平均數估計 (Mean Estimation)

大數據分析

- R/Python/Julia/SQL程式設計與應用 (R/Python/Julia/SQL Programming and Application)
- 資料視覺化 (Data Visualization)
- 機器學習 (Machine Learning)
- 統計品管 (Statistical Quality Control)
- 最佳化 (Optimization)

李明昌博士
alan9956@gmail.com
http://rwepa.blogspot.com/

2024.03.12

大綱

- 1.隨機變數
- 2.機率分配
- 3.平均數估計

本週進度：
針對研究方法提及的敘述統計分析與推論統計等主題進一步探討。

1.隨機變數

隨機變數 vs. 機率分配

random variable

probability distribution

隨機變數

- 離散型隨機變數 — 離散型隨機變數之機率分配
- 連續型隨機變數 — 連續型隨機變數之機率分配

隨機變數依其產生結果之數值個數區分二類

隨機變數

- 隨機變數 (random variable, 簡稱r.v.) 是一個實數值函數。
- 定義於樣本空間的每一個元素皆可對應至一個實數。
- 一般以大寫英文字母表示隨機變數，例：X, Y, Z。
- 以小寫英文字母表示對應的函數值，例：x, y, z。

離散型隨機變數 vs. 連續型隨機變數

- 隨機變數依其產生結果之數值個數可區分為兩種型態：1.離散型隨機變數；2.連續型隨機變數。
- 離散型隨機變數 (Discrete R.V.) 所有可能產生的數值個數為有限或無限可數的隨機變數。
  - 例：隨機檢查3個產品所得之不良品個數，此數值可能為 0、1、2、3。
- 連續型隨機變數 (Continuous R.V.) 所有可能產生的數值個數為無限且不可數之隨機變數。
  - 例：隨機抽取大學生詢問其每週的生活費用，此數值可能是大於或等於1之實數。

2.機率分配

離散型隨機變數之機率分配

- 如果函數 $f(x)$ 滿足下列三個條件，則 $f(x)$ 稱為離散型機率分配 (discrete probability distribution)：

1. $f(x_i) = P(X = x_i), i = 1,2, \dots, n$
2. $0 \le f(x_i) \le 1, \forall x_i \in R$
3. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

連續型隨機變數之機率分配

- 如果函數 $f(x)$ 滿足下列三個條件，則 $f(x)$ 稱為連續型機率分配 (continuous probability distribution) 或機率密度函數 (probability density function, pdf)：

1. $x \in R$，且 $f(x) \geq 0$
2. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)df$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)df = 1$

機率分配總表

類別	機率分配（中文）	機率分配（英文）
離散型機率分配	二項分配	Binomial distribution
	超幾何分配	Hypergeometric distribution
	幾何分配	Geometric distribution
	負二項分配	Negative binomial distribution
	卜瓦松分配	Poisson distribution
	伯努利分配	Bernoulli distribution
連續型機率分配	一致分配	Uniform distribution
	常態分配	Normal distribution
	伽瑪分配	Gamma distribution
	指數分配	Exponential distribution
	卡方分配	Chi-squared distribution
	F 分配	F distribution
	t 分配	Student's t distribution
	高斯分配	Cauchy distribution
	貝他分配	beta distribution
	對數常態分配	log-normal distribution
	多項式分配	multinomial distribution
	韋伯分配	Weibull distribution

常用統計量

- 平均數(平均值，期望值)：$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
- 變異數：$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$
- 標準差：$\sqrt{\sigma^2} = \sigma$
- 共變異數
- 相關係數
- 偏態
- 峰態

平均數

- 若 $f(x)$ 為隨機變數X 之機率(密度)函數，則隨機變數 X 的平均數 (Mean) 或期望值 (Expectation) 以 μ 或 $E(X)$ 表示，定義如下：

  (1) 若 X 為離散型：$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$

  (2) 若 X 為連續型：$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

平均數之性質

- 定理 若X 為隨機變數，且 a、b 為常數，則

$$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$$

- 推理 若c為常數，則 $E(c) = c$。
- 定理 若$f_1(X)$、$f_2(X)$為隨機變數 X 之函數，則

$$E[f_1(X) \pm f_2(X)] = E[f_1(X)] \pm E[f_2(X)]$$

平均數之性質 (續)

- 定理

  令 (X,Y) 為二元隨機變數，$f_1(X,Y)$、$f_2(X,Y)$為隨機變數 (X,Y) 之函數，則 $E[f_1(X,Y) \pm f_2(X,Y)] = E[f_1(X,Y)] \pm E[f_2(X,Y)]$

- 推理 若 $(X$、$Y)$ 為二元隨機變數，則 $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$
- 定理 若 X、Y 為獨立 (independent) 之隨機變數，則$E(XY) = E(X)E(Y)$
- 獨立表示變數X的數值, 對另一變數Y的數值沒有影響。

變異數

- 令 X 為隨機變數且μ為其平均數，則 X 的變異數以 σ^2 或 $Var(X)$ 表示，其定義如下：$\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2]$

由上述定義，我們可得以下結果：

- (1)若 X 為離散型：令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為其變量，且$f(x_i)$ 為其機率函數，則

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

- (2)若 X 為連續型：令$f(x)$ 為其機率密度函數，則

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

- 定理 σ^2 之計算公式 $\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

範例:平均數與變異數

- 考慮一隨機變數 X 的機率分配如下：

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

- 計算$E(X)$ 、$Var(X)$ 。

【解】

$$E(X) = \sum_{x=1}^{3} xf(x) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.3 = 2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.4 + 3^2 \times 0.3 = 4.6$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4.6 - 2^2 = 0.6$$

標準差 (Standard deviation)

- 令 X 為隨機變數且 $\sigma^2 = Var(X)$ 為變異數，則 X 的標準差定義為 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$。
- 標準差已經轉換為原始測量值的單位，但變異數為 單位^2。

共變異數 (Covariance)

- 二元隨機變數 (X, Y) 之共變異數(協方差)，以 σ_{XY} 或$Cov(X, Y)$ 表示。
- 定義如下：$\sigma_{XY} = Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)\ (Y - \mu_Y)]$
- 共變異數可用於衡量二個隨機變數間的相關程度。

共變異數 (續)

