

**MTRS-Skriptum**

**4. und 5. Jahrgang**

**Dipl. -Ing. Dr. Andreas Magauer**

**HTBLuVA Salzburg**

1 Schaltungen der Leistungselektronik (S&A) . . . . .	5
1.1 Wechselspannungssteuerung . . . . .	5
1.1.1 Phasenanschnittsteuerung . . . . .	6
1.1.1.1 Ohmsche Last . . . . .	6
1.1.1.2 Ohmsch-Induktive Last . . . . .	6
1.1.2 Vollwellen- oder Schwingungspaketsteuerung . . . . .	7
1.2 Frequenzsteuerung . . . . .	8
1.2.1 Frequenzumrichter . . . . .	9
1.2.1.1 Sinusgeführte PWM-Steuerung . . . . .	10
1.2.1.2 Hysteresebandmethode . . . . .	11
1.2.1.3 Selected Harmonic Elimination . . . . .	12
2 Systeme (SA&SD) . . . . .	14
2.1 Beschreibungsformen . . . . .	15
2.1.1 Geräteplan & Blockdiagramm . . . . .	15
2.1.2 Algebra der Funktionsblöcke . . . . .	16
2.1.3 Definition Linearität . . . . .	17
2.1.4 Testfunktionen . . . . .	18
2.1.5 Zeitbereich . . . . .	19
2.1.6 Frequenzbereich . . . . .	19
2.1.7 Laplace Transformation . . . . .	20
2.1.8 Rechenvorschriften . . . . .	21
2.1.8.1 Ausgewählte Funktionen . . . . .	22
2.1.9 Pol-Nullstellendiagramm . . . . .	23
2.1.10 Klassifizierung von Übertragungsfunktionen . . . . .	23
2.1.11 Anfangs- und Endwerttheorem . . . . .	24
2.1.12 Bode-Knickzüge . . . . .	25
2.1.13 Grundelemente . . . . .	28
2.1.13.1 PT1-Element . . . . .	28
2.1.13.2 DT1-Element . . . . .	29
2.1.13.3 PDT1-Element Lead und Lag . . . . .	29
2.1.13.4 IT1-Element . . . . .	30
2.1.13.5 PI-Element . . . . .	30
2.1.13.6 PD-Element . . . . .	31
2.1.13.7 Totzeit-Element . . . . .	31
2.1.13.8 Allpass . . . . .	32
2.1.13.9 PT2-Element . . . . .	33
2.1.14 Ortskurven . . . . .	34
2.1.15 Regelungsnormalform . . . . .	35
2.1.16 Zustandsraumdarstellung . . . . .	36
2.1.17 Schrittweite für Simulationsprogramme . . . . .	38
3 Analoge Regelungstechnik (RT) . . . . .	40
3.1 Standardregelkreis . . . . .	40
3.2 Regelstrecken . . . . .	41
3.2.1 Theoretische Modellbildung . . . . .	41
3.2.1.1 Spindelgetriebe . . . . .	41
3.2.1.2 Gleichstrommotor . . . . .	42
3.2.1.3 Wasserkessel . . . . .	44
3.2.1.4 Siebglied . . . . .	45

3.2.1.5 Laufkatze	46
3.2.1.6 Tank	48
3.2.2 Identifikation	49
3.2.2.1 Zeitbereich	49
3.2.2.2 Frequenzbereich	52
3.3 Lineare Regler	52
3.3.1 PID-Regler	53
3.4 Der geschlossene lineare Regelkreis	56
3.4.1 Kenngrößen aus der Sprungantwort	57
3.4.2 Stabilität von Regelkreisen	57
3.4.3 Nyquistkriterium	58
3.4.3.1 Darstellung im Bode-Diagramm	59
3.4.4 Stabilitätsgüte	60
3.4.4.1 Amplitudenrand	60
3.4.4.2 Phasenrand	60
3.5 Entwurf und Optimierung von Reglern	61
3.5.1 Betragsoptimum	63
3.5.2 Symmetrisches Optimum	65
3.5.3 Integralkriterien	66
3.5.4 Verfahren nach Ziegler-Nichols	68
3.5.5 Verfahren nach Chien, Hrones und Reswick	69
3.5.6 Entwurfsbeispiele	70
3.5.6.1 Phase Locked Loop	70
3.5.6.2 Laufkatze	75
3.5.6.3 Tank	78
3.6 Erweiterte Regelkreisstrukturen	79
3.6.1 Vorfilter	79
3.6.2 Vorsteuerung	79
3.6.3 Störgrößenaufschaltung	80
4 Digitale Regelungstechnik (RT)	81
4.1 Regelkreis	81
4.1.1 Abtaster	81
4.2 z-Transformation	83
4.2.1 Rechenregeln	85
4.2.2 Korrespondenztabelle	86
4.2.3 Abtaster im z-Bereich	88
4.3 Inverse z-Transformation	92
4.3.1 Partialbruchzerlegung	92
4.3.2 Polynomdivision	93
4.3.3 Rekursive Gleichung	93
4.3.4 Residuensatz	94
4.4 Quasikontinuität	95
4.4.1 Abtastzeit	95
4.4.2 PWM-Signal	96
4.4.3 Shannon versus Praxis	97
4.5 Diskretisierung	97
4.5.1 Integral	98
4.5.1.1 Exakte z-Transformation mit ZOH	100

4.5.2 Differenzial	100
4.5.3 PID-Regler	102
4.6 Diskrete RNF	102
4.7 Stabilität und Dynamik	104
4.7.1 Güte der Stabilität	106
4.7.2 Anti-Aliasing in Regelkreisen	109
4.8 Quasikontinuierlicher Entwurf	109
4.8.1 Diskreter Frequenzgang	110
4.8.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium	114
4.8.3 Takahashi PID-Regler	114
4.9 Zeitdiskreter Entwurf DDC	117
4.9.1 FIR-Prinzip	118
4.9.2 Dead Beat Prinzip	119
5 RDP Themenbereiche	124

## 1 Schaltungen der Leistungselektronik (S&A)

Die Steuerung der Spannung bzw. Leistung an Verbrauchern ist in der Energietechnik besonders unter der Voraussetzung eines hohen Wirkungsgrades umzusetzen. Das Einstellen der Verbraucherspannung kann daher auf keinen Fall durch ein lineares Stellglied (Potenziometer, Längstransistor im Linearbetrieb) erfolgen. Generell wird ein Schaltbetrieb realisiert, wobei die Einschaltzeit das Maß für die Höhe der Verbraucherspannung ist. Die Anforderung an die Steuerung ist es eine variable Gleichspannung, variable Amplitude bzw. Effektivwert einer Wechselspannung oder eine variable Frequenz einer Wechselspannung bereitzustellen. Die Methoden zur verlustarmen Steuerung von Gleichspannungen wie z.B. DC-DC Wandler ist im Lehrplan dem Fach HWE zugeordnet.

### 1.1 Wechselspannungssteuerung

Da das Versorgungsnetz eine 50Hz Sinusspannung liefert und auch die Verbraucher darauf abgestimmt sind, kann die Energiesteuerung nicht direkt durch Rechtecksignale erfolgen. Für einen hohen Wirkungsgrad ist aber ein Schaltbetrieb erforderlich. Die direkte Wechselspannungssteuerung (Effektivwertsteuerung) erfolgt daher als Schaltbetrieb im 50Hz-Netz. Als Leistungsschalter dienen folgende Typen:

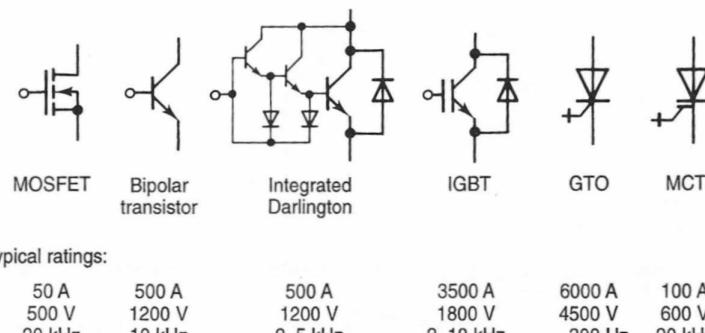


Bild Schaltertypen

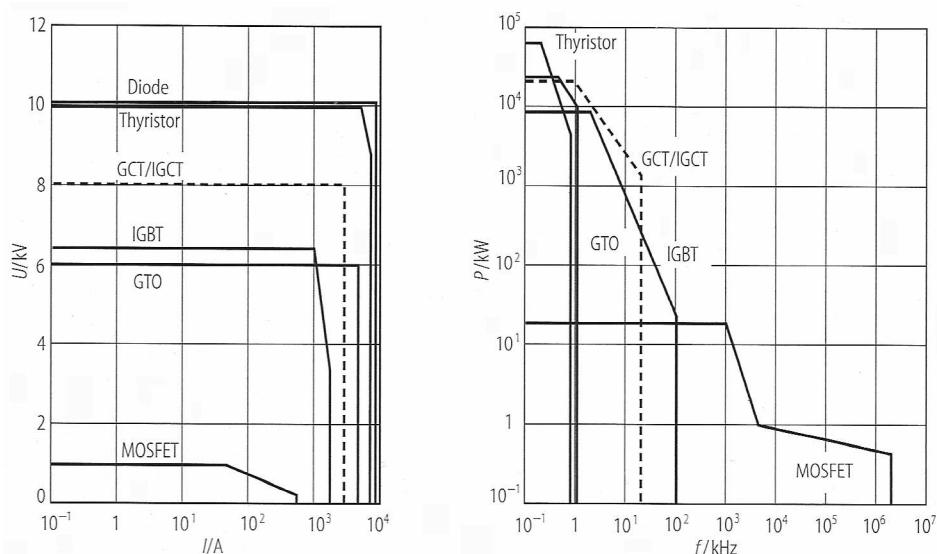


Bild Schalter Diagramme Einsatzbereich

MOSFET	Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor
IGBT	Insulated Gate Bipolar Transistor
GTO	Gate Turn Off Thyristor
MCT	MOS Controlled Thyristor
IGCT	Insulated Gate Controlled Thyristor (=MCT)

### 1.1.1 Phasenanschnittsteuerung

Die Einbeziehung der Netzspannung erlaubt eine wesentliche Vereinfachung der Steuerung. Die Netzspannung wird hierbei immer beginnend bei einem bestimmten Winkel nach dem Nulldurchgang an die Last geschaltet. Dies wird als Phasenanschnitt mit dem Winkel  $\alpha$  bezeichnet.  $\alpha$  heißt auch Zündwinkel. Ziel dabei ist einen vom Steuerwinkel abhängigen Effektivwert der Netzspannung zu erzielen. Es ergibt sich dabei folglich eine stark oberschwingungsbehaftete Lastspannung. Anwendungen für dieses Prinzip sind die Lichtsteuerung (Dimmer), Drehzahlregelung von Einphasenmotoren wie Bohrmaschinen\*), Küchengeräte\*), ... \*) allerdings nur eine Polarität als Halbschwingung wegen der Gleichstrommotoren

#### 1.1.1.1 Ohmsche Last

Spannungsverlauf und Stromverlauf sind bei ohmscher Last ident.

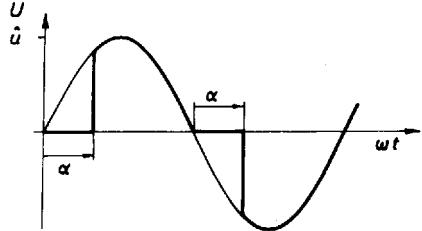


Bild Signal Phasenanschnitt ohmsche Last

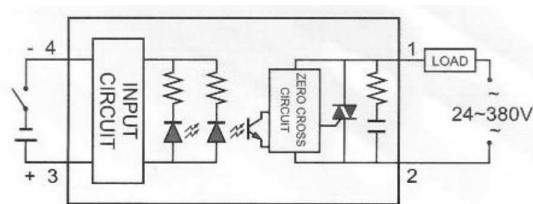


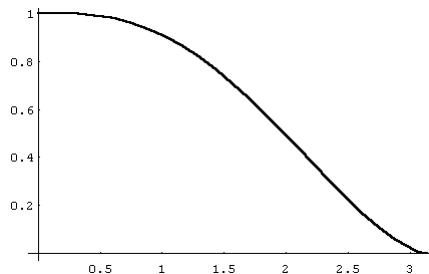
Bild Aufbau SSR (Solid State Relay)

Als Lastschalter dienen meist wegen der einfachen Handhabung Solid State Relays. Der Name kommt aus der Relaistechnik, in der mechanische Teile Verschleiß verursachten und im Gegensatz dieses Festkörperrelais (Solid State) als Halbleiter ausgeführt ohne mechanische Teile auskommt. Der Effektivwert der gesteuerten Spannung in Abhängigkeit des Zündwinkels  $\alpha$  kann ermittelt werden.

$$\begin{aligned} U_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \int_a^{\pi} \hat{U}^2 \cdot \sin^2[\omega t] \cdot d\omega \cdot t} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \hat{U}^2 \cdot \left[ \frac{\omega t}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin[\omega t] \cdot \cos[\omega t] \right]_a^{\pi}} = \\ &= \hat{U} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sin 2\alpha - 2\alpha}{4\pi}} = U_{eff}(\alpha) \text{ und normiert } f(\alpha) = \frac{\sqrt{2} U_{eff}}{\hat{U}} \end{aligned}$$

Achtung:  $\alpha$  muss in rad eingesetzt werden!

Steuerfunktion  $f(\alpha)$  sieht für den möglichen Variationsbereich  $0 < \alpha < \pi$  wie folgt aus :



Mit  $\alpha$  kann demnach der Effektivwert der Spannung zwischen 0 und  $\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$  verändert werden. Die zugehörige Leistung ist für ohmsche Belastung proportional dem Quadrat der genannten Funktion. Glühbirnen und Heizkörper stellen in der Praxis solche ohmschen Belastungen dar. Obwohl diese Verbraucher rein ohmsch sind, nimmt die Phasenanschnittsteuerung Blindleistung aus dem Netz auf. Dies kann durch die Phasenverschiebung der Grundschwingung des Laststroms zur Netzspannung begründet werden ( $\varphi \approx \frac{\alpha}{2}$ ). Ferner bewirkt der Phasenanschnitt Oberschwingungen im Netzstrom und damit EMV-Probleme.

#### 1.1.1.2 Ohmsch-Induktive Last

Die Anschnittsteuerung wird meist mit Thyristoren oder Triacs realisiert, welche bei Erreichen des Winkels  $\alpha$  mittels Impuls gezündet werden. Das Abschalten (Löschen) erfolgt beim Stromnulldurchgang. Bei ohmscher Belastung fällt dieser Zeitpunkt mit dem Nulldurchgang der Spannung zusammen. Bei

induktiver Last ist der Strom gegenüber der Spannung verzögert, dies führt zu einem Löschverzug  $\delta_L$ . Nachfolgendes Bild zeigt die Netzspannung  $U_s$ , Lastspannung  $U_d$  und Strom  $I_d$  mit dem Zündwinkel  $\alpha$  und dem Löschverzug  $\delta_L$ .

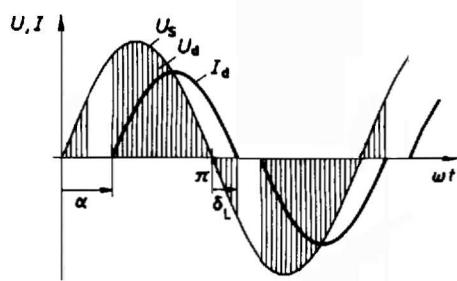


Diagramm Strom- und Spannungsverlauf

Bei ohmsch-induktiver Last kann  $\alpha$  nur eingeschränkt variiert werden. Im Wesentlichen gilt  $\delta_L < \alpha < \pi$  was in etwa auf  $\varphi \lesssim \alpha < \pi$  mit  $\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$  führt.

$$\begin{aligned} U_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \int_a^{\pi+\delta_L} \hat{U}^2 \cdot \sin^2[\omega \cdot t] \cdot d\omega \cdot t} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \hat{U}^2 \cdot \left[ \frac{\omega \cdot t}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin[\omega \cdot t] \cdot \cos[\omega \cdot t] \right]_a^{\pi+\delta_L}} = \\ &= \hat{U} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \left[ \frac{\pi+\delta_L-a}{2} + \frac{\sin 2 \cdot a - \sin 2 \cdot \delta_L}{4} \right]} = U_{eff} \end{aligned}$$

Der Löschverzug kann nicht explizit angegeben werden, er muss für einen bestimmten Winkel  $\alpha$  aus nachfolgender transzenter Gleichung numerisch ermittelt werden.

$$0 = e^{-\frac{(\pi-a+\delta_L)}{\Omega}} \cdot \sin[a - \arctan[\Omega]] + \sin[\delta_L - \arctan[\Omega]] \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{\omega L}{R}$$

Reale Verbraucher wie Motoren haben meist ohmsch-induktives Verhalten, mit hohem ohmschen Anteil.

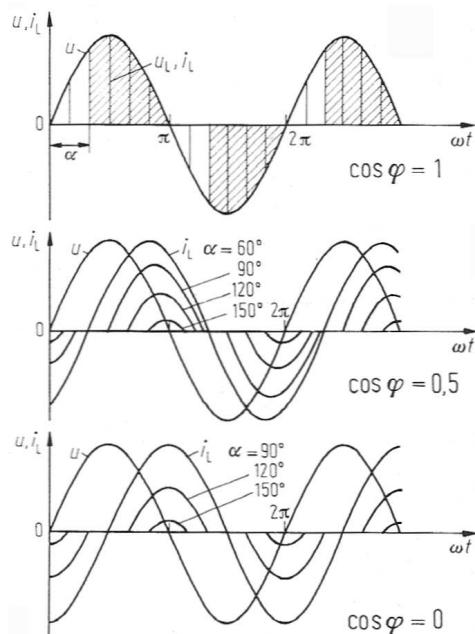


Diagramm Stromverlauf bei ohmscher, ohmsch-induktiver und rein induktiver Last

Beispiele SSG5), SSG8), SSG9)

### 1.1.2 Vollwellen- oder Schwingungspaketsteuerung

Eine preisgünstige Alternative zur Anschnittsteuerung stellt die Paketsteuerung dar. Hierbei wird die MagA

Leistungsteuerung durch Ein- und Ausschalten für eine bestimmte Anzahl von **ganzen** Netzperioden gewährleistet.

Diese Methode eignet sich nur für ohmsche Systeme mit sehr hoher Trägheit (z.B. Heizkörper, Lötkolben, Kochplatten, ...). Die Zeitkonstante liegt hierbei im Bereich von einigen Minuten bis Stunden. Nur unter dieser Bedingung kann der Effektivwert als konstant gehaltene Spannung angenommen werden.

$$U_{effPaket} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{t_{ein}} (\hat{U} \sin \omega t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \left( \frac{\hat{U}^2 t}{2} - \frac{\hat{U}^2 \sin 2\omega t}{4\omega} \right) \Big|_0^{t_{ein}}} = \sqrt{\frac{t_{ein}}{T_s} \frac{\hat{U}^2}{2}} = U_{effNetz} \sqrt{\frac{t_{ein}}{T_s}}$$

$$U_{effPaket} \sim \sqrt{\frac{t_{ein}}{T_s}}$$

Effektivwert,  $T_s$  ... Steuerperiode -> fixe Anzahl von Netzperioden

$$P_{Paket} = \frac{1}{R} U_{effPaket}^2 = \frac{1}{R} U_{effNetz}^2 \frac{t_{ein}}{T_s} \sim \frac{t_{ein}}{T_s}$$

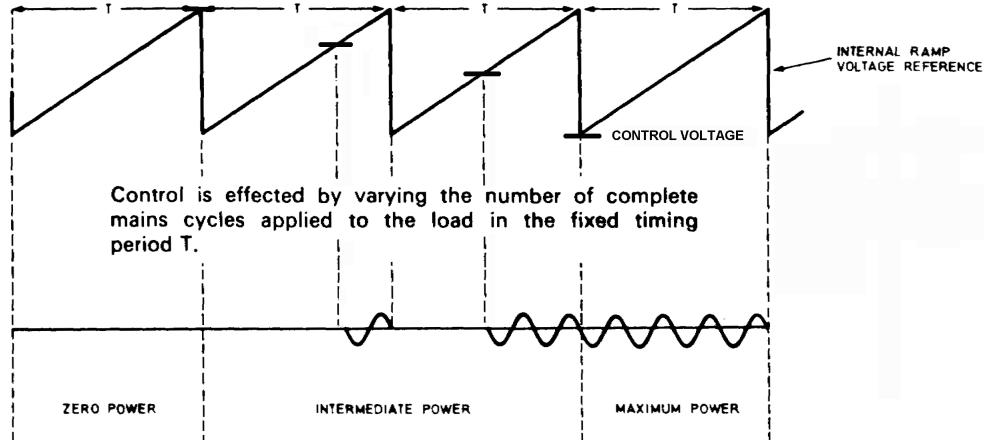


Bild Signale Paketsteuerung,

Die Erzeugung des Impulspaketes erfolgt über eine PWM-Steuerung mit Dreieckgenerator mit sehr hoher Periodendauer  $T_s$  (einige Sekunden). Die Dreieckspannung (Internal Ramp) wird mit einer Steuergleichspannung (Control Voltage) verglichen. Bei Überschreiten der Steuergleichspannung wird das Netz ab dem nächsten Nulldurchgang der Netzspannung an die Last geschaltet. Als Leistungsschalter dient wieder ein Triac bzw. ein Halbleiterrelais mit Triac.

Vorteil der Paketsteuerung ist die lineare Steuerbarkeit, die Reduktion von Oberschwingungen und der Entfall der Blindleistungsaufnahme bei ohmscher Last.

Beispiel SSG6), SSG10)

## 1.2 Frequenzsteuerung

Oft besteht die Anforderung für einen drehzahlgesteuerten Antrieb die Frequenz  $f_2$  der Speisespannung des Motors zu variieren (Netzfrequenz  $f_1 = 50\text{Hz}$ ). Zusätzlich soll auch noch die Amplitude der so erzeugten Wechselspannung veränderbar sein. Die elektronischen Einrichtungen dafür heißen Pulswechselrichter oder Frequenzumrichter. Auch in der Audiotechnik kommt dieses Prinzip wegen des hohen Wirkungsgrades als Class-D Verstärker zum Einsatz.

## 1.2.1 Frequenzumrichter

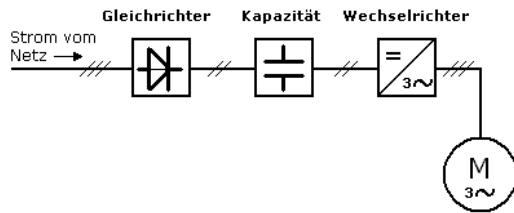


Bild Prinzip

Es wird dabei aus der konstanten Netzfrequenz  $f_1 = 50\text{Hz}$  mittels Gleichrichter (ein- oder dreiphasig) eine Gleichspannung erzeugt. Nach Glättung mit Kondensatoren im Zwischenkreis wird mittels Vollbrücken-Schalterendstufe ein PWM-Rechtecksignal (Bereich ca. 4 - 16kHz) erzeugt. Das Tastverhältnis wird im Rhythmus der gewünschten Sinus-Frequenz  $f_2 = 0\text{-}200\text{Hz}$  moduliert. Für den Drehstrombetrieb verwendet man drei Halb- bzw. Vollbrücken Endstufen mit  $120^\circ$  versetzter Ansteuerung (bezogen auf  $f_2$ ). Für die Rechteckspannung sind prinzipiell 2 oder 3 Spannungszustände üblich. Als Lasten kommen ausschließlich Wechselstrommotoren in Frage.

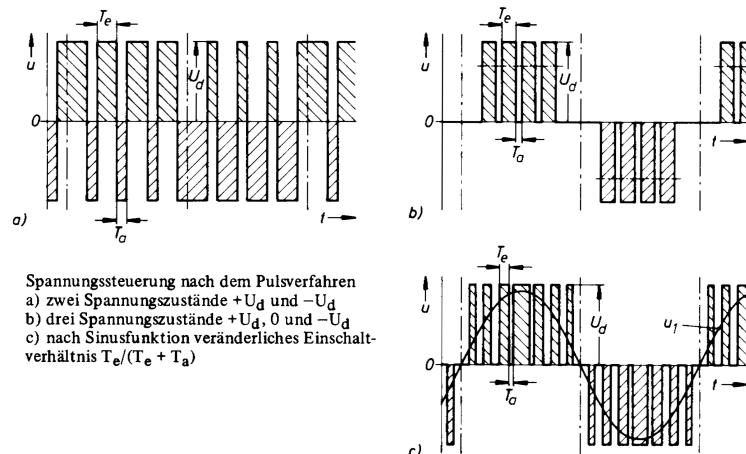


Bild Signale

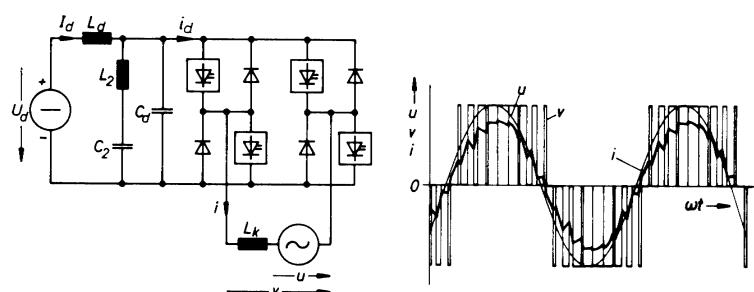


Bild einphasiger Frequenzumrichter mit Vollbrücke

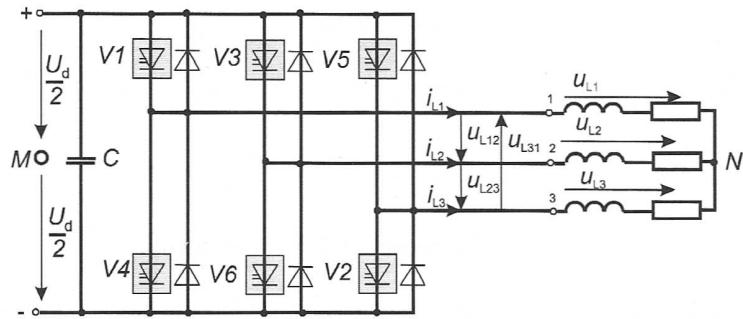


Bild dreiphasiger

### 1.2.1.1 Sinusgeführte PWM-Steuerung

Dem Verfahren liegt eine Referenzsinuskurve mit Frequenz  $f_2$  zugrunde aus der die Lastspannung abgeleitet wird. Die Amplitude der Referenzkurve wird auch als Modulationsindex bezeichnet. Durch Vergleich einer höherfrequenten Dreieckspannung mit dieser Referenzsinuskurve durch einen Komparator ergibt sich eine pulsbreitenmodulierte Rechteckspannung. Der Mittelwert dieser Spannung entspricht der Sinusform. Der Referenzsinus und die Dreieckspannung stehen in einem festen Frequenzverhältnis unabhängig von der ausgegebenen Frequenz  $f_2$  an der Last. Daraus resultieren definierte Oberschwingungsverhältnisse (Frequenzanteile des Rechtecksignals in der Lastspannung). Da die Last ohmsch-induktives Verhalten hat, zeigt der Laststromverlauf sinusförmiges Verhalten mit einer dreieckförmigen Überlagerung. Die sinusgeführte PWM stellt ein "Open Loop" Verfahren dar. D.h. die Lastspannung wird unabhängig vom Laststrom generiert, damit ist das Prinzip nicht kurzschlussfest.

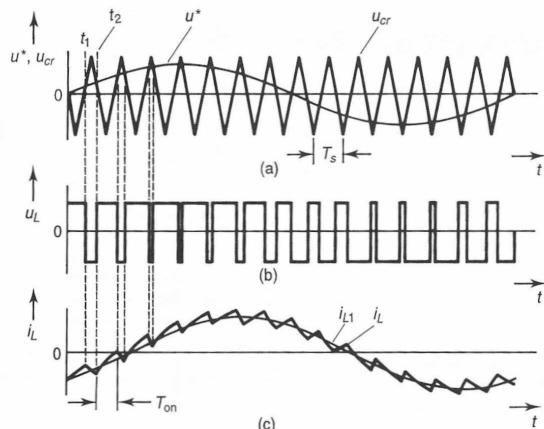


Bild Signale sinusgeführte PWM

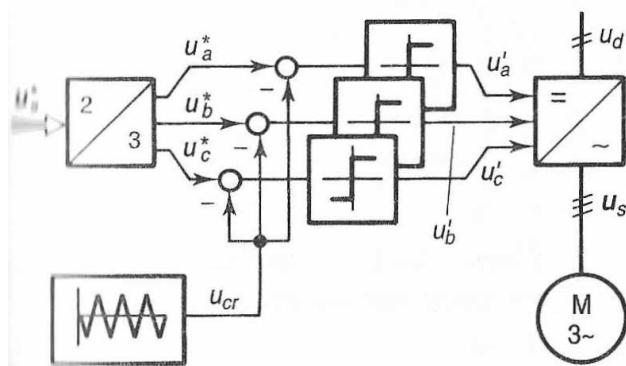
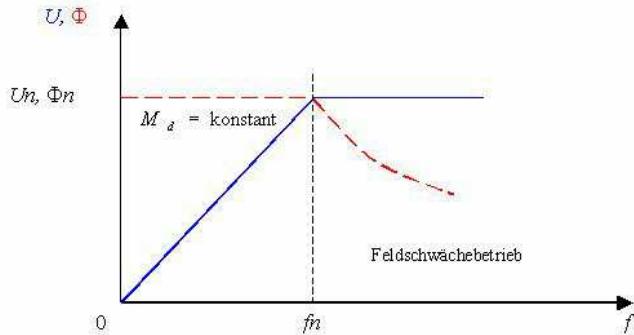


Bild Schaltung sinusgeführte PWM

Prinzipiell sind Amplitude (Modulationsindex) und Frequenz  $f_2$  unabhängig voneinander wählbar. In industriellen Frequenzumrichtern wird jedoch ab dem Nennbetriebspunkt  $f_n = 50\text{Hz}$  des Motors auf die maximale Amplitude ausgesteuert. Unterhalb von 50Hz wird die Amplitude prinzipiell mit der Frequenz linear reduziert. Dies ist durch das induktive Verhalten des Motors unter Konstanthaltung des Drehmoments erklärbar. Da der Strom im Motor für die Entstehung des Drehmoments verantwortlich ist und dieses konstant gehalten werden soll, muss bei Frequenzreduktion auch die Spannung reduziert werden ( $I = \frac{U}{\omega L}$ ). Davon abweichende Einstellmöglichkeiten in Frequenzumrichtern können durch den ohmschen Serienwiderstand und den nichtlinearen Zusammenhang zwischen Drehzahl und Lastmoment erklärt werden (zB. Pumpen und Lüfter).



Frequenzumrichter U/f-Kennlinie

### 1.2.1.2 Hysteresebandmethode

Wird der Laststrom als Referenzkurve vorgegeben und der Istwert durch Ein- und Ausschalten in einem Toleranzband gehalten, so spricht man von der Hystereseband-, Toleranzband- oder der Zweipunktreglermethode. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass der Laststrom immer innerhalb gewünschter Grenzen liegt und kein zu hoher Kurzschlussstrom auftreten kann ("Closed Loop" Prinzip). Nachteilig ist, dass die Oberschwingungsverhältnisse undefiniert sind.

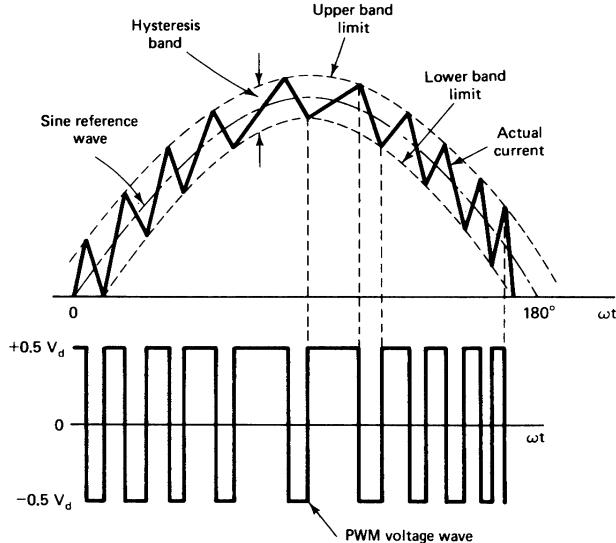
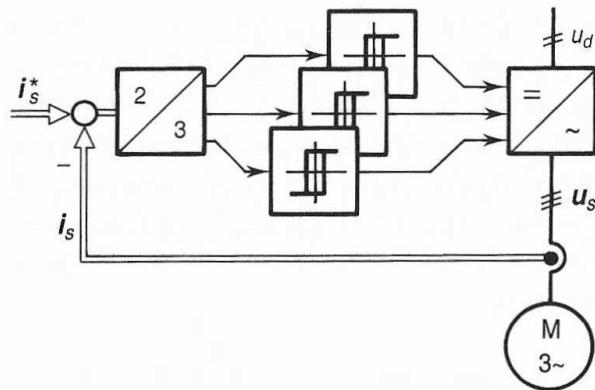


Bild Signale Hysteresebandmethode



## Bild Schaltung Hysteresebandmethode

### **1.2.1.3 Selected Harmonic Elimination**

Manchmal wird danach getrachtet bestimmte Oberschwingungen aus Gründen der EMV zu unterdrücken bzw. abzuschwächen (Harmonic Elimination).

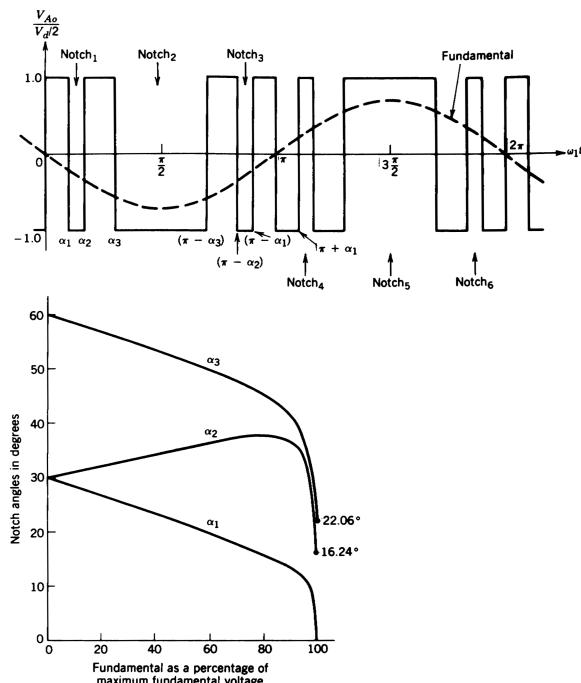


Bild Signale und Steuerdiagramm für Selected Harmonic Elimination

Die Schaltwinkel  $a_1$  bis  $a_3$  werden so gewählt, dass die Fourierreihe der Rechteckspannung bestimmte Oberschwingungen nicht enthält (Nullsetzen). Die Fourierreihe für das PWM-Signal mit variablen Winkeln  $a_1$ - $a_3$  lautet:

$$U(t) = \sum_{v=1}^n b_v \cdot \sin(v \cdot \omega \cdot t) \text{ mit } b_v = \frac{4U_{\max}}{\pi v} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^q (-1)^i \cdot \cos(v \cdot a_i) \right], \quad v = 1, 3, 5, 7, \dots$$

$q$  ist die Anzahl der Schaltwinkel  $\alpha_i$  pro Viertelperiode. Da das Signal symmetrisch innerhalb einer Viertelperiode ist treten in der Fourierreihe nur die ungeradzahlglichen Vielfachen der Grundschwingung auf.

$\hat{U}_0 = \frac{4U_{\max}}{\pi}$  max. Amplitude der Grundschwingung,  $A = \frac{b_1(a_1, a_2, \dots)}{\hat{U}_0}$  relative Amplitude 0-100% oder Aussteuergrad der Grundschwingung. Die Elimination erfolgt durch Nullsetzen der Oberschwingungsamplituden  $b_y$ . Mit 3 freien Winkeln  $\alpha_1 - \alpha_3$  ergeben sich drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Die Gleichungen lauten:

$$b_1 = A, b_5 = 0, b_7 = 0 \text{ (siehe Beispiel)}$$

Für jeden gewünschten Wert von A zwischen 0 und 1 bzw. 0 und 100% muss das transzendente Gleichungssystem gelöst werden. Bei drei freien Winkeln werden somit zwei Oberschwingungen eliminiert. Da es sich um ein Dreiphasennetz handelt werden alle ungeradzahligen durch drei teilbaren Oberschwingungen automatisch, gezielt aber die 5. und die 7. Oberschwingung eliminiert. Durch die Elimination treten die verbleibenden (nicht eliminierten z.B. 11,13, ...) verstärkt im Signal auf, was jedoch durch den Tiefpasscharakter der LR-Last zum Teil wieder wettgemacht wird. Nachfolgendes Bild zeigt die Verhältnisse für  $q = 7$  freie Winkel, dh. 6 eliminierte Oberschwingungen.

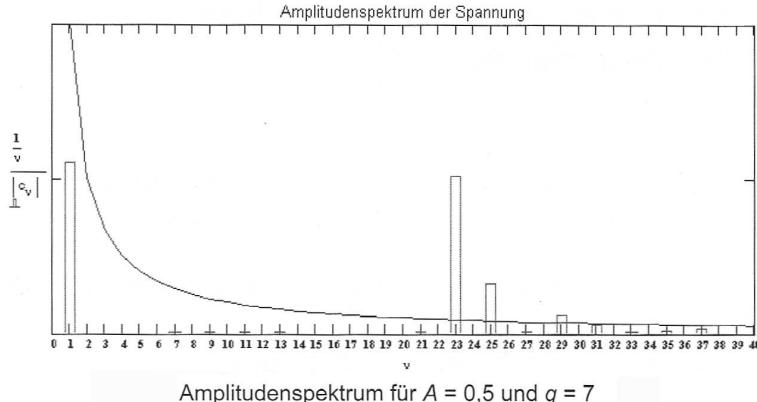


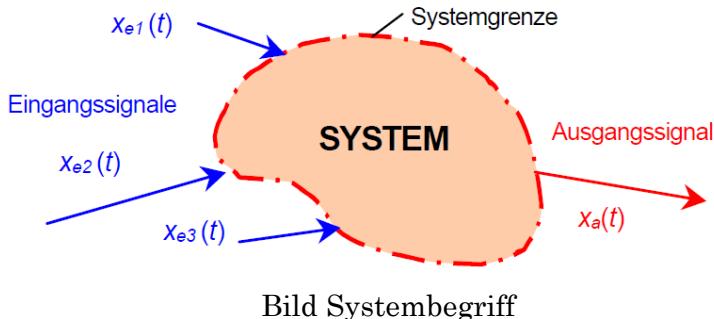
Bild Spektrum nach Elimination

Die einhüllende  $\frac{1}{v}$ -Funktion entspricht dem Amplitudenspektrum eines Rechtecksignals, in welchem nur ungeradzahlige Oberschwingungen auftreten. Im Dreiphasennetz heben sich alle durch drei teilbaren Oberschwingungen auf (3,9,15,21,...). Eliminiert werden bei  $q = 7$  die 5., 7., 11., 13., 17. und die 19. Oberschwingung. Die 23. tritt verstärkt auf.

Bei der Realisierung werden die Winkelwerte  $\alpha_1$  bis  $\alpha_q$  in Tabellenform für jede Amplitude abgespeichert und durch einen Mikroprozessor an die Schaltelemente ausgegeben.

## 2 Systeme (SA&SD)

Ist Teilgebiet der Systemtheorie und beschäftigt sich mit der Beschreibung dynamischer Systeme. Besonders hat die Regelungstechnik das Ziel das Verhalten in eine gewünschte Richtung zu beeinflussen. Die allgemeine Form dynamischer Systeme mit Eingangs- und Ausgangsgrößen wird als Block dargestellt.



Die Eingangsgrößen werden in Ihrer Funktion in Stell- und Störgrößen unterteilt.

- $u_i \dots$  Stellgrößen, gezielt beaufschlagt um bestimmte Wirkung zu erreichen
- $z_i \dots$  Störgrößen, beeinflussen das System ohne Beabsichtigung und sind eigentlich unerwünscht.

Die Aufgabenstellungen in der Regelungstechnik lassen sich in drei wesentliche Gruppen unterteilen.

### a) Analyse

Eingangsgrößen und System sind gegeben und die Ausgangsgrößen sind zu ermitteln. Die Analyse beantwortet die Frage wie ein bestimmtes System auf bekannte Eingangsgrößen reagiert. (Untersuchung von bekannten Regelkreisen)

### b) Synthese

Ausgangsgrößen und System sind gegeben und die Eingangsgrößen sind zu ermitteln. Die Synthese beantwortet die Frage wie ein bestimmtes System mit Eingangsgrößen zu beaufschlagen ist, damit sich ein bestimmtes Verhalten ergibt. (Entwurf von Reglern)

### c) Identifikation

Eingangs- und Ausgangsgrößen sind bekannt und gesucht ist das System. In der Praxis existieren oft Systeme deren genaues oder vollständiges Verhalten nicht bekannt ist. Durch beaufschlagen mit bestimmten Eingangsgrößen und Messung der zugehörigen Ausgangsgrößen werden die Daten zur anschließenden Identifikation (finden eines geeigneten mathematischen Modells) ermittelt.

## 2.1 Beschreibungsformen

### 2.1.1 Geräteplan & Blockdiagramm

Der Geräteplan stellt ein Technologie-Schema mit dessen Realisierung dar. In elektronischen Systemen entspricht dies dem Schaltplan.

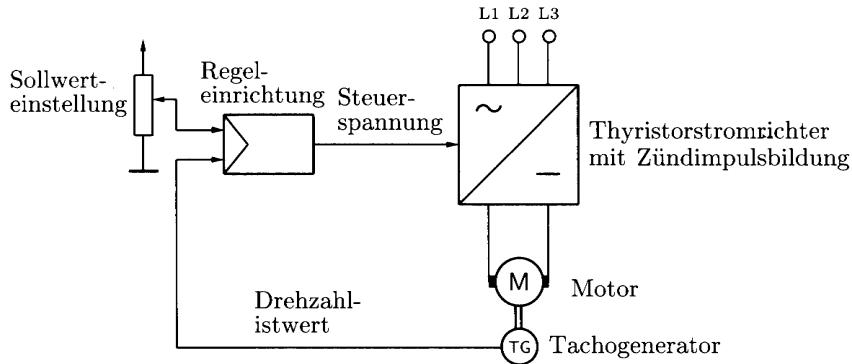


Bild Geräteplan Drehzahlregelung

Die Drehzahl des Motors wird mit einem Tachogenerator gemessen. Die Regeleinrichtung vergleicht dieses Messsignal mit einem vorgegebenen Sollwert und gibt eine entsprechende Steuerspannung an den Stromrichter aus, damit die Differenz zwischen Soll- und Istwert möglichst zum Verschwinden gebracht wird.

Das Blockdiagramm einer Regelung ist eine Darstellung in Funktionsblöcken. Die räumliche Zuordnung der einzelnen Funktionen zu den Geräten findet dabei keine besondere Berücksichtigung. Die physikalischen Einheiten der Signale zwischen den Blöcken können beliebig variieren (zB. elektrische Spannung, mechanische Drehzahl).

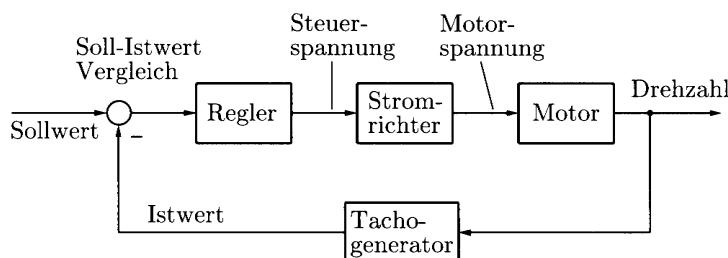
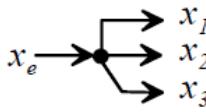
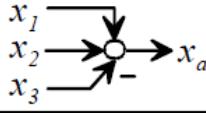
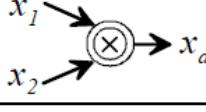
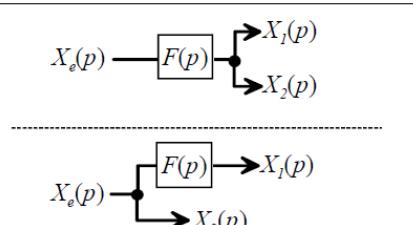
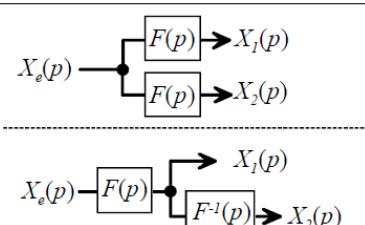


Bild Blockplan Drehzahlregelung

## 2.1.2 Algebra der Funktionsblöcke

Signal bzw. Variable mit Angabe der Wirkungsrichtung	$\xrightarrow{\begin{array}{c} X(p) \\ x(t) \end{array}}$	Entsprechende mathematische Gleichung
<b>Verzweigung</b> einer Variablen an einem Knoten		$x_1 = x_2 = x_3 = x_e$
<b>Summation</b> bzw. <b>Differenzbildung</b>		$x_a = x_1 + x_2 - x_3$
<b>Übertragungsblock</b> eines linearen Teilsystems, charakterisiert durch eine Übertragungsfunktion F(p)	$X_e(p) \xrightarrow{F_{ae}(p)} X_a(p)$	$X_a(p) = F_{ae}(p) \cdot X_e(p)$
<b>Block mit Zeitverhalten,</b> charakterisiert durch die Sprungantwort	$x_e(t) \xrightarrow{\text{Sprungantwort}} x_a(t)$	$x_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_{ae}(p) \cdot X_e(p)\}$
<b>Multiplikation</b>		$x_a(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$
<b>Nichtlinearer Block</b> gekennzeichnet durch eine nichtlineare Kennlinie	$x_e(t) \xrightarrow{\text{nichtlineare Kennlinie}} x_a(t)$	$x_a(t) = f_{NL}[x_e(t)]$

<b>Reihenschaltung</b> von <b>Übertragungsblöcken</b> Elimination der Zwischenvariablen $X_1(p)$	$\begin{array}{c} X_e(p) \xrightarrow{F_{1e}(p)} X_1(p) \xrightarrow{F_{a1}(p)} X_a(p) \\ X_1(p) = F_{1e}(p) \cdot X_e(p) \\ X_a(p) = F_{a1}(p) \cdot X_1(p) \end{array}$	$\begin{array}{c} X_e(p) \xrightarrow{F_{ae}=F_{1e}F_{a1}} X_a(p) \\ X_a(p) = F_{a1}(p)F_{1e}(p)X_e(p) \\ = F_{ae}(p)X_e(p) \end{array}$
<b>Parallelschaltung</b> von <b>Übertragungsblöcken</b> Zusammenfassen parallel verlaufender Übertragungskanäle	$\begin{array}{c} X_e(p) \xrightarrow{F_1(p)} X_1(p) \\ X_e(p) \xrightarrow{F_2(p)} X_2(p) \\ X_a(p) = X_1(p) + X_2(p) \\ = F_1(p)X_e(p) + F_2(p)X_e(p) \end{array}$	$\begin{array}{c} X_e(p) \xrightarrow{F_{ae}=F_1+F_2} X_a(p) \\ X_a(p) = [F_1(p) + F_2(p)]X_e(p) \\ = F_{ae}(p)X_e(p) \end{array}$
<b>Verlegen</b> einer Verzweigung		

<b>Verlegen eines Summenpunktes</b> 	
<b>Einfache Rückführung</b> Grundstruktur einer Rückkopplungsschleife  <i>Kreisübertragungsfunktion:</i> $F_k(p) = F_h(p) F_r(p)$	$X_e(p) \rightarrow F_{ae} = \frac{F_h}{1 + F_h F_r} \rightarrow X_a(p)$ $X_a(p) = \frac{F_h(p)}{1 + F_h(p) F_r(p)} X_e(p)$ $= \frac{F_h(p)}{1 + F_k(p)} X_e(p)$

### Übungsbeispiele BA1)-BA6)

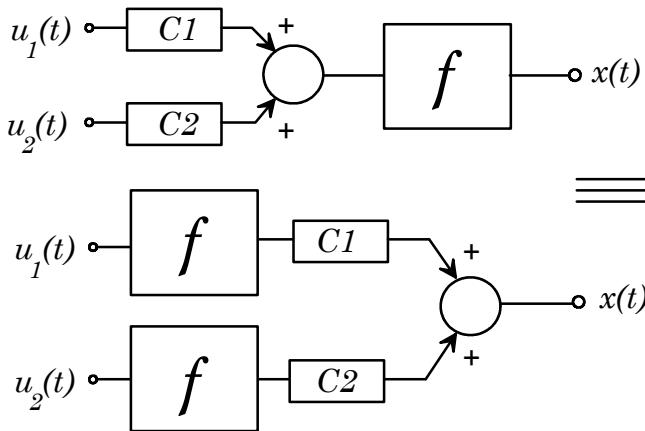
#### 2.1.3 Definition Linearität

Linearität im Sinne der Systemtheorie bedeutet, dass die Prinzipien der Superposition (Überlagerung) und der Verstärkung gelten.

$$x_1(t) = f(c_1 u_1(t)), x_2(t) = f(c_2 u_2(t)) \Rightarrow u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t), x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = f(u(t)) = c_1 f(u_1(t)) + c_2 f(u_2(t))$$

Alle Systeme die diesen Forderungen nicht genügen sind nichtlinear. Die Linearität kann auch in Form der Verlegung von Blöcken und Mischstellen dargestellt werden.



Die Bedingung der Linearität wird auch von Systemen die durch lineare Differenzialgleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten beschrieben werden erfüllt. Diese Systeme gehören zur Gruppe der **zeitvarianten** Systeme.

### 2.1.4 Testfunktionen

Die Beaufschlagung mit bestimmten Eingangsgrößen muss um die Vergleichbarkeit von Systemen zu vereinheitlicht sein. Es gibt daher eine geringe Anzahl von Funktionen.

