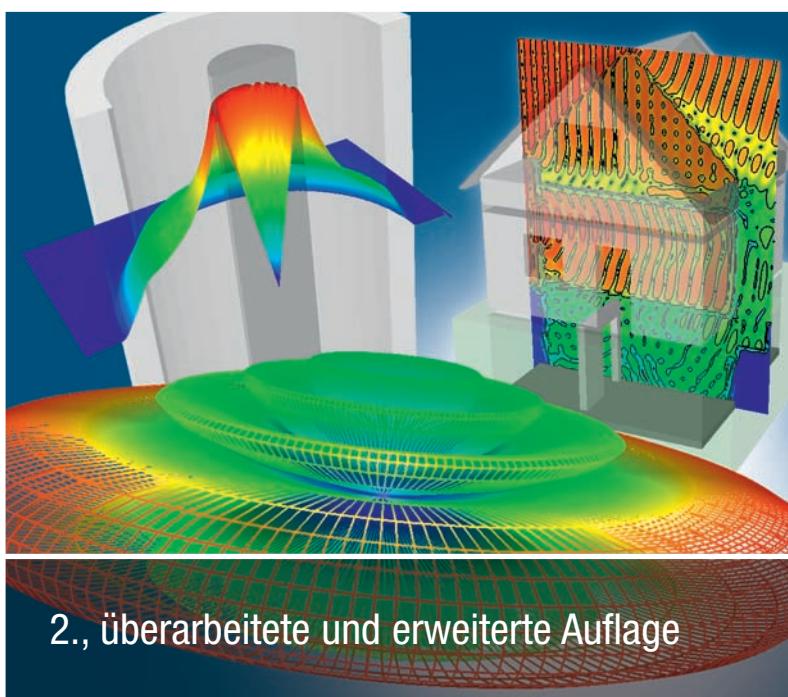


Frank Gustau

# Hochfrequenztechnik

Grundlagen der mobilen Kommunikationstechnik



HANSER

Gustrau  
**Hochfrequenztechnik**



**Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**

Lizenziert für aichriedler@sbg.at.

© 2013 Carl Hanser Fachbuchverlag. Alle Rechte vorbehalten. Keine unerlaubte Weitergabe oder Vervielfältigung.

Frank Gustrau

# Hochfrequenztechnik

Grundlagen der mobilen Kommunikationstechnik

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 208 Bildern, 58 Beispielen und 39 Übungsaufgaben



**Fachbuchverlag Leipzig**  
im Carl Hanser Verlag

**Autor:**

**Prof. Dr.-Ing. Frank Gustrau**

Fachhochschule Dortmund



Alle in diesem Buch enthaltenen Programme, Verfahren und elektronischen Schaltungen wurden nach bestem Wissen erstellt und mit Sorgfalt getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund ist das im vorliegenden Buch enthaltene Programm-Material mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieses Programm-Materials oder Teilen davon entsteht.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN: 978-3-446-43245-1

E-Book-ISBN: 978-3-446-43399-1

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2013 Carl Hanser Verlag München

Internet: <http://www.hanser-fachbuch.de>

Lektorat: Mirja Werner, M.A.

Herstellung: Dipl.-Ing. Franziska Kaufmann

Coverconcept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Coverrealisierung: Stephan Rönigk

Druck und Bindung: Friedrich Pustet KG, Regensburg

Printed in Germany

# Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch bietet Studierenden einen praxisnahen Einstieg in das Gebiet der Hochfrequenztechnik und der physikalischen Aspekte der Funkkommunikation. Drahtlose Techniken in den Bereichen Kommunikation (Datennetze, Mobiltelefon), Identifikation (RFID), Navigation (GPS) und Ortung (Radar) erfreuen sich zunehmender Verbreitung. Im Bereich der Funkanwendungen werden seit jeher vergleichsweise hohe Trägerfrequenzen verwendet, denn dies ermöglicht eine gute Ausnutzung des elektromagnetischen Spektrums und den Aufbau effizienterer Antennen. Kostengünstige Herstellungsprozesse und rechnergestützte Entwurfswerkzeuge erschließen der Funktechnik immer neue Anwendungsgebiete und höhere Bandbreiten.

Im Bereich der Schaltungstechnik führen die Verwendung höherer Datenraten in Schaltungen und die damit verbundenen hochfrequenten Signalanteile zu neuen Anforderungen beim Schaltungsentwurf. Leitungen bedürfen plötzlich einer eingehenden Betrachtung, Verkoppelungen zwischen benachbarten Komponenten treten deutlicher hervor und es kommt zu ungewollter Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen. Beim Entwurf haben verteilte Strukturen zunehmend Vorteile gegenüber den klassischen konzentrierten Bauelementen. Auch Digitaltechniker kommen somit mit den Begriffen „Leitungswellenwiderstand“ und „Antenne“ in Berührung.

Vielfältige Funkanwendungen und hochdatenreiche Kommunikation tauchen heute auch in technischen Produkten auf, die ehemals dem Maschinenbau zuzuordnen waren, wie zum Beispiel dem Automobil. Hochfrequenztechnik ist daher – in ihren Grundlagen – heute keine Spezialdisziplin mehr, sondern eine Basisdisziplin für alle Ingenieure der Fachrichtungen Elektro-, Informations- und Kommunikationstechnik sowie der angrenzenden Fachrichtungen Mechantronik und Fahrzeugelektronik.

Bei der gegebenen Breite des Faches Hochfrequenztechnik muss natürlich für die Darstellung in diesem Buch eine sinnvolle Beschränkung des Stoffes vorgenommen werden. Was die Hochfrequenztechnik zuallererst gegenüber der klassischen Elektrotechnik auszeichnet, ist der Umstand, dass die Abmessungen der Strukturen nicht mehr klein im Verhältnis zur Wellenlänge sind. Die damit einhergehenden Wellenausbreitungsvorgänge führen zu den typischen Hochfrequenzphänomenen. Dreh- und Angelpunkt des Buches sind daher die Wellenausbreitungsvorgänge, ihre Beschreibung, ihre Konsequenzen und ihre Nutzbarmachung in passiven Schaltungen und Antennenstrukturen.

Aktive elektronische Schaltungen und der gesamte Bereich der Hochfrequenzelektronik, wie der Entwurf von Verstärkern, Mischern und Oszillatoren, werden in diesem Buch weitestgehend ausgespart. Um dieses Themengebiet detailliert zu behandeln, müsste ein Zugang über die Grundlagen der Elektronik und Halbleiterbauteile gewählt werden.

Numerische Simulationen haben mittlerweile einen festen Platz im Entwicklungsprozess von HF-Komponenten und Antennen. Daher wurden zahlreiche Beispiele in diesem Buch mit Unterstützung moderner HF-Schaltungs- und Feldsimulatoren berechnet. Im Einzelnen wurden folgende Programmpakete eingesetzt:

## 6 Vorwort

---

- ADS (Advanced Design System) der Firma Agilent Technologies
- Empire der Firma IMST GmbH
- EMPro der Firma Agilent Technologies

Der Markt für diese Softwareprodukte entwickelt sich rasch, so dass dem Leser bei der Auswahl eines für ihn geeigneten Simulators eine eigene Recherche empfohlen wird. Am Ende jedes Kapitels befinden sich Übungsaufgaben. Die Lösungen stellt der Autor auf der folgenden Website zur Verfügung:

[http://www.fh-dortmund.de/gustrau\\_hochfrequenztechnik](http://www.fh-dortmund.de/gustrau_hochfrequenztechnik)

An dieser Stelle bedanke ich mich bei allen Kollegen und Studierenden, die durch ihre Anregungen – sei es durch ihre Fragen in Lehrveranstaltungen, sei es durch das Probelesen einzelner Kapitel – zu diesem Buch beigetragen haben. Meiner Familie, die mich über die Entstehungszeit dieses Buches unterstützt hat, gilt mein ganz besonderer Dank.

Dortmund, im Frühjahr 2011

Frank Gustrau

## Vorwort zur zweiten Auflage

Die freundliche Aufnahme dieses Lehrbuches durch die Leserschaft hat nun nach zwei Jahren eine zweite Auflage mit einigen fachlichen Erweiterungen möglich gemacht. Insbesondere in Kapitel 8 über Funkwellen wurde den Wellenausbreitungsmodellen ein größerer Raum gegebenen.

Der komplette Neusatz mit dem Satzsystem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X führt nun dazu, dass das Lehrbuch in einem neuen Layout erscheint. Im Zuge der Umgestaltung wurden zudem inhaltliche und graphische Überarbeitungen sowie Druckfehlerkorrekturen vorgenommen. Für die Rückmeldungen aus dem Kreise der Kollegen und Studierenden bin ich an dieser Stelle sehr dankbar.

Dortmund, im Frühjahr 2013

Frank Gustrau

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>15</b>
1.1	Hochfrequenzanwendungen .....	15
1.2	Frequenzbereiche .....	17
1.3	Hochfrequenztechnische Erscheinungen.....	18
1.3.1	Elektrisch kurze Leitungen .....	18
1.3.2	Leitungen mit einer Länge in der Größenordnung der Wellenlänge .....	20
1.3.3	Antennen und Abstrahlung elektromagnetischer Wellen .....	21
1.4	Ausblick auf die folgenden Kapitel .....	22
<b>2</b>	<b>Elektromagnetische Felder und Wellen .....</b>	<b>24</b>
2.1	Physikalische und mathematische Grundlagen.....	24
2.1.1	Elektrostatische Feldgrößen.....	24
2.1.1.1	Elektrische Feldstärke und Spannung.....	24
2.1.1.2	Polarisation und relative Dielektrizitätszahl .....	28
2.1.1.3	Verhalten bei Wechselstrom .....	29
2.1.1.4	Dielektrische Verschiebungsdichte .....	30
2.1.1.5	Elektrische Feldenergie und Kapazität .....	30
2.1.2	Stationäre elektrische Strömungsfelder und magnetische Felder .....	31
2.1.2.1	Stromdichte, Leistungsdichte und Widerstand .....	31
2.1.2.2	Magnetische Feldstärke und magnetisches Vektorpotential .....	33
2.1.2.3	Magnetische Feldenergie und Induktivität .....	35
2.1.2.4	Lorentz-Kraft .....	35
2.1.3	Vektoranalytische Operatoren .....	36
2.1.3.1	Divergenz .....	36
2.1.3.2	Rotation .....	36
2.2	Maxwellsche Gleichungen .....	37
2.2.1	Differentialform für allgemeine Zeitabhängigkeit .....	37
2.2.2	Differentialform für harmonische Zeitabhängigkeit.....	38
2.2.3	Integralform .....	39
2.2.4	Materialgleichungen .....	41
2.2.5	Verhalten an Materialgrenzen .....	43

**8 Inhalt**

---

2.3 Einteilung elektromagnetischer Feldprobleme .....	45
2.3.1 Statische Felder .....	45
2.3.2 Quasistatische Felder .....	45
2.3.3 Schnell veränderliche Felder .....	46
2.4 Skineffekt .....	46
2.5 Elektromagnetische Wellen .....	49
2.5.1 Wellengleichung und ebene Wellen .....	49
2.5.2 Polarisation .....	53
2.5.2.1 Lineare Polarisation .....	54
2.5.2.2 Zirkulare Polarisation .....	54
2.5.2.3 Elliptische Polarisation .....	54
2.5.3 Reflexion und Brechung an ebenen Grenzflächen .....	55
2.5.3.1 Senkrechter Einfall .....	56
2.5.3.2 Schräger Einfall .....	58
2.5.4 Kugelwellen .....	63
2.6 Zusammenfassung .....	64
2.7 Übungsaufgaben .....	65
<b>3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen .....</b>	<b>67</b>
3.1 Leitungstheorie .....	67
3.1.1 Ersatzschaltbild eines kurzen Leitungsstücks .....	67
3.1.2 Telegraphengleichung .....	69
3.1.3 Spannungs- und Stromwellen auf Leitungen .....	71
3.1.4 Einseitig abgeschlossene Leitung .....	74
3.1.5 Eingangsimpedanz einer abgeschlossenen Leitung .....	76
3.1.6 Verlustlose Leitungen .....	78
3.1.7 Leitungen mit geringen Verlusten .....	80
3.1.8 Verschiedene Leitungsabschlüsse einer verlustlosen Leitung .....	81
3.1.8.1 Angepasste Leitung .....	82
3.1.8.2 Kurzgeschlossene Leitung .....	83
3.1.8.3 Leerlaufende Leitung .....	85
3.1.8.4 Allgemeiner Abschluss .....	87
3.1.9 Verlustlose Leitungen als Impedanztransformatoren .....	88
3.1.9.1 Der $\lambda/4$ -Transformator .....	88
3.1.9.2 Der $\lambda/2$ -Transformator .....	88
3.1.10 Reflexionsfaktor einer verlustlosen Leitung .....	89
3.1.11 Smith-Chart-Diagramm .....	92
3.2 Zeitsignale auf Leitungen .....	97

---

3.2.1 Sprungförmige Signale .....	97
3.2.1.1 Angepasste Quelle und angepasster Abschluss .....	97
3.2.1.2 Angepasste Quelle und fehlangepasster (resistiver) Abschluss ....	99
3.2.1.3 Angepasste Quelle und fehlangepasster (reaktiver) Abschluss ....	101
3.2.1.4 Fehlanpassung an Quelle und Last .....	103
3.2.2 Rechteckförmige Signale .....	106
3.3 Augendiagramm .....	107
3.4 Zusammenfassung .....	110
3.5 Übungsaufgaben .....	111
<b>4 Wellenleiter .....</b>	<b>113</b>
4.1 Überblick über technisch bedeutsame Leitungstypen .....	113
4.2 Koaxialleitungen .....	115
4.2.1 Induktivitätsbelag und Leitungswellenwiderstand .....	116
4.2.2 Dämpfung bei schwachen Verlusten.....	118
4.2.2.1 Metallische Verluste .....	119
4.2.2.2 Dielektrische Verluste .....	119
4.2.3 Nutzbarer Frequenzbereich .....	120
4.2.4 Anwendungsgebiete.....	122
4.3 Mikrostreifenleitungen ( <i>Microstrip</i> ) .....	122
4.3.1 Wellenwiderstand und effektive Permittivitätszahl .....	123
4.3.2 Dispersion und nutzbarer Frequenzbereich .....	126
4.3.3 Anwendungsgebiete.....	127
4.4 Streifenleitung ( <i>Stripline</i> ) .....	127
4.4.1 Leitungswellenwiderstand .....	128
4.4.2 Nutzbarer Frequenzbereich .....	128
4.4.3 Anwendungsgebiete.....	129
4.5 Rechteckhohlleiter .....	129
4.5.1 Allgemeine Überlegungen.....	130
4.5.2 Die $H_{10}$ -Grundwelle.....	133
4.5.3 Höhere Wellentypen .....	136
4.5.4 Einsatzgebiete von Hohlleitern .....	137
4.5.5 Anregung von Hohlleiterwellen .....	138
4.5.6 Hohlraumresonatoren .....	139
4.6 Zweidrahtleitung .....	141
4.6.1 Leitungswellenwiderstand .....	142
4.6.2 Anwendungsgebiete.....	142
4.7 Dreileitersysteme .....	143

**10 Inhalt**

---

4.7.1 Gleich- und Gegentaktwellen .....	143
4.7.2 Leitungswellenwiderstände und Ausbreitungskonstanten .....	145
4.7.3 Leitungsabschluss .....	148
4.8 Übungsaufgaben .....	148
<b>5 Streuparameter.....</b>	<b>150</b>
5.1 Mehrtorgleichungen in Matrixform.....	150
5.2 Definition von Wellengrößen .....	151
5.3 Streuparameter und Leistung.....	153
5.4 Spezielle Eigenschaften von Schaltungen.....	156
5.4.1 Anpassung .....	156
5.4.2 Leistungsanpassung.....	157
5.4.3 Reziprozität (Übertragungssymmetrie) .....	158
5.4.4 Symmetrie .....	159
5.4.5 Verlustlosigkeit bei Passivität .....	159
5.4.6 Rückwirkungsfreiheit .....	160
5.4.7 Besondere Bedingungen bei Dreitoren .....	160
5.5 Berechnung von Streumatrizen .....	160
5.5.1 Reflexionsfaktoren.....	161
5.5.2 Transmissionsfaktoren .....	161
5.5.3 Umnormierung einer Streumatrix auf andere Torwiderstände .....	164
5.6 Signalflussmethode .....	165
5.7 Messung von Streuparametern .....	171
5.8 Übungsaufgaben .....	174
<b>6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen .....</b>	<b>177</b>
6.1 Ersatzschaltbilder konzentrierter Bauelemente.....	177
6.1.1 Widerstände .....	177
6.1.2 Kondensatoren.....	179
6.1.3 Spulen .....	181
6.2 Leitungsresonatoren .....	182
6.2.1 $\lambda/2$ -Resonator.....	183
6.2.2 $\lambda/4$ -Resonator.....	184
6.3 Anpassschaltungen.....	186
6.3.1 LC-Anpassnetzwerke .....	187
6.3.2 Anpassung mit Leitungen .....	189
6.3.2.1 $\lambda/4$ -Transformator.....	189
6.3.2.2 Stichleitung und <i>Butterfly-Stubs</i> .....	191

---

6.4	Filter .....	193
6.4.1	Klassischer LC-Filterentwurf mit Induktivitäten und Kapazitäten .....	193
6.4.2	Entwurf von Butterworth-Filtren.....	195
6.4.2.1	Filter mit Tiefpassverhalten .....	195
6.4.2.2	Filter mit Hochpassverhalten .....	198
6.4.2.3	Filter mit Bandpassverhalten .....	200
6.5	Leitungsfilter .....	202
6.5.1	Seitengekoppelte Filter ( <i>Edge-coupled-line-Filter</i> ) .....	203
6.5.2	Seitengekoppelte Filter ( <i>Hairpin-Filter</i> ) .....	207
6.5.3	<i>Stepped-impedance-Filter</i> .....	208
6.5.4	Metallisch geschirmte Filter (Gehäuseresonanzen) .....	209
6.5.5	Hohlleitungsfilter .....	210
6.6	Zirkulatoren .....	211
6.7	Leistungsteiler .....	213
6.7.1	Wilkinson-Leistungsteiler .....	213
6.7.2	Leistungsteiler mit ungleicher Leistungsaufteilung .....	215
6.8	Branchline-Koppler .....	216
6.8.1	Konventioneller 3-dB-Koppler .....	216
6.8.2	Ungleiche Leistungsaufteilung und Impedanztransformation .....	219
6.9	<i>Rat-Race</i> -Koppler.....	221
6.10	Richtkoppler .....	222
6.11	Symmetrierglieder.....	224
6.12	Elektronische Schaltungen .....	226
6.12.1	Mischer .....	228
6.12.2	Verstärker und Oszillatoren .....	230
6.13	Moderne HF-Entwurfswerkzeuge .....	232
6.13.1	HF-Schaltungssimulatoren.....	232
6.13.2	Elektromagnetische 3D-Feldsimulation .....	232
6.14	Übungsaufgaben .....	236

7	Antennen .....	238
7.1	Grundbegriffe und Kenngrößen .....	238
7.1.1	Antennen als Wellentypwandler .....	238
7.1.2	Nahfeld und Fernfeld .....	239
7.1.3	Isotroper Kugelstrahler .....	240
7.1.4	Kenngrößen für das Strahlungsfeld einer Antenne .....	241
7.1.5	Anpassung und Bandbreite .....	246
7.2	Praktische Antennenbauformen .....	247

**12 Inhalt**

---

7.3	Mathematische Behandlung des Hertzschen Dipols .....	250
7.4	Drahtantennen .....	254
7.4.1	Halbwellendipol .....	255
7.4.2	Monopol .....	257
7.4.3	Verkürzung von Monopolantennen.....	258
7.5	Planare Antennen .....	259
7.5.1	Rechteckige <i>Patch</i> -Antenne .....	260
7.5.1.1	Abstrahlung eines <i>Patch</i> -Elementes.....	260
7.5.1.2	Resonanzfrequenz und <i>Patch</i> -Abmessungen .....	261
7.5.1.3	Speisung von <i>Patch</i> -Antennen .....	262
7.5.2	<i>Patch</i> -Antennen mit zirkularer Polarisation .....	265
7.5.3	Planare Dipol- und <i>Inverted-F</i> -Antennen.....	267
7.6	Gruppenantennen.....	269
7.6.1	Einzelcharakteristik und Gruppenfaktor .....	269
7.6.2	Phasengesteuerte Antennen .....	273
7.6.3	Strahlformung.....	278
7.7	Weitere Antennenkonzepte .....	281
7.8	Übungsaufgaben .....	281
<b>8</b>	<b>Funkwellen .....</b>	<b>283</b>
8.1	Wellenausbreitungseffekte .....	283
8.1.1	Reflexion und Brechung .....	283
8.1.2	Absorption.....	284
8.1.3	Beugung.....	284
8.1.4	Streuung .....	286
8.1.5	Doppler-Effekt .....	287
8.2	Einfache Ausbreitungsszenarien .....	290
8.2.1	Freiraumausbreitung.....	290
8.2.2	Dämpfung von Wellen in Luft.....	292
8.2.3	Ausbreitung über ebenem Grund (Zweiwegeausbreitung) .....	293
8.2.4	Richtfunkstrecken .....	296
8.2.5	Geschichtete Medien.....	298
8.3	Komplexe Umgebungen .....	300
8.3.1	Mehrwegeausbreitung .....	300
8.3.2	<i>Clutter Factor</i> -Modell .....	303
8.3.3	Okumura-Hata-Model .....	304
8.3.4	Physikalische Modelle und numerische Feldberechnung .....	305
8.4	Übungsaufgaben .....	308

---

<b>A Anhang .....</b>	<b>309</b>
A.1 Koordinatensysteme .....	309
A.1.1 Kartesisches Koordinatensystem .....	310
A.1.2 Zylinderkoordinatensystem .....	311
A.1.3 Kugelkoordinatensystem .....	312
A.2 Logarithmische Darstellung von technischen Größen .....	313
A.2.1 Dimensionslose Größen .....	313
A.2.2 Relative und absolute Pegel .....	314
A.2.3 Pegelplan einer Übertragungsstrecke .....	314
<b>Formelzeichen und Abkürzungen .....</b>	<b>316</b>
<b>Literatur .....</b>	<b>319</b>
<b>Index .....</b>	<b>323</b>

Lizenziert für aichriedler@sbg.at.

© 2013 Carl Hanser Fachbuchverlag. Alle Rechte vorbehalten. Keine unerlaubte Weitergabe oder Vervielfältigung.

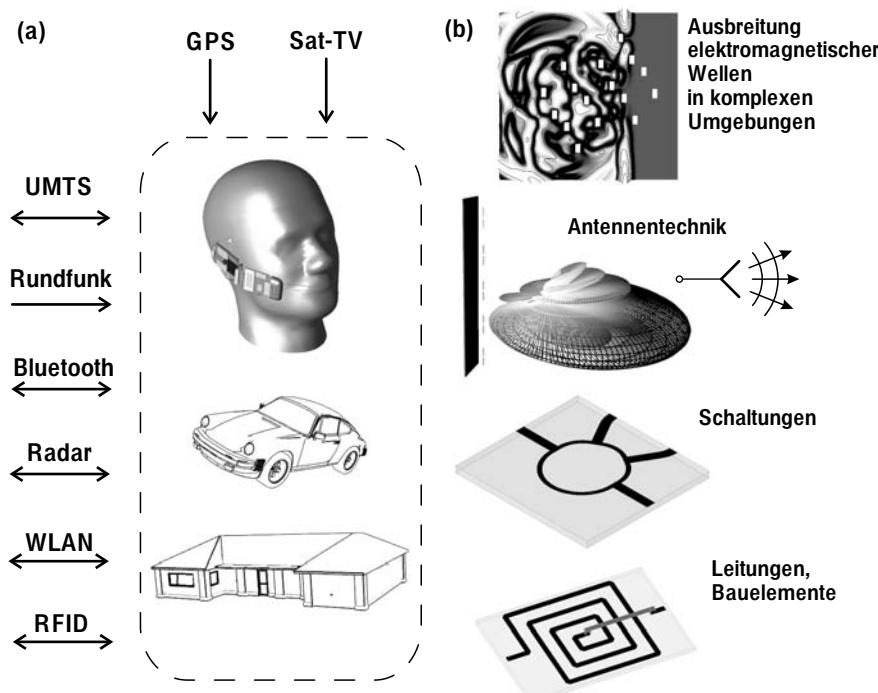
# 1

## Einleitung

Dieses Kapitel gibt eine Übersicht über typische hochfrequenztechnische Anwendungen und Frequenzbereiche. Mit einem anschaulichen Beispiel zur Wellenausbreitung wollen wir uns motivieren, tiefer in die Theorie einzusteigen. Ein Überblick über die nachfolgenden Kapitel bietet dem Leser Orientierung und gestattet den gezielten Zugriff auf ausgewählte Themen.

### ■ 1.1 Hochfrequenzanwendungen

Jeder Einzelne nutzt heute bereits – ob unterwegs oder in seinem Zuhause – eine zunehmende Zahl von drahtlosen Techniken. Bild 1.1a zeigt eine Auswahl an drahtlosen Kommunikations-, Navigations-, Identifikations- und Ortungsanwendungen.



**Bild 1.1** (a) Auswahl an Funkanwendungen und (b) HF-Komponenten und Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

## 16 1 Einleitung

---

Die Zahl der technischen Anwendungen, die hochfrequenztechnische Komponenten und Systeme beinhalten, steigt auch in Zukunft weiter an. Um diese Systeme zu entwickeln und in Betrieb zu nehmen, bedarf es unter anderem breiter Kenntnisse des Hochfrequenzverhaltens von konzentrierten Bauelementen (z.B. Kapazitäten, Induktivitäten, Leitungen, Transistoren), Schaltungen (z.B. Filter, Verstärker), Komponenten (z.B. Antennen) und physikalischer Aspekte wie der elektromagnetischen Wellenausbreitung (Bild 1.1b).

In Tabelle 1.1 sind einige typische Hochfrequenz-Funkanwendungen und ihre zugehörigen Frequenzbereiche aufgeführt. Die Anwendungen umfassen unter anderem terrestrische Sprach- und Datenkommunikation, also den zellulären Mobilfunk und die drahtlosen Kommunikationsnetze, sowie Verteildienste (Rundfunk) sowohl terrestrisch als auch satellitenbasiert. Drahtlose Identifikationssysteme (RFID) in ISM-Bändern freuen sich im Warenverkehr und der Logistik wachsender Bedeutung. Im Bereich der Navigation ist das GPS-System hervorzuheben, welches mittlerweile in einer Vielzahl von Kraftfahrzeugen verbaut oder in mobilen Geräten im Einsatz ist. Im Automobilbereich finden wir als weitere HF-Anwendung Radarsysteme für die Umfeldüberwachung und als Sensoren für Fahrerassistenzsysteme.

**Tabelle 1.1** Typische drahtlose Hochfrequenzanwendungen und zugehörige Frequenzbereiche

Anwendung	Bezeichnung	Frequenzbereich
<b>Zellulärer Mobilfunk</b>		
GSM 900	<i>Global System for Mobile Communication</i>	880...960 MHz
GSM 1800	<i>Global System for Mobile Communication</i>	1,71...1,88 GHz
UMTS	<i>Universal Mobile Telecommunications System</i>	1,92...2,17 GHz
Tetra	Bündelfunk	440...470 MHz
<b>Drahtlose Netze</b>		
WLAN	<i>Wireless Local Area Network</i>	2,45 GHz; 5 GHz
Bluetooth	Nahbereichsfunk	2,45 GHz
<b>Navigation</b>		
GPS	<i>Global Positioning System</i>	1,2 GHz; 1,575 GHz
<b>Identifikation</b>		
RFID	<i>Radiofrequency Identification</i>	13,56 MHz; 868 MHz; 2,45 GHz; 5 GHz
<b>Rundfunk</b>		
UKW-Rundfunk	Analoge Radiosender	87,5...108 MHz
DAB	<i>Digital Audio Broadcasting</i>	223...230 MHz
DVB-T	<i>Digital Video Broadcasting – Terrestrial</i>	470...790 MHz
Satelliten-Rundfunk	Satelliten-Rundfunk	10,7...12,75 GHz
<b>Radar</b>		
Nahbereichsradar	Nahbereichsradar	24 GHz
ACC	<i>Adaptive Cruise Control, Abstandserfassung</i>	77 GHz

Die Hochfrequenztechnik spielt jedoch nicht nur bei der Funktechnik eine entscheidende Rolle. Durch die zunehmende Verarbeitungsgeschwindigkeit digitaler Schaltungen tauchen hierbei hochfrequente Signalanteile auf, die dazu führen, dass auch bei schnellen Digitalschaltungen Entwurfsmethoden der Hochfrequenztechnik Anwendung finden.

Zudem reicht die Hochfrequenztechnik durch ihre Nähe zur elektromagnetischen Feldtheorie in den Bereich der Elektromagnetischen Verträglichkeit<sup>1</sup> hinein. Einerseits basieren die hier angewendeten Messaufbauten mit Leitungen und Antennen direkt auf hochfrequenztechnischen Prinzipien. Andererseits ist bei Nichteinhalten von vorgegebenen Grenzwerten im Allgemeinen eine detaillierte Analyse der Situation erforderlich, um Verbesserungen zu erzielen. Die Einbeziehung Hochfrequenztechnischer Aspekte bringt dabei oft wesentliche Fortschritte.

## ■ 1.2 Frequenzbereiche

Das elektromagnetische Spektrum ist zur besseren Orientierung in eine Reihe von Frequenzbändern unterteilt. In verschiedenen Staaten und geographischen Regionen haben sich dabei unterschiedliche Bezeichnungssysteme herausgebildet, die oft parallel verwendet werden. In Tabelle 1.2 ist eine übliche Einteilung des Frequenzbereiches von 3 kHz bis 300 GHz in acht Frequenzdekaden nach einer Empfehlung der ITU (International Telecommunications Union) [ITU00] dargestellt.

**Tabelle 1.2** Bezeichnung der Frequenzbereiche nach ITU

Frequenzbereich	Internationale Bezeichnung	Deutsche Bezeichnung
3...30 kHz	VLF – <i>Very Low Frequency</i>	Längstwellen
30...300 kHz	LF – <i>Low Frequency</i>	Langwellen
300 kHz...3 MHz	MF – <i>Medium Frequency</i>	Mittelwellen
3...30 MHz	HF – <i>High Frequency</i>	Kurzwellen
30...300 MHz	VHF – <i>Very High Frequency</i>	Ultrakurzwellen
300 MHz...3 GHz	UHF – <i>Ultra High Frequency</i>	Dezimeterwellen
3...30 GHz	SHF – <i>Super High Frequency</i>	Zentimeterwellen
30...300 GHz	EHF – <i>Extremely High Frequency</i>	Millimeterwellen

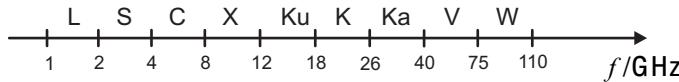
Bild 1.2a zeigt die nach dem IEEE-Standard [IEEE02] (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*) gebräuchliche Bezeichnung unterschiedlicher Frequenzbänder. Diese Bandbezeichnungen sind ebenfalls sehr weit verbreitet. Nachteilig ist die unsystematische Verwendung der Buchstaben und Bandbereiche, die in der historisch gewachsenen Struktur begründet liegt. Eine neuere Bezeichnungsweise gemäß NATO zeigt Bild 1.2b [Macn10] [Mein92]. Die Zuordnung der Buchstaben zu den Frequenzbereichen erfolgt hier systematischer. Allerdings sind die Bandbezeichnungen in der Praxis weniger gebräuchlich.

Der störungsfreie Betrieb von Funkanwendungen wird durch eine Reihe rechtlicher und regulatorischer Maßnahmen sichergestellt. Die knappe Ressource „Frequenz“ wird dabei minutiös aufgeteilt und verwaltet [CEPT09] [Bund08]. Bestimmte Frequenzbereiche des Spektrums sind für spezielle kommerzielle, medizinische und wissenschaftliche Anwendungen vorgesehen.

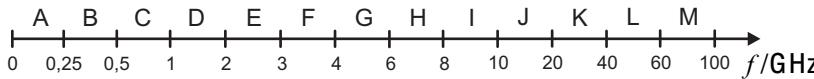
<sup>1</sup> Die Elektromagnetische Verträglichkeit (EMV) beschäftigt sich mit der Vermeidung von störenden Wechselwirkungen zwischen technischen Geräten. Hierbei werden Geräte in standardisierten Messaufbauten auf die Einhaltung von technischen Grenzwerten hin überprüft.

**18**    **1 Einleitung**

(a) Bezeichnung der Frequenzbänder nach IEEE Std. 521-2002



(b) Bezeichnung der Frequenzbänder nach NATO

**Bild 1.2** Bezeichnung der Frequenzbänder nach (a) IEEE und (b) NATO

Die für diese speziellen Anwendungen reservierten Frequenzbereiche werden als ISM-Frequenzbänder (*Industrial, Scientific, Medical*) bezeichnet und sind in Tabelle 1.3 aufgelistet [Bund03]. Ein typisches Beispiel ist der Frequenzbereich bei 2,45 GHz, in dem Mikrowellenherde und WLAN-Systeme betrieben werden. Ein weiteres Frequenzband für nichtöffentliche Funkanwendungen geringer Reichweite für Datenübertragungen liegt im Bereich von 863 bis 870 MHz [Bund05].

**Tabelle 1.3** Ausgewählte ISM-Frequenzbänder

13,553...13,567 MHz	26,957...27,283 MHz
40,66...40,70 MHz	433,05...434,79 MHz
2,4...2,5 GHz	5,725...5,875 GHz
24...24,25 GHz	61...61,5 GHz
122...123 GHz	244...246 GHz

## ■ 1.3 Hochfrequenztechnische Erscheinungen

Wir wollen nun anhand zweier Beispiele das Augenmerk auf das Thema Hochfrequenztechnik richten. Die Beispiele behandeln Spannungswellen auf Leitungen und Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch Antennen.

### 1.3.1 Elektrisch kurze Leitungen

Zunächst einmal betrachten wir die einfache Schaltung in Bild 1.3a aus einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand, die über eine (elektrisch kurze) Leitung mit einem Lastwiderstand verbunden ist. Elektrisch kurz bedeutet hierbei, dass die Leitungslänge  $\ell$  deutlich kürzer als die Wellenlänge  $\lambda$  ist.

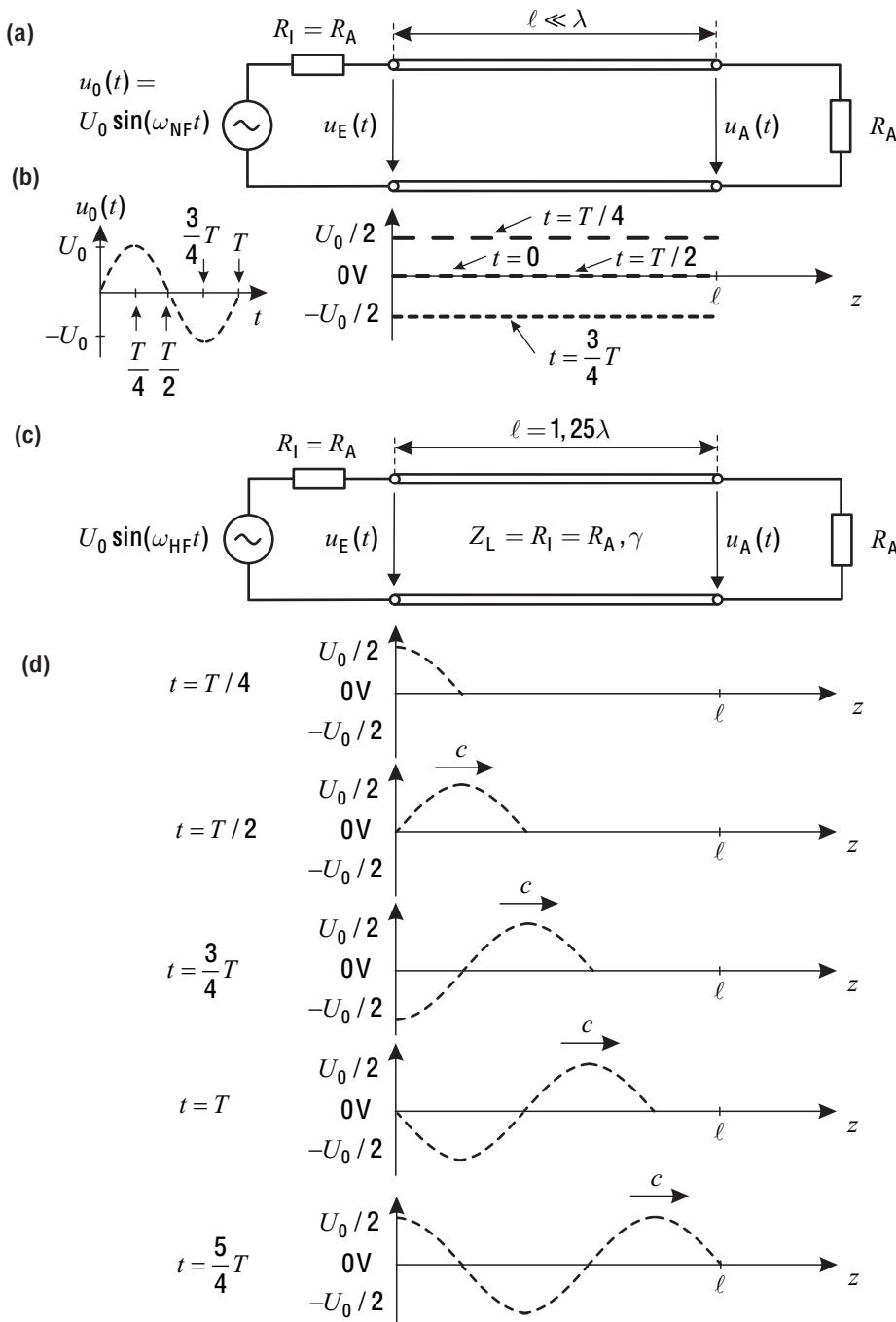


Bild 1.3 Schaltung aus Quelle mit Innenwiderstand, Leitung und Lastwiderstand: elektrisch kurze Leitung in (a) und (b) bzw. elektrisch lange Leitung mit Wellenausbreitung in (c) und (d)

**20**    1 Einleitung

Elektromagnetische Wellen breiten sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  aus.

$$c_0 = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.1)$$

Die entsprechende (Freiraum-)Wellenlänge bei einer Frequenz  $f$  ist dann:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \gg \ell \quad . \quad (1.2)$$

Bei einer Frequenz von  $f = 1 \text{ MHz}$  ergibt sich zum Beispiel eine Wellenlänge  $\lambda \approx 300 \text{ m}$ . Eine Leitung von  $\ell = 1 \text{ m}$  wäre dann als *elektrisch kurz* anzusehen. Wir nehmen weiterhin der Einfachheit<sup>2</sup> halber an, dass der Lastwiderstand  $R_A$  dem Innenwiderstand  $R_I$  der Quelle entspricht.

Alternativ können wir das Kriterium *elektrisch kurz* auch über die Laufzeit  $\tau$  eines Signals über die Leitung formulieren. Breiten sich elektromagnetische Vorgänge mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  aus, so benötigt ein Signal vom Anfang bis zum Ende der Leitung die Laufzeit  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\text{Strecke}}{\text{Geschwindigkeit}} = \frac{\ell}{c_0} \ll T = \frac{1}{f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c_0}{f} \gg \ell \quad . \quad (1.3)$$

Ist diese Zeit  $\tau$  deutlich kleiner als die Periodendauer  $T$  des Sinussignals, so stellen sich die Signaländerungen der Quelle mit *kaum merklicher Verzögerung* zwischen Anfang und Ende der Leitung ein. Es ist also quasi so, als trete die Signaländerung der Quelle überall gleichzeitig ein. Signallaufzeiten längs der Leitung sind vernachlässigbar. Durch kurzes Umstellen erkennen wir, dass die beiden Formulierungen  $\ell \ll \lambda$  und  $\tau \ll T$  gleichwertig sind.

Eine Leitung ist *elektrisch kurz*, falls die Leitungslänge  $\ell$  deutlich kleiner als die Wellenlänge  $\lambda$  bei der Betriebsfrequenz ist bzw. falls die Laufzeit  $\tau$  eines sinusförmigen Signals längs der Leitung deutlich kleiner als die Periodendauer  $T$  ist.

Wir betrachten nun Bild 1.3b und variieren die Spannung der idealen Spannungsquelle sinusförmig. Die Sinusschwingung beginnt mit dem Wert Null, erreicht nach einem Viertel der Periodendauer  $T$  den maximalen Wert, durchläuft nach der halben Periode erneut die Null und erreicht über einen minimalen Wert nach der Periodendauer  $T$  den Ausgangswert der Spannung. Dieser Durchlauf wiederholt sich periodisch. Aufgrund der vernachlässigbaren Signalverzögerung  $\tau$  ist das *Signal längs der Leitung räumlich konstant*. Es entspricht aufgrund der Spannungsteilerregel gerade dem halben Wert der Spannungsquelle. Eingangs- und Ausgangsspannung sind – zumindest näherungsweise – identisch:

$$u_E(t) \approx u_A(t) \quad (1.4)$$

### 1.3.2 Leitungen mit einer Länge in der Größenordnung der Wellenlänge ( $\ell > \lambda/10$ )

Als Nächstes erhöhen wir die Frequenz deutlich, so dass die Leitung nicht mehr elektrisch kurz ist. Wir wählen eine Frequenz  $f$ , so dass die Leitungslänge gerade eben fünf Viertel ei-

<sup>2</sup> Die genauen Zusammenhänge werden wir uns in Kapitel 3 über die Leitungstheorie erarbeiten.

ner Wellenlänge entspricht:  $\ell = 5/4 \cdot \lambda = 1,25\lambda$  (Bild 1.3c). Nun kann die Laufzeit  $\tau$  gegenüber der Periodendauer  $T$  nicht mehr vernachlässigt werden. Bei Anregung mit einem sinusförmigen Signal erkennen wir die Wellenausbreitung längs der Leitung in Bild 1.3d. In dem Beispiel vergehen fünf Viertel Periodendauern, bevor das Signal das Ende der Leitung erreicht.

Ist die Leitung *nicht* als elektrisch kurz anzusehen, so zeigt die Spannung längs der Leitung keinen konstanten Verlauf mehr: In dem sinusförmigen Verlauf ist die Wellennatur der elektromagnetischen Erscheinungen zu erkennen. In der Praxis geht man davon aus, dass ab einer Leitungslänge von einem Zehntel der Wellenlänge ( $\ell > \lambda/10$ ) der Effekt bedeutsam ist.

Auch die Spannung  $u_A(t)$  am Leitungsabschluss ist nun nicht mehr gleich der Spannung  $u_E(t)$  am Leitungseingang. Zwischen beiden besteht eine Phasendifferenz.

Zur vollständigen Beschreibung der Leitungseinflüsse muss die Leitung neben ihrer Länge  $\ell$  durch zwei *zusätzliche Kenngrößen* charakterisiert werden: den *Leitungswellenwiderstand*  $Z_L$  und die *Ausbreitungskonstante*  $\gamma$ . Im Schaltungsentwurf sind diese mit zu berücksichtigen!

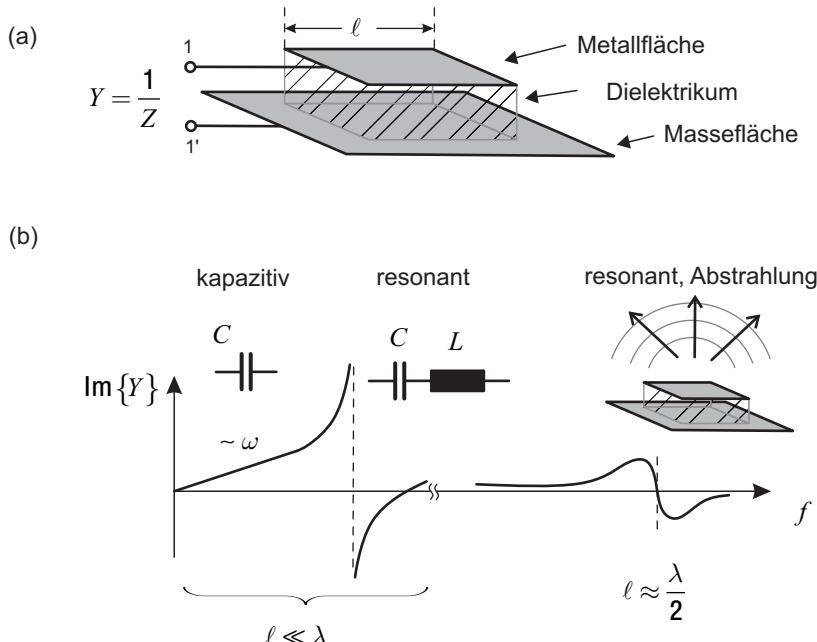
Sind Leitungswellenwiderstand und Abschlusswiderstand nicht gleich, so wird die Welle am Ende reflektiert. Diese Zusammenhänge werden im Kapitel 3 über die Leitungstheorie detailliert untersucht.

### 1.3.3 Antennen und Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Als zweites Beispiel betrachten wir die geometrisch einfache Struktur in Bild 1.4a. Eine metallische Fläche mit der Kantenlänge befindet sich über einer durchgehenden metallischen Massefläche. Zwischen den beiden Metallflächen befindet sich ein Isolationsmaterial (Dielektrikum). Über zwei Klemmen kann die Struktur gespeist werden.

Der geometrische Aufbau erinnert an einen Plattenkondensator, bei dem sich ein homogenes elektrisches Feld zwischen den Metallflächen einstellt. Folglich erhalten wir bei niedrigen Frequenzen (die geometrischen Ablassungen liegen deutlich unter der Wellenlänge) auch ein kapazitives Verhalten mit  $Y = j\omega C$  (Bild 1.4b). Mit steigender Frequenz ergibt sich aufgrund der unvermeidbaren Induktivität der Zuleitungen ein resonantes Verhalten. Bei hohen Frequenzen taucht nun ein gänzlich neues Phänomen auf. Wenn die Kantenlänge in den Bereich einer halben Wellenlänge kommt, wird elektromagnetische Energie abgestrahlt. Die Struktur kann nun als Antenne (*Patch-Antenne*) verwendet werden (siehe Kapitel 7).

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass bei hohen Frequenzen auch geometrisch einfache Formen ein komplexes Verhalten zeigen können. Das Verhalten ist mit den Methoden der Netzwerktheorie nicht mehr zu beschreiben und erfordert den Einsatz feldtheoretischer Verfahren.



**Bild 1.4** Verhalten einer geometrisch einfachen Struktur bei niedrigen und hohen Frequenzen: (a) Aufbau der Struktur und (b) Frequenzverlauf des Imaginärteiles der Admittanz

## ■ 1.4 Ausblick auf die folgenden Kapitel

Um die Funktionsweise passiver hochfrequenter Schaltungen zu verstehen, benötigen wir zunächst grundlegende Kenntnisse im Bereich der elektromagnetischen Feldtheorie und Wellenausbreitung. Die hier auftauchende mathematisch aufwendige Beschreibung in Kapitel 2 sollte den Leser jedoch nicht entmutigen, da sie in erster Linie bei Herleitungen benötigt wird. In der praktischen Arbeit werden die mathematischen Aufgaben von modernen Schaltungs- und Feldsimulationsprogrammen übernommen. Dennoch ist es für Ingenieure wichtig, auch diese mathematischen Grundlagen des Faches zu kennen. Nicht zuletzt, um gegenüber kommerziellen Softwareprodukten nicht die Integrität zu verlieren und die Ergebnisse in Hinsicht auf ihre Plausibilität und Genauigkeit bewerten zu können.

Leitungen sind ein wesentliches, allgegenwärtiges Element in hochfrequenten Schaltungen. Die im Grunde sehr einfache Leitungsstruktur zeigt erstaunlich vielfältige Einsatzmöglichkeiten. In Kapitel 3 werden wir Spannungs- und Stromwellen auf Leitungen kennenlernen und hieraus die zur Beschreibung notwendigen Zusammenhänge detailliert herleiten. Die elementaren Rechnungen lassen sich leicht nachvollziehen und legen so ein sicheres Fundament für den immer wiederkehrenden Umgang mit Leitungen. Eine kurze Einführung in das Smith-Diagramm als klassisches Darstellungsinstrument in der Hochfrequenztechnik schließt die Betrachtung harmonischer Signale ab. Im letzten Abschnitt des Kapitels übertragen wir die gefundenen Zusammenhänge auf sprung- und impulsförmige Signale, um das Verhalten von Leitungen auch bei den in der Digitaltechnik wichtigen Signalen zu verstehen.

Nach den grundsätzlichen Leitungsbeschreibungen im vorhergehenden Kapitel werden in Kapitel 4 nun technisch bedeutsame Leitungstypen wie die Koaxialleitung, planare Leitungsstrukturen und Hohlleiter vorgestellt. Das Kapitel geht auch auf die für den Schaltungsentwurf von Filtern und Kopplern wichtigen Begriffe der Gleich- und Gegentaktsignale auf Leitungen ein.

In Kapitel 5 führen wir die Streuparameter ein, die verwendet werden, um das Verhalten hochfrequenter Schaltungen zu beschreiben. Streuparameter verknüpfen Wellengrößen an den Toren von HF-Schaltungen. Das Kapitel schließt somit inhaltlich an die Wellenphänomene aus Kapitel 3 an. Der Vorteil von Streuparametern gegenüber den bei niedrigen Frequenzen bevorzugten Impedanz- und Admittanzmatrizen liegt in der auch bei hohen Frequenzen direkten Messbarkeit mit Netzwerkanalysatoren.

Mit dem bisher erworbenen grundlegenden Wissen sind wir in der Lage, den Beschreibungen von wichtigen passiven Grundschaltungen der Hochfrequenztechnik in Kapitel 6 zu folgen. Wir werden sehen, dass sich durch überlegte Verschaltung von Leitungen Anpassschaltungen, Filter, Leistungsteiler und Koppler realisieren lassen. Von ausführlichen Herleitungen werden wir hier weitgehend absehen, vielmehr lernen wir wichtige Entwurfsverfahren kennen und vollziehen diese an Beispielen und Aufgaben nach. Die Beispiele werden mit Schaltungs- und Feldsimulatoren durchgespielt und zeigen so den Umgang mit diesen Werkzeugen auf. In einem kurzen Abschnitt geben wir einen Ausblick auf elektronische Schaltungen, die in diesem Buch nicht im Detail behandelt werden, deren grundlegende Begriffe aber kurz dargestellt werden.

Bei der Funkkommunikation stellt die Antenne das Verbindungsglied zwischen den Wellen im freien Raum und den leitungsgebundenen Signalen in einer Schaltung dar. In Kapitel 7 werden zunächst technisch wichtige Kenngrößen zur Beschreibung des Strahlungsverhaltens von Antennen vorgestellt. Zur Vertiefung des physikalischen Verständnisses leiten wir die Funktionsweise eines elementaren Antennenelements mathematisch detailliert her. Im Folgenden werden wichtige praktische Einzel- und Gruppenstrukturen von Antennen betrachtet und Entwurfsregeln an Beispielen erprobt.

Bei der Bewertung von Funksystemen reicht es nicht aus, die Antennen isoliert zu betrachten, vielmehr müssen auch die Einflüsse der Umgebung auf die Wellenausbreitung zwischen den Antennen mit einbezogen werden. Kapitel 8 stellt dazu grundlegende Ausbreitungsphänomene und deren Auswirkung auf die Nachrichtenübertragung vor. Das Buch schließt mit einem kurzen Ausblick auf empirische und physikalische Modelle für die Funkfeldämpfung.

# 2

## Elektromagnetische Felder und Wellen

In diesem Kapitel werden zunächst die elektromagnetischen Feldgrößen vorgestellt, wie sie für den statischen – also zeitunabhängigen – Fall definiert sind. Es wird der Zusammenhang zwischen den Feldgrößen und den Netzwerkgrößen wie Strom und Spannung verdeutlicht. Die Maxwellschen Gleichungen in Verbindung mit den Stetigkeitsbedingungen dienen dann der vollständigen Beschreibung des elektromagnetischen Verhaltens für zeit- und ortsvariante Feldgrößen. Schließlich werden einige wichtige Lösungen der Maxwellschen Gleichungen besprochen, die in nachfolgenden Kapiteln für das Verständnis der hochfrequenztechnischen Eigenschaften notwendig sind.

Detaillierte Darstellungen zum Thema der elektromagnetischen Feldtheorie sind in gut verständlicher Form unter anderem in folgenden Büchern zu finden: [Bala89] [Blum88] [Flei08] [Ida07] [Kark12] [Krau99] [Leuc95] [Schw02].

### ■ 2.1 Physikalische und mathematische Grundlagen

Im Folgenden rekapitulieren wir grundlegende feldtheoretische und mathematische Zusammenhänge, um eine erste anschauliche Vorstellung des elektrischen und magnetischen Feldes zu gewinnen.

#### 2.1.1 Elektrostatische Feldgrößen

Wir beginnen mit den elektrischen Feldgrößen für den zeitunabhängigen (statischen) Fall und erklären die Bedeutung der Netzwerkgrößen Spannung und Kapazität.

##### 2.1.1.1 Elektrische Feldstärke und Spannung

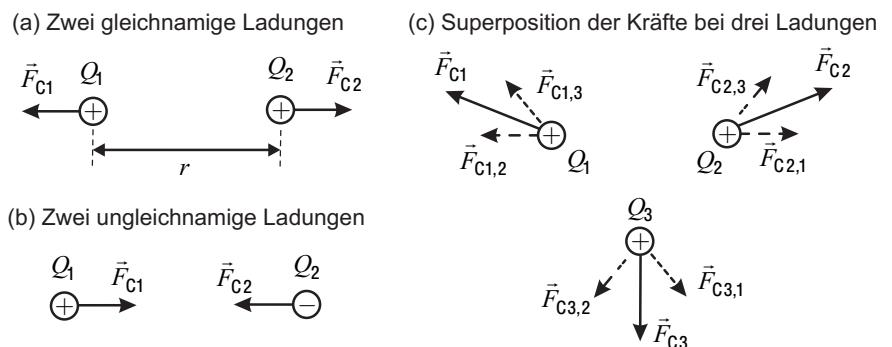
Historisch hat man schon früh die Bedeutung von elektrischen *Ladungen* erkannt und festgestellt, dass sich Ladungen durch ihre Kraftwirkungen aufeinander auszeichnen. Man unterscheidet *positive* und *negative* Ladungen, wobei sich gleichnamige Ladungen abstoßen und ungleichnamige Ladungen anziehen.

Der Betrag der *Coulomb-Kraft*  $\vec{F}_C$  zwischen zwei Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$ , die sich im Abstand  $r$  zueinander befinden, kann mit nachfolgender Gleichung berechnet werden.

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

Die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$  besitzt den Wert  $8,854 \cdot 10^{-12}$  As/(Vm). Die Richtung der Kraft ergibt sich auf einer gedachten Verbindungsgeraden zwischen den Punktladungen, wobei die Kräfte bei ungleichnamigen Ladungen aufeinander zu zeigen und bei gleichnamigen Ladungen voneinander weg zeigen (Bild 2.1). Falls mehr als zwei Ladungen vorhanden sind, so können paarweise die Kräfte ermittelt und nach dem *Superpositionsprinzip* vektoriell überlagert werden.

Ladungen sind naturgemäß gequantelt und kommen nur in ganzzahligen Vielfachen der *Elementarladung*  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C vor. Diese Quantelung spielt aber makroskopisch – also bei Vorhandensein einer ausreichend großen Anzahl von Ladungsträgern – keine Rolle, so dass wir im Folgenden von einer kontinuierlichen Ladungsmenge ausgehen wollen.



**Bild 2.1** Coulomb-Kraft zwischen (a) zwei gleichnamigen Ladungen, (b) zwei ungleichnamigen Ladungen und (c) drei Ladungen

Bei den bislang betrachteten Ladungen handelte es sich um Punktladungen, bei denen die Ladungsmenge in einem singulären Raumpunkt angenommen wird. Bei kontinuierlich im Raum verteilten Ladungen verwendet man zur Beschreibung die *Raumladungsdichte*  $\rho$  (Einheit  $[\rho] = \text{C/m}^3$ ). Die Gesamtladung  $Q$  erhalten wir dann durch die Integration über das ladungserfüllte Volumen  $V$ .

$$Q = \iiint_V \rho \, dV \quad (2.2)$$

Im Folgenden wollen wir uns vom Begriff der Kraft lösen, indem wir eine neue physikalische Größe einführen. Hierzu beziehen wir die auf die Ladung  $Q_2$  wirkende Kraft auf die Ladung  $Q_2$  selbst. Wir erhalten damit die *elektrische Feldstärke*  $\vec{E}_1$  der Ladung  $Q_1$  am Ort der Ladung  $Q_2$ .

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_2}{Q_2} \quad (2.3)$$

Die elektrische Feldstärke gibt also die Richtung der Kraftwirkung auf eine Probeladung  $Q_2$  an, die sich in der Nähe einer Ladung  $Q_1$  befindet. Obgleich hier rechentechnisch nur eine Quo-

## 26 2 Elektromagnetische Felder und Wellen

tientenbildung vorgenommen und damit eine von  $Q_2$  unabhängige Größe geschaffen wird, bedeutet die neue Größe doch mehr als die Normierung einer Kraft.

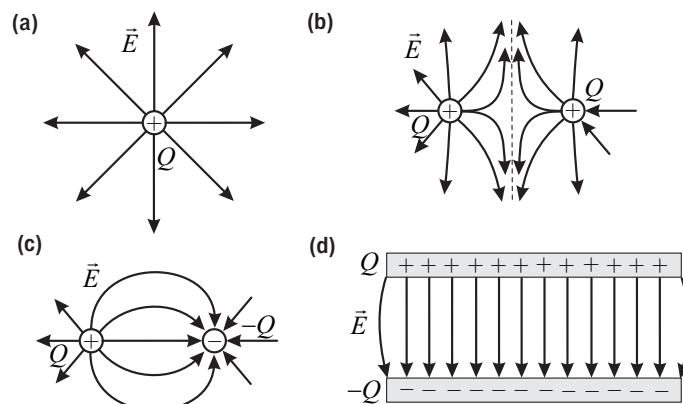
Mathematisch wird die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  nun als ein *Vektorfeld* interpretiert, welches jedem Raumpunkt einen Vektor zuweist. Das elektrische Feld  $\vec{E}_1$  einer Punktladung  $Q_1$  im Ursprung ist damit in Kugelkoordinaten durch folgende Gleichung gegeben:

$$\vec{E}_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r . \quad (2.4)$$

Ein solches Vektorfeld kann durch sogenannte *Feldlinienbilder* anschaulich dargestellt werden. Bild 2.2 zeigt Feldlinienbilder unterschiedlicher Ladungsverteilungen. Den Feldlinienbildern kann so anschaulich die Richtung und der Betrag entnommen werden: Die vektorielle Größe  $\vec{E}$  ist dabei immer tangential zu den Feldlinien gerichtet und die Liniendichte deutet die Amplitude der Feldstärke an.

Wenn man sich den Verlauf der Feldlinien und damit die Richtung der Kraftwirkung auf eine positive Ladung in den Bildern ansieht, so fällt auf, dass diese immer von den positiven Ladungen weg- und zu den negativen Ladungen hinführen. Man könnte auch sagen, dass die positiven Ladungen die *Quellen* des elektrostatischen Feldes darstellen (hier entspringen die Feldlinien) und dass die negativen Ladungen die *Senken* sind (hier enden die elektrischen Feldlinien).

Die Feldlinien des elektrostatischen Vektorfeldes besitzen Anfang und Ende. Ein Vektorfeld, welches Quellen entspringt und in Senken endet, bezeichnet man als *Quellenfeld*.



**Bild 2.2** Elektrische Feldlinienbilder (a) einer positiven Punktladung, (b) zwischen zwei gleichnamigen Ladungen, (c) zwischen zwei ungleichnamigen Ladungen und (d) in einer Plattenkondensatoranordnung

Bewegen wir eine Ladung  $Q_2$  nun im Feld einer anderen Ladung  $Q_1$ , so geschieht diese Bewegung unter Einfluss einer Kraft. Die Physik lehrt uns, dass hierbei *Arbeit* verrichtet wird. Für den Fall der Verschiebung einer Ladung vom Punkt  $\vec{r}_A$  zum Punkt  $\vec{r}_B$  kann die Arbeit  $W_{\vec{r}_A \vec{r}_B}$

berechnet werden.

$$W_{\vec{r}_A \vec{r}_B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} Q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = Q_2 \underbrace{\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}}_U = Q_2 U \quad (2.5)$$

Zwischen der Kraft  $\vec{F}$  und dem Wegelement  $d\vec{s}$  steht das Skalarprodukt, so dass also stets nur der Kraftanteil in Richtung des Weges einen Betrag liefert. In Gleichung (2.5) kann die konstante Ladung  $Q_2$  aus dem Integral gezogen werden. Das Linienintegral über die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  liefert nun ein neue Größe, die wir als *Spannung* bezeichnen.

$$U = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.6)$$

Die Spannung  $U$  ist im Gegensatz zur elektrischen Feldstärke  $E$  nun *keine Feldgröße* mehr, denn die Spannung ist zwischen zwei Punkten definiert und nicht an einem Raumpunkt.

Man kann nun aber in Anlehnung an den Spannungsbegriff eine neue Feldgröße definieren, indem man den Anfang oder den Endpunkt des Integrals als Referenzpunkt festhält. Dies führt zum Begriff des *elektrostatischen Potentials*  $\phi$ . Das Potential  $\phi$  bezogen auf den Referenzpunkt  $\vec{r}_0$  können wir mit Hilfe folgender Gleichung schreiben:

$$\phi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad . \quad (2.7)$$

Das Potential stellt ein *Skalarfeld* dar, welches jedem Raumtpunkt einen skalaren Potentialwert zuweist. Das Potential entspricht damit im statischen Fall der Spannung zwischen dem Raumtpunkt  $\vec{r}$  und dem Referenzpunkt  $\vec{r}_0$ .

Im Falle elektrostatischer Felder kann aus dem Potential auch direkt wieder die elektrische Feldstärke berechnet werden. Wir benötigen hierzu die Gradientfunktion, die sich in kartesischen Koordinaten als Summe der partiellen Ableitungen in die drei kartesischen Raumrichtungen schreiben lässt.

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi = -\nabla \phi = -\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \quad (2.8)$$

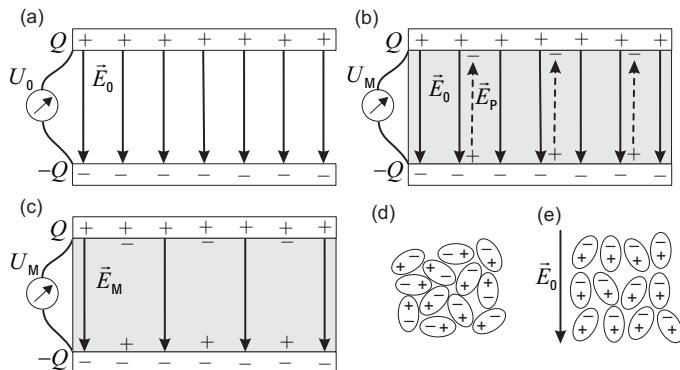
Die Gradientfunktion überführt das skalare Potentialfeld in ein Vektorfeld. Der Vektor  $\text{grad } \phi$  zeigt dabei in jedem Raumtpunkt stets in Richtung der *größten Änderung* der Potentialfunktion. Aus diesem Grund wird die Gradientfunktion auch bei Optimierungen verwendet, denn auf der Suche nach einem Maximum oder Minimum kommt man in der Regel am schnellsten voran, wenn man sich in einer Richtung bewegt, in der die Funktionswerte sich besonders rasch ändern.

Interessant ist, dass es im Prinzip unendlich viele Potentialfelder gibt, da der Referenzpunkt  $\vec{r}_0$  frei wählbar ist. Eine Verschiebung des Referenzpunktes verändert den Integrationsweg und

hebt damit das Potential insgesamt an oder senkt es ab, führt also zu einer additiven Konstante. Das elektrische Feld  $E$  ist aber durch seine Kraftwirkung auf Ladungen definiert und damit stets *eindeutig*. Bei der Gradientfunktion werden nun nur Ableitungen des Potentials berücksichtigt, so dass eine additive Konstante der Potentialfunktion keine Auswirkung auf das elektrische Feld hat.

### 2.1.1.2 Polarisation und relative Dielektrizitätszahl

Bislang haben wir Ladungen im freien Raum betrachtet. Kommen nun aber Materialien hinzu, so ist die Definition von weiteren Größen hilfreich. Betrachten wir gemäß Bild 2.3 einen Plattenkondensator, auf dessen Platten sich die Ladungsmengen  $+Q$  und  $-Q$  befinden. Zwischen den Platten bildet sich ein homogenes Feld  $\vec{E}_0$  aus und wir können die Spannung  $U_0$  bestimmen. Bringen wir nun ein Isoliermaterial (*Dielektrikum*) in den Plattenkondensator, so zeigt sich, dass die neue Spannung  $U_M$  zwischen den Platten gegenüber dem Fall ohne Isoliermaterial verringert ist. Entfernen wir das Isoliermaterial wieder, so erhalten wir den ursprünglichen Spannungswert  $U_0$ .



**Bild 2.3** Zum Verständnis der Polarisation: (a) luftgefüllter Plattenkondensator, (b) dielektrisches Material im Kondensator (Entstehung eines Gegenfeldes), (c) dielektrisches Material im Kondensator (reduziertes elektrisches Feld im Dielektrikum), (d) ungeordnete polarisierte Teilchen im Dielektrikum, (e) Orientierung von polarisierten Teilchen im Dielektrikum unter Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes

Durch Einbringen des Isolators in das elektrische Feld  $\vec{E}_0$  richten sich polarisierte Teilchen im Isolator in Feldrichtung aus. Im Inneren gleichen sich nun die Ladungen jeweils wieder aus, an der Oberfläche ergibt sich jedoch eine resultierende Oberflächenladungsverteilung. Durch diese Ladungen entsteht im Dielektrikum ein Gegenfeld  $\vec{E}_P$ , welches sich dem ursprünglichen äußeren Feld  $\vec{E}_0$  überlagert. In der Materie herrscht ein abgeschwächtes Feld  $\vec{E}_M$  mit dem Betrag

$$E_M = E_0 - E_P \quad . \quad (2.9)$$

Dieser Effekt wird als *Polarisation*<sup>1</sup> bezeichnet. Wie gut Materie polarisierbar ist, hängt vom inneren Aufbau ab. Wie oben gezeigt tritt der Effekt bei polarer Materie auf. Er ist aber ebenso bei

<sup>1</sup> Unglücklicherweise wird im Zusammenhang mit Wellen ebenfalls der Begriff der Polarisation verwendet, der dort aber eine ganz andere Bedeutung hat. Wir kommen darauf in Abschnitt 2.5.2 zu sprechen.

nicht polarer Materie zu beobachten. Stellen wir uns hierzu ein einfaches Modell eines unpolaren Teilchens vor: Um einen positiven Kern liegt eine negativ geladene Elektronenhülle; die Ladungsschwerpunkte von Kern und Elektronenhülle fallen dabei zusammen. Nach außen ist das Teilchen elektrisch neutral. Unter dem Einfluss eines äußeren Feldes wirken auf Kern und Hülle Kräfte in unterschiedlicher Richtung. Die Ladungsschwerpunkte wandern auseinander und es entsteht ein polares Teilchen.

Kehren wir zu unserem Gedankenexperiment mit dem Plattenkondensator zurück: Bei Füllung des Plattenkondensators mit dem Dielektrikum ergibt sich durch die verringerte elektrische Feldstärke im Medium eine reduzierte Spannung  $U_M$ .

$$U_M = \int_{\text{Untere Platte}}^{\text{Obere Platte}} \vec{E}_M \cdot d\vec{s} < U_0 \quad (2.10)$$

Am Anfang des Abschnitts haben wir beschlossen, uns nur mit makroskopischen Vorgängen zu beschäftigen, bei denen wir die Quantelung der Ladung vernachlässigen können und kontinuierliche Verteilungen annehmen. Nun beruht die vorherige anschauliche Interpretation der Polarisation auf mikroskopischen Überlegungen und ist somit wenig hilfreich, wenn wir den Effekt der Polarisation mathematisch einfach in einem makroskopischen Modell beschreiben wollen. Zur makroskopischen Beschreibung verwenden wir den Quotient zwischen der ursprünglichen und der reduzierten Spannung bzw. Feldstärke. Diese neue Größe nennen wir *relative Dielektrizitätszahl*  $\epsilon_r$ .

$$\epsilon_r = \frac{E_0}{E_M} = \frac{U_0}{U_M} \quad (2.11)$$

Die relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  ist eine dimensionslose Größe und für die meisten Materialien durch einen einfachen Zahlenwert größer als eins gegeben. Tabelle 2.1 listet relative Dielektrizitätszahlen für technisch wichtige Dielektrika auf. In der Praxis werden für erste Abschätzungen in der Regel idealisierte Materialien verwendet. Statt Luft und anderer Gase kann häufig vereinfachend von *Vakuum* ausgegangen werden.

Falls Materialien eine Richtungsabhängigkeit (Anisotropie) aufweisen, also für unterschiedliche Orientierungen des Materials im Kondensator sich verschiedene Spannungen ergeben, so erfolgt die Beschreibung durch eine Matrix.

### 2.1.1.3 Verhalten bei Wechselstrom

Bei Anlegen einer Wechselspannung wechselt die Ladung auf den Kondensatorplatten periodisch die Polarität. Die polaren Teilchen im Dielektrikum ändern daher mit der gleichen Frequenz ihre Lage. Mit zunehmender Frequenz sind die Teilchen nicht mehr in der Lage dem anregenden Feld  $\vec{E}_0$  zu folgen. Die *feldschwächende Wirkung* lässt nach, so dass mit steigender Frequenz im Allgemeinen mit einem Abfall der relativen Dielektrizitätszahl gerechnet werden muss. Die Frequenzabhängigkeit  $\epsilon_r(\omega)$  vieler Materialien kann mathematisch über sog. Debye-Beziehungen beschrieben werden [Detl12]. Hierin gehen die statische relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r(0)$  sowie der Grenzwert für sehr hohe Frequenzen  $\epsilon_r(\infty)$  und eine materialcharakteristische Größe (Relaxationszeit) ein. Viele technisch wichtige Dielektrika haben in ihrem technisch wichtigen Einsatzfrequenzbereich allerdings hinreichend konstante relative Dielektrizitätszahlen (Tabelle 2.1).

**Tabelle 2.1** Relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  und Verlustfaktor  $\tan \delta_\epsilon$  wichtiger Isolationsmaterialien (im jeweils technisch wichtigen Frequenzbereich)

Material	$\epsilon_r$	$\tan \delta_\epsilon$	Typische Anwendung
Vakuum, Luft	1	0	Füllmaterial bei Präzisionsleitungen
Polytetrafluorethylen (PTFE)	2,1	0,0002	Kabelisolationsmaterial
Glasfaserverstärktes Epoxidharz (FR4)	3,6 – 4,5	0,02	Substrat für planare Schaltungen
Aluminiumoxid ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	9,8	0,0001	Substrat für planare Schaltungen
Galliumarsenid (GaAs)	12,5	0,0004	Integrierte Mikrowellenschaltungen

Mit der bei Wechselspannungen auftretenden ständigen Umorientierung der Teilchen sind Wärmeverluste verbunden. Wie wir in Abschnitt 2.2.4 noch genauer sehen werden, wird dieser Verlustmechanismus mit einem Verlustfaktor  $\tan \delta_\epsilon$  beschrieben. Aus Gründen der besseren Auffindbarkeit in späteren Kapiteln sind die Verlustfaktoren bereits an dieser Stelle in Tabelle 2.1 mit enthalten [Mein92] [Goli08].

### 2.1.1.4 Dielektrische Verschiebungsdichte

Eine weitere wichtige Größe zur Beschreibung elektrischer Felder ist die *dielektrische Verschiebungsdichte*  $\vec{D}$ , die auch als *elektrische Flussdichte* bezeichnet wird. Bei ihrer Definition taucht die zuvor eingeführte relative Dielektrizitätszahl wieder auf.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.12)$$

Im Vakuum ist die dielektrische Verschiebungsdichte bis auf den konstanten Faktor  $\epsilon_0$  gleich der elektrischen Feldstärke. In Materialien kommt noch die relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  hinzu. Die Bedeutung dieser neuen Größe  $\vec{D}$  erkennen wir, wenn wir einen Blick auf die physikalische Einheit werfen:  $[D] = \text{C/m}^2$ , also Ladung pro Fläche.

Integriert man die dielektrische Verschiebungsdichte über eine Fläche  $A$ , so erhält man den durch diese Fläche gehenden *elektrischen Fluss*  $\Psi_e$ .

$$\Psi_e = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (2.13)$$

Auf die Bedeutung des elektrischen Flusses kommen wir noch einmal im Zusammenhang mit den Maxwellschen Gleichungen in Integralform (Abschnitt 2.2.3) zurück. Dort erhalten wir auch eine anschauliche Interpretation.

### 2.1.1.5 Elektrische Feldenergie und Kapazität

Unter Verwendung der bislang eingeführten elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  und der dielektrischen Verschiebungsdichte  $\vec{D}$  können wir jedem Raumpunkt eine *elektrische Energiedichte*  $w_e$  zuweisen. Ist das felderfüllte Medium linear (d.h. die Materialgröße  $\epsilon_r$  ist für große wie kleine Werte der elektrischen Feldstärke  $E$  gleich) und isotrop (d.h. richtungsunabhängig), so gilt:

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2 \quad . \quad (2.14)$$

Die Gesamtenergie  $W_e$  in einem Volumen  $V$  kann durch Integration über dieses Volumen bestimmt werden.

$$W_e = \iiint_V w_e d\nu = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} d\nu = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2 d\nu \quad (2.15)$$

Die gespeicherte elektrische Energie ist in der Netzwerktheorie von besonderer Bedeutung, da sie eng mit dem Begriff der *Kapazität* verknüpft ist. Betrachten wir einen Plattenkondensator mit der Kapazität  $C$  und der Spannung  $U$  zwischen den Platten, so besteht der folgende Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldenergie im felderfüllten Bereich des Kondensators und der Kapazität:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2 d\nu = \frac{1}{2} C U^2 \quad . \quad (2.16)$$

Ein Kondensator speichert elektrische Energie. Die Kapazität  $C$  ist – bei gegebener Spannung  $U$  – ein Maß für die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie.

Die Kapazität ist eine wichtige Größe, wenn es darum geht, die Fähigkeit der Ladungsspeicherung auszudrücken.

$$C = \frac{Q}{U} \quad (2.17)$$

Für einen mit einem Dielektrikum ( $\epsilon_r$ ) gefüllten Plattenkondensator mit der Plattenfläche  $A$  und dem Plattenabstand  $d$  gilt näherungsweise der einfache Zusammenhang:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (\text{Plattenkondensator}). \quad (2.18)$$

## 2.1.2 Stationäre elektrische Strömungsfelder und magnetische Felder

Wir erweitern unsere Betrachtung auf bewegte Ladungen und gelangen so zu magnetischen Feldgrößen. Auch hier beschränken wir uns zunächst auf den zeitunabhängigen (stationären) Fall und erklären die Bedeutung der Netzwerkgrößen Stromstärke, Widerstand und Induktivität.

### 2.1.2.1 Stromdichte, Leistungsdichte und Widerstand

In den bisherigen Abschnitten haben wir ruhende Ladungen und die von ihnen erzeugten elektrischen Quellenfelder eingeführt. Nun untersuchen wir Ladungen, die ihre Lage im Raum ändern; wir werden sehen, dass es dann zur Entstehung von magnetischen Feldern kommt. Zunächst aber müssen wir wichtige Begriffe einführen, die die Bewegung von Ladungen beschreiben. Die *Stromstärke*  $I$  gibt die Ladungsmenge  $\Delta Q$  an, die in einem Zeitintervall  $\Delta t$  durch eine Querschnittsfläche  $A$  fließt.

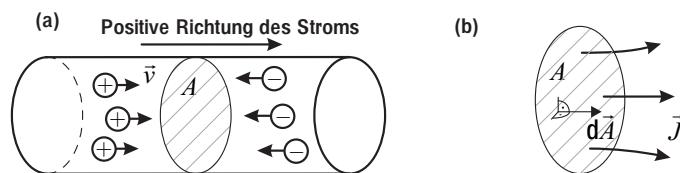
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (2.19)$$

## 32 2 Elektromagnetische Felder und Wellen

Die Stromstärke  $I$  ist dabei eine integrale Größe (es wird über eine Fläche integriert), die auch vorzeichenbehaftet ist. Die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger gibt die positive Richtung der Stromstärke an. In einem elektrischen Leiter sind die negativ geladenen Elektronen frei beweglich, so dass sich die positive Richtung des Stromes hier entgegen der Bewegungsrichtung der Elektronen ergibt. Es können auch gleichzeitig positive und negative Ladungsträger zum Strom beitragen. Die Anteile addieren sich dann (Bild 2.4a).

Wollen wir die räumliche Verteilung des Stromflusses durch eine Feldgröße erfassen, so bietet sich die *elektrische Stromdichte*  $\vec{J}$  an. Die Stromdichte  $\vec{J}$  ist eine vektorielle Feldgröße, die die Bewegung der Ladungsträger im Raum beschreibt.

Die Stromdichte  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$  ist eine *lokale Größe* (Vektorfeld) im Gegensatz zur Stromstärke  $I$ , die eine *integrale* Größe ist und immer in Beziehung zu einer Bezugsfläche  $A$  steht (Bild 2.4b).



**Bild 2.4** Stromstärke (a) beschrieben durch die Bewegung von Ladungsträgern und (b) in Abhängigkeit der elektrischen Stromdichte

Durch Integration der Stromdichte  $\vec{J}$  über eine Fläche  $A$  erhält man die Stromstärke  $I$ .

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2.20)$$

Im leitfähigen Material ist die Stromdichte über die elektrische Leitfähigkeit mit der elektrischen Feldstärke verknüpft. Fließt durch einen idealen Leiter ( $\sigma \rightarrow \infty$  S/m) ein Strom, so muss die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  verschwinden, damit die Stromdichte  $\vec{J}$  *endlich* bleibt.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.21)$$

Bei endlicher Leitfähigkeit  $\sigma$  ergibt sich die Leistungsdichte  $p$  in jedem Raumpunkt als Produkt der elektrischen Stromdichte und der elektrischen Feldstärke.

$$p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma |\vec{E}|^2 \quad (2.22)$$

Die in einem stromdurchflossenen Volumen  $V$  umgesetzte Verlustleistung  $P$  erhalten wir durch Integration über das Volumen.

$$P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (2.23)$$

Aus der Schaltungstheorie ist bekannt, dass in einem *Widerstand*  $R$  Verlustleistung umgesetzt wird.

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \quad (2.24)$$

Mit Hilfe von Leistung und Strom können wir die aus der Netzwerktheorie wichtige Größe des ohmschen Widerstandes  $R$  mit den feldtheoretischen Größen  $\vec{E}$  und  $\vec{J}$  verknüpfen.

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{I^2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, d\nu \quad (2.25)$$

Für einen zylindrischen Leiter mit der Querschnittsfläche  $A$ , der Länge  $\ell$  und der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  ergibt sich im Gleichstromfall<sup>2</sup> der folgende Widerstand.

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} \quad (2.26)$$

Leitfähigkeitswerte  $\sigma$  für einige in der Hochfrequenztechnik wichtige metallische Leiter sind in Tabelle 2.2 zusammengestellt [Mein92].

**Tabelle 2.2** Elektrische Leitfähigkeit wichtiger elektrischer Leiter

Material	$\sigma / 10^7$ S/m	Typische Anwendung
Idealer Leiter (PEC)	$\infty$	Nicht realisierbar; Idealisiertes Modell für sehr gute Leiter
Kupfer (Cu)	5,7	Standardleitermaterial für Leitungen und Schaltungen
Silber (Ag)	6,1	Leitermaterial
Gold (Au)	4,1	Bonddrähte in Mikrowellenschaltungen
Aluminium (Al)	3,5	Leitermaterial

Die Leitfähigkeitswerte sind temperaturabhängig, die Werte gelten bei Raumtemperatur. Für gute Leiter (Kupfer, Gold, Silber, Aluminium) wird für einfache Abschätzungen oft zunächst von einem *idealen elektrischen Leiter* ausgegangen (Englisch: PEC = *Perfect Electric Conductor*).

### 2.1.2.2 Magnetische Feldstärke und magnetisches Vektorpotential

In der Natur existieren Objekte aus magnetischen Materialien, die sich – je nach Orientierung zueinander – anziehen bzw. abstoßen. Man kann sich die Kraftwirkung solcher (Permanent-) Magnete aufeinander veranschaulichen, indem man einem Magneten zwei Pole (Nordpol und Südpol) zuordnet und sich magnetische Feldlinien vorstellt, die aus dem Nordpol austreten und im Südpol wieder in den Magneten eintreten (Bild 2.5a).

Zerbricht man einen Magneten, so stellt man fest, dass die Bruchstücke selbst wieder Nord- und Südpol besitzen. Es gibt keine isolierten Nord- bzw. Südpole. Dies drückt sich auch darin aus, dass magnetische Feldlinien immer geschlossen sind.

Magnetische Feldlinien sind stets geschlossen. Die Feldlinien besitzen keinen Anfang und kein Ende. Das magnetische Feld ist daher ein *Wirbelfeld*.

<sup>2</sup> Die Formel setzt voraus, dass die wandernden Ladungsträger sich gleichmäßig über die Querschnittsfläche verteilen, d.h. die Stromdichte konstant ist. Bei hohen Frequenzen ist dies aber nicht der Fall. In Abschnitt 2.4 lernen wir die Skintiefe als wichtige Größe zur Beschreibung kennen.

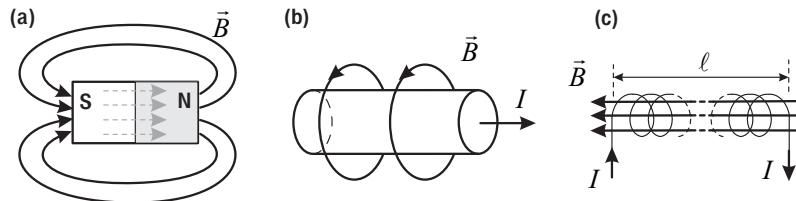
Wichtige Größen zur Beschreibung magnetischer Felder sind die *magnetische Feldstärke*  $\vec{H}$  und die *magnetische Flussdichte*  $\vec{B}$  (auch *magnetische Induktion*). Die Größen sind über folgende Beziehung miteinander verbunden:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.27)$$

Hierbei sind  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/(Am) die *Permeabilitätskonstante* und  $\mu_r$  die *relative Permeabilitätszahl*, die die Magnetisierbarkeit der Materie beschreibt.

Im Rahmen dieses Buches wollen wir uns nicht mit Permanentmagneten beschäftigen, sondern allein mit technisch erzeugten magnetischen Feldern. Man stellt fest, dass magnetische Felder in der Nähe von Strömen auftreten. Ströme – also bewegte Ladungen – sind die Ursachen von magnetischen Feldern. Dies gilt übrigens auch für Permanentmagnete: Hier sind es Kreisströme auf atomarer Ebene.

Als einfaches Beispiel, auf das wir später detaillierter zurückkommen wollen, betrachten wir einen langen stromdurchflossenen Linienleiter. Dieser ist von kreisförmigen magnetischen Feldlinien umgeben (Bild 2.5b). Die Richtung des magnetischen Feldes ergibt sich durch die Rechte-Hand-Regel: Wird der Linienleiter mit der rechten Hand umgriffen und zeigt der Daumen dabei in Richtung des Stromes, so geben die anderen Finger den Umlaufsinn des magnetischen Feldes an.



**Bild 2.5** Magnetische Feldstärke (a) in der Umgebung eines Permanentmagneten, (b) um einen stromdurchflossenen Leiter und (c) im Innern einer langgestreckten Zylinderspule

Im Falle des elektrostatischen Feldes hatten wir eine skalare Potentialfunktion  $\phi$  kennengelernt, aus der sich mittels Gradientbildung die räumliche Verteilung der elektrischen Feldstärke berechnen lies. Hier können wir ebenfalls eine Potentialfunktion, das *magnetische Vektorpotential*  $\vec{A}$ , einführen. Hierbei handelt es sich um eine vektorielle Funktion, die keine unmittelbar anschauliche Bedeutung besitzt, jedoch als Hilfsgröße beim Lösen von mathematischen Feldproblemen vorteilhaft ist. Wir werden diesen Zusammenhang in Kapitel 7 bei der Berechnung von Antennenstrahlungsfeldern verwenden. Die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  kann aus der Hilfsgröße  $\vec{A}$  durch Rotation berechnet werden. Auf die anschauliche Interpretation der Rotation gehen wir in Abschnitt 2.1.3 ein.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.28)$$

Integriert man die magnetische Flussdichte über eine Fläche  $A$ , so erhält man den durch diese Fläche gehenden *magnetischen Fluss*  $\Psi_m$ .

$$\Psi_m = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.29)$$

Auf die Bedeutung des magnetischen Flusses kommen wir im Zusammenhang mit den Maxwell'schen Gleichungen in Integralform (Abschnitt 2.2.3) zurück.

### 2.1.2.3 Magnetische Feldenergie und Induktivität

Wie im Fall des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  können wir auch bei der Betrachtung magnetischer Felder jedem Raumpunkt eine magnetische Energiedichte zuweisen. Ist das felderfüllte Medium wie zuvor linear und isotrop, so gilt für die magnetische Energiedichte:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r |\vec{H}|^2 . \quad (2.30)$$

Die Gesamtenergie  $W_m$  in einem Volumen  $V$  gewinnen wir durch Integration über dieses Volumen.

$$W_m = \iiint_V w_m d\nu = \frac{1}{2} \iint_V \vec{B} \cdot \vec{H} d\nu = \frac{1}{2} \iint_V \mu_0 \mu_r |\vec{H}|^2 d\nu \quad (2.31)$$

Die gespeicherte magnetische Energie ist in der Netzwerktheorie von besonderer Bedeutung, da sie eng mit dem Begriff der Netzwerkgröße *Induktivität L* verknüpft ist.

$$W_m = \frac{1}{2} \iint_V \mu_0 \mu_r |\vec{H}|^2 d\nu = \frac{1}{2} L I^2 \quad (2.32)$$

Eine Spule ist ein elektrisches Bauteil, welches magnetische Energie speichert. Eine einfache Spule besteht aus einem zylindrisch aufgewickelten Leiter (Bild 2.5c) und wird vom Gleichstrom  $I$  durchflossen. Im Inneren der zylindrischen Spule überlagern sich die Feldlinien konstruktiv und erzeugen ein starkes magnetisches Feld.

Eine Spule speichert magnetische Energie. Die Induktivität  $L$  ist – bei gegebenem Strom  $I$  – ein Maß für die in der Spule gespeicherte magnetische Energie.

Für eine langgestreckte Zylinderspule mit der Windungszahl  $n$ , der Länge  $\ell$  und der Querschnittsfläche  $A$  (Bild 2.5c) gilt folgende Gleichung:

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 \frac{A}{\ell} \quad (\text{Induktivität einer langgestreckten Zylinderspule}). \quad (2.33)$$

### 2.1.2.4 Lorentz-Kraft

Unsere Betrachtungen über elektrische Felder sind am Anfang von Abschnitt 2.1 von den Kräften (*Coulomb-Kraft*) zwischen Ladungen ausgegangen. Diese Kraftwirkung haben wir zur Einführung des elektrischen Feldstärkebegriffes verwendet. Auch magnetische Felder  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  üben eine Kraftwirkung auf Ladungen  $Q$  aus, allerdings nur, falls sich diese mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegen, die nicht parallel zu den Feldlinien verläuft. Es gilt die *Lorentz-Kraft*  $\vec{F}_L$  nach folgender Gleichung.

$$\vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.34)$$

Falls statische elektrische und magnetische Felder gleichzeitig auftreten, so überlagern sich die Kräfte vektoriell und es gilt die Gesamtkraft  $\vec{F}_{\text{ges}}$  auf eine bewegte Ladung.

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_C + \vec{F}_L = Q \vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.35)$$

### 2.1.3 Vektoranalytische Operatoren

Zur anschaulichen Interpretation der im nächsten Abschnitt vorgestellten Maxwellschen Gleichungen benötigen wir noch die Kenntnis der vektoranalytischen Begriffe Rotation und Divergenz. Die Kenntnis der sonstigen mathematischen Elemente, wie Ableitungen, Integrale, Vektoren, wird an dieser Stelle vorausgesetzt und kann in der mathematischen Grundlagenliteratur (z.B. [Bron08]) nachgelesen werden.

#### 2.1.3.1 Divergenz

Die Divergenz ist eine Operation, die auf ein Vektorfeld  $\vec{V}(\vec{r})$  angewendet wird und als Ergebnis ein Skalarfeld  $S(\vec{r})$  liefert. Unter Verwendung kartesischer Koordinaten lässt sich die Divergenz folgendermaßen berechnen (die Berechnung in Zylinder- und Kugelkoordinatensystemen ist im Anhang A zu finden).

$$S = \operatorname{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.36)$$

Das Symbol  $\nabla$  stellt den Nabla-Operator dar. In kartesischen Koordinaten beschreibt der Differentialoperator folgende Rechenvorschrift:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z . \quad (2.37)$$

Anschaulich gibt die Divergenz die *Quellendichte* des Vektorfeldes  $\vec{V}$  im entsprechenden Raumpunkt an. Verschwindet die Divergenz in einem Raumpunkt  $\vec{r}_0$ , so liegt hier weder eine Quelle noch eine Senke des Vektorfeldes vor. In den Raumbereichen, in denen die Divergenz von null verschieden ist, liegen die Quellen und Senken (d.h. die *Ursachen*) des Vektorfeldes  $\vec{V}$ .

In Abschnitt 2.1.1 haben wir als Quellen und Senken des elektrostatischen Feldes die positiven und negativen Ladungen kennengelernt: Die Feldlinien entspringen den positiven Ladungen und enden in den negativen Ladungen. Wir erwarten also, dass die Divergenz in Raumpunkten, in denen sich Ladungen  $Q$  befinden oder eine Raumladungsdichte  $\rho$  vorhanden ist, von null verschieden ist.

#### 2.1.3.2 Rotation

Die Rotation ist eine Operation, die auf ein Vektorfeld  $\vec{V}(\vec{r})$  angewendet wird und als Ergebnis ein Vektorfeld  $\vec{W}(\vec{r})$  liefert. Unter Verwendung kartesischer Koordinaten lässt sich die Rotation folgendermaßen berechnen (die Berechnung in Zylinder- und Kugelkoordinatensystemen ist im Anhang A zu finden).

$$\vec{W} = \operatorname{rot} \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \vec{e}_x \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) - \vec{e}_y \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (2.38)$$

Anschaulich gibt die Rotation die *Wirbeldichte* des Vektorfeldes  $\vec{V}$  im entsprechenden Raumpunkt an. In den Raumbereichen, in denen die Rotation von null verschieden ist, liegen die *Ursachen* des Vektorfeldes  $\vec{V}$ .

In Abschnitt 2.1.2 haben wir gesehen, dass Stromdichteveerteilungen  $\vec{J}$  zu einem magnetischen Wirbelfeld  $\vec{H}$  führen. Die Feldlinien sind geschlossen und umlaufen die Stromdichte, die Ursache dieses Wirbelfeldes ist. Wir erwarten also, dass die Rotation in Raumpunkten, in denen sich Stromdichten befinden, von null verschieden ist.

Im elektrostatischen Fall haben wir es mit einem *reinen Quellenfeld* zu tun, d.h. es gibt Raumbereiche, in denen die Divergenz nicht verschwindet (hier liegen die Ursachen des Quellenfeldes, also die Ladungsverteilungen). Die Rotation verschwindet bei elektrostatischen Feldern hingegen im gesamten Raum.

## ■ 2.2 Maxwellsche Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen (MWG) liefern eine Beschreibung der makroskopischen elektromagnetischen Phänomene, also des Verhaltens von elektrischen und magnetischen Feldern und der Wechselwirkung mit der Materie. In diesen Gleichungen sind die auftretenden Feldgrößen Funktionen des Ortes  $\vec{r}$  und der Zeit  $t$ . Diese Feldgrößen müssen neben den Maxwell'schen Gleichungen noch Rand- und Anfangsbedingungen genügen, so dass sich insgesamt ein Anfangs-Randwert-Problem ergibt.

Die Maxwell'schen Gleichungen können in differentieller und in integraler Form angegeben werden. In den nachfolgenden beiden Abschnitten wollen wir uns die Gleichungen genauer ansehen und ihre anschauliche Bedeutung erfassen.

### 2.2.1 Differentialform für allgemeine Zeitabhängigkeit

Die erste Maxwell'sche Gleichung in Differentialform lautet:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1. \text{ Maxwell'sche Gleichung}). \quad (2.39)$$

Die Größe  $\vec{J}$  entspricht der Stromdichte in einem leitfähigen Material und wird daher auch als *Leitungsstromdichte*  $\vec{J}_L$  bezeichnet. Der Term  $\partial \vec{D} / \partial t$  hat die gleiche physikalische Einheit wie  $\vec{J}$ , ist aber nicht an leitfähige Raumbereiche gebunden. Der Ausdruck trägt die Bezeichnung *Verschiebungstromdichte*  $\vec{J}_V$  und wir werden noch sehen, dass er für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen fundamental ist. Die Summe aus Leitungs- und Verschiebungstromdichte wird als *wahre Stromdichte* bezeichnet.

$$\vec{J}_{\text{ges}} = \vec{J}_L + \vec{J}_V = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.40)$$

Die erste Maxwellsche Gleichung besagt anschaulich, dass die Gesamtstromdichte – bestehend aus Leitungs- und Verschiebungsstromdichte – ein magnetisches Wirbelfeld verursacht. (Die Gesamtstromdichte ist die Wirkeldichte der magnetischen Feldstärke.)

Die zweite Maxwellsche Gleichung in Differentialform lautet:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2. \text{ Maxwellsche Gleichung}). \quad (2.41)$$

Die zweite Maxwellsche Gleichung bedeutet, dass die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte ein elektrisches Wirbelfeld hervorruft. (Die negative zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte ist die Wirkeldichte der elektrischen Feldstärke.)

In Raumgebieten, in denen die Leitfähigkeit  $\sigma$  und damit auch die Leitungsstromdichte  $\vec{J}$  verschwinden, weisen die erste und zweite Maxwellsche Gleichung einen äquivalenten Aufbau auf: Auf der linken Seite der Gleichung steht der Rotationsoperator, auf der rechten Seite eine zeitliche Ableitung:

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} . \quad (2.42)$$

Die dritte Maxwellsche Gleichung in Differentialform lautet:

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (3. \text{ Maxwellsche Gleichung}). \quad (2.43)$$

Die dritte Maxwellsche Gleichung zeigt, dass die Raumladungsdichte die Ursache eines elektrischen Quellenfeldes ist. (Die Raumladungsdichte ist die Quellendichte der dielektrischen Verschiebungsdichte und damit des elektrischen Feldes.)

Die vierte Maxwellsche Gleichung in Differentialform lautet:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (4. \text{ Maxwellsche Gleichung}). \quad (2.44)$$

Die vierte Maxwellsche Gleichung bedeutet, dass es keine Ursachen für ein magnetisches Quellenfeld gibt. Damit ist das magnetische Feld immer quellenfrei und ein reines Wirbelfeld. (Die Quellendichte der magnetischen Flussdichte verschwindet.)

## 2.2.2 Differentialform für harmonische Zeitabhängigkeit

Aus der Wechselstromrechnung ist bekannt, dass für eine harmonische Zeitabhängigkeit der physikalischen Größen der Übergang auf eine komplexe Darstellung mathematische Vorteile

bietet. Reellwertige Zeitfunktionen, die von drei räumlichen Variablen  $x, y, z$  und einer zeitlichen Variable  $t$  abhängen, werden dabei ersetzt durch komplexwertige Funktionen (Phasoren), die nur noch von den Ortskoordinaten abhängen. Die Zeitabhängigkeit tritt nicht mehr explizit auf.

Bei der Analyse von elektrischen Netzwerken durch die Kirchhoffsschen Gesetze werden so Differentialgleichungen durch einfacher lösbar algebraische Gleichungen ersetzt. Die zeitliche Ableitung  $d/dt$  wird einfach durch den Faktor  $j\omega$  ersetzt. Exemplarisch notieren wir die Zusammenhänge für einen Kondensator:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (\text{Zeitfunktionen}) \quad \rightarrow \quad I = j\omega CU \quad (\text{Phasoren}). \quad (2.45)$$

Von den Phasoren führt der Weg zurück zur physikalischen, zeitabhängigen Größe, indem der Phasor mit dem Term  $e^{j\omega t}$  multipliziert und anschließend der Realteil gebildet wird.

$$u(t) = \operatorname{Re} \{ U e^{j\omega t} \} \quad (2.46)$$

Die Maxwellschen Gleichungen für zeitharmonische Vorgänge lauten damit:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (2.47)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (2.48)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2.49)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad . \quad (2.50)$$

Die bei der harmonischen Zeitabhängigkeit auftauchenden Feldgrößen sind nun *Phasoren*, also *komplexe* Amplitudenfaktoren. Wir werden sie in der Schreibweise nicht von den Zeitgrößen unterscheiden. Es ergibt sich immer aus dem Zusammenhang, ob die zeitliche Größe oder der Phasor betrachtet wird.

### 2.2.3 Integralform

Durch die Anwendung von Integralsätzen der Vektoranalysis können die Maxwellschen Gleichungen in ihre Integralform überführt werden. Wir wollen hier auf die Herleitung verzichten und uns nur die Resultate ansehen.

Die erste Maxwellsche Gleichung in Integralform wird auch als *Durchflutungsgesetz* oder als *Amperesches Gesetz* bezeichnet und lautet:

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \quad (1. \text{ Maxwellsche Gleichung}). \quad (2.51)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung taucht im Integral die wahre Stromdichte auf. Diese wird über die Fläche in Richtung der Flächennormale  $d\vec{A}$  integriert. Die Integration liefert also den Gesamtstrom  $I_{\text{ges}}$  durch die Fläche  $A$ . Auf der linken Seite der Gleichung muss das magnetische Feld  $\vec{H}$  auf einem geschlossenen Weg um die Fläche in Richtung des Wegelementes  $d\vec{s}$

## 40 2 Elektromagnetische Felder und Wellen

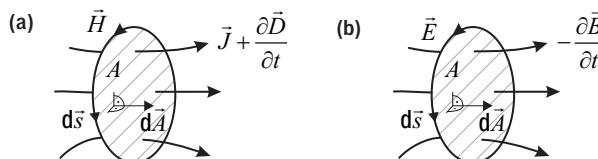
ausgewertet werden. Die Richtung der Flächennormale und der Umlaufsinn des Wegintegrals sind dabei über die Rechte-Hand-Regel miteinander verknüpft. In Bild 2.6a finden wir eine anschauliche Interpretation der vorkommenden Integrale. Wir können die mathematischen Zusammenhänge folgendermaßen sprachlich formulieren.

Das Umlaufintegral des magnetischen Feldes  $\vec{H}$  um die Fläche  $A$  entspricht dem durch die Fläche tretenden Gesamtstrom  $I_{\text{ges}}$ . Der Gesamtstrom setzt sich zusammen aus der Summe von Leitungsstrom und Verschiebungsstrom. Leitungs- und Verschiebungsströme verursachen also magnetische Wirbelfelder.

Die zweite Maxwellsche Gleichung in Integralform heißt auch *Induktionsgesetz* oder *Faradaysches Gesetz*:

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.52)$$

Das Integral auf der rechten Seite stellt den magnetischen Fluss  $\Psi_m$  dar. In Bild 2.6b finden wir eine anschauliche Interpretation der vorkommenden Integrale. Wir können die mathematischen Zusammenhänge folgendermaßen sprachlich formulieren.



**Bild 2.6** Veranschaulichung der (a) 1. und (b) 2. Maxwellschen Gleichung in Integralform

Die negative zeitliche Änderung des magnetischen Flusses  $\Psi_m$  durch eine Fläche  $A$  entspricht dem Umlaufintegral des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  um diese Fläche. Ein sich ändernder magnetischer Fluss verursacht also ein elektrisches Wirbelfeld.

Die dritte Maxwellsche Gleichung in Integralform ist auch bekannt als *Gaußsches Gesetz des elektrischen Feldes*.

$$\iint_{A(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho d\nu = Q \quad (3. \text{ Maxwell'sche Gleichung}) \quad (2.53)$$

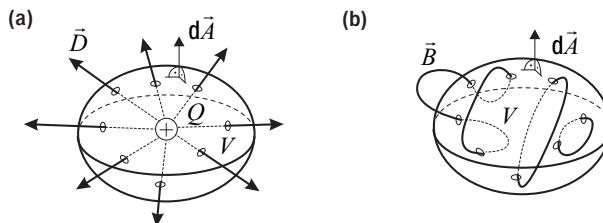
Das Integral auf der linken Seite stellt den elektrischen Fluss  $\Psi_e$  durch die geschlossene Hüllfläche des Volumens  $V$  dar. Auf der rechten Seite finden wir die Integration über die Raumladungsdichte  $\rho$ . Dies liefert uns die Ladungsmenge  $Q$  innerhalb des Volumens  $V$  (Bild 2.7a). Wir können also die dritte Maxwellsche Gleichung folgendermaßen ausdrücken:

Der durch die geschlossene Hüllfläche eines Volumens gehende elektrische Fluss liefert die gesamte im Volumen eingeschlossene Ladungsmenge  $Q$ .

Die vierte Maxwellsche Gleichung in Integralform ist auch bekannt als *Gaußsches Gesetz des magnetischen Feldes*.

$$\iint_V \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (4. \text{ Maxwellsche Gleichung}) \quad (2.54)$$

Das Integral auf der linken Seite stellt den magnetischen Fluss  $\Psi_m$  durch die geschlossene Hüllfläche des Volumens  $V$  dar. Dieser ist offenbar immer null. Dies bedeutet, dass die magnetischen Feldlinien immer geschlossen sind (Bild 2.7b).



**Bild 2.7** Veranschaulichung der (a) 3. und (b) 4. Maxwellschen Gleichung

Der durch die geschlossene Hüllfläche eines Volumens gehende magnetische Fluss verschwindet.

## 2.2.4 Materialgleichungen

Neben den Maxwellschen Gleichungen gelten noch die sogenannten Materialgleichungen, die die elektrische und magnetische Feldstärkegröße  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  mit der elektrischen und magnetischen Flussdichte  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  sowie der elektrischen Leitfähigkeitsdichte  $\vec{J}$  verknüpfen.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.55)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.56)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.57)$$

Die elektromagnetischen Eigenschaften der Materie drücken sich dabei in der relativen Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$ , der relativen Permittivitätszahl  $\mu_r$  und der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  aus. Elektrische Eigenschaften technisch wichtiger Dielektrika und Leitermaterialien finden sich in Tabelle 2.1 und Tabelle 2.2.

Allgemein kann die Beschreibung des Materialverhaltens sehr komplex werden. Wir wollen daher zunächst wichtige Begrifflichkeiten klären.

**Linearität:** Ein Material ist *linear*, wenn die Materialeigenschaften  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  und  $\sigma$  unabhängig von den elektromagnetischen Feldgrößen sind, die im Material auftreten. Beispiel: Die relative Dielektrizitätszahl ändert sich nicht, wenn die das Material durchsetzende elektrische Feldstärke kleiner oder größer wird.

**Zeitinvarianz:** Ein Material ist *zeitinvariant*, wenn die Materialeigenschaften zeitlich konstant sind.

**Isotropie:** Ein Material ist *isotrop*, wenn die Materialeigenschaften richtungsunabhängig sind.

**Dispersion:** Ein Material ist *dispersiv*, wenn die Materialeigenschaften abhängig von der Frequenz sind.

**Homogenität:** Ein Material ist *homogen*, wenn die Materialeigenschaften sich räumlich nicht ändern.

Viele in der Hochfrequenztechnik verwendeten Materialien können – wenigstens in bestimmten Frequenzbereichen – näherungsweise als linear, zeitinvariant, isotrop und nicht dispersiv betrachtet werden. Hingegen kann – wie wir noch sehen werden – eine inhomogene Verteilung von Materialien im Raum ein wesentliches Gestaltungselement bei Hochfrequenzkomponenten sein.

Für dispersive dielektrische Materialien existieren mathematische Modelle (Debye), die sich an physikalischen Überlegungen orientieren, hier aber nicht weiter vertieft werden sollen. Der interessierte Leser findet zu dem Thema weitere Ausführungen in der Literatur [Detl12].

Im Falle elektromagnetischer Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit werden die Feldgrößen bekanntlich durch komplexe Amplituden (Phasoren) beschrieben. Bei der Beschreibung der Materialeigenschaften ist es ebenso üblich, auf eine komplexe Darstellung überzugehen.

In Abschnitt 2.1.1.5 haben wir gesehen, dass wir die Kapazität eines Plattenkondensators im elektrostatischen Fall durch den Zusammenhang  $C = \epsilon_0 \epsilon_r A/d$  beschreiben können, wobei  $A$  die Plattengröße,  $d$  der Plattenabstand und  $\epsilon_r$  die relative Dielektrizitätszahl des Mediums sind. Die relative Dielektrizitätszahl ist dabei eine makroskopische Größe, die die Polarisierbarkeit der Materie (verursacht durch die Ausrichtung von polaren Teilchen) beschreibt.

Im zeitabhängigen Falle ändert sich die Feldorientierung im Kondensator, so dass die Dipole dem Feld folgen müssen. Man kann sich leicht vorstellen, dass diese Bewegung nun dazu führt, dass im Inneren des Mediums Wärme entsteht. Ganz offensichtlich reicht die relative Dielektrizitätszahl, die wir aus den statischen Überlegungen gewonnen haben, für eine vollständige Beschreibung nicht aus. Um die Erweiterung zu verstehen, betrachten wir eine harmonische Zeitabhängigkeit, bei der die Feldgrößen wieder durch komplexe Zeiger (Phasoren) repräsentiert werden.

Aus der Wechselstromrechnung ist bekannt, dass die Admittanz  $Y$  einer Kapazität durch  $Y = j\omega C$  gegeben ist. Eine solche Kapazität ist verlustlos, Strom und Spannung sind um  $90^\circ$  phasenverschoben. Zur Beschreibung der Verluste ergänzt man die Admittanz um einen Realteil, den Leitwert  $G$  (Bild 2.8a), der die elektrischen Verluste beschreibt.

$$Y = j\omega C + G \quad \text{mit} \quad G = \omega C \tan \delta_C \quad (2.58)$$

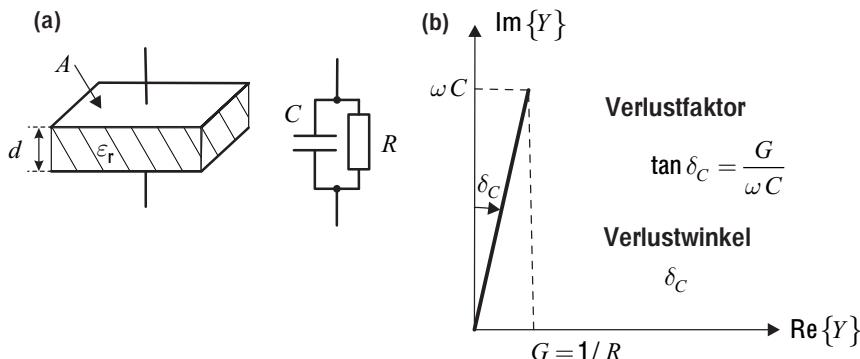
Der Ausdruck  $\tan \delta_C$  wird als Verlustfaktor des Kondensators bezeichnet und drückt das Verhältnis von Real- und Imaginärteil der Admittanz am Kondensator aus (Bild 2.8b). Falls der Kondensator vollständig mit Dielektrikum gefüllt ist, so können wir mit  $C = \epsilon_0 \epsilon_r A / d$  schreiben:

$$Y = j\omega C + \omega C \tan \delta_C = j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} (1 - j \tan \delta_C) = j\omega \epsilon_0 \frac{A}{d} \cdot \underbrace{\epsilon_r (1 - j \tan \delta_\epsilon)}_{\substack{\text{komplexe relative} \\ \text{Dielektrizitätszahl}}} . \quad (2.59)$$

Wir können also dem dielektrischen Material selbst eine komplexe relative Dielektrizitätszahl zuordnen und bezeichnen den Ausdruck  $\tan \delta_\epsilon$  als Verlustfaktor des Dielektrikums.

$$\underline{\epsilon}_r = \epsilon_r (1 - j \tan \delta_\epsilon) \quad (2.60)$$

Zur besseren Unterscheidbarkeit haben wir die komplexe Größe hier unterstrichen. Im Weiteren wollen wir jedoch von der gesonderten Kennzeichnung komplexer Größen absehen.



**Bild 2.8** (a) Verlustbehaftete Kapazität und (b) Admittanz und Definition des Verlustfaktors

## 2.2.5 Verhalten an Materialgrenzen

Zusätzlich zu den Maxwellschen Gleichungen müssen die Feldgrößen an Materialgrenzen noch den *Stetigkeitsbedingungen* genügen. Mit dem Index  $i \in \{1, 2\}$  wollen wir die Feldgröße unmittelbar vor der Grenzschicht im Medium  $i$  bezeichnen. Der Index  $n$  zeigt die Normalen-Komponente senkrecht zur Oberfläche und der Index  $t$  die tangentiale Komponente parallel zur Grenzschicht an.

## 44 2 Elektromagnetische Felder und Wellen

---

Bei der elektrischen und magnetischen Flussdichte sind jeweils die Normalenkomponenten stetig.

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (2.61)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (2.62)$$

Bei der elektrischen und magnetischen Feldstärke sind die tangentialen Komponenten stetig.

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.63)$$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (2.64)$$

Mit den Materialgleichungen  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  und  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$  sowie den Gleichungen (2.63) und (2.64) können wir Beziehungen für die tangentialen Komponenten der elektrischen und magnetischen Flussdichte ableiten:

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_{r2}} \quad (2.65)$$

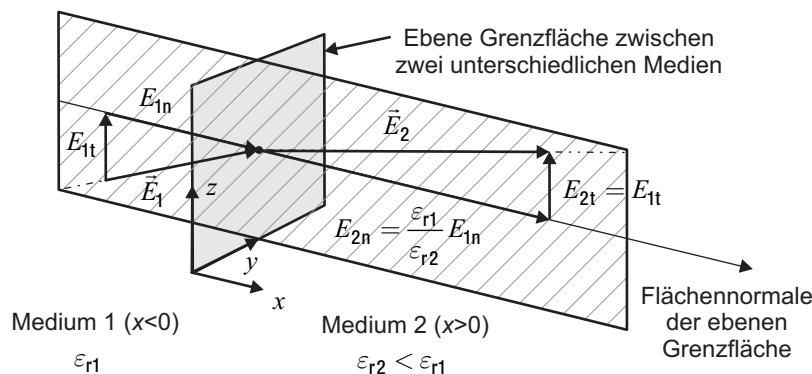
$$\frac{B_{1t}}{\mu_{r1}} = \frac{B_{2t}}{\mu_{r2}} . \quad (2.66)$$

Weiterhin erhalten wir aus den Materialgleichungen sowie den Gleichungen (2.61) und (2.62) Beziehungen für die Normalenkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke.

$$\epsilon_{r1} E_{1n} = \epsilon_{r2} E_{2n} \quad (2.67)$$

$$\mu_{r1} H_{1n} = \mu_{r2} H_{2n} \quad (2.68)$$

Die Zusammenhänge für das elektrische Feld sind in Bild 2.9 dargestellt. Die tangentiale Komponente ist stetig (Gleichung (2.63)) und die Normalenkomponente erfährt eine Änderung (Gleichung (2.67))



**Bild 2.9** Verhalten der elektrischen Feldstärke beim Übergang von einem Dielektrikum ( $\epsilon_{r1}$ ) in ein zweites Dielektrikum ( $\epsilon_{r2} < \epsilon_{r1}$ )

Falls an der Grenzschicht eine Oberflächenladungsdichte  $\rho_F$  oder eine Oberflächenstromdichte  $\vec{J}_F$  vorhanden sind, ändern sich die Gleichungen (2.64) und (2.61) wie folgt.

$$|H_{1t} - H_{2t}| = |\vec{J}_{F\perp}| \quad (2.69)$$

$$|D_{1n} - D_{2n}| = |\rho_F| \quad (2.70)$$

Im Gegensatz zur Ladungsdichte  $\rho$  (Ladung pro Volumen, C/m<sup>3</sup>) sind bei der *Oberflächenladungsdichte*  $\rho_F$  die Ladungen in einem zweidimensionalen Gebiet verteilt (C/m<sup>2</sup>). Die Stromdichte  $\vec{J}$  ist definiert als Strom (in einem dreidimensionalen Objekt) durch eine Querschnittsfläche (A/m<sup>2</sup>). Eine *Oberflächenstromdichte*  $\vec{J}_F$  repräsentiert einen Strom in einer *zweidimensionalen Fläche*, so dass die Querschnittsgeometrie eine eindimensionale Linie ist (A/m). Das Symbol  $\perp$  bedeutet, dass die Richtung der Stromdichte senkrecht zur Richtung der tangentialen magnetischen Feldstärke verläuft [Blum88].

## ■ 2.3 Einteilung elektromagnetischer Feldprobleme

Elektromagnetische Feldprobleme lassen sich vollständig durch die oben angegebenen Maxwell'schen Gleichungen beschreiben. Für einige in der Praxis relevante Anwendungsfälle können die Maxwell'schen Gleichungen zum Teil deutlich vereinfacht werden. Dies hat bei der Auffindung von Lösungen spürbare mathematische Vorteile gegenüber der Beschreibung durch die vollständigen Gleichungen.

### 2.3.1 Statische Felder

Die stärkste Vereinfachung ergibt sich für den Fall *zeitunabhängiger Felder*. Dies führt auf elektrostatische Probleme, in denen nur elektrische Feldgrößen auftreten, bzw. auf magnetostatische Probleme, in denen nur magnetische Felder auftreten. Magnetische und elektrische Felder sind im statischen Fall entkoppelt.

Bei statischen elektrischen Strömungsfeldern in Leitern tritt zwischen den elektrischen und magnetischen Feldgrößen ebenfalls *keine wechselseitige Verkopplung* auf. Es kann zunächst das elektrische Feldproblem *unabhängig* von magnetischen Feldgrößen gelöst werden. Erst in einem zweiten Schritt werden – ausgehend von den zuvor berechneten elektrischen Stromdichten im Leiter – die magnetischen Felder ermittelt. Eine Rückwirkung auf die elektrischen Felder findet nicht statt.

### 2.3.2 Quasistatische Felder

Man spricht von quasistatischen bzw. *langsam veränderlichen* Feldern, wenn die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder vernachlässigt werden kann. Betrachten wir einen Plattenkondensator, so gilt im statischen Fall:  $E = U/d$ . Falls nun das elektrische Feld innerhalb des Plattenkondensators zu jedem Zeitpunkt dem elektrischen Feld entspricht, das im statischen Fall diesem augenblicklichen Spannungswert zugeordnet ist, falls also gilt  $E(t) = U(t)/d$ , so spricht man von quasistatischen Feldern. Die statische Lösung kann übernommen und um einen Term für die Zeitabhängigkeit ergänzt werden. Damit mit diesem Lösungsansatz gearbeitet werden kann, muss die Laufzeit der Felder im Problembereich deutlich kleiner als die

Periodendauer der Schwingung sein. Man kann auch sagen, dass der maximale Ausbreitungs-weg der Felder deutlich kleiner als die Wellenlänge sein muss, also  $s_{\max} \ll \lambda$ .

Damit mit quasistatischen Lösungen gearbeitet werden kann, müssen die Bauteile mit zunehmender Frequenz (abnehmender Wellenlänge) immer kleiner werden. Quasi-statische Lösungen werden bei der Berechnung von TEM-Wellenleitern verwendet, bei denen der Leiterquerschnitt klein gegen die Wellenlänge ist (siehe Kapitel 4).

### 2.3.3 Schnell veränderliche Felder

Bei hochfrequenten Feldern sind die Feldgrößen raschen zeitlichen Änderungen unterworfen. Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder wirkt sich nun aus. Es kommt zu Signallaufzeiten, die sich bei harmonischer Zeitabhängigkeit in Phasenverschiebungen ausdrücken. Elektrische und magnetische Felder sind miteinander verkoppelt. Somit entstehen nicht vernachlässigbare Wechselwirkungen zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern und es treten zwei für die Hochfrequenztechnik charakteristische Phänomene auf.

**Stromverdrängung:** Der Strom verteilt sich in guten Leitern nicht mehr gleichmäßig über den Leiterquerschnitt, sondern er verdrängt sich zunehmend an die Oberfläche (*Skineffekt*).

**Wellenausbreitung:** *Elektromagnetische Wellen* können sich im freien Raum – und geführt durch Leitungsstrukturen – ausbreiten.

Diese beiden Effekte sehen wir uns im Weiteren mathematisch genauer an.

## ■ 2.4 Skineffekt

Zur Betrachtung des Skineffektes gehen wir von den ersten beiden Maxwellschen Gleichungen in Differentialform aus.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.71)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.72)$$

Wir interessieren uns für die Lösung in einem *metallischen Leiter* mit sehr hoher elektrischer Leitfähigkeit  $\sigma$ . In diesem Fall ist die Verschiebungsstromdichte  $\partial \vec{D} / \partial t$  gegenüber der Leitungsstromdichte  $\vec{J}$  vernachlässigbar. Um einfache geometrische Verhältnisse zu haben, nehmen wir an, der Leiter füllt den Halbraum ( $z \geq 0$ ) aus.

Wenden wir die Rotation auf Gleichung (2.72) an, so erhalten wir:

$$\text{rotrot} \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{H}) . \quad (2.73)$$

Wir setzen nun Gleichung (2.71) und die Materialgleichung (2.57) ein. Ferner gehen wir von einem homogenen Medium aus und ziehen die konstanten Materialparameter  $\sigma$  und  $\mu_0$  vor die Ableitung.

$$\text{rotrot} \vec{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (2.74)$$

Als Nächstes nutzen wir die aus der Mathematik bekannte Beziehung [Ida07]

$$\text{rotrot} \vec{V} = \text{grad div} \vec{V} - \Delta \vec{V} . \quad (2.75)$$

Da wir unsere Überlegungen auf einen elektrisch neutralen, guten Leiter beziehen (es gibt genauso viele positive wie negative Ladungen im Leiter), können wir zudem davon ausgehen, dass die Raumladungsdichte  $\rho$  verschwindet. Damit ist dann gemäß der dritten Maxwellschen Gleichung  $\text{div} \vec{D} = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} = 0$ . Damit wird aus Gleichung (2.74)

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

(Diffusionsgleichung). (2.76)

Gleichung (2.76) ist vom Typus einer *Diffusionsgleichung* und gilt für leitfähige Gebiete. Wie der Name schon andeutet, beschreibt die Differentialgleichung diffusionsartige Ausbreitungsvorgänge (im Gegensatz zu wellenförmigen Ausbreitungsvorgängen, die wir später noch kennenlernen werden).