- 定理 $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

證明：$Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)\ (Y - \mu_Y)]$

$$= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y)$$

$$= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X \mu_Y$$

$$= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y$$

$$= E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

- 推理 若 X、Y為獨立之隨機變數，則 $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = 0$

共變異數的性質

- 若 (X, Y) 為二元隨機變數：

1. 當$Cov(X, Y) > 0$，則表示隨機變數X、Y 具有正的線性相關。
2. 當$Cov(X, Y) < 0$ ，則表示隨機變數X、Y 具有負的線性相關。
3. 當$Cov(X, Y) = 0$ ，則表示隨機變數X、Y 不具線性關係，可能具有非線性關係。

相關係數 (Correlation coefficient, 或 Correlation)

- 二元隨機變數之相關係數，以 $\rho(X,Y)$ 或 ρ_{XY} 或 γ_{XY}表示。
- 定義：$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$。
- 當 $\rho_{XY} = 1$，表示隨機變數 X、Y 具有完美的正線性關係。
- 當 $\rho_{XY} = -1$，表示隨機變數 X、Y 具有完美的負線性關係。
- 當 $\rho_{XY} = 0$，表示隨機變數 X、Y 不具線性關係。
- 當 $|\rho_{XY}|$ 愈大，則X、Y的線性關係程度愈大。

共變異數 vs.相關係數

- 共變異數的值與量測 X, Y 之尺度有關。
- 例如：X 以公升為單位, Y 以公斤為單位, 跟 X 以立方公分為單位, Y以公克為單位, 二者之共變異數之結果差異很大。
- 相關係數之結果為 $[-1,1]$ 且無單位。

變異數與共變異數之性質

- 定理：
  若 X 為一隨機變數且 a、b 為常數，則 $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$
- 定理：
  若 X 為一隨機變數且 b 為常數，則
  $(1) Var(X \pm b) = Var(X)$
  $(2) Var(b) = 0$
- 定理：
  若 (X, Y) 為一二元隨機變數且 a、b為常數，則
  $$Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) \pm 2abCov(X, Y)$$

變異數與共變異數之性質 (續)

- 推理：若 (X,Y) 為二元隨機變數，則

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y)。$$

- 推理：若 X、Y 為獨立之隨機變數，則

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$

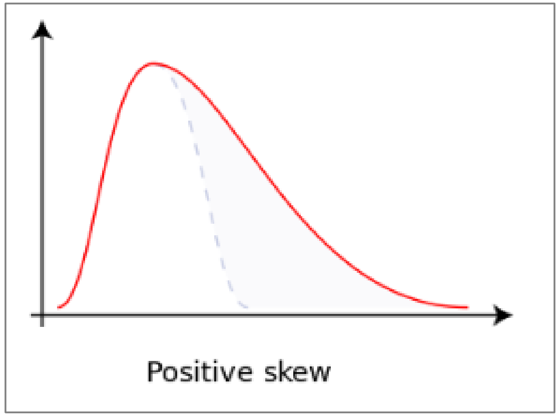
- 定理：若 (X,Y) 為二元隨機變數，則

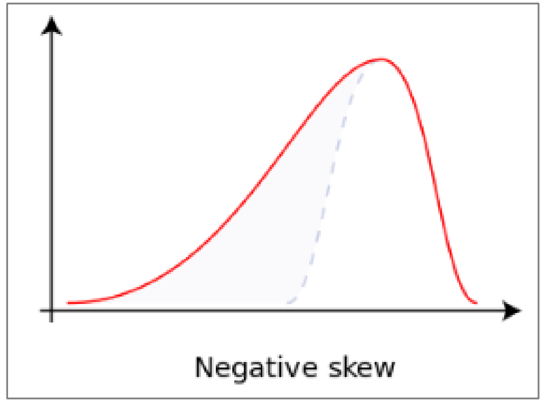
$$Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)$$

- 定理：若 X 為一隨機變數，則 $Cov(X,X) = Var(X)$

偏態 (Skewness)

- 偏態或偏度為衡量實數隨機變量機率分布的不對稱性。
- 如果分佈或資料集在中心點的左側和右側看起來相同，則它此隨機變數是對稱的，即平均值=中位數。





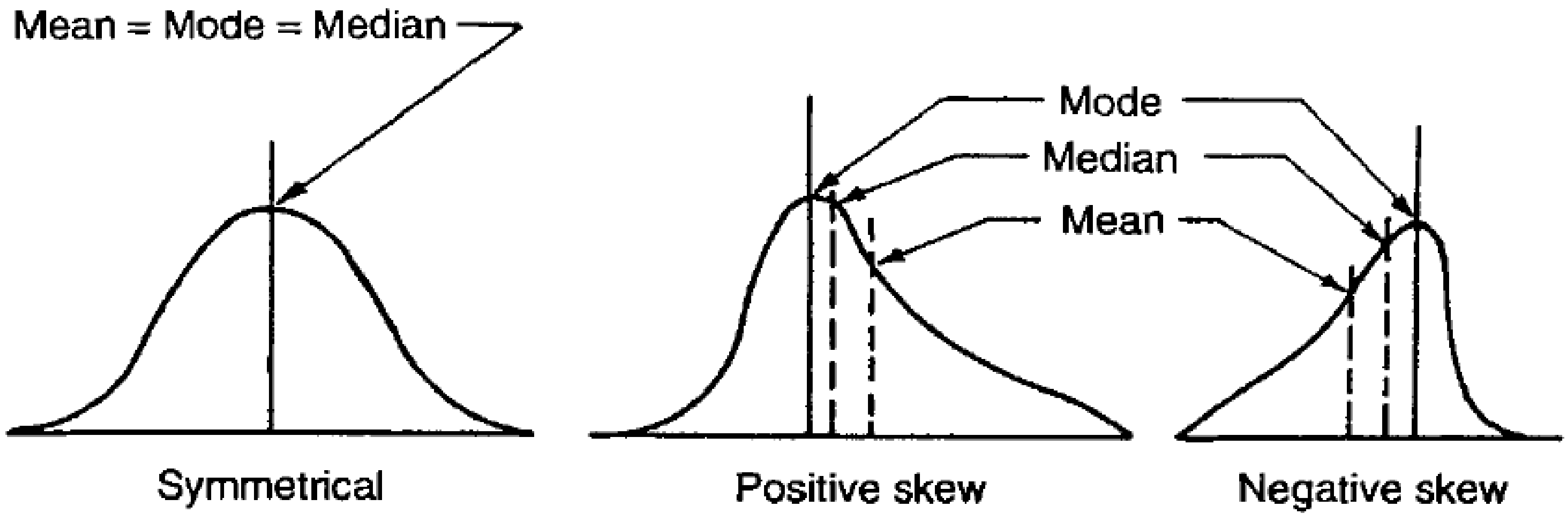
直方圖：
X軸: 變數
Y軸: 次數

- 正偏斜(*positive skew*)或右偏態：
- 右尾較長
- 平均值偏向資料中心的右側
- 資料分佈集中在圖的左側

- 負偏斜(*negative skew*)或左偏態：
- 左尾較長
- 平均值偏向資料中心的左側
- 資料分佈集中在圖形的右側

偏態的特性

- 對於偏態而言，大於0表示正偏態，小於0表示負偏態。
- 若偏態大於1或小於-1，實質上即可被視為偏態分配。



樣本偏態的計算

Joanes and Gill (1998) discuss three methods for estimating skewness:

Type 1:

$g_1 = m_3/m_2^{3/2}$. This is the typical definition used in many older textbooks.