#### a) Einheitssprung (Heaviside-Funktion)

Das Signal springt zum Zeitpunkt  $t = 0$  vom Signalwert 0 auf 1.

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= 0 \quad \dots \quad t < 0 \\ \sigma(t) &= 1 \quad \dots \quad t > 0\end{aligned}$$

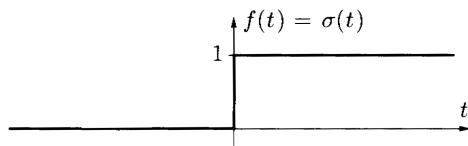
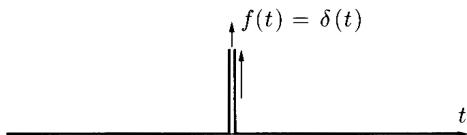


Bild Sprungfunktion

Die Reaktion des Systems auf einen Einheitssprung wird **Sprungantwort** oder **Übergangsfunktion** bezeichnet.

#### b) Dirac-Impuls (Stoßfunktion)

Auch Stoßfunktion genannt kann durch die zeitliche Ableitung der Sprungfunktion gebildet werden. Was strenggenommen wegen der Unstetigkeitsstelle nur durch eine Ausnahme zulässig ist.



$$\delta(t) = 0 \quad \dots \quad t \neq 0$$

$$\delta(t) \rightarrow \infty \quad \dots \quad t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Bild Dirac-Impuls

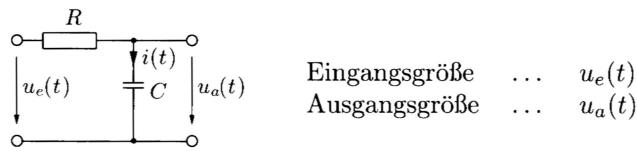
Der Impuls ist unendlich hoch, unendlich kurz und besitzt die Fläche 1. Dies ist mit der Integration der Stoßfunktion zu begründen, welche die Sprungfunktion ergeben muss. Die Reaktion des Systems auf einen Dirac-Impuls wird **Stoßantwort** oder **Gewichtsfunktion** bezeichnet. Der Dirac-Impuls tritt in der Praxis nicht auf, ermöglicht aber bei der Berechnung Vereinfachungen.

### 2.1.5 Zeitbereich

Im Zeitbereich wird ein dynamisches System durch eine Differentialgleichung beschrieben. Die allgemeine Form mit je einer Eingangs- und Ausgangsgröße hat folgende Form:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Aus der Gleichung erkennt man, dass die Ermittlung von Lösungen durch Integration mühsam ist. Dieser Weg wird daher kaum beschritten. Sehr wohl werden Sprungantworten von einfachen, bekannten Systemen mit dem zu untersuchenden System verglichen, um so ein einfaches, angenähertes Modell zu finden (typische Aufgabe der Identifikation). Beispiel Berechnung Differentialgleichung RC-Glied:



$$u_a(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau, \quad i(t) = [u_e(t) - u_a(t)] \cdot \frac{1}{R}$$

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{1}{RC} \cdot [u_e(t) - u_a(t)]$$

$$\dot{u}_a + \frac{1}{RC} \cdot u_a = \frac{1}{RC} \cdot u_e$$

Die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  der Differentialgleichung somit:

$$a_1 = 1, \quad a_0 = \frac{1}{RC}, \quad b_0 = \frac{1}{RC}$$

### 2.1.6 Frequenzbereich

Viel häufiger wird die Beschreibung durch komplexe Größen für sinusförmige Zeitabhängigkeit im eingeschwungenen Zustand herangezogen. Diese Methode ist allerdings nur für **lineare** Systeme zulässig. Obige lineare Differentialgleichung kann in die komplexe Darstellung überführt werden.

$$u(t) = \hat{U} \cos \omega t \rightarrow \frac{du(t)}{dt} = -\omega \hat{U} \sin \omega t \rightarrow \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -\omega^2 \hat{U} \cos \omega t$$

$$u(t) = \operatorname{Re}[\hat{U} e^{j\omega t}] \rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \operatorname{Re}[j\omega \hat{U} e^{j\omega t}] \rightarrow \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \operatorname{Re}[(j\omega)^2 \hat{U} e^{j\omega t}]$$

mit der Eulerformel:  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$b_m \operatorname{Re}[(j\omega)^m \hat{U} e^{j\omega t}] + \dots + b_2 \operatorname{Re}[(j\omega)^2 \hat{U} e^{j\omega t}] + b_1 \operatorname{Re}[j\omega \hat{U} e^{j\omega t}] + b_0 \operatorname{Re}[\hat{U} e^{j\omega t}] =$$

$$\operatorname{Re}[(b_m(j\omega)^m + \dots + b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0) \hat{U} e^{j\omega t}] =$$

$$Re[(a_n(j\omega)^n + \dots + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0)\hat{X}e^{j\omega t}e^{j\varphi}]$$

Bei  $X$  muss eine Phasenverschiebung berücksichtigt werden.

$$\hat{X}e^{j\omega t}e^{j\varphi} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0} \hat{U}e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{\hat{X}}{\hat{U}}e^{j\varphi} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0} = G(j\omega)$$

$$X(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\text{Arg}[G(j\omega)]}$$

$G(j\omega)$  heißt Frequenzgang des linearen Systems. Als Darstellungsform wird in der Regelungstechnik meist das Bode-Diagramm und sehr häufig die Ortskurve verwendet.

### 2.1.7 Laplace Transformation

Die unabhängige Variable  $j\omega$  wird oft in Erweiterung zur Laplacetransformation mit  $s$  oder  $p$  bezeichnet. Der Frequenzgang wird zur Funktion  $G(p)$  oder  $G(s)$  und wir auch Übertragungsfunktion genannt.

$$G(s) = \frac{b_ms^m + \dots + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_ns^n + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

Dies führt auf algebraische Gleichungen mit Polynomen in  $s$ . Umwandlung der Differentialgleichung in eine komplexe Übertragungsfunktion am Beispiel des RC-Gliedes:

$$\frac{du_a}{dt} + \frac{1}{RC}u_a = \frac{1}{RC}u_e \quad \Rightarrow \quad (s + \frac{1}{RC})u_a = \frac{1}{RC}u_e \quad \Rightarrow \quad \frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{\tau s+1}$$

$$\text{Exakt gilt für die einseitige Laplace-Transformation: } F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Bei der einseitigen Laplace-Transformation werden Signale vorausgesetzt, die ausschließlich für den Bereich  $t \geq 0$  Werte annehmen.

Die Laplace Transformation darf nur auf **lineare zeitinvariante** Systeme angewandt werden. Neben der Linearität ist für die Anwendbarkeit die Erfüllung des Zeitverschiebungssatzes gefordert (zB. eine verschiebbare Sprungantwort mit gleichem Aussehen bei beliebigem  $t_0$ ):

$$u(t - t_0) \Rightarrow x(t - t_0)$$

Zeitvariante Systeme erfüllen diese Forderung im allgemeinen nicht.

### 2.1.8 Rechenvorschriften

Bezeichnung der Operation	Zeitfunktion $x(t)$	$\mathcal{L}$ -Transformierte $X(p)$	Bemerkung
Lineare Überlagerung	$x(t) = \sum_v C_v \cdot u_v(t)$	$X(p) = \sum_v C_v \cdot U_v(p)$	$C_v$ reell oder komplex
Zeitliche Faltung	$x(t) = \int_0^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau$	$X(p) = U(p) \cdot V(p)$	kommutativ in $u(t)$ und $v(t)$
Verschiebung nach rechts	$x(t) = u(t - T_L)$	$X(p) = U(p) \cdot e^{-T_L p}$	$T_L > 0, u(t) \equiv 0$ für $t < 0$
Verschiebung nach links	$x(t) = u(t + T_L)$	$X(p) = \left[ U(p) - \int_0^{T_L} u(t) e^{-pt} dt \right] \cdot e^{-T_L p}$ $u(t) \equiv 0$ für $t < 0$	$T_L > 0$
Differenziation	1.Ableitung: $x(t) = \frac{du(t)}{dt}$ n.Ableitung: $x(t) = \frac{d^n u(t)}{dt^n}$	$X(p) = pU(p) - u(0_+)$ $X(p) = p^n U(p) - p^{n-1} u(0_+) - \dots - u^{<n-1>}(0_+)$	
Integration	$x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ n-fache Integration	$X(p) = \frac{1}{p} \cdot U(p)$ $X(p) = \frac{1}{p^n} \cdot U(p)$	nur Stammfunktion
Ähnlichkeit	$x(t) = u(at)$	$X(p) = \frac{1}{a} \cdot U(p/a)$	
Dämpfung	$x(t) = u(t) \cdot e^{at}$	$X(p) = U(p+a)$	$a$ reell oder komplex
Grenzwertsätze	Anfangswert: $x_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot X(p)$	Endwert: $x_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p)$	falls die Grenzwerte existieren

### 2.1.8.1 Ausgewählte Funktionen

Zeitfunktion $x(t)$	$\mathcal{L}$ -Transformierte $X(p)$	Zeitfunktion $x(t)$	$\mathcal{L}$ -Transformierte $X(p)$
Dirac-Impuls für $t = kT$ : $\delta(t - kT)$	$e^{-kT} p$ , $k = 0, 1, \dots$	$te^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$
Konstante 1 oder Einheitssprungfunktion	$\frac{1}{p}$	$t^n e^{-at}$ $n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$t^2$	$\frac{2!}{p^3}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$t^n$ , $n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{p \cdot \sin \phi + \omega \cos \phi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{at}$	$\frac{1}{p-a}$ beliebig komplex	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{b-a} [e^{-at} - e^{-bt}]$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} \sin(\omega t + \phi)$	$\frac{(p+a) \sin \phi + \omega \cos \phi}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$be^{-bt} - ae^{at}$	$\frac{(b-a)p}{(p+a)(p+b)}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{a^2} [e^{-at} + at - 1]$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{[a-b + b e^{-at} - a e^{-bt}]}{ab(a-b)}$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$1 - e^{-at} (1 + at)$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$

Übungsbeispiele **LT1)-LT6)** und **ILT1)-ILT4)**

### 2.1.9 Pol-Nullstellendiagramm

Die Übertragungsfunktion bzw. der Frequenzgang  $G(s)$  ist ein Quotient aus einem Nenner und einem Zählerpolynom.

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Unter der allgemeinen Annahme  $s = \sigma + j\omega$  lassen sich für  $Z(s)$  und  $N(s)$  Nullstellen finden. Die Nullstellen von  $N(s)$  sind gleichzeitig die Pole von  $G(s)$ . Aus der Lage der Pole lässt sich das zeitliche Verhalten abschätzen. Man sucht dabei die Pole in der komplexen  $s$ -Ebene und stellt die Korrespondenz zum Zeitbereich her.

$$\begin{array}{ccc} s\text{-Ebene} & \Leftrightarrow & \text{Zeitbereich} \\ \sigma + j\omega & \Leftrightarrow & e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}(j \sin \omega t + \cos \omega t) \end{array}$$

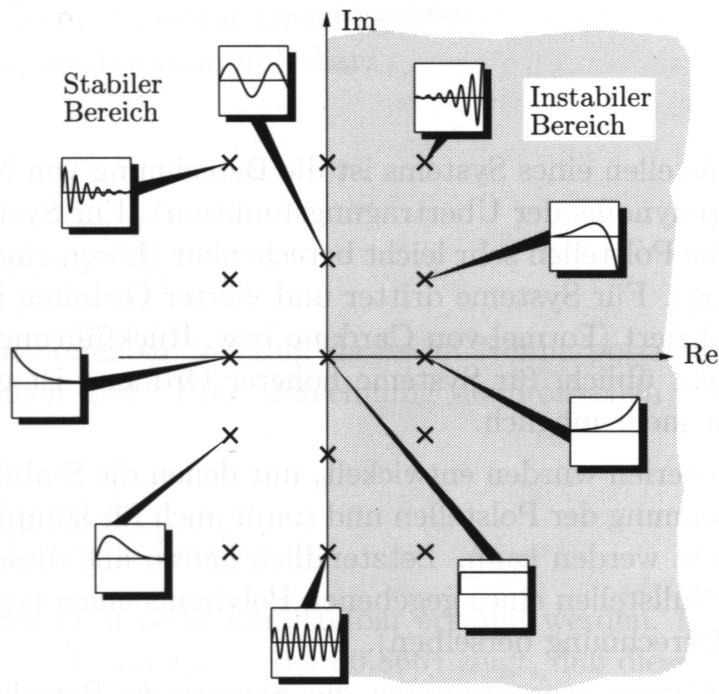


Bild  $s$ -Ebene

Man erkennt:

- a.) komplexe Pole bewirken gedämpfte Schwingungen
- b.) reelle Pole ergeben kriechendes Verhalten
- c.) Pole in der rechten Halbebene bewirken aufklingendes Verhalten
- d.) mit zunehmendem Imaginärteil steigt die Schwingfrequenz
- e.) mit zunehmendem negativem Realteil ergibt sich rascheres Abklingen
- c.) Pol im Ursprung stellt einen Integrator dar

### 2.1.10 Klassifizierung von Übertragungsfunktionen

Die Einteilung von Übertragungsfunktionen mit den Buchstaben  $P,I,D,T$  wird in der Regelungstechnik verallgemeinert angewendet. Generell gilt, dass jede Übertragungsfunktion  $G(s)$ , wenn sie ein Phasenminimumsystem darstellt, wie folgt klassifiziert werden kann:

$PI_k D_m T_n$        $k, m, n \dots$  Ordnungen der Anteile  $I, D, T$

$\frac{(P+I_k+D_m)}{T_n} \Rightarrow$  Merkhilfe mathematisch nicht exakt !

$P\dots$	proportional	$G_p(s) = k_0 \Rightarrow P$
$I\dots$	integral	$G_I(s) = \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \dots + \frac{b_k}{s^k} \Rightarrow I_k$
$D\dots$	differenzial	$G_D(s) = c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_m s^m \Rightarrow D_m$
$T\dots$	transient (vorübergehend)	$G_T(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \Rightarrow \frac{1}{T_n}$

$$\text{Gesamt: } G(s) = \frac{k_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \dots + \frac{b_k}{s^k} + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c^m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \Rightarrow PI_k D_m T_n$$

Vorbereitung zur Klassifizierung: Im Nenner muss die höchste Potenz von  $s$  herausgehoben werden.

Beispiele:

$$G(s) = \frac{1+s}{a+bs+cs^2} \Rightarrow PDT_2, G(s) = \frac{1+s+s^2}{a+bs+cs^2} \Rightarrow PD_2 T_2, G(s) = \frac{s^2}{a+bs+cs^2} \Rightarrow D_2 T_2$$

$$G(s) = \frac{1+s}{as+bs^2+cs^3} = \frac{1+s}{s(a+bs+cs^2)} = \frac{\frac{1}{s}+1}{a+bs+cs^2} \Rightarrow PIT_2, G(s) = \frac{1+s}{as^2+bs^3+cs^4} = \frac{1+s}{s^2(a+bs+cs^2)} = \frac{\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}}{a+bs+cs^2} \Rightarrow I_2 T_2$$

$$G(s) = \frac{1+s+s^2}{as+bs^2+cs^3} = \frac{1+s+s^2}{s(a+bs+cs^2)} = \frac{\frac{1}{s}+1+s}{a+bs+cs^2} \Rightarrow PIDT_2, G(s) = \frac{1+s}{as^2+bs^3+cs^4+d} \Rightarrow PDT_4$$

## Übungsbeispiele K1)-K10)

### 2.1.11 Anfangs- und Endwerttheorem

Liegt die Übertragungsfunktion eines Systems vor kann mit ihr der Anfangs- und Endwert beim Anlegen eines Einheitssprunges ermittelt werden.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \dots \text{Endwerttheorem}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \dots \text{Anfangswerttheorem}$$

Beispiele:

$$G(s) = \frac{5+2s+3s^2}{2+3s+4s^2} \Rightarrow x_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{5}{2} \Rightarrow x_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{5+2s+3s^2}{2+3s+4s^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{s^2} + \frac{2}{s} + 3}{\frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} + 4} = \frac{3}{4}$$

$$G(s) = \frac{5s+2s^2+3s^3}{2+3s+4s^2} = \frac{s(5+2s+3s^2)}{2+3s+4s^2} \Rightarrow x_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 0 \Rightarrow x_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{s^2} + \frac{2}{s} + 3}{\frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s}} = \infty$$

$$G(s) = \frac{5+2s+3s^2}{2s+3s^2+4s^3} = \frac{5+2s+3s^2}{s(2+3s+4s^2)} \Rightarrow x_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \Rightarrow x_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s}}{\frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} + 4} = 0$$

## Übungsbeispiele AEW1)-AEW7)

## 2.1.12 Bode-Knickzüge

In der Regelungstechnik ist oft gefordert rasch aus einer Übertragungsfunktion ein Bodediagramm zu erstellen. Neben den numerischen Berechnungen mittels Simulationsprogrammen ist die Erstellung von Knickzügen von Bedeutung, sie bietet eine bessere Übersicht über die relevanten Eigenfrequenzen des Systems. Die allgemeine Form einer Übertragungsfunktion in komplexer Schreibweise mit  $s = j\omega$  lautet:

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}, \quad m \leq n$$

Diese Form lässt sich zerlegen in die Produkte Ihrer Null- und Polstellen.

$$G(j\omega) = k \frac{\prod \left( \frac{j\omega}{\omega_{Ni}} - 1 \right)}{\prod \left( \frac{j\omega}{\omega_{Pk}} - 1 \right)} \prod \frac{j\omega}{\omega_{Dl}} = k \prod G_{Ni}(j\omega) \prod G_{Dl}(j\omega) \prod G_{Pk}(j\omega) \prod G_{Im}(j\omega)$$

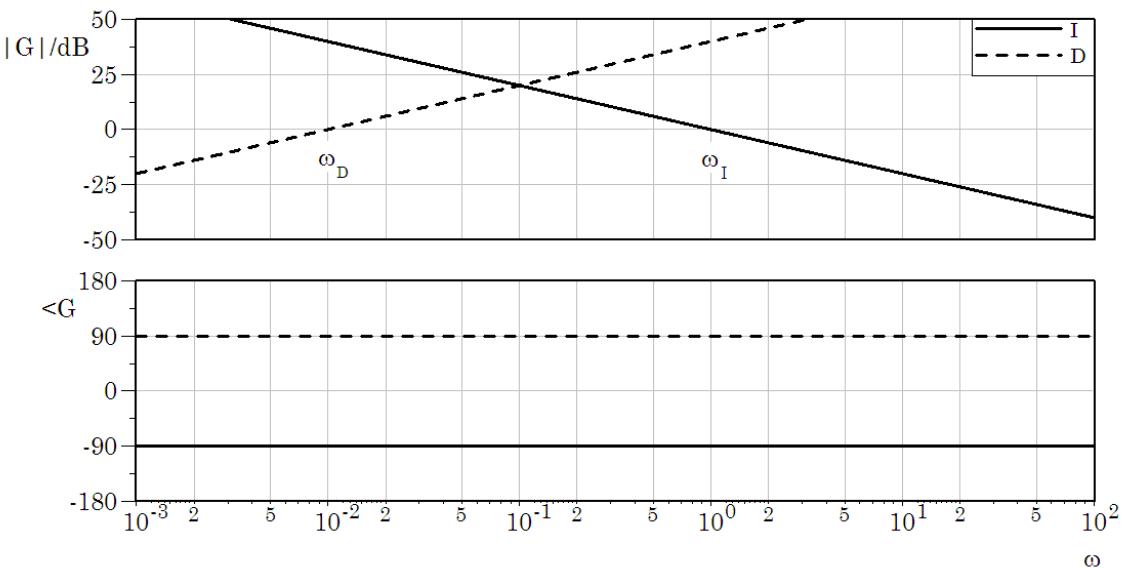
Aus obiger Formel ist ersichtlich, dass es 4 Basisfunktionen gibt aus denen ein Gesamtverlauf zusammengesetzt werden kann.

(Polstelle um Ursprung) Integrator, I-Element:	$G_I(s) = \frac{\omega_I}{j\omega}$
(Nullstelle um Ursprung) Differenzierer, D-Element:	$G_D(s) = \frac{j\omega}{\omega_D}$
(-> treten in einem System nur wahlweise auf)	
(reelle Polstelle) Tiefpass 1. Ordnung, PT <sub>1</sub> -Element:	$G_P(s) = \frac{k_P}{1+j\frac{\omega}{\omega_P}}$
(reelle Nullstelle), PD-Element:	$G_N(s) = k_N(1+j\frac{\omega}{\omega_N})$

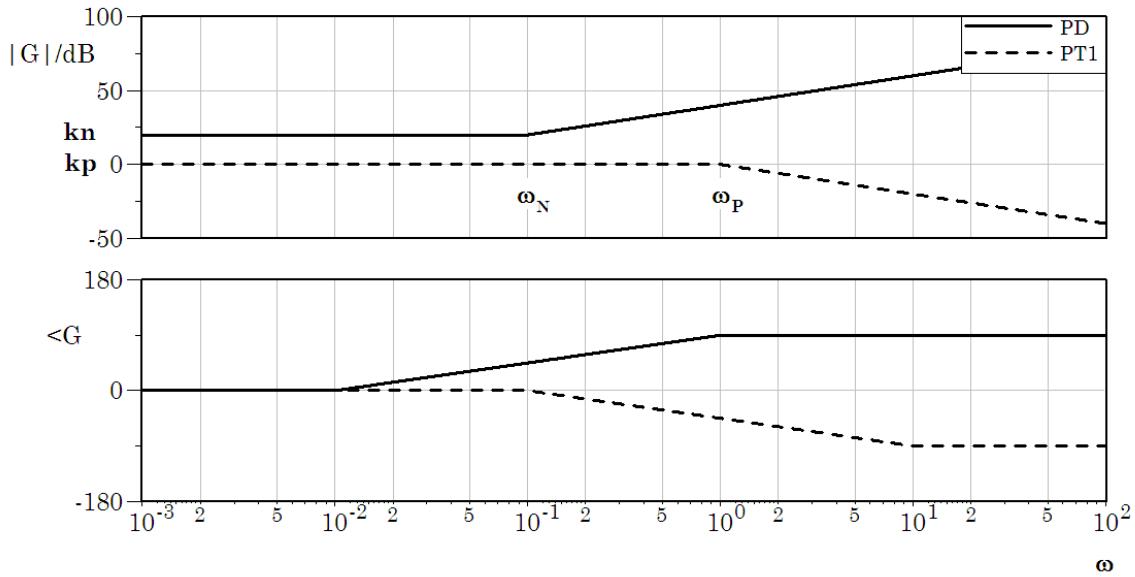
Es erfolgt die Darstellung:

des Betrages logarithmisch in [dB]:  $|G(j\omega)|/\text{[dB]} = 20 \log|G(j\omega)|$

und die der Phase linear [°] oder [rad]:  $\text{Arg}G(j\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]}$



Bodediagramm Integrator und Differenzierer

Bodediagramm PT<sub>1</sub> und PD-Element

Die Wirkungen der Pol- und Nullstellen können für das Verständnis getrennt betrachtet und dann überlagert werden. Durch den logarithmischen Maßstab des Bodediagramms ergibt sich aus der multiplikativen Verkettung der Teilverläufe eine Addition der einzelnen Teilverläufe zum Gesamtverlauf.

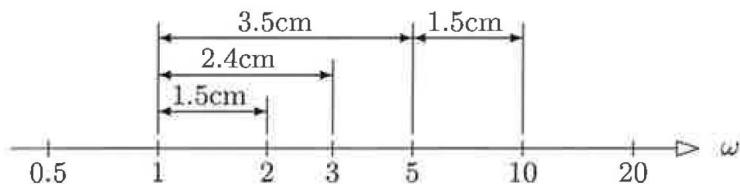
$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)\dots G_n(j\omega)$$

$$\log[G(j\omega)] = \log[G_1(j\omega)] + \log[G_2(j\omega)] + \log[G_3(j\omega)] + \dots + \log[G_n(j\omega)]$$

Die Phase wird linear dargestellt und durch die Kettenschaltung der Teilverläufe ebenfalls durch Addition zum Gesamtverlauf ermittelt.

$$\text{Arg}[G(j\omega)] = \text{Arg}[G_1(j\omega)] + \text{Arg}[G_2(j\omega)] + \text{Arg}[G_3(j\omega)] + \dots + \text{Arg}[G_n(j\omega)]$$

Für das Zeichnen von Knickzügen hat sich nachfolgende Skalierung mit einer Dekade von 5cm bewährt:

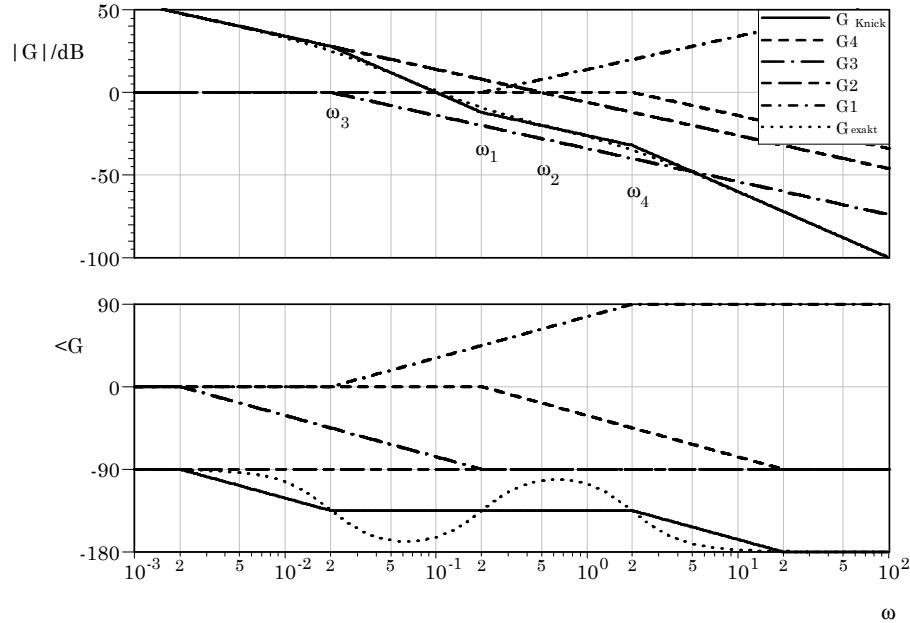


Jeder Polstellen-Knick bewirkt eine Phasendrehung um  $-90^\circ$  und Änderung der Steigung um  $-20\text{dB/Dek}$ . Jeder Nullstellen-Knick bewirkt eine Phasendrehung um  $+90^\circ$  und Änderung der Steigung um  $+20\text{dB/Dek}$ . Systeme die diese Eigenschaften besitzen werden als phasenminimale Systeme bezeichnet.

Beispiel Knickzug:

$$G(s) = \frac{0.5+2.5s}{25s^3+50.5s^2+s} = \frac{0.5(1+5s)}{s(1+0.5s)(1+50s)} \Rightarrow G_1(s) = 1 + 5s, G_2(s) = \frac{0.5}{s}, G_3(s) = \frac{1}{1+50s}, G_4(s) = \frac{1}{1+0.5s}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{5} = 0.2, \omega_2 = 0.5, \omega_3 = \frac{1}{50} = 0.02, \omega_4 = \frac{1}{0.5} = 2$$



### Übungsbeispiele BK1)-BK5)

Spezialfälle wie konjugiert komplexe Pole und Nullstellen lassen sich nicht so einfach als Knickzug abbilden, weil der exakte Verlauf erheblich davon abweichen kann. Im Besonderen trifft dies auf den Phasenverlauf zu. Der Knickzug gibt jedenfalls die Asymptoten wieder. Der quadratische Term ist auf folgende Form zu bringen.

$$c(a_2s^2 + a_1s + 1) = c\left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0}s + 1\right) \Rightarrow s_{12} = -\omega_0(D \pm j\sqrt{1-D^2})$$

$$|s_{12}| = \sqrt{(-\omega_0 D)^2 + (\omega_0 \sqrt{1-D^2})^2} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \text{ mit } a_1 \leq 2\sqrt{a_2}$$

Der Asymptotenknick tritt beim Betrag der Polstelle  $|s_{12}| = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a_2}}$  auf. Allerdings muss im Fall einer komplexen Wurzel mit einer zusätzlichen Phasendrehung von  $180^\circ$  und einer Änderung der Steigung um  $40\text{dB/Dek}$  gerechnet werden.

Beispiel:

$$G(s) = \frac{3+6s}{5s^2+s+20} = \frac{3(1+2s)}{20\left(\frac{s^2}{4}+0.05s+1\right)} \Rightarrow G_1(s) = 1 + 2s, G_2(s) = \frac{3}{20\left(\frac{s^2}{4}+0.05s+1\right)}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} = 0.5, \omega_2 = \sqrt{4} = 2, k_2 = 20 \log \frac{3}{20} = -16.47\text{dB}$$

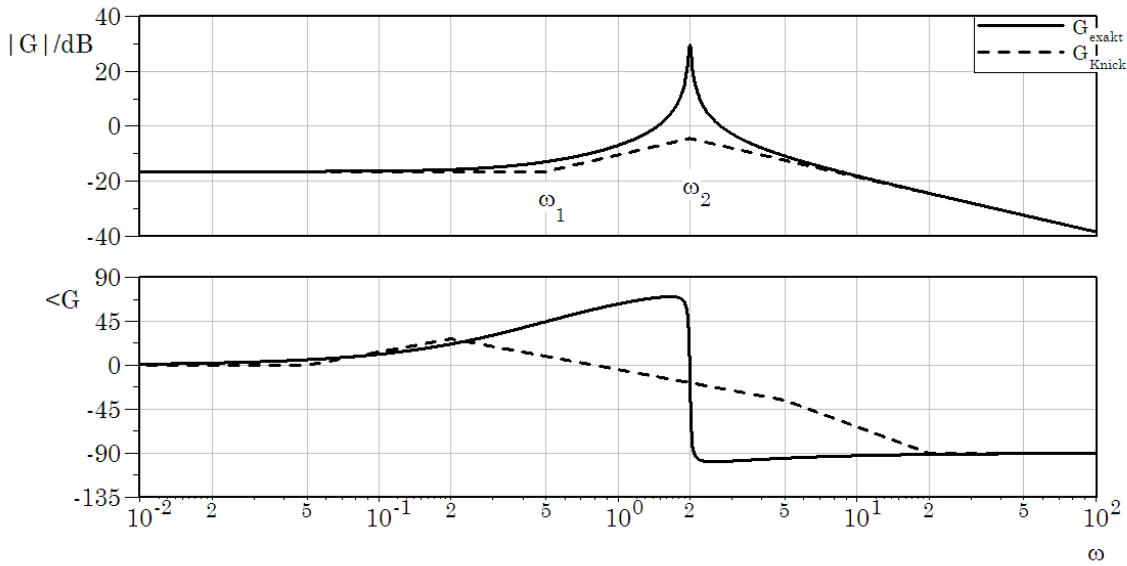


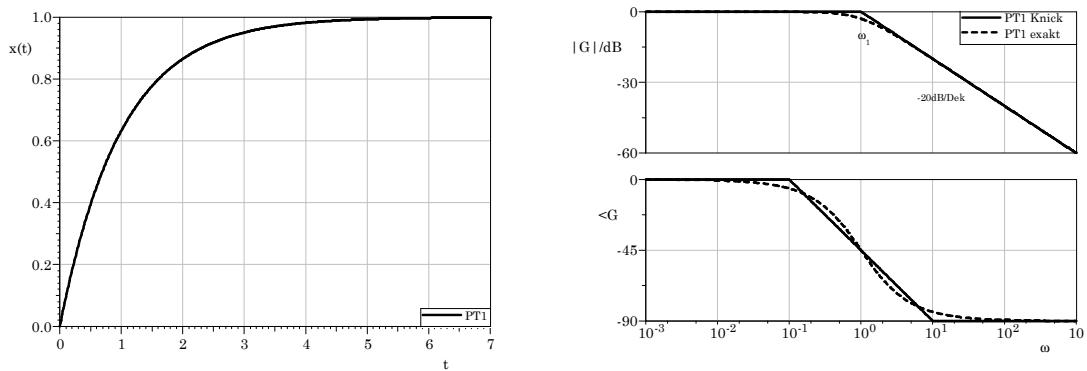
Bild Bodediagramm mit Knickzug für schwingungsfähiges PDT<sub>2</sub>-Element

### 2.1.13 Grundelemente

#### 2.1.13.1 PT<sub>1</sub>-Element

$$G(s) = \frac{k}{1+sT_1}, G_\infty = 0, G_0 = k$$

$$x_\infty = k, x'_\infty = 0, x_0 = 0, x'_0 = \frac{k}{T_1}$$



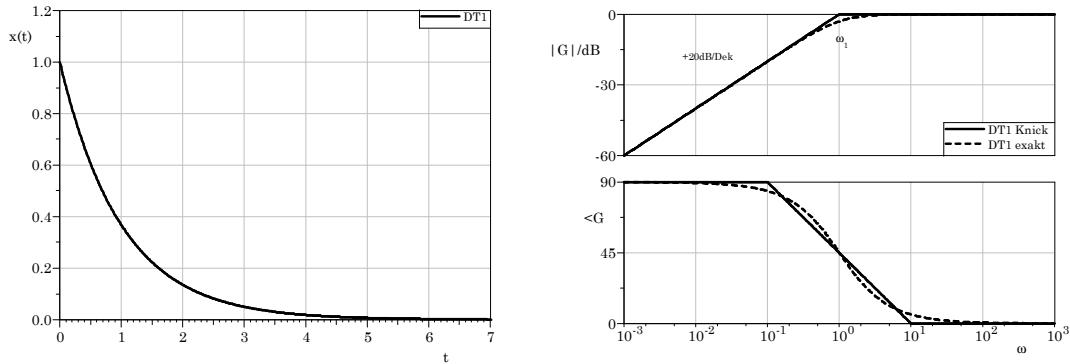
*Eigenschaften:* elementare reelle Polstelle, Tiefpass erster Ordnung

*Anwendung:* RC-Ladevorgänge, Erwärmungsvorgänge, Bandbegrenzte Verstärker - realer OPV, Ventile, ...

### 2.1.13.2 DT<sub>1</sub>-Element

$$G(s) = \frac{ks}{1+sT_1}, G_\infty = \frac{k}{T_1}, G_0 = 0$$

$$x_\infty = 0, x'_\infty = 0, x_0 = \frac{k}{T_1}, x'_0 = -\frac{k}{T_1}$$



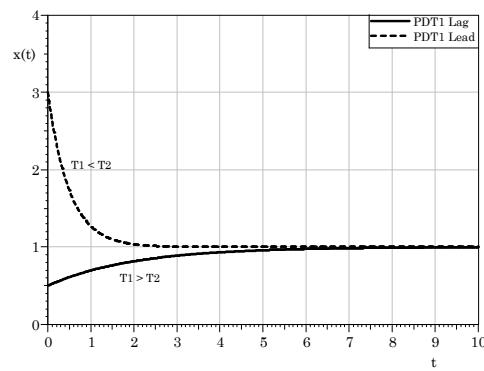
*Eigenschaften:* Hochpass 1. Ordnung, sprungfähig weil Zählergrad = Nennergrad

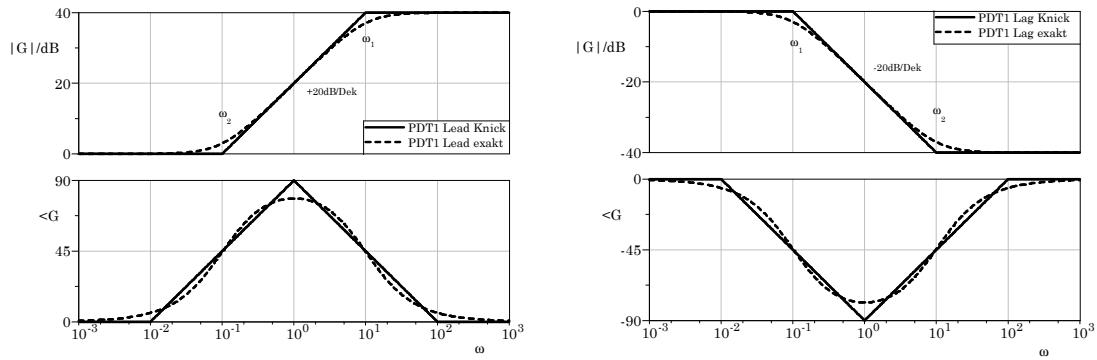
*Anwendung:* realer Differenzierer, Tendenzthermoelement, Variometer-Druckmessung, Gleichspannungsentkopplung

### 2.1.13.3 PDT<sub>1</sub>-Element Lead und Lag

$$\text{Lead: } G(s) = k \frac{1+sT_2}{1+sT_1}, T_2 > T_1, G_\infty = k \frac{T_2}{T_1}, G_0 = k, x_\infty = k, x'_\infty = 0, x_0 = k \frac{T_2}{T_1}, x'_{0+} = \frac{k(1 - \frac{T_2}{T_1})}{T_1}$$

$$\text{Lag: } G(s) = k \frac{1+sT_2}{1+sT_1}, T_1 > T_2, G_\infty = k \frac{T_2}{T_1}, G_0 = k, x_\infty = k, x'_\infty = 0, x_0 = k \frac{T_2}{T_1}, x'_{0+} = \frac{k(1 - \frac{T_2}{T_1})}{T_1}$$





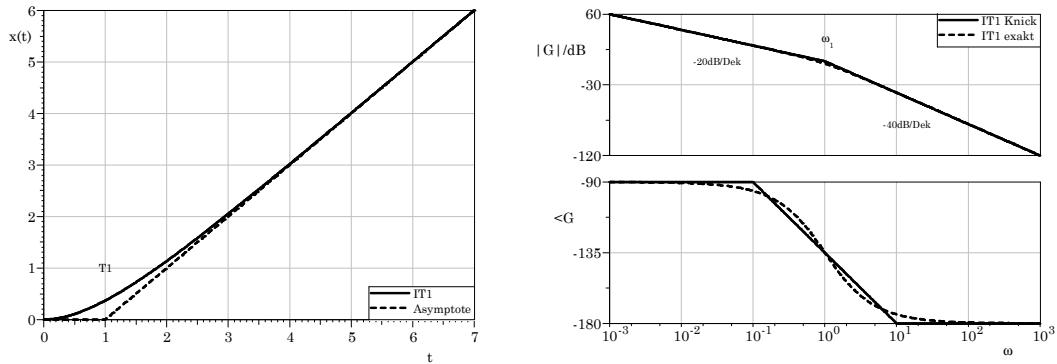
*Eigenschaften:* sprungfähig weil Zählergrad = Nennergrad, Kompensation bei  $T_1=T_2$

*Anwendung:* reale Standard-Reglerfunktion, Tastkopf Oszilloskop mit  $T_1=T_2$  als frequenzunabhängiger Spannungsteiler

#### 2.1.13.4 IT<sub>1</sub>-Element

$$G(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)}, G_\infty = 0, G_0 = \infty$$

$$x_\infty = \infty, x'_\infty = k, x_0 = 0, x'_0 = 0$$



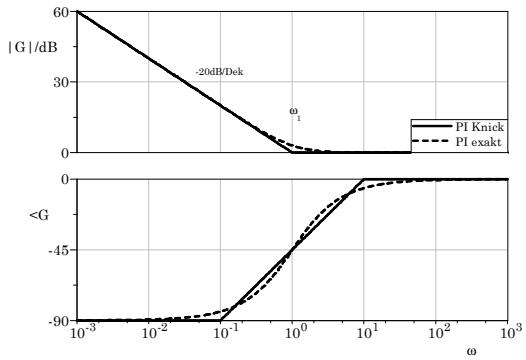
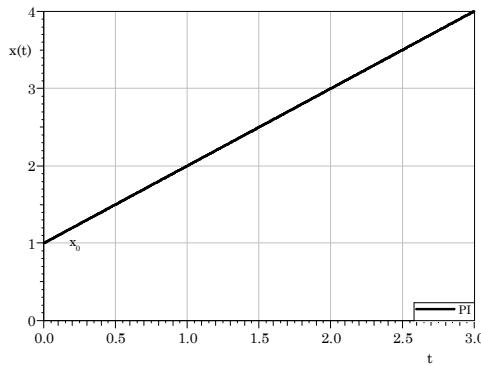
*Eigenschaften:* System ohne Ausgleich

*Anwendung:* oft gewünschte Übertragungsfunktion der offenen Regelschleife, Getriebe mit Positionierung, Füllstandspegel, Schiffskurs in Abhängigkeit der Ruderstellung

#### 2.1.13.5 PI-Element

$$G(s) = \frac{k(1+sT_N)}{sT_N}, G_\infty = k, G_0 = \infty$$

$$x_\infty = \infty, x'_\infty = \frac{k}{T_N}, x_0 = k, x'_{0+} = \frac{k}{T_N}$$



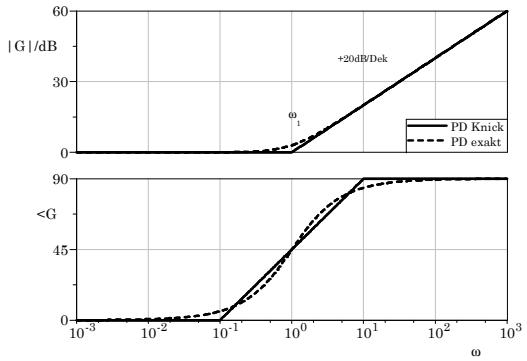
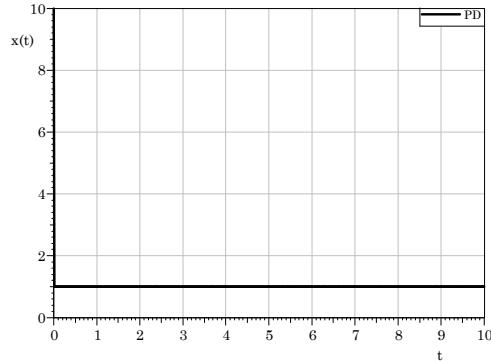
*Eigenschaften:* System ohne Ausgleich, sprungfähig weil Zählergrad = Nennergrad

*Anwendung:* Standard-Reglerfunktion

### 2.1.13.6 PD-Element

$$G(s) = k(1 + sT_V), G_\infty = \infty, G_0 = k$$

$$x_\infty = 0, x'_\infty = 0, x_0 = \infty, x'_0 = \infty$$



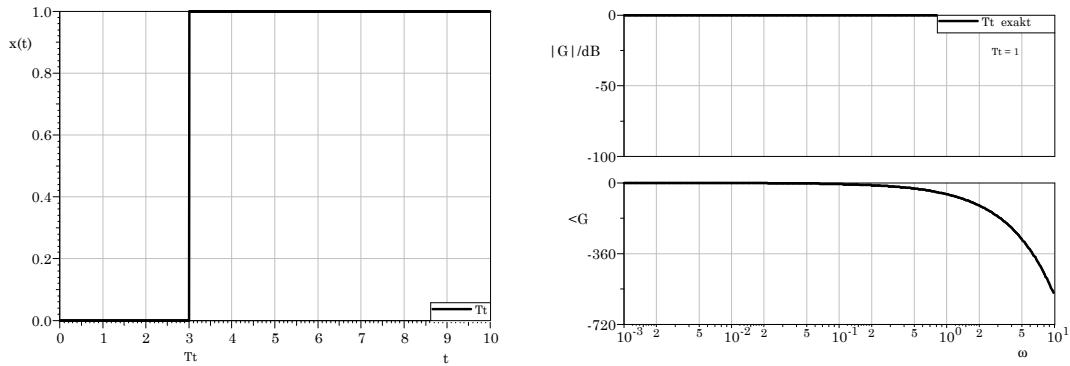
*Eigenschaften:* elementare reelle Nullstelle, praktisch nicht realisierbar wegen Zählergrad > Nennergrad

*Anwendung:* idealisierte Standard-Reglerfunktion

### 2.1.13.7 Totzeit-Element

$$G(s) = e^{-sT_t}, G_\infty = 1, G_0 = 1$$

$$x_\infty = 1, x'_\infty = 0, x_0 = 0, x'_0 = 0$$



Das Totzeitelement stellt eine Signalverzögerung um den Betrag der Totzeit her. Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G_{T_t}(j\omega) = e^{-j\omega T_t} = \cos \omega T_t - j \sin \omega T_t$$

Es ist leicht zu erkennen, dass der Betrag von  $|G_{T_t}(j\omega)| = 1$  ist und die Phase beliebige Werte annehmen kann  $\varphi = \text{atan} \frac{-\sin \omega T_t}{\cos \omega T_t} = \text{atan}(-\tan \omega T_t) = -\omega T_t$  und daher das System nicht phasenminimal ist. Die gesamte Übertragungsfunktion eines linearen Systems lautet dann:

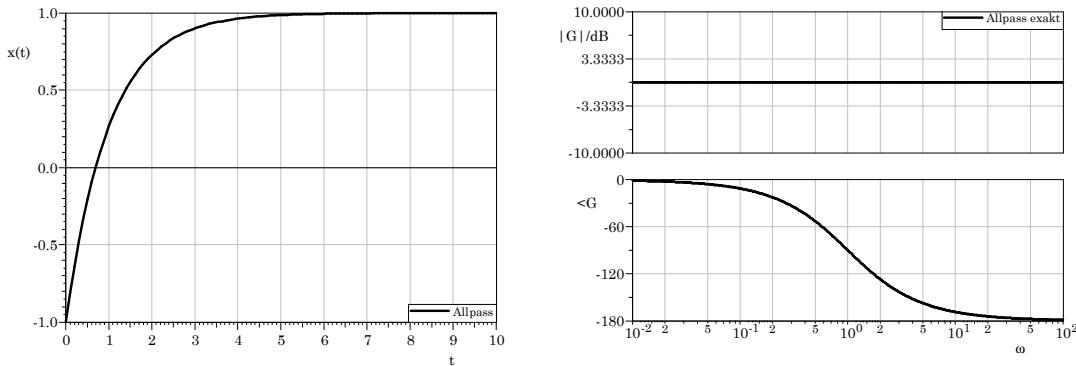
$$G(j\omega) = k \frac{\prod \left( \frac{j\omega}{\omega_{N_i}} - 1 \right)}{\prod \left( \frac{j\omega}{\omega_{P_k}} - 1 \right)} \prod \frac{j\omega}{\omega_{D_l}} e^{-j\omega T_t}$$

*Anwendung:* Förderbänder, Temperatur in Wasserleitungen, Lenkradspiel

### 2.1.13.8 Allpass

$$G(s) = k \frac{1-sT_1}{1+sT_1}, G_\infty = -k, G_0 = k$$

$$x_\infty = k, x'_\infty = 0, x_0 = -k, x'_{0+} = \frac{2k}{T_1}$$



Nullstellen in der rechten  $s$ -Halbebene werden typisch durch das Allpassverhalten beschrieben.

$$G_A(s) = \frac{1-sT_A}{1+sT_A}$$

Jedes lineare System mit Nullstelle in der rechten  $s$ -Halbebene kann aus einem phasenminimalen System und einem Allpass zusammengesetzt werden.

$$G(s) = \frac{(1-sT_A)(1+sT_3)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{(1+sT_A)(1+sT_3)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \frac{(1-sT_A)}{(1+sT_A)} = \frac{(1+sT_A)(1+sT_3)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} G_A(s)$$

Der Allpass besitzt über alle Frequenzen den Betrag  $|G_A(j\omega)| = 1$ . Die Phase ist doppelt so groß wie jene des Tiefpasses erster Ordnung und daher nicht phasenminimal:

$$\varphi = \text{atan} \frac{-\omega T_A}{1} - \text{atan} \frac{\omega T_A}{1} = -2 \text{atan} \omega T_A$$

Typisch für den Allpass ist auch das Ausschlagen der Sprungantwort in die "falsche" Richtung.

$$x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1-sT_A}{1+sT_A} = -1$$

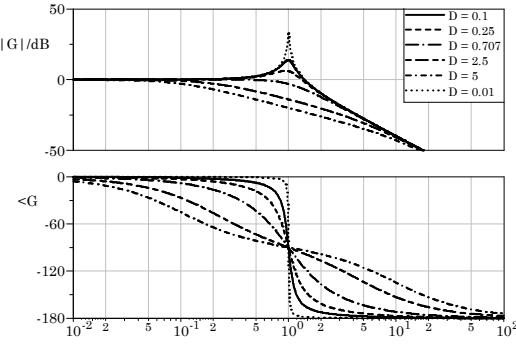
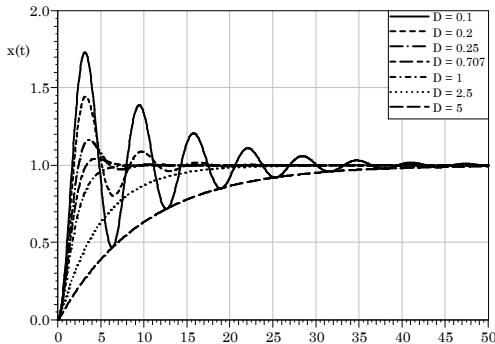
Anwendung: Turbinenleistung im Speicherkraftwerk

### 2.1.13.9 PT<sub>2</sub>-Element

$$G(s) = \frac{k}{1 + \frac{2Ds}{\omega_0^2} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}, G_\infty = 0, G_0 = k, D \begin{cases} < 1 \Rightarrow s_{12} = -\omega_0 D \pm j\omega_0 \sqrt{1-D^2} \\ \geq 1 \Rightarrow s_{12} = -\omega_0 D \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1} \end{cases}$$

$$x_\infty = k, x'_\infty = 0, x_0 = 0, x'_0 = 0, \ddot{u} = \frac{x_{\max} - x_\infty}{x_\infty} = e^{-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}}, T_{\ddot{u}} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}}$$

$$\text{Bode: } \ddot{u}_{res} = \frac{|G_{\max}|}{|G_0|} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}, D < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ddot{u}_{res} > 1$$



Eigenschaften: elementares komplexes Polpaar

**Sprungantwort:** Die Sprungantwort besitzt einen Wendepunkt, dies ist typisch für Systeme der Ordnung  $n \geq 2$ . Die Überschwingweite  $\ddot{u}$  in [%] stellt den Faktor der Überhöhung und  $T_{\ddot{u}}$  die zugehörige Zeit dar. Die Schwingfrequenz des Ausgleichsvorganges  $\omega_n$  weicht um die Resonanzverschiebung  $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$  von der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ab. Überschwingen tritt wegen des konjugiert komplexen Polpaares nur für  $D < 1$  auf. Für  $D = 1$  ergibt sich ein reeller Doppelpol, das Zeitverhalten stellt den aperiodischen Grenzfall dar.  $D > 1$  bewirkt zwei reelle Pole. **Bodediagramm:** Es ergibt sich eine ausschließlich von der Dämpfung  $D$  abhängige Resonanzüberhöhung  $\ddot{u}_{res}$ . Während das Überschwingen im Zeitbereich für  $D < 1$

existiert, ist die Resonanzüberhöhung nur für  $D < \frac{1}{\sqrt{2}}$  vorhanden. Für  $D > 1$  ergeben sich zwei Knickfrequenzen deren geometrisches Mittel die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ergibt.

$$\omega_{K1} = \omega_0 (D + \sqrt{D^2 - 1}), \quad \omega_{K2} = \omega_0 (D - \sqrt{D^2 - 1}), \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{K1}\omega_{K2}}$$

$$D \gg 1 \Rightarrow \omega_{K1} \approx 2D\omega_0, \quad \omega_{K1} \approx \frac{\omega_0}{2D}$$

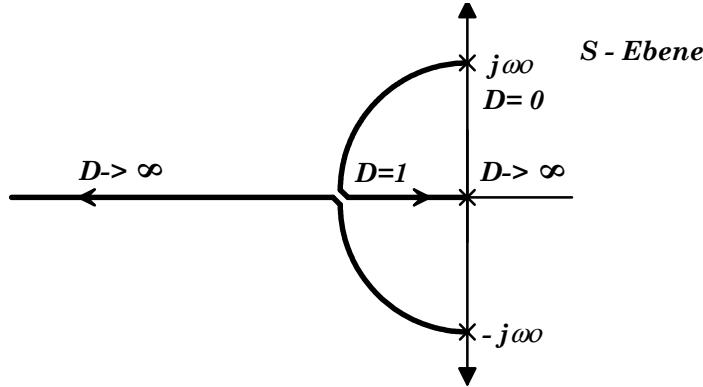
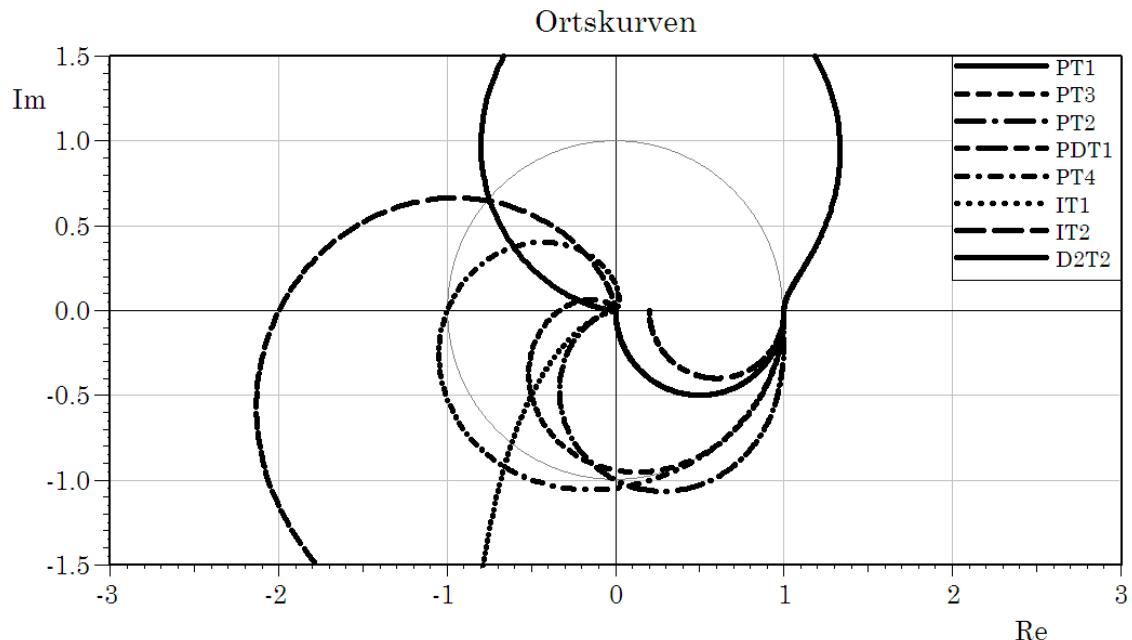


Bild Wurzelortskurve WOK

Anwendung: mechanische und elektrische Schwingkreise, elektromechanische Systeme wie Motoren, Schallwandler, Heizgeräte ...