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit gilt entsprechend für Phasoren ( $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ ):

$$\boxed{\Delta \vec{E} = j\omega \mu_0 \sigma \vec{E}}$$

(Diffusionsgleichung für Phasoren). (2.77)

Wir sehen uns nur eine elementare Lösung dieser Differentialgleichung an, um einen wichtigen Begriff, die Eindringtiefe oder Skintiefe, kennenzulernen. Im eindimensionalen Fall stellt folgende Funktion eine Lösung dar, wie durch einfaches Einsetzen in Gleichung (2.77) überprüft werden kann:

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta} \vec{e}_x = E_0 e^{-(1+j)z/\delta} \vec{e}_x \quad (2.78)$$

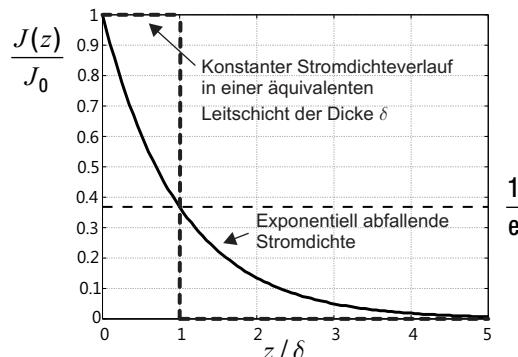
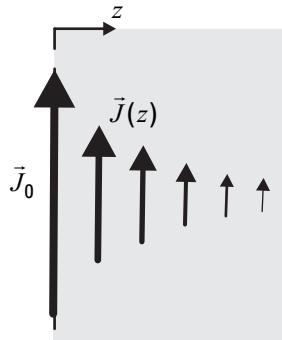
mit der *Skintiefe*

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}}} \quad \text{(Skintiefe).}$$

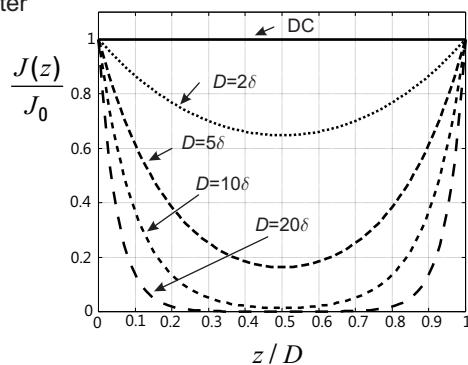
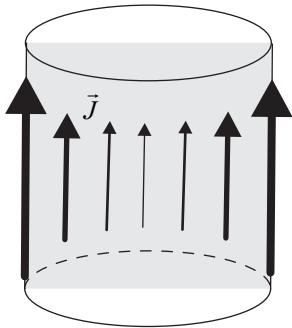
(2.79)

Bild 2.10a zeigt das Verhalten der Stromdichte  $J(z) = \sigma E(z)$  für  $z \geq 0$ , also das Eindringen des elektrischen Feldes in den leitfähigen Halbraum. Die neue Größe stellt dabei die *Eindringtiefe* oder *Skintiefe* dar, also den Wert, bei dem der Betrag der elektrischen Feldstärke (und damit auch der Stromdichte) um den Faktor  $1/e$  bezogen auf den maximalen Wert am Rand ( $z = 0$ ) abgefallen ist. Mit anderen Worten: Nach wenigen Skintiefen – vom Rand des Leiters aus – ist

## (a) Skineffekt im leitfähigen Halbraum



## (b) Skineffekt im zylindrischen Leiter



**Bild 2.10** Eindringverhalten des elektrischen Feldes (a) im leitfähigen Halbraum und (b) im zylindrischen Leiter ( $D$ =Durchmesser)

die Stromdichte nahezu auf null abgefallen. (Beim Fünffachen der Skintiefe ist die Stromdichte kleiner als 1% des maximalen Wertes am Rande.)

Die Skintiefe wird auch als äquivalente Leitschichtdicke bezeichnet, da sie bei der Berechnung des Widerstandes von Leitern, in denen der Skineffekt auftritt, von Bedeutung ist. Bild 2.10a zeigt die anschauliche Interpretation: Der Strom, der unter der Annahme einer konstanten Stromdichte in der Skintiefe fließen würde, ist genauso groß wie der Strom bei exponentiell abfallender Stromdichte im gesamten Halbraum. Man kann daher die Skintiefe bei der Berechnung des Widerstandes heranziehen, falls die für den Halbraum gemachten Annahmen eine gute Näherung für den realen Fall darstellen, also falls die Querabmessungen eines Leiters deutlich größer sind als die Skintiefe. In diesem Fall kann als Fläche, auf der sich der Strom (homogen) verteilt, das Produkt aus Skintiefe und Umfang des Leiters angesetzt werden.

Im Gleichstromfall (DC) gilt für den Widerstand eines zylindrischen Leiters (Radius  $r$ ) mit einer homogenen Strombelegung bekanntlich

$$R_{DC} = \frac{\ell}{\sigma A} = \frac{\ell}{\sigma \pi r^2} \quad . \quad (2.80)$$

Falls der Radius größer ist als die Skintiefe, so gilt im hochfrequenten Fall für den zylindrischen Leiter

$$R_{HF} = \frac{\ell}{\sigma A_{HF}} = \frac{\ell}{\sigma U \delta} = \frac{\ell}{\sigma 2\pi r \delta} . \quad (2.81)$$

Bei hohen Frequenzen ist also der Leiterumfang  $U$  und nicht die Leiter-Querschnittsfläche  $A$  entscheidend. Bild 2.10b zeigt das Eindringverhalten in einen zylindrischen Leiter für unterschiedliche Verhältnisse von Durchmesser und Skintiefe.

### Beispiel 2.1 Skintiefe von Kupfer und Gold

Den Frequenzverlauf der Eindringtiefe für Kupfer und Gold im Frequenzbereich von 1 MHz bis 50 GHz zeigt Bild 2.11.

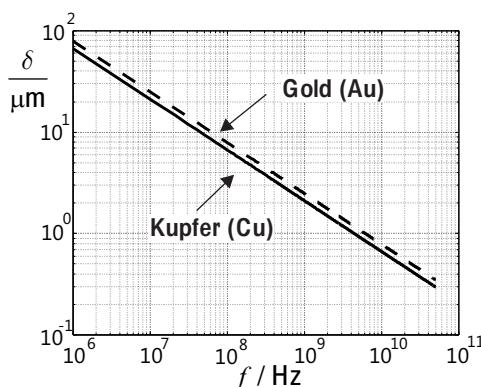


Bild 2.11 Frequenzabhängigkeit der Skintiefe für Kupfer und Gold

Mit zunehmender Frequenz wird die Skintiefe kleiner und der Strom fließt zunehmend an der Oberfläche. Die Skintiefe von Kupfer (Cu) ( $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ ) zum Beispiel beträgt bei einer Frequenz von 100 MHz nur  $\delta = 6,6 \mu\text{m}$ . ■

## ■ 2.5 Elektromagnetische Wellen

Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen führt zum Phänomen der Wellenausbreitung. Die wesentlichen Kenngrößen von Wellen wollen wir in diesem Abschnitt ableiten und veranschaulichen.

### 2.5.1 Wellengleichung und ebene Wellen

Zur Betrachtung der Wellenausbreitung gehen wir von den ersten beiden Maxwellschen Gleichungen in Differentialform aus.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.82)$$

## 50 2 Elektromagnetische Felder und Wellen

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.83)$$

Wir interessieren uns dieses Mal für Lösungen in nichtleitenden Medien ( $\sigma = 0$ ). In diesem Fall verschwindet die Leistungsstromdichte  $\vec{J}$  und es bleibt lediglich die Verschiebungsstromdichte  $\partial \vec{D} / \partial t$  auf der rechten Seite in Gleichung (2.82). Wenden wir die Rotation und die Materialgleichung  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  (mit  $\mu = \mu_0 \mu_r$ ) auf Gleichung (2.83) an, so erhalten wir:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) \quad . \quad (2.84)$$

Wir setzen nun Gleichung (2.82) und die Materialgleichung  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  (mit  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ) ein. Ferner gehen wir von einem zeitinvarianten Medium aus und ziehen die konstanten Materialparameter  $\epsilon$  und  $\mu$  vor die Ableitung.

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.85)$$

Wir nutzen ferner die Beziehung  $\text{rot rot } \vec{V} = \text{grad div } \vec{V} - \Delta \vec{V}$  und erhalten

$$\underbrace{\text{grad div } \vec{E}}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad . \quad (2.86)$$

Da die Raumladungsdichte  $\rho$  verschwindet, ist dann gemäß der dritten Maxwellschen Gleichung  $\text{div } \vec{D} = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = 0$ . Wir erhalten somit

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad (\text{Wellengleichung}). \quad (2.87)$$

Gleichung (2.87) ist vom Typus einer *Wellengleichung* (hier für nichtleitfähige Gebiete). Wie der Name schon andeutet, beschreibt die Differentialgleichung wellenförmige Ausbreitungs vorgänge.

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit gilt entsprechend für Phasoren ( $\partial / \partial t \rightarrow j\omega$ ):

$$\boxed{\Delta \vec{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}} \quad (\text{Wellengleichung für Phasoren}). \quad (2.88)$$

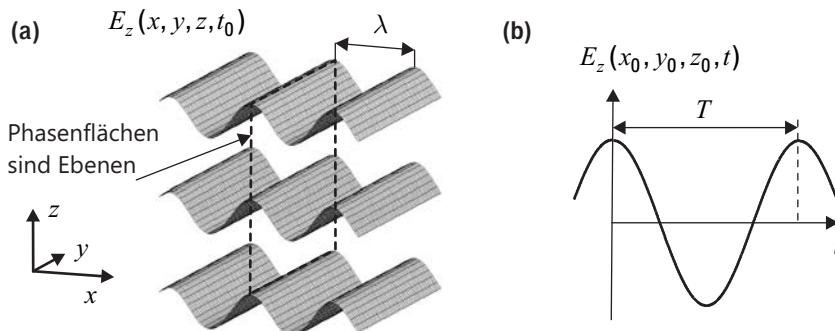
Die einfachste Lösung der Wellengleichung stellt eine *homogene ebene Welle* (HEW) dar. Im Folgenden ist die Gleichung des Phasors der elektrischen Feldstärke einer homogenen ebenen Welle gegeben, die sich in positive  $x$ -Richtung ausbreitet und in  $z$ -Richtung *polarisiert* ist (als Polarisationsrichtung bezeichnet man die Richtung des elektrischen Feldvektors).

$$\boxed{\vec{E}(x) = E_0 e^{-j k x} \vec{e}_z} \quad (\text{Homogenen ebenen Welle}) \quad (2.89)$$

Die Größe  $k$  ist hierbei die *Wellenzahl*. Den zeitabhängigen reellen Feldstärkeverlauf erhalten wir durch Multiplikation des Phasors mit dem Exponentialterm  $e^{j\omega t}$  und anschließende Realteilbildung zu

$$\boxed{\vec{E}(x, t) = |E_0| \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \vec{e}_z} \quad (\text{Homogene ebene Welle im Zeitbereich}). \quad (2.90)$$

Bild 2.12a stellt die zeit- und ortsabhängige Größe für einen festen Zeitpunkt  $t_0$  dar. Betrachtet man den räumlichen Verlauf der Funktionen für eine *feste Zeit* in einer Art Schnappschuss, so erkennt man im Raum einen cosinusförmigen Verlauf, der periodisch ist. Die *räumliche Periode*, nach der sich alles wiederholt, ist die *Wellenlänge*  $\lambda$ . Betrachtet man den zeitlichen Verlauf der Funktionen jedoch an einem *bestimmten Ort*  $x_0$  (Bild 2.12b), so erkennt man auch hier einen cosinusförmigen Verlauf, der periodisch ist. Die *zeitliche Periode*, nach der sich alles wiederholt, ist die *Periodendauer*  $T$ .



**Bild 2.12** (a) Räumlicher Verlauf des elektrischen Feldes für einen ausgewählten Zeitpunkt  $t_0$ ; Darstellung ebener Phasenflächen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung; (b) zeitlicher Verlauf an einem festen Ort  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Die Wellenzahl  $k$  berechnet sich aus der räumlichen Periode, also der Wellenlänge  $\lambda$ . Der *Wellenzahlvektor* entspricht vom Betrag der Wellenzahl und zeigt in Ausbreitungsrichtung der Welle. In unserem Beispiel also in  $x$ -Richtung.

$$\vec{k} = k \vec{e}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_x \quad (\text{Wellenzahlvektor}) \quad (2.91)$$

Die Größe  $\omega$  ist die *Kreisfrequenz* und berechnet sich aus der zeitlichen Periode, also der Periodendauer  $T$  mit

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad . \quad (2.92)$$

Kehren wir wieder zur Phasordarstellung des elektrischen Feldes in Gleichung (2.89) zurück und setzen diese in Gleichung (2.88) ein, so erkennen wir, dass offenbar gelten muss:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad . \quad (2.93)$$

Damit ergibt sich für die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* der Welle die *Lichtgeschwindigkeit*, denn

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = c \quad . \quad (2.94)$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle ausbreitet, ist

$$c = \lambda f = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit}). \quad (2.95)$$

## 52 2 Elektromagnetische Felder und Wellen

---

Im Vakuum ist dies die *Lichtgeschwindigkeit*  $c_0$ :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
(Vakuumlichtgeschwindigkeit). (2.96)

Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  zur elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  in Gleichung (2.89) erhalten wir über die zweite Maxwellsche Gleichung (siehe Übung 2.5). Das Ergebnis lautet:

$$\vec{H}(x) = -H_0 e^{-j k x} \vec{e}_y .$$
(2.97)

Falls sich die Welle in *negative x-Richtung* ausbreitet, so lauten die Phasoren der homogenen ebenen Welle

$$\vec{E}(x) = E_0 e^{j k x} \vec{e}_z \quad \text{und} \quad \vec{H}(x) = H_0 e^{j k x} \vec{e}_y .$$
(2.98)

Das Verhältnis

$$Z_F = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$
(Feldwellenwiderstand) (2.99)

stellt den *Feldwellenwiderstand* dar. Dieser ist eine charakteristische Größe des Mediums, in dem sich die Welle bewegt. Für Vakuum (und näherungsweise Luft) ergibt sich der *Feldwellenwiderstand des freien Raumes* mit einem Wert von:

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$$
(Feldwellenwiderstand des freien Raumes). (2.100)

Homogene ebene Wellen können sich frei im Raum ausbreiten. Sie benötigen zu ihrer Ausbreitung keine Materie. Mit der Ausbreitung der Welle ist ein Energietransport verbunden. Der zeitliche Verlauf der Leistungsdichte  $\vec{S}$  kann im Zeitbereich mit dem *Poynting-Vektor* berechnet werden.

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t)$$
(2.101)

Der Poynting-Vektor zeigt in Ausbreitungsrichtung und gibt die pro Flächeneinheit transportierte Leistung an. Die Einheit ist  $[S] = \text{W/m}^2$ .

Bei zeitharmonischen Größen definiert man einen komplexen Poynting-Vektor gemäß<sup>3</sup>:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$
(Komplexer Poynting-Vektor). (2.102)

Um den *Wirkleistungstransport* zu beschreiben, benötigt man den zeitlichen Mittelwert, der sich bei harmonischer Zeitabhängigkeit aus den Phasoren berechnen lässt.

$$\overline{\vec{S}(t)} = \overline{\vec{E}(t) \times \vec{H}(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$$
(2.103)

<sup>3</sup> Die Betrachtungen zum Poynting-Vektor erinnern stark an die aus den Grundlagen der Elektrotechnik bekannten Zusammenhänge bei der Leistungsdefinition. In Übung 2.5 werden diese Grundlagen aufgearbeitet.

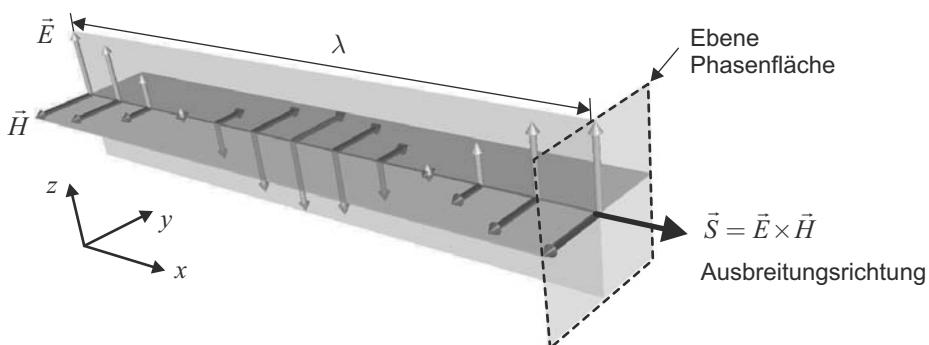
Im Falle unserer homogenen ebenen Welle in Gleichung (2.89) ist die Wirkleistungsdichte

$$\vec{S}_W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} = \frac{1}{2} E_0 H_0 \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{2 Z_{F0}} \vec{e}_x = \frac{1}{2} Z_{F0} H_0^2 \vec{e}_x . \quad (2.104)$$

Zum Schluss wollen wir noch einmal die wesentlichen Eigenschaften der homogenen ebenen Welle zusammenfassen:

- Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  sind *in Phase*, d.h. sie besitzen die gleiche Zeitabhängigkeit  $\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ .
- Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  sind *senkrecht zueinander* und auch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. (Es handelt sich um eine TEM-Welle (TEM: transversal elektromagnetisch).)
- *Flächen konstanter Phase* sind *Ebenen* senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und auf einer Phasenfläche ist der *Betrag* der Feldstärkewerte *konstant* (= homogen), daher auch der Name *homogene ebene Welle*.

Bild 2.13 zeigt anschaulich die Schwingungsebenen und die elektrischen und magnetischen Feldstärkevektoren zu einem festen Zeitpunkt ( $t = t_0$ ).



**Bild 2.13** Darstellung der elektrischen und magnetischen Feldstärkevektoren zu einem festen Zeitpunkt

Homogene ebene Wellen, die den gesamten Raum ausfüllen, genügen zwar formal den Maxwell'schen Gleichungen, können aber natürlich praktisch nicht erzeugt werden, denn dazu wäre unendlich viel Energie notwendig. In der Praxis haben sie aber eine hohe Bedeutung, wenn es darum geht, Wellenfelder im Fernfeld von Antennen in einem räumlich begrenzten Gebiet zu beschreiben. Weit weg von einer Quelle können die Wellenfelder als *lokal homogene ebene Wellen* angenommen werden.

## 2.5.2 Polarisation

Die Richtung des elektrischen Feldvektors bestimmt die Polarisation der elektromagnetischen Welle. Bei der homogenen ebenen Welle schwingt das elektrische Feld in einer Ebene, man spricht daher von *linearer Polarisation* (Bild 2.13).

Überlagern wir zwei homogene ebene Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung, aber orthogonaler Orientierung des elektrischen Feldes, so kann es vorkommen, dass der Vektor des elektrischen Feldes nicht mehr nur in einer Ebene verläuft. Schauen wir uns die Fälle einmal im Einzelnen an. Dazu gehen wir zunächst von der Überlagerung der folgenden zwei homogenen ebenen Wellen aus.

$$\vec{E}_1(x) = E_1 e^{-j(kx+\varphi_1)} \vec{e}_y \quad (2.105)$$

$$\vec{E}_2(x) = E_2 e^{-j(kx+\varphi_2)} \vec{e}_z \quad (2.106)$$

Das Gesamtfeld ist dann

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_1(x) + \vec{E}_2(x) \quad (2.107)$$

und kann eine lineare, zirkulare oder elliptische Polarisierung annehmen [Gust06] [Kark12].

### 2.5.2.1 Lineare Polarisierung

Wenn die *Phasen* beider Wellen *gleich* sind ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ), so stellt sich – wie im Falle einer einfachen homogenen ebenen Welle – *lineare Polarisierung* ein, d.h. der Vektor des elektrischen Feldes schwingt in einer Ebene. Die Richtung des Vektors ergibt sich aus der Summe der Vektoren, also  $E_1 \vec{e}_y + E_2 \vec{e}_z$ . Dieser Summenvektor spannt zusammen mit dem Vektor, der die Ausbreitungsrichtung angibt, eine Ebene auf, in der die elektrischen Feldvektoren liegen (siehe Bild 2.14a). Je nach Lage der Ebene im Raum spricht man auch von *vertikaler Polarisierung* bei senkrecht orientierter Ebene bzw. von *horizontaler Polarisierung* bei waagerecht liegender Ebene.

### 2.5.2.2 Zirkulare Polarisierung

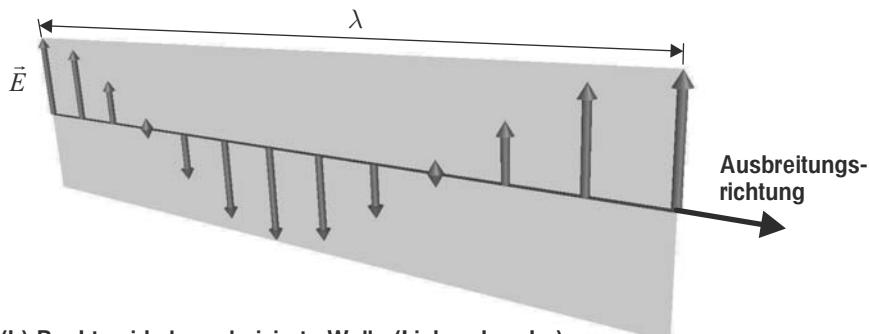
Wenn die Amplituden der beiden homogenen ebenen Wellen gleich sind ( $E_1 = E_2$ ), aber die Phasen sich um  $90^\circ$  unterscheiden ( $\varphi_1 = \varphi_2 \pm 90^\circ$ ), so herrscht *zirkulare Polarisierung* vor. Bei einer Momentaufnahme der elektrischen Feldstärkevektoren liegen diese auf der Mantelfläche eines Zylinders (siehe Bild 2.14b). Das elektrische Feld hat also eine konstante Amplitude, ändert aber ständig seine Richtung. Betrachten wir eine Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, so dreht sich (in Ausbreitungsrichtung gesehen) der Vektor des elektrischen Feldes (je nachdem, ob die Phasendifferenz negativ oder positiv ist) rechts oder links herum im Kreis. Im Falle einer Drehung rechts herum (in Ausbreitungsrichtung gesehen) handelt es sich um *rechts-zirkulare Polarisierung* (RHCP=Right-Handed Circular Polarization). Dreht sich der Feldstärkevektor links herum, so spricht man von *links-zirkularer Polarisierung* (LHCP=Left-Handed Circular Polarization).

### 2.5.2.3 Elliptische Polarisierung

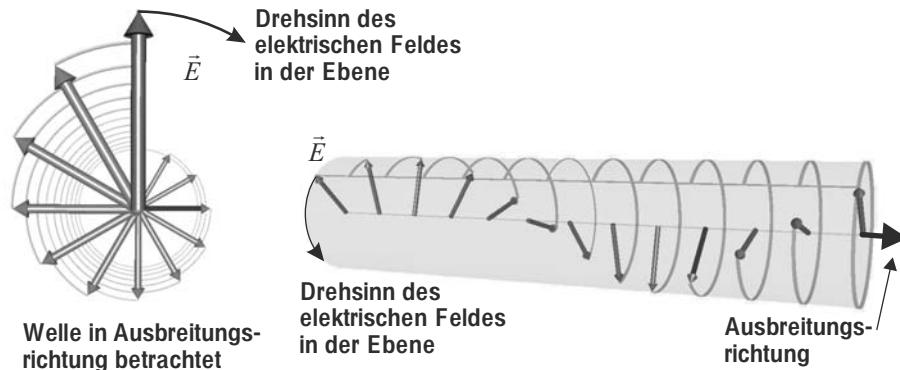
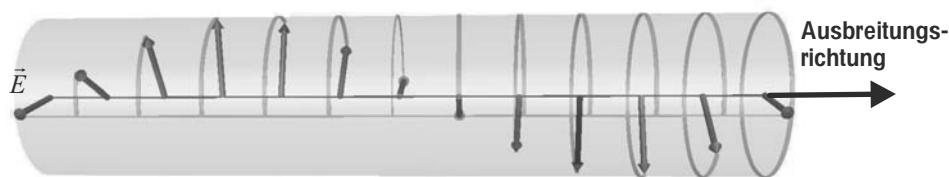
Unterscheiden sich die Amplituden der beiden homogenen ebenen Wellen ( $E_1 \neq E_2$ ), so handelt es sich um *elliptische Polarisierung*. Bei einer Momentaufnahme der elektrischen Feldstärkevektoren liegen diese auf der Mantelfläche eines Körpers mit elliptischem Querschnitt.

Ist die Phasendifferenz – wie bei der zirkularen Polarisierung – nach wie vor bei einem Wert von  $90^\circ$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 \pm 90^\circ$ ), so fallen die Hauptachsen des elliptischen Querschnitts mit der  $y$ - bzw.

## (a) Linear polarisierte Welle



## (b) Rechts-zirkular polarisierte Welle (Linksschraube)



**Bild 2.14** Darstellung des elektrischen Feldes bei (a) einer linear polarisierten Welle und (b) einer zirkular polarisierten Welle zu einem festen Zeitpunkt  $t_0$

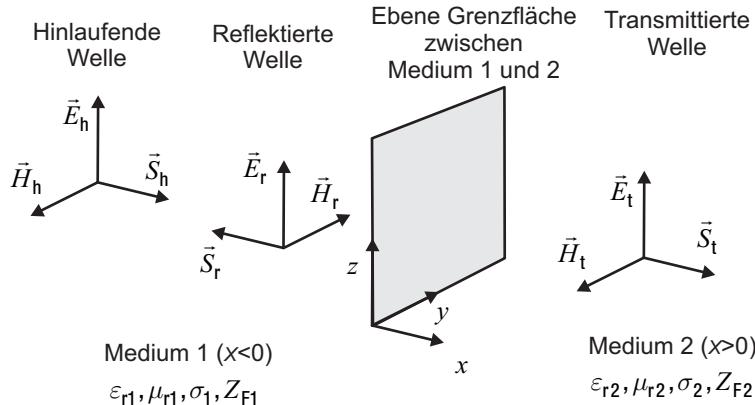
$z$ -Achse zusammen. Ist die Phasendifferenz ungleich  $90^\circ$ , so sind die Hauptachsen gedreht. Je nach Vorzeichen der Phasendifferenz und damit des Drehsinns des elektrischen Feldes in der elliptischen Querschnittsebene können wir *rechts- und linksdrehende elliptische Polarisation* unterscheiden.

### 2.5.3 Reflexion und Brechung an ebenen Grenzflächen

Aus den Randbedingungen in Abschnitt 2.2.5 kann das Verhalten homogener ebener Wellen an ebenen dielektrischen Grenzflächen abgeleitet werden [Kark12]. Wir wollen die Ergebnisse hier übernehmen, weil wir in nachfolgenden Kapiteln die entsprechenden Zusammenhänge benötigen.

### 2.5.3.1 Senkrechter Einfall

Zunächst sehen wir uns den Spezialfall einer senkrecht auf eine Grenzschicht zweier Medien auftreffenden homogenen ebenen Welle an. Die Orientierungen der Felder sind in Bild 2.15 dargestellt.



**Bild 2.15** Senkrechter Einfall einer homogenen ebenen Welle auf eine Grenzschicht

Die einfallende Welle wird an der Grenzfläche mit dem Reflexionsfaktor  $r$  reflektiert und setzt sich mit dem Transmissionsfaktor  $t$  gewichtet hinter der Grenzschicht fort [Kark12]. Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren setzen jeweils die elektrischen Feldanteile der reflektierten und transmittierten Feldanteile zur Amplitude des hinlaufenden elektrischen Feldanteils in Beziehung. Für den Reflexionsfaktor  $r$  gilt

$$r = \frac{E_r}{E_h} = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} \quad (\text{Reflexionsfaktor}). \quad (2.108)$$

Der Transmissionsfaktor lautet

$$t = \frac{E_t}{E_h} = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F2} + Z_{F1}} = 1 + r \quad (\text{Transmissionsfaktor}). \quad (2.109)$$

Bei *verlustlosen* Materialien sind die Feldwellenwiderstände reell und es gilt

$$Z_{Fi} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{ri}}{\epsilon_0 \epsilon_{ri}}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_{ri}}{\epsilon_{ri}}} \in \mathbb{R} \quad (\text{Feldwellenwiderstand des Mediums } i). \quad (2.110)$$

Bei *verlustbehafteten* (leitfähigen) Materialien sind die Feldwellenwiderstände komplex und auch dann frequenzabhängig, wenn die Materialkenngrößen selbst nicht frequenzabhängig sind. Hier muss die elektrische Leitfähigkeit berücksichtigt werden.

$$Z_{Fi} = \sqrt{\frac{j\omega \mu_0 \mu_{ri}}{\sigma_i + j\omega \epsilon_0 \epsilon_{ri}}} \quad (\text{Feldwellenwiderstand verlustbehafteter Materialien}) \quad (2.111)$$

Vor der Grenzfläche (in Medium 1) ergibt sich eine Überlagerung der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle:

$$\vec{E}_1 = \underbrace{E_0 e^{-j k x} \vec{e}_z}_{\text{hinlaufend}} + \underbrace{r E_0 e^{j k x} \vec{e}_z}_{\text{reflektiert}} \quad \text{und} \quad \vec{H}_1 = -\underbrace{\frac{E_0}{Z_{F1}} e^{-j k x} \vec{e}_y}_{\text{hinlaufend}} + \underbrace{r \frac{E_0}{Z_{F1}} e^{j k x} \vec{e}_y}_{\text{reflektiert}} . \quad (2.112)$$

Hinter der Grenzfläche (in Medium 2) existiert eine transmittierte Welle

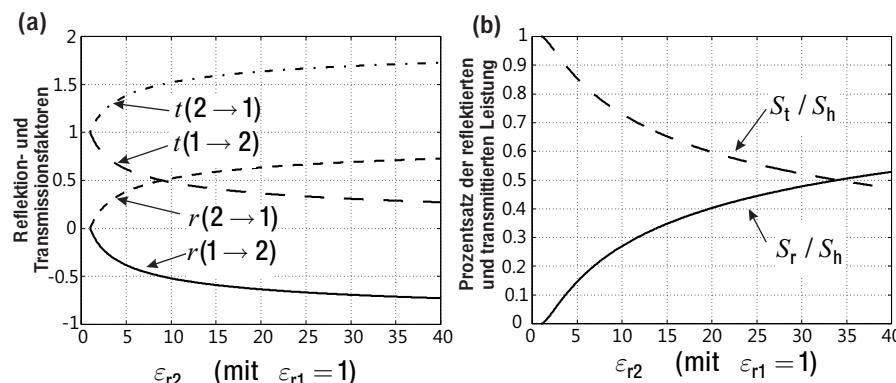
$$\vec{E}_2 = \underbrace{t E_0 e^{-j k x} \vec{e}_z}_{\text{transmittiert}} \quad \text{und} \quad \vec{H}_2 = -t \underbrace{\frac{E_0}{Z_{F2}} e^{-j k x} \vec{e}_y}_{\text{transmittiert}} . \quad (2.113)$$

### Beispiel 2.2 Reflexion und Transmission an einer ebenen dielektrischen Grenzschicht

In Bild 2.16a sind Reflexions- und Transmissionsfaktoren für den senkrechten Einfall einer homogenen ebenen Welle auf eine dielektrische Grenzschicht gezeigt. Es werden zwei Fälle betrachtet:

- **Fall 1:** Die Welle fällt aus Richtung des Mediums 1 ein. Medium 1 besitzt die relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_{r1} = 1$ . Die relative Permeabilitätszahl  $\epsilon_{r2}$  des zweiten Mediums ist variabel und auf der  $x$ -Achse abgetragen. Die Kurven beginnen für  $\epsilon_{r2} = 1$  bei  $r = 0$  und  $t = 1$  und fallen dann ab. Mit zunehmendem Unterschied der Dielektrizitätszahlen steigt der Betrag des Reflexionsfaktors.
- **Fall 2:** Nun fällt die Welle aus Richtung des Mediums 2 ein. Die Kurven beginnen wieder bei  $r = 0$  und  $t = 1$  und steigen dann an. Mit zunehmendem Unterschied der Dielektrizitätszahlen steigt der Betrag des Reflexionsfaktors.

Mit den einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen sind Leistungsflussdichten  $S_h$ ,  $S_r$  und  $S_t$  verknüpft. In Bild 2.16b ist die auf die einfallende Welle normierte Leistungsflussdichte für unterschiedliche Werte von  $\epsilon_{r2}$  dargestellt. Die Kurven beginnen für  $\epsilon_{r2} = 1$  bei  $S_r / S_h = 0$  (keine reflektierte Welle) und  $S_t / S_h = 1$  (volle Transmission).



**Bild 2.16** Reflexions- und Transmissionsfaktoren sowie Prozentsätze der Leistungsflussdichten beim senkrechten Einfall ( $\epsilon_r = 1$ )

Die Kurven der Leistungsflussdichte  $S$  in Bild 2.16b gelten für beide Ausbreitungsrichtungen. ■

### Beispiel 2.3 Senkrechter Einfall auf eine elektrische Wand (ideal leitender Halbraum)

Für den Fall des senkrechten Auf treffens auf einen ideal leitenden Halbraum ( $\sigma_2 \rightarrow \infty$ ) ergibt sich ein Feldwellenwiderstand von  $Z_{F2} = 0$  und damit ein Reflexionsfaktor von  $r = -1$  sowie ein Transmissionsfaktor von  $t = 0$ . Das elektrische Feld hat an der Grenzfläche eine Nullstelle und das magnetische Feld erhält den doppelten Wert des einfallenden Feldes. ■

#### 2.5.3.2 Schräger Einfall

Beim schrägen Einfall definiert man zunächst die *Einfallsebene* als die Ebene, die von der Flächennormale  $\vec{n}$  der Grenzschicht und dem in Ausbreitungsrichtung zeigenden Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  der homogenen ebenen Welle aufgespannt wird. Die Welle wird in zwei linear polarisierte Anteile zerlegt [Zink00] [Geng98] [Kark12]: Beim ersten Anteil steht das elektrische Feld senkrecht ( $\perp$ ) auf der Einfallsebene und beim zweiten Anteil liegt der elektrische Feldstärkevektor parallel ( $\parallel$ ) zur Einfallsebene. Die beiden Anteile werden separat behandelt und anschließend wieder überlagert. Eine Definition der Richtungen ist in Bild 2.17 gegeben.

Für die Winkel gelten die aus der Optik bekannten Zusammenhänge. Das Reflexionsgesetz besagt, dass Einfallswinkel  $\vartheta_h$  und Ausfallswinkel  $\vartheta_r$  gleich sind.

$$\vartheta_r = \vartheta_h \quad (\text{Reflexionsgesetz}) \quad (2.114)$$

Der Transmissionswinkel  $\vartheta_t$  ist durch das *Snelliussche Brechungsgesetz* gegeben, wobei die Größen  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}\mu_{r1}}$  und  $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}\mu_{r2}}$  die *Brechungsindizes*<sup>4</sup> der Medien bezeichnen.

$$\frac{\sin(\vartheta_h)}{\sin(\vartheta_t)} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}} \quad (\text{Snelliussches Brechungsgesetz}) \quad (2.115)$$

Reflexions- und Transmissionfaktoren sind unterschiedlich für parallele und senkrechte Polarisation. Betrachten wir zunächst die parallele Polarisation.

$$r_{\parallel} = \frac{Z_{F2} \cos(\vartheta_h) - Z_{F1} \cos(\vartheta_h)}{Z_{F2} \cos(\vartheta_t) + Z_{F1} \cos(\vartheta_h)} \quad (2.116)$$

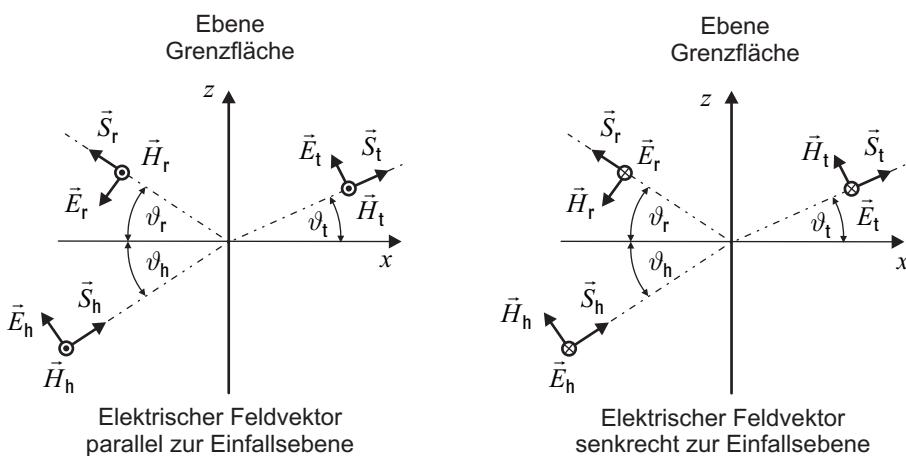
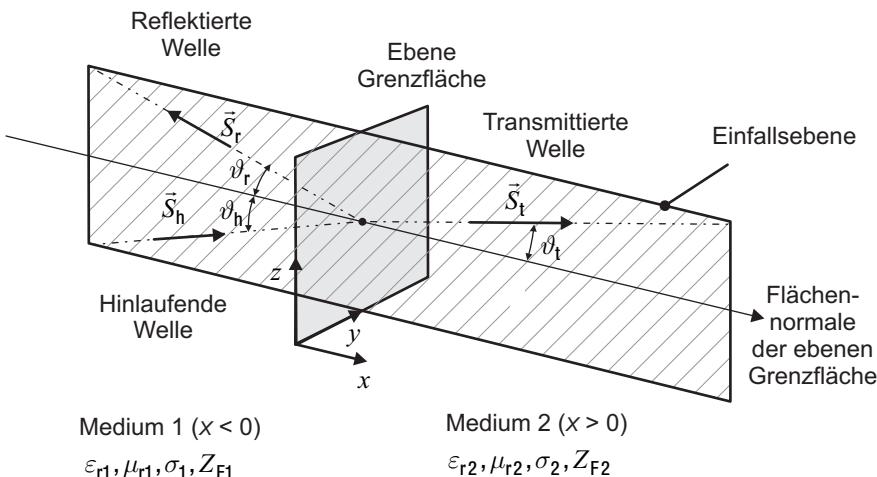
$$t_{\parallel} = \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} (1 - r_{\parallel}) = \frac{2 Z_{F2} \cos(\vartheta_h)}{Z_{F2} \cos(\vartheta_t) + Z_{F1} \cos(\vartheta_h)} \quad (2.117)$$

Bei der senkrechten Polarisation gilt:

$$r_{\perp} = \frac{Z_{F2} \cos(\vartheta_h) - Z_{F1} \cos(\vartheta_t)}{Z_{F2} \cos(\vartheta_h) + Z_{F1} \cos(\vartheta_t)} \quad (2.118)$$

$$t_{\perp} = 1 + r_{\perp} = \frac{2 Z_{F2} \cos(\vartheta_h)}{Z_{F2} \cos(\vartheta_h) + Z_{F1} \cos(\vartheta_t)} \quad . \quad (2.119)$$

<sup>4</sup> In der Optik werden gemeinhin Brechungsindizes zur Charakterisierung von optischen Materialien verwendet. Ein Medium ist *optisch dichter* als ein anderes Medium, wenn es einen höheren Brechungsindex – und damit eine niedrigere Ausbreitungsgeschwindigkeit für Licht – besitzt. Das optisch dünnste Medium ist Vakuum.



**Bild 2.17** Schräger Einfall: Definition der Einfallsebene und Bezugsrichtungen für parallele und senkrechte Polarisation

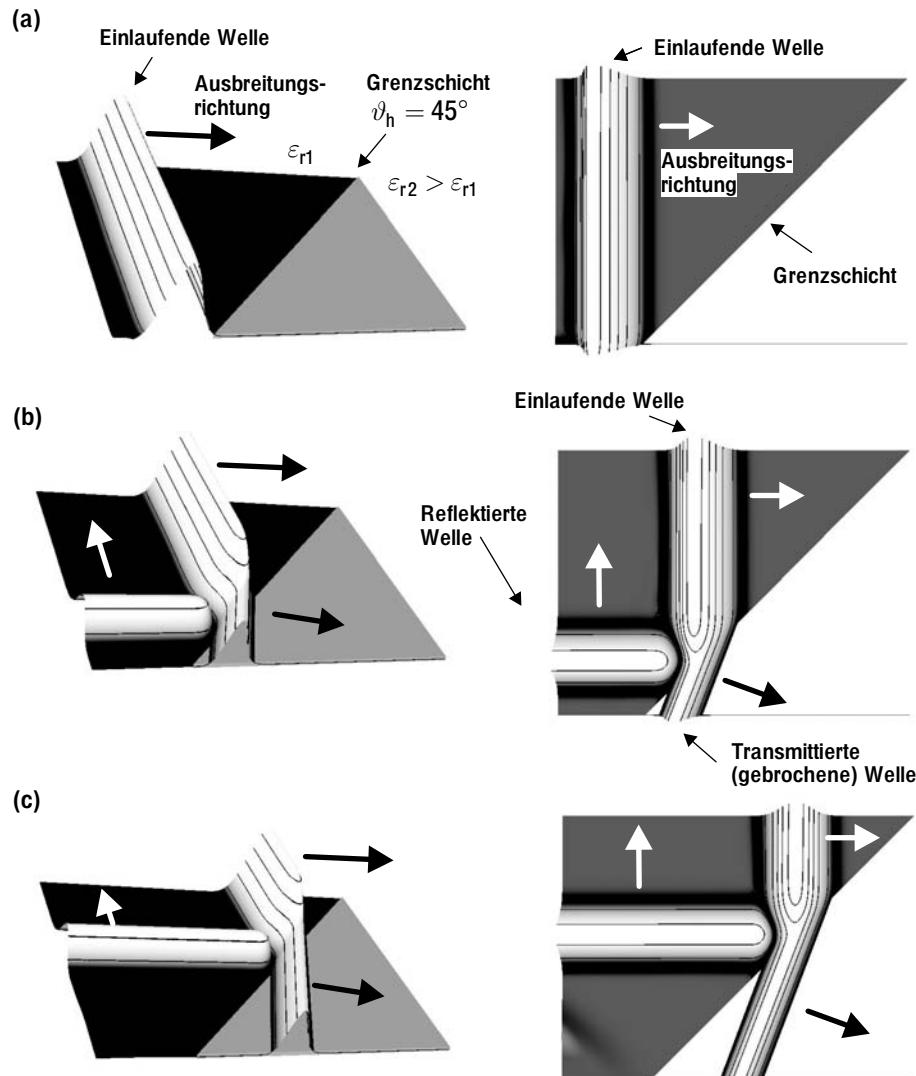
Bild 2.18a zeigt den Einfall eines Wellenberges auf eine Grenzschicht. Der Vektor der elektrischen Feldstärke steht in dem Beispiel senkrecht zur Einfallsebene. An der Grenzschicht tritt Reflexion und Brechung auf. Im zweiten Medium breitet sich die Welle langsamer aus als im ersten Medium ( $\varepsilon_{r1} < \varepsilon_{r2}$ ), woraus sich die Richtungsänderung der Welle im zweiten Medium ergibt. Aus den Gleichungen (2.115) bis (2.119) können zwei technisch bedeutsame Sonderfälle abgeleitet werden [Kark12].

**Sonderfall: Brewster-Winkel (Totaltransmission)** Wir betrachten eine dielektrische Grenzschicht mit dem Übergang von einem optisch dünneren zu einem optisch dickeren dielektrischen Medium ( $\varepsilon_{r1} < \varepsilon_{r2}; \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ ). Bei einem parallel zur Einfallsebene orientierten

elektrischen Feldvektor verschwindet der Reflexionsfaktor  $r_{\parallel}$  für einen Einfallswinkel von

$$\theta_{hB} = \arctan \left( \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \right) \quad \text{falls} \quad \epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}; \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1 \quad (\text{Brewster-Winkel}). \quad (2.120)$$

Dieser Winkel wird als *Brewster-Winkel* bezeichnet. Die Welle wird in diesem Falle vollständig in das zweite Medium überführt (Totaltransmission).



**Bild 2.18** Reflexion und Brechung an einer Grenzschicht für den Fall  $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$ : (a), (b) und (c) zeigen zeitlich aufeinanderfolgende Zustände eines Wellenberges (Betrag der elektrischen Feldstärke)

Der Brewster-Winkel tritt bei dielektrischen Materialien nur beim Übergang vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium und nur bei parallel zur Einfallsebene verlaufendem elektrischen Feld auf.

Besteht das einfallende Feld aus der Überlagerung eines senkrechten und eines parallelen elektrischen Feldvektors, so tritt als reflektierter Anteil nur noch das senkrechte elektrische Feld auf. Auf diese Art kann aus einer elliptisch polarisierten einfallenden Welle nach der Reflexion eine linear polarisierte Welle gewonnen werden.

**Sonderfall: Grenzwinkel der Totalreflexion** Wir betrachten – wie zuvor – eine dielektrische Grenzschicht, diesmal jedoch mit dem Übergang von einem optisch dichten zu einem optisch dünneren dielektrischen Medium ( $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}; \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ ). Nach dem Brechungsgesetz in Gleichung (2.115) ist der Transmissionswinkel  $\vartheta_t$  immer größer als der Einfallswinkel  $\vartheta_h$ . Für den Winkel

$$\vartheta_{hG} = \arcsin \left( \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \right) \quad \text{falls } \epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}; \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{(Grenzwinkel} \\ \text{der Totalreflexion)} \end{array} \quad (2.121)$$

wird der Transmissionswinkel  $\vartheta_t$  gerade  $90^\circ$ . Die transmittierte Welle läuft also parallel zur Grenzschicht.

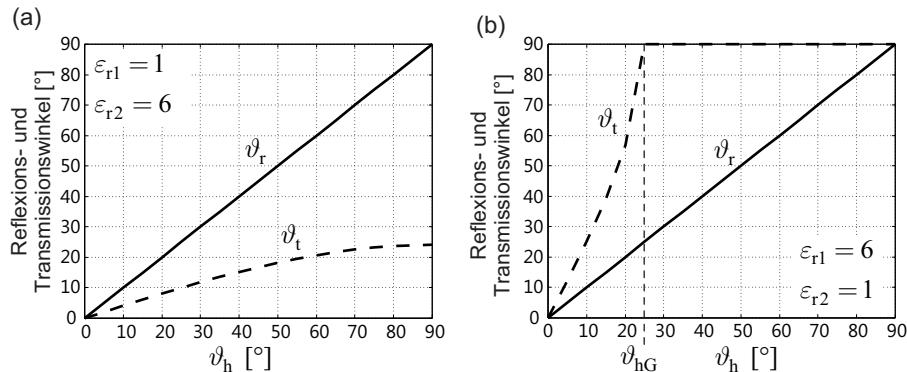
Eine mathematische Behandlung [Kark12] zeigt, dass es sich bei der Welle im zweiten Medium um eine *quer gedämpfte Welle* handelt, deren Amplitude quer zur Ausbreitungsrichtung (senkrecht zur Grenzschicht) exponentiell abfällt, die in Ausbreitungsrichtung (parallel zur Grenzschicht) jedoch keinen Amplitudenabfall und damit auch keine Dämpfung erfährt. Eine solche parallel zur Grenzschicht verlaufende Welle wird als *evanescente Welle* bezeichnet. Da die Welle nicht weiter ins zweite Medium eindringt, spricht man auch von Totalreflexion und nennt den Winkel  $\vartheta_{hG}$  *Grenzwinkel der Totalreflexion*. Er gilt gleichermaßen für senkrechte und parallele Orientierung des elektrischen Feldvektors relativ zur Einfallsebene. Für Einfallswinkel, die größer sind als dieser Grenzwinkel, liefert das Brechungsgesetz keine reellen Winkelwerte mehr, es tritt aber für diese Winkel ebenfalls das oben beschriebene Phänomen der Totalreflexion auf.

Die Totalreflexion bedeutet also nicht, dass es in dem zweiten Medium gar keine Wellenausbreitung gibt, sondern hier muss die evanescente Welle ungestört ausbreitungsfähig sein. Damit dies möglich ist, muss bei praktischen Anwendungen die zweite Schicht eine ausreichende Dicke vorweisen.

#### Beispiel 2.4 Schräger Einfall

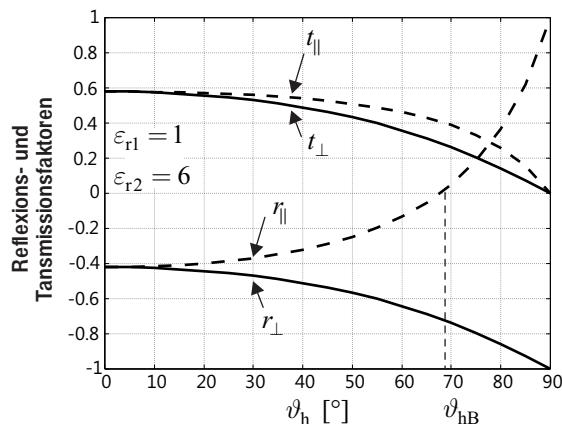
In Bild 2.19 sind die Reflexions- und Transmissionswinkel bei schrägem Einfall für den Fall vorgegebener relativer Dielektrizitätszahlen ( $\epsilon_{r1} = 1$  und  $\epsilon_{r2} = 6$  bzw.  $\epsilon_{r1} = 6$  und  $\epsilon_{r2} = 1$ ) gezeigt.

Der Reflexionswinkel entspricht stets dem Einfallswinkel. Für den Übergang vom optisch dünneren Medium zum optisch dichten Medium erfolgt die Brechung zum Lot, d.h. der Transmissionswinkel ist stets kleiner als der Einfallswinkel. Für den Übergang vom optisch dichten Medium zum optisch dünneren Medium erfolgt die Brechung vom Lot weg, d.h. der Transmissionswinkel ist stets größer als der Einfallswinkel und



**Bild 2.19** Reflexions- und Transmissionswinkel bei schrägem Einfall mit (a)  $\epsilon_{r1} = 1$  und  $\epsilon_{r2} = 6$  bzw. (b)  $\epsilon_{r1} = 6$  und  $\epsilon_{r2} = 1$

erreicht irgendwann den Grenzwinkel der Totalreflexion. Für größere Winkel wird die Welle vollständig reflektiert und es existiert keine transmittierte Welle. Im zweiten Medium breitet sich lediglich eine evanescente Welle aus.



**Bild 2.20** Reflexions- und Transmissionsfaktoren beim schrägen Einfall mit  $\epsilon_{r1} = 1$  und  $\epsilon_{r2} = 6$

Für den Fall  $\epsilon_{r1} = 1$  und  $\epsilon_{r2} = 6$  sind in Bild 2.20 die Reflexions- und Transmissionsfaktoren graphisch dargestellt. Unterschieden wird dabei je nach senkrechter und paralleler Orientierung des elektrischen Feldstärkevektors zur Einfallsebene. Für einen Einfalls-winkel von  $\vartheta = 0^\circ$  (senkrechter Einfall) ergeben sich für die unterschiedlichen Orientie-rungen natürlich die gleichen Werte. Mit zunehmendem Einfallswinkel laufen sie aus-einander.

In dem Beispiel erkennen wir auch, dass bei Orientierung des elektrischen Feldes par-allel zur Einfallsebene beim Brewster-Winkel der Reflexionsfaktor den Wert Null ergibt.

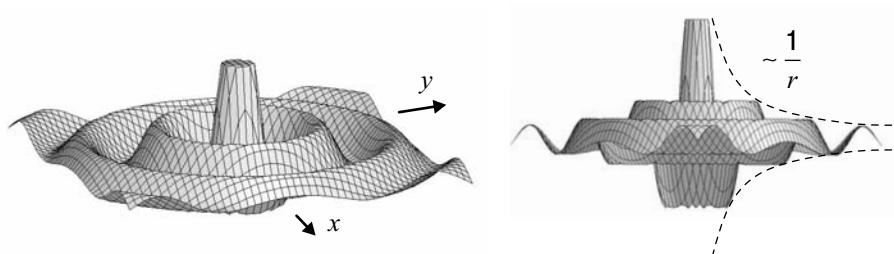
## 2.5.4 Kugelwellen

Homogene ebene Wellen, die den *gesamten Raum* erfüllen, sind aufgrund der unendlichen Energie, die im Feld gespeichert ist, nicht möglich. Wellen, die sich *kugelförmig* ausbreiten und deren Feldamplitude hinreichend schnell abfällt, können jedoch im gesamten freien Raum existieren.

Befindet man sich sehr weit von einer endlich ausgedehnten Quelle entfernt, so kann man diese als punktförmig annehmen. Die von dieser Quelle auslaufenden Wellen haben (weit von der Quelle entfernt) immer einen Kugelwellencharakter, weisen also eine radiale Abhängigkeit mit dem Ausdruck

$$G(r) = \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (\text{Skalarer Kugelwellenterm}) \quad (2.122)$$

auf. Mit zunehmender Entfernung nimmt der Betrag der Feldgröße umgekehrt proportional mit dem Radius ab und die Phase fällt mit wachsendem Abstand aufgrund der Laufzeit der Welle (Bild 2.21).



**Bild 2.21** Amplitudenverlauf einer Kugelwelle in der  $xy$ -Ebene (Darstellung der Amplituden zu einem festen Zeitpunkt)

Im *Fernfeld* von realen Strahlungsquellen zeigt sich diese Abhängigkeit, wobei noch Abhängigkeiten von den Winkeln  $\vartheta$  und  $\varphi$  hinzutreten [Kark12].

$$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi) = \vec{E}_{\text{tr}}(\vartheta, \varphi) \frac{e^{-jkr}}{kr} \quad (2.123)$$

Der Term  $\vec{E}_{\text{tr}}$  bezeichnet einen winkelabhängigen Term, wobei die Richtung hier immer transversal zur radialen Richtung steht. Bei Kugelwellen steht also das elektrische Feld auch immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung.

Für das magnetische Feld gilt der gleiche Zusammenhang, wobei der elektrische und magnetische Feldvektor senkrecht aufeinander stehen.

$$\vec{H}(r, \vartheta, \varphi) = \vec{H}_{\text{tr}}(\vartheta, \varphi) \frac{e^{-jkr}}{kr} \quad \text{mit} \quad \vec{E}_{\text{tr}} \perp \vec{H}_{\text{tr}} \quad (2.124)$$

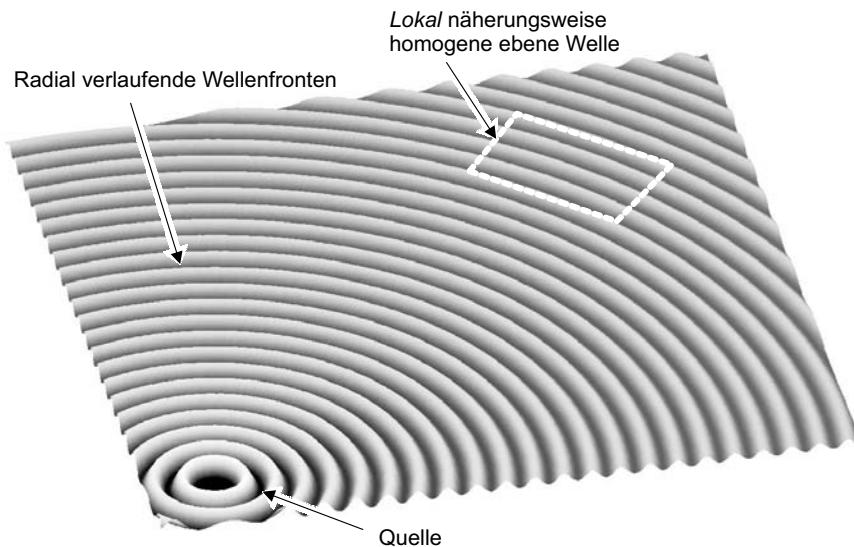
Der komplexe Poynting-Vektor  $\vec{S}$ , dessen Realteil den Wirkleistungstransport beschreibt, besitzt einen Amplitudenabfall mit dem Faktor  $1/r^2$  und zeigt radial nach außen.

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \sim \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.125)$$

Eine Kugeloberfläche  $A$  um die Quelle weist aber nun gerade einen mit  $r^2$  steigenden Wert auf:  $A = O_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$ . Integriert man daher die Strahlungsleistungsdichte aus Gleichung (2.125) auf einer Kugeloberfläche, so sieht man, dass sich ein konstanter Wert für die durch die Oberfläche gehende Wirkleistung  $P$  ergibt.

$$P = \frac{1}{2} \iint_A \operatorname{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} \cdot d\vec{A} = \text{const.} \quad (2.126)$$

Kugelwellen, die sich im freien Raum ausbreiten, stehen also nicht im Widerspruch zu einer endlichen Leistung, die bei realen Anwendungen naturgemäß gegeben ist. Die in Abschnitt 2.5.1 eingeführten homogenen ebenen Wellen können zwar aufgrund der dafür notwendigen unendlich großen Leistung nicht den gesamten Raum erfüllen. Jedoch hat man es in vielen Anwendungsfällen mit einer *lokalen* homogenen ebenen Welle zu tun. Bild 2.22 zeigt ein Feld mit radial von einer Quelle ablaufenden Wellen.



**Bild 2.22** Kugelwelle und *lokale* homogene ebene Welle

Bei Betrachtung eines kleinräumigen Gebietes in größerer Entfernung von der Quelle ergibt sich näherungsweise das Verhalten einer homogenen ebenen Welle. In den Kapiteln über Funkfelder und Antennen werden wir dieser Abhängigkeit wieder begegnen.

## ■ 2.6 Zusammenfassung

In Abschnitt 2.1 haben wir die wesentlichen Begriffe der Feldtheorie für den statischen Fall rekapituliert und ihre physikalische Bedeutung veranschaulicht. Wichtig war uns hierbei stets der Zusammenhang zwischen den *Feldgrößen* (wie elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ ) und den *Netzwerkgrößen* (wie Spannung, Strom, Kapazität und Induktivität).

Ergänzend haben wir eine anschauliche Interpretation der Differentialoperatoren Divergenz und Rotation als Quellen- und Wirbeldichte kennengelernt.

In Form der Maxwellschen Gleichungen aus Abschnitt 2.2 liegt uns eine mathematische Beschreibung für das Verhalten zeitvarianter elektromagnetischer Felder vor. Ergänzt werden diese um die Materialgleichungen und Randbedingungen für Materialübergänge. Dieses Instrumentarium erlaubt uns eine vollständige Beschreibung des elektromagnetischen Feldverhaltens für den makroskopischen Fall.

Lösungen der Maxwellschen Gleichungen sind sehr schwierig zu finden. Für statische (zeitunabhängige) und quasistatische (langsam zeitveränderliche) Felder vereinfachen sich die Maxwellschen Gleichungen deutlich und damit auch ihre Lösbarkeit. Wie im Abschnitt 2.3 erläutert sind im Bereich der Hochfrequenztechnik diese Lösungen aber in der Regel nicht ausreichend und wir müssen die vollständigen Maxwellschen Gleichungen berücksichtigen.

Von besonderer Bedeutung sind hier zwei Phänomene: zunächst der in Abschnitt 2.4 abgeleitete Effekt der Stromverdrängung (Skineffekt) an die Oberfläche guter Leiter, sodann das Phänomen von sich ausbreitenden elektromagnetischen Wellen im freien Raum und auf Leitungen in Abschnitt 2.5.1. Mit der Wellenausbreitung auf Leitungen und den Konsequenzen für das Verhalten in Schaltungen wollen wir uns direkt im Anschluss in Kapitel 3 noch intensiv auseinandersetzen. Auf die Wellenausbreitung im freien Raum kommen wir in Kapitel 8 erneut zu sprechen.

Bei der Suche nach Lösungen von praktischen elektromagnetischen Feldproblemen erhält der Ingenieur heute Unterstützung durch kommerziell erhältliche und benutzerfreundliche *3D-EM-Simulationsprogramme*, die es unter einer CAD-Oberfläche erlauben, ein Modell des Problems zu erstellen und die mathematischen Näherungslösungen von geeigneten Algorithmen ermitteln zu lassen. Die Einsatzmöglichkeiten dieser Werkzeuge werden in Kapitel 6 bis 8 in Form von vielen Anwendungsbeispielen deutlich.

## ■ 2.7 Übungsaufgaben

### Übung 2.1

Gegeben ist eine Zweidrahtleitung aus zwei dünnen, unendlich langen und parallel verlaufenden Leitern im Abstand  $d = 1 \text{ cm}$ . Die Ströme in jedem Leiter betragen  $I_0 = 10 \text{ mA}$  und fließen in entgegengesetzter Richtung. Die Leiter verlaufen in  $y$ -Richtung und liegen in der Ebene  $z = 0$ .

- Skizzieren Sie die Verteilung des magnetischen Feldes in einer Querschnittsebene.
- Berechnen Sie die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  auf der  $x$ -Achse.

### Übung 2.2

Gegeben ist eine luftgefüllte Koaxialleitung mit folgenden Werten: Radius des Innenleiters  $R_I = 2 \text{ mm}$ , innerer Radius des Außenleiters  $R_A = 4 \text{ mm}$  und äußerer Radius des Außenleiters  $R_0 = 5 \text{ mm}$ .

- Berechnen Sie mit Hilfe des *Durchflutungsgesetzes* das magnetische Feld im Gleichstromfalle ( $f = 0$  Hz) im gesamten Raum. (Hinweis: Der Strom verteilt sich gleichmäßig über den Leiterquerschnitt)
- Berechnen Sie die Induktivität  $L_0$  eines Leitungsstücks der Länge  $\ell$ .
- Berechnen Sie die Induktivität  $L_{HF}$  für den Hochfrequenzfall. Nehmen Sie hierzu an, dass der Strom nur auf dem Rand der Leiter in einer vernachlässigbar dicken Schicht (Skineffekt) fließt. Die Querabmessungen sollen weiterhin klein gegen die Wellenlänge sein.

### Übung 2.3

Gegeben ist eine homogene ebene Welle (HEW), die sich in einem homogenen Dielektrikum ( $\mu_r = 1$ ;  $\epsilon_r \neq 1$ ) ausbreitet. Die elektrischen und magnetischen Feldstärkevektoren lauten:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad (2.127)$$

$$\vec{H}(x, t) = \frac{A}{m} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \quad (2.128)$$

mit  $\omega = 2\pi 50$  MHz und dem Feldwellenwiderstand  $Z_F = 300 \Omega$ .

- Geben Sie die Amplitude  $E_0$  der elektrischen Feldstärke an.
- Bestimmen Sie die relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  des Mediums.
- Wie groß ist die Wellenzahl  $k$ ?
- Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  der Welle.

### Übung 2.4

Gegeben sei eine lange, mit einem magnetischen Material (relative Permeabilität  $\mu_r = 500$ ) gefüllte Zylinderspule (Länge  $\ell = 7$  cm; Durchmesser  $D = 0,2$  cm; Windungszahl  $n = 100$ ), die vom Strom  $I = 1$  A durchflossen werde. Es gelten die folgenden Annahmen: Das magnetische Feld im Innern der Zylinderspule sei konstant und verschwinde im Außenraum.

- Berechnen Sie das magnetische Feld  $H_I$  im Innern der Zylinderspule.
- Bestimmen Sie die gesamte magnetische Feldenergie  $W_m$ .
- Geben Sie die Induktivität  $L$  der Spule an.

### Übung 2.5

Gegeben ist der Vektor der elektrischen Feldstärke einer homogenen ebenen Welle mit

$$\vec{E}(x) = E_0 e^{-j k x} \vec{e}_z . \quad (2.129)$$

- Berechnen Sie mit Hilfe der 2. Maxwellschen Gleichung den Vektor der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$ .
- Berechnen Sie den Poynting-Vektor und geben Sie die durch eine Querschnittsfläche von  $A = 1 \text{ m}^2$  laufende Wirkleistung  $P$  an.

# 3

## Leistungstheorie und Signale auf Leitungen

In diesem Kapitel leiten wir die wichtigen Beziehungen für die Beschreibung des elektrischen Verhaltens von Leitungen im Bereich der Hochfrequenztechnik her. Die mathematischen Zusammenhänge stellen wir bewusst ausführlich und anschaulich dar, da Leitungen wichtige Grundelemente der Hochfrequenztechnik sind. Wie wir in Kapitel 6 noch sehen werden, können mit Leitungen effizient und kostengünstig passive Anpassschaltungen, Koppler, Leistungsteiler und Filter realisiert werden.

Der Abschnitt 3.1 behandelt die Leistungstheorie, die eine sehr effiziente Darstellung von Leitungen für zeitharmonische Vorgänge liefert. In Abschnitt 3.2 ergänzen wir die gefundenen Zusammenhänge, um auch das Verhalten von Leitungen bei sprung- und impulsförmigen Anregungen zu verstehen.

### ■ 3.1 Leistungstheorie

In diesem Abschnitt leiten wir zunächst die wichtigen Leitungskenngrößen aus einem Ersatzschaltbild und mit Hilfe von Differentialgleichungen ab.

#### 3.1.1 Ersatzschaltbild eines kurzen Leitungsstücks

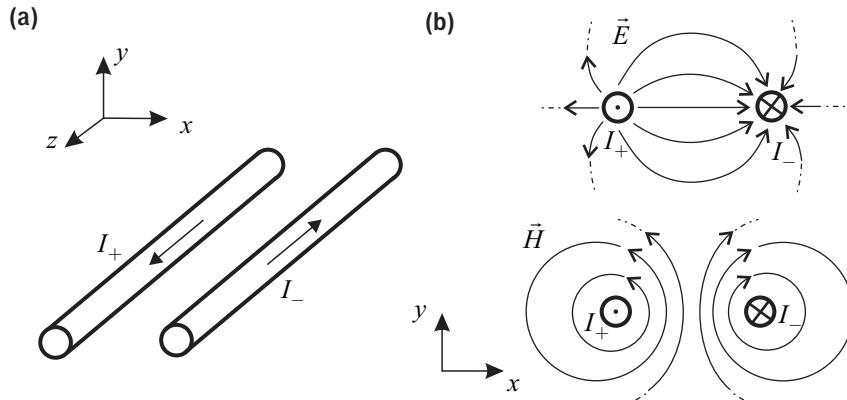
Wir wählen für unsere Betrachtungen eine Leitung, die aus einem Hin- und einem Rückleiter besteht und in einem homogenen Medium (zum Beispiel Luft) verläuft.

Die Leitung sei ferner längshomogen, d.h. der Leitungsquerschnitt ändere sich über die Länge der Leitung nicht. Bild 3.1a zeigt als Beispiel einer solchen Leitung eine symmetrische Parallel drahtleitung mit gegensinnig vom Strom durchflossenen Leitern. Zwischen den beiden Leitern bilden sich elektrische Felder aus und um die Leiter verlaufen magnetische Feldlinien.

Eine solche Leitung ist in der Lage, eine TEM-(Transversal-Elektromagnetische-)Welle zu führen [Zink00]. Die Welle enthält nur die in Bild 3.1b gezeigten *transversalen* Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes. Bei einer längshomogenen Zweileiteranordnung in einem homogenem Medium ist die TEM-Welle stets der Grund-Mode, der ab einer Frequenz von 0 Hz (Gleichstrom) ausbreitungsfähig ist<sup>1</sup>.

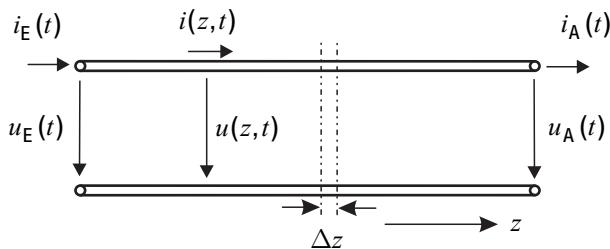
<sup>1</sup> Abhängig von der Geometrie und den Materialeigenschaften existieren bei allgemeinen Zweileiteranordnungen weitere, sog. höhere Wellentypen, die auftreten können, falls die Querabmessungen der Leitung in die Grö-

## 68 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen



**Bild 3.1** (a) Geometrie einer Paralleldrahtleitung und (b) Verteilung der transversalen elektrischen und magnetischen Feldstärke in einer Querschnittsebene

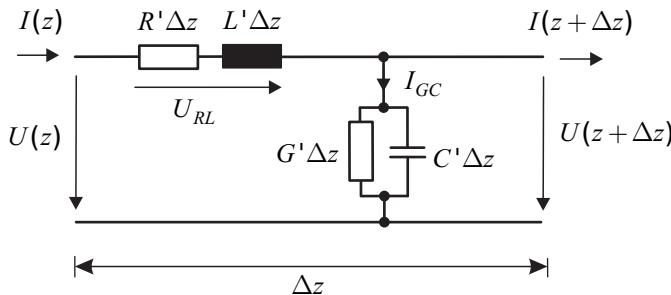
Bild 3.2 zeigt die Festlegung zeitvarianter Ströme und Spannungen an Eingang (Index E) und Ausgang (Index A) der Leitung sowie an beliebigen Orten  $z$  längs der Leitung. Für die nachfolgenden Berechnungen werden wir auf die in der Wechselstromrechnung übliche Phasorschreibweise übergehen. Wir betrachten also eine harmonische Zeitabhängigkeit und beschreiben dies mathematisch durch komplexe Amplituden.



**Bild 3.2** Definition von Strom und Spannung auf einer Leitung

Ausgangspunkt unserer weiteren Überlegungen ist das feldtheoretisch begründete Ersatzschaltbild eines kurzen Leitungsstücks, wie es in Bild 3.3 gezeigt ist. Die beiden Leiter des Leitungsstücks werden gegensinnig vom Strom durchflossen und aufgrund des Durchflutungsgesetzes von einem magnetischen Feld umwirbelt. Die magnetische Feldenergie wird im Ersatzschaltbild durch eine Serien-Induktivität  $L$  berücksichtigt. Zwischen den Leitern existiert ein elektrisches Feld. Die elektrische Feldenergie berücksichtigen wir durch eine Quer-Kapazität  $C$ . Die beiden Leiter der Leitung werden in der Realität aus einem Metall mit endlicher Leitfähigkeit bestehen und somit ohmsche Verluste aufweisen. Dies wollen wir im Ersatzschaltbild durch einen Serien-Widerstand  $R$  beschreiben. Ferner ist das homogene Füllmaterial der Leitung aufgrund von möglichen Leckströmen und dielektrischen Polarisationsverlusten verlustbehaftet. Daher führen wir einen Quer-Leitwert  $G$  ein.

Benordnung der Wellenlänge kommen. Diese höheren Wellentypen wollen wir zunächst nicht betrachten. Wir werden auf sie erst in Kapitel 4 über Wellenleiter zu sprechen kommen.



**Bild 3.3** Ersatzschaltbild eines kurzen Leitungsstückes mit Leitungsbelägen

Nun ist es unmittelbar einsichtig, dass alle vier Netzwerkelemente linear mit der Länge  $\Delta z$  des Leitungssegmentes ansteigen. Es ist daher sinnvoll, die oben eingeführten Schaltelemente auf die Länge des kurzen Leitungssegments zu beziehen, um damit längenunabhängige Kenngrößen zu erhalten. Diese sogenannten *Leitungsbeläge* lauten:

$$L' = \frac{L}{\Delta z} \quad (\text{Induktivitätsbelag} \Leftrightarrow \text{magnetische Feldenergie}) \quad (3.1)$$

$$C' = \frac{C}{\Delta z} \quad (\text{Kapazitätsbelag} \Leftrightarrow \text{elektrische Feldenergie}) \quad (3.2)$$

$$R' = \frac{R}{\Delta z} \quad (\text{Widerstandsbelag} \Leftrightarrow \text{ohmsche Verluste im Leitermaterial}) \quad (3.3)$$

$$G' = \frac{G}{\Delta z} \quad (\text{Leitwertbelag} \Leftrightarrow \text{dielektrische Verluste im homogenen Isolator}). \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Telegraphengleichung

Wir wollen nun sehen, welche Erkenntnisse sich aus dem Ersatzschaltbild in Bild 3.3 gewinnen lassen, und wenden die *Kirchhoff'schen Regeln* auf die Schaltung an. Mit der *Maschenregel* erhalten wir zunächst

$$U(z) = \underbrace{\frac{U_{RL}(z)}{I(z)(R' + j\omega L')} \Delta z}_{+U(z + \Delta z)} . \quad (3.5)$$

Wir stellen diese Gleichung um

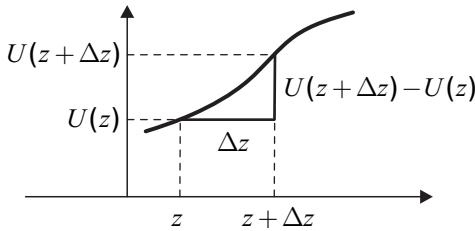
$$\frac{U(z) - U(z + \Delta z)}{\Delta z} = I(z)(R' + j\omega L') \quad (3.6)$$

und betrachten den Differenzenquotienten auf der linken Seite in Gleichung (3.6).

Bild 3.4 zeigt graphisch, dass der Differenzenquotient gerade dem negativen Wert der mittleren Steigung der Funktion  $U(z)$  zwischen den Orten  $z$  und  $z + \Delta z$  entspricht. Mit  $\Delta z \rightarrow 0$  geht der Differenzenquotient nun über in den (negativen) Differentialquotienten (Ableitung) und wir erhalten als erstes wichtiges Zwischenergebnis die folgende Differentialgleichung.

$$-\frac{dU(z)}{dz} = I(z)(R' + j\omega L') \quad (3.7)$$

## 70 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

**Bild 3.4** Zur Erläuterung von Differenzen- und Differentialquotient

Mit Hilfe der *Knotenregel* und dem Ersatzschaltbild in Bild 3.3 ergibt sich:

$$I(z) = \underbrace{\frac{I_{GC}(z)}{U(z+\Delta z)(G'+j\omega C')\Delta z}}_{+I(z+\Delta z)} . \quad (3.8)$$

Wir stellen auch diese Gleichung um

$$\frac{I(z) - I(z + \Delta z)}{\Delta z} = \underbrace{\frac{U(z + \Delta z)}{-U(z) \text{ für } \Delta z \rightarrow 0} \cdot (G' + j\omega C')}_{\rightarrow} \quad (3.9)$$

und erhalten wie zuvor für  $\Delta z \rightarrow 0$  aus dem Differenzenquotienten den (negativen) Differentialquotienten.

$$-\frac{dI(z)}{dz} = U(z)(G' + j\omega C') \quad (3.10)$$

Wir wollen die Gleichungen (3.7) und (3.10) in einer Gleichung zusammenfassen. Hierzu lösen wir Gleichung (3.7) nach dem Strom  $I(z)$  auf und setzen das Ergebnis

$$I(z) = -\frac{dU(z)}{dz} \frac{1}{(R' + j\omega L')} \quad (3.11)$$

in Gleichung (3.10) ein. Es ergibt sich eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, die *Telegraphengleichung*.

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} = U(z)(R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \quad (\text{Telegraphengleichung}) \quad (3.12)$$

Das Produkt der beiden Klammerausdrücke, die die vier Ersatzschaltbildelemente  $L'$ ,  $C'$ ,  $R'$  und  $G'$  enthalten, fassen wir zum Quadrat einer neuen Größe, der *Ausbreitungskonstanten*  $\gamma$ , zusammen:

$$\gamma^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') . \quad (3.13)$$

Die Ausbreitungskonstante ist eine komplexe Größe:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (\text{Ausbreitungskonstante}) \quad (3.14)$$

wobei wir den Realteil als *Dämpfungskonstante*<sup>2</sup> und den Imaginärteil als *Phasenkonstante* bezeichnen.

$$\alpha = \operatorname{Re}\{\gamma\} \quad (\text{Dämpfungskonstante}) \quad (3.15)$$

$$\beta = \operatorname{Im}\{\gamma\} \quad (\text{Phasenkonstante}) \quad (3.16)$$

Unter Verwendung der Ausbreitungskonstante können wir die Telegraphengleichung übersichtlicher schreiben:

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = 0 \quad . \quad (3.17)$$

Die Telegraphengleichung ist eine Differentialgleichung vom Typ einer eindimensionalen *Wellengleichung*, wie wir sie bereits im ersten Kapitel im Zusammenhang mit den Maxwell-schen Gleichungen kennengelernt haben. Die Lösungen der Wellengleichung sind Spannungswellen, die sich sowohl in positiver als auch in negativer  $z$ -Richtung längs der Leitung ausbreiten können.

Im Allgemeinen gibt es also eine Überlagerung von *hinlaufenden* (Index h) und *rücklaufenden* (Index r) Spannungswellen auf der Leitung:

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z} \quad (3.18)$$

mit den komplexen Amplitudenfaktoren  $U_h$  und  $U_r$ .

$$U_h = |U_h| e^{j\varphi_h} \quad \text{und} \quad U_r = |U_r| e^{j\varphi_r} \quad (3.19)$$

Durch Einsetzen der beiden Terme in die Telegraphengleichung kann schnell gezeigt werden, dass sie tatsächlich Lösungen dieser Gleichung sind.

### 3.1.3 Spannungs- und Stromwellen auf Leitungen

Wir schauen uns den ersten der beiden Exponentialterme aus Gleichung (3.18) einmal genauer an, indem wir zunächst für die Ausbreitungskonstante  $\gamma$ , die Dämpfungskonstante  $\alpha$  und die Phasenkonstante  $\beta$  einsetzen und dann die Spannung als physikalische Größe im Zeitbereich interpretieren.

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} = U_h e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3.20)$$

Hierzu müssen wir den Phasor mit der komplexen Exponentialfunktion  $e^{j\omega t}$  multiplizieren und dann den Realteil bilden.

$$u(z, t) = \operatorname{Re}\{U(z)e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{|U_h| e^{j\varphi_h} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} \quad (3.21)$$

<sup>2</sup> Die Dämpfungskonstante besitzt die Einheit 1/m bzw. Neper/m (unter Verwendung der Pseudo-Einheit Neper). In Datenblättern von realen Kabeln wird die Dämpfungskonstante meist in dB/m angegeben. Die Zahlenwerte lassen sich einfach ineinander umrechnen: 1/m = 8,686 dB/m (siehe auch Anhang A).

## 72 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

---

Nach Realteilbindung erhalten wir die zeitabhängige Spannung mit

$$u(z, t) = |U_h| \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z + \varphi_h) . \quad (3.22)$$

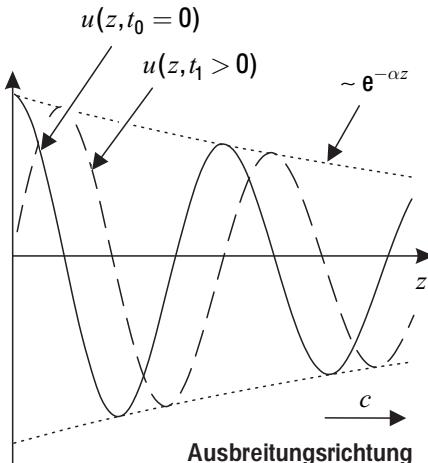
In Gleichung (3.22) werden drei Ausdrücke multiplikativ miteinander verknüpft, die folgende Bedeutung besitzen:

$$|U_h| \cong \text{Reelle Amplitude} \quad (3.23)$$

$$e^{-\alpha z} \cong \text{Dämpfungsterm} \quad (3.24)$$

$$\cos(\omega t - \beta z + \varphi_h) \cong \text{Welle, die in positiver } z\text{-Richtung fortschreitet.} \quad (3.25)$$

Die Größe  $\varphi_h$  wird als *Nullphasenwinkel* bezeichnet und hängt von der Wahl des Zeitnullpunktes ab. Durch geeignete Wahl des Zeitnullpunktes können wir erreichen, dass der Nullphasenwinkel verschwindet. In Bild 3.5 ist der räumliche Verlauf der Spannung für zwei unterschiedliche Zeitpunkte und einen Nullphasenwinkel von null dargestellt. Es ergibt sich eine exponentiell gedämpfte Welle, die in positiver  $z$ -Richtung voranschreitet.



**Bild 3.5** Räumlicher Verlauf der Welle zu den Zeitpunkten  $t_0 = 0$  und  $t_1 \approx T/4$ . (Der Nullphasenwinkel  $\varphi_h$  wurde für die Darstellung auf den Wert null gesetzt.)

Die wichtigen Kenngrößen einer Welle und deren Zusammenhänge sind bereits aus dem zweiten Kapitel bekannt und lauten:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.26)$$

mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , der Frequenz  $f$ , der Periodendauer  $T$ , der Phasenkonstante  $\beta$  und der Wellenlänge  $\lambda$ . (Die Phasenkonstante  $\beta$  entspricht der Wellenzahl  $k$  aus Kapitel 2.)

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Welle können wir berechnen, indem wir uns ansehen, wie ein Wellenberg mit der Zeit fortschreitet. Ein Maximum zeichnet sich dadurch aus, dass das Argument der Cosinusfunktion den Wert Null beibehält.

$$\omega t - \beta z + \varphi_h = 0 \quad (3.27)$$

Wir lösen diese Gleichung nach der Ortskoordinate  $z$  auf,

$$z(t) = \frac{\omega t + \varphi_h}{\beta} \quad (3.28)$$

und erhalten die Geschwindigkeit, indem wir die Ortskoordinate  $z$  nach der Zeit  $t$  ableiten

$$v_{\text{ph}} = c = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f . \quad (3.29)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass in der Zeit  $T$  (Periodendauer) die Strecke  $\lambda$  (Wellenlänge) zurückgelegt wird. In der Zeit, in der an einem Ort eine Schwingung durchlaufen wird (zeitliche Periode), hat sich die Welle also um eine Wellenlänge weiterbewegt (räumliche Periode).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Spannungswelle entspricht der aus Kapitel 2 bekannten Ausbreitungsgeschwindigkeit homogener ebener Wellen und hängt vom (homogenen) Medium mit den Materialgrößen  $\epsilon_r$  und  $\mu_r$  zwischen den Leitern ab.

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad \text{mit} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.30)$$

Bislang haben wir uns den ersten der beiden Exponentialterme aus Gleichung (3.18) angesehen. Der zweite Term weist im Exponenten lediglich ein anderes Vorzeichen auf. Dies ändert die Ausbreitungsrichtung. Der zweite Term beschreibt also eine in negative  $z$ -Richtung laufende Welle.

Als Lösung der Telegraphengleichung ergibt sich die Überlagerung gegenläufiger, exponentiell gedämpfter *Spannungswellen* ( $U_h$  =Amplitude der hinlaufenden Welle,  $U_r$  = Amplitude der rücklaufenden Welle). Die Ausbreitungskonstante  $\gamma$  beschreibt dabei die Dämpfung und Wellenlänge und ist eine wichtige *Leitungskenngröße*.

Nachdem wir nun die Zusammenhänge für Spannungen längs der Leitung ermittelt haben, wollen wir als Nächstes einen Blick auf den Strom längs der Leitung werfen. Diesen können wir aus Gleichung (3.11) und dem allgemeinen Ansatz für die Spannung in Gleichung (3.18) berechnen.

$$I(z) = -\frac{dU(z)}{dz} \cdot \frac{1}{R' + j\omega L'} = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \cdot \frac{d}{dz} (U_h e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z}) \quad (3.31)$$

Wir erhalten

$$I(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} [(-\gamma) U_h e^{-\gamma z} + \gamma U_r e^{\gamma z}] = \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} [U_h e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z}] . \quad (3.32)$$

Mit dem aus Gleichung (3.14) bekannten Zusammenhang

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (3.33)$$

können wir auch schreiben

$$I(z) = \underbrace{\sqrt{\frac{G' + j\omega C'}{R' + j\omega L'}}}_{1/Z_L} [U_h e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z}] . \quad (3.34)$$

Den Kehrwert des Wurzelausdrucks wollen wir als neue Größe *Leitungswellenwiderstand*  $Z_L$  auffassen.

$Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (\text{Leitungswellenwiderstand}) \quad (3.35)$

## 74 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

Damit erhalten wir insgesamt folgenden Verlauf von Strom- und Spannungswellen auf der Leitung:

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z} \quad (3.36)$$

$$I(z) Z_L = U_h e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z} \quad . \quad (3.37)$$

Für den Spezialfall  $U_r = 0$ , d.h. es breitet sich nur eine *rein forschreitende Welle* aus, gilt der folgende Zusammenhang:

$$Z_L = \frac{U(z)}{I(z)} \quad \text{falls } U_r = 0 \quad . \quad (3.38)$$

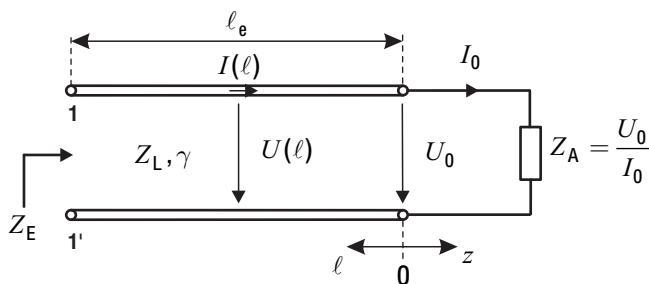
Wir können uns also folgenden Merksatz einprägen.

Der *Leitungswellenwiderstand*  $Z_L$  gibt das Verhältnis von Spannung und Strom auf einer Leitung bei einer *rein forschreitenden* Welle an. Neben der Ausbreitungskonstante ist der Leitungswellenwiderstand die zweite wichtige Leitungskenngröße.

### 3.1.4 Einseitig abgeschlossene Leitung

Der vorangegangene Abschnitt hat gezeigt, dass sich auf einer Leitung im Allgemeinen gegenläufige Wellen überlagern. Wir beschalten nun eine Leitung einseitig mit einer Abschlussimpedanz  $Z_A$  und versuchen einen Zusammenhang zwischen den Amplitudenfaktoren  $U_h$  und  $U_r$  der hin- und rücklaufenden Wellen zu ermitteln.

Bild 3.6 zeigt die beschaltete Leitung mit der Leitungslänge  $\ell_e$ . Am Leitungsende befindet sich die Impedanz  $Z_A = U_0 / I_0$ . Wir legen den Ursprung der Längskoordinate  $z$  an das Ende der Leitung<sup>3</sup> und definieren eine neue Laufvariable  $\ell$  vom Ende der Leitung mit  $\ell = -z$ .



**Bild 3.6** Leitung, die an ihrem Ende mit der Impedanz  $Z_A$  abgeschlossen ist

Betrachten wir die Spannung auf der Leitung, so gilt bekanntlich:

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z} \quad . \quad (3.39)$$

<sup>3</sup> Dies ist die in der Literatur im Allgemeinen gewählte Festlegung (siehe [Zink00] [Mein92] [Heue09]) bei der Herleitung der Leitungstheorie.

Am Leitungsende ( $z = -\ell = 0$ ) ist also:

$$U_0 = U(0) = U_h + U_r \quad . \quad (3.40)$$

Für den Strom auf der Leitung gilt:

$$I(z)Z_L = U_h e^{-\gamma z} - U_r e^{\gamma z} \quad . \quad (3.41)$$

Somit ist der Strom am Leitungsende

$$I_0 Z_L = I(0) Z_L = U_h - U_r \quad . \quad (3.42)$$

Lösen wir Gleichung (3.40) nach  $U_h$  auf, so erhalten wir:

$$U_h = U_0 - U_r \quad . \quad (3.43)$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.42) ein, so ergibt sich:

$$I_0 Z_L = U_0 - 2U_r \quad . \quad (3.44)$$

Also erhalten wir für  $U_r$

$$U_r = \frac{1}{2} (U_0 - I_0 Z_L) \quad (\text{Amplitude der rücklaufenden Welle}) \quad (3.45)$$

und für  $U_h$

$$U_h = \frac{1}{2} (U_0 + I_0 Z_L) \quad (\text{Amplitude der hinlaufenden Welle}). \quad (3.46)$$

Anhand von Gleichung (3.45) kann man sich überlegen, für welchen Fall keine rücklaufende Welle ( $U_r = 0$ ) existiert. Der Ausdruck in der Klammer wird null, falls das Verhältnis von Spannung und Strom am Leitungsende gerade dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  entspricht.

$$U_0 - I_0 Z_L = 0 \quad \rightarrow \quad Z_L = \frac{U_0}{I_0} \stackrel{!}{=} Z_A \quad (3.47)$$

Das Verhältnis von Spannung und Strom am Leitungsende entspricht aber gerade der Abschlussimpedanz  $Z_A = U_0 / I_0$ .

Falls die Abschlussimpedanz  $Z_A$  und der Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  übereinstimmen, so existiert auf der Leitung eine rein fortschreitende Welle. Die Amplitude der rücklaufenden Welle verschwindet ( $U_r = 0$ ).

Setzen wir nun die allgemeinen Ergebnisse für  $U_h$  und  $U_r$  in die Gleichung (3.39) ein und verwenden zudem die neue Koordinate  $\ell = -z$ , so erhalten wir

$$U(\ell) = U_h e^{\gamma \ell} + U_r e^{-\gamma \ell} = \frac{1}{2} (U_0 + I_0 Z_L) e^{\gamma \ell} + \frac{1}{2} (U_0 - I_0 Z_L) e^{-\gamma \ell} \quad . \quad (3.48)$$

## 76 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

---

Wir sortieren die Gleichungsbestandteile um und nutzen die hyperbolischen Funktionen

$$U(\ell) = U_0 \underbrace{\frac{1}{2} (e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell})}_{\cosh(\gamma\ell)} + I_0 Z_L \underbrace{\frac{1}{2} (e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell})}_{\sinh(\gamma\ell)} = U_0 \cosh(\gamma\ell) + I_0 Z_L \sinh(\gamma\ell) . \quad (3.49)$$

Entsprechend können die Gleichungen für  $U_h$  und  $U_r$  in die allgemeine Gleichung für den Strom eingesetzt werden.

$$I(\ell) Z_L = U_h e^{\gamma\ell} - U_r e^{-\gamma\ell} = \frac{1}{2} (U_0 + I_0 Z_L) e^{\gamma\ell} - \frac{1}{2} (U_0 - I_0 Z_L) e^{-\gamma\ell} \quad (3.50)$$

Aufgelöst nach  $I(\ell)$  ergibt sich

$$I(\ell) = \frac{U_0}{Z_L} \underbrace{\frac{1}{2} (e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell})}_{\sinh(\gamma\ell)} + I_0 \underbrace{\frac{1}{2} (e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell})}_{\cosh(\gamma\ell)} = I_0 \cosh(\gamma\ell) + \frac{U_0}{Z_L} \sinh(\gamma\ell) . \quad (3.51)$$

Wir erhalten also für Strom und Spannung:

$$U(\ell) = U_0 \cosh(\gamma\ell) + I_0 Z_L \sinh(\gamma\ell) \quad (3.52)$$

$$I(\ell) = I_0 \cosh(\gamma\ell) + \frac{U_0}{Z_L} \sinh(\gamma\ell) . \quad (3.53)$$

Mit den beiden letzten Gleichungen ist es möglich – bei Kenntnis von Strom und Spannung am Ende der Leitung –, Strom und Spannung an jeder Stelle  $\ell$  auf der Leitung zu berechnen.

### 3.1.5 Eingangsimpedanz einer abgeschlossenen Leitung

Wir sehen uns noch einmal das Bild 3.6 einer mit der Impedanz  $Z_A$  abgeschlossenen Leitung an. Bislang haben wir  $U(\ell)$  und  $I(\ell)$  in Abhängigkeit von  $U_0$  und  $I_0$  betrachtet. Nun berechnen wir die Eingangsimpedanz  $Z_E$ , indem wir die Formeln für  $U(\ell)$  und  $I(\ell)$  aus den Gleichungen (3.52) und (3.53) verwenden und für die Längenvariable  $\ell$  die Gesamtlänge der Leitung  $\ell_e$  einsetzen.

$$Z_E = \frac{U(\ell_e)}{I(\ell_e)} = \frac{U_0 \cosh(\gamma\ell_e) + I_0 Z_L \sinh(\gamma\ell_e)}{I_0 \cosh(\gamma\ell_e) + \frac{U_0}{Z_L} \sinh(\gamma\ell_e)} \quad (3.54)$$

Weiterhin nutzen wir aus, dass der Zusammenhang zwischen  $U_0$  und  $I_0$  über die Impedanz  $Z_A$  mit

$$Z_A = \frac{U_0}{I_0} \quad (3.55)$$

gegeben ist.

$$Z_E = \frac{U_0}{I_0} \cdot \frac{\cosh(\gamma\ell_e) + \frac{I_0}{U_0} Z_L \sinh(\gamma\ell_e)}{\cosh(\gamma\ell_e) + \frac{U_0}{I_0 Z_L} \sinh(\gamma\ell_e)} = \underbrace{\frac{1/Z_A}{Z_A/Z_L}}_{Z_A/Z_L} \quad (3.56)$$

Somit erhalten wir also für die Eingangsimpedanz:

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{\cosh(\gamma\ell_e) + \frac{Z_L}{Z_A} \sinh(\gamma\ell_e)}{\cosh(\gamma\ell_e) + \frac{Z_A}{Z_L} \sinh(\gamma\ell_e)}$$

(Eingangsimpedanz einer verlustbehafteten Leitung). (3.57)

Die Eingangsimpedanz  $Z_E$  einer Leitung ist abhängig von der Abschlussimpedanz  $Z_A$ , der Leitungslänge  $\ell = \ell_e$  und den Leitungskenngrößen Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  und Ausbreitungskonstante  $\gamma$ .

### Beispiel 3.1 Angepasst abgeschlossene Leitung

Der allgemeine Zusammenhang nach Gleichung (3.57) vereinfacht sich in der Praxis sehr häufig. Wie wir noch sehen werden, wird im Bereich der Hochfrequenztechnik der Abschlusswiderstand in der Regel gerade eben so gewählt, dass er mit dem Leitungswellenwiderstand der Leitung übereinstimmt, also gilt  $Z_A = Z_L$ . Man nennt dies eine *angepasst abgeschlossene Leitung*. Setzen wir  $Z_A = Z_L$  in Gleichung (3.57) ein, so erkennen wir, dass der Eingangswiderstand  $Z_E$  gleich der Abschlussimpedanz  $Z_A = Z_L$  und unabhängig von der Leitungslänge  $\ell_e$  und der Ausbreitungskonstante  $\gamma$  ist. Es gilt:

$$Z_E = Z_A = Z_L \quad (\text{für beliebige Leitungslängen } \ell_e). \quad (3.58)$$

Wir werden uns diesen wichtigen Fall im Zusammenhang mit verlustlosen Leitungen noch einmal genauer anschauen. ■

Bei einer *angepassten Leitung* ( $Z_A = Z_L$ ) ist – unabhängig von der Leitungslänge – die Eingangsimpedanz  $Z_E$  gleich dem Leitungswellenwiderstand ( $Z_E = Z_L$ ). Dieser Fall tritt in der Hochfrequenztechnik häufig auf und wird als *Anpassung* bezeichnet.

### Beispiel 3.2 Elektrisch kurze Leitung

Ein zweiter Spezialfall ergibt sich für Leitungen, die kurz gegenüber der Wellenlänge sind ( $\ell_e \ll \lambda$ ). Dies ist bei niedrigen Frequenzen in der Regel der Fall. Der Faktor  $\gamma\ell_e$  nimmt dann sehr kleine Werte an, so dass der Ausdruck  $\cosh(\gamma\ell_e)$  gegen eins und der Term  $\sinh(\gamma\ell_e)$  gegen null konvergieren. Setzen wir dies in Gleichung (3.57) ein, so erhalten wir wieder:

$$Z_E = Z_A \quad (\text{für beliebige } Z_L \text{ and } \gamma). \quad (3.59)$$

Die Ausgangsimpedanz erscheint als Eingangsimpedanz unabhängig von den Leitungskenngrößen. ■

## 78 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

---

Bei niedrigen Frequenzen und elektrisch kurzen Leitungslängen (Leitungslänge ist deutlich kleiner als die Wellenlänge) muss man sich nicht mit der Leitungstheorie befassen, da in diesem Fall die Eingangsimpedanz  $Z_E$  gleich der Abschlussimpedanz  $Z_A$  ist, unabhängig von den Leitungskenngrößen Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  und Ausbreitungskonstante  $\gamma$ .

### 3.1.6 Verlustlose Leitungen

In der Praxis können die meisten technisch relevanten Leitungen als in erster Näherung verlustfrei angesehen werden, so dass wir uns nun eingehender mit diesen idealisierten verlustlosen Leitungen auseinandersetzen wollen.

Verlustlosigkeit bedeutet, dass der ohmsche Widerstand im Leitermaterial und die dielektrischen Verluste vernachlässigt werden. Im Ersatzschaltbild (Bild 3.3) streichen wir daher  $R'\Delta z$  und  $G'\Delta z$ . Der Widerstand  $R'\Delta z$  geht gegen null. Der Leitwert  $G'\Delta z$  wird ebenso null. Der entsprechende Impedanzwert wird also unendlich groß und kann aufgrund der Parallelschaltung mit  $C'\Delta z$  entfernt werden.

Die Ausbreitungskonstante vereinfacht sich dann zu

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = j\omega\sqrt{L'C'} \quad (3.60)$$

und ist rein imaginär. Es gilt also:

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \beta = \omega\sqrt{L'C'} \quad . \quad (3.61)$$

Bei einer verlustlosen Leitung verschwindet die Dämpfungskonstante  $\alpha$  und die Phasenkonstante  $\beta$  ist proportional zur Kreisfrequenz  $\omega$ .

Aus dem Leitungswellenwiderstand wird

$$Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \in \mathbb{R} \quad . \quad (3.62)$$

Bei einer verlustlosen Leitung ist der Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  *rein reell* und *unabhängig von der Kreisfrequenz  $\omega$* .

Aus den Gleichungen (3.61) und (3.62) folgt, dass der Induktivitätsbelag  $L'$  und der Kapazitätsbelag  $C'$  voneinander abhängen. Wenn wir Gleichung (3.61) durch  $\beta$  dividieren und den Quotienten  $\omega/\beta$  durch die Phasengeschwindigkeit  $c$  ausdrücken, so erhalten wir:

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = v_{ph} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad . \quad (3.63)$$

Lösen wir diese Gleichung nach  $L'$  auf und setzen sie in Gleichung (3.62) ein, so ergibt sich:

$$\boxed{Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{c_0 C'}} . \quad (3.64)$$

Alternativ können wir Gleichung (3.63) nach  $C'$  auflösen und in Gleichung (3.62) einsetzen. In diesem Falle berechnen wir den Leitungswellenwiderstand mit:

$$\boxed{Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{c_0 L'}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}} . \quad (3.65)$$

Der Leitungswellenwiderstand kann also alternativ über eine Messung oder Berechnung des Kapazitätsbelages oder des Induktivitätsbelages ermittelt werden, falls die relative Dielektrizitäts- und Permeabilitätszahl des verwendeten Materials bekannt sind.

Sehen wir uns weiterhin die Eingangsimpedanz bei einer mit der Impedanz  $Z_A$  abgeschlossenen Leitung an. Allgemein gilt für eine verlustbehaftete Leitung:

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{\cosh(\gamma \ell_e) + \frac{Z_L}{Z_A} \sinh(\gamma \ell_e)}{\cosh(\gamma \ell_e) + \frac{Z_A}{Z_L} \sinh(\gamma \ell_e)} . \quad (3.66)$$

Wir können für eine rein imaginäre Ausbreitungskonstante  $\gamma = j\beta$  die hyperbolischen Funktionen durch die trigonometrischen Funktionen ausdrücken. Es gilt

$$\cosh(\gamma \ell) = \cos(\beta \ell) \quad (3.67)$$

$$\sinh(\gamma \ell) = j \sin(\beta \ell) \quad (3.68)$$

wie wir schnell durch ein paar kurze Umformungen zeigen können. Die hyperbolischen Funktionen drücken wir dazu zunächst durch die komplexe Exponentialfunktion aus.

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad (3.69)$$

Weiterhin benötigen wir die *Eulersche Formel*.

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)} \quad (3.70)$$

Somit können wir die Zusammenhänge in den Gleichungen (3.67) und (3.68) schnell herleiten:

$$\begin{aligned} \cosh(\gamma \ell) &= \cosh(j\beta \ell) = \frac{1}{2} (e^{j\beta \ell} + e^{-j\beta \ell}) \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\beta \ell) + j \sin(\beta \ell) + \cos(\beta \ell) - j \sin(\beta \ell)] = \cos(\beta \ell) \end{aligned} \quad (3.71)$$

und

$$\begin{aligned} \sinh(\gamma \ell) &= \sinh(j\beta \ell) = \frac{1}{2} (e^{j\beta \ell} - e^{-j\beta \ell}) \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\beta \ell) + j \sin(\beta \ell) - \cos(\beta \ell) + j \sin(\beta \ell)] = j \sin(\beta \ell) . \end{aligned} \quad (3.72)$$

## 80 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

---

Damit wird aus der Eingangsimpedanz:

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{\cos(\beta\ell_e) + j \frac{Z_L}{Z_A} \sin(\beta\ell_e)}{\cos(\beta\ell_e) + j \frac{Z_A}{Z_L} \sin(\beta\ell_e)} . \quad (3.73)$$

Unter Verwendung der Tangensfunktion erhalten wir:

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_A} \tan(\beta\ell_e)}{1 + j \frac{Z_A}{Z_L} \tan(\beta\ell_e)} \quad (\text{Eingangsimpedanz einer verlustlosen Leitung}). \quad (3.74)$$

Spannung und Strom auf der Leitung sind dann mit den Gleichungen (3.52) und (3.53):

$$U(\ell) = U_0 \cos(\beta\ell) + j I_0 Z_L \sin(\beta\ell) \quad (3.75)$$

$$I(\ell) = I_0 \cos(\beta\ell) + j \frac{U_0}{Z_L} \sin(\beta\ell) . \quad (3.76)$$

### 3.1.7 Leitungen mit geringen Verlusten

Reale Leitungen können nur in erster Näherung und bei vergleichsweise kurzen Leitungslängen als verlustfrei betrachtet werden. Bei größeren Längen erwarten wir einen signifikanten Abfall der Spannung über der Leitung, wie dies in Bild 3.5 angedeutet ist. Die Größe, die die Amplitudenabnahme beschreibt, ist die Dämpfungskonstante  $\alpha$ . Bei der nachfolgenden Untersuchung wird es uns also darum gehen, hier eine sinnvolle Abschätzung für diese Größe zu erhalten, mit der wir im nächsten Kapitel bei praktischen Leitungen Berechnungen durchführen können.

Wir wollen sehen, wie sich die Kenngrößen einer Leitung ändern, wenn wir *schwache Verluste* zulassen. Wir sprechen von geringen Verlusten, falls die Impedanzen bzw. Admittanzen der reaktiven Elemente  $L$  und  $C$  des Ersatzschaltbildes eines kurzen Leitungsstückes nach Bild 3.3 deutlich größer als die resistiven Elemente  $R$  und  $G$  sind.

$$|R'| \ll |j\omega L'| \quad \text{und} \quad |G'| \ll |j\omega C'| \quad (3.77)$$

Für den Leitungswellenwiderstand erhalten wir den bereits bei einer verlustlosen Leitung erzielten *reellen* Wert. Bei der verlustlosen Leitung gilt dieser Wert exakt, hier stellt er eine *ausreichend gute Näherung* dar, da der sich errechnende Imaginärteil klein ist.

$$Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \in \mathbb{R} \quad (3.78)$$

Bei der Ausbreitungskonstante  $\gamma$  wollen wir etwas genauer hinsehen, da wir für den Realteil, die Dämpfungskonstante  $\alpha$ , eine sinnvolle Abschätzung suchen. Wir formen zunächst die

Gleichung für  $\gamma$  um:

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{\left(1 + \frac{G'}{j\omega C'}\right)\left(1 + \frac{R'}{j\omega L'}\right)} \\ &= j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{1 + \frac{G'}{j\omega C'} + \frac{R'}{j\omega L'} + \frac{G'}{j\omega C'}\frac{R'}{j\omega L'}}.\end{aligned}\quad (3.79)$$

Die Brüche  $G'/j\omega C'$  und  $R'/j\omega L'$  unter dem großen Wurzelsymbol sind deutlich kleiner als eins. Der letzte Bruch, der aus dem Produkt der beiden vorgenannten Ausdrücke besteht, wird nochmals deutlich kleiner sein, so dass wir ihn vernachlässigen wollen.

$$\gamma = \alpha + j\beta \approx j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{1 + \frac{G'}{j\omega C'} + \frac{R'}{j\omega L'}}\quad (3.80)$$

Um Real- und Imaginärteil des Ausdrucks zu trennen, verwenden wir eine Näherung, die sich aus der Potenzreihenentwicklung der Wurzelfunktion [Bron08] ergibt:

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \frac{x^3}{16} - \dots \approx 1 \pm \frac{x}{2} \quad \text{falls} \quad |x| \ll 1. \quad (3.81)$$

Aus Gleichung (3.80) erhalten wir somit:

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{L'C'}\left(1 + \frac{G'}{j2\omega C'} + \frac{R'}{j2\omega L'}\right) = j\underbrace{\omega\sqrt{L'C'}}_{\beta} + \underbrace{\frac{G'\sqrt{L'}}{2\sqrt{C'}} + \frac{R'\sqrt{C'}}{2\sqrt{L'}}}_{\alpha = \alpha_{\text{diel}} + \alpha_{\text{met}}}. \quad (3.82)$$

Die Phasenkonstante ist gegenüber dem verlustlosen Fall (näherungsweise) unverändert:

$$\boxed{\beta \approx \omega\sqrt{L'C'}}. \quad (3.83)$$

Für die Dämpfungskonstante können wir unter Verwendung des Leitungswellenwiderstandes aus Gleichung (3.78) schreiben:

$$\boxed{\alpha \approx \alpha_{\text{diel}} + \alpha_{\text{met}} \approx \frac{G'Z_L}{2} + \frac{R'}{2Z_L}}. \quad (3.84)$$

Bei einer realen Leitung mit geringen Verlusten stellen der Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  und die Phasenkonstante  $\beta$  der verlustlosen Leitung sinnvolle Näherungen dar. Die sich ergebende Dämpfungskonstante  $\alpha = \alpha_{\text{diel}} + \alpha_{\text{met}}$  kann in zwei Anteile separiert werden, die einerseits die dielektrischen und andererseits die metallischen Verluste beschreiben.

### 3.1.8 Verschiedene Leitungsabschlüsse einer verlustlosen Leitung

Die Eingangsimpedanz hängt unter anderem vom Leitungsabschluss ab. Wir wollen uns die Zusammenhänge für drei wichtige Leitungsabschlüsse ansehen: Anpassung ( $Z_A = Z_L$ ), Leerlauf und Kurzschluss.

## 82 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

---

### 3.1.8.1 Angepasste Leitung

Wir wählen nun als Leitungsabschluss einer verlustlosen Leitung gemäß Bild 3.7a eine Impedanz  $Z_A$ , die gerade dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  entspricht ( $Z_A = Z_L$ ). Setzen wir dies in die Gleichung (3.74) zur Berechnung der Eingangsimpedanz  $Z_E$  ein, so erhalten wir

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_A} \tan(\beta \ell_e)}{1 + j \frac{Z_A}{Z_L} \tan(\beta \ell_e)} = Z_A = Z_L \quad (\text{für beliebige Leitungslängen } \ell_e). \quad (3.85)$$

Dies entspricht dem aus Beispiel 3.1 bekannten Zusammenhang in Gleichung (3.58). Wir sprechen von einer *angepassten Leitung*.

Sehen wir uns weiterhin die Spannung  $U(\ell)$  und den Strom  $I(\ell)$  längs der Leitung an. Für das Verhältnis von Spannung  $U_0$  zu Strom  $I_0$  am Leitungsende gilt für den Fall  $Z_A = Z_L$

$$Z_A = \frac{U_0}{I_0} \stackrel{!}{=} Z_L. \quad (3.86)$$

Nach Gleichung (3.75) gilt zunächst für die Spannung auf der Leitung

$$U(\ell) = U_0 \cos(\beta \ell) + j \underbrace{I_0 Z_L}_{U_0} \sin(\beta \ell) = U_0 [\cos(\beta \ell) + j \sin(\beta \ell)] = U_0 e^{j\beta \ell}. \quad (3.87)$$

Dies ist eine in negative  $\ell$ -Richtung (d.h. positive  $z$ -Richtung) fortschreitende *Spannungswelle*. Ebenso erhalten wir aus Gleichung (3.76) für den Strom

$$I(\ell) = I_0 \cos(\beta \ell) + j \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \sin(\beta \ell) = I_0 [\cos(\beta \ell) + j \sin(\beta \ell)] = I_0 e^{j\beta \ell}. \quad (3.88)$$

Dies ist eine in negative  $\ell$ -Richtung (d.h. positive  $z$ -Richtung) fortschreitende *Stromwelle*.

Schauen wir uns die Beträge der Phasoren von Spannung und Strom auf der Leitung an, so erkennen wir, dass sie unabhängig vom Ort  $\ell$  sind.

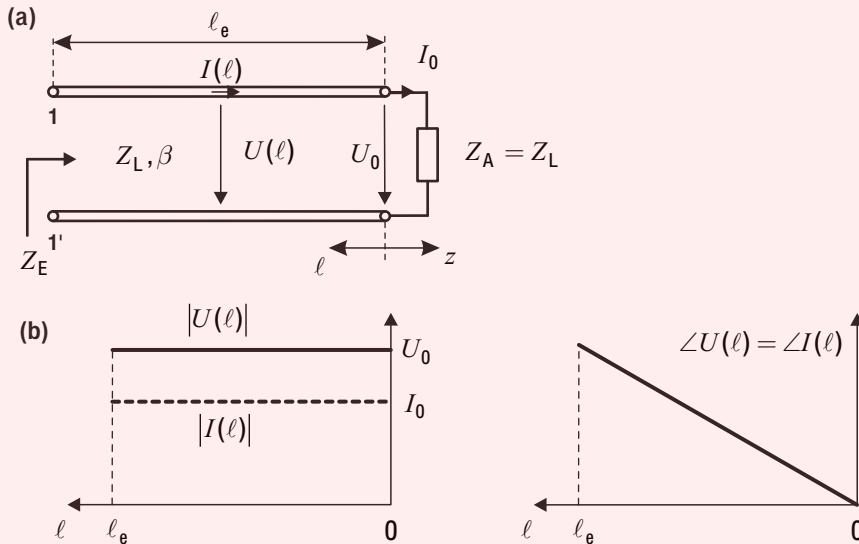
$$|U(\ell)| = U_0 = \text{const.} \quad \text{und} \quad |I(\ell)| = I_0 = \text{const.} \quad (3.89)$$

Weiterhin ist die *Phase* von Strom und Spannung gleich und verläuft *linear ansteigend* mit der Längsvariablen  $\ell$  bzw. linear abfallend mit der Längsvariablen  $z$ .

$$\angle U(\ell) = \angle I(\ell) = \beta \ell = -\beta z \quad (3.90)$$

Der konstante Verlauf des Betrages sowie der lineare Verlauf der Phase von Spannung und Strom sind in Bild 3.7b gezeigt.

In der Hochfrequenztechnik werden Leitungen sehr häufig *angepasst*, also mit ihrem Leitungswellenwiderstand abgeschlossen ( $Z_A = Z_L$ ), betrieben. Der Eingangswiderstand ist dann gleich dem Leitungswellenwiderstand ( $Z_E = Z_L$ ). Auf der Leitung existieren nur *rein fortschreitende Spannungs- und Stromwellen* vom Anfang zum Ende der Leitung. Es gibt keine rücklaufende Welle. Daher findet auch nur in einer Richtung Leistungstransport statt. Der Betrag von Strom und Spannung auf der Leitung ist *konstant*, die Phase läuft *linear abfallend* mit der Längsvariablen  $z$  (vom Anfang zum Ende der Leitung).



**Bild 3.7** (a) Schaltung und (b) Verlauf des Betrages und der Phase von Spannung und Strom längs einer angepassten Leitung ( $Z_A = Z_L$ )

### 3.1.8.2 Kurzgeschlossene Leitung

Wir wählen nun als Leitungsabschluss einer verlustlosen Leitung gemäß Bild 3.8a einen Kurzschluss  $Z_A = 0$ . Setzen wir dies in die Gleichung (3.74) zur Berechnung der Eingangsimpedanz  $Z_E$  ein, so ist

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_A} \tan(\beta \ell_e)}{1 + j \frac{Z_A}{Z_L} \tan(\beta \ell_e)} = j Z_L \tan(\beta \ell_e) = j X_E \quad , \quad (3.91)$$

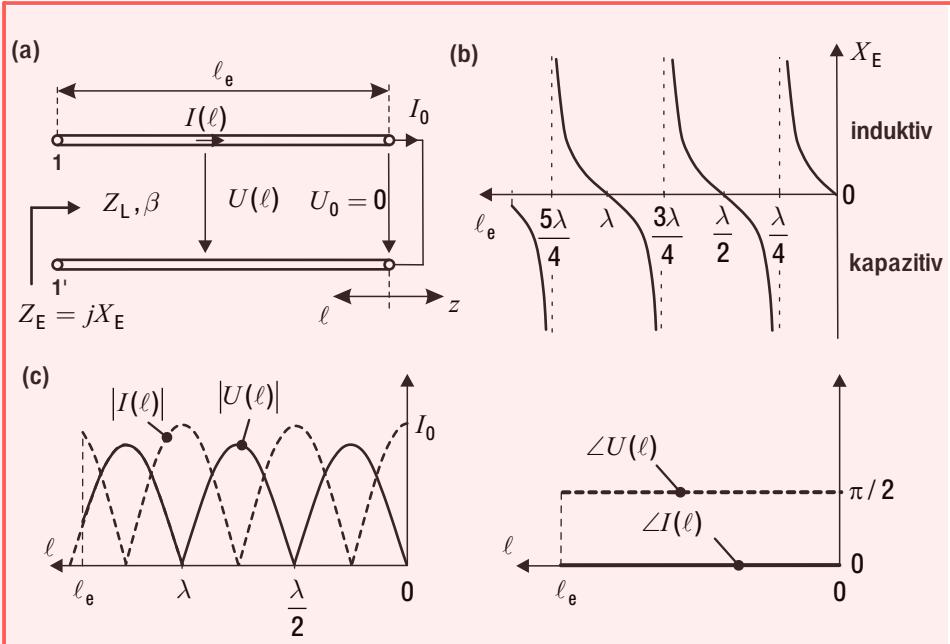
d.h. die Eingangsimpedanz ist eine reine *Reaktanz*. Bild 3.8b zeigt den Verlauf des Imaginärteils der Eingangsimpedanz. Die Reaktanz verläuft abwechselnd zunächst durch einen positiven, dann durch einen negativen Bereich und so fort. Ist die Reaktanz größer null, so können wir die Eingangsimpedanz als Induktivität interpretieren, es ergibt sich ein *induktives Verhalten*.

$$Z_E = j X_E = j \omega L \quad (3.92)$$

Ist die Reaktanz jedoch kleiner null, so können wir die Eingangsimpedanz als Kapazität interpretieren, es ergibt sich ein *kapazitives Verhalten*.

$$Z_E = j X_E = \frac{1}{j \omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (3.93)$$

Das Verhalten alterniert jeweils nach Vielfachen von Viertelwellenlängen. Für den Fall  $0 < \ell < \lambda/4$  ist die Eingangsimpedanz induktiv, für  $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$  kapazitiv und so fort. Für  $\ell = \lambda/4$  wird aus dem Kurzschluss gerade ein Leerlauf und für  $\ell = \lambda/2$  erscheint am Eingang wieder ein Kurzschluss. Die Leitungslängen  $\ell = \lambda/4$  und  $\ell = \lambda/2$  haben noch eine spezielle Bedeutung, wie wir in den Abschnitten über Koppler und Filter erkennen werden.



**Bild 3.8** (a) Schaltung, (b) Imaginärteil der Eingangsimpedanz sowie (c) Verlauf des Betrages und der Phase von Spannung und Strom längs einer kurzgeschlossenen Leitung ( $Z_A = 0$ )

Schließlich sehen wir uns Strom und Spannung auf der Leitung an. Nach Gleichung (3.75) gilt wegen des Kurzschlusses am Leitungsende ( $U_0 = 0$ ) für die Spannung  $U(\ell)$ :

$$U(\ell) = \underbrace{U_0}_{=0} \cos(\beta\ell) + j I_0 Z_L \sin(\beta\ell) = j I_0 Z_L \sin(\beta\ell) . \quad (3.94)$$

Um das Ergebnis zu interpretieren, drücken wir die Sinus-Funktion durch Exponentialterme aus.

$$\sin(x) = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx}) \quad (3.95)$$

Somit ist die Spannung auf der Leitung

$$U(\ell) = \frac{1}{2} I_0 Z_L (e^{j\beta\ell} - e^{-j\beta\ell}) . \quad (3.96)$$

Die Spannung  $U(\ell)$  längs der Leitung stellt sich als Überlagerung zweier *gegenläufiger Wellen* dar. Die Spannungswellen besitzen die gleiche Amplitude aber entgegengesetztes Vorzeichen.

Entsprechend ergibt sich nach Gleichung (3.76) und  $U_0 = 0$

$$I(\ell) = I_0 \cos(\beta\ell) + j \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{=0} \sin(\beta\ell) = I_0 \cos(\beta\ell) . \quad (3.97)$$

Wir drücken die Kosinus-Funktion durch Exponentialterme aus

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \quad (3.98)$$

und erhalten für den Strom  $I(\ell)$  längs der Leitung

$$I(\ell) = \frac{1}{2} I_0 \left( e^{j\beta\ell} + e^{-j\beta\ell} \right) . \quad (3.99)$$

Der Strom  $I(\ell)$  längs der Leitung stellt sich als Überlagerung zweier *gegenläufiger Wellen* dar. Die Stromwellen besitzen die gleiche Amplitude und gleiche Vorzeichen.

Für die Spannungs- und Stromverteilung erscheint das Phänomen einer *stehenden Welle*. Der Betrag von Spannung und Strom ändert sich sinus- bzw. cosinusförmig. Spannung und Strom besitzen ortsfeste Minima und Maxima (Bild 3.8c). Der Abstand zweier Maxima oder zweier Minima beträgt eine halbe Wellenlänge. Aufgrund des Kurzschlusses hat die Spannung am Ende ein Minimum und der Strom ein Maximum.

Die Eingangsimpedanz einer kurzgeschlossenen, verlustlosen Leitung ist *rein reaktiv*. Abhängig von der Leitungslänge ist das Verhalten induktiv oder kapazitiv. Auf der Leitung überlagern sich gegenläufige Wellen gleicher Amplitude zu einer *stehenden Welle*. Spannung und Strom sind räumlich um eine Viertelwellenlänge gegeneinander verschoben. Die Phasen von Strom und Spannung sind konstant und die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom beträgt  $90^\circ$  wie es für reaktive Komponenten charakteristisch ist.