Type 2:

$G_1 = g_1\sqrt{n(n-1)}/(n-2)$. Used in SAS and SPSS.

Type 3:

$\boxed{b_1 = m_3/s^3 = g_1((n-1)/n)^{3/2}}$. Used in MINITAB and BMDP.

All three skewness measures are unbiased under normality.

Value

The estimated skewness of x.

References

D. N. Joanes and C. A. Gill (1998), Comparing measures of sample skewness and kurtosis. *The Statistician*, **47**, 183–189.

Microsoft Excel 定義

- 偏態的方程式定義為：

$$\frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)^3$$

R:skewness {e1071}: https://cran.r-project.org/web/packages/e1071/e1071.pdf

峰態 (Kurtosis)

- 峰態或峰度是衡量資料相對於常態分佈，資料集中在二側的程度。
- 具有高峰度的資料集往往具有重尾部 (heavy-tailed)或異常值 (outliers)，即高狹峰。
- 低峰度的資料集往往有輕尾(light-tailed)，或缺乏異常值，即低闊峰。均勻分佈是極端情況。

峰態 (Kurtosis)

- 偏態與峰度結果不為 0 ，表示偏離常態分配。
- 如果峰態大於0代表高狹峰，小於0代表低闊峰。
- 若峰態大於1，表示分配過於高聳，小於-1則表示分配過於平坦。

結論：判斷標準為$[-1, 1]$

樣本峰態的計算

Joanes and Gill (1998) discuss three methods for estimating kurtosis:

Type 1:

$g_2 = m_4/m_2^2 - 3$. This is the typical definition used in many older textbooks.

Type 2:

$G_2 = ((n+1)g_2 + 6) * (n-1)/((n-2)(n-3))$. Used in SAS and SPSS.

Type 3:

$b_2 = m_4/s^4 - 3 = (g_2 + 3)(1 - 1/n)^2 - 3$. Used in MINITAB and BMDP.

Only G_2 (corresponding to `type = 2`) is unbiased under normality.

Value

The estimated kurtosis of x.

References

D. N. Joanes and C. A. Gill (1998), Comparing measures of sample skewness and kurtosis. *The Statistician*, **47**, 183–189.

- unbiased 不偏統計量
- SPSS 採用 Type 2
- R採用 Type 3

Microsoft Excel 公式

- 峰度值定義為：

$$\left\{\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum\left(\frac{x_j-\bar{x}}{s}\right)^4\right\} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

其中 s 為樣本標準差。

不偏估計量 https://en.wikipedia.org/wiki/Bias_of_an_estimator

R: kurtosis {e1071}: https://cran.r-project.org/web/packages/e1071/e1071.pdf

偏態與峰態 - SPSS

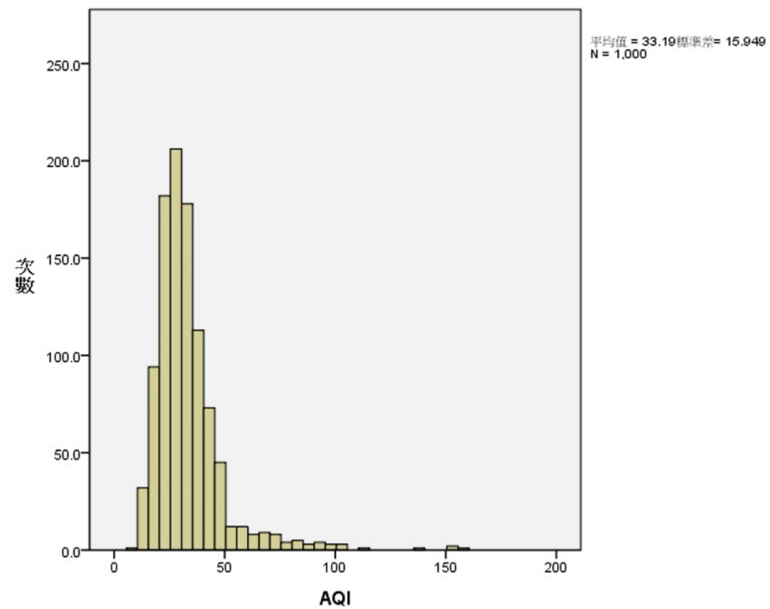
練習

- 使用 AQI 資料集練習以下結果
- https://github.com/rwepa/DataDemo/blob/master/aqx_p_434_20200720134939.csv

描述性統計資料

	N	最小值	最大值	平均數	標準偏差	偏斜度		峰度	
	統計資料	統計資料	統計資料	統計資料	統計資料	統計資料	標準錯誤	統計資料	標準錯誤
AQI	1000	8	159	33.19	15.949	2.991	.077	14.729	.155
有效的 N (listwise)	1000								

AQI 直方圖-168-李明昌



二項分配

隨機變數X為二項分配（binomial distribution），則

$$f(x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,1,2,\ldots,n，$$

其中，n為每次實驗的次數， p為成功的機率， $q = 1 - p$為失敗的機率。一般以$b(n,p)$符號表示二項機率分配，組合符號$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ 。

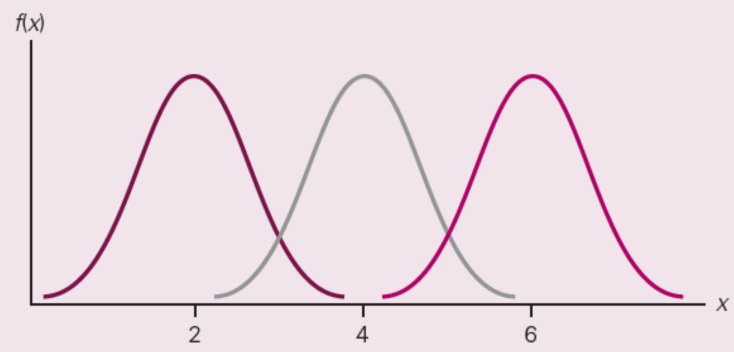
常態分配

- 常態分配兩個參數:
  - 平均數 μ
  - 標準差 σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} , \quad -\infty < x < \infty$$