### 2.1.14 Ortskurven

In vielen Bereichen hat die Ortskurve an Bedeutung verloren. In der Regelungstechnik werden besonders für Stabilitätsbetrachtungen Ortskurven verwendet. In der Ortskurve wird der Imaginärteil über dem Realteil der Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$  nach  $\omega$  parametrisiert aufgetragen. Für einige typische Systeme sind die Ortskurven der Übertragungsfunktion in nachfolgendem Bild zusammengefasst.



Eigenschaften:

- a) Die Systemordnung  $n$  entspricht der Anzahl der durchlaufenen Quadranten  $0 < \omega < \infty$ .
- b) Ortskurven stabiler Systeme werden im Uhrzeigersinn durchlaufen.
- c) Systeme mit Tiefpasscharakter enden im Ursprung bei  $\omega = \infty$ .
- d) Systeme mit Hochpasscharakter starten im Ursprung bei  $\omega = 0$ .
- e) Sprungfähige Systeme enden mit positivem Realteil bei  $\omega = \infty$ .
- f) Systeme mit Ausgleich starten auf der positiven reellen Achse  $\omega = 0$  und starten nach unten.
- g) Verläufe für Systeme ohne Ausgleich (mit Integralanteil) kommen aus dem Unendlichen bei  $\omega = 0$ .
- h) Totzeitbehaftete Systeme führen auf spiralförmige Ortskurven mit beliebiger Phasenlage.

### 2.1.15 Regelungsnormalform

Aus der Übertragungsfunktion eines linearen Systems  $n$ -Ordnung lässt sich, wie in nachfolgendem Bild, eine Darstellung aus  $n$  Integratoren ableiten. Der Weg wird hier aus Gründen der Einfachheit in die umgekehrte Richtung gezeigt.

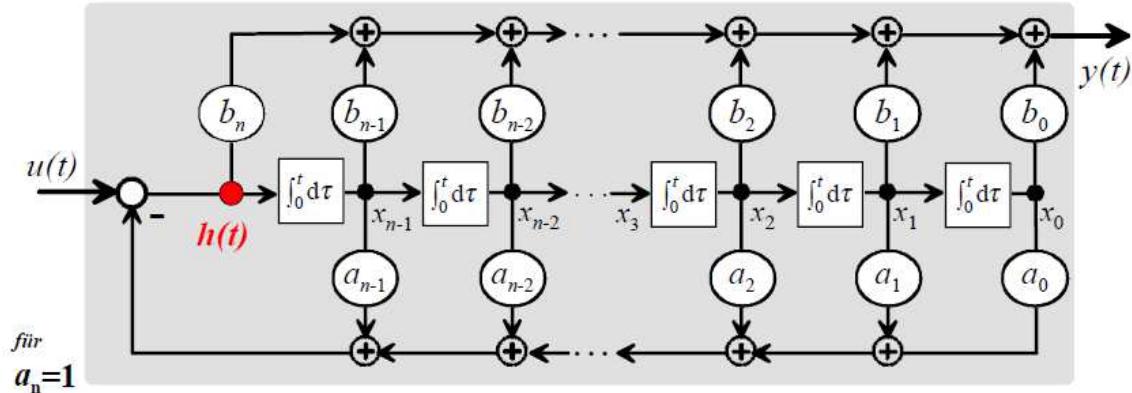
(Annahmen:  $a_n = 1$ ,  $n = m$ )

$$y(s) = b_0x(s) + b_1s x(s) + b_2s^2x(s) \dots + b_n s^n x(s) = (b_0 + b_1s + b_2s^2 \dots + b_n s^n)x(s)$$

$$s^n x(s) = u(s) - (a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1})x(s) \Rightarrow$$

$$u(s) = (a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n)x(s)$$

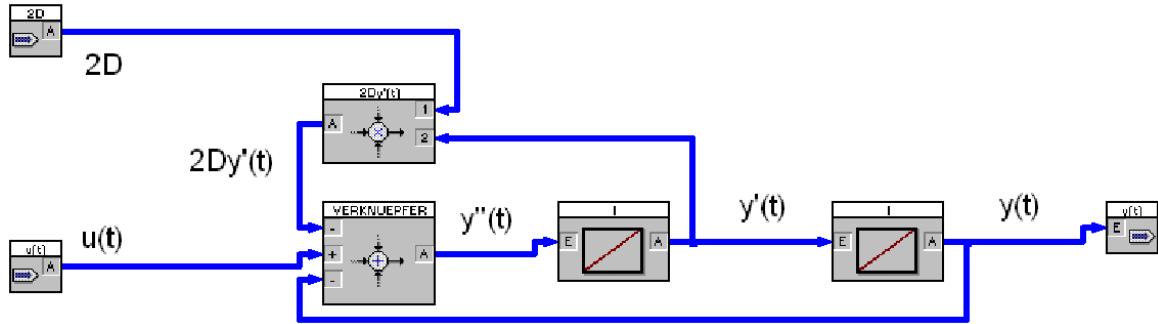
$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{(b_0 + b_1s + b_2s^2 \dots + b_{n-1}s^{n-1} + b_n s^n)x(s)}{(a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n)x(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 \dots + b_{n-1}s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$



Die RNF eignet sich zur Modellierung von Differenzialgleichungen mit Simulationsprogrammen besonders wenn einzelne Parameter  $a_n$ ,  $b_n$  gezielt verändert werden sollen.

Beispiel PT<sub>2</sub> mit variabler Dämpfung:

$$u(t) = \ddot{y}(t) + 2D\dot{y}(t) + y(t) \Rightarrow \ddot{y}(t) = u(t) - 2D\dot{y}(t) - y(t)$$

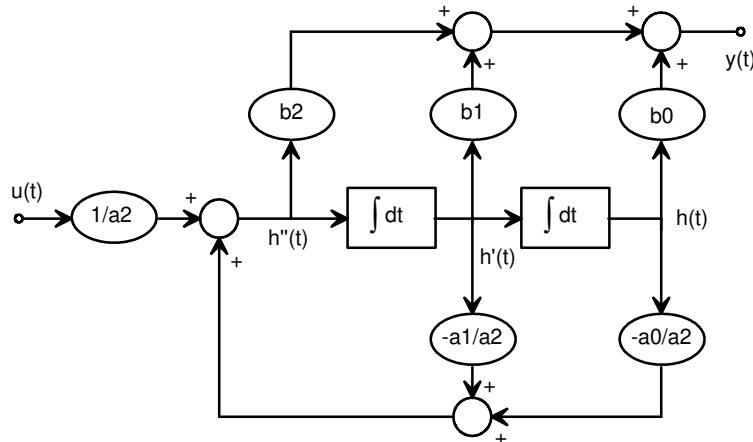
Bild PT<sub>2</sub> mit variabler Dämpfung

Weiters ist hiermit auch die Nachbildung nichtlinearer Differenzialgleichungen für den Fall  $b_1 \dots b_n = 0$  möglich, wenn anstatt der Parameter  $a_n$  nichtlineare Funktionen implementiert werden. Bei der Simulation nichtlinearer Systeme muss auf Differenzialgleichungen zurückgegangen werden. Der Fall  $a_n \neq 1$  lässt sich ebenfalls leicht nachbilden. Es wird hier am Beispiel eines PD<sub>2</sub>T<sub>2</sub>-Elements gezeigt.

$$y(s) = G(s)u(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} u(s) = (b_0 + b_1 s + b_2 s^2)h(s) \Rightarrow h(s) = u(s) \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

$$u(t) = a_0 h(t) + a_1 \dot{h}(t) + a_2 \ddot{h}(t) \Rightarrow y(t) = b_0 h(t) + b_1 \dot{h}(t) + b_2 \ddot{h}(t)$$

$$\ddot{h}(t) = \frac{1}{a_2} u(t) - \frac{a_0}{a_2} h(t) - \frac{a_1}{a_2} \dot{h}(t)$$

Bild Regelungsnormalform RNF eines PD<sub>2</sub>T<sub>2</sub>-Elementes

### Übungsbeispiele DG1)-DG5)

#### 2.1.16 Zustandsraumdarstellung

Ein lineares System kann entweder durch *eine* Differenzialgleichung  $n$ . Ordnung oder durch ein System von  $n$  Differenzialgleichungen 1. Ordnung, den Zustandsgleichungen beschrieben werden. Die  $n$  Differenzialgleichungen werden durch  $n$  Zustandsvariablen charakterisiert  $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)$ . Die Gesamtheit aller  $n$  linear unabhängigen Zustandsvariablen beschreibt den inneren Zustand des Systems vollständig. Aus der

Regelungsnormalform können die Zustandsvariablen durch zeitliche Ableitung gebildet werden.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x'_0 &= 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (2) \quad x'_1 &= 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\
 (3) \quad x'_2 &= 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\
 &\vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
 (n-1) \quad x'_{n-2} &= 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{n-1} \\
 (n) \quad x'_{n-1} &= -a_0 x_0 & -a_1 x_1 & -a_2 x_2 & -a_3 x_3 & \cdots & -a_{n-1} x_{n-1} + u
 \end{aligned}$$

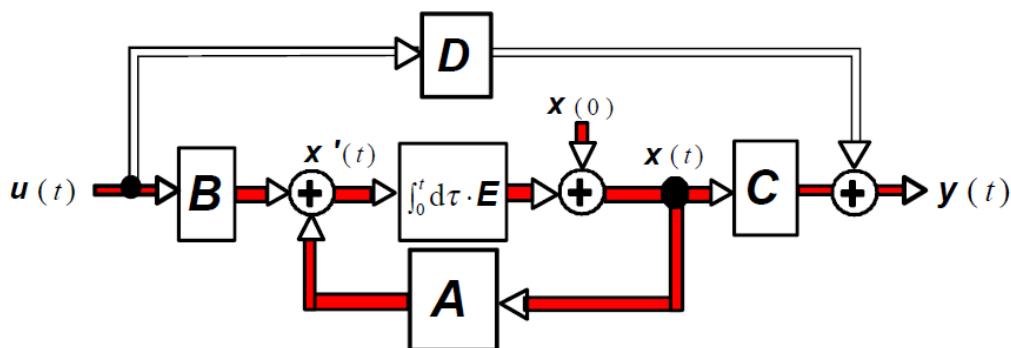
Für das Ausgangssignal  $y(t)$  erhält man aus der RNF:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_{n-1} x_{n-1} + b_n x'_{n-1} \\
 y(t) &= (b_0 - b_n a_0) x_0 + (b_1 - b_n a_1) x_1 + (b_2 - b_n a_2) x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_{n-1} + b_n u \\
 y(t) &= c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_{n-1} x_{n-1} + b_n u \quad \text{mit } c_v := (b_v - b_n a_v)
 \end{aligned}$$

Wird das Gleichungssystem in Form von Matrizen dargestellt, spricht man von der Zustandsraumdarstellung.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Zustandsgleichung} & \mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \\
 \text{Ausgangsgleichung} & y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d u \quad \text{mit} \\
 \text{Zustandsvektor } \mathbf{x} & (\text{n}) \quad \text{Systemmatrix } \mathbf{A} \quad (\text{n} \times \text{n}) \quad \text{Eingangsvektor } \mathbf{b} \quad \text{Ausgangsvektor } \mathbf{c} \\
 \mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} & \mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} := \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Nachfolgendes Bild zeigt die Zustandsraumdarstellung eines linearen Systems  $n$ -Ordnung symbolisch. Die Matrix  $\mathbf{D}$  ist nur bei der Beschreibung sprungfähiger Systeme erforderlich. Die Doppellinien zwischen den Blöcken deuten auf Mehrfachverbindungen hin. Im Fall eines Eingrößensystems besteht die Größe  $u(t)$  und  $y(t)$  aus einer Leitung.



### 2.1.17 Schrittweite für Simulationsprogramme

Kontinuierliche Systeme werden auf digitalen Rechnern als diskrete Systeme nachgebildet. Der Rechenvorgang kann sich im Ablauf eines Signals nur schrittweise vorwärts bewegen.

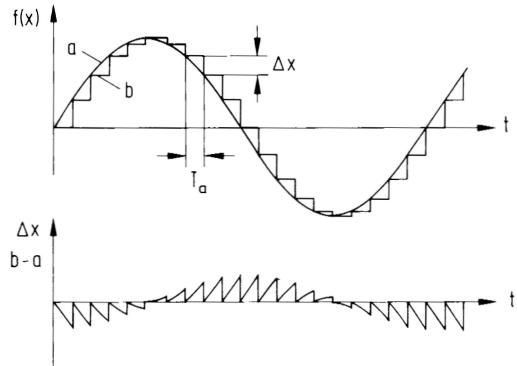


Bild Zeitdiskretes Signal

Diese Abtastschritte haben eine endliche Schrittweite, was zu Fehlern in der Berechnung der Signalwerte führt. Sind die Schritte hinreichend klein, kann das Systemverhalten mit geringem Fehler nachgebildet werden. Man spricht von quasikontinuierlichem Verhalten. Dies führt zum Schluss die Schrittweite so klein wie möglich zu wählen, was jedoch auf eine enorme Rechenzeit und somit zur Verlangsamung der Simulation führt. Es ist ein **Kompromiss** aus zu **großem Fehler** und zu **stark erhöhter Simulationsdauer** zu wählen. Für Simulationen mit konstanten Schrittweite kann nachfolgende Vorgehensweise gewählt werden:

- Soll ein Sinusgenerator simuliert werden kann die Simulationsschrittweite als  $\frac{1}{1000} \div \frac{1}{100}$  der Periodendauer gewählt werden.
- Soll ein PT<sub>1</sub>-Element mit Sprungsignal simuliert werden (Sinusgenerator fehlt), ist die Periodendauer  $T_{PE}$  der Grenz-, Knick- oder Eigenfrequenz  $\omega_1$  heranzuziehen. Die Schrittweite ergibt sich ebenfalls wieder aus  $\frac{1}{1000} \div \frac{1}{100}$  dieser Periodendauer.

$$\Delta T_S \leq \frac{T_{PE}}{100} = \frac{2\pi}{100\omega_1} = \frac{2\pi T_1}{100} = 0.06T_1 \Rightarrow \Delta T_S \lesssim 5\% \text{ von } T_1 \quad T_1 \dots \text{Zeitkonstante}$$

- Soll ein Integrator mit Sprungsignal simuliert werden, ist die Durchtritts- oder Transitfrequenz  $\omega_i$  heranzuziehen.

$$\Delta T_S \leq \frac{2\pi}{100\omega_i} = \frac{2\pi T_i}{100} = 0.06T_i \Rightarrow \Delta T_S \lesssim 5\% \text{ von } T_i$$

- Soll ein schwingungsfähiges PT<sub>2</sub>-Element mit Sprungsignal simuliert werden, ist die Periodendauer der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  heranzuziehen.

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0}s + 1 \Rightarrow \Delta T_S \leq \frac{2\pi}{100\omega_0} = \frac{0.063}{\omega_0} \Rightarrow \Delta T_S \lesssim \frac{0.05}{\omega_0}$$

- Sind mehrere Eigenfrequenzen im System, ist die Periodendauer der höchsten Eigenfrequenz heranzuziehen (= niedrigste Periodendauer). Dies gilt sinngemäß auch, wenn zusätzlich Sinusgeneratoren in der Simulation enthalten sind.

f) Ist die Simulationsrechenzeit dennoch zu hoch, kann der Faktor für die niedrigste Periodendauer auf ein  $\frac{1}{10}$  erhöht werden.

g) Sind Nichtlinearitäten im System ist möglicherweise ein experimenteller Versuch erforderlich.

$$u(t) = 5 \sin(5t) \Rightarrow \omega = 5 \Rightarrow f = \frac{5}{2\pi} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \Delta T_S \lesssim \frac{2\pi}{500} \approx 0.013$$

$$G(s) = \frac{3}{1+4s} \Rightarrow T_1 = 4 \Rightarrow \Delta T_S \lesssim 0.2 = 5\% \text{ von } T_1$$

$$G(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow \omega_i = \frac{1}{T_i} = 2 \Rightarrow \Delta T_S \lesssim 0.025 = 5\% \text{ von } T_i$$

$$G(s) = \frac{3}{1+0.5s+s^2} \Rightarrow \omega_0 = 1 \Rightarrow \Delta T_S \lesssim 0.05 = 5\% \text{ von } \frac{1}{\omega_0}$$

$$G(s) = \frac{3}{1+6s+8s^2} = \frac{3}{(1+4s)(1+2s)} \Rightarrow T_1 > T_2 = 2 \Rightarrow \Delta T_S \lesssim 0.1 = 5\% \text{ von } T_2$$

**Faustformel:** Die Simulationsschrittweite  $\Delta T_S$  sollte kleiner 5% der kleinsten Systemzeitkonstante sein.

### Übungsbeispiele SW1)-SW7)

### 3      Analoge Regelungstechnik (RT)

#### 3.1    Standardregelkreis

Generell stellt sich die Frage: Warum benötigt man einen Regelkreis?  
Es sind zwei wesentliche Begriffe zu klären:

##### a) **Steuern**

Wird ein System mit einer Stellgröße beaufschlagt, stellt sich in den meisten Fällen ein stabiler Endwert ein. Es ist keine Rückwirkung der Ausgangsgröße auf die Eingangsgröße vorhanden.

- a.) Löt Kolben an die Steckdose > zB. nach 5min 300°C Endtemperatur erreicht
- b.) Potenziometer in Mittelstellung > Spannung am Schleifer = halbe Versorgungsspannung

Oft reicht diese Form des Einstellens aus.

##### b) **Regeln**

Von Regeln spricht man, wenn die Ausgangsgröße zum Eingang mit negativem Vorzeichen rückgekoppelt wird. Man spricht auch von Gegenkopplung. Regeln ist in zwei Fällen erforderlich:

a.) **Festwertregelung**; Störungen die von außen aufgebracht werden sollen ausgeglichen werden. Bei einem ungeregelten Löt Kolben sinkt die Temperatur der Lötspitze wenn gelötet wird. Dies ist besonders bei thermisch gut leitenden Kupferflächen problematisch. Ein Regler wird dazu benutzt um zusätzliche Leistung zuzuführen, damit die Temperatur auch beim Löten konstant gehalten werden kann.

b.) **Folgeregelung**; soll ein System rasch unterschiedliche Wert einnehmen können, ist ein Regler in der Lage die Energiezufuhr bei einem Sollwertsprung kurzzeitig zu maximieren, um damit den Vorgang zu beschleunigen. Ist der Sollwert erreicht, kann die Energie auf das erforderliche Maß reduziert werden.

**Eine Regelung hat daher die Aufgabe Störungen zu unterdrücken und Sollwertänderung rasch und genau umzusetzen.**

Für folgende Systeme sind Störungen, die physikalische Größe und die Einheit von Sollwerten zu nennen:

- a.) IC-Spannungsregler, b.) geregelte Herdplatte, c.) geregelter Antrieb einer Bohrmaschine, d.) Fahrender PKW mit Tempomat, e.) Raumheizung mit Thermostat

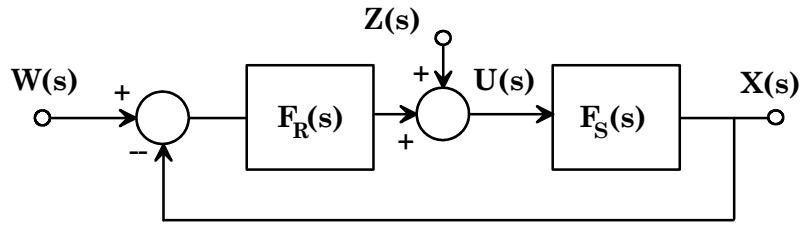


Bild Standardregelkreises mit Störungs- und Führungssignal

$$[[W(s) - X(s)]F_R(s) + Z(s)]F_S(s) = X(s)$$

$$\Rightarrow W(s)F_R(s)F_S(s) + Z(s)F_S(s) = X(s) + X(s)F_R(s)F_S(s) = X(s)[1 + F_R(s)F_S(s)]$$

$$\Rightarrow W(s)\frac{F_R(s)F_S(s)}{1+F_R(s)F_S(s)} + Z(s)\frac{F_S(s)}{1+F_R(s)F_S(s)} = X(s) = W(s)F_W(s) + Z(s)F_Z(s)$$

mit  $F_W(s) = \frac{F_R(s)F_S(s)}{1+F_R(s)F_S(s)} = \frac{F_0(s)}{1+F_0(s)}$  .... Führungsübertragungsfunktion

und  $F_Z(s) = \frac{F_S(s)}{1+F_R(s)F_S(s)} = \frac{F_S(s)}{1+F_0(s)}$  .... Störungsübertragungsfunktion

### 3.2 Regelstrecken

Zum gezielten Entwurf von Regelungen ist die genaue Kenntnis des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke, also des zu regelnden Systems, notwendig. Die Gewinnung des Modells in Form einer Übertragungsfunktion heißt Modellbildung.

- a.) theoretische Modellbildung durch Berechnung
- b.) experimentelle Bestimmung durch Identifikation

#### 3.2.1 Theoretische Modellbildung

In elektrischen, mechanischen und elektromechanischen Systemen kann ein Modell oft durch Berechnung ermittelt werden.

##### 3.2.1.1 Spindelgetriebe

Ein mit Gleichspannung versorgter Motor stellt über ein Schneckenrad einen Schieber dessen Position als Messgröße ausgegeben wird. Typisch für ein derartiges Getriebe ist, dass bei anlegen einer konstanten Motorspannung und damit konstanter Drehzahl die Position des Schiebers ständig linear anwächst. Die Position wird oft mit dem Schleifer eines gekoppelten Potenziometers ausgegeben.

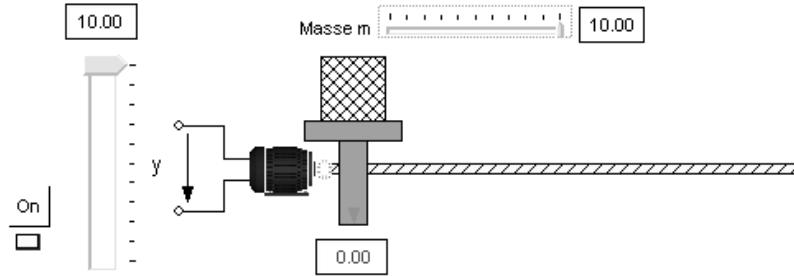


Bild Geräteplan Motor-Spindelantrieb-Positionsgeber

Spannung und Drehzahl sind proportional. Die Position hingegen entspricht dem Integral der Spannung bzw. Drehzahl.

$k_n$  Proportionalitätsfaktor Spannung-Drehzahl [ $\frac{\text{Umdrehung}}{\text{V}}$ ]

$k_g$  Proportionalitätsfaktor Getriebesteigung [cm / Umdrehung]

$k_m$  Proportionalitätsfaktor Messabgriff [V / cm]

(zugeführte Größe steht unter dem Bruchstrich)

$$F_s = \frac{k_n k_g k_m}{s} \quad \frac{\text{Umdrehung/s}}{\text{V}} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{Umdrehung}} \cdot \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot \frac{1}{\text{s}^{-1}} = 1$$

Der Übergang im Motor zwischen Spannung und Drehzahl ist normalerweise mit Verzögerung anzusetzen. Der Motor kann nicht sprunghaft beschleunigen, man könnte dies mit einer zusätzlichen Zeitkonstante als PT<sub>1</sub>-Glied (bzw. PT<sub>2</sub>) berücksichtigen.

( $T_m$  .... Zeitkonstante des Motors)

Die endgültige Funktion lautet:  $F_s = \frac{k_n k_g k_m}{s(1+sT_m)}$  .... IT<sub>1</sub>-Verhalten

### 3.2.1.2 Gleichstrommotor

Die Drehzahl eines Gleichstrommotors mit Permanentmagneten wird über die Spannungsversorgung gesteuert und von der Belastung beeinflusst ( $U$ ,  $M_L$  ... Eingangsgrößen,  $\omega$  ... Ausgangsgröße).

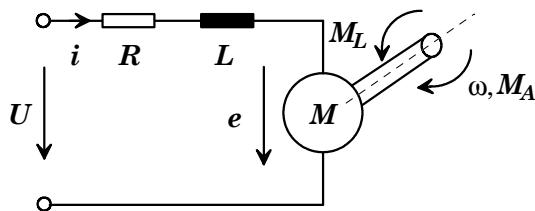


Bild Ersatzschaltung Gleichstrommotor

( $U$  äußere Motorspannung,  $e$  induzierte Spannung,  $R$  Ankerwiderstand,  $L$  Ankerinduktivität,  $i$  Ankerstrom,  $\omega$  Winkelgeschwindigkeit,  $\dot{\omega}$  Winkelbeschleunigung,  $M_A$  Antriebsmoment,  $M_L$  Lastmoment,  $M_R$  Reibungsmoment,  $J$  Rotorträgheitsmoment,  $k_1$ ,  $k_2$  Proportionalitätskonstanten,  $T_A$  Ankerkreiszeitkonstante,  $T_M$  mechanische Motorzeitkonstante)

$$U - e = R i + L \frac{di}{dt}$$

... elektrische Maschengleichung

$$e = k_2 \omega$$

... Induktionsgesetz

$$M_A = k_1 i$$

... elektromechanische Kopplung, Kraftübertragung

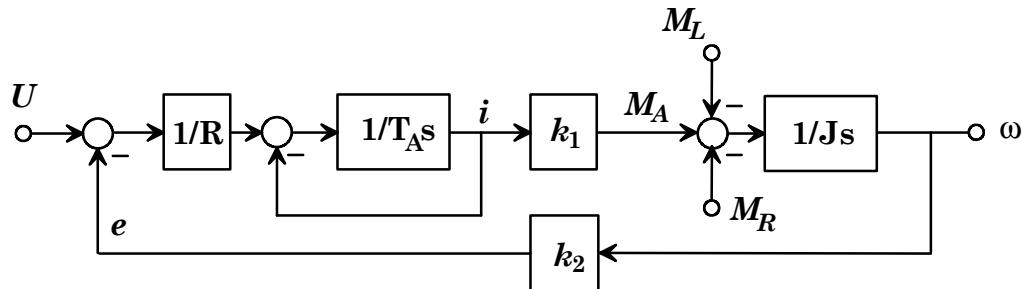
$$J \dot{\omega} = M_A - M_L - M_R$$

... Bewegungsgleichung

vereinfacht:

$$U - k_2 \omega = R i + L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{1}{R}(U - k_2 \omega) = i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} = i + T_A \frac{di}{dt}$$

$$J \dot{\omega} = k_1 i - M_L - M_R \Rightarrow \omega = \frac{1}{J} \int (k_1 i - M_L - M_R) dt$$



$$\left( (U - \omega k_2) \frac{k_1}{R(1+sT_A)} - (M_L + M_R) \right) \frac{1}{Js} = \omega \Rightarrow U \frac{k_1}{R(1+sT_A)} - (M_L + M_R) = \left( Js + \frac{k_1 k_2}{R(1+sT_A)} \right) \omega$$

$$\frac{U}{k_2} - \frac{(M_L + M_R)}{k_1 k_2} R(1 + sT_A) = \left( \frac{JR}{k_1 k_2} s(1 + sT_A) + 1 \right) \omega = (T_M s(1 + sT_A) + 1) \omega$$

$$\omega = \frac{U}{k_2} \frac{1}{s^2 T_M T_A + s T_M + 1} - \frac{(M_L + M_R) R}{k_1 k_2} \frac{1 + sT_A}{s^2 T_M T_A + s T_M + 1}$$

... Motordrehzahl  $\omega$  in Abhängigkeit von  $U \Rightarrow PT_2$  und  $M_L \Rightarrow PDT_2$

Beispiel: GM Transmotec D109141-24, ( $R, L$  und  $J$  aus zusätzlichen Messungen)

MOTOR DATA		AT MAX EFFICIENCY							WEIGHT (Kg)
MODEL	NOMINAL VOLTAGE (VDC)	NO LOAD SPEED (RPM)	NO LOAD CURRENT (A)	SPEED (RPM)	CURRENT (A)	TORQUE (Kg-cm)	WATT (W)	EFF (%)	
D109141-12	12	2700	10.6	2280	31.5	9	380	56	3.44
D109141-24	24	2700	5.8	2340	16.6	9.9	410	62	3.44

$$R = 0.3 \Omega, L = 10 mH, M_N = 9.9 kg cm = 0.971 Nm, \omega_0 = 2\pi \frac{n_0}{60} = 282.7 s^{-1}, J = 0.01 kg m$$

$$k_1 = \frac{M_N}{i_{N-i_0}} = 0.09 \frac{Nm}{A}, k_2 = \frac{U-Ri_0}{\omega_0} = 0.079 Vs, M_R = k_1 i_0 = 0.522 Nm, T_A = \frac{L}{R} = 33 ms$$

$$T_M = \frac{JR}{k_1 k_2} = 0.437 s$$

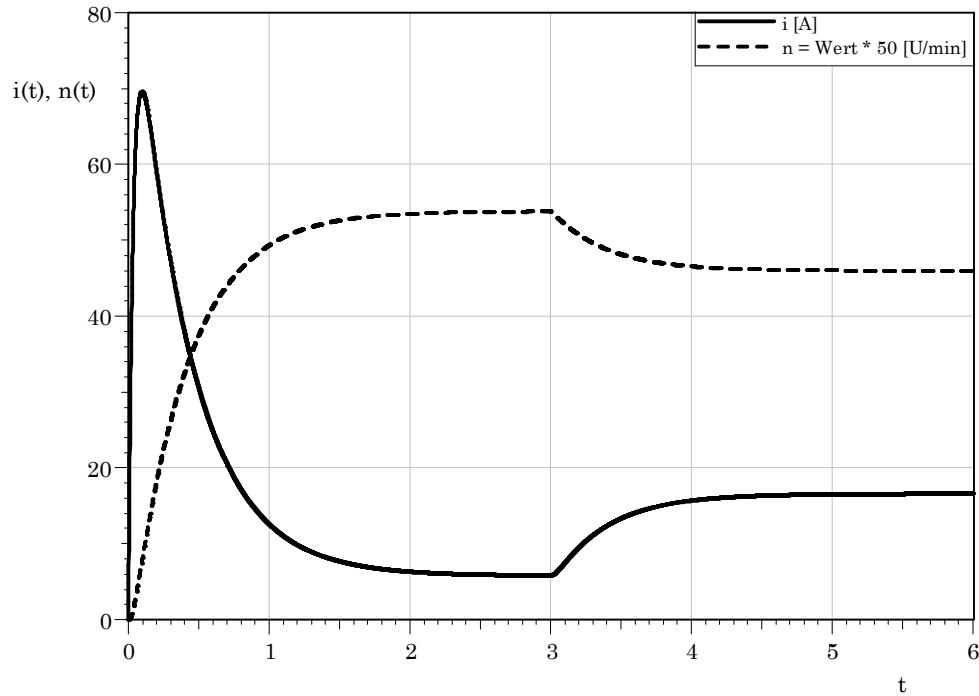


Bild GSM Anlauf im Leerlauf mit  $U$  und Lastsprung auf  $M_N$  nach  $t = 3\text{s}$

Wie ist die Simulationsschrittweite zu wählen? ( $\Delta T_S \lesssim 1.6\text{ms} \approx 5\%$  von  $T_A$ )

### 3.2.1.3 Wasserkessel

Ein gefüllter Wasserkessel mit integrierter Heizung soll bei variablem Füllstand modelliert werden. Zwei verzögernde Komponenten dominieren das Verhalten. Zum ersten besitzt die Wassermenge eine Wärmekapazität und einen thermischen Widerstand an die Umgebung. Zum zweiten benötigt die Heizung eine gewisse Zeit bis die Wärme von der Heizwendel zum Kessel übertragen wird.

$T_w$  Zeitkonstante der Wassermasse

$T_e$  Zeitkonstante des Kessels

$k_p$  Proportionalitätsfaktor Leistung-Temperatur [K/W]

Annahme:  $V = 0.25 \text{ Liter Wasser}, c_{th} = 4.18 \text{ kJ/kgK}, R_{th} = 83.3 \text{ mK/W}, \rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$

$$T_w = R_{th} C_{th} = R_{th} c_{th} m = R_{th} c_{th} \rho_w V_{\max} = 8680 \text{ s}, T_e = 500 \text{ s}$$

$$P = 2200 \text{ W}, k_p = R_{th} = 83.3 \text{ mK/W}, (\vartheta_\infty = 183^\circ \text{ theoretisch})$$

$$F_S(s) = \frac{k_p}{(1+sT_w)(1+sT_e)} \quad \dots \text{nichtschwingendes PT}_2\text{-Verhalten}$$

Die angeführte Übertragungsfunktion vernachlässigt die Begrenzung der Temperatur infolge des Kochens ( $T_{\max} = 9_{\max} + T_u = 100^\circ\text{C}$ ) und den Einfluss der variablen Füllmenge. Sollen Parameter einer Übertragungsfunktion während der Simulation steuerbar sein muss die Differenzialgleichung modelliert werden. Für die Begrenzung durch die Kochtemperatur ist ein AntiWindUp-Integrator mit variabler Obergrenze infolge der variablen Umgebungstemperatur  $T_u$  erforderlich.

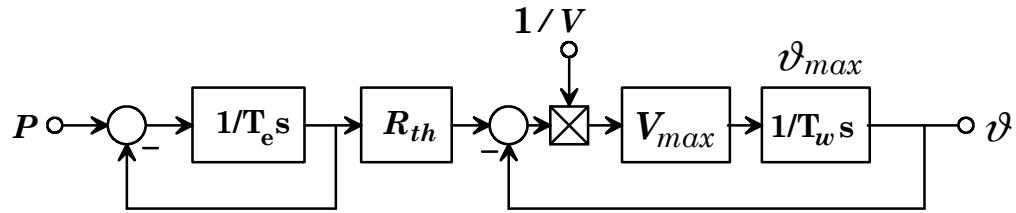


Bild: nichtlinearer Regelkreis mit Begrenzung und Parametervariation

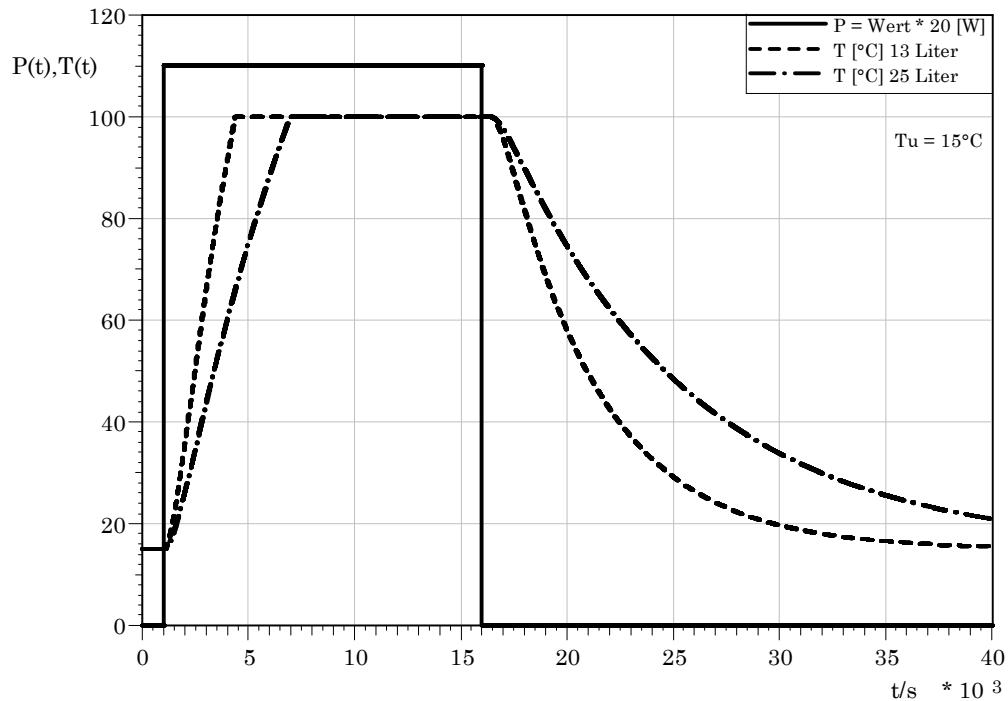
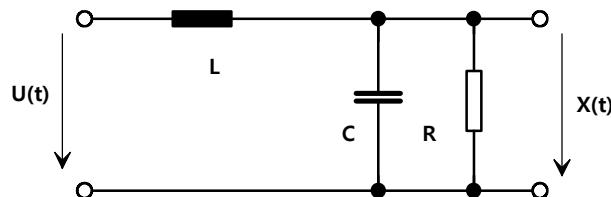


Bild Erwärmungs- und Abkühlvorgang im Wasserkessel

Scheinbar besteht der Vorgang für Erwärmung und Abkühlung aus zwei verschiedenen Zeitkonstanten. Wie ist die Simulationsschrittweite zu wählen?  
 $(\Delta T_S \lesssim 25s \approx 5\% \text{ von } T_e < T_w)$

### 3.2.1.4 Siebglied

In elektronischen Schaltungen wie DC/DC-Wandlern werden LC-Siebglieder zur Glättung verwendet. Nimmt man eine ohmsche Last als Widerstand  $R$  an, so ergibt sich eine RLC-Schaltung als Strecke. Bei Laständerung variiert allerdings die Übertragungsfunktion.



$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{R}{sC}}{\frac{R+sC}{sL+\frac{R}{sC}}} = \frac{\frac{R}{sRC+1}}{sL+\frac{R}{sRC+1}} = \frac{R}{s^2RLC+sL+R} = \frac{1}{s^2LC+s\frac{L}{R}+1} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0}s + 1} \quad \dots \text{PT}_2\text{-Verhalten}$$

Beispiel:  $R = 5\Omega$ ,  $C = 100\mu\text{F}$ ,  $L = 660\mu\text{H}$ ,  $D = ?$ ,  $f_0 = ?$

$$\frac{2D}{\omega_0} = \frac{L}{R} = 2D\sqrt{LC} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{L}{2\sqrt{LC}R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{2R} = 0.257, f_0 = 619\text{Hz}$$

Soll das System mit variabler Last simuliert werden, so ist, wie im Abschnitt RNF gezeigt, ein  $\text{PT}_2$ -Element mit variabler Dämpfung zu modellieren.

Wie ist die Simulationsschrittweite zu wählen? ( $D < 1 \Rightarrow \Delta T_S \lesssim 13\mu\text{s} \approx 5\% \text{ von } \sqrt{LC}$ )

### Übungsbeispiele SG1)-SG7)

#### 3.2.1.5 Laufkatze

Als Laufkatze wird der Wagen mit Seillast, der auf dem Ausleger eines Krans fährt, bezeichnet. Gesucht ist das Streckenmodell für die Greiferposition. Aus der Annahme der Rückwirkungsfreiheit (der schwingende Greifer beeinflusst die Laufkatze nicht) folgt ein stark vereinfachtes linearisiertes Modell:

$M \gg m$  .... Massen,  $S$  ... Seilkraft,  $r\dot{y}$ .... Luftwiderstand (Näherung)

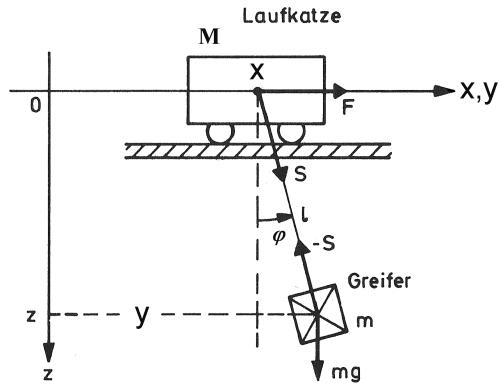


Bild Laufkatze mit Greifer

$$\text{Horizontal } x,y\text{-Richtung: } m\ddot{y}(t) = S(t) \sin \varphi(t) - r\dot{y}(t)$$

$$\text{Vertikal } z\text{-Richtung: } S(t) \cos \varphi(t) = mg \Rightarrow S(t) = \frac{mg}{\cos \varphi(t)}$$

$$m\ddot{y} = mg \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - r\dot{y} = mg \tan \varphi - r\dot{y} \approx mg \frac{x-y}{l} - r\dot{y}$$

$$\ddot{y} \approx g \frac{x-y}{l} - \frac{r}{m}\dot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{r}{m}\dot{y} + \frac{g}{l}y \approx \frac{g}{l}x \Rightarrow G_{LK}(s) = \frac{\frac{g}{l}}{s^2 + \frac{r}{m}s + \frac{g}{l}} = \frac{1}{\frac{l}{g}s^2 + \frac{lr}{gm}s + 1}$$

$$\text{PT}_2\text{-Strecke: } \frac{g}{l} = 20\text{s}^{-2}, \frac{r}{m} = 0.1\text{s}^{-1}, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 4.47\text{s}^{-1}, T_0 = \frac{1}{\omega_0} = 0.22\text{s}, D = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{r}{2m} = 0.011$$

Weil der Wagen nicht ruckartig bewegt werden kann, hat der Antrieb  $G_A(s)$  der MagA

Laufkatze  $G_{LK}(s)$  näherungsweise IT<sub>1</sub>-Verhalten, vergleichbar mit einem Getriebe.

$$(T_1 = 0.5s, k_S = 0.1 \frac{m s^{-1}}{V}, u_{\max} = 10V, x_{\max} = 1m)$$

$$\frac{x(t)}{u(t)} = G_A(s) = \frac{k_S}{s(1+sT_1)}, \quad S(s) = G_A(s)G_{LK}(s) = \frac{k_S}{s(1+sT_1)} \frac{1}{\frac{l}{g}s^2 + \frac{lr}{gm}s + 1}$$

Darstellung als gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\ddot{y}(t) \approx -\frac{r}{m}\dot{y}(t) + \frac{g}{l}(x(t) - y(t)), \quad \sin \varphi(t) = \frac{x(t) - y(t)}{l}, \quad T_1 \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = k_S u(t)$$

Eingangsgröße der Regelstrecke:  $u(t)$

Ausgangsgrößen der Regelstrecke:  $x(t), y(t), \varphi(t)$

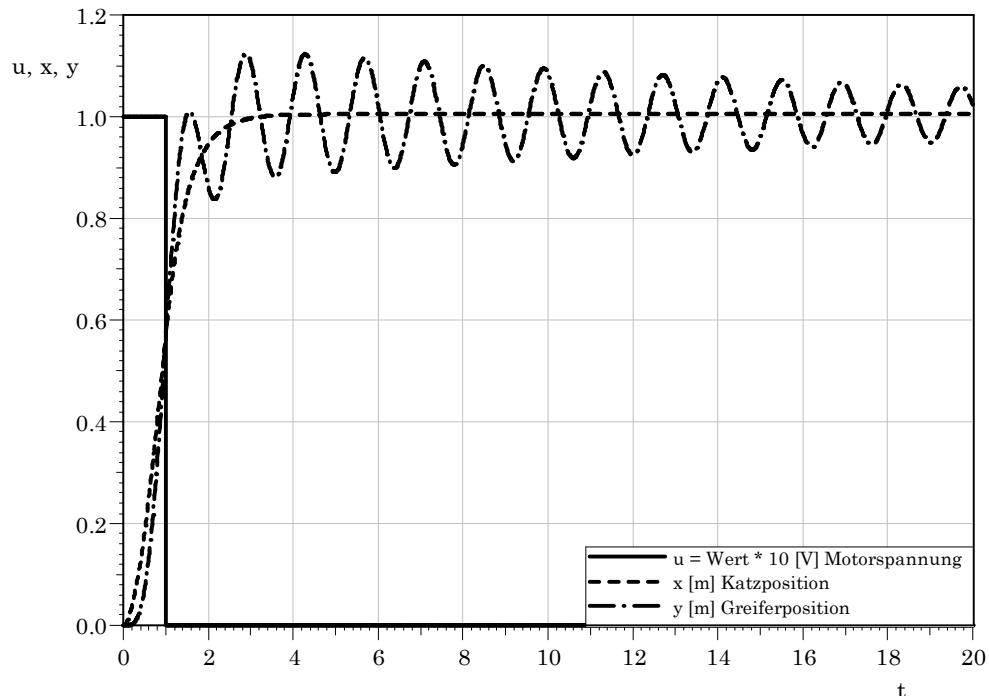


Bild Zeitlicher Verlauf der Position von Katze und Greifer bei kurzzeitigem Schub

Welches Verhalten ergibt sich? (IT<sub>3</sub> mit komplexem Polpaar) Wie ist die Simulationsschrittweite zu wählen? ( $\Delta T_S \lesssim 11ms \approx 5\% \text{ von } T_0 < T_1 < k_S \frac{u_{\max}}{x_{\max}}$ )

### 3.2.1.6 Tank

Es soll der Füllstand eines Tanks mit Zulauf- und Ablaufventil modelliert werden.