In der Praxis kann mit einer kurzgeschlossenen Leitung kapazitives oder induktives Bauteilverhalten nachgebildet werden.

### 3.1.8.3 Leerlaufende Leitung

Als weiteren Leitungsschluss einer verlustlosen Leitung sehen wir uns nun einen Leerlauf  $Z_A \rightarrow \infty$  gemäß Bild 3.9a an. Setzen wir dies in die Gleichung (3.74) zur Berechnung der Eingangsimpedanz  $Z_E$  ein, so erhalten wir

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_A} \tan(\beta\ell_e)}{1 + j \frac{Z_A}{Z_L} \tan(\beta\ell_e)} = -j Z_L \cot(\beta\ell_e) = j X_E , \quad (3.100)$$

d.h. die Eingangsimpedanz ist – wie im Falle der kurzgeschlossenen Leitung – erneut rein reaktiv. Bild 3.9b zeigt den Verlauf des Imaginärteils der Eingangsimpedanz. Die Reaktanz verläuft abwechselnd zunächst durch einen negativen (kapazitiven), dann durch einen positiven (induktiven) Bereich.

Das Verhalten alterniert jeweils nach Vielfachen von Viertelwellenlängen. Für den Fall  $0 < \ell < \lambda/4$  ist die Eingangsimpedanz kapazitiv, für  $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$  induktiv und so fort. Für  $\ell = \lambda/4$  wird aus dem Leerlauf gerade ein Kurzschluss und für  $\ell = \lambda/2$  erscheint am Eingang wieder ein Leerlauf.

Abschließend betrachten wir noch Strom und Spannung auf der Leitung. Nach Gleichung (3.75) gilt wegen des Leerlaufes am Leitungsende ( $I_0 = 0$ ):

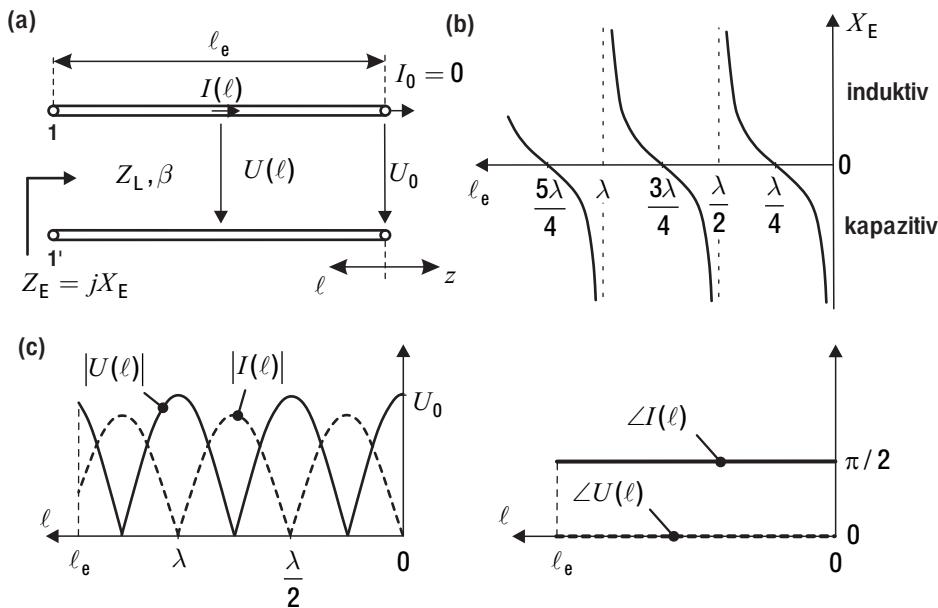
$$U(\ell) = U_0 \cos(\beta\ell) + j \underbrace{I_0}_{=0} Z_L \sin(\beta\ell) = U_0 \cos(\beta\ell) . \quad (3.101)$$

## 86 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

Entsprechend ergibt sich nach Gleichung (3.76) und  $I_0 = 0$ :

$$I(\ell) = \underbrace{I_0}_{=0} \cos(\beta\ell) + j \frac{U_0}{Z_L} \sin(\beta\ell) = j \frac{U_0}{Z_L} \sin(\beta\ell) . \quad (3.102)$$

Für die Spannungs- und Stromverteilung erscheint erneut das Phänomen einer *stehenden Welle*. Der Betrag von Spannung und Strom ändert sich sinus- bzw. cosinusförmig. Spannung und Strom besitzen ortsfeste Minima und Maxima. Der Abstand zweier Maxima oder zweier Minima beträgt eine halbe Wellenlänge. Aufgrund des Leerlaufes hat die Spannung am Ende ein Maximum und der Strom ein Minimum.



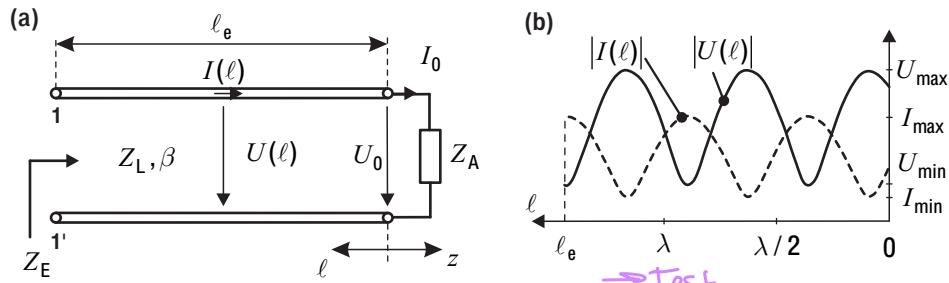
**Bild 3.9** (a) Schaltung, (b) Imaginärteil der Eingangsimpedanz sowie (c) Verlauf des Betrages und der Phase von Spannung und Strom längs einer leerlaufenden Leitung ( $Z_A \rightarrow \infty$ )

Die Eingangsimpedanz  $Z_E$  einer leerlaufenden, verlustlosen Leitung ist *rein reaktiv*. Abhängig von der Leitungslänge ist das Verhalten induktiv oder kapazitiv. Auf der Leitung überlagern sich gegenläufige Wellen gleicher Amplitude zu einer *stehenden Welle*. Spannung und Strom sind räumlich um eine Viertelwellenlänge gegeneinander verschoben. Die Phasen von Strom und Spannung sind konstant und die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom beträgt  $90^\circ$  wie es für reaktive Komponenten charakteristisch ist.

In der Praxis kann mit einer leerlaufenden Leitung kapazitives oder induktives Bauteilverhalten nachgebildet werden.

### 3.1.8.4 Allgemeiner Abschluss

Für einen allgemeinen Leitungsabschluss ( $Z_A = R_A + jX_A$ ) ergibt sich die Eingangsimpedanz nach Gleichung (3.74) ohne Vereinfachung. Auf der Leitung erhalten wir eine hinlaufende Spannungswelle mit der Amplitude  $U_h$  und eine rücklaufende Spannungswelle mit der Amplitude  $U_r$ , so dass sich ein Spannungs- und Stromverlauf, wie er in Bild 3.10 gezeigt ist, einstellt.



**Bild 3.10** (a) Leitung mit allgemeinem Leitungsabschluss, (b) Spannung und Strom auf der Leitung

Das Maximum der Spannung ist dann

$$|U_{\max}| = \max \left\{ |U_h e^{j\beta\ell} + U_r e^{-j\beta\ell}| \right\} = |U_h| + |U_r| \quad (3.103)$$

und das Minimum der Spannung ist

$$|U_{\min}| = \min \left\{ |U_h e^{j\beta\ell} + U_r e^{-j\beta\ell}| \right\} = |U_h| - |U_r| \quad . \quad (3.104)$$

Spannungmaxima fallen mit Stromminima zusammen und umgekehrt. Der Abstand zwischen zwei Maxima bzw. zwei Minima entspricht einer halben Wellenlänge.

Ein wichtiges Maß für den Grad der Anpassung liefern die *Welligkeit s* bzw. der *Anpassungsfaktor m*. In der englischsprachigen Literatur wird die Welligkeit s auch als *Stehwellenverhältnis VSWR (Voltage Standing Wave Ratio)* bezeichnet.

$$s = \frac{1}{m} = \text{VSWR} = \left| \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \right| = \left| \frac{I_{\max}}{I_{\min}} \right| \quad \rightarrow \text{Test (keine Werk \rightarrow abmessen)} \quad (3.105)$$

#### Beispiel 3.3 VSWR für unterschiedliche Leitungsabschlüsse

Wir betrachten eine Leitung mit dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L$ . Zunächst schließen wir die Leitung mit ihrem Leitungswellenwiderstand ab  $Z_A = Z_L$ . In Bild 3.7 sehen wir, dass für die Spannung auf der Leitung gilt  $U_{\max} = U_{\min}$ . Daraus folgt

$$\text{VSWR}(Z_A = Z_L) = 1 \quad . \quad (3.106)$$

Nun schließen wir die Leitung mit einem Kurzschluss ab. In Bild 3.8 sehen wir, dass  $U_{\max} = U_0$  und  $U_{\min} = 0$ . Somit ist

$$\text{VSWR}(Z_A = 0) \rightarrow \infty \quad . \quad (3.107)$$

Schließlich betrachten wir eine leerlaufende Leitung. In Bild 3.9 erkennen wir, dass gilt  $U_{\max} = U_0$  und  $U_{\min} = 0$ . Also wird

$$\text{VSWR}(Z_A \rightarrow \infty) \rightarrow \infty \quad . \quad (3.108)$$

Aus unseren Überlegungen in Abschnitt 3.1.8 folgt, dass  $VSWR = 1$  bedeutet, dass keine reflektierte Welle existiert. Bei einer unendlich großen Welligkeit ( $VSWR \rightarrow \infty$ ) sind die Amplituden der reflektierten und hinlaufenden Wellen gleich groß sind. Die Größe VSWR ist ein gutes Maß für die zur Last transportierte Leistung. Für Anpassungszwecke sollte die Größe VSWR nahe bei dem Wert Eins liegen. ■

### 3.1.9 Verlustlose Leitungen als Impedanztransformatoren

Mit Hilfe von verlustlosen Leitungen können sehr einfach Anpassschaltungen realisiert werden. Zwei Leitungslängen haben dabei eine besondere Bedeutung: die Viertelwellenlänge und die halbe Wellenlänge.

#### 3.1.9.1 Der $\lambda/4$ -Transformator

Für eine Leitung, die die Länge einer Viertelwellenlänge besitzt, gilt:

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_A} \tan(\beta\ell_e)}{1 + j \frac{Z_A}{Z_L} \tan(\beta\ell_e)} \quad \text{mit} \quad \beta\ell_e = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.109)$$

Da die Tangensfunktion an der Stelle  $\pi/2$  singulär ist, wird aus der Eingangsimpedanz  $Z_E$

$$Z_E = \frac{Z_L^2}{Z_A} \quad \text{bzw.} \quad Z_E Z_A = Z_L^2 \quad (\lambda/4\text{-Transformator}). \quad (3.110)$$

#### Beispiel 3.4 Impedanztransformation mit einer $\lambda/4$ -Leitung

Wir wollen eine Abschlussimpedanz  $Z_A = 200\Omega$  auf eine Eingangsimpedanz von  $Z_E = 50\Omega$  bei einer Frequenz von  $f = 2,45\text{ GHz}$  transformieren. Die  $\lambda/4$ -lange Leitung benötigt dann einen Leitungswellenwiderstand von

$$Z_L = \sqrt{Z_E Z_A} = \sqrt{50\Omega \cdot 200\Omega} = 100\Omega. \quad (3.111)$$

Die Anpassung gilt natürlich exakt nur für die Frequenz, bei der die Leitung eine Viertelwellenlänge lang ist! Nehmen wir an, die Leitung sei luftgefüllt ( $\epsilon_r = 1$ ), d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit wäre  $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Dann wäre die Leitungslänge

$$\ell_e = \frac{\lambda}{4} = \frac{c_0}{4f} = 3,06 \text{ cm}. \quad (3.112)$$

#### 3.1.9.2 Der $\lambda/2$ -Transformator

Falls die Länge der Leitung gerade eben einer halben Wellenlänge entspricht, so gilt:

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_A} \tan(\beta\ell_e)}{1 + j \frac{Z_A}{Z_L} \tan(\beta\ell_e)} \quad \text{mit} \quad \beta\ell_e = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi. \quad (3.113)$$

Da der Wert der Tangensfunktion an der Stelle  $\pi$  Null ist, erhalten wir für die Eingangsimpedanz  $Z_E$

$$Z_E = Z_A \quad (\lambda/2\text{-Transformator}). \quad (3.114)$$

Diese Transformation wird auch als *Autotransformation* bezeichnet. Praktisch bedeutet dies, dass  $\lambda/2$ -lange Leitungsstücke mit beliebigem Leitungswellenwiderstand eingefügt werden können, ohne die Eingangsimpedanz zu verändern.

### 3.1.10 Reflexionsfaktor einer verlustlosen Leitung

Wir haben in den vorherigen Abschnitten gesehen, dass auf einer Leitung hin- und rücklaufende Wellen existieren. Es gilt für die Spannungswellen

$$U(\ell) = \underbrace{U_h e^{j\beta\ell}}_{\substack{\text{Hinlaufende} \\ \text{Welle}}} + \underbrace{U_r e^{-j\beta\ell}}_{\substack{\text{Rücklaufende} \\ \text{Welle}}} \quad (3.115)$$

mit

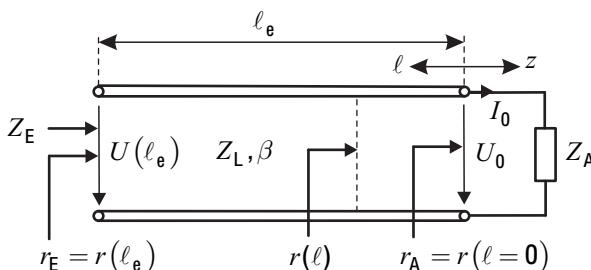
$$U_h = \frac{1}{2} (U_0 + I_0 Z_L) \hat{=} \text{Amplitude der hinlaufenden Welle} \quad (3.116)$$

$$U_r = \frac{1}{2} (U_0 - I_0 Z_L) \hat{=} \text{Amplitude der reflektierten Welle} \quad (3.117)$$

$$Z_A = \frac{U_0}{I_0} \hat{=} \text{Abschlussimpedanz} . \quad (3.118)$$

Wir definieren nun eine neue Größe, den *Reflexionsfaktor am Ort  $\ell$* , als Verhältnis von reflektierter zu hinlaufender Welle (Bild 3.11):

$$r(\ell) = \frac{U_r e^{-j\beta\ell}}{U_h e^{j\beta\ell}} = \frac{U_r}{U_h} e^{-j2\beta\ell} \quad (\text{Reflexionsfaktor}). \quad (3.119)$$



**Bild 3.11** Reflexionsfaktoren auf einer verlustlosen Leitung

Sehen wir uns den Reflexionsfaktor  $r_A$  am Ende der Leitung an ( $\ell = 0$ ). Mit Hilfe der Gleichung (3.119) und der Amplituden  $U_h$  und  $U_r$  aus Gleichung (3.116) und (3.117) erhalten wir zunächst

$$r_A = r(\ell = 0) = \frac{U_r}{U_h} = \frac{U_0 - I_0 Z_L}{U_0 + I_0 Z_L} = \frac{U_0/I_0 - Z_L}{U_0/I_0 + Z_L} . \quad (3.120)$$

## 90 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

---

Mit Gleichung (3.118) wird der Reflexionsfaktor am Ende der Leitung dann

$$r_A = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L} \quad \Leftrightarrow \quad Z_A = Z_L \frac{1 + r_A}{1 - r_A} . \quad (3.121)$$

Den Reflexionsfaktor  $r_E$  am Leitungsanfang  $\ell = \ell_e$  erhalten wir mit

$$r_E = r(\ell_e) = \frac{U_r e^{-j\beta\ell_e}}{U_h e^{j\beta\ell_e}} = \frac{U_r}{U_h} e^{-j2\beta\ell_e} = r_A e^{-j2\beta\ell_e} . \quad (3.122)$$

Daraus ergeben sich folgende Zusammenhänge für den Reflexionsfaktor auf der Leitung (Bild 3.12):

- Der *Betrag* des Reflexionsfaktors längs der Leitung ist konstant  
 $|r_A| = |r_E| = |r(\ell)| = \text{const. } \forall \ell$ .
- Die Leitung verursacht lediglich eine *Phasendrehung* um den Winkel  $\varphi$  mit:

$$\varphi = -2\beta\ell_e = -4\pi \frac{\ell_e}{\lambda} \quad (\text{Phasendrehung des Reflexionsfaktors}). \quad (3.123)$$

- Für passive Abschlüsse ( $\text{Re}\{Z_A\} \geq 0$ ) ist die rücklaufende Welle stets kleiner oder gleich der hinlaufenden Welle  $|U_r| \leq |U_h|$ . Der Betrag des Reflexionsfaktors ist also gleich oder kleiner eins ( $|r(\ell)| \leq 1$ ).

Da der Reflexionsfaktor  $r$  eine komplexe Größe ist, kann er in der komplexen Ebene dargestellt werden. Passive Abschlüsse (in der rechten Halbebene der Impedanzebene) führen zu Reflexionsfaktoren innerhalb des Einheitskreises. Eine Veränderung des Ortes führt zu einer Drehung des Reflexionsfaktors um den Ursprung (Bild 3.12).

Verschieben wir den Reflexionsfaktor *vom Abschluss* (der Last  $Z_A$ ) *zum Eingang* der Leitung (zur Quelle), so muss die Drehung im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) erfolgen. Bei einer Verschiebung von der Quelle zur Last geschieht die Drehung gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv).

Denken wir an die  $\lambda/4$ - und  $\lambda/2$ -Transformatoren, so ergeben sich für diese Längen:

$$\ell_e = \lambda/4 \rightarrow 2\beta\ell_e = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \pi = 180^\circ \rightarrow r_E = -r_A \quad (3.124)$$

$$\ell_e = \lambda/2 \rightarrow 2\beta\ell_e = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = 2\pi = 360^\circ \rightarrow r_E = r_A . \quad (3.125)$$

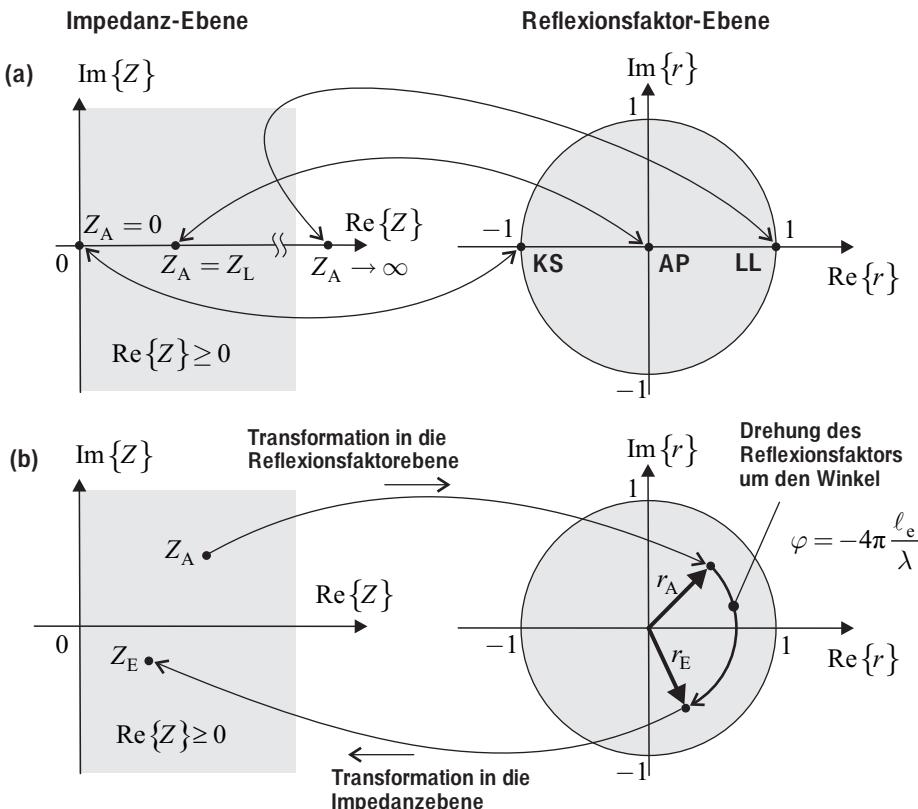
Die  $\lambda/4$ -lange Leitung bewirkt also gerade eine Drehung um  $180^\circ$  bzw. einen Vorzeichenwechsel. Eine  $\lambda/2$ -lange Leitung führt den Reflexionsfaktor in der komplexen Ebene auf sich selbst zurück.

In der komplexen Reflexionsfaktorebene gibt es drei ausgezeichnete Punkte für die Abschlüsse Kurzschluss (KS), Leerlauf (LL) und Anpassung (AP).

$$\text{Kurzschluss } (Z_A = 0) \rightarrow r_A = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L} = -1 \rightarrow \text{KS} \quad (3.126)$$

$$\text{Leerlauf } (Z_A \rightarrow \infty) \rightarrow r_A = 1 \rightarrow \text{LL} \quad (3.127)$$

$$\text{An gepasster Abschluss } (Z_A = Z_L) \rightarrow r_A = 0 \rightarrow \text{AP} \quad (3.128)$$



**Bild 3.12** (a) Darstellung von Kurzschluss (KS:  $Z_A = 0$ ), Leerlauf (LL:  $Z_A \rightarrow \infty$ ) und angepasstem Abschluss (AP:  $Z_A = Z_L$ ) in der Impedanz- und Reflexionsfaktorebene. (b) Abschlussimpedanz  $Z_A$  wird in die Reflexionsfaktorebene überführt; Leitung bewirkt eine Drehung des Reflexionsfaktors  $r_A$  um den Winkel  $\varphi$ ; der neue Reflexionsfaktor  $r_E$  wird in die Impedanzebene zurücktransformiert und liefert die Eingangsimpedanz  $Z_E$

Die entsprechenden Reflexionsfaktoren sind in Bild 3.12 eingezeichnet.

In Abschnitt 3.1.8 haben wir das Stehwellenverhältnis VSWR (bzw. die Welligkeit  $s = \text{VSWR}$ ) eingeführt. Das Stehwellenverhältnis ist ein Maß für die Anpassung der Last an den Leitungswellenwiderstand. Wir können einfach einen Zusammenhang zwischen dem Stehwellenverhältnis und dem Reflexionsfaktor angeben. Das Stehwellenverhältnis VSWR nach Gleichung (3.105) ist

$$s = \text{VSWR} = \left| \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \right| . \quad (3.129)$$

mit der Spannung  $|U_{\max}| = |U_h| + |U_r|$  (nach Gleichung (3.103)) und der Spannung  $|U_{\min}| = |U_h| - |U_r|$  (nach Gleichung (3.104)).

## 92 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

---

Wir setzen die Gleichungen (3.103) und (3.104) in Gleichung (3.129) ein und erhalten

$$s = \text{VSWR} = \left| \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \right| = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{1 + \frac{|U_r|}{|U_h|}}{1 - \frac{|U_r|}{|U_h|}} . \quad (3.130)$$

Aus der Definition des Reflexionsfaktors in Gleichung (3.119) folgt

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \leftrightarrow |r| = \frac{\text{VSWR} - 1}{\text{VSWR} + 1} = \frac{s - 1}{s + 1} . \quad (3.131)$$

Sowohl das Stehwellenverhältnis VSWR als auch der Betrag des Reflexionsfaktors  $r$  sind gebräuchliche Größen, um die Qualität der Anpassung zu beschreiben. Mit Hilfe der obigen Formeln können die Größen ineinander umgerechnet werden.

### 3.1.11 Smith-Chart-Diagramm

Eine verlustlose Leitung kann als ein Zweitor betrachtet werden, welches eine Lastimpedanz  $Z_A$  in eine Eingangsimpedanz  $Z_E$  transformiert. Das Ergebnis hängt neben der Abschlussimpedanz von den drei Leitungsparametern (Leitungswellenwiderstand  $Z_L$ , Phasenkonstante  $\beta$  und Leitungslänge  $\ell_e$ ) ab und ist durch die folgende eher unhandliche Gleichung gegeben:

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_A} \tan(\beta \ell_e)}{1 + j \frac{Z_A}{Z_L} \tan(\beta \ell_e)} . \quad (3.132)$$

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass Eingangs- und Abschluss-Reflexionsfaktor einem einfacheren Zusammenhang genügen. Die Leitung verändert nur die Phase des Reflexionsfaktors.

$$r_E = r_A e^{-j2\beta\ell_e} \quad (3.133)$$

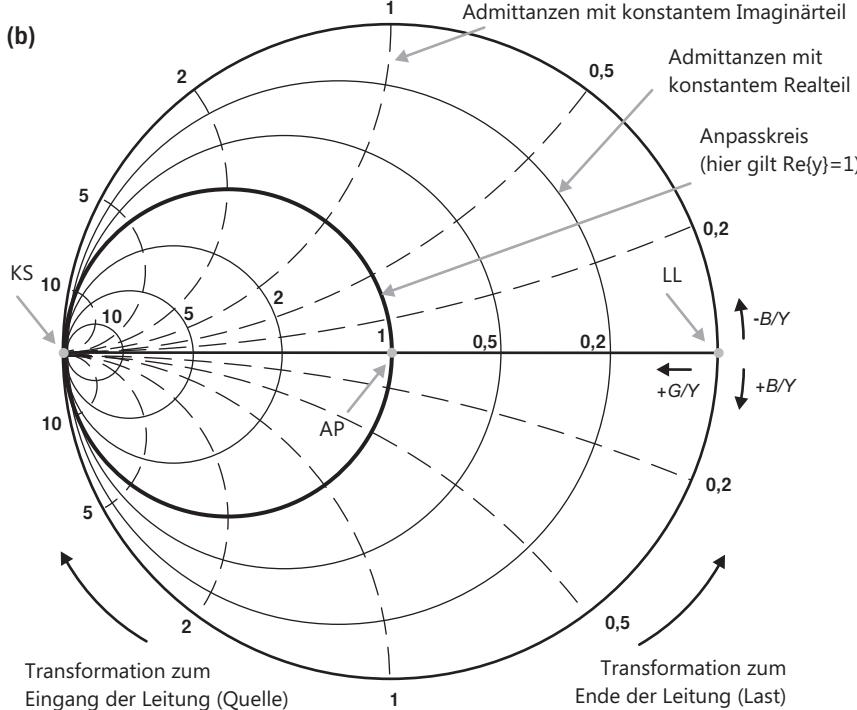
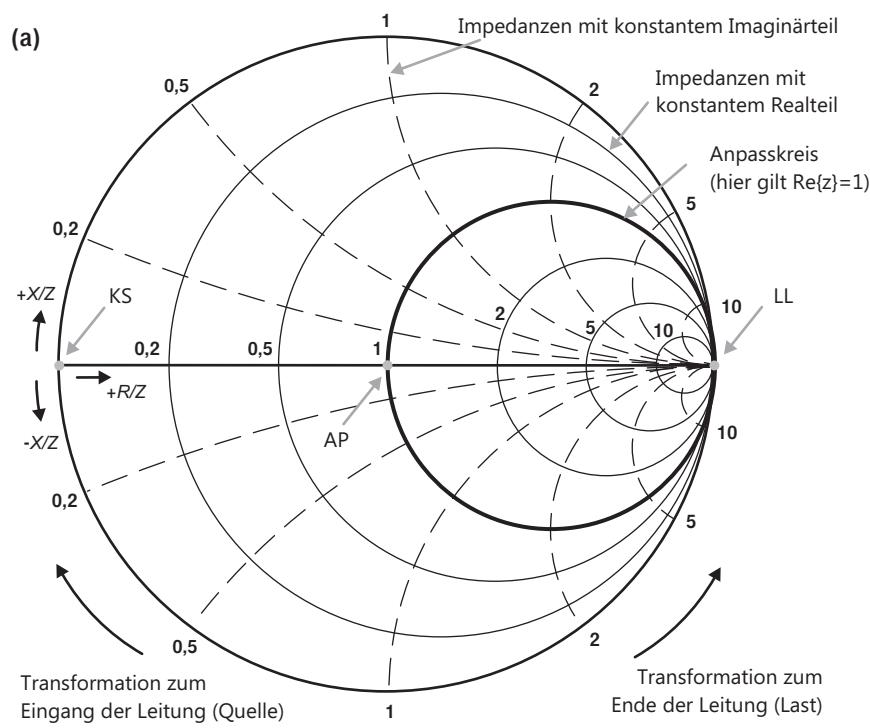
Wir führen daher ein graphisches Werkzeug ein, um diesen einfachen Zusammenhang praktisch anwenden zu können. Das *Smith-Chart-Diagramm* erlaubt die Umrechnung zwischen (normierten) Impedanzen und Reflexionsfaktoren. Weiterhin kann die Phase einfach verändert werden, um die Leitungstransformation durchzuführen.

Das Smith-Chart-Diagramm zeigt die komplexe Reflexionsfaktor-Ebene. Wir erinnern uns, dass passive Impedanzen ( $\text{Re}\{Z_A\} \geq 0$ ) im Inneren der Einheitskreises ( $|r| \leq 1$ ) angesiedelt sind. Der äußere Kreis in Bild 3.13a zeigt also den Einheitskreis. Der Mittelpunkt ( $r = 0$ ) ist der Anpassungspunkt (AP).

Im Innern des Einheitskreises sehen wir durchgezogene und gestrichelte Kreissegmente. Diese Linien stellen normierte Impedanzen  $z = Z/Z_L$  dar. Somit bringt das Smith-Chart Reflexionsfaktoren und normierte Impedanzen in einem Diagramm zusammen. Bild 3.13a zeigt die *Widerstandsform* des Smith-Charts.

$$r = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L} = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{mit} \quad z = \frac{Z}{Z_L} \quad (\text{Normierte Impedanz}) \quad (3.134)$$

Gestrichelte Linien und reelle Achse bedeuten (normierte) Impedanzen mit konstantem Imaginärteil. Durchgezogene Linien sind (normierte) Impedanzen mit konstantem Realteil.



**Bild 3.13** Aufbau des Smith-Chart-Diagramms mit der Lage von Anpasspunkt (AP), Leerlaufpunkt (LL) und Kurzschlusspunkt (KS): (a) Widerstandsform und (b) Leitwertform

Eine gleichzeitige Darstellung des Reflexionsfaktors  $r$  und der normierten Impedanz  $z$  in einem Diagramm wird als *Smith-Chart*-Diagramm (in Widerstandsform) bezeichnet und ist in Bild 3.13a dargestellt. Um von der normierten Impedanz  $z$  wieder auf die Impedanz  $Z$  zurückrechnen zu können, muss die Bezugsimpedanz  $Z_L$  mit dem Smith-Chart angegeben sein.

Neben der Widerstandsform des Smith-Chart-Diagramms existiert auch noch eine *Leitwertform* (Bild 3.13b): Hierbei werden eine normierte Admittanz  $y = Y / Y_L = Y \cdot Z_L$  und der Reflexionsfaktor  $r$  in einem Diagramm dargestellt [Mein92]. Um praktisch mit dem Smith-Chart zu arbeiten, ist die gleichzeitige Darstellung der Impedanzen und Admittanzen von Vorteil, da hier ein Arbeiten mit Parallel- und Serienschaltungen direkt möglich ist. Um dabei die Übersicht nicht zu verlieren, empfiehlt sich die farbliche Unterscheidung der übereinander gelegten Diagramme.

Historisch hat das Smith-Chart eine große Bedeutung als graphisches Werkzeug für die Berechnung einfacher Anpassschaltungen und Leitungstransformationen. Bei ausreichender Erfahrung stellt das Smith-Chart ein sehr leistungsfähiges Werkzeug dar, welches den Ingenieur von den komplexwertigen mathematischen Berechnungen entlastet und ihm stattdessen einen übersichtlichen graphisch orientierten Zugang bietet. Free- und Sharewaretools im Internet (z.B. [Dell10]) erlauben eine komfortable, übersichtliche und rechnerunterstützte Arbeitsweise mit dem Smith-Chart.

Heute wird das Smith-Chart aber vor allem zur *Darstellung* von Reflexionsfaktoren verwendet. Komplexe Berechnungen finden heute in der Regel über Schaltungssimulatoren statt. Wir werden in Kapitel 6 noch auf diese Softwarewerkzeuge eingehen. In den folgenden Beispielen wollen wir aber einige grundsätzliche Zusammenhänge im Smith-Chart nachvollziehen.

### Beispiel 3.5 $\lambda/4$ -Transformator

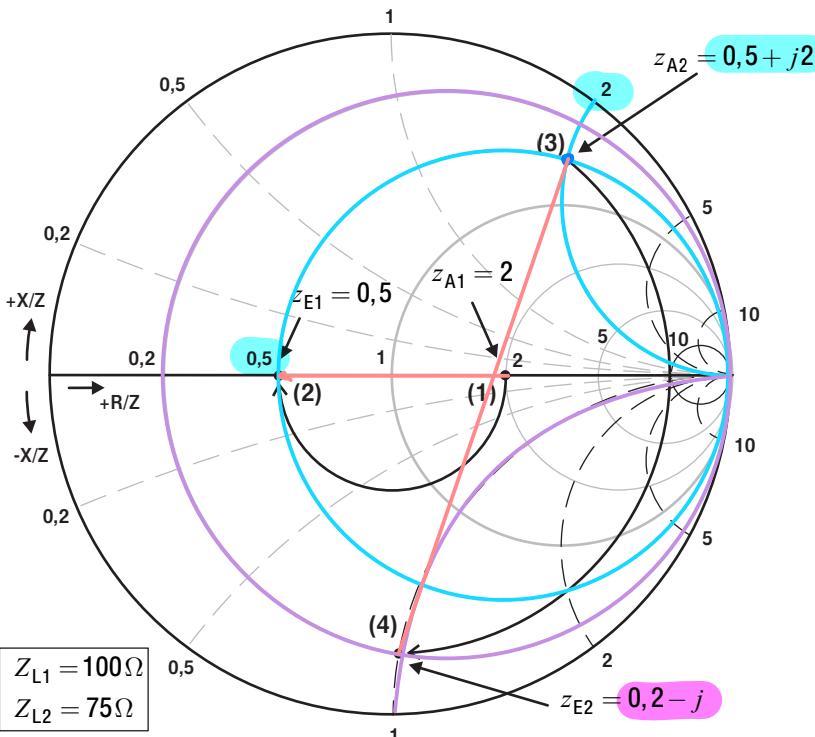
Wir betrachten das Beispiel des  $\lambda/4$ -Transformators aus Abschnitt 3.1.9.1, bei dem wir einen  $200\Omega$ -Abschlusswiderstand über eine Leitung mit dem Leitungswellenwiderstand von  $100\Omega$  auf eine Eingangsimpedanz von  $50\Omega$  transformiert haben. Sehen wir uns an, wie sich die Transformation im Smith-Chart darstellt.

Wir normieren zunächst den Abschlusswiderstand auf den Wert des Leitungswellenwiderstandes  $Z_{L1} = 100\Omega$  und erhalten so die normierte Impedanz  $z_{A1} = 200/100 = 2$ . Wir tragen diesen Punkt (1) ins Smith-Diagramm ein (Bild 3.14) und drehen ihn um  $180^\circ$  im Uhrzeigersinn ( $\lambda/4 \cong 180^\circ$ ). Als neue normierte Impedanz am Anfang der Leitung erhalten wir Punkt (2) mit  $z_{E1} = 0,5$ . Entnormieren wir diesen Wert, so wird die Eingangsimpedanz  $Z_E = z_{E1} \cdot Z_L = 0,5 \cdot 100\Omega = 50\Omega$ . ■

### Beispiel 3.6 Allgemeine Impedanztransformation über eine Leitung

In diesem Beispiel sehen wir uns eine Leitung mit der Länge  $\ell_e/\lambda = 0,194$  und dem Leitungswellenwiderstand  $Z_{L2} = 75\Omega$  an. Wir ermitteln die Eingangsimpedanz  $Z_E$  für eine komplexe Abschlussimpedanz  $Z_A = (37,5 + j150)\Omega$ . (Den Konstruktionsweg über das Smith-Diagramm vergleichen wir mit der komplexen Rechnung über die Gleichung (3.74) in Übung 3.1).

Wir konstruieren die Lösung über das Smith-Chart, indem wir zunächst die Abschlussimpedanz normieren zu  $z_{A2} = 0,5 + j2$  und ins Diagramm als Punkt (3) eintragen



**Bild 3.14** Visualisierung des Lösungsweges im Smith-Diagramm (Beispiele 3.5 und 3.6)

(Bild 3.14). Dieser Punkt muss um den Winkel<sup>14</sup>  $|\varphi| = 4\pi\ell_e/\lambda = 2,4378\dots \approx 139,68^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht werden und liefert Punkt (4). Diesen Punkt lesen wir ab mit  $z_{E2} \approx 0,2 - j$  und erhalten  $Z_E = z_{E2} \cdot Z_{L2} = (0,2 - j) \cdot 100\Omega = (15 - j75)\Omega$ . ■

### Beispiel 3.7 Einfache Anpassschaltung mit Leitung und Serienreaktanz

Als letztes Beispiel vollziehen wir eine einfache Anpassaufgabe nach. Gegeben sei die in Bild 3.15 dargestellte Schaltung. Die Abschlussimpedanz  $Z_A = (25 - j25)\Omega$  soll über eine Leitung mit dem Wellenwiderstand von  $Z_L = 50\Omega$  und der Serienschaltung eines reaktiven Bauteils  $jX_S$  an die Impedanz  $Z_E = 50\Omega$  angepasst werden. Die Leitungslänge  $\ell_e$  und der Wert – sowie die Art – des reaktiven Bauteils sind für eine Frequenz von  $f = 1\text{ GHz}$  zu bestimmen.

Zunächst einmal tragen wir die normierte Abschlussimpedanz  $z_A = 0,5 - j0,5$  als Punkt (1) in das Smith-Diagramm (Bild 3.15) ein. Über die Leitung drehen wir den Punkt (1) um den Ursprung, bis wir den Anpasskreis erreichen. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten:

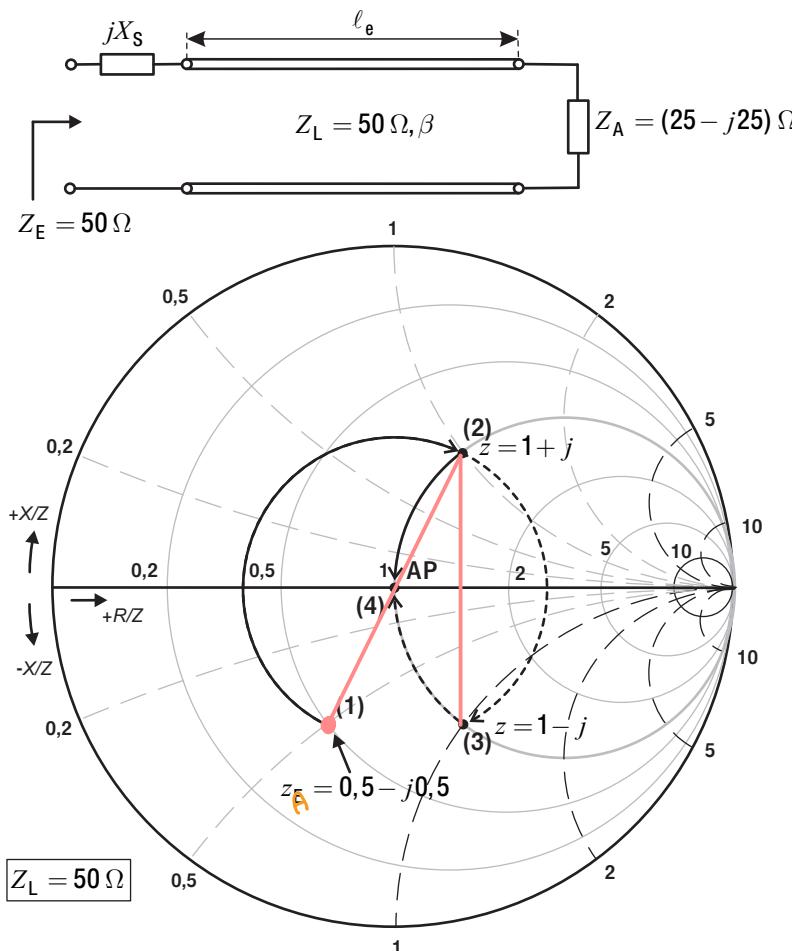
- *Erste Möglichkeit:* Wir drehen den Punkt (1) auf einem Kreis um den Ursprung, bis wir den Anpasskreis und damit Punkt (2) erhalten. Es ergibt sich ein Drehwin-

<sup>4</sup> Standardisierte Smith-Diagramme in gedruckter Form erlauben direkt die Verwendung der Größe  $\ell_e/\lambda$  zur Drehung, da sie über eine entsprechende Skala in Umfangsrichtung verfügen.

## 96 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen

kel von  $180^\circ$ , d.h. die Leitung hat eine Länge von einer Viertelwellenlänge. Die normierte Impedanz an Punkt (2) ist  $z = 1 + j$ . Um den Anpassungspunkt (4) zu erreichen, benötigen wir eine normierte Serienimpedanz  $z = -j$ , entnormiert ergibt dies einen Wert von  $Z = -j50\Omega$ . Dies lässt sich durch eine Kapazität realisieren. Mit  $-j50\Omega = -j/(\omega C)$  gilt  $C \approx 3,2 \text{ pF}$ .

- **Zweite Möglichkeit:** Wir drehen den Punkt (1) auf einem Kreis um den Ursprung, bis wir den Anpassungskreis in Punkt (3) erhalten. Der Drehwinkel beträgt  $307^\circ$ , d.h. die Leitung hat eine Länge von  $0,426\lambda$ . Die normierte Impedanz an Punkt (3) ist  $z = 1 - j$ . Um den Anpassungspunkt (4) zu erreichen, benötigen wir eine normierte Serienimpedanz  $z = +j$ , entnormiert ergibt dies einen Wert von  $Z = j50\Omega$ . Dies lässt sich durch eine Induktivität realisieren. Mit  $j50\Omega = j\omega L$  gilt  $L \approx 8 \text{ nH}$ .



**Bild 3.15** Visualisierung des Lösungsweges im Smith-Diagramm zur Impedanzanpassung

Anpassschaltungen werden detailliert noch in Kapitel 6 beschrieben. ■

## ■ 3.2 Zeitsignale auf Leitungen

In den bisherigen Ableitungen sind wir von harmonischen Signalen ausgegangen. Dies ist eine Betrachtung des eingeschwungenen Zustandes, in dem ein Signal dauerhaft anliegt. Mit den zuvor abgeleiteten allgemeinen Zusammenhängen der Leitungstheorie können auch impulsförmige Vorgänge – wie sie zum Beispiel in der Digitaltechnik vorkommen – behandelt werden. Wir müssen dazu das Zeitsignal in seine spektralen Anteile zerlegen. Bei periodischen Signalen erreichen wir dies durch eine *Fourierreihenentwicklung* und bei nicht-periodischen Signalen durch die *Fouriertransformation*. Da eine Leitung ein lineares System ist, können wir die einzelnen Frequenzanteile unabhängig voneinander betrachten und die Ergebnisse durch Superposition zusammenführen.

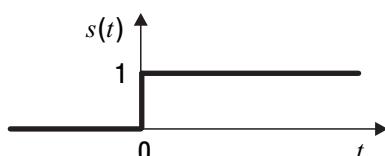
Bei der Behandlung impulsförmiger Vorgänge auf Leitungen können wir die Signale aber auch direkt im Zeitbereich verfolgen [Hilb81] [Hert04]. Wir wollen im Folgenden die Ausbreitung *sprungförmiger* und *rechteckförmiger* Signale betrachten. Die Rechteckfunktion lässt sich als Überlagerung von zwei Sprungfunktionen darstellen. Daher wollen wir mit der Sprungfunktion beginnen.

### 3.2.1 Sprungförmige Signale

Als Zeitsignal wählen wir zunächst die Sprungfunktion  $s(t)$ .

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.135)$$

Bild 3.16 zeigt den Verlauf der Sprungfunktion. Den Übergang vom Wert Null zum Wert Eins im Sprungzeitpunkt  $t = 0$  zeichnen wir vereinfachend durch eine senkrechte Linie ein. Dies ist zwar nicht die mathematisch formal korrekte Darstellungsweise, aus ingenieurmäßiger Sicht aber zeichnerisch effizienter und ausreichend genau, solange wir uns nicht im Detail für den Sprungmoment interessieren.

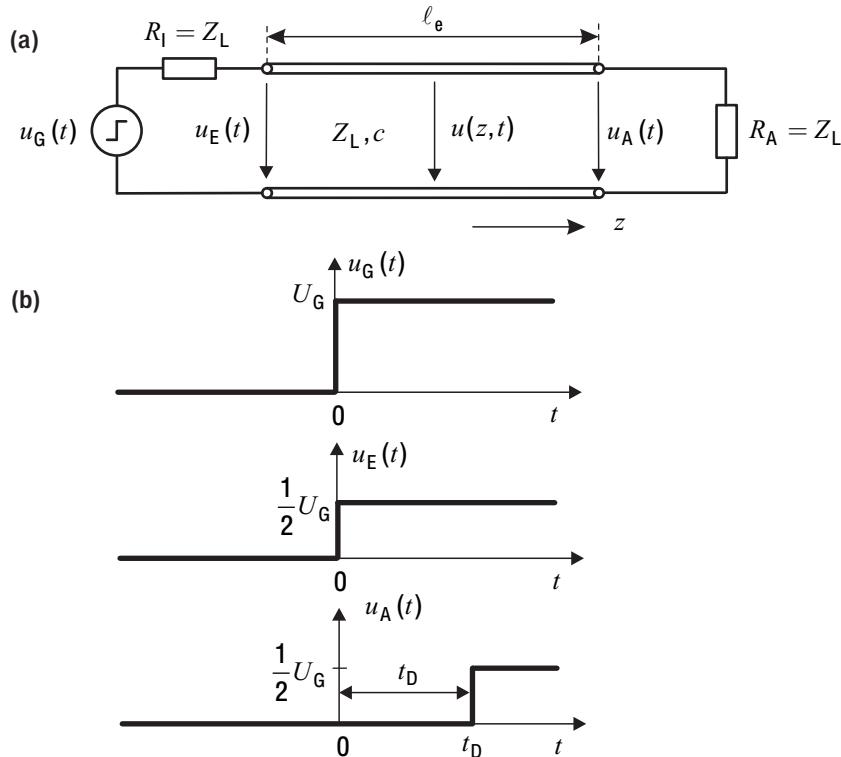


**Bild 3.16** Sprungfunktion  $s(t)$

#### 3.2.1.1 Angepasste Quelle und angepasster Abschluss

Wir betrachten nun – wie im vorherigen Abschnitt 3.1 über die allgemeine Leitungstheorie – unsere Grundschaltung aus Quelle mit Innenimpedanz, Leitung und Abschlussimpedanz (Bild 3.17a). Die Quelle besitzt hier allerdings einen sprungförmigen Spannungsverlauf  $u_G(t) = U_G s(t)$ . Quelle, Leitung und Abschluss seien aneinander angepasst, es gelte also  $R_I = Z_L = R_A$ .

## 98 3 Leitungstheorie und Signale auf Leitungen



**Bild 3.17** (a) Schaltung und (b) Zeitsignale am Eingang  $u_E(t)$  und Ausgang  $u_A(t)$  der Leitung (angepasste Quelle und angepasster Abschluss  $R_I = Z_L = R_A$ )

Die Eingangsimpedanz zum Zeitpunkt  $t = 0$  entspricht dem Leitungswellenwiderstand  $Z_E = Z_L$  unabhängig vom Lastwiderstand  $R_A$ . Mit anderen Worten zum Zeitpunkt  $t = 0$  startet die Quelle eine hinlaufende Welle mit einem Spannungs-Strom-Verhältnis, welches dem Leitungswellenwiderstand entspricht (siehe auch Abschnitt 3.1.3).

In Abschnitt 3.1 haben wir harmonische Signale betrachtet, die den eingeschwungenen Zustand beschreiben. Die Eingangsimpedanz hängt hier aufgrund der Überlagerung einer hinlaufenden und einer rücklaufenden Welle im allgemeinen von der Lastimpedanz ab.

Wir interessieren uns für die Zeitverläufe der Spannung am Eingang  $u_E(t)$  und am Ausgang  $u_A(t)$  der Leitung. Für Zeitpunkte  $t < 0$  sind alle Spannungen null. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wechselt die Spannungsquelle auf den Wert  $U_G$ . Aufgrund der Spannungsteilerregel

$$u_E(0) = \frac{Z_L}{R_I + Z_L} u_G(0) = \frac{1}{2} u_G(0) = \frac{1}{2} U_G \quad (3.136)$$

wird die Eingangsspannung auf den halben Wert von  $U_G$  springen (Bild 3.17b).

Die Ausgangsspannung bleibt zunächst auf dem Wert Null, da es die Zeitspanne  $t_D$  dauert, bis der Sprung das Leitungsende erreicht. Die Verzögerungszeit können wir aus der Ausbreitungs-

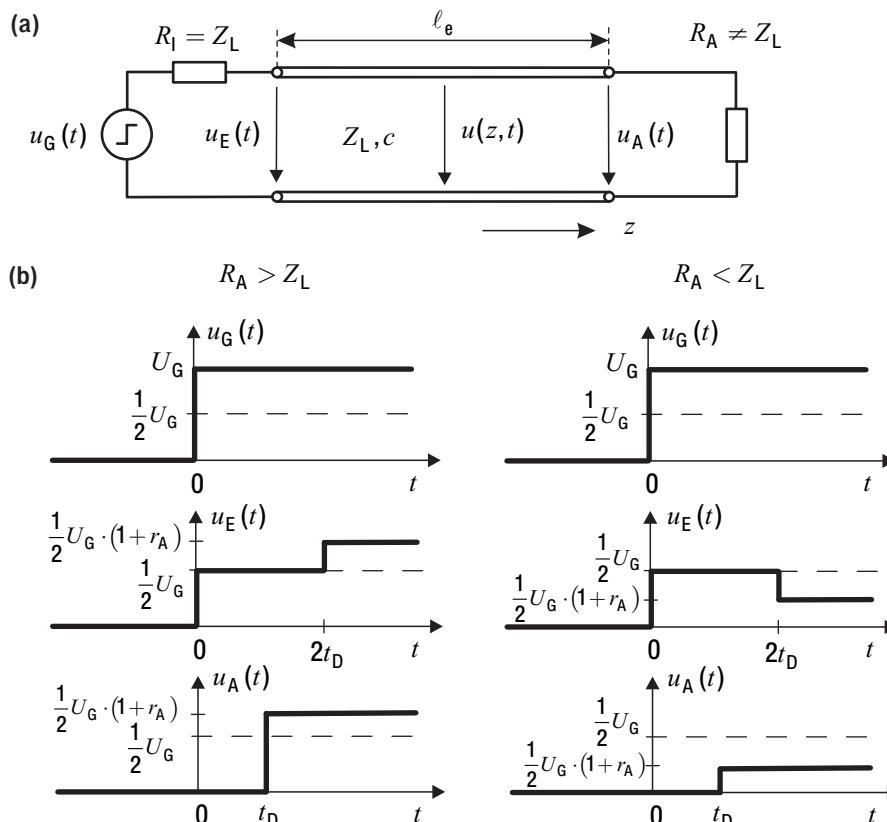
geschwindigkeit  $c$  und der geometrischen Leitungslänge  $\ell_e$  berechnen. Für eine mit dielektrischem Material gefüllte Leitung erhalten wir:

$$t_D = \frac{\ell_e}{c} = \frac{\ell_e}{c_0 \sqrt{\epsilon_r}} \quad (\text{Signallaufzeit längs der Leitung}). \quad (3.137)$$

Nach dieser Verzögerungszeit hat das Sprungsignal das Leitungsende erreicht. Da hier ein angepasster Abschlusswiderstand vorliegt, tritt keine Reflexion auf.

### 3.2.1.2 Angepasste Quelle und fehlangepasster (resistiver) Abschluss

Falls der Abschlusswiderstand nicht dem Leitungswellenwiderstand entspricht (Bild 3.18a), kommt es zu einer Reflexion am Leitungsende und ein Teil des hinlaufenden Spannungssprungs wird reflektiert.



**Bild 3.18** (a) Schaltung und (b) Zeitsignale am Eingang  $u_E(t)$  und Ausgang  $u_A(t)$  der Leitung (angepasste Quelle  $R_I = Z_L$  und fehlangepasster Abschluss  $Z_L \neq R_A$ )

**100 3 Leistungstheorie und Signale auf Leitungen**

Der Reflexionsfaktor berechnet sich bei reelem Abschluss wie aus der Leistungstheorie bekannt mit:

$$r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L} . \quad (3.138)$$

Ist der Abschlusswiderstand größer als der Leitungswellenwiderstand, so ist der Reflexionsfaktor positiv. Ist der Abschlusswiderstand jedoch kleiner als der Leitungswellenwiderstand, so ist der Reflexionsfaktor negativ.

Am Leitungsende überlagern sich hin- und rücklaufender Spannungssprung, so dass also die Spannung am Ende nach der Zeit  $t_D$  auf den Wert

$$u_A(t_D) = \frac{1}{2} U_G (1 + r_A) \quad (3.139)$$

springt.

Nach der doppelten Verzögerungszeit  $2t_D$  der Leitung erreicht der rücklaufende Sprung den Leitungsanfang, so dass sich auch hier der Wert  $1/2U_G(1 + r_A)$  einstellt. Die Spannung ist

$$\begin{aligned} u_E(2t_D) &= \frac{1}{2} U_G (1 + r_A) = \frac{1}{2} U_G \left( 1 + \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L} \right) \\ &= \frac{1}{2} U_G \left( \frac{2R_A}{R_A + Z_L} \right) = U_G \frac{R_A}{R_I + R_A} . \end{aligned} \quad (3.140)$$

Da die Quelle an die Leitung angepasst ist ( $R_I = Z_L$ ) erscheint keine weitere Reflexion. Bild 3.18b zeigt die Zeitsignale.

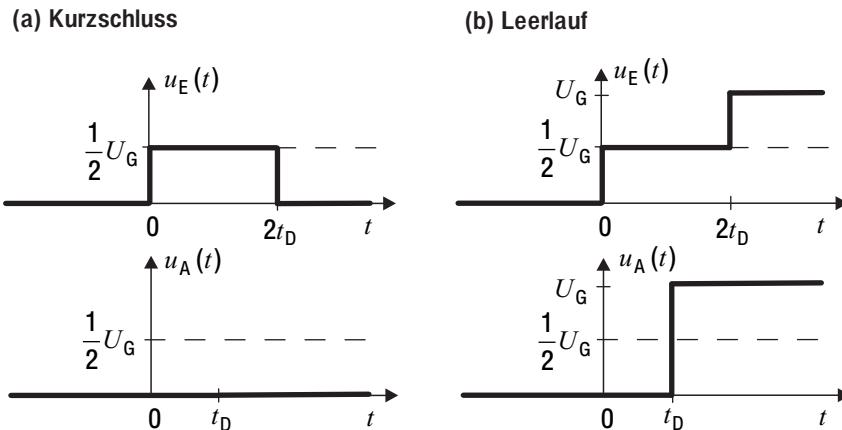
Der Spannungswert entspricht gerade eben dem Spannungsteilerwert für den Gleichstromfall (DC). Im Gleichstromfall ist die verlustlose Leitung als ideale Verbindung von Quelle und Last zu betrachten und wir können den Abschlusswiderstand direkt an die Quelle anschließen. Nach der Spannungsteilerregel erhalten wir:

$$u_E(t \rightarrow \infty) = \frac{R_A}{R_I + R_A} U_G . \quad (3.141)$$

### Beispiel 3.8 Kurzschluss und Leerlauf am Leitungsende

Wir betrachten in diesem Beispiel die Spezialfälle Kurzschluss ( $R_A = 0$ ) und Leerlauf ( $R_A \rightarrow \infty$ ). Beginnen wir mit dem Kurzschluss. Der Reflexionsfaktor am Ende lautet nach Gleichung (3.138)  $r_{A,KS} = -1$ . Folglich bleibt die Spannung am Leitungsende für alle Zeiten auf dem Wert Null. Am Anfang der Leitung ergibt sich nach der doppelten Verzögerungszeit  $2t_D$  ebenfalls der Wert Null (Bild 3.19a).

Im Falle eines Leerlaufs am Leitungsende erhalten wir einen Reflexionsfaktor von  $r_{A,LL} = +1$ . Nach der einfachen Verzögerungszeit  $t_D$  springt die Spannung am Ende auf den Wert  $U_G$ . Nach der doppelten Verzögerungszeit  $2t_D$  erscheint auch am Anfang der Wert  $U_G$ .



**Bild 3.19** Zeitverlauf am Eingang und Ausgang der Leitung bei (a) kurzgeschlossenem bzw. (b) leerlaufendem Leitungsende

Die Zeitverläufe für einen Leerlauf am Leitungsende sind in Bild 3.19b gezeigt. ■

### 3.2.1.3 Angepasste Quelle und fehlangepasster (reaktiver) Abschluss

Wir wählen nach Bild 3.20a nun einen reaktiven Abschluss mit einer Kapazität \$C\$ bzw. einer Induktivität \$L\$. Eingangsseitig ist die Leitung wieder angepasst (\$R\_I = Z\_L\$).

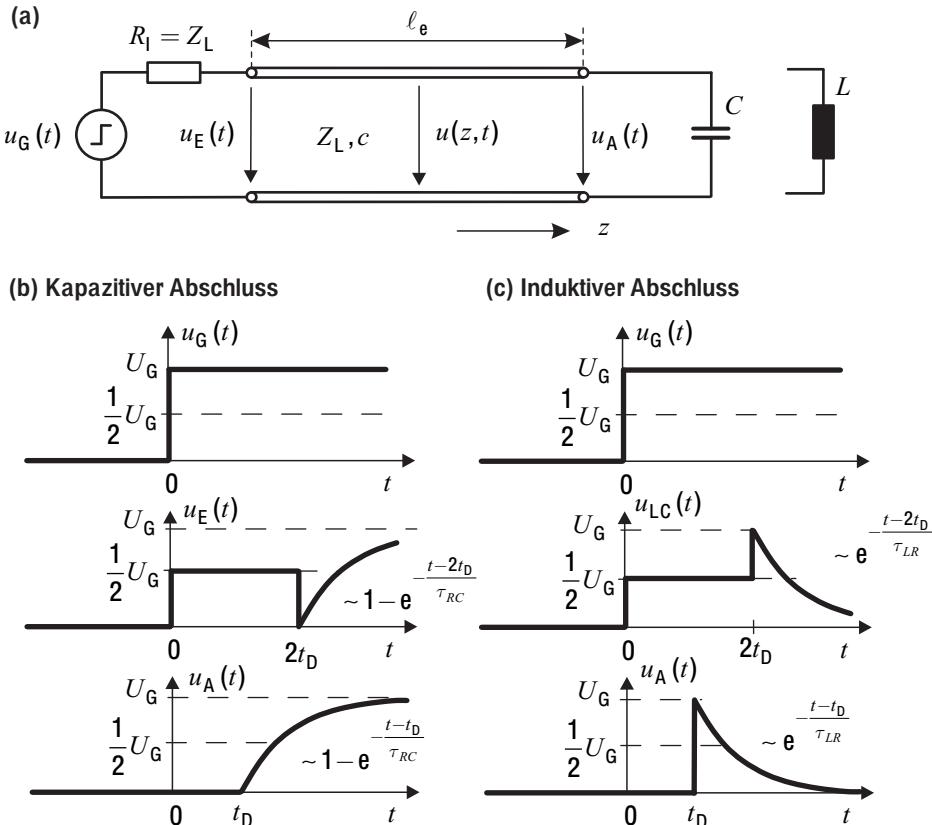
**Kapazitiver Abschluss** Zum Zeitpunkt \$t = 0\$ springt die Spannungsquelle von null auf den Wert \$U\_G\$. Am Eingang ergibt sich aufgrund der Spannungsteilerregel – wie zuvor in Abschnitt 3.2.1.2 – der halbe Wert der Spannung \$U\_G\$ (Bild 3.20b). Dieser Sprung läuft nun bis zum Ende der Leitung, welches er nach der Verzögerungszeit \$t\_D\$ erreicht. Der Kondensator ist entladen, da bis zu diesem Zeitpunkt die Spannung für alle Zeiten null war. Aus den Grundlagen der Elektrotechnik ist bekannt, dass die *Spannung am Kondensator* sich nur *stetig ändern* kann. Für \$t > t\_D\$ wird der Kondensator aufgeladen, so dass die an ihm anliegende Spannung steigt. Der Zeitverlauf folgt dem einer Exponentialfunktion mit einer charakteristischen Zeitkonstante \$\tau\_{RC}\$.

$$u_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_D \\ U_G \left( 1 - e^{-\frac{t-t_D}{\tau_{RC}}} \right) & \text{für } t \geq t_D \end{cases} \quad (3.142)$$

Die Zeitkonstante wird bestimmt vom Kapazitätswert \$C\$ und dem Leitungswellenwiderstand \$Z\_L\$. Je größer der Kapazitätswert und je größer der Leitungswellenwiderstand, desto länger dauert der Ladevorgang.

$$\tau_{RC} = Z_L C \quad (3.143)$$

Für \$t \rightarrow \infty\$ erhalten wir am Ende der Leitung den Wert der Spannungsquelle \$U\_G\$. Der Kondensator ist vollständig aufgeladen.



**Bild 3.20** (a) Schaltung mit reaktivem Abschluss und (b),(c) Zeitsignale am Eingang  $u_E(t)$  und Ausgang  $u_A(t)$  der Leitung (angepasste Quelle  $R_I = Z_L$  und fehlangepasster kapazitiver bzw. induktiver Abschluss)

Am Eingang der Leitung ergibt sich – wie zuvor – zunächst wieder die halbe Spannung  $0,5U_G$ . Nach der doppelten Verzögerungszeit  $2t_D$  erhalten wir den gleichen exponentiellen Verlauf wie am Ausgang.

$$u_E(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2}U_G & \text{für } 0 \leq t < 2t_D \\ U_G \left( 1 - e^{-\frac{t-2t_D}{\tau_{RC}}} \right) & \text{für } t \geq 2t_D \end{cases} \quad (3.144)$$

Vergleichen wir das Verhalten der *Kapazität* mit den Verläufen aus Beispiel 3.8, so erkennen wir, dass sich die Kapazität in dem Moment, da die Sprungfunktion das Leitungsende erreicht, wie ein *Kurzschluss* verhält. Für  $t \rightarrow \infty$  hingegen zeigt sich das Verhalten eines *Leerlaufs*.

**Induktiver Abschluss** Als Nächstes wenden wir uns dem induktiven Leitungsabschluss zu. Aus den Grundlagen der Elektrotechnik wissen wir, dass der *Strom* durch eine *Induktivität* sich nur *stetig ändern* kann. In dem Moment, da der Spannungssprung das Leitungsende erreicht, kann also kein Strom fließen. Es ergibt sich zunächst das Verhalten eines Leerlaufs. Die Spannung am Ausgang steigt somit zum Zeitpunkt  $t_D$  auf den Wert  $U_G$  (Bild 3.20c). Im Weiteren steigt der Strom durch die Spule und folglich fällt die Spannung. Für  $t \rightarrow \infty$  erhalten wir am Ende der Leitung den Wert Null. Der Zeitverlauf folgt dem einer Exponentialfunktion mit einer charakteristischen Zeitkonstante  $\tau_{LR}$ .

$$u_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_D \\ U_G e^{-\frac{t-t_D}{\tau_{LR}}} & \text{für } t \geq t_D \end{cases} \quad (3.145)$$

Die Zeitkonstante wird bestimmt vom Induktivitätswert  $L$  und dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L$ . Je größer die Induktivität, desto langsamer vollzieht sich der Vorgang.

$$\tau_{LR} = \frac{L}{Z_L} \quad (3.146)$$

Am Eingang der Leitung ergibt sich – wie zuvor – zunächst wieder die halbe Spannung  $0,5U_G$ . Nach der doppelten Verzögerungszeit  $2t_D$  erhalten wir den gleichen exponentiellen Verlauf wie am Ausgang.

$$u_E(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2}U_G & \text{für } 0 \leq t < 2t_D \\ U_G e^{-\frac{t-2t_D}{\tau_{LR}}} & \text{für } t \geq 2t_D \end{cases} \quad (3.147)$$

Vergleichen wir das Verhalten der *Induktivität* mit den Verläufen aus Beispiel 3.8, so erkennen wir, dass sich die Induktivität in dem Moment, da der Sprung das Leitungsende erreicht, wie ein *Leerlauf* verhält. Für  $t \rightarrow \infty$  hingegen zeigt sich das Verhalten eines *Kurzschlusses*.

### 3.2.1.4 Fehlanpassung an Quelle und Last

Bei den bisherigen Fällen hatten wir es mit einer einfachen Reflexion am Ende der Leitung zu tun. Wenn nun auch die Quelle fehlangepasst ist ( $R_I \neq Z_L$ ), so sind auch Reflexionen am Eingang der Leitung zu berücksichtigen (Bild 3.21a). Wir wollen uns bei den Betrachtungen auf einen ohmschen Innenwiderstand und Abschlusswiderstand beschränken. Der Reflexionsfaktor an der Quelle ist:

$r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$

$$. \quad (3.148)$$

Die Einführung eines *Gitterdiagramms* oder *Wellenfahrplans* [Hert04] vereinfacht es, den Überblick über die hin- und zurücklaufenden Spannungssprünge zu behalten. Bild 3.21b zeigt ein solches Gitterdiagramm. Der auf die Leitung eingekoppelte Spannungssprung ergibt sich aus dem Spannungsteiler aus  $Z_L$  und  $R_I$  mit

$$U_{1h} = U_G \frac{Z_L}{R_I + Z_L} . \quad (3.149)$$

## 104 3 Leistungstheorie und Signale auf Leitungen

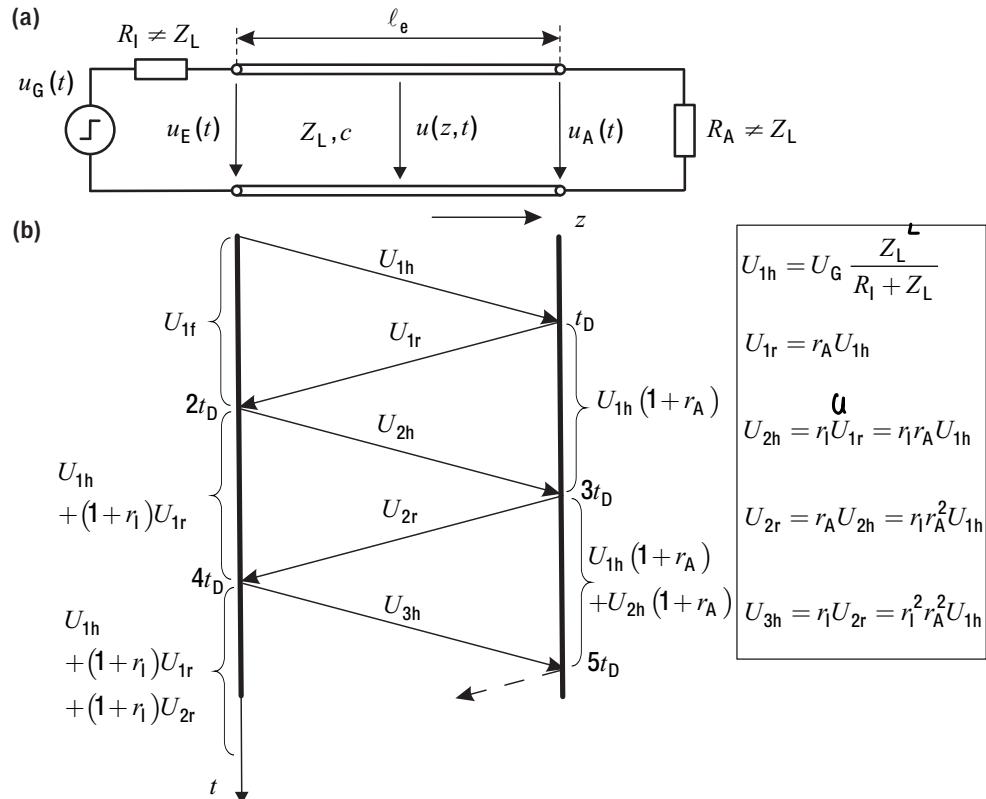


Bild 3.21 (a) Schaltung mit fehlangepassten Abschlüssen und (b) Gitterdiagramm zur Verfolgung der durch Reflexion an Quell- und Lastwiderstand hervorgerufenen Spannungssprünge

Diese Spannung ist am Eingang für die Dauer der doppelten Verzögerungszeit der Leitung  $2t_D$  sichtbar. Nach der Zeit  $t_D$  erreicht der Spannungssprung das Ende der Leitung und wird dort mit dem Reflexionsfaktor  $r_A$  reflektiert. Am Ende überlagern sich hin- und rücklaufender Spannungssprung zum Wert  $U_{1h}(1+r_A)$ . Durch die Reflexion läuft ein Spannungssprung mit der Amplitude

$$U_{1r} = r_A U_{1h} \quad (3.150)$$

zum Anfang der Leitung zurück. Dieser wird dort reflektiert und addiert sich zum ursprünglichen Spannungswert  $U_{1h}$ , so dass für das Zeitintervall  $2t_D \leq t < 4t_D$  der Spannungswert  $U_{1h} + (1+r_I)U_{1r}$  sichtbar wird. Der weitere Verlauf und die entsprechende Addition der Spannungsanteile ist in Bild 3.21b dargestellt.

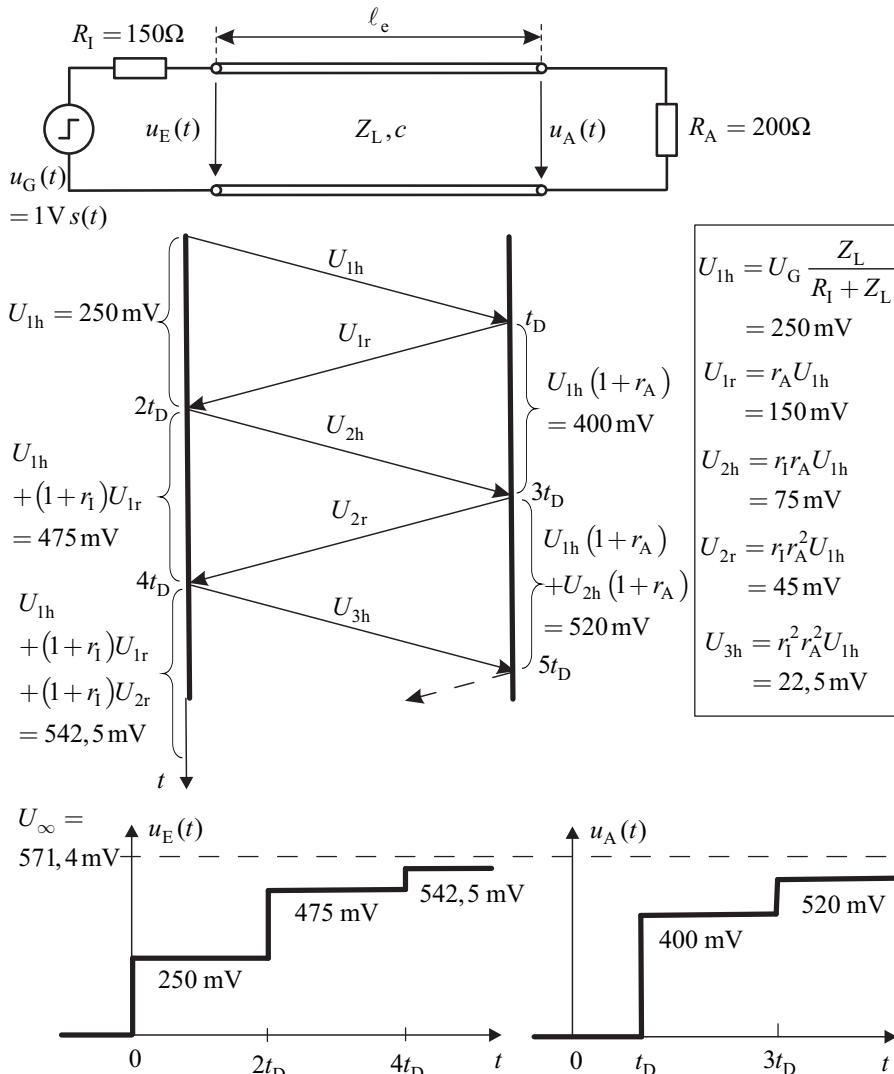
Für  $t \rightarrow \infty$  konvergieren die Spannungswerte am Eingang und am Ausgang gegen den Gleichspannungswert, den der Spannungsteiler aus  $R_I$  und  $R_A$  liefert:

$$U_\infty = U_E(t \rightarrow \infty) = U_A(t \rightarrow \infty) = U_G \frac{R_A}{R_I + R_A} . \quad (3.151)$$

An einem Beispiel soll dies nun einmal konkretisiert werden.

**Beispiel 3.9 Ausbreitung von Zeitsignalen bei beiderseitiger Fehlanpassung**

Wir betrachten eine Leitung mit folgenden Größen: Leitungswellenwiderstand  $Z_L = 50\Omega$ , Länge  $\ell_e = 0,2\text{ m}$ , relative Dielektrizitätszahl des dielektrischen Füllmaterials  $\varepsilon_r = 2,25$ . Für die Quelle gelte:  $U_G = 1\text{ V}$  und  $R_I = 150\Omega$ . Der Abschlusswiderstand betrage  $R_A = 200\Omega$  (Bild 3.22).

**Bild 3.22** Signalverfolgung bei einer sprungförmigen Anregung

Mit Gleichung (3.137) erhalten wir für die Leitung eine Signallaufzeit von  $t_D = 1\text{ ns}$ . Die Reflexionsfaktoren für Quelle und Last ergeben sich nach den Gleichungen (3.148) und (3.138) zu  $r_I = 0,5$  und  $r_A = 0,6$ . Die Werte für die auf den Leitungen hin- und zurücklau-

## 106 3 Leistungstheorie und Signale auf Leitungen

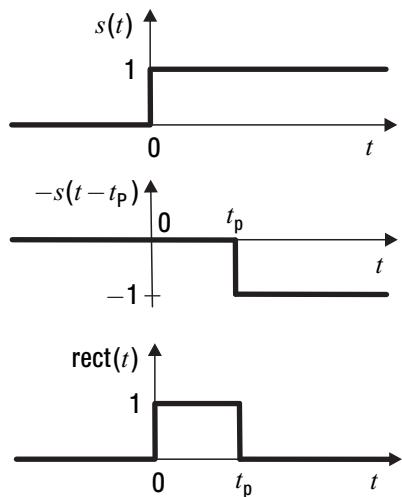
fenden Spannungen sowie die Zeitverläufe an Ein- und Ausgang finden wir in Bild 3.22 dargestellt. ■

### 3.2.2 Rechteckförmige Signale

Wir erweitern nun die Betrachtung auf rechteckförmige Signale.

$$\text{rect}(t) = s(t) - s(t - t_p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < t_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.152)$$

Einen Rechteckimpuls fassen wir dabei als Überlagerung zweier zeitversetzter Sprungfunktionen mit gleicher Amplitude, aber entgegengesetztem Vorzeichen auf (Bild 3.23).



**Bild 3.23** Rechteckfunktion als Überlagerung zweier Sprungfunktionen

Wir können die Spannungen am Eingang und Ausgang der Leitung für jede der beiden Sprungfunktionen nach dem gleichen Formalismus wie in Abschnitt 3.2.1 bestimmen und erhalten die Spannung bei Rechtekanregung, indem wir die einzelnen Spannungen überlagern.

Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn die Pulsdauer  $t_p$  kleiner als die doppelte Verzögerungszeit  $2t_D$  der Leitung ist. In diesem Fall kommt es zu keiner Überschneidung der hin- und zurücklaufenden Spannungsanteile an den Leitungsenden. An folgendem Beispiel betrachten wir die Spannungsverläufe.

#### Beispiel 3.10 Rechteckförmige Anregung bei beidseitiger Fehlanpassung

Wir betrachten eine Leitung mit folgenden Größen: Leitungswellenwiderstand  $Z_L = 50\Omega$ , Länge  $\ell_e = 0,2\text{ m}$ , relative Dielektrizitätszahl des dielektrischen Füllmaterials  $\epsilon_r = 2,25$ . Für die Quelle gelte:  $U_G = 1\text{ V}$  und  $R_I = 150\Omega$ . Der Abschlusswiderstand betrage  $R_A = 200\Omega$  (Bild 3.24).

Mit Gleichung (3.137) erhalten wir für die Leitung eine Signallaufzeit von  $t_D = 1\text{ ns}$ . Die Reflexionsfaktoren für Quelle und Last ergeben sich nach den Gleichungen (3.148) und

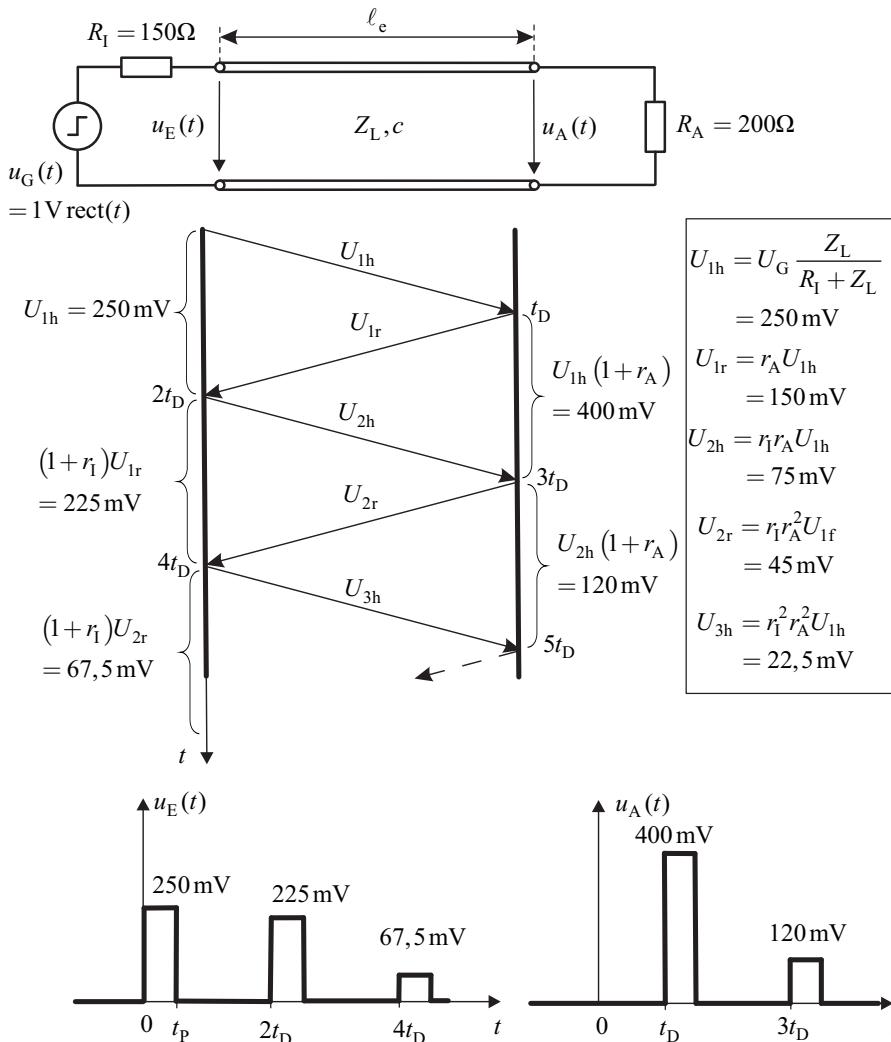


Bild 3.24 Signalverfolgung bei einer impulsförmigen Anregung

(3.138) zu  $r_I = 0,5$  und  $r_A = 0,6$ . Die Werte für die auf den Leitungen hin- und zurücklaufenden Spannungen sowie die Zeitverläufe an Ein- und Ausgang sind in Bild 3.24 gezeigt. ■

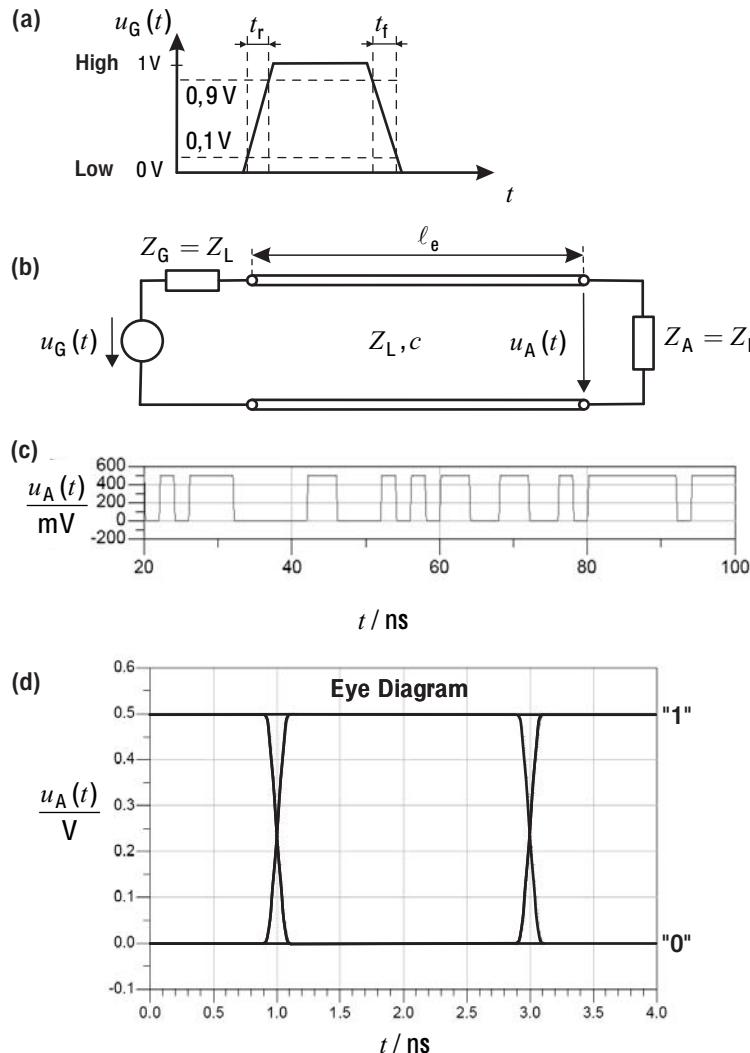
## 3.3 Augendiagramm

In Abschnitt 3.2.2 haben wir die Ausbreitung eines rechteckförmigen Impulses auf einer Leitung betrachtet. Bei der digitalen Übertragung im Basisband werden durch aufeinanderfol-

## 108 3 Leistungstheorie und Signale auf Leitungen

---

gende Pulse Informationen übermittelt. Bild 3.25a zeigt dazu ein Pulssignal mit endlich steilen Flanken. Die Geschwindigkeit der Signalübergänge von der logischen Null zur Eins wird als *Anstiegszeit*  $t_r$  (*rise time*) und *Abfallzeit*  $t_f$  (*fall time*) bezeichnet.

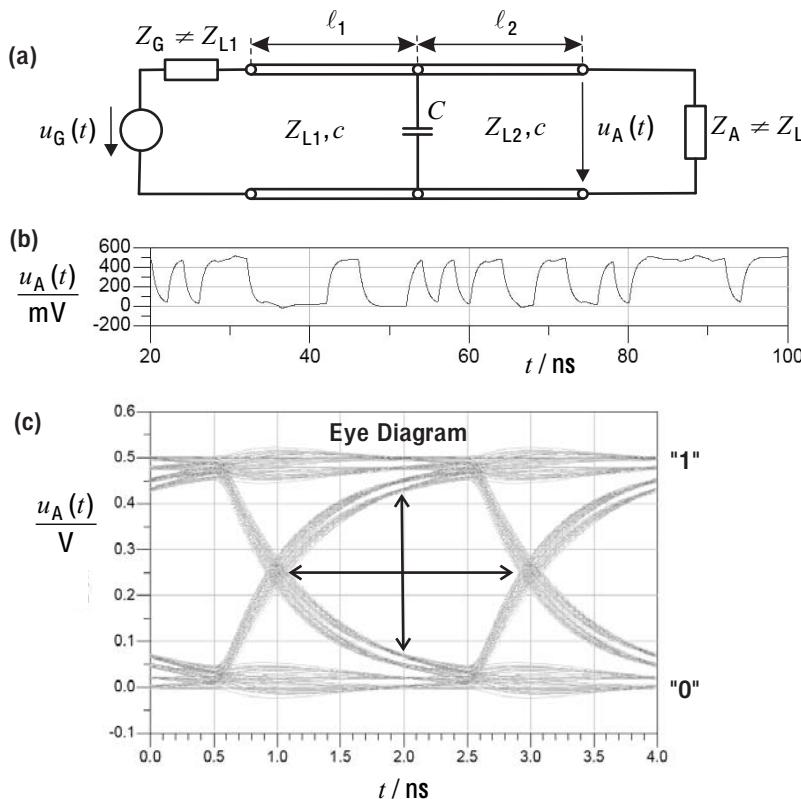


**Bild 3.25** Erläuterung der Entstehung eines Augendiagramms: (a) Trapezförmiger Impuls, (b) Schaltung, (c) Zeitsignal der Ausgangsspannung und (d) Augendiagramm

Werden mit Hilfe dieser Pulse digitale Signale über eine beidseitig angepasste, nicht-dispersive, verlustfreie Leitung (Bild 3.25b) übertragen, so erfolgt durch die Leitung neben einer zeitlichen Verzögerung keinerlei Veränderung. Die am Ausgang zu beobachtende Impulsfolge  $u_A(t)$  (Bild 3.25c) entspricht bis auf einen Amplitudenfaktor und der Zeitverschiebung der von der Quelle gesendeten Impulsfolge.

$$u_A(t) = \frac{1}{2} u_G(t - t_D) \quad (3.153)$$

Zur Beurteilung der Übertragungsqualität kann dieses Ausgangssignal in Form eines *Augendiagramms* dargestellt werden [Göbe99]. Das Augendiagramm entsteht dabei durch eine überlagerte Darstellung von Zeitabschnitten gleicher Länge. Die Länge der Zeitabschnitte orientiert sich an der Datenrate bzw. der Dauer eines Informationsbits  $T_{\text{bit}} = T_{\text{puls}}$ . Bild 3.25d zeigt ein Augendiagramm, bei dem als Länge des Zeitfensters gerade die doppelte Zeit eines Informationsbits verwendet wird. Aufgrund der idealen Verhältnisse (keine Reflexion, keine Dispersion) erscheinen hier ideale Signalübergänge. Da der Bereich zwischen den Kreuzungspunkten des Zeitsignals die Form eines Auges hat, wird die Darstellung als Augendiagramm (*Eye diagram*) bezeichnet.



**Bild 3.26** Beispiel eines Augendiagramms bei einer Übertragungsstrecke mit Fehlanpassungen und frequenzabhängigem Übertragungsverhalten: (a) Schaltung, (b) Zeitsignal der Ausgangsspannung und (c) Augendiagramm

In Bild 3.26a ist zum Vergleich eine nichtideale Übertragungsstrecke dargestellt. Diese besteht aus zwei Leitungen, deren Leitungswellenwiderstände sich unterscheiden und die auch nicht an die Quell- und Lastimpedanz angepasst sind. Durch diese Feldanpassung kommt es zu Reflexionen. Weiterhin ist in der Mitte als Modell für einen kapazitiven Verbraucher eine Kapa-

**110 3 Leistungstheorie und Signale auf Leitungen**

---

zität  $C$  eingebaut. Diese Kapazität stellt eine frequenzabhängige Komponente dar. Bild 3.26b zeigt, dass die Ausgangssignale nun eine sichtbare Verzerrung aufweisen. Im Augendiagramm in Bild 3.26c erkennen wir, dass die Reflexionen sich den Impulsen überlagern. Die Überlagerung kann je nach Vorzeichen der Reflexion zu einer Erhöhung oder Verringerung der Spannung führen, der Signalverlauf wird also aufgefächert. Weiterhin begrenzt die Kapazität die Geschwindigkeit, mit der die Signalübergänge erfolgen (wir erkennen den exponentiellen Verlauf aus dem vorherigen Abschnitt). Durch diese Einflüsse verringern sich die vertikale und die horizontale Öffnung des Auges.

Die Öffnung des Augendiagramms stellt ein anschauliches Instrument zur Beurteilung der Übertragungsqualität bei der digitalen Übertragung dar, da es die Verzerrung digitaler Signale visualisiert und die Unterscheidbarkeit der beiden logischen Zustände (Null und Eins, bzw. LOW und HIGH) beurteilt werden kann.

## ■ 3.4 Zusammenfassung

In Kapitel 3 haben wir die Beschreibung von harmonischen Signalen auf Leitungen bei hohen Frequenzen kennengelernt. Auf einer Leitung können sich Spannungs- und Stromwellen in gegenläufigen Richtungen ausbreiten. Diese Wellen bestimmen das Ein- und Ausgangsverhalten von Leitungen. Zur Beschreibung des elektrischen Verhaltens sind neben der Leitungslänge zwei Kenngrößen wesentlich: erstens der Leitungswellenwiderstand  $Z_L$ , der das Verhältnis von Strom und Spannung bei einer rein fortschreitenden Welle beschreibt, und zweitens die Ausbreitungskonstante  $\gamma$  mit der Dämpfungskonstante als Realteil und der Phasenkonstante als Imaginärteil. Die Dämpfungskonstante bestimmt dabei, wie stark die Welle exponentiell gedämpft wird. Die Phasenkonstante ist eng verknüpft mit der Wellenlänge und somit bei bekannter Frequenz ein Maß für die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

In den Abschnitten 3.2 und 3.3 haben wir gesehen, dass zur Vermeidung von Reflexionen an den Leitungsanschlüssen auch bei sprung- und impulsförmigen Signalen die Leitungen mit ihrem Leitungswellenwiderstand abgeschlossen sein müssen. Das Augendiagramm stellt ein anschauliches Instrument zur Beurteilung der Übertragungsqualität bei digitalen Signalen dar. Die Auswirkungen von Fehlanpassungen und frequenzabhängigem Übertragungsverhalten können damit schnell beurteilt werden.

## ■ 3.5 Übungsaufgaben

### Übung 3.1

Berechnen Sie die Eingangsimpedanz für Beispiel 3.6 mit Hilfe von Gleichung (3.74).

### Übung 3.2

Vollziehen Sie das in Bild 3.24 gezeigte Beispiel für den Fall  $R_I = 15\Omega$  und  $R_A = 10\Omega$  nach. Zeichnen Sie die Spannungsverläufe  $u_E(t)$  und  $u_A(t)$ . Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem Schaltungssimulator.

### Übung 3.3

Passen Sie mit Hilfe des Smith-Charts die Impedanz  $Z = (120 - j80)\Omega$  an eine Impedanz von  $50\Omega$  an ( $f = 1\text{ GHz}$ ). Verwenden Sie als Anpassschaltung eine serielle Leitung und eine kurzgeschlossene Stichleitung mit einem Leitungswellenwiderstand von  $Z_L = 50\Omega$ . Bestimmen Sie die Längen der Leitungen. Die Leitungen seien luftgefüllt ( $\epsilon_r = 1$ ).

### Übung 3.4

Zur Bestimmung des Leitungswellenwiderstandes einer verlustlosen Leitung wird die Kapazität  $C = 1,5\text{ pF}$  eines kurzen leerlaufenden Leitungsstückes der Länge  $\ell_e = 12\text{ mm}$  gemessen. Die relative Dielektrizitätszahl des homogenen Füllmaterials der Leitung beträgt  $\epsilon_r = 1,44$ .

1. Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  einer elektromagnetischen Welle auf der Leitung.
2. Geben Sie den Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  der verlustlosen Leitung an.
3. Bestimmen Sie den Induktivitätsbelag  $L'$ .

Für die nachfolgenden Aufgabenteile gelte eine Betriebsfrequenz von  $f = 250\text{ MHz}$ .

4. Berechnen Sie die Ausbreitungskonstante  $\gamma$ .
5. Wie lautet die Eingangsimpedanz einer leerlaufenden Leitung der Länge  $\ell = 25\text{ cm}$ ? (Rechnen Sie mit  $c_0 = 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$ .)

### Übung 3.5

Gegeben sei eine luftgefüllte Leitung der Länge  $\ell_e$  mit dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L = 25\Omega$  (Bild 3.27). Die Leitung ist mit einer Schaltung aus Kapazität  $C$  sowie den Widerständen  $R_{AS}$  und  $R_{AP}$  abgeschlossen. Der Innenwiderstand der Quelle sei  $R_I = 25\Omega$  und die Amplitude der Spannungsquelle  $U_G = 2\text{ V}$ . Bekannt ist der Spannungsverlauf am Eingang  $u_E(t)$ .

1. Bestimmen Sie die Länge  $\ell_e$  der Leitung.
2. Geben Sie die Werte der Abschlusskapazität  $C$  und der Abschlusswiderstände  $R_{AS}$  und  $R_{AP}$  an.

## 112 3 Leistungstheorie und Signale auf Leitungen

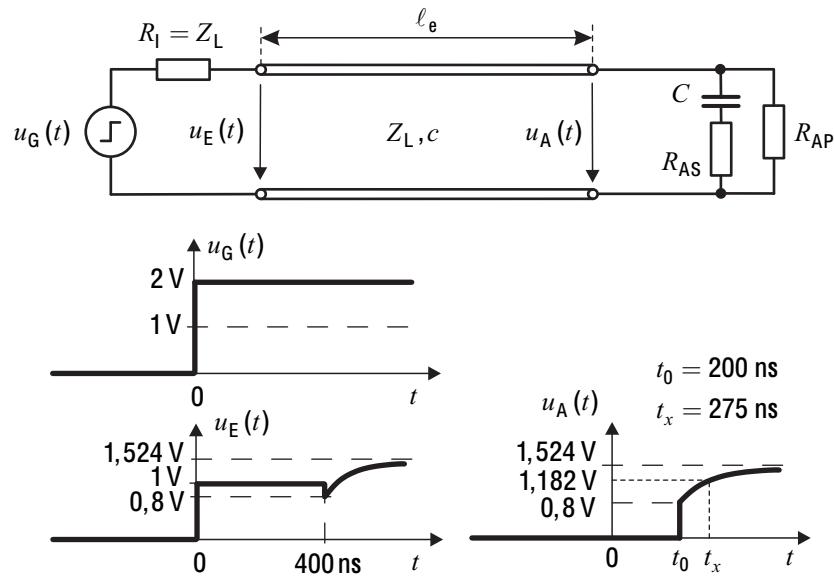


Bild 3.27 Schaltung und Spannungsverlauf zu Übung 3.5

# 4

## Wellenleiter

In diesem Kapitel wollen wir einen Überblick über technisch wichtige Leitungstypen gewinnen. Die Koaxialleitung wird dabei sehr detailliert behandelt, da hier die beiden Leitungskenngrößen *Ausbreitungskonstante* und *Leitungswellenwiderstand* mathematisch einfach bestimmt werden können. Für alle weiteren Leitungstypen stellen wir die wichtigsten Ergebnisse anschaulich zusammen.

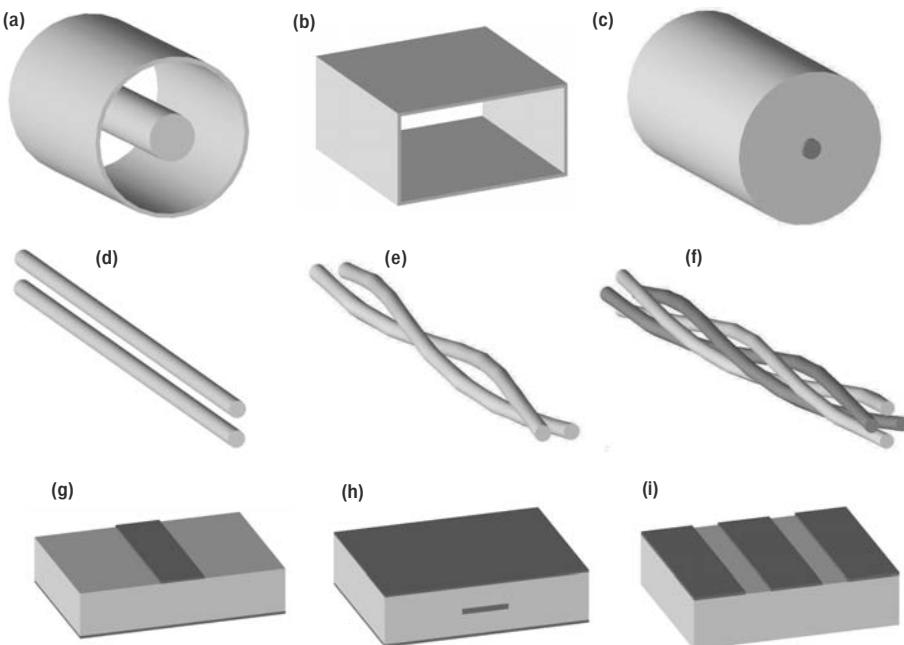
### ■ 4.1 Überblick über technisch bedeutsame Leitungstypen

Die primäre Aufgabe von Leitungen besteht darin, Signale von einer Schaltungskomponente (zum Beispiel dem Ausgang eines Verstärkers) zu einer anderen Schaltungskomponente (zum Beispiel dem Eingang einer Antenne) zu führen. Idealerweise geschieht dies ohne Verluste auf der Leitung und ohne Reflexionen an den beiden Leitungsenden. Die erste Forderung führt zur Verwendung gut leitfähiger Metalle für die Leiter und verlustarmer Dielektrika für die vom elektromagnetischen Feld durchsetzten wellenführenden Raumbereiche der Leitung. Um die zweite Forderung (Vermeidung von Reflexionen) zu erfüllen, werden Leitungswellenwiderstand, Quellimpedanz und Lastimpedanz aufeinander abgestimmt (Anpassung).

Eine weitere Aufgabe von Leitungen besteht darin, ein vorgegebenes Schaltungsverhalten zu realisieren. Beispielsweise können Filter, Leistungsteiler, Koppler und Anpassschaltungen bei hohen Frequenzen vorteilhaft mit Leitungssegmenten realisiert werden. In diesen Fällen sind Reflexionen an den Leitungsenden beabsichtigt, um durch Resonanzen das gewünschte Übertragungsverhalten zu erzielen.

Bild 4.1 zeigt einige technisch wichtige Leitungstypen. Zur Überbrückung auch größerer Distanzen werden vor allem Koaxialleitungen, Zweidrahtleitungen und Lichtwellenleiter verwendet. Passive Schaltungen werden vorteilhaft mit planaren Leitungstypen (*Microstrip*, *Stripline*) aufgebaut. Hohlleiter kommen bei hohen Leistungen zum Einsatz.

Die *Koaxialleitung* (Bild 4.1a) besteht aus einem zylindrischen Außen- und einem koaxial angeordneten zylindrischen Innenleiter. Sie ist die Standardleitung in der Hochfrequenzmesstechnik und dient zur Verbindung von Komponenten und Geräten, die ein Gehäuse besitzen. Eine Eigenschaft der Koaxialleitung ist ihr *geschlossener Aufbau*: Die elektromagnetischen Felder existieren nur im Innern der Leitung, also im (homogenen) Dielektrikum zwischen Innen- und Außenleiter. Die Leiter selber sind bei Hochfrequenzleitungen (bis auf den Bereich weniger Eindringtiefen  $\delta$ ) aufgrund des Skineffektes feldfrei. Die koaxiale Leitung ist eine *unsymmetrische Leitung*, da Hin- und Rückleiter wegen der unterschiedlichen geometrischen Ausdehnung variierende (Streu-)Kapazitäten gegenüber einer entfernt gedachten Masse haben.



**Bild 4.1** Leitungstypen (a) Koaxialleitung, (b) Rechteckhohlleiter, (c) optischer Wellenleiter, (d) Zweidrahtleitung, (e) verseilte Zweidrahtleitung (*Twisted Pair*), (f) Sternvierer, (g) Mikrostreifenleitung (*Microstrip*), (h) Streifenleitung (*Stripline, Triplate*), (i) koplanare Leitung (*Coplanar waveguide*)

Eine *Paralleldrahtleitung* (Bild 4.1d) besteht aus zwei parallelen zylindrischen Leitern gleichen Querschnitts. Es handelt sich um eine *offene Struktur*, bei der sich Feldanteile in den Raum um die Leitung erstrecken. Dieser offene Aufbau macht die Struktur empfänglich für die Einkopplung von Störsignalen. Durch Verdrillen der Leitung kann die magnetische Störsignaleinkopplung weitestgehend vermieden werden. Durch den *symmetrischen Aufbau* und die Speisung mit *erdsymmetrischen Signalen* ist die elektrische Störeinkopplung konstruktionsbedingt gering. Wir werden darauf noch in Abschnitt 4.7 eingehen.

Aus der Grundidee der Paralleldrahtleitung werden zwei technisch bedeutsame Varianten für den Kabelaufbau abgeleitet: Beim *Sternvierer* (Bild 4.1f) werden zwei Paralleldrahtleitungen orthogonal zueinander angeordnet und miteinander um eine gemeinsame Achse verseilt. (Die Leitungslänge, bei der die Leiter sich genau einmal umeinander herum verdreht haben, wird als Schlaglänge bezeichnet.) Durch den orthogonalen Aufbau der beiden Paralleldrahtleitungspaare ist die Überkopplung zwischen beiden Paaren gering. Bei der *Twisted Pair-Leitung* (Bild 4.1e) wird eine Paralleldrahtleitung einzeln verseilt. Es können auch mehrere paarweise verseilte Leitungen mit unterschiedlichen Schlaglängen zu einem gemeinsamen Kabel verseilt werden. Sternvierer und *Twisted Pair*-Leitungen werden vor allem in der Kommunikationstechnik als schnelle Datenkabel eingesetzt. (Bei realen Kabeln werden die einzelnen Leiter mit einem Isolationsmaterial umgeben, um die Leiter in einem definierten Abstand zu führen. Die isolierenden Schichten sind in den Bildern aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt.)

Innerhalb von planaren Schaltungen werden vor allem Mikrostreifenleitungen (*Microstrip*) und Streifenleitungen (*Stripline*, *Triplate*) verwendet. Mit ihnen können passive Schaltungen wie Filter und Koppler realisiert werden.

Die *Mikrostreifenleitung* (*Microstrip*) (Bild 4.1g) besteht aus einem dielektrischen Substrat, unter dem eine durchgehende Massefläche liegt. Auf dem Substrat liegt eine dünne Leiterbahn. Die elektromagnetische Welle wird in zwei Materialien (Substrat und Luft) geführt. Folglich kann sich keine reine TEM-Welle ausbreiten, sondern zur Erfüllung der Grenzbedingung an der Materialgrenze Luft-Substrat müssen (kleine) longitudinale Feldanteile vorhanden sein. Man spricht hier von einer Quasi-TEM-Welle. Die Struktur der Leitung ist *unsymmetrisch und offen*. Die Mikrostreifenleitung lässt sich miniaturisieren und kann aufgrund ihres offenen Aufbaus sehr gut mit konzentrierten Elementen wie SMD-Bauteilen und integrierten Schaltungen kombiniert werden. Zwei parallele Mikrostreifenleitungen können auch im Gegentaktbetrieb eine symmetrische Leitung bilden (siehe Abschnitt 4.7).

Die *Streifenleitung* (Bild 4.1h) ist ebenso wie die Mikrostreifenleitung ein planarer Leitungstyp mit *unsymmetrischer* Struktur, die jedoch *geschlossen* ist. Die Streifenleitung taucht zum Beispiel im Inneren von planar aufgebauten Schaltungen zwischen durchgehenden Masseflächen auf. Aufgrund des homogenen Substratmaterials führt die Streifenleitung eine TEM-Welle.

Bei der *Koplanarleitung* (*Coplanar waveguide*) (Bild 4.1i) liegen Masse und Leiterbahn *in einer Ebene* („ko-planar“). Die Welle breitet sich wie bei der Mikrostreifenleitung in zwei Medien aus, so dass sich auch hier eine Quasi-TEM-Welle ausbildet.

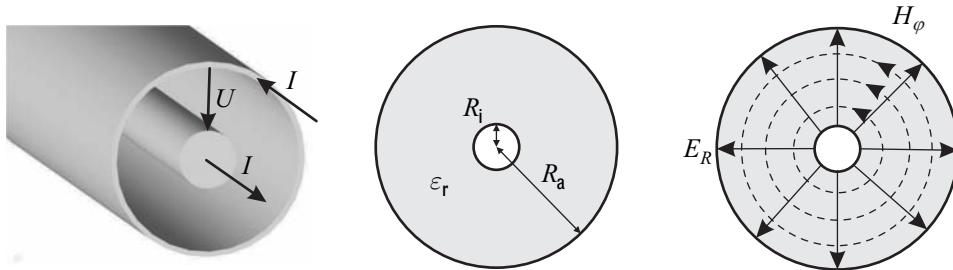
Der *Rechteckhohlleiter* (Bild 4.1b) stellt hier einen besonderen Leiterrtyp dar, da er im Gegensatz zu den anderen Arten, die alle separate Hin- und Rückleiter besitzen, nur eine einzige metallische Struktur aufweist. Es leuchtet unmittelbar ein, dass mit einer solchen Anordnung kein Gleichstrom übertragen werden kann, denn beim Anschluss der Gleichstromquelle würde es sofort zu einem Kurzschluss kommen. Der Rechteckhohlleiter ist erst ab einer gewissen Grenzfrequenz oder *Cut-off*-Frequenz einsetzbar. Ab dieser Frequenz können sich elektromagnetische Wellen innerhalb des quaderförmigen Innenraums ausbreiten, die an den metallischen Wänden reflektiert werden und sich so zu einer in Längsrichtung fortlaufenden Welle überlagern [Poza98].

*Optische Wellenleiter* (Bild 4.1c) bestehen aus nichtleitendem dielektrischen Material, wobei der zentrale Bereich (Kern) eine höhere relative Dielektrizitätszahl aufweist als der umgebende Mantel. Im Innern des dielektrischen Kerns breiten sich – wie im Falle des Hohlleiters – elektromagnetische Wellen aus. Die Reflexion der Wellen geschieht hier durch Totalreflexion an *dielektrischen Grenzschichten* [Schi05]. Optische Wellenleiter spielen eine zunehmend größer werdende Rolle in der Kommunikationstechnik. Sie eignen sich hervorragend, um über sehr große Distanzen verlust- und verzerrungsarm Signale zu übertragen. Sie werden aber auch zur Überbrückung kurzer Distanzen und in der Messtechnik eingesetzt.

## ■ 4.2 Koaxialleitungen

Die Koaxialleitung (Bild 4.2) besteht aus einem zylindrischen Außenleiter (Radius  $R_a$ ) und einem koaxialen zylindrischen Innenleiter (Radius  $R_i$ ). Der Zwischenraum ist mit einem homogenen dielektrischen Material (relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$ ) gefüllt. Zwischen Innen- und

Außenleiter existiert eine Spannung, so dass sich im Dielektrikum ein radiales elektrisches Feld  $E_R$  einstellt. Der Strom im Innenleiter führt aufgrund des Durchflutungsgesetzes (Rechte-Hand-Regel) zu einem umlaufenden magnetischen Feld  $H_\varphi$ .



**Bild 4.2** Aufbau einer koaxialen Leitung und Feldverteilung der TEM-Welle

Am Beispiel der Koaxialleitung berechnen wir mit den feldtheoretischen Grundlagen aus Kapitel 2 und den leitungstheoretischen Zusammenhängen aus Kapitel 3 die Kenngrößen dieses Leitungstyps. Die zylindersymmetrische Geometrie und Feldverteilung lassen hier eine einfache analytische Auswertung zu.

#### 4.2.1 Induktivitätsbelag und Leitungswellenwiderstand

Bei einer verlustlosen Leitung kann der Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  aus dem Induktivitätsbelag  $L'$ , den Materialgrößen  $\epsilon_r$  und  $\mu_r$  und der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$  berechnet werden (Gleichung (3.65)):

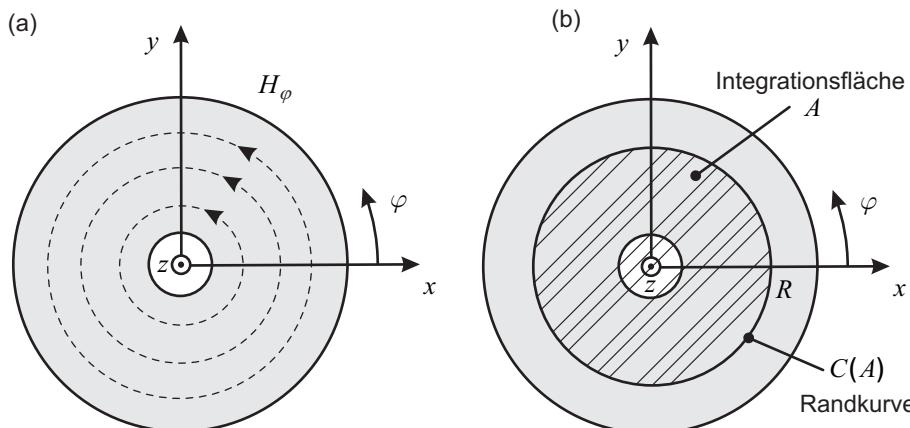
$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{c_0 L'}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad . \quad (4.1)$$

Da magnetische Materialien bei Leitungen untypisch sind, setzen wir im Folgenden  $\mu_r = 1$ . Zur Berechnung orientieren wir uns an der Geometrie in Bild 4.3. Zunächst ermitteln wir mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes das magnetische Feld zwischen Innen- und Außenleiter (siehe auch Übungsaufgabe 2.2). Das Durchflutungsgesetz lautet:

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \quad . \quad (4.2)$$

Aufgrund des Skineffektes sind bei hohen Frequenzen die Leiter bis auf eine sehr dünne Rand schicht – die wir hier vernachlässigen – feldfrei. Im Außenraum ( $R > R_a$ ) der Koaxialleitung existiert ebenso kein magnetisches Feld, da sich die magnetischen Felder von hin- und rück laufendem Strom hier kompensieren. Das magnetische Feld müssen wir daher nur zwischen den Leitern berechnen.

Unsere anschauliche Erwartungshaltung für das magnetische Feld ist in Bild 4.3a eingezeichnet: Wir erwarten ein in  $\varphi$ -Richtung umlaufendes magnetisches Feld, welches auf Kreisen um die  $z$ -Achse einen konstanten Wert aufweist. Andere Komponenten können aufgrund der Symmetrie nicht auftauchen. Als Fläche für die Integration wählen wir daher einen Kreis mit dem Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse (Bild 4.3b).



**Bild 4.3** Zur Berechnung des magnetischen Feldes in der Koaxialleitung: (a) Verteilung der magnetischen Feldstärke und (b) Integrationsfläche

Auf der linken Seite in Gleichung (4.2) werten wir ein Linienintegral über den Rand  $C(A)$  der Kreisfläche  $A$  in  $\varphi$ -Richtung (für  $\varphi$  von Null bis  $2\pi$ ) aus. Zunächst fällt auf, dass das magnetische Feld in Richtung des Wegelementes in Zylinderkoordinaten  $d\vec{s}_\varphi = R d\varphi \hat{e}_\varphi$  zeigt (siehe Anhang A). Somit wird aus dem Skalarprodukt das Produkt der Beträge. Da längs des Integrationsweges das magnetische Feld konstant ist, kann  $H_\varphi$  aus dem Integral herausgezogen werden und wir erhalten

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} H_\varphi ds_\varphi = \int_0^{2\pi} H_\varphi R d\varphi = H_\varphi R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R H_\varphi . \quad (4.3)$$

Auf der rechten Seite von Gleichung (4.2) wird die Stromdichte über die Fläche  $A$  integriert. Anschaulich ist sofort klar, dass dies den Strom  $I$  durch den Innenleiter ergibt.

$$\iint_A \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} = I \quad (4.4)$$

Führen wir Gleichung (4.3) und (4.4) zusammen, so erhalten wir für das magnetische Feld zwischen den Leitern:

$$\boxed{H_\varphi = \frac{I}{2\pi R}} . \quad (4.5)$$

Die Induktivität  $L$  können wir nach unseren Überlegungen aus Abschnitt 2.1.2.3 mit Hilfe der magnetischen Feldenergie ermitteln. Wir wählen dabei ein Leitungsstück der Länge  $\ell$ .

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (4.6)$$

In Zylinderkoordinaten erhalten wir bei Integration über den felderfüllten Raum und  $\mu_r = 1$ :

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\ell} \mu_0 \left( \frac{I}{2\pi R} \right)^2 dz d\varphi R dR \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{I}{2\pi} \right)^2 \underbrace{\int_0^\ell dz}_{\ell} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R^2} R dR}_{\ln R \Big|_{R_i}^{R_a}} . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die magnetische Feldenergie wird somit:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \ell \frac{I^2}{2\pi} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) = \frac{1}{2} L I^2 . \quad (4.8)$$

Hiermit ergibt sich der Induktivitätsbelag:

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) \quad (4.9)$$

und daraus der Leitungswellenwiderstand gemäß Gleichung (4.1):

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{c_0 L'}{\sqrt{\epsilon_r}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}_{c_0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}_{Z_{F0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) . \quad (4.10)$$

Die Größe  $Z_{F0}$  ist nach Abschnitt 2.5.1 der Feldwellenwiderstand des freien Raumes mit

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega . \quad (4.11)$$

Somit ist der Leitungswellenwiderstand einer verlustlosen Koaxialleitung:

$$Z_L = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) \quad (\text{Leitungswellenwiderstand einer Koaxialleitung}). \quad (4.12)$$

### Beispiel 4.1 Leitungswellenwiderstand einer Koaxialleitung

Stellen wir Gleichung (4.12) nach dem Verhältnis der Radien  $R_a/R_i$  um, so erhalten wir für eine Luftleitung ( $\epsilon_r = 1$ ) mit einem Leitungswellenwiderstand von  $Z_L = 50 \Omega$  ein Verhältnis von  $R_a/R_i = 2,3$ . Falls die Leitung mit einem dielektrischen Material (PTFE,  $\epsilon_r = 2,08$ ) gefüllt ist, muss ein Radienverhältnis von  $R_a/R_i = 3,3$  gewählt werden. ■

### 4.2.2 Dämpfung bei schwachen Verlusten

Gemäß Abschnitt 3.1.7 kann bei einer schwach verlustbehafteten Leitung die Dämpfungskonstante  $\alpha$  aus den Leitungsbelägen  $R'$  und  $G'$  eines kurzen Leitungsstückes berechnet werden.

$$\alpha \approx \alpha_{\text{diel}} + \alpha_{\text{met}} = \frac{G' Z_L}{2} + \frac{R'}{2 Z_L} \quad (4.13)$$

### 4.2.2.1 Metallische Verluste

Die metallischen Verluste ermitteln wir über den Widerstandsbelag  $R'$ . Aufgrund des Skineffektes fließt der Strom nur oberflächlich. Die Skintiefe  $\delta$  berechnet sich gemäß Abschnitt 2.4 zu:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}} . \quad (4.14)$$

Zur Bestimmung des Widerstandes ist der stromdurchflossene Bereich maßgebend, wobei wir die Skintiefe als äquivalente Leitschichtdicke zur Widerstandsberechnung verwenden. Bei einer Koaxialleitung fließt der Strom im Innenleiter (Widerstand  $R_{mi}$ ) und Außenleiter (Widerstand  $R_{ma}$ ), so dass sich aufgrund der Serenschaltung von Innen- und Außenleiter hier der Gesamtwiderstand  $R_m$  als Summe der beiden Anteile ergibt. Der Index  $m$  steht für die metallischen Verluste.

$$R_m = R_{mi} + R_{ma} \quad \text{mit} \quad R_{mi} = \frac{\ell}{\sigma A_i} \quad \text{und} \quad R_{ma} = \frac{\ell}{\sigma A_a} \quad (4.15)$$

Für die stromdurchflossenen Flächen  $A_i$  und  $A_a$  erhalten wir über die äquivalente Leitschichtdicke  $\delta$  somit (Abschnitt 2.4):

$$A_i = 2\pi R_i \delta \quad \text{und} \quad A_a = 2\pi R_a \delta . \quad (4.16)$$

Der Widerstandsbelag  $R'$  steigt wegen der frequenzabhängigen Skintiefe insgesamt mit der Wurzel aus der Frequenz:

$$\boxed{R' = \frac{R_m}{\ell} = \frac{1}{2\pi\sigma\delta} \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_a} \right) \sim \sqrt{f}} \quad (\text{Widerstandsbelag einer Koaxialleitung}). \quad (4.17)$$

Dies gilt für ein homogenes Leitermaterial. In der Praxis kann dieser Wert höher liegen, da zum Beispiel durch die Verwendung von Geflecht bzw. Metallfolien für Außenleiter und Litzenleiter für den Innenleiter die Wege für den Strom größer werden können.

### 4.2.2.2 Dielektrische Verluste

Dielektrische Materialien werden in der Regel durch einen Verlustfaktor  $\tan \delta_\epsilon$  charakterisiert. Impedanzen können ebenfalls durch einen Verlustfaktor charakterisiert werden. Der Verlustfaktor eines Kondensators  $\tan \delta_C$  stellt bei einer Admittanz den Quotienten aus Wirk- und Blindanteil eines Bauelementes dar. Da in unserem Falle der Koaxialleitung das verlustbehafte Dielektrikum den gesamten felderfüllten Raum einnimmt, gilt  $\tan \delta_C = \tan \delta_\epsilon$ .

$$\tan \delta_C = \frac{G}{\omega C} = \tan \delta_\epsilon \quad (4.18)$$

Hieraus können wir den Leitwertbelag berechnen. Allerdings benötigen wir noch den Kapazitätsbelag  $C'$ , den wir jedoch mit Gleichung (4.1) einfach aus dem Induktivitätsbelag  $L'$  berechnen können.

$$\boxed{G' = \omega C' \tan \delta_\epsilon \sim f} \quad (\text{Leitwertbelag}) \quad (4.19)$$

Die dielektrischen Verluste steigen linear mit der Frequenz, falls der Verlustfaktor konstant ist, was für viele Materialien im technischen Einsatzbereich näherungsweise gegeben ist.

### Beispiel 4.2 Elektrische Kenngrößen einer Koaxialleitung

Für eine Koaxialleitung aus Kupfer (elektrische Leitfähigkeit  $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ ) berechnen wir die wichtigsten elektrischen Kenngrößen bei einer Frequenz von  $f = 2 \text{ GHz}$ . Die Leitung wird durch folgende Größen definiert: Innenradius  $R_i = 2,4 \text{ mm}$ , Außenradius  $R_a = 6,2 \text{ mm}$ , relative Ausbreitungsgeschwindigkeit einer TEM-Welle  $c = 0,88c_0$  (88% der Vakuumlichtgeschwindigkeit), Verlustfaktor des Dielektrikums  $\tan \delta_\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ .

Zunächst ermitteln wir die relative Dielektrizitätszahl aus der Reduktion der Ausbreitungsgeschwindigkeit mit  $\epsilon_r = (c_0/c)^2 = (1/0,88)^2 = 1,291$ . Wir erhalten nach Gleichung (4.12) einen Wellenwiderstand von  $Z_L = 50,1 \Omega$ . Für den Induktivitätsbelag ergibt sich nach Gleichung (4.9) ein Wert von  $L' = 0,190 \mu\text{H/m}$ . Nach Gleichung (4.1) können wir aus dem Leitungswellenwiderstand und dem Induktivitätsbelag auch den Kapazitätsbelag ausrechnen:  $C' = 75,7 \text{ pF/m}$ . Für die Berechnung der Verluste benötigen wir zunächst die Skintiefe nach Gleichung (4.14) und erhalten  $\delta = 1,468 \mu\text{m}$ . Mit Hilfe von Gleichungen (4.13) und (4.17) wird die durch ohmsche Verluste im Leiter verursachte Dämpfungskonstante  $\alpha_{\text{met}} = 0,010661/\text{m} = 0,0926 \text{ dB/m}$ . Die durch die dielektrischen Verluste verursachte Dämpfungskonstante erhalten wir nach den Gleichungen (4.13) und (4.19) zu  $\alpha_{\text{diel}} = 0,0011941/\text{m} = 0,0104 \text{ dB/m}$ . Zusammengerechnet ergibt sich eine Dämpfungskonstante von  $\alpha = 10,3 \text{ dB/100m}$ .

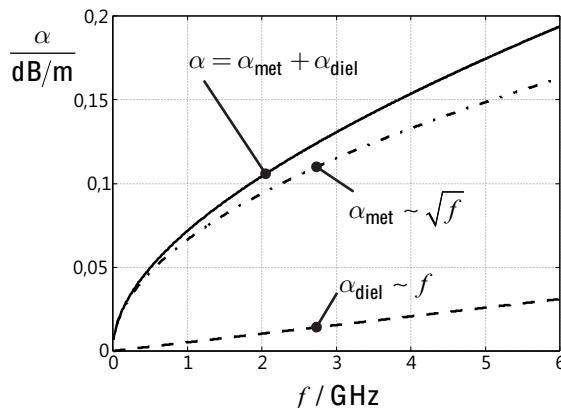


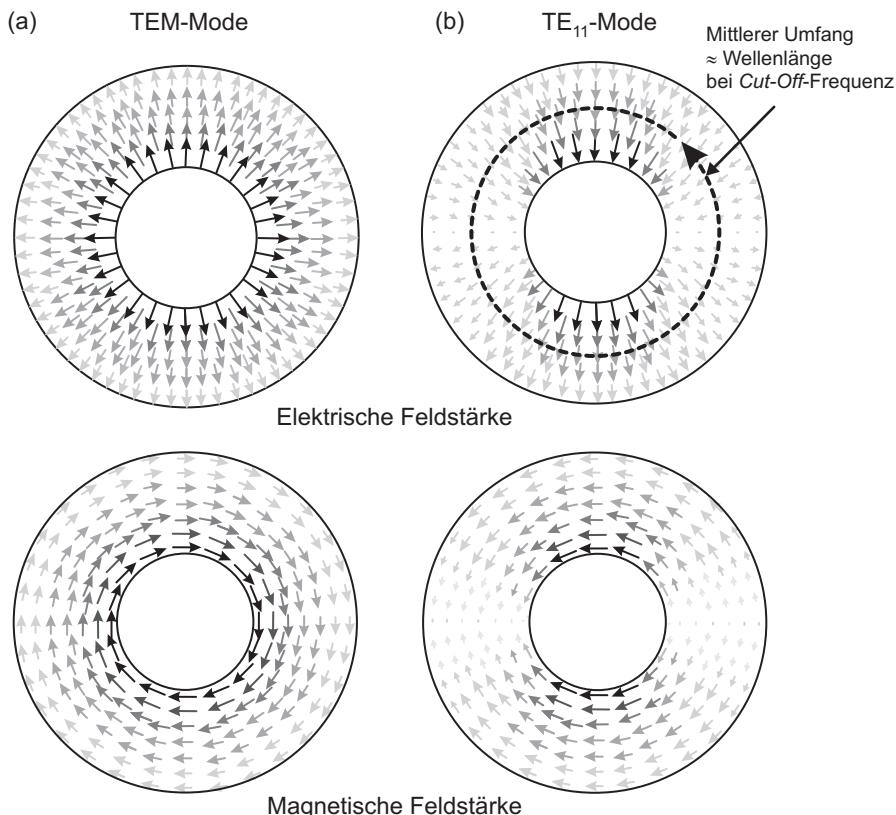
Bild 4.4 Frequenzabhängigkeit der Dämpfungskonstante einer verlustarmen Koaxialleitung

Die Ergebnisse der Dämpfungskonstante sind für einen größeren Frequenzbereich von 0 Hz bis 6 GHz in Bild 4.4 dargestellt. Die metallischen Verluste überwiegen im technischen Einsatzbereich der Leitung. Bei höheren Frequenzen wird aber der Anteil der dielektrischen Verluste immer bedeutsamer. ■

### 4.2.3 Nutzbarer Frequenzbereich

Oberhalb einer *Grenzfrequenz* (*Cut-off-Frequenz*) können neben der TEM-Welle auch *höhere Wellentypen* oder Ausbreitungsmoden in einer Koaxialleitung forschreiten. Diese höheren Wellentypen lassen sich von Hohlleiterwellentypen ableiten und sind unerwünscht, weil

sie veränderte, frequenzabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeiten und Leitungswellenwiderstände besitzen. Um eindeutige Verhältnisse in einer Koaxialleitung zu haben, darf also die Leistung nur unterhalb der *Cut-off-Frequenz* des ersten höheren Wellentyps betrieben werden.



**Bild 4.5** Elektrische und magnetische Feldstärke in einer Querschnittsebene der Koaxialleitung:  
(a) Grundausbreitungsmodus (TEM-Mode) und (b) höherer Wellentyp (TE<sub>11</sub>-Mode)

Der erste ausbreitungsfähige Nicht-TEM-Wellentyp ist der sog. TE<sub>11</sub>-Modus (Bild 4.5). Betrachten wir den TE<sub>11</sub>-Wellentyp, so erkennen wir, dass im Gegensatz zum TEM-Typ in Umfangsrichtung eine Variation der Amplitude auftritt. Wir erkennen zwei Nullstellen und zwei Maxima mit entgegengesetztem Vorzeichen. Der Umfang hat nun also ganz offensichtlich die Größenordnung der Wellenlänge erreicht.

Die Cut-off-Frequenz des Wellentyps lässt sich näherungsweise dadurch bestimmen, dass der mittlere Umfang  $U$  zwischen Innen- und Außenleiter gerade der Wellenlänge im homogenen Füllmaterial (relative Permittivitätszahl  $\epsilon_r$ ) entspricht.

$$U = 2\pi R = 2\pi \frac{R_a + R_i}{2} \approx \lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.20)$$

Damit erhalten wir für die *Cut-off*-Frequenz  $f_c$ , die den technischen Arbeitsbereich nach oben begrenzt.

$$f_c = \frac{c}{\pi(R_a + R_i)} = \frac{c_0}{\pi(R_a + R_i)\sqrt{\epsilon_r}} \quad (\text{Cut-off-Frequenz einer Koaxialleitung}) \quad (4.21)$$

Diese Formel entspricht dem in [Mein92] angegebenen Zusammenhang. Eine geringfügig genauere Formel findet sich in [Kark12].

#### Beispiel 4.3 Technischer Arbeitsbereich einer Koaxialleitung

Ein Koaxialkabel für Mobilfunkanwendungen mit hoher Leistung ist mit einem homogenen Dielektrikum gefüllt und besitzt einen Außenradius von  $R_a = 21,5$  mm sowie einen Innenradius von  $R_i = 8,85$  mm. Die relative Ausbreitungsgeschwindigkeit einer TEM-Welle beträgt 89% der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Mit  $c = 0,89c_0$  erhalten wir für die *Cut-off*-Frequenz  $f_c$  und damit für die obere Grenze des nutzbaren Frequenzbereiches  $f_c \approx 2,8$  GHz. ■

#### 4.2.4 Anwendungsbereiche

Die Koaxialleitung ist die Standardleitung im Bereich der Hochfrequenzmesstechnik und bei der Verbindung von Geräten. Als Vorteile des Leitungstyps ergeben sich vergleichsweise geringe Verluste, so dass mit der Leitung auch größere Distanzen überbrückbar sind. Der TEM-Grundausbreitungsmodus führt zu einer verzerrungsfreien Ausbreitung von Signalen. Der geschlossene Aufbau der Leitung verhindert Störeinkopplungen aus dem Außenraum und Abstrahlungsverluste zum Außenraum. Durch Verwendung von Litzenleitern als Innenleiter und Geflecht bzw. Folienschirm als Außenleiter kann eine hohe Flexibilität erreicht werden. Nachteilig am geschlossenen Aufbau ist die schlechte Kombinierbarkeit mit konzentrierten Schaltelementen (Kondensatoren, Spulen, ...).

### ■ 4.3 Mikrostreifenleitungen (*Microstrip*)

In Bild 4.6 ist der Querschnitt einer Mikrostreifenleitung (*Microstrip*) gezeigt. Die Mikrostreifenleitung besteht aus einem Substrat, unter dem eine durchgehende Massefläche liegt.

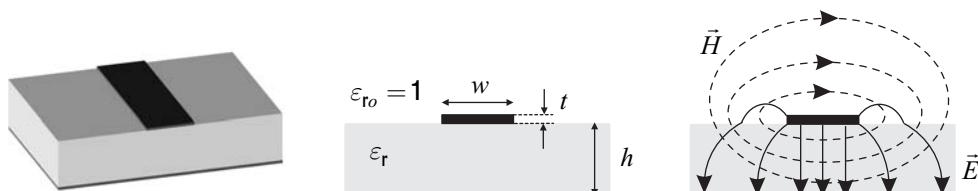


Bild 4.6 Geometrie der *Microstrip*-Leitung und Feldverteilung in einer Querschnittsebene

Auf dem Substrat befindet sich eine dünne, flächige Leiterbahn. Die elektromagnetische Welle wird in zwei Medien (Substrat und Luft) geführt. Hiermit kann sich keine reine TEM-Welle ausbreiten, sondern zur Erfüllung der Grenzbedingung an der Materialgrenze Luft-Substrat müssen (kleine) longitudinale Feldanteile vorhanden sein. Man spricht hier von einer *Quasi-TEM*-Welle.

### 4.3.1 Wellenwiderstand und effektive Permittivitätszahl

Die Phasengeschwindigkeiten in Luft und Substrat sind unterschiedlich. Zur Beschreibung der resultierenden Phasengeschwindigkeit für die Quasi-TEM-Welle wird eine geeignet gewählte *effektive relative Dielektrizitätszahl*  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  eingeführt. Die Ausbreitung der Welle erfolgt also mit der Geschwindigkeit, die sich einstellen würde, wenn der gesamte Raum mit diesem Ersatzmaterial gefüllt wäre.

$$\boxed{\epsilon_{r,\text{eff}} = \left(\frac{c_0}{c}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2} \quad (\text{Effektive relative Dielektrizitätszahl}) \quad (4.22)$$

Beim Aufbau planarer Leitungen werden je nach Anwendungszweck unterschiedliche kommerziell erhältliche Substratmaterialien verwendet. Tabelle 4.1 zeigt gebräuchliche Materialien und deren elektrische Eigenschaften sowie typische Substratdicken<sup>1</sup> und Metallauflagen [Jans92] [Dupo10] [Roge10]. Für niedrige Frequenzen ist glasfaserverstärktes Epoxidharz (FR4) ein sehr kostengünstiges, aber verlustbehaftetes Material.

**Tabelle 4.1** Eigenschaften typischer Substratmaterialien für planare Schaltungen

Material	Relat. Dielektrizitätszahl $\epsilon_r$	Verlustfaktor $\tan \delta$	Typische Substratdicke	Typische Dicke $t$ der Metallisierung
Polytetrafluorethylen (PTFE)	2,1	0,002	1,6 mm = 63 mil	35 $\mu\text{m}$
Glasfaserverstärktes Epoxidharz (FR4)	4,4...5	0,03	1,6 mm = 63 mil	35 $\mu\text{m}$
Rogers Duroid 6006	6,15	0,0027	0,635 mm = 25 mil	5 $\mu\text{m}$
Dupont 951	7,8	0,006	0,1 mm = 4 mil	5 $\mu\text{m}$
Aluminiumoxid ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	9,8	0,0001	0,635 mm = 25 mil	10 $\mu\text{m}$
Galliumarsenid (GaAs)	12,9	0,0004	0,1 mm = 4 mil	5 $\mu\text{m}$

Um planare Schaltungen zu realisieren, existieren unterschiedliche Verfahren. Integrierte Mikrowellenschaltungen (MMIC – *Monolithic Microwave Integrated Circuit*) verwenden Halbleitermaterial wie Galliumarsenid (GaAs), um passive Strukturen (wie Leitungen, Filter, Koppeler) sowie aktive und nichtlineare Strukturen (Transistoren, Dioden) auf einem Chip zu integrieren. Damit lassen sich Mischer, Leistungsverstärker und rauscharme Vorverstärker für Funkmodule kompakt aufbauen. *Hybridschaltungen* kombinieren passive planare Strukturen

<sup>1</sup> Die Einheit mil entspricht einem tausendstel inch: 1 mil = 1/1000 inch = 0,0254 mm.

mit konzentrierten Elementen (Transistoren, Dioden, ICs, SMD-Bauelemente). SMD (*Surface-Mounted-Device*) – Bauelemente sind kleine quaderförmige Schaltelemente mit Anschlusskontakten, die auf die Oberfläche des Substrates aufgebracht werden und so im Zusammenspiel mit den planaren Strukturen eine Schaltung bilden (siehe Abschnitt 6.1).

Der Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  und die effektive Dielektrizitätszahl  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  (und damit die Ausbreitungskonstante  $\gamma$ ) können – im Gegensatz zur Koaxialleitung – nicht mehr analytisch berechnet werden. Beide Größen hängen primär von der Geometrie (dem Verhältnis Leiterbreite  $w$  zu Substrathöhe  $h$ ) und der relativen Permittivität  $\epsilon_r$  des Substrates ab. Eine genauere Betrachtung zeigt aber zusätzliche Abhängigkeiten von der Metallisierungsdicke  $t$ , der Frequenz  $f$  und der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$ .

Zur genaueren, frequenzabhängigen Berechnung existieren kommerziell erhältliche Softwareprodukte und Freeware-Tools, z.B. *TX-Line* [AWR10], die auch andere Leitungsgeometrien beherrschen. Der Umgang mit diesen Softwarewerkzeugen ist sehr komfortabel und es lassen sich besonders effizient Leitungsstrukturen analysieren und synthetisieren (Bild 4.7).

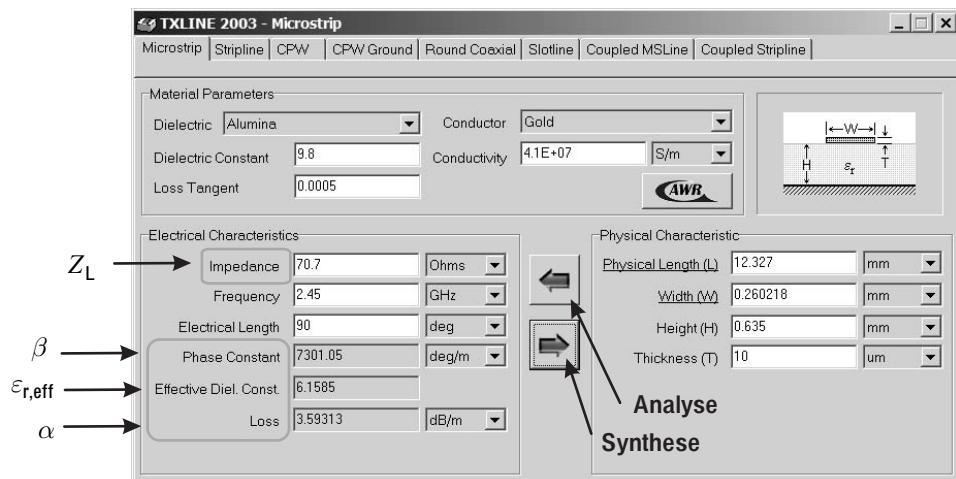


Bild 4.7 Programm *TX-Line* zur Berechnung von Leitungsparametern

In der Literatur (z.B. [Wade91]) existieren zudem zahlreiche komplexe Näherungsformeln und graphische Darstellungen. Eine einfache Formel für niedrige Frequenzen (quasistatische Bedingungen) nach [Wade91] lautet:

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{\pi\sqrt{8(\epsilon_r + 1)}} \ln \left( 1 + \frac{4h}{w'} \left[ \frac{14 + 8/\epsilon_r}{11} \cdot \frac{4h}{w'} + \sqrt{\left( \frac{14 + 8/\epsilon_r}{11} \cdot \frac{4h}{w'} \right)^2 + \frac{1 + 1/\epsilon_r}{2} \pi^2} \right] \right) \quad (4.23)$$

mit der effektiven Breite

$$w' = w + \frac{t}{\pi} \ln \left( 4e \left[ \sqrt{\left( \frac{t}{h} \right)^2 + \left( \frac{1/\pi}{w/t + 1,1} \right)^2} \right]^{-1} \right) . \quad (4.24)$$

Die effektive relative Dielektrizitätszahl kann abgeschätzt werden über

$$\varepsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{12h}{w} \right)^{-\frac{1}{2}} + 0,04 \left( 1 - \frac{w}{h} \right)^2 \right] \quad \text{für } w/h \leq 1 \quad (4.25)$$

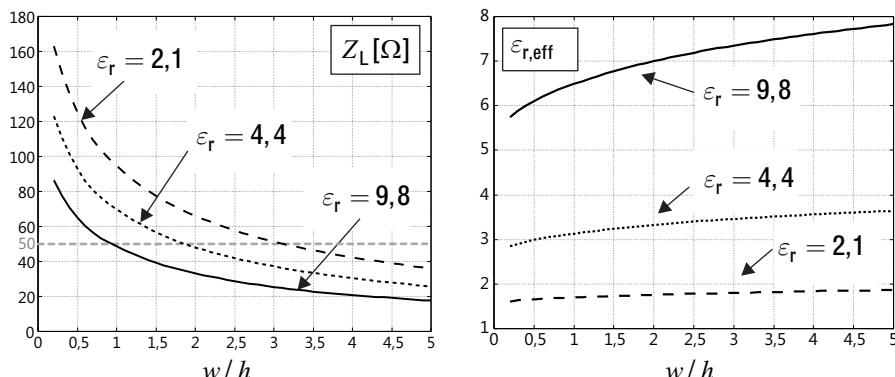
bzw.

$$\varepsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left( 1 + \frac{12h}{w} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } w/h \geq 1 \quad . \quad (4.26)$$

Einige Werkzeuge beherrschen zusätzlich noch die Behandlung des Einflusses von metallischen Seitenwänden und Ebenen über der Leitung. Dies ist wichtig, wenn die Schaltung in ein metallisches Gehäuse eingebaut werden soll, um Abstrahlung und Überkopplung zu anderen Schaltungsteilen zu verhindern.

#### Beispiel 4.4 Leitungswellenwiderstand und effektive Permittivitätszahl

Bild 4.8 zeigt die Verläufe des Leitungswellenwiderstandes und der effektiven Permittivitätszahl als Funktion des Leiterbahnenbreiten-zu-Substrathöhen-Verhältnisses  $w/h$  bei niedrigen Frequenzen (1 GHz). Die Darstellungen gelten für drei ausgewählte Substratmaterialien: PTFE ( $\varepsilon_r = 2,1$ ), FR4 ( $\varepsilon_r = 4,4$ ) und Aluminiumoxid ( $\varepsilon_r = 9,8$ ).



**Bild 4.8** Verlauf des Leitungswellenwiderstandes und der effektiven Permittivitätszahl als Funktion des Leiterbahnenbreiten-zu-Substrathöhen-Verhältnisses  $w/h$  bei niedrigen Frequenzen (1 GHz)

Als Faustformel gelten folgende grobe Werte von  $w/h$  bei einer  $50\Omega$ -Leitung: Bei PTFE ist die Leiterbahn ungefähr dreimal so breit wie die Substrathöhe ( $w/h \approx 3$ ), bei FR4 ist die Leiterbahn ungefähr doppelt so breit wie die Substrathöhe ( $w/h \approx 2$ ) und bei Aluminiumoxid ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) sind Leiterbahnbreite und Substrathöhe annähernd gleich ( $w/h \approx 1$ ). ■

#### Beispiel 4.5 $\lambda/4$ lange Microstrip-Leitung zur Impedanzanpassung

Auf einem Substrat ( $\varepsilon_r = 9,8$ ;  $h = 635 \mu\text{m}$ ) soll eine Last ( $Z_A = 100\Omega$ ) bei einer Frequenz von  $f = 2,45 \text{ GHz}$  an eine Quelle ( $Z_E = 50\Omega$ ) angeschlossen werden. Zur Anpassung

werde eine  $\lambda/4$  lange Leitung dazwischengeschaltet. Für den  $\lambda/4$ -Transformator gilt:

$$Z_E Z_A = Z_L^2 \quad \Rightarrow \quad Z_L = \sqrt{Z_E Z_A} = 70,7 \Omega \quad . \quad (4.27)$$

Mit dem Programm *TX-Line* erhalten wir die Breite  $w = 260 \mu\text{m}$  für eine Leitung mit dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L = 70,7 \Omega$ . Die effektive relative Dielektrizitätszahl lautet  $\epsilon_{r,\text{eff}} = 6,16$ . Daraus ergibt sich für die Leitungslänge (Viertel-Wellenlänge)  $\ell = 12,3 \text{ mm}$ .

Zum Vergleich berechnen wir die Leitungskenngrößen für den quasistatischen Fall (niedrige Frequenzen) mit Hilfe der Formeln (4.23) bis (4.26) und erhalten für die effektive relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_{r,\text{eff}} = 6,26$  und für den Leitungswellenwiderstand  $Z_L = 71,7 \Omega$ . Die Übereinstimmung ist für die meisten Anwendungen völlig ausreichend. ■

### 4.3.2 Dispersion und nutzbarer Frequenzbereich

Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die effektive Dielektrizitätszahl und der Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  zudem Funktionen der Frequenz (also *dispersiv*) sind. Mit steigender Frequenz konzentriert sich das elektrische Feld verstärkt unter der Leitung. Beide Leitungskenngrößen steigen mit der Frequenz an [Heue09]. Eine detaillierte Analyse ist mit Programmen wie *TX-Line* oder Feldsimulatoren möglich.

Aufgrund der Dispersion breiten sich Signalanteile bei unterschiedlichen Frequenzen mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit aus.

$$c(\omega) = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}(\omega)}} \quad (4.28)$$

Dies führt bei größeren Leitungslängen zu einer Verformung von breitbandigen Signalen und macht den Leitungstyp für diese Art von Signalen nur bedingt nutzbar.

Ebenso wie bei einer Koaxialleitung können sich längs einer Mikrostreifenleitung *höhere Wellentypen* ausbreiten. Nach [Maas98] kann folgende einfache Formel zur Abschätzung der *Cut-off*-Frequenz des ersten ausbreitungsfähigen Nicht-Quasi-TEM-Modes verwendet werden.

$$f_c = \frac{75 \text{ GHz}}{(h/1 \text{ mm}) \sqrt{\epsilon_r - 1}} \quad (4.29)$$

Die Formel hängt nur von den Substratkenngrößen ab und entspricht der Gleichung der *Cut-off*-Frequenz bei einem dielektrischen Plattenleiter (dielektrische Platte zwischen zwei Luft-Halbräumen) aus [Zink00], wenn man für die Plattendicke  $a$  die doppelte Substrathöhe  $h$  einsetzt, denn die metallische Grundfläche der Mikrostreifenleitung stellt gerade eben eine Symmetrieebene dar.

$$f_c = \frac{c_0}{4h\sqrt{\epsilon_r - 1}}$$

(Cut-off-Frequenz der Microstrip-Leitung) (4.30)

Oberhalb dieser Frequenz kann sich eine Welle im Substrat ausbreiten, verursacht durch Totalreflexion an der Grenzschicht Luft-Substrat.

### Beispiel 4.6 Nutzbarer Frequenzbereich einer *Microstrip*-Leitung

Für ein Substrat mit der Höhe  $h = 0,635$  mm und der relativen Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r = 9,8$  ergibt sich ein nutzbarer Frequenzbereich bis ca.  $f_c \approx 40$  GHz. Oberhalb dieser Frequenz können höhere Wellentypen auftreten. ■

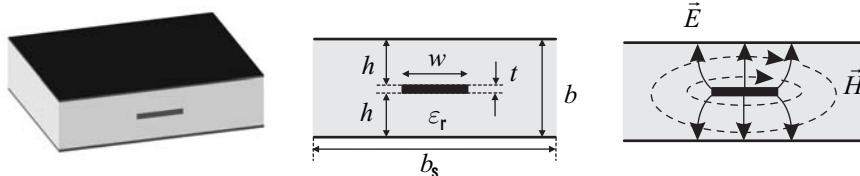
### 4.3.3 Anwendungsgebiete

Die *Microstrip*-Leitung ist der am häufigsten verwendete Leitungstyp bei planaren Schaltungen. Aufgrund der Geometrie ist der Leitungstyp gut mit konzentrierten Bauelementen (z.B. SMD-Komponenten) kombinierbar. Zudem ist die Leitung einfach, kostengünstig und miniaturisiert herstellbar.

Nachteilig bei *Microstrip*-Leitungen sind Abstrahlungsverluste bei hohen Frequenzen, da die Leitung einen offenen Aufbau besitzt. Durch den Einbau in ein Gehäuse kann der Effekt vermindert werden<sup>2</sup>. Im Gegensatz zu einer koaxialen Leitung ist die Mikrostreifenleitung aufgrund des starren Substrates nicht flexibel. Die Verluste sind vergleichsweise hoch. Zudem ist wegen der Dispersion der Leitungstyp nur eingeschränkt für Breitbandsignale geeignet.

## ■ 4.4 Streifenleitung (*Stripline*)

Eine Streifenleitung (*Stripline*, *Triplate*) besteht aus einer metallischen, flächigen Leiterbahn der Breite  $w$  zwischen zwei Masseflächen mit dem Abstand  $b$  (Bild 4.9). Der Raumbereich ist mit einem homogenen Dielektrikum (Substratmaterial mit relativer Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$ ) gefüllt. In der Leitungsstruktur breitet sich eine TEM-Welle aus. Das magnetische Feld umläuft den zentralen Leiter und das elektrische Feld erstreckt sich vom zentralen Leiter zu den Masseflächen.



**Bild 4.9** Geometrie der *Stripline*-Leitung und Feldverteilung in einer Querschnittsebene

<sup>2</sup> Allerdings besteht die Gefahr, dass das Gehäuse selbst zu Schwingungen angeregt wird. Man spricht hier auch von Gehäusemoden (siehe Abschnitt 6.5.4 über Hohlraumresonatoren).

#### 4.4.1 Leitungswellenwiderstand

Für den Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  einer Streifenleitung gibt es in der Literatur Näherungslösungen. Nach [Whee78] gilt:

$$Z_L = \frac{30\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left( 1 + \frac{8h}{\pi w'} \left[ \frac{16h}{\pi w'} + \sqrt{\left( \frac{8h}{\pi w'} \right)^2 + 6,27} \right] \right) . \quad (4.31)$$

Die effektive Streifenbreite  $w'$  lautet

$$w' = w + \frac{t}{\pi} \ln \left( e \left[ \sqrt{\left( \frac{1}{4(h/t) + 1} \right)^2 + \left( \frac{1/(4\pi)}{w/t + 1,1} \right)^m} \right]^{-1} \right) \quad \text{mit } m = \frac{6}{3 + t/h} . \quad (4.32)$$

#### Beispiel 4.7 Berechnung des Leitungswellenwiderstandes einer *Stripline*-Leitung

Eine Streifenleitung mit folgenden Parametern sei gegeben: Substrathöhe  $b = 2h + t = 1,6$  mm, relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r = 2,5$ , Streifenbreite  $w = 1,17$  mm und Streifendicke  $t = 10\mu\text{m}$ . Für die Hilfsgrößen erhalten wir  $m = 1,9916$  und  $w' = 1,191$  mm. Der Leitungswellenwiderstand dieser Leitung beträgt  $Z_L = 50,0\Omega$ . Das Ergebnis erhalten wir auch mit dem Programm *TX-Line*. ■

#### 4.4.2 Nutzbarer Frequenzbereich

Die obere Grenze des technischen Einsatzfrequenzbereiches ergibt sich aus der *Cut-off*-Frequenz für den ersten höheren Wellentyp. Dieser Wellentyp ist – bei lateral unendlich ausgedehnter Streifenleitung – der Ausbreitungsmodus einer Plattenleitung mit dem Abstand  $b$  [Zink00].

$f_c = \frac{c_0}{2b\sqrt{\epsilon_r}}$

(Cut-off-Frequenz des ersten höheren Wellentyps)
(4.33)

Falls das Substrat eine endliche Breite  $b_s$  besitzt und an den Rändern metallisch abgeschlossen ist, so ergibt sich insgesamt eine metallische Umrandung und es besteht die Möglichkeit der Ausbreitung von Hohlleiterwellen. Der erste ausbreitungsfähige höhere Wellentyp ist dann gegeben durch

$$f_c = \frac{c_0}{2b_s\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{(Cut-off-Frequenz bei mit elektr. Wänden begrenztem Substrat).}$$
(4.34)

#### Beispiel 4.8 Höhere Moden auf einer Streifenleitung

Wir betrachten die Streifenleitung aus dem vorhergehenden Beispiel und nehmen an, dass das Substrat eine Breite von  $b_s = 10$  mm hat und an den Seiten metallisch abgeschlossen ist. Ausgehend von der Höhe (1,6 mm) ergäbe sich bei lateral unendlich ausgedehntem Substrat nach Gleichung (4.33) ein weiterer ausbreitungsfähiger Wellentyp ab einer *Cut-off*-Frequenz von  $f_c = 59,3$  GHz. Da jedoch das Substrat lateral mit elektrischen Wänden begrenzt ist, erhalten wir eine verminderte *Cut-off*-Frequenz von  $f_c = 9,5$  GHz. ■

### 4.4.3 Anwendungsgebiete

Bei Schaltungen, die mehrere Substratlagen besitzen (*Multilayer board*), werden auf der obersten Lage Mikrostreifenleitungen (*Microstrip*) realisiert und in tieferen Ebenen ergeben sich zwischen den Masseflächen Streifenleitungen (*Stripline*). Bild 4.10 zeigt ein entsprechendes Beispiel mit dem Übergang von einer Mikrostreifenleitung auf eine Streifenleitung und wieder zurück auf eine Mikrostreifenleitung. Die zylindrischen Durchführungen zwischen den flächigen Leitern werden als *Vias* bezeichnet. Streifenleitungen führen TEM-Wellen, da hier die Wellen – im Gegensatz zu *Microstrip*-Leitungen – in einem homogenen Material verlaufen.

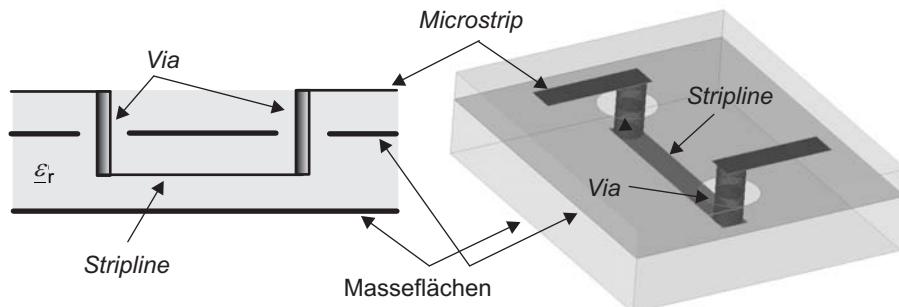


Bild 4.10 Multilayer-Board mit Streifenleitung (Stripline) und Mikrostreifenleitung (Microstrip)

## ■ 4.5 Rechteckhohlleiter

Die bisher vorgestellten Leitungstypen (Koaxialleitung, Mikrostreifenleitung und Streifenleitung) besaßen *zwei Leiter* und konnten so eine TEM- oder Quasi-TEM-Welle führen. Dieser Feldtyp existiert auch im Gleichstromfall (0 Hz).

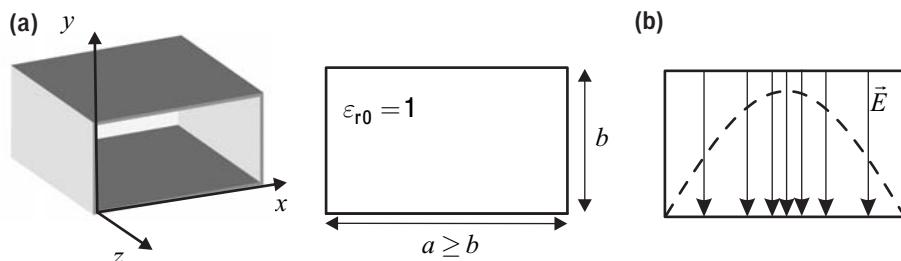


Bild 4.11 (a) Geometrie des Rechteckhohlleiters und (b) Verteilung des elektrischen Feldes in einer Querschnittsebene ( $H_{10}$ -Grundwelle)

Der Rechteckhohlleiter besteht nun nur aus einem *innen hohlen Leiter* mit der Breite  $a$  und der Höhe  $b$  (siehe Bild 4.11a) und es ist unmittelbar klar, dass zum Transport von Gleichstrom der Rückleiter fehlt. Hohlleiter können in ihrem Innern erst ab einer Grenzfrequenz (*Cut-off*-

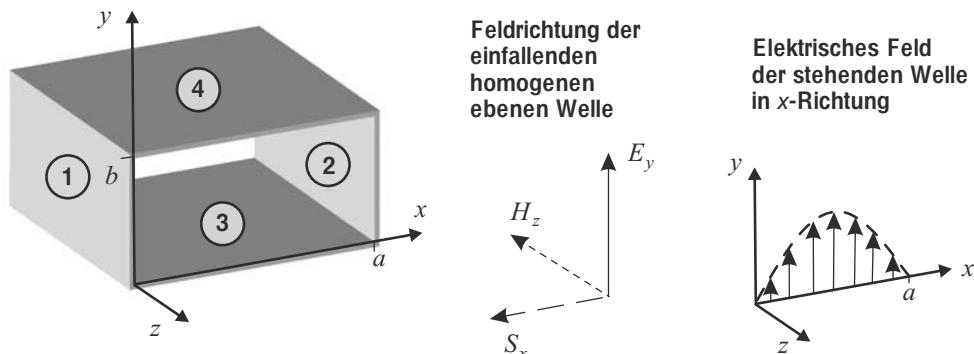
Frequenz) eine Welle führen. Der erste ausbreitungsfähige und technisch bedeutsame Wellentyp ist die  $H_{10}$ -Welle. Tabelle 4.2 zeigt gängige Bezeichnungen, Abmessungen und *Cut-off*-Frequenzen von Rechteckhohlleitern. Wir wollen uns anschaulich überlegen, wie sich diese Welle zwischen den metallischen Wänden ausbildet.

**Tabelle 4.2** Beispiele für Abmessungen von Rechteckhohlleitern

Bezeichnung	Breite $a$	Höhe $b$	Cut-off-Frequenz
R22	109,22 mm	54,61 mm	1,372 GHz
R40	58,17 mm	29,083 mm	2,577 GHz
R100	22,86 mm	10,16 mm	6,56 GHz
R120	19,050 mm	9,575 mm	7,87 GHz
R140	15,799 mm	7,899 mm	9,49 GHz
R500	4,775 mm	2,388 mm	31,39 GHz
R620	3,759 mm	1,880 mm	39,88 GHz
R1400	1,2954 mm	0,6477 mm	90,79 GHz

### 4.5.1 Allgemeine Überlegungen

Zunächst erinnern wir uns an die homogene ebene Welle (HEW) in Kapitel 2. Die homogene ebene Welle ist eine transversal elektromagnetische Welle (TEM). Wir nehmen – wie in der Mitte von Bild 4.12 gezeigt – an, dass sich eine Welle in negative  $x$ -Richtung ausbreite und in  $y$ -Richtung polarisiert sei. (Der elektrische Feldstärkevektor zeigt in  $y$ -Richtung.)



**Bild 4.12** Zur Entstehung einer Hohlleiterwelle

Die Welle kann durch die beiden Phasoren  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  beschrieben werden. Wir beschränken uns hier bei den Betrachtungen auf das elektrische Feld.

$$\vec{E}(x) = E_0 e^{+j k x} \hat{e}_y \quad (4.35)$$

Nun ziehen wir an der Stelle  $x = 0$  eine elektrisch leitende Ebene ① ein. An dieser Ebene muss das tangentiale elektrische Feld verschwinden. Dies geht nur, wenn die Welle reflektiert wird.

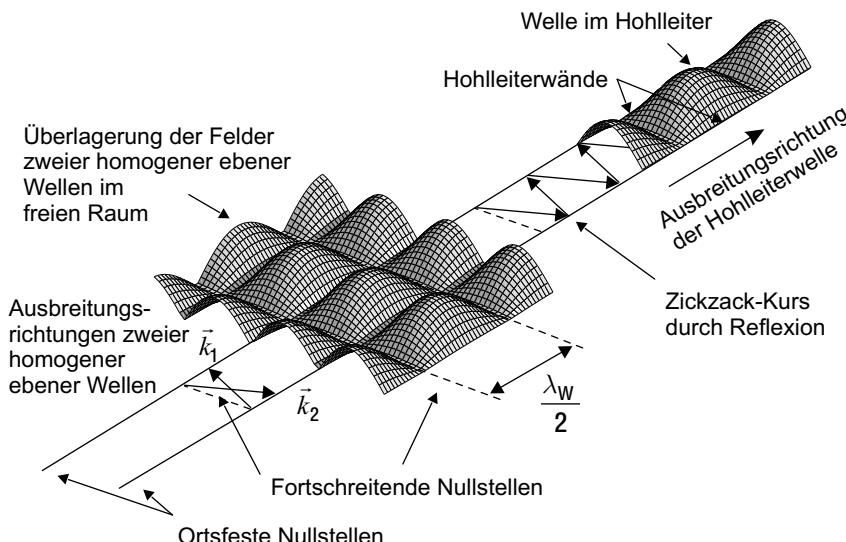
Der Reflexionsfaktor beträgt  $r = -1$  (siehe Kapitel 2). Vor der Ebene entsteht also, als Überlagerung einer hinlaufenden und einer rücklaufenden Welle, eine stehende Welle mit einer Nullstelle des elektrischen Feldes an der Stelle  $x = 0$ .

$$\vec{E}(x) = E_0 \left( e^{+jkx} + r e^{-jkx} \right) \vec{e}_y = E_0 \left( e^{+jkx} - e^{-jkx} \right) \vec{e}_y = 2j E_0 \sin(kx) \vec{e}_y \quad (4.36)$$

Aus den Überlegungen in Kapitel 3 (Leitungstheorie) wissen wir, dass eine stehende Welle Feldnullstellen (Knoten) und Maxima im Abstand der halben Wellenlänge hat. Wenn wir also von der leitenden Ebene ① eine halbe Wellenlänge zurückschreiten, dann befinden wir uns wieder am Ort einer Nullstelle. Somit können wir – ohne die Zustände zu beeinflussen – eine zweite parallele elektrische Ebene an der Stelle  $x = a$  einziehen. Der Abstand zwischen den Wänden muss also mindestens eine halbe Freiraumwellenlänge sein, damit eine stehende Welle zwischen die Wände ① und ② passt.

$$a = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{c_0}{2f} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{c_0}{2a} \quad (4.37)$$

Hieraus können wir eine minimale Frequenz für die mögliche Wellenausbreitung ausrechnen. Die Frequenz wird allgemein als *Cut-off-Frequenz*  $f_c$  bezeichnet.



**Bild 4.13** Überlagerung zweier homogener ebener Wellen zur Bildung einer Hohlleiterwelle

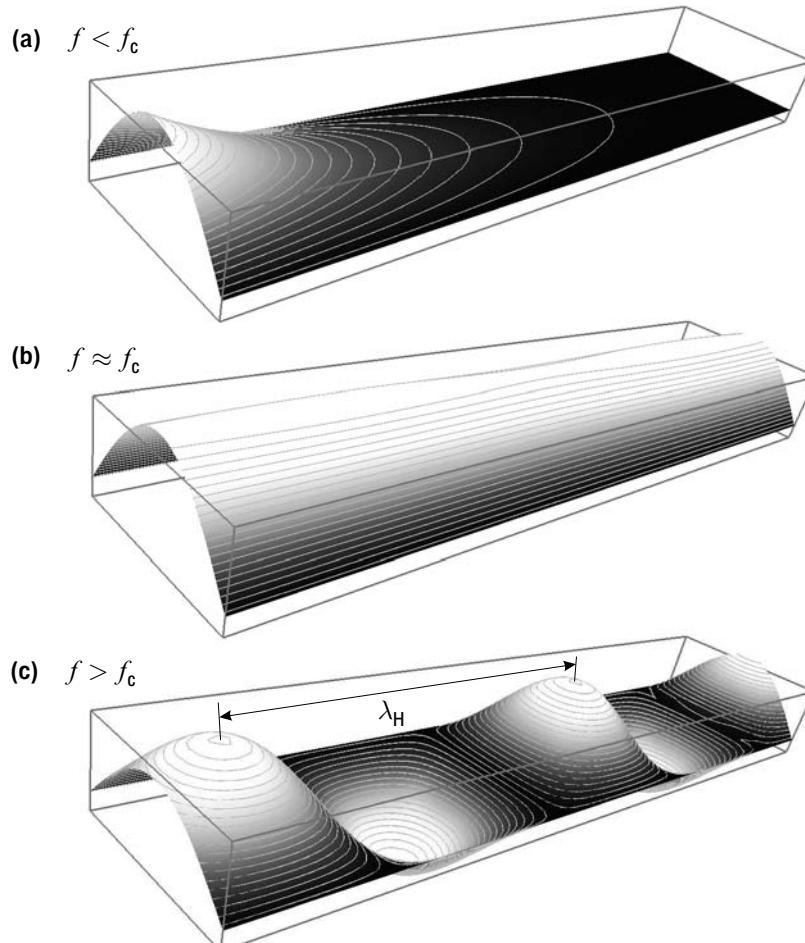
Bis jetzt haben wir eine stehende Welle zwischen zwei parallelen senkrechten elektrischen Wänden betrachtet. Einen Hohlleiter erhalten wir, wenn wir nun auch noch eine waagerechte Bodenfläche ③ und eine Deckelfläche ④ einziehen. Da das elektrische Feld aber in  $y$ -Richtung polarisiert ist und immer senkrecht auf diesen Flächen steht, können wir waagerechte Flächen an eine beliebige Stelle ( $y = \text{const.}$ ) legen<sup>3</sup>. Wir wählen den Abstand  $b$  zwischen den horizon-

<sup>3</sup> Vereinfachend betrachten wir hier nur das elektrische Feld. Für das magnetische Feld sind selbstverständlich auch die Randbedingungen an den metallischen Berandungsflächen des Hohlleiters erfüllt, wobei das magnetische Feld stets nur tangentiale Komponenten aufweisen darf.

talen Wänden kleiner als den Abstand  $a$  zwischen den senkrechten Wänden  $a \geq b$ , so dass die *Cut-off*-Frequenz von der Länge  $a$  bestimmt wird.

Bei der *Cut-off*-Frequenz gibt es offensichtlich keinen Wirkleistungstransport. Es handelt sich um eine quer im Hohlleiter stehende Welle. Die Wellenlänge (Abstand zwischen zwei gleichen Phasenzuständen längs der Leitung) ist unendlich. Die Phase der Welle ist überall auf der Leitung gleich, d.h. die Phasengeschwindigkeit ist unendlich! Die Energie- oder Informationsgeschwindigkeit hingegen ist null.

Was geschieht, wenn die Frequenz nun minimal erhöht wird? Dann passt die Welle nicht mehr genau quer hinein. Wir können aber nach wie vor die Randbedingungen an den Stellen  $x = 0$  und  $x = a$  erfüllen, wenn wir die Welle schräg auf die Ebene ① fallen lassen. Die homogene ebene Welle schreitet dann in einem Zickzackkurs im Hohlleiter voran. Die Energiegeschwindigkeit nimmt zu und die Phasengeschwindigkeit nimmt ab (Bild 4.13).



**Bild 4.14** Augenblickswerte der Verteilung der elektrischen Feldstärke in einem Hohlleiter (a) unterhalb, (c) oberhalb und (b) bei der *Cut-off*-Frequenz

Bild 4.14 zeigt für einen R100-Hohlleiter ( $a = 22,86 \text{ mm}$ ,  $b = 10,16 \text{ mm}$ ) die Feldverteilung für eine Anregung unterhalb, oberhalb und bei der *Cut-off*-Frequenz von  $f_c = 6,56 \text{ GHz}$ .

Bei einer Frequenz  $f = 6 \text{ GHz}$  unterhalb der *Cut-off*-Frequenz ist keine Wellenausbreitung zu beobachten. Es entsteht von der Seite der Anregung aus nur ein *reaktives Feld* mit exponentiell abklingendem Verhalten (Bild 4.14a). Bei der Frequenz  $f = f_c$  sehen wir eine quer im Hohlleiter stehende Welle, wie wir uns dies eingangs überlegt haben. Die Feldanteile schwingen phasengleich. Es findet kein Energietransport statt (Bild 4.14b).

Im Betriebsfrequenzbereich  $f = 8,25 \text{ GHz}$  oberhalb der *Cut-off*-Frequenz sehen wir Wellenausbreitung. Die Wellenlänge  $\lambda_H$  im Hohlleiter bezeichnet den Abstand zweier gleicher Schwingungszustände. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit und die Hohlleiterwellenlänge können aus diesen Zusammenhängen abgeleitet werden, siehe zum Beispiel [Mein92].

Wir beschäftigen uns nun mit dieser *Grundwelle*, bevor wir höhere Wellentypen betrachten.

## 4.5.2 Die $H_{10}$ -Grundwelle

Hohlleiterwellen werden nach einem einfachen System klassifiziert. Unterschieden werden *H*-Wellen und *E*-Wellen, denen zwei Indizes  $m$  und  $n$  zugeordnet werden.

- *H*-Wellen ( $H_{mn}$ ) sind *transversal elektrische* (TE) Wellen: Das elektrische Feld steht also stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, das magnetische Feld hat Anteile in Ausbreitungsrichtung.
- *E*-Wellen ( $E_{mn}$ ) sind *transversal magnetische* (TM) Wellen: Das magnetische Feld steht also stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, das elektrische Feld hat Anteile in Ausbreitungsrichtung.

Die Indizes bezeichnen die Anzahl der Feldmaxima (*E*-Feldmaxima bei *H*-Wellen bzw. *H*-Feldmaxima bei *E*-Wellen) in die unterschiedlichen transversalen Raumrichtungen. Bei der  $H_{10}$ -Welle existiert ein Maximum des elektrischen Feldes in  $x$ -Richtung und kein (null) Maximum des elektrischen Feldes in  $y$ -Richtung. Der Verlauf in  $y$ -Richtung ist also konstant (Bild 4.11b).

Nach unseren Vorüberlegungen ist Wellenausbreitung erst ab einer *Cut-off*-Frequenz  $f_c$  möglich.

$$f_c = \frac{c_0}{2a} \quad (\text{Cut-off Frequenz der } H_{10}\text{-Welle}) \quad (4.38)$$

Unterhalb der Grenzfrequenz existiert keine Wellenausbreitung, sondern nur ein exponentiell gedämpftes, nicht fortschreitendes Feld (Bild 4.14a).

Das elektrische Feld besitzt nur eine Feldkomponente in  $y$ -Richtung. Das magnetische Feld besitzt jedoch neben der Querkomponente  $H_x$  auch eine Komponente  $H_z$  in Längsrichtung des Hohlleiters. Die mathematischen Beziehungen für die einzelnen Feldkomponenten der

$H_{10}$ -Welle können wir nach [Zink00] folgendermaßen angeben. Für das magnetische Feld:

$$H_x = H_{z0} \frac{2\pi}{\lambda_H k_c^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_H} z - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (4.39)$$

$$H_y = 0 \quad (4.40)$$

$$H_z = H_{z0} \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_H} z} \quad . \quad (4.41)$$

Die Komponenten des elektrischen Feldes lauten:

$$E_x = E_z = 0 \quad (4.42)$$

$$E_y = H_{z0} Z_{F0} \frac{k}{k_c^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_H} z + \frac{\pi}{2}\right)} \quad . \quad (4.43)$$

Hierbei ist  $\lambda_H$  die Wellenlänge im Hohlleiter mit

$$\boxed{\lambda_H = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > \lambda_0} \quad (\text{Wellenlänge im Hohlleiter}) \quad (4.44)$$

und  $k_c$  die *Cut-off*-Wellenzahl, die sich für die  $H_{10}$ -Welle einfach berechnen lässt.

$$k_c = \beta_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{2\pi f_c}{c_0} = \frac{\pi}{a} \quad (4.45)$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle ausbreitet, ist stark frequenzabhängig. Wir haben überlegt, dass bei der *Cut-off*-Frequenz die Welle quer im Hohlleiter steht. Diese stehende Welle ergibt sich durch senkrechten Einfall einer homogenen ebenen Welle auf die Seitenwände. Mit steigender Frequenz wird die Freiraumwellenlänge  $\lambda_0$  der ebenen Welle kleiner und sie muss nun zur Erfüllung der Randbedingung an den Seitenflächen schräg einfallen (Bild 4.13). Dadurch ist nun ein Fortschreiten im Zickzackkurs zu beobachten. Das Fortschreiten der Energie erfolgt daher mit der Energiegeschwindigkeit [Kark12], die im Hohlleiter gerade der *Gruppengeschwindigkeit* entspricht. Sie lautet [Mein92]:

$$\boxed{v_{gr} = c_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_H} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < c_0} \quad (\text{Gruppen-, bzw. Energiegeschwindigkeit}). \quad (4.46)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist stets kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Durch die Reflexion an den Seitenwänden und den sich daraus ergebenden Zickzackkurs ist der Weg länger als beim gradlinigen Fortschreiten längs der Leitung.

Das Feldbild im Hohlleiter wiederholt sich nach der Hohlleiterwellenlänge  $\lambda_H$  und schreitet mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  voran. Für die *Phasengeschwindigkeit* gilt nach [Mein92]:

$$\boxed{v_{ph} = c_0 \frac{\lambda_H}{\lambda_0} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > c_0} \quad (\text{Phasengeschwindigkeit}). \quad (4.47)$$

Das Feldbild ergibt sich durch die Überlagerung zweier schräg zueinander verlaufender, homogener ebener Wellen und breitet sich schneller als die Vakuumlichtgeschwindigkeit aus, obgleich die Geschwindigkeit der einzelnen homogenen ebenen Welle gerade eben der Vakuumlichtgeschwindigkeit entspricht. (Dies ist vergleichbar der Geschwindigkeit des Schnittpunktes einer Schere: Die Geschwindigkeit des Schnittpunktes kann größer sein als die Geschwindigkeit der Schneiden.)

Der Zusammenhang zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit lautet

$$v_{\text{gr}} v_{\text{ph}} = c_0^2 \quad . \quad (4.48)$$

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Hohlleiter vor allem knapp über der *Cut-off*-Frequenz stark frequenzabhängig ist, schränkt man den technischen Einsatzbereich auf Frequenzen oberhalb von  $f_{\min} = 1,25 \cdot f_c$  ein. Wie wir schon gesehen haben, kann sich ab der doppelten *Cut-off*-Frequenz der  $H_{10}$ -Welle bereits der nächste Wellentyp ausbreiten. Um eindeutige Verhältnisse (nur Ausbreitung der Grundwelle) zu haben, schränkt man den Frequenzbereich zusätzlich nach oben hin auf einen Wert von  $f_{\max} = 1,9 \cdot f_c$  ein [Kark12].

$1,25f_c \leq f \leq 1,9f_c$

(Technischer Einsatzbereich für Grundwellenbetrieb) (4.49)

Basierend auf Strom und Leistung im Hohlleiter kann ein Leitungswellenwiderstand definiert werden, welcher sich für die  $H_{10}$ -Welle wie folgt berechnen lässt [Zink00]:

$$Z_L^{H_{10}} = \frac{\pi^2 b}{8a} \frac{Z_{F0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

(Leitungswellenwiderstand der  $H_{10}$ -Welle), (4.50)

mit dem Feldwellenwiderstand des freien Raumes von  $Z_{F0} = 377 \Omega$ . Dieser Leitungswellenwiderstand wird bei Streuparametern in der Regel als Torwiderstand bei der Normierung der Wellengrößen verwendet (siehe Kapitel 5).

#### Beispiel 4.9 $H_{10}$ -Welle in einem R100-Hohlleiter

Ein R100-Hohlleiter besitzt die Abmessungen  $a = 22,86$  mm und  $b = 10,16$  mm. Die *Cut-off*-Frequenz für die  $H_{10}$ -Welle liegt bei  $f_c = 6,56$  GHz. Der Einsatzfrequenzbereich erstreckt sich von  $f_{\min} = 1,25 \cdot f_c = 8,2$  GHz bis  $f_{\max} = 1,9 \cdot f_c = 12,5$  GHz. Bei einer Frequenz von  $f = 8,5$  GHz beträgt der Wert der Wellenlänge im Hohlleiter  $\lambda_H = 5,55$  cm und der Leitungswellenwiderstand  $Z_L = 325 \Omega$ . (Die Werte für die Wellenlänge und den Leitungswellenwiderstand können einfach mit einem Feldsimulator nachgerechnet werden<sup>4</sup>.) ■

<sup>4</sup> Feldsimulatoren liefern für Leitungswellenwiderstände drei unterschiedliche Werte. Der Wert  $Z_{LU}$  basiert auf Strom ( $I$ ) und Spannung ( $U$ ), der Wert  $Z_{LP_U}$  basiert auf Leistung ( $P$ ) und Spannung und der Wert  $Z_{LP_I}$  basiert auf Strom und Leistung. Bei TEM-Wellen sind alle Werte gleich. Unsere obige Definition des Leitungswellenwiderstandes für den Hohlleiter basiert auf Strom und Leistung, daher müssen wir zum Vergleich mit den Ergebnissen eines Feldsimulators den Wert  $Z_{LP_I}$  heranziehen.

### 4.5.3 Höhere Wellentypen

Ausgehend von den allgemeinen Überlegungen in Abschnitt 4.5.1 ist einzusehen, dass eine homogene ebene Welle mit doppelter *Cut-off*-Frequenz der  $H_{10}$ -Welle ebenso die Randbedingung an den Seitenwänden des Hohlleiters erfüllt und gerade eben zwei Maxima in Querrichtung besitzt. Der entsprechende Wellentyp wird daher als  $H_{20}$ -Welle bezeichnet, da auch er nur transversale elektrische Komponenten besitzt.

Entsprechend lassen sich durch die Überlagerung homogener ebener Wellen auf viele Arten die Randbedingungen an den metallischen Flächen erfüllen. Die entsprechenden Ausbreitungsmoden besitzen *Cut-off*-Frequenzen, die durch folgende allgemeine Formel berechnet werden können.

$$f_{c,mn} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (\text{Cut-off-Frequenzen aller Wellentypen}) \quad (4.51)$$

Für die Fälle  $m = 0$  oder  $n = 0$  handelt es sich dabei um  $H$ -Wellen, die nur ein transversales (senkrecht) elektrisches Feld ( $n = 0$ ) oder ein transversales (waagerechtes) elektrisches Feld ( $m = 0$ ) besitzen. Wenn beide Feldindizes  $m$  und  $n$  ungleich null sind, existieren stets zwei unterschiedliche Ausbreitungsmoden:  $E_{mn}$ - und  $H_{mn}$ -Wellen. Da diese die gleiche *Cut-off*-Frequenz besitzen, werden die Moden auch als *entartet* bezeichnet.

Bild 4.15 zeigt Feldbilder höherer Wellentypen in einem R100-Hohlleiter berechnet mit EMPro [Agil10]. Auf der Internet-Seite zu diesem Buch befinden sich animierte Grafiken, welche die Wellenausbreitung im Hohlleiter farbig veranschaulichen.

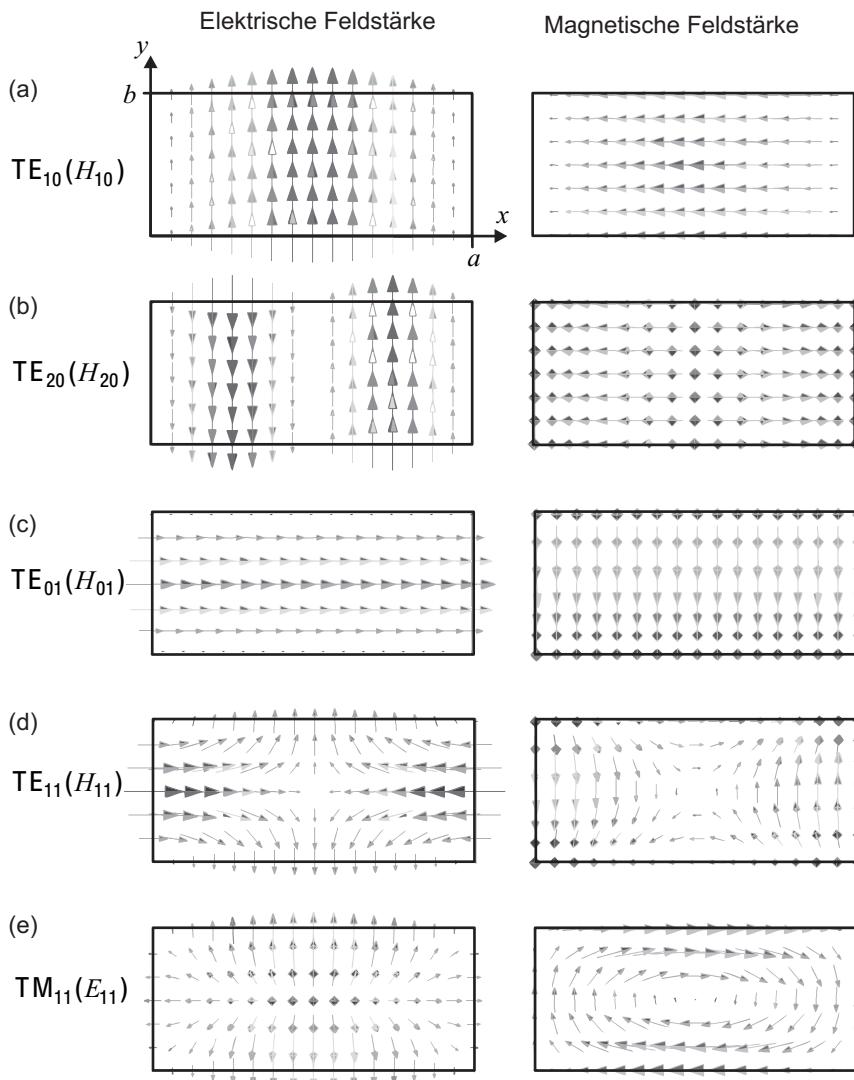
#### Beispiel 4.10 Höhere Wellentypen in einem Hohlleiter

Ein R100-Hohlleiter besitzt die Abmessungen  $a = 22,86$  mm und  $b = 10,16$  mm. Tabelle 4.3 listet die *Cut-off*-Frequenzen der ersten ausbreitungsfähigen Wellentypen (bis 20 GHz) auf.

**Tabelle 4.3** *Cut-off*-Frequenzen für einen R100-Hohlleiter ( $a = 22,86$  mm und  $b = 10,16$  mm)

Wellentyp	$H_{10}$	$H_{20}$	$H_{01}$	$H_{11}, E_{11}$	$H_{30}$	$H_{21}, E_{21}$
$f_c$	6,56 GHz	13,12 GHz	14,76 GHz	16,16 GHz	19,69 GHz	19,75 GHz

Feldbilder der elektrischen und magnetischen Feldverteilungen der ersten fünf ausbreitungsfähigen Moden sind in Bild 4.15 gezeigt. ■



**Bild 4.15** Ausbreitungsmoden im Rechteckhohlleiter: Verteilung der elektrischen und magnetischen Feldstärke in einer Querschnittsebene

#### 4.5.4 Einsatzgebiete von Hohlleitern

Hohlleiter finden Verwendung bei der Speisung von Hornantennen (Abschnitt 7.2). Bei Radar-anwendungen ist die Möglichkeit eines hohen Leistungsdurchsatzes entscheidend. Hohlleiter zeichnen sich durch niedrige Verluste aus, was den Aufbau von Resonatoren und hochgürtigen Filtern ermöglicht (siehe Abschnitt 6.5.5).

Nachteile von Hohlleitern sind die starre Form und die schlechte Kombinierbarkeit mit anderen Wellenleiterstrukturen. Für den Übergang auf andere Leitungssysteme müssen besondere

Übergänge geschaffen werden (siehe Abschnitt 4.5.5). Hohlleiter besitzen nur einen schmalen Einsatzfrequenzbereich. Das ist der Bereich, in dem sich eindeutig nur eine  $H_{10}$ -Grundwelle ausbreiten kann. Im Einsatzfrequenzbereich besteht darüber hinaus eine starke Dispersion (unterschiedliche Frequenzanteile breiten sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus).

Weitere gebräuchliche Hohlleiterformen sind Rundhohlleiter [Zink00]. Darüber hinaus gibt es eine Beschreibung auch exotischerer Leitungsquerschnitte [Kark12].

#### 4.5.5 Anregung von Hohlleiterwellen

Die in der Praxis gebräuchlichen Messgeräte, Signalgeneratoren und Verstärker besitzen üblicherweise koaxiale Anschlüsse. Um Wellen in Hohlleiter einzuspeisen, werden also spezielle Übergänge benötigt. Hierbei muss das Feld so eingekoppelt werden, dass es von der Orientierung her zur  $H_{10}$ -Welle passt. Bild 4.16a zeigt einen Übergang von einer koaxialen Leitung auf einen R100-Hohlleiter [Bial95]. Der Übergang besteht aus dem verlängerten Innenleiter des Koaxialkabels und einem Abschluss in Form eines metallischen Zylinders (Radius 2,05 mm). Zwischen dem Zylinderdeckel und der oberen Fläche im Hohlleiter sowie der Zylinderunterseite und der unteren Seite des Hohlleiters entsteht durch die koaxiale Einspeisung ein senkrechtes elektrisches Feld, welches die  $H_{10}$ -Welle anregt.

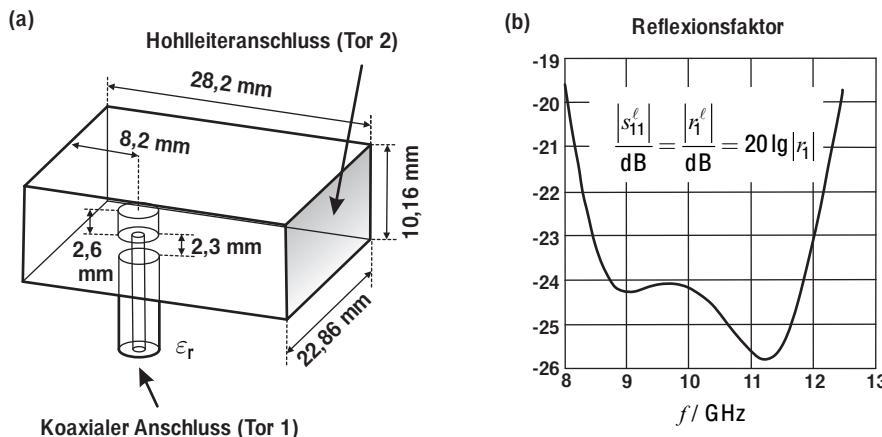
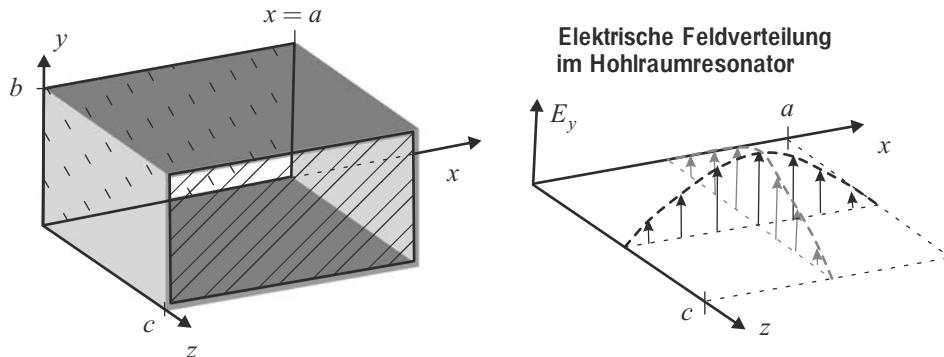


Bild 4.16 Übergang von einer Koaxialleitung auf einen R100-Hohlleiter: (a) Geometrie und (b) Reflexionsfaktor am koaxialen Tor

Der Hohlleiter ist luftgefüllt. Die Koaxialleitung (Innenleiterradius  $R_i = 0,65$  mm, Außenleiterrradius  $R_a = 2,05$  mm) hat einen Leitungswellenwiderstand von  $Z_L = 50\Omega$  und ist mit einem Dielektrikum ( $\epsilon_r = 1,9$ ) gefüllt. Im Einsatzbereich der  $H_{10}$ -Welle des R100-Rechteckhohlleiters ( $8,2\text{ GHz} \leq f \leq 12,5\text{ GHz}$ ) tritt an der koaxialen Einspeisung ein sehr kleiner Reflexionsfaktor ( $r_1 < 0,1$ ) auf. In Bild 4.16b ist der Betrag des Reflexionsfaktors logarithmisch dargestellt als  $s_{11} = 20\lg(|r_1|) < -20\text{ dB}$ . Wie wir in Kapitel 5 noch sehen werden, ist es üblich, Reflexionsfaktoren logarithmisch anzugeben.

#### 4.5.6 Hohlraumresonatoren

Begrenzt man einen Hohlleiter an seinen beiden Längsseiten im Abstand  $c$ , so entsteht ein quaderförmiger Hohlraum (Bild 4.17) mit den Abmessungen  $a \times b \times c$  (Breite  $\times$  Höhe  $\times$  Länge), welcher bei bestimmten Frequenzen schwingungsfähig ist. Die elektrischen und magnetischen Felder müssen dabei an allen sechs Seiten des quaderförmigen Luftvolumens die Randbedingungen erfüllen.



**Bild 4.17** Hohlraumresonator mit  $H_{101}$ -Grundschwingung

Für den Fall, dass die Längsausdehnung größer ist als die Breite und diese wiederum größer als die Höhe ( $c > a > b$ ), ergeben sich für die Schwingung mit der niedrigsten Resonanz folgende Feldkomponenten [Mein92]:

$$E_y(x, y, z) = E_{y0} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right) \quad (4.52)$$

$$H_x(x, y, z) = H_{x0} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right) \quad (4.53)$$

$$H_z(x, y, z) = H_{z0} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right) . \quad (4.54)$$

Alle Feldkomponenten sind unabhängig von der Komponente  $y$ . Das elektrische Feld besitzt nur eine transversale Komponente bezogen auf die ursprüngliche Ausbreitungsrichtung  $z$  des offenen Hohlleiters. Das magnetische Feld hingegen hat neben einer transversalen Komponente auch eine Komponente in der ursprünglichen Ausbreitungsrichtung. Die Verteilung des elektrischen Feldes besitzt ein Maximum in  $x$ -Richtung und ein Maximum in  $z$ -Richtung. Der Verlauf in  $y$ -Richtung ist konstant. Der Schwingungszustand mit der niedrigsten Resonanzfrequenz (Voraussetzung:  $c > a > b$ ) wird daher als  $H_{101}$ -Mode (bzw.  $TE_{101}$ -Mode) bezeichnet.

$$f_{R,101} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2} \quad (4.55)$$

Bei höheren Frequenzen können sich komplexere Schwingungszustände einstellen, deren Feldverteilungen zum Beispiel in [Mein92] gegeben sind. Die Resonanzfrequenzen können allgemein nach folgender Formel berechnet werden.

$$f_{R,mnp} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \quad (4.56)$$

In der Praxis werden Schaltungsteile und Komponenten oft in quaderförmige Gehäuse eingebaut, um Störeinkopplungen und Wechselwirkung mit anderen Schaltungsteilen zu vermeiden. Ein quaderförmiges Gehäuse stellt letztlich unbeabsichtigt einen Hohlraumresonator dar, dessen Größe mit Bedacht gewählt werden muss, da Gehäuseresonanzen zu unerwünschtem Verhalten einer Schaltung führen können.

In Abschnitt 6.5.4 betrachten wir das Beispiel eines Mikrostreifenleitungsfilters in einem metallischen Gehäuse und den Einfluss des Gehäuses auf die Übertragungsfunktion.

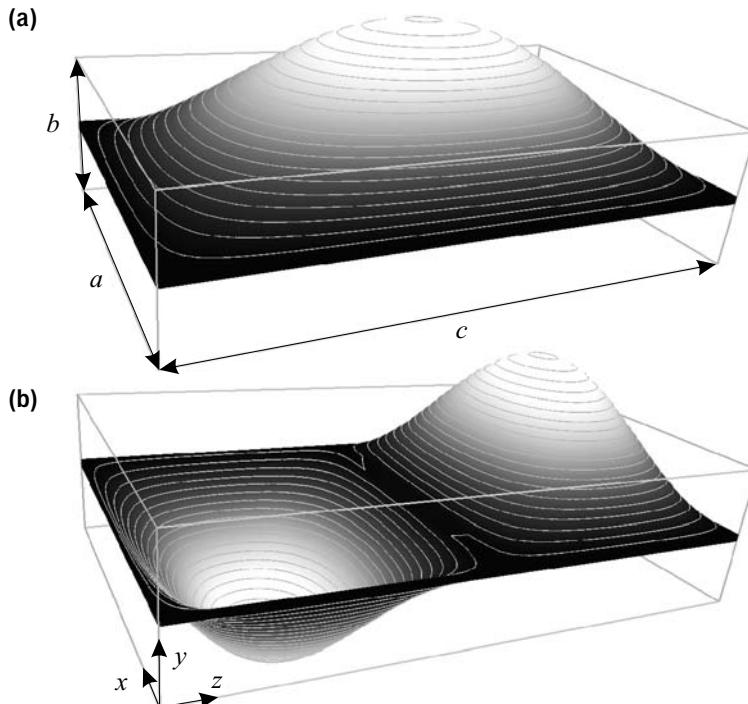
#### Beispiel 4.11 Resonanzen in einem Hohlraumresonator

Wir betrachten einen Hohlraumresonator mit der Breite  $a = 24\text{ mm}$ , der Höhe  $b = 10\text{ mm}$  und der Länge  $c = 40\text{ mm}$ . Die Resonanzfrequenzen  $f_{R,mnp}$  sind in Tabelle 4.4 aufgeführt.

**Tabelle 4.4** Resonanzfrequenzen  $f_{R,mnp}$  in einem rechteckigen Hohlraum

<b><math>m</math></b>	<b><math>n</math></b>	<b><math>p</math></b>	<b><math>f_{R,mnp}</math></b>
1	0	1	7,289 GHz
0	1	1	15,462 GHz
1	1	0	16,250 GHz
1	1	1	16,677 GHz
2	0	1	13,050 GHz
1	0	2	9,763 GHz
0	1	2	16,771 GHz
0	2	1	30,233 GHz
1	2	0	30,644 GHz
2	1	0	19,526 GHz
2	1	1	19,882 GHz
1	2	1	30,873 GHz
1	1	2	17,897 GHz

Bild 4.18 zeigt die Verteilung der elektrischen Feldstärke (TE<sub>101</sub>-Mode und TE<sub>102</sub>-Mode) in einer horizontalen Schnittebene. Beide Moden sind TE-Moden, d.h. das elektrische Feld ist transversal zur ursprünglichen Ausbreitungsrichtung. Der TE<sub>101</sub>-Mode in Bild 4.18a besitzt ein Maximum in Längsrichtung und ein Maximum in Querrichtung. In vertikaler Richtung ist das Feld konstant.

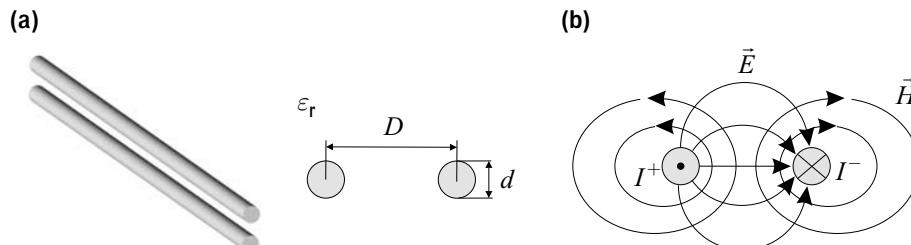


**Bild 4.18** Augenblickswerte der elektrischen Feldstärkeverteilung (a) des TE<sub>101</sub>-Modes und (b) des TE<sub>102</sub>-Modes im Hohlraumresonator

Der TE<sub>102</sub>-Mode in Bild 4.18b besitzt *zwei* Maxima in Längsrichtung, und *ein* Maximum in Querrichtung. In vertikaler Richtung ist auch hier das Feld konstant. ■

## ■ 4.6 Zweidrahtleitung

Bei der Zweidrahtleitung handelt es sich um eine *symmetrisch* aufgebaute Leitung, d.h. die beiden Leiter der Leitung sind von gleicher Gestalt und Größe (Bild 4.19).



**Bild 4.19** Geometrie der Paralleldrahtleitung und Feldverteilung in einer Querschnittsebene

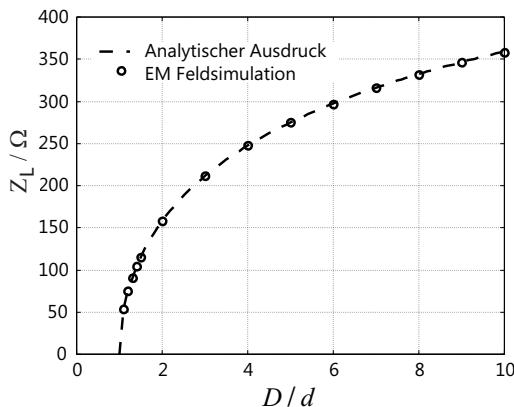
Eine solche aufbausymmetrische Leitung lässt sich mit symmetrischen Signalen (Abschnitt 4.7) aussteuern: Bei einer symmetrischen Aussteuerung sind die Spannungen längs der Leitung dann gegenüber einer Bezugsmasse von gleichem Betrag, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Dies hat eine Reihe von Vorteilen für die Verminderung von Störeinkopplungen.

### 4.6.1 Leitungswellenwiderstand

Der Leitungswellenwiderstand einer einfachen Paralleldrahtleitung kann nach [Wade91] angegeben werden mit

$$Z_L = \frac{Z_{FO}}{\pi\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1}\left(\frac{D}{d}\right) \quad (\text{Leitungswellenwiderstand Zweidrahtleitung}) \quad (4.57)$$

Ein graphischer Verlauf dieses Zusammenhangs ist in Bild 4.20 gezeigt. Falls die Leiter mit einem dielektrischen Isolierstoff umgeben sind, so verändert sich der Leitungswellenwiderstand in Abhängigkeit von der Isolationsdicke und der relativen Dielektrizitätszahl. Typischerweise werden Dielektrika mit geringen relativen Dielektrizitätszahlen (typ.  $1,4 \leq \epsilon_r \leq 2,5$ ) verwendet. Näherungsformeln hierzu finden sich in [Wade91]. Sinnvollerweise wird ein Feldsimulator eingesetzt, um genaue Werte zu erzielen. Falls die Adern isoliert sind, bildet sich – wie bei der Mikrostreifenleitung – eine Quasi-TEM-Welle aus. Entsprechend kann eine effektive Dielektrizitätszahl  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  angegeben werden.



**Bild 4.20** Verlauf des Leitungswellenwiderstandes  $Z_L$  über dem Quotienten  $D/d$  für eine Leitung in Luft ( $\epsilon_r = 1$ ); Vergleich zwischen Gleichung (4.57) und der Lösung mit einem Feldsimulator

### 4.6.2 Anwendungsbereiche

In der Praxis werden Zweidrahtleitungen (teilweise mit zusätzlichem Schirm) z.B. bei der Netzwerkverkabelung (*Twisted Pair*) verwendet. Dabei werden die einzelnen Leiter zusätzlich isoliert und verdrillt. Die mit einer Isolationsschicht versehenen Leiter werden als Adern bezeichnet [Deut00]. Für die Netzwerkverkabelung gibt es unterschiedliche Kabeltypen. Um magnetische Einkopplungen zu vermindern, werden die Adern miteinander verseilt (Bild 4.1e). Zu-

meist werden mehrere verseilte Leiterpaare noch einmal miteinander verseilt. Einige Ausführungen verwenden elektrische Schirmungen aus Aluminiumfolie oder Geflecht zur Vermindeung elektrischer Einkopplung. Die Einzeladern können auch als Litzenleiter ausgeführt sein. Bei einem Litzenleiter wird der eigentlich zylindrische Leiter aus mehreren dünneren Einzeldrähten aufgebaut. Dies erhöht die Flexibilität und kann bei mittleren Frequenzen den Widerstandsbelag senken, da der Strom sich auf eine größere Oberfläche verteilen kann [Deut00]. Im Bereich der Kommunikationstechnik ist eine kreuzförmige Anordnung von zwei Paaren gebräuchlich, das Sternviererkabel (Bild 4.1f).

### Beispiel 4.12 Leitungswellenwiderstand einer Paralleldrahtleitung

Bei der Netzwerkverkabelung werden typische Werte von  $100\Omega$  für den Leitungswellenwiderstand verwendet. Dies entspricht nach Gleichung (4.57) bei einer Zweidrahtleitung in Luft etwa einem Wert von  $D/d = 1,37$ . ■

## ■ 4.7 Dreileitersysteme

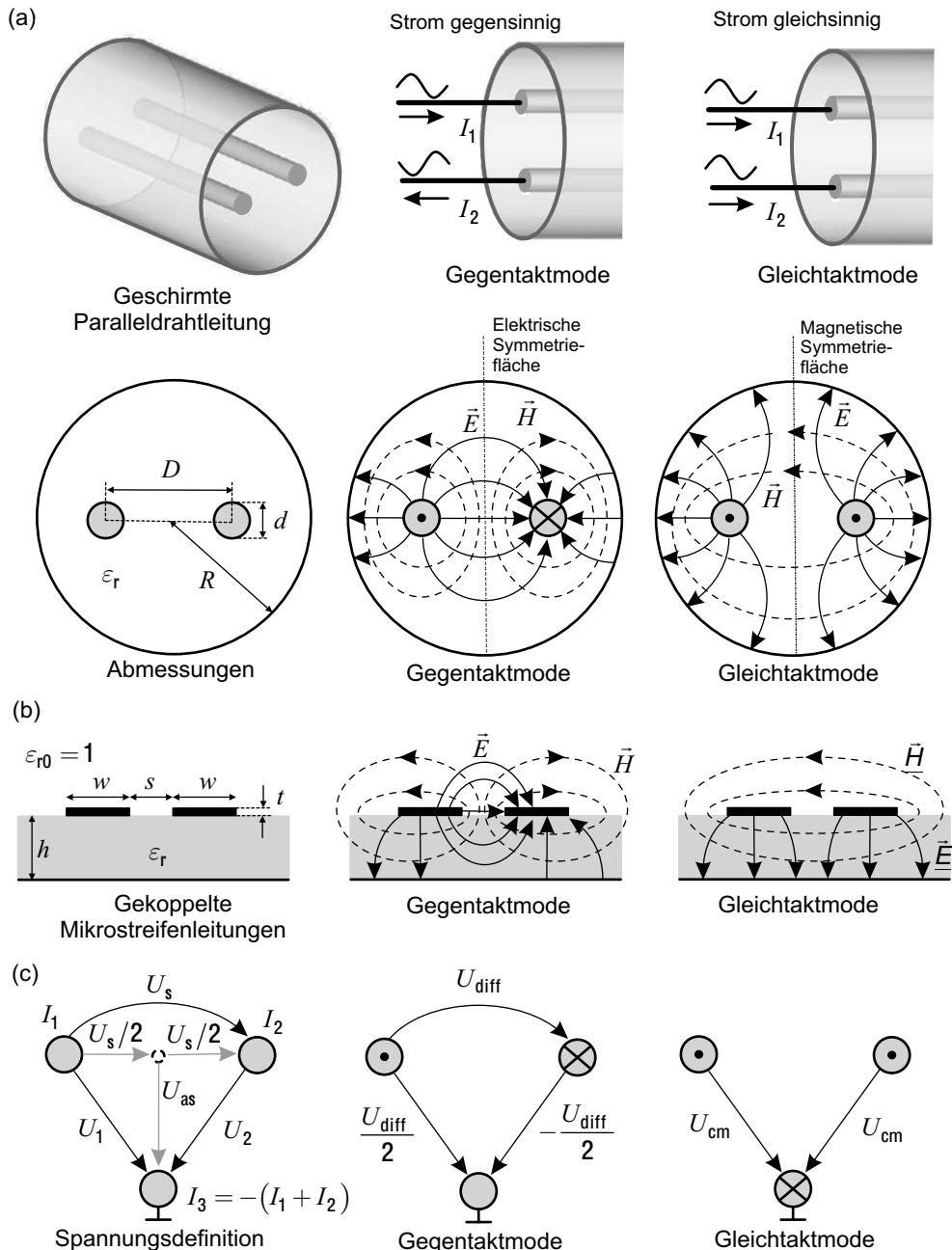
Bei den bisher betrachteten Leitungen (Koaxialleitung, Mikrostreifenleitung, Paralleldrahtleitung) handelt es sich um Zweileitersysteme bzw. beim Hohlleiter um ein Einleitersystem. Koaxialleitung und Mikrostreifenleitung stellen unsymmetrische Leitungen dar, deren Leiter unterschiedliche Abmessungen besitzen. Bei der Paralleldrahtleitung haben wir eine symmetrische Leitung mit zwei gleichartigen Leitern vorliegen. Wir wollen uns im Folgenden zwei Dreileitersysteme ansehen, die von der Paralleldrahtleitung und der Mikrostreifenleitung abgeleitet sind.

### 4.7.1 Gleich- und Gegentaktwellen

Der offene Aufbau einer Paralleldrahtleitung macht sie anfällig für Störungen von außen und die Leitung selbst verursacht ein Feld in ihrer Umgebung, durch das sie andere Komponenten stören kann. Durch eine zylindrische Schirmung um die beiden Leiter der Paralleldrahtleitung lässt sich das Feld weitgehend auf den Bereich innerhalb des Schirms konzentrieren (siehe Bild 4.21a).

Durch die Kopplung zweier Mikrostreifenleitungen im Abstand  $s$  lässt sich eine symmetrische Leitung generieren. Die metallischen Streifen der Breite  $w$  auf dem Substrat besitzen dann die gleichen Abmessungen und werden im symmetrischen Betrieb als Hin- und Rückleiter verwendet (Bild 4.21b).

Bei einem Zweileitersystem ist der Strom im Hin- und Rückleiter immer vom gleichen Betrag und entgegengesetzten Vorzeichen. Bei einer Dreileiteranordnung kann sich der Strom unterschiedlich auf die drei Leiter verteilen. Es existieren zwei unabhängige Ströme. Der dritte Strom kann dann berechnet werden, da die Summe aller Ströme in einer Querschnittsebene sich zu null addieren muss. Ebenso reicht zur Beschreibung der Spannungsverhältnisse nicht mehr eine Spannung zwischen den Leitern, sondern es müssen zur Beschreibung zwei Spannungen angegeben werden.



**Bild 4.21** Dreileitersysteme: (a) geschirmte Zweidrahtleitung und (b) gekoppelte Mikrostreifenleitungen; (c) Grundausbreitungsmoden: Gegentakt- und Gleichaktmode

Bild 4.21c zeigt die Spannungs- und Stromdefinitionen: Das symmetrische Dreileitersystem besteht aus zwei gleichförmigen Leitern, die die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  führen, sowie dem dritt-

ten Leiter (auch Bezugsleiter). Bei der geschirmten Zweidrahtleitung ist der Bezugsleiter der Schirm und bei den gekoppelten Mikrostreifenleitungen ist dies die gemeinsame Massefläche. Wählt man als unabhängige Spannungen die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  zwischen den Leitern und der Massefläche, so sind alle weiteren Spannungen daraus berechenbar.

- Die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  werden als *unsymmetrische Spannungen* bezeichnet.
- Die Spannung  $U_s$  zwischen den Leitern ist die *symmetrische Spannung*.
- Die Spannung  $U_{as}$  zwischen der *elektrischen Mitte* der Leiter 1 und 2 und dem Bezugsleiter ist die *asymmetrische Spannung*.

Aus den unabhängigen Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  können die symmetrische und die asymmetrische Spannung berechnet werden. Mit Hilfe der Maschenregel lässt sich leicht zeigen, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$\boxed{U_s = U_1 - U_2} \quad \text{und} \quad \boxed{U_{as} = \frac{U_1 + U_2}{2}} . \quad (4.58)$$

Die unterschiedlichen möglichen Betriebszustände auf einem der oben beschriebenen Dreileitersysteme können als Überlagerung (Superposition) zweier unabhängiger *Grundausbreitungsmoden*, des *Gegentaktmode*- und des *Gleichaktmode*, dargestellt werden.

Dreileitersysteme, die aus zwei gleichartigen Leitungen und einem Bezugsleiter bestehen, werden in aller Regel im *Gegentaktmode* (*Differential mode*) betrieben. Die unsymmetrischen Spannungen sind betragsmäßig gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Bei den Strömen verhält es sich ebenso. Die Spannung zwischen den gleichförmigen Leitungen wird als Differenzspannung  $U_{diff}$  bezeichnet. Die asymmetrische Spannung verschwindet bei diesem Ausbreitungsmodus.

$$\left. \begin{array}{ll} \boxed{U_1 = -U_2} & \text{und} \\ \boxed{U_s = U_{diff}} & \text{und} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \boxed{I_1 = -I_2} \\ \boxed{U_{as} = 0} \end{array} \right\} \quad \text{(Gegentaktmode)} \quad (4.59)$$

Der zweite Grundausbreitungsmodus ist der *Gleichaktmode* (*Common mode*). Die unsymmetrischen Spannungen sind hierbei betragsmäßig gleich und von gleichem Vorzeichen. Bei den Strömen verhält es sich ebenso.

$$\left. \begin{array}{ll} \boxed{U_1 = U_2} & \text{und} \\ \boxed{U_s = 0} & \text{und} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \boxed{I_1 = I_2} \\ \boxed{U_{as} = U_{cm}} \end{array} \right\} \quad \text{(Gleichaktmode)} \quad (4.60)$$

#### 4.7.2 Leitungswellenwiderstände und Ausbreitungskonstanten

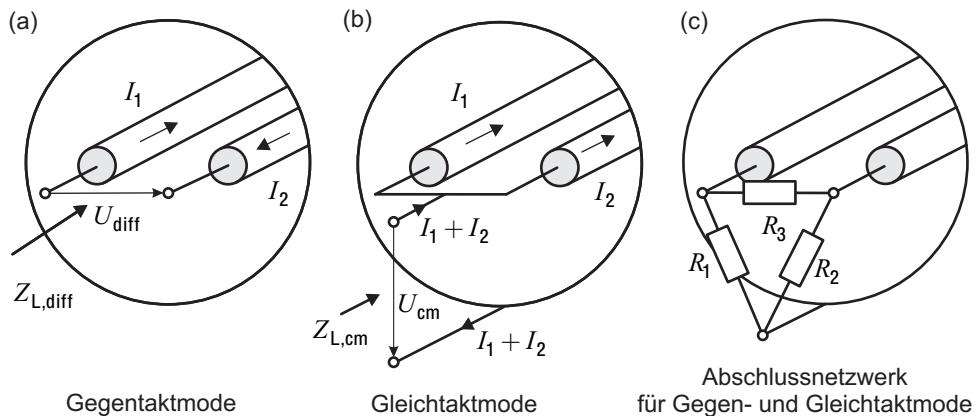
Die beiden Ausbreitungsmoden besitzen im Allgemeinen unterschiedliche Leitungswellenwiderstände  $Z_{L,diff}$  für den Gegentaktmodus und  $Z_{L,cm}$  für den Gleichaktmodus.  $Z_{L,diff}$  ist die

Eingangsimpedanz einer unendlich langen Leitung, wenn man die Leitung zwischen den gleichförmigen (Signal)-Leitungen 1 und 2 speist (Bild 4.22a).  $Z_{L,cm}$  ist entsprechend die Eingangsimpedanz einer unendlich langen Leitung, wenn man die Signalleitungen zusammenführt und die Leitung zwischen den Signalleitungen und der Bezugsmasse speist (Bild 4.22b).

Anstelle von  $Z_{L,diff}$  und  $Z_{L,cm}$  werden oft die *Odd-mode*- und *Even-mode*-Leitungswiderstände  $Z_{L,even}$  (bzw.  $Z_{0e}$ ) und  $Z_{L,odd}$  (bzw.  $Z_{0o}$ ) verwendet, mit folgenden Zusammenhängen:

$$Z_{L,diff} = 2Z_{0o} = 2Z_{L,odd} \quad \text{und} \quad Z_{L,cm} = \frac{1}{2}Z_{0e} = \frac{1}{2}Z_{L,even} \quad . \quad (4.61)$$

Der *Odd-mode*- (*bzw. Even-mode*-) Leitungswellenwiderstand entspricht dem Eingangswiderstand einer unendlich langen Leitung, die zwischen Leiter 1 und dem Bezugsleiter gespeist wird, unter der Bedingung, dass auf Leiter 2 ein entsprechend gegenphasiges (*bzw. gleichphasiges*) Signal eingespeist wird.



**Bild 4.22** Interpretation der Leitungswellenwiderstände für (a) Gegen- und (b) Gleichtaktmode sowie (c) Abschlussnetzwerk

Neben den unterschiedlichen Leitungswellenwiderständen besitzen Gegenakt- und Gleichtaktausbreitungsmodus bei inhomogenem Füllmaterial der Leitung unterschiedliche Ausbreitungskonstanten  $\gamma_{diff}$  und  $\gamma_{cm}$  und damit unterschiedliche Dämpfungskonstanten und Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

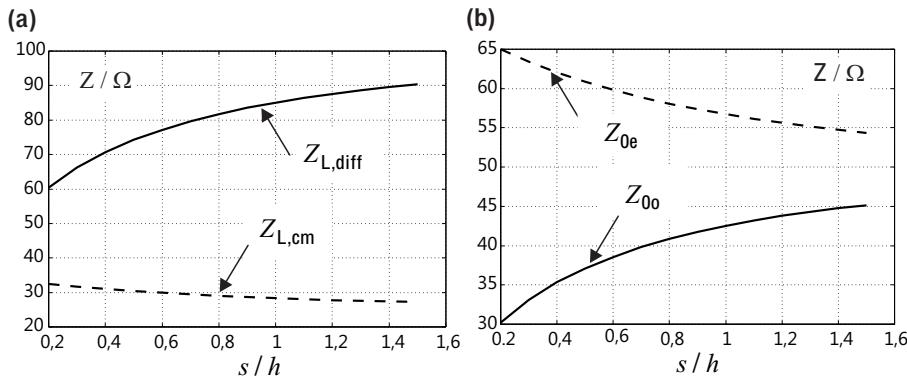
Durch nicht idealen Aufbau eines Kabels, zum Beispiel abschnittsweise veränderte Querschnittsgeometrie durch äußere Krafteinwirkung, kann es zur *Modenkonversion* kommen. Wird ein Gegenaktignal am Kabeleingang eingespeist, so erscheint am Ausgang kein reines Gegenaktignal mehr, sondern ein gewisser Anteil der Energie ist in den Gleichtaktmodus umgewandelt worden. Da diese Modenkonversion bei Kabeln zu Signalauslöschen führen kann, gibt es bei der Herstellung und Verlegung eines Kabels hohe Anforderungen an einen gleichbleibenden Querschnitt.

### Beispiel 4.13 Gleich- und Gegenaktimpedanz einer gekoppelten Mikrostreifenleitung

Bild 4.23 zeigt Gegen- und Gleichtakteitungswellenwiderstände sowie *Odd-* und *Even-mode*-Leitungswellenwiderstände gekoppelter Mikrostreifenleitungen. Die einzelne

Mikrostreifenleitung besitzt bei einer Frequenz von  $f = 5 \text{ GHz}$  einen Leitungswellenwiderstand von  $Z_L \approx 50 \Omega$  und zeichnet sich durch folgende Größen aus: Substrathöhe  $h = 635 \mu\text{m}$ , relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r = 9,8$ , Leiterbreite  $w = 600 \mu\text{m}$ , Metallisierungsdicke  $t = 10 \mu\text{m}$ .

Die Spaltbreite  $s$  zwischen den Leiterbahnen wird variiert. Mit zunehmendem Abstand nähern sich *Odd*- und *Even-mode*-Leitungswellenwiderstand dem Wert  $Z_L = 50 \Omega$ , da die Verkopplung immer geringer wird.



**Bild 4.23** (a) Leitungswellenwiderstände  $Z_{L,\text{diff}}$  und  $Z_{L,\text{cm}}$  für Gegen- und Gleichtaktwellen auf gekoppelten Mikrostreifenleitungen sowie (b) *Odd*- und *Even-mode*-Leitungswellenwiderstände  $Z_{0o}$  und  $Z_{0e}$

Gegen- und Gleichtaktleitungswellenwiderstand nähern sich entsprechend mit zunehmendem Abstand  $s$  dem doppelten bzw. halben Wert von  $Z_L$ . ■

Die Kopplung zwischen Leitungen kann beim Schaltungsaufbau genutzt werden, um aus zwei unsymmetrischen Leitungen – wie zum Beispiel zwei Mikrostreifenleitungen in Bild 4.21 – eine symmetrische Leitung zu generieren, die dann im Gegentaktmodus betrieben wird. Weiterhin kann die Kopplung zwischen Leitungen dazu genutzt werden, Filter und Richtkoppler (siehe Abschnitt 6.4 und 6.10) aufzubauen.

Beim Schaltungsentwurf spielt der *Kopplungsfaktor*  $k$  eine bedeutende Rolle. Dieser hängt mit den Leitungswellenwiderständen  $Z_L$ ,  $Z_{0e}$  (bzw.  $Z_{L,\text{even}}$ ) und  $Z_{0o}$  (bzw.  $Z_{L,\text{odd}}$ ) wie folgt zusammen:

$$Z_{L,\text{even}} = Z_{0e} = Z_L \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \quad \text{und} \quad Z_{L,\text{odd}} = Z_{0o} = Z_L \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} . \quad (4.62)$$

Bei Kenntnis der *Even*- und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderstände können Kopplungsfaktor  $k$  und Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  der ungekoppelten Leitung berechnet werden über

$$Z_L = \sqrt{Z_{0e} Z_{0o}} \quad \text{und} \quad k = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} . \quad (4.63)$$

Die Kopplung kann aber auch unerwünscht sein, wenn nämlich die zwei Mikrostreifenleitungen sich zwar in räumlicher Nähe befinden, eigentlich aber getrennt betrieben werden sollen.

Gleiches gilt für die Verkopplung von Leitungen in der Kommunikationstechnik, bei denen Signale über größere Distanzen transportiert werden. Im Falle unerwünschter Kopplung spricht man auch von Überkopplung (*Crosstalk*).

### 4.7.3 Leitungsabschluss

Bleibt noch die Frage, wie wir ein Dreileiterystem nach Bild 4.21 am Leitungsende sinnvoll abschließen sollen. Wird eine Leitung im Gegentaktbetrieb ausgesteuert, so reicht am Ende als Abschlussimpedanz  $Z_A = Z_{L,diff}$  zwischen den Signalleitern.

Falls bei einem nichtidealen Kabel ein Teil des Signals in den Gleichtaktmode konvertiert wird, so wird in diesem Fall die Gleichtaktwelle am offenen Ende reflektiert. Um auch den Gleichtaktmode reflexionsfrei abzuschließen, kann ein Netzwerk aus drei Widerständen (Bild 4.22c) verwendet werden [Wade91]. Diesen Zusammenhang werden wir in Übung 4.1 herleiten.

$$R_1 = R_2 = 2Z_{L,cm} = Z_{0e} \quad (4.64)$$

$$R_3 = \frac{4Z_{L,cm}Z_{L,diff}}{4Z_{L,cm} - Z_{L,diff}} = \frac{2Z_{0e}Z_{0o}}{Z_{0e} - Z_{0o}} \quad (4.65)$$

## ■ 4.8 Übungsaufgaben

### Übung 4.1

Leiten Sie die Zusammenhänge in den Gleichungen (4.64) und (4.65) für den gleichzeitigen Abschluss der Gleich- und Gegentaktwellen her. Schätzen Sie aus Bild 4.23 für ein Verhältnis  $s/h = 1$  den Wert der Gleich- und Gegentakteitungswellenwiderstände der dort gegebenen gekoppelten Mikrostreifenleitung ab und bestimmen Sie die Abschlusswiderstände  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$ .

### Übung 4.2

Berechnen Sie die *Cut-off*-Frequenzen der ersten sechs ausbreitungsfähigen Moden eines R260-Hohlleiters ( $a = 8,636$  mm,  $b = 4,318$  mm). Wie groß ist der Leitungswellenwiderstand einer  $H_{10}$ -Welle bei einer Frequenz von  $f = 1,5f_c$ ?

### Übung 4.3

Gegeben sind zwei koaxiale Leitungen mit den Leitungswellenwiderständen  $Z_{L1} = 75\Omega$  und  $Z_{L2} = 125\Omega$ . Beide Leitungen sind mit dem gleichen Material gefüllt. Aufgrund der homogenen Materialfüllung beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer TEM-Welle nur 81% der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum. Für die Außenradien der Koaxialleitungen gilt:  $R_{a1} = R_{a2} = 2$  mm.

Bestimmen Sie

- a) die relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  des Füllmaterials,

b) die Innenradien  $R_{i1}$  und  $R_{i2}$  der Koaxialleitungen.

Zur Anpassung bei einer Frequenz von  $f = 10$  GHz soll eine dritte Koaxialleitung mit gleichem Außenleiterradius  $R_{a3} = 2$  mm und dem Innenradius von Leitung 2, also  $R_{i3} = R_{i2}$ , als  $\lambda/4$ -Transformator verwendet werden.

c) Bestimmen Sie den erforderlichen Leitungswellenwiderstand  $Z_{l3}$ .

d) Wie groß muss die relative Permittivitätszahl  $\epsilon_{r3}$  des Mediums in Leitung 3 sein?

e) Geben Sie die geometrische Länge  $\ell_3$  des Leitungsstückes an.

#### Übung 4.4

Gegeben ist ein Hohlraumresonator mit den Abmessungen  $a = 5$  cm,  $b = 7$  cm und  $c = 9$  cm. Berechnen Sie die niedrigsten fünf Resonanzfrequenzen und stellen Sie die Feldverteilungen mit einem Feldsimulationsprogramm dar.

# 5

## Streuparameter

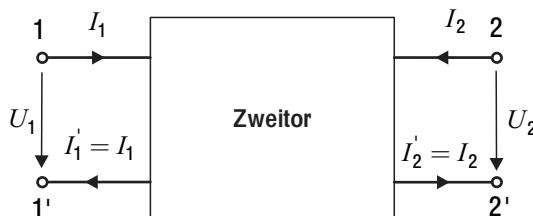
Zur Beschreibung des elektrischen Verhaltens von Schaltungen mit mehreren Ein- und Ausgängen (Mehrtore) greift man häufig auf die Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$  zurück, die Spannungen und Ströme an Ein- und Ausgängen miteinander verknüpft.

Im Bereich der Hochfrequenztechnik verwendet man bevorzugt die *Streumatrix  $\mathbf{S}$* . Diese verknüpft *Wellengrößen* miteinander, die einen engen Bezug zu zulaufenden, ablaufenden und transmittierten Leistungen haben. Die in dieser Streumatrix auftretenden Streuparameter  $s_{ij}$  sind mit modernen Netzwerkanalysatoren auch bei sehr hohen Frequenzen komfortabel und reproduzierbar messbar und werden in Hochfrequenzschaltungs- und -feldsimulatoren bei der Berechnung von Hochfrequenzsystemen verwendet.

Wir wollen uns zunächst die grundsätzlichen Zusammenhänge ansehen, um dann an einfachen Beispielen mit der neuen Größe *Streuparameter* vertraut zu werden.

### ■ 5.1 Mehrtorgleichungen in Matrixform

Bei der klassischen netzwerktheoretischen Beschreibung von  $n$ -Toren ( $n$  = Anzahl der Tore) nutzen wir Matrixgleichungen, um die Zusammenhänge von Strömen und Spannungen an den Toren darzustellen. Bild 5.1 zeigt ein Zweitor mit den Klemmenpaaren  $1 - 1'$  und  $2 - 2'$ .



**Bild 5.1** Zählpfeile für Spannungen und Ströme an den Toren eines Zweitors

Als Torbedingung gilt, dass an jedem Tor die Summe der zulaufenden Ströme gleich null ist, also gilt  $I_i = I'_i$ . Die Ströme und Spannungen an den Toren können über Matrizen miteinander verknüpft werden. Am häufigsten finden die Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$ ,

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (5.1)$$

die Admittanzmatrix  $\mathbf{Y}$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{U} \quad (5.2)$$

die Kettenmatrix  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11}U_2 + A_{12}(-I_2) \\ I_1 &= A_{21}U_2 + A_{22}(-I_2) \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \quad (5.3)$$

und die Hybridmatrix  $\mathbf{H}$  Verwendung.

$$\begin{aligned} U_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}U_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}U_2 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \quad (5.4)$$

Bei der Bestimmung der Matrixelemente müssen an den Toren entweder Kurzschlüsse oder Leerläufe realisiert werden. Zum Beispiel gilt für das Matrixelement  $Z_{11}$  nach Gleichung (5.1) der Zusammenhang:

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} . \quad (5.5)$$

Das Matrixelement  $Z_{11}$  ergibt sich dann als Eingangsimpedanz an Tor 1, unter der Randbedingung, dass am Tor 2 ein Leerlauf ( $I_2 = 0$ ) realisiert wird.

In der Hochfrequenztechnik sind Leerläufe und Kurzschlüsse nicht immer einfach zu realisieren bzw. können bei aktiven Komponenten zu instabilem Verhalten führen [Schm06]. Hinzu kommt, dass Strom und Spannung bei Toren, deren Abmessungen nicht klein gegen die Wellenlänge sind, keine geeigneten Beschreibungsgrößen mehr darstellen.

Man geht daher bei höheren Frequenzen auf eine Beschreibung über, die diesen Umständen Rechnung trägt, und führt *Wellengrößen* und *Streuparameter* ein.

## ■ 5.2 Definition von Wellengrößen

Wir beschränken uns zu Beginn auf Zweitore. Die Betrachtungen können einfach auf eine größere Anzahl von Toren erweitert werden. Bild 5.2 zeigt ein Zweititor, welches über zwei Leitungen mit den Leitungswellenwiderständen  $Z_{L1}$  und  $Z_{L2}$  angeschlossen ist.

Für die Beschreibung mittels der Streuparameter gehen wir von Überlegungen des dritten Kapitels über die leitungstheoretischen Grundlagen aus. Wir wissen, dass auf den Anschlussleitungen hin- und rücklaufende Spannungswellen mit den Amplitudenfaktoren  $U_h$  und  $U_r$  existieren können. Wir führen nun an allen Toren die *Wellengrößen*  $a$  und  $b$  ein, indem wir die Amplituden der hin- und rücklaufenden Spannungswellen auf die Wurzel aus den Leitungswellenwiderständen der jeweiligen Tore normieren.

## 152 5 Streuparameter

Die unterschiedlichen Tore kennzeichnen wir durch den Index  $i \in \{1; 2\}$ .

$$a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad (\text{hinlaufende normierte Spannungswelle an Tor } i) \quad (5.6)$$

$$b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad (\text{rücklaufende normierte Spannungswelle Tor } i) \quad (5.7)$$

Für verlustlose Leitungen sind die Leitungswellenwiderstände  $Z_{L1}$  und  $Z_{L2}$  reell<sup>1</sup>. Die Leitungswellenwiderstände der Anschlussleitungen werden oft auch als *Normierungs-, Tor- oder Bezugswiderstände* bzw. als *Systemimpedanz*  $Z_0$  bezeichnet.



**Bild 5.2** Zweitor mit Anschlussleitungen zur Definition der Wellengrößen  $a$  und  $b$

Die physikalische Einheit der neuen Größe ist  $[a_i] = [b_i] = \sqrt{W}$ . Für *reelle* Torwiderstände ist ein einfacher Zusammenhang zwischen den Wellengrößen und den auf die Tore zulaufenden bzw. von diesen Toren ablaufenden Wirkleistungen gegeben. Es gilt:

$$P_{wai} = \frac{1}{2} a_i a_i^* = \frac{U_{hi} U_{hi}^*}{2 Z_{Li}} = \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad (\text{auf Tor } i \text{ zulaufende Wirkleistung}) \quad (5.8)$$

$$P_{wbi} = \frac{1}{2} b_i b_i^* = \frac{U_{ri} U_{ri}^*}{2 Z_{Li}} = \frac{1}{2} |b_i|^2 \quad (\text{von Tor } i \text{ ablaufende Wirkleistung}). \quad (5.9)$$

Im dritten Kapitel haben wir einen Zusammenhang zwischen der Spannung  $U_0$  und dem Strom  $I_0$  am Leitungsende und den Amplituden der hin- und rücklaufenden Spannungswellen  $U_r$  und  $U_h$  gefunden (siehe Gleichungen (3.45) und (3.46)).

<sup>1</sup> Im Rahmen dieser Darstellung wollen wir uns auf die Verwendung reeller Torwiderstände beschränken, da komplexwertige Torimpedanzen in der Praxis nur eine sehr untergeordnete Rolle spielen.

Wir wiederholen die Gleichungen hier der Einfachheit halber.

$$U_h = \frac{1}{2} (U_0 + I_0 Z_L) \quad \text{und} \quad U_r = \frac{1}{2} (U_0 - I_0 Z_L) \quad (5.10)$$

Wir nutzen diese Beziehungen nun, um die Wellengrößen  $a_i$  und  $b_i$  durch Spannung  $U_i$  und Strom  $I_i$  an Tor  $i$  auszudrücken:

$$\boxed{a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{Z_{Li}}} = \frac{U_i + Z_{Li} I_i}{2\sqrt{Z_{Li}}} \quad \text{und} \quad b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{Z_{Li}}} = \frac{U_i - Z_{Li} I_i}{2\sqrt{Z_{Li}}} \quad .} \quad (5.11)$$

Durch einfache Umstellung erhalten wir umgekehrt

$$\boxed{U_i = (a_i + b_i) \sqrt{Z_{Li}} \quad \text{und} \quad I_i = \frac{a_i - b_i}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad .} \quad (5.12)$$

Aus den Zusammenhängen in den Gleichungen (5.11) bis (5.12) erkennen wir, dass sich unter Verwendung eines Torwiderstandes  $Z_{Li}$  formal immer Wellengrößen  $a$  und  $b$  berechnen lassen, auch dann, wenn gar keine Anschlussleitungen vorhanden sind, sondern der Abschluss der Schaltung direkt über einen Lastwiderstand und die Speisung über eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand geschieht. Für eine anschauliche Interpretation der Wellengrößen ist die Vorstellung von entsprechenden Anschlussleitungen aber sehr hilfreich.

## ■ 5.3 Streuparameter und Leistung

Die neu eingeführten Wellengrößen  $a$  und  $b$  an den Toren in Bild 5.2 werden über die Streuparameter  $s_{ij}$  miteinander verknüpft.

$$b_1 = s_{11} a_1 + s_{12} a_2 \quad (5.13)$$

$$b_2 = s_{21} a_1 + s_{22} a_2 \quad (5.14)$$

In Matrixform schreiben wir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (5.15)$$

mit der *Streumatrix*  $\mathbf{S}$ . Die Matrixelemente  $s_{ii}$  mit zwei gleichen Indizes werden als *Reflexionsfaktoren* und die Matrixelemente  $s_{ij}$  mit ungleichen Indizes werden als *Transmissionsfaktoren* bezeichnet.

Die Interpretation der Streuparameter  $s_{ii}$  als Reflexionsfaktoren wird verständlich, wenn wir uns noch einmal Gleichung (5.13) ansehen:  $b_1 = s_{11} a_1 + s_{12} a_2$ . Wir nehmen an, dass  $a_2$  verschwindet, also die Anschlussleitung 2 mit ihrem Leitungswellenwiderstand  $Z_{L2}$  abgeschlossen ist. Somit bildet  $s_{11}$  das Verhältnis von  $b_1$  zu  $a_1$ . Für die Wellengrößen können wir die

## 154 5 Streuparameter

Definitionen nach den Gleichungen (5.6) und (5.7) einsetzen und erhalten:

$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{U_{rl}/\sqrt{Z_{L1}}}{U_{hl}/\sqrt{Z_{L1}}} = \frac{U_{rl}}{U_{hl}} = r_1 \quad . \quad (5.16)$$

Das Verhältnis von rücklaufender zu hinlaufender Spannungswelle hatten wir im Kapitel 3 bereits als Reflexionsfaktor kennengelernt (siehe Gleichung (3.119)).

Für die einzelnen Streuparameter ergibt sich somit folgende Bedeutung:

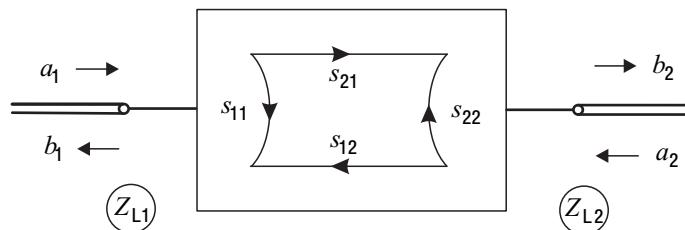
$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} = r_1 \quad (\text{Eingangsreflexionsfaktor bei angepasstem Ausgang}) \quad (5.17)$$

$$s_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0} \quad (\text{Vorwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Ausgang}) \quad (5.18)$$

$$s_{12} = \frac{b_1}{a_2} \Big|_{a_1=0} \quad (\text{Rückwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Eingang}) \quad (5.19)$$

$$s_{22} = \frac{b_2}{a_2} \Big|_{a_1=0} = r_2 \quad (\text{Ausgangsreflexionsfaktor bei angepasstem Eingang}). \quad (5.20)$$

Bild 5.3 verdeutlicht die Beziehungen durch eine graphische Darstellung in Form von vier gerichteten Kanten, die wir in ähnlicher Form in Signalflossdiagrammen wiederfinden. Die Tore sind in dem Bild, wie in der Hochfrequenztechnik oft zu sehen, *einpolig* dargestellt. Diese Darstellung ist effizient, wenn eine Beschreibung über Wellengrößen erfolgt. Ein einpolig dargestelltes Tor kann natürlich zwei Anschlussklemmen haben, so dass eine Spannung eingezeichnet werden kann. Bei Hohlleitern ist sofort evident, dass eine Beschreibung über zwei Klemmen nicht weit führt, da es ja nur einen Leiter gibt.



**Bild 5.3** Streuparameter eines Zweitores in einpoliger Darstellung

Die *einpolige Darstellung* von Toren liefert einen Hinweis darauf, dass in der Hochfrequenztechnik Tore nicht einfach durch zwei Klemmen charakterisiert werden, sondern in vielen Fällen die gesamte Torgeometrie und der Wellenausbreitungstyp berücksichtigt werden müssen.

Der Betrag eines Streuparameters wird häufig logarithmisch dargestellt.

$$\frac{s_{ij}^{\ell}}{\text{dB}} = 20 \lg |s_{ij}|$$

(Logarithmische Darstellung des Streuparameterbetrages) (5.21)

Der Index  $\ell$  zeigt formal an, dass es sich um eine logarithmierte Größe handelt. In der Praxis ersieht man dies aber stets aus der Angabe der Pseudoeinheit dB, so dass wir im Folgenden auf die zusätzliche Kennzeichnung verzichten wollen.

Die Kehrwerte der Beträge der Streuparameter werden als Dämpfungen bezeichnet. Aus den Reflexionsfaktoren erhalten wir die *Reflexionsdämpfungen (Return loss)*.

$$\frac{RL}{\text{dB}} = 20 \lg \left| \frac{1}{s_{ii}} \right| = -20 \lg |s_{ii}| = -\frac{s_{ii}^\ell}{\text{dB}} \quad (\text{Return loss}) \quad (5.22)$$

Aus den Transmissionsfaktoren erhalten wir die *Einfügedämpfungen (Insertion loss)*.

$$\frac{IL}{\text{dB}} = 20 \lg \left| \frac{1}{s_{ij}} \right| = -20 \lg |s_{ij}| = -\frac{s_{ij}^\ell}{\text{dB}} \quad (\text{Insertion loss}) \quad (5.23)$$

Reflexions- und Einfügedämpfung stimmen also bis auf das Vorzeichen mit den logarithmisierten Beträgen der Streuparameter überein.

In den Gleichungen (5.8) und (5.9) haben wir einen einfachen Zusammenhang zwischen den Wellengrößen  $a$  und  $b$  und den auf ein Tor zulaufenden oder von diesem Tor ablaufenden Wirkleistungen  $P_{wa}$  und  $P_{wb}$  gefunden. Da die Streuparameter in der Streumatrix die Wellengrößen miteinander verknüpfen, stellen sie auch Beziehungen zwischen den zu- und ablaufenden Wirkleistungen dar. Für das Verhältnis von ab- und zulaufender Wirkleistung an Tor 1 gilt:

$$|s_{11}|^2 = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{wb1}}{P_{wal}} \quad . \quad (5.24)$$

Das Verhältnis der an Tor 2 auslaufenden Wirkleistung zur an Tor 1 einlaufenden Wirkleistung ist:

$$|s_{21}|^2 = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{wb2}}{P_{wal}} \quad . \quad (5.25)$$

Wird ein Mehrtor über Leitungen angeschlossen, deren Leitungswellenwiderstände gerade den Torwiderständen entsprechen, so beschreibt das Betragsquadrat der Streuparameter das Verhältnis der reflektierten bzw. transmittierten Wirkleistung zur zulaufenden Wirkleistung.

### Beispiel 5.1 Reflexionsfaktor und Leistung

Für einen Eingangsreflexionsfaktor von  $|s_{11}| = 0,1$  ergibt sich eine reflektierte Wirkleistung von  $|s_{11}|^2 = 0,01 = 1\%$  der zulaufenden Leistung, d.h. 99% der zulaufenden Wirkleistung werden am entsprechenden Tor aufgenommen. Der Betrag des Reflexionsfaktors hat logarithmisch einen Wert von  $|s_{11}| = -20 \text{ dB}$ , die Reflexionsdämpfung (*Return loss*) beträgt  $RL = 20 \text{ dB}$ . (Eine Übersicht über die logarithmische Darstellung von Größen befindet sich in Anhang A.) ■

## ■ 5.4 Spezielle Eigenschaften von Schaltungen

Bestimmte Schaltungseigenschaften und die zugehörigen Eigenschaften der Streuparameter werden mit speziellen Begrifflichkeiten gekennzeichnet. Wir beschränken uns dabei nun nicht mehr nur auf Zweitore, sondern wollen von einem allgemeinen Mehrtor mit  $n$  Toren ausgehen.

### 5.4.1 Anpassung

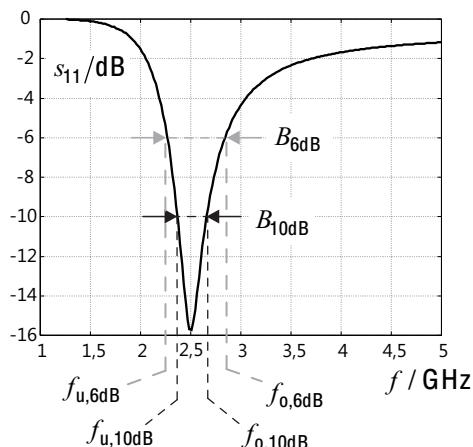
Von (*allseitiger*) *Anpassung* spricht man, wenn alle Reflexionsfaktoren verschwinden:

$$s_{ii} = 0 \quad \forall i \quad (\text{Allseits angepasstes } n\text{-Tor} \hat{=} \text{alle Tore sind angepasst}). \quad (5.26)$$

Nach Gleichung (5.17) bedeutet dies, dass die rücklaufende Wellengröße  $b_i$  verschwindet, wenn eine Leitung an dieses Tor angeschlossen wird, bei der der Leitungswellenwiderstand gerade eben dem Tor- oder Bezugswiderstand entspricht. Der Eingangswiderstand  $Z_{Ei}$  an Tor  $i$  ist dann gerade gleich dem Leitungswellenwiderstand  $Z_{Li}$ . Es treten also keine Reflexionen an den Toren auf. Die Anpassung ist eine Eigenschaft, die man in der Regel bei Hochfrequenzschaltungen realisiert sehen möchte. Die Wellen laufen dann auf den Zuleitungen nur von der Quelle zur Last.

Bei fehlangepassten Komponenten (zum Beispiel Transistoren in Verstärkerschaltungen) kann mittels spezieller Anpassschaltungen eine Anpassung erreicht werden. Wir werden uns mit solchen Anpassschaltungen in Abschnitt 6.3 befassen.

Bei Tiefpass-, Hochpass und Bandpassfiltern werden allerdings unerwünschte Signalanteile mittels *erwünschter Reflexion durch Fehlanpassung* gedämpft und so an einer Fortleitung gehindert. Solche Filter betrachten wir in Abschnitt 6.4.



**Bild 5.4** Reflexionsfaktorverlauf und Definition der 6 dB- und 10 dB-Bandbreite

Ein Begriff, der eng mit der Anpassung verknüpft ist, ist die *Bandbreite*. Bild 5.4 zeigt ein Beispiel. Je nachdem welchen maximalen Betrag des Reflexionsfaktors man zulässt (typische Wer-

te sind:  $-6 \text{ dB}$ ,  $-10 \text{ dB}$  und  $-20 \text{ dB}$ ), besitzt eine Schaltung unterschiedlich große Frequenzbereiche (Bandbreiten  $B$ ), in denen sie betrieben werden kann.