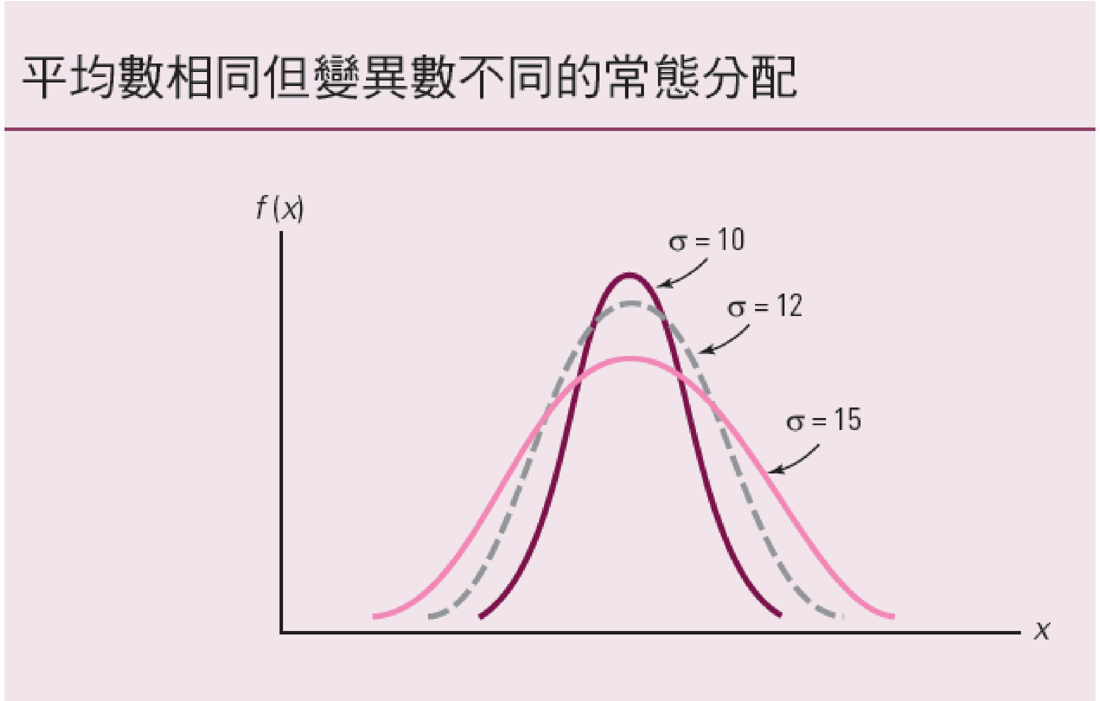
- μ 增加時曲線平移到右邊, 例: μ=2, 4, 6

變異數相同但平均數不同的常態分配



常態分配(續)

- 下圖描述 σ 的效果。大的 σ 值曲線會變寬，而小的σ 值曲線會變窄。



標準常態分配

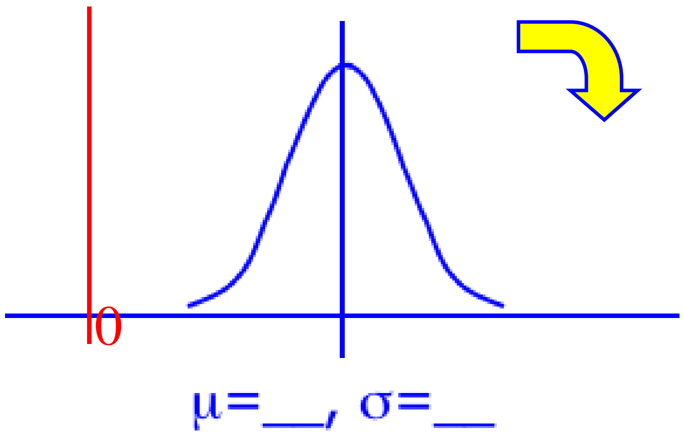
- 一個常態分配的平均數為零且其標準差為 1 稱為標準常態分配 (standard normal distribution)。
- 若Z 為一常態隨機變數且 $R.V.Z \sim N(0,1)$ ，則稱 Z 具有標準常態分配，其機率密度函數為

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2} \quad -\infty < z < \infty$$

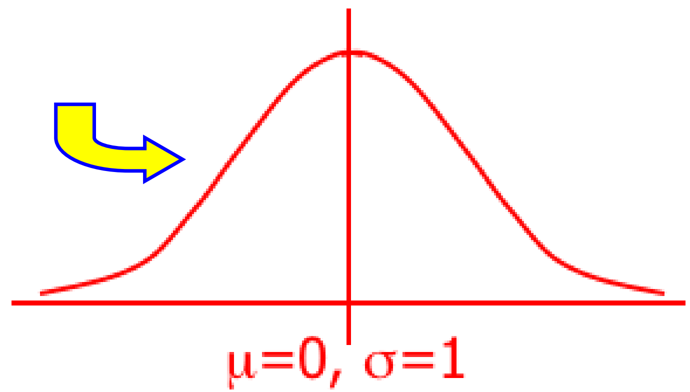
- 一般統計學教科書附錄為標準常態分配之累積機率值。

計算常態機率

- 我們可以運用下列函數轉換「常態分配隨機變數」為「標準常態分配隨機變數」 。



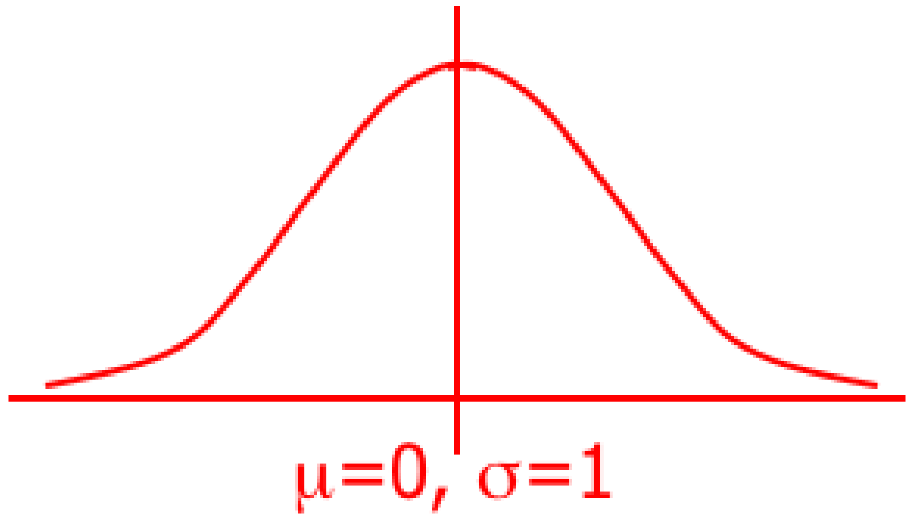
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