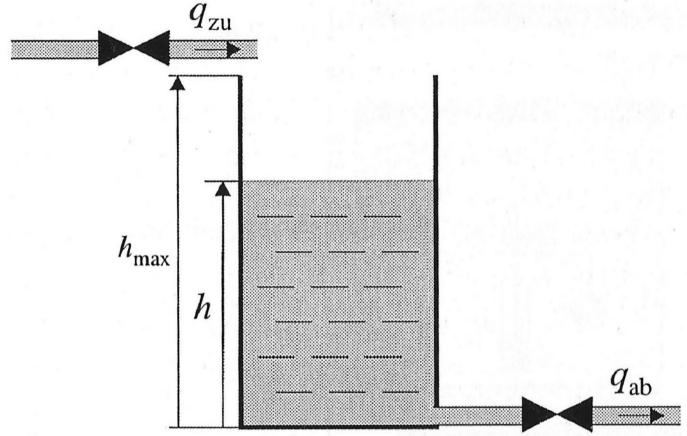


Bild Tank mit Zu- und Ablauf

Es wird die Menge  $q_{zu}[l/s]$  zugeführt und  $q_{ab}[l/s]$  abgeführt. Der Tank ist zylindrisch und die Befüllung erfolgt im Bereich  $0 \leq h \leq h_{\max}$ . Der Füllstand ergibt sich aus Integration:

$$h = \frac{1}{A} \int (q_{zu} - q_{ab}) dt, \quad A \text{ ..... Querschnitt der Bodenfläche}$$

Die Ventile besitzen PT<sub>1</sub>-Verhalten, da das mechanischen Öffnen und Schließen eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt.

$$G_{V1}(s) = G_{V2}(s) = \frac{k_V}{1+sT_v}$$

Eingangsgröße der Regelstrecke:  $q_{zu}(t)$ ,  $q_{ab}(t)$

Ausgangsgrößen der Regelstrecke:  $h(t)$

Welches Verhalten ergibt sich? ( $A = 0.1$ ,  $k_V = 1$ ,  $T_v = 1s$ ). Zur Begrenzung des Füllstandes bei Überlauf und Unterlauf ist der Integrator mit AntiWindUp-Funktion auszustatten. Wie ist die Simulationsschrittweite zu wählen?

$(\Delta T_S \lesssim 5ms \approx 5\% \text{ von } T_v = k_V)$

$$G(s) = \frac{h}{\Delta q} = \frac{k_V}{As(1+sT_v)} \Rightarrow V(s) = \frac{V}{\Delta q} = \frac{k_V}{s(1+sT_v)} [s] \quad \dots \text{IT}_1 \text{- Verhalten}$$

### 3.2.2 Identifikation

Bei vielen Strecken ist eine exakte Formulierung mit Differentialgleichung leider nicht möglich, weil die physikalischen Zusammenhänge entweder zu komplex oder überhaupt unbekannt sind. Dies trifft besonders bei thermodynamischen und verfahrenstechnischen Prozessen zu (Verbrennungsmaschinen, chemische Reaktionsprozesse).

Aufgrund von Messungen der Reaktion des Systems auf bestimmte Anregungen kann auf das Übertragungsverhalten geschlossen werden.

#### 3.2.2.1 Zeitbereich

Durch Anlegen eines Einheitssprunges und Messung der Sprungantwort mit anschließendem Vergleich zu bekannten Systemen erhält man das Systemmodell;

##### Schwingungsfähiges PT<sub>2</sub>-Element:

- a) die Einhüllende der abklingenden Schwingung

Diese Methode ist für schwach gedämpfte Systeme ( $0 < D \lesssim 0.15$ ) geeignet, besonders wenn nur ein Ausschnitt ohne dem Anfang der Sprungantwort vorliegt. Das Ergebnis wird genau wenn man mehrere Schwingungen zur Berechnung heranzieht.

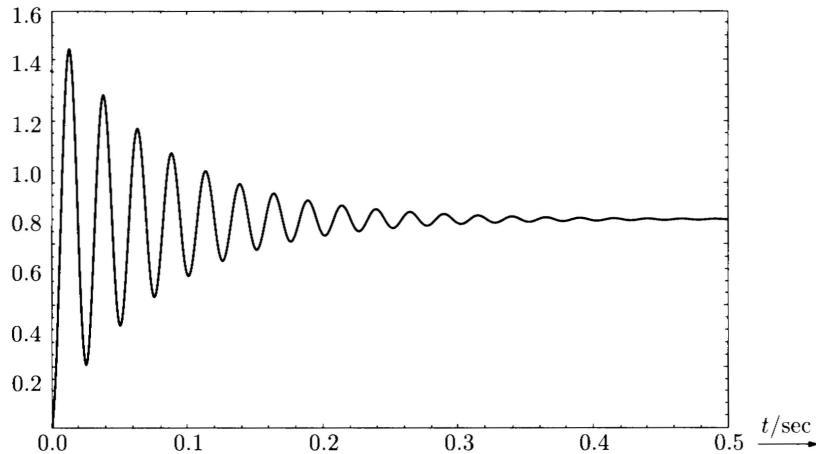


Bild zu Fall a) Dämpfungsvorgang

Die Funktion der Einhüllenden  $e^{-\omega_0 D t}$ . Man nimmt zwei Spitzenwerte zB. bei der ersten und der  $k$ -ten Schwingung. Die gedämpfte Schwingung läuft mit der Frequenz  $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$  ab.  $k$ -Schwingungen dauern daher  $t_k = \frac{2\pi k}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}}$ . Aus dem Verhältnis der Spitzenwerte erhält man:

( $X_0$  ... Maxima am Anfang,  $X_k$  ...  $k$ -tes Maxima,  $k$  ... Anz. der Perioden,  $X_\infty$  ... stationärer Endwert)

$$\frac{X_0 - X_\infty}{X_k - X_\infty} = \frac{\Delta X_0}{\Delta X_k} = \frac{e^0}{e^{-\frac{\omega_0 D 2\pi k}{\sqrt{1-D^2}}}} = \frac{1}{e^{-\frac{D 2\pi k}{\sqrt{1-D^2}}}} \Rightarrow \frac{D 2\pi k}{\sqrt{1-D^2}} = \ln \left[ \frac{\Delta X_0}{\Delta X_k} \right] \Rightarrow \frac{D^2 (2\pi k)^2}{1-D^2} = \ln^2 \left[ \frac{\Delta X_0}{\Delta X_k} \right]$$

$$D^2(2\pi k)^2 = \ln^2\left[\frac{\Delta X_0}{\Delta X_k}\right] - D^2 \ln^2\left[\frac{\Delta X_0}{\Delta X_k}\right] \Rightarrow D^2 = \frac{\ln^2\left[\frac{\Delta X_0}{\Delta X_k}\right]}{(2\pi k)^2 + \ln^2\left[\frac{\Delta X_0}{\Delta X_k}\right]} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{\ln^2\left[\frac{\Delta X_0}{\Delta X_k}\right]}{(2\pi k)^2 + \ln^2\left[\frac{\Delta X_0}{\Delta X_k}\right]}}$$

b) die Überschwingweite der ersten Schwingung herangezogen werden.

Für weniger schwach gedämpfte Systeme ( $0.1 \leq D \leq 0.8$ ) empfiehlt sich die Auswertung des ersten Überschwingers. Die erste Überschwinghöhe folgt aus dem Maximum der Sprungantwort.

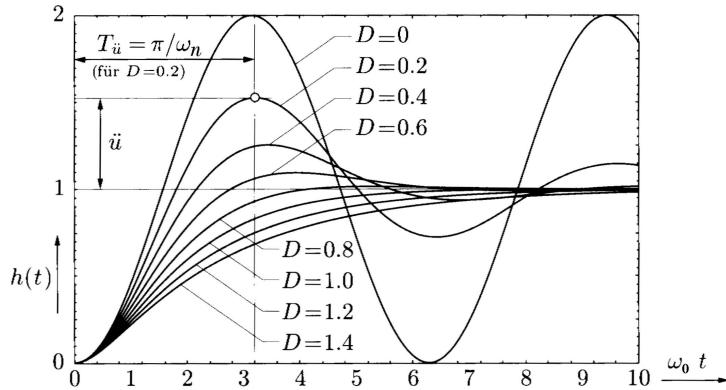


Bild zu Fall b) PT<sub>2</sub>-Überschwingung

$$\ddot{u} = \frac{X_0 - X_\infty}{X_\infty} = e^{-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}} \Rightarrow \ln^2 \ddot{u} = \frac{\pi^2 D^2}{1-D^2} \Rightarrow \ln^2 \ddot{u} - D^2 \ln^2 \ddot{u} = \pi^2 D^2$$

$$\ln^2 \ddot{u} = D^2(\pi^2 + \ln^2 \ddot{u}) \Rightarrow D^2 = \frac{\ln^2 \ddot{u}}{\pi^2 + \ln^2 \ddot{u}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{\ln^2 \ddot{u}}{\pi^2 + \ln^2 \ddot{u}}}$$

### Nichtschwingungsfähiges PT<sub>2</sub>-Element

Es kann die Wendetangentenmethode nach Küpfmüller herangezogen werden.

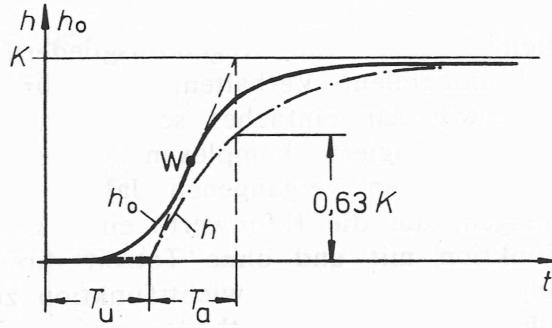


Bild Küpfmüller-Methode

W.... Wendepunkt mit Wendetangentstangente, K.... Stationärverstärkung, liniert -> Sprungantwort  $h(t)$  für nichtschwingungsfähiges PT<sub>2</sub>-Verhalten strichpunktiert -> Sprungantwort  $h(t)$  für PT<sub>1</sub>T<sub>t</sub>-Verhalten

Beispiele Identifikation nach Küpfmüller:

- 1) Für folgende Übertragungsfunktion  $G(s)$  ist die Sprungantwort zu simulieren. Anschließend ist die Wendetangente einzulegen  $T_u$  und  $T_a$  zu bestimmen. Daraus ist

$T_1$  und  $T_2$  mit der Küpfmüller-Methode zu berechnen und die Probe zur Angabe  $G(s)$  durchzuführen.

$$\text{a) } G(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{1}{1+6s+8s^2}, \quad \text{b) } G(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{1}{1+8s+7s^2}$$

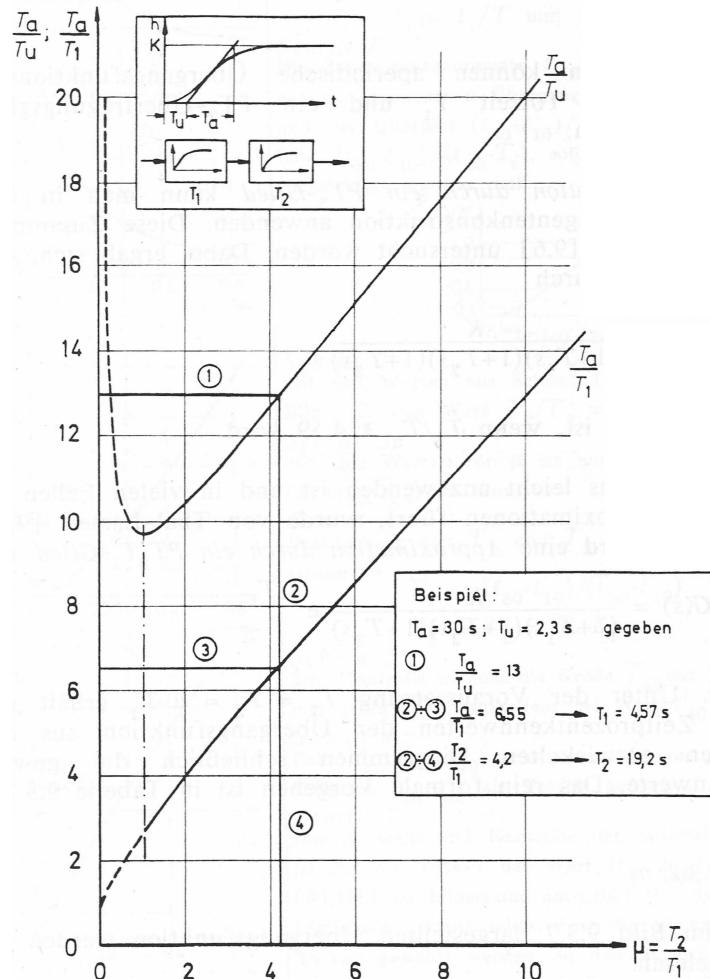


Bild Küpfmüller-Diagramm

$\mu = T_2/T_1$	$T_a/T_1$	$T_a/T_u$
0,1	1,29	20,09
0,2	1,50	13,97
0,3	1,68	11,91
0,4	1,84	10,91
0,5	2,00	10,35
0,6	2,15	10,03
0,7	2,30	9,83
0,8	2,44	9,72
0,9	2,58	9,66
0,99	2,70	9,65
1,11	2,87	9,66
1,2	2,99	9,70
2,0	4,00	10,35
3,0	5,20	11,50
4,0	6,35	12,73
5,0	7,48	13,97
6,0	8,59	15,22
7,0	9,68	16,45
8,0	10,77	17,67
9,0	11,84	18,88
10,0	12,92	20,09

Bild Küpfmüller-Tabelle

**Übungsbeispiele IZ1)-IZ6)****3.2.2.2 Frequenzbereich**

Durch Anlegen einer sinusförmigen Eingangsgröße und Messung des Frequenzganges erhält man durch Variation der Frequenz das Bode-Diagramm. Mit anschließendem Vergleich zu bekannten Systemen bekommt man das Systemmodell.

**Übungsbeispiele IF1)-IF5)****3.3 Lineare Regler**

Der Regler hat die Aufgabe aus der Differenz von Soll- und Istgröße eine entsprechende Stellgröße zu produzieren. Die Differenzbildung ist meist im Regler inkludiert.

**Analogregler:** analoge Spannungswerte werden mittels elektronischen Verstärken verarbeitet und nach Umformung ausgegeben. (OPV-Schaltungen parametrierbar durch Bauteilwerte, **vorgegebene Struktur P-,PI-,PD-,PID-Regler**)

**Digitalregler:** die analogen Werte werden mittels AD-Wandler in Zahlenwerte umgewandelt. Anschließend errechnet ein Algorithmus eine geeignete Stellgröße als Zahl, welche wieder über einen DA-Wandler zum elektrischen Stellsystem ausgegeben wird. ( Prozessrechner, PC's mit AD-Karte bzw. USB-Box, Microcontroller, Kompaktregler, DDC - Direct Digital Control)

Kompaktregler basieren auf quasikontinuierlichen Algorithmen und können daher im Wesentlichen PID-Verhalten erzeugen. Bei DDC-Systemen werden Algorithmen exakt  $z$ -transformierter Übertragungsfunktionen  $G(z)$  zB. Dead Beat Entwurf realisiert. Dies bringt **beliebige Strukturier-** und Parametrierbarkeit.

### 3.3.1 PID-Regler

Ein Regler muss bezogen auf die Regeldifferenz  $e$  eine Stellgröße  $u$  erzeugen, die

1. proportional ist zur Amplitude der Regeldifferenz (Wert).

„Je größer die Regeldifferenz ist, desto stärker die Reaktion.“

$$\mathbf{P\text{-Anteil: } u_P(t) = k_R e(t)}$$

2. proportional ist zur Tendenz der Regeldifferenz (Ableitung).

„Je schneller sich die Regeldifferenz ändert, desto stärker die Reaktion.“

$$\mathbf{D\text{-Anteil: } u_D(t) = T_D \frac{de(t)}{dt}}$$

3. proportional ist zum Energieinhalt der Regeldifferenz (Integral).

„Je länger die Regeldifferenz ansteht, desto stärker die Reaktion.“

$$\mathbf{I\text{-Anteil: } u_I(t) = \frac{1}{T_I} \int e(t) dt}$$

$$u(t) = u_P(t) + u_D(t) + u_I(t) = k_R e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt$$

$$u(s) = k_R e(s) + s T_D e(s) + \frac{e(s)}{s T_I} \Rightarrow F_R(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_R \left( 1 + s T_V + \frac{1}{s T_N} \right)$$

$$\text{mit: } T_D = k_R T_V, \frac{1}{T_I} = \frac{k_R}{T_N}$$

$$F_R(s) = k_R \left( \frac{1+sT_N+s^2T_NT_V}{sT_N} \right) = k_R \left( \frac{(1+sT_A)(1+sT_B)}{sT_N} \right)$$

$$T_A + T_B = T_N, \quad T_A T_B = T_N T_V$$

Realisierbar ist nur ein Regler mit einem Differenzierer der Bauart DT<sub>1</sub>:

$$F_R(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_R \left( 1 + \frac{sT_V}{1+sT_1} + \frac{1}{sT_N} \right) = k_R \left( \frac{1+s(T_N+T_1)+s^2T_NT_V}{sT_N(1+sT_1)} \right) = \frac{(1+sT_A)(1+sT_B)}{sT_I(1+sT_1)}$$

$$T_A + T_B = T_N + T_1, \quad T_A T_B = T_N T_V \Rightarrow \omega_A = \frac{1}{T_A} < \omega_B = \frac{1}{T_B}, \omega_1 = \frac{1}{T_1}, F_{R\infty} = k_R \left( 1 + \frac{T_V}{T_1} \right)$$

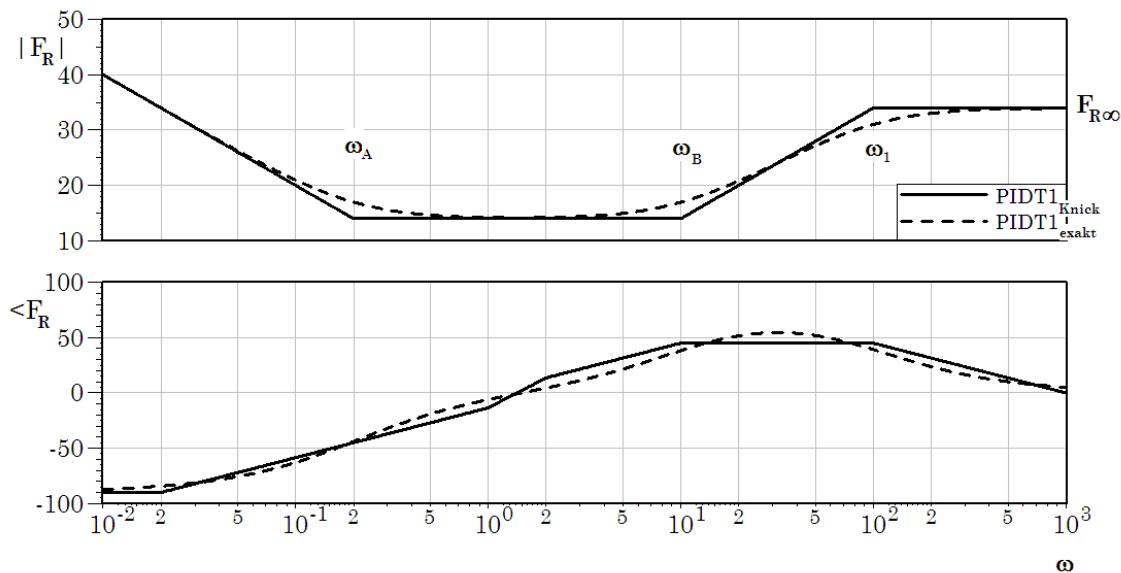


Bild Typisches Bodediagramm eines realen PID-Reglers

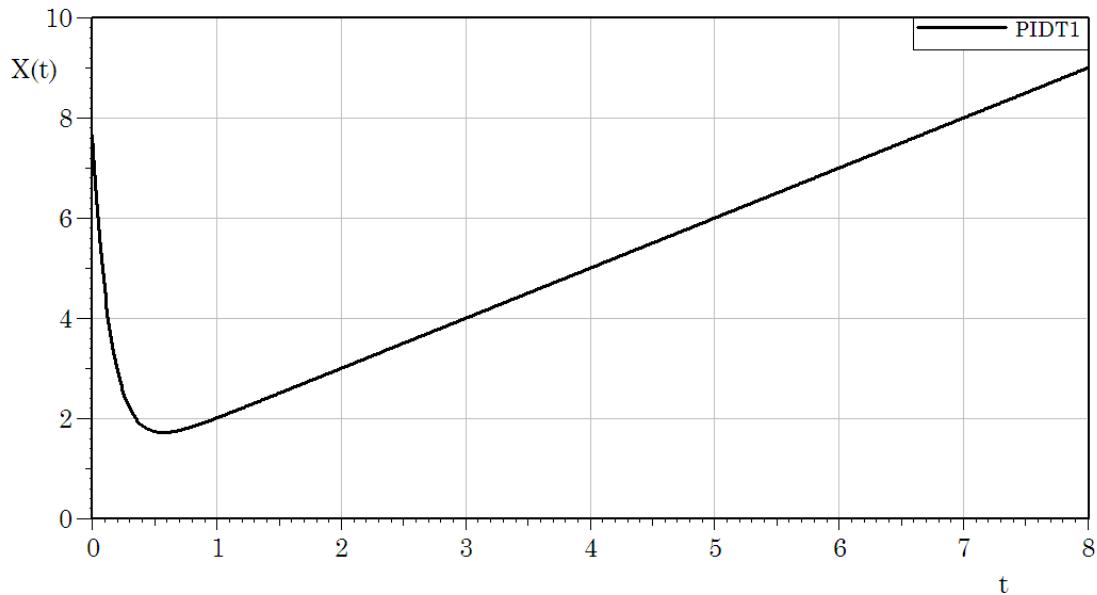


Bild Typische Sprungantwort eines realen PID-Reglers

P-Anteil:

Wieso reicht nicht ein einfacher P-Regler und was bringt er?

Annahme PT<sub>1</sub>-Strecke mit P-Regler:

$$F_R(s) = k_R, F_S(s) = \frac{k_S}{1+sT_1} \Rightarrow F_W(s) = \frac{F_R F_S}{1+F_R F_S} = \frac{k_R k_S}{k_R k_S + 1 + sT_1} = \frac{k_R k_S}{1+k_R k_S} \frac{1}{1+s\frac{T_1}{1+k_R k_S}} = \frac{k_W}{1+sT_W}$$

Das geregelte System weist im konkreten Fall ebenfalls PT<sub>1</sub>-Verhalten die Verstärkung und die Zeitkonstante haben sich geändert.

$$T_W = \frac{T_1}{1+k_R k_S}, \quad k_W = \frac{k_R k_S}{k_R k_S + 1}$$

Das Wunschziel einer Regelung ist  $F_W(s) = 1$ . Das würde bedeuten, dass jeder Sollwertsprung  $w(s) = \frac{1}{s}$  unverzüglich und exakt ausgeführt wird. Dieses Ziel ist nicht erreichbar. Reduziert man die Forderung auf "nur" exakt genügt die Erfüllung der Beziehung  $x_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s w(s) F_W(s) = F_{W\infty} = 1$ . Für obiges Beispiel ergibt sich:

$$\Rightarrow x_\infty = F_{W\infty} = \frac{k_R k_S}{k_R k_S + 1}$$

Nur bei  $k_R \rightarrow \infty$  lässt sich die Forderung  $x_\infty \rightarrow 1$  erfüllen. Da dies aus praktischen Gründen nicht möglich ist, verbleibt eine **stationäre Regelabweichung**.

$$e_\infty = 1 - x_\infty = 1 - \frac{k_R k_S}{k_R k_S + 1} = \frac{1}{k_R k_S + 1} \Rightarrow k_R \rightarrow \infty \Rightarrow e_\infty \rightarrow 0$$

Die Regelung hat allerdings bewirkt, dass die Zeitkonstante verringert und damit das Systemverhalten beschleunigt wurde.

$$\frac{T_W}{T_1} = \frac{1}{1+k_R k_S}$$

Der reine P-Regler beschleunigt den Ausregelvorgang, erzeugt aber im konkreten Fall eine stationäre Regelabweichung. Der Reduktion der Regelabweichung durch Erhöhung der Verstärkung steht nicht allein die Machbarkeit des Verstärkers im Wege. Schon bei relativ niedrigen Verstärkungen ist bei Systemordnungen  $n \geq 3$  die Oszillatorkondition erfüllt, sodass aus dem Regelkreis ein Schwingkreis wird.

Beispiel:  $F_S(s) = \frac{1}{(1+10s)^3}$ ,  $F_R(s) = k_R$

$$\omega_R = \frac{\sqrt{3}}{10}, k_{R\text{krit}} = 8$$

$$F_W(s) = \frac{F_R F_S}{1 + F_R F_S} = \frac{k_R}{k_R + (1+10s)^3} \Rightarrow e_\infty = 1 - x_\infty = 1 - \frac{k_R}{k_R + 1} = \frac{1}{9}$$

Es folgt 11% Regelabweichung bei erfüllter Schwingbedingung.

*I-Anteil:*

Kaum ein Regelkreis wird ohne I-Anteil auskommen. Besitzt die Strecke keinen I-Anteil (Strecken mit Ausgleich), wird der Regler mit I-Anteil ausgestattet. Der I-Anteil eliminiert die stationäre Regelabweichung und regelt **genau** aus.

Strecke mit I-Regler:

$$F_R(s) = \frac{k_I}{s}, F_S(s) = \frac{k_S}{1+sT_1} \Rightarrow F_W(s) = \frac{F_R F_S}{1 + F_R F_S} = \frac{k_I k_S}{k_I k_S + (1+sT_1)s} = \frac{1}{1 + \frac{s}{k_I k_S} + \frac{s^2 T_1}{k_I k_S}}$$

$$x_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) F_W(s) = F_{W\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{s}{k_I k_S} + \frac{s^2 T_1}{k_I k_S}} = 1 \Rightarrow e_\infty = 0$$

Die Erfüllung dieser Tatsache ist unabhängig vom Wert von  $k_I$ . Der Integrator kann seinen Ausgangswert nur dann konstant halten, wenn die Eingangsgröße bereits den Wert 0 hat. Diese Eigenschaft ist maßgeblich für die Auslöschung der Regelabweichung. Wenn vom P-Regler eine Ausgangsgröße gefordert ist, benötigt er immer eine Eingangsgröße, die Regelabweichung. Das Tiefpassverhalten des I-Anteils wirkt allerdings phasenabsenkend und daher **destabilisierend**.

Der Vollständigkeit halber muss erwähnt werden, dass auch die Signalform des Eingangssignals bei der Elimination der Regelabweichung entscheidend ist. Für die auch übliche Rampenfunktion als Eingangssignal reicht ein einfacher Integrator zur Elimination nicht aus.

*D-Anteil:*

Zwei wesentliche positive Wirkungen können vom D-Anteil im Regler erwartet werden.

- a) Aufgrund des Differenzierens **beschleunigt** er bei einem Sprung den Regelsprung zu Beginn. Seine Wirkung verschwindet nach kurzer Zeit.
- b) Durch seinen Frequenzgang der im Wesentlichen aus einer Nullstelle besteht hat er eine phasenanhebende Wirkung. Dies erhöht die Phasenreserve und wirkt daher **stabilisierend**.

Während P- und I-Anteile eigenständig als Regler eingesetzt werden können ist ein reiner D-Regler in jedem Fall unbrauchbar. Er kann keinen Beitrag zum stationären Verhalten liefern und somit das gewünschte Endergebnis nicht herstellen.

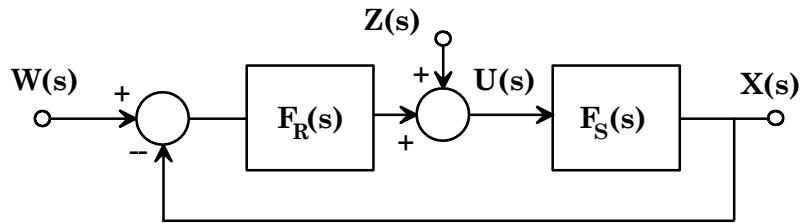
Regler werden mit obigen Überlegungen in folgenden Kombinationen gewählt:

$F_S \setminus F_R$	P	I	PI	PD	PID
$PT_1$	+ F	++ F	+ S	-	-
$PT_n$	--	+ F&S	+ F&S	--	++ F&S
$IT_1$	+ F	--	+ S	++ F	++ S
$T_t$	--	+ F&S	++ F&S	--	--
$PT_1T_t$	--	+ F&S	+ F&S	--	++ F&S
$PT_2T_t$	--	-	+ F&S	-	++ F&S

F = Führung, S = Störung, ++gut,+mäßig gut, -schlecht,--unbrauchbar

### 3.4 Der geschlossene lineare Regelkreis

Durch das Schließen der offenen Regelschleife  $F_0(s) = F_R(s)F_S(s)$ , ändert sich das Systemverhalten grundlegend.



$$F_W = \frac{F_R F_S}{1 + F_R F_S} = \frac{F_0}{1 + F_0} \quad \text{bzw.} \quad F_Z = \frac{F_S}{1 + F_R F_S} = \frac{F_S}{1 + F_0}$$

Ziel ist ein optimales Verhalten des geschlossenen Regelkreises zu realisieren. Ideal wäre

$F_W = 1$  d.h. Regelgröße  $X$  und Führungsgröße  $W$  haben den gleichen zeitlichen Verlauf. Jeder Sollwertsprung würde unverzüglich ausgeführt werden.

$F_Z = 0$  d.h. Störgröße  $Z$  hat keinen Einfluss auf das System. Der Regelkreis wäre völlig unempfindlich.

Diese Forderungen sind weder theoretisch noch praktisch erfüllbar ( $F_R = \infty$ ). Es muss ein Kompromiss aus verschiedenen Anforderungen gewonnen werden. Es existieren unterschiedliche Entwurfssziele: Schnelligkeit, Genauigkeit, gutes Dämpfungsverhalten (Überschwingungsfreiheit), geringer Energieverbrauch, ..

### 3.4.1 Kenngrößen aus der Sprungantwort

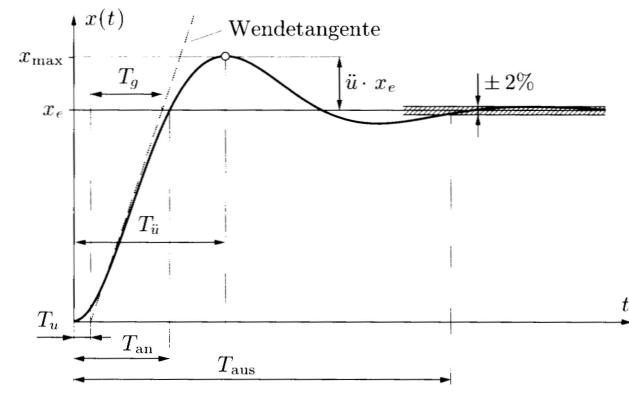


Bild Kenngrößen der Sprungantwort

Anregelzeit  $T_{an}$ :

jene Zeit, bei der die Sprungantwort erstmals ihren Stationärwert erreicht.

Ausregelzeit  $T_{aus}$ :

jene Zeit bei der die Sprungantwort endgültig in einen gewissen Bereich um den Stationärwert (üblicherweise  $\pm 2\%$ ) eintritt, ohne ihn zu verlassen.

Überschwingzeit  $T_u$ :

jene Zeit bei der das erste Maximum der Sprungantwort erreicht wird.

Überschwingweite  $\ddot{u}$ :

Differenz zwischen dem Maximalwert  $x_{max}$  der Sprungantwort und dem stationären Endwert  $x_e$ , bezogen auf  $x_e$  (Angabe in %)  $\ddot{u} = \frac{x_{max}-x_e}{x_e}$

Verzugszeit  $T_u$ :

folgt aus Schnittpunkt der Wendetangente mit der Zeitachse

Anstiegszeit  $T_a$

Zeitdifferenz zwischen den Schnittpunkten der Wendetangente mit der Zeitachse und dem Stationärwert  $x_e$

### 3.4.2 Stabilität von Regelkreisen

Stabilität bedeutet, dass bei vorübergehenden Störungen und konstanten Eingangsgrößen alle Zeitfunktionen auf einen konstanten Wert abklingen. Die Stabilität wird aus den Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion, welche auch die Pole des Systems genannt werden, bestimmt.

Ein lineares System ist **stabil**, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion einen negativen Realteil haben und somit in der linken Hälfte der s-Ebene liegen

Ein lineares System ist **instabil**, wenn mindestens ein Pol der Übertragungsfunktion einen positiven Realteil besitzt der somit in der rechten Hälfte der s-Ebene liegt.

Ein lineares System ist **grenzstabil**, wenn keine Pole der Übertragungsfunktion einen positiven Realteil besitzen, aber einfache Pole auf der imaginären Achse liegen.

Die Nullstellen des Zählerpolynoms haben auf die Stabilität keine Auswirkung. Zur Untersuchung der Stabilität müssen die Pole des Systems gefunden werden. Dies führt schon bei Polynomen der Ordnung 4 auf analytisch unlösbare Probleme.

## Übungsbeispiele ST1)-ST5)

### 3.4.3 Nyquistkriterium

Das Nyquistkriterium liefert eine Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises  $F_W$  aus dem Frequenzgang der offenen Regelschleife  $F_0$ .

$$F_W = \frac{F_0}{1+F_0}$$

An der Stabilitätsgrenze führt der Regelkreis eine unbedämpfte Dauerschwingung aus, der zugehörige Pol (genau das komplexe Polpaar) ist rein imaginär. Die Pole des Systems liegen bei  $0 = 1 + F_0(j\omega_0)$  oder  $-1 = F_0(j\omega_0)$ . Ist das System an der Stabilitätsgrenze, dann verläuft die Ortskurve der offenen Regelschleife  $F_0$  bei einer bestimmten Kreisfrequenz  $\omega_0$  durch den Punkt  $(-1,0)$ , den sogenannten Nyquistpunkt.  $\omega_0$  ist die Kreisfrequenz der Dauerschwingung, die der Regelkreis an der Stabilitätsgrenze ausführt.

Das Nyquistkriterium lautet:

Verläuft die Ortskurve von  $F_0$  in Richtung steigender  $\omega$ -Werte so, dass der Nyquistpunkt auf der linken Seite liegen bleibt, dann ist der geschlossene Regelkreis  $F_W$  **stabil**.

Verläuft die Ortskurve von  $F_0$  in Richtung steigender  $\omega$ -Werte so, dass der Nyquistpunkt auf der rechten Seite liegen bleibt, dann ist der geschlossene Regelkreis  $F_W$  **instabil**. Üblicherweise umschließt die Ortskurve den Nyquistpunkt.

Verläuft die Ortskurve von  $F_0$  in Richtung steigender  $\omega$ -Werte durch den Nyquistpunkt, dann ist der geschlossene Regelkreis  $F_W$  **grenzstabil**.

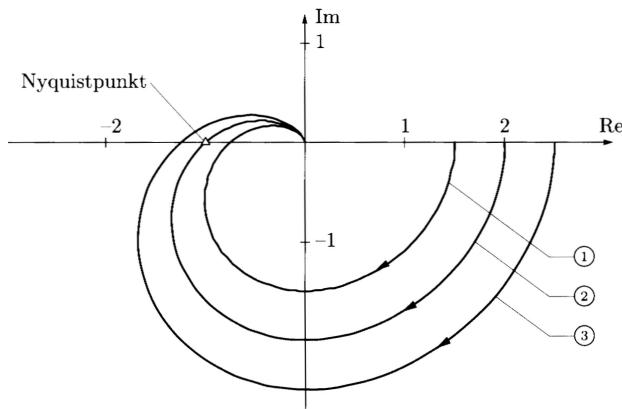


Bild Ortskurve mit Nyquistpunkt

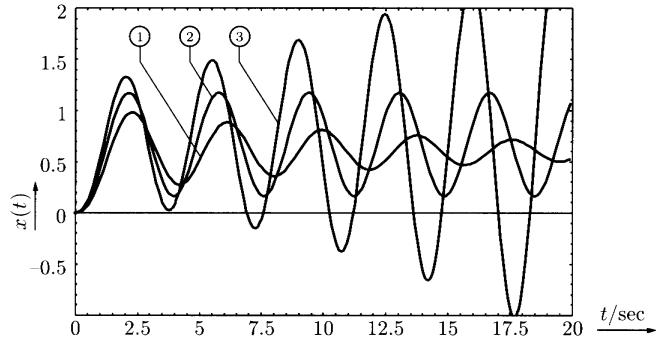


Bild Zeitdiagramm zur Stabilität

### 3.4.3.1 Darstellung im Bode-Diagramm

Ist bei einer Phasenverschiebung von  $-180^\circ$  der Betrag  $|F_0(j\omega)| < 1$ , so ist der geschlossene Regelkreis **stabil**. In diesem Fall ist bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  ( $|F_0(j\omega_D)| = 1$ ) die Phasenverschiebung  $< -180^\circ$ .

Ist bei einer Phasenverschiebung von  $-180^\circ$  der Betrag  $|F_0(j\omega)| = 1$ , so ist der geschlossene Regelkreis **grenzstabil**.

Ist bei einer Phasenverschiebung von  $-180^\circ$  der Betrag  $|F_0(j\omega)| > 1$ , so ist der geschlossene Regelkreis **instabil**. In diesem Fall ist bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  die Phasenverschiebung  $> -180^\circ$ .

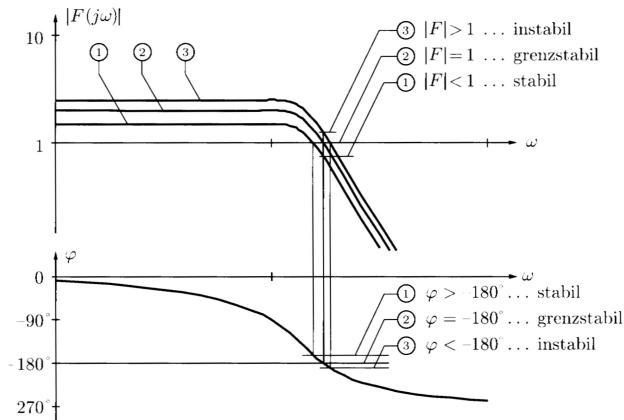


Bild Nyquistkriterium im Bode-Diagramm

Anschaulich lässt sich diese Situation am Regelkreis verdeutlichen. Es wird ein Regelkreis mit einem Schalter ausgestattet und der offene Kreis sinusförmig angeregt.

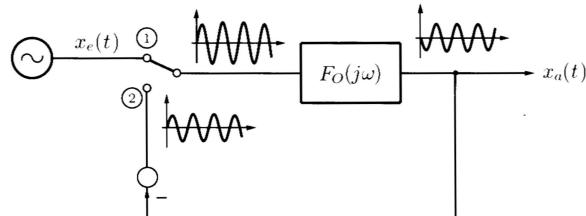


Bild Nyquistkriterium am Regelkreis

Die Ausgangsgröße ist dann ebenfalls sinusförmig jedoch phasenverschoben. Betrachtet man nun jene Frequenz-Einstellung  $\omega_0$  bei der  $x_a$  um  $180^\circ$  hinter  $x_e$  nacheilt, so sind die Signale an Punkt 1 und 2 gleichphasig. Sind nun auch die beiden Amplituden gleich so würde das System nicht bemerken wenn der Schalter umgelegt würde. Es würde dann selbsttätig schwingen, es ist **grenzstabil**. Wäre die Amplitude am Punkt 2 kleiner würde die Schwingung nach dem Umlegen abklingen (System **stabil**). Umgekehrt würde bei einer größeren Amplitude am Punkt 2 die Schwingung aufklingen (System **instabil**).

### 3.4.4 Stabilitätsgüte

Die Brauchbarkeit einer Regelung ist nicht alleine mit der Aussage stabil / instabil beantwortet. Nahe der Stabilitätsgrenze verhält sich das System sehr träge, Abklingvorgänge dauern sehr lange. Man muss daher einen ausreichenden Abstand der Ortskurve zum Nyquistpunkt vorsehen, um eine gewisse Stabilitätsgüte zu erzielen.

#### 3.4.4.1 Amplitudenrand

Der Amplitudenrand ist jener Faktor, um den die Verstärkung der offenen Regelschleife bei einer Phasenverschiebung von  $-180^\circ$  angehoben werden kann, sodass der geschlossene Regelkreis an die Stabilitätsgrenze gelangt.

$$A_R = \frac{1}{|F_0(j\omega_r)|} \quad \arg F_0(j\omega_r) = -\pi$$

Im Bode-Diagramm ist  $A_R$  der Abstand der Betragskennlinie von der 0dB-Geraden bei  $\omega_r$ . Für ein gut gedämpftes Verhalten gilt:

$$\begin{aligned} A_R \sim 4 \dots 10 & \quad \text{gutes Führungsverhalten} \\ A_R \sim 2 \dots 3 & \quad \text{gutes Störungsverhalten} \end{aligned}$$

#### 3.4.4.2 Phasenrand

Der Phasenrand  $a_R$  ist jener Wert, um den die Phase von  $F_0$  bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  abgesenkt (betragsmäßig angehoben) werden kann, sodass der geschlossene Regelkreis an die Stabilitätsgrenze gelangt.

$$a_R = 180^\circ + \arg F_0(j\omega_D) \quad |F_0(j\omega_D)| = 1$$

$\alpha_R$  ist im Bode-Diagramm der Abstand der Phasenkennlinie von der  $-180^\circ$  Geraden bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ . Für ein gut gedämpftes Verhalten gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_R \sim 40^\circ \dots 60^\circ & \quad \text{gutes Führungsverhalten} \\ \alpha_R \sim 20^\circ \dots 50^\circ & \quad \text{gutes Störungsverhalten} \end{aligned}$$

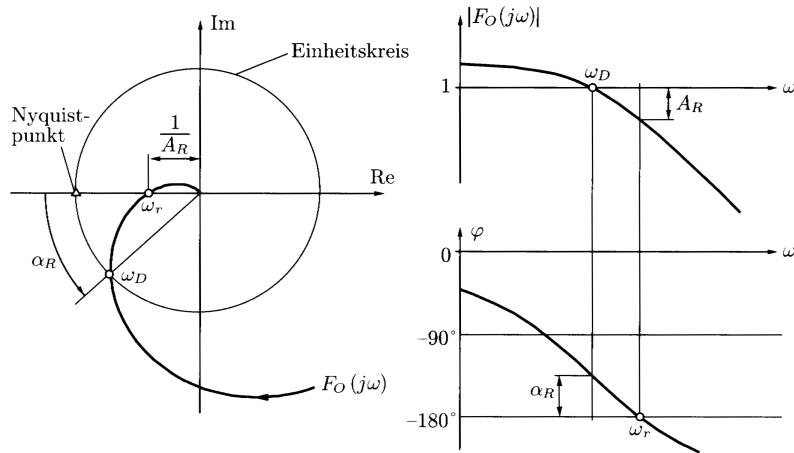


Bild Amplituden- und Phasenrand

## Übungsbeispiele PA1)-PA8)

## 3.5 Entwurf und Optimierung von Reglern

Unter Reglerentwurf versteht man das Ermitteln der Parameter eines P-, PI-, PD- oder PID-Reglers nach vorgegebenen Kriterien. Häufig kann das geregelte System als PT<sub>2</sub>-Element genähert werden. Die offene Schleife hat dabei IT<sub>1</sub>-Verhalten. Für das PT<sub>2</sub>-Element lassen sich die meisten Zusammenhänge exakt ermitteln, die Dämpfung  $D$  ist entscheidend dabei. So möchte man das Überschwingen auf einen bestimmten Wert begrenzen, bzw. einen bestimmten Phasenrand einhalten.

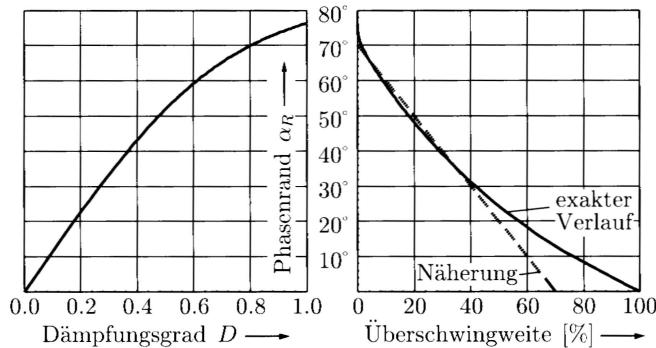


Bild Zusammenhang Dämpfung, Phasenrand und Überschwingweite

Aus dem Phasenrand kann auf die Überschwingweite und die Dämpfung rückgeschlossen werden. Regler werden daher mittels Bode-Diagramm entworfen (Frequenzkennlinienverfahren). Für  $\ddot{\omega} < 40\%$  und  $\alpha_R > 30^\circ$  gilt eine einfache Näherung:

$$\ddot{\omega}[\%] + \alpha_R[\text{°}] = 70 \quad \text{und} \quad T_{\ddot{\omega}} \approx \frac{\pi}{\omega_D}$$

Die Frequenz  $\omega_D$  ist ein Maß für die Schnelligkeit einer Regelung, sie sollte daher möglichst hoch sein. Mit zunehmendem  $\omega_D$  sinkt allgemein aber der Phasenrand, was das Überschwingen erhöht. Es ist ein Kompromiss zu finden.

Im Frequenzbereich betrachtet ist die Einstellung eines Reglers die Korrektur des

Frequenzganges der Strecke zu höheren Durchtrittsfrequenzen (Schnelligkeit) mit erhöhter Phasenreserve (weniger Überschwingen) und höheren Kreisverstärkungen (Genauigkeit). Folgendes Beispiel zeigt an einer IT<sub>1</sub>-Strecke was die Anhebung bei Tausch eines P-Reglers durch einen PDT<sub>1</sub>-Regler bringt.

$$F_{01} = F_R F_S = k_R \frac{k_S}{s(1+sT_S)}, F_{02} = F_R F_S = \frac{k_R(1+sT_V)}{(1+sT_1)} \frac{k_S}{s(1+sT_S)} = \frac{k_R k_S}{s(1+sT_1)}$$

$$T_S = 0.03, k_S = 10, T_V = T_S, T_1 = 0.0015, k_R = 3$$

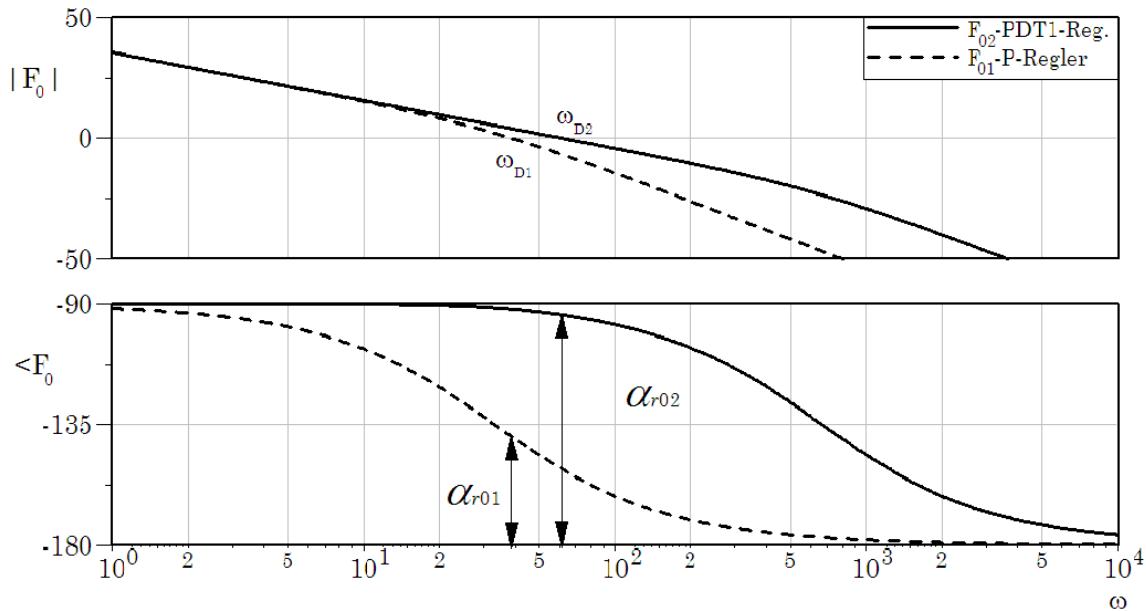


Bild Bodediagramm mit Erhöhung von Durchtrittsfrequenz und Phasenrand

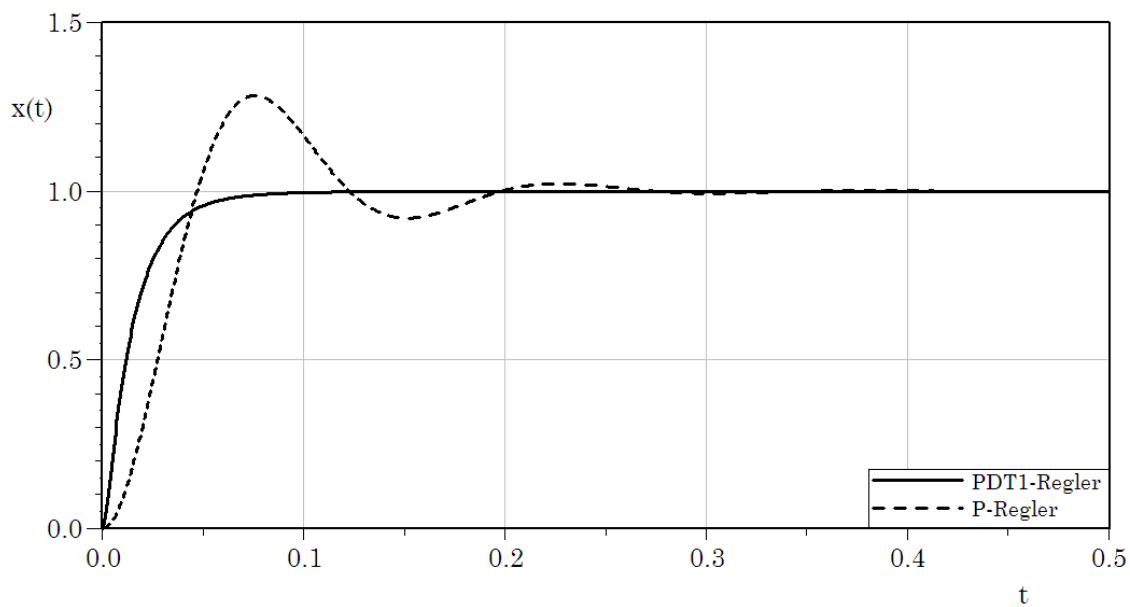


Bild Sprungantwort bei Erhöhung von Durchtrittsfrequenz und Phasenrand

### 3.5.1 Betragsoptimum

Je näher der Betrag der Funktion  $|F_W(j\omega)|$  des geschlossenen Kreises unabhängig von der Frequenz dem Wert 1 ist, desto besser ist eine Regelung. Versucht man die freien Parameter des Reglers dieser Forderung anzupassen so spricht man vom Betragsoptimum. Beispiel PI-Regler mit PT<sub>2</sub>-Strecke:

$$F_0(s) = F_S(s)F_R(s) = \frac{k_S k_R (sT_N + 1)}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)sT_N}$$

Kompensation der Zeitkonstante erhöht  $\omega_D \Rightarrow T_1 = T_N$  mit  $T_1 > T_2$ :

$$F_0(s) = F_S(s)F_R(s) = \frac{k_S k_R}{(sT_2 + 1)sT_N} \quad \Rightarrow \quad F_W(s) = \frac{F_0}{1+F_0} = \frac{\frac{k_S k_R}{(sT_2 + 1)sT_N}}{1 + \frac{k_S k_R}{(sT_2 + 1)sT_N}} = \frac{k_S k_R}{(sT_2 + 1)sT_N + k_S k_R}$$

$$F_W(s) = \frac{k_S k_R}{s^2 \cdot T_2 \cdot T_N + s \cdot T_N + k_S k_R}$$

$$|F_W(j\omega)| = \left| \frac{k_S k_R}{(j\omega)^2 T_2 T_N + j\omega T_N + k_S k_R} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{-\omega^2 T_2 T_N + j\omega T_N}{k_S k_R} + 1 \right|^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2 T_2 T_N}{k_S k_R} \right)^2 + \left( \frac{\omega T_N}{k_S k_R} \right)^2}} \approx 1$$

$$1 \approx \left( 1 - \frac{\omega^2 T_2 T_N}{k_S k_R} \right)^2 + \left( \frac{\omega T_N}{k_S k_R} \right)^2 = \omega^4 \left( \frac{T_2 T_N}{k_S k_R} \right)^2 + \omega^2 \left( \left( \frac{T_N}{k_S k_R} \right)^2 - 2 \frac{T_2 T_N}{k_S k_R} \right) + 1$$

Damit dies beginnend bei kleinen Frequenzen möglichst gut erfüllt ist, wird der Term mit  $\omega^2$  auf 0 gesetzt.

$$\Rightarrow \left( \frac{T_N}{k_S k_R} \right)^2 - 2 \frac{T_2 T_N}{k_S k_R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_N^2}{k_S k_R} - 2 T_2 T_N \quad \Rightarrow \quad k_R = \frac{1}{k_S} \frac{T_N}{2 T_2} = \frac{1}{k_S} \frac{T_1}{2 T_2}$$

Das Betragsoptimum bewirkt eine Überschwingweite von  $\ddot{\nu} = 4.3\%$  und eine Dämpfungskonstante von  $D = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$  des geschlossenen Regelkreises  $F_W$  mit PT<sub>2</sub>-Verhalten. Ferner ergibt sich für die offene Schleife  $F_0(j\omega)$  mit IT<sub>1</sub>-Verhalten ein Phasenrand von  $\alpha_R = 65^\circ$  und eine Durchtrittsfrequenz bei der halben Knickfrequenz des 40dB Knicks  $\omega_D = \frac{\omega_k}{2}$ .

