hat{\pi}$ を \hat{a} と \hat{a}^\dagger で書ける。

$$\hat{z} = \sum_j \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_j \rho L}} \hat{a}_j \exp\left(\frac{2\pi i j x}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_j \rho L}} \hat{a}_j^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i j x}{L}\right) \right), \quad (\text{D.95})$$

$$\hat{\pi} = \sum_j \left(i\sqrt{\frac{\rho\omega_j}{2L}} \hat{a}_j \exp\left(\frac{2\pi i j x}{L}\right) - i\sqrt{\frac{\rho\omega_j}{2L}} \hat{a}_j^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i j x}{L}\right) \right). \quad (\text{D.96})$$

D.3.2 $L \rightarrow \infty$ 極限

L を無限大にする極限をとってみよう。この極限では、運動量固有値が連続的になるので、

$$\sum_j \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk \quad (\text{D.97})$$

のような置き換えができる。生成消滅演算子の交換関係もデルタ関数で書けるようになる。

$$[\sqrt{L}\hat{a}_j, \sqrt{L}\hat{a}_{j'}] = L\delta_{jj'} \rightarrow (2\pi)\delta(k - k'). \quad (\text{D.98})$$

式 (D.95, D.96) を以下のように書き換えてみる。

$$\hat{z} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{1}{L} \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sqrt{L} \hat{a}_k \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sqrt{L} \hat{a}_k^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{L}\right) \right), \quad (\text{D.99})$$

$$\hat{\pi} = \sqrt{\rho} \frac{1}{L} \sum_k \left(i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \sqrt{L} \hat{a}_k \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) - i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \sqrt{L} \hat{a}_k^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{L}\right) \right). \quad (\text{D.100})$$

L 無限大極限の \hat{z} と $\hat{\pi}$ は次のように書けるのが分かる。

$$\hat{z} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}_k \exp(ikx) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}_k^\dagger \exp(-ikx) \right), \quad (\text{D.101})$$

$$\hat{\pi} = \sqrt{\rho} \int \frac{dk}{2\pi} \left(i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \hat{a}_k \exp(ikx) - i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \hat{a}_k^\dagger \exp(-ikx) \right), \quad (\text{D.102})$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = (2\pi)\delta(k - k'). \quad (\text{D.103})$$

D.4 有効理論という考え方

上でみた、一次元古典スカラー場の理論は、連成ばねの低エネルギー有効理論とみなすこともできる。有効理論という考え方めっちゃ大事。

物理は自然科学なので実験でチェックされるもの。つまり、次のような性質を持っている。

- 全ての実験にはエラーバーがついている。 → ある理論が実験結果をうまく説明しているとしても、理論の予言値と実験の観測値のずれの大きさがエラーバーより小さいだけかもしれない。
- これまでに人類が行った実験の数は有限。 → ある理論が今まで行われた実験結果をうまく説明しているとしても、人類が今までやってない実験で、理論と実験のずれが見つかるかもしれない。

つまり、物理の理論は「有効理論」だと思うべき。その意味は、

- (少なくとも) 一定の条件を満たすときに、現実世界を十分な精度で近似するもの。

ということで、理論が有効な範囲を意識することはめっちゃ大事。具体例はこんな感じ。

- ニュートン力学： $v \ll c$ かつマクロスコピック（量子論的效果無視できる）なら良い近似
- 非相対論的量子力学： $v \ll c$ なら良い近似
- 特殊相対論：マクロスコピック（量子論的效果無視できる）なら良い近似

ある理論から適用範囲の狭い有効理論は演繹的に導出できるが、適用範囲の広い理論に行くには論理的飛躍が必要。

- 例：古典力学から量子力学にいくには、いきなり c 数を演算子にするなどの論理的飛躍が必要だった。
- 例2：量子力学から場の量子論にいくにも論理的飛躍が必要。
- 例3：超対称性粒子まだ見つかってないけど、いつかは見つかるかも??

E スカラー場の異時刻交換関係

ここでは、式 (8.81) の導出を行う。詳細は「演習場の量子論」(柏太郎) の第二章の演習問題 1.1 などでも参照されたい。スカラー場の異時刻交換関係は

$$\Delta(t, r) = [\hat{\phi}(t, r\vec{e}_x), \hat{\phi}(0, \vec{0})] = \Delta^{(+)}(t, r) - \Delta^{(+)*}(t, r) \quad (\text{E.1})$$

と書ける。ここで、 $\Delta^{(+)}(t, r)$ は

$$\Delta^{(+)}(t, r) = \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{p^2}{(2\pi)^3 2\sqrt{m^2 + p^2}} \exp\left(-i\sqrt{m^2 + p^2}t + ipr\right) \quad (\text{E.2})$$

