Differentialgleichungen

Bsp.: $F_a = -F_G$

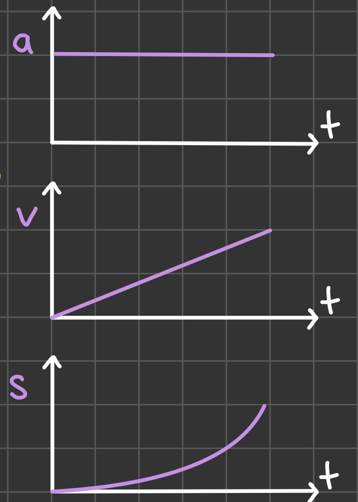
$m \cdot a = -m \cdot g$

$a = -g$

$\uparrow F_a$, m, $\downarrow F_G$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = s'' = -g \quad \text{diff. gl.}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = s' = \int -g\,dt = -gt + c \quad (c = v_0)$$



Freier Fall ohne Luftwiderstand $\quad c = s(0) = s_0$

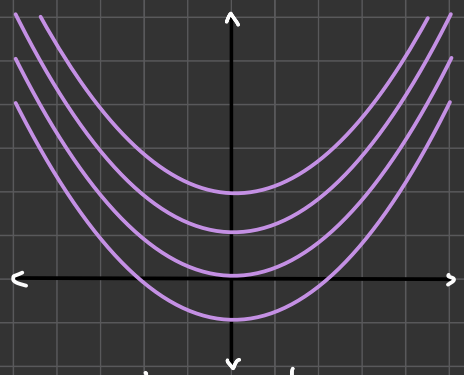
$$s(t) = \int (-g \cdot t + v_0)\,dt = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + c \rightarrow s(t) = -\frac{g}{2} + v_0 t + s_0 \rightarrow \text{Lsg.}$$

Eine Gleichung der Form $f(x, y, y', y'', \ldots)$, in der neben einer Funktion $y = f(x)$, auch Ableitungen der Funktion vorkommen, heißt gewöhnlich Differenzialgleichung.
Die Ordnung der höchsten Ableitung heißt Ordnung der Differentialgleichung.

Bsp.: $y' = 2x$

$$y = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

Kurvenschar



weitere Angabe: z.B $P(1|2)$ soll Teil der Lösung sein.

$2 = 1 + c \rightarrow c = 1$

$y = x^2 + 1$ ..... speziellere Lösung

Die zusätzlichen Angaben nennt man: $\rightarrow$ Die Aufgaben nennt man dann:

- > Anfangswerte (für $t=0$ oder $x=0$) bzw.
- > Randwerte (für $t \neq 0$ oder $x \neq 0$)

- > Anfangswertaufgabe bzw.
- > Randwertaufgaben

Bsp.: $y'' + x = 1 \rightarrow y'' = 1 - x \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$

$$y' = \int (1 - x)\,dx = x - \frac{x^2}{2} + c_1 \rightarrow y'(0) = 2 = 0 - \frac{0}{2} + c_1 \rightarrow c_1 = 2$$

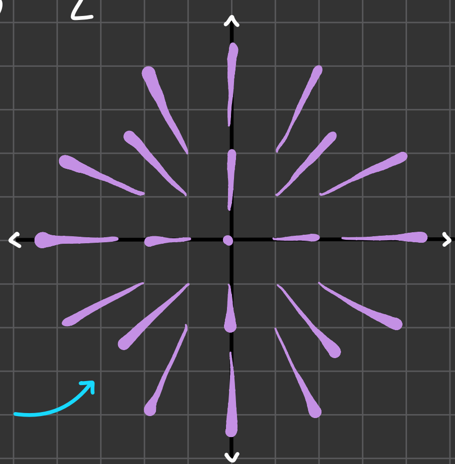
$$y = \int \left(x - \frac{x^2}{2} + 2\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 2x + c_2 \rightarrow y(0) = 1 = -\frac{0^3}{6} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + c_2 \rightarrow c_2 = 1$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$

[Partikuläre / Spezielle] Lösung: $y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 2x + 1$

Durch Anfangswerte für y' & y ergeben sich erst Punkt und Steigung.