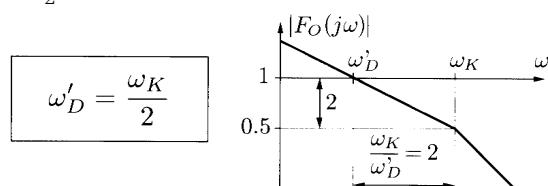


Bild Relation Durchtritts- zu Knickfrequenz beim Betragsoptimum

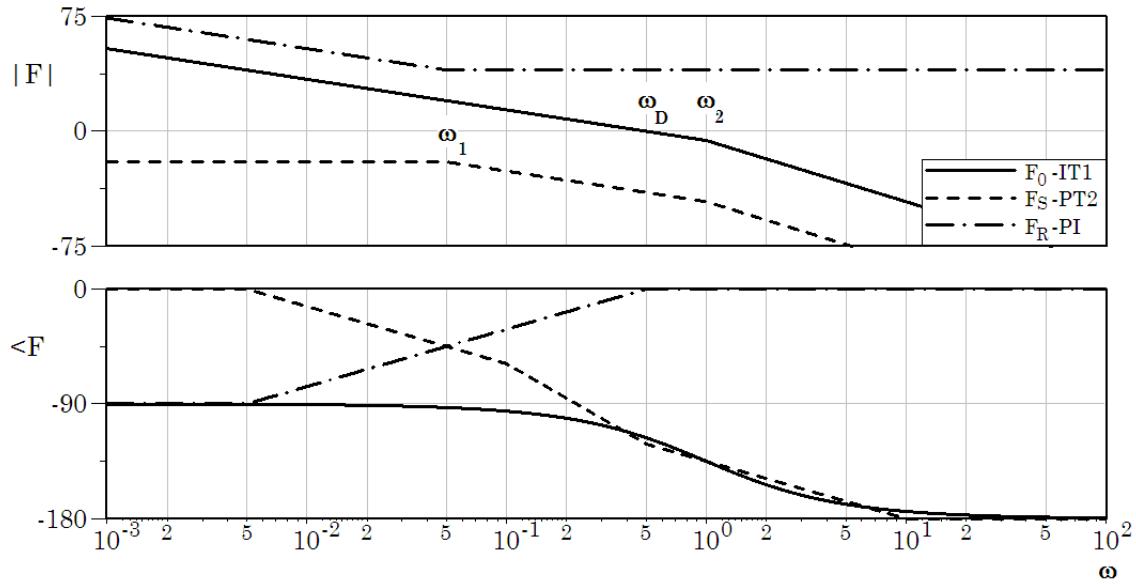


Bild Bodediagramm Betragsoptimum mit Polkompensation

Da  $F_0(s)$  beim Betragsoptimum nach der Polkompensation  $IT_1$ -Verhalten aufweist, lassen sich auch andere Strecken-Reglerpaare mit identem Verhalten finden. ( $T_1 > T_2$ )

Strecke	Regler	$k_p$	$T_N$	$T_V$
$PT_1$	I	----	$2T_1 k_s$	----
$PT_2$ nswg.	PI	$\frac{T_1}{2T_2 k_s}$	$T_1$	----
$PT_3$	PID	$\frac{T_1+T_2}{2k_s T_3}$	$T_1+T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}$
$IT_1$	P	$\frac{1}{2T_1 k_s}$	----	----
$IT_2$	PD	$\frac{1}{2T_2 k_s}$	----	$T_1$

$F_w(s)$  hat in allen Fällen  $PT_2$ -Verhalten mit den bekannten Eigenschaften des Betragsoptimums. Die  $PT_3$ -Strecke darf auch ein komplexes Polpaar besitzen. Für Strecken höherer Ordnung mit  $PT_N$ -Verhalten wird der Begriff der Summenzeitkonstante  $T_\Sigma$  eingeführt, der für die Summe aller niedrigen Zeitkonstanten steht. Für den PI- und PID-Regler gelten näherungsweise nachfolgende Einstellungen.

$$F_S(s) = \frac{k_S}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)(1+sT_4)\dots(1+sT_k)} \Rightarrow T_\Sigma = T_2 + T_3 + \dots + T_k, T_1 > T_2 > T_3 \quad \text{für PI}$$

$$F_S(s) = \frac{k_S}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)(1+sT_4)\dots(1+sT_k)} \Rightarrow T_\Sigma = T_3 + T_4 + \dots + T_k, T_1 > T_2 > T_3 \quad \text{für PID}$$

Strecke	Regler	$k_p$	$T_N$	$T_V$
$PT_N$	PI	$\frac{T_1}{2T_\Sigma k_s}$	$T_1$	----
$PT_N$	PID	$\frac{T_1+T_2}{2k_s T_\Sigma}$	$T_1+T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}$

### Übungsbeispiele BO1)-BO9)

### 3.5.2 Symmetrisches Optimum

Ist die Auswahl des Reglers eingeschränkt und somit eine betragsoptimale Einstellung nicht herstellbar, wird oft das symmetrische Optimum angepeilt. Bestes Beispiel dafür stellt die  $IT_1$ -Strecke mit PI-Regler dar.

$$F_S(s) = \frac{k_S}{s(1+sT_1)}, \quad F_R(s) = \frac{k_R(1+sT_N)}{sT_N}$$

Für Stabilitätsfragen ist immer die Phasenverschiebung der offenen Schleife  $F_0(j\omega)$  bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  zu betrachten. Beim symmetrischen Optimum wird die Knickfrequenz des Reglers  $\omega_{KR} = \frac{1}{T_N}$  unterhalb jener der Strecke  $\omega_{KS} = \frac{1}{T_1}$  gewählt und die Durchtrittsfrequenz von  $F_0(j\omega)$  mittels der Verstärkung  $k_R$  ins geometrische Mittel der beiden Frequenzen justiert. Gewünscht ist eine Phasenreserve  $\alpha_R > 40^\circ$ , es muss daher das Verhältnis  $\frac{\omega_{KS}}{\omega_{KR}} \geq 4$  sein.

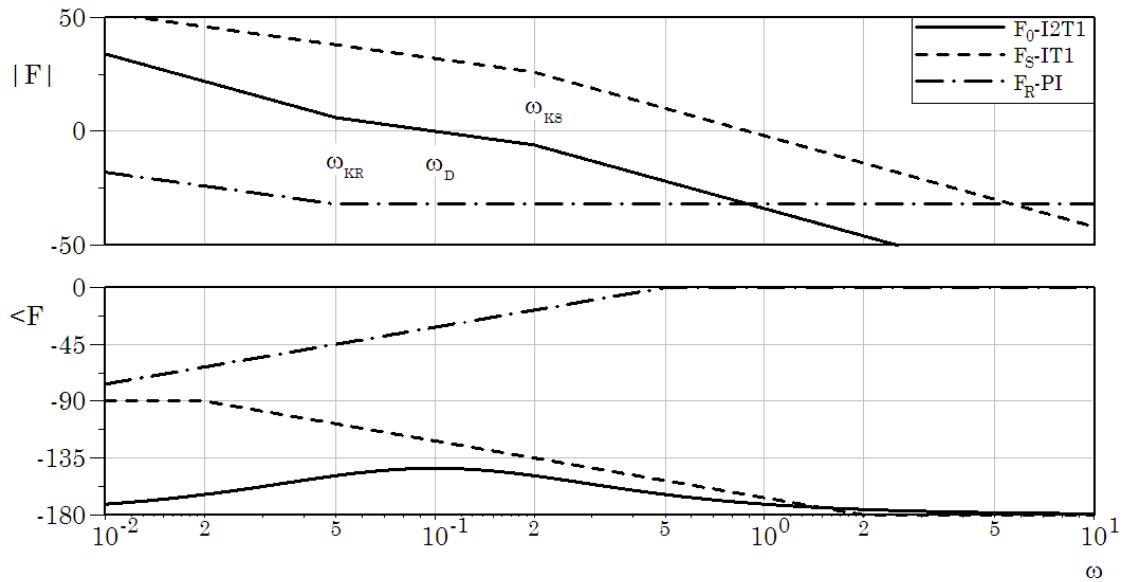
$$\omega_D = \sqrt{\omega_{KS} \omega_{KR}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_N}} \quad \dots \text{ Annahme führt auf maximale Phasenreserve}$$

$$F_0(s) = F_S(s)F_R(s) = \frac{k_S}{s(1+sT_1)} \frac{k_R(1+sT_N)}{sT_N} \Rightarrow |F_0(j\omega)| = \frac{k_S k_R}{\omega^2 T_N} \frac{\sqrt{1+(\omega T_N)^2}}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}}$$

$$|F_0(j\omega_D)| = 1 = \frac{k_S k_R}{\omega_D^2 T_N} \frac{\sqrt{1+(\omega_D T_N)^2}}{\sqrt{1+(\omega_D T_1)^2}} = T_1 T_N \frac{k_S k_R}{T_N} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{T_N}{\sqrt{T_1 T_N}}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{T_1}{\sqrt{T_1 T_N}}\right)^2}} = T_1 k_S k_R \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{T_N}}{\sqrt{T_1}}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_N}}\right)^2}} = T_1 k_S k_R \left(\frac{\sqrt{T_N}}{\sqrt{T_1}}\right)$$

$$1 = k_S k_R \sqrt{T_N T_1} \Rightarrow k_R = \frac{1}{k_S \sqrt{T_N T_1}}$$

$$\text{Beispiel: } k_S = 4, T_1 = 5, a = T_N/T_1 = 4 \Rightarrow T_N = 20, k_R = \frac{1}{4\sqrt{100}} = 0.025$$



Für obiges Beispiel ergibt sich eine Phasenreserve von  $\alpha_R = 37^\circ$  und eine Überschwingen 42%.

### 3.5.3 Integralkriterien

Um die Güte der Sprungantwort einer Regelung optimieren zu können wurden Integralkriterien entwickelt. Es wird dabei die Regelabweichung  $e(t)$  durch das Gütemaß  $J$  bewertet und ein Minimum durch Parametervariation angestrebt. Der Vorgang der Optimierung läuft so ab, dass die Parameter eines Reglers ( $kr$  und  $T_N$  bei PI-Regler) solange variiert werden bis ein Minimum von  $J$  gefunden wurde. Die zum Minimum gehörenden Parameter erfüllen die Einstellbedingung dann optimal. Gleichzeitig werden die Ergebnisse von  $J$  vergleichbar, was einer Verdichtung der Eigenschaften auf eine Zahl gleichkommt.

IAE (Integral of Absolut value of Error)

$$J = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

ISE (Integral of Squared value of Error)

$$J = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt$$

ITAE (Integral of Time multiplied Absolut value of Error)

$$J = \int_0^{\infty} |e(t)| t dt$$

ITSE (Integral of Time multiplied Squared value of Error)

$$J = \int_0^{\infty} e(t)^2 t dt$$

ISTSE (Integral of Squared Time multiplied Squared value of Error)

$$J = \int_0^{\infty} e(t)^2 t^2 dt$$

ISTAЕ (Integral of Squared Time multiplied Absolut value of Error)

$$J = \int_0^{\infty} |e(t)| t^2 dt$$

Weiters: IEXSE, IMEXSE, .. uam.

Das Quadrat bzw. der Absolutwert der Regelabweichung im Integral bewirken auch eine Gewichtung, wenn starkes Schwingen auftritt und die positiven und negativen Flächenanteile von  $\int_0^{\infty} e(t) dt$  sich annähernd aufheben würden. Durch das Quadrieren werden hohe Amplitudenwerte infolge starken Überschwingens von  $e(t)$  stärker bewertet, wirken sich somit negativ im Ergebnis  $J$  aus. Die Bewertung mit der Zeit bewirkt das zu langsames Abklingen stärker gewichtet wird und somit negativ in das Ergebnis eingeht.

Für ein Standard-PT<sub>2</sub>-Element ( $k = 1$ ) mit variabler Dämpfung ergeben sich folgende Dämpfungs- und Überschwingungswerte beim Minimum der Gütfunktion  $J$ :

Kriterium	Dämpfung $D$	Überschwingen $\ddot{u}$ [%]	Güte $J_{min}$
ISE	0,500	16,30	1,00
ITSE	0,595	9,77	0,71
IAE	0,662	6,24	1,61
ISTSE	0,667	6,01	0,87
BO	0,707	4,30	-

Kriterium	Dämpfung $D$	Überschwingen $\ddot{u}$ [%]	Güte $J_{min}$
ISE	0,500	16,30	1,00
ITSE	0,595	9,77	0,71
IAE	0,662	6,24	1,61
ISTSE	0,667	6,01	0,87
BO	0,707	4,30	-
ITAE	0,750	2,84	1,95
ISTAЕ	0,815	1,21	4,33

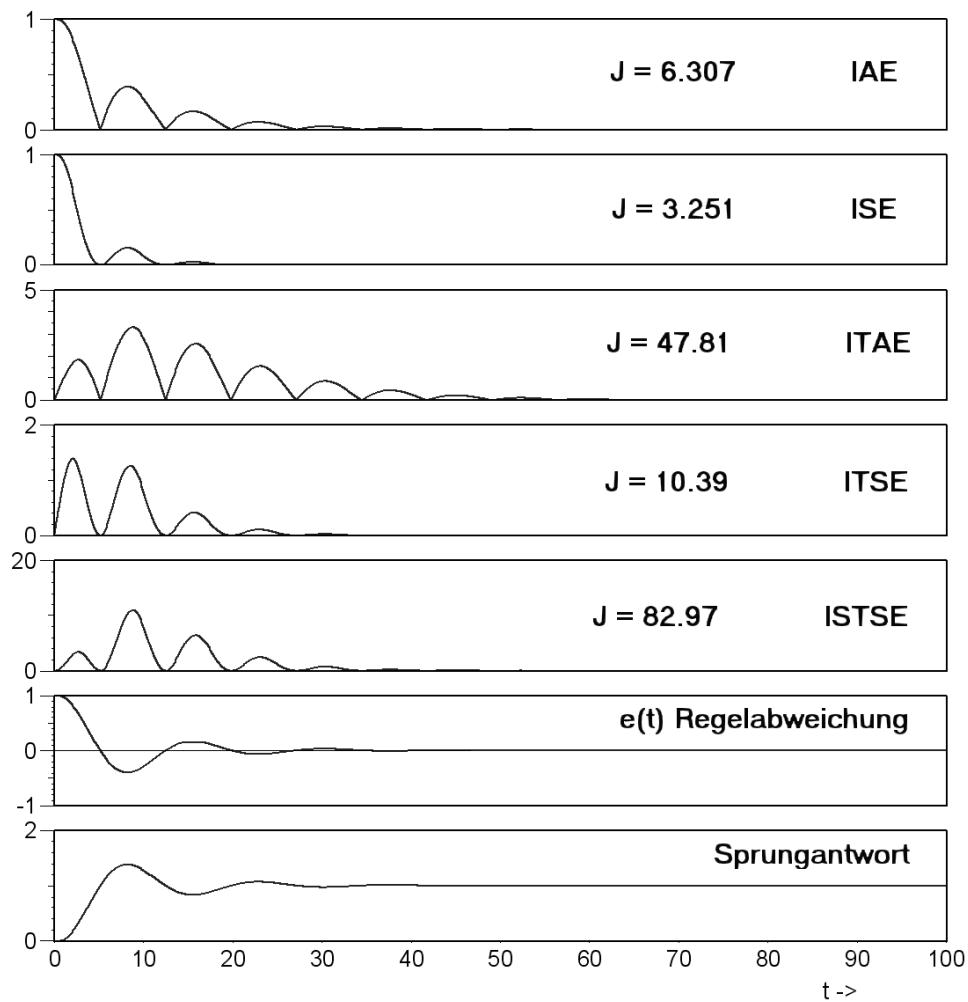
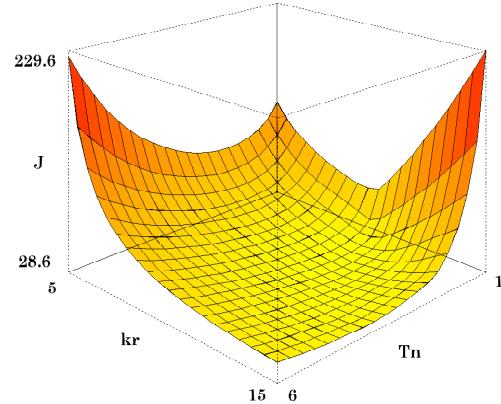
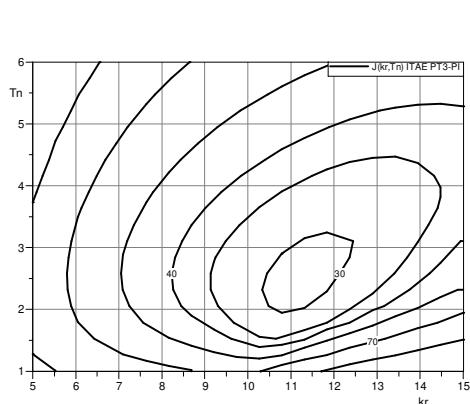


Bild Vergleich der Integralkriterien

Beispiel: PT<sub>3</sub>-Strecke mit PI-Regler, gesucht: Optimum nach ITAE bei Variation von  $T_N$  und  $k_r$

$$F_S(s) = \frac{1}{1+13s+32s^2+20s^3} = \frac{1}{(1+s)(1+2s)(1+10s)}, F_R(s) = \frac{k_r(1+sT_N)}{sT_N}$$

Ergebnis:  $J_{min}(k_r, T_N) = 28.6, k_r = 2.5, T_N = 11$



Bilder Höhenlinien und Kennfeld der Funktion  $J(k_r, T_N)$

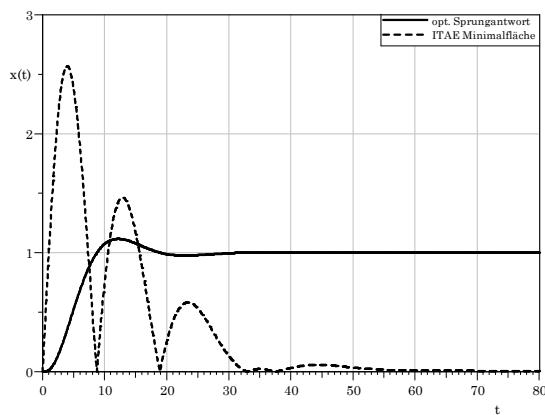
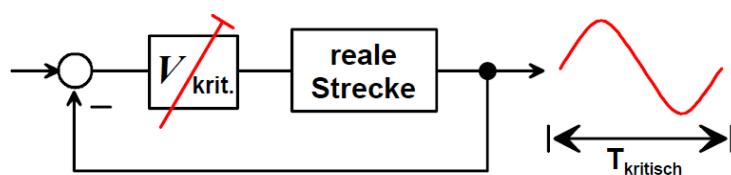


Bild ITAE optimierte Sprungantwort

### Übungsbeispiele IK1)-IK5)

#### 3.5.4 Verfahren nach Ziegler-Nichols

Ein Regler kann auch experimentell eingestellt werden, es ist dabei die Kenntnis des exakten Modells der Strecke nicht erforderlich. Es werden die Parameter für einen P, PI oder PID-Regler aus Messungen an der Strecke sowie Faustformeln ermittelt.



Vorgangsweise:

- 1.) Der Regler wird als reiner P-Regler betrieben. ( $T_N$  bzw.  $T_V = 0$ )
- 2.) Die Verstärkung  $k_R$  wird solange erhöht bis die Regelung bei  $k_R = k_{\text{krit}}$  Dauerschwingungen ausführt.

3.) Die Periodendauer der Schwingung  $T_{krit}$  wird gemessen.

4.) Die Einstellwerte für den Regler folgen aus der Tabelle:

Reglertyp	Regelparameter		
	$k_R$	$T_N$	$T_V$
P	$0.5k_{krit}$	0	0
PI	$0.45k_{krit}$	$0.85T_{krit}$	0
PID	$0.6k_{krit}$	$0.5T_{krit}$	$0.12T_{krit}$

Das Einstellverfahren ist beschränkt auf Systeme wo Dauerschwingungen entstehen können und diese auch keinen Schaden verursachen.

### 3.5.5 Verfahren nach Chien, Hrones und Reswick

Ist die Sprungantwort eines Systems bekannt so können mittels Tangente für Strecken mit und ohne Ausgleich die Reglerparameter abgeleitet werden.

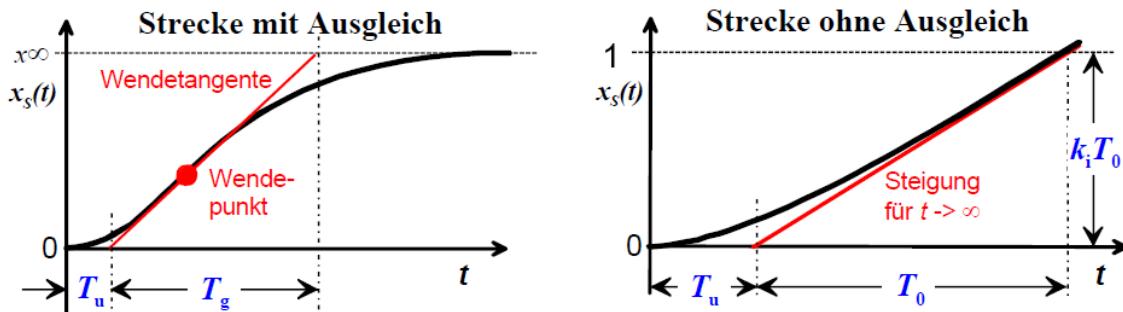


Bild Diagramm zur Bestimmung der Reglerparameter nach Chien, ...

Strecke mit Ausgleich:

Eine Hilfsgröße  $x$  wird aus Verzugszeit  $T_u$  und Anstiegszeit  $T_g$ ,  $x = \frac{T_g}{k_s T_u}$  ermittelt.  
 $k_s = x_\infty$ , wenn der Sprung am Eingang die Höhe 1 besitzt. Der Überlegung nach CHR liegt eine Näherung mittels  $PT_1T_t$ -Strecke zugrunde.

Regler	20% Überschwingen $D \sim 0.45$		aperiodisch $D \sim 0.8$		
	Störung	Führung	Störung	Führung	
P	$k_R$	$0.7x$	$0.7x$	$0.3x$	$0.3x$
PI	$k_R$	$0.7x$	$0.6x$	$0.6x$	$0.35x$
	$T_N$	$2.3T_u$	$T_g$	$4T_u$	$1.2T_g$
PID	$k_R$	$1.2x$	$0.95x$	$0.95x$	$0.6x$
	$T_N$	$2T_u$	$1.35T_g$	$2.4T_u$	$T_g$
	$T_V$	$0.42T_u$	$0.47T_u$	$0.42T_u$	$0.5T_u$

Strecke ohne Ausgleich:  $x$  wird aus der Verzugszeit  $T_u$  und der Steigung  $k_i$  ermittelt,  
 $x = \frac{1}{k_i T_u}$

Regler		20% Überschwingen D ~ 0.45		aperiodisch D ~ 0.8	
		Störung	Führung	Störung	Führung
P	$k_R$	0.7x	0.7x	0.3x	0.3x
PI	$k_R$	0.71x	0.59x	0.59x	0.34x
	$T_N$	$2.3T_u$	-	$4T_u$	-
PID	$k_R$	1.2x	0.95x	0.95x	0.59x
	$T_N$	$2T_u$	-	$2.4T_u$	-
	$T_V$	$0.42T_u$	$0.47T_u$	$0.42T_u$	$0.5T_u$

### Übungsbeispiele ERE1)-ERE6)

#### 3.5.6 Entwurfsbeispiele

##### 3.5.6.1 Phase Locked Loop

Eine PLL-Schaltung (Phase Locked Loop = phasenstarre Schleife) wird zur Frequenzvervielfachung und zur Demodulation von FM- und PM-Signalen verwendet. Besonders wichtig ist der Einsatz bei der PSK (Phase Shift Keying)-Demodulation. Das PSK-Verfahren spart Bandbreite und senkt die BER (Bit Error Rate). Die zu übertragende binäre Information wird in der Phasenlage des Signals verpackt. Binär bedeutet, dass beim Senden zB. wie folgt codiert wird:

Informationsbit = 0 -> Phasensprung von  $\Delta\phi = -90^\circ$

Informationsbit = 1 -> Phasensprung von  $\Delta\phi = +90^\circ$

Die demodulierte Information steht am VCO-Eingang zur Verfügung. Ausgewertet wird demnach das Korrektursignal des VCO, welcher bei einem Phasensprung kurzfristig die Frequenz verändert um dem Phasensprung zu folgen. Die Phasenänderung wird in eine Spannungsänderung umgewandelt. Nachfolgende Schaltung vom Typ HEF4046 bzw. 74HCT4046 stellt einen TTL-PLL-Regelkreis dar. Eingangssignal  $SIGN_{IN}$  und VCO-Signal  $VCO_{OUT}$  sind daher rechteckförmig.

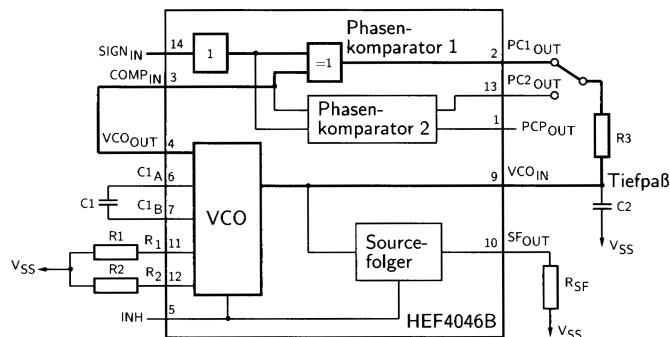
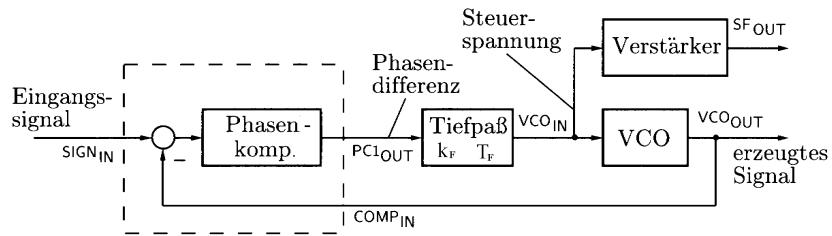
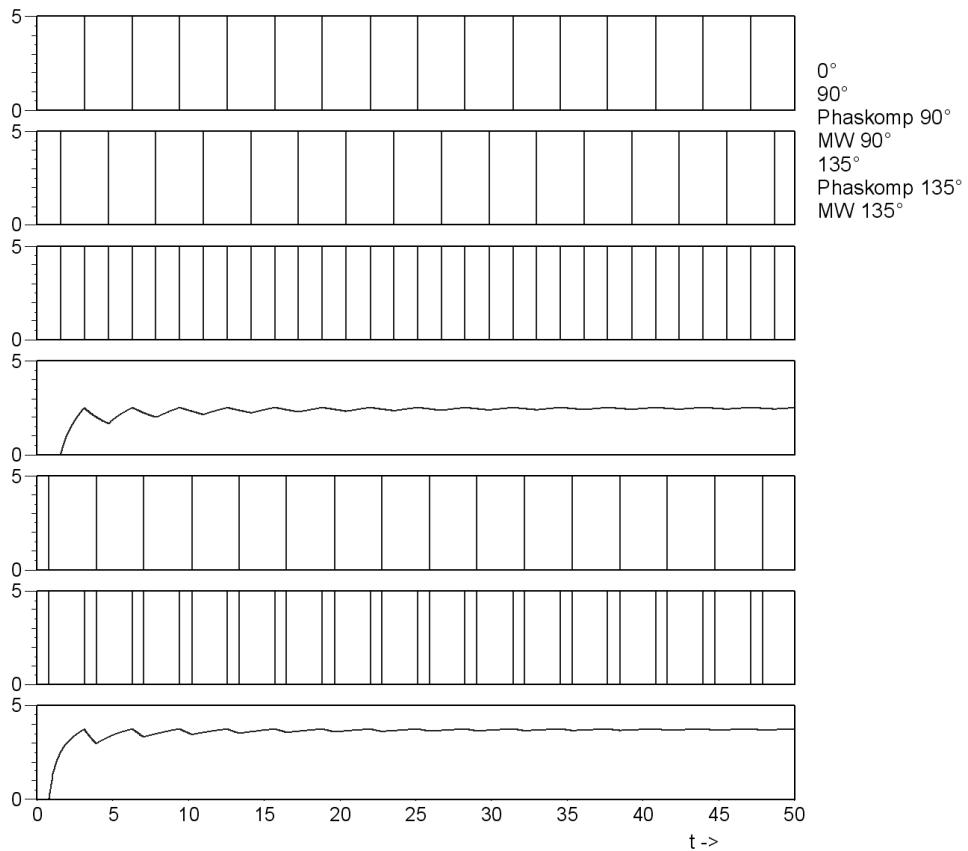


Bild PLL-Geräteplan HEF4046 bzw. 74HCT4046



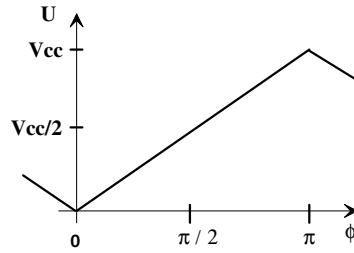
Blockdiagramm PLL

Gesucht sind die Parameter des Tiefpasses  $k_F$  und  $T_F$ , sodass der Phasenausgleich des geschlossenen Regelkreises bei einem Phasensprung am Eingang betrags optimal abläuft. Der Phasenkomparator wird im TTL-Baustein mittels XOR-Gatter realisiert. Werden zwei phasenverschobene Rechtecksignale gleicher Frequenz an ein XOR-Gatter angelegt, so folgt ein Ausgangssignal dessen Mittelwert proportional der Phasenverschiebung ist.



Vergleich der Phasenkomparatoren signale bei 90° bzw 135° Verschiebung

Die Übertragungsfunktion des Phasenkomparators im Regelkreis hat als Eingangsgröße die Phasendifferenz und aus Ausgangsspannung dazu eine proportionale Spannung (P-Element nicht linear).



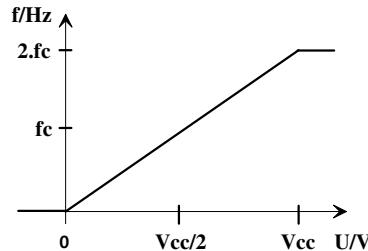
$$F_{ph}(s) = \frac{U_{ph}(s)}{\varphi(s)} = \frac{V_{cc}}{\pi} \quad \text{Phasenkomparator im linearen Bereich}$$

Der Phasenkomparator zeigt daher nichtlineares P-Verhalten. Daraus folgt, dass das PLL-System einen eingeschränkten Fangbereich besitzt. Ist der Phasensprung am Eingang zu groß kann das PLL-System nicht mehr ausregeln. Das RC-Filter dient als Mittelwertbildner und hat PT<sub>1</sub>-Verhalten.

$$F_F(s) = \frac{U_{VCO_{IN}}(s)}{U_{ph}(s)} = \frac{k_F}{1+sT_F} \quad \text{Filter PT}_1$$

Der Parameter  $k_F$  ist eine zusätzliche Verstärkung und regelt die Empfindlichkeit, während  $T_F$  die Filterzeitkonstante ein Maß für die Schnelligkeit und den Brumm in der Gleichspannung darstellt. Die Verstärkung  $k_F$  kann bei einem passiven Filter natürlich nur Werte  $0 < k_F < 1$  annehmen.

Der VCO gibt eine der Eingangsspannung proportionale Frequenz ab. Die Beziehung von Eingangsspannung zur Ausgangsphase ergibt sich aus dem integralen Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $\omega$ .



Die Beziehung von Eingangsspannung zur Ausgangsphase ergibt sich aus dem integralen Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $\omega$ .

$$\varphi(t) = \int \omega(t) dt \Rightarrow \varphi(s) = \frac{\omega(s)}{s}$$

Im Ruhezustand muss am Eingang  $V_{cc}/2$  anliegen damit am Ausgang die Zentrumsfrequenz  $\omega_c$  bzw.  $f_c$  folgt.

$$F_{VCO}(s) = \frac{\varphi(s)}{U_{VCO_{IN}}(s)} = \frac{k_V}{s} = \frac{2\omega_c}{sV_{cc}} \quad \text{VCO integriert die Phase } (f_c \dots \text{Center-frequency})$$

Für die offenen Schleife folgt:

$$F_0(s) = F_{ph}(s)F_F(s)F_{VCO}(s) = \frac{V_{cc}}{\pi} \frac{k_F}{1+sT_F} \frac{2\omega_c}{sV_{cc}} = \frac{2\omega_c}{\pi} \frac{k_F}{(1+sT_F)s} \dots \text{IT}_1 \text{ offen} \Rightarrow \text{PT}_2 \text{ geschlossen}$$

$$F_{W\varphi}(s) = \frac{F_0(s)}{1+F_0(s)} = \frac{\frac{2\omega_c}{\pi} \frac{k_F}{(1+sT_F)s}}{1+\frac{2\omega_c}{\pi} \frac{k_F}{(1+sT_F)s}} = \frac{\frac{2\omega_c}{\pi} k_F}{(1+sT_F)s + \frac{2\omega_c}{\pi} k_F} = \frac{1}{s^2 \frac{\pi T_F}{2\omega_c k_F} + \frac{\pi}{2\omega_c k_F} s + 1} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2D}{\omega_n} s + 1}$$

Um eine betragsoptimale Einstellung zu erhalten genügt es einen Koeffizientenvergleich mit dem Standard-PT<sub>2</sub>-Element durchzuführen. Für das BO (Betragsoptimum) muss die Dämpfung auf  $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$  eingestellt werden. Als freie Parameter stehen im Filter  $k_F$  und  $T_F$  zur Verfügung. Ferner ist die Relation zwischen der Zentrumsfrequenz  $\omega_c$  und der Grenzfrequenz des Filters  $\omega_F = \frac{1}{T_F}$  nicht frei wählbar. Genaugenommen dürfen die Methoden der linearen Regelungstechnik nur angewendet werden, wenn die Zentrumsfrequenz (Schaltfrequenz des Oszillators)  $\omega_c \gg \omega_F$  ist. Durch Simulation stellt man fest, dass das System unter der Bedingung  $\frac{\omega_c}{\omega_F} \geq \frac{\pi}{4}$  fehlerfrei betrieben werden kann.

$$\frac{2D}{\omega_n} = \frac{\pi}{2\omega_c k_F}, \quad \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{\pi T_F}{2\omega_c k_F} \Rightarrow \frac{1}{\omega_n} = \sqrt{\frac{\pi T_F}{2\omega_c k_F}} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \omega_n \frac{\pi}{2\omega_c k_F} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\omega_c k_F}{\pi T_F}} \frac{\pi}{2\omega_c k_F} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_c k_F T_F}}$$

$$k_F = \frac{1}{4D^2} \frac{\pi}{2\omega_c T_F} = \frac{\pi}{8D^2 \omega_c T_F}$$

$$\text{Annahme: } \omega_c = \pi, (f_c = \frac{1}{2}), \omega_F = 1, T_F = 1, D = 0.707 \Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega_F} = \pi \geq \frac{\pi}{4}$$

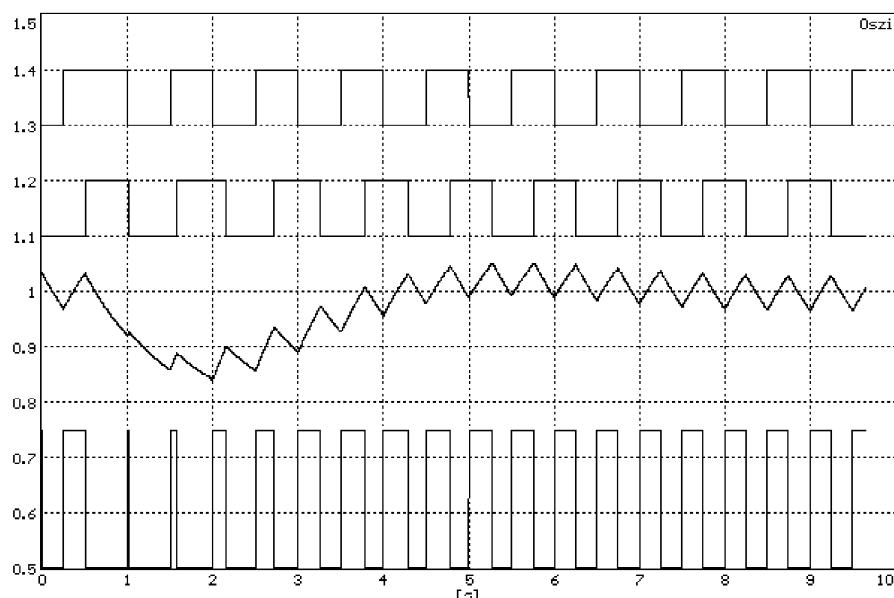
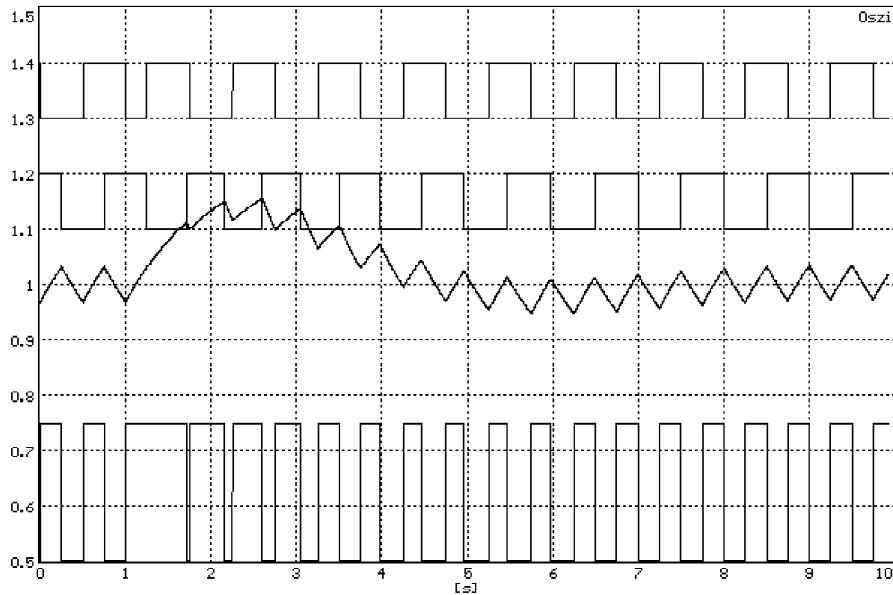
$$k_F = \frac{\pi}{8D^2 \omega_c T_F} = \frac{1}{4}, \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2\omega_c k_F}{\pi T_F}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707$$

$\omega_n$  folgt aus der Parameterwahl und ist damit nicht frei wählbar.

PT<sub>2</sub>-Verhalten zeigt der Regelkreis, wenn die Ist-Phasenlage  $\varphi$  als Ausgangsgröße angenommen wird. Weiterverarbeitet wird jedoch die Filterausgangsspannung  $U_{VCOIN}$ , siehe PLL-Blockdiagramm. Wird als Ausgangsgröße des Regelkreises die Größe  $U_{VCOIN}$  angenommen ergibt sich für  $F_{WF}(s)$ :

$$F_{WF}(s) = \frac{F_{ph}(s)F_F(s)}{1+F_{ph}(s)F_F(s)F_{VCO}(s)} = \frac{s^{\frac{Vcc}{2\omega_c}}}{s^2 \frac{\pi T_F}{2\omega_c k_F} + \frac{\pi}{2\omega_c k_F} s + 1} \dots \text{DT}_2\text{-Verhalten}$$

In den nachfolgenden Bildern ist dies gut zu erkennen. Die Auswertung der Phase bei PSK erfolgt mittels Komparator mit Hysterese  $H = h_+ - h_-$  ( $U_{VCOIN} > h_+ \Rightarrow$  Informations-Bit 1,  $U_{VCOIN} < h_- \Rightarrow$  Informations-Bit 0).



Man erkennt, dass ca. 14 Perioden vergehen bis ausgeregelt ist und ein neues Bit übertragen werden kann.

Simulationsbeispiel PLL: Es ist ein PLL-Regelkreis zu simulieren. ( $V_{CC} = 5$ ,  $T_F = 1$ ,  $k_F = 0.25$ ,  $\omega_c = \pi$ ). Hinweis: Da im Ruhezustand am VCO-Eingang  $V_{CC}/2 = 2.5$  anliegen muss damit am Ausgang die Zentrumsfrequenz  $\omega_c$  folgt, muss der Regelkreis im ausgeregelten Zustand eine Phasendifferenz von  $90^\circ$  zwischen Signaleingang und VCO-Ausgang aufweisen. Zu berücksichtigen ist ferner, dass durch  $k_F$  auch die Mittelwertbildung verfälscht wird. In der Simulation ist es daher sinnvoll den Wert  $V_{CC}/2 = 2.5$  vor dem Filtern abzuziehen und anschließend wieder zu addieren. Realisieren Sie einen Tasterpaar das während der Simulation Phasensprünge von  $\pm 90^\circ$  im Eingangssignal (synchron zur steigenden Flanke) einleitet.

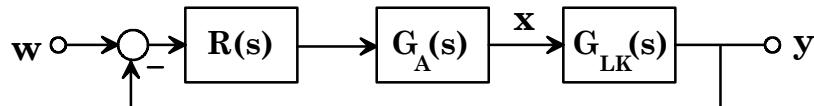
### 3.5.6.2 Laufkatze

Zu entwerfen ist ein Regler für das bereits früher entwickelte Laufkatzenmodell. Der Antrieb  $G_A(s)$  der Laufkatze  $G_{LK}(s)$  hat näherungsweise IT<sub>1</sub>-Verhalten. Es ist die Position  $y(t)$  des Greifers durch die Stellgröße  $u(t)$  zu regeln.

$$G_A(s) = \frac{k_S}{s(1+sT_S)}, \quad G_{LK}(s) = \frac{1}{\frac{l}{g}s^2 + \frac{lr}{gm}s + 1}, \quad S(s) = G_A(s)G_{LK}(s) = \frac{k_S}{s(1+sT_1)} \frac{1}{\frac{l}{g}s^2 + \frac{lr}{gm}s + 1}$$

$$T_S = 0.5, k_S = 0.1, \frac{l}{g} = 0.05 = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = 4.47, \frac{lr}{gm} = 0.005 \Rightarrow D = 0.111$$

a.) P-Regler:  $R(s) = k_R$



$$F_0(s) = R(s)S(s) = \frac{k_S}{s(1+sT_S)} \frac{k_R}{\frac{l}{g}s^2 + \frac{lr}{gm}s + 1} \dots \text{IT}_3\text{-Verhalten}$$

Einstellbedingung  $|F_0(\omega_0)| < 1$ :

$$|F_0(\omega_0)| = \frac{k_S}{\omega_0 \sqrt{1+\omega_0^2 T_S^2}} \frac{k_R}{\sqrt{(1-\frac{l}{g}\omega_0^2)^2 + (\frac{lr}{gm})^2 \omega_0^2}} = \frac{0.1}{4.47 \sqrt{1+4.47^2 \cdot 0.5^2}} \frac{k_R}{\sqrt{(1 - 0.05 \cdot 4.47^2)^2 + 0.005^2 \cdot 4.47^2}} < 1$$

$$\Rightarrow k_R < 2.44$$

Welche Simulationsschrittweite ist zu wählen?  $\Delta T_S = 0.05 T_{\min} = 0.05 \frac{1}{\omega_0} = 0.011$

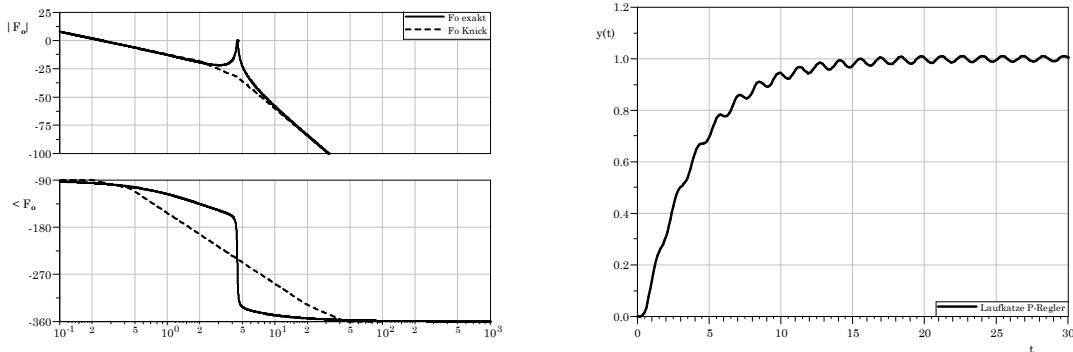
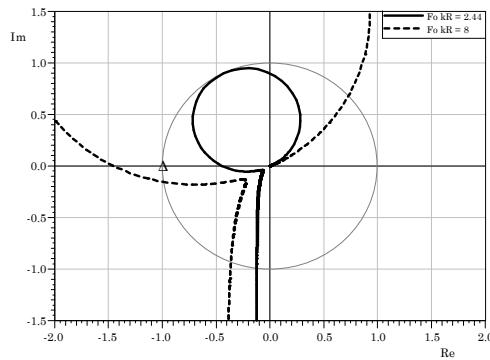
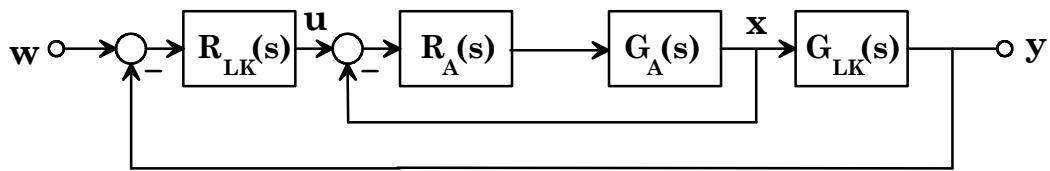


Bild Bodediagramm  $|F_0(j\omega)|$  und Sprungantwort  $y(t)$

Bild Ortskurve von  $F_0(j\omega)$ 

Deutlich ersichtlich ist die Resonanzüberhöhung infolge des schwach gedämpften Greifers. Die Phasenreserve ist ausreichend, die Verstärkung  $k_R$  kann jedoch nicht weiter angehoben werden, weil die Spitze der Resonanzüberhöhung die 0 dB Marke überschreiten würde (strichlierter Ortskurvenverlauf). Die Laufkatze ist ein typisches Beispiel welches wesentlich besser unter Verwendung eines Zustandsreglers behandelt wird. Es sind allerdings mehrere Prozessgrößen zur Regelung heranzuziehen.

