14. Teoria e Prática - Programação e Estruturas de Dados II

Revisão:

Problema 1

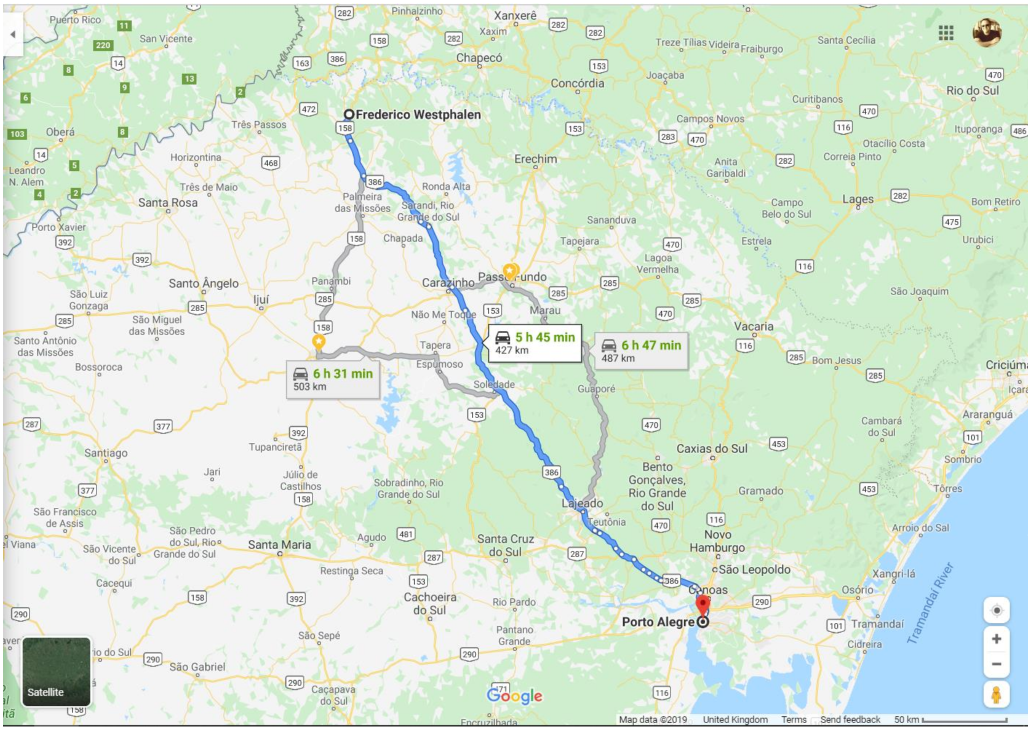
Implementar, em C, os procedimentos

```
void GRAPHremoveArc(Graph G, vertex v, vertex w);
void GRAPHshow(Graph G);
void GRAPHshowAll(Graph G);
```

para o programa `ListaDeAdjacências.c` conforme feito em `MatrizDeAdjacências.c`. Este material foi dado na Aula 12!

Problema 2

Dado o programa `Dijkstra.c`, implementar uma versão que calcule a distância entre as cidades de FW e Porto Alegre, considerando as rotas em azul e cinza, mostradas no mapa abaixo. O programa deve também informar a rota que passa por menos cidades e a rota com menor km.



Enviar o que for possível para rodrigodevit@inf.ufsm.br até 22:30h de 06/11/19; o restante pode ser enviado até a próxima aula.

REVISAR OS EXERCÍCIOS DOS VÍDEOS DA AULA 13!

Matriz de incidência

[ocultar]

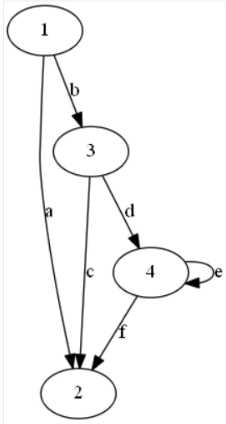
Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Uma **matriz de incidência** representa computacionalmente um grafo através de uma matriz bidimensional, onde uma das dimensões são vértices e a outra dimensão são arestas.