範例：標準常態機率值

- 計算以下4個標準常態機率值

1. $P(Z \le 1.25)$
2. $P(Z > 1.25)$
3. $P(Z = 1.25)$
4. $P(Z \le -1.25)$
5. $P(-0.38 \le Z \le 1.25)$



標準常態分配累積機率值-查表法

練習

- https://rwepa.blogspot.com/2017/03/pnorm-qnorm.html
- https://github.com/rwepa/DataDemo/blob/master/prob.pdf

- 1. $P(Z \le 1.25)$
  - 查表 0.8944
- 2. $P(Z > 1.25)$
  - 查表 1-0.8944=0.1056
- 3. $P(Z = 1.25)$ =?
- 4. $P(Z \le -1.25)$
  - $P(Z \le -1.25)$= $P(Z > 1.25)$ =0.1056
- 5. $P(-0.38 \le Z \le 1.25)$
  - $P(Z \le 1.25) - P(Z \le -0.38)$

$= 0.8944 - (1 - 0.6480)$

=0.5424

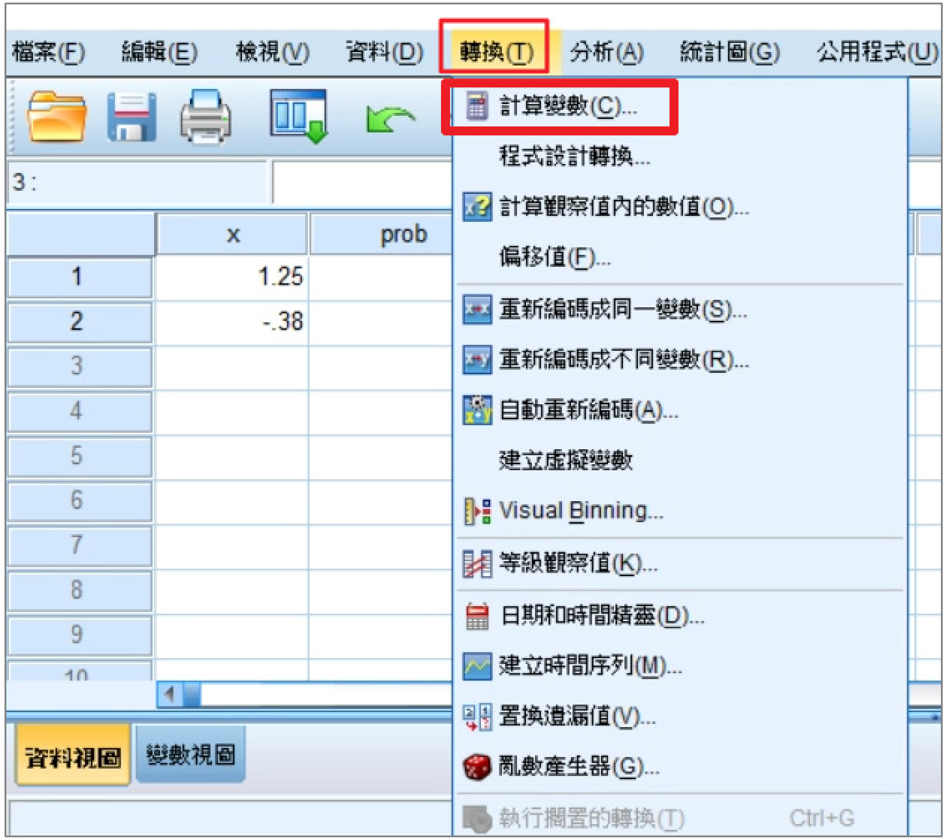
標準常態分配之累積機率值(續)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

常態分配累積機率值-SPSS法

練習

- 變數名稱: x, 輸入2筆資料: 1.25, -.38
- 轉換 \ 計算變數



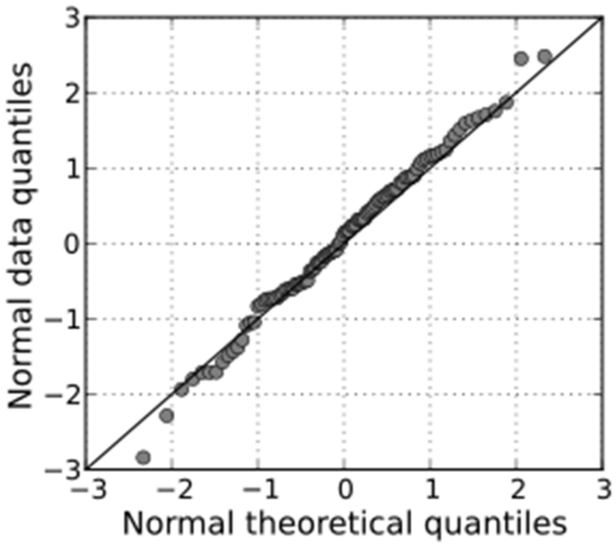
計算變數


計算變數
目標變數(T)：
prob
=
數值表示式(E)：
CDF.NORMAL(x,0,1)
類型和標籤(L)...
x
函數群組(G)：
全部
算術
CDF 與非集中 CDF
轉換
目前日期/時間
日期算術
建立日期
刪除
函數與特殊變數(F)：
Cdf.Laplace
Cdf.Lnormal
Cdf.Logistic
Cdf.Negbin
Cdf.Normal
Cdf.Pareto
Cdf.Poisson
Cdf.Smod
Cdf.Srange
Cdf.T
CDF.NORMAL(quant, mean, stddev)。數值。傳回數值小於量的累積機率，該數值來自帶有指定平均數與標準差的常態分配。
若(I)...
(可省略觀察值選擇條件)
確定
貼上(P)
重設(R)
取消
說明
1
2
3
4
5