## b.) Kaskadenregelung



P-Regler nur für Antrieb:

$$F_{0x}(s) = R_A(s)G_A(s) = \frac{k_S k_R}{s(1+sT_S)} \dots \text{IT}_1\text{-Verhalten}$$

mit betragsoptimaler Einstellung  $D_A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ :

$$F_{ux}(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{F_{0x}(s)}{1+F_{0x}(s)} = \frac{\frac{k_S k_R}{s(1+sT_S)}}{1+\frac{k_S k_R}{s(1+sT_S)}} = \frac{1}{\frac{s(1+sT_S)}{k_S k_R}+1} = \frac{1}{\frac{s^2 T_S}{k_S k_R} + \frac{s}{k_S k_R} + 1} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_{0A}^2} + \frac{2D_A s}{\omega_{0A}} + 1}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\frac{T_S}{k_S k_R} = \frac{0.5}{0.1 k_R} = \frac{1}{\omega_{0A}^2} \Rightarrow \omega_{0A}^2 = 0.2 k_R, \frac{1}{k_S k_R} = \frac{1}{0.1 k_R} = \frac{2 D_A}{\omega_{0A}} = \frac{\sqrt{2}}{\omega_{0A}} \Rightarrow \omega_{0A} = \frac{\sqrt{2}}{10} k_R$$

$$\omega_{0A}^2 = 0.2 k_R = \left(\frac{\sqrt{2}}{10} k_R\right)^2 \Rightarrow k_R = \frac{0.2 * 100}{2} = 10 \Rightarrow \omega_{0A} = \sqrt{2} \dots \text{BO-Einstellung}$$

PID-Regler für Greiferposition:

$$R_{LK}(s) = k_R \left(1 + \frac{1}{sT_N} + s \frac{T_V}{1+sT_1}\right) = k_R \frac{1+s(T_N+T_1)+s^2T_N(T_V+T_1)}{sT_N(1+sT_1)} = k_R \frac{(1+sT_A)(1+sT_B)}{sT_N(1+sT_1)}$$

$$F_{0y}(s) = R_{LK}(s)F_{ux}(s)G_{LK}(s) = \frac{1}{0.5s^2+s+1} \frac{1}{\frac{l}{g}s^2+\frac{lr}{gm}s+1} k_R \frac{1+s(T_N+T_1)+s^2T_N(T_V+T_1)}{sT_N(1+sT_1)}$$

Kompensation des komplexen Polpaars:

$$\frac{l}{g}s^2 + \frac{lr}{gm}s + 1 = 0.05s^2 + 0.005s + 1 = 1 + s(T_N + T_1) + s^2T_N(T_V + T_1)$$

Annahme:  $T_1 = 0.1T_N$

$$T_N + T_1 = 1.1T_N = 0.005 \Rightarrow T_N = 0.0045, T_1 = 0.00045$$

$$T_N(T_V + T_1) = T_N(T_V + 0.1T_N) = 0.05, T_V = \frac{0.05}{T_N} - 0.1T_N = 10.99$$

$$F_{0y}(s) = R_{LK}(s)F_{ux}(s)G_{LK}(s) = \frac{1}{0.5s^2+s+1} \frac{k_R}{sT_N(1+s0.1T_N)} = F_{PT_2} F_I F_{T_1} \dots \text{IT}_3\text{-Verhalten}$$

Das  $T_1$ -Element hat bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  keine Wirkung weil:

$$\omega_{0A} = \sqrt{2} \ll \frac{1}{0.1T_N} = 2200$$

$$\Rightarrow F_{0y}(s) \approx \frac{1}{0.5s^2+s+1} \frac{k_R}{sT_N} \dots \text{IT}_2\text{-Verhalten}$$

$$\text{Entwurfsziel: } a_R = 67^\circ \Rightarrow \text{Arg}[F_{PT_2}(j\omega_D)] + \text{Arg}[F_I(j\omega_D)] = a_R - 180^\circ$$

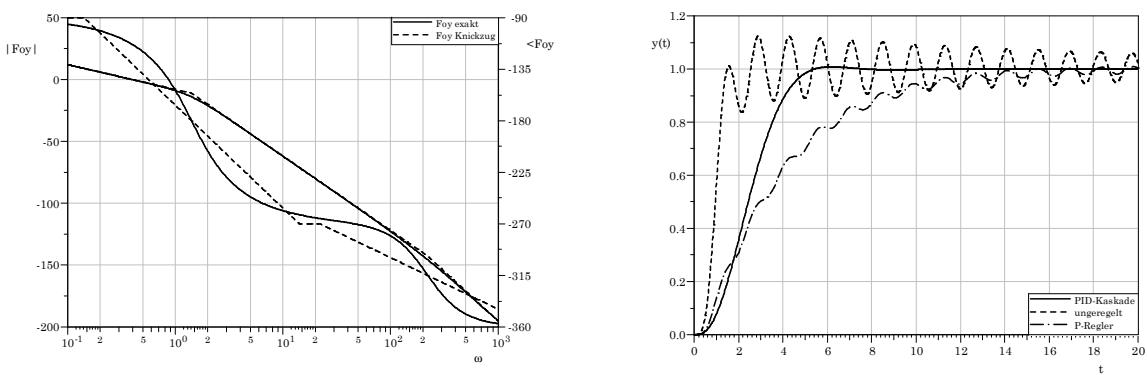
$$\Rightarrow \text{Arg}[F_{PT_2}(j\omega_D)] = 67^\circ - 180^\circ + 90^\circ = -23^\circ$$

$$\text{Arg}[F_{PT_2}(j\omega_D)] = -\text{atan} \frac{\omega_D}{1-0.5\omega_D^2} \Rightarrow \tan 23^\circ = \frac{\omega_D}{1-0.5\omega_D^2}$$

$$\Rightarrow -0.5\omega_D^2 \tan 23^\circ - \omega_D + \tan 23^\circ = 0 \Rightarrow \omega_D = 0.392$$

$$|F_{0y}(\omega_D)| \approx \frac{1}{\sqrt{(1-0.5\omega_D^2)^2 + \omega_D^2}} \frac{k_R}{0.0045\omega_D} = 1 \Rightarrow k_R = 0.00179$$

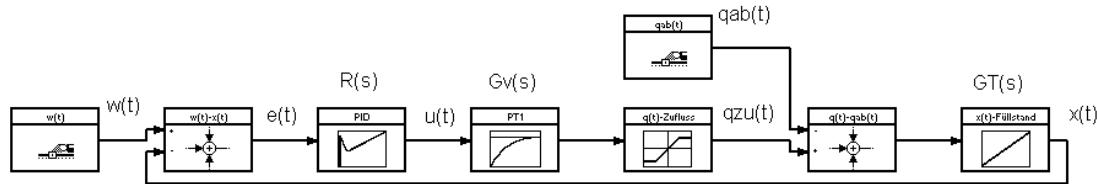
$$\text{Welche Simulationsschrittweite ist zu wählen? } \Delta T_S = 0.05T_{\min} = 0.05 \frac{1}{\omega_{0A}} = 0.035$$



Durch die vollständige Kompensation des komplexen Polpaars ist die Pendelschwingung des Greifers in der Sprungantwort der PID-Kaskadenregelung verschwunden.

### 3.5.6.3 Tank

Zu dem bereits bekannten Modell des Füllstandsystems ist ein betragsoptimaler PID-Regler zu entwerfen. Es beeinflussen hier zwei Größen den Füllstand die Führunggröße  $w(t)$  und die Störgröße  $q_{ab}(t)$ .



Blockdiagramm Füllstandsregelung

Das Ventil besitzt PT<sub>1</sub>-Verhalten, da das mechanische Öffnen und Schließen eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt.

$$G_V(s) = \frac{k_V}{1+sT_1} \rightarrow \text{Ventil}$$

$$G_T(s) = \frac{1}{sT_T} \rightarrow \text{Tank}$$

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V\right) = k_p \frac{1+sT_N+s^2T_NT_V}{sT_N} = k_p \frac{(1+sT_A)(1+sT_B)}{sT_N} \rightarrow \text{PID-Regler}$$

Im vorliegenden Beispiel ist ein Regler mit I-Anteil erforderlich. Ohne I-Anteil können Gleichgewichtszustände  $q_{ab}(t) = q_{zu}(t)$  auftreten, bei denen der gewünschte Füllstand  $w(t)$  nicht erreicht ist. Der Regelkreis hat mit einer bleibenden Regelabweichung den Endzustand erreicht  $(w - x_\infty) k_V k_R = q_{ab}$ .

Führunggröße der Regelung = Sollwert des Füllstands:  $w(t)$   
Störgröße der Regelung:  $q_{ab}(t)$ , Regelgröße Füllstand:  $x(t)$

$$X(s) = \frac{RG_VG_T}{1+RG_VG_T} W(s) - \frac{G_T}{1+RG_VG_T} Q_{ab}(s)$$

Welches Verhalten ergibt sich für  $F_W(s)$  und  $F_Z(s) = F_{q_{ab}}(s)$  ?

$$F_0(s) = RG_VG_T = k_p \frac{1+sT_N+s^2T_NT_V}{sT_N} \frac{k_V}{1+s} \frac{1}{sT_T} = k_p \frac{(1+sT_A)(1+sT_B)}{sT_N} \frac{k_V}{1+sT_1} \frac{1}{sT_T} \rightarrow \text{Annahme: } T_A = T_1$$

$$F_0(s) = RG_VG_T = k_p k_V \frac{(1+sT_B)}{s^2 T_N T_T} \rightarrow \text{I}_2\text{-Verhalten ist meist problematisch}$$

$$F_W(s) = \frac{k_p k_V \frac{(1+sT_B)}{s^2 T_N T_T}}{1 + k_p k_V \frac{(1+sT_B)}{s^2 T_N T_T}} = \frac{k_p k_V (1+sT_B)}{s^2 T_N T_T + k_p k_V (1+sT_B)} = \frac{(1+sT_B)}{s^2 \frac{T_N T_T}{k_p k_V} + sT_B + 1} \rightarrow \text{PDT}_2\text{-Verhalten}$$

Es ist nun ein Koeffizientenvergleich mit der PT<sub>2</sub>-Standardübertragungsfunktion durchzuführen, der im Nenner von  $F_W(s)$  eine Dämpfung von  $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (-> BO?) ergibt.

$$F_{PT_2}(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2D}{\omega_n} s + 1}$$

Annahme:  $\omega_n = 1$ ,  $D = 0.707$ ; Daraus sind die Parameter  $T_N$ ,  $T_V$ , und  $k_p$  zu bestimmen ( $T_T = 1$ ,  $T_1 = 1$ ,  $k_V = 5$ )

Vorgangsweise: mit  $\omega_n$ ,  $D \rightarrow T_B$  mit  $T_A = T_1$  bereits bekannt  $\rightarrow T_N$  und  $T_V$  aus weiterem Koeffizientenvergleich  $\rightarrow k_p$  mit  $\omega_n, T_N, k_V$  bereits bekannt;

(Lösung:  $T_N = 2.4$ ,  $T_V = 0.5833$ ,  $k_p = 0.48$ )

(Weitere Lösung mit  $D = 2$  suchen!)

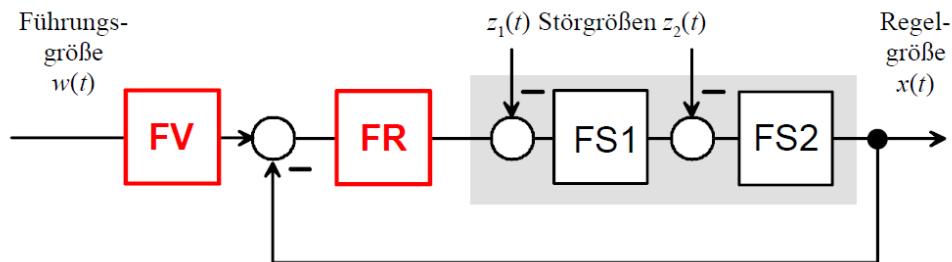
Es ist das System mit je einem Schieberegler für  $w(t)$  und  $q_{ab}(t)$  zu simulieren. Es sind Begrenzungen, die den Überlauf und Unterlauf des Tanks verhindern, zu realisieren. Wie ist die Simulationsschrittweite zu wählen?

Welche Höhe des Überschwingens in [%] ergibt sich bei einem Sollwert- und welche bei einem Störgrößensprung? Es ist die Phasenreserve von  $F_0(s)$  zu ermitteln.

### 3.6 Erweiterte Regelkreisstrukturen

#### 3.6.1 Vorfilter

Treten in einem Regelkreis Störungen und Sollwertänderungen auf, ist für beide Anforderungen optimales Verhalten erwünscht. Der einschleifige Regelkreis kann aufgrund nur eines Freiheitsgrades entweder auf das Führungs- oder auf das Störungsverhalten optimiert werden. Die Verkopplung von Führungs- und Störungsverhalten ist ausschlaggebend für diese Einschränkung. Ein Maßnahme zur Implementierung eines weiteren Freiheitsgrades stellt ein Vorfilter dar. Der Regelkreis wird ohne Vorfilter auf optimales Störverhalten ausgelegt. Das Vorfilter kann dann unabhängig davon auf optimales Führungsverhalten angepasst werden.



$$F_Z(s) = \frac{F_S}{1+F_R F_S}, \quad F_W(s) = \frac{F_V F_R F_S}{1+F_R F_S} = F_V F_R F_Z(s)$$

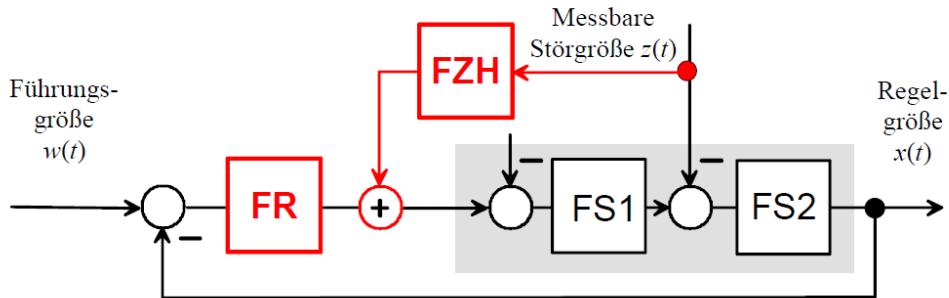
Der Nenner des Vorfilters bringt neue Polstellen zur Übertragungsfunktion  $F_W$ ,  $F_V$  muss daher stabil sein (zB. PT<sub>n</sub>-Verhalten).

#### 3.6.2 Vorsteuerung

Eine Möglichkeit das Führungsverhalten zu verbessern bietet die Vorsteuerung. Der Sollwert wird auf den Reglerausgang "vorgeschaltet", was insbesondere bei Reglern mit Integralanteil eine Beschleunigung bewirkt. Die Stellgröße für die Strecke ergibt sich als Summe der Vorsteuerung und des Reglersignals.

### 3.6.3 Störgrößenaufschaltung

Sind die Störgrößen eines Systems messbar und ist der Ort der Einwirkung bekannt, so können sie durch direkte Störgrößenaufschaltung teilweise bzw. ganz kompensiert werden.



$$F_Z(s) = \frac{F_{S_2}[F_{ZH}F_{S_1}-1]}{1+F_RF_{S_1}F_{S_2}}$$

Wird die Funktion  $F_{ZH} = \frac{1}{F_{S_1}}$  gewählt, wird die Störung gänzlich eliminiert. Wegen des Tiefpassverhaltens der üblichen Regelstrecken führt dies für  $F_{ZH}$  zu differenzierendem Verhalten (zB. PD-Verhalten). Dies bringt Unruhe in den Regelkreis, weshalb man sich oft mit reinem P-Verhalten für die Funktion  $F_{ZH}$  begnügt. Die Polstellen des Systems sind von der Störgrößenaufschaltung nicht betroffen. Somit bleibt auch das Führungsverhalten unverändert. Dies gilt aber nur, wenn es sich um unabhängige Störgrößen handelt, die nicht in irgendeiner Weise von den Zustandsgrößen innerhalb der Strecke oder der Regelgröße beeinflusst werden. Bestehen solche Einflüsse, so kann eine Störaufschaltung auf schwer nachvollziehbare Rückführungsschleifen führen, die das Eigenverhalten nachhaltig verändern.

## 4 Digitale Regelungstechnik (RT)

### 4.1 Regelkreis

Der Regelkreis mit digitaler Regelung besitzt ein Rechenwerk (PC, Microkontroller, DSP, Feldbusssystem, ...) was eine Diskretisierung des Signalflusses zur Folge hat. Die digitale Regelungstechnik beschäftigt sich nun mit zugehörigen Beschreibungsformen und Entwurfsmethoden. Nachfolgendes Bild zeigt die erforderlichen Komponenten wie A/D- und D/A-Wandler, Rechner, ...

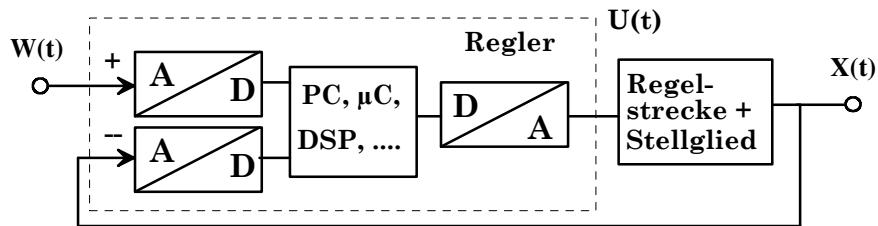


Bild Digitaler Regelkreis mit externer Sollwertvorgabe

Der Regler ist in Form eines Algorithmus realisiert der schrittweise (zeitdiskret) abgearbeitet wird. Praktische Regelstrecken sind meist zeitkontinuierlich, sodass der klassische digitale Regelkreis aus diskreten und kontinuierlichen Elementen besteht.

#### 4.1.1 Abtaster

Das zentrale Element bei der Diskretisierung ist der zyklische mit der Zeit  $T$  getaktete Abtaster.

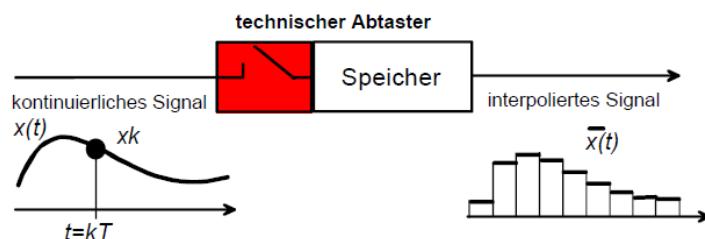


Bild Abtastung technisch

Die Signalwerte werden zum Abtastzeitpunkt abgegriffen bzw. bereitgestellt und bis zum nächsten Abtastzeitpunkt gehalten. Es wird dabei aus der kontinuierlichen Funktion  $x(t)$  eine zeitliche Zahlenfolge  $x(kT)$  diskreter Signalamplituden  $x_k$ . Dies wird üblicherweise durch ein Abtasthalteglied (Sample & Hold) 0. Ordnung modelliert (ZOH = Zero Order Hold). Das Halten des Wertes erfolgt typischerweise in einem RAM-Speicher. Der Speicher nimmt nacheinander die Werte der Folge

$x(kT)$  auf und stellt sie während der folgenden Tastperiode von  $kT \leq t < (k+1)T$  am Ausgang zur Verfügung.

**Mathematisches Modell:** Vom Ende aus betrachtet führt die Abtastung auf eine Folge von Sprungfunktionen die zum jeweils nächsten Abtastschritt wieder abgeschaltet werden. Gleichzeitig wird die Folge über den gesamten Verlauf aufsummiert.

$$x_a(t) = \sum_k x_k [\sigma(t - kT) - \sigma(t - (k + 1)T)]$$

Die Glieder dieser Reihe lassen sich nun einzeln Laplace-transformieren.

$$X_a(s) = \bar{X}(s) = \sum_k x_k \frac{e^{-skT} - e^{-s(k+1)T}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_k x_k e^{-skT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} X_e^*(s)$$

Die stufenförmige Funktion  $X_a(s)$  wird auch  $\bar{X}(s)$  bezeichnet. Nach Heraushebung wird der verbleibende Summenterm  $X_e^*(s)$  bezeichnet. Der \* symbolisiert die Abtastung, nicht zu verwechseln mit der Faltung, die ebenfalls durch einen Stern dargestellt wird. Wird  $X_e^*(s)$  rücktransformiert so erhält man:

$$X_e^*(s) = \sum_k x_k e^{-skT} \Rightarrow x_e(kT) = \sum_k x_k \delta(t - kT) = \sum_k x^*(kT) \dots \text{Dirac-Abtaster}$$

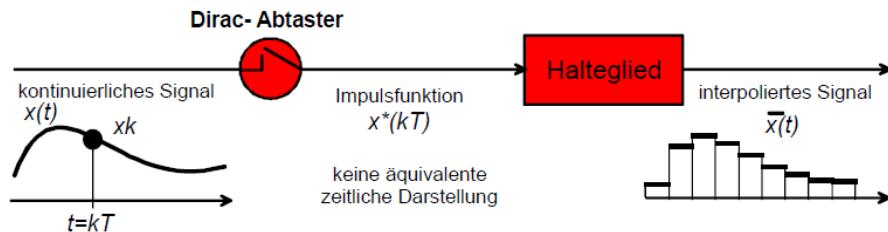


Bild Abtastung mathematisch

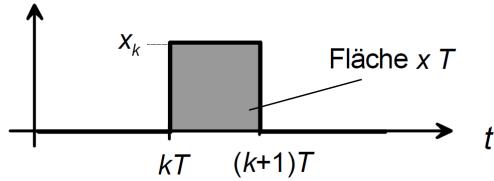
Dies stellt eine Folge von jeweils um  $T$  versetzten Dirac-Impulsen dar, welche mit dem zugehörigen Funktionswert des Signals multipliziert werden. Diese Funktion wird auch als Dirac-Abtaster bezeichnet. Im  $s$ -Bereich können so prinzipiell zwei Funktionen der Abtastung getrennt dargestellt werden. Der obige Dirac-Abtaster und das folgende Halteglied.

$$F_{ZOH}(s) = \frac{\bar{X}(s)}{X_e^*(s)} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \dots \text{Übertragungsfunktion des Halteglieds}$$

Das Halteglied führt einen Dirac-Impuls in einen Impuls der Höhe  $x_k$  und der Breite  $T$  über, was sich durch die Probe zeigen lässt:

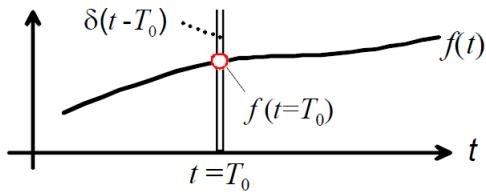
$$X_a(s) = X_e(s) F_{ZOH}(s) = x_k e^{-skT} \frac{1 - e^{-sT}}{s} = (1 - e^{-sT}) \frac{x_k}{s} e^{-skT} = \frac{x_k}{s} (e^{-skT} + e^{-s(k+1)T})$$

$$\Rightarrow x_a(t) = x_k [\sigma(t - kT) - \sigma(t - (k+1)T)]$$



Die Abtastung kann man sich aus der Faltung des Eingangssignals mit dem Dirac-Taster entstanden denken. Die Ausblendwirkung des Dirac-Impulses ist dabei entscheidend.

$$f(t) * \delta(t - T_0) = \int_0^t f(t - \tau) \delta(t - T_0) d\tau = f(T_0) \delta(t - T_0)$$



$$\text{mit Impulsfolge: } x(kT) = x(t) * \sum_k \delta(t - kT) = \sum_k x_k \delta(t - kT)$$

Wird in einem Regelkreis eine zeitkontinuierliche Strecke mit einem abgetasteten Signal angespeist, so ist ein Abtaster mit Halteglied als Übertragungselement vorzusehen.

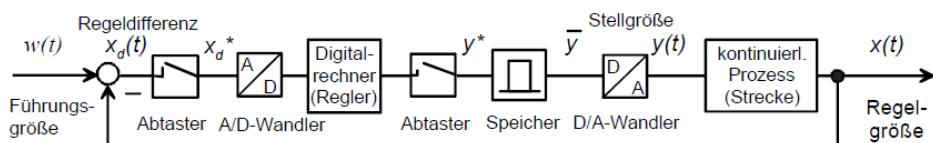


Bild Regelkreis mit Abtaster vor Strecke

## 4.2 $z$ -Transformation

Zur effizienten Darstellung von Zahlenfolgen diskreter Systeme hat sich die  $z$ -Transformation durchgesetzt.

$$x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), \dots$$

Die einzelnen Elemente können in Form einer Reihe zusammengefügt zu einer unendlichen Summe werden. Interessant ist dabei natürlich nicht die Summenformel sondern das geschlossene Ergebnis.  $z$  markiert die Zeitverschiebung und verhindert gleichzeitig die einfache Addition.

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(n)z^{-n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

Die Reihe kann auch als spezielle Laurent-Reihe für negative Exponenten von  $z$  interpretiert werden. Die Sprungfunktion mit  $x(k) = 1$  für alle  $k$  stellt gleichzeitig eine geometrische Reihe dar deren Summen bekannt ist.

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ q &= \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{z^{-(k+1)}}{z^{-k}} = z^{-1} \Rightarrow S_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow X(z) &= \frac{z}{z-1} \text{ für } |z| > 1 \end{aligned}$$

$X(z)$  ist die  $z$ -Transformierte als geschlossene Summe der Sprungfunktion. Für die Exponentialfunktion lässt sich das Ergebnis mit der gleichen Methode finden.

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + e^a z^{-1} + e^{2a} z^{-2} + \dots + e^{na} z^{-n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ka} z^{-k} \\ x(k) = e^{ka} \Rightarrow q &= \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{z^{-(k+1)} e^{(k+1)a}}{z^{-k} e^{ka}} = e^a z^{-1} \Rightarrow S_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^a z^{-1}} = \frac{z}{z-e^a} \\ \Rightarrow X(z) &= \frac{z}{z-e^a} \text{ für } |z| > e^a \end{aligned}$$

Die Impulsfunktion führt mit  $x(0) = 1$  und allen anderen  $x(k) = 0$  auf:  $X(z) = 1$   
Ein verschobener Impuls mit  $x(k = n) = 1$  und allen anderen  $x(k) = 0$  führt auf:

$$X(z) = x(k)z^{-n} = z^{-n}$$

Die Ableitung dieser Summen ist sehr aufwändig, die Ergebnisse für die wichtigsten Funktionen (Korrespondenzen) und die Rechenregeln werden in Tabellen zusammengestellt.

### 4.2.1 Rechenregeln

Bezeichnung der Operation	Zeitfunktion $x(t = kT)$	Zahlenfolge $x(k)$	$\mathcal{Z}$ -Transformierte $X(z)$
Verschiebung nach rechts	$x(t - mT)$	$x_{k-m}$	$z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{v=1}^m x_{-v} z^v \right] \begin{cases} \text{i. Allg.} \\ x_{-v} \equiv 0 \end{cases}$
Verschiebung nach links	$x(t + mT)$	$x_{k+m}$	$z^m \left[ X(z) - \sum_{v=0}^{m-1} x_v z^{-v} \right]$
Periodizität	$x(t) = x(t + mT)$	$x_k = x_{k+m}$	$\frac{z^m}{z^m - 1} \left( Y(z) = \sum_{v=0}^{m-1} x_v \cdot z^{-v} \right)$
	$x(t) = -x(t + mT)$	$x_k = -x_{k+m}$	mit $m$ Stützstellen pro Periode
Summation	$\sum_{v=0}^k x(t - vT)$	$\sum_{v=0}^k x_v$ bzw. $\sum_{v=0}^{k-1} x_v$	$\frac{z}{z-1} X(z)$ bzw. $\frac{1}{z-1} X(z)$
Differenzbildung	kausal $x(t) - x(t - T)$	$x_k - x_{k-1}$	$\frac{z-1}{z} X(z) - x_{-1}$
	nicht kausal $x(t + T) - x(t)$	$x_{k+1} - x_k$	$(z-1)X(z) - x_0 z$
Ähnlichkeit	$x(t) \cdot c^t$	$x_k c^k$ ; $c = \text{konstant}$	$X(z/c)$
Dämpfung $\alpha$ beliebig komplex	$x(t) e^{\alpha t}$	$x_k \cdot e^{\alpha T \cdot k}$	$X(z/e^{\alpha T})$
Multiplikationssatz	$\left(\frac{t}{T}\right)^m \cdot x(t)$	$k^m \cdot x_k$	$(-z)^m \frac{d^m X(z)}{dz^m}$
Faltung (kommutativ) $x, g^* = 0, t < 0$	$x^*(t) * g^*(t)$	$\sum_{v=0}^k x_v \cdot g_{k-v} =$	$X(z) \cdot G(z)$
	$x(t) * g^*(t)$	$\sum_{v=0}^k x_{k-v} \cdot g_v$	wenigstens eine Funktion als Impulsfunktion
Grenzwertsätze	Anfangswert: $x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	Summe: $\sum_{v=0}^{\infty} x_v = \lim_{z \rightarrow 1^+} X(z)$	Endwert: $x_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z)$

Grenzwerte der Sprungantwort:  $X(z) = \frac{z}{z-1} G(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z-1} G(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} G(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z)$$

$$\Rightarrow x_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1) \frac{z}{z-1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} z G(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} G(z)$$

Übungsbeispiele **DAEW1)-DAEW7)** und **DPF1)-DPF6)**

### 4.2.2 Korrespondenztabelle

$\mathcal{L}$ -Transformierte $X(p)$	Stellvertretende Funktion $x(t)$ oder Zahlenfolge $x(t = kT)$	$\mathcal{Z}$ -Transformierte $X(z)$
$e^{-kTp}, k = 0, 1, \dots$	Dirac-Impuls für $t = kT$ : $\delta(t - kT)$	$z^{-k}$
$\frac{1}{p}$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{2!}{p^3}$	$t^2$	$T^2 z \frac{z+1}{(z-1)^3}$
$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n, n = 1, 2, \dots$	$T^n z \frac{z^{n-1} + \dots}{(z-1)^{n+1}}$
$\frac{1}{p-a}$ beliebig komplex	$e^{at}$	$\frac{z}{z-z_a} = \frac{z}{z-e^{aT}}$
$\frac{1}{p-\left(\frac{1}{T}\ln a\right)}$	$e^{\frac{t}{T}[\ln a]} = a^{\frac{t}{T}} = a^k; a > 0$	$\frac{z}{z-a}$
alternierende diskrete Folgen	$(-1)^{\frac{t}{T}} = -1^k$ $(-a)^{\frac{t}{T}} = -a^k = a^k \cos(\delta)$	$\frac{z}{z+1}$ $\frac{z}{z+a}$
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\left(\frac{1-e^{-aT}}{a}\right) \frac{z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} [e^{-at} - e^{-bt}]$	$\frac{1}{b-a} \left[ \frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right]$
$\frac{(b-a)p}{(p+a)(p+b)}$	$be^{-bt} - ae^{at}$	$\frac{z[z(b-a) - (be^{-aT} - ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$

$\mathcal{L}$ -Transformierte $X(p)$	Stellvertretende Funktion $x(t)$ oder Zahlenfolge $x(t = kT)$	$\mathcal{Z}$ -Transformierte $X(z)$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2} \left[ e^{-at} + at - 1 \right]$	$\frac{(e^{-aT} + aT - 1)z^2 + (1 - aTe^{-aT} - e^{-aT})z}{a^2(z-1)^2(z - e^{-aT})}$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{[a-b+be^{-at}-ae^{-bt}]}{ab(a-b)}$	$\frac{1}{ab} \left[ \frac{b}{z-1} + \frac{\frac{b}{a-b}z}{z-e^{-aT}} - \frac{\frac{a}{a-b}z}{z-e^{-bT}} \right]$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$t^n e^{-at}$ $n=1, 2, \dots$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right) = T^n z e^{-aT} \frac{z^{n-1} + \dots}{(z - e^{-aT})^{n+1}}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$z \frac{\sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$z \frac{z - \cos \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$
$\frac{p \cdot \sin \phi + \omega \cos \phi}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t + \phi)$	$z \frac{z \sin \phi + \sin(\omega T - \phi)}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$z \frac{e^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2e^{-aT} \cos \omega T z + e^{-2aT}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$z \frac{z - e^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2e^{-aT} \cos \omega T z + e^{-2aT}}$
$\frac{(p+a)\sin \phi + \omega \cos \phi}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t + \phi)$	$z \frac{z \sin \phi + e^{-aT} \sin(\omega T - \phi)}{z^2 - 2e^{-aT} \cos \omega T z + e^{-2aT}}$

$\mathcal{L}$ -Transformierte $X(p)$	Stellvertretende Funktion $x(t)$ oder Zahlenfolge $x(t = kT)$	$\mathcal{Z}$ -Transformierte $X(z)$
$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \sin \omega t$	$Tz \frac{(z^2 - 1) \sin \omega T}{(z^2 - 2 \cos \omega T z + 1)^2}$
$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$	$Tz \frac{(z^2 + 1) \cos \omega T - 2z}{(z^2 - 2 \cos \omega T z + 1)^2}$
$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$1 - e^{-at} (1 + at)$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\alpha} - aT e^{-aT} \frac{z}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{a^3}{p^2(p+a)^2}$	$at(1 + e^{-at}) + 2(e^{-at} - 1)$	$\frac{aTz}{(z-1)^2} - 2 \frac{z}{z-1} + e^{-aT} \frac{aTz}{(z - e^{-aT})^2} + 2 \frac{z}{z - e^{-aT}}$
	$\binom{t/T}{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$	$n$ -facher Pol $z_V = 1: \frac{z}{(z-1)^n}$
Mehrfachpole	$\binom{t/T}{n-1} \frac{e^{t/T}}{z_V^{n-1}}$ z.B. $n = 2, z_V \neq 1: \frac{t}{T} z_V^{\left(\frac{t}{T}-1\right)}$	$n$ -facher Pol $z_V \neq 1: \frac{z}{(z-z_V)^n}, \quad z_V \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$ z.B. $n = 2, z_V \neq 1: \frac{z}{(z-z_V)^2}$

#### 4.2.3 Abtaster im $z$ -Bereich

Wie nun die  $z$ -Transformation und die Abtastung im  $s$ -Bereich zusammenhängen soll im nächsten Schritt gezeigt werden. Da die Darstellung als geschlossene Summe im  $z$ -Bereich vorteilhaft und kompakt ist, ist man bestrebt in den  $z$ -Bereich zu wechseln. Die Darstellung einer Zahlenfolge ergab im  $z$ -Bereich:

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots + u(n)z^{-n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}$$

Der Dirac-Abtaster im  $s$ -Bereich ergab folgende Form:

$$u(kT) = \sum_k u_k \delta(t - kT) = \sum_k u^*(kT) \Leftrightarrow U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-skT}$$

Werden nun die beiden Reihen gleichgesetzt, folgt zwangsläufig die Substitution für die Variable  $z$ :

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-skT} = U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} \Rightarrow z = e^{sT}$$

Mit Hilfe dieser Überlegung kann nun der Dirac-Abtaster mit Halteglied in den  $z$ -Bereich transformiert werden. Beim Entwurf diskreter Systeme liegt zusätzlich die Strecke meist in kontinuierlicher Form  $F(s)$  vor, sodass drei Übertragungsfunktionen verkettet sind.

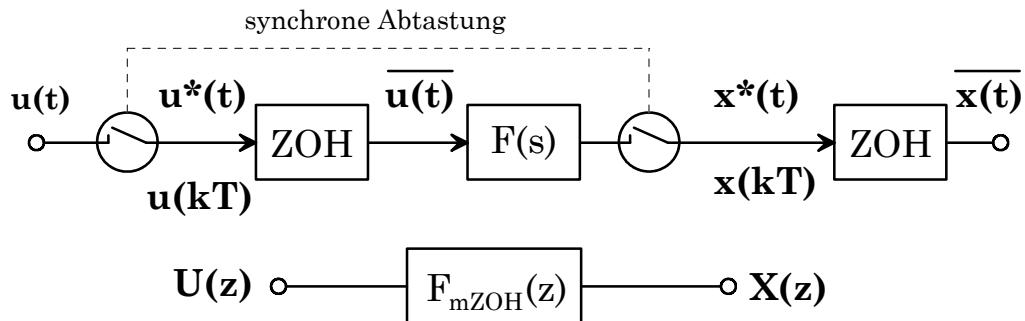


Bild kontinuierliche Strecke mit Halteglied ZOH

$$X^*(s) = \left\{ \sum_k u_k e^{-skT} \right\} \frac{1-e^{-sT}}{s} F(s) = U^*(s) \frac{1-e^{-sT}}{s} F(s) = U^*(s) \frac{F(s)}{s} - U^*(s) \frac{F(s)}{s} e^{-sT}$$

Die  $z$ -Transformation ist üblicherweise auf die gesamte Funktion im  $s$ -Bereich anzuwenden. Es gibt kein allgemein gültiges Gesetz welches die Transformation von Teilen mit anschließender Multiplikation erlauben würde. Wegen der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses gibt es jedoch eine Ausnahme. Beinhaltet die  $s$ -Übertragungsfunktion ein Abtastsignal so kann wie nachfolgend angeführt getrennt transformiert und anschließend multipliziert werden. Ferner wird der Verschiebungssatz genutzt.

$$X(z) = Z\left\{ \frac{U^*(s)F(s)}{s} \right\} - Z\left\{ \frac{U^*(s)F(s)}{s} \right\} z^{-1} = (1 - z^{-1}) U(z) Z\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} = \left( \frac{z-1}{z} \right) U(z) Z\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}$$

$$F_{mZOH}(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} Z\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} \dots z\text{-Transformierte der Strecke mit Halteglied}$$

Für die Beschreibung einer kontinuierlichen Strecke  $F(s)$  im  $z$ -Bereich ist infolge für Systeme mit Halteglied die  $z$ -Transformierte der Funktion  $\frac{F(s)}{s}$  erforderlich. Wird ein

kontinuierliches System durch eine Übertragungsfunktion  $F_{mZOH}(z)$  mit Halteglied nachgebildet so stimmen die Funktionswerte in den Abtastzeitpunkten **exakt** mit jenen des kontinuierlichen Systems überein. Entfällt die kontinuierliche Funktion erhält man im  $z$ -Bereich für das Halteglied folgende Funktion:

$$F_{ZOH}(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-1} = 1 \dots z\text{-Transformierte des Halteglieds}$$

Im realen Regelkreis bleibt trotz der Transformation mit  $F_{mZOH}(z)$  das kontinuierliche System bestehen. Da sich nun das Ausgangssignal vom transformierten System unterscheidet wird dem kontinuierlichen System ein virtueller Dirac-Abtaster nachgeschaltet. Ein dem Dirac-Abtaster zusätzlich nachgeschaltetes Halteglied verändert die Übertragungsfunktion wegen  $F_{ZOH}(z) = 1$  nicht. Folglich besitzen das Signal vor und nach dem Halteglied die selbe  $z$ -Transformierte trotz unterschiedlicher Zeitfunktionen. Weiters reicht es aus diesem Grund die Abtastung in einem Regelkreis ausschließlich durch einen Dirac-Abtaster zu symbolisieren. Einzige Ausnahme stellt ein nachgeschaltetes kontinuierliches System dar, welches mit Halteglied transformiert wird.

Die Modellierung mit Halteglied heißt **sprunginvariant** und ergibt sich in der Regelungstechnik meist aus technologischen Gründen. Systeme ohne Halteglieder werden in digitalen Filtern der Mess- und Nachrichtentechnik verwendet und heißen **impulsinvariant**.

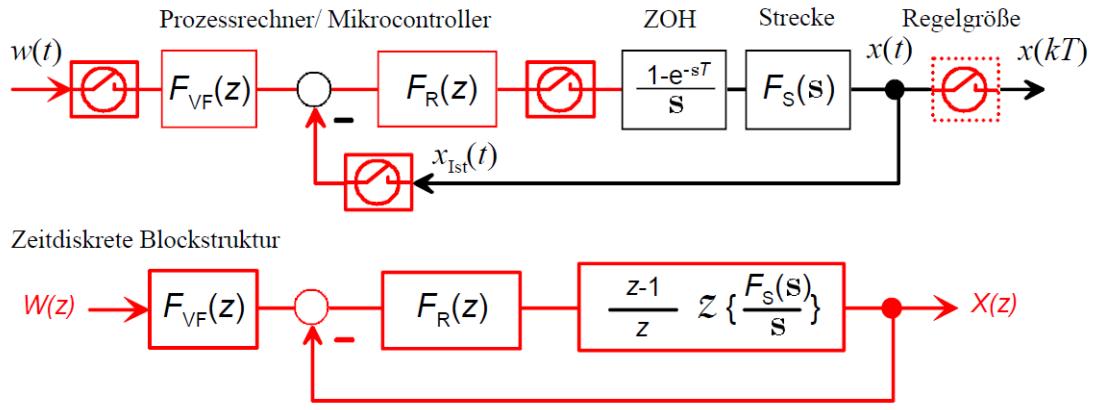
Wichtig ist ferner festzuhalten, dass die Blockalgebra auch für Funktionen  $F(z)$  gültig ist. Bei der üblichen Mischung von kontinuierlichen und diskreten Systemen in Regelkreisen ist jedoch Vorsicht geboten. Ein Block mit kontinuierlichem  $F(s)$  darf nur dann durch die zugehörige diskrete  $F_{ZOH}(z)$  bzw.  $F_{mZOH}(z)$  ersetzt werden, wenn er durch Dirac-Impulse (vorgelagerter Dirac-Abtaster) oder ein Treppensignal (vorgelagerter Dirac-Abtaster mit Halteglied) angespeist wird. Wichtigstes Verbot:

$$Z[F_1(s)F_2(s)] \neq Z[F_1(s)]Z[F_2(s)]$$

Dies bedeutet, dass zwei  $z$ -Transformierte Blöcke in Kettenschaltung nicht der  $z$ -Transformierten der Gesamtfunktion entsprechen. Der rechte Teil entspricht einem System mit Abtaster zwischen  $F_1(s)$  und  $F_2(s)$ . Bei der Parallelschaltung treten wegen der Superposition keine Probleme auf:

$$Z[F_1(s) + F_2(s)] = Z[F_1(s)] + Z[F_2(s)]$$

Im nachfolgend gezeigten einschleifigen Regelkreis können die Abtaster in den  $z$ -Übertragungsfunktionen zusammengezogen werden.

Bild Abtastregelkreis in  $z$ -Darstellung mit virtuellem Dirac-AbtasterTabelle für oft verwendete  $F(s)$  mit ZOH:

$$\text{PT}_1: F(s) = \frac{k}{1+sT_1} \Rightarrow F_{mZOH}(z) = k \left[ \frac{1-e^{-\frac{T}{T_1}}}{z-e^{-\frac{T}{T_1}}} \right]$$

$$\text{IT}_1: F(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)} \Rightarrow F_{mZOH}(z) = k \left[ \frac{\left( T_1 e^{-\frac{T}{T_1}} - T_1 + T \right) z + \left( T_1 - T_1 e^{-\frac{T}{T_1}} - T e^{-\frac{T}{T_1}} \right)}{z^2 - z \left( e^{-\frac{T}{T_1}} + 1 \right) + e^{-\frac{T}{T_1}}} \right]$$

PT<sub>2</sub> nichtschwingungsfähig:

$$F(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \Rightarrow F_{mZOH}(z) = k \left[ 1 + \frac{(z-1)T_1}{(T_2-T_1)(z-e^{-\frac{T}{T_1}})} - \frac{(z-1)T_2}{(T_2-T_1)(z-e^{-\frac{T}{T_2}})} \right]$$

$$\dots = k \left[ \frac{(T_2-T_1)(z-e^{-\frac{T}{T_1}})(z-e^{-\frac{T}{T_2}}) + (z-1)T_1(z-e^{-\frac{T}{T_2}}) - (z-1)T_2(z-e^{-\frac{T}{T_1}})}{(T_2-T_1)(z-e^{-\frac{T}{T_1}})(z-e^{-\frac{T}{T_2}})} \right]$$

PT<sub>2</sub> schwingungsfähig:

$$F(s) = \frac{k}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0} + 1} \Rightarrow F_{mZOH}(z) = k \left[ 1 - \frac{z-1}{z} \left( \frac{z^2 - cz \cos \sqrt{1-D^2} \omega_0 T + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} cz \sin \sqrt{1-D^2} \omega_0 T}{z^2 - 2cz \cos \sqrt{1-D^2} \omega_0 T + c^2} \right) \right]$$

$$\text{mit } c = e^{-D\sqrt{1-D^2} \omega_0 T}$$

$$\text{PT}_3 \text{ (drei reelle Pole): } F(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}, z_0 = 1, z_1 = e^{-\frac{T}{T_1}}, z_2 = e^{-\frac{T}{T_2}}, z_3 = e^{-\frac{T}{T_3}}$$

$$R_0 = 1, \quad R_1 = \frac{-1}{\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)\left(1-\frac{T_3}{T_1}\right)}, \quad R_2 = \frac{-1}{\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)\left(1-\frac{T_3}{T_2}\right)}, \quad R_3 = \frac{-1}{\left(1-\frac{T_1}{T_3}\right)\left(1-\frac{T_2}{T_3}\right)}$$

$$F_{mZOH}(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$a_2 = -(z_1 + z_2 + z_3), \quad a_1 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3, \quad a_0 = -z_1 z_2 z_3$$

$$b_2 = -k[R_0(z_1 + z_2 + z_3) + R_1(z_0 + z_2 + z_3) + R_2(z_1 + z_0 + z_3) + R_3(z_1 + z_2 + z_0)]$$

$$b_1 = k[R_0(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) + R_1(z_0 z_2 + z_0 z_3 + z_2 z_3) + \dots]$$

$$\dots + R_2(z_1 z_0 + z_1 z_3 + z_0 z_3) + R_3(z_1 z_2 + z_1 z_0 + z_2 z_0)]$$

$$b_0 = -k[R_0(z_1 z_2 z_3) + R_1(z_0 z_2 z_3) + R_2(z_1 z_0 z_3) + R_3(z_1 z_2 z_0)]$$

### Übungsbeispiele ZOH1)-ZOH6)

#### 4.3 Inverse $z$ -Transformation

Für den Weg aus dem  $z$ -Bereich zurück in den Zeitbereich gibt es mehrere Möglichkeiten. Das Ergebnis im Zeitbereich ist allerdings eine diskrete Zahlenfolge, die den Signalwert im Abtastzeitpunkt wiedergibt. Es soll nachfolgend die Wege an einem Beispielen gezeigt werden.

$$F_z(z) = \frac{8z}{(z-1)(z-2)}$$

##### 4.3.1 Partialbruchzerlegung

Die stückweise Rücktransformation aus bekannten Korrespondenzen ist ein sicherer aber meist aufwändiger Weg.

Aus Korrespondenztabelle für einen einfachen Pol folgt:  $Z^{-1}(\frac{z}{z-c}) = c^k$

Die vorliegende Funktion im  $z$ -Bereich muss in ihre Partialbrüche zerlegt werden.

$$F_z(z) = \frac{8z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{8z}{z-1} + \frac{8z}{z-2} \Rightarrow f(k) = -8 \cdot 1^k + 8 \cdot 2^k = 8(-1 + 2^k)$$

$$f(0) = 0, f(1) = 8, f(2) = 24, f(3) = 56, f(4) = 120, \dots$$

### 4.3.2 Polynomdivision

Dividiert man das Zähler- durch das Nennerpolynom einer Funktion  $F(z)$  erhält man im allgemeinen Fall eine unendliche Potenzreihe. Die Koeffizienten entsprechen den Signalwerten im Abtastzeitpunkt.

$$F_z(z) = \frac{8z}{(z-1)(z-2)} = \frac{8z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} = 8z^{-1} + 24z^{-2} + 56z^{-3} + 120z^{-4} + \dots$$

$$f(0) = 0, f(1) = 8, f(2) = 24, f(3) = 56, f(4) = 120, \dots$$

Anstatt der Division lässt sich auch einfach ein Koeffizientenvergleich durchführen:

$$F_z(z) = \frac{8z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} = c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + c_3z^{-3} + c_4z^{-4} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{8z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} &= c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + c_3z^{-3} + c_4z^{-4} + \dots \\ &\quad - c_03z^{-1} - c_13z^{-2} - c_23z^{-3} - c_33z^{-4} + \dots \\ &\quad c_02z^{-2} + c_12z^{-3} + c_22z^{-4} + \dots \end{aligned}$$

$$(0) : 0 = c_0$$

$$(1) : 8 = c_1 - 3c_0 \Rightarrow c_1 = 8$$

$$(2) : 0 = c_2 - 3c_1 + 2c_0 \Rightarrow c_2 = 24$$

$$(3) : 0 = c_3 - 3c_2 + 2c_1 \Rightarrow c_3 = 56$$

$$(4) : 0 = c_4 - 3c_3 + 2c_2 \Rightarrow c_4 = 120$$

$$(..) : 0 = \dots$$

### 4.3.3 Rekursive Gleichung

Sehr effizient kann die rekursive Darstellung im Zeitbereich ermittelt werden.

$$F_z(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{8z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} \Rightarrow X(z)(1-3z^{-1}+2z^{-2}) = U(z)8z^{-1}$$

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 8u_{n-1} \Rightarrow x_n = 8u_{n-1} + 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$$

oder hier besser:

$$x_{n+1} = 8u_n + 3x_n - 2x_{n-1}$$

Ist ein Eingangssignal vorliegend, so ist dies in die Folge für  $x_n$  mit  $u_n$  einzubinden.