Dado um grafo G com *n* vértices e *m* arestas, podemos representá-lo em uma matriz *n* x *m* M. A definição precisa das entradas da matriz varia de acordo com as propriedades do grafo que se deseja representar, porém de forma geral guarda informações sobre como os vértices se relacionam com cada aresta (isto é, informações sobre a *incidência* de uma aresta em um vértice[1]).

Para representar um grafo sem pesos nas arestas e não direcionado, basta que as entradas da matriz M contenham 1 se a aresta incide no vértice, 2 caso seja um laço (incide duas vezes) e 0 caso a aresta não incida no vértice.

Por exemplo, a matriz de incidência do grafo ao lado é representada abaixo:



	a	b	c	d	e	f
1	1	1	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	2	1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ver também [editar | editar código-fonte]

- Teoria dos grafos
- Matriz de adjacência
- Lista de adjacência

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_incid%C3%AAncia

Exemplo de aplicação

As pontes de Königsberg.

O problema das pontes de Königsberg é um problema antigo que foi resolvido por Euler, com a criação da teoria dos grafos. O problema é o seguinte. Considerando um rio com duas ilhas e 7 pontes como ilustrado na figura 2, é possível identificar um caminho que atravesse todas as pontes uma vez só e que retorne ao ponto de partida?

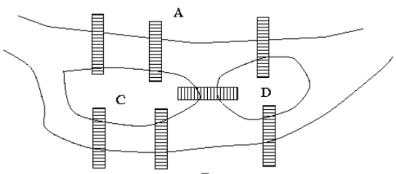


Figura 2

Para resolver esse problema, Euler o representou com o grafo ilustrado na figura 3. Com essa representação, e considerando as propriedades do grafos que serão apresentadas mais tarde nesse curso, é possível resolver facilmente esse problema.

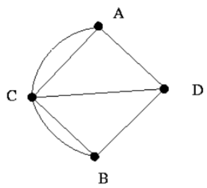


Figura 3

Para que dois grafos sejam isomorfos, no mínimo essas condições tem que ser respeitadas:

1. Os dois têm o mesmo número de vértices.
2. Os dois têm o mesmo número de arestas.
3. Os dois têm o mesmo número de vértices de grau *n*, para qualquer valor *n* entre 0 e o número de vértices que o grafo contém.
4. Respeito à matriz de incidência.
5. Em teoria dos grafos, um **isomorfismo dos grafos** *G* e *H* é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de *G* e *H*

$$f \colon V(G) \to V(H)$$

de tal forma que quaisquer dois vértices *u* e *v* de *G* são adjacentes em *G* se e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em *H*.

Isomorfismo de grafos

[ocultar]

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Em teoria dos grafos, um **isomorfismo dos grafos** G e H é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G e H

$$f: V(G) \to V(H)$$

de tal forma que quaisquer dois vértices u e v de G são adjacentes em G se e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H. Este tipo de bijeção é comumente chamado de "bijeção com preservação de arestas", de acordo com a noção geral de isomorfismo sendo uma bijeção de preservação-de-estrutura.

Na definição acima, os grafos são entendidos como grafos grafos não dirigidos, não-rotulados e não ponderados. No entanto, a noção de isomorfismo pode ser aplicada a todas as outras variantes da noção de grafo, somando os requisitos necessários para preservar os elementos adicionais correspondentes da estrutura: as direções do arco, os pesos das arestas, etc, com a seguinte exceção. Quando se fala em rótulo com *rótulos exclusivos*, geralmente tirados do intervalo inteiro 1 ,...,n, onde n é o número dos vértices do grafo, dois grafos rotulados são ditos isomórficos se os grafos subjacentes correspondentes não rotulados são isomórficos.

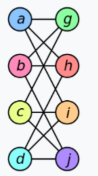
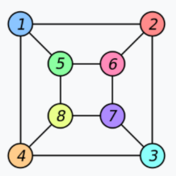
Se um isomorfismo existe entre dois grafos, então os grafos são chamados de **isomorfos** e nós denotamos por $G \simeq H$. No caso, quando a bijeção é um mapeamento de um grafo em si mesmo, ou seja, quando G e H são um e o mesmo grafo, a bijeção é chamada de automorfismo de G.

O isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência em grafos e, como tal, particiona as classes de todos os grafos em classes de equivalência. Um conjunto de grafos isomorfos entre si é chamado de **classe de isomorfismo de grafos**.

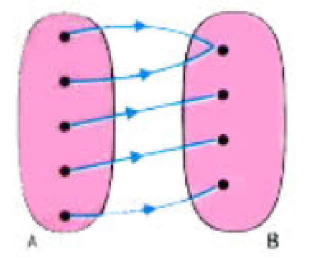
Índice [esconder]

Exemplo [editar | editar código-fonte]

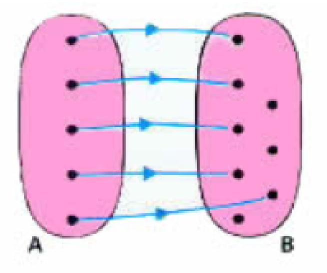
Os dois grafos abaixo são isomorfos, apesar de suas representações diferentes.

Grafo G	Grafo H	Um isomorfismo entre G e H
		$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$

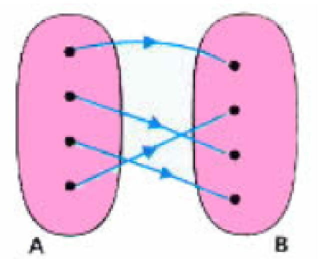
Resumindo, observe os diagramas abaixo:



- Essa função é **sobrejetora**, pois não sobra elemento em B.
- Essa função não é injetora, pois existem dois elementos com mesma imagem.
- Essa função não é bijetora, pois não é injetora.



- Essa função é **injetora**, pois elementos de B são “flechados” só uma vez.
- Essa função não é sobrejetora, pois existem elementos sobrando em B.
- Essa função não é bijetora, pois não é sobrejetora.



- Essa função é injetora, pois elementos de B são “flechados” só uma vez.
- Essa função é sobrejetora, pois não existem elementos sobrando em B.
- A função é **bijetora**, pois é injetora e sobrejetora.

Isomorfismo

Dois grafos $G_1(V_1,E_1)$ e $G_2(V_2,E_2)$ são ditos *isomorfos entre si* se existe uma correspondência entre os seus vértices e arestas de tal maneira que a relação de incidência seja preservada. Em outros termos, temos $|V_1|= |V_2|$ e existe uma função unívoca f: V_1-->V_2, tal que (i,j) é elemento de E_1 se e somente se (*f*(i),f(j)) é elemento de E_2. Eis alguns exemplos de grafos isomorfos:

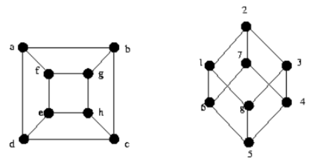


Figura 5

Para ver o isomorfismo dos grafos da figura 5, podemos utilizar a seguinte função:

f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 8, f(e) = 5, f(f) = 6, f(g) = 7, f(h) = 4.

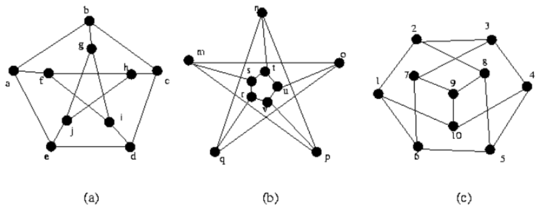


Figura 6

Para ver o isomorfismo dos grafos 6(a) e 6(b), utilize a seguinte função:

f(a) = s, f(b) = t, f(c) = u, f(d) = v, f(e) = r, f(f) = m, f(g) = n, f(h) = o, f(i) = p, f(j) = q

Para ver o isomorfismo dos grafos 6(a) e 6(c), utilize a seguinte função:

f(a) = 1, f(b) = 10, f(c) = 4, f(d) = 5, f(e) = 6, f(f) = 2, f(g) = 9, f(h) = 3, f(i) = 8, f(j) = 7.