と定義される。 θ と ϕ に関して積分すると

$$\Delta^{(+)}(t, r) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{p dp}{\sqrt{m^2 + p^2}} \sin(pr) \exp\left(-i\sqrt{m^2 + p^2}t\right) \quad (\text{E.3})$$

が得られる。ここでもむろに $I(t, r)$ を

$$I(t, r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{m^2 + p^2}} \exp \left(-i\sqrt{m^2 + p^2}t + ipr \right) \quad (\text{E.4})$$

と定義すると、

$$\Delta^{(+)}(t, r) = -\frac{1}{8\pi^2 r} \frac{\partial I}{\partial r} \quad (\text{E.5})$$

と書ける。

積分変数を p から χ に変更する。

$$p = m \sinh \chi \quad (\text{E.6})$$

p と χ の関係について

$$\sqrt{p^2 + m^2} = m \cosh \chi, \quad d\chi = \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (\text{E.7})$$

が成り立つので、

$$I(t, r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \exp \left(-im(t \cosh \chi - r \sinh \theta) \right) \quad (\text{E.8})$$

と書ける。 $t \cosh \chi - r \sinh \theta$ は加法定理を使ってひとつの \sinh または \cosh に書き直せる。

結果、 $t > 0$ かつ $t^2 > r^2$ のとき、ベッセル関数に関する Mehler の公式⁴⁷を使うと、

$$I(t, r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\chi} \exp \left(-im\sqrt{t^2 - r^2} \cosh \tilde{\chi} \right) = -\pi(Y_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) - iJ_0(m\sqrt{t^2 - r^2})) \quad (\text{E.9})$$

と $t < 0$ かつ $t^2 > r^2$ のとき、

$$I(t, r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\chi} \exp \left(im\sqrt{t^2 - r^2} \cosh \tilde{\chi} \right) = -\pi(Y_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) + iJ_0(m\sqrt{t^2 - r^2})) \quad (\text{E.10})$$

が得られる。また、修正ベッセル関数に関する積分公式⁴⁸を用いると、 $t^2 < r^2$ のとき、

$$I(t, r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\chi} \exp \left(-im\sqrt{r^2 - t^2} \sinh \tilde{\chi} \right) = 2K_0(m\sqrt{r^2 - t^2}) \quad (\text{E.11})$$

である。

$\Delta = 2i\text{Im}\Delta^{(+)}$ なので、 $t^2 > r^2$ のとき、

$$\Delta(t, r) = \text{sgn}(t) \times \frac{m^2}{4\pi} \frac{J_1(m\sqrt{t^2 - r^2})}{m\sqrt{t^2 - r^2}}. \quad (\text{E.12})$$

である。 $(dJ_0(z)/dz = -J_1(z))$ を用いた。) また、 $t^2 < r^2$ のとき、

$$\Delta(t, r) = 0. \quad (\text{E.13})$$

⁴⁷<https://mathworld.wolfram.com/MehlersBesselFunctionFormula.html>

⁴⁸<https://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheSecondKind.html>

参考文献

- [1] H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, “Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry,” Phys. Rept. **494**, 1-196 (2010) [arXiv:0812.1594 [hep-ph]].
- [2] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **117**, 610-624 (1928)
- [3] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, “ADLER-BELL-JACKIW ANOMALY AND WEYL FERMIONS IN CRYSTAL,” Phys. Lett. B **130**, 389-396 (1983)
- [4] 風間 洋一, “ゲージ対称性と現代物理学”, [http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/gaugesym\(suuri-kagaku\).pdf](http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/gaugesym(suuri-kagaku).pdf)
- [5] 深谷英則, “なぜ、量子重力は (QCD に比べて) 難しいのか?”, 素粒子論研究・電子版 **25** (2016) No. 2
- [6] J. S. Schwinger, “On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” Phys. Rev. **73**, 416-417 (1948)
- [7] 遠藤基, 岩本祥, 北原鉄平, “此のたびのミューオン異常磁気能率〜おぼろげながら, しかしはっきりと浮かんできたミューオン $g-2$ アノマリー〜”, 高エネルギーニュース **40** (2021) No. 2
- [8] S. Weinberg, “The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations,”
- [9] E. H. Wichmann and J. H. Crichton, “Cluster Decomposition Properties of the S Matrix,” Phys. Rev. **132**, no.6, 2788-2799 (1963)
- [10] B. Bakamjian and L. H. Thomas, “Relativistic particle dynamics. 2,” Phys. Rev. **92**, 1300-1310 (1953)