Lösung der Differenzialgleichung, heißt suchen einer Kurve, die z. B. durch Punkt- und Linienelement gegeben ist.



WHD Differenzenquotient → Steigung im Intervall $k = \Delta y : \Delta x$ → mittlere Änderungsrate
Differenzialquotient → Steigung im „Punkt" $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y : \Delta x$ → Steigung → Ableitung

HÜ: 3.8 ; 3.9 b,c,e ; 3.10 b

3.14 Ermittle die Funktion f, die für x > 0 wie folgt definiert ist:
A B (1) Die Steigung ihrer Tangente in jedem Punkt (x | y) ihres Graphen ist gleich der Wurzel aus der x-Koordinate des Punktes.
(2) Außerdem ist $\left(1 \middle| \frac{2}{3}\right)$ ein Punkt ihres Graphen.

1 $f'(x) = \sqrt{x}$ 2 $f(1) = \frac{2}{3}$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sqrt{x} \quad \Big| \cdot dx \rightarrow df(x) = x^{\frac{1}{2}} dx \quad \Big| \int \rightarrow f(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$f(1) = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} + c \quad \Big| -\frac{2}{3} \rightarrow c = 0 \quad \rightarrow f(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

3.15 Ein Intercity-Express (ICE) setzt sich aus dem Stillstand mit einer mittleren Beschleunigung von 0,5 m/s² in Bewegung.
A B C
a) Stelle die Differentialgleichung für die Weg-Zeit-Funktion s dieser Bewegung während der Dauer der Beschleunigung auf. Ermittle ihre allgemeine Lösung.
b) Gib nun die spezielle Lösung der Differentialgleichung aufgrund der gegebenen Anfangsbedingungen an.
c) Ermittle die Zeitdauer und die Länge der Fahrstrecke bis zum Erreichen einer Geschwindigkeit von 200 km/h.

$a = 0{,}5 \frac{m}{s^2}$
$v_0 = 0$
$s_0 = 0$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

$$s = \iint a \, dt^2 = \int v \, dt$$

a $s(t) = \iint 0{,}5 \, dt^2 = 0{,}25t^2 + c_1 t + c_2 = 0{,}25t^2 + v_0 t + s_0$

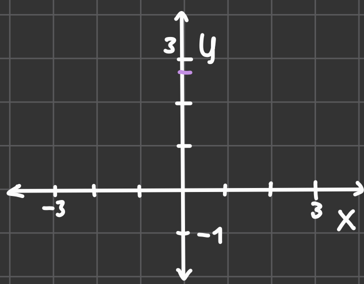
b $0{,}25t^2 + v_0 t + s_0 = 0{,}25t^2 + 0t + 0 = 0{,}25t^2$

c $v(t) = 200 \frac{km}{h} = \frac{500}{9} \frac{m}{s} = \int 0{,}5 \, dt = 0{,}5t \rightarrow t = \underline{\underline{111{,}\dot{1}s}} \rightarrow s(111{,}\dot{1}s) = 0{,}25 \cdot t^2 = \underline{\underline{386m}}$

3.23 Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung im angegebenen Bereich der (x, y)-Ebene für die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten:
B
a) $y' = y, -2 \le x \le 4, -1 \le y \le 5$ b) $y' = x \cdot y, -3 \le x \le 3, -1 \le y \le 3$

$c = e^{c_1 - c_2}$ $y = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c$

b $y' = yx \rightarrow \frac{dy}{dx} = yx \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y} \rightarrow \frac{1}{y} dy = x \, dx \quad \Big| \int \rightarrow \ln(y) + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2$