Esses exemplos devem ser suficientes para mostrar que não é sempre fácil determinar se dois grafos são isomorfos. Não existe atualmente um algoritmo eficiente para resolver esse problema. Poderiamos tentar todas as permutações possível, mas isso daria um algoritmo de complexidade em O(n!). Para que dois grafos sejam isomorfos, no mínimo essas condições tem que ser respeitadas:

1. Os dois têm o mesmo número de vértices.
2. Os dois têm o mesmo número de arestas.
3. Os dois têm o mesmo número de vértices de grau *n*, para qualquer valor *n* entre 0 e o número de vértices que o grafo contém.

Note que isso não é suficiente par que sejam isomorfos. Por exemplo, os grafos da figura 7 respeitam essas condições e não são isomorfos.

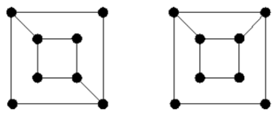


Figura 7

Mesmo se ambos grafos são regulares de grau *k*, as condições acima não são suficientes para concluir que eles são isomorfos. Veja o exemplo da figura 7'. É muito fácil ver que eles não são isomorfos apesar de que os dois são regulares de grau 3.

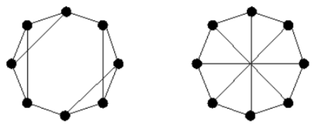


Figura 7'

Caminho

Um caminho em um grafo G = (V,E) é uma seqüência de vértices $v_1,\ldots,v_n$, tal que (v_i,v_{i+1}) é um elemento de E, para $1 \leq i < n-1$. Essa seqüência é dita um *caminho de v_1 a v_n*. Um caminho que não passa duas vezes pelo mesmo vértice é um *caminho simples (ou elementar)*. Um caminho que não contém duas vezes a mesma aresta é um *trajeto*. Note que essa definição de caminho funciona realmente somente com grafo simples.

No grafo ilustrado na figura 9, a seqüência [a,e,f,c] é um caminho simples e também um trajeto. A seqüência [a,e,b,a,d] é um trajeto mas não um caminho simples.

Um caminho onde o primeiro vértice da seqüência é igual ao último é um *circuito*, se todas as arestas são distintas. Se além disso, não há vértice repetido no circuito, digamos que ele é um *ciclo*. Na figura 9, a seqüência [a,b,c,f,e,a] é um ciclo: nenhum vértice se repete, com a exceção dos primeiro e último. Um exemplo de circuito que não é um ciclo é a seqüência [a,b,d,a,c,e,a] do grafo completo da figura 11.

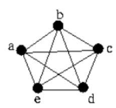


Figura 11

Grafo conexo

Um grafo G = (V,E) é conexo quando existe um caminho entre cada par de V. Caso contrário o grafo é *desconexo*. Um grafo é *totalmente desconexo* quando não existe nenhuma aresta. A representação gráfica dum grafo desconexa contém no mínimo dois "pedaços". A figura 12 ilustra um grafo desconexo. Cada "pedaço" de um grafo é chamado *componente conexo*. O grafo da figura 12 tem 2 componentes conexos.

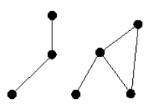


Figura 12

Teorema 1-4: *Se um grafo (conexo ou desconexo) contém exatamente dois vértices de grau impar, existe um caminho ligando esses dois vértices.*

Prova: Seja G um grafo onde todos os vértices são de grau par, exceto os vértices v_1 e v_2. Segundo o teorema 1-2, não existe um grafo (ou um componente) que tem um número impar de vértices que possuem grau impar. Então v_1 e v_2 devem pertencer ao mesmo componente, e deve existir um caminho entre eles.

Grafo bipartite

Um grafo bipartite é um grafo G = (V,E) cujo conjunto de vértices V pode ser separado em dois conjuntos X e Y, tal que toda aresta de E liga somente vértices de X com vértices de Y.

A figura 13a ilustra um grafo bipartite. Isso fica evidente se consideramos o grafo 13b que é isomorfo.

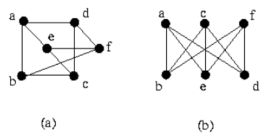


Figura 13

Existe um teorema interessante em relação ao grafo bipartite:

Teorema 1-5: *Um grafo G é bipartite se e somente se todo ciclo de G possuir comprimento par.*

Prova:

Ida: Seja X e Y as duas partições de G. Todo caminho em G alterna um vértice de X com um vertice de Y. Isso é a conseqüência da definição de grafo bipartite. Supondo que um ciclo contém um vértice v_i em uma das duas partições. Para voltar a esse vértice, é preciso ir na outra partição e voltar um número par de vezes.