Liegt wie in diesem Beispiel kein Eingangssignal vor, so entspricht die Rücktransformierte der Impulsantwort. Es ist das Signal  $u$  mit der Folge  $1,0,0,0,\dots$  anzusetzen.

$$u_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$$

$$u_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 24$$

$$u_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 56$$

$$u_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 120$$

### Übungsbeispiele IZRA1)-IZRA7)

#### 4.3.4 Residuensatz

Wird die  $z$ -Transformierte als Summe eine Laurent-Reihe interpretiert so können über die Cauchy-Formel dann die Koeffizienten der Reihenglieder und damit die Folge im Zeitbereich ermittelt werden.

$$F(z)z^{k-1} = f(0)z^{k-1} + f(1)z^{k-2} + f(2)z^{k-3} + f(3)z^{k-4} + \dots + f(k)z^{-1} + \dots$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint F_z(z) z^{k-1} dz \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Dies ist die Definition der inversen  $z$ -Transformation. Dieses Ringintegral muss alle Singularitäten (Pole) einschließen und gegen den Urzeigersinn gebildet werden, wobei nur die Pole einen Beitrag zum Ergebnis liefern. Dieser Beitrag kann über den Residuensatz berechnet werden.

$$f(k) = \sum_i \text{Res}\{F_z(z)z^{k-1}\}_{z=a_i}$$

$a_i$  sind die Pole von  $F_z(z)$ . Für einen einfachen Pol gilt für das Residuum:

$$\text{Res}\{F_z(z)z^{k-1}\}_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) F_z(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{B(z)}{A(z)} z^{k-1}$$

Und für den Fall  $A'(a) = \frac{dA(z)}{dz}|_{z=a} \neq 0$  gilt:

$$\text{Res}\left\{\frac{B(z)}{A(z)} z^{k-1}\right\}_{z=a} = \text{Res}\left\{\frac{C(z)}{A(z)}\right\}_{z=a} = \frac{C(a)}{A'(a)}$$

Bei mehreren einfachen Polen kann daher vereinfacht berechnet werden:

$$f(k) = \sum_i \text{Res}\{F_z(z)z^{k-1}\}_{z=a_i} = \sum_i \frac{B(a_i)}{A'(a_i)}$$

Treten  $q$ -fache Pole bei  $z = a$  auf ist der Ansatz zu modifizieren:

$$\text{Res}\{F_z(z)z^{k-1}\}_{z=a} = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} [(z-a)^q F_z(z) z^{k-1}]$$

$$\text{Beispiel: } F_z(z) = \frac{8z}{(z-1)(z-2)} = \frac{8z}{z^2 - 3z + 2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2$$

$$f(k) = \sum_i \text{Res}\{F_z(z)z^{k-1}\}_{z=a_i} = \sum_i \frac{B(z)z^{k-1}}{A'(z)} \Big|_{z=a_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{8z^k}{2z-3} \Big|_{z=a_i} = 8(-1 + 2^k)$$

$$f(0) = 0, f(1) = 8, f(2) = 24, f(3) = 56, f(4) = 120, \dots$$

Übungsbeispiele **IZRS1), IZRS3)**

#### 4.4 Quasikontinuität

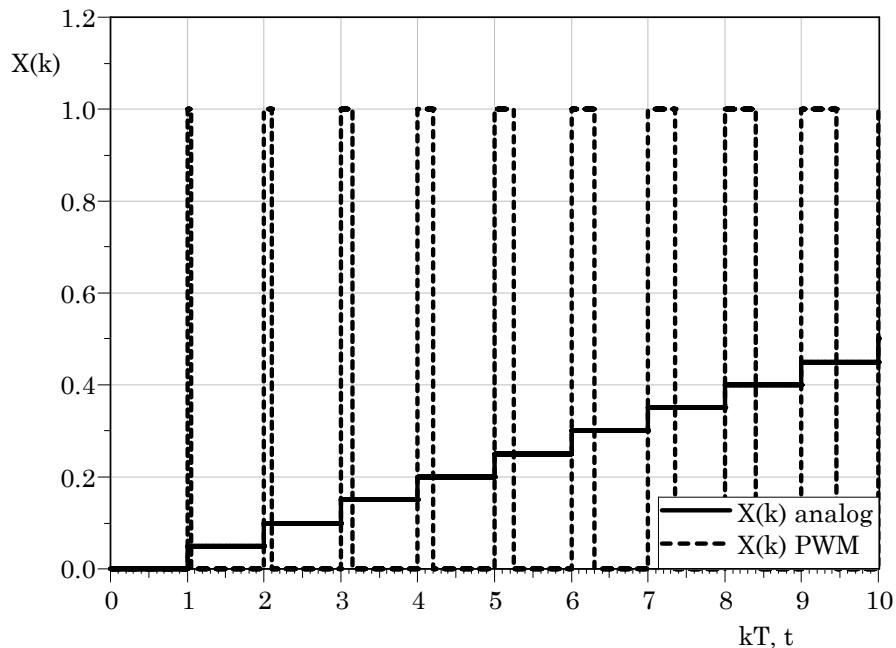
##### 4.4.1 Abtastzeit

Bei ausreichend kleiner Abtastzeit entspricht die abgetastete Signalfolge  $x(kT)$  annähernd dem kontinuierlichen Signalverlauf. Die Frage in der praktischen Anwendung ist häufig wie klein die Abtastzeit gewählt werden muss. Beliebig kleine Tastzeiten sind technisch nicht realisierbar (Zykluszeiten von  $\mu$ Cs, Latenzzeiten von Bus-Systemen). Zu große Tastzeiten verfälschen das Signal bzw. "verschlucken" relevante Ereignisse. Es ist ein Kompromiss zu finden.

Der quasikontinuierliche Übergang in die diskrete Signalverarbeitung bringt viele Vorteile. Beispielsweise können die meisten bekannten Methoden zum Reglerentwurf aus der linearen kontinuierlichen Regelungstechnik übernommen werden. Wegen des enormen technischen Fortschritts im Bereich der Mikrokontrollerentwicklung stellen kleine Zykluszeiten kein Realisierungsproblem dar. Man löst heute regelungstechnische Aufgabenstellungen häufig, um die Quasikontinuität zu erhalten, mit sehr hohen Abtastfrequenzen, obwohl dies nicht erforderlich wäre. Die Quasikontinuität hat gerade im Bereich der digitalen Kompaktregler eine breite Anwendung gefunden. Da jedes Simulationsprogramm analoge Signale quasikontinuierlich darstellen können die damit verbundenen Einschränkungen auch auf Simulationsaufgaben ausgedehnt werden.

#### 4.4.2 PWM-Signal

Wegen der einfacheren Realisierbarkeit besitzen Digitale Kompaktregler eine Digital-Analogkonverter mit PWM-Ausgang. Da die Leistungssteuerung in den meisten Fällen ohnedies auf dem PWM-Prinzip basiert, können so die zugehörigen Stellelemente (Schalttransistoren) direkt angesteuert werden. Der analoge Ausgangswert  $x(k)$  im  $k$ -ten Abtastschritt wird in Form eines Impulses mit dem Tastverhältnisses  $p(k)$  ausgegeben, die gesamte Steuerperiode ist gleich der Abtastzeit  $T$ . Der Mittelwert dieses Signals entspricht dann dem analogen  $x(k)$  Wert.



Die Mittelwertbildung erfolgt durch den Tiefpasscharakter des zu regelnden Systems.

$$x(k) = \frac{t_{ein}(k)}{T} x_{\max} = p(k) x_{\max}$$

Die Anforderung an die Bedingung der Erhaltung der Quasikontinuität ist beim PWM-Ausgang wesentlich höher. Die Grenzfrequenz der Tiefpass-Regelstrecke muss hier zusätzlich ca. um den Faktor 3 tiefer liegen (Siehe Skriptum IMS Stellglieder).

Die Abtastzeit für den Ausgang des Reglers weicht bei heutigen Systemen von jener am Eingang ab. Der Eingang wird um ein  $n$ -faches mehr getastet um eine Mittelwertbildung des Eingangssignal (Messsignal) zu erwirken und damit das Rauschen zu reduzieren.

#### 4.4.3 Shannon versus Praxis

Die im **Shannon**-Theorem festgelegte Abtastfrequenz zur eindeutigen Reproduktion von spektralen Signalanteilen hat in der Regelungstechnik nicht diese Bedeutung. Ein periodischer sinusförmiger Anteil kann in einem Signal eindeutig erkannt werden, wenn mit der doppelten Frequenz abgetastet wird.

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_{\max} = \frac{2}{T_{\min}} \Rightarrow T \leq \pi T_{\min} \approx 300\% \text{ von } T_{\min}$$

$\omega_{\max}$  repräsentiert die höchste vorkommende Signalfrequenz,  $T$  die Periodendauer der Abtastung,  $T_{\min}$  die kleinste Zeitkonstante im System in Anlehnung an die nachfolgende Betrachtung (Anm. für Zeitkonstanten gilt:  $\omega = \frac{1}{T}$ ). In Systemen mit transienten Signalvorgängen, wie es lineare Regelkreise typischerweise sind, lässt sich das Shannon-Theorem nicht ohne weiters anwenden.

a) Für **Quasikontinuität** wäre die Forderung nach Shannon viel zu schwach. Man orientiert sich an der größten vorkommenden Eigenfrequenz des Systems und fordert als Tastfrequenz den ca. 100 fachen Wert. In Praxis werden daher folgende Tastzeiten verwendet:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \geq 100\omega_{\max} = \frac{100}{T_{\min}} \Rightarrow T \leq \frac{2\pi}{100} T_{\min} \approx 0.06 T_{\min} \Rightarrow T \approx 5 - 20\% \text{ von } T_{\min}$$

b) In **DDC-Systemen (Direct Digital Control)** die mit diskreter Regelungstechnik auf Basis der exakten  $z$ -Transformation entworfen und realisiert werden, ist die Abtastzeit prinzipiell frei wählbar. Methoden der diskreten Regelungstechnik legen den Wert von Signalen nur im Abtastzeitpunkt fest. In Regelkreisen zeigt die Strecke und daher auch das Ausgangssignal meistens kontinuierliches Verhalten. Bei großen Abtastzeiten kommt es daher zu unkontrollierten Signalbewegungen zwischen den Abtastzeitpunkten. Aus diesem Grund und weil meist die Systemstabilität mit zunehmender Abtastzeit sinkt hat sich folgender Wertebereich für diskrete Systeme bewährt:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \geq 6 \div 20 \omega_{\max} \Rightarrow \frac{6}{T_{\min}} \leq \frac{2\pi}{T} \leq \frac{20}{T_{\min}} \Rightarrow 0.3 T_{\min} \leq T \leq T_{\min} \Rightarrow T \approx 30 - 100\% \text{ von } T_{\min}$$

#### 4.5 Diskretisierung

Für Quasikontinuität ist der Übergang zu diskreten Systemen anschaulich darstellbar. Mathematisch gesehen ist es der Weg der Näherung vom Differenzial zum Differenzenquotienten. Dies wird üblicherweise getrennt für Integral und Differenzial durchgeführt. Die quasikontinuierliche Näherung von diskreten Systemen führt auf Lösungen mit Halteglied, es ist daher keine Hinzurechnung erforderlich.

### 4.5.1 Integral

Durch streifenweise Addition kann die Fläche unter der Kurve gebildet werden, man spricht auch vom Euler- oder Rechteckverfahren. Wird das Flächensegment zum Zeitpunkt  $t_k$  mit dem Wert  $e_k$  gebildet spricht man von der rechtsseitigen Summierung, wird  $e_{k-1}$  verwendet von der linksseitigen Summe.

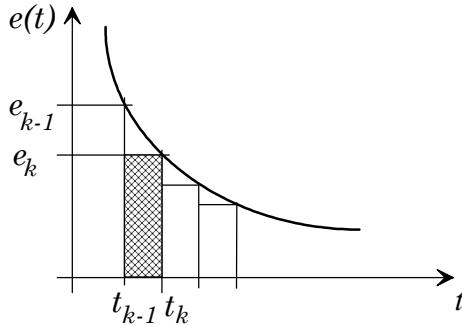


Bild Integralsumme

Rechtsseitig:

$$u(t) = \frac{1}{T_N} \int e(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{T_N} \sum_{k=0}^n e_k \Delta t \Rightarrow u_n = \frac{1}{T_N} \sum_{k=0}^n e_k T = \frac{T}{T_N} \sum_{k=0}^n e_k$$

rekursiv:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{T}{T_N} e_n \Rightarrow u_n = u_{n-1} + \frac{T}{T_N} e_n \Rightarrow u = uz^{-1} + \frac{T}{T_N} e \Rightarrow F_I(z) = \frac{u}{e} = \frac{T}{T_N} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$F_I(z) = \frac{T}{T_N} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{T}{T_N} \frac{z}{z-1} \Leftrightarrow F_I(s) = \frac{1}{sT_N} \Rightarrow s \approx \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) = \frac{1}{T} \frac{(z-1)}{z}$$

$$\text{Substitution für } s: s \approx \frac{1}{T} \frac{(z-1)}{z}$$

Bei der rechtsseitigen Näherung tritt bei reinen Tiefpass-Systemen kein Laufzeiteffekt der Einwirkung der Eingangsgröße auf. Dafür entsteht aufgrund des gleichen Zähler- und Nennergrads der diskreten Übertragungsfunktion nun für  $t = 0$  ein Sprung  $x(0) \neq 0$ , der beim kontinuierlichen System nicht vorhanden ist. Weiterhin zeigt die rechtsseitige Näherung bei gleichen Eigenwerten der kontinuierlichen Differenzialgleichung eine höhere Dämpfung im Vergleich zur linksseitigen Näherung.

Linksseitig:

$$u(t) = \frac{1}{T_N} \int e(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{T_N} \sum_{k=0}^n e_{k-1} \Delta t \Rightarrow u_n = \frac{1}{T_N} \sum_{k=0}^n e_{k-1} T = \frac{T}{T_N} \sum_{k=0}^n e_{k-1}$$

rekursiv:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{T}{T_N} e_{n-1} \Rightarrow u_n = u_{n-1} + \frac{T}{T_N} e_{n-1} \Rightarrow u = uz^{-1} + \frac{T}{T_N} ez^{-1} \Rightarrow F_I(z) = \frac{u}{e} = \frac{T}{T_N} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$F_I(z) = \frac{T}{T_N} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \Leftrightarrow F_I(s) = \frac{1}{s T_N} \Rightarrow s \approx \frac{1}{T} \frac{(1-z^{-1})}{z^{-1}} = \frac{1}{T} (z - 1)$$

Substitution für  $s$ :  $s \approx \frac{1}{T} (z - 1)$

Bei der linksseitigen Euler-Näherung tritt beim Start aus dem Ruhezustand  $x_0 = 0$  für Tiefpass-Systeme eine um  $(n - 1)T$  verschobene Einwirkung der Eingangsgröße auf. Da die linke Seite der Differenzengleichung  $y[(k - n)T]$  enthält, wird zur Berechnung der Ausgangsgröße  $x(kT)$  der um  $nT$  verschobene Eingangswert  $y[(k - n)T]$  herangezogen und damit erstmals ein Wert  $x(n)$  ungleich null berechnet. Diese Laufzeit-Eigenschaft muss gegebenenfalls bei der Interpretation der Ausgleichsvorgänge besonders berücksichtigt werden. Sie tritt in kontinuierlichen Lösungen nicht auf. Für einen Anfangswert  $x_0 \neq 0$  reagiert der zeitdiskrete, homogene Ausgleichsvorgang dahingegen unverzögert ohne Laufzeiteffekt!

Die Euler- oder Rechteck-Integrationsverfahren bieten unter der Voraussetzung kleiner Tastzeiten  $T \ll T_{\min}$  eine häufig ausreichende Bestimmung einer diskreten Übertragungsfunktion für kontinuierliche Tiefpass-Systeme durch formale Substitution von  $s$ .

Bei zu großer Schrittweite bzw. zu großer Tastzeit  $T$  muss eine abweichende Dynamik beachtet werden. So weist insbesondere die  $z$ -Übertragungsfunktion  $F_{\text{links}}(z)$  für Tastzeiten  $T > 2T_{\min}$  instabiles Übertragungsverhalten auf.

Trapezformel:

Durch Trapeznäherung des Flächenstücks lässt sich die Fläche genauer berechnen.

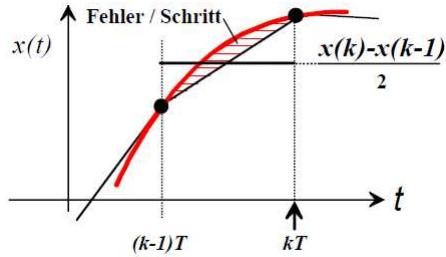


Bild Trapezfläche

$$u(t) = \frac{1}{T_N} \int e(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{T_N} \sum_{k=0}^n \frac{e_k + e_{k-1}}{2} \Delta t \Rightarrow u_n = \frac{1}{T_N} \sum_{k=0}^n \frac{e_k + e_{k-1}}{2} T = \frac{T}{T_N} \sum_{k=0}^n \frac{e_k + e_{k-1}}{2}$$

rekursiv:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{T}{T_N} \frac{e_n + e_{n-1}}{2} \Rightarrow u_n = u_{n-1} + \frac{T}{2T_N} e_n + \frac{T}{2T_N} e_{n-1} \Rightarrow u = uz^{-1} + \frac{T}{2T_N} e + \frac{T}{2T_N} ez^{-1}$$

$$F_I(z) = \frac{u}{e} = \frac{T}{2T_N} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \Leftrightarrow F_I(s) = \frac{1}{s T_N} \Rightarrow s \approx \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

Substitution für  $s$ :  $s \approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

Aus der Umkehrung der Definition der z-Transformation  $z = e^{sT}$  folgt eine zum direkten Einsetzen ungeeignete Form der Substitution  $s = 1/T \ln z$ . Die ln-Funktion kann durch eine Reihenentwicklung dargestellt werden, die für  $T \rightarrow 0$  konvergiert. Wird nun eine Näherung durch Abbruch der konvergenten Reihe gebildet, so entspricht das erste Glied der abgebrochenen Reihe genau dem Ausdruck aus dem Trapez-Integrationsverfahren.

$$s = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right) \Rightarrow s \approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{Tustin-Verfahren}$$

Die Substitution von  $s$  durch obige Näherung wird wegen der Linearität von Zähler und Nenner auch **bilineare** Transformation bezeichnet. Eine weitere Näherungen höherer Ordnung folgt aus der Simpsonregel:

$$u_{2k} = \sum_{i=1}^k \frac{T}{3} (e_{2i} + 4e_{2i-1} + e_{2i-2}) \Rightarrow u_{2k} - u_{2k-2} = \frac{T}{3} (e_{2k} + 4e_{2k-1} + e_{2k-2})$$

$$2k = n \Rightarrow u_n - u_{n-2} = \frac{T}{3} (e_n + 4e_{n-1} + e_{n-2})$$

$$F_I(z) \approx \frac{T}{3} \frac{1+4z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}} = \frac{T}{3} \frac{z^2+4z+1}{z^2-1}$$

#### 4.5.1.1 Exakte z-Transformation mit ZOH

Die Ergebnisse aus der linksseitigen Näherung entsprechen der exakten z-Transformation des Integrators mit Halteglied ZOH. (Verwendung einer Korrespondenztabelle erforderlich)

$$F_{ImZOH}(z) = \frac{1-z}{z} Z\left\{\frac{F_I(s)}{s}\right\} = \frac{1-z}{z} Z\left\{\frac{1}{T_N s^2}\right\} = \frac{1-z}{z} \frac{T}{T_N} \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{T}{T_N} \frac{1}{1-z}$$

#### 4.5.2 Differenzial

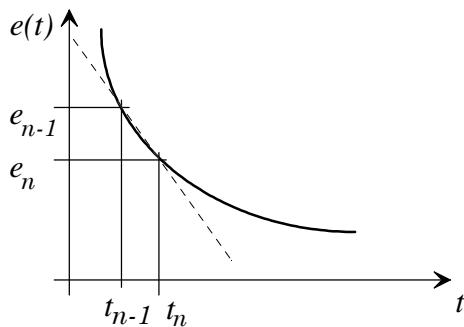


Bild Differenzenquotient

Linksseitig (kausal):

$$u(t) = T_V \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow u_n \approx T_V \frac{e_n - e_{n-1}}{T} = T_V \frac{e_n - e_{n-1}}{T} \Rightarrow u = \frac{T_V}{T} (e - e z^{-1}) \Rightarrow F_D(z) = \frac{u}{e} = \frac{T_V}{T} \frac{z-1}{z}$$

Dies entspricht der Substitution für  $s$  aus der Rechtssumme der Integralnäherung.

Rechtsseitig (nichtkausal):

$$u(t) = T_V \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow u_{n-1} \approx T_V \frac{e_n - e_{n-1}}{T} \Rightarrow u z^{-1} = \frac{T_V}{T} (e - e z^{-1}) \Rightarrow F_D(z) = \frac{u}{e} = \frac{T_V}{T} (z - 1)$$

Die rechtsseitige Näherung findet nur Anwendung im Nachhinein bei Datenreihen die bereits vorliegen. Ferner ist die Tustin-Näherung für den Differenzierer ungeeignet. Für die zweite Ableitung des Differenzierers folgt:

$$u(t) = k \frac{d^2 e(t)}{dt^2} = k \frac{dg(t)}{dt} \Rightarrow u_n \approx k \frac{g_n - g_{n-1}}{T} = k \frac{\frac{e_n - e_{n-1}}{T} - \frac{e_{n-1} - e_{n-2}}{T}}{T} = k \frac{e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}}{T^2}$$

$$u \approx k \frac{e - 2e z^{-1} + e z^{-2}}{T^2} \Rightarrow F_{D_2}(z) = \frac{u}{e} \approx k \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T^2} = k \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 T^2}$$

Für die dritte Ableitung des Differenzierers folgt:

$$u(t) = k \frac{d^3 e(t)}{dt^3} = k \frac{dh(t)}{dt} = k \frac{d^2 g(t)}{dt^2} \Rightarrow u_n \approx k \frac{h_n - h_{n-1}}{T} = k \frac{\frac{g_n - g_{n-1}}{T} - \frac{g_{n-1} - g_{n-2}}{T}}{T} \Rightarrow$$

$$u_n \approx k \frac{\frac{e_n - e_{n-1}}{T} - \frac{e_{n-1} - e_{n-2}}{T} - \frac{e_{n-1} - e_{n-2}}{T} - \frac{e_{n-2} - e_{n-3}}{T}}{T} = \frac{e_n - 3e_{n-1} + 3e_{n-2} - e_{n-3}}{T^3}$$

$$u \approx k \frac{e - 3e z^{-1} + 3e z^{-2} - e z^{-3}}{T^3} \Rightarrow F_{D_3}(z) = \frac{u}{e} \approx k \frac{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}}{T^3} = k \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z^3 T^3}$$

Es lassen sich aus dem Abbruch der allgemeinen Taylorreihe einer Funktion weitere Näherungen für den einfachen Differenzierer ermitteln:

$$n=2: u(t) \approx \frac{1}{2T} (3e_k - 4e_{k-1} + e_{k-2}) \Rightarrow F_D(z) \approx \frac{3 - 4z^{-1} + z^{-2}}{2T} = \frac{3z^2 - 4z + 1}{2Tz^2}$$

$$n=3: u(t) \approx \frac{1}{6T} (11e_k - 18e_{k-1} + 9e_{k-2} - 2e_{k-3})$$

$$F_D(z) \approx \frac{11 - 18z^{-1} + 9z^{-2} - 2z^{-3}}{6T} = \frac{11z^3 - 18z^2 + 9z - 2}{6Tz^3}$$

Der reale Differenzierer wird regelungstechnisch durch ein DT<sub>1</sub>-Element nachgebildet:

$$F_{DT_1}(s) = \frac{T_V s}{1+sT_1} \Rightarrow u_n + T_1 \frac{u_n - u_{n-1}}{T} = T_V \frac{e_n - e_{n-1}}{T} \Rightarrow F_{DT_1}(z) = \frac{\frac{T_V}{T} (1 - z^{-1})}{\left(1 + \frac{T_1}{T}\right) - \frac{T_1}{T} z^{-1}} = \frac{T_V}{T_1} \frac{z-1}{\left(1 + \frac{T}{T_1}\right) z - 1}$$

### 4.5.3 PID-Regler

Mit der Näherung für Integral und Differenzial lässt sich ein quasikontinuierlicher Algorithmus für einen PID-Regler aus der Differentialgleichung ermitteln.

$$u(t) = k_R \left( e(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t e(\tau) d\tau + \frac{de(t)}{dt} \right) \dots \text{ idealer PID-Regler}$$

$$u_n = k_R \left( e_n + \frac{T}{T_N} \sum_{k=0}^n e_k + T_V \frac{e_n - e_{n-1}}{T} \right) \dots \text{ Stellungsalgorithmus}$$

$$u_n - u_{n-1} = k_R \left( e_n - e_{n-1} + \frac{T}{T_N} e_n + T_V \frac{e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}}{T} \right)$$

... rekursiv, Geschwindigkeitsalgorithmus

$$u - uz^{-1} = k_R \left( \left( 1 + \frac{T}{T_N} + \frac{T_V}{T} \right) - \left( 1 + 2 \frac{T_V}{T} \right) z^{-1} + \frac{T_V}{T} z^{-2} \right) e$$

$$F_{PID}(z) = \frac{u}{e} = k_R \frac{\left( 1 + \frac{T}{T_N} + \frac{T_V}{T} \right) - \left( 1 + 2 \frac{T_V}{T} \right) z^{-1} + \frac{T_V}{T} z^{-2}}{1 - z^{-1}} = k_R \frac{\left( 1 + \frac{T}{T_N} + \frac{T_V}{T} \right) z^2 - \left( 1 + 2 \frac{T_V}{T} \right) z + \frac{T_V}{T}}{z^2 - z}$$

$$\text{PID ideal: } F_{Ri}(s) = k_R \left( 1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V \right), \text{ PIDT}_1 \text{ real: } F_{Rr}(s) = k_R \left( 1 + \frac{1}{sT_N} + \frac{sT_V}{1+sT_1} \right)$$

Übungsbeispiele **DQN1)-DQN10)**

### 4.6 Diskrete RNF

Von den kontinuierlichen Systemen ist bekannt, dass sich jede lineare Übertragungsfunktion  $n$ -Ordnung aus  $n$ -einfachen Integratoren zusammensetzen lässt (RNF Regelungsnormalform). Dies ist analog dazu auch für diskrete Systeme mit  $n$  Verzögerungselementen erster Ordnung möglich. Mit nachfolgender Anordnung lässt sich jede beliebige Übertragungsfunktion der Form:

$$F(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots + a_n z^{-n}}$$

nachbilden.

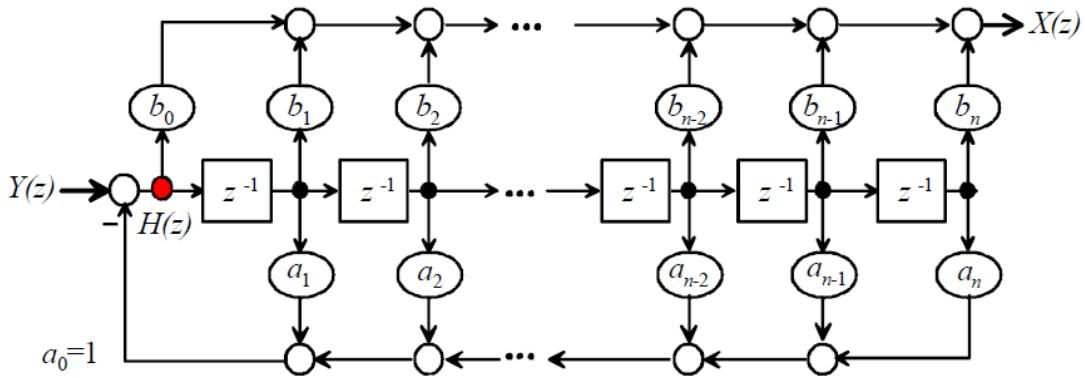


Bild diskrete RNF IIR-System allgemeine Form 1

Beispiel: System 2.Ordnung

$$F(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$

$$X(z) = F(z) Y(z) = (b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}) \frac{Y(z)}{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} = (b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}) H(z)$$

$$Y(z) = (a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}) H(z) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{a_2} \{ Y(z) - [a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}] H(z) \}$$

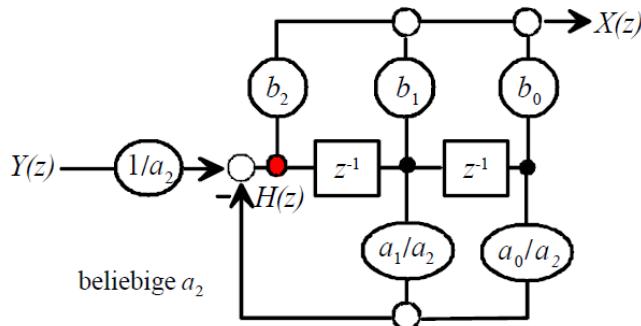


Bild diskrete RNF für System 2.Ordnung, Form 2

Die inneren Rückkopplungen prägen das Zeitverhalten dynamischer Systeme wesentlich. Dies wird mathematisch durch das Nennerpolynom festgelegt. Bei zeitdiskreten Systemen werden aufgrund dieses Unterschieds zwei Gruppen von Systemen unterschieden.

## IIR-Systeme

Dies stellt den allgemeinen Fall dar, die Koeffizienten  $a_n$  besitzen beliebige Werte. Es ergibt sich ein asymptotischer Übergangsverhalten. Man spricht von unendlicher Impulsantwort (*Infinite Impulse Response*).

## FIR-Systeme

Die Übertragungsfunktion des Gegenstücks besitzt im Nenner kein Polynom sondern lediglich den Wert 1. In Form 1 hieße das alle  $a_n$  gleich 0 ohne  $a_0$  und in Form 2  $a_0$  bis  $a_{n-1}$  gleich 0 und  $a_n \neq 0$ . Es fehlen die inneren Rückkopplungen was auf eine endliche Impulsantwort führt (*Finite Impulse Response*). Beim diskreten Entwurf nach dem DDC-Prinzip (Direkt Digital Control) wird oft FIR-Verhalten angestrebt um zeitoptimales Verhalten zu erlangen. Im Gegensatz dazu hat man in der Filtertechnik beim FIR-Entwurf mit Einbußen zu rechnen.

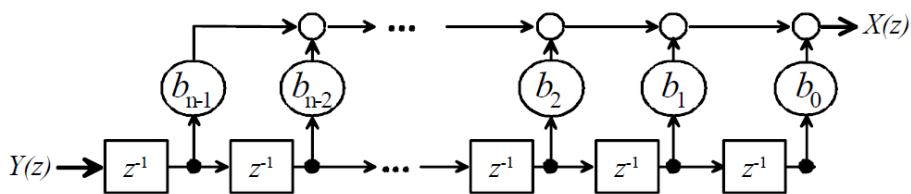


Bild diskrete RNF FIR-System allgemein

## 4.7 Stabilität und Dynamik

Die Stabilität kontinuierlicher Systeme folgt aus der Bedingung, dass alle Pole der Übertragungsfunktion einen negativen Realteile besitzen müssen. Veranschaulicht wird dies durch die Lage in der linken Hälfte der komplexen  $s$ -Ebene. Für Abtastsysteme führt die Substitution  $z = e^{sT}$  zur geometrischen Veranschaulichung. Ein Pol in der  $s$ -Ebene wird auf einen Pol in der  $z$ -Ebene wie folgt abgebildet:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} (\cos \omega T \pm j \sin \omega T)$$

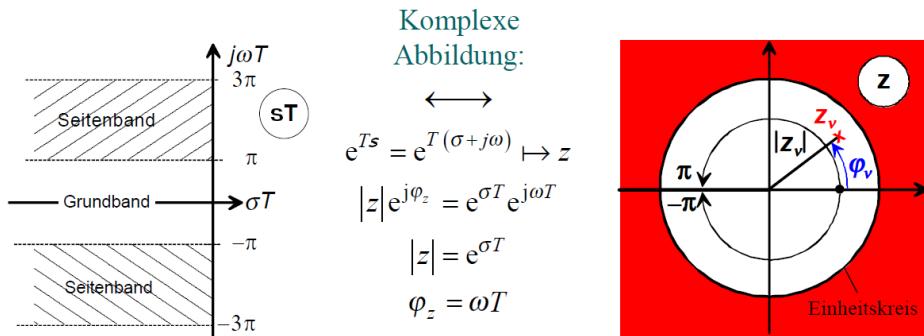
Die Imaginäre Achse mit  $\sigma = 0$  wird auf den Einheitskreis abgebildet:

$$z_i = e^{j\omega T} = \cos \omega T \pm j \sin \omega T \dots \text{Kreisgleichung in Parameterdarstellung}$$

Allerdings tritt für  $\varphi = \omega T + 2\pi k$  Periodizität auf. Die Abbildung ist nicht eindeutig, man spricht von den Seitenbändern für  $k > 0$ . Das Seitenband kann auch durch den umgekehrten Weg erklärt werden:

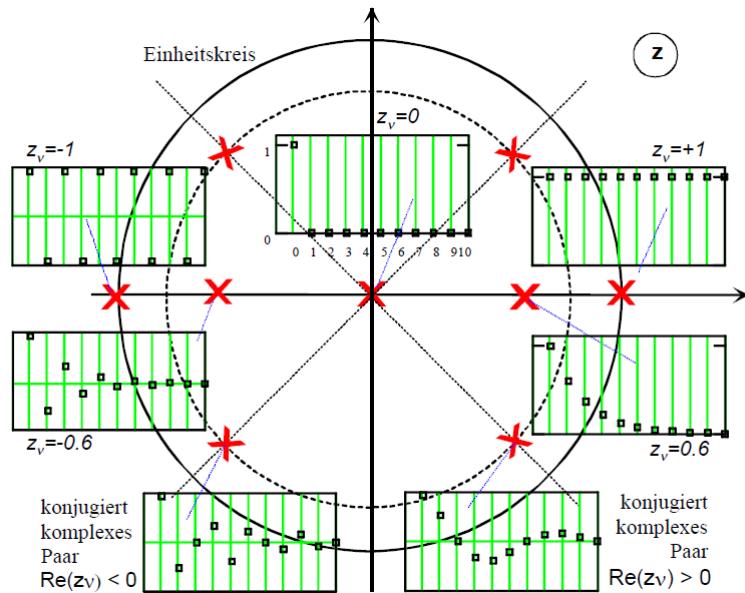
$$s = \frac{1}{T} \ln z = \frac{1}{T} \ln|z| + j\left(\frac{\varphi_z}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right)$$

Ein Pol in der  $z$ -Ebene führt auf einen periodischen Pol in der  $s$ -Ebene und somit auf die Seitenbänder. Die Folge sind periodische Abtastspektren und Aliasing. Die Reelle Achse  $-\infty < \sigma < \infty$  mit  $\omega = 0$  wird auf die positive reelle Achse abgebildet  $z_r = e^{sT} = e^{\sigma T} \dots 0 < z_r < \infty$ . Absolute Stabilität liegt vor wenn alle Pole im inneren des Einheitskreises liegen.



### Bild Stabilität in $s$ - und $z$ -Ebene

Auch die Dynamik kann aus der Lage eines Poles in der  $z$ -Ebene beurteilt werden.



### Zusammenhang Dynamik und $z$ -Ebene

1. **Pole  $z_n = 0$**  sind mit einem stabilen Vorgang verbunden und führen bei einem  $r$ -fachen Pol zu einer Rechtsverschiebung der gesamten Antwort um  $r$  Tastschritte.
2. **Pole auf dem Einheitskreis** führen auf einen konstanten Betrag der Amplitude einer Folge, unabhängig von der Lage auf dem Einheitskreis
3. **Pole in der rechten Hälfte,  $\operatorname{Re}\{z_n\} > 0$**  zeigen monotonen Verhalten. Das wird insbesondere für reelle  $z_n$  deutlich.
4. **Pole in der linken Hälfte,  $\operatorname{Re}\{z_n\} < 0$**  führen auf alternierende Folgen, besonders bemerkenswert: auch für reelle Eigenwerte. Es ist eine Besonderheit diskreter Übertragungssysteme, dass auch Systeme mit nur einem negativ reellen Pol  $z_n < 0$  eine Schwingungsform mit alternierend wechselndem Vorzeichen der Amplituden zeigen.
5. **Komplexe Pole  $z_n$**  treten immer als konjugiert-komplexe Paare auf und führen auf Abtastfolgen harmonischer Schwingungen.
6. **Sonderfall  $\varphi_n = \pi$**

Das konjugiert-komplexe Polpaar läuft für  $\varphi_n = \pi$  auf einem Kreis mit dem Radius  $|z_n|$  zusammen, ergibt aber keinen Doppelpol, da eine Nullstelle im Zähler einen Pol kompensiert. Es entspricht also weiterhin der Folge eines reellen Einzelpols, aber mit doppelter Amplitude.

### 7. Periodizität der Abbildung

Offensichtlich spielt die negative reelle Achse der  $z$ -Ebene eine besondere Rolle. Ein System 1. Ordnung mit einem Pol auf der negativen reellen  $z$ -Achse zeigt alternierende Eigenbewegung und ein System 2. Ordnung mit einem konjugiert komplexen Polpaar mit  $\varphi_n = \pi$  verhält sich wie ein System mit einem reellen Pol - bei doppelter Amplitude - und nicht wie ein Doppelpol!

## Übungsbeispiele DSS1)-DSS7)

### 4.7.1 Güte der Stabilität

Für die Veranschaulichung der Stabilitätsgüte dient im Zeitbereich üblicherweise das Überschwingen  $\ddot{u}$  der Sprungantwort des Systems. Der elementare Einschwingvorgang lässt sich am einfachsten an einem  $\text{PT}_2$ -Element studieren. Das zugehörige kontinuierliche System besitzt die normierte Form mit der Dämpfung  $D$  und der Eigenfrequenz  $\omega_0$ :

$$G(s) = \frac{k}{1 + \frac{2D}{\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2} \Rightarrow s_{12} = -D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-D^2} \quad D < 1$$

Die Lage der Pole ergeben sich zu:

$$D < 1 \Rightarrow s_{12} = -D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}$$

$$D = 1 \Rightarrow s_{12} = -\omega_0$$

$$D > 1 \Rightarrow s_{12} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2-1}$$

Im Pol-/Nullstellendiagramm kann man nun in Form einer Wurzelortskurve WOK die Lage der Pole bei Variation eines Parameters verfolgen. Hält man die Dämpfung  $D$  konstant und variiert die Frequenz  $\omega_0$  so erkennt man, dass es sich für  $D < 1$  bei der Funktion  $s_{12}(\omega_0)$  um die Parameterdarstellung einer Geraden handelt. Bei  $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist die Steigung 1 und der Winkel daher  $45^\circ$ . Vom PT<sub>2</sub>-Element ist bekannt, dass eine Dämpfung von  $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$  unabhängig von  $\omega_0$  auf ein Überschwingen  $\ddot{u} \sim 5\%$  führt ( $\ddot{u} = e^{-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}}$ ). Konstantes Überschwingen  $\ddot{u}$  im Zeitbereich führt daher im Pol-/Nullstellendiagramm auf Pole die auf einer Geraden durch den Ursprung liegen. Mit zunehmender Dämpfung sinkt das Überschwingen, die Forderung  $\ddot{u} < 5\%$  führt in Folge auf den weißen Bereich. Will man ferner die Ausregelzeit  $t_a$  unter einem bestimmten Wert halten, dürfen die Pole nicht zu nahe an die imaginäre Achse gelangen. Der Realteil  $\sigma = -D\omega_0$  der Pole für  $D < 1$  ist Maß für die Abklingdauer der Einhüllenden e-Funktion  $e^{-D\omega_0 t}$  im Zeitbereich. Je größer der Betrag von  $\sigma$  desto rascher klingt die gedämpfte Schwingung ab. Das rosa Band symbolisiert die geforderte Distanz.

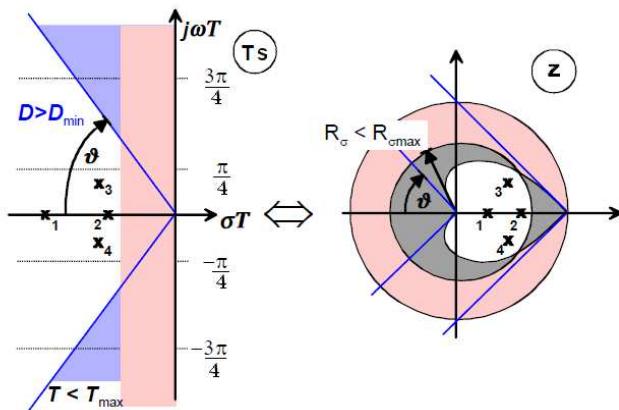


Bild Stabilitätsgüte  $s$ - und  $z$ -Ebene

Für diskrete Systeme im  $z$ -Bereich können nun die Pole mit der Beziehung  $z = e^{sT}$  in die  $z$ -Ebene übertragen werden. Die imaginäre Achse wird auf den Einheitskreis abgebildet, was gleichzeitig die Stabilitätsgrenze darstellt.

Der Kreis wird allerdings im Bereich  $0 < \omega T < \pi$  bereits einmal umrundet, was wieder auf die nicht eindeutige Abbildung hindeutet (periodische Spektren, Aliasing).

Eine Gerade parallel zur imaginären Achse am Ort  $\sigma = \sigma_{rosa} < 0$  wird auf einen Kreis innerhalb des Einheitskreises abgebildet.

$$z_{rosa} = e^{s_{rosa} T} = e^{\sigma_{rosa} + j\omega T} = e^{\sigma_{rosa}} (\cos \omega T + j \sin \omega T) = R_\sigma (\cos \omega T \pm j \sin \omega T)$$

Die Gerade mit konstanter Dämpfung  $D$  wird bei Variation von  $\omega_0$  auf eine MagA

logarithmische Spirale abgebildet ("liegendes Herz", Radius ändert sich bei Variation von  $\omega_0$ ).

$$z_{blau} = e^{s_{blau} T} = e^{-D\omega_0 T \pm j\omega_0 \sqrt{1-D^2} T} = e^{-D\omega_0 T} (\cos \omega_0 \sqrt{1-D^2} T \pm j \sin \omega_0 \sqrt{1-D^2} T)$$

Sollen nun beide Forderungen Überschwingen  $\ddot{u}$  und Ausregelzeit  $t_a$  kleiner als ein bestimmter Betrag erfüllt werden, so muss die Lage der Pole aus der Schnittmenge zwischen Kreis und logarithmischer Spirale gebildet werden (weißer Bereich). Dies ist besonders für den Entwurf von Regelungen nach Polvorgabe von Bedeutung.

Ferner sei angemerkt, dass durch reelle Pole kontinuierlicher Systeme in Abtastregelungen nur die positive reelle Achse der  $z$ -Ebene erreicht werden kann. Während die Nachbildung beliebiger Übertragungsfunktionen im  $s$ -Bereich durch Schaltungen erhebliche Probleme bringen kann, ist der Entwurf einer beliebigen Übertragungsfunktion im  $z$ -Bereich durch einen Algorithmus meist unproblematisch. Besonders im Bereich der negativen reellen Achse ist daher für den Entwurf "echter" diskreter Regler ein Spielraum gegeben.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die Übertragung von Nullstellen der Funktion  $F(s)$  aus der  $s$ -Ebene für zugehörige  $z$ -Transformierte  $F(z)$  in die  $z$ -Ebene durch die Substitution  $z = e^{sT}$  nicht möglich ist. Es existiert dieser allgemeine Zusammenhang nicht.

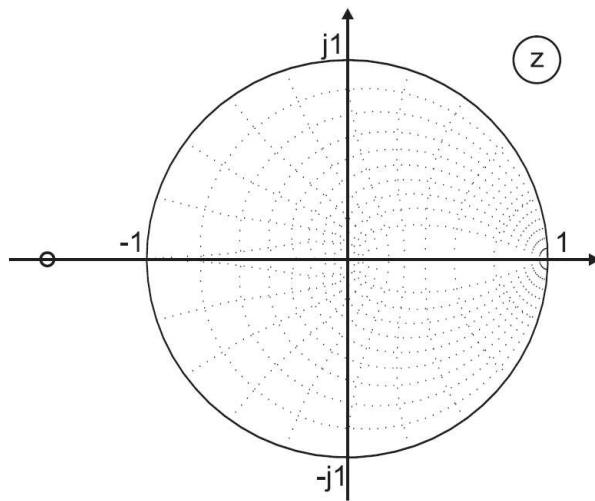
Betrachtet man nun noch die praktische Einschränkung für die Wahl der Abtastzeit  $T$  in Relation zur größten Eigenfrequenz  $\omega_{\max}$  bzw. zur minimalen Zeitkonstante  $T_{\min}$  so ergibt sich eine weitere Einschränkung der Lage der Pole:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \geq 6 \div 20 \quad \omega_{\max} \Rightarrow \frac{2\pi}{20} \leq \omega_{\max} T \leq \frac{2\pi}{6} \Rightarrow \omega_{\max} T \leq \frac{\pi}{3}$$

Bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen von Systemen werden reelle und komplexe Pole gemischt betrachtet. Um dieser Überlegung gerecht zu werden, wird hier der Betrag des Pols  $|s_{12}| = \omega_0 = \omega_{\max} \leq \frac{\pi}{3T}$  erzwungen. Dies führt auf die Forderung, dass alle Pole innerhalb eines Halbkreises in der linken  $s$ -Halbebene mit dem Radius  $r \leq \frac{\pi}{3T}$  liegen müssen.

$$z_{12} = e^{-D\omega_0 T} (\cos \omega_0 \sqrt{1-D^2} T \pm j \sin \omega_0 \sqrt{1-D^2} T) \text{ und mit } \omega_0 T = \frac{\pi}{3}$$

$$z_{12} = e^{-D\frac{\pi}{3}} (\cos \frac{\pi}{3} \sqrt{1-D^2} \pm j \sin \frac{\pi}{3} \sqrt{1-D^2}) \Rightarrow 0 < D < 1$$

Bild  $D$ - und  $\omega$ -Linien in der  $z$ -Ebene

#### 4.7.2 Anti-Aliasing in Regelkreisen

Bei der digitalen Verarbeitung von Signalen tritt infolge der Abtastung eine periodische Fortsetzung des Spektrums auf, welche die Signalinformation verfälscht. Es werden daher zur Bandbegrenzung analoge Anti-Aliasing Filter verwendet. **In der Regelungstechnik ist meist durch die Tiefpasswirkung der Strecke kein zusätzliches Filter erforderlich.** Ist es dennoch von Nöten, ist eine Verschlechterung der Stabilität des Regelkreises durch die zusätzliche Phasennacheilung zu erwarten. Die angeführten Überlegungen zur Wahl der Abtastzeit quasikontinuierlicher Systeme zielen darauf ab die Anti-Aliasingwirkung der Strecke zu nutzen sofern der Tiefpasscharakter gegeben ist.

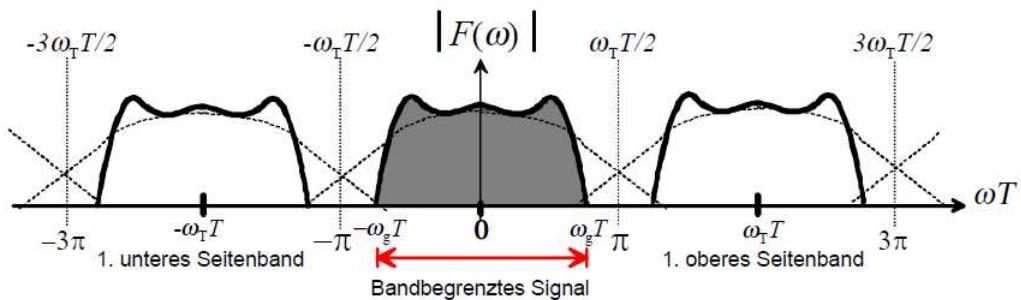


Bild Spektrum mit Seitenbändern

#### 4.8 Quasikontinuierlicher Entwurf

Für den Fall einer ausreichend gut gewählten Abtastzeit  $T$  können, wie der Name sagt, die Methoden der kontinuierlichen Regelungstechnik verwendet werden. Die

Struktur beinhaltet dabei eine kontinuierliche Strecke, wie nachfolgendes Bild zeigt.

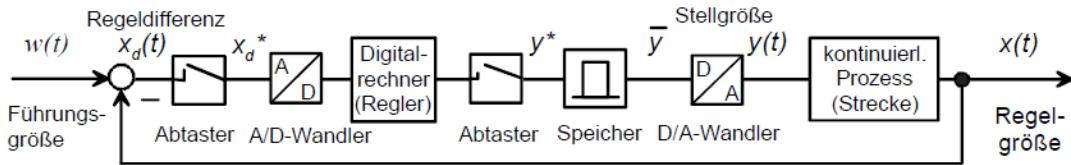


Bild Regelkreis mit Abtastung

Die Parametrierung des Reglers führt nach der üblichen Struktur P, PI, PD oder PID mit den bekannten Methoden wie zB. Betragsoptimum und symmetrisches Optimum zu brauchbaren Ergebnissen. **Tendenziell ist der P-Anteil etwas zu reduzieren, weil Abtastsysteme infolge der Totzeit durch die Abtastung leichter instabil werden.**

### Übungsbeispiele QRE1)-QRE5)

Soll die Abtastzeit berücksichtigt werden weil die Grenze der Quasikontinuität erreicht ist, bietet sich für den experimentellen Entwurf der PID-Regler nach Takahashi an.

#### 4.8.1 Diskreter Frequenzgang

Die klassische Behandlung der Frequenzgänge von Abtastregelungen erfolgte durch die  $w$ -Transformation. Durch den enormen Zuwachs an Rechenleistung der letzten Jahre hat sich jedoch vermehrt der Frequenzgang des diskreten Systems im  $s$  bzw.  $\omega$ -Bereich durchgesetzt. Für kleine Abtastzeiten kann die Modellierung des Reglers auf die kontinuierliche Übertragungsfunktion der Strecke aufgebaut werden und "so getan werden" als würde keine Abtastung erfolgen. Wird die Grenze der Quasikontinuität erreicht eignet sich der Frequenzgang der diskreten Systems im  $\omega$ -Bereich.

a) Nutzung der  $z$ -Transformierten:  $F(z) = F(z(\omega)) = F^*(\omega)$  mit  $z = e^{j\omega T}$

b) Nutzung der Fouriertransformierten:  $F^*(s \rightarrow j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G[j(\omega + k\omega_T)] + \frac{g(0)}{2}$

$G$  ist die kontinuierliche Übertragungsfunktion der Strecke,  $g(0)$  ist die Impulsantwort zum Zeitpunkt 0. Die Formel stellt die Summe über alle Seitenbänder dar, die durch die Abtastung hinzukommen. Die Periodizität ist durch  $k\omega_T = 2\pi/T$  gegeben. Methode a) und b) führen zum selben Ergebnis. Methode b) eignet sich besonders wenn keine  $z$ -Transformierte der Strecke vorliegt. Dargestellt wird entweder Real- und Imaginärteil als Ortskurve oder das Bodediagramm mit Betrags- und Phasengang. Für die weiteren Betrachtungen wird Methode a) verwendet.

