Kriterien zur Bestimmung der Definitheit von Matrizen

Betrachtung der quadratischen Form $\vec{x}^t \cdot A \cdot \vec{x}$: A ist eine symmetrische Matrix

(a) A ist **positiv definit** $\Leftrightarrow$ $\vec{x}^t \cdot A \cdot \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$

(b) A ist **positiv semidefinit** $\Leftrightarrow$ $\vec{x}^t \cdot A \cdot \vec{x} \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x}^t \neq \vec{0}$

(c) A ist **negativ definit** $\Leftrightarrow$ $\vec{x}^t \cdot A \cdot \vec{x} < 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$

(d) A ist **negativ semidefinit** $\Leftrightarrow$ $\vec{x}^t \cdot A \cdot \vec{x} \leq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$

(e) A ist **indefinit** $\Leftrightarrow$ Es gibt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x}^t \cdot A \cdot \vec{x} > 0$ und $\vec{y}^t \cdot A \cdot \vec{y} < 0$

Eigenwerte:

Die Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A sind die Lösungen $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$ der Polynomgleichung

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

Ist A eine symmetrische Matrix, so sind alle Eigenwerte reell und es gilt:

(a) A ist **positiv definit** $\Leftrightarrow$ $\lambda_i > 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

(b) A ist **positiv semidefinit** $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

(c) A ist **negativ definit** $\Leftrightarrow$ $\lambda_i < 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

(d) A ist **negativ semidefinit** $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \leq 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

(e) A ist **indefinit** $\Leftrightarrow$ Es gibt positive und negative Eigenwerte

Hauptminoren:

Für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A definieren wir die führenden Hauptminoren $\Delta_1,\ \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ durch

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots, \quad \Delta_n = \det A$$

(a) A ist **positiv definit** $\Leftrightarrow\ \Delta_i > 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

(b) A ist **negativ definit** $\Leftrightarrow\ (-1)^i \Delta_i > 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

(c) $\Delta_i > 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\Delta_n = 0 \ \Rightarrow\ A$ ist **positiv semidefinit**

(d) $(-1)^i \Delta_i > 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\Delta_n = 0 \ \Rightarrow\ A$ ist **negativ semidefinit**

(e) $\Delta_n \neq 0$ aber weder (a) noch (b) treffen zu $\Rightarrow A$ ist **indefinit**

(f) $\Delta_k < 0$ für eine gerade Zahl $k \Rightarrow A$ ist **indefinit**

(g) $\Delta_k > 0$ und $\Delta_\ell < 0$ für zwei ungerade Zahlen k und $\ell \Rightarrow A$ ist **indefinit**

(h) Die Matrix A hat mindestens ein positives und mindestens ein negatives Diagonalelement $\Rightarrow A$ ist **indefinit**

Mit den Hauptminorenkriterien (a) und (b) können alle positiv definiten und alle negativ definiten Matrizen erkannt werden.
Die Bedingungen (c) bis (g) sind nur hinreichende Bedingungen. Es gibt z.B. positiv semidefinite Matrizen, die die Voraussetzung in (c) nicht erfüllen. Genauso gibt es indefinite Matrizen, die keine der Voraussetzungen (e)-(h) erfüllen.
Wenn es nicht gelingt, mit führenden Hauptminoren eine Aussage über die Definitheit einer Matrix anzugeben, so kann man Eigenwerte berechnen.
Kennt man alle Eigenwerte einer Matrix, so kann man die Definitheit immer angeben.