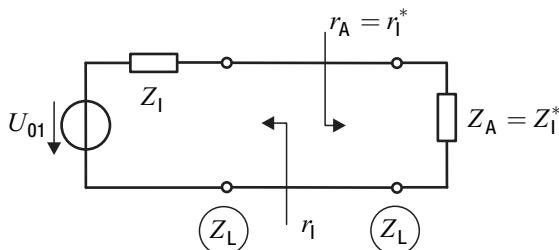
Die  $10 \text{ dB}$ -Bandbreite  $B_{10\text{dB}}$  einer Schaltung zeichnet sich dadurch aus, dass der Reflexionsfaktor kleiner als  $-10 \text{ dB}$  ist, d.h. in diesem Frequenzbereich wird maximal 10% der zugeführten Leistung von der Antenne reflektiert. Im Bereich der  $6 \text{ dB}$ -Bandbreite ist der Reflexionsfaktor kleiner als  $-6 \text{ dB}$ , hier wird maximal 25% der zugeführten Leistung reflektiert.

## 5.4.2 Leistungsanpassung

Schließt man eine Schaltung an eine Quelle an und möchte dieser die maximal zur Verfügung stehende Leistung entnehmen, so muss der Eingangsreflexionsfaktor konjugiert komplex zum Reflexionsfaktor der Quelle sein.

$$r_A = r_I^* \quad (\text{Leistungsanpassung}) \quad (5.27)$$

Betrachten wir dazu das Bild 5.5 und sehen uns einige Fälle an, in denen Leistungsanpassung auftritt.



**Bild 5.5** Reflexionsfaktor von Quelle und Last bei Leistungsanpassung

**Fall 1:** Der Abschlusswiderstand  $Z_A$  unserer Schaltung entspreche dem reellen Bezugswiderstand  $Z_L$  und zugleich auch dem Quellenwiderstand  $Z_I$ .

$$Z_A = Z_I = Z_L \in \mathbb{R} \quad (5.28)$$

In diesem Fall verschwinden die Reflexionsfaktoren.

$$r_A = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L} = 0 \quad \text{und} \quad r_I = \frac{Z_I - Z_L}{Z_I + Z_L} = 0 \quad (5.29)$$

Somit gilt Leistungsanpassung, da Gleichung (5.27) erfüllt ist.

$$\Rightarrow \quad \underline{r_A = r_I^*} \quad (5.30)$$

**Fall 2:** Wir weichen nun vom ersten Beispiel nur darin ab, dass wir einen anderen reellen Bezugswiderstand  $Z_L$  wählen.

$$Z_A = Z_I \neq Z_L \quad \text{und} \quad Z_A, Z_I, Z_L \in \mathbb{R} \quad (5.31)$$

Es gilt nun natürlich nach wie vor Leistungsanpassung (wir haben an der Schaltung ja nichts geändert). Die Reflexionsfaktoren  $r_I$  und  $r_A$  sind reell und gleich, aber diesmal von null verschieden.

$$r_A = r_I \in \mathbb{R} \quad (5.32)$$

Gleichung (5.27) ist wieder erfüllt.

$$\Rightarrow \quad \underline{r_A = r_I^*} \quad (5.33)$$

**Fall 3:** Wir wählen nun eine komplexe Abschlussimpedanz, die konjugiert komplex zur Quellimpedanz ist.

$$\boxed{Z_A = Z_I^*} \quad (\text{Leistungsanpassung}) \quad (5.34)$$

Aus der Netzwerktheorie wissen wir, dass dies den Fall der Leistungsanpassung für komplexe Impedanzen darstellt. Als Bezugswiderstand behalten wir einen reellen Wert  $Z_L$  bei. Wir stellen die Eingangsimpedanz und die Quellimpedanz durch Real- und Imaginärteil dar.

$$Z_A = R_A + jX_A \quad \text{und} \quad Z_I = R_I + jX_I = Z_A^* = R_A - jX_A \quad (5.35)$$

Hiermit berechnen wir die Reflexionsfaktoren  $r_I$  und  $r_A$ .

$$r_A = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L} = \frac{R_A + jX_A - Z_L}{R_A + jX_A + Z_L} = \frac{R_A^2 - Z_L^2 + X_A^2 + j2X_AZ_L}{R_A^2 + Z_L^2 + X_A^2} \quad (5.36)$$

$$r_I = \frac{Z_I - Z_L}{Z_I + Z_L} = \frac{R_A - jX_A - Z_L}{R_A - jX_A + Z_L} = \frac{R_A^2 - Z_L^2 + X_A^2 - j2X_AZ_L}{R_A^2 + Z_L^2 + X_A^2} \quad (5.37)$$

Wenn wir die Reflexionsfaktoren in den Gleichungen (5.36) und (5.37) betrachten, erkennen wir, dass sie sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden. Es gilt also

$$\Rightarrow \quad \underline{r_A = r_I^*} \quad . \quad (5.38)$$

Komplex-konjugierte Reflexionsfaktoren bedeuten also komplex-konjugierte Eingangsimpedanzen<sup>2</sup>.

### 5.4.3 Reziprozität (Übertragungssymmetrie)

Ein Mehrtor ist reziprok (übertragungssymmetrisch), falls die Transmissionsfaktoren sich bei Vertauschung der Torindizes  $i$  und  $j$  nicht ändern.

$$\boxed{s_{ij} = s_{ji} \quad \forall i, j \quad \text{mit} \quad i \neq j} \quad (\text{Reziprozität}) \quad (5.39)$$

<sup>2</sup> Der aufmerksame Leser stellt fest, dass wir diesen Zusammenhang bereits im Smith-Chart-Diagramm haben erkennen können (Abschnitt 3.1.11). Ein Punkt im Smith-Chart repräsentiert einen Reflexionsfaktor und gleichzeitig eine normierte Impedanz. Wenn wir im Smith-Chart einen Punkt an der reellen (horizontalen) Achse spiegeln, so erhalten wir einen konjugiert-komplexen Reflexionsfaktor und ebenso eine konjugiert-komplexe (normierte) Impedanz.

Ein reziprokes Verhalten ergibt sich automatisch bei *passiven* Mehrtoren, wenn nur isotrope (richtungsunabhängige) Materialien verwendet werden. Filter aus konzentrierten Bauelementen und Leitungen sind stets reziprok. Typische nichtreziproke Schaltungen sind Verstärker (Verwendung aktiver Komponenten) und Zirkulatoren (Verwendung anisotroper magnetischer Materialien). Anisotropes Verhalten kann sich zudem bei Satellitenfunkverbindungen ergeben, falls Wellenausbreitung im anisotropen Plasma der Ionosphäre auftritt.

#### 5.4.4 Symmetrie

Eine Schaltung ist symmetrisch, wenn bei Reziprozität auch die Gleichheit aller Reflexionsfaktoren gegeben ist.

$$\boxed{s_{ii} = s_{jj} \quad \forall i, j} \quad \text{und} \quad \boxed{s_{ij} = s_{ji} \quad \forall i, j \quad \text{mit} \quad i \neq j} \quad (\text{Symmetrie}) \quad (5.40)$$

Ein symmetrisches Schaltungsverhalten erreicht man zum Beispiel durch einen symmetrischen Schaltungsaufbau.

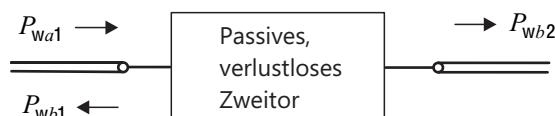
#### 5.4.5 Verlustlosigkeit bei Passivität

Ob eine passive Schaltung verlustlos ist, lässt sich anhand der Streumatrix leicht beurteilen. Die Streumatrix muss die Unitaritätsbedingung erfüllen.

$$\boxed{\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S}^* = \mathbf{E}} \quad (\text{Unitaritätsbedingung}) \quad (5.41)$$

Die transponierte Streumatrix wird dabei mit der konjugiert-komplexen Streumatrix multipliziert und es ergibt sich die Einheitsmatrix. Die Einheitsmatrix besitzt in der Hauptdiagonalen Einsen und alle anderen Matrixelemente verschwinden. Für ein Zweitor bedeutet dies:

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11}^* & s_{12}^* \\ s_{21}^* & s_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (5.42)$$



**Bild 5.6** Passives, verlustloses Zweitor in eindpoliger Darstellung

In der Unitaritätsbedingung ist eine wichtige Aussage für die Beträge der Streuparameter enthalten, die sich auch aus dem Energieerhaltungssatz ableiten lässt. Betrachten wir die Schaltung in Bild 5.6. Aufgrund der Passivität und Verlustfreiheit des Zweitors muss die Summe der zu- und ablaufenden Wirkleistungen gleich sein.

$$P_{wb1} + P_{wb2} = P_{wa1} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{wb1}}{P_{wa1}} + \frac{P_{wb2}}{P_{wa1}} = 1 \quad (5.43)$$

Nutzen wir die Zusammenhänge in den Gleichungen (5.24) und (5.25), so erhalten wir:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \quad (\text{Verlustloses Zweitor}). \quad (5.44)$$

Nach den gleichen Überlegungen erhalten wir bei Speisung über Tor 2:

$$|s_{22}|^2 + |s_{12}|^2 = 1 \quad (\text{Verlustloses Zweitor}). \quad (5.45)$$

### Beispiel 5.2 Passives, verlustloses Zweitor

Gemessen wird an einem passiven, verlustlosen Zweitor ein Betrag des Eingangsreflexionsfaktors von  $|s_{11}| = 0,3$  (Reflexionsdämpfung  $RL = 10,46$  dB). Der Betrag des Transmissionsfaktors ist dann nach Gleichung (5.44)  $|s_{21}| = 0,954$  (Einfügedämpfung  $IL = 0,41$  dB). Es werden also 9% der zulaufenden Wirkleistung reflektiert und 91% der zulaufenden Wirkleistung transmittiert. ■

### 5.4.6 Rückwirkungsfreiheit

Ein Zweitor nennt man *rückwirkungsfrei* bzw. *unilateral*, falls einer der Transmissionsfaktoren verschwindet, der andere aber ungleich null ist.

$$s_{12} = 0 \quad \text{und} \quad s_{21} \neq 0 \quad (\text{Rückwirkungsfreiheit}) \quad (5.46)$$

Diese Eigenschaft findet man bei einer idealen Richtungsleitung sowie näherungsweise bei Verstärkern.

### 5.4.7 Besondere Bedingungen bei Dreitoren

Aus den obigen Beziehungen kann man herleiten, dass bei einem passiven Dreitor die drei Bedingungen

- Verlustlosigkeit,
- allseitige Anpassung sowie
- Reziprozität

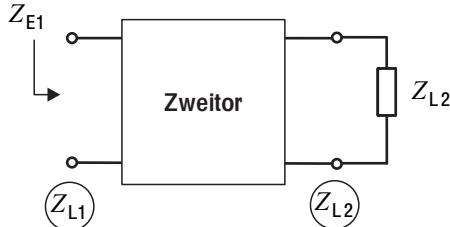
nicht gleichzeitig zu erfüllen sind (siehe Übung 5.8). Auf eine der Eigenschaften muss verzichtet werden. Unter Verzicht auf die Reziprozität kann man einen allseitig angepassten, verlustlosen Zirkulator aufbauen (siehe Abschnitt 6.6). Verzichtet man auf die Verlustlosigkeit, so kann man einen allseitig angepassten, reziproken Leistungsteiler entwerfen (siehe Abschnitt 6.7).

## ■ 5.5 Berechnung von Streumatrizen

Die Elemente der Streumatrix  $\mathbf{S}$  lassen sich ebenso wie die Elemente der Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$  nach den bekannten Regeln der Netzwerkanalyse (z.B. Knotenpotentialverfahren) berechnen. Bei der Analyse müssen zur Berechnung der Streuparameter alle Tore definitionsgemäß mit den Torwiderständen  $Z_{Li}$  reflexionsfrei abgeschlossen sein.

### 5.5.1 Reflexionsfaktoren

Reflexionsfaktoren traten bereits im Zusammenhang mit der Leitungstheorie auf und die dort gefundenen Zusammenhänge können wir direkt übernehmen.



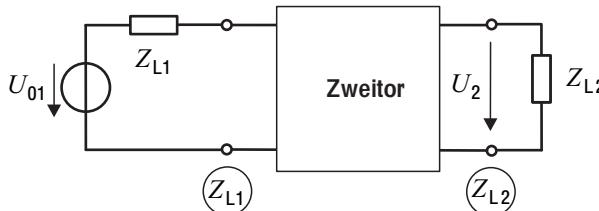
**Bild 5.7** Zur Berechnung des Reflexionsfaktors  $s_{11}$

Die Reflexionsfaktoren werden aus der Eingangsimpedanz  $Z_{Ei}$  am Tor  $i$  und dem Torwiderstand  $Z_{Li}$  berechnet. Alle weiteren Tore müssen mit ihren jeweiligen Torwiderständen abgeschlossen sein (siehe Bild 5.7).

$$s_{ii} = \frac{Z_{Ei} - Z_{Li}}{Z_{Ei} + Z_{Li}} \quad (\text{Berechnungsformel Reflexionsfaktor}) \quad (5.47)$$

### 5.5.2 Transmissionsfaktoren

Für die Berechnung der Transmission von Tor  $i$  zu Tor  $j$  fügen wir am Tor  $i$  eine Spannungsquelle  $U_{0i}$  mit dem Innenwiderstand  $Z_{Li}$  ein (Bild 5.8).



**Bild 5.8** Zur Berechnung des Transmissionsfaktors  $s_{21}$

Der Transmissionsfaktor  $s_{ji}$  kann dann nach folgender Formel berechnet werden.

$$s_{ji} = \frac{2U_j}{U_{0i}} \sqrt{\frac{Z_{Li}}{Z_{Lj}}} \quad (\text{Berechnungsformel Transmissionsfaktor}) \quad (5.48)$$

#### Beispiel 5.3 Streuparameter eines Zweitors mit einer Querimpedanz

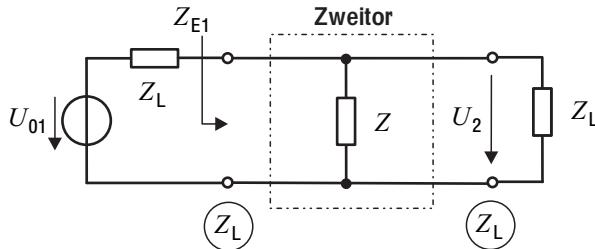
Gegeben ist die in Bild 5.9 gezeigte Schaltung mit einer Querimpedanz  $Z$  und den Torwiderständen  $Z_L$ . Den Reflexionsfaktor  $s_{11}$  können wir nach Gleichung (5.47) aus der Eingangsimpedanz  $Z_{E1}$  berechnen.

$$Z_{E1} = Z \parallel Z_L = \frac{Z \cdot Z_L}{Z + Z_L} \quad (5.49)$$

Hiermit erhalten wir über Gleichung (5.47)

$$s_{11} = \frac{Z_{E1} - Z_L}{Z_{E1} + Z_L} = \frac{ZZ_L - Z_L(Z + Z_L)}{ZZ_L + Z_L(Z + Z_L)} = \frac{-Z_L}{2Z + Z_L} = s_{22} . \quad (5.50)$$

Aus Gründen der Symmetrie ergibt sich für den Ausgangsreflexionsfaktor  $s_{22}$  der gleiche Wert.



**Bild 5.9** Schaltung mit einer Querimpedanz  $Z$

Den Transmissionsfaktor berechnen wir über Gleichung (5.48). Hierzu bestimmen wir zunächst das Spannungsverhältnis  $U_2/U_{01}$  nach der Spannungsteilerregel.

$$\frac{U_2}{U_{01}} = \frac{Z||Z_L}{Z_L + Z||Z_L} = \frac{ZZ_L}{Z_L(Z + Z_L) + ZZ_L} = \frac{Z}{2Z + Z_L} \quad (5.51)$$

Damit wird der Vorwärtstransmissionsfaktor:

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \sqrt{\frac{Z_L}{Z_L}} = \frac{2Z}{2Z + Z_L} = s_{12} . \quad (5.52)$$

Aus Gründen der Reziprozität gilt  $s_{12} = s_{21}$ . Insgesamt lautet die Streumatrix:

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{2Z + Z_L} \begin{pmatrix} -Z_L & 2Z \\ 2Z & -Z_L \end{pmatrix}} \quad (\text{Streumatrix einer Querimpedanz } Z). \quad (5.53)$$

Es ist guter Stil, ein selbst berechnetes Ergebnis anhand von einfachen Spezialfällen zu überprüfen. Betrachten wir zunächst den Fall  $Z \rightarrow \infty$ , d.h. wir ersetzen die Querimpedanz durch einen Leerlauf. Die Streumatrix wird in diesem Fall zu

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (5.54)$$

Da es sich bei dem Zweitor um eine einfache Durchverbindung handelt, treten keine Reflexionen auf und die Transmissionsfaktoren sind eins.

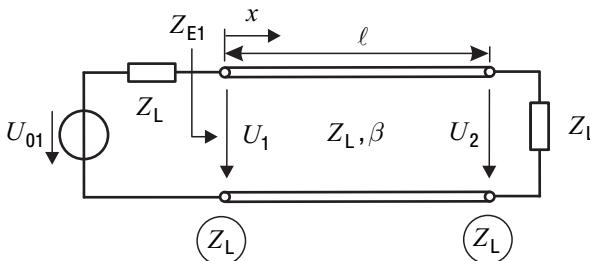
Als zweiten Spezialfall wählen wir  $Z = 0$ , ersetzen die Querimpedanz also durch einen Kurzschluss. Für die Streumatrix  $\mathbf{S}$  erhalten wir nun

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (5.55)$$

Da an den Toren Kurzschlüsse sichtbar werden, ist der Reflexionsfaktor  $r = -1$  (vgl. Abschnitt 3.1.10). Die Tore sind erwartungsgemäß voneinander entkoppelt, die Transmissionsfaktoren verschwinden. ■

### Beispiel 5.4 Streuparameter einer verlustlosen, angepassten Leitung

Wir betrachten nun eine verlustlose Leitung der Länge  $\ell$ , die beidseitig mit ihrem Leitungswellenwiderstand abgeschlossen ist (Bild 5.10).



**Bild 5.10** Verlustlose und angepasste Leitung

Den Eingangsreflexionsfaktor  $s_{11}$  können wir nach Gleichung (5.47) aus der Eingangsimpedanz  $Z_{E1}$  berechnen. Da nach Kapitel 3 der Eingangswiderstand einer angepassten Leitung gleich ihrem Leitungswellenwiderstand ist, gilt:

$$s_{11} = \frac{Z_{E1} - Z_L}{Z_{E1} + Z_L} = 0 = s_{22} . \quad (5.56)$$

Aus Gründen der Symmetrie verschwindet auch der Ausgangsreflexionsfaktor  $s_{22}$ .

Bei der Berechnung des Transmissionsfaktors  $s_{21}$  gehen wir von Gleichung (5.48) aus. Um das Spannungsverhältnis  $U_2/U_01$  zu bestimmen, nutzen wir geschickt unsere Kenntnisse aus dem dritten Kapitel. Bei einer abgeschlossenen Leitung breitet sich nur eine *rein forschreitende Welle* von der Quelle zur Last aus. Wenn wir den Ursprung des Koordinatensystems ( $x = 0$ ) an den Anfang der Leitung setzen, können wir für die Spannungswelle folgende Formel angeben:

$$U(x) = U_1 e^{-j\beta x} . \quad (5.57)$$

Wir finden einen Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung  $U_1$  und der Ausgangsspannung  $U_2$ , wenn wir für die Koordinate  $x$  die Leitungslänge  $\ell$  einsetzen.

$$U_2 = U(\ell) = U_1 e^{-j\beta\ell} \quad (5.58)$$

Nun benötigen wir nur noch einen Zusammenhang zwischen der Spannung  $U_{01}$  und der Spannung  $U_1$ . Da die Eingangsimpedanz der angeschlossenen Leitung gerade eben dem Leitungswellenwiderstand entspricht, wird mit der Spannungsteilerregel:

$$U_1 = \frac{U_{01}}{2} . \quad (5.59)$$

Aus den obigen Überlegungen und der Reziprozität der Schaltung folgt für die Transmissionsfaktoren:

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \sqrt{\frac{Z_L}{Z_L}} = e^{-j\beta\ell} = s_{12} . \quad (5.60)$$

Insgesamt lautet die Streumatrix der verlustlosen angepassten Leitung:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell} \\ e^{-j\beta\ell} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Streumatrix einer angepassten und verlustlosen Leitung}). \quad (5.61)$$

■

Fügt man ein Stück angepasste und verlustlose Leitung ein, so erfährt die durchlaufende Welle lediglich eine Phasendrehung. Es tritt keine Reflexion auf. Die gesamte Leistung wird übertragen, da der Betrag der Transmissionsfaktoren gleich eins ist.

### 5.5.3 Umnormierung einer Streumatrix auf andere Torwiderstände

Streumatrizen geben das Betriebsverhalten einer Schaltung wieder, wenn die Anschlussimpedanzen den Torwiderständen entsprechen. Soll die Schaltung aber in einer anderen Umgebung (veränderte Anschlussimpedanzen) verwendet werden, so kann das Betriebsverhalten durch eine *Umnormierung der Streumatrix auf neue Torwiderstände* ermittelt werden.

Wir betrachten eine Streumatrix  $\mathbf{S}$  mit dem Torwiderstand  $Z_L$  an allen Toren. Wir wollen das Betriebsverhalten für den Fall ermitteln, dass nun ein neuer einheitlicher Torwiderstand  $Z_{L,\text{neu}}$  an allen Toren verwendet wird. Nach [Mich81] können wir die Umrechnung durch folgende Matrixoperation durchführen:

$$\mathbf{S}_{\text{neu}} = (\mathbf{S} - r\mathbf{E})(\mathbf{E} - r\mathbf{S})^{-1} \quad \text{mit} \quad r = \frac{Z_{L,\text{neu}} - Z_L}{Z_{L,\text{neu}} + Z_L}. \quad (5.62)$$

wobei  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix ist, die nur in der Hauptdiagonalen Einsen besitzt und ansonsten mit Nullen aufgefüllt ist.

Für ein Zweitor erhalten wir:

$$\mathbf{S}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} s_{11} - r & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} - r \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - rs_{11} & -rs_{12} \\ -rs_{21} & 1 - rs_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (5.63)$$

Offensichtlich muss nun zuerst die Inverse der zweiten Matrix ermittelt werden. Diese erhalten wir nach [Bron08] über den allgemeinen Zusammenhang

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T, \quad (5.64)$$

mit der Adjunkten  $A_{ij}$ , d.h. der mit dem Vorfaktor  $(-1)^{i+j}$  gewichteten Unterdeterminante zum Element  $a_{ij}$ . Die Unterdeterminante zum Element  $a_{ij}$  ist die Determinante der Matrix, die sich ergibt, wenn die Zeile  $i$  und die Spalte  $j$  aus der Ursprungsmatrix gestrichen werden. Nach Einsetzen erhalten wir für die umnormierte Matrix des Zweitores:

$$\mathbf{S}_{\text{neu}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} (s_{11} - r)(1 - rs_{22}) + rs_{12}s_{21} & s_{12}(1 - r^2) \\ s_{21}(1 - r^2) & (s_{22} - r)(1 - rs_{11}) + rs_{12}s_{21} \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Die Determinante lautet

$$\det \mathbf{A} = (1 - rs_{11})(1 - rs_{22}) - r^2 s_{12}s_{21} \quad . \quad (5.66)$$

Die Umrechnung zwischen verschiedenen Torimpedanzen lässt sich in modernen HF-Schaltungssimulatoren sehr komfortabel bewerkstelligen. Allgemeinere Formeln für unterschiedliche Bezugswiderstände an den Toren finden sich u.a. in [Heue09] und [Zink00].

### Beispiel 5.5 Umnormierung der Streumatrix eines Zweitors

Gegeben sei ein Zweitor mit einer Querimpedanz von  $Z = 75\Omega$  gemäß Bild 5.9. Die Torwiderstände betragen  $Z_L = 50\Omega$ . Nach Gleichung (5.53) erhalten wir

$$\mathbf{S}_{50\Omega} = \frac{1}{2Z + Z_L} \begin{pmatrix} -Z_L & 2Z \\ 2Z & -Z_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,75 & -0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \quad . \quad (5.67)$$

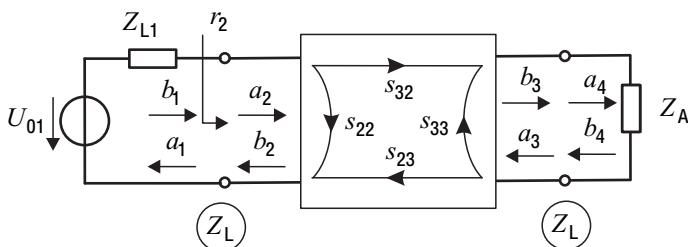
Wir wollen die Streumatrix auf einen anderen Torwiderstand von  $Z_{L,\text{neu}} = 100\Omega$  umrechnen. Hierzu setzen wir die Streuparameter in Gleichung (5.65) ein und verwenden die Größe  $r$  aus Gleichung (5.62).

$$\mathbf{S}_{100\Omega} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,6 \\ 0,6 & -0,4 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

Selbstverständlich ergibt sich in diesem einfachen Fall das gleiche Ergebnis, wenn wir die Größen  $Z = 75\Omega$  und  $Z_L = 100\Omega$  in Gleichung (5.53) einsetzen. ■

## 5.6 Signalflussmethode

Die Streumatrix verknüpft die zu- und ablaufenden Wellengrößen  $a$  und  $b$  an Ein- und Mehrtoren. Bei einer Verschaltung mehrerer Ein- und Mehrtore können die zwischen den inneren Toren hin- und rücklaufenden Wellen über Gleichungen miteinander verknüpft werden. Auf diese Art gelingt es, das Schaltungsverhalten des nach außen sichtbaren Ein- oder Mehrtores zu beschreiben. Es können dabei ganze Schaltungen inklusive Quellen untersucht werden. Bild 5.11 zeigt hierzu eine einfache Schaltung aus Quelle, Zweitor und Last.



**Bild 5.11** Berechnung von Hochfrequenzschaltungen mit Wellengrößen (Beispielschaltung: Zweitor mit Quelle und Last)

## 166 5 Streuparameter

---

Als Alternative zur Aufstellung eines Gleichungssystems bietet sich ein graphisches Verfahren an: die *Signalflussmethode*. Mit Hilfe einiger Regeln können die Wellengrößen oft schneller als über die Gleichungen miteinander verknüpft werden.

Wir wollen im Folgenden an einem Beispiel beide Wege kennenlernen. Zunächst benötigen wir aber die grundlegenden Kenntnisse der Signalflussdiagrammdarstellung.

Signalflussdiagramme sind eine graphische Darstellung der Verknüpfung von Wellengrößen durch Streuparameter. Die Wellengrößen  $a$  und  $b$  werden den Knoten zugeordnet und die Reflexions- und Transmissionsfaktoren stellen gerichtete Kanten dar.

Signale, die sich auf unterschiedlichen Wegen (entlang unterschiedlicher Kanten im Signalflussdiagramm) ausbreiten, können nach den in Bild 5.12 dargestellten Regeln zusammengefasst werden.

Bedeutung	Signalflussdiagramm	Gleichungen
Einfache Verbindung		$b = sa$
Parallele Verbindung		$b = s_x a + s_y a = (s_x + s_y) a$
Serielle Verbindung		$b = s_x s_y a$
Einfache Rückkopplung		$b = \frac{s_x}{1 - s_x s_y} a$

**Bild 5.12** Einfache Regeln für Signalflussdiagramme

Die ersten drei Regeln in Bild 5.12 sind unmittelbar einsichtig. Wichtig ist beim Signalflussdiagramm die Richtung des Pfeils an den Kanten und damit die Richtung der Signalübertragung. Die Gleichung  $b = sa$  ist damit im Sinne einer Zuweisung zu verstehen: Der Wert des Produktes aus  $a$  und  $s$  wird der Größe  $b$  zugeordnet. Ein Umstellen der Gleichung im Sinne von  $a = (1/s)b$  ist nicht erlaubt [Mich81].

Die Rückkopplungsregel kann schnell hergeleitet werden (siehe Übung 5.6) und entspricht dem aus der Regelungstechnik bekannten Zusammenhang bei rückgekoppelten Systemen. Hierbei ist  $V_V$  die Vorwärtsverstärkung bei offener Schleife und  $V_R$  die Ringverstärkung bei geschlossener Schleife.

$$V_{\text{ges}} = \frac{V_V}{1 - V_R} \quad (5.69)$$

Mit den obigen Regeln kann eine Vielzahl von Signalflussdiagrammen sehr schnell analysiert werden. Will man komplexere Signalflussdiagramme auswerten, so benötigt man die *Mason-Regel*. Eine Beschreibung dieser Regel finden wir zum Beispiel in [Mich81] und [Gron01]. Alternativ kann man natürlich auch über die Gleichungen gehen bzw. einen HF-

Schaltungssimulator verwenden. Im Folgenden betrachten wir zunächst die Signalflussdiagramme von isolierten Quellen sowie Ein-, Zwei-, Drei- und Viertoren, um im Anschluss die Signalflussmethode an einem Beispiel zu demonstrieren.

**Ersatzwellenquelle** Für die in Bild 5.13 gegebene Quelle aus idealer Spannungsquelle  $U_{01}$  und Innenimpedanz  $Z_{L1}$  kann eine Beschreibung mit Wellengrößen erfolgen. In Übung 5.5 werden wir diese Zusammenhänge herleiten. Wir wollen hier das Ergebnis vorwegnehmen und in Bild 5.13 wiedergeben. Die Größe  $b_{01}$  wird als Urwellenquelle bezeichnet und lässt erkennen, dass es sich um ein aktives Element handelt.

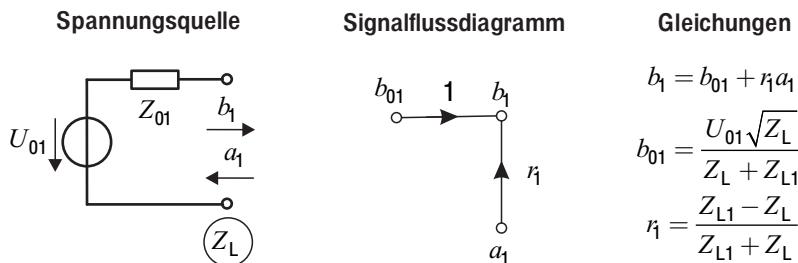


Bild 5.13 Signalflussdiagramm einer Spannungsquelle

**Eintor/Last** Das Signalflussdiagramm und die Gleichungen eines Eintores sind in Bild 5.14 zusammengestellt. Die Tornummer entnehmen wir aus der Beispielschaltung in Bild 5.11, also Nummer 4 für das Lasteintor mit dem Reflexionsfaktor  $r_A$ .

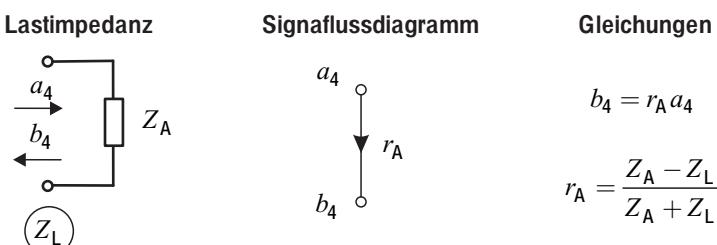


Bild 5.14 Signalflussdiagramm eines Eintores

**Zweitor** Das Signalflussdiagramm und die entsprechenden Gleichungen eines Zweitores sind in Bild 5.15 dargestellt. (Tornummern gemäß Beispielschaltung in Bild 5.11.)

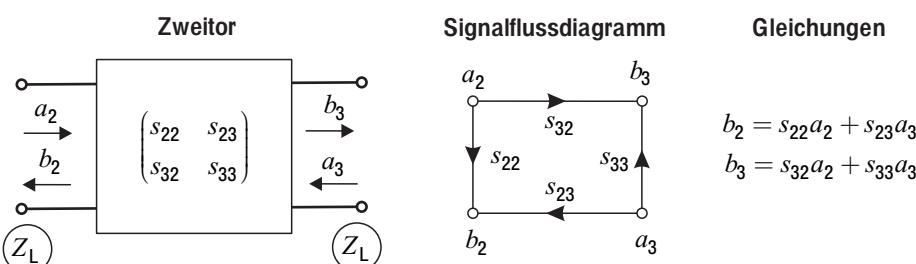


Bild 5.15 Signalflussdiagramm eines Zweitores

**Dreitor** Das Signalflussdiagramm und die entsprechenden Gleichungen eines Dreitors sind in Bild 5.16 dargestellt. Ein Dreitor besitzt neun Streuparameter.

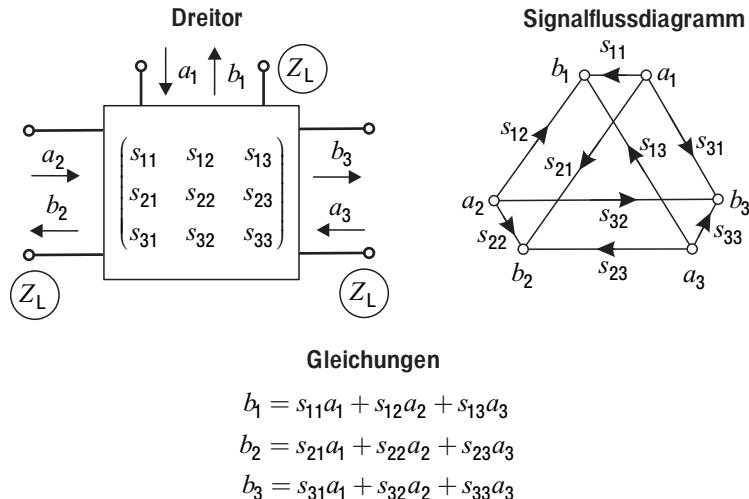


Bild 5.16 Signalflussdiagramm eines Dreitors

**Viertor** Das Signalflussdiagramm und die entsprechenden Gleichungen eines Viertores sind in Bild 5.17 dargestellt. Ein Viertor besitzt 16 Streuparameter.

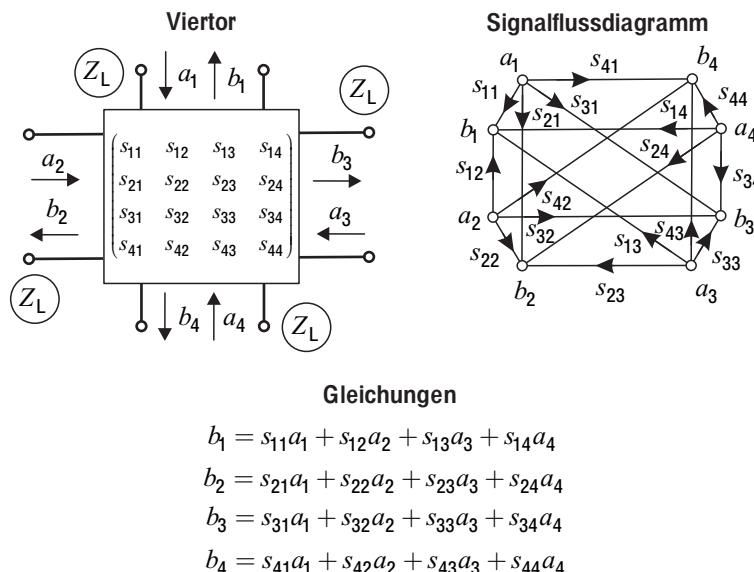


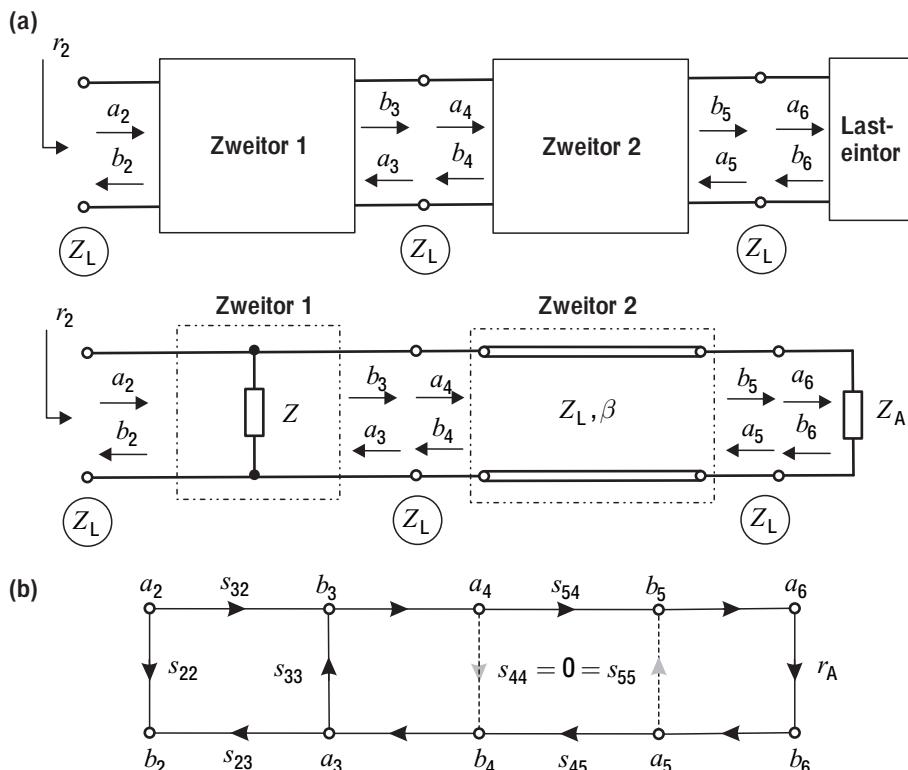
Bild 5.17 Signalflussdiagramm eines Viertores

### Beispiel 5.6 Schaltung mit einer angepassten Leitung und einer Querimpedanz

Wir wollen in diesem Beispiel die Kettenbeschaltung zweier Zweitor und den Abschluss mit einer Last gemäß Bild 5.18 betrachten. Das erste Zweitor mit der Streumatrix  $\mathbf{S}_1$  sei eine Querimpedanz und das zweite Zweitor mit der Streumatrix  $\mathbf{S}_2$  eine angepasste Leitung. Für beide Fälle haben wir bereits die Streumatrizen berechnet.

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_1 &= \begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2Z + Z_L} \begin{pmatrix} -Z_L & 2Z \\ 2Z & -Z_L \end{pmatrix} \\ \mathbf{S}_2 &= \begin{pmatrix} s_{44} & s_{45} \\ s_{54} & s_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell} \\ e^{-j\beta\ell} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.70)$$

Mit Hilfe des *Gleichungssystems* und alternativ mit der *Signalflussmethode* wollen wir einen Ausdruck für den Reflexionsfaktor  $r_2$  ermitteln.



**Bild 5.18** Beispiel zum Signalflussdiagramm: Schaltung mit Querimpedanz, angepasster verlustloser Leitung und Last

Zunächst stellen wir alle relevanten Gleichungen auf, beginnend bei der Last:

$$b_6 = r_A a_6 \quad (5.71)$$

$$a_5 = b_6 \quad \text{und} \quad a_6 = b_5 \quad (5.72)$$

$$b_5 = a_4 s_{54} \quad \text{und} \quad b_4 = a_5 s_{45} \quad (5.73)$$

$$a_3 = b_4 \quad \text{und} \quad a_4 = b_3 \quad (5.74)$$

$$b_2 = s_{22} a_2 + s_{23} a_3 \quad (5.75)$$

$$b_3 = s_{32} a_2 + s_{33} a_3 \quad . \quad (5.76)$$

Setzen wir die Gleichungen ineinander ein und bilden den Quotienten  $b_2/a_2$ , so erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung:

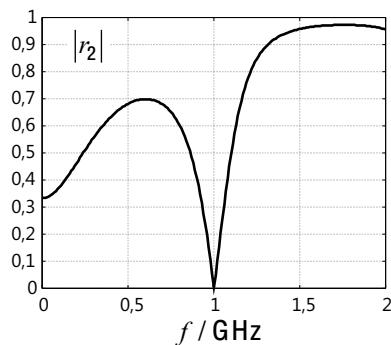
$$\boxed{r_2 = s_{22} + s_{32} s_{23} \frac{r_A s_{45} s_{54}}{1 - s_{33} r_A s_{45} s_{54}}} \quad . \quad (5.77)$$

Diese Formel können wir direkt erhalten, wenn wir das Signalflussdiagramm betrachten. Es gibt zwei Wege, auf denen die zulaufende Wellengröße  $a_2$  zur ablaufenden Wellengröße  $b_2$  gelangt.

1. Direkter Weg über den Reflexionsfaktor  $s_{22}$ .
2. Zusätzlicher Weg über  $s_{32}$  zur Schleife und zurück über  $s_{23}$ . Die Schleife besteht aus den Faktoren  $s_{33}$ ,  $s_{54}$ ,  $s_{45}$  und  $r_A$ . (Aufgrund der Anpassung der Leitung verschwinden  $s_{44}$  und  $s_{55}$ .) Die Schleife können wir berücksichtigen, indem wir die Vorwärtsverstärkung  $V_V = s_{45} r_A s_{54}$  und die Ringverstärkung  $V_R = s_{33} s_{45} r_A s_{54}$  in Gleichung (5.69) einsetzen.

Wir gelangen also unmittelbar zu dem Ergebnis, welches wir auch über das Gleichungssystem berechnet haben:

$$\boxed{r_2 = s_{22} + s_{32} s_{23} \frac{V_V}{1 - V_R} = s_{22} + s_{32} s_{23} \frac{r_A s_{45} s_{54}}{1 - s_{33} r_A s_{45} s_{54}}} \quad . \quad (5.78)$$



**Bild 5.19** Darstellung des Ergebnisses (Betrag des Reflexionsfaktors)

Wir schauen uns nun anhand eines Zahlenbeispiels (Bild 5.19) an, welche Funktion die Schaltung übernehmen kann. Für die Querimpedanz wählen wir eine Kapazität  $C = 5 \text{ pF}$  und die Leitung habe einen Leitungswellenwiderstand von  $Z_L = 50\Omega$  bei einer Leitungslänge von  $\ell = 0,363\lambda$  (bei einer Frequenz von 1 GHz). Die Lastimpedanz

betrage  $Z_A = 100\Omega + j\omega L$  mit der Induktivität  $L = 15,92 \text{ nH}$ . Unser Ergebnis werten wir mit einem mathematischen Tool (*MATLAB* [Matl10] von *MathWorks*) aus und stellen die Ergebnisse in Bild 5.19 dar.

Die Schaltung stellt für die Frequenz 1 GHz eine Anpassung der Lastimpedanz an die Systemimpedanz von  $50\Omega$  dar. Der Reflexionsfaktor verschwindet für diese Frequenz. Das Thema Anpassschaltungen wird detailliert in Abschnitt 6.3 behandelt.

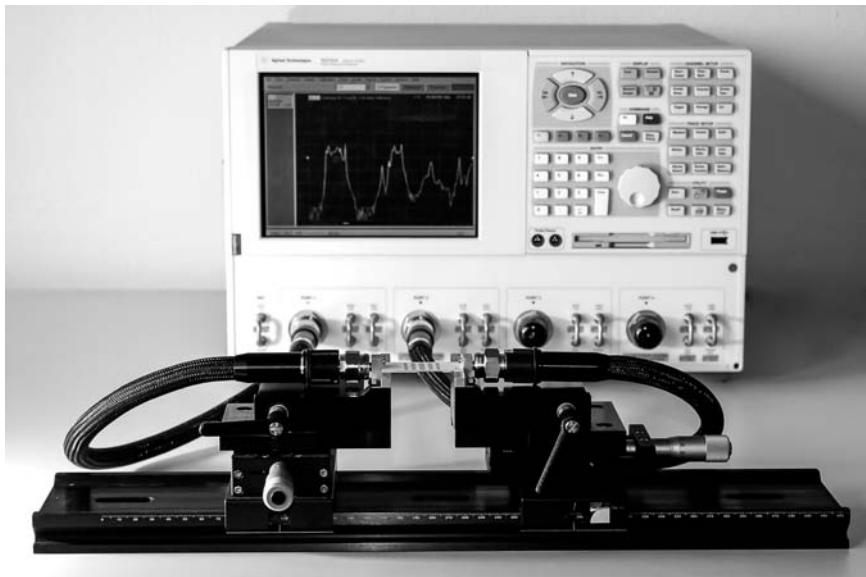
Für sehr niedrige Frequenzen ( $f \rightarrow 0$ ) nähert sich der Wert des Eingangsreflexionsfaktors dem Wert  $1/3$ , da hier die Kapazität zu einem Leerlauf wird und die Leitung elektrisch kurz ist. Zudem verschwindet der induktive Anteil der Last. Als Eingangswiderstand der Schaltung ergibt sich schließlich ein Wert von  $Z_E(f \rightarrow 0) = 100\Omega$  und damit für den Reflexionsfaktor

$$r_2(f \rightarrow 0) = \frac{Z_E(f \rightarrow 0) - Z_L}{Z_E(f \rightarrow 0) + Z_L} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3} \quad . \quad (5.79)$$

■

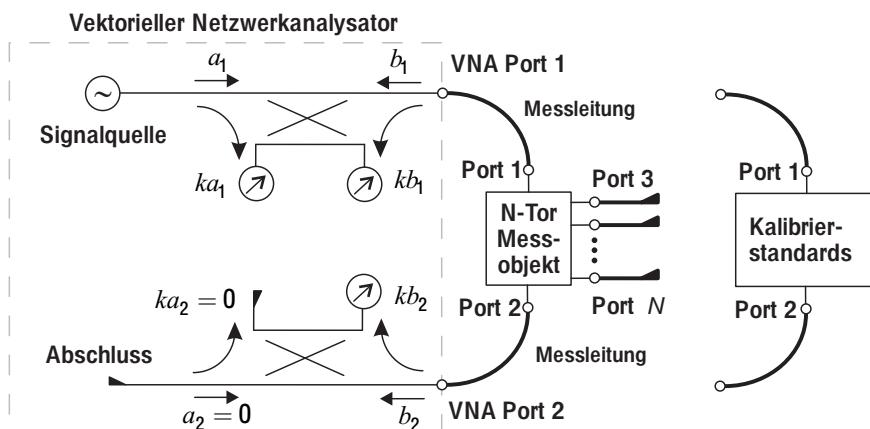
## 5.7 Messung von Streuparametern

Die Streuparameter von HF-Bauelementen und Schaltungen können heute komfortabel und mit hoher Genauigkeit durch *vektorelle Netzwerkanalysatoren* (VNA) gemessen werden [Thum98] [Schi99]. Bild 5.20 zeigt einen solchen Netzwerkanalysator, an den über Leitungen eine Messobjekthalterung (*Test-Fixture*) zur Vermessung eines Mikrostreifenfilters angeschlossen ist.



**Bild 5.20** Vektorieller Netzwerkanalysator Agilent N5230A (für Messungen von 300 kHz bis 20 GHz) und *Test-Fixture* mit Mikrostreifenfilter

Ein vektorieller Netzwerkanalysator verfügt üblicherweise in der Grundausstattung über zwei koaxiale Messtore mit Torwiderständen von  $Z_0 = 50\Omega$ . An diese zwei Tore wird das Messobjekt (DUT = *Device Under Test*) angeschlossen. Hat das Messobjekt mehr als zwei Tore, so sind alle nicht angeschlossenen Tore mit dem Bezugswiderstand (Wellensumpf) abzuschließen wie in Bild 5.21 gezeigt. Die Messung wird über eine komfortable Bedienoberfläche gestartet und von einer zentralen Software gesteuert. Zur Vermessung von Streuparametern in einem vorgegebenen Frequenzband wird durch einen Signalgenerator ein Sinussignal erzeugt, welches zeitlich in der Frequenz ansteigt. Das Signal wird über einen Richtkoppler dem Messobjekt zugeführt. Dieses Signal wird vom Messobjekt teilweise zum Messtor 1 zurückreflektiert und teilweise zum Messtor 2 transmittiert.



**Bild 5.21** Prinzipieller Aufbau eines vektoriellen Netzwerkanalysators und Anschluss eines *N*-Tores

An Messtor 1 koppelt der Richtkoppler einen kleinen Anteil der hin- und rücklaufenden Wellen aus und erlaubt so die Trennung von zulaufenden und ablaufenden Wellengrößen. Am Messtor 2 wird ein Anteil der transmittierten Welle über den Richtkoppler ausgekoppelt und gemessen.

Nach der Messung sind der Eingangsreflexionsfaktor  $s_{11} = b_1/a_1$  und der Vorwärtstransmissionsfaktor  $s_{21} = b_2/a_1$  von Tor 1 zu Tor 2 bekannt. Bei einem Zweitor besteht die Streumatrix aus vier Elementen. Der Ausgangsreflexionsfaktor  $s_{22}$  und der Rückwärtstransmissionskoeffizient  $s_{12}$  werden gemessen, indem Tor 1 und Tor 2 ihre Rolle tauschen. Dies kann von der Software automatisch durchgeführt werden. Damit ist nun bei einem Zweitor die gesamte Streumatrix bekannt. Soll ein Drei- oder Mehrtor vermessen werden, so können durch mehrere Messungen leicht alle Streuparameter bestimmt werden.

Für genaue Messungen ist es notwendig, den Netzwerkanalysator zu *kalibrieren*. Es gibt eine Reihe unterschiedlicher Verfahren, die alle hochgenaue Standards verwenden. Durch eine Vermessung der Standards vor der Vermessung des Messobjektes kann der Einfluss der nicht-idealnen Zuleitungen und Stecker zwischen dem VNA und dem Messobjekt herausgerechnet werden. Für die Phasen werden zudem eindeutige Referenzebenen geschaffen.

Ein einfaches Kalibrierverfahren (SOLT) verwendet zum Beispiel Kurzschlüsse (*Short*), Leerläufe (*Open*), angepasste Abschlüsse (*Load*) und Durchverbindungen (*Through*). Die Kalibrierung ist zudem wichtig, wenn vom koaxialen Leitungssystem der Messtore auf andere Leitungssysteme (z.B. Mikrostreifenleitungen) übergegangen wird.

Weitere Hinweise zum Aufbau von Netzwerkanalysatoren und zu unterschiedlichen Kalibrierverfahren finden sich in [Thum98]. Dort wird sehr anschaulich dargestellt, wie die hochfrequenten Signale im Netzwerkanalysator durch Synthesizer, Mischer, Filter und Detektoren verarbeitet werden.

Messergebnisse von Streuparametern können in *standardisierten Dateiformaten* (z.B. *Touchstone-SnP*-Datenformat) auf Datenträgern abgelegt werden, so dass die Ergebnisse in *HF-Schaltungssimulatoren* für den Entwurf von weiteren Schaltungsteilen (z.B. Anpassschaltungen) verwendet werden können. Ein Beispiel für eine gemessene Zweitortstreuparameterdatei (Dateiname: „\*.s2p“) findet sich in Bild 5.22.

```
!Agilent Technologies,N5230A,MY12345678,A.00.00
!Date: Saturday, August 18, 2012 13:25:40
!Correction: S11(Full 2 Port(1,2)) S21(Full 2 Port(1,2)) S12(Full 2 Port(1,2)) S22(Full 2 Port(1,2))
!S2P File: Measurements: S11, S21, S12, S22:
# Hz S dB R 50
8000000000 -7.068530e-001 -1.088347e+002 -5.033566e+001 -9.525459e+001
-5.119051e+001 -9.444051e+001 -6.366544e-001 -1.155149e+002
8022500000 -7.183312e-001 -1.117752e+002 -5.052730e+001 -1.052149e+002
-5.108871e+001 -9.723354e+001 -6.364053e-001 -1.187093e+002
...
12477500000 -6.654899e-001 4.224392e+001 -3.169779e+001 1.142805e+002
-3.153713e+001 1.160675e+002 -8.575924e-001 3.742066e+001
12500000000 -6.905157e-001 3.936354e+001 -3.129497e+001 1.095876e+002
-3.115040e+001 1.089006e+002 -8.625705e-001 3.447514e+001
```

**Bild 5.22** Beispiel zum *Touchstone-SnP*-Datenformat

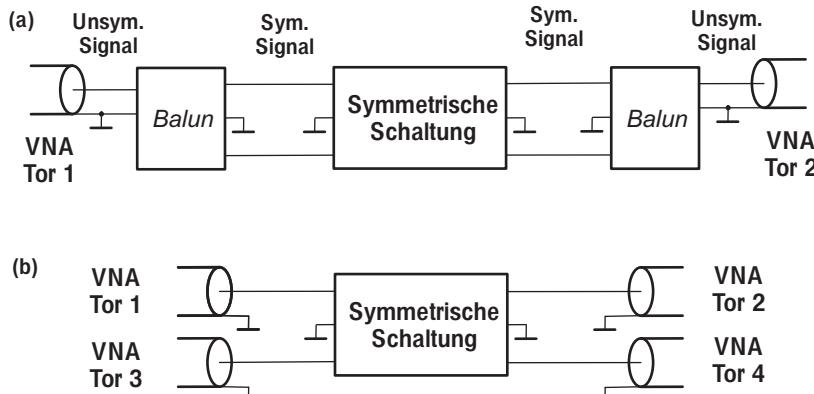
Bei den ersten vier Zeilen des Textes in Bild 5.22 handelt es sich um Kommentarzeilen, die mit einem Ausrufezeichen beginnen und Hinweise auf den verwendeten Netzwerkanalysator, Datum, Kalibrierung und die gemessenen Streuparameter (in diesem Falle eine vollständige Zweitormessung:  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{21}$ ,  $s_{22}$ ) liefern. Die fünfte Zeile beginnt mit einem Doppelkreuz (#) und bezeichnet das Format für die folgenden Daten: Die Frequenz ist in Hertz (Hz) angegeben und die Streuparameter werden nach Betrag (in dB) und Phase (in Grad)<sup>3</sup> aufgeführt. Die Systemimpedanz beträgt  $R = 50\Omega$ . Alle nachfolgenden Zeilen bestehen aus neun Spalten und enthalten nach der Angabe der Frequenz die vier komplexen Streuparameter  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{21}$ ,  $s_{22}$ .

Im Bereich der Kommunikationstechnik werden verstärkt Komponenten über symmetrische Dreileiterysteme (zum Beispiel gekoppelte Mikrostreifenleitungen) gespeist. Auf einem solchen Leitungssystem können sich Gegentakt- (*Differential-mode*-) und Gleichtakt- (*Common-mode*-) Signale ausbreiten. Die kommerziellen Netzwerkanalysatoren besitzen nun unsymmetrische (koaxiale) Messtore.

Mit Hilfe von *Symmetriergliedern* (*Balun* = *Balanced unbalanced*) kann das differentielle Verhalten eines solchen Zweitores ermittelt werden (Bild 5.23a). Symmetrierglieder werden in Abschnitt 6.11) behandelt. Über das Gleichtaktverhalten bekommen wir so aber keine Infor-

<sup>3</sup> Steht statt des *Flags* „dB“ das Kürzel „RI“, so werden die Streuparameter mit Real- und Imaginärteil gelistet. Das Flag „MA“ steht für die Angabe der Werte mit Betrag (linear) und Phase (in Grad).

mation. Mit Hilfe eines 4-Tor-Netzwerkanalysators (Bild 5.23b) kann das Verhalten von Gleich- und Gegentaktgrößen über *Mixed-mode*-Parameter beschrieben werden [Agil02] [Heue09]. Auf diese Art kann auch die bei nichtidealen Schaltungen immer vorhandene *Modenkonversion* ermittelt werden, d.h. die gegenseitige Beeinflussung von Gegen- und Gleichtaktmode.



**Bild 5.23** Messung von symmetrischen Komponenten: (a) mit einem 2-Tor-Netzwerkanalysator und Baluns sowie (b) mit einem 4-Tor-Netzwerkanalysator

## ■ 5.8 Übungsaufgaben

### Übung 5.1

Gegeben sei folgende Streumatrix eines Zweitors:

$$\mathbf{S}_{50\Omega} = \begin{pmatrix} 5/13 & j12/13 \\ j12/13 & 5/13 \end{pmatrix} . \quad (5.80)$$

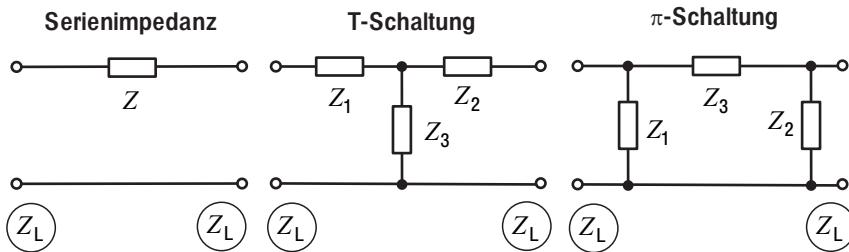
Die Torimpedanzen seien  $Z_L = 50\Omega$ . Welche Eigenschaften besitzt das Zweitor (Anpassung, Reziprozität, Symmetrie, Verlustlosigkeit)? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie die Reflexionsdämpfung ( $RL$ ) und die Einfügedämpfung ( $IL$ ). Rechnen Sie die Streumatrix um auf Torimpedanzen von  $Z_{L,\text{neu}} = 100\Omega$ .

### Übung 5.2

An einer Antenne wird mit einem vektoriellen Netzwerkanalysator (Systemimpedanz  $Z_0 = 50\Omega$ ) ein Reflexionsfaktor von  $r_A = 0,4 e^{-j20^\circ}$  gemessen. Wie groß ist die Eingangsimpedanz der Antenne? Die Antenne wird nun an ein Kabel mit einem Leitungs-wellenwiderstand von  $Z_L = 75\Omega$  angeschlossen und mit einer zulaufenden Wirkleistung von  $P_{wa} = 1\text{ W}$  gespeist. Wie groß sind die reflektierte und die von der Antenne aufgenommene Leistung?

**Übung 5.3**

Berechnen Sie allgemein die Streuparameter für eine Serienimpedanz, eine T- und eine  $\pi$ -Schaltung nach Bild 5.24.

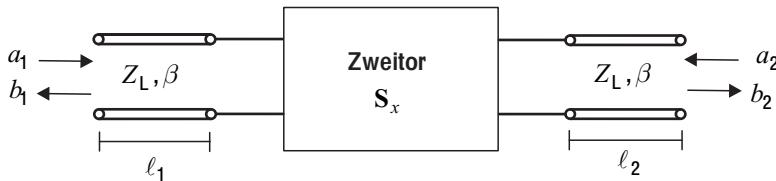


**Bild 5.24** Serienimpedanz, T- und  $\pi$ -Schaltung

Als Bezugsimpedanz verwenden Sie  $Z_L$ .

**Übung 5.4**

In einer Kettenschaltung (Bild 5.25) liegt zwischen zwei angepassten Leitungen ein eingebettetes Zweitor  $S_x$ .



**Bild 5.25** Zwischen zwei Leitungen eingebettetes Zweitor

Für alle Tore gelten die gleichen Torwiderstände  $Z_L$ . Die Streumatrizen lauten:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell_1} \\ e^{-j\beta\ell_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell_2} \\ e^{-j\beta\ell_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

und

$$S_x = \begin{pmatrix} s_{x,11} & s_{x,12} \\ s_{x,21} & s_{x,22} \end{pmatrix}. \quad (5.82)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Signalflussdiagramms die Streumatrix  $S$  des resultierenden Gesamtzweitors. Kann aus einer Messung der Streuparameter des Gesamtzweitors auf einfache Art auf die Streumatrix  $S_x$  geschlossen werden, wenn die Leitungslängen  $\ell_1$  und  $\ell_2$  bekannt sind?

**Übung 5.5**

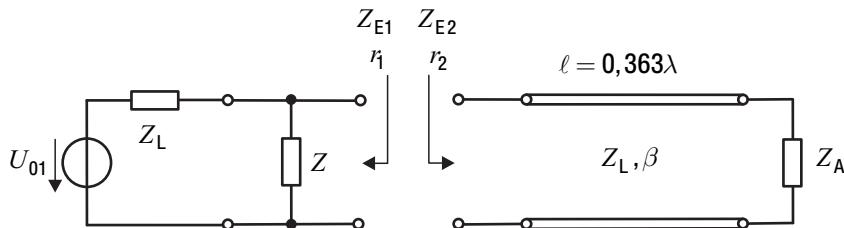
Leiten Sie die Zusammenhänge für die Ersatzwellenquelle in Bild 5.13 her.

**Übung 5.6**

Leiten Sie die Rückkopplungsregel für Signalflossdiagramme in Gleichung (5.69) her.

**Übung 5.7**

Gegeben ist die Schaltung nach Bild 5.26. Mit dieser Schaltung hatten wir uns schon in Beispiel 5.6 beschäftigt. Übernehmen Sie die Zahlenwerte aus diesem Beispiel. Diesmal wollen wir die Schaltung an der gezeigten Stelle auf trennen und die Größen  $Z_{E1}$  und  $Z_{E2}$  sowie  $r_1$  und  $r_2$  berechnen ( $f = 1 \text{ GHz}$ ).



**Bild 5.26** Schaltung zur Berechnung von Reflexionsfaktoren und Impedanzen

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis!

**Übung 5.8**

Zeigen Sie allgemein, dass ein Dreitor nicht gleichzeitig *allseitig angepasst, verlustlos* und *reziprok* sein kann.

# 6

# Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

In den nachfolgenden Abschnitten werfen wir zunächst einen kurzen Blick auf das Verhalten konzentrierter Bauelemente bei hohen Frequenzen. Dann wollen wir typische passive Hochfrequenzschaltungen betrachten, die aus konzentrierten Bauelementen und aus Leitungsstrukturen bestehen. Den Einsatz von Hochfrequenzschaltungssimulationen werden wir dabei an konkreten Beispielen demonstrieren.

## ■ 6.1 Ersatzschaltbilder konzentrierter Bauelemente

Reale konzentrierte Bauelemente wie Widerstände, Kondensatoren und Spulen können nur bei niedrigen Frequenzen und in erster Näherung durch ihre idealen Entsprechungen beschrieben werden. Bei höheren Frequenzen treten *parasitäre Eigenschaften* immer deutlicher hervor. Diese parasitären Eigenschaften entstehen durch Zuleitungsinduktivitäten, Anschlusskapazitäten und Verluste in den Anschlussleitungen sowie in den verwendeten dielektrischen und magnetischen Materialien.

Wir wollen in den folgenden Abschnitten *einfache, physikalisch motivierte Ersatzschaltbilder* für die drei wichtigen passiven Bauteile Widerstand, Kondensator und Spule kennenlernen. Die einfachen Ersatzschaltbilder verwenden jeweils drei ideale Bauelemente und erlauben es, das Verhalten realer konzentrierter Elemente auch bei höheren Frequenzen zu beschreiben.

Durch die Wahl noch *komplexerer Ersatzschaltbilder* [Detl12] kann der Gültigkeitsbereich zu höheren Frequenzen erweitert werden, allerdings wird die Bestimmung der Ersatzschaltbild-elemente (z.B. durch Messungen) immer aufwendiger. Weiterhin muss beachtet werden, dass bei höheren Frequenzen die Einbausituation in die Schaltung eine Rolle spielt, da die konzentrierten Elemente mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung treten.

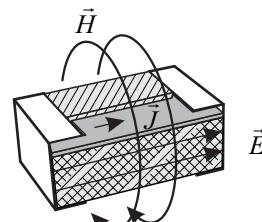
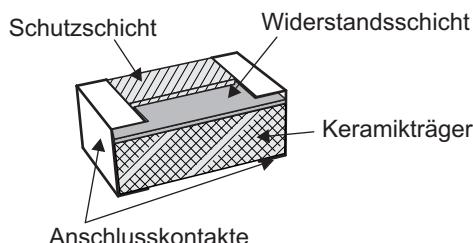
### 6.1.1 Widerstände

Widerstände gibt es in vielen unterschiedlichen Bauformen [Stin07]. Bei Hochfrequenzanwendungen werden in der Regel SMD (*Surface Mounted Device*)-Bauelemente verwendet [Heue09]. Der Name röhrt daher, dass die Bauteile ohne Anschlussdrähte direkt auf die planaren Leiterbahnen aufgebracht werden. Diese Anschlussweise zusammen mit der kleinen Bauform führt zu geringen parasitären Eigenschaften und macht die Bauteile bei höheren

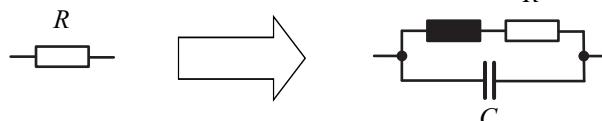
## 178 6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

Frequenzen nutzbar. Bild 6.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines SMD-Widerstandes: Auf einem keramischen, quaderförmigen Träger liegt eine dünne flächige Widerstandsschicht mit typischen Dicken bis zu  $50\text{ }\mu\text{m}$ . An den Enden befinden sich metallische Anschlusskontakte mit denen das Bauteil auf die Leiterbahn gelötet werden kann.

(a)



(b)



**Bild 6.1** (a) Aufbau eines SMD-Widerstandes und (b) Ersatzschaltbild

Typische SMD-Gehäuseabmessungen sind in Tabelle 6.1 zusammengetragen. Die Gehäusebezeichnungen bestehen aus vier Ziffern, wobei die ersten beiden Ziffern die Länge in Einhundertstel-Inch (entspricht  $0,254\text{ mm}$ ) angeben. Die letzten beiden Ziffern geben entsprechend die Breite an. Die Werte sind mit gewissen Toleranzen behaftet, die in der Tabelle aber nicht aufgeführt sind.

**Tabelle 6.1** Gehäusebezeichnungen und Abmessungen von SMD-Bauteilen

Gehäusebezeichnung	Länge $L$	Breite $B$	Höhe $H$
0201	0,5 mm	0,25 mm	0,23 mm
0402	1,0 mm	0,50 mm	0,35 mm
0603	1,6 mm	0,80 mm	0,45 mm
0805	2,0 mm	1,25 mm	0,50 mm
1206	3,1 mm	1,55 mm	0,55 mm
1506	3,8 mm	1,55 mm	0,55 mm

Zur Ableitung des Ersatzschaltbildes sehen wir uns den Aufbau des Widerstandes in Bild 6.1a an. Zunächst ist dort der eigentliche Nennwiderstandswert  $R$ . Der Widerstandswert kann über der Frequenz als konstant angenommen werden, wenn die Dicke der Widerstandsschicht deutlich kleiner als die Skintiefe  $\delta$  ist. Die Stromdichte verteilt sich dann gleichmäßig über den Querschnitt der dünnen Schicht.

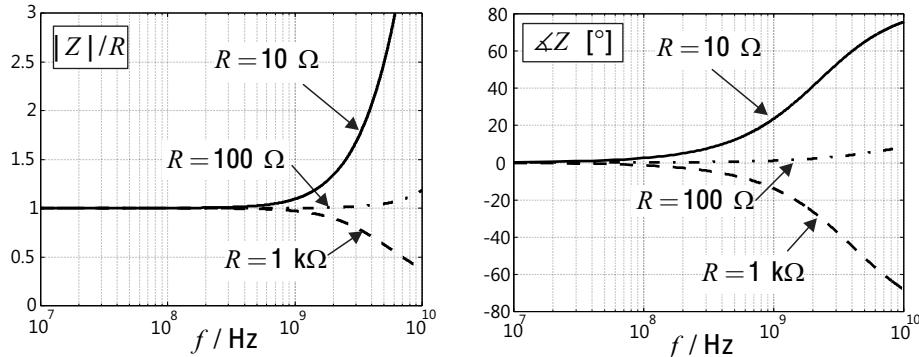
Die Widerstandsschicht wird vom Strom  $I$  durchflossen. Der Strom verursacht nach dem Durchflutungsgesetz ein umlaufendes magnetisches Feld, so dass eine parasitäre Serieninduktivität  $L$  wirksam wird. Über der Länge der Widerstandsschicht liegt eine Spannung  $U$  an. Das hiermit verbundene elektrische Feld zwischen den Anschlusskontakten wird im Ersatz-

schaltbild als Parallelkapazität berücksichtigt.

$$Z = (R + j\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{R + j\omega L}{j\omega C(R + j\omega L) + 1} \quad (6.1)$$

### Beispiel 6.1 Frequenzverhalten eines SMD-Widerstandes

Wir betrachten das Frequenzverhalten eines SMD-Widerstandes für drei Nennwiderstandswerte  $R$ :  $10\Omega$ ,  $100\Omega$ ,  $1\text{k}\Omega$ . Für die parasitären Elemente wollen wir annehmen, dass gilt:  $C = 0,04\text{ pF}$  und  $L = 0,7\text{ nH}$ .



**Bild 6.2** Frequenzverhalten eines SMD-Widerstandes

Die Ergebnisse des Betrages und der Phase der Impedanz  $Z$  sind in Bild 6.2 dargestellt. Mit zunehmender Frequenz weichen Betrag und Phase deutlich vom Nennwert ab. ■

## 6.1.2 Kondensatoren

Kondensatoren gibt es ebenso wie Widerstände in sehr unterschiedlichen Ausführungsformen. Im Bereich der Hochfrequenztechnik sind vor allem Chipkondensatoren interessant, die im Zusammenhang mit SMD-Widerständen besprochenen Abmessungen aufweisen. Bild 6.3a und b zeigen Ausführungsformen. Die Kondensatorflächen können in einer Ebene liegen oder in mehreren Schichten übereinander angeordnet sein (*Multilayer*). (Zur besseren Verdeutlichung der mehrlagigen Struktur ist diese zudem in Höhenrichtung auseinandergezogen dargestellt.)

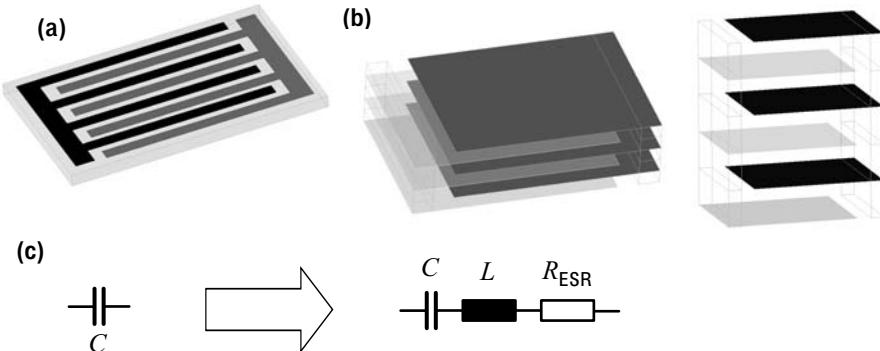
Das Ersatzschaltbild besitzt neben der Nennkapazität  $C$  aufgrund des Stromflusses und des dadurch auftretenden magnetischen Feldes eine Induktivität  $L$ . Die Anschlusskontakte weisen ohmsche Verluste auf und im keramischen Träger kommt es zu dielektrischen Verlusten. Um ein möglichst einfaches Ersatzschaltbild zu erhalten, fasst man die beiden Verlustmechanismen in einem sogenannten Ersatzserienwiderstand  $R_{\text{ESR}}$  zusammen. Alle Elemente werden in Serie angeordnet (Bild 6.3c). Wir erhalten als Ersatzschaltbild einen Serienresonanzkreis mit der Impedanz

$$Z = R_{\text{ESR}} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R_{\text{ESR}} + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (6.2)$$

und der Serienresonanzfrequenz  $f_0$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{Resonanzfrequenz}). \quad (6.3)$$

Die Resonanzfrequenz  $f_0$  zeichnet sich dadurch aus, dass der Imaginärteil der Impedanz verschwindet, also gilt  $\omega L - 1/(\omega C) = 0$ .



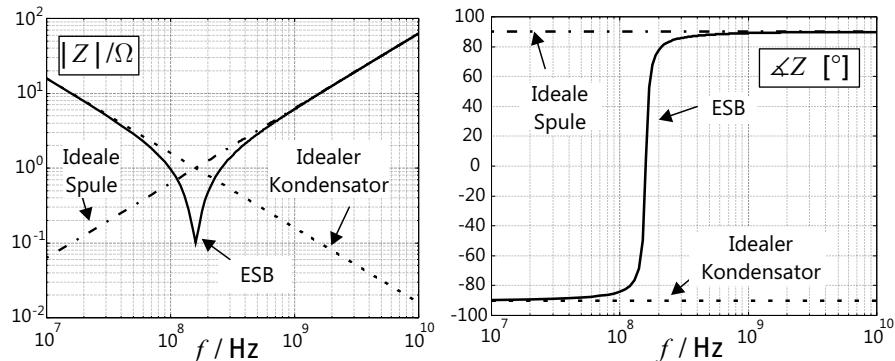
**Bild 6.3** (a) und (b) Aufbau eines Chipkondensators und (c) einfaches Ersatzschaltbild

Weitere wichtige Größen sind die Güte  $Q_C$  und der Verlustfaktor  $\tan\delta_C$  des Kondensators. Für diese Größen gilt:

$$Q_C = \frac{1}{\tan\delta_C} = \frac{1}{R_{\text{ESR}}\omega C} \quad . \quad (6.4)$$

### Beispiel 6.2 Frequenzverhalten eines Chipkondensators

Wir betrachten einen Chipkondensator mit einer Nennkapazität von  $C = 1 \text{ nF}$ . Die parasitären Bauelemente seien mit  $R = 0,1 \Omega$  und  $L = 1 \text{ nH}$  gegeben. Das resultierende Frequenzverhalten ist in Bild 6.4 gezeigt.



**Bild 6.4** Frequenzverhalten eines Chipkondensators

Unterhalb der Resonanzfrequenz verhält sich der Kondensator kapazitiv. Zum Vergleich ist der Verlauf eines idealen Kondensators mit der Nennkapazität  $C$  dargestellt.

Bei der Resonanzfrequenz  $f_0 \approx 159$  MHz wird die Impedanz reell und entspricht gerade dem Ersatzserienwiderstand. Für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz nähert sich das Verhalten dem dargestellten Verlauf einer idealen Spule mit der Induktivität  $L$ .

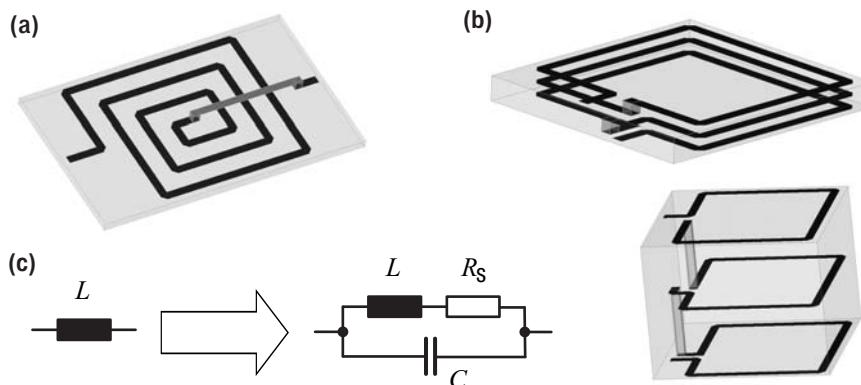
■

### 6.1.3 Spulen

Anordnungen, die magnetische Feldenergie speichern können, zeigen induktives Verhalten. Man erreicht dies zum Beispiel durch das Aufwickeln von Drähten. Zur Erhöhung der Induktivität werden zudem magnetische Materialien mit hohen Werten der relativen Permeabilitätszahl  $\mu_r$  eingesetzt. Kleine Bauformen mit SMD-Abmessungen lassen sich durch Miniaturisierung erreichen. Bild 6.5a zeigt eine planare Spule auf einem Substrat und Bild 6.5b eine mehrlagige Spule in einem *Multilayer*-Substrat. (Zur besseren Verdeutlichung der mehrlagigen Struktur ist diese zudem in Höhenrichtung auseinandergezogen dargestellt.)

Die in den leitfähigen und magnetischen Materialien auftretenden Verluste werden vereinfacht in einem Serienwiderstand  $R_S$  zusammengefasst. Bei einer gewickelten Spule ergeben sich zwischen den einzelnen Windungen Kapazitäten, so dass mit zunehmender Frequenz die Windungen kapazitiv überbrückt werden. Im Ersatzschaltbild erscheint daher eine Kapazität  $C$  parallel zur Nenninduktivität und zum Verlustwiderstand. Als einfaches Ersatzschaltbild erhalten wir die Schaltung in Bild 6.5c mit der Impedanz

$$Z = (R_S + j\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_S + j\omega L}{j\omega C(R_S + j\omega L) + 1} \quad . \quad (6.5)$$



**Bild 6.5** (a) und (b) Aufbau einer Spule und (c) einfaches Ersatzschaltbild

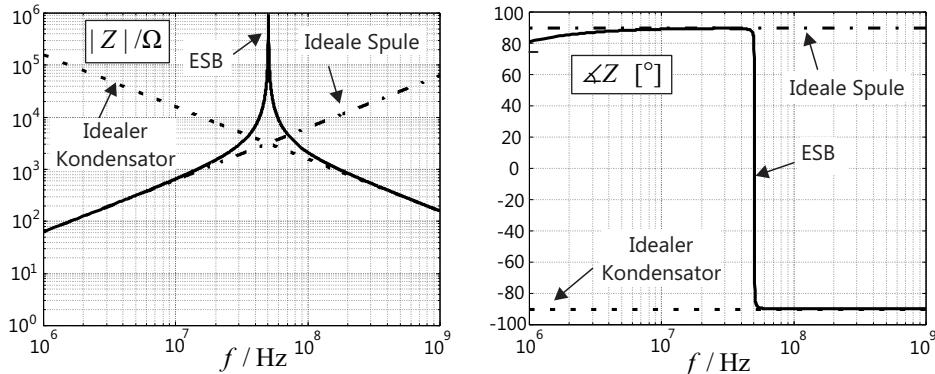
Der Verlustwiderstand nimmt im Vergleich zur Impedanz der Induktivität kleine Werte an. Die Resonanzfrequenz kann daher näherungsweise wie bei einer Parallelschaltung berechnet werden:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad . \quad (6.6)$$

Wie beim Kondensator können wir auch hier eine Güte  $Q_L$  und einen Verlustfaktor  $\tan\delta_L$  angeben.

$$Q_L = \frac{1}{\tan\delta_L} = \frac{\omega L}{R_S} \quad (6.7)$$

Bild 6.6 zeigt das typische Frequenzverhalten einer Spule. Bei niedrigen Frequenzen steigt die Impedanz linear mit der Frequenz, bis sich schließlich aufgrund parasitärer Einflüsse eine Parallelresonanz ausbildet. Darüber hinaus wird das Verhalten kapazitiv.



**Bild 6.6** Typisches Frequenzverhalten einer Spule

## ■ 6.2 Leitungsresonatoren

Mit konzentrierten Bauelementen lassen sich mit einer Induktivität  $L$  und einer Kapazität  $C$  Parallel- oder Serienschwingkreise realisieren. Die Resonanzfrequenz kann aus den Bauelementewerten einfach berechnet werden:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad . \quad (6.8)$$

Bei höheren Frequenzen wird es aber immer schwieriger, mit konzentrierten Elementen Schwingkreise aufzubauen, da diese aufgrund der zuvor besprochenen parasitären Effekte vom idealen Bauteilverhalten abweichen. Hier bieten Leitungen eine interessante Alternative. Wir wollen uns diese Leitungsresonatoren genauer ansehen, weil sie auch im Zusammenhang mit Filtern eine große Bedeutung besitzen.

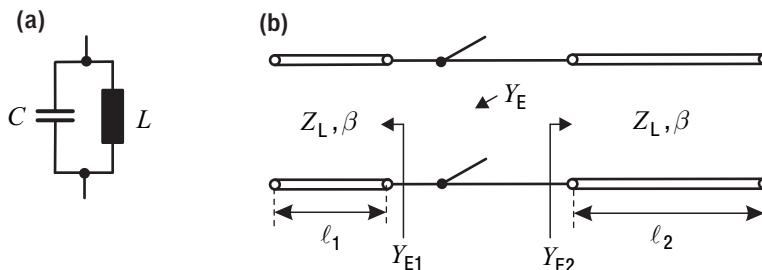
Weitere schwingfähige Strukturen sind Hohlraumresonatoren, die wir bereits in Abschnitt 4.5.6 kennengelernt haben. Im Zusammenhang mit Oszillatoren werden auch Quarze und dielektrische Resonatoren verwendet, für die wir hier aber nur auf die Literatur verweisen wollen [Bäch99] [Detl12] [Heue09].

### 6.2.1 $\lambda/2$ -Resonator

Gemäß unseren Überlegungen in Kapitel 3 besitzen verlustlose Leitungen, die mit einem Kurzschluss oder einem Leerlauf abgeschlossen sind, eine reaktive Eingangsimpedanz. Betrachten wir zunächst eine leerlaufende Leitung. Für die Eingangsimpedanz gilt nach Gleichung (3.100):

$$Z_E = -j Z_L \cot(\beta\ell) = -j \frac{Z_L}{\tan(\beta\ell)} = j X_E = \begin{cases} \text{kapazitiv, falls } \ell < \frac{\lambda}{4} \\ \text{induktiv, falls } \frac{\lambda}{4} < \ell < \frac{\lambda}{2} \end{cases} . \quad (6.9)$$

Um einen Parallelschwingkreis zu bilden, schalten wir zwei Leitungen parallel, wobei die Leitungslänge  $\ell_1$  kleiner als die Viertelwellenlänge und die Leitungslänge  $\ell_2$  größer als die Viertelwellenlänge sein soll (Bild 6.7). Die Gesamtlänge der Leitung ist dann  $\ell = \ell_1 + \ell_2$ .



**Bild 6.7** Schwingkreis aus (a) konzentrierten Elementen und (b) aus Leitungsstücken ( $\lambda/2$ -Resonator)

Die Admittanz, die an den Klemmen sichtbar wird, lautet:

$$Y_E = Y_{E1} + Y_{E2} = -\frac{1}{j Z_L} (\tan(\beta\ell_1) + \tan(\beta\ell_2)) . \quad (6.10)$$

Bei Parallelresonanz verschwindet der Imaginärteil der Admittanz. Zur Berechnung formen wir die Summe der Tangensfunktionen um mit

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y} \quad (6.11)$$

und erhalten

$$\operatorname{Im}\{Y_E\} = \frac{1}{Z_L} \cdot \frac{\sin(\beta(\ell_1 + \ell_2))}{\cos(\beta\ell_1) \cos(\beta\ell_2)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{bei Resonanz}). \quad (6.12)$$

Der Imaginärteil kann nur null werden, wenn die Sinusfunktion im Zähler des Quotienten verschwindet. Dies ist der Fall, wenn das Argument ganzzahlige Werte von  $\pi$  annimmt.

$$\beta(\ell_1 + \ell_2) = n\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.13)$$

Daraus folgt für die Gesamtlänge<sup>1</sup> der Leitung für Resonanz:

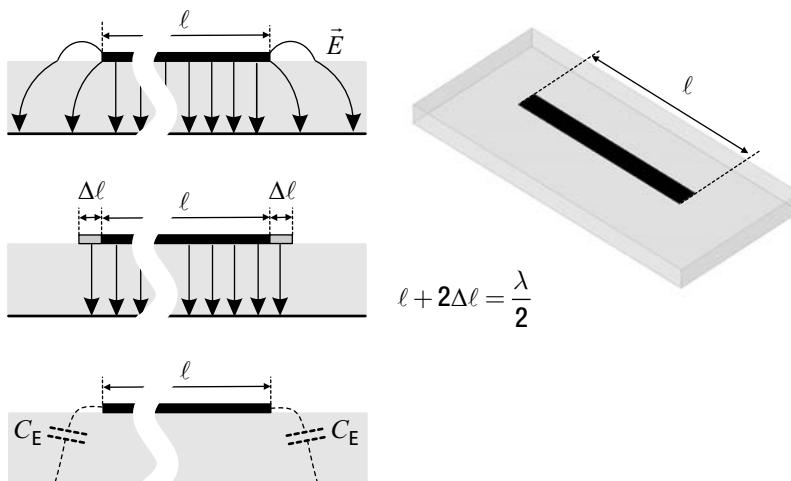
$$\ell = \ell_1 + \ell_2 = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{n\pi\lambda}{2\pi} = n\frac{\lambda}{2} .$$

(6.14)

<sup>1</sup> Dies gilt ebenso für eine an beiden Seiten kurzgeschlossene Leitung (siehe Übung 6.1).

Bei einer an beiden Enden leerlaufenden Leitungen ist die kürzeste physikalische Leitungslänge für Parallelresonanz die halbe Wellenlänge.

Bei den obigen Überlegungen sind wir von einer idealen Leitung ausgegangen, deren elektrisches Feld sich nur zwischen den Leitern befindet. Praktisch reicht aber das elektrische Feld auch über die Enden der Leitung hinaus (Bild 6.8), so dass die Leitung also an jedem Ende um die Strecke  $\Delta\ell$  virtuell länger wirkt. Der Effekt kann durch eine Endkapazität  $C_E$  modellhaft berücksichtigt werden. Die geometrische Länge muss daher etwas kürzer als die halbe Wellenlänge gewählt werden. Wie groß der *Verkürzungsfaktor* aufgrund des Endeffektes tatsächlich ist, hängt von der jeweiligen Geometrie ab und kann nicht allgemeingültig angegeben werden.



**Bild 6.8** Mikrostreifenleitung als  $\lambda/2$ -Resonator: Verkürzung durch parasitäre Endkapazitäten

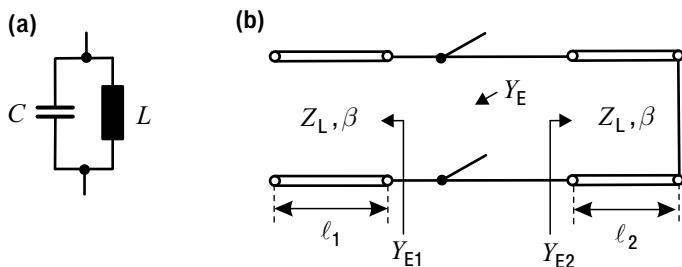
### 6.2.2 $\lambda/4$ -Resonator

Will man die Leitungslänge eines  $\lambda/2$ -Resonators verkürzen, so kann man eine der am Ende leerlaufenden Leitungen durch eine am Ende kurzgeschlossene Leitung ersetzen.

Nach Gleichung (3.91) ergibt sich bei einer kurzgeschlossenen Leitung die Eingangsimpedanz zu

$$Z_{E2} = j Z_L \tan(\beta\ell) = j X_{E2} = \begin{cases} \text{induktiv, falls } \ell < \frac{\lambda}{4} \\ \text{kapazitiv, falls } \frac{\lambda}{4} < \ell < \frac{\lambda}{2} \end{cases} . \quad (6.15)$$

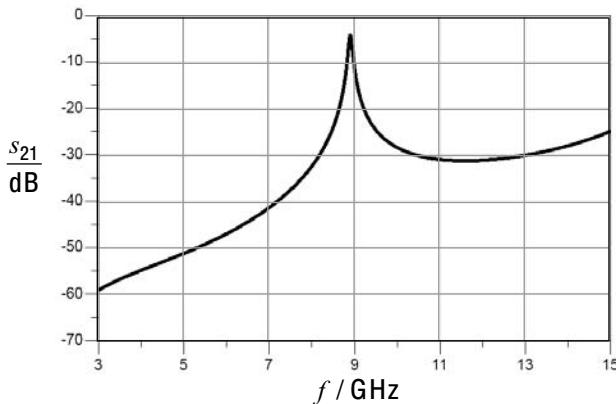
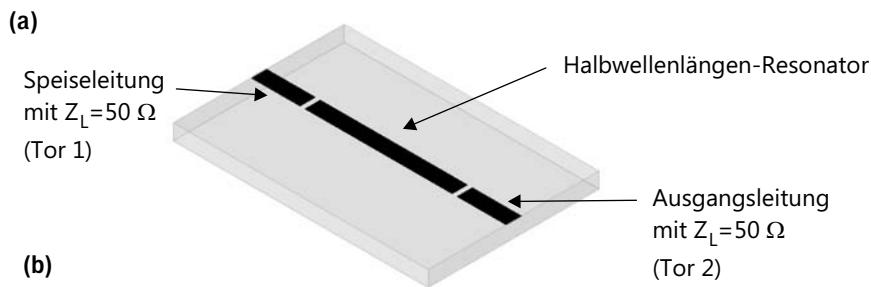
Aus einer leerlaufenden Leitung mit einer Länge, die kürzer als  $\lambda/4$  ist, und einer kurzgeschlossenen Leitung, deren Länge ebenfalls kürzer als  $\lambda/4$  ist, kann also ein Resonator gebaut werden. In Übung 6.1 wird gezeigt, dass die physikalisch kürzeste Länge gerade eben die Viertelwellenlänge ist (Bild 6.9).



**Bild 6.9** Schwingkreis aus (a) konzentrierten Elementen und (b) aus Leitungsstücken ( $\lambda/4$ -Resonator)

### Beispiel 6.3 $\lambda/2$ -Resonator mit Mikrostreifenleitung

Bild 6.10a zeigt einen  $\lambda/2$ -Resonator als Mikrostreifenleitung auf Aluminiumoxid ( $\epsilon_r = 9,8$ ;  $h = 635 \mu\text{m}$ ).



**Bild 6.10**  $\lambda/2$ -Resonator in Mikrostreifentechnik ( $\ell = 6 \text{ mm}$ ;  $s = 0,2 \text{ mm}$ ): (a) Aufbau und (b) Transmissionsfaktor

Der Resonator ist über zwei 50- $\Omega$ -Leitungen ( $w = 625 \mu\text{m}$ ) kapazitiv angekoppelt (Spaltbreite  $s = 0,2 \text{ mm}$ ). Die geometrische Länge des Resonators beträgt 6 mm. Dies würde bei einer effektiven Dielektrizitätszahl von  $\epsilon_{r,\text{eff}} = 6,65$  einer Resonanzfrequenz von 9,5 GHz entsprechen. Aufgrund der Verkürzung durch Endkapazitäten und zusätzlicher Einkopplungseffekte liegt die Resonanzfrequenz und damit das Maximum der

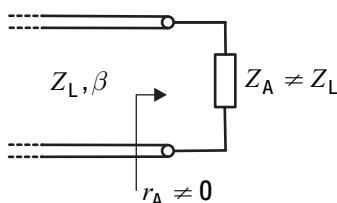
Überkopplung jedoch bei 9 GHz (Bild 6.10b). In Abschnitt 6.4 werden mit Hilfe von resonanten Leitungen Filter realisiert. ■

## ■ 6.3 Anpassschaltungen

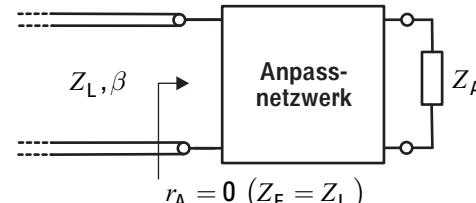
Aus Kapitel 3 über die Leitungstheorie ist uns bekannt, dass fehlangepasste Leitungsabschlüsse ( $R_A \neq Z_L$ ) zu Reflexionen führen. Mit Hilfe von Anpassschaltungen können vorhandene Abschlussimpedanzwerte auf gewünschte Eingangsimpedanzwerte ( $Z_E = Z_L$ ) transformiert werden (Bild 6.11a).

Falls einer Quelle mit der Quellimpedanz  $Z_I$  die *maximale Leistung* entnommen werden soll, so benötigen wir als Lastimpedanz  $Z_A$  gerade den konjugiert komplexen Wert der Quellimpedanz  $Z_A = Z_I^*$  (siehe Abschnitt 5.4.2). Auch hier kommen Anpassnetzwerke zum Einsatz.

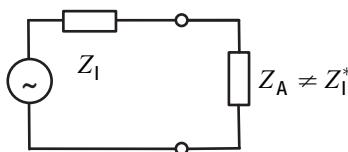
(a) Fehlangepasste Last



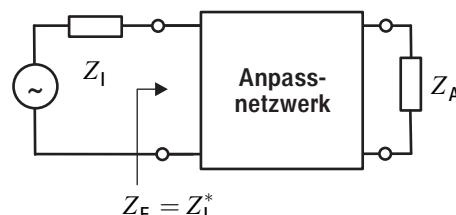
Impedanzanpassung mit Anpassnetzwerk



(b) Fehlangepasste Last



Impedanzanpassung mit Anpassnetzwerk



**Bild 6.11** Fehlangepasste Last (a) am Leitungsende und (b) an einer Quelle: Impedanzanpassung mit Hilfe eines Anpassnetzwerkes

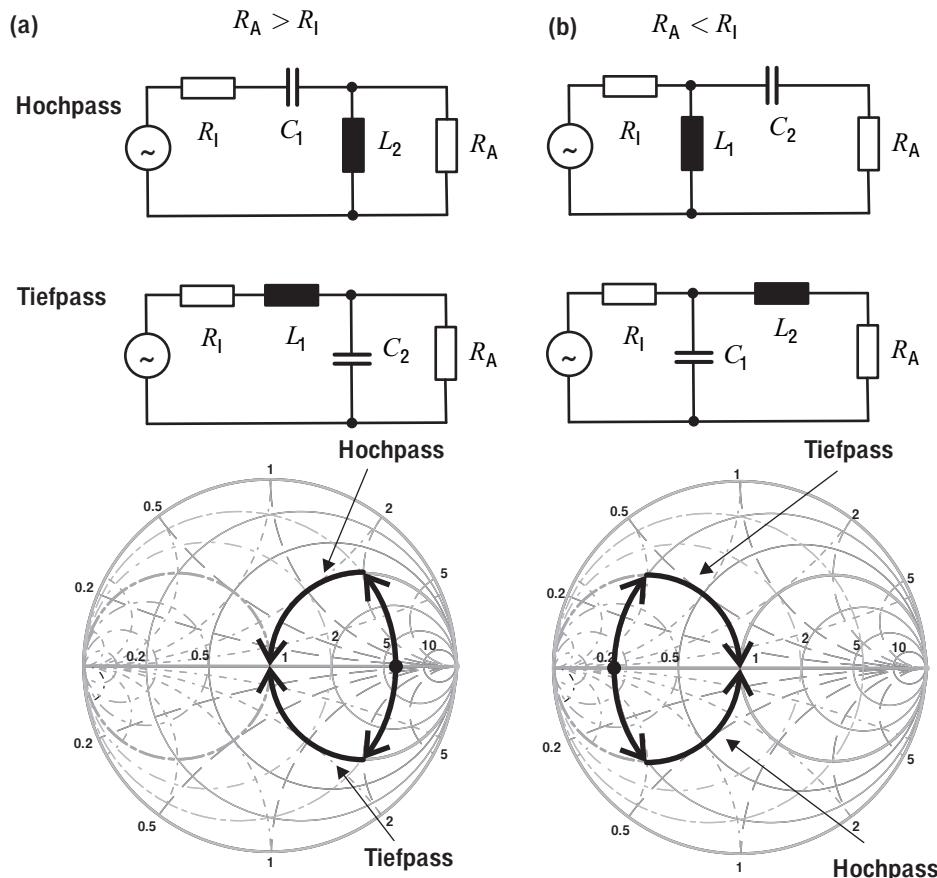
Um die Anpassung möglichst verlustfrei zu realisieren, verwendet man reaktive Elemente (Kapazitäten und Induktivitäten) oder Leitungen. Das Verhalten dieser Elemente ist frequenzabhängig, so dass das gewünschte Transformationsverhalten immer nur in einem bestimmten Frequenzbereich realisiert werden kann.

Wir wollen uns hier zunächst auf die Transformation reeller Abschluss- und Zielimpedanzen beschränken. In Übung 6.2 sehen wir aber, dass die Ergebnisse einfach auf allgemein komplexe Abschlüsse erweitert werden können. Beim Entwurf von Anpassschaltungen besitzt das Smith-Chart auch heute noch eine große Bedeutung, so dass wir die Schaltungen anhand des Smith-Charts erläutern wollen. Im Internet findet man Smith-Chart-Tools, die den einfachen Entwurf von Anpassschaltungen unterstützen [Dell10].

### 6.3.1 LC-Anpassnetzwerke

Soll ein reeller Abschluss in eine reelle Eingangsimpedanz transformiert werden, so kann dies durch zwei reaktive Elemente (eine Induktivität und eine Kapazität) geschehen, von denen eines quer und eines längs in der Schaltung auftritt. Aufgrund der „L“-förmigen (bzw. „Γ“-förmigen) Anordnung wird die Schaltung auch als „L“-Netzwerk (oder „Γ“-Transformator) bezeichnet [Bowi08] [Heue09].

Beim Entwurf muss unterschieden werden, ob der Abschlusswiderstand größer ( $R_A > R_I$ ) oder kleiner ( $R_A < R_I$ ) als die gewünschte Eingangsimpedanz sein soll. In beiden Fällen existieren dann jeweils zwei Realisierungsmöglichkeiten, entweder als Hochpass- oder als Tiefpassstruktur. (Mit Tiefpass- und Hochpassfiltern setzen wir uns in Abschnitt 6.4 noch auseinander.) Bild 6.12 zeigt die vier Schaltungen sowie die Transformationswege im Smith-Chart-Diagramm. Die Elementwerte können einfach berechnet werden.



**Bild 6.12** LC-Anpassnetzwerke für (a)  $R_A > R_I$  und (b)  $R_A < R_I$

## 188 6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

Für  $R_A > R_I$  gilt

$$|X_1| = R_I \cdot Q \quad \text{und} \quad |X_2| = R_A / Q \quad \text{mit} \quad Q = \sqrt{\frac{R_A}{R_I} - 1} \quad . \quad (6.16)$$

Für  $R_A < R_I$  gilt

$$|X_1| = R_I / Q \quad \text{and} \quad |X_2| = R_A \cdot Q \quad \text{where} \quad Q = \sqrt{\frac{R_I}{R_A} - 1} \quad . \quad (6.17)$$

Die Reaktanzen  $X_1$  und  $X_2$  bedeuten reaktive Bauteile, die entweder induktiv ( $X = \omega L$ ) oder kapazitiv ( $X = -1/(\omega C)$ ) sein können. In einer Schaltung müssen sie auf jeden Fall aber von unterschiedlicher Art sein (Bild 6.12). Für eine vorgegebene Frequenz  $f_0$ , bei der die Anpassung erreicht werden soll, können dann die Reaktanzwerte einfach in Kapazitäten und Induktivitäten über folgende Zusammenhänge umgerechnet werden.

$$L_{1,2} = \frac{|X_{1,2}|}{2\pi f_0} \quad \text{und} \quad C_{1,2} = \frac{1}{|X_{1,2}| 2\pi f_0} \quad (6.18)$$

#### Beispiel 6.4 Berechnung einer Anpassschaltung mit konzentrierten Elementen

Ein Abschlusswiderstand  $R_A = 150\Omega$  soll bei einer Frequenz von  $f_0 = 400$  MHz an eine Quelle mit  $R_I = 50\Omega$  angepasst werden. Es gilt also  $R_A > R_I$ . Nach Gleichung (6.16) erhalten wir  $Q = \sqrt{2}$  und für die Beträge der Reaktanzen  $|X_1| = R_I \sqrt{2}$  und  $|X_2| = R_A / \sqrt{2}$ . Gemäß Bild 6.12 können wir zwischen zwei Realisierungen wählen: einer Hochpass- und einer Tiefpassstruktur. Über Gleichung (6.18) finden wir die Werte der Induktivitäten und Kapazitäten für beide Schaltungen. Für die Hochpassstruktur ergibt sich:  $C_1 = 5,63$  pF und  $L_2 = 42,2$  nH. Für die Tiefpassstruktur erhalten wir:  $L_1 = 28,1$  nH und  $C_2 = 3,75$  pF. Die Reflexionsfaktoren sind in Bild 6.13a ( $R_A > R_I$ ) dargestellt.

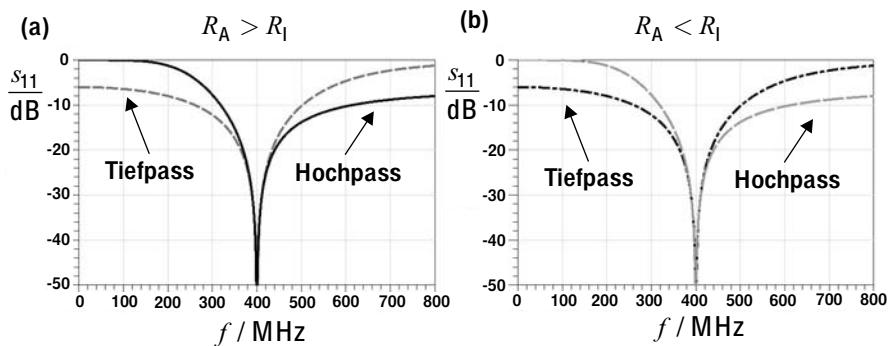


Bild 6.13 Streuparameter der Anpassschaltungen

Die Tiefpassstruktur konvergiert für  $f \rightarrow 0$  Hz gegen den Wert  $s_{11} = -6$  dB, da die Spule hier einen Kurzschluss und die Kapazität einen Leerlauf darstellt<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Würde man auf eine Anpassschaltung gänzlich verzichten, würde der Reflexionsfaktor im gesamten Frequenzbereich den Wert -6 dB besitzen.

Der Abschlusswiderstand ist direkt an die Quelle mit  $R_I$  angeschlossen und es gilt:

$$r_A(f=0) = s_{11}(f=0) = \frac{R_A - R_I}{R_A + R_I} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_{11}}{\text{dB}} = 20 \lg |s_{11}| = -6 \quad . \quad (6.19)$$

Die Hochpassstruktur konvergiert erwartungsgemäß für  $f \rightarrow 0$  Hz gegen  $s_{11} = 0$  dB.

Um die Betrachtung abzuschließen, tauschen wir im Folgenden die Werte von  $R_A$  und  $R_I$ , so dass gilt  $R_A < R_I$ . Nun orientieren wir uns an Gleichung (6.17). Über Gleichung (6.18) finden wir wieder die Werte der Induktivitäten und Kapazitäten für beide Schaltungen. Für die Tiefpassstruktur ergibt sich nun:  $C_1 = 5,63$  pF und  $L_2 = 42,2$  nH. Für die Hochpassstruktur erhalten wir ebenso:  $L_1 = 28,1$  nH und  $C_2 = 3,75$  pF. Die Reflexionsfaktoren sind in Bild 6.13b ( $R_A < R_I$ ) dargestellt. ■

Die Darstellungen des Reflexionsfaktors über der Frequenz in Bild 6.13 zeigen, dass die Anpassung nur in einem gewissen Frequenzbereich gegeben ist. Je größer der Unterschied zwischen den Widerständen  $R_A$  und  $R_I$  ist, desto schmalbandiger wird die Schaltung. Ist die Bandbreite einer einfachen LC-Anpassschaltung nicht ausreichend, so kann durch eine *Kaskadierung* von zwei oder mehreren LC-Netzwerken die Bandbreite erhöht werden.

Übung 6.3 zeigt ein Beispiel zur Bandbreitenvergrößerung. Bei einer zweistufigen Anpassschaltung wird die Abschlussimpedanz  $R_A$  zunächst von der ersten Stufe auf einen mittleren Widerstandswert  $R_m$  transformiert, der gerade dem geometrischen Mittelwert entspricht. Die zweite Stufe transformiert den Wert  $R_m$  auf die Zieleingangsimpedanz  $Z_E = R_I$ .

$$R_m = \sqrt{R_I R_A} \quad (6.20)$$

### 6.3.2 Anpassung mit Leitungen

In Abschnitt 3.1.9.1 haben wir bereits den  $\lambda/4$ -Transformator kennengelernt, mit dem sich eine reelle Abschlussimpedanz auf eine reelle Eingangsimpedanz transformieren lässt.

#### 6.3.2.1 $\lambda/4$ -Transformator

Bild 6.14a zeigt einen einfachen Leistungsteiler in Mikrostreifentechnik mit einem  $\lambda/4$ -Transformator zur Anpassung bei einer Frequenz von 5 GHz. Die am Eingangstor 1 eingespeiste Leistung wird zu gleichen Teilen auf die Ausgangstore 2 und 3 verteilt. Die Ausgangsleitungen zu den Toren 2 und 3 besitzen jeweils einen Leitungswellenwiderstand von  $50\Omega$ . Aufgrund der Parallelschaltung der beiden Ausgangsleitungen erhalten wir am Ende des  $\lambda/4$ -Transformators einen Impedanzwert von  $25\Omega$ . Dieser wird über den Viertelwellentransformator an die Impedanz der Speiseleitung von  $50\Omega$  angepasst. Der Leitungswellenwiderstand des Viertelwellentransformators muss nach Gleichung (3.110) dem geometrischen Mittelwert von  $25\Omega$  und  $50\Omega$ , also ca.  $35,4\Omega$  entsprechen. Die detaillierte Dimensionierung der Schaltung finden wir in Übung 6.4.

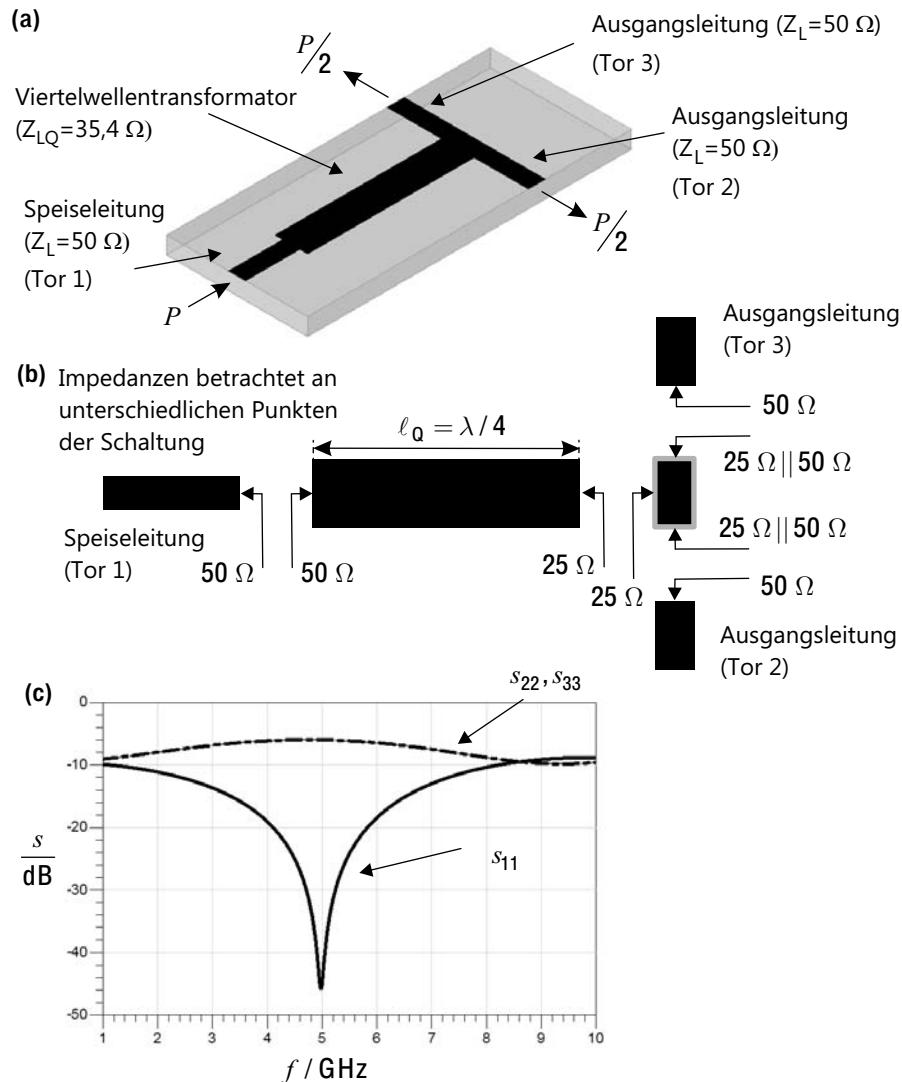
Bild 6.14b zeigt die Anpassung an Tor 1 bei einer Frequenz von 5 GHz. Nachteilig an dem einfachen Leistungsteiler ist der Umstand, dass ausgangsseitig keine Anpassung vorliegt:  $s_{22}$  und  $s_{33}$  liegen bei  $-6$  dB. Dies liegt daran, dass der  $\lambda/4$ -Transformator die  $50\Omega$  der Speiseleitung

## 190 6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

auf  $25\Omega$  heruntertransformiert. Diese  $25\Omega$  bilden dann parallel mit der  $50\Omega$ -Leitung von Tor 3 den Abschluss für die Leitung zu Tor 2. Als Reflexionsfaktor erhalten wir dann

$$s_{22} = s_{33} = \frac{(25\Omega || 50\Omega) - 50\Omega}{(25\Omega || 50\Omega) + 50\Omega} = -0,5 \quad \Rightarrow \quad |s_{22}| = |s_{33}| = -6 \text{ dB} . \quad (6.21)$$

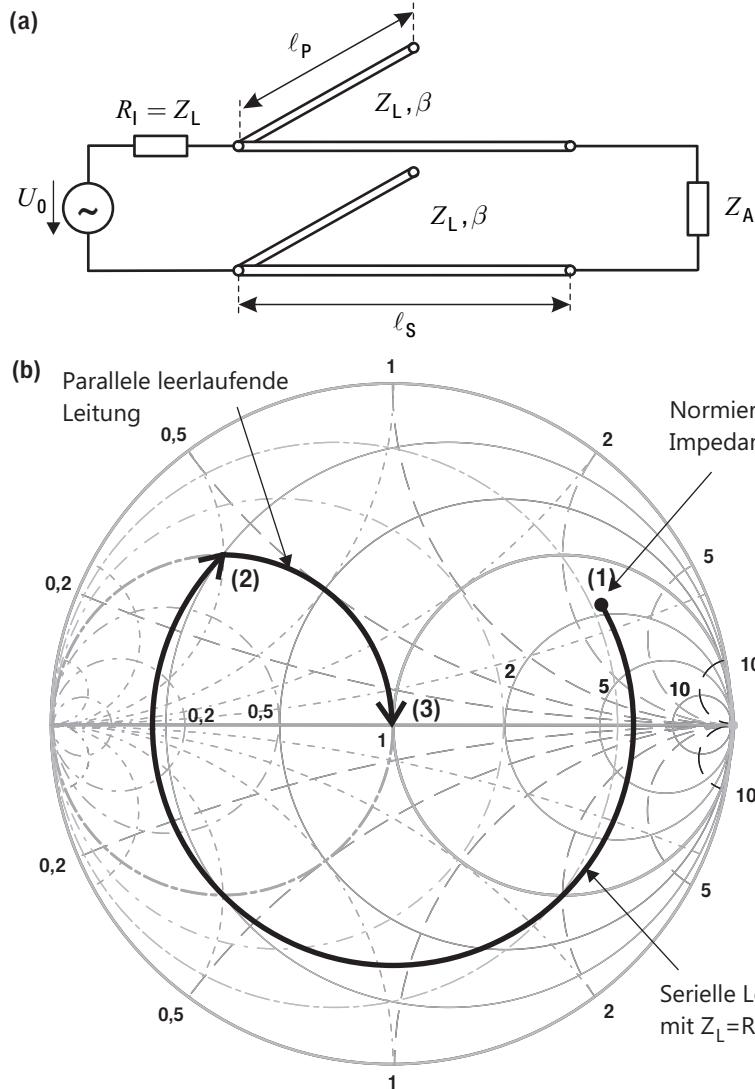
Die Bandbreite der Anpassung beim  $\lambda/4$ -Transformator ist begrenzt. Die Bandbreite lässt sich durch eine mehrstufige Auslegung erhöhen, wie wir in Übung 6.4 zeigen.



**Bild 6.14** (a) Einfacher Leistungsteiler in Mikrostreifentechnik mit  $\lambda/4$ -Transformator zur Impedanzanpassung; (b) Betrachtung der Impedanzen; (c) Reflexionsfaktoren an den Toren

### 6.3.2.2 Stichleitung und *Butterfly-Stubs*

Anhand des Smith-Charts kann man eine weitere Möglichkeit der Anpassung nachvollziehen, die in der Praxis oft eingesetzt wird und für allgemeine komplexe Abschlüsse funktioniert. Betrachten wir dazu das Beispiel im Smith-Chart in Bild 6.15.



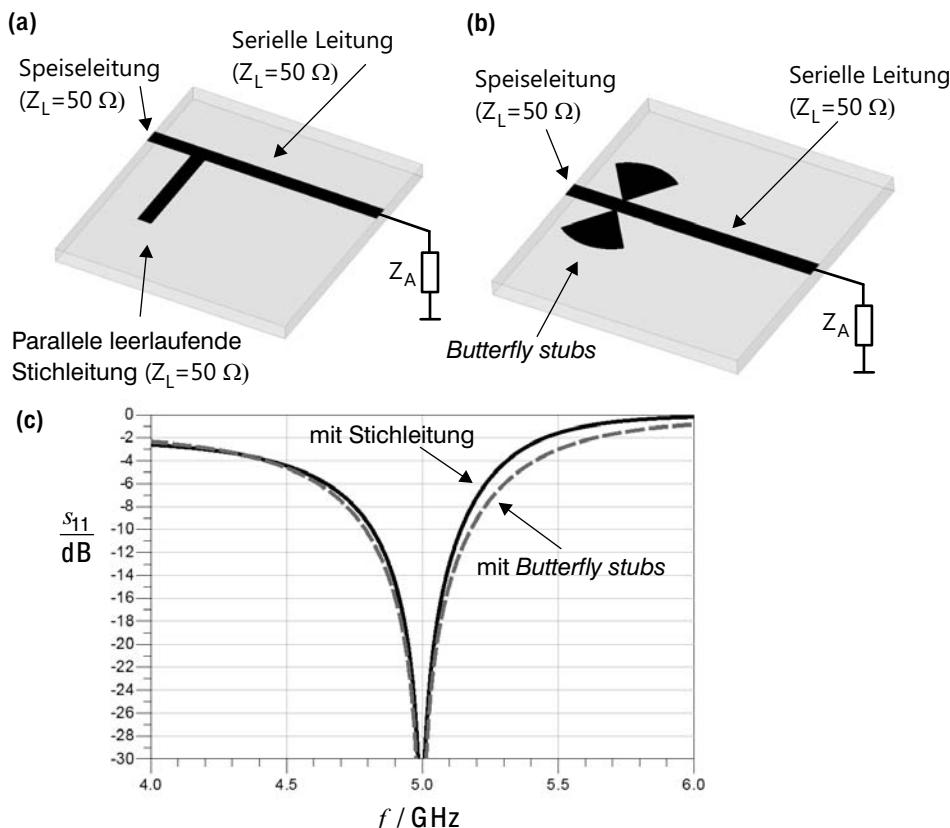
**Bild 6.15** (a) Anpassschaltung mit serieller Leitung und paralleler Stichleitung; (b) Transformationsweg im Smith-Chart

Die Impedanz  $Z_A$  soll auf die reelle Zielimpedanz  $R_I$  angepasst werden. Die normierte Impedanz  $z_A = Z_A/R_I$  liefert den Ausgangspunkt (1) im Smith-Chart. Durch eine Leitung mit dem Wellenwiderstand  $Z_L = R_I$  erreichen wir – je nach Länge der Leitung – beliebige Punkte auf einem Kreis um den Ursprung. Wir wählen die Leitungslänge so, dass wir Punkt (2) auf dem

## 192 6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

Anpassungskreis in der Admittanzebene erreichen. Von hier aus können wir mit einer parallelen Kapazität zum Anpassungspunkt (3) in der Mitte des Kreises gelangen. Die Kapazität führen wir aber nicht als konzentriertes Element aus, sondern wir verwenden eine leerlaufende, parallel angeschlossene Leitung (Stichleitung). Die Länge wird so gewählt, dass sich der entsprechende Kapazitätswert einstellt.

Die Dimensionierung der seriellen Leitung und der Stichleitung können wir anhand des Smith-Diagramms, welches wir in Kapitel 3 kennengelernt haben, vornehmen. Übung 6.5 zeigt ein entsprechendes Dimensionierungsbeispiel mit einer Mikrostreifenleitung. Ein Beispiel für eine Frequenz von 5 GHz finden wir in Bild 6.16a. Alternativ zu einer Stichleitung können wir die Kapazität auch durch zwei fächerförmige Querleitungen (*Radial stubs*, *Butterfly stubs*) realisieren (Bild 6.16b). Dies erhöht die Bandbreite und wird in der Praxis sehr oft eingesetzt (Bild 6.16c).



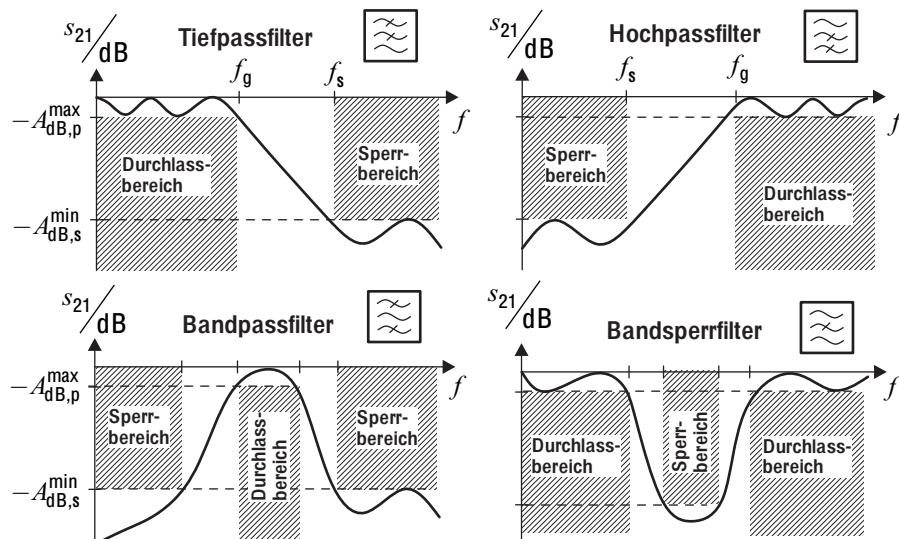
**Bild 6.16** Anpassschaltung in Mikrostreifentechnik mit serieller Leitung und (a) Stichleitung sowie (b) *Butterfly stubs*; (c) Eingangsreflexionsfaktor

## 6.4 Filter

Filter sind Zweitore, die ein frequenzabhängiges Übertragungsverhalten besitzen. Ziel ist es, Signalanteile im Durchlassbereich möglichst unverändert zu lassen und Signalanteile im Sperrbereich zu dämpfen. Je nach Frequenzverlauf unterscheidet man *Tiefpass-, Hochpass-, Bandpass- und Bandsperrfilter* (Bild 6.17).

Die gewünschten Übertragungseigenschaften werden durch ein *Toleranzschema* festgelegt, in dem minimale Dämpfungswerte im Durchlassbereich sowie Mindestdämpfungswerte im Sperrbereich als Funktion der Frequenz vorgegeben werden. Die Übertragungsfunktion formulieren wir im Hochfrequenzbereich sinnvollerweise auf dem – in Kapitel 5 über Streuparameter eingeführten – Transmissionsfaktor  $s_{21}$  bzw. seinem Kehrwert, der Einfügedämpfung  $A$ .