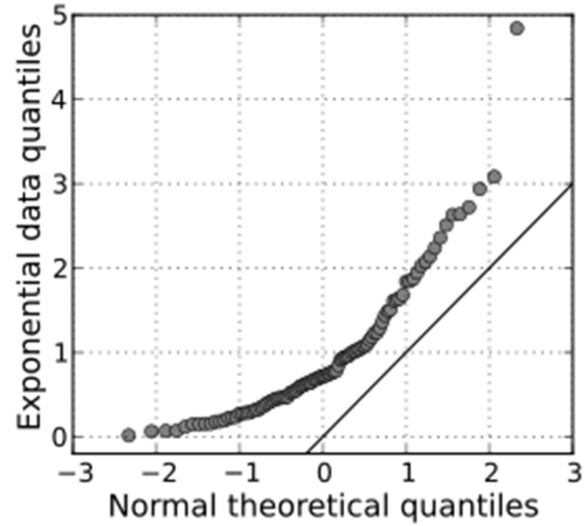
計算變數 – 完成圖

常態分配檢定- Q-Q圖

- Q-Q圖（Q-Q Plot, 全名是 Quantile-Quantile Plot），是一種視覺化比較兩個資料的分佈是否相同的方法。通常是觀測值的百分位數與常態分配的百分位數，如果資料落於直線上（常態分配），則資料呈現常態分配。