Neues Lösungsverfahren: DGL 1. Ordnung: Trennen der Variablen

Bsp.: $x + y \cdot y' = 0 \qquad y(4) = 3$

$y \cdot y' = -x$ Trennen $y' = \frac{dy}{dx}$

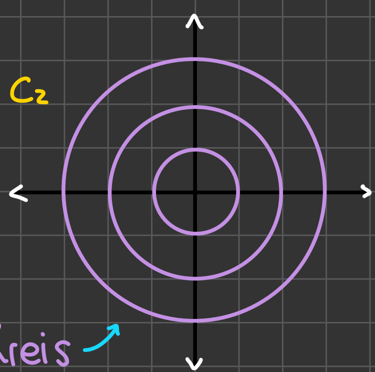
$y \cdot \frac{dy}{dx} = -x$

$y \, dy = -x \, dx \quad \Big| \int$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = -\left(\frac{x^2}{2} + c_2\right) \qquad c_3 = c_1 + c_2$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_3 \quad \Big| \cdot 2 \qquad c_4 = 2 \cdot c_3$$

$y^2 + x^2 = c_4$ (z.B $c_4 = r^2$) → Kreis

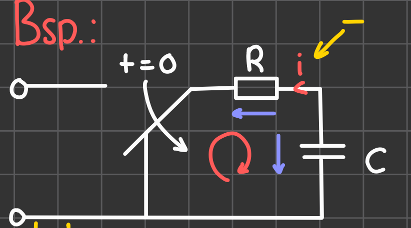


Bsp.: $y'+2y=1 \quad y(0)=3$

$$\frac{dy}{dx}+2y=1 \rightarrow (1-2y)dx=dy \;\Big|:(1-2y) \rightarrow \frac{dy}{(1-2y)}=dx \;\Big|\int \rightarrow \frac{\ln(1-2y)}{2}+c_1=x+c_2$$

$$1-2y=e^{2(c_1+c_2)}\cdot e^{x} \rightarrow y=\frac{c_3\cdot e^{2x}-1}{2}=c_4 e^{2x}-\frac{1}{2}$$

Bsp.:



$$i(t)=\frac{u_c(t)}{R} \rightarrow u_c(t)=-i_c(t)\cdot R \qquad i_c(t)=\frac{dq}{dt}$$

Kondensator wird zur Quelle

$$q(t)=C\cdot u_c(t)=q(t)=-i_c(t)\cdot R\cdot C \qquad R\cdot C=\tau$$

dgl.:

$$q(t)=-\frac{dq}{dt}\cdot R\cdot C \rightarrow \frac{dq}{dt}=-\frac{q}{R\cdot C} \rightarrow \frac{1}{q}dq=-\frac{1}{RC}\cdot dt \;\Big|\int \rightarrow \ln(q)+c_1=-\left(\frac{t}{\tau}+c_2\right) \;\Big|: e^{\uparrow}$$

$$q=e^{c_1+c_2}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}=c_3\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t)=q'=c_3\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left(-\frac{1}{\tau}\right)=c_4 e^{-\frac{t}{\tau}}=\underline{\underline{\frac{U_0}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}}$$

3.36 *Radioaktiver Zerfall:* Ist $N(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Atomkerne einer radioaktiven Substanz, so gilt das folgende Gesetz für den radioaktiven Zerfall: $\frac{dN}{dt}=-\lambda\cdot N(t)$. Dabei ist λ eine positive Materialkonstante, die sogenannte Zerfallskonstante.

B D

a) Die Änderungsrate $\frac{dN}{dt}$ ist in der Differentialgleichung durch den Term $-\lambda\cdot N(t)$ negativ angesetzt. Begründe, warum das so ist.

b) Zu Beobachtungsbeginn $t=0$ s ist N_0 die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne. Damit liegt das Anfangswertproblem $\frac{dN}{dt}=-\lambda\cdot N(t)$ mit $N(0)=N_0$ vor. Zeige, dass das bekannte Gesetz für den radioaktiven Zerfall $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$ Lösung dieses Anfangswertproblems ist.