Um eine verzerrungarme Übertragung zu erhalten, ist zudem im Durchlassbereich ein möglichst linearer Phasenverlauf über der Frequenz wünschenswert. (Die Gruppenlaufzeit als Ableitung der Phase sollte möglichst konstant sein [Fett96].)

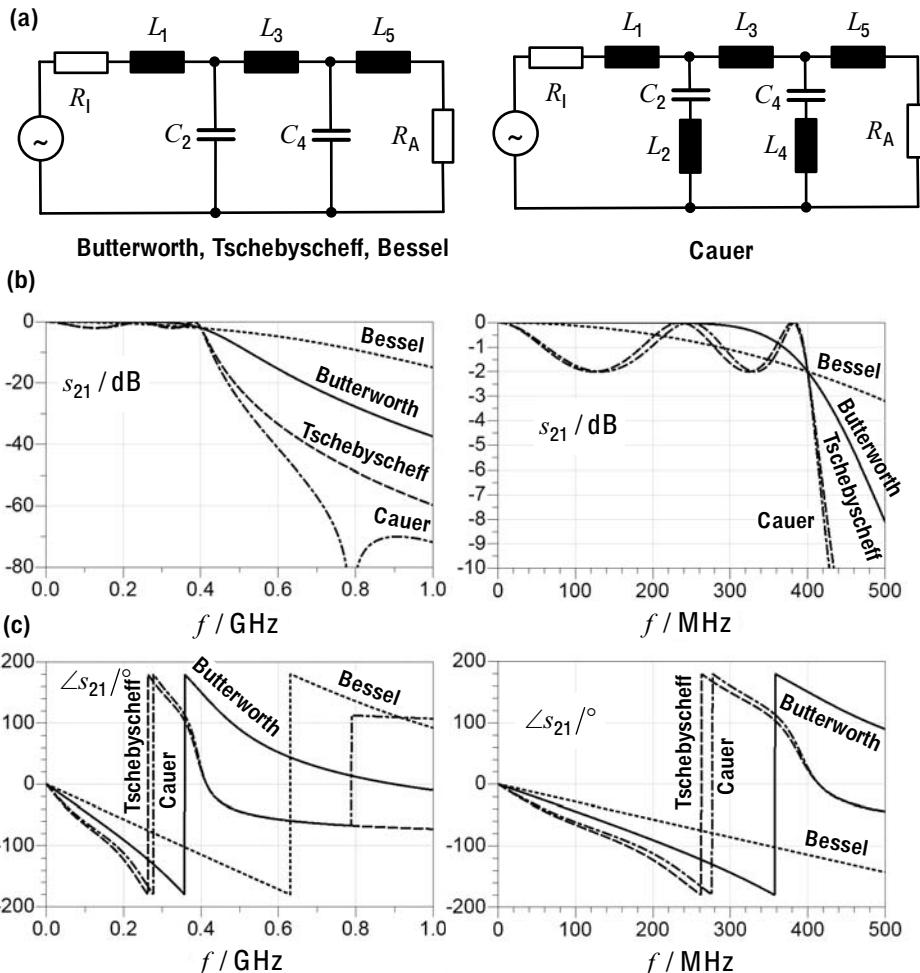


**Bild 6.17** Amplituderverläufe von Übertragungsfunktionen verschiedener Filtertypen: Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandsperre mit Toleranzschemata

### 6.4.1 Klassischer LC-Filterentwurf mit Induktivitäten und Kapazitäten

Der klassische Filterentwurf geht von einem Standardtiefpassfilter aus, welcher aus Kapazitäten und Induktivitäten in einer leiterförmigen Anordnung aufgebaut wird (Bild 6.18a) [Bowi08]. Die Anzahl der reaktiven Elemente bzw. Schwingkreise  $n$  bestimmt die *Ordnung* des Filters.

Das gewünschte Übertragungsverhalten wird durch geeignete Wahl der Filterordnung  $n$  und der entsprechenden Kapazitäts- und Induktivitätswerte erreicht. Die Wahl der Elementwerte orientiert sich dabei an Standardtiefpass-Filtertypen: *Butterworth*, *Tschebyscheff*, *Bessel* und *Cauer*. Typische Amplitudens- und Phasenverläufe für Filter 5. Ordnung sind in Bild 6.18b und Bild 6.18c dargestellt.



**Bild 6.18** Tiefpassfilter 5. Ordnung: (a) Topologie von Butterworth-, Tschebyscheff-, Bessel- und Cauer-Filter, (b) Amplitudenverlauf und (c) Phasenverlauf der Übertragungsfunktion  $s_{21}$

**Butterworth-Filter** zeichnen sich durch einen *monotonen Dämpfungsverlauf* (ohne Weiligkeit) aus. Die Zunahme der Dämpfung im Übergangsbereich erfolgt vergleichsweise langsam. Verzerrungen aufgrund des nicht-linearen Phasenverlaufs sind gering. Der Butterworth-Filter stellt oft einen guten Kompromiss zwischen Frequenzselektivität (steiler Übergang des Amplitudenverlaufs vom Durchlass- zum Sperrbereich) und minimalen Verzerrungen (lineare Phase) dar.

**Tschebyscheff-Filter** zeigen im *Durchlassbereich* eine gewisse *Welligkeit*. (Bild 6.18b zeigt ein Tschebyscheff-Filter mit einer Welligkeit von 2 dB im Durchlassbereich.) Die Zunahme der Dämpfung im Übergangsbereich erfolgt schneller als beim Butterworth-Filter. Erlaubt man größere Werte der Welligkeit, so steigt die Dämpfung im Übergangsbereich steiler an. Für typische Welligkeitswerte besitzen Tschebyscheff-Filter eine höhere Frequenzselektivität als Butterworth-Filter aber auch höhere Verzerrungen. (Besonderheit bei gerader Ordnung  $n$  des Filters: Last- und Quellwiderstand können nicht gleich groß gewählt werden [BowI08]!).

**Bessel-Filter** besitzen einen linearen Phasenverlauf. Sie sind also besonders gut in Anwendungen geeignet, in denen *Signalverzerrungen klein* bleiben müssen. Die Selektivität ist allerdings nicht so hoch wie bei den anderen Filtern: Die Zunahme der Dämpfung im Übergangsbereich liegt unter der des Butterworth-Filters.

**Cauer-Filter** besitzen im Sperrbereich Dämpfungspole. Dies kann genutzt werden, um gezielt besonders störende Frequenzbänder zu unterdrücken. Der Übergang vom Durchlass- in den Sperrbereich ist hier am steilsten, so dass bereits mit geringen Filterordnungen steilflankige Filter realisiert werden können. Nachteilig am Cauer-Filter sind der stark nicht-lineare Phasenverlauf und die sich daraus ergebenden Signalverzerrungen.

Für den *Standardtiefpass-Filterentwurf* existieren Tabellen, denen normierte Koeffizienten für die Kapazitäts- und Induktivitätswerte entnommen werden können [Bäch99] [Ludw08]. Diese lassen sich auf die Zielgrenzfrequenz und die gegebenen Quell- und Lastimpedanzen umrechnen. Die Entwurfsschritte sind ausführlich in den Standardwerken zur Filtersynthese (z.B. [Matt80]) dargestellt.

## 6.4.2 Entwurf von Butterworth-Filtern

In diesem Abschnitt werden wir exemplarisch den Entwurf für Filter mit Butterworth-Charakteristik nachvollziehen.

### 6.4.2.1 Filter mit Tiefpassverhalten

Der Entwurf eines Butterworth-Tiefpassfilters ist besonders einfach, falls

- der Innenwiderstand  $R_I$  der Quelle und der Lastwiderstand  $R_A$  übereinstimmen ( $R_I = R_A = R$ ) sowie
- die maximale zulässige Dämpfung im Durchlassbereich  $A_{\text{dB},p}^{\max}$  gerade eben 3 dB entspricht.

Der theoretische Dämpfungsverlauf eines Butterworth-Filters der Ordnung  $n$  berechnet sich dann zu

$$A_{\text{dB}} = -\frac{|s_{21}|}{\text{dB}} = 10 \lg \left( 1 + \left( \frac{f}{f_g} \right)^{2n} \right) . \quad (6.22)$$

Aus Gleichung (6.22) kann die notwendige Filterordnung abgeleitet werden, um im Sperrbereich ( $f > f_s$ ) die geforderten Dämpfungswerte zu erreichen. In Tabelle 6.2 wird beispielhaft gezeigt, welche Dämpfungen sich bei einer Sperrfrequenz  $f_s$  erreichen lassen, die gerade eben dem 1,2-Fachen, dem 1,5-Fachen und dem Doppelten der 3-dB-Grenzfrequenz  $f_g$  entspricht.

**Tabelle 6.2** Dämpfungen eines Butterworth-Filters  $n$ -ter Ordnung bei 1,2-facher, 1,5-facher und doppelter 3-dB-Grenzfrequenz

Filterordnung $n$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Dämpfung $A_{\text{dB}}(f_s = 1,2f_g)$	4,88 dB	6,01 dB	7,24 dB	8,57 dB	9,96 dB
Dämpfung $A_{\text{dB}}(f_s = 1,5f_g)$	7,83 dB	10,9 dB	14,3 dB	17,7 dB	21,2 dB
Dämpfung $A_{\text{dB}}(f_s = 2f_g)$	12,3 dB	18,1 dB	24,1 dB	30,1 dB	36,1 dB

Der weitere Entwurf besteht darin, dass wir zunächst mit

$$a_i = 2 \sin \left( \frac{(2i-1)\pi}{2n} \right) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Butterworth-Filterkoeffizienten}) \quad (6.23)$$

die Filterkoeffizienten  $a_i$  bestimmen und daraus über die Formeln

$$C_i = \frac{a_i}{\omega_g R} ; \quad L_i = \frac{a_i R}{\omega_g} ; \quad \omega_g = 2\pi f_g \quad (\text{Tiefpass-Filter}) \quad (6.24)$$

die endgültigen Elementwerte der Kapazitäten  $C_i$  und Induktivitäten  $L_i$  berechnen. Wir haben dann zwei Möglichkeiten, den Filter zu realisieren: beginnend mit einer Längsinduktivität (wie in Bild 6.18a) oder beginnend mit einer Quer-Kapazität. Betrachten wir dazu im Folgenden ein Beispiel.

### Beispiel 6.5 Entwurf eines Butterworth-Tiefpassfilters

Wir geben uns in unserem Beispiel folgende Randbedingungen für die Realisierung eines Butterworth-Tiefpassfilters vor:

- $R_l = R_A = R = 50 \Omega$  (entspricht zugleich dem Bezugswiderstand  $Z_0$  bei den Streuparametern)
- 3-dB-Grenzfrequenz  $f_g = 400 \text{ MHz}$
- Mindestdämpfung bei der doppelten Grenzfrequenz:  $A_{\text{dB}}(f_s = 2f_g) \geq 33 \text{ dB}$

Aus Tabelle 6.2 lesen wir eine Filterordnung von  $n = 6$  ab, um die geforderte Mindestdämpfung von 33 dB bei der doppelten Grenzfrequenz zu erfüllen. Wir benötigen für unseren Filter also 6 reaktive Elemente. Über Gleichung (6.23) berechnen wir die Filterkoeffizienten zu

$$a_1 = a_6 = 0,5176, \quad a_2 = a_5 = 1,414, \quad a_3 = a_4 = 1,932.$$

Die Elementwerte berechnen wir mit Gleichung (6.24). Es gibt zwei Realisierungsvarianten für den Filter: Von der Quelle aus gesehen kann das erste Element eine Serieninduktivität ( $L_1$ ) oder eine Querkapazität ( $C_1$ ) sein. Für einen Filter beginnend mit einer Serieninduktivität ergibt sich:

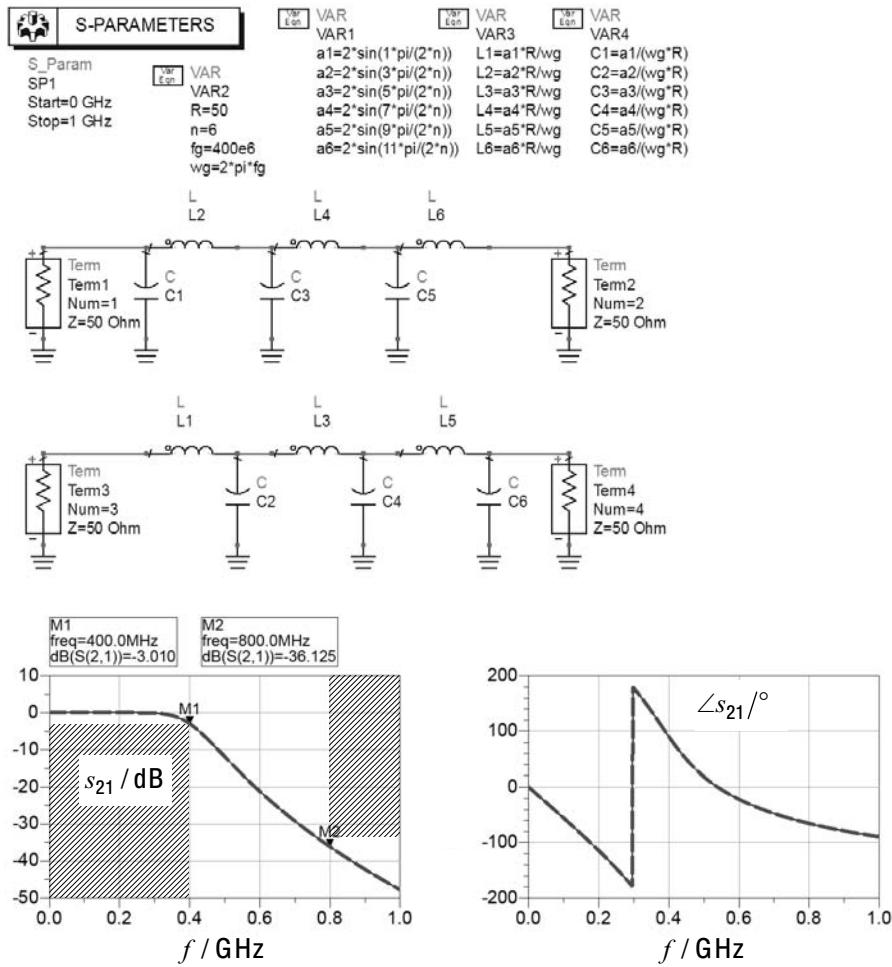
$$\begin{aligned} L_1 &= 10,3 \text{ nH}, & C_2 &= 11,3 \text{ pF}, & L_3 &= 38,4 \text{ nH}, \\ C_4 &= 15,4 \text{ pF}, & L_5 &= 28,1 \text{ nH}, & C_6 &= 4,12 \text{ pF} . \end{aligned}$$

Für einen Filter beginnend mit einer Parallelkapazität erhalten wir entsprechend nach Gleichung (6.24):

$$\begin{aligned} C_1 &= 4,12 \text{ pF}, & L_2 &= 28,1 \text{ nH}, & C_3 &= 15,4 \text{ pF}, \\ L_4 &= 38,4 \text{ nH}, & C_5 &= 11,3 \text{ pF}, & L_6 &= 10,3 \text{ nH} . \end{aligned}$$

In Bild 6.19 sind beide Realisierungsvarianten mit dem Schaltungssimulator ADS [Agil11] berechnet worden. Es zeigt sich wie erwartet der für einen Butterworth-Filter typische monotone Verlauf des Betrages der Übertragungsfunktion.

### Butterworth-Tiefpass-Filter 6. Ordnung



**Bild 6.19** Butterworth-Tiefpass-Filter 6. Ordnung

Der Filter erfüllt die in der Aufgabe vorgegebene Spezifikation. Der Phasenverlauf ist im Durchlassbereich näherungsweise linear. ■

In Schaltungssimulatoren können im allgemeinen benutzerdefinierte Funktionen mit symbolischen Gleichungen verwendet werden. So können die Filterkoeffizienten und Elementwerte automatisch berechnet werden. Da der Entwurf von Filtern zu den Standard-

Aufgaben in der Kommunikationstechnik gehört, existieren zudem überlicherweise automatische Entwurfswerkzeuge (*Design guides*) für Filter-Design und Optimierung.

Der Standard-Filter-Entwurf kann zu unrealistischen Bauteilwerten führen. Reale Bauteile sind oft nur mit bestimmten Nennwerten und mit unvermeidbaren parasitären Eigenschaften zu erhalten. Daher müssen in einem nächsten Schritt reale Bauteilmodelle angenommen werden. Der erste Entwurf wird so unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Randbedingungen in einem weiteren Schritt an die Spezifikationen angepasst.

#### 6.4.2.2 Filter mit Hochpassverhalten

Beim Entwurf von *Hochpässen* kann – im Prinzip – das gleiche Verfahren angewendet werden. Es müssen lediglich folgende Änderungen vorgenommen werden:

1. Der zur Berechnung der Filterordnung notwendige theoretische Dämpfungsverlauf ergibt sich durch Verwendung des reziproken Wertes der normierten Frequenz. Wir erhalten:

$$A_{\text{dB}, \text{HP}} = -\frac{|s_{21}|}{\text{dB}} = 10 \lg \left( 1 + \left( \frac{f_g}{f} \right)^{2n} \right) . \quad (6.25)$$

2. Kapazitäten und Induktivitäten werden getauscht: Die Kapazitäten sind nun längs und die Induktivitäten quer angeordnet.
3. Die Werte der Kapazitäten und Induktivitäten berechnen sich nun zu:

$$C_i = \frac{1}{a_i \omega_g R} ; \quad L_i = \frac{R}{a_i \omega_g} ; \quad \omega_g = 2\pi f_g \quad (\text{Hochpass-Filter}). \quad (6.26)$$

#### Beispiel 6.6 Entwurf eines Butterworth-Hochpass-Filters

Wir wollen uns grundsätzlich an den gleichen Randbedingungen wie in Beispiel 6.5 orientieren, diesmal jedoch einen Butterworth-Filter mit Hochpassverhalten realisieren. Es sei:

- $R_l = R_A = R = 50 \Omega$
- 3-dB-Grenzfrequenz  $f_g = 400 \text{ MHz}$
- Mindestdämpfung bei der halben Grenzfrequenz:  $A_{\text{dB}}(f_s = 0,5 f_g) \geq 33 \text{ dB}$

Aus dem Dämpfungsverlauf in Gleichung (6.25) errechnen wir wieder die Filterordnung  $n = 6$ . Die Filterkoeffizienten  $a_i$  entsprechen den Ergebnissen aus Beispiel 6.5. Wir erhalten also:

$$a_1 = a_6 = 0,5176, \quad a_2 = a_5 = 1,414, \quad a_3 = a_4 = 1,932.$$

Mit Gleichung (6.26) berechnen wir die Werte für die Bauelemente. Es gibt zwei Realisierungsvarianten für den Filter: Von der Quelle aus gesehen kann das erste Element eine Serienkapazität ( $C_1$ ) oder eine Querinduktivität ( $L_1$ ) sein.

Für eine mit einer Serienkapazität beginnenden Schaltung gilt:

$$C_1 = 15,4 \text{ pF}, \quad L_2 = 14,1 \text{ nH}, \quad C_3 = 4,12 \text{ pF}, \\ L_4 = 10,3 \text{ nH}, \quad C_5 = 5,63 \text{ pF}, \quad L_6 = 38,4 \text{ nH} .$$

Für eine mit einer Parallelinduktivität beginnenden Schaltung gilt:

$$\begin{aligned} L_1 &= 38,4 \text{ nH}, & C_2 &= 5,63 \text{ pF}, & L_3 &= 10,3 \text{ nH}, \\ C_4 &= 4,12 \text{ pF}, & L_5 &= 14,1 \text{ nH}, & C_6 &= 15,4 \text{ pF}. \end{aligned}$$

Beide Realisierungsvarianten sind mit dem Schaltungssimulator ADS [Agil11] berechnet worden (Bild 6.20). Es zeigt sich wie erwartet der für einen Butterworth-Filter typische monotone Verlauf des Betrages der Übertragungsfunktion.

### Butterworth-Hochpass-Filter 6. Ordnung

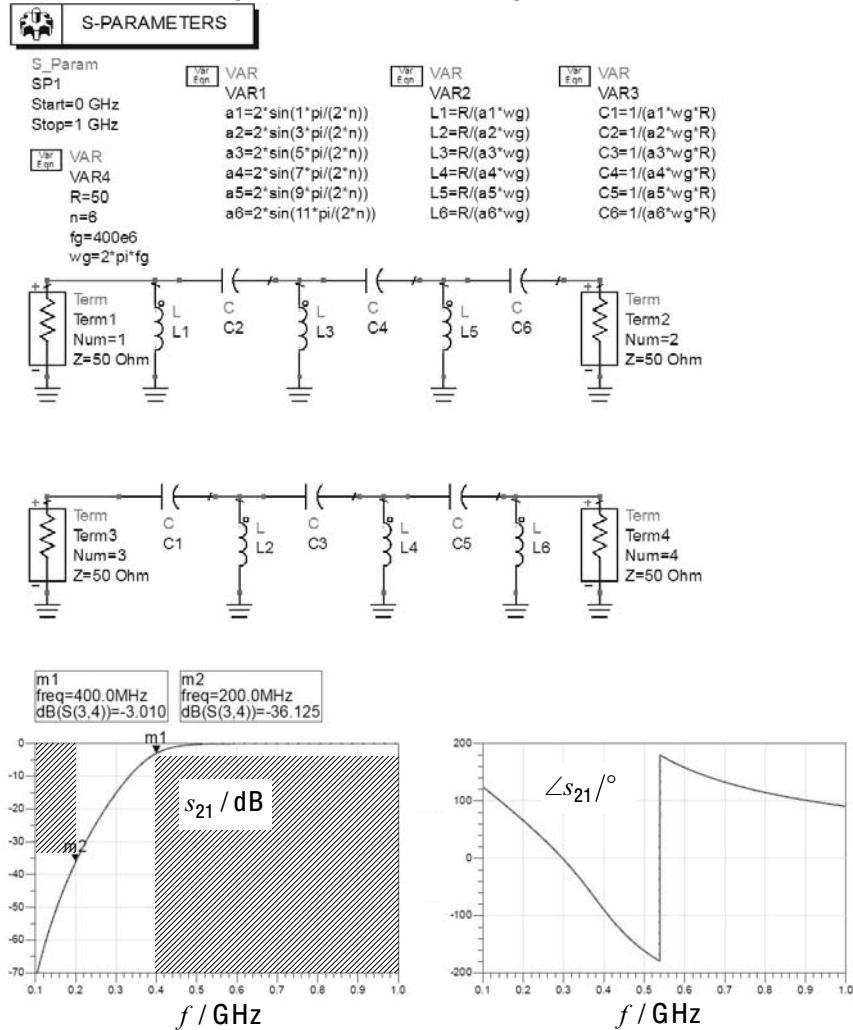


Bild 6.20 Butterworth-Hochpass-Filter 6. Ordnung

Der Filter erfüllt die in der Aufgabe vorgegebene Spezifikation. Der Phasenverlauf ist im Durchlassbereich näherungsweise linear. ■

### 6.4.2.3 Filter mit Bandpassverhalten

*Bandpassfilter* können ebenfalls aus den Standard-Tiefpassfiltern abgeleitet werden. Hierzu sind folgende Schritte notwendig:

1. Quer-Elemente werden durch Parallelresonanzkreise ersetzt.
2. Längselemente werden durch Serienschwingkreise ersetzt.
3. Herstellung eines Zusammenhangs zwischen dem Dämpfungsverlauf des Tiefpassprototyps mit der 3-dB-Tiefpassgrenzfrequenz und der (Kreisfrequenz-) Bandbreite  $BW$  und Mittenfrequenz  $f_0$  des Bandpassfilters [Bowi08] [Youn72] gemäß den folgenden Beziehungen (siehe Bild 6.21).

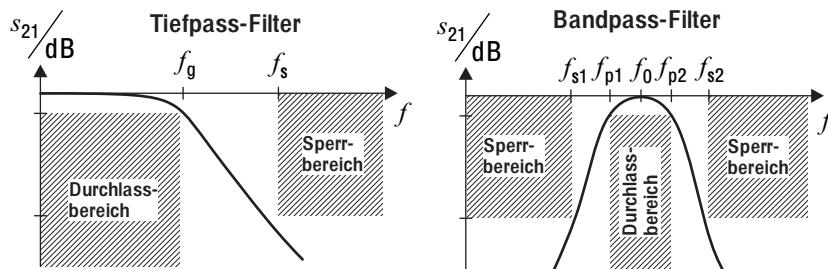
$$f_0 = \sqrt{f_{p1} f_{p2}} \quad \text{und} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (\text{Mittenfrequenz}) \quad (6.27)$$

$$B = f_{p2} - f_{p1} \quad \text{und} \quad BW = 2\pi(f_{p2} - f_{p1}) \quad (\text{Bandbreite}) \quad (6.28)$$

$$B_{\text{rel}} = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{f_0} \quad (\text{Relative Bandbreite}) \quad (6.29)$$

$$\frac{f_{\text{TP}}}{f_g} = 2 \frac{f_{\text{BP}} - f_0}{f_{p2} - f_{p1}} \quad (\text{Frequenzumrechnung}) \quad (6.30)$$

Mit Hilfe der Frequenzbeziehungen zwischen Bandpass und Tiefpassprototyp in Gleichung (6.30) und des theoretischen Dämpfungsverlaufs eines Tiefpasses in Gleichung (6.22) kann die entsprechende Filterordnung bestimmt werden.



**Bild 6.21** Zusammenhang zwischen Bandpass und Tiefpassprototyp

Die Elemente der Serienschwingkreise berechnen sich zu:

$$L_{si} = \frac{a_i R}{BW} \quad ; \quad C_{si} = \frac{1}{a_i R} \cdot \frac{BW}{\omega_0^2} \quad (\text{Bandpass-Filter; Serienschwingkreiselemente}). \quad (6.31)$$

Für die Elemente der Parallelschwingkreise gilt:

$$L_{pi} = \frac{R}{a_i} \cdot \frac{BW}{\omega_0^2} \quad ; \quad C_{pi} = \frac{a_i}{BW \cdot R} \quad (\text{Bandpass-Filter; Parallelschwingkreiselemente}). \quad (6.32)$$

#### Beispiel 6.7 Entwurf eines Bandpassfilters mit Butterworth-Charakteristik

Wir wollen ein Filter mit folgenden Eigenschaften entwerfen:

- Durchlassbereich mit Dämpfung  $A < 3$  dB von  $f_{p1} = 1,45$  GHz bis  $f_{p2} = 1,55$  GHz
- Sperrbereich mit Dämpfung  $A > 15$  dB unterhalb von  $f_{s1} = 1,425$  GHz und oberhalb von  $f_{s2} = 1,575$  GHz

Mit Hilfe von Gleichung (6.30) berechnen wir eine normierte Tiefpasssperrfrequenz von  $f_{s2,TP}/f_g \approx 1,5$ . Aus Tabelle 6.2 und der Bedingung  $A > 15$  dB erkennen wir, dass ein Filter erforderlich ist, der mindestens die Ordnung  $n = 5$  besitzt.

### Butterworth-Bandpass-Filter 5. Ordnung

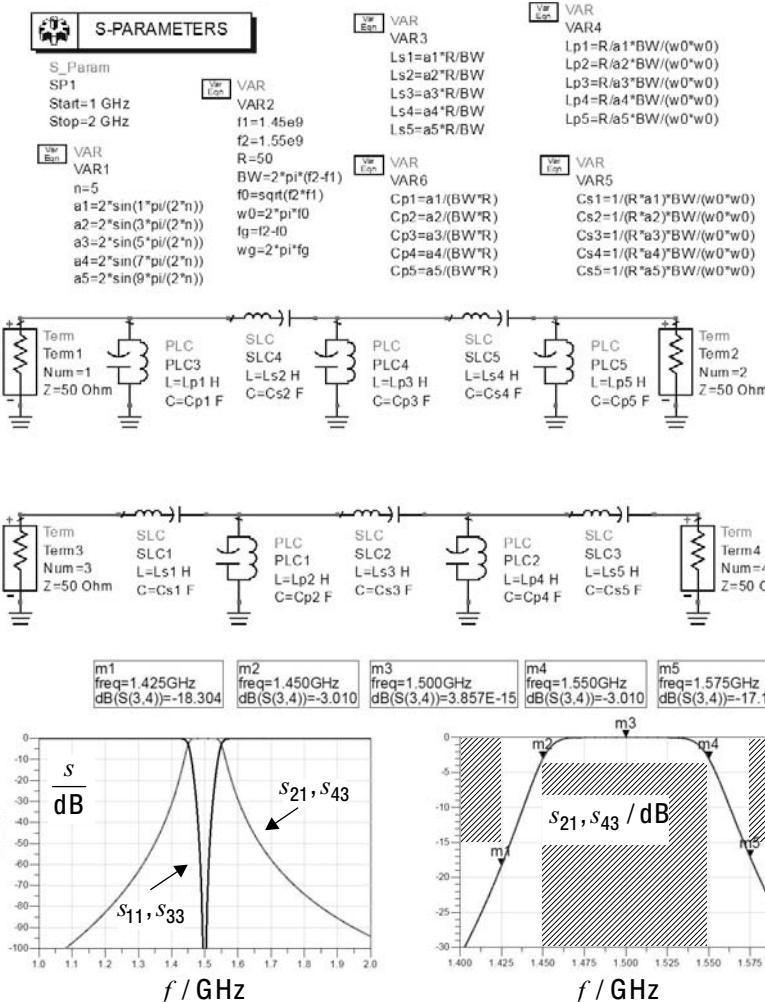


Bild 6.22 Butterworth-Bandpass-Filter 5. Ordnung

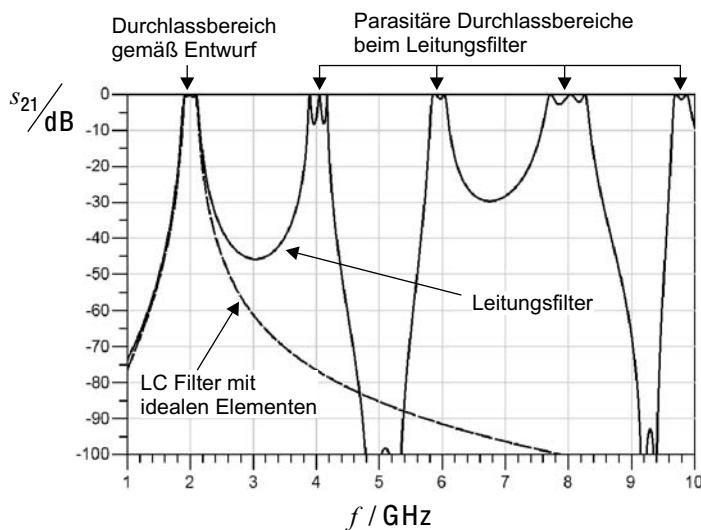
Das Ergebnis des Filterentwurfs und die entsprechenden Streuparameter nach einer Schaltungssimulation sind in Bild 6.22 zu sehen. ■

## ■ 6.5 Leitungsfilter

LC-Filter können in einem weiten Frequenzbereich eingesetzt werden. Jedoch wird bei konzentrierten Elementen zu höheren Frequenzen hin der Einfluss der parasitären Eigenschaften immer deutlicher, so dass hohe Anforderungen an die Bauteilgüte gestellt werden müssen. Im GHz-Bereich wird es daher zunehmend attraktiv, statt konzentrierter Kapazitäten und Induktivitäten verteilte Strukturen in Form von Leitungen zu verwenden.

In Abschnitt 3.1.8 haben wir gelernt, dass sich mit verlustlosen Leitungen ein reaktives Verhalten erzielen lässt, wenn diese am Ende mit einem Leerlauf bzw. Kurzschluss abgeschlossen sind. Da die Wellenlänge zu hohen Frequenzen hin stetig sinkt, erreichen diese Filterschaltungen mit Leitungselementen schließlich realisierbare Abmessungen. Diese Leitungsfilter können wieder aus den LC-Schaltungen abgeleitet werden. Eine direkte Umsetzung führt aber zu unhandlichen Topologien.

Wir wollen an dieser Stelle einen Überblick über in der HF-Technik gebräuchliche Leitungsfilterstrukturen gewinnen. Besondere Bedeutung haben Schaltungen, die *planar* in Streifenleitungs- und Mikrostreifenleitungstechnik realisierbar sind. Bei höheren Frequenzen und Leistungen sowie Anforderungen an eine hohe Güte sind zudem Filter aus Hohlleiterstrukturen wichtig.



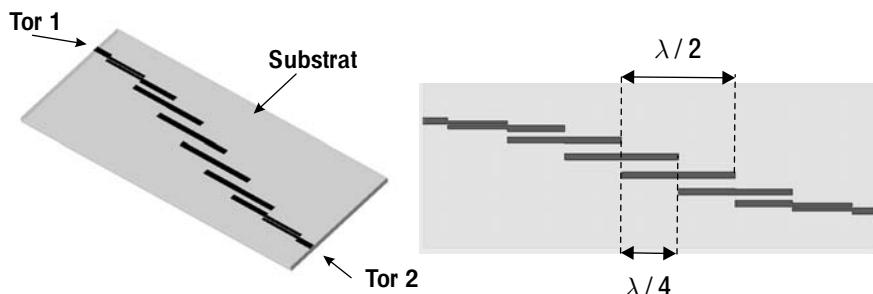
**Bild 6.23** Übertragungsfunktionen von Bandpassfiltern: LC-Filter (gestrichelte Linie) mit nur einem Durchlassbereich und Leitungsfilter (durchgehende Linie) mit zusätzlichen parasitären Durchlassbereichen

Zwischen LC-Filtern und Leitungsfiltern existiert ein wesentlicher Unterschied (Bild 6.23): LC-Filter besitzen eine nicht-periodische Übertragungsfunktion, d.h. ein Bandpass-Filter zeigt (bei der Verwendung von idealen Bauelementen) einen einzigen Durchlassbereich. Der folgende Sperrbereich erstreckt sich bis zu unendlich hohen Frequenzen.

Leitungsfilter auf der anderen Seite zeigen ein *zyklisches Bild*: Durchlass- und Sperrbereiche wechseln sich in regelmäßigen Intervallen ab. Bild 6.23 zeigt einen typischen Leitungsfilter mit einem gewünschten Durchlassbereich um 2 GHz. Bei Vielfachen dieser Frequenz (4 GHz, 6 GHz, ...) tauchen nun aber aufgrund des periodischen Verhaltens der Leitungen weitere (parasitäre) Durchlassbereiche auf.

### 6.5.1 Seitengekoppelte Filter (*Edge-coupled-line-Filter*)

Die in der Hochfrequenztechnik am häufigsten eingesetzten Bandpassstrukturen sind seitengekoppelte Leitungsfilter. Bild 6.24 zeigt den grundsätzlichen Aufbau eines solchen Filters für die Realisierung als Mikrostreifenleitungsfilter. Die Struktur besteht aus resonanten,  $\lambda/2$ -langen Leitungsstücken, die an beiden Seiten leerlaufen. Für den Entwurf sind die *Even-mode*- und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderstände (siehe Abschnitt 4.7) der gekoppelten  $\lambda/4$ -langen Leitungsstücke entscheidend.



**Bild 6.24** Seitengekoppelter Mikrostreifenleitungsfilter (*Edge-coupled-line-Filter*)

Für einen Entwurf als Butterworth-Filter sind zunächst wieder die Filterkoeffizienten  $a_i$  mit  $i = 1 \dots n$  nach Gleichung (6.23) zu berechnen. Zusätzlich gilt  $a_0 = a_{n+1} = 1$ . Der Last- und Quellwiderstand an beiden Anschlusstoren des Filters sei  $R = R_L = R_A = Z_0$ .

Weiterhin werden folgende Hilfsgrößen benötigt:

$$J_{01} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\pi BW}{2\omega_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0 a_1}} \quad (6.33)$$

$$J_{i,i+1} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\pi BW}{2\omega_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6.34)$$

$$J_{n,n+1} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\pi BW}{2\omega_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n a_{n+1}}} \quad (6.35)$$

mit

$$f_0 = \frac{f_{p1} + f_{p2}}{2} \quad \text{und} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (\text{Mittenfrequenz}) \quad (6.36)$$

$$B = f_{p2} - f_{p1} \quad \text{und} \quad BW = 2\pi(f_{p2} - f_{p1}) \quad (\text{Bandbreite}). \quad (6.37)$$

Mit den Hilfsgrößen lassen sich dann die *Even-mode*- und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderstände der gekoppelten Leitungsstücke berechnen:

$$Z_{0e,i} = R \left( 1 + RJ_{i,i+1} + (RJ_{i,i+1})^2 \right) \quad (6.38)$$

$$Z_{0o,i} = R \left( 1 - RJ_{i,i+1} + (RJ_{i,i+1})^2 \right) . \quad (6.39)$$

Aus diesen Leitungswellenwiderständen kann für eine Realisierung mit Microstrip- oder stripline-Leitungen mithilfe eines Schaltungssimulators die Streifenbreite  $w_i$  der  $\lambda/4$ -langen Leitungssegmente und der Abstand  $s_i$  zwischen den Leitungen in Abhängigkeit der Substrateigenschaften bestimmt werden. Beispiel 6.8 zeigt den Entwurf eines seitengekoppelten Mikrostreifenleitungsfilters mit Butterworth-Charakteristik.

### Beispiel 6.8 Entwurf eines seitengekoppelten Filters mit Butterworth-Charakteristik

Wir wollen ein Filter mit folgenden Eigenschaften entwerfen:

- Bezugsimpedanz  $Z_0 = R = 50 \Omega$
- Durchlassbereich mit Dämpfung  $A < 3$  dB von  $f_{p1} = 4,8$  GHz bis  $f_{p2} = 5,2$  GHz
- Sperrbereich mit Dämpfung  $A > 15$  dB unterhalb von  $f_{s1} = 4,7$  GHz und oberhalb von  $f_{s2} = 5,3$  GHz.

Aus Gleichung (6.30) folgt

$$\frac{f_{s,TP}}{f_g} = 2 \frac{f_{s2,BP} - f_0}{f_{p2} - f_{p1}} = 2 \frac{5,3 - 5}{5,2 - 4,8} = 1,5 . \quad (6.40)$$

Aus dem allgemeinen Dämpfungsverlauf des Tiefpassprototypen nach Gleichung (6.22) bzw. mit Hilfe von Tabelle 6.2 ergibt sich eine Filterordnung von  $n = 5$ . Die Filterkoeffizienten  $a_i$  errechnen wir nach Gleichung (6.23). Die erste Spalte der Tabelle 6.3 zeigt die Zahlenwerte.

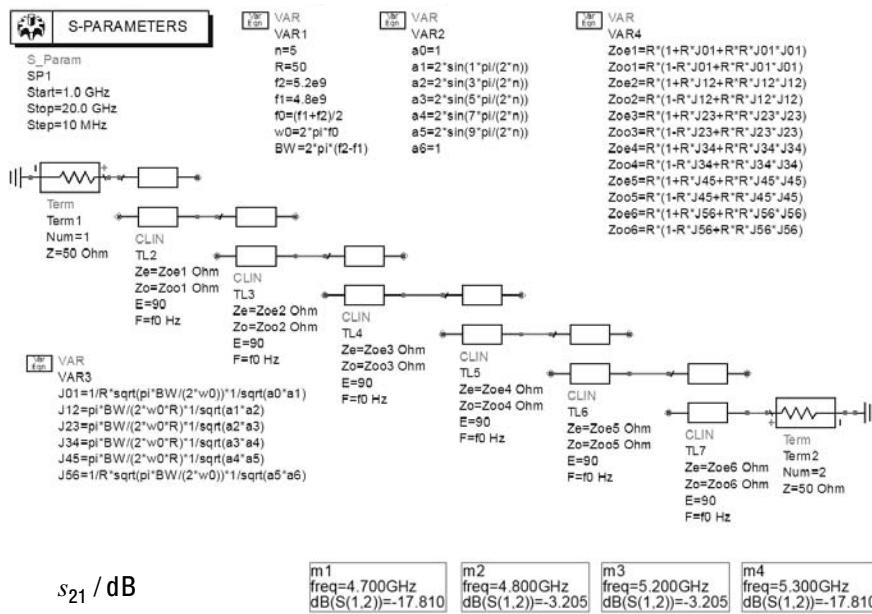
**Tabelle 6.3** Filterkoeffizienten, *Even-mode*- und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderstände sowie Leiterbahn- und Spaltbreiten für eine Mikrostreifenleitungsrealisierung

$a_i$	$Z_{0e,i}/\Omega$	$Z_{0o,i}/\Omega$	$w_i/\mu\text{m}$	$s_i/\mu\text{m}$
$a_0 = 1$				
$a_1 = 0,618$	$Z_{0e,1} = 82,71$	$Z_{0o,1} = 37,62$	$w_1 = 359,9$	$s_1 = 162,9$
$a_2 = 1,618$	$Z_{0e,2} = 57,07$	$Z_{0o,2} = 44,51$	$w_2 = 572,6$	$s_2 = 739,9$
$a_3 = 2$	$Z_{0e,3} = 53,74$	$Z_{0o,3} = 46,75$	$w_3 = 587,8$	$s_3 = 1195,7$
$a_4 = 1,618$	$Z_{0e,4} = 53,74$	$Z_{0o,4} = 46,75$	$w_4 = 587,8$	$s_4 = 1195,7$
$a_5 = 0,618$	$Z_{0e,5} = 57,07$	$Z_{0o,5} = 44,51$	$w_5 = 572,6$	$s_5 = 739,9$
$a_6 = 1$	$Z_{0e,6} = 82,71$	$Z_{0o,6} = 37,62$	$w_6 = 359,9$	$s_6 = 162,9$

Über die Gleichungen (6.33) bis (6.39) berechnen wir die *Even-mode*- und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderstände  $Z_{0e,i}$  und  $Z_{0o,i}$ . Mit einem Schaltungssimulator realisieren wir die Schaltung zunächst mit *idealen gekoppelten Leitungen* (Elektrische Länge  $90^\circ \equiv \lambda/4$ ). Bild 6.25 zeigt die Schaltung und die resultierenden Streuparameter. Das vorgegebene Toleranzschema wird nahezu eingehalten. Neben dem Durchlassbereich um

die Frequenz  $f_0$  treten weitere (parasitäre) Durchlassbereiche bei allen ungeradzahligen Vielfachen der Frequenz  $f_0$  auf ( $3f_0, 5f_0, \dots$ ). Bei allen geradzahligen Vielfachen der Frequenz  $f_0$ , also ( $2f_0, 4f_0, \dots$ ), kommt es zu Dämpfungspolen ( $A \rightarrow \infty$ ) bzw. Übertragungsnullstellen ( $s_{21}/\text{dB} \rightarrow -\infty$ ).

### Edge-coupled-line-Filter (mit idealen Leitungen)

 $s_{21} / \text{dB}$ 

m1  
freq=4.700GHz  
 $\text{dB}(S(1,2))=-17.810$

m2  
freq=4.800GHz  
 $\text{dB}(S(1,2))=-3.205$

m3  
freq=5.200GHz  
 $\text{dB}(S(1,2))=-3.205$

m4  
freq=5.300GHz  
 $\text{dB}(S(1,2))=-17.810$

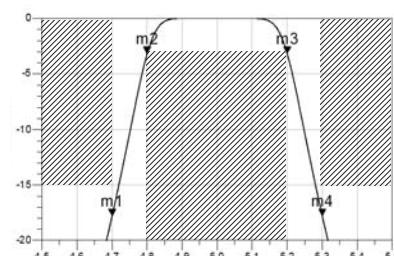
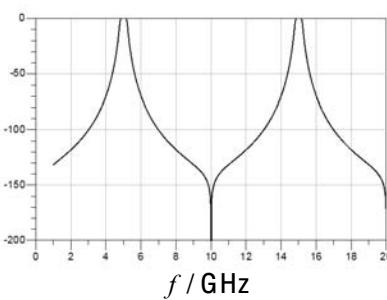
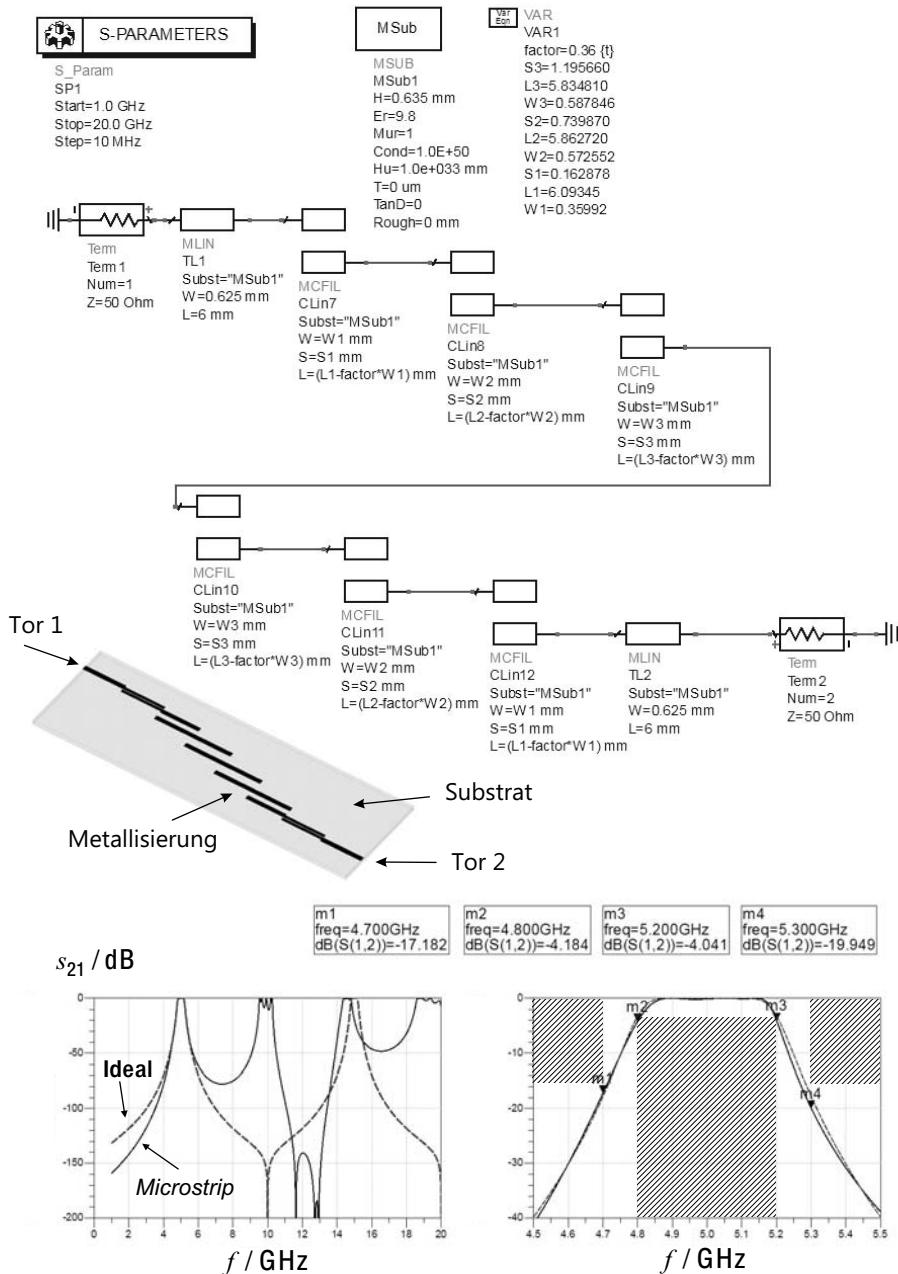


Bild 6.25 Bandpassfilter (Realisierung mit idealen gekoppelten Leitungen)

Wir wollen den zuvor mit idealen gekoppelten Leitungen entworfenen Filter nun mit Mikrostreifenleitungen auf Aluminiumoxid ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) realisieren (Bild 6.26). Die Substrathöhe betrage  $h = 635 \mu\text{m}$  und die relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r = 9.8$ . Für den Aufbau benötigen wir zunächst die zu den *Even-mode*- und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderständen nach Tabelle 6.3 gehörenden Leiterbahnbreiten  $w_i$  und Spaltbreiten  $s_i$ . Diese ermitteln wir mit dem Programm ADS. Die Ergebnisse sind in den letzten beiden Spalten der Tabelle 6.3 aufgeführt.

**Edge-coupled-line-Filter (mit Microstrip-Leitungen)****Bild 6.26** Bandpassfilter (Realisierung mit *Microstrip*-Leitungen)

Die Längen der  $\lambda/4$ -langen Leitungssegmente werden ebenfalls mit dem Programm ADS ermittelt und liegen im Bereich von ca. 6 mm. Die genauen Längen können nicht exakt angegeben werden, denn es sind folgende Aspekte zu berücksichtigen:

- Bei einer Mikrostreifenleitung verteilen sich die elektrischen und magnetischen Felder unterschiedlich auf die Raumbereiche Substrat und Luft (siehe Bild 4.21b). Folglich breiten sich die *Even-mode*- und *Odd-mode*-Wellen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus und besitzen unterschiedliche Wellenlängen. Dieser Effekt führt zu Unsicherheiten bei der Bestimmung der Wellenlänge.
- Bei einer Mikrostreifenleitung mit offenem Leitungsabschluss reichen die Felder am Ende der Leitung über diese hinaus, so dass diese länger wirkt. Der Effekt kann durch eine Endkapazität berücksichtigt werden. Die Leitungen müssen also für die Realisierung gekürzt werden.
- Die einzelnen Leitungssegmente zeigen auch untereinander eine Verkopplung, die im Schaltungssimulator nicht berücksichtigt wird. Durch eine Simulation mit einem EM-Simulator kann dieser Effekt berücksichtigt werden.

Die endgültige Schaltung mit *Mikrostreifenleitungen* ist in Bild 6.26 dargestellt. Der Vergleich mit den Ergebnissen der idealen Leitungen offenbart einige Aspekte.

- Es tritt nun auch bei ganzzahligen Vielfachen der Frequenz  $f_0$  ( $2f_0, 4f_0, \dots$ ) ein *parasitärer Durchlassbereich* auf. Dieser ist Folge unvermeidlicher Fehlanpassungen zwischen den Leitungssegmenten [Matt80].
- Aufgrund der Dispersion der Mikrostreifenleitung liegt der zweite parasitäre Durchlassbereich bei einer Frequenz, die etwas kleiner ist als  $3f_0$ .
- Die eigentliche Filtercharakteristik ist gut getroffen, lässt sich aber durch Optimierung und Tuning der Leitungslängen in einem Schaltungssimulator weiter verbessern.

■

### 6.5.2 Seitengekoppelte Filter (*Hairpin-Filter*)

Die in Abschnitt 6.5.1 vorgestellten seitengekoppelten Filter haben den Nachteil großer Bau-länge. Durch eine veränderte Anordnung der gekoppelten Leitungsstücke entsteht ein *Hairpin-Filter* (Bild 6.27) mit kompakterem Aufbau.

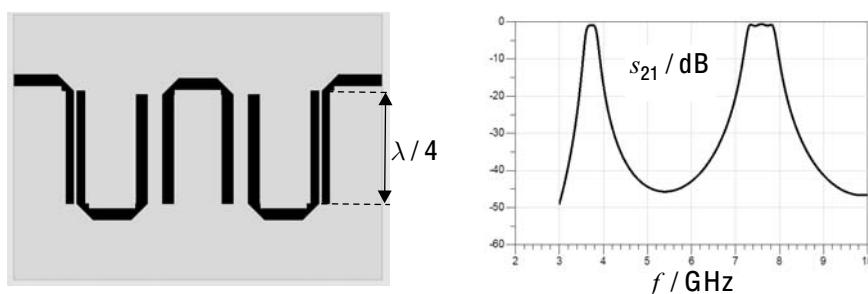


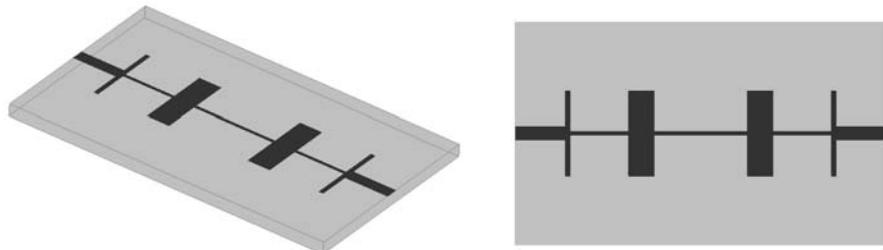
Bild 6.27 Hairpin-Mikrostreifenleitungsfilter

### 6.5.3 Stepped-impedance-Filter

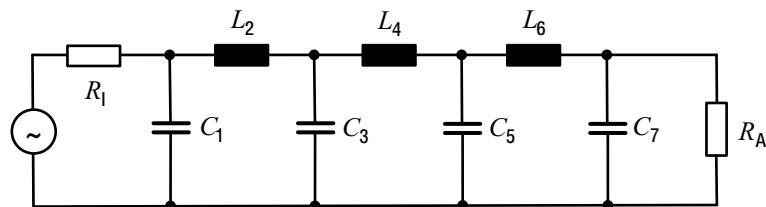
Die seitengekoppelten Filter (*Edge-coupled-line-Filter* und *Hairpin-Filter*) stellen Bandpässe dar, die Ein- und Ausgang aufgrund der Leitungsunterbrechungen für Gleichspannungssignale sperren. Soll aber eine aktive Komponente mit einem Gleichstrom über das Filter versorgt werden, so benötigt man eine galvanische Verbindung zwischen Ein- und Ausgang.

Ein Filter, welches dies realisiert, ist das sogenannte *Stepped-impedance-Filter* (Bild 6.28a). Der Name zeigt an, dass der Filter aus einer seriellen Anordnung von Mikrostreifenleitungen mit unterschiedlichen Leitungswellenwiderständen besteht. Aus Abschnitt 4.3 wissen wir, dass schmale Leitungen hohe Leitungswellenwiderstände und breite Leitungen kleine Leitungswellenwiderstände besitzen. Bei niedrigen Frequenzen stellen die schmalen Leitungsstücke serielle Induktivitäten und die breiten Leitungsstücke parallele Kapazitäten dar [Heue09] (Bild 6.28b).

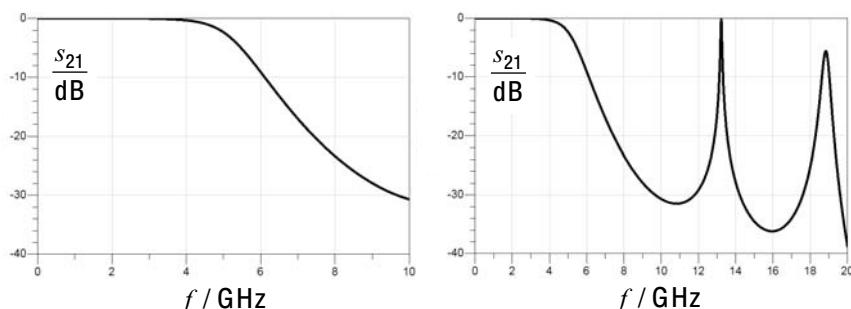
(a)



(b)



(c)



**Bild 6.28** Stepped-impedance-Filter: (a) Realisierung als Mikrostreifenleitung, (b) Ersatzschaltbild bei niedrigen Frequenzen, (c) Transmissionsfaktor

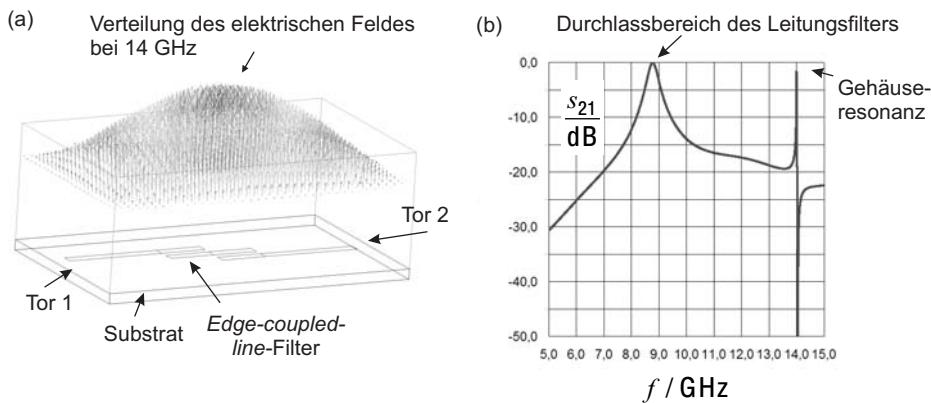
Dieses Verhalten wird bei niedrigen Frequenz auch direkt aus der Geometrie ersichtlich. Die breiten Leitungen erinnern mit der darunterliegenden Massefläche an einen Plattenkondensator. Eine dünne Leitung weist in ihrer Umgebung hohe magnetische Feldstärkewerte auf und besitzt daher eine hohe Induktivität.

Bei hohen Frequenzen ist das Verhalten komplexer und es stellen sich Durchlassbereiche ein (Bild 6.28c), so dass der Filter auch als Bandpass verwendet werden kann.

#### 6.5.4 Metallisch geschirmte Filter (Gehäuseresonanzen)

Planare Filter und andere Schaltungsteile werden in der Praxis oft in quaderförmige Gehäuse eingebaut, um Störreinkopplungen und Wechselwirkung mit anderen Schaltungsteilen zu vermeiden. Diese quaderförmigen Gehäuse stellen letztlich unbeabsichtigt Hohlraumresonatoren (siehe Abschnitt 4.5.6) dar, deren Abmessungen Einfluss auf das Verhalten der Schaltung nehmen können.

Bild 6.29 zeigt das Beispiel eines *Edge-coupled-line*-Filters mit einem Durchlassbereich bei ca. 8,7 GHz. Das Filter wird in ein Gehäuse eingebaut und zeigt nun einen weiteren sehr schmalen Durchlassbereich bei 14 GHz. In der Verteilung des elektrischen Feldes für  $f = 14$  GHz in Bild 6.29a erkennen wir den typischen Verlauf einer  $H_{101}$ -Resonanz mit vertikal orientiertem elektrischen Feld und sinusförmiger Variation in die Länge und Querrichtung. Mit Gleichung (4.55) kann für gegebene Werte von Länge  $c = 19,6$  mm und Breite  $a = 12$  mm näherungsweise die Resonanz zu  $f_{R,101} \approx 14,6$  GHz bestimmt werden. Da der Filter und das Substrat einen Teil des quaderförmigen Volumens einnehmen, liefert die Formel – die für einen leeren Hohlraumresonator gilt – nur einen Näherungswert.



**Bild 6.29** Edge-coupled-line-Filter in metallischem Gehäuse: (a) Verteilung des elektrischen Feldes in einer Ebene oberhalb des Filters; (b) Streuparameter mit zusätzlichem schmalen Durchlassbereich infolge der Gehäuseresonanz

Falls die zusätzliche Resonanz das Schaltungsverhalten in unzulässiger Weise beeinflusst, also zum Beispiel im Bereich von 14 GHz gerade eine gewisse Mindestdämpfung gefordert ist, so kann das Resonanzverhalten durch konstruktive Maßnahmen verändert werden.

- Eine Änderung der Abmessungen des Gehäuses kann dazu genutzt werden, die Resonanz in einen unkritischeren Bereich zu verschieben. Eine Vergrößerung der Abmessungen verschiebt die Resonanzfrequenz nach unten, eine Verkleinerung nach oben. Die Höhenabmessung hat auf die  $H_{101}$ -Resonanz jedoch keine Auswirkung.
- Durch das Einbringen verlustbehafteter Materialien in das Gehäuse kann die Resonanz gedämpft werden. Da das zusätzliche Material aber die eigentliche Schaltung nicht beeinflussen soll, bietet es sich an, dieses direkt unter dem Gehäusedeckel flächig anzubringen.

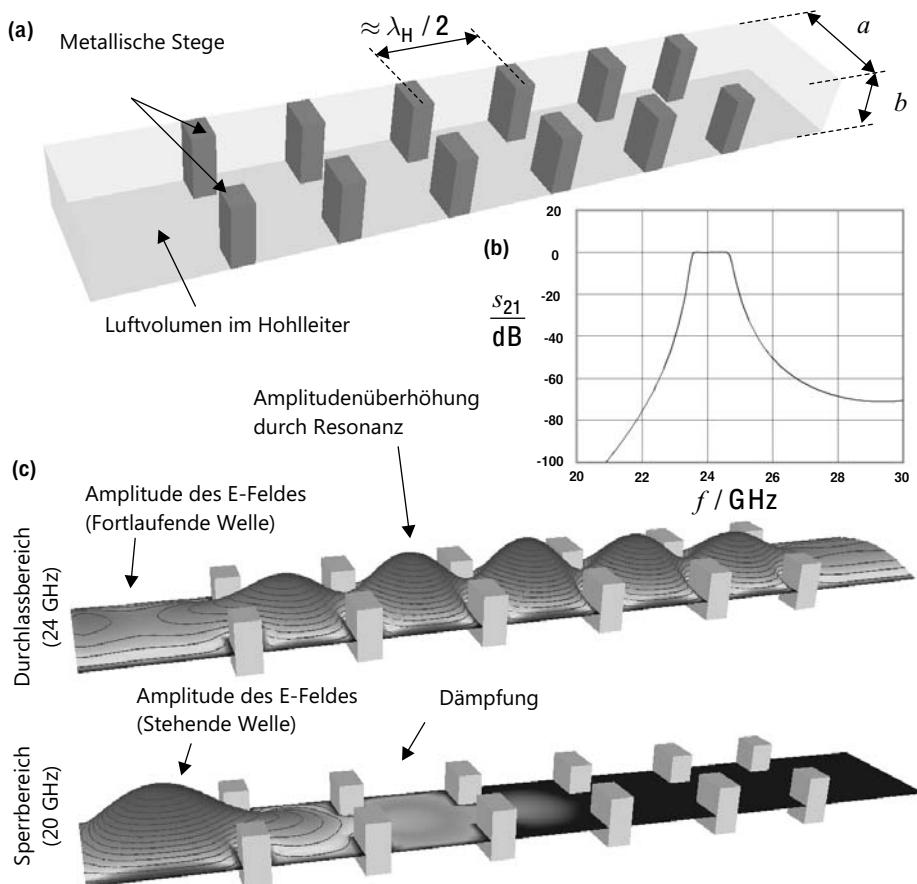
Das Beispiel des Filters mit Gehäuseresonanz zeigt, dass der Entwurf einer Schaltung nicht mit dem isolierten Design des eigentlichen Filters zu Ende ist, sondern die Einbausituation mit Bedacht werden muss. Wichtig hierbei ist ein fundiertes Verständnis feldtheoretischer Zusammenhänge. Feldsimulatoren bieten in der Praxis gute Berechnungsmöglichkeiten.

### 6.5.5 Hohlleitungsfilter

Das beim *Edge-coupled-line*-Filter verwendete Konzept der gekoppelten  $\lambda/2$ -langen Mikrostreifenresonatoren lässt sich auch auf Hohlleiterstrukturen übertragen. Hierzu werden in einen Hohlleiter metallische Stege im Abstand einer halben Hohlleiterwellenlänge  $\lambda_H$  eingezogen (Bild 6.30a). Es entstehen im Hohlleiter resonante Bereiche mit den Abmessungen  $a \times b \times \lambda_H/2$ . Die einzelnen Bereiche werden über die zwischen den Stegen verbleibenden Öffnungen miteinander gekoppelt. Über die Breite dieser Öffnungen kann die Kopplung und damit das Filterverhalten gesteuert werden.

Aus dem Verlauf des Streuparameters  $s_{21}$  in Bild 6.30b erkennen wir, dass der gezeigte Filter einen Durchlassbereich um 24 GHz besitzt. Für zwei ausgewählte Frequenzen (20 und 24 GHz) ist zudem die Amplitude des elektrischen Feldes in einer horizontalen Ebene dargestellt. Im Durchlassbereich des Filters (24 GHz) stellt sich vor dem Filter eine fortlaufende Welle ein, die den Filter am anderen Tor wieder verlässt. Wir erkennen dies an dem konstanten Amplitudenverlauf (siehe Abschnitt 3.1.8). In den  $\lambda_H/2$ -langen Kammern des Filters gibt es resonante Überhöhungen der Feldamplitude. Im Sperrbereich des Filters tritt keine Resonanz auf. Die Welle durchläuft die Kammern nicht, sondern wird reflektiert, so dass wir vor dem Filter eine stehende Welle mit ortsfesten Minima und Maxima erhalten.

Hohlleiterfilter können im Gegensatz zu Mikrostreifenleitungsfiltern auch bei höheren Leistungen verwendet werden. Die geringeren Verluste in Hohlleitern gegenüber Mikrostreifenleitungsfiltern erlauben geringere Einfügedämpfungen und steilere Filterflanken auch bei hohen Frequenzen.



**Bild 6.30** Hohlleiterfilter: (a) Aufbau, (b) Übertragungsverhalten und (c) Betrag des elektrischen Feldes im Durchlass- und Sperrbereich

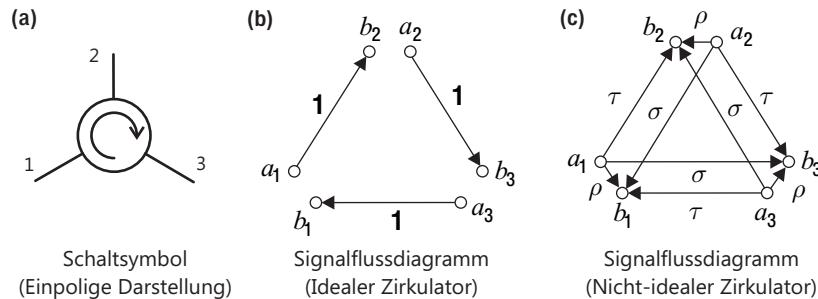
## ■ 6.6 Zirkulatoren

Die bisher betrachteten Schaltungen (Anpassnetzwerke, Filter) besaßen zwei Tore. Wir wollen nun Schaltungen betrachten, die drei Tore aufweisen. Dreitore zeichnen sich nach Abschnitt 5.4.7 dadurch aus, dass die drei Eigenschaften „allseitige Anpassung“, „Reziprozität“ und „Verlustlosigkeit“ nicht gleichzeitig erreicht werden können. Auf eine der Eigenschaften muss also verzichtet werden. Dies führt auf zwei wichtige Schaltungselemente: Den *Zirkulator* und den *Leistungsteiler*: Bei Zirkulatoren verzichtet man auf die Reziprozität und bei Leistungsteilern auf die Verlustlosigkeit (siehe Abschnitt 6.7).

Ein idealer Zirkulator überträgt Signale unverändert von Tor 1 zu Tor 2, von Tor 2 zu Tor 3 und von Tor 3 zu Tor 1 (Bild 6.31a). Das Signalflussdiagramm des idealen Zirkulators veranschaulicht die Transmission zwischen den verschiedenen Toren: Die Transmissionsfaktoren  $s_{21}$ ,  $s_{32}$  und  $s_{13}$  besitzen betraglich den Wert Eins (Bild 6.31b). Bei Vernachlässigung der Signallaufzeit

## 212 6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

ist dieser Transmissionsfaktor  $s_{21} = s_{32} = s_{13} = \tau = 1$ . Bei Hinzunahme der endlichen Abmessungen setzt man einen Phasenterm  $e^{-j\varphi}$  an.



**Bild 6.31** (a) Schaltsymbol und Signalflussdiagramme eines (b) idealen und (c) nicht-idealen Zirkulators

Der ideale Zirkulator ist ferner allseitig angepasst ( $s_{11} = s_{22} = s_{33} = \rho = 0$ ) und die Isolation entgegen der Flussrichtung ist unendlich groß:  $\sigma = 0$ . Der Zirkulator ist *nicht reziprok*, da gilt  $s_{ij} \neq s_{ji}$ .

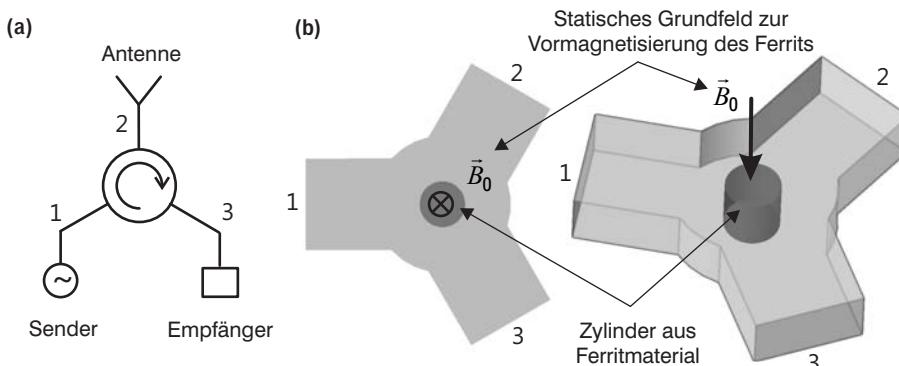
$$\mathbf{S}_{Z,\text{ideal}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_{Z,\text{ideal},\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-j\varphi} \\ e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

Beim nicht-idealen Zirkulator können alle neun Streuparameter von null verschieden sein. In diesem Fall gilt die allgemeine Streumatrix nach Gleichung (6.42) und das vollständige Signalflussdiagramm in Bild 6.31c.

$$\mathbf{S}_Z = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & \tau \\ \tau & \rho & \sigma \\ \sigma & \tau & \rho \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Ein Zirkulator lässt sich in der Praxis zum Aufbau einer Sende-Empfangsweiche verwenden: Vom Sender (Tor 1) läuft das Signal zur Antenne (Tor 2) und wird dort abgestrahlt. Ein von der Antenne aufgenommenes Empfangssignal läuft zum Empfänger (Tor 3) (Bild 6.32a). Um die notwendige Isolation von Sender und Empfänger zu erhalten, kann die Schaltung zusätzlich um Filter erweitert werden.

Zirkulatoren lassen sich vorteilhaft in Mikrostreifen-, Streifenleitungs- oder Hohlleitertechnik realisieren [Jans92] [Zink00]. Beim Aufbau eines Zirkulators werden vormagnetisierte Ferrite verwendet. Bild 6.32b zeigt schematisch einen Zirkulator in Rechteckhohlleitertechnik. Das statische Magnetfeld  $\vec{B}_0$  – meist erzeugt von einem Permanentmagneten – magnetisiert einen Ferritzylinder, der in der Mitte eines zylindrischen Hohlraumes sitzt. Von diesem gehen drei Hohlleiterabschnitte unter einem Winkel von jeweils  $120^\circ$  zueinander ab. In dem zylindrischen Hohlraum wird durch die an Tor 1 zulaufende Hohlleitergrundwelle eine  $E_{110}$ -Schwingung angeregt. Der Schwingungszustand kann in zwei gegensinnig in Umfangsrichtung laufende Wellenanteile zerlegt werden. Durch das vormagnetisierte Ferrit sind die Ausbreitungseigenschaften für die Wellenanteile verschieden. Durch geeignete Wahl des Gleichfeldes  $\vec{B}_0$  kann erreicht werden, dass die an Tor 1 zulaufende Welle zu Tor 2 weitergeleitet wird und Tor 3 entkoppelt ist.



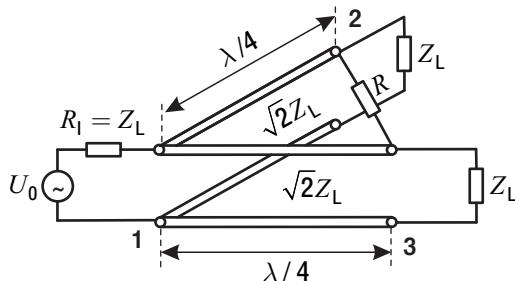
**Bild 6.32** (a) Verwendung eines Zirkulators als Sende-Empfangsweiche; (b) Aufbau in Rechteckhohlleitertechnik mit einem vormagnetisierten Ferritzylinder

## ■ 6.7 Leistungsteiler

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir den Zirkulator als allseitig angepasstes, verlustloses, aber *nicht reziprokes* Dreitor betrachtet. Wir wollen nun ein Bauteil betrachten, welches allseitig angepasst, reziprok, aber *nicht verlustfrei* ist: den Leistungsteiler.

### 6.7.1 Wilkinson-Leistungsteiler

Im Zusammenhang mit der  $\lambda/4$ -Transformation zur Impedanzanpassung haben wir in Abschnitt 6.3.2.1 einen einfachen Leistungsteiler betrachtet, der jedoch ausgangsseitig nicht angepasst war. Mit Hilfe von zwei Leitungen und einem Widerstand  $R$  kann ein Leistungsteiler mit allseitiger Anpassung realisiert werden. Der prinzipielle Aufbau dieses Wilkinson-Leistungsteilers ist in Bild 6.33 dargestellt.



**Bild 6.33** Grundsätzlicher Aufbau eines Wilkinson-Leistungsteilers

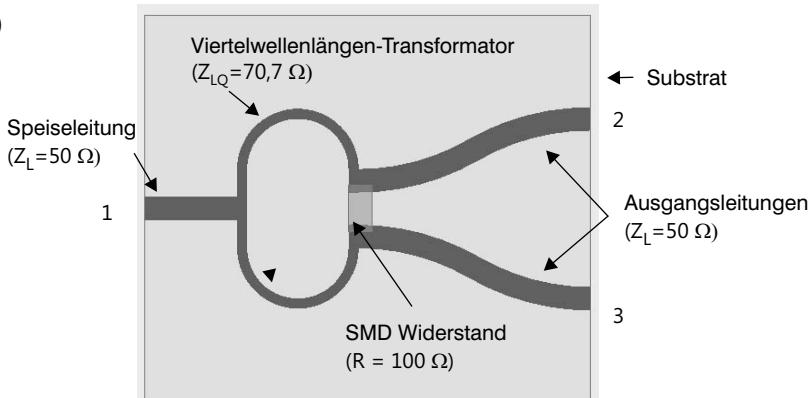
Die an Tor 1 zulaufende Leitung  $P$  wird zu gleichen Teilen auf die Ausgangstore 2 und 3 aufgeteilt. Aufgrund des symmetrischen Aufbaus der Schaltung bezüglich der Tore 2 und 3 liegt bei Speisung über Tor 1 über dem Widerstand  $R$  keine Spannung an. Es fließt daher über den Widerstand  $R$  auch kein Strom, so dass die Leistungsteilung verlustfrei erfolgt. Der Widerstand  $R$  ist lediglich notwendig, um auch ausgangsseitig eine Anpassung zu erzielen.

## 214 6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

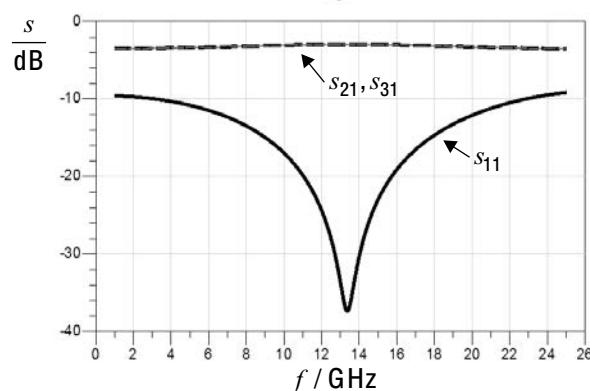
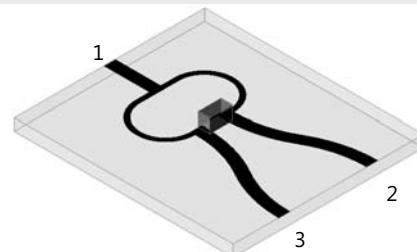
Die beiden  $\lambda/4$ -Transformatoren mit Leitungswellenwiderständen von  $Z_{LQ} = \sqrt{2}Z_L$  transformieren die  $50\Omega$ -Abschlüsse der Ausgangstore auf eine Eingangsimpedanz von jeweils  $100\Omega$ , die dann als Parallelschaltung den angepassten Abschluss ( $50\Omega$ ) an Tor 1 bilden.

Ein Wilkinsonteiler kann in Mikrostreifentechnik realisiert werden (Bild 6.34). Der notwendige Querwiderstand von  $R = 2Z_L$  ist hier als SMD-Widerstand berücksichtigt. Die Darstellung der Streuparameter zeigt die Anpassung, die gleichmäßige Leistungsaufteilung und die Bandbreite der Schaltung. Sollte die Bandbreite in einem speziellen Anwendungsfall nicht ausreichend sein, so kann durch mehrstufige Auslegung ein breitbandigeres Verhalten erreicht werden [Heue09].

(a)



(b)



**Bild 6.34** Wilkinson-Leistungsteiler in Mikrostreifentechnik: (a) Aufbau und (b) Streuparameter

Bei der Mittenfrequenz lautet die Streumatrix des idealen Wilkinson-Leistungsteilers:

$$\mathbf{S}_{\text{Wilkinson}} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.43)$$

Wir erkennen sofort die allseitige Anpassung und die Reziprozität. Dass die Schaltung verlustbehaftet ist, lässt sich bereits aus der Verwendung eines ohmschen Widerstandes ableiten. Das Vorliegen einer verlustbehafteten Schaltung kann aber auch über die Unitaritätsbeziehung gezeigt werden (siehe Übung 6.6).

## 6.7.2 Leistungsteiler mit ungleicher Leistungsaufteilung

Ein Leistungsteiler lässt sich auch so entwerfen, dass er die Leistung *ungleichmäßig* zwischen den Ausgängen aufteilt. Als Beispiel für eine Entwurfsmöglichkeit wählen wir eine allgemeine Designformeln für ungleiche Leistungsteilung nach [Ahn06]. Hierbei müssen die Leitungswellenwiderstände aus Bild 6.35a folgendermaßen berechnet werden.

$$Z_{\text{Lb}} = Z_L \sqrt{1 + \left( \frac{k}{1-k} \right)^2} \quad (6.44)$$

$$Z_{\text{La}} = \frac{1-k}{k} Z_{\text{Lb}} \quad (6.45)$$

$$R = 2Z_L \quad (6.46)$$

Die Größe  $k$  entspricht dem Anteil der Eingangsleistung, die am Ausgang 2 (gespeist über den Arm mit dem Leitungswellenwiderstand  $Z_{\text{La}}$ ) zugeleitet wird.

$$k = \frac{P_{\text{wb2}}}{P_{\text{wal}}} \quad (6.47)$$

Für gleiche Leistungsteilung ( $k = 0,5$ ) auf die Ausgangstore sind – wie bereits weiter oben gesehen – die Leitungswellenwiderstände gleich und wir erhalten den Wilkinson-Leistungsteiler aus Abschnitt 6.7.1 ( $Z_{\text{La}} = Z_{\text{Lb}} = \sqrt{2}Z_L$ ).

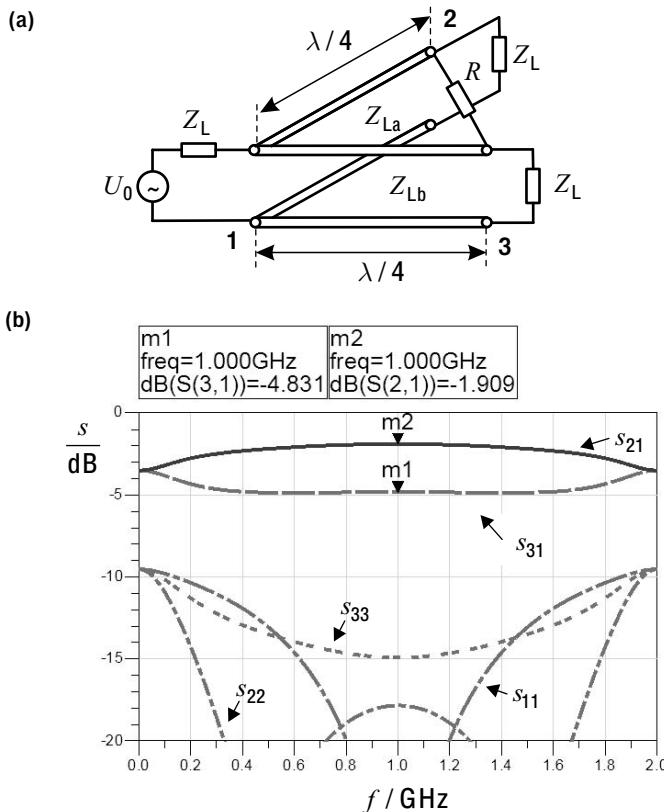
### Beispiel 6.9 Leistungsteiler mit 2:1-Leistungsteilung

Es soll ein Leistungsteiler gemäß Abschnitt 6.7.2 für eine Frequenz von  $f = 1$  GHz entworfen werden, der die an Tor 1 zugeführte Leistung an den Toren 2 und 3 im Verhältnis 2:1 aufteilt. Die theoretisch zu erwartenden Streuparameterwerte lauten  $s_{21} = -1,76$  dB und  $s_{31} = -4,77$  dB. Der Unterschied beträgt 3 dB, was im Leistungsbereich einem Verhältnis von 2:1 entspricht.

Für den Entwurf berechnen wir zunächst  $k = 2/3$ . Aus den Gleichungen (6.44) bis (6.46) erhalten wir

$$Z_{\text{Lb}} = \sqrt{5}Z_L \quad \text{und} \quad Z_{\text{La}} = \frac{\sqrt{5}}{2}Z_L . \quad (6.48)$$

Die Leitungslängen wählen wir wieder zu einer Viertelwellenlänge (Bild 6.35a). Die Streuparameter aus einer Schaltungssimulation sehen wir in Bild 6.35b. Die Ergebnisse der Transmissionsfaktoren  $s_{21}$  und  $s_{31}$  sind nahe an den theoretischen Werten.



**Bild 6.35** (a) Prinzip des Leistungsteilers mit ungleicher Leistungsteilung und (b) Simulationsergebnis

Der Eingang (Tor 1) ist sehr gut angepasst, die Ausgangsreflexionsfaktoren ( $s_{22}$  und  $s_{33}$ ) sind in der Regel ausreichend. ■

## ■ 6.8 Branchline-Koppler

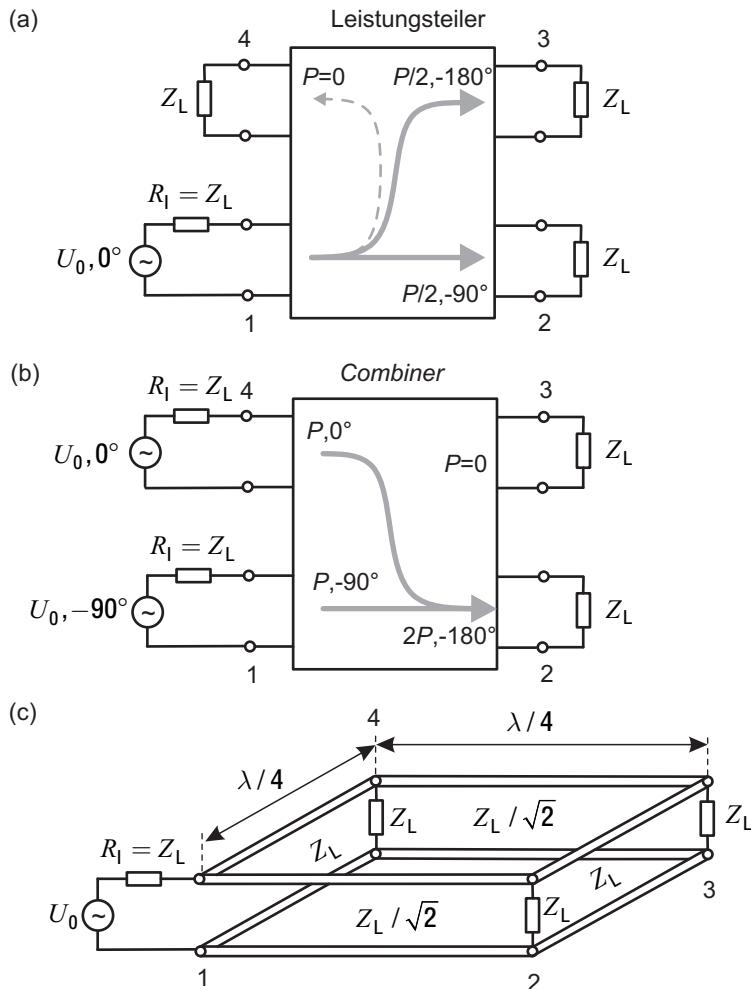
Der *Branchline-Koppler* ist ein Viertor und kann wahlweise als Leistungsteiler oder als Signal-*Combiner* – zur Zusammenführung zweier Signale – verwendet werden.

### 6.8.1 Konventioneller 3-dB-Koppler

Bild 6.36a zeigt die Funktion als 3-dB-Leistungsteiler: Das an Tor 1 zugeführte Signal wird zu gleichen Teilen auf die Tore 2 und 3 aufgeteilt. Tor 4 ist entkoppelt. Die Phase zwischen den beiden Ausgangssignalen ist  $90^\circ$ . Bild 6.36b zeigt die Funktion als Signal-*Combiner*. An den

Toren 1 und 4 eingespeiste Signale mit gleicher Amplitude, aber  $90^\circ$  Phasendifferenz, werden am Tor 2 zusammengeführt. Tor 3 ist entkoppelt.

Der *Branchline-Koppler* besteht aus zwei Serienleitungen (Leitungswellenwiderstände  $Z_L/\sqrt{2}$ ) und zwei Querleitungen (Leitungswellenwiderstände  $Z_L$ ), die jeweils eine Viertelwellenlänge lang sind (Bild 6.36c). Die Eigenschaften gelten also genau nur für eine Frequenz (Mittenfrequenz). Innerhalb eines Frequenzbereichs um diese Mittenfrequenz gelten die Eigenschaften aber näherungsweise.



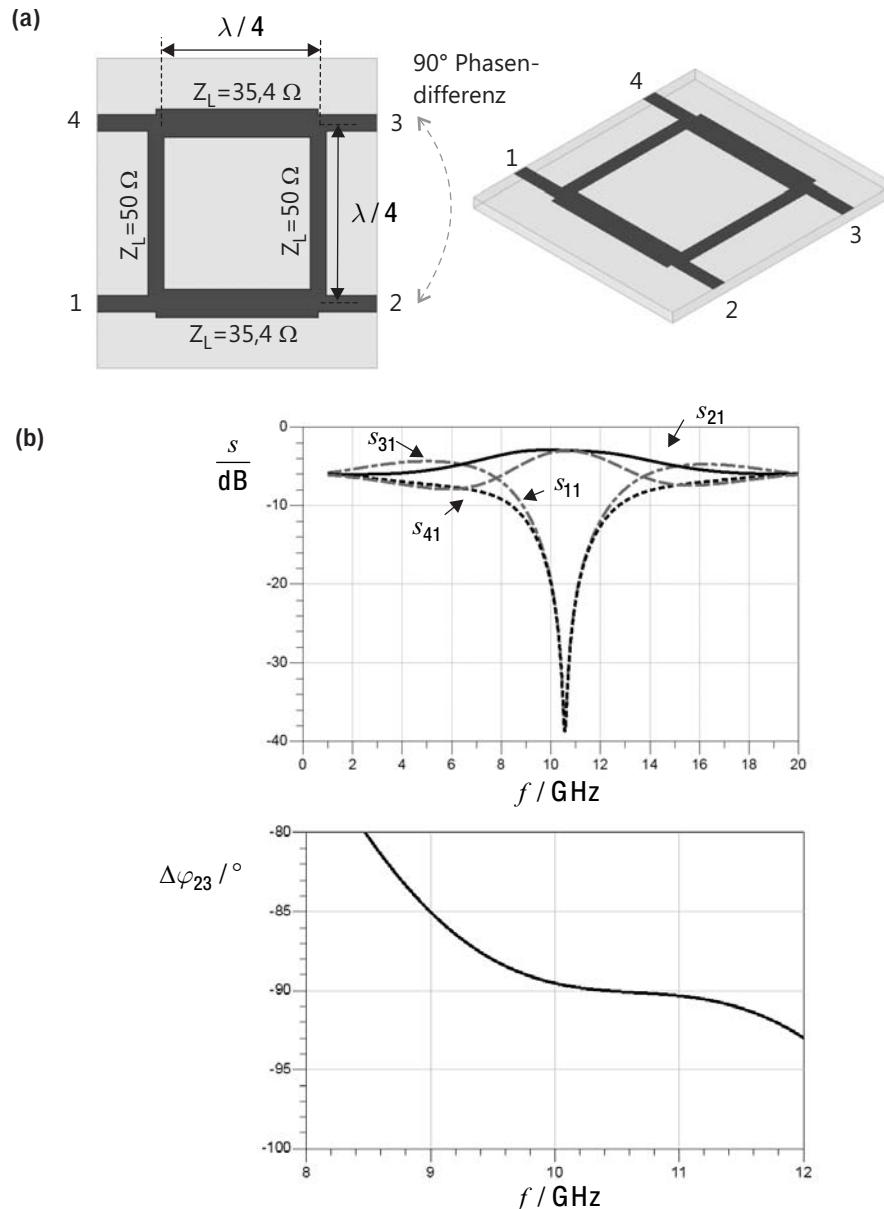
**Bild 6.36** Branchline-Koppler: (a) 3 dB/90°-Leistungsteiler, (b) Combiner und (c) Aufbau

Bei der Mittelfrequenz lautet die Streumatrix des idealen *Branchline-Kopplers*:

$$\mathbf{S}_{\text{Branchline}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.49)$$

## 218 6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

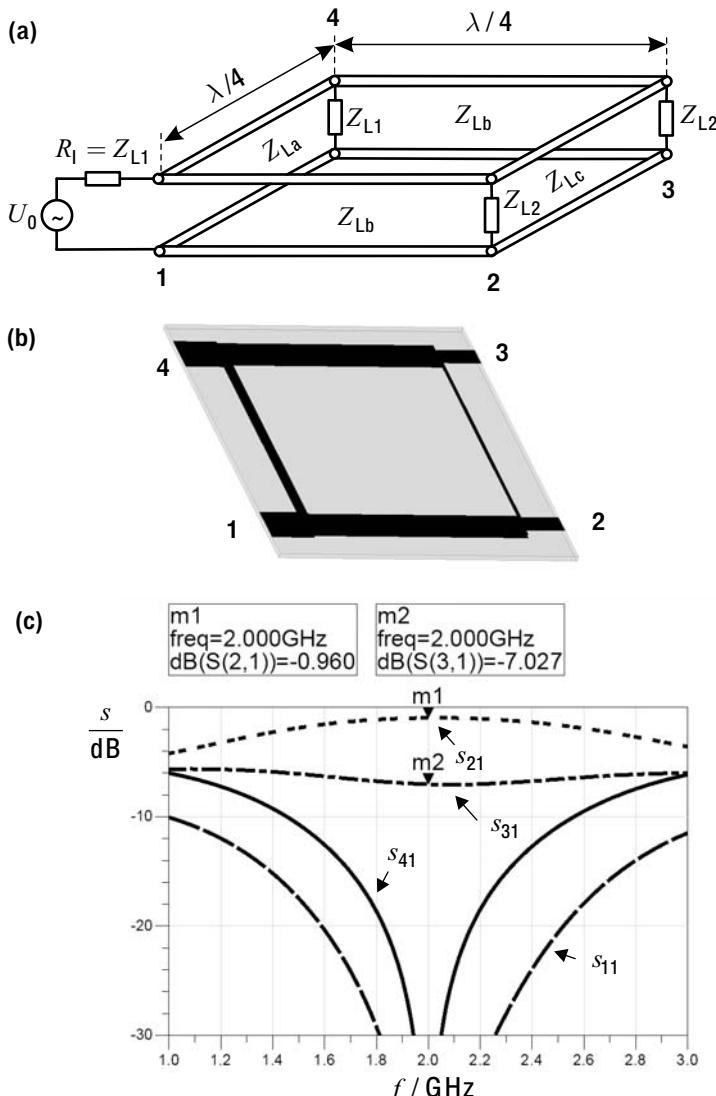
Bild 6.37a zeigt die Realisierung mit Mikrostreifenleitungen. Die Frequenzabhängigkeit des Betrages der Streuparameter ist in Bild 6.37b dargestellt. Die Phasendifferenz zwischen den Ausgängen 2 und 3 beträgt bei der Mittenfrequenz  $90^\circ$ .



**Bild 6.37** Branchline-Koppler in Mikrostreifentechnik: (a) Aufbau und (b) Streuparameter

## 6.8.2 Ungleiche Leistungsaufteilung und Impedanztransformation

Durch Veränderung der Leitungswellenwiderstände der Längs- und Quer-Leitungen kann auch eine *ungleiche Leistungsteilung* erreicht werden (*Unequal-split branchline coupler*). Gleichzeitig kann eine Impedanzanpassung vorgenommen werden, wobei die Tore 1 und 4 an die Bezugsimpedanz  $Z_{L1}$  und die Tore 2 und 3 an die Bezugsimpedanz  $Z_{L2}$  angepasst sein sollen (Bild 6.38a).



**Bild 6.38** Entworfener Koppler mit Leistungsaufteilung im Verhältnis 4:1 (a) Prinzipieller Aufbau, (b) Realisierung mir Mikrostreifenleitungen und (c) Streuparameter

**220**    **6** Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

Wir betrachten dazu eine allgemeine Designformel nach [Ahn06]:

$$Z_{La} = \frac{Z_{L1}}{k} \quad (\text{Querarm eingangsseitig}) \quad (6.50)$$

$$Z_{Lb} = \sqrt{\frac{Z_{L1} Z_{L2}}{1 + k^2}} \quad (\text{Längsarm}) \quad (6.51)$$

$$Z_{Lc} = \frac{Z_{L2}}{k} \quad (\text{Querarm eingangsseitig}) \quad (6.52)$$

mit

$$k = \left| \frac{s_{31}}{s_{21}} \right| = \sqrt{\frac{P_{wb3}}{P_{wb2}}} \quad . \quad (6.53)$$

### Beispiel 6.10 Entwurf eines *Branchline*-Kopplers mit ungleicher Leistungsaufteilung

Ein *Branchline*-Koppler soll eingangsseitig (Tor 1 und 4) an  $Z_{L1} = 50\Omega$  und ausgangsseitig (Tor 2 und 3) an  $Z_{L2} = 75\Omega$  angepasst sein (Bild 6.38a). Die Leistung zwischen den Ausgängen soll ungleichmäßig aufgeteilt werden. Es gelte  $|s_{21}| = 2|s_{31}|$  bei einer Frequenz von  $f = 2$  GHz. Die Leistung wird also zwischen den Ausgängen 2 und 3 im Verhältnis 4:1 aufgeteilt. 80% der Eingangsleistung gehen an Tor 2 und 20% der Eingangsleistung an Tor 3.

Mit Gleichung (6.53) ist  $k = 0,5 (= -6\text{ dB})$ . Über die Gleichungen (6.50) bis (6.52) erhalten wir

$$Z_{La} = 100\Omega \quad ; \quad Z_{Lb} = 54,8\Omega \quad ; \quad Z_{Lc} = 150\Omega \quad . \quad (6.54)$$

Bild 6.38a und Bild 6.38b zeigen den Koppler realisiert mit idealen Leitungsstücken und realisiert in Streifenleitungstechnik (Substratparameter:  $h = 1,524$  mm,  $\epsilon_r = 2,2$ ). Die Speiseleitungen an den Toren 1 und 4 haben einen Leitungswellenwiderstand von  $50\Omega$  und sind daher breiter als die Anschlussleitungen an den Toren 2 und 3 mit einem Leitungswellenwiderstand von  $75\Omega$ . Die theoretisch zu erwartenden Streuparameterwerte von  $s_{21} = -0,969\text{ dB} \approx -1\text{ dB}$  und  $s_{31} = -6,989\text{ dB} \approx -7\text{ dB}$  werden sehr gut erreicht (Bild 6.38c).

Aus Bild 6.38b und den Designformeln ist zu erkennen, dass mit zunehmend ungleicher Leistungsaufteilung die Leitungswellenwiderstände der Querleitungen steigen und die Leitungen somit immer schmäler werden. Aufgrund von unvermeidlichen Fertigungstoleranzen sind dem Entwurf daher Grenzen gesetzt.

Interessant ist zu sehen, dass für den Grenzfall  $k \rightarrow 0$  (d.h. die gesamte Leistung wird von Tor 1 zu Tor 2 geführt) die Querleitungen unendlich große Leitungswellenwiderstände bekommen, ihre Breite also null wird und die Leitungen damit entfallen. Die Tore 3 und 4 sind somit vom Eingangstor entkoppelt. Zwischen den Toren 1 und 2 ergibt sich als verbleibende Schaltung einfach ein  $\lambda/4$ -Transformator mit dem Leitungswellenwiderstand  $Z_{Lb} = \sqrt{Z_{L1} Z_{L2}}$ .

## ■ 6.9 Rat-Race-Koppler

Beim in Bild 6.39a gezeigten *Rat-Race-Koppler* in Mikrostreifenleitungstechnik handelt es sich ebenso wie beim *Branchline-Koppler* um ein Viertor. Die am Tor 1 zugeführte Leistung wird auch hier zu gleichen Teilen an die Tore 2 und 3 verteilt. Tor 4 ist entkoppelt. Die Ausgangssignale besitzen beim *Rat-Race-Koppler* aber eine Phasendifferenz von  $180^\circ$ .

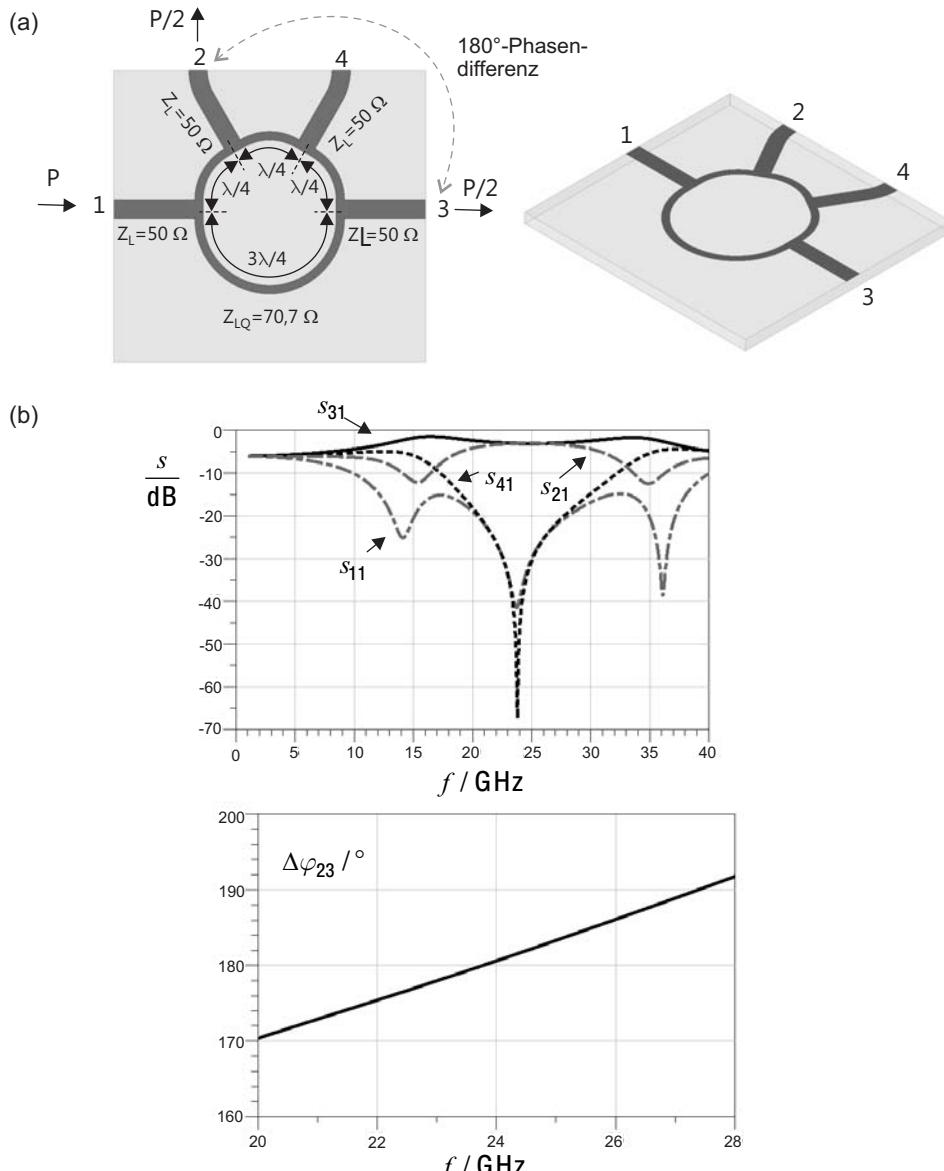


Bild 6.39 Rat-Race-Koppler in Mikrostreifenleiterplatten-Technik: (a) Aufbau und (b) Streuparameter

Das Verhalten kann anhand der Laufwege der Wellen überlegt werden, die sich in der ringförmigen Struktur im und gegen den Uhrzeigersinn ausbreiten können. Bei gegenphasiger Überlagerung entsteht ein entkoppeltes Tor, bei gleichphasiger Überlagerung ein Tor mit der Ausgangsleistung  $P/2$ . Diese Eigenschaften gelten ideal nur bei der Mittenfrequenz, das frequenzabhängige Verhalten in der Nähe dieser Mittenfrequenz wird in Bild 6.39b deutlich. Ebenso wie der Branchline-Koppler kann der *Rat-Race*-Koppler auch als *Combiner* eingesetzt werden. Bei der Mittenfrequenz lautet die Streumatrix des idealen *Rat-Race*-Kopplers:

$$\mathbf{S}_{\text{Rat-Race}} = \frac{j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.55)$$

*Rat-Race*-Koppler lassen sich auch mit ungleicher Leistungsaufteilung realisieren.

## ■ 6.10 Richtkoppler

Soll nur ein kleiner Teil der Leistung ausgekoppelt werden oder ist eine galvanische Trennung von Eingangs- und Koppeltor notwendig, so kann ein *Richtkoppler* verwendet werden. Ein Richtkoppler besteht im einfachsten Fall aus zwei im Abstand  $s$  parallel geführten Leitungen mit der Länge einer Viertelwellenlänge (Bild 6.40).

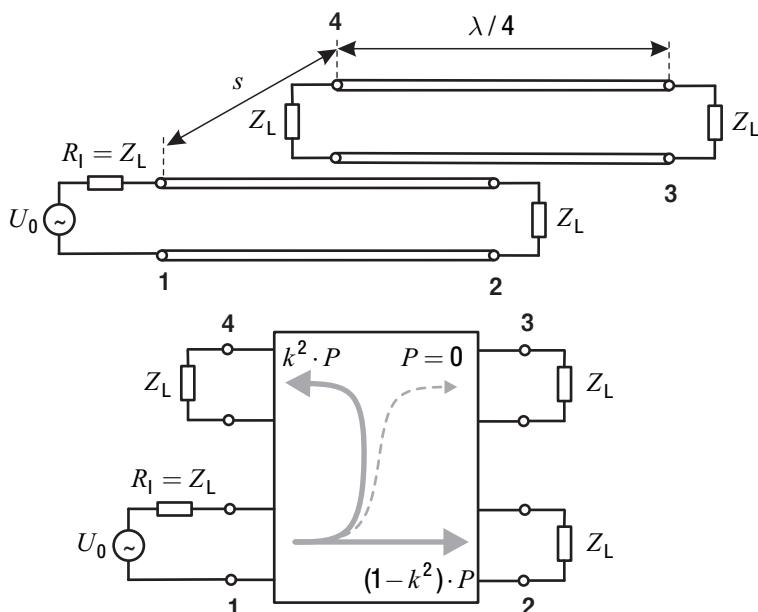


Bild 6.40 Richtkoppler mit zwei parallelen gekoppelten Leitungen der Länge  $\lambda/4$

Bei dem Koppler handelt es sich um einen *Rückwärtskoppler*, der den Anteil  $k^2 P$  der Eingangsleistung  $P$  von Tor 1 an das Tor 4 weiterleitet. Der Rest der Leistung wird auf dem Durchgangspfad zu Tor 2 weitergeleitet. Tor 3 ist entkoppelt.

Der Koppelfaktor wird häufig logarithmisch angegeben:

$$\frac{k}{\text{dB}} = 20 \lg |k| . \quad (6.56)$$

Bei einem 20-dB-Koppler ( $k = 0,1$ ) wird 1% der Eingangsleistung ausgekoppelt und 99% der Eingangsleistung durchlaufen den Koppler auf dem Durchgangspfad. Richtkoppler finden zum Beispiel Verwendung bei der Netzwerkanalyse zur Messung von Streuparametern (siehe Abschnitt 5.7).

Nach Abschnitt 4.7 lassen sich zwei gekoppelte Leitungen über ihre *Even-* und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderstände beschreiben. Diese hängen mit dem Kopplungsfaktor  $k$  und den Leitungswellenwiderständen  $Z_L$  der ungekoppelten Leitungen wie folgt zusammen.

$$Z_{0e} = Z_L \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \quad (6.57)$$

$$Z_{0o} = Z_L \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \quad (6.58)$$

Bei Kenntnis der *Even-* und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderstände können Kopplungsfaktor  $k$  und Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  der ungekoppelten Leitung berechnet werden.

$$Z_L = \sqrt{Z_{0e} Z_{0o}} \quad (6.59)$$

$$k = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} \quad (6.60)$$

Die Streumatrix des idealen Richtkopplers lautet bei der Mittenfrequenz:

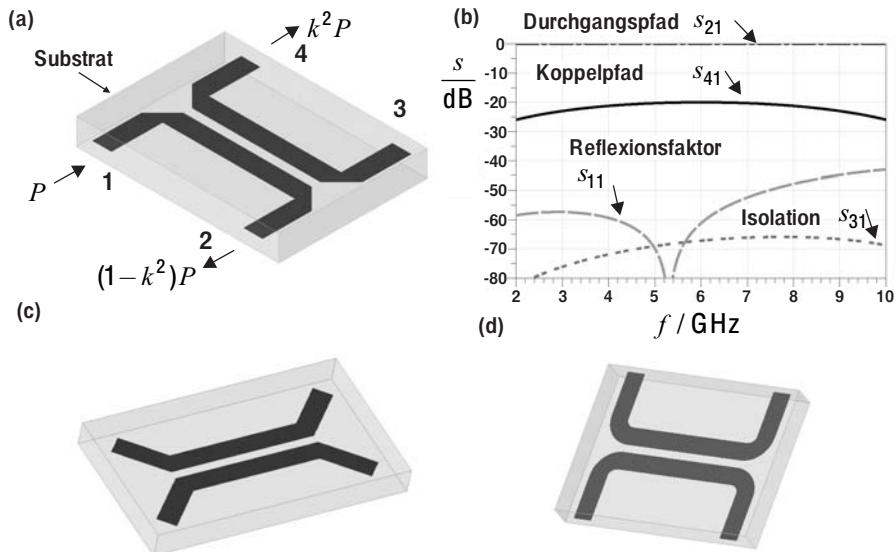
$$\mathbf{S}_{\text{Richtkoppler}} = \begin{pmatrix} 0 & -j\sqrt{1-k^2} & 0 & k \\ -j\sqrt{1-k^2} & 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 & -j\sqrt{1-k^2} \\ k & 0 & -j\sqrt{1-k^2} & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.61)$$

Bei Vorgabe eines gewünschten Kopplungsfaktors  $k$  und einer Leitung mit dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  können über die Leitungsbreiten  $w$  sowie den Abstand  $s$  zwischen den gekoppelten Leitungen die *Even-* und *Odd-mode*-Leitungswellenwiderstände entsprechend eingestellt werden.

### Beispiel 6.11 Berechnung eines 20-dB-Richtkopplers in Streifenleitungstechnik

Ein 20-dB-Streifenleitungskoppler soll für eine Frequenz von 6 GHz entworfen werden. Für das Substrat gilt:  $h = 1,6 \text{ mm}$  und  $\epsilon_r = 2,5$ . Der Leitungswellenwiderstand der einzelnen Streifenleitung sei  $Z_L = 50 \Omega$ .

Für einen Wert von  $k = 0,1$  (entspricht logarithmisch  $k = 20 \text{ dB}$ ) berechnen wir aus den Gleichungen (6.57) und (6.58)  $Z_{0e} = 55,28 \Omega$  und  $Z_{0o} = 45,23 \Omega$ . Mit einem Programm zur Berechnung von Leitungswellenwiderständen (*TX-Line* [AWR10] oder *Line-Calc* von *Agilent* [Agil11]) erhalten wir für gekoppelte Streifenleitungen und eine angenommene Metallisierungsdicke von  $10 \mu\text{m}$  die Werte  $L = 7,9 \text{ mm}$ ,  $w = 1,148 \text{ mm}$  und  $s = 0,535 \text{ mm}$ . Das Modell und die Streuparameter sind in Bild 6.41a und b dargestellt.



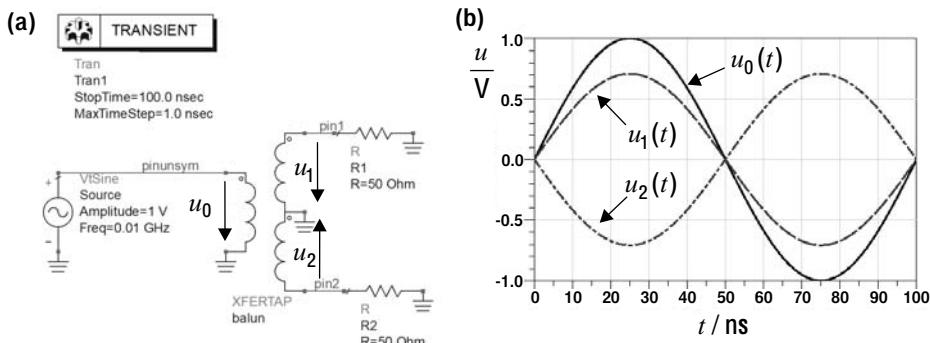
**Bild 6.41** 20-dB-Richtkoppler in Streifenleitungstechnik: (a) Modell mit abgeschrägten 90°-Knicken, (b) Streuparameter; alternative Zuleitungsführung: (c) 45°-Leitungsstücke oder (d) Kurvenstücke

Um die Signale den beiden gekoppelten Leitungen reflexionsarm zuzuführen, werden in dem Modell 90°-Knicke mit abgeschrägten Ecken verwendet. Alternativ können die Speiseleitungen auch über 45°-Winkel (Bild 6.41c) oder Kurvenstücke (Bild 6.41c) zugeführt werden, wobei der Radius der Kurvenstücke mit Bedacht gewählt werden muss: Ein zu kleiner Radius führt zu höheren Reflexionen, ein zu großer Radius zu einer Verlängerung der Koppelstrecke. ■

## ■ 6.11 Symmetrierglieder

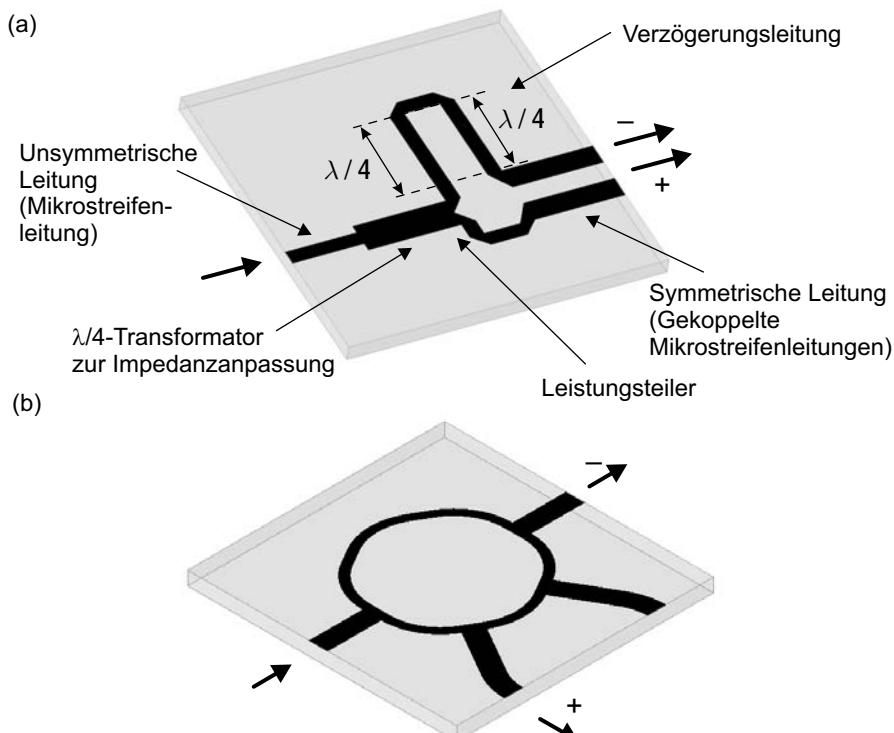
Symmetrische und unsymmetrische Leitungssysteme haben wir bereits in Abschnitt 4.7 unterschieden. Unsymmetrische Leitungssysteme sind u.a. die Koaxialleitung, die Mikrostreifenleitung und die Streifenleitung. Symmetrische Leitungssysteme sind die Zweidrahtleitung sowie gekoppelte Mikrostreifen- und Streifenleitungen. Symmetrische Leitungen werden i.A. mit gegenüber der Masse **gegenphasigen** Signalen gespeist.

Der Übergang von einer symmetrischen zu einer unsymmetrischen Leitung kann bei niedrigen und mittleren Frequenzen breitbandig mit einem *Übertrager mit Mittelabgriff* realisiert werden. Bild 6.42a zeigt einen solchen Symmetrieübertrager (*Balun = Balanced unbalanced*), dem eingangsseitig die unsymmetrische Spannung  $u_0(t)$  zugeführt wird und der ausgangsseitig die gegenphasigen Spannungen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  bereitstellt (Bild 6.42b). Der sekundärseitige Mittelabgriff stellt die Bezugsmasse dar. (Alternativ lassen sich gegenphasige Signale auch durch eine Induktivität mit Mittelabgriff (Spartransformator) realisieren.)



**Bild 6.42** (a) Symmetrieübertrager mit Transformator sowie (b) ein- und ausgangsseitige Spannungen

Bei höheren Frequenzen werden die Verluste in den Induktivitäten zu groß, so dass hier Leitungsstrukturen verwendet werden. Eine Möglichkeit stellt die  $\lambda/2$ -Umwegleitung in Bild 6.43a dar.



**Bild 6.43** Symmetrierschaltungen in Mikrostreifenleitungstechnik mit (a)  $\lambda/2$ -Umwegleitung und (b) Rat-Race-Koppler

Das Eingangssignal der unsymmetrischen Mikrostreifenleitung wird über einen Viertelwellentransformator und einen Leistungssteiler in zwei Anteile mit gleicher Amplitude und Pha-

se aufgespalten. Die Signale laufen dann über unterschiedlich lange Wege (Wegdifferenz =  $\lambda/4 + \lambda/4 = \lambda/2$ ), so dass am Ende gegenphasige Signale eine symmetrische Leitungsstruktur (hier als gekoppelte Mikrostreifenleitung) anregen.

Eine weitere Möglichkeit stellt der in Abschnitt 6.9 betrachtete *Rat-Race*-Koppler dar, dessen Ausgangssignale um  $180^\circ$  gegeneinander verschoben sind und der somit als Symmetrierglied verwendet werden kann (Bild 6.43b).

## ■ 6.12 Elektronische Schaltungen

Dieses Buch behandelt lineare, passive Strukturen, aus denen zusammen mit aktiven, nichtlinearen Elementen (Transistoren, Dioden) elektronische Hochfrequenzschaltungen wie Oszillatoren, Verstärker und Mischer entworfen werden können.

Das Verhalten der passiven und linearen Komponenten basiert auf Wellenausbreitungsvorgängen. Zum Verständnis sind Zusammenhänge aus der elektromagnetischen Feldtheorie nötig. Der Entwurf geschieht mit 3D-Feldberechnungsprogrammen und linearen Hochfrequenz-Schaltungssimulatoren.

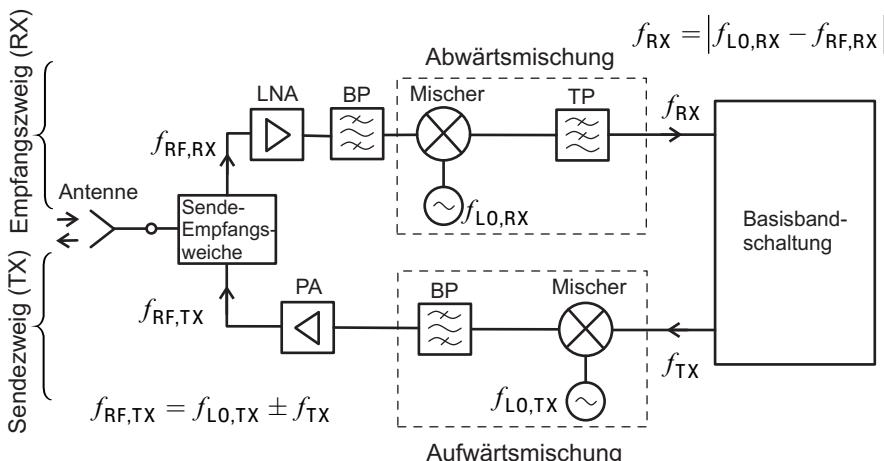
Aktive und nichtlineare HF-Schaltungen hingegen gehen von der allgemeinen Schaltungstheorie aus und beziehen hochfrequenztechnische Aspekte mit ein. Die Grundlagen liegen hier nicht in der elektromagnetischen Feldtheorie, sondern in den folgenden Bereichen: Prinzipien des klassischen Verstärkerentwurfs, Stabilität, nichtlineares Verhalten von Dioden und Transistoren, Kenngrößen des nichtlinearen Verhaltens wie 1-dB-Kompressionspunkt und Intermodulationspunkt 3. Ordnung (IP<sub>3</sub>, *3rd-Order Intercept Point*), Rauschverhalten etc. Für den Entwurf werden spezielle HF-Schaltungssimulatoren benötigt, die diese Kenngrößen ermitteln. Weiterführende Literatur zu dem Thema findet der Leser unter anderem in [Bäch02] [Detl12] [Heue09] [Goli08] [Maas88] [Maas98] [Elli07] [Hage09].

Die für die HF-Übertragungstechnik elementaren Schaltungen sollen aber dennoch in Form einer kurzen Einführung angesprochen werden, um dem Leser eine erste Orientierung für ein vertieftes Studium des Themas zu bieten. Bild 6.44 zeigt als Anwendungsfall den prinzipiellen Aufbau einer Sende-Empfangseinheit für drahtlose Kommunikationssysteme. Das für die Übertragung bestimmte Nutzsignal (Sprache, Daten) wird dabei in der Regel in einen für die Übertragung geeigneten – und durch den verwendeten Funkstandard bestimmten – höheren Frequenzbereich umgesetzt.

Im *Sendezweig* wird das Basisbandsignal im Frequenzbereich  $f_{\text{TX}}$  über einen Mischер, Bandpass, Leistungsverstärker (PA: *Power Amplifier*) und eine Sende-Empfangsweiche zur Antenne geleitet und dort als Funksignal abgestrahlt.