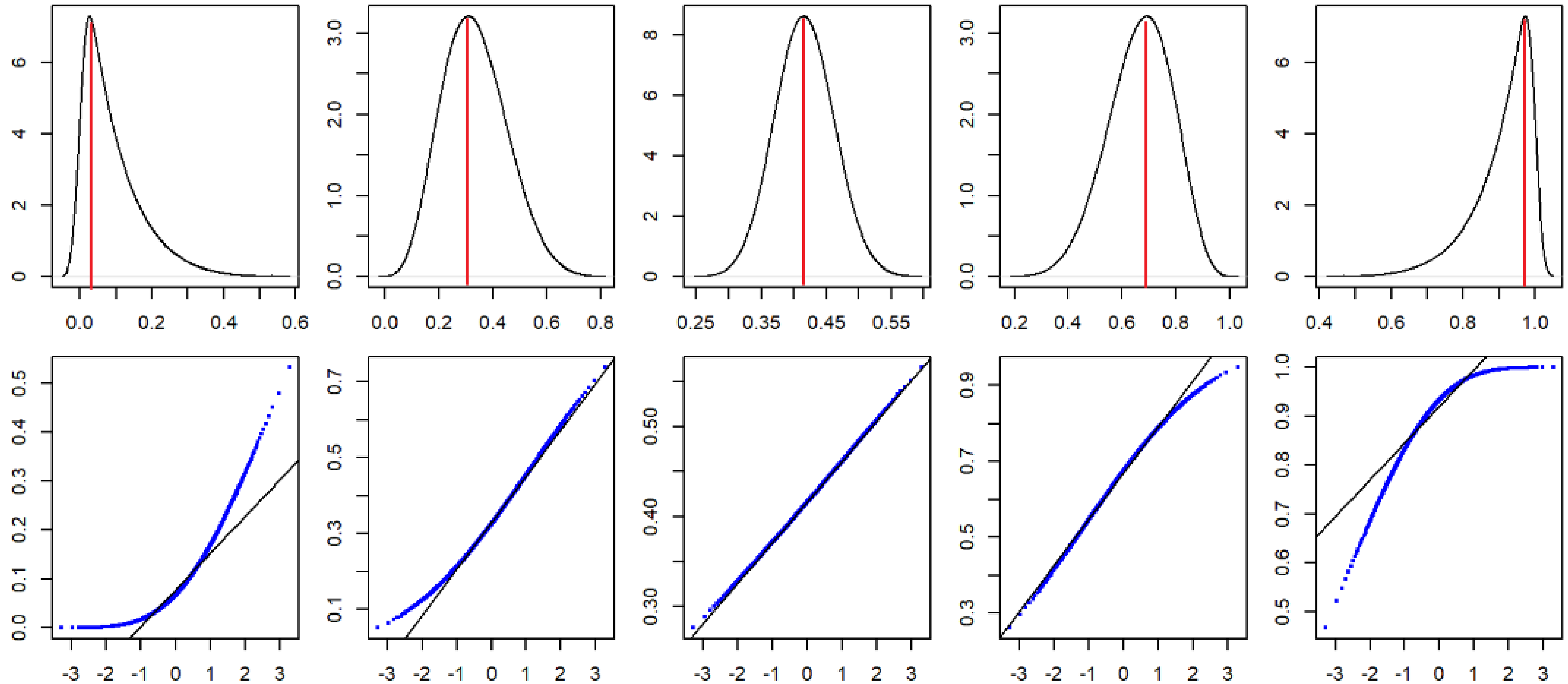


常態分配



非常態分配

Skew vs. q-q plot

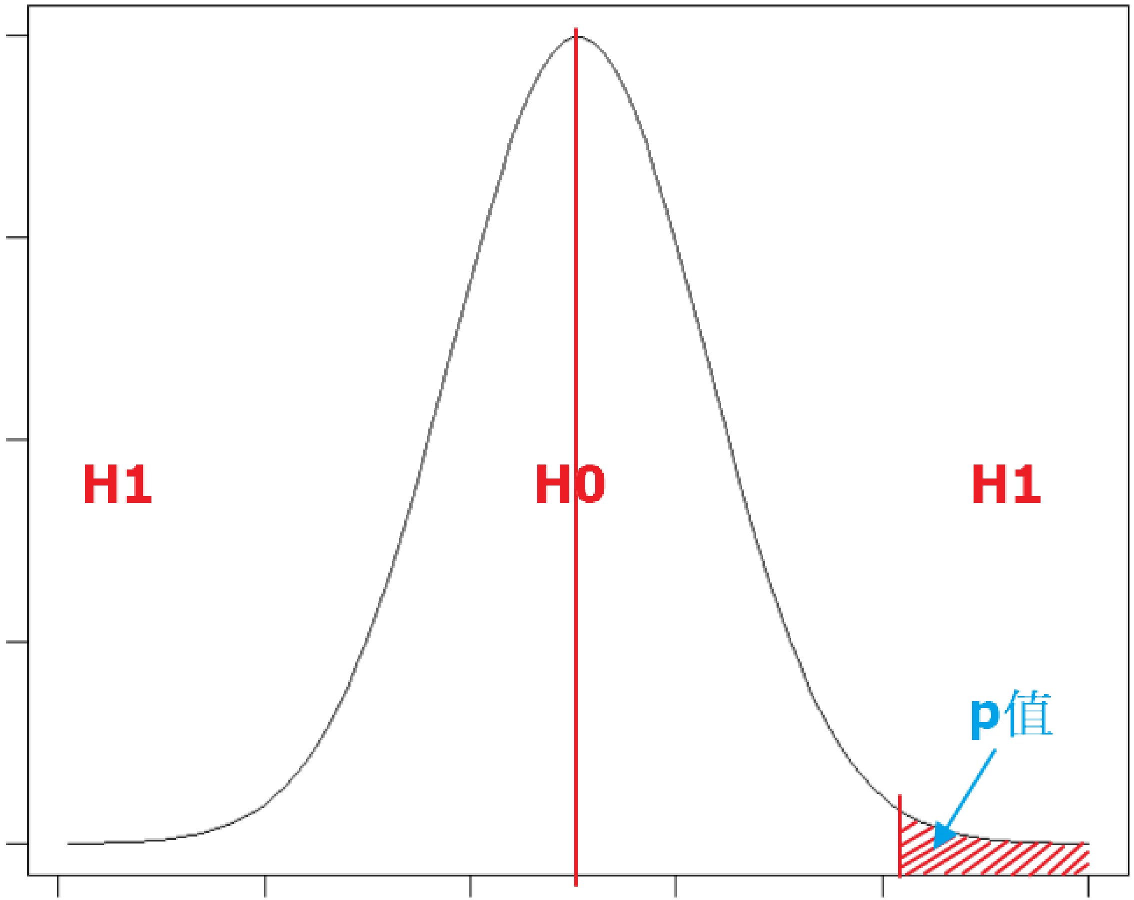


參考: https://mgimond.github.io/ES218/theoretical_qq.html

常態分配檢定- Shapiro-Wilk Test

- Shapiro-Wilk Test：檢定資料是否符合常態分配。
- H_0：X服從常態分配，H_0 虛無假設（Null hypothesis）
- H_1：X不是常態分配，H_1 對立假設（Alternative hypothesis）
- p值 (p-value) 很小時，表示沒有充分證據接受H_0，即拒絕 H_0，接受H_1（X不是常態分配）。
- 一般 p值 < 0.05 則拒絕 H_0，接受H_1。

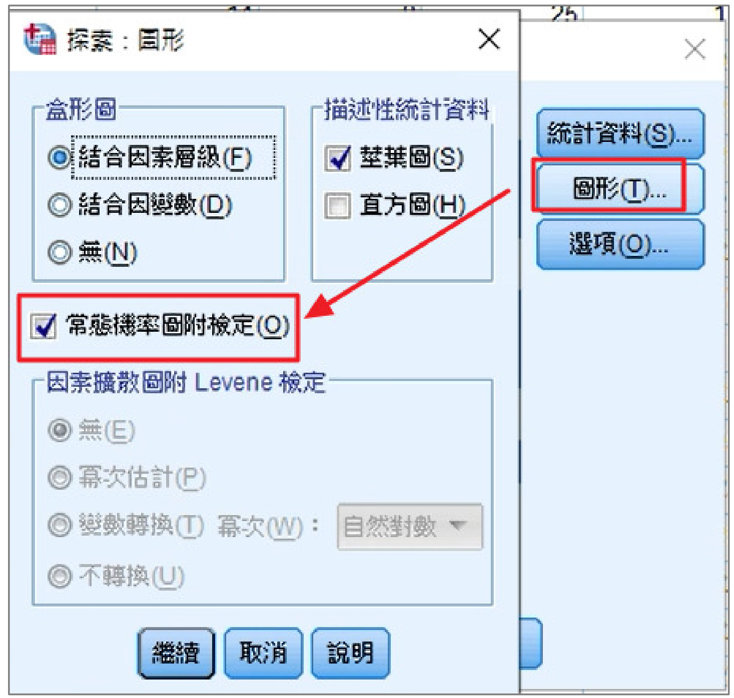
p值



常態分配檢定-SPSS法

練習

- 使用 AQI 資料集練習以下結果
- https://github.com/rwepa/DataDemo/blob/master/aqx_p_434_20200720134939.csv



常態分配檢定 (續)

- 本例 顯著性 0.000 表示小於0.05，因此拒絕 H_0，接受H_1，資料不符合常態分配。

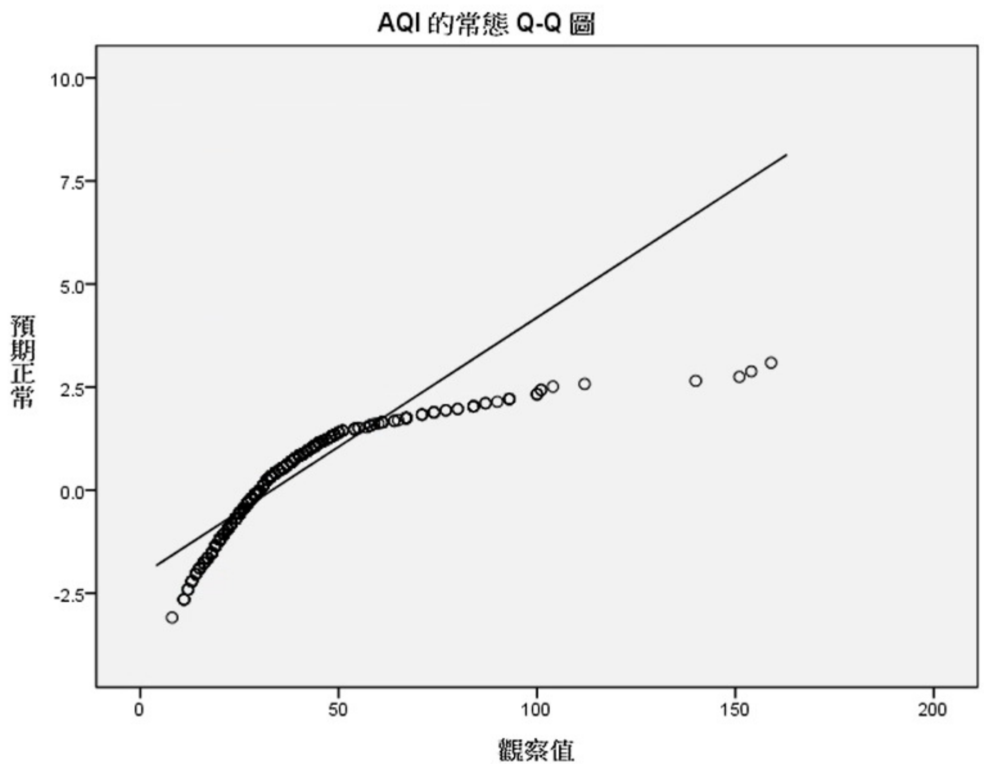
常態檢定

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	統計資料	df	顯著性	統計資料	df	顯著性
AQI	.156	1000	.000	.761	1000	.000

a. Lilliefors 顯著更正

常態分配檢定 (續)