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda\cdot N(t)$$

$$c=N(0)=N_0$$

[a] pro Zeit, werden es weniger Teilchen

[b] $$\frac{dN}{dt}+\lambda N=0 \rightarrow \frac{1}{N}dN=-\lambda dt \;\Big|\int \rightarrow \ln(N(t))+c_1=-\lambda t+c_2 \;\Big|+c_1 \;\Big| e^{\uparrow} \rightarrow N(t)=e^{\overbrace{c_1+c_2}^{C_3}}\cdot e^{-\lambda t}$$

$$N(t)=N_0 e^{-\lambda t}$$ → exponentieller Zerfall

Schulübung (1)

Lineare DGL 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Eine DGL 1. Ordnung heißt linear, wenn sie in der Form $y' + py = s(x)$ geschrieben werden kann. Der Faktor p heißt Koeffizient der linearen DGL. Ist der Koeffizient eine Konstante, so spricht man von einer linearen DGL 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten. Die im Allgemeinen von x abhängige Funktion $s(x)$ wird oft als Störfunktion bezeichnet. Ist $s(x)=0$ für alle x, heißt die lineare DGL homogen. Sonst inhomogen.

$y' + py = \boxed{s(x)}$ – $s(x)$ ... Störfunktion (Störterm)
p ... Koeffizient

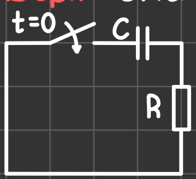
Bsp.:
$y' + x^2 y = 0 \rightarrow$ homogene lineare DGL 1. Ordnung mit nicht konstantem Koeffizienten
$y' + 2y = 1 \rightarrow$ inhomogene lineare DGL 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Neues Lösunsverfahren: Exponentialansatz

$$y' + py = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} + py = 0 \;\Big|\, -py \;\Big|\, : y \;\Big|\, \cdot dx \rightarrow \frac{1}{y}dy = -p\,dx \;\Big|\, \int \rightarrow \ln(y) = -px \;\Big|\, e^{\uparrow}$$

Lösung: $y = c \cdot e^{-px}$

Bsp.: Kondensator entladen



$u_R + u_C = 0 \quad u_R = R \cdot i \quad u_C = \frac{q(t)}{C} \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$

$R \cdot C \cdot \dot{u}_C + u_C = 0 \;\Big|\, : R \cdot C \rightarrow \dot{u} + \frac{1}{R \cdot C} u_C = 0$ Lösung: $u_C = c e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Neues Lösunsverfahren: Exponentialansatz mit Störterm

Die allgemeine Lösung y einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung (oder auch einer höheren) ist als Summe der allgemeinen Lösung y der zugehörigen homogenen DGL und einer beliebigen partikulären (speziellen) Lösung y der inhomogenen DGL darstellbar:

$$\underbrace{y}_{\text{allg. Lsg. inhom. DGL}} = \underbrace{y_H}_{\text{allg. Lsg. hom. DGL}} + \underbrace{y_P}_{\text{spez. Lsg. inhom. DGL}}$$

$y' + yp = s(x)$

exponential Ansatz: y_H
$y' + yp = 0 \rightarrow y_H = e^{-px}$

lineare partikuläre Lösung: y_P
$y_{PA} = a \cdot x + b \rightarrow y_{PA}' = a$
$y_P = a + p(ax + b) = s(x)$

[Je nach Art des Störterms $\rightarrow$ bel. spez. Lsg.]