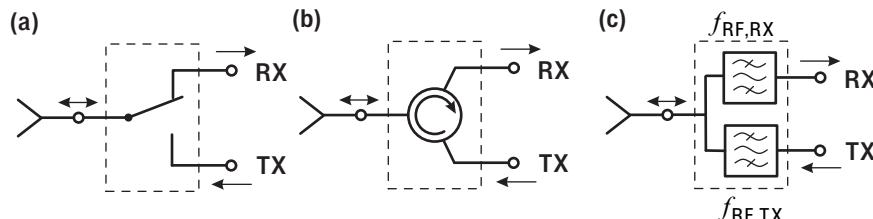
Der Mischер setzt dabei mit Hilfe des Lokaloszillators das Basisbandsignal von der Frequenz  $f_{\text{TX}}$  auf die Frequenz  $f_{\text{RF}_{\text{TX}}}$  um (TX: *Transmit*). Ungewünschte Signalanteile<sup>3</sup> werden dabei durch den nachfolgenden Bandpass ausgefiltert. Der Leistungsverstärker (PA) hebt die Signalleistung im entsprechenden Frequenzbereich an.

<sup>3</sup> Welche Frequenzanteile als ungewollt gelten, wird im Abschnitt 6.12.1 noch genauer erläutert.



**Bild 6.44** Beispielhafter Aufbau einer Sende-Empfangseinheit für drahtlose Kommunikationsanwendungen

Die *Send-Empfangsweiche* trennt die Signale des Sende- und Empfangspfades (Bild 6.45). Falls Sende- und Empfangssignal im gleichen Frequenzbereich liegen, wird mit einem HF-Schalter (z.B. mit PIN-Dioden) zwischen beiden umgeschaltet. Alternativ können die Signale über einen Zirkulator geführt werden. Sind die Frequenzbänder im Sende- und Empfangszweig jedoch unterschiedlich, so kann die Trennung über einen Diplexer (Frequenzweiche) stattfinden. Ein Diplexer besteht aus zwei Filtern mit unterschiedlichen Durchlassbereichen und einem gemeinsamen Antennenanschluss.



**Bild 6.45** Sende-Empfangsweiche (a) mit HF-Schalter, (b) mit einem Zirkulator und (c) als Frequenzweiche (Diplexer)

Im *Empfangszweig (RX)* wird das im Allgemeinen sehr schwache Signal im Frequenzbereich  $f_{RF,RX}$  zunächst über einen rauscharmen Vorverstärker (LNA: *Low Noise Amplifier*) in der Amplitude angehoben. Das relevante Empfangsfrequenzband wird mit einem Bandpassfilter (BP) selektiert und dann einem Mischер zugeführt. Der Mischер setzt das Signal mit Hilfe des Lokaloszillators in ein niederfrequentes Signal (Zwischenfrequenzsignal oder Basisbandsignal) um. Ein Tiefpassfilter (TP) eliminiert alle ungewünschten höherfrequenten Anteile.

Um hochfrequente elektronische Schaltungen miniaturisiert herzustellen, existieren verschiedene Verfahren [Goli08]. *Integrierte Mikrowellenschaltungen* (MMIC: *Monolithic Microwave Integrated Circuit*) verwenden Halbleitermaterial wie Galliumarsenid (GaAs), um passive Strukturen (wie Leitungen, Filter, Koppler) sowie aktive und nichtlineare Strukturen (Trans-

sistoren, Dioden) auf einem Chip zu integrieren. So lassen sich kompakt Mischer, Leistungsverstärker und rauscharme Verstärker für Funkmodule aufbauen. *Hybridschaltungen* kombinieren passive planare Strukturen mit konzentrierten Elementen (Transistoren, Dioden, ICs, SMD-Bauelemente). SMD (*Surface-Mounted-Device*)-Bauelemente sind Schaltungselemente (Spulen, Kondensatoren, Widerstände), die auf die Oberfläche des Substrates aufgebracht werden und so im Zusammenspiel mit den planaren Strukturen eine Schaltung bilden.

### 6.12.1 Mischer

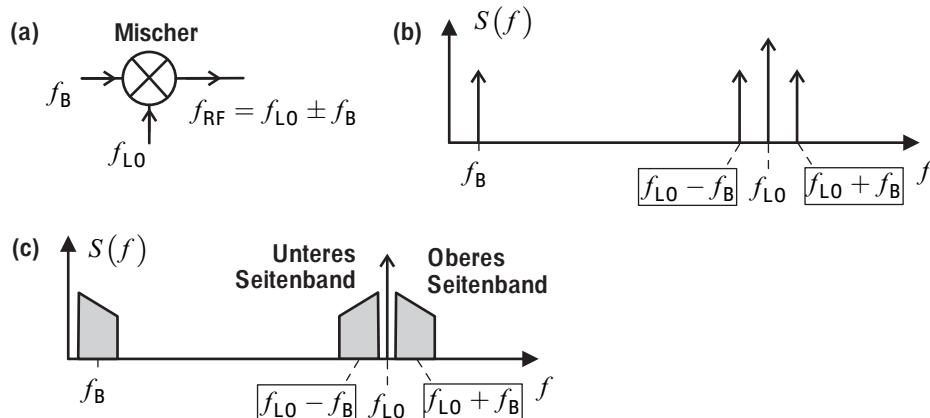
Der ideale Mischer verhält sich wie ein Multiplizierer. Aufgrund des mathematischen Zusammenhangs

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (6.62)$$

wird aus dem harmonischen Lokaloszillatorsignal  $u_{\text{LO}}(t) = U_{\text{LO}} \cos(\omega_{\text{LO}} t)$  und dem harmonischen Basisband-Eingangssignal  $u_B(t) = U_B \cos(\omega_B t + \varphi_B)$  bei der Produktbildung

$$\begin{aligned} u_{\text{LO}}(t) \cdot u_B(t) &= U_{\text{LO}} \cos(\omega_{\text{LO}} t) \cdot U_B \cos(\omega_B t + \varphi_B) \\ &= \frac{1}{2} U_{\text{LO}} U_B [\cos((\omega_{\text{LO}} - \omega_B) t - \varphi_B) + \cos((\omega_{\text{LO}} + \omega_B) t + \varphi_B)] . \end{aligned} \quad (6.63)$$

Das Ausgangssignal ist proportional zur Amplitude des Eingangssignals  $U_B$ , die Phase des Eingangssignals  $\varphi_B$  ist auch im Ausgangssignal enthalten. Das Eingangssignal ist jedoch in der Frequenz verschoben, es tauchen die Summe und die Differenz der Signalfrequenzen auf (Bild 6.46a und b).



**Bild 6.46** Der Mischer als Multiplizierer: (a) Schaltsymbol und Spektren bei (b) monofrequentem und (c) bandbegrenztem Basisbandsignal

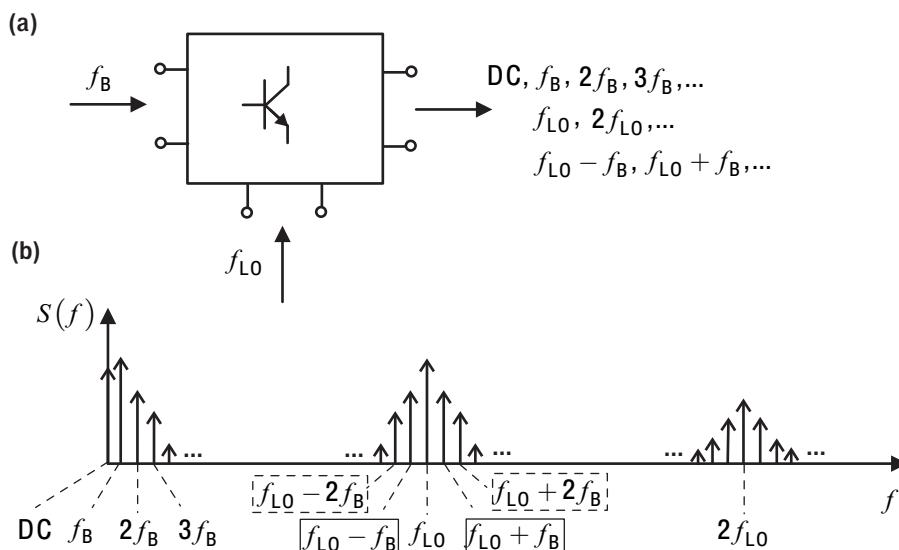
Wir betrachten nun nicht mehr ein monofrequentes Eingangssignal, sondern ein Eingangssignal, welches einen bestimmten Frequenzbereich abdeckt, wie in Bild 6.46c gezeigt. Der Frequenzbereich des Eingangssignals erscheint nun oberhalb und unterhalb der Lokaloszillatorkreisfrequenz. Die Spektren werden als oberes und unteres Seitenband bezeichnet. Das untere

Seitenband ist in der Frequenzlage invertiert, d.h. ursprünglich höhere Frequenzanteile liegen nach der Mischung tiefer.

Beide Seitenbänder enthalten vollständig die Information des ursprünglichen Eingangssignals, so dass in der Regel eines der beiden Seitenbänder durch ein Bandpassfilter selektiert und weiterverwendet wird. Bei Verwendung des oberen Seitenbandes spricht man von *Aufwärtsmischung in Gleichlage*. Wählt man das untere Seitenband aus, so spricht man von *Aufwärtsmischung in Kehrlage*.

Bei der Abwärtsmischung gelten ähnliche Überlegungen. Existieren beide Seitenbänder, so überlagern sich diese am Ausgang. Man wird also vor der Mischung durch ein Filter zunächst eines der beiden Seitenbänder auswählen. Je nachdem ob das obere oder untere Seitenband selektiert wird, sprechen wir von *Abwärtsmischung in Gleich- oder Kehrlage*.

Der oben beschriebene ideale Mischer ist nicht realisierbar. Bei der realen Mischung werden zwei Signale an einem Bauteil mit nichtlinearer Kennlinie überlagert. Hierdurch entsteht eine Vielzahl von Frequenzen, die in Bild 6.47 gezeigt und in Tabelle 6.4 systematisch aufgeführt sind.



**Bild 6.47** (a) Mischer als Dreitor mit nichtlinearem Element und (b) Frequenzanteile des Ausgangssignals bei Mischung mit zwei Frequenzen  $f_B$  und  $f_{LO}$

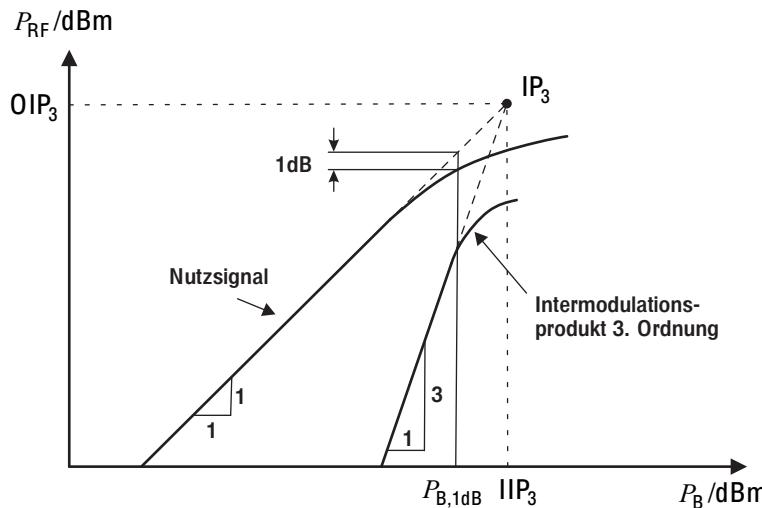
**Tabelle 6.4** Frequenzanteile des Ausgangssignals bei Mischung mit zwei Frequenzen  $f_B$  und  $f_{LO}$

0 Hz (DC)					
$f_B$	$f_{LO}$				
$2f_B$	$2f_{LO}$	$f_{LO} \pm f_B$			
$3f_B$	$3f_{LO}$	$f_{LO} \pm 2f_B$	$2f_{LO} \pm f_B$		
$4f_B$	$4f_{LO}$	$f_{LO} \pm 3f_B$	$2f_{LO} \pm 2f_B$	$3f_{LO} \pm f_B$	
...	...	...	...	...	...

## 230 6 Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen

In Bild 6.47 sind die nach der Mischung gewünschten Signalanteile von einem durchgezogenen Rahmen umgeben. Die ihnen am nächsten kommenden und damit am meisten störenden Frequenzanteile sind mit einem gestrichelten Rahmen versehen. Ihr Verhalten wird daher als Kenngröße mit herangezogen (Bild 6.48).

Wichtige Kenngrößen, die das nichtlineare Verhalten beschreiben sind der *1-dB-Kompressionspunkt* und der *Intermodulationspunkt 3. Ordnung*. Zur Definition sehen wir uns den doppelt-logarithmisch aufgetragenen Verlauf der Ausgangsleistung über der Eingangsleistung für das Nutzsignal und für das am meisten störende Intermodulationsprodukt an (Bild 6.48).



**Bild 6.48** Zur Definition des 1-dB-Kompressionspunktes und des Intermodulationspunktes 3. Ordnung ( $\text{IP}_3$ )

Die störenden nichtlinearen Effekte begrenzen den Einsatzbereich des Mixers nach oben. Nach unten wird der Einsatzbereich durch Rauscheffekte begrenzt, so dass sich insgesamt ein nutzbarer Dynamikbereich zwischen diesen Grenzen ergibt.

Für die einfache Berücksichtigung eines Mixers bei der Berechnung mittels der Signalflussmethode ist eine weitere Größe, der Konversionsverlust  $L_C$ , wichtig, welcher das Verhältnis von Eingangs- zu nutzbarer Ausgangsleistung beschreibt. In logarithmischer Darstellung erhalten wir für den Aufwärtmixer mit der Eingangsleistung  $P_B$  und der Ausgangsleistung  $P_{RF}$ :

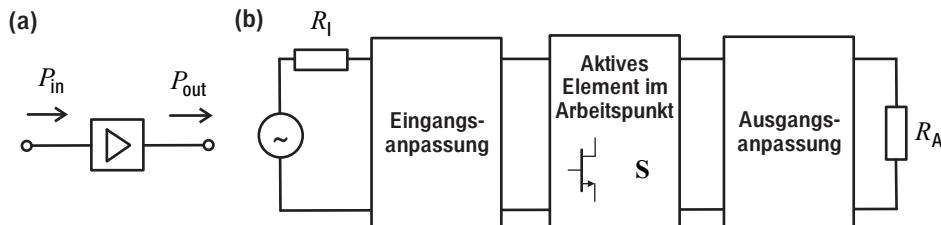
$$\frac{L_C}{\text{dB}} = 10 \lg \left( \frac{P_B}{P_{RF}} \right) . \quad (6.64)$$

Der Konversionsverlust wird positiv, wenn die Ausgangsleistung kleiner als die Eingangsleistung ist [Ludw08]. Bei Verwendung des Kehrwerts des Leitungsverhältnisses erhält man den Konversionsgewinn:  $G_C/\text{dB} = -L_C/\text{dB}$ .

### 6.12.2 Verstärker und Oszillatoren

Die Aufgabe eines Verstärkers besteht darin, ein Signal möglichst verzerrungsfrei in der Amplitude anzuheben. Hierzu wird ein aktives Bauteil über ein Gleichspannungssignal in einen

geeigneten Arbeitspunkt gebracht. In diesem Arbeitspunkt kann das lineare Verhalten der Schaltung über eine Streumatrix  $S$  beschrieben werden. Als aktive verstärkende nichtlineare Elemente kommen dabei Hochfrequenztransistoren mit hoher Transitfrequenz zum Einsatz, beispielsweise MESFET, also Feld-Effekt-Transistoren mit einem Metall-Halbleiter-Übergang (MESFET: *Metal-Semiconductor-Field-Effect-Transistor*). Mittels eingangs- und ausgangsseitiger Anpassernetzwerke (Bild 6.49) wird die Schaltung an Quell- und Lastimpedanz angepasst (Leistungsanpassung). Beim Schaltungsentwurf ist besonderes Augenmerk auf die Stabilität des Verstärkers zu legen. Fehlerhafte Auslegung kann zu unerwünschtem Schwingungsverhalten führen.

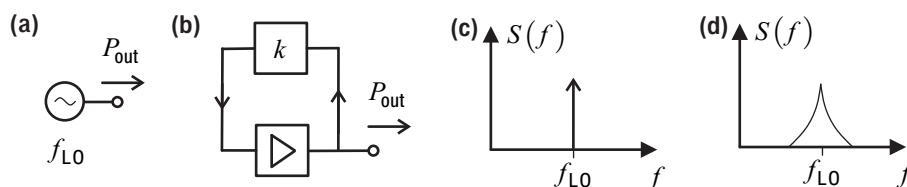


**Bild 6.49** Verstärker: (a) Schaltsymbol und (b) Verstärkeraufbau mit aktivem Element im Arbeitspunkt und ein- und ausgangsseitiger Anpassung

Die Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens geht von einem detaillierten Transistormodell aus und folgt im Wesentlichen den Überlegungen, die auch beim Mischer für das nichtlineare Verhalten angestellt wurden. Aus dem Verlauf der Ausgangsleistung über der Eingangsleistung kann der 1-dB-Kompressionspunkt bestimmt werden (Bild 6.48). Zur Bestimmung des Intermodulationspunktes 3. Ordnung wird der Verstärker gleichzeitig mit zwei Signalen leicht verschiedener Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  angeregt und der Schnittpunkt gemäß Bild 6.48 bestimmt.

Bei Verstärkern ist neben dem verzerrungsfreien und rauscharmen Verhalten der Leistungsverstärkungsfaktor  $G$  eine wichtige Größe:

$$\frac{G}{\text{dB}} = 10 \lg \left( \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \right) . \quad (6.65)$$



**Bild 6.50** Oszillator: (a) Schaltsymbol, (b) Aufbau mit rückgekoppeltem Verstärker, (c) ideales Spektrum, (d) durch Phasenrauschen verbreitertes Spektrum

Oszillatoren dienen der Schwingungserzeugung. Sie stellen im Idealfall ein stabiles monofrequentes Signal zur Verfügung (Bild 6.50). Ein Oszillator lässt sich aus einem Verstärker unter Verwendung eines Rückkoppelnetzwerkes und eines frequenzbestimmenden Elements aufbauen. Als frequenzbestimmendes Element mit hoher Frequenz- und Temperaturstabilität kommen Quarze und dielektrische Resonatoren zum Einsatz. Wichtige Kenngröße für die Frequenzstabilität ist das *Phasenrauschen*.

## ■ 6.13 Moderne HF-Entwurfswerkzeuge

Der Entwurf von HF-Schaltungen-, HF-Komponenten- und HF-Systemen läuft heute in aller Regel computerunterstützt ab. Hierbei können wir Schaltungs- und Feld-Simulatoren unterscheiden.

### 6.13.1 HF-Schaltungssimulatoren

HF-Schaltungssimulatoren sind heute sehr mächtige Werkzeuge, die den Entwickler beim Entwurf komplexer Schaltungen unterstützen. Sie umfassen in vielen Fällen unterschiedlichste Simulationsmöglichkeiten, u.a.

- Schaltungsberechnung im Zeit- oder Frequenzbereich
- Schaltungen mit konzentrierten Elementen
- Schaltungen mit verteilten Elementen (Leitungen)
- nichtlineare Analyse
- Rauschparameterberechnung.

Für Standard-Entwurfsaufgaben (Anpassung, Filter, Leistungsteiler, Koppler) gibt es oft Assistenten (*Design guides*), welche auf Basis allgemeiner Designformeln Schaltungen entwerfen, die dann mit Software-Unterstützung optimiert werden können.

Innerhalb dieses Buches wird der HF-Schaltungssimulator ADS der Firma *Agilent* an vielen Stellen eingesetzt [Agil11], beispielsweise für die Zeitbereichssimulationen von Impulsen auf Leitungen in Abschnitt 3.2 oder die Frequenzbereichssimulationen von Filterstrukturen in Abschnitt 6.4.

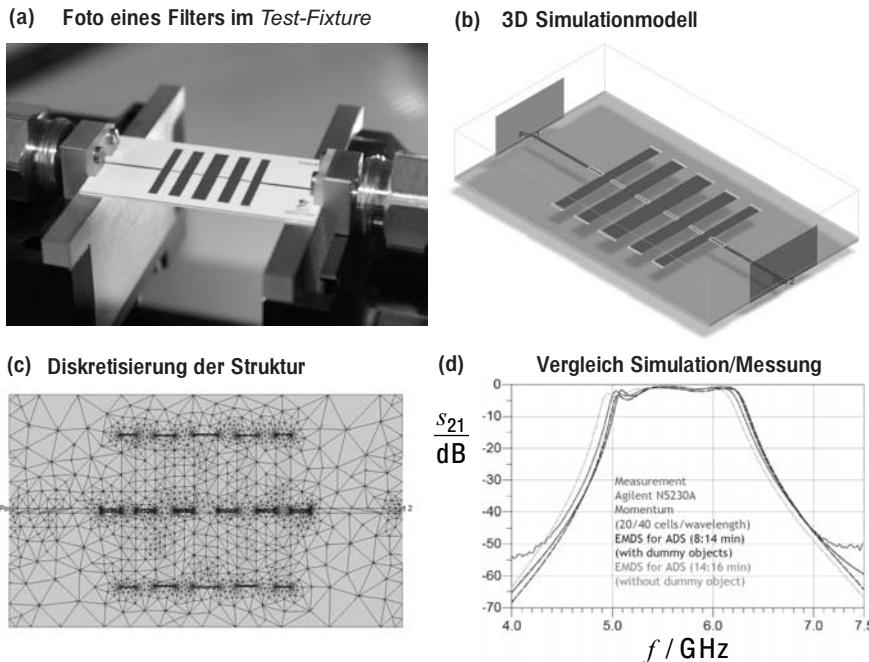
Schaltungssimulatoren berechnen Schaltungen auf der Basis von Ersatzmodellen sehr effizient. Diese Modelle sind jedoch auf einen gewissen Gültigkeitsbereich beschränkt. Außerhalb dieses Gültigkeitsbereiches oder wenn für ein Szenario kein Modell vorliegt, müssen aufwendigere Rechnungen angestellt werden. Dies führt zu den elektromagnetischen 3D-Feldsimulationen. Antennenprobleme erfordern generell den Einsatz eines Feldsimulators.

### 6.13.2 Elektromagnetische 3D-Feldsimulation

Neben der Schaltungssimulation gewinnt das noch vergleichsweise junge Gebiet der 3D-Feldsimulation an Bedeutung. Die Methoden in diesem Bereich gestatten die Berechnung von Streuparametern, Feldverteilungen und Strahlungsfeldern auf der Basis von dreidimensionalen Modellen, indem numerische Näherungslösungen der Maxwellschen Gleichungen ermittelt werden [Gust06] [Swan03] [Weil08]. Bild 6.51 zeigt exemplarisch das 3D-Simulationsmodell eines Mikrowellenbandpassfilters.

Derzeit ist eine Reihe leistungsfähiger und anwendungsfreundlicher Softwarepakete auf dem Markt. Die Softwareprodukte entwickeln sich rasch weiter, so dass die in Tabelle 6.5 gezeigte Liste nur eine unvollständige Momentaufnahme verbreiteter Softwareprodukte sein kann.

In den Programmen kommen unterschiedliche numerische Verfahren zum Einsatz, u.a.:



**Bild 6.51** Analyse eines Mikrowellenfilters mit dem FEM-Feldsimulator innerhalb des Softwarepakets ADS der Firma Agilent

**Tabelle 6.5** Kommerzielle 3D-Feldsimulatoren (Auswahl)

Produktname	Unternehmen
ADS (Advanced Design System)	Agilent, USA
Empire	IMST, Germany
EMPro (Electromagnetic Professional)	Agilent, USA
HFSS (High-Frequency Structure Simulator)	Ansoft, USA
Microwave Studio	CST, Germany
SEMCAD	Schmidt & Partner Engineering AG, Schweiz
XFdtd	Remcom, USA

- Finite-Elemente-Methode (FEM: *Finite Element Method*)
- Finite Differenzen im Zeitbereich (FDTD: *Finite-Difference Time-Domain*)
- Momentenmethode (MoM: *Method of Moments*)
- Verallgemeinerte Beugungstheorie (UTD: *Uniform Theory of Diffraction*).

Je nach numerischem Verfahren muss das Lösungsgebiet begrenzt werden. Auf den Rändern des Simulationsgebietes werden Randbedingungen gesetzt, die das Verhalten des Feldes auf diesen Flächen bestimmen. Weiterhin werden Tore (*Ports*) definiert, die Ein- und Ausgänge für Signale darstellen.

Um eine Näherungslösung des elektromagnetischen Feldproblems zu finden, wird das gesamte Simulationsmodell in kleinere Elemente (Quader, Tetraeder, ...) unterteilt (Diskretisierung). Je feiner die Unterteilung ist, desto akkurate Ergebnisse werden erwartet, allerdings steigt auch der Rechenaufwand. Weiter werden Simulationsparameter festgelegt, die den Ablauf des Lösungsfindungsprozesses steuern: Hierzu gehören eine Eingrenzung des interessierenden Frequenzbereichs, die Festlegung von Konvergenz- und Verfeinerungskriterien sowie die Auswahl von Gleichungslösern.

Während der Simulation wird eine Näherung für die Feldverteilung im Lösungsgebiet bestimmt. In einer Nachverarbeitung (*Post-processing*) werden Netzwerkgrößen an den Toren (Spannung, Strom, Impedanz, Streuparameter) sowie Fernfelder von Antennen berechnet.

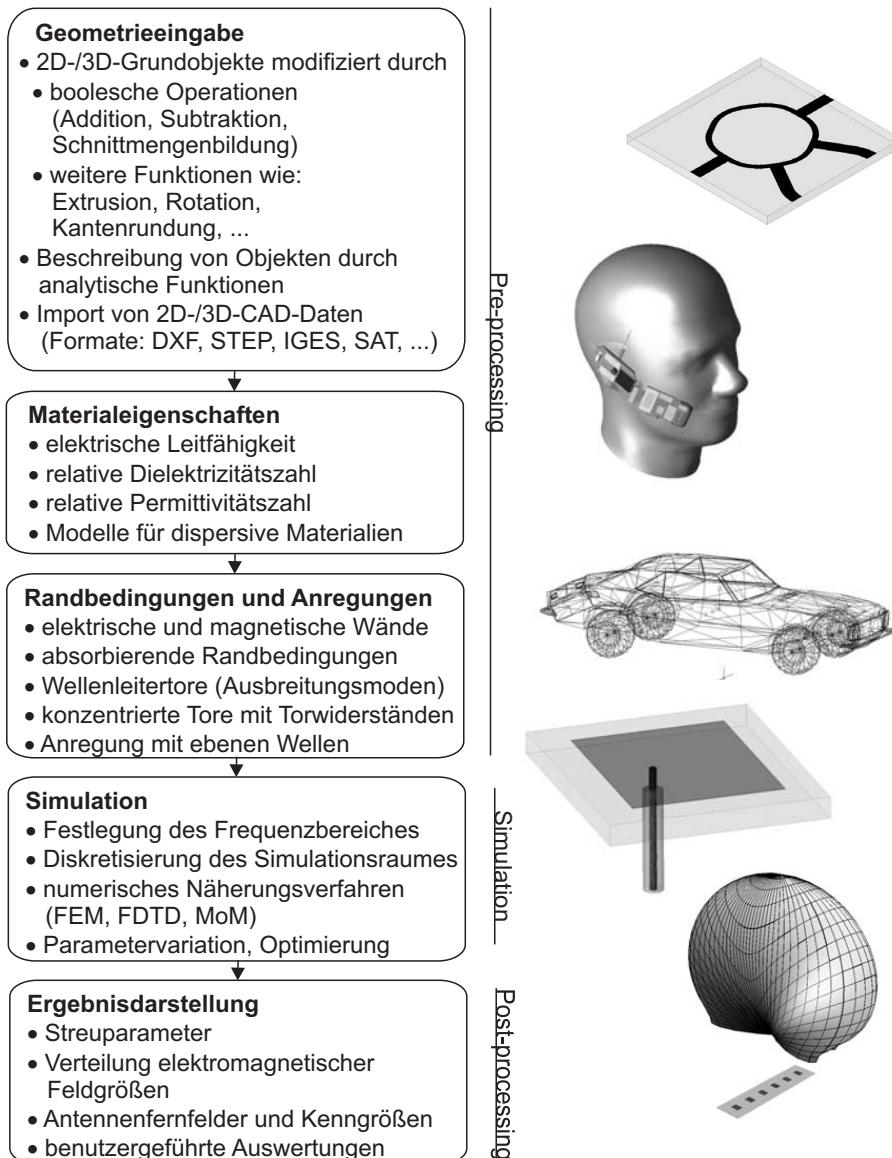
Bild 6.52 zeigt die Abläufe bei der Verwendung eines 3D-Simulationswerkzeuges. Zunächst wird über eine graphische CAD-Oberfläche die Geometrie der zu untersuchenden Komponente erstellt. Moderne Simulatoren verfügen darüber hinaus über die Möglichkeit, komplexe CAD-Geometriemodelle zu importieren und diese effizient zu verarbeiten. Den so definierten Objekten werden dann elektrische Materialeigenschaften zugeordnet.

Numerische Simulationen haben mittlerweile einen festen Platz im Entwicklungsprozess von HF-Komponenten und Antennen, denn sie bieten eine Reihe von Vorzügen:

- Die Darstellungsmöglichkeit von Feldverteilungen innerhalb des Simulationsgebietes erleichtert das Verständnis der Funktionsweise des HF-Bauelements. Hieraus entwickeln sich oft Ideen für Verbesserungen.
- Die numerischen Modelle lassen sich in der Regel parametrieren. Dies erlaubt die automatische Optimierung von Simulationsmodellen, die von der Software selbstständig durchgeführt werden kann.
- Durch die stetig steigende Rechenleistung moderner PCs und die Parallelisierbarkeit numerischer Berechnungen erweitern sich die Einsatzmöglichkeiten der Softwaretools.
- Simulationen bedeuten gegenüber der Fertigung und der Messung oft einen Kosten- und Geschwindigkeitsvorteil.
- Nicht zuletzt ist für Einsteiger in das Gebiet der Hochfrequenztechnik die Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit sowie die Entlastung von aufwendigen mathematischen Berechnungen motivierend. Aus diesem Grund werden die Verfahren auch intensiv in der Ingenieurausbildung genutzt [Mant04].

Innerhalb des Buches wird ausgiebig Gebrauch von den 3D-Feldsimulatoren *Empire* (IMST), *Momentum* (Agilent) und *EMPro* (Agilent) gemacht.

Gegenwärtig ist ein Trend festzustellen, die Schaltungs- und Feldsimulatoren unter einer Oberfläche zusammenzuführen, so dass Simulationsmodelle entstehen, die gleichzeitig Schaltungs- und Feldsimulatoranteile beinhalten können (*Electromagnetic co-simulation*). Auf diese Art und Weise können unterschiedliche Schaltungsteile mit unterschiedlichen Methoden behandelt werden. Beispielsweise kann innerhalb eines übergeordneten Modells die Anpassschaltung mit dem Schaltungssimulator und die Antenne mit dem Feldsimulator berechnet werden.



**Bild 6.52** Simulationsflow bei der Verwendung von 3D-Feldsimulationsverfahren (links) und Modellbeispiele: Rat-Race-Koppler, Mobiltelefon am Kopf, PKW-Modell, Patch-Antenne, Gruppenantenne und Strahlungsdiagramm (rechts) gerechnet mit *EMPro* (Agilent) und *Empire* (IMST)

## ■ 6.14 Übungsaufgaben

### Übung 6.1

Zeigen Sie, dass eine an beiden Seiten kurzgeschlossene Leitung für Vielfache der halben Wellenlänge Resonanz aufweist. Zeigen Sie, dass die kürzeste resonante Länge bei Verwendung einer kurzgeschlossenen und einer leerlaufenden Leitung gerade eben die Viertelwellenlänge ist.

### Übung 6.2

Passen Sie folgende Abschlussimpedanzen bei einer Frequenz von  $f = 900 \text{ MHz}$  mit Hilfe eines einfachen LC-Netzwerkes an die Systemimpedanz  $Z_0 = 50\Omega$  an:

$$Z_{A1} = 330\Omega \quad ; \quad Z_{A2} = 10\Omega \quad ; \quad Z_{A3} = (200 + j100)\Omega \quad ; \quad Z_{A4} = (15 - j75)\Omega \quad . \quad (6.66)$$

Nutzen Sie ein ausgedrucktes Smith-Diagramm, oder verwenden Sie ein Smith-Chart-Tool aus dem Internet.

### Übung 6.3

Ein Abschlusswiderstand  $R_A = 1100\Omega$  soll bei einer Frequenz von  $f_0 = 1 \text{ GHz}$  an eine Quelle mit  $R_I = 50\Omega$  angepasst werden.

1. Entwerfen Sie ein einstufiges LC-Netzwerk.
2. Entwerfen Sie ein zweistufiges LC-Netzwerk zur Erhöhung der Bandbreite.
3. Erhöhen Sie die Bandbreite weiter durch einen dreistufigen Aufbau. Wählen Sie bei jeder Stufe des Netzwerkes die gleichen Transformationsverhältnisse  $R_A/Z_E$ .

Stellen Sie die Transformationswege im Smith-Diagramm dar.

### Übung 6.4

Der in Bild 6.14 gezeigte Leistungsteiler in Mikrostreifentechnik soll auf Aluminium-oxidsubstrat ( $\epsilon_r = 9,8; h = 635 \mu\text{m}$ ) aufgebaut werden. Anpassung soll bei einer Frequenz von  $f = 5 \text{ GHz}$  erreicht werden (Systemimpedanz  $Z_0 = 50\Omega$ ).

1. Dimensionieren Sie den  $\lambda/4$ -Transformator zur Impedanzanpassung, d.h. geben Sie die Länge  $\ell_Q$  und Breite  $w_Q$  an.
2. Erhöhen Sie die Bandbreite, indem Sie die Schaltung zweistufig realisieren. Geben Sie die Längen und Breiten der verwendeten  $\lambda/4$ -Transformatoren an.

### Übung 6.5

Für eine Frequenz von  $f = 10 \text{ GHz}$  soll die Abschlussimpedanz  $Z_A = (100 + j20)\Omega$  an die Quellimpedanz von  $R_I = 50\Omega$  angepasst werden. Entwerfen Sie eine Anpassschaltung aus einer seriellen Leitung und einer Stichleitung (Bild 6.16). Dimensionieren Sie die Schaltung anhand des Smith-Diagramms für einen Leitungswellenwiderstand von  $Z_L = 50\Omega$ . Realisieren Sie die Schaltung in Mikrostreifentechnik (Substrateigenschaften  $\epsilon_r = 7,8; h = 254 \mu\text{m}$ ).

### Übung 6.6

Zeigen Sie mit Hilfe der Unitaritätsbedingung, dass der Wilkinson-Leistungsteiler nach Abschnitt 6.7.1 nicht verlustfrei ist.

### Übung 6.7

Entwerfen Sie einen *Branchline*-Koppler für eine Frequenz von  $f = 6$  GHz, bei dem sich die Leistung zwischen den Ausgängen im Verhältnis 3:1 aufteilt. Alle Tore sollen an die Systemimpedanz  $Z_0 = 50\Omega$  angepasst sein. Als Substratmaterial steht Aluminiumoxid  $\text{Al}_2\text{O}_3$  zur Verfügung (Substratparameter:  $h = 0,635$  mm;  $\epsilon_r = 9,8$ ).

### Übung 6.8

Entwerfen Sie einen Butterworth-LC-Tiefpassfilter mit folgenden Randbedingungen:

- $R_I = R_A = R = 100\Omega$  (entspricht zugleich dem Bezugswiderstand  $Z_0$  bei den Streuparametern)
- 3-dB-Grenzfrequenz  $f_g = 700$  MHz.
- Mindestdämpfung bei der doppelten Grenzfrequenz:  $A_{\text{dB}}(f_s = 2f_g) \geq 17$  dB.

### Übung 6.9

Entwerfen Sie einen seitengekoppelten Filter mit Butterworth-Charakteristik in Mikrostreifentechnik. Für das Substrat gelte:  $h = 0,4$  mm und  $\epsilon_r = 7,8$ . Der Filter besitze folgende Eigenschaften:

- Bezugsimpedanz  $Z_0 = R = 50\Omega$
- Durchlassbereich mit Dämpfung  $A < 3$  dB von  $f_{p1} = 8,0$  GHz bis  $f_{p2} = 8,5$  GHz
- Sperrbereich mit Dämpfung  $A > 20$  dB unterhalb von  $f_{s1} = 7,5$  GHz und oberhalb von  $f_{s2} = 9$  GHz.

# 7

## Antennen

Bei der Funkkommunikation stellt die Antenne das Verbindungsglied zwischen den Wellen im freien Raum und den leitungsgebundenen Signalen in einer Schaltung dar. In diesem Kapitel werden zunächst technisch wichtige Kenngrößen zur Beschreibung des Strahlungsverhaltens von Antennen vorgestellt. Zur Vertiefung des physikalischen Verständnisses leiten wir die Funktionsweise eines elementaren Antennenelements mathematisch detailliert her. Im Folgenden werden wichtige praktische Einzel- und Gruppenstrukturen von Antennen betrachtet und Entwurfsregeln an Beispielen erprobt.

### ■ 7.1 Grundbegriffe und Kenngrößen

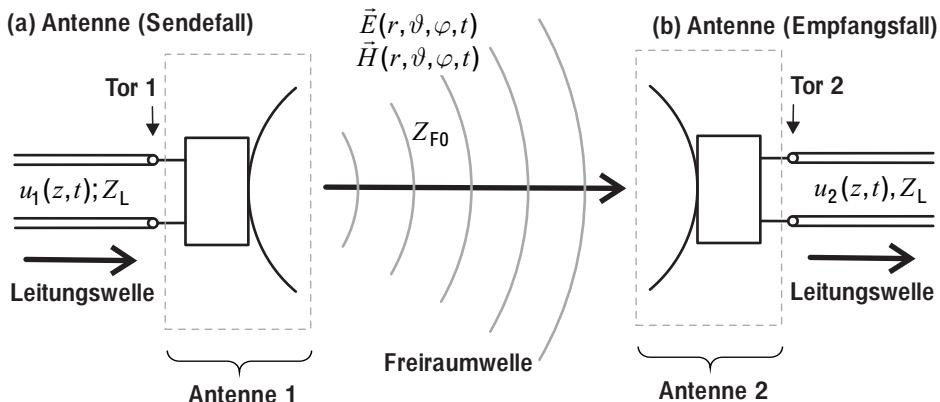
Antennen erzeugen und empfangen elektromagnetische Wellen, die sich im freien Raum ausbreiten. Im *Sendefall* wandelt die Antenne die an ihrem Tor zugeführte Leistung möglichst effizient in elektromagnetische Wellenfelder um. Im *Empfangsfall* nimmt die Antenne aus einem elektromagnetischen Wellenfeld Leistung auf und stellt diese an ihrem Netzwerktor zur Verfügung.

#### 7.1.1 Antennen als Wellentypwandler

Die Signalübertragung mit zwei Antennen ist in Bild 7.1 dargestellt: Eine leitungsgeführte Welle wird zum Eingangstor (Tor 1) einer Antenne geführt und dort idealerweise reflexionsfrei aufgenommen. Die Antenne erzeugt ein Wellenfeld (Freiraumwelle), welches Leistung von der Antenne fortführt (Bild 7.1a). Das erzeugte elektromagnetische Wellenfeld verlangt eine mathematisch sehr komplexe Behandlung. Von technischem Interesse ist zumeist nur das elektromagnetische Feld in einem größeren Abstand von der Antenne (*Fernfeld*). Da jede Antenne in hinreichend großem Abstand als klein angesehen werden kann, ist eine Beschreibung in Kugelkoordinaten zweckmäßig. Im Empfangsfall (Bild 7.1b) nimmt eine Antenne Energie aus einem Wellenfeld auf und regt eine Leitungswelle an ihrem Netzwerktor (Tor 2) an.

Die Strahlungseigenschaften und auch die Impedanz einer Antenne sind im Sende- und Empfangsfall gleich. Dieser wichtige Zusammenhang wird als Reziprozität bezeichnet. Praktisch bedeutet die *Reziprozität*, dass eine Antenne, die im Sendefall in einer bestimmten Richtung ihre maximale Strahlungsleistungsdichte abgibt, im Empfangsfall aus einer Welle auch die maximale Leistung auskoppelt, wenn die Welle aus dieser Richtung auf die Antenne trifft.

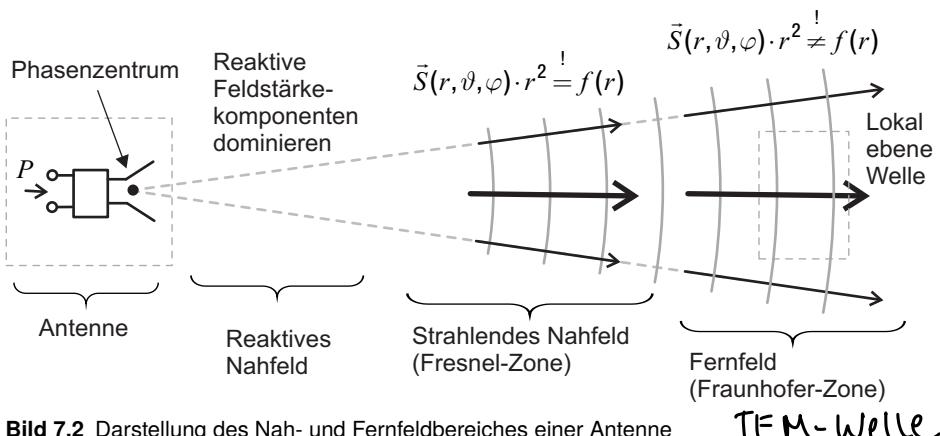
Im Folgenden wollen wir zunächst die wichtigsten Begriffe kennenlernen, die zur Charakterisierung von Antennen verwendet werden, und einige häufig vorkommende Antennenbauformen näher betrachten.



**Bild 7.1** Antenne als Wandler zwischen Leitungs- und Freiraumwelle: (a) Sende- und (b) Empfangsfall

### 7.1.2 Nahfeld und Fernfeld

Bei der Beschreibung von Antennen macht es einen großen Unterschied, ob man sich für die Feldverteilung im unmittelbaren Umfeld der Antenne (Nahfeld) oder nur für Beobachtungspunkte in größerer Entfernung (Fernfeld) interessiert. Die wichtigen Antennenkenngrößen sind alle für das Fernfeld einer Antenne definiert.



**Bild 7.2** Darstellung des Nah- und Fernfeldbereiches einer Antenne

TEM-Welle

Bei der mathematischen Behandlung des Hertzischen Dipols in Abschnitt 7.3 werden wir sehen, dass sich beim Übergang vom Nahfeld zum Fernfeld einer Antenne eine Reihe von Vereinfachungen ergibt. Das Nahfeld zeichnet sich durch starke reaktive Feldanteile aus, in denen elektrische und magnetische Energie gespeichert wird. Im Fernfeld dominiert hingegen der radial orientierte Leistungstransport. Der Übergang vom reaktiven Nahfeld zum strahlenden Fernfeld vollzieht sich kontinuierlich. Historisch gesehen haben sich bei der analytischen Behandlung von Strahlungsproblemen unterschiedliche Näherungen (Fresnel-Näherung, Fraunhofer-Näherung) bewährt (Bild 7.2). Hieraus abgeleitet ergeben sich Formeln für den Abstand, den man zur Antenne einnehmen muss, wenn man mit den für das Fernfeld

definierten Antennenkenngrößen arbeiten will (Fernfeldabstand). Das Fernfeld zeichnet sich dadurch aus, dass die Winkelabhängigkeit der Strahlungsleistungsdichte unabhängig von der Entfernung  $r$  ist [Mein92].

Der *Fernfeldabstand* hängt von der verwendeten Wellenlänge  $\lambda$  und den geometrischen Abmessungen der Antenne ab. Nach [Kark12] ergeben sich Fernfeldbedingungen bei *elektrisch kleinen Antennen* nach einem Abstand von mindestens

$$r \geq 2\lambda \quad (\text{Fernfeldabstand einer elektrisch kleinen Antenne}). \quad (7.1)$$

Bei Antennen, deren maximale Abmessungen  $L_{\max}$  größer als die Wellenlänge sind, treten die Fernfeldzustände erst bei noch größerem Abstand ein.

$$r \geq \frac{2L_{\max}^2}{\lambda} \quad (\text{Fernfeldabstand einer elektrisch großen Antenne}) \quad (7.2)$$

Das Fernfeld ( $r \rightarrow \infty$ ) einer Antenne zeigt einige besondere Eigenschaften:

- Die Beträge der Feldgrößen  $E$  und  $H$  sind reziprok zum Abstand  $r$ :  $|E|, |H| \sim 1/r$
- Die Amplituden der Feldgrößen  $E$  und  $H$  sind in Phase und über den Feldwellenwiderstand  $Z_{F0}$  des freien Raumes miteinander verknüpft:  $E = Z_{F0} H$  340Ω  $\frac{V}{A}$
- Die Vektoren des elektrischen und magnetischen Feldes besitzen nur noch transversale Komponenten, der radiale Anteil verschwindet  $E_r = H_r = 0$ . *nur auf Kugeloberfläche*  
TEM
- Die transversalen Anteile der Strahlungsleistungsdichte verschwinden ( $S_\theta = S_\varphi = 0$ ). Es bleibt nur ein radialer Anteil  $S_r$ .
- Der Betrag der Strahlungsleistungsdichte ist reziprok zum Abstandsquadrat:  $|S_r| \sim 1/r^2$ .

Für das Fernfeld können wir mit den komplexwertigen Amplituden  $E_\theta$  und  $E_\varphi$  allgemein schreiben [Kark12] [Geng98]:

$$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi) = E_\theta(r, \vartheta, \varphi) \cdot \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \vartheta, \varphi) \cdot \vec{e}_\varphi \quad . \quad (7.3)$$

*Skalar vektoriell*  
*Betrag Vektor*

Die Feldkomponenten sind proportional zur *Greenschen Funktion* des freien Raumes. Die Greensche Funktion beschreibt die aus Abschnitt 2.5.4 bekannte sich radial ausbreitende Kugelwelle.

$$E_\theta(r, \vartheta, \varphi); E_\varphi(r, \vartheta, \varphi) \sim \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (7.4)$$

Führt man die Kugelwelle auf ihren Ursprung zurück, so erhält man das *Phasenzentrum* (Bild 7.2). Die Zusammenhänge aus den Gleichungen (7.3) und (7.4) gelten entsprechend ebenso für das magnetische Feld.

### 7.1.3 Isotroper Kugelstrahler

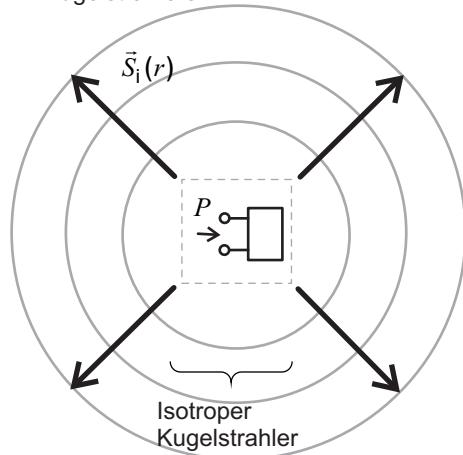
Der isotrope Kugelstrahler ist eine theoretische Antenne, die die ihr zugeführte Leistung gleichmäßig in alle Raumrichtungen abstrahlt (Bild 7.3a). Die Strahlungsleistungsdichte  $\bar{S}_i$  des isotropen Kugelstrahlers im Abstand  $r$  kann einfach aus der zugeführten Leistung  $P$  und

der Kugeloberfläche  $O = 4\pi r^2$ , auf die sich die Leistung verteilt, berechnet werden. Die Strahlungsleistungsdichte ist unabhängig von den Winkeln  $\varphi$  und  $\vartheta$ .

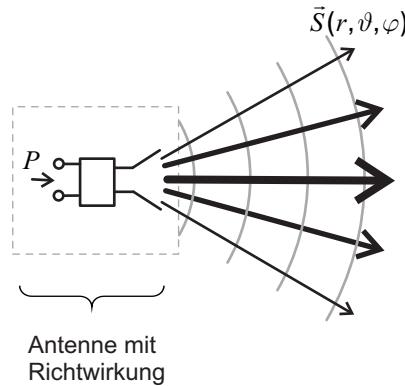
$$\vec{S}_i = \frac{P}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \frac{E_i^2}{Z_{F0}} \vec{e}_r = H_i^2 Z_{F0} \vec{e}_r \quad (7.5)$$

Bei einer allgemeinen Antenne stellt sich immer eine gewisse Richtwirkung ein, so dass hier die Strahlungsleistungsdichte im Fernfeld auch von den Winkeln  $\varphi$  und  $\vartheta$  abhängt, also gilt  $\vec{S} = S(r, \vartheta, \varphi) \vec{e}_r$  (siehe Bild 7.3b).

(a) Sphärische Wellen eines isotropen Kugelstrahlers



(b) Antenne mit Richtwirkung



**Bild 7.3** Strahlungsleistungsdichteverteilung (a) eines isotropen Kugelstrahlers und (b) einer richten- den Antenne (z.B. einer Parabolantenne)

Der isotrope Kugelstrahler ist technisch nicht realisierbar, dient aber bei den Antennenkenngrößen realer Antennen als wichtige Bezugsgröße.

#### 7.1.4 Kenngrößen für das Strahlungsfeld einer Antenne

Strahlungsfelder realer Antennen sind sehr komplex. Zur einfacheren Charakterisierung werden einige Größen verwendet, die im Fernfeld definiert sind. Antennen senden ihre Strahlungsleistung nicht gleichmäßig in alle Raumrichtungen. Die *reelle, skalare, feldstärkebezogene Richtcharakteristik* (3D-Strahlungsdiagramm, *Radiation pattern*) beschreibt diese Richtungsabhängigkeit als Funktion der Winkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  [Bala08]. Die Richtcharakteristik kann auf die Feldstärke des isotropen Kugelstrahlers oder auf ihr eigenes Maximum bezogen werden. Wir wollen als Bezeichnungen  $C_i$  und  $C$  einführen. Im Fernfeld lautet die Richtcharakteristik  $C_i$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \left. \frac{E(r, \vartheta, \varphi)}{E_i(r)} \right|_{r \rightarrow \infty} = \left. \frac{H(r, \vartheta, \varphi)}{H_i(r)} \right|_{r \rightarrow \infty} \quad (\text{Richtcharakteristik}). \quad (7.6)$$

Hierbei wird die elektrische (oder magnetische) Feldstärke bezogen auf die Feldstärke eines isotropen Kugelstrahlers im gleichen Abstand.<sup>1</sup>

Entfällt der Index  $i$ , so wollen wir die Richtcharakteristik auf ihren Maximalwert im gleichen Abstand beziehen:

$$C(\vartheta, \varphi) = \left. \frac{E(r, \vartheta, \varphi)}{E_{\max}(r)} \right|_{r \rightarrow \infty} = \left. \frac{H(r, \vartheta, \varphi)}{H_{\max}(r)} \right|_{r \rightarrow \infty} \quad \begin{array}{l} \text{(Normierte} \\ \text{Richtcharakteristik).} \end{array} \quad (7.7)$$

Zur besseren Auflösung kleiner Zahlenwerte ist die logarithmische Darstellung gebräuchlich.

$$C^\ell(\vartheta, \varphi) / \text{dB} = 20 \lg(C(\vartheta, \varphi)) \quad \text{und} \quad C_i^\ell(\vartheta, \varphi) / \text{dBi} = 20 \lg(C_i(\vartheta, \varphi)) \quad (7.8)$$

Die Pseudoeinheit dBi weist auf den isotropen Kugelstrahler als Bezugsantenne hin. Bild 7.4a zeigt zwei Ansichten der logarithmischen Darstellung eines 3D-Strahlungsdiagramms. Die Richtung, in der der maximale Wert erscheint, wird als *Hauptstrahlrichtung* bezeichnet.

Die reelle, skalare Richtcharakteristik  $C_i$  wird häufig noch ergänzt um die Angabe der *Polarisation* der Antenne *in Hauptstrahlrichtung*. Nach Gleichung (7.3) setzt sich die elektrische Feldstärke im Fernfeld aus zwei unabhängigen orthogonalen Komponenten  $E_\varphi$  und  $E_\vartheta$  zusammen. Je nach Verhältnis der Beträge und Phasen der Amplituden unterscheiden wir unterschiedliche Polarisationen. Es treten die gleichen Polarisationsbezeichnungen (linear, zirkular, elliptisch) wie bei der homogenen ebenen Welle in Abschnitt 2.5.2 auf. Die *skalare Richtcharakteristik* und die *Polarisation in Hauptstrahlrichtung* liefern für die meisten Anwendungsfälle eine ausreichende Beschreibung des Fernfelds.

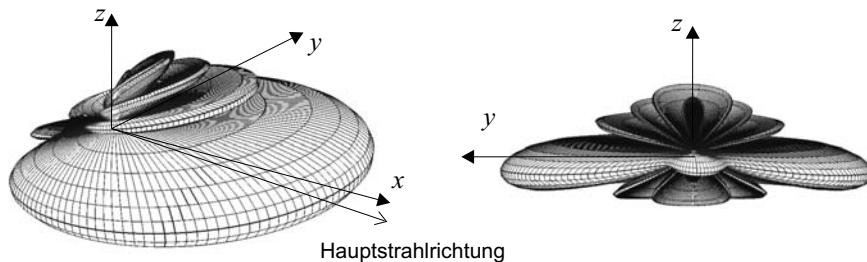
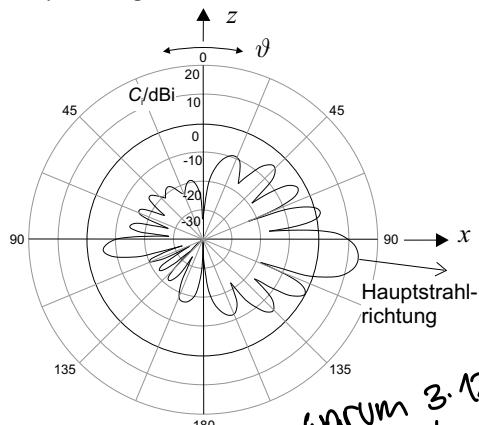
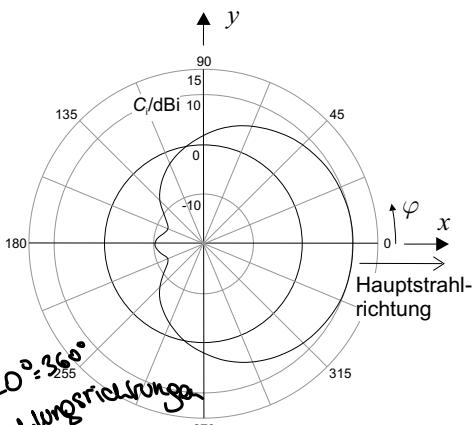
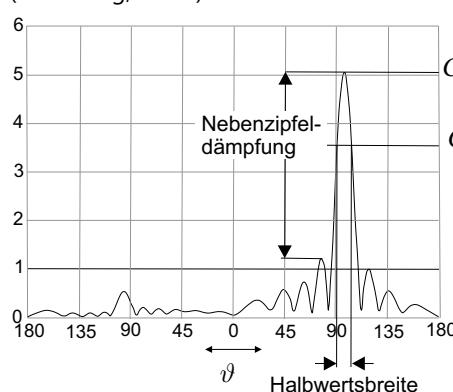
Die reelle, skalare Richtfunktion  $C_i$  beschreibt das Fernfeld *nicht vollständig*, da die Feldstärken Vektoren mit komplexwertigen Komponenten sind. Eine vollständige Beschreibung liefert die *komplexe, vektorielle Richtcharakteristik*, die aber wegen ihres vektoriellen und komplexen Charakters nicht mehr einfach in einem Diagramm dargestellt werden kann. Eine vollständige Beschreibung ist von Bedeutung, wenn man Wellenausbreitungsvorgänge von Antennen in komplexen Umgebungen modelliert [Geng98] oder das Strahlungsfeld von Gruppenantennen aus den Einzelstrahlercharakteristiken berechnet.

In einigen Fällen, vor allem bei elementaren Antennentypen, weist das 3D-Strahlungsdiagramm eine einfache Form auf. Hier reicht es zur Beschreibung oft aus, zweidimensionale Schnitte durch die Richtcharakteristik darzustellen. Bei der Auswahl der Schnittebenen orientiert man sich an der Lage der Antenne im Raum: Bild 7.4b und Bild 7.4c zeigen einen vertikalen und einen horizontalen Schnitt durch das Strahlungsdiagramm aus Bild 7.4a. Zum Vergleich ist auch der 0-dB-Kreis (entspricht dem Verhalten des isotropen Kugelstrahlers) enthalten. Die Schnitte werden in der Regel so ausgewählt, dass das Maximum des 3D-Strahlungsdiagramms enthalten ist. Weiterhin sind bei linear-polarisierenden Antennen Diagrammschnitte gebräuchlich, in denen das elektrische bzw. das magnetische Feld transversal verläuft. Diese Schnitte werden auch als *E-Ebene* und *H-Ebene* bezeichnet.

Basierend auf der feldstärkebezogenen Richtfunktion  $C_i$  werden weitere wichtige Kenngrößen definiert (Bild 7.4d). Bei Antennen mit einer ausgeprägten Richtwirkung der Strahlung bezeichnet man die Bereiche mit hohen Werten als *Hauptkeule* (für das absolute Maximum) und *Nebenkeulen* oder *Nebenzipfel* (für die relativen Maxima).

<sup>1</sup> Neben der Richtcharakteristik  $C$  (bzw.  $C_i$ ) für die Gesamtfeldstärke kann auch eine Richtcharakteristik jeweils für die  $\varphi$ - oder  $\vartheta$ -Komponente angegeben werden.

(a) 3D Strahlungsdiagramm

(b) Vertikales 2D Strahlungsdiagramm  
(polar, logarithmisch)(c) Horizontales 2D Strahlungsdiagramm  
(polar, logarithmisch)(d) Vertikales 2D Strahlungsdiagramm  
(rechteckig, linear)

*warum 3, 120° = 360° strahlungsrückungen*

0 dBi = Isotroper Kugelstrahler

c) gebündelt

mobil funk netz 3 Sektoren (Zellen)

→ Wabenstruktur

1 Zelle jede Zelle unterschiedl. Frequenz → optimale gleichmäßige Versorgung

1 = Isotroper Kugelstrahler

WO 0dB-Kreis bei normierter Darstellung 0dB Linie wo → unter max bei nicht nominiert bei bei normiert bei Max

**Bild 7.4** (a) 3D-Strahlungsdiagramm  $C_i(\vartheta, \varphi)$ ; (b) vertikales und (c) horizontales 2D-Strahlungsdiagramm in Polardarstellung und (d) kartesisches 2D-Strahlungsdiagramm

Das Amplitudenverhältnis von Hauptkeule und größter Nebenkeule wird als *Nebenzipfel-dämpfung* bezeichnet und sollte bei Richtantennen möglichst groß sein, d.h. es sind nur relativ kleine Nebenzipfel gewünscht.

Als *Halbwertsbreite*  $\Psi$  (oder Öffnungswinkel) bezeichnet man den Winkelbereich, in dem die Hauptkeule Werte besitzt, die größer als  $C_{i,\max}/\sqrt{2}$  ist. Die Halbwertsbreite wird in der Regel in 2D-Strahlungsdiagrammen bestimmt. So ist es üblich, bei Antennen mit einer horizontal liegenden Hauptkeule eine horizontale und eine vertikale Halbwertsbreite anzugeben.

Neben der feldstärkebezogenen Richtcharakteristik  $C_i$  wird auch die leistungsbezogene Richtfunktion  $D$  im Fernfeld verwendet. Sie ergibt sich aufgrund von Gleichung (7.5) als Quadrat der Richtfunktion  $C_i$ .

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(r, \vartheta, \varphi)}{S_i(r)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = C_i^2(\vartheta, \varphi) = DC^2(\vartheta, \varphi) \quad (\text{Richtfunktion}) \quad (7.9)$$

Das Maximum der Richtfunktion ist der *Richtfaktor*  $D$ .

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} \quad (\text{Richtfaktor}) \quad (7.10)$$

Der Richtfaktor (*Directivity*) gibt an, um welchen Faktor die Strahlungsleistungsdichte der Antenne in Hauptstrahlrichtung größer ist als die Strahlungsleistungsdichte des isotropen Kugelstrahlers. Tabelle 7.1 zeigt typische Werte des Richtfaktors  $D$  für einige praktische Antennenbauformen. Auch wenn der Richtfaktor eines einzelnen Antennenelements (z.B. Dipol oder *Patch*) zunächst eher gering ist, so kann durch Anordnung mehrerer Antennen in einer Gruppe eine deutliche Erhöhung der Richtwirkung erreicht werden (siehe Abschnitt 7.6).

Die logarithmische Darstellung der leistungsbezogenen Richtfunktion ist gegeben mit:

$$D^\ell(\vartheta, \varphi) / \text{dBi} = 10 \lg(D(\vartheta, \varphi)) = C_i^\ell(\vartheta, \varphi) / \text{dBi} = 20 \lg(C_i(\vartheta, \varphi)) . \quad (7.11)$$

Durch die Verwendung der Pseudoeinheit dBi ist eine Verwechslung der logarithmischen mit der linearen Darstellung ausgeschlossen. Zur Schreibvereinfachung entfällt daher im Folgenden stets der Index  $\ell$ .

**Tabelle 7.1** Typische Werte des Richtfaktors für einige praktische und theoretische Antennen

Antenne (siehe auch Abschnitt 7.2)	Richtfaktor $D$ (logarithmisch)	Richtfaktor $D$ (linear)
Isotroper Kugelstrahler	0 dBi	1
Hertzscher Dipol	1,76 dBi	1,5
$\lambda/2$ -Dipol	2,15 dBi	1,64
$\lambda/4$ -Monopol	5,15 dBi	3,28
<i>Patch</i> -Antenne	6 dBi	4
Logarithmisch-periodische Antenne	7 dBi	5
Hornantenne	20 dBi	100
Parabolantenne ( $\varnothing \approx 70$ cm; $\approx 11$ GHz)	>30 dBi	>1000

Die Richtcharakteristik und die Richtfunktion veranschaulichen sehr gut den *Sendefall* einer Antenne, gelten jedoch aufgrund der *Reziprozität* (Sende- und Empfangscharakteristik sind gleich) auch im Empfangsfall. Eine Antenne, die in eine bestimmte Raumrichtung *maximal* abstrahlt, ist auch in dieser Richtung als Empfangsantenne maximal empfindlich, d.h. falls das einfallende Wellenfeld aus dieser Richtung einfällt, entnimmt die Antenne dem Feld die maximale Leistung.

Eine Größe, die im *Empfangsfall* gut verständlich ist, ist die *effektive Antennenwirkfläche*. Um diese Größe anschaulich zu interpretieren, stellen wir uns eine homogene ebene Welle vor, die unter folgenden Annahmen auf die Antenne trifft:

- Die Polarisation der ebenen Welle und der Antenne stimmen überein (z.B. können beide vertikal polarisiert sein).
- Zwischen Antenne und Lastimpedanz herrscht Leistungsanpassung, so dass von der Last die maximale Leistung aufgenommen wird.
- Die Antenne selbst sei verlustfrei.

Unter diesen Annahmen verknüpft die effektive Antennenwirkfläche die Strahlungsleistungsdichte  $S$  der einfallenden ebenen Welle mit der aufgenommenen Leistung  $P$  der Last.

$$P = A_{W,\text{eff}} S \quad (7.12)$$

Die effektive Antennenwirkfläche kann also *geometrisch* als eine Fläche interpretiert werden durch die das elektromagnetische Wellenfeld läuft. Die Antenne nimmt also die durch die Antennenwirkfläche tretende Strahlungsleistung auf und stellt sie als Empfangsleistung zur Verfügung.

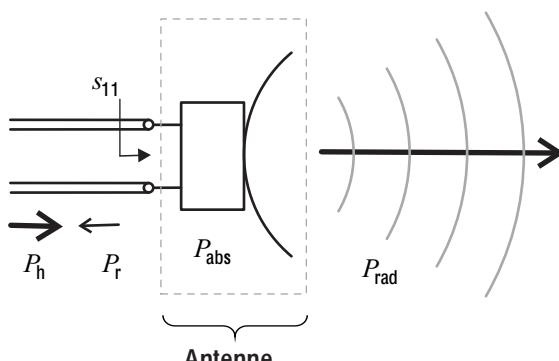
Die effektive Antennenwirkfläche lässt sich mit dem Richtfaktor  $D$  und der Wellenlänge  $\lambda$  bestimmen.

$$A_{W,\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D$$

(Effektive Antennenwirkfläche) (7.13)

Richtfaktor  $D$  und effektive Antennenwirkfläche  $A_{W,\text{eff}}$  berücksichtigen die Verluste einer Antenne nicht, sondern nur deren Richtwirkung. Bei einer realen Antenne treten jedoch zwei Verlustmechanismen auf:

- Absorption durch ohmsche und dielektrische Verluste,
- Anpassungsverluste durch Fehlanpassungen zwischen Quell- und Antennenimpedanz.



**Bild 7.5** Hinlaufende, reflektierte, absorbierte und abgestrahlte Leistung

Bild 7.5 zeigt die Verlustmechanismen auf. Auf die Antenne läuft die Leistung  $P_h$  vom Sender zu. Da im Allgemeinen Quell- und Antennenimpedanz nicht ideal übereinstimmen, ist der Reflexionsfaktor  $|r| = |s_{11}| > 0$ . Die Leistung  $P_r = |s_{11}|^2 P_h$  wird reflektiert. Von der Antenne wird also nur die Leistung  $P_{\text{auf}} = P_h(1 - |s_{11}|^2)$  aufgenommen. Diese aufgenommene Leistung

wird teilweise absorbiert und in Wärme umgesetzt ( $P_{\text{abs}}$ ) und teilweise abgestrahlt ( $P_{\text{rad}}$ ). Basierend auf diesen Überlegungen kann ein *Antennenwirkungsgrad*  $\eta$  definiert werden, der die ohmschen und dielektrischen Verluste beschreibt.

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{auf}}} = \frac{P_{\text{rad}}}{P_h - P_r} = \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{rad}} + P_{\text{abs}}} \leq 1} \quad (\text{Antennenwirkungsgrad}) \quad (7.14)$$

Unter Berücksichtigung der Fehlanpassung kann ein *totaler Wirkungsgrad*  $\eta_{\text{total}}$  definiert werden, der auch noch die Anpassungsverluste einschließt.

$$\boxed{\eta_{\text{total}} = \frac{P_{\text{rad}}}{P_h} = (1 - |s_{11}|^2) \eta \leq \eta \leq 1} \quad (\text{Totaler Antennenwirkungsgrad}) \quad (7.15)$$

Der *Gewinn*  $G$  einer Antenne berücksichtigt im Gegensatz zum Richtfaktor die Verluste und lässt sich aus Antennenwirkungsgrad und Richtfaktor berechnen.

$$\boxed{G = \eta D} \quad (\text{Gewinn}) \quad (7.16)$$

Das Produkt aus Gewinn  $G$  und zugehöriger Sendeleistung  $P$  wird als EIRP (*Equivalent Isotropically Radiated Power*) bezeichnet.

$$\text{EIRP} = GP \quad \text{und} \quad \text{EIRP/dBm} = 10 \lg \left( \frac{GP}{1 \text{ mW}} \right) \quad (7.17)$$

Die Größe EIRP gibt die Leistung an, die man einem isotropen Kugelstrahler zuführen muss, damit er – in Hauptstrahlrichtung – die gleiche Strahlungsleistungsdichte erzeugt, wie die Antenne mit dem Gewinn  $G$ , die mit der Leistung  $P$  gespeist wird.

Standards für drahtlose Netzwerke geben im Allgemeinen Grenzwerte für die Größe EIRP vor [Bala08]. Wird zur Kommunikation eine Antenne mit dem Gewinn  $G$  verwendet, so kann nach Gleichung (7.17) die maximal zulässige Sendeleistung  $P$  berechnet werden.

### 7.1.5 Anpassung und Bandbreite

Am Eingangstor der Antenne ist die allgemein komplexwertige und frequenzabhängige Eingangsimpedanz (Fußpunktimpedanz)  $Z_A$  sichtbar. Bild 7.6a zeigt einen typischen Verlauf von Real- und Imaginärteil der Eingangsimpedanz über einen größeren Frequenzbereich.

$$Z_A = R_A + j X_A \quad (7.18)$$

Der ohmsche Anteil der Eingangsimpedanz beschreibt die abgestrahlte Wirkleistung und die durch ohmsche und dielektrische Absorption bestimmte Verlustleistung.

$$R_A = R_{\text{rad}} + R_{\text{abs}} \quad (7.19)$$

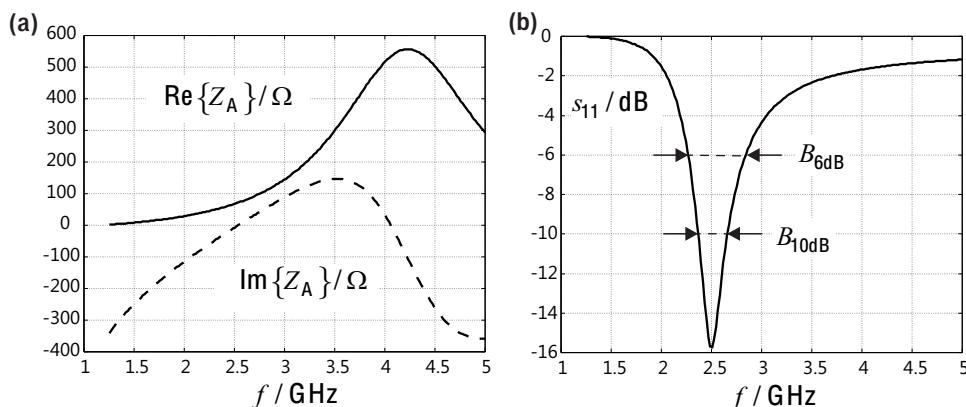
Wird die Antenne über eine Leitung mit einem Leitungswellenwiderstand  $Z_L$  gespeist, so ergibt sich der Reflexionsfaktor wie aus Abschnitt 3.1.10 bekannt durch:

$$r_A = s_{11} = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L} \quad . \quad (7.20)$$

Bild 7.6b zeigt den zur nebenstehenden Antennenimpedanz gehörenden Betrag des Eingangsreflexionsfaktors bei einem Bezugswiderstand von  $Z_L = 50\Omega$ . Im Betriebsfrequenzbereich wird man bemüht sein, den Reflexionsfaktor möglichst klein zu halten. Je nachdem welchen maximalen Betrag des Reflexionsfaktors man zulässt (typische Werte sind: -6 dB, -10 dB und -20 dB), besitzt die Antenne unterschiedlich große Frequenzbereiche (Bandbreiten  $B$ ), in denen sie betrieben werden kann.

Ziel des Antennenentwurfs ist es, die Eingangsimpedanz an die Quell- oder Bezugsimpedanz anzupassen. Durch konstruktive Maßnahmen (z.B. Lage des Speisepunktes) ist dies bei vielen Antennentypen (siehe z.B. *Patch*-Antenne in Abschnitt 7.6) möglich.

Falls es nicht gelingt, die Antennenimpedanz hinreichend an die Bezugsimpedanz anzunähern, so kann durch ein zusätzliches Anpassnetzwerk der Reflexionsfaktor minimiert werden. Dieses Anpassnetzwerk bedeutet aber einen zusätzlichen Schaltungsaufwand.

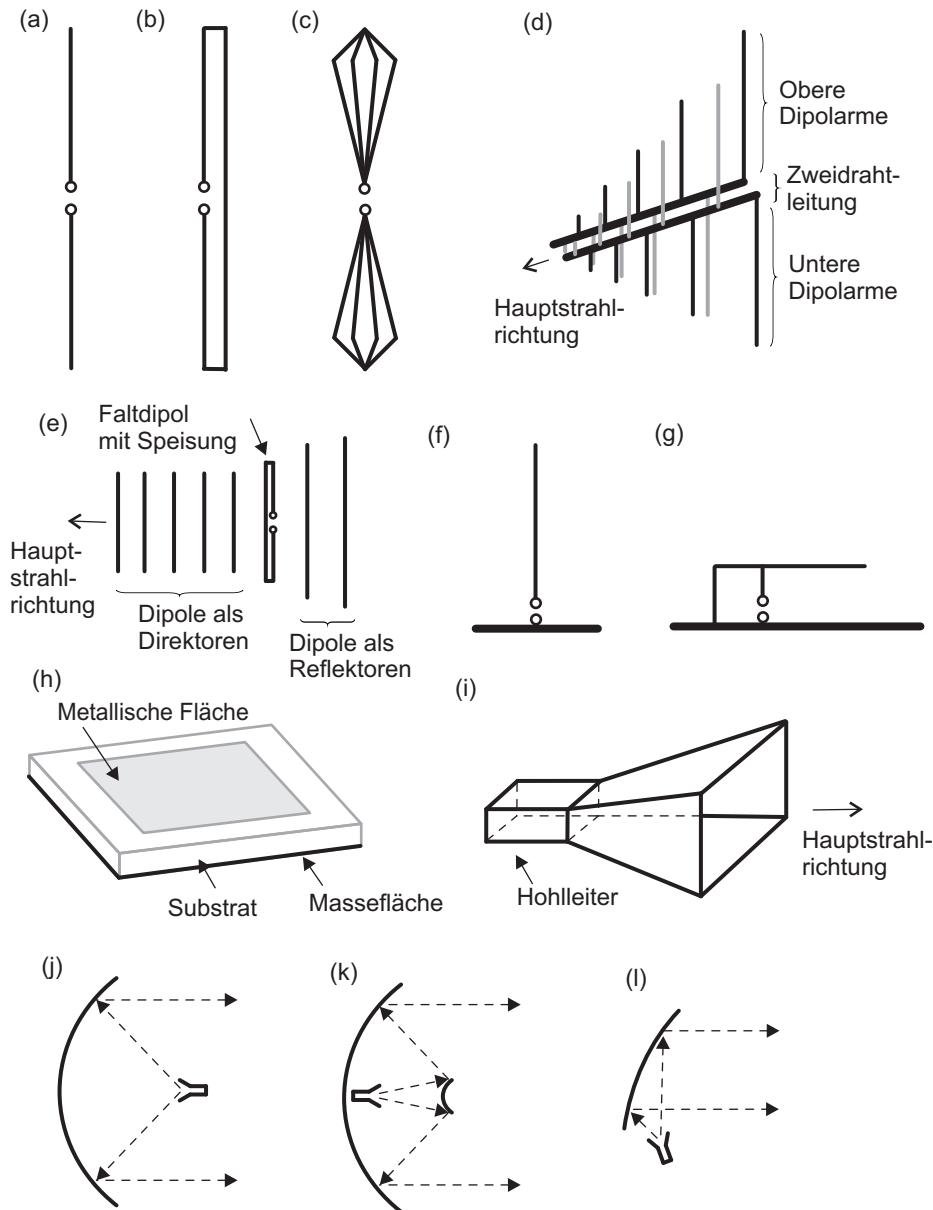


**Bild 7.6** (a) Eingangsimpedanz und (b) Eingangsreflexionsfaktor (Bezugsimpedanz  $50\Omega$ ) einer Antenne

Die *Bandbreite einer Antenne* wird in der Regel aber nicht nur an der oben beschriebenen Bedingung der Impedanzanpassung festgemacht, sondern bezieht auch die *Konstanz anderer wichtiger Antenneneigenschaften* wie Richtung der Hauptkeule, Gewinn und Polarisierung ein. Eine breitbandige Antenne zeichnet sich dadurch aus, dass sich ihre wesentlichen Eigenchaften über einem weiten Frequenzbereich nur in einem vorgegebenen Rahmen ändern.

## ■ 7.2 Praktische Antennenbauformen

Antennen erscheinen in einer Vielzahl von Bauformen, denn je nach technischer Anforderung und Betriebs-Frequenzbereich ergeben sich unterschiedliche Lösungen. Bild 7.7 zeigt eine kleine Übersicht an typischen Antennengeometrien. Antennenparameter, die optimiert werden können, sind zum Beispiel: die Bandbreite, der Gewinn oder ein speziell vorgegebenes Abstrahlverhalten. Oft ergeben sich aber auch zusätzliche Anforderungen, wie geringe Baugröße oder kostengünstiger bzw. vorgegebener Herstellungsprozess.



**Bild 7.7** Auswahl an Antennenbauformen: (a) Dipol, (b) Faltdipol, (c) bikonische Antenne, (d) logarithmisch-periodische Dipolantenne, (e) Yagi-Uda-Antenne, (f) Monopol, (g) *Inverted-F*-Antenne, (h) *Patch*-Antenne, (i) Hornantenne, (j) Parabolantenne, (k) Parabolantenne mit Subreflektor (Cassegrain), (l) Parabolantenne mit *Offset*-Speisung (Muschelantenne)

Der *Dipol* in Bild 7.7a stellt eine einfache, rundstrahlende Antenne dar und besteht lediglich aus zwei metallischen Dipolarmen mit einer Speisestelle in der Mitte. Besitzt der Dipol die Abmessung einer halben Wellenlänge, so stellen sich aufgrund der Resonanz besonders günstige

Verhältnisse in Hinsicht auf Abstrahlung und Anpassung an eine übliche Speiseleitung (Leitungswellenwiderstand  $50\Omega$  oder  $75\Omega$ ) ein.

Ergänzt man den Dipol um ein in unmittelbarer Nähe parallel verlaufendes Element, so erhält man den *Faltdipol* in Bild 7.7b mit einem erhöhten Wert der Eingangsimpedanz. Dies kann vorteilhaft sein, wenn eine Speiseleitung mit höherem Leitungswellenwiderstand verwendet wird oder sich aufgrund eines Symmetriergliedes die Impedanz vergrößert.

Um die Bandbreite eines Dipols zu steigern, können die Leiter konisch mit wachsendem Querschnitt ausgeführt werden, dies führt zur *bikonischen Antenne* in Bild 7.7c. Bikonische Antennen werden zum Beispiel im Bereich der EMV-Messtechnik bei niedrigen Frequenzen eingesetzt.

Dipole werden häufig als Grundelemente verwendet, um komplexere Antennensysteme zu bauen. Die *logarithmisch-periodische Dipolantenne* (LPDA) besteht aus einer Zweidrahtleitung, an der Dipole alternierend, mit wachsender Länge und mit zunehmendem Abstand zueinander angeordnet sind (Bild 7.7d). Die Bezeichnung der Antenne röhrt her von einem logarithmischen Gesetz, welches die Lage der Dipole längs der Leitung festlegt. Wird an der Spitze der Antenne ein Signal eingespeist, so läuft es zunächst längs der Leitung, bis es den Bereich erreicht, wo die Länge der Dipole in etwa der halben Wellenlänge des Signals entspricht. In diesem Antennenbereich wird das Signal dann abgestrahlt. Die strahlende Zone der Antenne hängt also von der Frequenz ab und liegt bei höheren Frequenzen näher an der Spitze und bei tieferen Frequenzen im Bereich der langen Dipole am Ende der Zweidrahtleitung. Die Antenne zeichnet sich durch eine hohe Bandbreite (bestimmt durch die Längen der Dipole) aus und wird zum Beispiel bei EMV-Messungen im mittleren Frequenzbereich eingesetzt.

Steht nicht die Bandbreite im Vordergrund, sondern ein hoher Gewinn, so können Dipole zu einer *Yagi-Uda-Antenne* (Bild 7.7e) kombiniert werden. Diese Antenne besitzt einen gespeisten Strahler (Faltdipol oder Dipol) und wird ergänzt um Direktoren (verkürzte Dipole in Hauptstrahlrichtung) und Reflektoren (verlängerte Dipole in rückwärtiger Richtung). Das Zusammenspiel zwischen Speiselement, Direktoren und Reflektoren geschieht mittels Strahlungskopplung. Im Gegensatz zur logarithmisch-periodischen Antenne gibt es hier keine gemeinsame Leitung. Die Yagi-Uda-Antennen waren lange Zeit die Standardantennen für terrestrischen TV-Empfang und auf vielen Hausdächern anzutreffen.

Die Dipolantenne aus Bild 7.7a und ihre elektromagnetische Feldverteilung besitzen eine horizontale Symmetriefläche auf Höhe der Speisung. Die Feldverteilung in der oberen Hälfte wird nicht gestört, wenn die ebene Symmetriefläche durch eine ausgedehnte metallische Massefläche ersetzt wird. Wir erhalten damit den *Monopol* in Bild 7.7f. Die Höhe des Monopols beträgt nun nur noch ein Viertel der Wellenlänge. Der Monopol lässt sich gut als Empfangsantenne auf metallischen Gehäusen einsetzen (z.B. Rundfunkempfang in Fahrzeugen).

Die große Bauhöhe einer Viertelwellenlänge bei einem Monopol ist oft hinderlich, wenn eine Antenne in ein Gerät integriert werden soll. Die *Inverted-F-Antenne* (IFA) in Bild 7.7g zeigt hier eine reduzierte Bauhöhe. Die Antenne leitet sich von einem Monopol ab, der geknickt und dessen Speisung verändert wird. *Inverted-F*-Antennen lassen sich hervorragend in planare Schaltungen integrieren und werden daher zum Beispiel bei Bluetooth-Anwendungen eingesetzt.

Die *Patch*-Antenne in Bild 7.7h weist ebenfalls eine geringe Bauhöhe auf und kann gut integriert werden. Sie besteht aus einer häufig rechteckigen Metallfläche auf einer dünnen nichtleitenden Substratschicht. Die Rückseite des Substrates stellt die Massefläche dar. *Patch*-Antennen besitzen eine kleine Bandbreite, sind jedoch aufgrund der Permittivität des Substra-

tes gut miniaturisierbar und können kostengünstig hergestellt werden. Mit *Patch*-Antennen lassen sich Einzel- und Gruppenantennen sehr effizient aufbauen (siehe Abschnitt 7.6), z.B. für Radaranwendungen oder als *Reader*-Antennen für die RFID-Technik [Fink12] [Dobk08].

Ab einer Frequenz von etwa einem Gigahertz können *Hornantennen* verwendet werden. Diese bestehen aus einem sich pyramidenförmig aufweitenden Hohlleiter (Bild 7.7i) und besitzen mit zunehmender Hornlänge wachsende Gewinnwerte. Hornantennen werden zum Beispiel in Speisesystemen von Parabolantennen oder in der EMV-Messtechnik bei höheren Frequenzen verwendet.

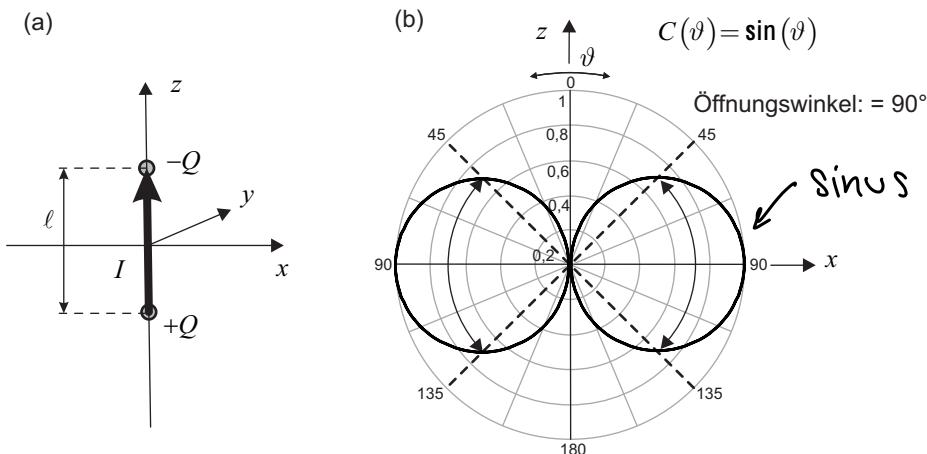
*Parabolantennen* bestehen aus einem Reflektor mit einer paraboloidförmigen Fläche. Die Reflektorfläche ist im Allgemeinen deutlich größer als die Betriebswellenlänge, so dass näherungsweise von einer strahlförmigen Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ausgegangen werden kann. Wie im optischen Bereich werden Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, zu achsenparallelen Strahlen (Bild 7.7j). Befindet sich im Brennpunkt eine Antenne, so kann mit einer solchen Antenne ein hoher Gewinn realisiert werden. Anwendung finden diese Bauformen zum Beispiel bei Satellitenfunkstrecken.

Bei Verwendung eines konvexen Subreflektors (Bild 7.7k) erhält man eine Cassegrain-Parabolantenne. Die Speiseantenne liegt dann kurz vor dem Parabolspiegel oder ist in diesen integriert. Sowohl bei der einfachen Parabolantenne als auch bei der Parabolantenne mit Subreflektor wird ein Teil des Parabolspiegels durch den Empfänger oder Subreflektor abgeschattet. Die Abschattung lässt sich durch eine *Offset*-Speisung vermeiden, bei der die Speiseantenne außerhalb des Strahlengangs angebracht ist und nur ein Teil der Paraboloidfläche als Reflektor verwendet wird (Bild 7.7l). Es verbleibt ein muschelförmiges Stück der Reflektorfläche, weshalb auch die Bezeichnung Muschelantenne üblich ist. Muschelantennen werden häufig bei Richtfunkverbindungen eingesetzt.

## ■ 7.3 Mathematische Behandlung des Hertzschen Dipols

Beim *Hertzschen Dipol* handelt es sich um ein strahlendes infinitesimal kleines Stromelement. Für dieses Problem kann eine mathematisch geschlossene Lösung angegeben werden [Kark12] [Bala05]. Praktische Bedeutung erlangt dieses Modell, da man sich viele technische Antennenstrukturen als aus solchen kleinen Stromelementen zusammengesetzt denken kann. Wesentliche Antenneneigenschaften lassen sich am Beispiel des Hertzschen Dipols mathematisch nachvollziehbar erläutern.

Bild 7.8a zeigt den Aufbau des Strahlers. Längs der  $z$ -Achse fließt der Strom  $I$  auf einer Länge  $\ell$ . Die Länge  $\ell$  soll gegen null tendieren, allerdings soll das Produkt aus Strom und Länge endlich sein. Am Ende des Stromes entstehen dann die Ladungen  $Q$  und  $-Q$ . Wir betrachten eine harmonische Zeitabhängigkeit und rechnen daher mit komplexen Größen.



**Bild 7.8** Hertzschener Dipol: (a) Aufbau und (b) vertikaler Schnitt durch die normierte Richtfunktion in einer  $E$ -Ebene

Die Berechnung der Feldgrößen  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  erfolgt zweckmäßigerverweise über das magnetische Vektorpotential  $\vec{A}$ , welches sich aus der Stromdichtevertteilung  $\vec{j}$  berechnen lässt [Kark12].

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{j} e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\nu'} \quad (\text{Magnetisches Vektorpotential}) \quad (7.21)$$

Die gestrichenen Größen ( $\vec{r}', V'$ ) bezeichnen die Koordinaten des Quellpunktes, die ungestrichene Größe  $\vec{r}$  die Koordinaten des Aufpunktes.

Aus dem magnetischen Vektorpotential und unter Verwendung der Lorenz-Eichung

$$\operatorname{div} \vec{A} = -j\omega\mu_0\epsilon_0\varphi \quad (7.22)$$

lassen sich dann in einem zweiten Schritt das magnetische Feld  $\vec{H}$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A}} \quad (7.23)$$

und das elektrische Feld  $\vec{E}$  bestimmen:

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - j\omega \vec{A} = \frac{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}}{j\omega\mu_0\epsilon_0} - j\omega \vec{A}} \quad . \quad (7.24)$$

Berechnen wir zunächst das magnetische Vektorpotential nach Gleichung (7.21). Das Integral erstreckt sich über das Quellvolumen  $V'$ . Die Berechnung können wir einfach in kartesischen Koordinaten durchführen. Für den Aufpunkt  $\vec{r}$  und Quellpunkt  $\vec{r}'$  gelten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} \quad . \quad (7.25)$$

Hiermit folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \iint_{A'_{xy}} \frac{\vec{J} e^{-jk\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} dx' dy' dz' . \quad (7.26)$$

Aufgrund der infinitesimal kleinen Abmessungen  $\ell \rightarrow 0$  gehen Aufpunktsvektor und Differenz aus Aufpunktsvektor und Quellpunktsvektor ineinander über.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \quad (7.27)$$

Die Integration der Stromdichte  $\vec{J}$  über die Querschnittsfläche  $A'_{xy}$  liefert den Strom  $I$ :

$$\iint_{A'_{xy}} \vec{J} dx' dy' = I \vec{e}_z . \quad (7.28)$$

Wir erhalten damit für das magnetische Vektorpotential des Hertzischen Dipols:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{e}_z} \quad (\text{Magn. Vektorpotential}). \quad (7.29)$$

Das magnetische Vektorpotential besitzt – ebenso wie die Quellstromdichte – nur eine  $z$ -Komponente.

Für die Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärke ist es sinnvoll, auf Kugelkoordinaten überzugehen. Hierzu drücken wir den Einheitsvektor in  $z$ -Richtung gemäß Anhang A durch die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten aus.

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos \vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin \vartheta \quad (7.30)$$

Das Vektorpotential hat also eine  $r$ - und eine  $\vartheta$ -Komponente. Für die Auswertung der Zusammenhänge in den Gleichungen (7.23) und (7.24) benötigen wir die Rotation-, Divergenz- und Gradientoperatoren in Kugelkoordinaten aus dem Anhang A. Diese lauten:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial (A_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (A_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (7.32)$$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi . \quad (7.33)$$

Beim Einsetzen des magnetischen Vektorpotentials in die obigen Beziehungen ergeben sich Vereinfachungen, da das Vektorpotential keine  $\varphi$ -Komponente besitzt. Zudem werden alle Ableitungen nach der Koordinate  $\varphi$  null, da das Vektorpotential nicht von  $\varphi$  abhängt.

Für die Felder erhalten wir nach kurzer Rechnung (Übung 7.4) die Feldkomponenten:

$$\boxed{\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{I\ell}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r^2} (1 + jkr) \sin \vartheta \\ H_r &= H_\theta = 0 \\ E_r &= \frac{I\ell}{j2\pi\omega\epsilon} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r^3} (1 + jkr) \cos \vartheta \\ E_\theta &= \frac{I\ell}{j4\pi\omega\epsilon} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r^3} (1 + jkr - (kr)^2) \sin \vartheta \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned}} \quad \text{(Felder des Hertzschens Dipols).} \quad (7.34)$$

Bei Antennen ist das Verhalten im Fernfeld entscheidend. In den Klammern der Ausdrücke für die Feldstärkekomponenten taucht der Term  $kr$  in unterschiedlichen Potenzen (0, 1, 2) auf. Für größer werdende Abstände  $r$  setzt sich der Term mit höchster Potenz durch. Die magnetische Feldstärke ist so proportional zu  $1/r$ . Die radiale Komponente des elektrischen Feldes ist proportional zu  $1/r^2$  und kann so gegen die  $\vartheta$ -Komponente, die proportional zu  $1/r$  ist, vernachlässigt werden. Wir erhalten im Fernfeld für  $kr \gg 1$ :

$$\boxed{\begin{aligned} H_\varphi &= j \frac{kI\ell}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \vartheta \\ H_r &= H_\theta = 0 \\ E_r &= 0 \\ E_\theta &= j \frac{I\ell k^2}{4\pi\omega\epsilon} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \vartheta \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned}} \quad \text{(Fernfeld ( $kr \gg 1$ ) des Hertzschens Dipols).} \quad (7.35)$$

Das Verhältnis von  $E$  zu  $H$  liefert mit  $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  gerade den Feldwellenwiderstand des freien Raumes.

$$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = \frac{k}{\omega\epsilon_0} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\omega\epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_{F0} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega \quad (7.36)$$

Aus Gleichung (7.35) erhalten wir die normierte Richtcharakteristik  $C$ .

$$\boxed{C(\vartheta) = \sin \vartheta} \quad \text{(Normierte Richtcharakteristik)} \quad (7.37)$$

Bild 7.8b zeigt einen vertikalen Schnitt durch die normierte Richtcharakteristik. Der in  $z$ -Richtung orientierte Hertzche Dipol zeigt keine Abstrahlung in  $z$ -Richtung und maximale Abstrahlung in der  $xy$ -Ebene. Der vertikale 3-dB-Öffnungswinkel beträgt gerade  $90^\circ$ .

Der komplexe Poynting-Vektor hat nur eine radiale Komponente und ergibt sich zu

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} E_\theta H_\varphi^* \vec{e}_r \quad (7.38)$$

mit

$$S_r(r, \vartheta) = \frac{(I\ell)^2 k^3}{2(4\pi)^2 \omega\epsilon_0 r^2} \sin^2 \vartheta = \frac{(I\ell)^2 k^2 Z_{F0}}{2(4\pi)^2 r^2} \sin^2 \vartheta = \frac{I^2}{8r^2} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 Z_{F0} \sin^2 \vartheta \quad . \quad (7.39)$$

Der Realteil des Poynting-Vektors beschreibt die transportierte Wirkleistungsdichte. Wir erhalten die gesamte abgestrahlte Leistung  $P$ , indem wir im Fernfeld über eine kugelförmige Oberfläche integrieren.

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}} &= \iint_{A(V)} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{I^2}{8r^2} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 Z_{F0} \underbrace{\sin^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{dA} \\ &= \frac{2\pi I^2}{8} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 Z_{F0} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\pi I^2}{4} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 Z_{F0} \underbrace{\left[ -\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi}_{4/3} = \frac{\pi I^2}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 Z_{F0} \end{aligned} \quad (7.40)$$

Setzen wir die abgestrahlte Leistung gleich der Leistung in einem Widerstand  $R_{\text{rad}}$  (*Strahlungswiderstand*), der vom gleichen Strom  $I$  wie der Hertzsche Dipol durchflossen wird, so erhalten wir:

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} R_{\text{rad}} I^2 = \frac{\pi I^2}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 Z_{F0} \quad . \quad (7.41)$$

Mit  $Z_{F0} = 120\pi \Omega$  können wir für den Strahlungswiderstand auch schreiben:

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 Z_{F0} \approx 790 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (\text{Strahlungswiderstand}). \quad (7.42)$$

Die Richtfunktion  $D(\vartheta)$  des Hertzschen Dipols können wir mit den Gleichungen (7.39) und (7.41) einfach berechnen.

$$D(\vartheta) = \frac{S_r(r, \vartheta)}{S_i(r)} = 4\pi r^2 \frac{S_r(r, \vartheta)}{P_{\text{rad}}} = 1,5 \sin^2 \vartheta \quad (\text{Richtfunktion}) \quad (7.43)$$

Der Richtfaktor  $D$  ist somit:

$$D = \max\{D(\vartheta)\} = \max\{1,5 \sin^2 \vartheta\} = 1,5 \hat{=} 1,76 \text{ dBi} \quad (\text{Richtfaktor}). \quad (7.44)$$

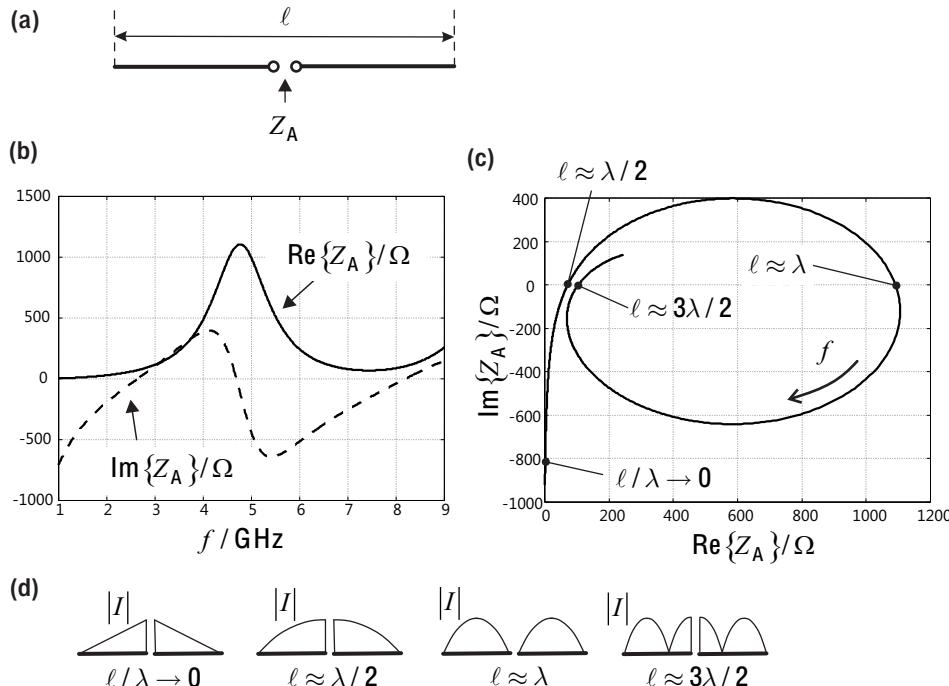
Reale Antennen weisen im Gegensatz zum Hertzschen Dipol eine endliche Länge auf. Wir wollen in dem folgenden Abschnitt untersuchen, welches Verhalten sich einstellt, wenn wir die Länge der Antenne vergrößern.

## ■ 7.4 Drahtantennen

Der Hertzsche Dipol mit einer verschwindend kleinen Länge kann nicht realisiert werden. Wir untersuchen daher nun Dipoles mit realisierbaren und technisch bedeutsamen Abmessungen.

### 7.4.1 Halbwellendipol

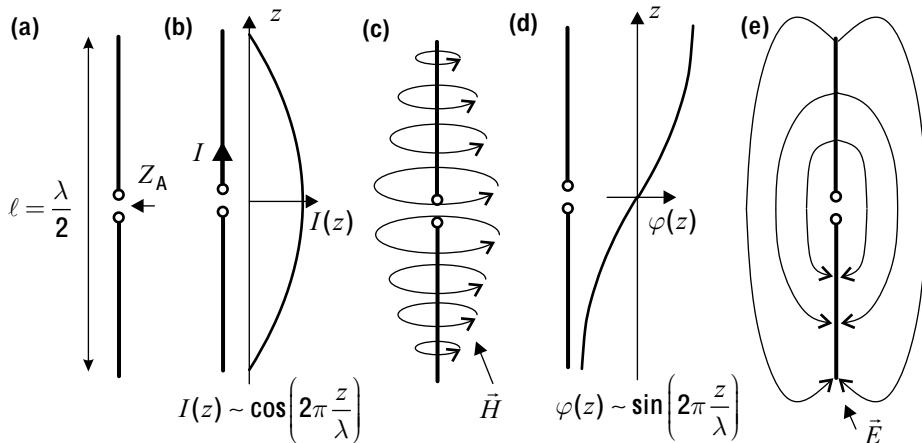
Exemplarisch betrachten wir in Bild 7.9 einen dünnen Dipol endlicher Länge ( $\ell = 53 \text{ mm}$ ). Bild 7.9b und c zeigen Real- und Imaginärteil der Eingangsimpedanz  $Z_A$  sowie die Ortskurve in der komplexen Impedanzebene.



**Bild 7.9** (a) Geometrie eines dünnen Dipols, (b) Real- und Imaginärteil sowie (c) Ortskurve der Eingangsimpedanz und (d) Stromverteilung bei unterschiedlichen Dipollängen

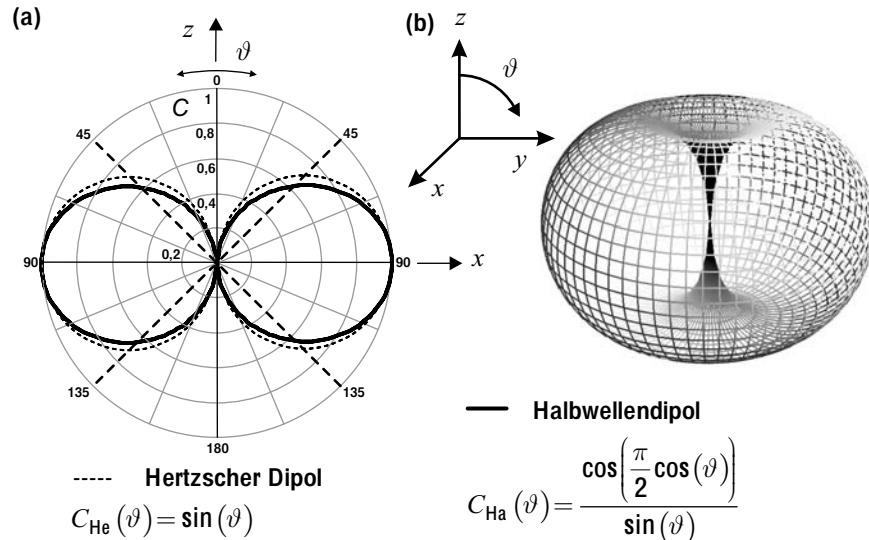
Es zeigen sich folgende Ergebnisse:

- Für niedrige Frequenzen ( $\ell/\lambda \rightarrow 0$ ) ist der Realteil der Eingangsimpedanz klein und der Imaginärteil negativ: Es ergibt sich ein kapazitives Verhalten. Die Strombelegung auf einem Dipolarm ist linear ansteigend mit einer Nullstelle am Ende (Bild 7.9d).
- Kommt die Länge in den Bereich der halben Freiraumwellenlänge ( $\ell \approx \lambda/2$ ) so ergibt sich die erste Resonanz ( $\text{Im}\{Z_A\} = 0$ ) mit einer Eingangsimpedanz von ca.  $73,2 \Omega$  [Voge04]. Die Strombelegung ist hier in etwa cosinusförmig mit einem Maximum an der Speisestelle in der Mitte.
- Steigt die Frequenz weiter an, so erhalten wir ein ohmsch-induktives Verhalten, bis schließlich bei einer Länge, die ungefähr der Freiraumwellenlänge entspricht ( $\ell \approx \lambda$ ), eine hochohmige Resonanz auftritt. Die Strombelegung zeigt über die Länge gesehen zwei Maxima. An der Speisestelle in der Mitte taucht ein Minimum auf.
- Bei der 1,5-fachen Freiraumwellenlänge ( $\ell \approx 3/2\lambda$ ) tritt schließlich wieder eine niederohmige Resonanz auf. Die Strombelegung weist insgesamt drei Strombäuche auf. Im Bereich der Speisestelle liegt wieder ein Maximum.



**Bild 7.10** Halbwelldipol: (a) Aufbau, (b) Stromverteilung, (c) Verlauf des magnetischen Feldes, (d) Potentialverteilung, (e) Verlauf des elektrischen Feldes

Wir betrachten im Weiteren den technisch wichtigen Fall eines Dipols mit der Länge einer halben Wellenlänge (Bild 7.10a). Ebenso wie bei der  $\lambda/2$ -langen Leitung in Abschnitt 6.2 erkennen wir ein resonantes Verhalten. Die sich einstellende Stromverteilung ist cosinusförmig mit einem Maximum an den Klemmen und Nullstellen an den Enden des Dipols (Bild 7.10b). Der Stromfluss führt zu einem umlaufenden magnetischen Feld nach Bild 7.10c. Das Potential verläuft sinusförmig mit einem Maximum an den Enden (Bild 7.10d). Folglich sind die Feldlinien der elektrischen Feldstärke von einem Dipolarm zum anderen Dipolarm gerichtet (Bild 7.10e).



**Bild 7.11** (a) Vertikales Strahlungsdiagramm des Hertzschen Dipols und des Halbwelldipols, (b) 3D-Strahlungsdiagramm des Halbwelldipols

Bei den gemachten Annahmen über den cosinusförmig verlaufenden Strom können die Felder berechnet werden [Kark12] [Detl12] [Zink00]. Hierüber gewinnt man die normierte Richtcharakteristik  $C$

$$C(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \quad (\text{Normierte Richtcharakteristik eines } \lambda/2\text{-Dipols}) \quad (7.45)$$

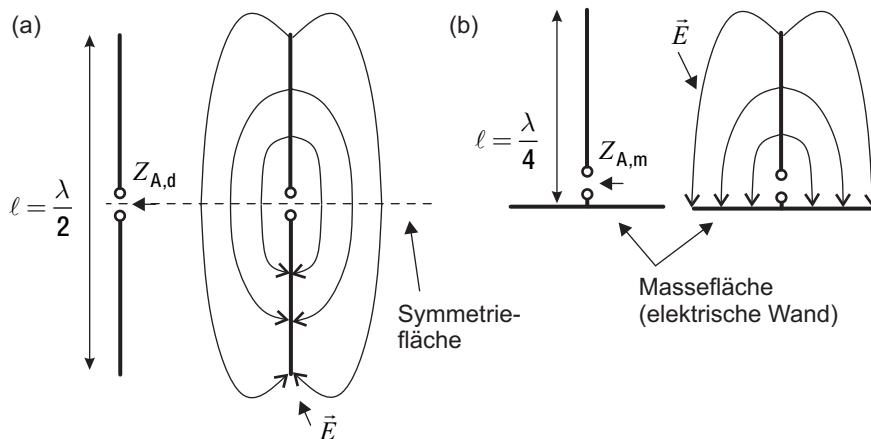
und den Richtfaktor  $D$

$$D = 1,64 \hat{=} 2,15 \text{ dBi} \quad (\text{Richtfaktor des } \lambda/2\text{-Dipols}). \quad (7.46)$$

Bild 7.11a zeigt das vertikale normierte Strahlungsdiagramm des Halbwellendipols im Vergleich zum Hertzschen Dipol. Der Halbwellendipol erzielt eine geringfügig größere Richtwirkung, die sich in einem leicht erhöhten Richtfaktor ( $D_{\text{Ha}} = 1,64$  gegenüber  $D_{\text{He}} = 1,5$ ) bemerkbar macht. In der dreidimensionalen Darstellung der Richtcharakteristik (Bild 7.11b) erkennen wir anschaulich das rundstrahlende Verhalten des Halbwellendipols.

## 7.4.2 Monopol

Sieht man sich die Verteilung des elektrischen Feldes eines Dipols in Bild 7.12a an, so erkennt man eine horizontale Symmetrieebene, auf der dieses Feld senkrecht steht. Wir können, ohne die Verhältnisse zu ändern, eine ideal leitende Fläche (elektrische Wand) einziehen und erhalten so oberhalb wie unterhalb der Symmetrieebene einen Monopol über einer leitenden Ebene.



**Bild 7.12** Prinzipielle Anordnung und Verteilung des elektrischen Feldes bei (a) einem dünnen Dipol (mit Symmetrieebene) und (b) einem dünnen Monopol über einer ebenen Massefläche

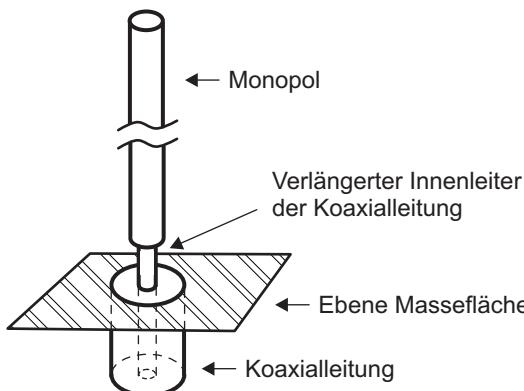
Der Strom in die Eingangsklemmen ändert sich durch die elektrische Wand nicht, die Spannung wird jedoch halbiert. Dies führt dazu, dass die Eingangsimpedanz  $Z_{A,m}$  des Monopols nur halb so groß ist wie die Eingangsimpedanz  $Z_{A,d}$  des Dipols.

$$Z_{A,m} = \frac{1}{2} Z_{A,d} \quad (7.47)$$

Bei gleicher eingespeister Leistung ist die Strahlungsleistungsdichte des Monopols doppelt so groß wie die des Dipols, denn der Monopol strahlt nur in den oberen Halbraum. Der Richtfaktor des Monopols hat also den doppelten Wert.

$$D_m = 2D_d = 2 \cdot 1,64 = 3,28 \hat{=} 2,15 \text{ dBi} + 3 \text{ dB} = 5,15 \text{ dBi} \quad (7.48)$$

Ein Monopol kann sehr einfach durch eine Koaxialleitung gespeist werden (Bild 7.13). Hierzu wird der Innenleiter durch die Massefläche zum Monopol geführt. Der Außenleiter der Koaxialleitung wird mit der Massefläche verbunden.



**Bild 7.13** Speisung eines Monopols über eine Koaxialleitung durch die Massefläche

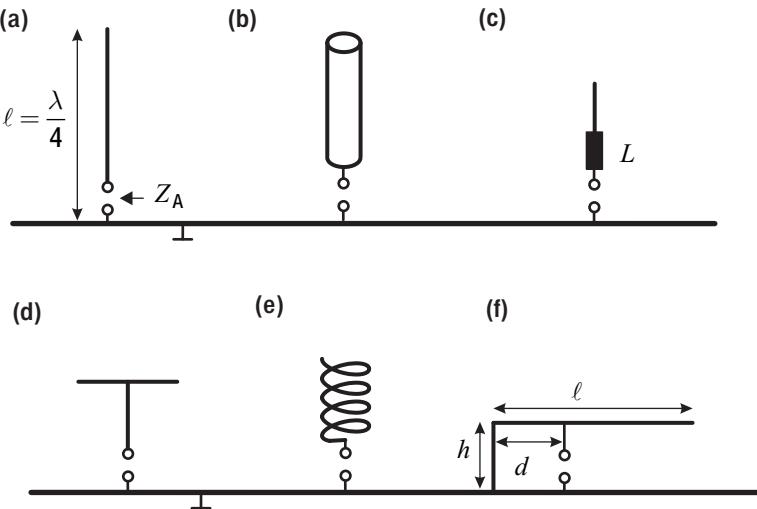
### 7.4.3 Verkürzung von Monopolantennen

Soll eine Monopolantenne in einem technischen Gerät wie einem Automobil oder Funktelefon verbaut werden, so ist die Bauhöhe der Antenne von einer Viertelwellenlänge oft unpraktisch. Interessant sind daher Möglichkeiten der Verkürzung von Monopolantennen, so dass diese eine kompaktere Bauform erhalten und sich in Gerätegehäuse integrieren lassen.

Bild 7.14a zeigt den ursprünglichen Monopol, der aus einem dünnen,  $\lambda/4$ -langen Leiter besteht. Wird – wie in Bild 7.14b dargestellt – die Querschnittsfläche des Leiters deutlich erhöht, so ergibt sich bereits eine leichte Reduzierung der Länge. Vor allem aber wird die Antenne breitbandiger und ist damit in einem größeren Frequenzbereich angepasst.

Eine Monopolantenne, die kürzer als die Viertelwellenlänge ist, verhält sich kapazitiv – genau wie ein Dipol der kürzer als die halbe Wellenlänge ist – (siehe Abschnitt 7.4.1). Wird nun, um die Bauhöhe zu verringern, eine verkürzte Antenne verwendet, so kann durch Einsatz einer geeigneten Fußpunktinduktivität  $L$  (Bild 7.14c) die Eingangsimpedanz  $Z_A$  wieder reell werden.

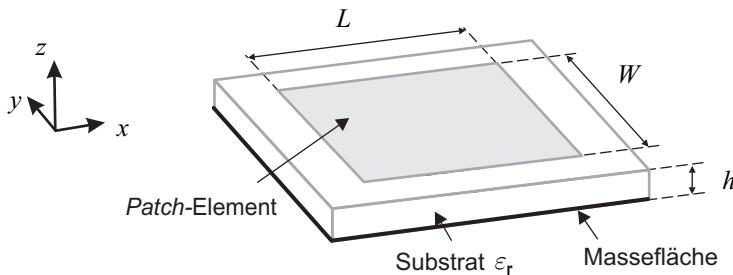
In Bild 7.14d wird die Antennenlänge durch eine Dachkapazität reduziert. Durch Aufwickeln des Leiters entsteht eine Helixantenne (Bild 7.14e). Besonders für die Integration in ein Gehäuse ist die in Bild 7.14f gezeigte *Inverted-F*-Antenne geeignet, deren Name sich direkt aus der Form der Antenne ableitet. Die Gesamtlänge  $h + \ell$  liegt im Bereich einer Viertelwellenlänge. Die Anpassung kann durch geeignete Wahl der Höhe  $h$  und der Entfernung  $d$  zwischen Speisepunkt und Masseverbindung erfolgen. Einige der Konzepte werden in Übung 7.2 untersucht.



**Bild 7.14** Möglichkeiten der Verkürzung: (a) ursprünglicher Monopol, (b) dicker Monopol, (c) Fußpunktinduktivität, (d) Dachkapazität, (e) Helix, (f) *Inverted-F*-Antenne

## ■ 7.5 Planare Antennen

Planare Antennen werden wie Mikrostreifenleitungsfilter als zweidimensionale Metallisierungen auf einem Substrat realisiert [Garg01] [Bala08] [Bäch99]. *Patch*-Antennen können unterschiedliche Formen (z.B. rechteckig, rund, dreieckig) besitzen. Am gebräuchlichsten sind rechteckige *Patch*-Antennen (Bild 7.15), die wir im nachfolgenden Abschnitt näher betrachten.



**Bild 7.15** Geometrie einer rechteckigen *Patch*-Antenne

*Patch*-Antennen haben eine Reihe positiver Eigenschaften: Der bei planaren Schaltungen übliche (kostengünstige) Herstellungsprozess kann auch für die Antenne verwendet werden. Die Antennen sind flach, leicht und robust. Sie sind gegebenenfalls konform in Oberflächen von Gehäusen und Fahrzeugen integrierbar, d.h. die Form der Antenne wird dem Oberflächenverlauf angepasst. Die Abmessungen der Antenne sind vergleichbar klein, da die effektive Dielektrizitätszahl der Struktur zu einer Verringerung der effektiven Wellenlänge führt. Nachteilig sind bei *Patch*-Antennen die geringe Bandbreite (wenige Prozent) und die hohen Antennenverluste.

## 7.5.1 Rechteckige *Patch*-Antenne

Eine rechteckige *Patch*-Antenne besteht aus einem rechteckigen metallischen Streifen (Länge  $L$  und Breite  $W$ ) auf einem lateral ausgedehnten Substrat, dessen Rückseite vollständig metallisiert ist (Bild 7.15). Das Substrat besitzt die Höhe  $h$  und die relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$ . Als Substratmaterialien kommen die bereits in Abschnitt 4.3 aufgeführten Materialien in Frage. Die Auswahl des Substratmaterials beeinflusst bereits die Eigenschaften der Antenne. Eine große Substratdicke und eine kleine relative Dielektrizitätszahl führen im Allgemeinen zu günstigen Antenneneigenschaften, da die Streufelder an den *Patch*-Rändern, die für die Abstrahlung verantwortlich sind, zunehmen. Zu hohe Werte der Substratdicke führen jedoch zur Anregung von Wellen im Substrat, die Verluste bedeuten. Nachteilig ist zudem, dass bei koaxialer Speisung aufgrund steigender Länge die Induktivität des Speisestiftes zunimmt (siehe Abschnitt 7.5.1.3). Eine geringe relative Dielektrizitätszahl bedeutet zudem, dass die Antenne durch das Substrat nur geringfügig verkürzt wird. Hohe Werte der relativen Dielektrizitätszahl führen zu größeren Verkürzungsfaktoren, gehen allerdings zu Lasten der Bandbreite der Antenne.

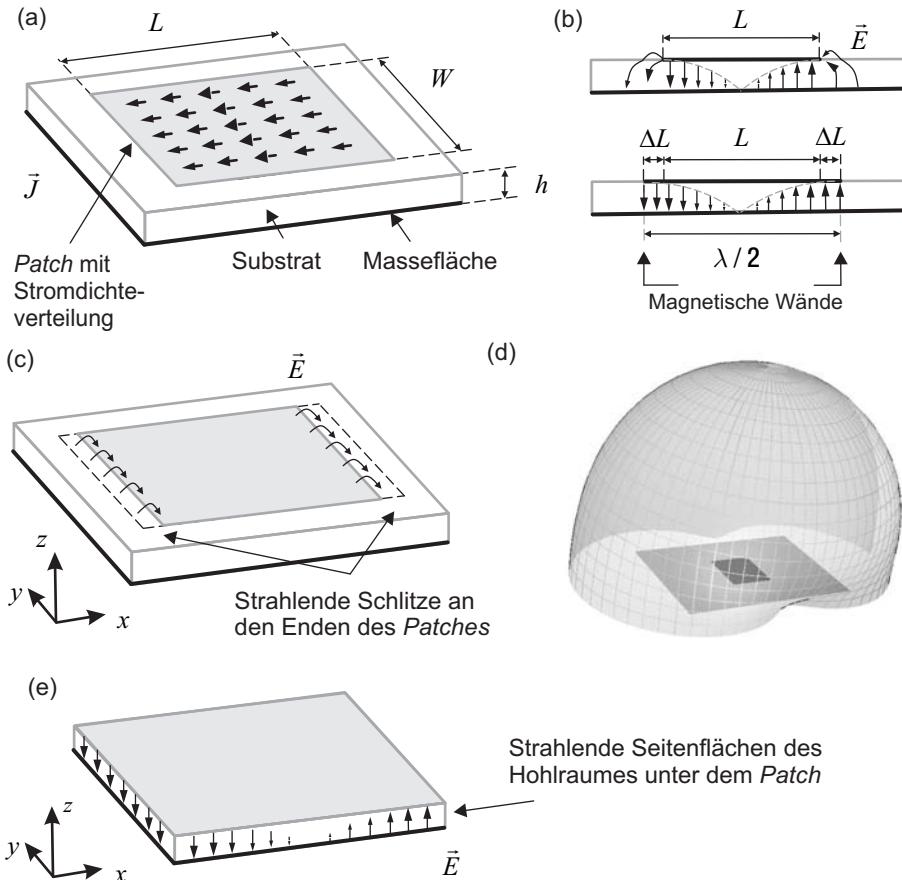
### 7.5.1.1 Abstrahlung eines *Patch*-Elementes

Eine mögliche mathematische Beschreibung der Antenne und ihrer Eigenschaften besteht darin, diese als eine an zwei Seiten offene Mikrostreifenleitung der Länge  $L \approx \lambda/2$  aufzufassen (*Transmission line model*). Die sich auf dem *Patch*-Element einstellende StromdichteVerteilung ist dann in Längsrichtung ungefähr cosinusförmig (vergleichbar der Strombelegung auf einem Halbwelldipol) und in Querrichtung in erster Näherung konstant (Bild 7.16a).