Volta: Seja G um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice v_i de G. Colocamos num conjunto X o vértice v_i e todos os outros que são a uma distância par de v_i. Os outros vértices formam o conjunto Y. Se não tivesse nenhuma aresta ligando dois vértices de X ou dois vértices de Y, respeitariamos as condições para que o grafo seja bipartite. Suponhamos agora que existe uma outra aresta entre dois vértices *a* e *b* de X (ouY). Já temos um caminho par entre *a* e *b*. Acrescentando a nova aresta, obteriamos um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto, nõa pode existir outra aresta entre qualquer par de vértice que já está em X (igualmente par Y) e o grafo é bipartite.

Note que essa prova indica de maneira direta qual seria o algoritmo par determinar se um grafo é bipartite ou não.

A noção de grafo completo pode ser extendido aos grafos bipartites. Um **grafo bipartite completo** é um grafo onde todos os vértices da partição X é ligado por uma aresta a todos os vértices da partição Y. Seja *m* e *n* o número de vértices em X e Y, respectivamente, o grafo completo bipartite sera denotado $K_{m,n}$. Por exemplo, o grafo da figura 13b é $K_{3,3}$.

Grafo direcionado

Um grafo G = (V,E) é um conjunto não-vazio V, cujos elementos são chamados *vértices*, e um conjunto E de *arestas*. Uma aresta é um par ordenado (v_j,v_k). Diz-e que cada aresta (v_j,v_k) possui uma única direção de v_j para v_k. Também a aresta (v_j,v_k) e dita *divergente* de v_j e *convergente* a v_k. O número de arestas divergentes e convergentes de um vértice são chamados *grau de saída* e *grau de entrada*, respectivamente. A figura 14 ilustra um exemplo de grafo direcionado.

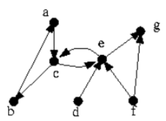


Figura 14

V = {a,b,c,d,e,f,g}
E = {(a,c),(c,b),(b,a),(c,e),(e,c),(d,e),(e,g),(f,g),(f,e)}

Teorema 1-6: *A soma dos graus de saída (de entrada) de um grafo direcionado é igual ao número de arestas no grafo.*

É muito fácil se convencer do teorema 1-6, considerando que cada aresta contribui exatamente para um grau de entrada e um grau de saída.

O grafo obtido substituindo cada aresta de um grafo direcionado G por uma aresta não direcionada é chamado **grafo subjacente** de G. a figura 14' ilustra o grafo subjacente do grafo da figura 14.

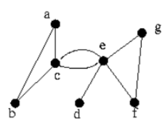


Figura 14'

A noção de isomorfismo pode ser extendida aos grafos direcionados. Nesse caso, devemos tomar cuidado para considerar também a orientação das arestas. Por exemplo, o grafo (a) da figura 14" é isomorfo ao grafo (b) mas não ao grafo (c).

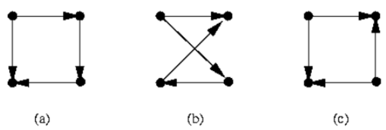


Figura 14"

Um grafo é **conexo** se o seu grafo subjacente é conexo. Intuitivamente isso corresponde à característica do grafo constituir um pedaço só. Um grafo direcionado onde existe um caminho entre qualquer par de vértices é dito **fortemente conexo**.

Um problema interessante é saber se um grafo não direcionado pode ser transformado em grafo fortemente conexo, trocando cada aresta por uma aresta orientada. Sabendo que uma *ponte* é uma aresta que torna um grafo desconexo se ela for retirada, temos um teorema interessante nesse respeito:

Fonte: http://www.inf.ufpr.br/andre/Disciplinas/BSc/CI065/michel/Intro/intro.html#Iso

Propriedades de uma função

Implementar a lista de exercícios resolvidos e **REVISAR OS EXERCÍCIOS DOS VÍDEOS DA AULA 13!**