- Q-Q圖的結果計多資料點都不在線上，資料不符合常態分配。



卡方分配

- 假設一組隨機樣本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 取自一常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 之母體，則自由度為 $n-1$ 的卡方分配（chi-square distribution）。

$$R.V.\quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 若k個隨機變數是相互獨立且符合標準常態分配，期望為0且變異數為1，則隨機變數Z的平方和稱為服從自由度為 k 的卡方分配，$X = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$ ，即 $X \sim \chi^2(k)$或 $X \sim \chi_k^2$，機率密度函數為：

$f_k(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}, x \geq 0$, 如果 $x \leq 0$，則 $f_k(x) = 0$， Γ為 $Gamma$ 函數，

$\Gamma(n) = (n-1)!$。

t 分配

- 考慮Z為具有標準常態分配之隨機變數且V為具有自由度 (degree of freedom) v 的卡方分配之隨機變數。若 Z、V 為互相獨立，則稱 T為具有自由度 v 之 t 分配或 Student t 分配 ，一般以 $R.V.T \sim t(v)$ 表示。

$$R.V.T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{v}}}$$

- t-分配其機率密度函數

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi v}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}, \ -\infty < t < \infty$$

3.平均數估計

估計的基本概念

以樣本統計量估計母體參數的兩種方式：

- (一)點估計(point estimation)：
  利用樣本資料求得一個樣本統計量來推估母體參數的統計方法。若母體參數以 θ 表示，則以 $\hat{\theta}$ 表示用來估計母體參數之樣本統計量，此樣本統計量稱為 θ 的點估計量。
- (二)區間估計(interval estimation)：
  利用點估計量 $\hat{\theta}$ 建構一區間 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 來推估母體參數 θ，使得包含於 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 為一特定之機率值，如90%、95% 等，L 表示 Lower bound 下邊界，U 表示 Upper bound 上邊界。

區間估計

- 區間估的目標是建立 $(1-\alpha)\times 100\%$信賴區間。
- 以 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 估計母體參數 θ，若

  $P\left(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right) = 1-\alpha,\ 0<\alpha<1$

  則稱 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 為參數 θ 之 $(1-\alpha)\times 100\%$ 信賴區間。

平均數之區間估計

- (一) 常態母體且 σ^2 已知，則使用常態分配，包括二大項目：
  (1) 母體平均數 μ 之信賴區間
  (2) 估計誤差。
- (二) 常態母體且 σ^2 未知 → t 分配。
- (三) 大樣本可由「中央極限定理」(Central Limit Theorem，CLT) 估計母體平均數 μ 之信賴區間，參考常態母體且 σ^2 已知方法。

CLT: 在許多情況下，對於獨立並具有同樣分配的隨機變數，即使原始變量不是常態分配，標準化樣本均值的抽樣分配也趨向於標準常態分配。

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

(一) 常態母體且 σ^2 已知

- (1)母體平均數 μ 之信賴區間：

  考慮變異數 σ^2 之常態母體隨機抽取一組樣本個數為 n 之樣本，令 $\bar{x}$ 為其樣本平均數，則母體平均數 μ 之 $(1-\alpha)\times 100\%$ 信賴區間為

$$\left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

(一) 常態母體且 σ^2 已知 (續)

- (2)估計誤差：

  由變異數 σ^2 之常態母體隨機抽取一組樣本個數為 n 之樣本，令 $\bar{x}$ 為其樣本平均數，則當我們以 $\bar{x}$ 估計母體平均數 μ 時，在

  $(1-\alpha)\times 100\%$ 的信賴水準下，其抽樣誤差不超過 $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

範例：平均數之區間估計且σ^2 已知

- 產品重量的標準差為5公克，隨機抽取16件產品，其平均重量為60公克。此產品平均重量之95%及99%信賴區間為何？且以樣本平均數估計母體平均數之最大誤差為何?
- 【解】

(1) 95%信賴區間為

$$\boxed{[60 - 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{16}},\quad 60 + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{16}}] = [57.55,\quad 62.45]}$$

$\bar{x}$ 估計 μ 之最大誤差為

$$1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{16}} = 2.45$$

(2) 99%信賴區間為

$$\boxed{[60 - 2.575 \cdot \frac{5}{\sqrt{16}},\quad 60 + 2.575 \cdot \frac{5}{\sqrt{16}}] = [56.78,\quad 63.22]}$$

$\bar{x}$ 估計 μ 之最大誤差為

$$2.575 \cdot \frac{5}{\sqrt{16}} = 3.22$$

(二) 常態母體且 σ^2 未知

- 母體平均數 μ 之區間估計：若由未知變異數之常態母體隨機抽取一組樣本個數為 n 之樣本，令 $\bar{x}$ 、s 分別為其樣本平均數與標準差，則母體平均數 μ 之 $(1-\alpha)\times 100\%$ 信賴區間為

$$\left[\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

範例：平均數之區間估計且σ^2 未知

- 隨機抽取9瓶飲料作檢查，其內容量分別為98、101、102、104、99、98、100、102及96公克，請問飲料平均內容量之95%信賴區間為何？且以樣本平均數估計母體平均數之最大誤差為何？
- 【解】

$$\bar{x} = 100,\ s^2 = 6.25,\ \text{即}\ s = 2.5$$

$$\text{查表}\ t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(9-1) = 2.306$$

95%信賴區間為 $\boxed{[100 - 2.306 \times \frac{2.5}{\sqrt{9}},\quad 100 + 2.306 \times \frac{2.5}{\sqrt{9}}] = [98.08,\quad 101.92]}$

以 $\bar{x}$ 估計 μ 之最大誤差為 $2.306 \cdot \frac{2.5}{\sqrt{9}} = 1.92$

謝謝您的聆聽

Q & A

李明昌

alan9956@gmail.com

http://rwepa.blogspot.tw/