Störterm $s(x)$	Lösungsansatz für y_P
$s(x) = A$ (konstante Funktion)	$y_P = a$
$s(x) = A \cdot x + B$	$y_P = a x + b$
$s(x) = A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + A_1 \cdot x + A_0$	$y_P = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots\ldots a_1 \cdot x + a_0$

$s(x) = A \cdot \sin(\omega x)$
$s(x) = A \cos(\omega x)$
$s(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$
$s(x) = A \cdot e^{bx}$

$y_P = a \cdot \sin(\omega x) + b \cdot \cos(\omega x)$
oder
$y_P = a \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
$y_P = \begin{cases} a \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -p \\ a \cdot x \cdot e^{bx} & \text{für } b = -p \end{cases}$

Bsp.: lineare inhomogene differentialgleichung mit konstanten Faktor
$y' + 2y = 52 \cdot \sin(3x)$
$\rightarrow y_H = c \cdot e^{-2x}$
$\rightarrow y_P = a \cdot \sin(3x) + b \cdot \cos(3x)$
$\rightarrow y_P' = 3a \cdot \cos(3x) - 3b \cdot \sin(3x)$
$y_P' + 2y_P = 52 \cdot \sin(3x)$
$\rightarrow y_P = 3a \cdot \cos(3x) - 3b \cdot \sin(3x) + 2(a \cdot \sin(3x) + b \cdot \cos(3x)) = 52 \cdot \sin(3x)$
$x = 0: \quad 3a + 2b = 0$
$x = \pi/6: \quad -3b + 2a = 52$
$a = 8$
$b = -12$
$y = y_H + y_P = c \cdot e^{-2x} + 8 \cdot \sin(3x) - 12 \cdot \cos(3x)$ ..... allgemeine Lösung
$y(0) = 0 = c \cdot 1 - 12 \rightarrow c = 12$ .... spezielle Lösung

3.65: Newton'sches Abkühlungs-Gesetz

3.65 NEWTON'sches Abkühlungs- bzw. Erwärmungsgesetz
B C D
(Beispiel 3.48, Seite 55): Eine kleine Metallkugel der Temperatur 20 °C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ s in kochendes Wasser geworfen. Besitzt die Kugel zum Zeitpunkt $t \geq 0$ s die Temperatur $T(t)$ in Grad Celsius, so gilt:
$\frac{dT}{dt} = k \cdot [T(t) - T_U]$ mit $T_U = 100$ °C. k ist eine Konstante.

Zum Zeitpunkt $t = 10$ s beträgt ihre Temperatur 39 °C.
a) Die Kugel erwärmt sich. Erkläre, welches Vorzeichen daraus für die Konstante k folgt.
b) Interpretiere die Differentialgleichung.
c) Löse die Differentialgleichung unter der gegebenen Anfangsbedingung.
d) Ermittle die Temperatur der Kugel zum Zeitpunkt $t = 20$ s.
e) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Kugel die Temperatur 90 °C erreicht.
f) Interpretiere die Lösung als einen beschränkten Wachstumsvorgang.

T_U ... Umgebung t.
T_W ... Ausgangs t.
$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T(t) - T_U)$
$T'(t) = k \cdot T(t) - k \cdot T_U$
$T' - k \cdot T(t) = -k \cdot T_U$

① exp. Lösungsansatz $T_H = e^{-kt} \cdot c$
② prt. Lösung

$T = c \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$

$S(t) = a \quad \rightarrow T_p = a \; ... \; T_U$
$T_p' = 0$
$T'' + k \cdot T = 0 + k \cdot a$

$T(0) = 20°$
$20 = c \cdot 1 + T_U$
$c = 20 - T_U$
$T(t) = (20 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$

3.66 Motorboot

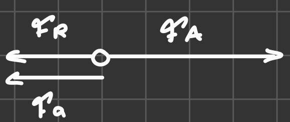
3.66 Ein Motorboot wird mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h abgeschleppt. Zum
B C
Zeitpunkt $t = 0$ s wird das Schlepptau gelöst und der Bootsmotor mit einem Antrieb von 360 N gestartet. Die Gesamtmasse des Boots mit Besatzung beträgt $m = 1\,200$ kg, sein Reibungswiderstand ist $F_R = k \cdot v(t)$ mit $k = 36$ kg/s. Für die Bootsgeschwindigkeit gelte die Differentialgleichung $m \cdot \frac{dv}{dt} = F - k \cdot v(t)$, Zeit t in Sekunden, $v(t)$ in m/s.
a) Bestimme die Bootsgeschwindigkeit eine Minute nach Beginn des Abschleppvorganges.
b) Interpretiere die Lösung als einen beschränkten Wachstumsvorgang.