Zum Vergleich wird nachfolgend der Frequenzgang eines Tiefpasses 1. Ordnung durch verschiedene Funktionen dargestellt. Um Verwechslungen vorzubeugen wird hier das kontinuierliche System mit  $G(s)$  und das diskrete mit  $F(z)$  bezeichnet.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k}{1+sT_1} && \dots \text{kontinuierliches System} \\ G_{T_t}(s) &= \frac{ke^{-s\frac{T}{2}}}{1+sT_1} && \dots \text{kontinuierliches System mit} \\ &&& \text{der halben Abtastzeit als Totzeit, } |G(j\omega)| = |G_{T_t}(j\omega)| \\ F_{Re}(z) &= \frac{kT}{T+T_1} \frac{z - \frac{T_1}{T+T_1}}{z - e^{-\frac{T}{T+T_1}}} && \dots \text{Rechtecknäherung} \\ F_{mZOH}(z) &= \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} && \dots \text{exakt mit Halteglied} \\ F_{oZOH}(z) &= \frac{1}{T_1} \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} && \dots \text{exakt ohne Halteglied} \end{aligned}$$

Annahme:  $k = 1, T_1 = 5, T = 1$ , lineare und logarithmische Darstellung im Frequenzbereich  $0 < \omega T < \omega_{max}T = 2 \omega_T T = 4\pi$

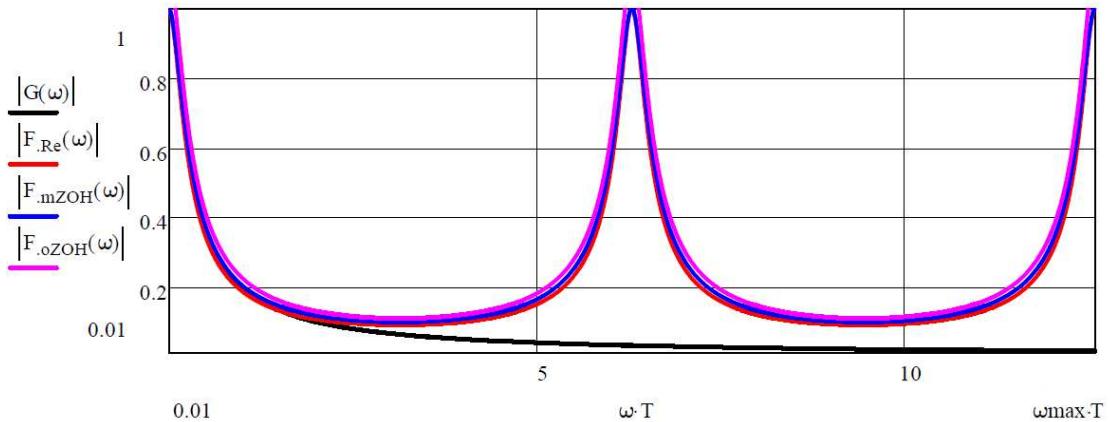


Bild Betragsverlauf im linearen Maßstab für diskretes PT<sub>1</sub>-Element

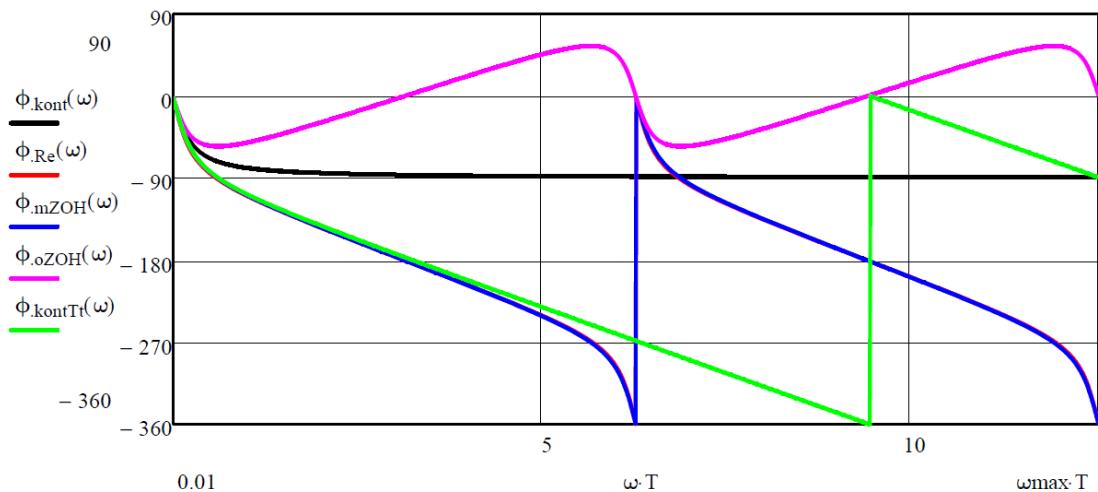
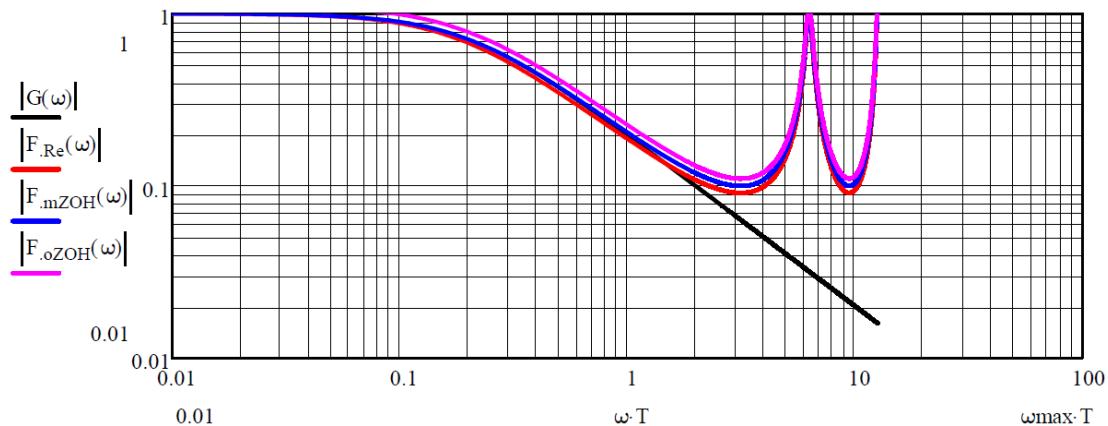
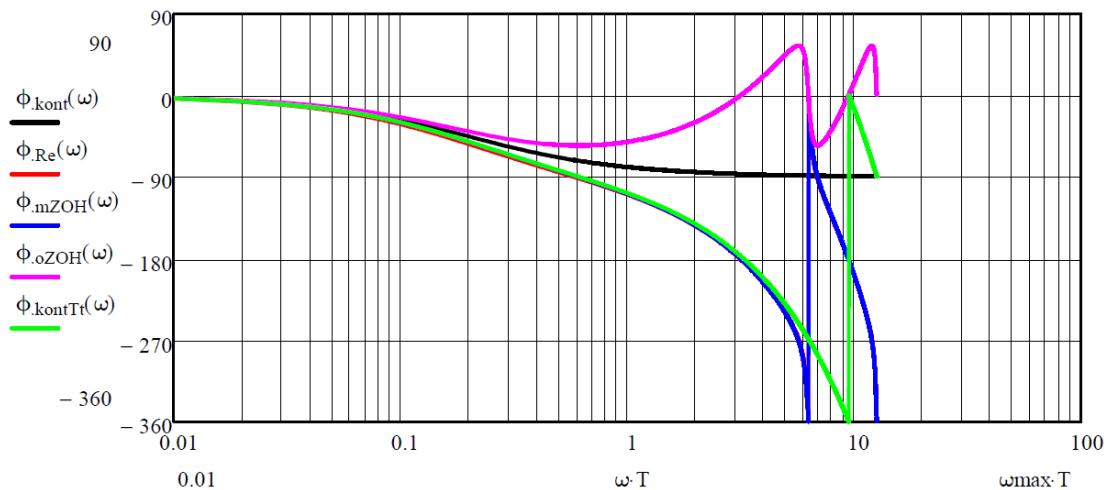


Bild Phasenverlauf im linearen Maßstab für diskretes PT<sub>1</sub>-Element

Bild Bodediagramm für diskretes PT<sub>1</sub>-Element, BetragsverlaufBild Bodediagramm für diskretes PT<sub>1</sub>-Element, Phasenverlauf

Die rote Kurve verschwindet im Phasenverlauf hinter der blauen, was die gute Übereinstimmung von Rechtecknäherung und exakter  $z$ -Transformation mit ZOH für die gewählte Relation von  $T_1$  und  $T$  bestätigt. Man erkennt ferner, dass der Ablösungsprozess der quasikontinuierlichen Näherung vom kontinuierlichen Verhalten im Phasenverlauf im Bereich  $0.05 < \omega T < 0.2$  stattfindet, was der angegebenen Bedingung für die Wahl der Abtastzeit entspricht.

$$\omega T = \frac{2\pi}{T} \geq 100 \omega_{\max} = \frac{100}{T_{\min}} \Rightarrow T \leq \frac{2\pi}{100} \frac{1}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi}{100} T_{\min} \approx 0.06 \frac{1}{\omega_{\max}} \Rightarrow T \approx 5 - 20\% \text{ von } \frac{1}{\omega_{\max}}$$

Die Übereinstimmung des Phasenverlaufs ist für die Berechnung des Phasenrands  $\alpha_R$  beim Reglerentwurf von wesentlicher Bedeutung. Zusätzlich ist ersichtlich, dass die kontinuierliche Modellierung mit Totzeit im Phasenverlauf eine gute Übereinstimmung mit der diskreten Darstellung bis  $\omega_{\max} T \approx 3 \Rightarrow \omega_{\max} \approx \frac{\omega_T}{2}$  zeigt. Dies entspricht der Nyquistfrequenz. Die Modellierung mit Totzeit wird daher für

den quasikontinuierlichen Entwurf bevorzugt verwendet.

Nachfolgend wird gezeigt wie sich die Wahl der Abtastzeit  $T$  der quasikontinuierlichen Rechteck-Näherung eines schwingungsfähigen  $\text{PT}_2$ -Elements auf das Frequenz- und Zeitverhalten auswirkt. ( $k = 1$ ,  $D = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ )

$$G(s) = \frac{k}{1 + \frac{2D}{\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2} \Rightarrow F(z) = \frac{\frac{k\omega_0^2 T^2}{1 + 2D\omega_0 T + \omega_0^2 T^2} z^2}{\frac{1}{1 + 2D\omega_0 T + \omega_0^2 T^2} - \frac{2 + 2D\omega_0 T}{1 + 2D\omega_0 T + \omega_0^2 T^2} z + z^2}$$

Die Wahl der Abtastzeit führt auf:  $T_{\min} = \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow T = 0.05 \div 0.2 T_{\min} = 0.05 \div 0.2$   
Dargestellt sind drei Fälle:  $T = 0.05, 0.2, 1$

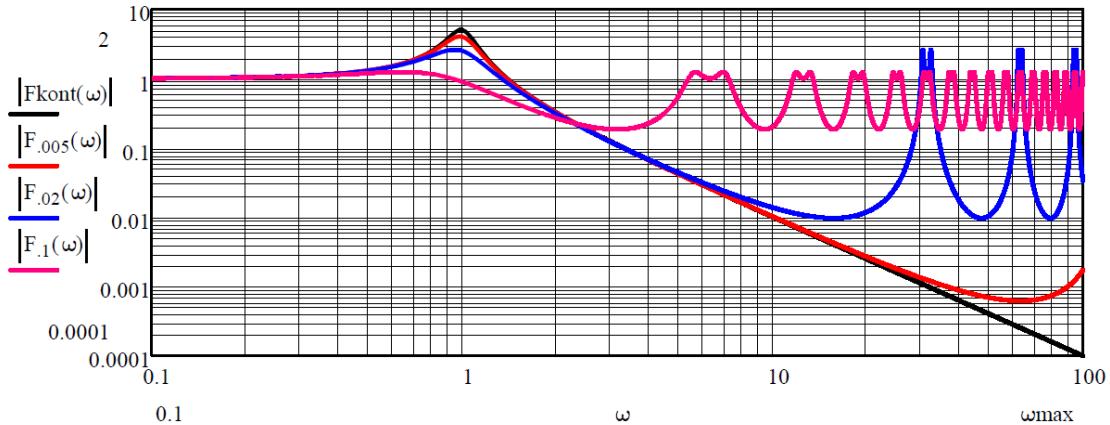


Bild Betragsverlauf diskretes  $\text{PT}_2$

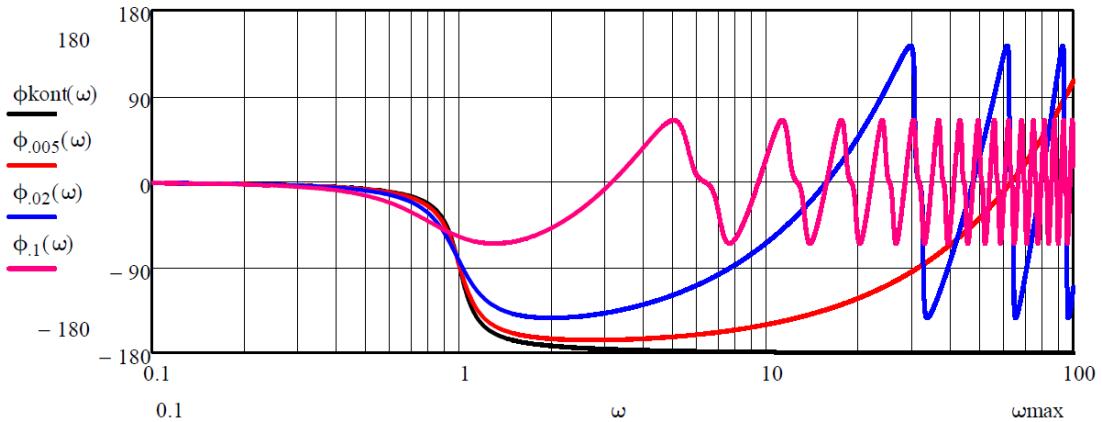


Bild Phasengang diskretes  $\text{PT}_2$

Der Ablösungsprozess findet für die drei Abtastzeiten in folgenden Bereichen statt:  
 $T = 0.05 \Rightarrow \omega \approx 1 \div 4$ ,  $T = 0.2 \Rightarrow \omega \approx 0.25 \div 1$ ,  $T = 1 \Rightarrow \omega \approx 0.05 \div 0.2$  statt. Dies bestätigt wiederum die Grenze der Quasikontinuität  $0.05 < \omega T < 0.2$ . Wenn die dominierende Eigenfrequenz  $\omega_0$  im Zeitverhalten richtig erfasst werden soll, muss sich die tatsächliche Abtastzeit an  $T_{\min}$  bzw.  $\omega_0$  orientieren. Nächstes Bild zeigt wie der stark schwingende Charakter bei  $T = 1$  bereits verlorengeht und bei  $T = 0.05$

der kontinuierliche Verlauf immer noch nicht ganz erreicht ist.

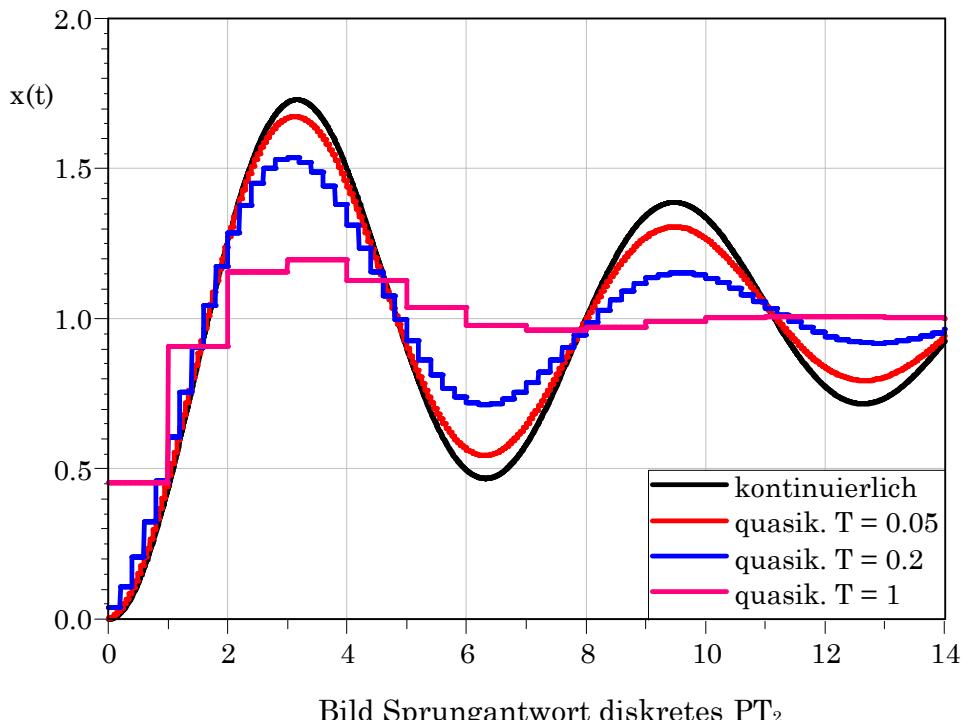


Bild Sprungantwort diskretes  $PT_2$

#### 4.8.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

Für stabile offene Systeme kann das Nyquist-Kriterium wie aus der kontinuierlichen Regelungstechnik bekannt angewendet werden. Für die Ortskurve wird der diskrete Frequenzgang der offenen Regelschleife  $F_0^*(j\omega) = F_R^*(j\omega)F_S^*(j\omega)$  herangezogen. Der Punkt -1 in der  $F^*(j\omega)$ -Ebene muss für Stabilität außerhalb der Ortskurve liegen.

#### 4.8.3 Takahashi PID-Regler

Beim Reglerentwurf ist die Vorgehensweise davon abhängig ob ein Streckenmodell als Übertragungsfunktion vorliegt. Liegt es nicht vor kann auf eine der zahlreichen Methoden der experimentellen Ermittlung von Streckenparametern mit abgeleiteter Reglerparametrierung zurückgegriffen werden (Oppelt, Ziegler-Nichols, Chien-Hrones-Reswick, ...). Beim Takahashi-Regler werden Parameter aus der Sprungantwort der Strecke ermittelt. Das Verfahren geht von einem  $PT_1T_i$ -Verhalten aus und ist auf nichtschwingungsfähige  $PT_n$ -Strecken anwendbar. Es basiert auf einer Erweiterung des Verfahrens nach Ziegler-Nichols, obwohl hier keine Messungen an der Stabilitätsgrenze erforderlich sind. Der Takahashi-Regler berücksichtigt den Einfluss der Abtastzeit, er kann somit an der Grenze der Quasikontinuität betrieben werden. Die zulässige Abtastzeit  $T$  muss aber kleiner als die zweifache Verzugszeit gewählt werden  $T < 2T_u$ , welche aus der

Sprungantwort bestimmt wird.

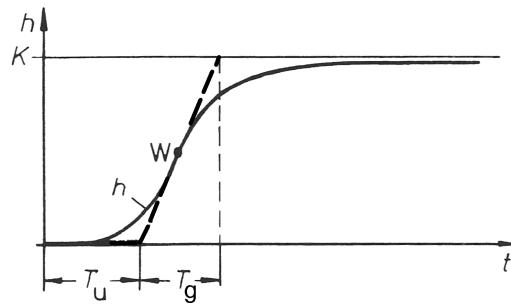


Bild Ermittlung von  $T_u$  und  $T_g$

Abweichend von herkömmlichen Reglern besitzt der Takahashi-Regler keine direkte Aufschaltung der Regelabweichung  $e(k)$  und damit des Führungssignals  $w(k)$  auf den "D"- und "P"-Anteil des Reglers. Bei schnellen Führungsänderungen werden dadurch große Stellausschläge vermieden, der direkte und vorhaltende Eingriff des Reglers bei Störeinwirkung auf die Regelgröße  $x(k)$  ist aber nicht reduziert. Der Regler reagiert somit schnell auf Störungen, aber moderat bei Führungsgrößenänderungen.

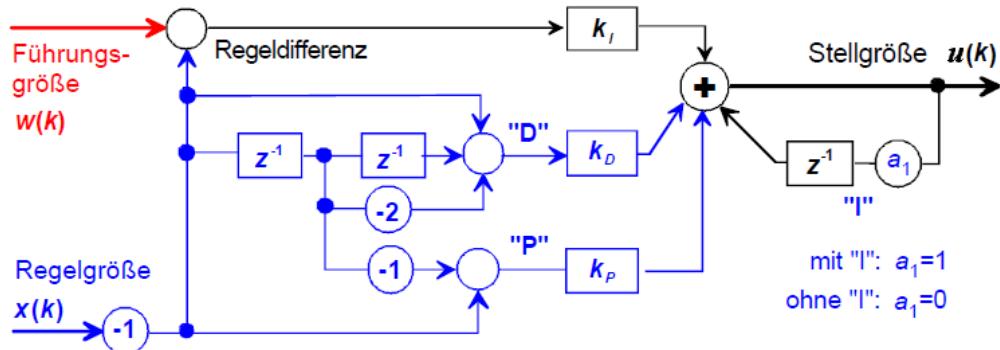


Bild Takahashi-Regler

$$u(k) = k_I[w(k) - x(k)] + k_D[-x(k) + 2x(k-1) - x(k-2)] + k_P[x(k-1) - x(k)] + a_1u(k-1)$$

$$u(k) - u(k-1) = -k_P[x(k) - x(k-1)] + k_I[w(k) - x(k)] - k_D[x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)]$$

$$\Rightarrow u(z) - u(z)z^{-1} = -k_P[x(z) - x(z)z^{-1}] + k_I[w(z) - x(z)] - k_D[x(z) - 2x(z)z^{-1} + x(z)z^{-2}]$$

$$\Rightarrow u(z)(1 - z^{-1}) = k_I w(z) + [-k_P(1 - z^{-1}) - k_I - k_D(1 - 2z^{-1} + z^{-2})]x(z) + k_I w(z)$$

$$\Rightarrow u(z) = k_I \frac{w(z)}{(1-z^{-1})} - \left[ k_P + \frac{k_I}{(1-z^{-1})} + k_D \frac{(1-2z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})} \right] x(z)$$

$$\Rightarrow u(z) = k_I \left( \frac{z}{z-1} \right) w(z) - [k_P + k_I \left( \frac{z}{z-1} \right) + k_D \left( \frac{z-1}{z} \right)] x(z) \quad \dots a_1 = 1$$

P-Regler:  $k_P = \frac{T_g}{k(T_u+T)}$  im Blockbild:  $a_1 = 0, k_I = k_P!, k_P = 0!, k_D = 0$

PI-Regler:  $k_P = 0.9 \frac{T_g}{k(T_u+0.5T)} - 0.5k_I, k_I = 0.27 \frac{TT_g}{k(T_u+0.5T)^2}$

PID-Regler:  $k_P = 1.2 \frac{T_g}{k(T_u+T)} - 0.5k_I, k_I = 0.6 \frac{TT_g}{k(T_u+0.5T)^2}, k_D = 0.5 \frac{T_g}{kT}$

( $k$  ... Streckenverstärkung) Ein Takahashi-Regler führt bei geringer Dämpfung zu einem schnellen Einschwingvorgang mit geringem Überschreiten bei Führungsänderung. Er nähert sich dem Sollwert weitgehend von einer Seite und verfügt über eine gute Störgrößenunterdrückung.

Beispiel: Entwurf eines Takahashi PI-Reglers für eine Strecke aus zwei PT<sub>1</sub>-Elementen  $k = 1, T_1 = 5, T_2 = 5$ ; Führung und Störung durch Einheitssprung, Störung zwischen den PT<sub>1</sub>-Elementen

Simulation:  $T_u = 1.41, T_g = 13.59, T = 1, k_I = 0.9, k_p = 0.625$

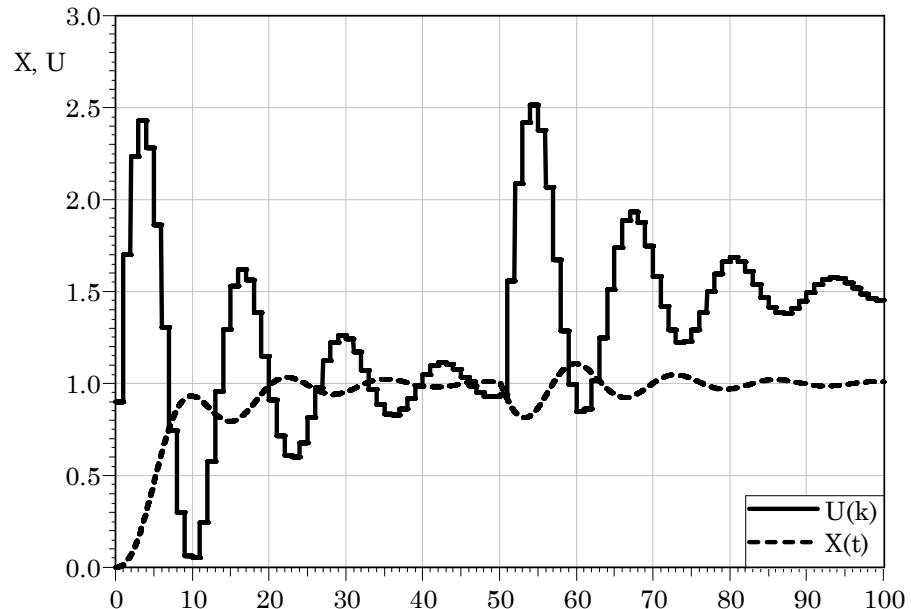


Bild Antwort auf Führungsprung bei  $t = 0$  und Störungssprung bei  $t = 50$

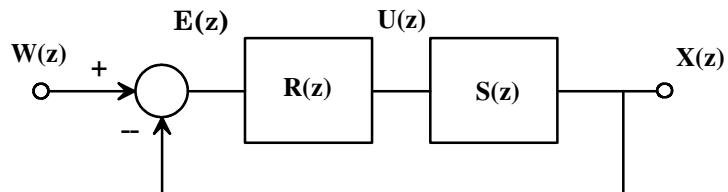
Übungsbeispiele **QTE3), QTE5)**

### Anti-Windup:

In Digitalreglern besteht das besondere Problem, dass der Zahlevorrat des Rechners wesentlich höher als die maximal verfügbare physikalische Stellgröße des Reglers ist. Ohne besondere Maßnahme kann es daher sein, dass bei anliegender Eingangsgröße der Zahlenwert der Ausgangsgröße infolge des Integralanteils permanent erhöht wird (bis zum Überlauf), obwohl der Reglerausgang bereits die Begrenzung erreicht hat. Diese Nichtlinearität bewirkt eine im Vergleich zum linearen Verhalten erhöhte Ausregelzeit, in der der Zahlenwert weiter ansteigt. Das eigentliche Problem dabei tritt erst auf, wenn aufgrund eines Vorzeichenwechsels der Regelabweichung der Integrator bereits wieder rückläufig ist, wegen der hohen Zahlenwerte aber noch weit über der maximalen Stellgröße liegt. Es muss "gewartet" werden bis der Integrator wieder in den physikalischen Arbeitsbereich eintritt. Hierbei geht Zeit für den Ausregelvorgang verloren, was wegen der Verzögerung zum starkem Überschwingen der Regelgröße führt. Eine Anti-Windup Einrichtung begrenzt den Zahlenwert der Stellgröße im Rechner auf die maximale physikalische Stellgröße. Der Rücklauf der Integration ist damit unverzögert.

### 4.9 Zeitdiskreter Entwurf DDC

Der Zeitdiskrete Entwurf bietet die Möglichkeit abzuweichen von den für P, PI, PD, PID-Reglern bekannten Strukturen. Es eröffnen sich ganz neue Dimensionen bei der Realisierung. Während kontinuierlichen Reglern nicht beliebige Pole und Nullstellen zugeordnet werden können, können diskrete Übertragungsfunktion auf Rechnern beinahe beliebige Formen annehmen. Der Zeitdiskrete Entwurf (DDC Direct Digital Control) ist auch in Leitsystemen mit großen Latenzzeiten angebracht. Für den Entwurf muss natürlich die exakte  $z$ -Transformierte der Strecke  $S(z)$  vorliegen. Ermittelt wird ein  $R(z)$  wie in nachfolgenden Standardregelkreis gezeigt, welches keiner klassischen Form entspricht.



### 4.9.1 FIR-Prinzip

Nachdem in der Regelungstechnik eine wesentlicher Aspekt der Zeitbedarf eines Ausregelvorganges ist, ist es naheliegend bei diskreten Systemen ein FIR-Verhalten anzustreben. Dies führt auf eine endliche Folge von Abtastschritten bis der ausgeregelte Zustand erreicht ist. Man wählt ein FIR-Verhalten mit einem Vorgabepolynom  $V^{FIR}(z)$  mit der Ordnung  $n_v$  für die Führungsübertragungsfunktion  $F_w(z)$  bei dem wegen des Endwerttheorems sichergestellt ist, dass  $F_w(1) = 1$  ist.

$$V^{FIR}(z) = b_{0v} + b_{1v}z + b_{0v}z^2 + \dots + b_{nv}z^{n_v} \Rightarrow V^{FIR}(1) = \sum_{i=1}^{n_v} b_{iv}$$

$$F_w(z) = \frac{R(z)S(z)}{1+R(z)S(z)} = \frac{V^{FIR}(z)}{V^{FIR}(1)z^n} = f_0 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \dots + f_{n_v}z^{-n_v}$$

$R(z)$  ist zu berechnen aus:

$$F_w(z) + F_w(z)R(z)S(z) = R(z)S(z) \Rightarrow R(z) = \frac{1}{S(z)} \frac{F_w(z)}{(1-F_w(z))} = \frac{1}{S(z)} \frac{V^{FIR}(z)}{V^{FIR}(1)z^n - V^{FIR}(z)}$$

Die Sprungantwort hat nach  $n_v$  Schritten den Endwert erreicht. Die Ordnung  $n_v$  kann frei gewählt werden und ist nicht von der Ordnung der Strecke  $n_s$  bestimmt.

Beispiel:  $S(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ ,  $T_1 = 2$ ,  $T_2 = 1.25$ ,  $T = 2$ ,  $S(z)$  mit ZOH:

$$S(z) = \frac{b_{0s} + b_{1s}z}{a_{0s} + a_{1s}z + z^2}, \quad b_{0s} = 0.149, b_{1s} = 0.355, a_{0s} = 0.074, a_{1s} = -0.57$$

$$V^{FIR}(z) = b_{0v} + b_{1v}z + b_{2v}z^2, \quad b_{0v} = 0.2, b_{1v} = 0.2, b_{2v} = 0, n_v = 2$$

$$R(z) = \frac{1}{S(z)} \frac{V^{FIR}(z)}{V^{FIR}(1)z^n - V^{FIR}(z)} = \frac{1}{S(z)} \frac{b_{0v} + b_{1v}z + b_{2v}z^2}{(b_{0v} + b_{1v} + b_{2v})z^2 - (b_{0v} + b_{1v}z + b_{2v}z^2)} = \frac{1}{S(z)} \frac{b_{0v} + b_{1v}z + b_{2v}z^2}{(b_{0v} + b_{1v})z^2 - b_{1v}z - b_{0v}}$$

$$R(z) = \frac{1}{S(z)} \frac{0.2 + 0.2z}{-0.2 - 0.2z + 0.4z^2} = \frac{a_{0s} + a_{1s}z + z^2}{b_{0s} + b_{1s}z} \frac{1+z}{-1-z+2z^2} = \frac{a_{0s} + (a_{0s} + a_{1s})z + (a_{1s} + 1)z^2 + z^3}{-b_{0s} - (b_{1s} + b_{0s})z + (2b_{0s} - b_{1s})z^2 + 2b_{1s}z^3}$$

$$R(z) = \frac{0.074 - 0.496z + 0.43z^2 + z^3}{-0.149 - 0.504z - 0.057z^2 + 0.71z^3}$$

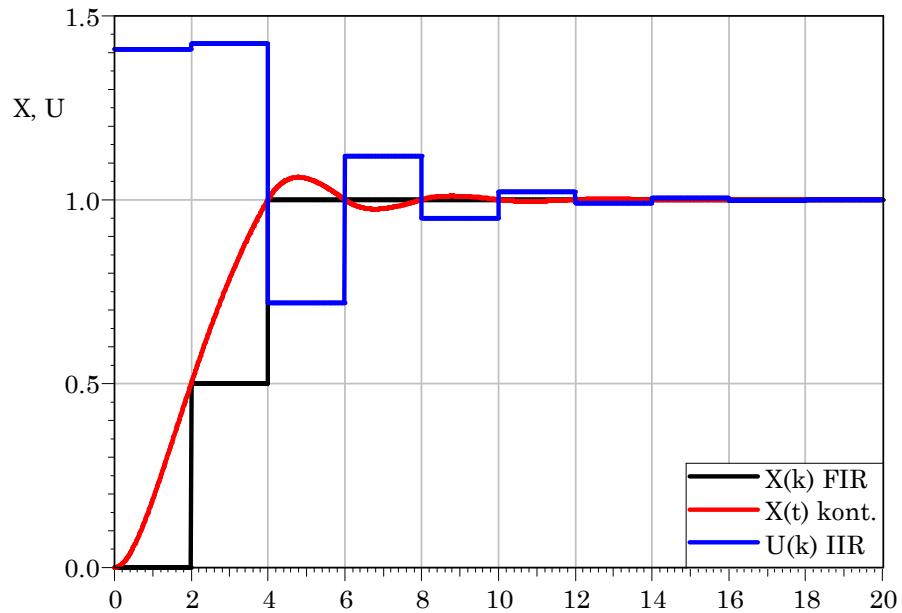


Bild Regel- und Stellgrößenverlauf für FIR-Entwurf

Die Regelgröße  $X(k)$  ist nach zwei Schritten am Endwert, der kontinuierliche Verlauf  $X(t)$  zeigt Zwischenbewegungen und die Stellgröße  $U(k)$  IIR-Verhalten.

$$\Rightarrow U(z) = W(z)F_w(z)\frac{1}{S(z)} \Rightarrow U(z) = W(z)\frac{V^{FIR}(z)}{S(z)V^{FIR}(1)z^{n_v}}$$

Der Regler regelt weiter, um die Bedingung der  $n_v$  Schritte am Ausgang halten zu können. Über den Signalverlauf der Regelgröße zwischen den Abtastzeitpunkten kann keine Aussage getroffen werden. Der entworfene Regler ist ferner nur einsatzfähig, wenn der Zählergrad kleiner gleich dem Nennergrad ist. Zu berücksichtigen ist auch, dass die vor allem bei kleineren Abtastzeiten erreichte rasche Ausregelung durch einen erhöhten Stellgrößenbedarf erkauft wird. Dies resultiert aus den geringen Freiheitsgraden der Entwurfsmethode. Das FIR-Entwurfsverfahren eignet sich besonderes für Führungs- und Leitaufgaben in übergeordneten Regelkreisen. In den untergeordneten Reglern ist bei kleineren Tastzeiten eine ausreichende Störungsausregelung sicherzustellen.

#### 4.9.2 Dead Beat Prinzip

Eine weitere Variante des FIR-Entwurfes ist der Dead Beat Regler. Das Optimierungsziel ist die Zeit. Ein zeitoptimaler Regler schafft den Ausregelvorgang in der kürzest möglichen Zeit. Diese Zeit entspricht in diskreten Systemen der Systemordnung der Strecke (System zweiter Ordnung = nach zwei Schritten ausgeregt). Dies gilt für Regel- und Stellgröße gleichermaßen.

Wie beim allgemeinen FIR-Entwurf wählt man wieder ein Vorgabepolynom  $V^{DB}(z)$  mit der Ordnung  $n_v$ , sodass wiederum für die Führungsübertragungsfunktion

wegen dem Endwerttheorem  $F_w(1) = 1$  sichergestellt ist. Das Vorgabepolynom entspricht zusätzlich dem Zählerpolynom der Strecke  $Z_S(z)$ . Somit gilt  $n_v = n_s$ .

$$S(z) = \frac{Z_S(z)}{N_S(z)} \Rightarrow F_w(z) = \frac{V^{DB}(z)}{V^{DB}(1)z^{n_v}} = \frac{Z_S(z)}{Z_S(1)z^{n_s}} = \frac{R(z)S(z)}{1+R(z)S(z)} = \frac{R(z)\frac{Z_S(z)}{N_S(z)}}{1+R(z)\frac{Z_S(z)}{N_S(z)}} = \frac{R(z)Z_S(z)}{N_S(z)+R(z)Z_S(z)}$$

Wenn  $F_w(z)$  FIR-Verhalten der Ordnung  $n_s$  hat ist  $X(z)$  nach  $n_s$ -Schritten nach einem Einheitssprung am Endwert angelangt.

$$X(z) = F_w(z) W(z)$$

$R(z)$  ist zu berechnen aus:

$$F_w(z) + F_w(z)R(z)S(z) = R(z)S(z) \Rightarrow R(z) = \frac{1}{S(z)} \frac{F_w(z)}{(1-F_w(z))} = \frac{N_S(z)}{Z_S(1)z^{n_s} - Z_S(z)}$$

Beim Dead Beat Ansatz ergibt sich auch für die Stellgröße  $U(z)$  FIR-Verhalten.

$$U(z) = W(z)F_w(z)\frac{1}{S(z)} \Rightarrow \frac{U(z)}{W(z)} = \frac{V^{DB}(z)}{S(z)V^{DB}(1)z^{n_v}} = \frac{N_S(z)V^{DB}(z)}{Z_S(z)V^{DB}(1)z^{n_v}} = \frac{N_S(z)Z_S(z)}{Z_S(z)Z_S(1)z^{n_s}} = \frac{N_S(z)}{Z_S(1)z^{n_s}}$$

Ist das System nach  $n_s$  Schritten ausgeregelt, so ist damit auch die Stellaktivität beendet. Beim allgemeinen FIR-Ansatz sind zwar Ordnungen von  $F_w(z)$  kleiner der Streckenordnung und damit ein rascheres ausregeln möglich, der Stellvorgang dauert aber weiter an. Daher ist die Aussage der Dead Beat Regler ist zeitoptimal zulässig.

Der Ansatz für den Dead Beat Regler kann auch anders überlegt werden:

Sprungantwort:  $K_w(z)$  ..... Wunschpolynom

$$X(z) = F_w(z) W(z) = K_w(z)W(z) = (k_0z^0 + k_1z^{-1} + \dots + k_nz^{-n})W(z)$$

System 2.Ordnung im  $z$ -Bereich:

$$\text{Im } z\text{-Bereich: } X_w(z) = F_w(z) W(z) = K_w(z)W(z) = k_0 + k_1z^{-1} + k_2z^{-2}$$

$$\text{Im Zeitbereich folgt: } x_n = w_n k_0 + w_{n-1} k_1 + w_{n-2} k_2$$

$$\text{Sprung: } W(z) = 1, w_0 = 1, w_1 = 1, w_2 = 1, \dots$$

$$\text{daher folgt: } x_n = \sum_{i=1}^n k_i \quad \text{mit } n = 2 \text{ für System 2.Ordnung}$$

$$\text{Nullter Schritt: } x_0 = w_0 k_0 = 0$$

$$\text{Erster Schritt: } x_1 = w_1 k_0 + w_0 k_1$$

$$\text{Zweiter Schritt: } x_2 = w_2 k_0 + w_1 k_1 + w_0 k_2 = 1$$

$$\text{Dritter Schritt: } x_3 = w_3 k_0 + w_2 k_1 + w_1 k_2 = 1$$

Aus der Sprungantwort erkennt man, dass die Koeffizienten die Forderungen  $k_0 + k_1 + k_2 = 1, k_0 = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 = 1$  erfüllen müssen.

Ansatz für 2. Ordnung mit Kompensation:  $K_w(z) = cB(z)$

$z$ -Transformierte PT<sub>2</sub>

$$S(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{B(z)z^2}{A(z)z^2} = \frac{Z_S(z)}{N_S(z)}$$

$$R(z) = \frac{1}{S(z)} \frac{F_w(z)}{(1-F_w(z))} = \frac{1}{S(z)} \frac{K_w(z)}{(1-K_w(z))} = \frac{A(z)}{B(z)} \frac{cB(z)}{(1-cB(z))} = A(z) \frac{c}{1-cB(z)}$$

$$K_w(z) = k_0 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2} = cB(z) = cb_1 z^{-1} + cb_2 z^{-2}$$

Koeffizientenvergleich:

$$k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow 1 - k_1 = k_2 \Rightarrow cb_1 = k_1, cb_2 = 1 - k_1 \Rightarrow c = \frac{1}{b_1 + b_2}, k_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

$$R(z) = A(z) \frac{c}{1-cB(z)} = A(z) \frac{\frac{1}{b_1+b_2}}{\left(1-\frac{1}{b_1+b_2}B(z)\right)} = \frac{A(z)}{b_1+b_2-B(z)} = \frac{A(z)}{B(1)-B(z)} = \frac{A(z)z^2}{B(1)z^2-B(z)z^2} = \frac{N_S(z)}{Z_S(1)z^2-Z_S(z)}$$

Dead Beat Regler mit positiven Exponenten für PT<sub>2</sub>-Strecke:  $R(z) = \frac{a_2+a_1z^1+a_0z^2}{-b_2-b_1z^1+(b_1+b_2)z^2}$

Bei Eingaben in Simulationsprogramme ergibt sich die folgende Diskrepanz für die Übertragungsfunktion:

für Rechnung:

$$S(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$\text{für Programm-Eingabe: } S(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0^* + b_1^* z^1 + b_2^* z^2 + \dots + b_m^* z^m}{a_0^* + a_1^* z^1 + a_2^* z^2 + \dots + a_n^* z^n} \quad n \geq m, a_n \neq 0$$

Beispiel PT<sub>2</sub>-Strecke:

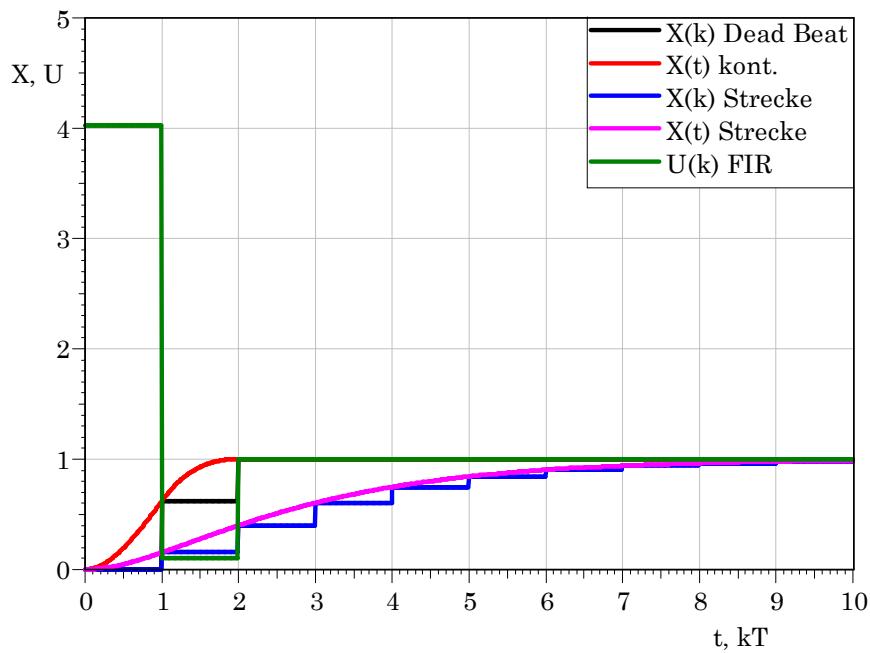
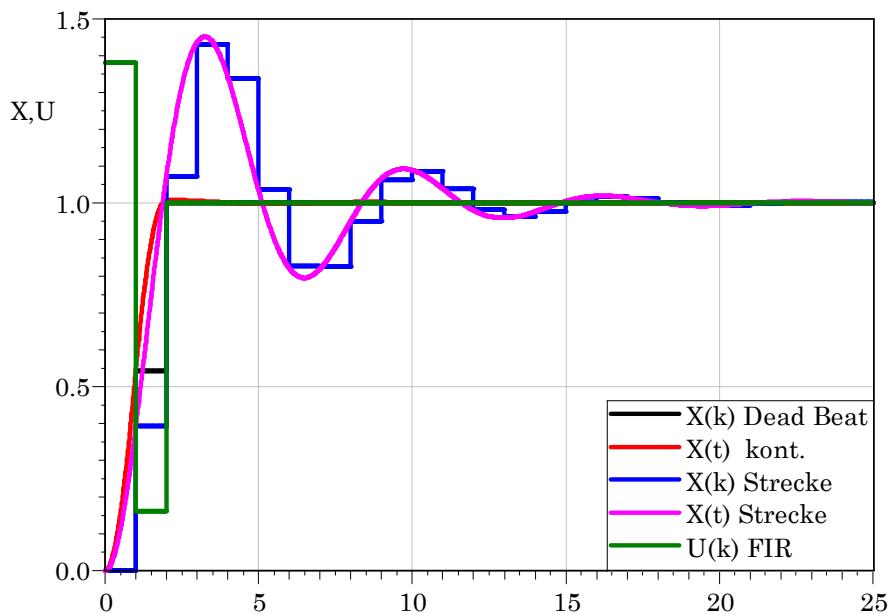
$$S(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_2 + b_1 z}{a_2 + a_1 z + a_0 z^2} = \frac{b_0^* + b_1^* z}{a_0^* + a_1^* z + a_2^* z^2} \Rightarrow b_2 = b_0^*, b_1 = b_1^*, \dots$$

a.) nichtschwingungsfähig  $T_1 = 0.5, T_2 = 1$ , Abtastzeit  $T = 1$

$$S(z) \text{ mit ZOH: } b_0^* = -4.6950969E-2, b_1^* = -7.7409061E-2, a_0^* = -1.1156508E-1, \\ a_1^* = 4.87205050E-1, a_2^* = -5.00000000E-1$$

b.) schwingungsfähig  $\omega_0 = 1, D = 0.25$ , Abtastzeit  $T = 1$

$$S(z) \text{ mit ZOH: } b_0^* = 3.308216045E-1, b_1^* = 3.929451508E-1, a_0^* = 6.065306597E-1, \\ a_1^* = -8.827639043E-1, a_2^* = 1.000000000E+0$$

Bild Sprungantwort nichtschwingungsfähige  $S(z)$  mit Dead Beat ReglerBild Sprungantwort schwingungsfähige  $S(z)$  mit Dead Beat Regler

Man erkennt, dass für eine Dead Beat Einstellung am Anfang eine hohe Stellgröße erforderlich ist. Je kürzer die Abtastzeit gewählt wird, desto höher fällt der Anfangsimpuls aus. Dies führt zu Realisierungsproblemen. Die gesicherten zwei

Abtastschritte für ein System 2. Ordnung lassen die Ausregelzeit offen. Es ist demnach ein Kompromiss aus Geschwindigkeit und Stellgrößenaufwand zu treffen. Üblich ist auch den allgemeinen FIR-Ansatz für den Dead Beat Regler zu verwenden und als Zusatzbedingung den ersten Stellimpuls nach einem Eingangssprung auf einen bestimmten Wert zu begrenzen. Ferner ist festzuhalten, dass ein diskreter Entwurf nur die Werte zu den Abtastzeitpunkten garantiert, dazwischen können gerade bei großen Abtastzeiten unerwünschte Regelbewegungen auftreten.

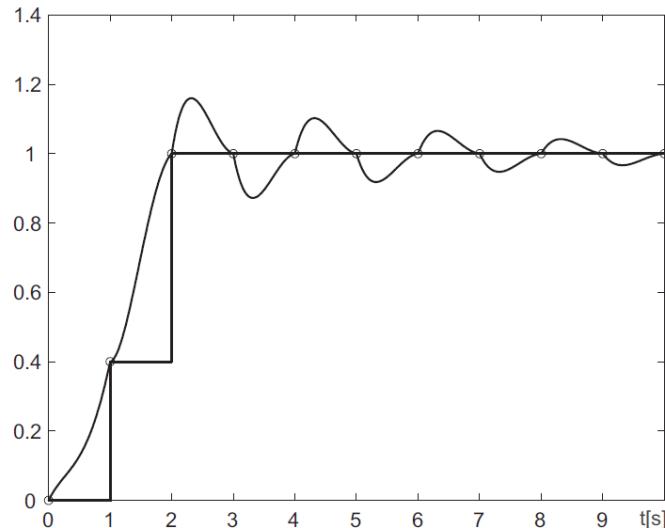


Bild Zwischenbewegungen einer Dead Beat Regelung

Eine wesentliche Eigenschaft einer Regelung ist auch das Störungsverhalten, welches hier nicht berücksichtigt wurde. Es lässt sich aber auch für Führungs- und Störungsverhalten ein Dead Beat Entwurf durchführen. Es ist allerdings ein frei parametrierbares digitales Vorfilter erforderlich. Mit der gewünschten Störungsübertragungsfunktion wird der Dead Beat Regler entworfen und mit dem Vorfilter das Dead Beat Verhalten der Führungsübertragungsfunktion. Voraussetzung ist ferner eine deterministische Störung, wie zB. ein Sprungsignal.

### Übungsbeispiele DBE1)-DBE5)

## 5 RDP Themenbereiche

1. Sensorik und Aktorik (S&A)
2. Messverfahren (MV)
3. Signalaufbereitung und -darstellung (SA&SD)
4. Regelungstechnik (RT)

Simulationssoftware WinFact Tools:

BORIS	Blockorientierte Systemanalyse (lineare und nichtlineare Systeme im Zeitbereich)
BODE-Trainer	exakte Bodediagramme und Knickzüge mit Parametervariation
INGO	Graphische Präsentation (Diagramme, Graphikexport für Dokumente)
IDA	Identifikation im Zeitbereich, (Modellierung der Übertragungsfunktion aus der Sprungantwort)
LISA	Lineare System Analyse (Sprungantwort, Bodediagramm, Ortskurve, Pole, Wurzelortskurve)
RESY	Reglersynthese (lineare Systeme im Frequenzbereich, Reglerentwurf)
SIM-Trainer	Sprungantwort linearer System mit Parametervariation auch mit Gegenkopplung
SUSY	Simulation und Synthese im Zustandsraum