$F_A = 360\,N$
$F_R = k \cdot v$

$v = 5 \frac{km}{h} = 1{,}38 \frac{m}{s}$

$v \cdot k + m \cdot v' - 360 = 0 \quad /:m$

$v' + k \cdot v = \frac{360}{m}$



$F_R + F_a + F_A = 0$

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

$y'' + py' + qy = s(x) \qquad p, q \in \mathbb{R}$

Allgemeine Lösung y mit exponential Ansatz

$$y_H = c \cdot e^{\lambda x}$$
$$y_H' = c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \qquad \lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda x} + p \cdot \lambda \cdot c \cdot e^{\lambda x} + q \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0 \quad | : ce^{\lambda x}$$
$$y_H'' = c \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

↳ charakteristische Gleichung

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Die Lösung von $\lambda_{1/2}$ ist je nach Art in 3. Fällen zu unterscheiden

3 Fälle

Allgemeine Lösung y einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$:

Mit dem **Exponentialansatz** $y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$ gewinnt man die **charakteristische Gleichung** $\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$. Je nach Art ihrer Lösungen λ_1, λ_2 sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall:	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)	$y_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$
2. Fall:	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ (reell)	$y_h = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda_0 \cdot x}$
3. Fall:	$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j \cdot \omega$ (konjugiert komplex)	$y_h = e^{\sigma \cdot x} \cdot [C_1 \cdot \cos(\omega \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot x)]$

Störterm	Lösungsansatz für y_p
$s(x) = A$ (konstante Funktion)	$y_p = a$
$s(x) = A \cdot x + B$	$y_p = a \cdot x + b$
$s(x) = A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + A_1 \cdot x + A_0$	$y_p = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$
$s(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x)$ $s(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x)$ $s(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x) + B \cdot \cos(\omega \cdot x)$	$y_p = a \cdot \sin(\omega \cdot x) + b \cdot \cos(\omega \cdot x)$ oder $y_p = a \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$ Wenn $j\omega$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = x \cdot [a \cdot \sin(\omega \cdot x) + b \cdot \cos(\omega \cdot x)]$
$s(x) = A \cdot e^{b \cdot x}$	$y_p = a \cdot e^{b \cdot x}$ (wenn b keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist)

Bsp.:

$$y'' + 2y' + y = 2x + 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-1} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$$

2. Fall

$$y = (C_1 + C_2 \cdot x)e^{\lambda x}$$

$$\left.\begin{aligned} y_p &= ax + b \\ y'_p &= a \\ y'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 + 2a + ax + b &= 2x + 1 \\ a(2+x) + b &= 2x + 1 \\ a(2+x) + b - 2x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

für alle x

$\downarrow$

$x = 0$

$x = 1$

$a = 2$
$b = -3$

Lösung
allgemein

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x} + 2x - 3$$

Bsp.: $y'' + 4y' + 3y = 130 \sin(2x) \rightarrow s(x)$

$y_h = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \qquad \lambda_{1/2}: \lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = -3$

1. Fall

$$y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$$

$$y_{p1} = a \cdot \sin(2x) + b \cdot \cos(2x) =$$

$$y'_{p1} = a \cdot \cos(2x) \cdot 2 - b \cdot \sin(2x) \cdot 2 =$$

$$y''_{p1} = -4a \cdot \sin(2x) - 4b \cdot \cos(2x) =$$

$$x = 0 \rightarrow -4b \cdot = 130 \sin(2x)$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow -4a - 0 = 130 \sin(2x)$$

3.80 f

$$y'' + 2y' + 17y = 50\cos(3x)$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0 \qquad \lambda_1 = -1 + 4j$$

$$\lambda_2 = -1 - 1j$$

y_H