Die Streufelder an den Enden des *Patches* lassen dieses länger erscheinen. Modellmäßig können die Leitungsenden durch ein Leitungsstück der Länge  $\Delta L$  und magnetische Wände beschrieben werden (Bild 7.16b). Die Felder an den Enden des *Patches* verursachen eine Abstrahlung elektromagnetischer Felder (Bild 7.16c). Die abgestrahlten Felder werden durch zwei strahlende Schlitze modelliert [Garg01] [Bäch99]. Bild 7.16d zeigt das typische (mit einem EM Simulationsprogramm ermittelte) 3D-Strahlungsdiagramm einer *Patch*-Antenne. Aufgrund der durchgehenden Massefläche erfolgt die Abstrahlung nur in den oberen Halbraum ( $z > 0$ ). Die Antenne ist linear polarisierend in Richtung der resonanten Länge, d.h. in Hauptstrahlrichtung herrscht im Fernfeld eine  $x$ -Komponente des elektrischen Feldes vor. Typische Gewinnwerte einer *Patch*-Antenne liegen zwischen 5 und 6 dB. Typische 3-dB-Öffnungswinkel liegen zwischen  $70^\circ$  und  $90^\circ$  [Garg01].

Eine weitere mathematische Behandlung der *Patch*-Antenne führt zu einer Beschreibung als quaderförmiger Hohlraumresonator<sup>2</sup> (*Cavity model*) unterhalb des rechteckigen *Patch*-Elementes (Bild 7.16e) [Garg01] [Kark12]. Das Volumen wird durch zwei horizontale elektrische Wände (oben: *Patch*; unten: Massefläche) sowie vier vertikale magnetische Wände (an den Seitenflächen) begrenzt. Da Streufelder am Rand des *Patches* dieses größer erscheinen lassen, müssen die geometrischen Daten angepasst werden. Der Beitrag der vier offenen Seiten des *Patches* zum Fernfeld der Antenne kann mathematisch berechnet werden.

<sup>2</sup> Einen quaderförmigen Hohlraumresonator kennen wir bereits aus Abschnitt 4.5.6. Dort wird der Hohlraum durch sechs elektrische Wände begrenzt und zeichnet sich durch eine Reihe von Schwingungsmoden aus, deren Resonanzfrequenzen einfach berechenbar sind.



**Bild 7.16** Mikrostreifen- bzw. Patch-Antenne: (a) geometrischer Aufbau und Stromdichteverteilung; (b) elektrische Feldverteilung bei Resonanz unter dem Patch; (c) strahlende Schlitze an den Enden des Patches ; (d) 3D-Strahlungsdiagramm; (e) Patch-Antenne als Hohlraumresonator mit vier magnetischen Wänden

Ausführliche mathematische Herleitungen der Felder für die beiden oben dargestellten Modelle können in [Kark12] und [Bäch99] nachgelesen werden.

### 7.5.1.2 Resonanzfrequenz und Patch-Abmessungen

Eine rechteckige Patch-Antenne besteht aus einem rechteckigen metallischen Streifen (Länge  $L$  und Breite  $W$ ) auf einem Substrat. Die Länge  $L$  des Patches liegt im Bereich der halben Wellenlänge. Aufgrund des Endeffekts ist die tatsächliche Länge etwas kürzer als die halbe Wellenlänge.

Eine einfache Formel zur Abschätzung der Resonanzfrequenz des (1,0)-Grundschwingungsmodus finden wir bei [Bala08]:

$$f_{10} = \frac{c_0}{2(L+h)\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \quad (7.49)$$

mit

$$\varepsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{12h}{W}\right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (7.50)$$

Genauere Formeln finden wir in [Garg01]. In der Praxis reicht die obige Abschätzung für einen ersten Entwurf aber aus. Weitere Designschnitte können dann mit einem EM-Feldsimulationsprogramm gemacht werden.

Die Breite  $W$  des *Patches* hat nur einen geringen Einfluss auf die Resonanzfrequenz  $f_{10}$ . Sie beeinflusst jedoch die Eingangsimpedanz und die Bandbreite. Eine größere *Patch*-Breite verringert den Realteil des Eingangswiderstandes bei Resonanz, da die Abstrahlung verbessert wird. Zudem erhöht sich die Bandbreite [Garg01]. Nachteilig bei größerer *Patch*-Breite ist der steigende Platzbedarf, was sich vor allem bei Gruppenantennen auswirkt. Typischerweise wählt man die Breite  $W$  im Bereich der einfachen bis doppelten Länge  $L$ :

$$L \leq W \leq 2L . \quad (7.51)$$

Weitere Parameter wie die Dicke der Metallisierung, Verluste im Metall und Dielektrikum sowie die endlichen Abmessungen des Substrates und der Massefläche beeinflussen die Antenneneigenschaften wie Resonanzfrequenz, Bandbreite und Richtfunktion.

### 7.5.1.3 Speisung von *Patch*-Antennen

**Koaxiale Speisung** Eine *Patch*-Antenne lässt sich auf unterschiedliche Arten anregen. Das *Patch* kann zunächst mittels eines durch das Substrat hindurchgeföhrten Innenleiters einer koaxialen Zuführung gespeist werden (Bild 7.17a). Dabei wird über die Lage des Speisepunktes die Anpassung an den Leitungswellenwiderstand (z.B.  $50\Omega$ ) realisiert. Bei einer koaxialen Speisung kann die Lage des Speisepunktes (für einen Leitungswellenwiderstand von  $50\Omega$ ) durch folgende einfache Gleichungen abgeschätzt werden [Garg01]:

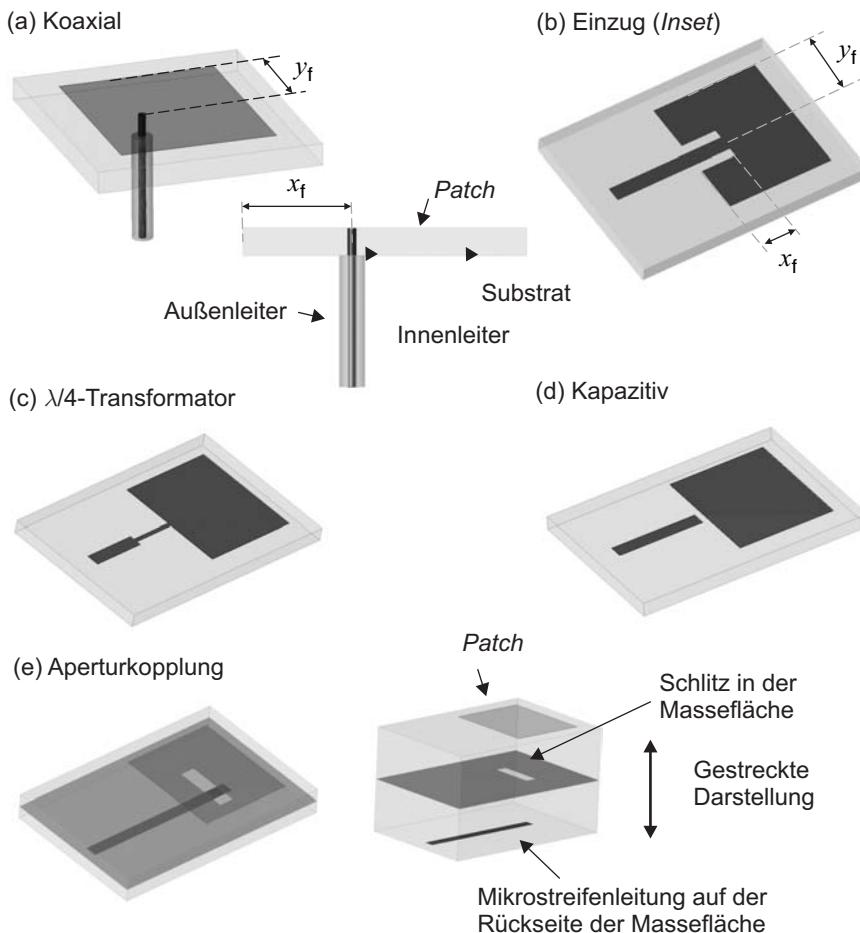
$$y_f = \frac{W}{2} \quad \text{and} \quad x_f = \frac{L}{2\sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff},L}}} \quad (7.52)$$

mit

$$\varepsilon_{r,\text{eff},L} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[ \left(1 + \frac{12h}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0,04 \left(1 - \frac{L}{h}\right)^2 \right] & \text{für } \frac{L}{h} \leq 1 \\ \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{12h}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{für } \frac{L}{h} \geq 1 \end{cases} . \quad (7.53)$$

**Inset-Speisung** Alternativ kann die Speisung über eine Mikrostreifenleitung erfolgen (*Inset*-Speisung, Bild 7.17b). Die Mikrostreifenleitung wird durch eine Schlitze des *Patches* so weit in die Struktur hineingeführt, bis sich die gewünschte Eingangsimpedanz einstellt. Nach [Rame03] ist (für Substratmaterialien im Bereich  $2 \leq \varepsilon_r \leq 10$ ) die Länge  $x_f$  des Schlitzes und die Länge  $y_f$  für eine Anpassung an  $50\Omega$  folgendermaßen zu wählen

$$y_f = \frac{W}{2} \quad \text{und} \quad x_f = \frac{L}{2} \cdot \frac{c_7\varepsilon_r^7 + c_6\varepsilon_r^6 + c_5\varepsilon_r^5 + c_4\varepsilon_r^4 + c_3\varepsilon_r^3 + c_2\varepsilon_r^2 + c_1\varepsilon_r + c_0}{10^4} . \quad (7.54)$$



**Bild 7.17** Speisung von *Patch*-Antennen: (a) koaxiale Speisung; (b) *Inset*-Speisung; (c) mit Viertelwellentransformator; (d) kapazitiv angekoppelt; (e) über zusätzliche Ebene aperturgekoppelt

**Tabelle 7.2** Koeffizienten zur Berechnung der Länge der *Inset*-Speisung

$c_7$	$c_6$	$c_5$	$c_4$	$c_3$	$c_2$	$c_1$	$c_0$
0,001699	0,13761	-6,1783	93,187	-682,69	2561,9	-4043	6697

Die Koeffizienten  $c_i$  sind in Tabelle 7.2 aufgeführt. Die Schlitzbreite sollte dabei in etwa der Breite der zuführenden  $50\Omega$ -Mikrostreifenleitung entsprechen.

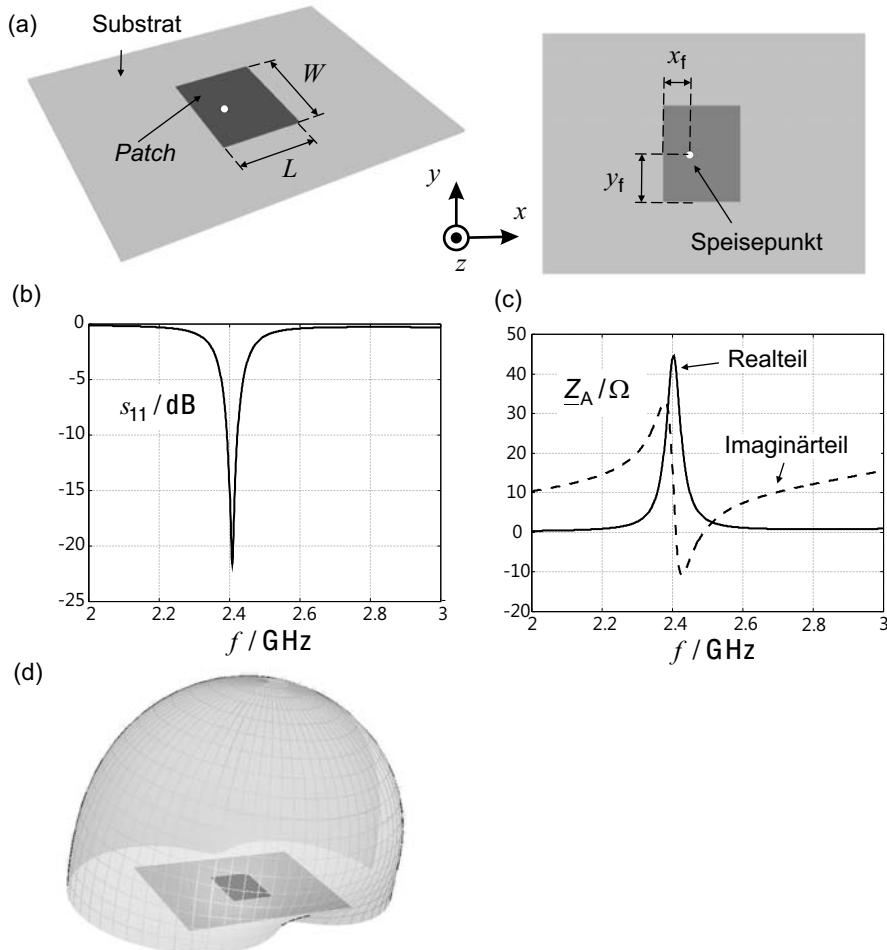
Bild 7.17c zeigt eine weitere Speisemöglichkeit. In diesem Fall wird die speisende Mikrostreifenleitung direkt mittig auf die Kante mit der Breite  $W$  geführt. Da die Speiseleitung an dieser Stelle einen vergleichsweise hohen Impedanzwert vorfindet, muss dieser Wert mit einer Viertelwellentransformation auf die üblichen  $50\Omega$  gebracht werden.

*Patch*-Antennen können auch ohne galvanische Verbindung angeregt werden. Bild 7.17d und Bild 7.17e zeigen als entsprechende Beispiele eine kapazitive Ankopplung und die Ankopplung über einen Schlitz in der Massefläche und eine rückseitige Speisestruktur.

Anregungen über Mikrostreifenleitungen in der Ebene des *Patches* sind einfach realisierbar, beeinflussen aber unter Umständen unerwünscht das Strahlungsdiagramm der Antenne. Koaxiale Anregungen oder Anregungen durch zusätzliche Schlitze in der Masseebene sind aufwendiger in der Realisierung, haben jedoch einen geringeren Einfluss auf das Strahlungsverhalten.

### Beispiel 7.1 Entwurf einer *Patch*-Antenne mit koaxialer Speisung

Es ist eine *Patch*-Antenne für eine Frequenz von  $f = 2,5$  GHz zu entwerfen. Als Substrat steht ein Material mit einer relativen Dielektrizitätszahl von  $\epsilon_r = 2,2$  und einer Höhe von  $h = 1,524$  mm zur Verfügung. Für die Breite gelte  $W = 1,25L$  (Bild 7.18a).



**Bild 7.18** Design einer *Patch*-Antenne mit koaxialer Speisung: (a) Aufbau, (b) Reflexionsfaktor, (c) Eingangsimpedanz und (d) 3D-Strahlungsdiagramm

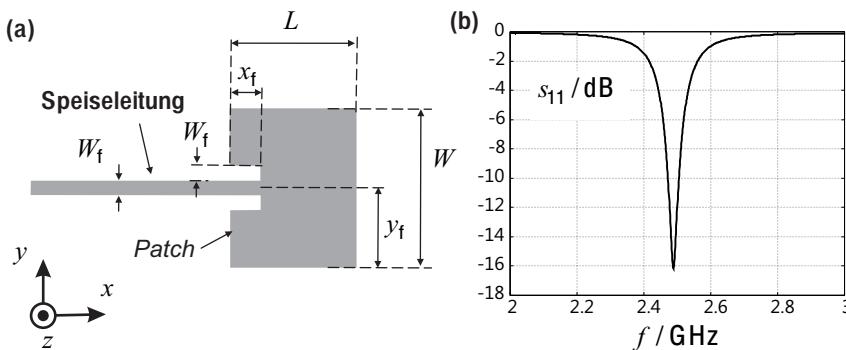
Die Länge des *Patches* erhalten wir über die Gleichungen (7.49) und (7.50). Die Gleichungen lassen sich nicht einfach nach der Länge auflösen, durch einfaches Einsetzen

unterschiedlicher Längen erhalten wir für  $L = 40$  mm eine Frequenz des (1,0)-Modes von  $f_{10} = 2,495$  GHz. Aufgrund der Vorgabe von  $W = 1,25L$  ist  $W = 50$  mm.

Mit Gleichung (7.52) berechnen wir die Lage für einen  $50\Omega$ -Speisepunkt mit  $y_f = 25$  mm und  $x_f = 13,8$  mm. Bild 7.18 zeigt die Geometrie der entworfenen *Patch*-Antenne, den Eingangsreflexionsfaktor  $s_{11}$ , die Eingangsimpedanz  $Z_A$  und das Strahlungsdiagramm. Der Richtfaktor beträgt  $D = 7,5$  dBi. Die Resonanzfrequenz der entworfenen Antenne ist mit  $f = 2,41$  GHz etwa 3% zu niedrig. Durch eine einfache Verkürzung der Länge lässt sich die Antenne aber auf die gewünschte Resonanzfrequenz bringen. ■

### Beispiel 7.2 Entwurf einer *Patch*-Antenne mit *Inset*-Speisung

Es gelten die gleichen geometrischen Vorgaben wie in Beispiel 7.1, so dass wir von einer Länge von  $L = 40$  mm und einer Breite von  $W = 50$  mm ausgehen. Diesmal soll die *Patch*-Antenne jedoch mit einer Mikrostreifenleitung (*Inset*-Speisung) angeregt werden. Die Mikrostreifenleitung habe einen Leitungswellenwiderstand von  $Z_L = 50\Omega$ . Bei den gegebenen Substratwerten (relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r = 2,2$  und Höhe  $h = 1,524$  mm) hat die Mikrostreifenleitung eine Breite von  $W_f = 4,65$  mm, was zugleich der Schlitzbreite entspricht.



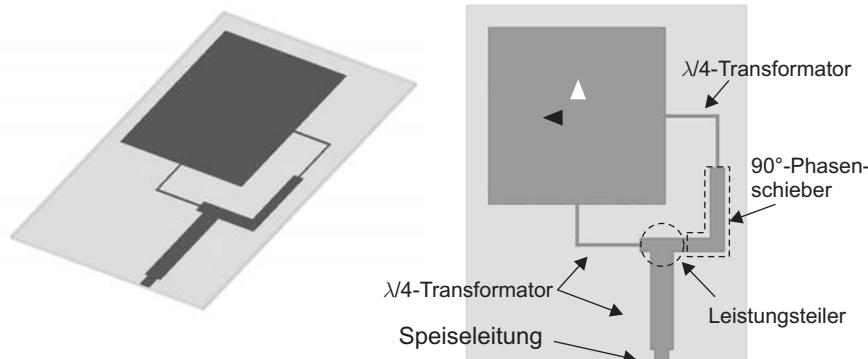
**Bild 7.19** Design einer *Patch*-Antenne mit *Inset*-Speisung: (a) Aufbau und (b) Reflexionsfaktor

Mit Gleichung (7.54) ergeben sich für die Speisestruktur  $y_f = 25$  mm und  $x_f = 9,6$  mm. Bild 7.19 zeigt die Geometrie der entworfenen *Patch*-Antenne und den Eingangsreflexionsfaktor  $s_{11}$ . Weitere Verbesserungen der Antenne sind von diesem ersten Entwurf aus einfach umsetzbar. ■

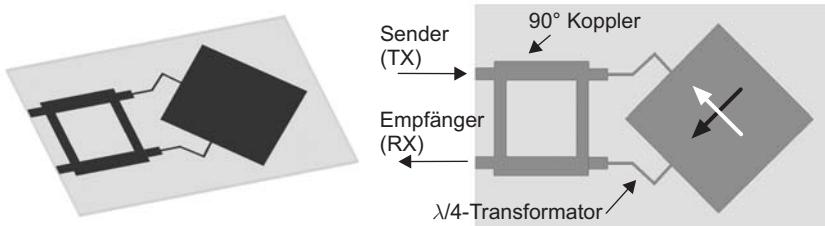
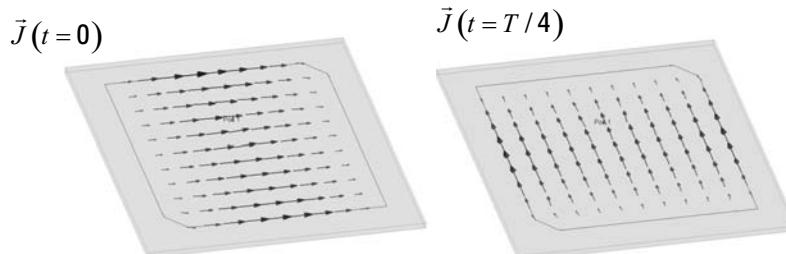
### 7.5.2 *Patch*-Antennen mit zirkularer Polarisation

Die oben behandelte Rechteck-*Patch*-Antenne weist eine lineare Polarisation auf. Für einige Anwendungen, zum Beispiel beim Empfang von GPS-Satelliten-Navigationssignalen, ist eine zirkulare Polarisation erforderlich. Eine zirkular-polarisierte Welle entsteht durch Überlagerung zweier orthogonaler, linear-polarisierter Wellen mit gleicher Amplitude und einer Phasenverschiebung von  $90^\circ$  (Bild 7.20).

(a) Speisung über Leistungsteiler und 90°-Phasenschieber



(b) Speisung über 90°-Branchline-Koppler

(c) Quadratisches *Patch* mit Unsymmetrie und koaxialer Speisung(d) StromdichteVerteilung zu unterschiedlichen Zeitpunkten ( $t = 0$  and  $t = T/4$ )**Bild 7.20** Patch-Antennen mit zirkularer Polarisation: Quadratisches *Patch* mit (a) Leistungsteiler und 90°-Phasenschieber sowie (b) 90°-Branchline-Koppler, (c) Quadratisches *Patch* mit abgeschrägten Ecken und (d) StromdichteVerteilung

Durch geeignete Speisenetzwerke oder durch leichte Veränderungen der *Patch*-Geometrie kann eine *Patch*-Antenne konstruiert werden, die in Hauptstrahlrichtung eine zirkular-polarierte Welle abstrahlt.

In Bild 7.17c haben wir gesehen, dass sich ein rechteckiges *Patch* über einen Viertelwellentransformator an einer Kante speisen lässt. Für die *zirkulare Polarisation* wählt man nun wie in Bild 7.20a ein quadratisches *Patch* mit  $W = L$  und speist dieses *Patch* über benachbarte Kanten [Sain96]. Die Anpassung an  $50\Omega$  erreicht man wieder durch Viertelwellentransformatoren. Die beiden Signale regen orthogonale Schwingungsmoden – (1,0)- und (0,1)-Mode – an. Diese beiden Signale gewinnt man durch Anpassschaltung und Leistungsteiler aus einem über die Speiseleitung zulaufenden Signal. Die in das *Patch* eingespeisten Signale haben eine Phasendifferenz von  $90^\circ$ , da in einem der Zweige eine entsprechend lange Leitung ( $\lambda/4 \equiv 90^\circ$ ) als Phasenschieber eingebaut ist.

Eine weitere interessante Art, eine zirkular-polarisierende *Patch*-Antenne zu realisieren, zeigt Bild 7.20b. Die Leistungsteilung und  $90^\circ$ -Phasenverschiebung wird hier über einen *Branchline*-Koppler (siehe Abschnitt 6.8) realisiert [Sain96]. Der Koppler wirkt gleichzeitig als Send-Empfangs-Weiche. Am oberen Tor (TX) wird das Sendesignal eingespeist und am unteren Tor (RX) liegt das von der Antenne empfangene Signal an.

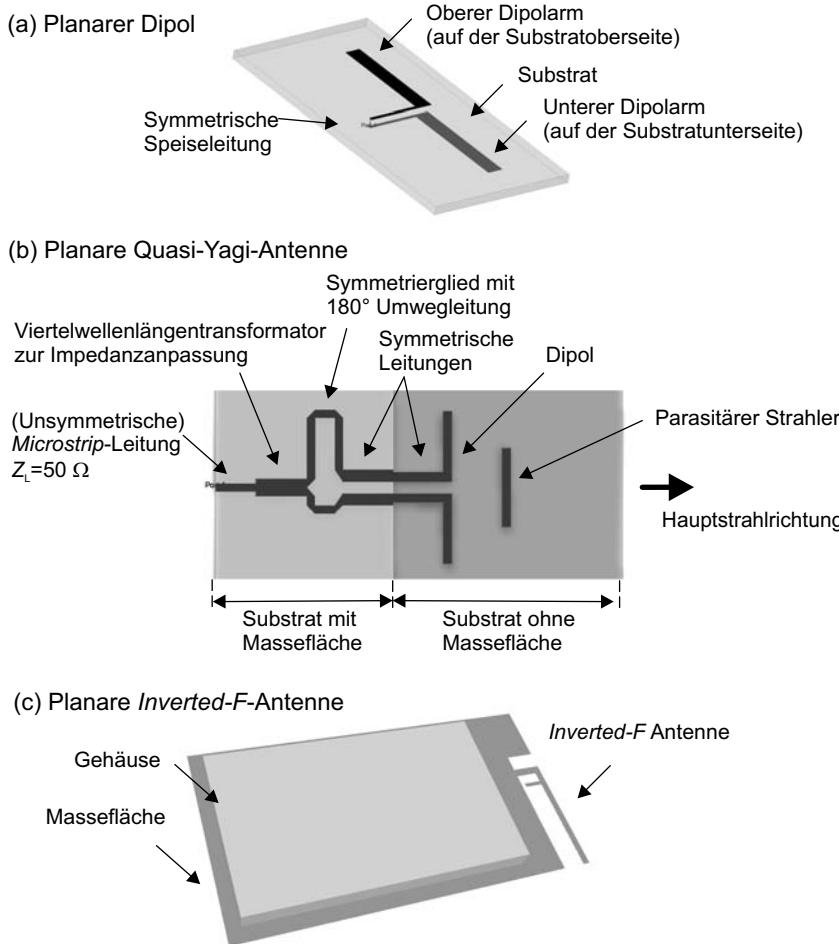
Die beiden vorhergehenden Konzepte haben das *Patch* an zwei orthogonalen Kanten gespeist, um die orthogonalen Schwingungsmoden ((1,0) und (0,1)-Mode) anzuregen. Es existieren jedoch auch Möglichkeiten, eine zirkulare Polarisation durch nur *einen* Speisepunkt zu erreichen [Garg01] [Bala05], hierzu wird beim quadratischen *Patch* durch zwei abgeschrägte Ecken eine Unsymmetrie hergestellt (Bild 7.20c). Durch diese Unsymmetrie verkoppeln sich die beiden Schwingungsmoden so miteinander, dass sich die Leistung auf beide Moden gleichmäßig aufteilt und sich die notwendige Phasendifferenz von  $90^\circ$  einstellt. Bild 7.20d zeigt die Stromdichteverteilung  $\tilde{J}$  auf dem *Patch* zu den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = T/4$ . Die beiden orthogonalen Schwingungsmoden sind deutlich erkennbar.

### 7.5.3 Planare Dipol- und *Inverted-F*-Antennen

Der Vorteil planarer Antennen, diese in einem Schritt mit einer planaren Schaltung fertigen zu können, der bei der *Patch*-Antenne gegeben ist, kann auch auf andere Antennenkonzepte übertragen werden. So lassen sich Dipoles, Monopole und *Inverted-F*-Antennen planar realisieren. Im Bereich der Antenne muss allerdings die rückseitige Massefläche entfernt sein.

In Bild 7.21a ist ein Dipol gezeigt, bei dem die beiden Arme auf unterschiedlichen Seiten des Substrats angeordnet sind. Die Antenne wird in der Mitte über eine symmetrische Leitung (zwei gegenüberliegende parallel verlaufende metallische Streifen) angeregt.

Beim Dipol in Bild 7.21b liegen beide Arme auf der gleichen Seite des Substrates. Die Rückseite des Substrates ist im Bereich des Dipols ohne Massefläche [Clen05]. Der Dipol wird über eine symmetrische Leitung angeregt, die direkt am Dipol ohne Massefläche und zur Speiseleitung hin über der Massefläche geführt wird. Durch geeignete Leiterbreiten und Abstände gelingt ein reflexionsarmer Übergang. Aufwendiger ist der Übergang von der unsymmetrischen Mikrostreifenspeiseleitung am linken Rand auf das symmetrische Leitungssystem. Zentrales Element ist hier ein Symmetrierglied mit einer  $180^\circ$ -Umwegleitung, welches die beiden Leiter der symmetrischen Leitung mit gegenphasigen Signalen versorgt. Der Viertelwellenlängentrans-



**Bild 7.21** (a) Planarer Dipol mit Dipolarmen auf unterschiedlichen Seiten des Substrates, (b) planarer, auf einem Substrat aufgedruckter Dipol zur Speisung einer Quasi-Yagi-Antenne, (c) planare Realisierung einer *Inverted-F*-Antenne

transformator stellt die Impedanzanpassung zwischen Symmetrierglied und Mikrostreifenleitung sicher. Eine Richtwirkung wird in diesem Beispiel (wie bei einer Yagi-Uda-Antenne) durch ein parasitäres Strahlelement erreicht.

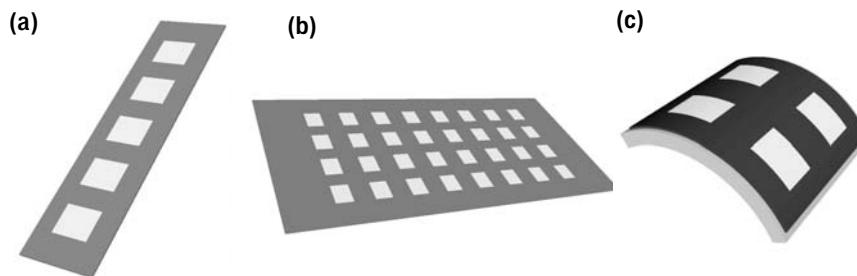
Auch eine *Inverted-F*-Antenne lässt sich planar realisieren. Die in Bild 7.21c dargestellte Antenne liegt am Ende einer endlichen Massefläche [Empi10].

## ■ 7.6 Gruppenantennen

Eine Gruppenantenne besteht aus mehreren – meist gleichartigen – Einzelantennen (zum Beispiel Dipol- oder *Patch*-Antennen).

### 7.6.1 Einzelcharakteristik und Gruppenfaktor

Das Gesamtstrahlungsfeld der Gruppenantenne ergibt sich durch Überlagerung der Einzelantennenbeiträge. Mit Hilfe unterschiedlicher Anregungen (Amplitude und Phase) der Einzelantennen kann das Strahlungsdiagramm der Gesamtanordnung gezielt beeinflusst werden. Die Einzelemente können in einer Zeile, einer Spalte, einer Fläche oder auf einer gekrümmten Fläche (zum Beispiel der Oberfläche eines Gerätes oder Fahrzeugs) untergebracht sein (Bild 7.22).

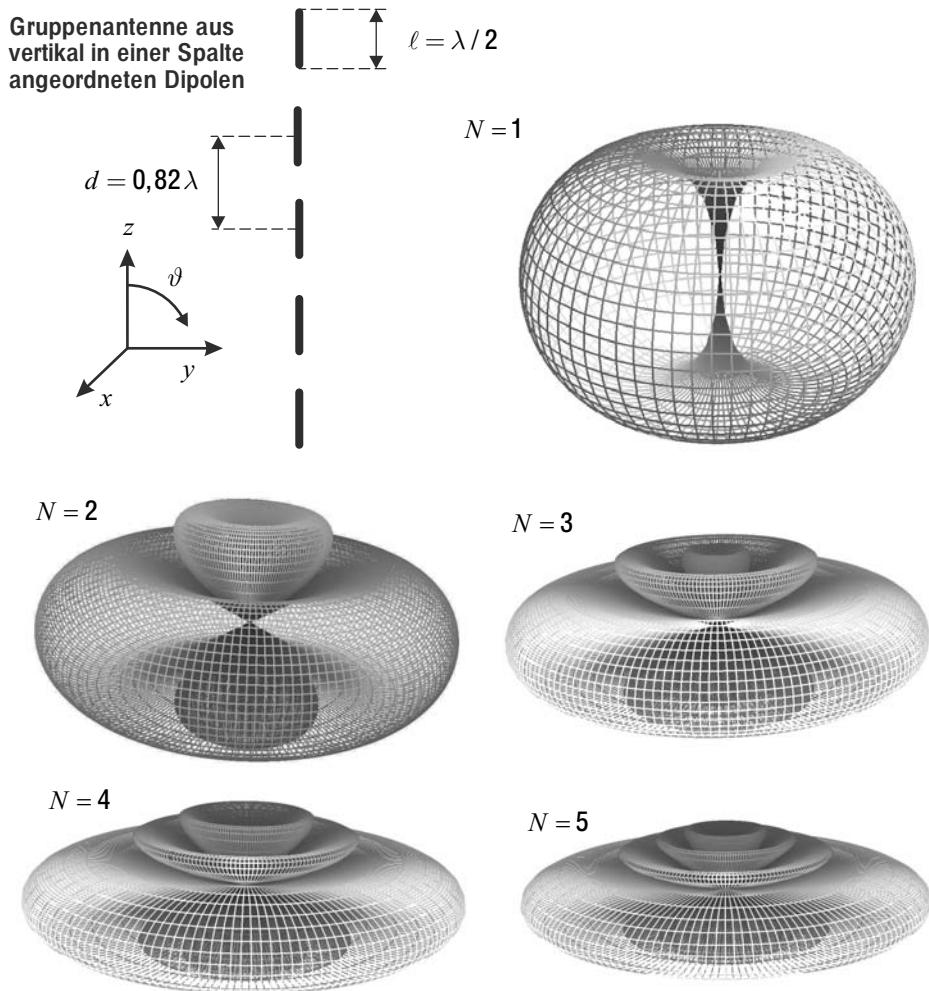


**Bild 7.22** Anordnung von *Patch*-Antennen-Elementen: (a) linienhaft in einer Zeile oder Spalte, (b) in einer ebenen Fläche und (c) in einer gekrümmten Fläche

Sehen wir uns einmal die Auswirkung der Zusammenschaltung mehrerer Antennen zu einer Gruppe an. Bild 7.23 zeigt das Verhalten mehrerer Gruppenantennen, die aus zwei bis fünf senkrecht übereinander angeordneten  $\lambda/2$ -Dipolen bestehen. Der Dipolabstand wird in dem Beispiel zu 82% einer Freiraumwellenlänge ( $d = 0,82\lambda$ ) gewählt. Alle Einzelstrahler werden mit der gleichen Amplitude und Phase angeregt. Der einzelne Dipol ruft das aus Abschnitt 7.4 bekannte Strahlungsdiagramm hervor ( $N = 1$ ). Mit steigender Anzahl  $N$  von vertikal angeordneten Dipolen erhalten wir eine zunehmende vertikale Fokussierung. Gleichzeitig treten vermehrt Nullstellen und Nebenkeulen auf. In horizontaler Richtung bleibt die Rundstrahlcharakteristik erhalten.

Mathematisch kann das Gesamtstrahlungsdiagramm als Produkt (multiplikatives Gesetz) der *Einzelstrahlercharakteristik* und eines *Gruppenfaktors (Array factor)* geschrieben werden (siehe [Bala08] [Bäch99] [Kark12] [Gros05]).

$$\underbrace{C_G(\vartheta, \varphi)}_{\text{Gesamtstrahlungs-} \atop \text{diagramm}} = \underbrace{C_E(\vartheta, \varphi)}_{\text{Einzelstrahler-} \atop \text{charakteristik}} \cdot \underbrace{AF(\vartheta, \varphi)}_{\text{Gruppenfaktor} \atop (\text{Array factor})} \quad (7.55)$$



**Bild 7.23** Strahlungsdiagramme von Gruppenantennen aus vertikal angeordneten Halbwellendipolen

In unserem Beispiel ist die Einzelstrahlercharakteristik des vertikalen Halbwellendipols gegeben mit

$$C_E(\vartheta, \varphi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} . \quad (7.56)$$

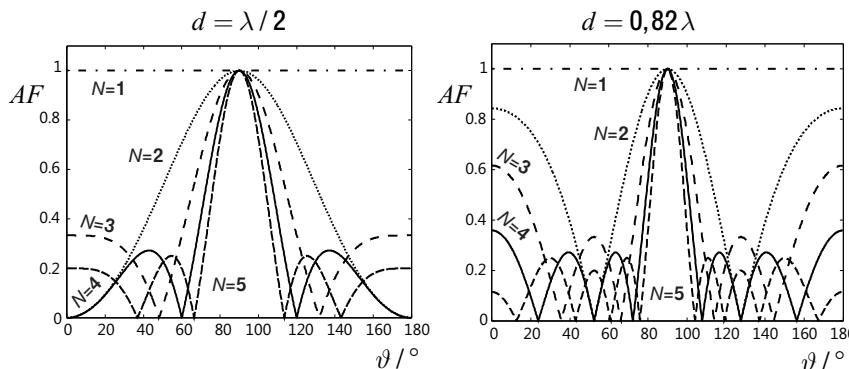
Der Gruppenfaktor ist eine Funktion des auf die Wellenlänge bezogenen Elementabstandes  $d/\lambda$  und des Winkels  $\vartheta$ . Für gleiche Abstände  $d$  zwischen den Einzelstrahlern sowie gleiche komplexe Amplituden (Betrag und Phase) der Speiseströme und unter Vernachlässigung der

Wechselwirkung zwischen den einzelnen Antennen gilt für den Gruppenfaktor:

$$AF(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{\sin\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \cos \vartheta\right)}{N \sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \vartheta\right)} \right|. \quad (7.57)$$

Bild 7.24 zeigt den Gruppenfaktor für zwei Elementabstände  $d = \lambda/2$  und  $d = 0,82\lambda$  mit unterschiedlicher Anzahl  $N$  von Einzelstrahlern. Man erkennt folgende Zusammenhänge:

- Mit steigender Anzahl  $N$  der Einzelstrahler nimmt die Breite der Hauptkeule ab und damit die Bündelung zu.
- Eine Erhöhung des Elementabstandes verringert zwar weiter die Breite der Hauptkeule, allerdings treten nun auch vermehrt Nebenkeulen auf. Für viele Anwendungen ist ein Elementabstand von der halben Wellenlänge ( $d = \lambda/2$ ) eine gute Lösung. (Falls nur zwei Strahler existieren ( $N = 2$ ), erscheint nur ein Maximum quer zur Gruppenorientierung.)



**Bild 7.24** Gruppenfaktor  $AF$  einer vertikal angeordneten Antennengruppe aus ein bis fünf Einzelstrahlern (Anzahl =  $N$ ) für die Elementabstände  $d = \lambda/2$  und  $d = 0,82\lambda$

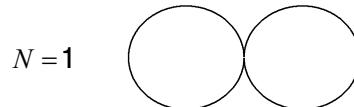
Bei vertikal übereinander angeordneten Dipolen ist der Abstand  $d = \lambda/2$  aufgrund der Länge der Elemente jedoch nicht möglich. Zur Vermeidung von unerwünschten Verkopplungen zwischen den Einzelstrahlern muss hier der Abstand erhöht werden.

In Bild 7.25 sehen wir die Einzelstrahlercharakteristik  $C_E$ , die Gruppenfaktoren  $AF$  und die Gesamtstrahlungsdiagramme  $C_G$  eines einzelnen Halbwellendipols ( $N = 1$ ) sowie von vertikal angeordneten Dipolgruppen aus  $N = 2$  bis  $N = 5$  Einzelstrahlern. Der Abstand zwischen den Elementen beträgt  $d = 0,82\lambda$ .

Die obigen Überlegungen gehen davon aus, dass sich die Einzelstrahler nicht beeinflussen. Praktisch kann die gegenseitige Verkopplung jedoch nicht immer vernachlässigt werden. 3D-Feldsimulatoren (Abschnitt 6.13) können verwendet werden, um diesen Effekt mit in den Entwurfsprozess einzubeziehen.

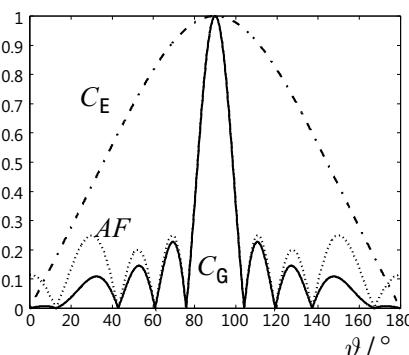
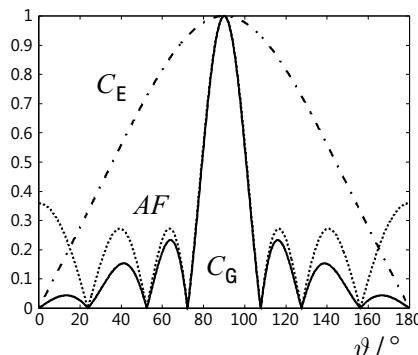
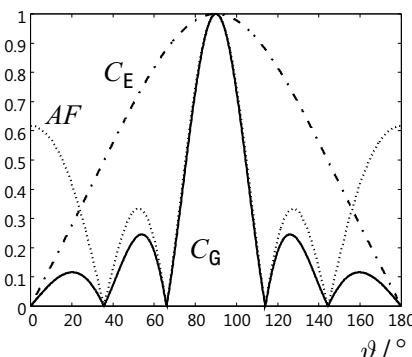
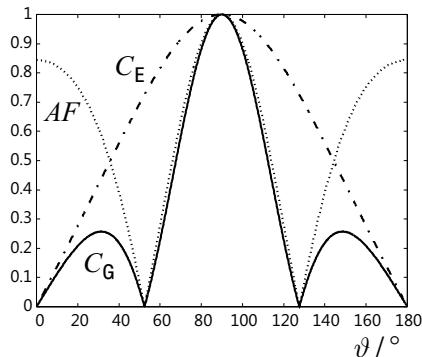
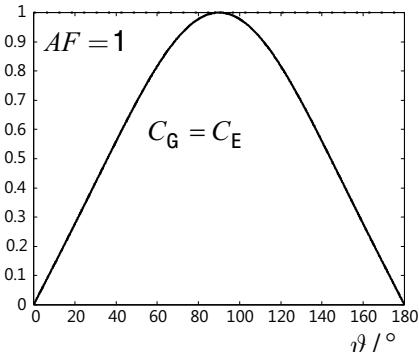
**Einzelcharakteristik des Halbwellendipols**

$$C_E(\vartheta, \varphi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}$$

**Gruppenfaktor der vertikalen Gruppenantenne**

$$AF(\vartheta, \varphi) = \frac{\left| \sin\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \cos \vartheta\right) \right|}{N \cdot \sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \vartheta\right)}$$

$$\underbrace{C_G(\vartheta, \varphi)}_{\text{Gesamtstrahlungsdiagramm}} = \underbrace{C_E(\vartheta, \varphi)}_{\text{Einzelstrahlercharakteristik}} \cdot \underbrace{AF(\vartheta, \varphi)}_{\text{Gruppenfaktor}}$$



**Bild 7.25** Einzelstrahlercharakteristik, Gruppenfaktor und Gesamtstrahlungsdiagramm für ein bis fünf vertikal angeordnete Halbwellen-Dipole (Einzelstrahlerabstand  $d = 0,82\lambda$ ,  $N$  = Anzahl der Dipole)

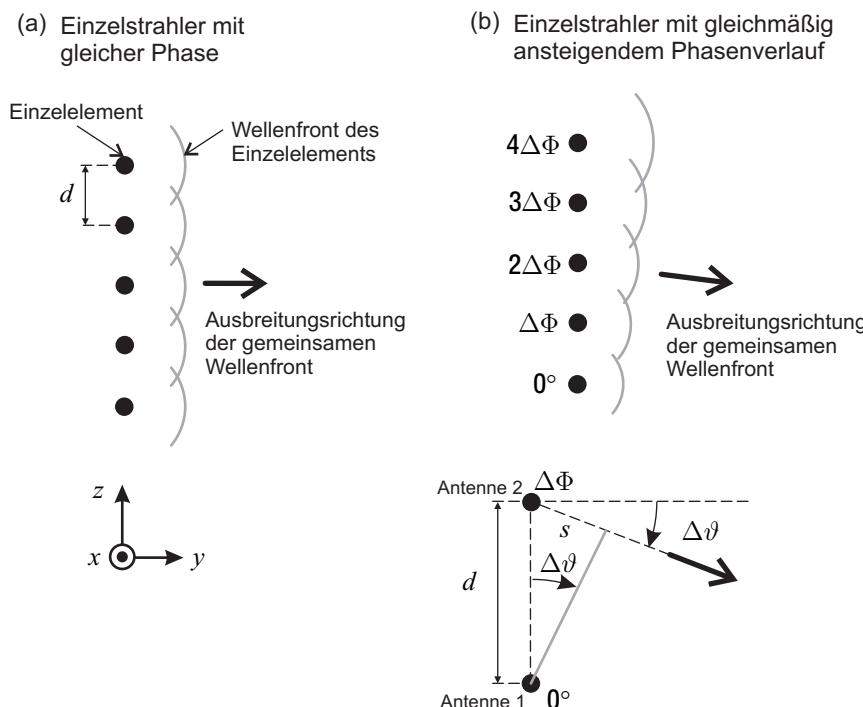
## 7.6.2 Phasengesteuerte Antennen

Im vorherigen Abschnitt wurden alle Einzelstrahler mit der gleichen Amplitude und Phase des Speisestroms angeregt. Bei einer phasengesteuerten Gruppenantenne (*Phased array*) wird nun die Phase variiert, wodurch sich eine Schwenkung der Hauptkeule in einem gewissen Winkelbereich erreichen lässt.

Bild 7.26 zeigt eine in  $z$ -Richtung orientierte Gruppe aus  $N$  Einzelstrahlern im Abstand  $d$ . Werden alle Einzelstrahler mit der gleichen Phase angeregt, so überlagern sich die Einzelwellen nach dem *Huygensschen Prinzip* senkrecht zur Strahlergruppe. Wählt man jedoch eine von Element zu Element gleichmäßig ansteigende Phase  $\Phi + n\Delta\Phi$ , so wird die Hauptkeule um einen Winkel  $\Delta\vartheta$  geschwenkt.

Um den Zusammenhang zwischen dem Winkel  $\Delta\vartheta$  und der Phase  $\Delta\Phi$  auszurechnen, betrachten wir die untere Darstellung in Bild 7.26b. Aufgrund des Phasenwinkels  $\Delta\Phi$  hat die Wellenfront der Antenne 2 einen räumlichen Vorsprung  $s$ .

$$s = d \sin(\Delta\vartheta) \quad (7.58)$$



**Bild 7.26** (a) Konstruktive Überlagerung der Wellenanteile (Huygenssches Prinzip) bei gleicher Phase aller Einzelstrahler und (b) linear ansteigende Phase der Einzelstrahler zur Schwenkung der Hauptkeule

Bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen mit Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  muss die Welle der Antenne 2 also zu einem früheren Zeitpunkt gestartet sein<sup>3</sup>. Der zeitliche Vorlauf berechnet sich aus:

$$\Delta t = \frac{s}{c_0} = \frac{d \sin(\Delta\vartheta)}{c_0} . \quad (7.59)$$

Dieser Zeitversatz  $\Delta t$  kann bei einer gegebenen Frequenz  $f$  in einen Phasenwinkel  $\Delta\Phi$  umgerechnet werden. Die Größe  $\Delta t$  verhält sich zur Periodendauer  $T$ , wie der Phasenwinkel  $\Delta\Phi$  zu  $360^\circ$ . Mit  $c = \lambda f$  gilt:

$$\frac{\Delta t}{T} = \Delta t \cdot f = \Delta t \frac{c_0}{\lambda} = \frac{\Delta\Phi}{360^\circ} . \quad (7.60)$$

Für einen Schwenkwinkel von  $\Delta\vartheta$  ist also eine Phasendifferenz von  $\Delta\Phi$  zwischen den Einzelstrahlern notwendig mit:

$$\Delta\Phi = \frac{360^\circ}{\lambda} d \sin(\Delta\vartheta)$$

(Phasendifferenz zwischen  
benachbarten Elementen). (7.61)

Die Phase muss über die Strahler gesehen linear ansteigen, so dass über den Abstand zum ersten Strahler die notwendige Phase (bzw. der notwendige Zeitvorsprung) berechnet werden kann (Bild 7.26b).

Die Phasendifferenz zwischen den Einzelstrahlern kann in der Praxis zum Beispiel durch unterschiedlich lange Leitungsstücke oder passive Phasenschieber aus konzentrierten Elementen erreicht werden. Soll die Richtung der Hauptkeule, wie zum Beispiel bei Radar-Anwendungen, sehr schnell geschwenkt werden, so bietet sich die Verwendung von elektronischen Phasenschiebern an.

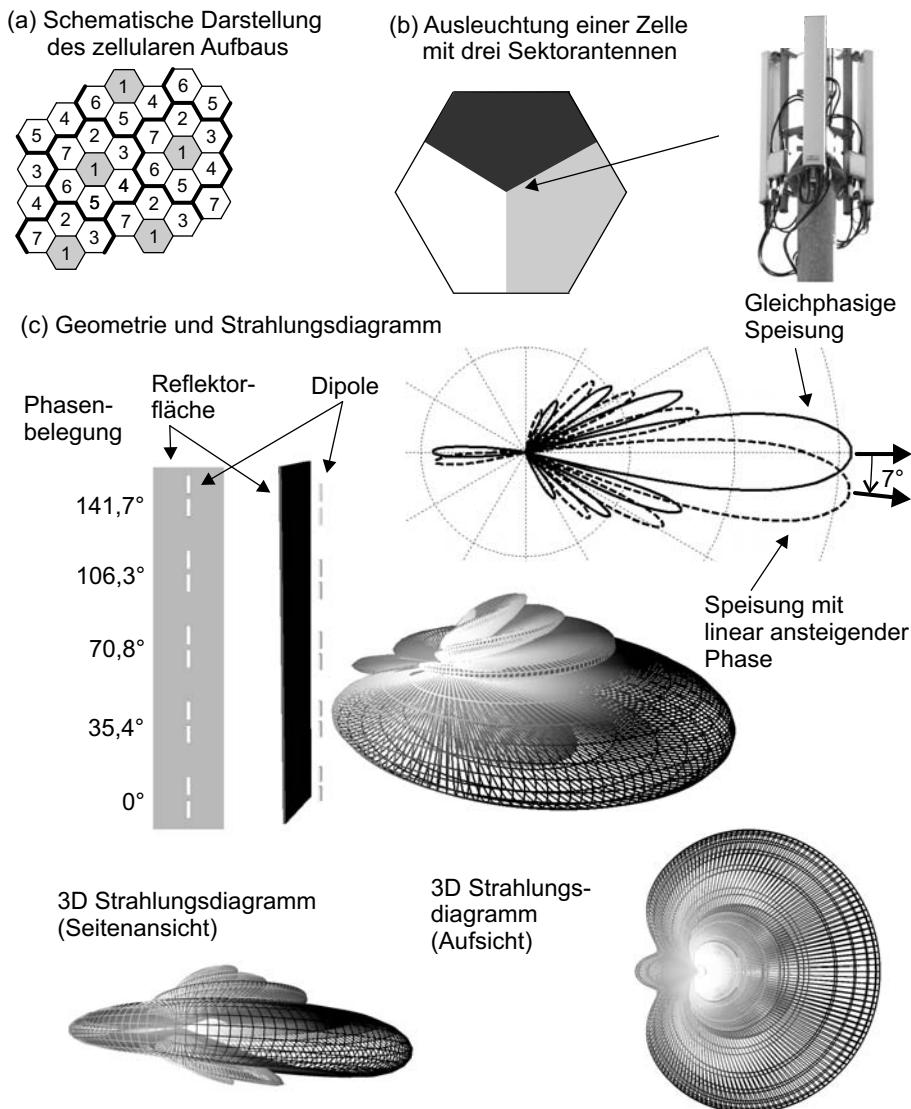
Die Schwenkung des Strahlungsdiagramms lässt sich zur Ortung (Verfolgung von Radarzielen) und zur Erhöhung des Signal-Rauschabstandes verwenden, indem die Hauptstrahlrichtung auf den gewünschten Sender ausgerichtet wird.

### Beispiel 7.3 Mobilfunk-Basisstationsantenne (*Electrical downtilt*)

Beim zellularen Mobilfunk ist das Versorgungsgebiet in Raumbereiche (Zellen) unterteilt, wobei innerhalb benachbarter Zellen unterschiedliche Frequenzbänder genutzt werden. In ausreichendem Abstand einer Zelle können die gleichen Frequenzen wieder verwendet werden (*Frequency re-use*), um so die Netzkapazität (Teilnehmeranzahl) zu steigern. Eine schematische Anordnung von Zellen ist in Bild 7.27a gezeigt. Zellen gleicher Nummer verwenden gleiche Frequenzbänder.

Die einzelnen Zellen werden durch eine oder mehrere Antennen versorgt. Bild 7.27b zeigt eine weit verbreitete Konfiguration mit drei Sektorantennen, die zur Ausleuchtung einer Zelle verwendet wird. Um eine ausreichende Reichweite zu gewährleisten und Reflexionen an Hindernissen in der direkten Antennenumgebung zu verhindern, werden die Antennen bevorzugt an erhöhten Standorten (zum Beispiel auf Masten oder Türmen) montiert.

<sup>3</sup> Ein negativer Phasenwinkel stellt eine *Verzögerung* im Zeitbereich dar. Ein positiver Phasenwinkel bedeutet also eine *früher* startende Welle.



**Bild 7.27** Mobilfunk-Basisstationsantenne mit einem elektrischen *Downtilt* von 7°

In Bild 7.27c sehen wir die wesentlichen Elemente einer einfachen GSM900-Mobilfunk-Basisstationsantenne, die aus fünf vertikal übereinander angeordneten Dipolantennen und einem rechteckigen, metallischen Reflektor aufgebaut ist [Gust06]. Durch die vertikale Dipolgruppe erreichen wir eine vertikale Bündelung des Strahlungsdiagramms. Der Reflektor sorgt für eine breite Richtwirkung in horizontaler Richtung, so dass sich mit drei Sektorantennen ein gleichmäßiges Rundstrahlverhalten ergibt.

Bei *gleichphasiger Anregung* aller Dipole würde die Antenne horizontal zur Seite abstrahlen und so möglicherweise Störungen in eine Zelle hineinragen, die das gleiche

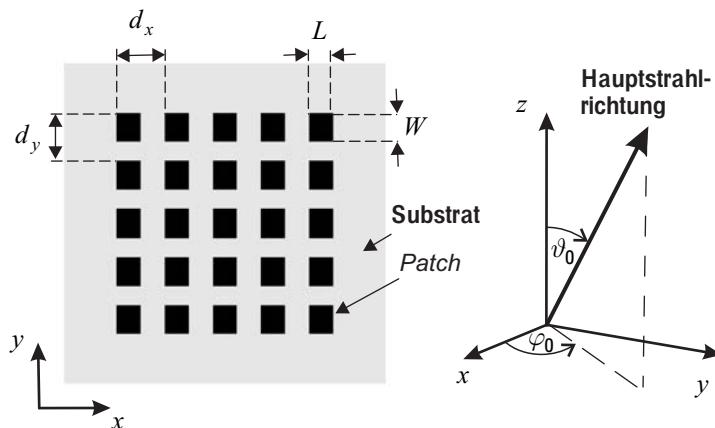
Frequenzband verwendet. Die Reichweite können wir begrenzen, indem wir die Hauptkeule nach unten neigen (*Downtilt*). Dies kann durch schrages Aufhängen (*Mechanical downtilt*) erreicht werden, führt aber zu mechanischen Nachteilen bei der Befestigung der Antenne an einem Mast.

Das Neigen des Strahlungsdiagramms der Antenne können wir auch bei senkrecht aufgehängter Antenne erreichen, indem wir das Konzept der phasengesteuerten Antennen anwenden (*Electrical downtilt*). Die Dipole der Antenne in unserem Beispiel haben einen Abstand  $d = 25,5$  cm zueinander (von Dipolmittelpunkt zu Dipolmittelpunkt). Wollen wir bei einer Frequenz von  $f = 950$  MHz die Hauptkeule um  $7^\circ$  neigen, so erhalten wir nach Gleichung (7.61) einen Phasenwinkel von  $\Delta\Phi = 35,42^\circ \approx 35,4^\circ$  zwischen den benachbarten Dipolen.

Anhand der Strahlungsdiagramme in Bild 7.27c erkennen wir die Absenkung der Hauptstrahlrichtung. ■

Will man die Hauptkeule einer zweidimensionalen Gruppe in zwei unterschiedlichen Richtungen schwenken, so lassen sich die obigen Überlegungen analog anwenden. Die Phasenbeladung der Einzelstrahler wird dann aber nicht durch eine Geradengleichung, sondern durch eine Ebenengleichung bestimmt.

Wir gehen bei unseren Überlegungen von einer  $(M \times N)$ -Elemente großen planaren Gruppe mit gleichen Abständen  $d_x$  in  $x$ -Richtung und gleichen Abständen  $d_y$  in  $y$ -Richtung zwischen den Einzelstrahlern aus. Bei der Frequenz  $f$  soll die Hauptkeule um den Winkel  $\vartheta_0$  aus der Senkrechten und um den Winkel  $\varphi_0$  um die  $z$ -Achse geschwenkt werden (Bild 7.28).



**Bild 7.28** Geometrie der zweidimensionalen Gruppenantenne und Festlegung der Strahlungsrichtung

Wir erhalten als Ergebnis abhängig von Ort ( $x = m \cdot d_x$ ,  $y = n \cdot d_y$  mit  $m \in \{0, \dots, M-1\}$  und  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ ) des Strahlers die Phase  $\Delta\Phi$  bzw. die Verzögerungszeit  $\Delta t$  [Garg01] in den Gleichungen (7.62) und (7.63).

$$\Delta\Phi_{mn} = \frac{360^\circ}{\lambda_0} (m \cdot d_x \cos \varphi_0 \sin \vartheta_0 + n \cdot d_y \sin \varphi_0 \sin \vartheta_0) \quad (7.62)$$

$$\Delta t_{mn} = \frac{\Delta\Phi_{mn}}{360^\circ} \frac{1}{f} \quad (7.63)$$

Dieser Zusammenhang wird in Übung 7.5 abgeleitet. Im Folgenden wollen wir die Anwendung auf eine planare Gruppenantenne aus *Patch*-Antennen an einem Beispiel demonstrieren und das Ergebnis mit einem Feldsimulator überprüfen.

### Beispiel 7.4 2D-Gruppenantenne mit geschwenkter Hauptkeule

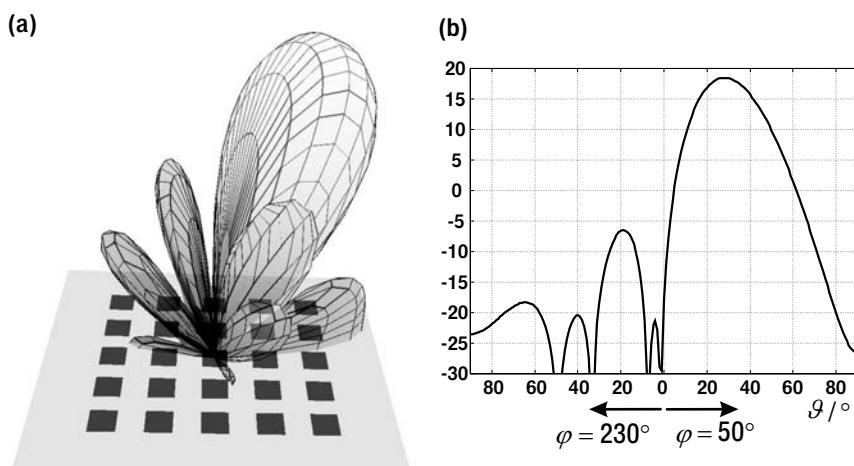
Gegeben ist ein  $5 \times 5$ -Elemente großes *Patch*-Array mit einem Elementabstand von  $d_x = d_y = 30$  mm.

**Tabelle 7.3** Verzögerungszeit der Elemente

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 4$	153,2 ps	185,3 ps	217,5 ps	249,6 ps	281,8 ps
$n = 3$	114,9 ps	147,0 ps	179,2 ps	211,3 ps	243,5 ps
$n = 2$	76,6 ps	108,7 ps	140,9 ps	173,0 ps	205,2 ps
$n = 1$	38,3 ps	70,4 ps	102,6 ps	134,7 ps	166,9 ps
$n = 0$	0,0 ps	32,1 ps	64,3 ps	96,4 ps	128,6 ps

**Tabelle 7.4** Phasenbelegung der Elemente

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 4$	275,8°	333,5°	391,5°	449,3°	507,2°
$n = 3$	206,8°	264,6°	322,6°	380,3°	438,3°
$n = 2$	137,9°	195,7°	253,6°	311,4°	369,4°
$n = 1$	68,9°	126,7°	184,2°	242,5°	300,4°
$n = 0$	0,0°	57,9°	115,7°	173,6°	231,5°



**Bild 7.29** Geometrie der zweidimensionalen Gruppenantenne und Festlegung der Strahlungsrichtung: (a) 3D Strahlungsdiagramm und (b) vertikales 2D Strahlungsdiagramm für  $\varphi = 50^\circ$

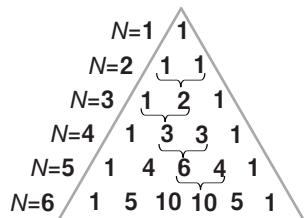
Bei gleichen Phasen aller Anregungsfunktionen stellt sich eine Hauptkeule in  $z$ -Richtung ein. Diese Hauptkeule soll nun bei einer Frequenz von  $f = 5$  GHz um die Winkel  $\theta_0 = 30^\circ$  und  $\varphi_0 = 50^\circ$  geschwenkt werden.

Über die Gleichungen (7.62) und (7.63) können wir die Verzögerungszeiten  $\Delta t$  bzw. die Phasenwinkel  $\Delta\Phi$  für die Frequenz  $f$  für alle Elemente bestimmen. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 7.3 und 7.4 zusammengestellt. Bild 7.29 zeigt das 3D Strahlungsdiagramm sowie ein vertikales 2D Strahlungsdiagramm für  $\varphi = 50^\circ$ . ■

### 7.6.3 Strahlformung

Das Strahlungsdiagramm einer Gruppe von Einzelementen kann weiterhin durch ihre Amplitudenbelegung beeinflusst werden [Bala08] [Kark12]. Bisher wurden alle Elemente mit der gleichen Amplitude des Speisestroms gespeist. Bei dieser gleichmäßigen oder *homogenen Belegung* ergibt sich beim Gruppenfaktor eine schmale Hauptkeule, jedoch entstehen verhältnismäßig stark ausgeprägte Nebenzipfel.

Bei einem Elementabstand von  $d = \lambda/2$  kann durch eine *binomiale Belegung* eine vollständige Unterdrückung der Nebenzipfel erreicht werden. Die Breite der Hauptkeule nimmt allerdings gegenüber der homogenen Belegung zu. Mit zunehmendem Abstand der Elemente von der Mitte werden die Einzelstrahler mit abfallenden Amplituden belegt. Die auf die Randelemente normierten Gewichtsfaktoren für die Amplituden der Speiseströme kann man sich mit Hilfe des *Pascalschen Dreiecks* konstruieren (Bild 7.30). Im Pascalschen Dreieck ergeben sich die Werte der nächsten Zeile immer als *Summe* der schräg über ihnen stehenden Zahlen. In Bild 7.30 deuten die Klammern diese Summenbildung an. Aus dem Pascalschen Dreieck lesen wir ab, dass bei  $N = 3$  Einzelstrahlern das mittlere Element gerade mit dem doppelten Strom gespeist werden muss wie die Randelemente. Bei  $N = 6$  Einzelstrahlern führt diese Belegung bereits zu einem zehnfach höheren Speisestrom der zentralen Strahler. Nachteilig an der Binomialbelegung ist, dass die stark unterschiedlichen Speiseströme zu einem geringeren Strahlungsbeitrag der Randelemente führen, so dass die Effizienz der Antenne abnimmt.



**Bild 7.30** Pascalsches Dreieck zur Berechnung der Binomialkoeffizienten

In der Praxis ist es oft ausreichend, die Nebenkeulen auf ein gewisses Niveau abzusenken, z.B.  $-20$  dB oder  $-30$  dB bezogen auf die Hauptkeule. Dies ist möglich mit der *Dolph-Tschebyscheff-Belegung* [Kark12]. Die Berechnung der Gewichtungsfaktoren ist aufwendiger, weshalb an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen werden soll. Der Leser findet in [Bala08] eine verständliche Darstellung.

Die Dolph-Tschebyscheff-Belegung hat gegenüber der Binomialbelegung den Vorteil, dass die Amplitudenfaktoren sich nicht so stark unterscheiden, die Amplituden der Randelemente also

gegenüber der Amplitude der zentralen Strahler weniger stark abfallen. Vorteilhaft ist weiterhin, dass die Vergrößerung des Öffnungswinkels der Hauptkeule weniger stark ausgeprägt ist.

Im folgenden Beispiel betrachten wir eine Gruppenantenne mit sechs *Patch*-Elementen im Abstand einer halben Wellenlänge  $d = \lambda/2$ . Wir vergleichen in diesem Beispiel die oben beschriebenen unterschiedlichen Amplitudengewichtungen: gleichmäßige Belegung, binomiale Belegung und Dolph-Tschebyscheff-Belegung.

### Beispiel 7.5 Gruppenantenne mit sechs *Patch*-Elementen

Bild 7.31a zeigt eine Gruppe von sechs *Patch*-Antennen mit einem Elementabstand von einer halben Wellenlänge ( $d = \lambda/2 = 6,25$  mm) für eine Frequenz von  $f = 24$  GHz. Die *Patch*-Elemente (Länge  $L = 2,15$  mm und Breite  $W = 2,8$  mm) befinden sich auf einem Substrat der Höhe  $h = 200\text{ }\mu\text{m}$  mit einer relativen Dielektrizitätszahl von  $\epsilon_r = 7,8$  und werden koaxial gespeist.

Wir regen die einzelnen *Patch*-Elemente mit den drei oben diskutierten Amplitudenbelegungen an:

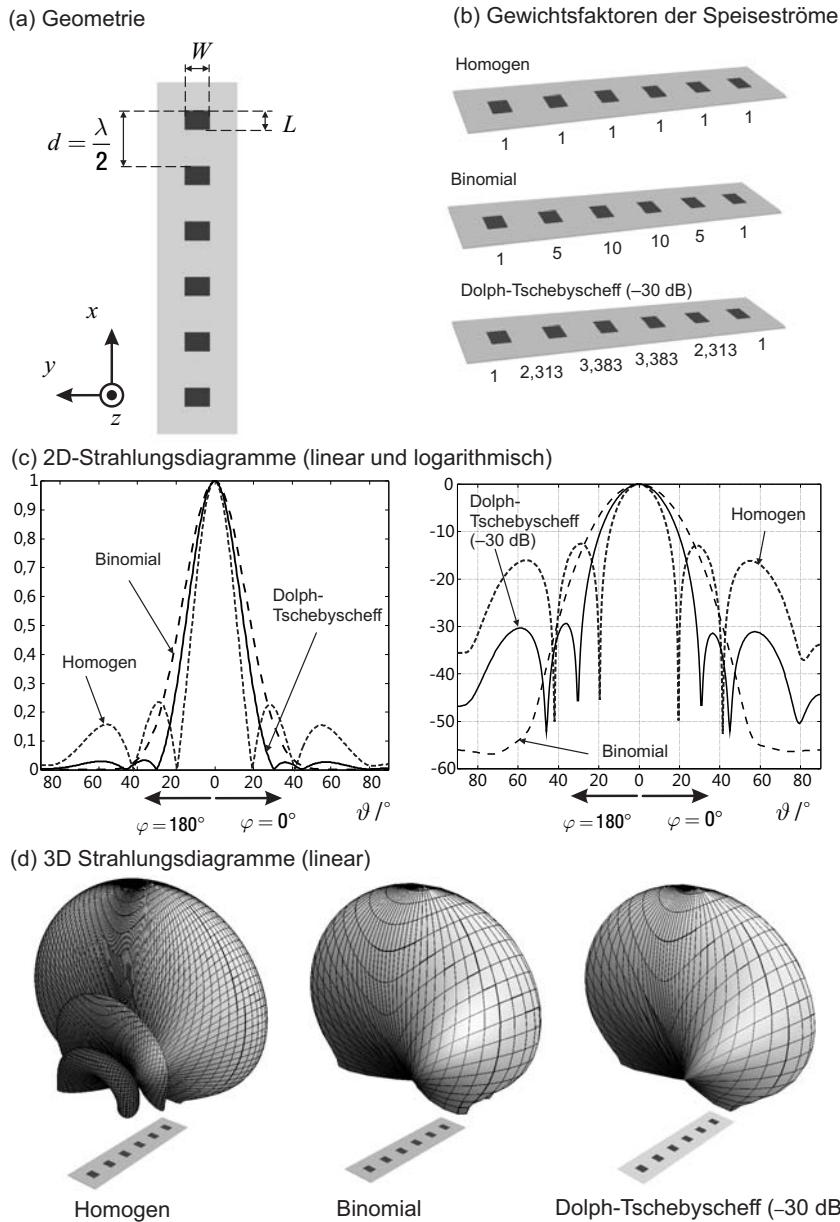
- gleichmäßige (homogene) Belegung,
- binomiale Belegung,
- Dolph-Tschebyscheff-Belegung (mit Nebenzipfelmaxima um  $-30$  dB).

Die einzelnen Gewichtungsfaktoren sind in Bild 7.31b zusammengestellt.

Die kartesischen 2D-Strahlungsdiagramme ( $xz$ -Schnittebene) sind in Bild 7.31c linear und logarithmisch dargestellt.

- Die homogene Belegung ergibt die geringste Hauptkeulenbreite, allerdings sind die Nebenzipfel stark ausgeprägt.
- Demgegenüber führt die binomiale Belegung zu einer vollständigen Unterdrückung der Nebenzipfel bei jedoch deutlicher Vergrößerung des Öffnungswinkels.
- Die Dolph-Tschebyscheff-Belegung stellt für beide Größen (Hauptkeulenbreite und Nebenzipfeldämpfung) einen Kompromiss dar.

Bild 7.31d zeigt die 3D-Strahlungsdiagramme in linearer Darstellung. Wie schon in der linearen Darstellung des 2D-Diagramms zu sehen sind die Nebenzipfel bei der Dolph-Tschebyscheff-Belegung mit  $-30$  dB so stark reduziert, dass die optische Unterscheidung zwischen Dolph-Tschebyscheff- und Binomialbelegung schwerfällt.



**Bild 7.31** Gruppenantenne aus sechs Patch-Strahlern im Abstand einer halben Wellenlänge. Strahlungsdiagramme für unterschiedliche Amplituden der Speiseströme

Leichte Unsymmetrien in den Diagrammen bei kleinen Werten folgen aus der unsymmetrischen Einspeisung der Patch-Elemente. ■

## ■ 7.7 Weitere Antennenkonzepte

Bei Verwendung von Gruppenantennen oder *Mehrantennensystemen* ergeben sich mit Hilfe von Signalverarbeitungsalgorithmen weitere Entwicklungsmöglichkeiten im Bereich der Antennentechnik. Die zugrundeliegenden Algorithmen sind nicht Thema dieses Buches. An dieser Stelle sei daher nur mit einigen Sätzen auf die Begriffe *Smart Antennas*, *Diversity* und *MIMO* eingegangen, um den Leser zur weiteren Beschäftigung mit dem Thema anzuregen.

- Der Begriff *Smart antennas* bezeichnet Gruppenantennen, die in der Lage sind, ihr Strahlungsdiagramm – durch Veränderung der Amplituden- und Phasenbelegung der Einzelemente – dynamisch vorgegebenen Anforderungen anzupassen. Beispielsweise kann von der Antenne die Hauptkeule in eine bestimmte Richtung geschwenkt werden, um die Verbindung zu einem Kommunikationspartner zu optimieren. Es kann jedoch im Strahlungsdiagramm auch ein Minimum in einer bestimmten Raumrichtung ausgebildet werden, um Störsignale zu unterdrücken. Die *smartness* (Gewandtheit) der Antenne liegt in den Algorithmen und nicht in dem Hardwareaufbau [Gros05].
- Unter *Diversity* versteht man die Verwendung von mehreren Antennen auf Seiten des Senders und/oder Empfängers. Handelt es sich um räumlich getrennte Antennen, so spricht man von *Space diversity*. Verwendet man Antennen unterschiedlicher Polarisation, so handelt es sich um *Polarisation diversity*. Mehrantennensysteme haben Vorteile bei mobilen Anwendungen in komplexen Umgebungen, bei denen es aufgrund der Mehrwegeausbreitung zur Auslöschung von Signalen kommen kann (*Fading*). Wir werden in Abschnitt 8.3.1 noch darauf eingehen. Falls bei einem Mehrantennensystem eine der Antennen kein ausreichendes Signal empfängt, kann auf eine andere Antenne umgeschaltet werden. Bei einer ausreichenden räumlichen Trennung der Antennen oder der Verwendung einer veränderten Polarisation steigt die Wahrscheinlichkeit, dass bei der zweiten Antenne der Signalpegel größer ist. Die Verbindungsicherheit kann so erhöht werden. Neben dem Umschalten zwischen den Antennen besteht auch die Möglichkeit, die Antennensignale zu kombinieren, so dass sich das Signal-Rausch-Verhältnis verbessert [Saun07].
- Beim MIMO-Verfahren (*Multiple Input Multiple Output*) werden sender- und empfängerseitig mehrere Antennen eingesetzt. Das Verfahren zielt darauf, die Übertragungskapazität zu steigern, indem zwischen den Sende- und Empfangsantennen gleichzeitig mehrere Übertragungskanäle betrieben und Bitströme übertragen werden. Möglich ist dies durch die Verwendung verschiedener Übertragungswege. Die von den unterschiedlichen Antennen empfangenen Signale müssen über mathematische Algorithmen ausgewertet und den einzelnen Kanälen zugeordnet werden [Saun07].

## ■ 7.8 Übungsaufgaben

### Übung 7.1

Bei einem Funkstandard betrage die maximale Sendeleistung 100 mW (EIRP). An Sender und Empfänger eines Funksystems werden bislang Leitungen mit einer Dämpfung von 2,5 dB und Antennen mit einem Gewinn von  $G_1 = 5 \text{ dBi}$  betrieben. Zur Erhöhung

der Reichweite werden die bisherigen Komponenten auf beiden Seiten gegen verlustärmer Leitungen mit einer Dämpfung von 1 dB ausgetauscht und Antennen mit höheren Antennengewinnen von  $G_2 = 15 \text{ dBi}$  eingesetzt. Wie muss die Leistung des Senders angepasst werden, damit die maximal zulässige Sendeleistung (EIRP) nicht überschritten wird? Warum steigt überhaupt die Reichweite?

### Übung 7.2

Untersuchen Sie einige der in Abschnitt 7.4.3 vorgestellten Konzepte zur Verkürzung von Monopolantennen mit einem Feldsimulator Ihrer Wahl. Wählen Sie als Betriebsfrequenz für die Antennen  $f = 2,45 \text{ GHz}$ .

### Übung 7.3

Es soll eine koaxial gespeiste *Patch*-Antenne für eine Frequenz von  $f = 4 \text{ GHz}$  entworfen werden. Als Substrat steht ein Material mit einer relativen Dielektrizitätszahl von  $\epsilon_r = 3,38$  und einer Höhe von  $h = 1,6 \text{ mm}$  zur Verfügung. Für die Breite gelte  $W = 1,5L$ . Überprüfen Sie die Anpassung Ihres Entwurfes mit einem Feldsimulator, wenn Sie Zugang zu entsprechender Software haben.

### Übung 7.4

Zeigen Sie, dass sich das elektrische und magnetische Feld des Hertzschen Dipols in Gleichung (7.34) mit Hilfe der Gleichungen (7.23) und (7.24) aus dem magnetischen Vektorpotential in Gleichung (7.29) berechnen lässt.

### Übung 7.5

Leiten Sie den Zusammenhang in Gleichung (7.62) für eine zweidimensionale Gruppenantenne her.

# 8

## Funkwellen

Bei der Bewertung von Funksystemen reicht es nicht aus, die Antennen isoliert zu betrachten. Vielmehr müssen auch die Einflüsse der Umgebung auf die Wellenausbreitung zwischen den Antennen miteinbezogen werden. Ausgehend von einer anschaulichen Zusammenstellung physikalischer Wellenausbreitungsphänomene betrachten wir zunächst einfache Modelle zur Abschätzung des Pfadverlustes bei Funkanwendungen. Das Kapitel schließt dann mit einem kurzen Ausblick auf empirische und physikalische Modelle für die Funkfelddämpfung.

### ■ 8.1 Wellenausbreitungseffekte

Im freien Raum können sich homogene ebene Wellen (HEW) und Kugelwellen ungestört ausbreiten. Diese Ausbreitungsvorgänge und das Verhalten von homogenen ebenen Wellen an ebenen Grenzschichten haben wir in Kapitel 2 detailliert beschrieben. Wir wollen die Zusammenhänge hier kurz wiederholen und anschließend weitere für die Wellenausbreitung wichtige Begriffe einführen.

#### 8.1.1 Reflexion und Brechung

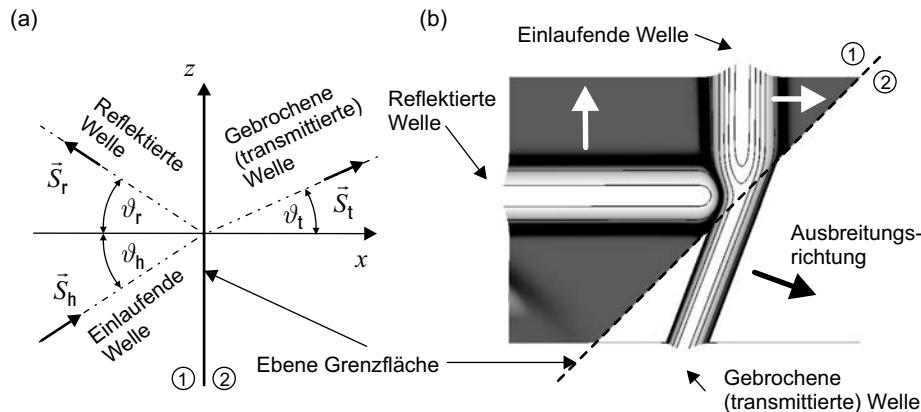
Bild 8.1a zeigt eine hinlaufende Welle, die aus Medium 1 kommend unter dem Winkel  $\vartheta_h$  auf die Grenzschicht trifft. Ein Teil der Welle wird reflektiert.

**Reflexion:** Trifft eine homogene ebene Welle auf die ebene Grenzschicht zweier Medien, so wird sie reflektiert, wobei Einfallswinkel  $\vartheta_h$  und Ausfallswinkel  $\vartheta_r$  gleich sind.

Ein zweiter Teil der Welle dringt in Medium 2 ein, wobei der Transmissionswinkel  $\vartheta_t$  im Allgemeinen vom Einfallswinkel  $\vartheta_h$  verschieden ist.

**Brechung:** Beim Durchgang einer homogenen ebenen Welle durch die ebene Grenzschicht zweier Medien erfährt die Welle eine Richtungsänderung.

Bild 8.1b verdeutlicht den Sachverhalt durch eine Momentaufnahme eines Wellenberges, der auf eine Grenzschicht zu einem optisch dichteren Medium ( $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$ ) trifft. Der einlaufende, reflektierte und gebrochene Wellenanteil ist deutlich erkennbar. Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren für unterschiedliche Polarisierungen der einfallenden Welle sowie die Winkel, unter denen sich die Wellenanteile ausbreiten, sind in Abschnitt 2.5.3 angegeben.



**Bild 8.1** Reflexion und Brechung einer Welle an einer ebenen Grenzschicht: (a) Definition der Winkel und (b) Momentaufnahme der elektrischen Feldstärke eines Wellenberges, der unter einem Winkel von  $\vartheta_h = 45^\circ$  auf eine ebene Grenzschicht trifft ( $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$ )

### 8.1.2 Absorption

Ist ein Material verlustbehaftet, so wird die Welle *absorbiert*. Der Betrag der Amplitude nimmt dann exponentiell mit der Weglänge ab. Der absorbierte Anteil wird in Wärmeenergie umgewandelt und ist für den elektromagnetischen Signaltransport verloren.

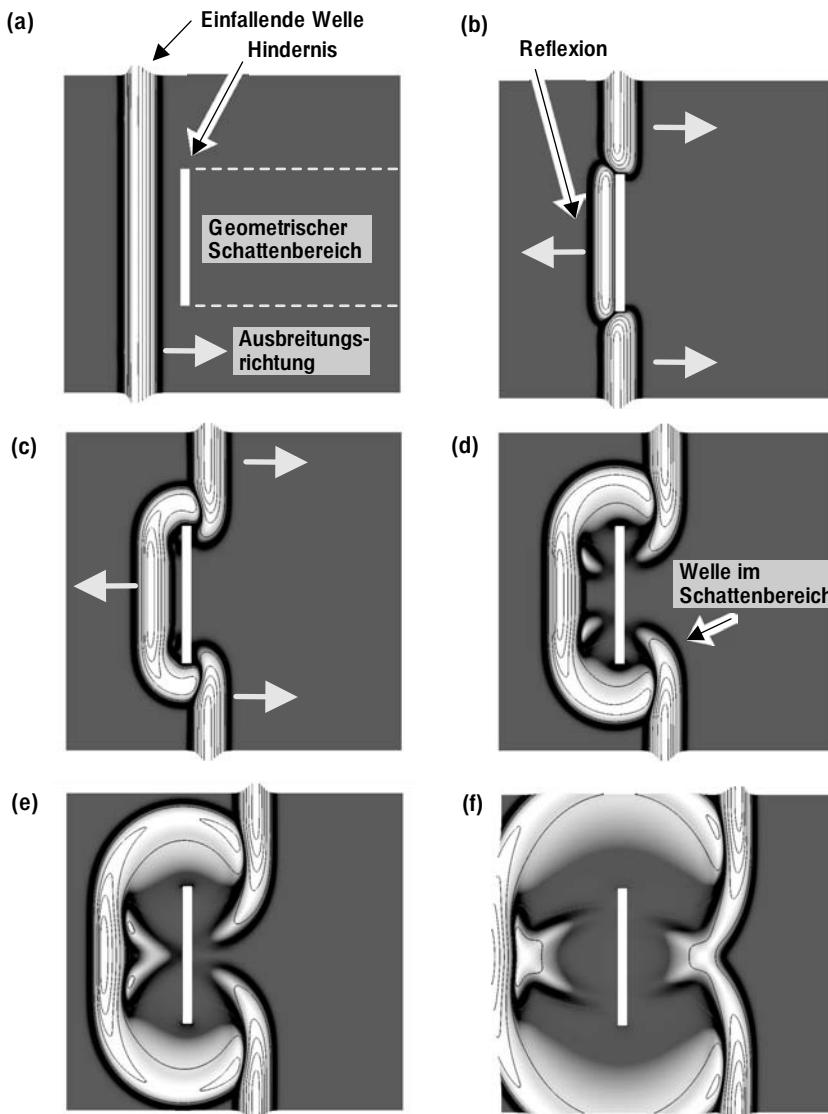
**Absorption:** In verlustbehafteten Medien nimmt die Amplitude des Signals längs des Weges ab. Der Amplitudenabfall ist dabei exponentiell.

### 8.1.3 Beugung

Im Zusammenhang mit räumlich begrenzten Objekten kommt es an den Kanten zu *Beugungerscheinungen*. Hierzu betrachten wir Bild 8.2a: Eine ebene Welle trifft auf ein für die Welle un durchdringliches Hindernis (z.B. eine metallische Wand). Hinter dem Hindernis liegt in Aus breitungsrichtung der *geometrische Schattenraum*. Würden sich elektromagnetische Vorgänge strahlförmig ausbreiten, so sollte in diesem Gebiet kein elektromagnetisches Feld auftreten. Aufgrund der Wellennatur der elektromagnetischen Vorgänge kommt es jedoch an den Kan ten zu Beugungerscheinungen.

In Bild 8.2b erreicht die Welle gerade das Hindernis: Im Bereich des Objektes wird die Welle reflektiert, außerhalb des Objektbereiches läuft die Welle in ihrer Ursprungsrichtung weiter. In Bild 8.2c-d erkennen wir zum einen das Zurücklaufen des reflektierten Anteils. Zum anderen sehen wir, dass die Welle auch in den geometrischen Schattenbereich eindringt. Die Effekte setzen sich in den folgenden zwei Bildern fort.

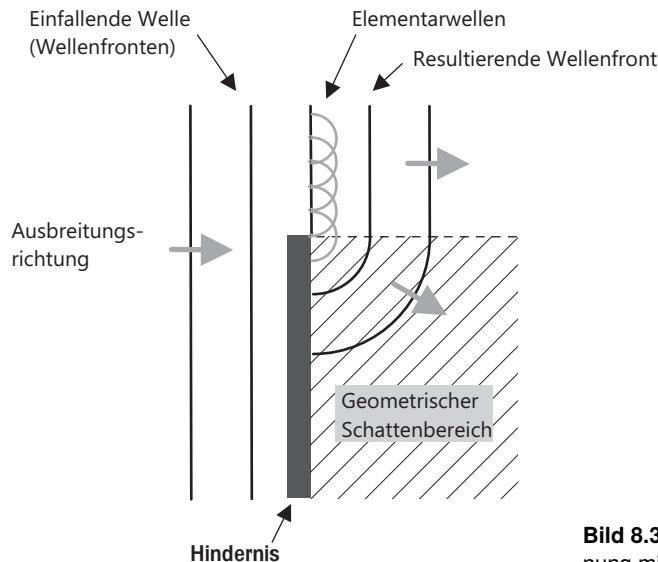
Das Auftreten der Beugung kann mit dem *Huygensschen Prinzip* erklärt werden, welches besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle be-



**Bild 8.2** Eine Welle trifft auf ein Hindernis. Aufgrund der Beugung an den Objektkanten tritt die Welle auch in den geometrischen Schattenbereich ein: (a) bis (f) zeigen zeitlich aufeinanderfolgende Zustände eines Wellenberges (Betrag der elektrischen Feldstärke)

trachtet werden kann (Bild 8.3). Die Elementarwellen addieren sich zu einer neuen resultierenden Wellenfront, die auch in den Schattenbereich hineinläuft.

**Beugung:** Elektromagnetische Wellen werden an Kanten eines Objektes in den geometrischen Schattenbereich hineingebeugt.



**Bild 8.3** Erklärung der Beugungerscheinung mit dem Huygensschen Prinzip

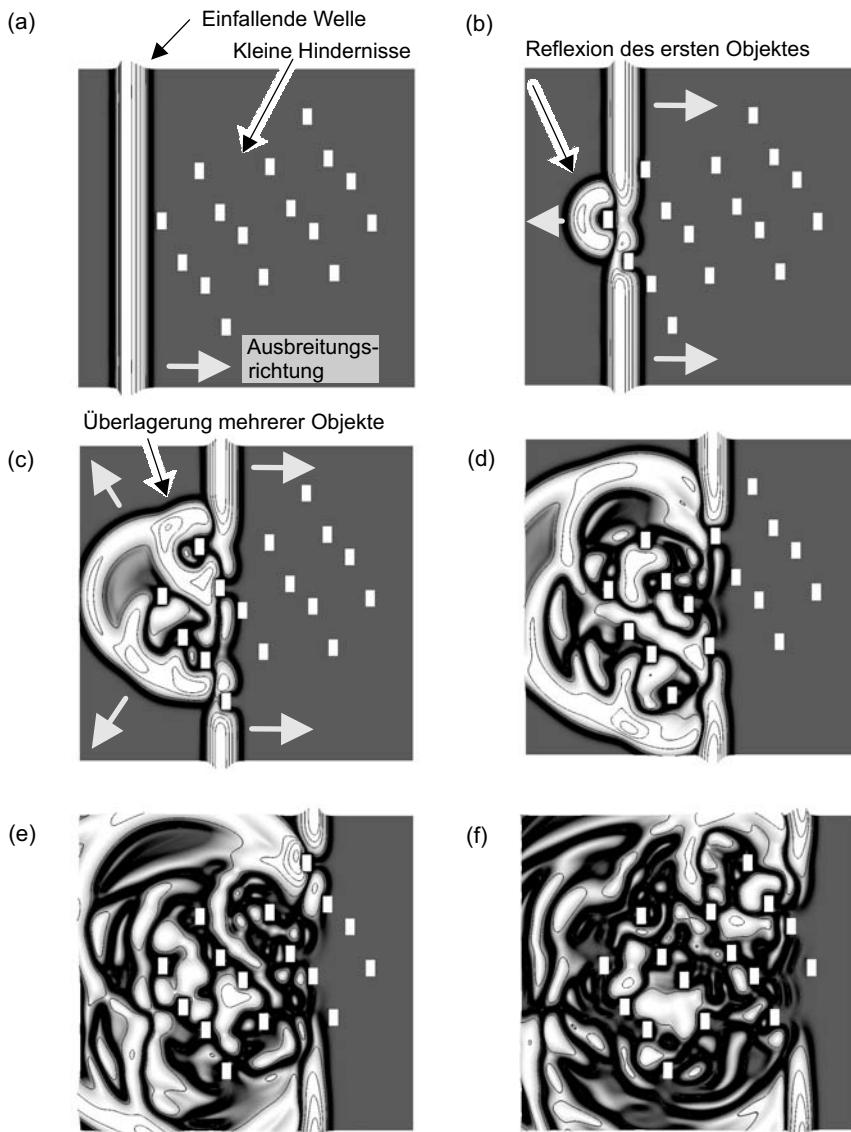
Das Problem, dass eine elektromagnetische Welle senkrecht auf eine absorbierende Halbbeine trifft, und die damit verbundenen Beugungerscheinungen sind in der Literatur als *Knife-Edge*-Problem bekannt [Geng98]. Wir kommen darauf in Zusammenhang mit Richtfunkstrecken zurück.

### 8.1.4 Streuung

Tritt die elektromagnetische Welle in Wechselwirkung (Reflexion, Brechung, Beugung) mit einer Vielzahl von Objekten (z.B. Regentropfen in der Atmosphäre oder räumlich verteilte Vegetation), so spricht man von Streuung, da hier die zu beobachtende Reaktion als Überlagerung vieler einzelner Wechselwirkungsanteile sehr ungeordnet ist.

**Streuung:** Wechselwirkung einer elektromagnetischen Welle mit einer Vielzahl von Objekten oder mit einem räumlich unregelmäßig verteilten Objekt.

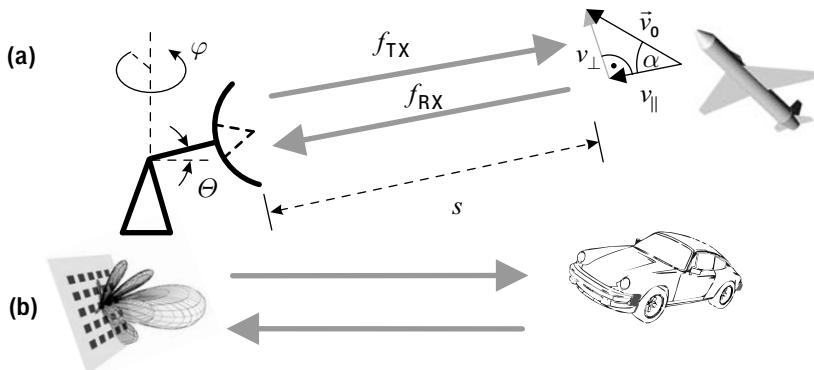
Als Beispiel für die Streuung einer Welle an einer größeren Zahl von Hindernissen betrachten wir Bild 8.4. Die einfallende Welle wird an den einzelnen Objekten reflektiert und gebeugt. Die reflektierten und gebeugten Wellenanteile treten wiederum in Wechselwirkung mit den umliegenden Objekten. Insgesamt ergibt sich ein sehr unregelmäßiges Feldmuster.



**Bild 8.4** Streuung einer Welle an einer Vielzahl kleiner Objekte: (a) bis (f) zeigen zeitlich aufeinanderfolgende Zustände eines Wellenberges (Betrag der elektrischen Feldstärke)

### 8.1.5 Doppler-Effekt

Die Wechselwirkung von elektromagnetischen Wellen mit Objekten lässt sich technisch – beispielsweise bei Radaranwendungen – nutzen. Bild 8.5 zeigt ein monostatisches Radar, bei dem Sende- und Empfangsanenne sich am gleichen Ort befinden. Radarsysteme in der Luftfahrt und im Automobilbereich nutzen Signallaufzeiten und Frequenzverschiebungen durch den Dopplereffekt, um Entfernung und Geschwindigkeiten von Objekten zu ermitteln.



**Bild 8.5** Radaranwendung (a) in der Luftfahrt und (b) im Automobilbereich

Elektromagnetische Wellen breiten sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  aus. Um die Strecke  $s$  zwischen Antenne und Objekt hin- *und* zurückzulaufen, benötigen sie die Zeit  $\Delta t$ . Die Entfernung  $s$  lässt sich dann einfach ermitteln.

$$s = \frac{1}{2} c_0 \Delta t \quad (\text{Entfernung zum Objekt}) \quad (8.1)$$

Da Objekte sich in ihrem Rückstreuverhalten unterscheiden, ist aus der Amplitude und dem Verlauf des Empfangssignals in gewissen Grenzen auch eine Klassifikation von Objekten möglich. So zeigen beim Automobilradar zum Beispiel Fußgänger und Kraftfahrzeuge ein deutlich unterschiedliches Rückstreuverhalten. Das Rückstreuverhalten wird durch den *Rückstreuquerschnitt*  $\sigma$  (RCS: *Radar Cross Section*) beschrieben [Fink12]. Diese Größe ist im Allgemeinen winkelabhängig, da die Wechselwirkung zwischen Welle und Objekt von der Einfallsrichtung abhängt. Mit Hilfe des Rückstreuquerschnittes kann die Empfangsleistung folgendermaßen berechnet werden [Pehl92], wenn sich das Objekt in Hauptstrahlrichtung befindet.

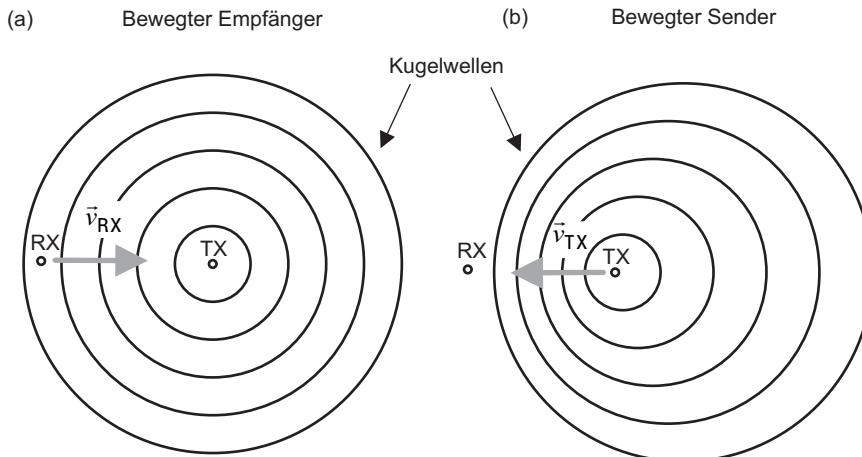
$$P_{\text{RX}} = P_{\text{TX}} \frac{G_{\text{TX}} G_{\text{RX}} \lambda_0^2}{(4\pi)^3 s^4} \sigma \quad (\text{Empfangsleistung}) \quad (8.2)$$

Da unterschiedliche Antennen zum Senden und Empfangen verwendet werden können, treten die Gewinne  $G_{\text{TX}}$  und  $G_{\text{RX}}$  der beiden Antennen getrennt auf.

Bei bewegten Zielen oder bewegtem Radarsystem ergibt sich eine Frequenzverschiebung. Bild 8.6 zeigt das Wellenfeld bei bewegtem Empfänger und stationärem Sender sowie bei bewegtem Sender und stationärem Empfänger. Besitzt das bewegte Ziel eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Senders, so ist die Frequenz des Empfangssignals um die *Dopplerfrequenz* gegenüber der Frequenz des Sendesignals erhöht [Pehl92]. Entfernt sich das Zielobjekt, so ist die Empfangsfrequenz um die Dopplerfrequenz geringer als die Sendefrequenz.

$$f_D = f_{\text{RX}} - f_{\text{TX}} = f_{\text{TX}} \frac{2v_{\parallel}}{c_0} = \frac{2v_{\parallel}}{\lambda_0} \quad (\text{Dopplerfrequenz}) \quad (8.3)$$

Der Faktor „zwei“ in Gleichung (8.3) röhrt daher, dass das Zielobjekt aufgrund seiner Eigenbewegung zunächst ein um die Frequenz erhöhtes Signal sieht. Dieses Signal wird dann von dem



**Bild 8.6** Dopplereffekt: (a) Bewegter Empfänger und (b) bewegter Sender

Objekt wieder abgestrahlt, so dass also aufgrund des nun bewegten Senders der Dopplereffekt zweimal auftritt.

**Dopplereffekt:** Bewegt sich ein Sender in einem Medium, so ändert sich die Wellenlänge der Wellen, die sich im Medium ausbreiten. Folglich beobachtet ein stationärer Empfänger eine Frequenzverschiebung. Weiterhin beobachtet ein Empfänger, der sich durch das Wellenfeld eines stationären Senders bewegt, eine Frequenzverschiebung. Der *Dopplereffekt* ist eine Folge der *konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle* in einem Medium.

Mit Hilfe einer mechanisch oder elektronisch schwenkbaren Antenne (Abschnitt 7.6) können

- der Azimut- oder Horizontalwinkel  $\varphi$ ,
- der Elevations- oder Vertikalwinkel  $\Theta$  sowie
- der Abstand  $s$  zum Objekt

und damit die Lage des Objektes im Raum bestimmt werden. Ist nur der Azimutwinkel von Interesse, so ist es ausreichend, eine rotierende Antenne zu verwenden. Um eine hohe Winkelauflösung zu erzielen, sollte das Strahlungsdiagramm dabei einen geringen horizontalen Öffnungswinkel besitzen. Der Öffnungswinkel in vertikaler Richtung sollte groß sein, um Objekte in unterschiedlichen Höhen erfassen zu können.

### Beispiel 8.1 Dopplerfrequenz

Ein Fahrzeug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von  $v_0 = 60 \text{ km/h}$  unter einem Winkel von  $\alpha = 45^\circ$  gegenüber einem Radarsystem ( $f = 24 \text{ GHz}$ ). Mit Gleichung (8.3) erhalten wir

$$f_D = f_{RX} - f_{TX} = f_{TX} \frac{2}{c_0} v_{\parallel} = 24 \text{ GHz} \frac{2}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cos(\alpha) \frac{60 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \approx +1,886 \text{ kHz} . \quad (8.4)$$

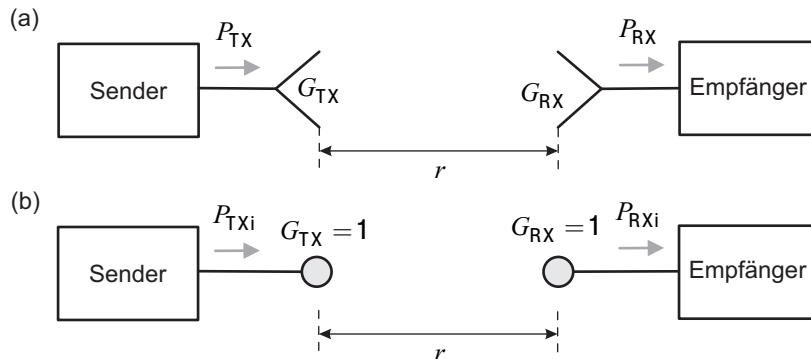
Die Umrechnung der Einheit von km/h in m/s wird mit dem Faktor  $1/3,6$  berücksichtigt und der Winkel  $\alpha$  reduziert die wirksame Geschwindigkeit um den Faktor  $\cos(\alpha)$ . ■

## ■ 8.2 Einfache Ausbreitungsszenarien

Das einfachste Ausbreitungsszenario stellt die Leistungsübertragung von einem Sender zu einem Empfänger dar, wenn die Antennen sich im *freien Raum* befinden. Es existiert dann nur ein direkter Ausbreitungspfad für die Welle vom Sender zum Empfänger.

### 8.2.1 Freiraumausbreitung

Bild 8.7a zeigt die Antennen, die sich im Abstand  $r$  zueinander befinden und die Gewinne  $G_{TX}$  und  $G_{RX}$  besitzen. Die Antennen seien zudem optimal aufeinander ausgerichtet, d.h. jede Antenne befindet sich in Hauptstrahlrichtung der anderen Antenne. Weiterhin besitzen beide Antennen die gleiche Polarisation.



**Bild 8.7** Freiraumausbreitung: Verwendung von (a) Antennen mit Gewinn und (b) isotropen Kugelstrahlern

In diesem Fall kann die Empfangsleistung einfach nach der *Friis-Gleichung* berechnet werden [Geng98] [Dobk08].

$$P_{RX} = P_{TX} G_{RX} G_{TX} \left( \frac{\lambda_0}{4\pi r} \right)^2 \quad (\text{Freiraumausbreitung}) \quad (8.5)$$

Wir können die Gleichung auch in logarithmischer Darstellung angeben mit

$$\frac{P_{RX}}{\text{dBm}} = \frac{P_{TX}}{\text{dBm}} + \frac{G_{TX}}{\text{dBi}} + \frac{G_{RX}}{\text{dBi}} - \underbrace{20 \lg \left( \frac{4\pi r}{\lambda_0} \right)}_{L_{F0}/\text{dB}} . \quad (8.6)$$

Der Term  $L_{F0}$  wird als *Grundübertragsdämpfung* (*Free space loss*) oder *isotrope Funkfeld-dämpfung* bezeichnet. Verwendet man, wie in Bild 8.7b gezeigt, als Antennen idealisierte isotrope Kugelstrahler ( $G = 1$ ), so kann man unter Verwendung der isotropen Sendeleistung  $P_{TXi} = G_{TX} P_{TX} = \text{EIRP}$  und der isotropen Empfangsleistung  $P_{RXi} = P_{RX} / G_{RX}$  schreiben

$$\frac{L_{F0}}{\text{dB}} = 10 \lg \left( \frac{P_{TXi}}{P_{RXi}} \right) = 10 \lg \left( \frac{P_{TX}}{P_{RX}} G_{TX} G_{RX} \right) = 20 \lg \left( \frac{4\pi r f}{c_0} \right) \quad (\text{Isotrope Funkfeld-dämpfung}). \quad (8.7)$$

Die isotrope Funkfelddämpfung ist unabhängig von den Antennengewinnen und beschreibt nur die Wellenausbreitung zwischen den Antennen. In logarithmischer Darstellung ergibt sich:

$$\frac{L_{F0}}{\text{dB}} = -147,56 + 20 \lg \left( \frac{r}{\text{m}} \right) + 20 \lg \left( \frac{f}{\text{Hz}} \right) = 32,4 + 20 \lg \left( \frac{r}{\text{km}} \right) + 20 \lg \left( \frac{f}{\text{MHz}} \right) . \quad (8.8)$$

Die Grundübertragungsdämpfung  $L_{F0}$  steigt also mit der Entfernung und der Frequenz an. Die Zunahme der Dämpfung beträgt jeweils 6 dB pro Oktave (Frequenzverdopplung) bzw. 20 dB pro Dekade (Frequenzverzehnfachung).

### Beispiel 8.2 Empfangsleistung bei Freiraumausbreitung

Zwei Antennen (mit  $G_{\text{TX}} = G_{\text{RX}} = 1,5$ ) befinden sich im Abstand  $r = 20 \text{ m}$  zueinander. Für eine Sendeleistung von  $P_{\text{TX}} = 50 \text{ mW}$  und eine Frequenz von  $f = 2,45 \text{ GHz}$  errechnen wir unter Verwendung von Formel (8.5) die Empfangsleistung  $P_{\text{RX}}$ .

$$P_{\text{RX}} = \left( \frac{\lambda_0}{4\pi r} \right)^2 G_{\text{RX}} G_{\text{TX}} P_{\text{TX}} = \left( \frac{c_0}{4\pi r f} \right)^2 G_{\text{RX}} G_{\text{TX}} P_{\text{TX}} = 26,7 \text{ nW} \hat{=} -45,73 \text{ dBm} \quad (8.9)$$

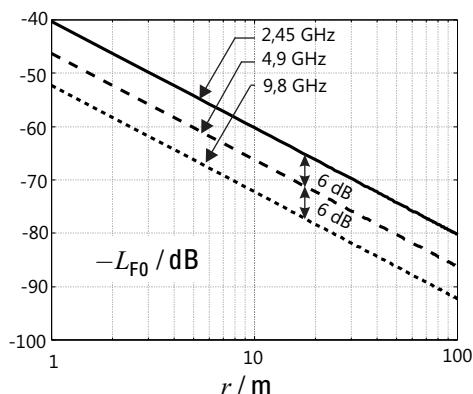
Alternativ können wir auch mit Gleichung (8.6) arbeiten, wenn wir alle Größen logarithmisch darstellen. Wir erhalten dann:

$$P_{\text{RX}} = P_{\text{TX}} + G_{\text{TX}} + G_{\text{RX}} - \underbrace{20 \lg \left( \frac{4\pi r}{\lambda_0} \right)}_{L_{F0}} \quad (8.10)$$

$$= 17 \text{ dBm} + 1,76 \text{ dBi} + 1,76 \text{ dBi} - 66,25 \text{ dB} = -45,73 \text{ dBm} . \quad (8.11)$$

Die Grundübertragungsdämpfung ist hier  $L_{F0} = 66,25 \text{ dB}$ . ■

Bild 8.8 zeigt den Verlauf der Freiraumdämpfung für Frequenzen von  $f_1 = 2,45 \text{ GHz}$ ,  $f_2 = 2f_1 = 4,9 \text{ GHz}$  und  $f_3 = 4f_1 = 9,8 \text{ GHz}$  und Abstände  $r$  zwischen 1 Meter und 100 Metern.



**Bild 8.8** Grundübertragungsdämpfungen für drei ausgewählte Frequenzen

Für die Darstellung haben wir die Freiraumdämpfung mit dem Wert  $-1$  multipliziert, so dass wir fallende Kurven erhalten und damit die geringer werdende Empfangsleistung besser anschaulich wird. Bei einem Abstand von  $r = 20$  m und einer Frequenz von  $f = 2,45$  GHz finden wir den Wert von ungefähr 66 dB aus Beispiel 8.2. Eine Verdoppelung der Frequenz bedeutet eine um 6 dB größere Funkfelddämpfung  $L_{F0}$ .

### 8.2.2 Dämpfung von Wellen in Luft

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir uns mit der Freiraumdämpfung beschäftigt. Diese beschreibt die entfernungsabhängige Amplitudenabnahme einer sich kugelförmig ausbreitenden Welle im freien Raum.

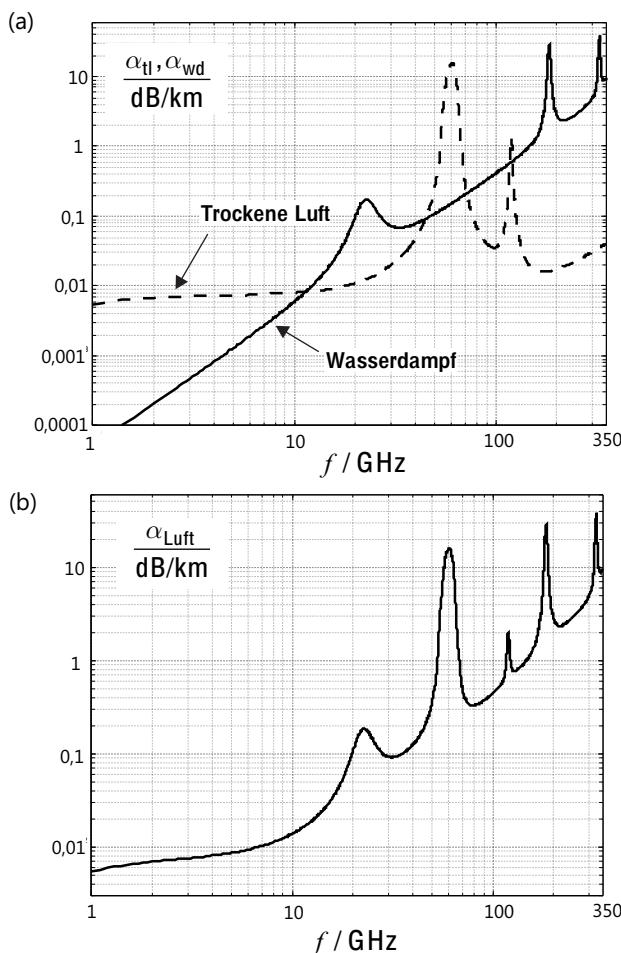


Bild 8.9 Dämpfung in (a) trockener Luft und Wasserdampf sowie in (b) normalfeuchter Luft

Elektromagnetische Wellen, die in einem Medium fortschreiten (z.B. Luft), erfahren eine *zusätzliche Dämpfung* aufgrund der *Absorption* in diesem Medium. Weiterhin spielen auch Wetterphänomene wie Regen, Neben und Schnee eine Rolle. Beispielhaft betrachten wir hier die Absorption elektromagnetischer Wellen in der Atmosphäre (Luft) [ITU676].

Die Dämpfung elektromagnetischer Wellen in *trockener Luft* basiert in erster Linie auf der Absorption durch *Sauerstoff*-Moleküle. Sauerstoff besitzt mehrere Resonanzen im Bereich von 60 GHz, die zu hoher Absorption elektromagnetischer Wellen führen. Die gestrichelt dargestellte Kurve in Bild 8.9a zeigt die Dämpfungskonstante  $\alpha_{\text{tl}}$  von trockener Luft. Die Kurven im Bild gelten für folgende Normalbedingungen auf Meereshöhe: Luftdruck 1013 hPa, Temperatur 15°C. Eine hohe Absorption (und damit eine begrenzte Funkreichweite) kann durchaus bei Anwendungen erwünscht sein. Bei Nahbereichsfunk lassen sich so Interferenzen mit benachbarten Nutzern vermeiden. Für Kommunikation über große Entfernungen hingegen ist eine geringe Dämpfung ausschlaggebend, und entsprechend müssen die Frequenzen gewählt werden.

*Wasserdampf* ist eine weitere wichtige Komponente, die bei der Absorption elektromagnetischer Wellen in Luft eine Rolle spielt. Die durchgezogen dargestellte Kurve in Bild 8.9a zeigt die Dämpfungskonstante  $\alpha_{\text{wd}}$  für Wasserdampf in Luft (Wasserdampf-Dichte 7,5 g/m<sup>3</sup>). Die Dämpfungskonstante steigt allgemein mit der Frequenz und zeigt Maxima bei bestimmten Resonanzfrequenzen. Die erste Resonanz liegt bei etwa 20 GHz.

Nehmen wir beide Absorptionsmechanismen zusammen, so erhalten wir die Dämpfungskonstante von normaler Luft  $\alpha_{\text{Luft}}$  in Bild 8.9b mit zwei charakteristischen Resonanzen im Frequenzbereich unter 100 GHz. Bei einer terrestrischen Verbindung können wir die zusätzliche atmosphärische Dämpfung  $L_{\text{Luft}}$  mit dem Abstand  $r$  zwischen den Antennen berechnen und erhalten

$$L_{\text{Luft}} = (\alpha_{\text{tl}} + \alpha_{\text{wd}})r = \alpha_{\text{Luft}}r \quad (\text{Zusätzlicher Pfadverlust}). \quad (8.12)$$

Für Frequenzen unter 10 GHz ist die atmosphärische Dämpfung normaler Luft gering und oft vernachlässigbar. Mit zunehmender Frequenz wird der Einfluss jedoch signifikant.

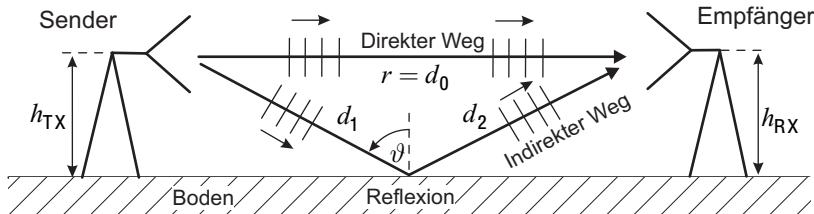
### 8.2.3 Ausbreitung über ebenem Grund (Zweiwegeausbreitung)

Die im vorherigen Abschnitt diskutierte Annahme einer Wellenausbreitung im freien Raum ist in der Praxis oft nicht erfüllt. Bei Funkverbindungen spielt unter anderem der Einfluss des Erdbodens oft eine bedeutende Rolle. Bild 8.10a zeigt, dass bei Hinzunahme eines Erdbodens nicht mehr nur der *direkte Pfad* ( $r = d_0$ ) zwischen den Antennen existiert, sondern dass es einen weiteren *indirekten Pfad* ( $r = d_1 + d_2$ ) durch die Reflexion am Erdboden gibt.

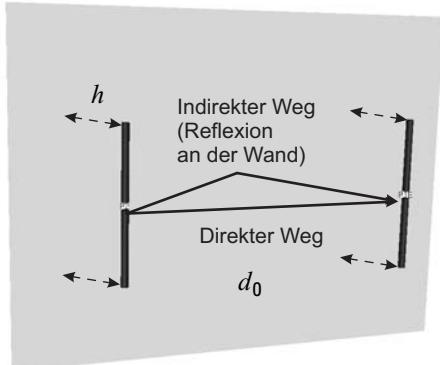
Dieser indirekte Weg ist länger als der direkte Pfad und die Wellen erfahren daher auf den unterschiedlichen Wegen eine abweichende Dämpfung und Phasendrehung. Je nach Weglängendifferenz kann es zu konstruktiver oder destruktiver Überlagerung (Interferenz) kommen und damit zu einer Überhöhung oder Abschwächung des Signals.

Bild 8.10b zeigt zwei Halbwelldipole im Abstand  $d_0$  zueinander. Die Dipole sind im Abstand  $h$  vor der Wand angeordnet. Im Folgenden variieren wir diesen Abstand  $h$  und beobachten das Transmissionsverhalten zwischen den Dipolen. In Bild 8.10c erkennen wir am Verlauf des Transmissionsfaktors mit ansteigendem Abstand zur Wand abwechselnd Bereiche mit

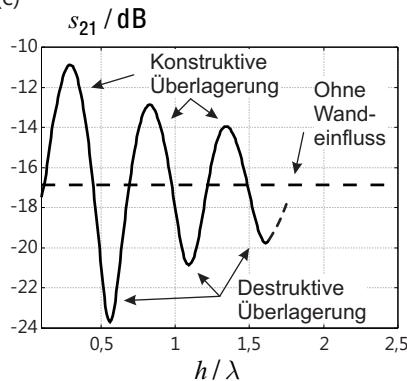
(a)



(b)



(c)



**Bild 8.10** (a) Zweiwegmodell mit Bodenreflexion (Prinzip), (b) zwei Dipole vor einer metallischen Wand, (c) Transmissionsfaktor zeigt Bereiche konstruktiver und destruktiver Interferenz durch Ausbreitung von Wellen auf direktem und indirektem Weg

konstruktiver und destruktiver Überlagerung. Mit steigendem Abstand der Dipole zur Wand wird der Wandeinfluss immer geringer und konvergiert gegen den Transmissionsfaktor, den wir im freien Raum erhalten würden (gestrichelte Linie).

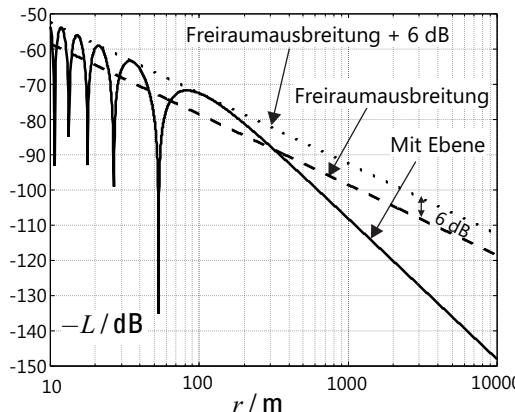
Um zu einer praxistauglichen und einfachen mathematischen Beschreibung zu gelangen, schauen wir uns einen in der Praxis häufig auftauchenden Sonderfall an. Der Abstand zwischen den Antennen  $r = d_0$  soll deutlich größer sein als die Antennenhöhen ( $r \gg h_{\text{TX}}, h_{\text{RX}}$ ) [Geng98]. Wir wollen zunächst von isotrop strahlenden Antennen ausgehen.

Der in Bild 8.10a eingezeichnete Einfallsinkel  $\vartheta$  wird für diesen Fall gegen den rechten Winkel konvergieren. Der Reflexionsfaktor des Bodens konvergiert für einen sehr flachen Einfall gegen den Wert  $r_B \approx -1$  [Saun07]. Näherungsweise kann davon ausgegangen werden, dass wegen der ungefähr gleich langen Wege ( $d_1 + d_2 \approx d_0$ ) des direkten und indirekten Ausbreitungspfades die Amplituden der am Empfänger eintreffenden Wellenanteile ungefähr gleich groß sind. Die Phasendifferenzen müssen jedoch genauer betrachtet werden. Als Ergebnis erhalten wir dann schließlich für die isotrope Funkfelddämpfung bei *Zweiwegeausbreitung* (PEL: *Plane earth loss*) [Saun07]:

$$\frac{1}{L_{\text{PEL}}} = \frac{P_{\text{RX}}}{P_{\text{TX}}} = 2 \left( \frac{\lambda_0}{4\pi r} \right)^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{4\pi h_{\text{TX}} h_{\text{RX}}}{\lambda_0 r} \right) \right] \quad \begin{array}{l} \text{(Zweiwegeausbreitung,} \\ \text{für } r \gg h_{\text{TX}}, h_{\text{RX}}. \end{array} \quad (8.13)$$

### Beispiel 8.3 Zweiwegeausbreitung

Wir betrachten als Beispiel den Fall gleicher Antennenhöhen ( $h_{\text{TX}} = h_{\text{RX}} = 2 \text{ m}$ ) bei einer Frequenz von  $f = 2 \text{ GHz}$ .



**Bild 8.11** Funkfelddämpfung bei Freiraumbedingungen und bei Anwesenheit einer ebenen Fläche ( $f = 2 \text{ GHz}$ ,  $h_{\text{TX}} = h_{\text{RX}} = 2 \text{ m}$ ) (Beispiel 8.3)

Bild 8.11 zeigt den Verlauf der Funkfelddämpfung zwischen 10 m und 10 km unter den zuvor genannten Randbedingungen. Im Bereich bis ca. 100 m ergeben sich Minima und Maxima aufgrund konstruktiver und destruktiver Überlagerung. Die Maxima liegen 6 dB oberhalb der Freiraumausbreitung, die Minima sind theoretisch unendlich tief. Für Entfernungen größer als 100 m erhalten wir einen monoton fallenden Verlauf. Der Verlauf nähert sich asymptotisch der Funktion:

$$\frac{1}{L_{\text{PEL}}} = \frac{P_{\text{RX}}}{P_{\text{TX}}} \approx \frac{h_{\text{TX}}^2 h_{\text{RX}}^2}{r^4} \quad (\text{für } r > d_{\text{break}}). \quad (8.14)$$

Die Entfernung  $d_{\text{break}}$  (*Break point*), die die Grenze zum monoton fallenden Bereich markiert, ist nach [Moli11]

$$d_{\text{break}} = \frac{4 h_{\text{TX}} h_{\text{RX}}}{\lambda}, \quad (8.15)$$

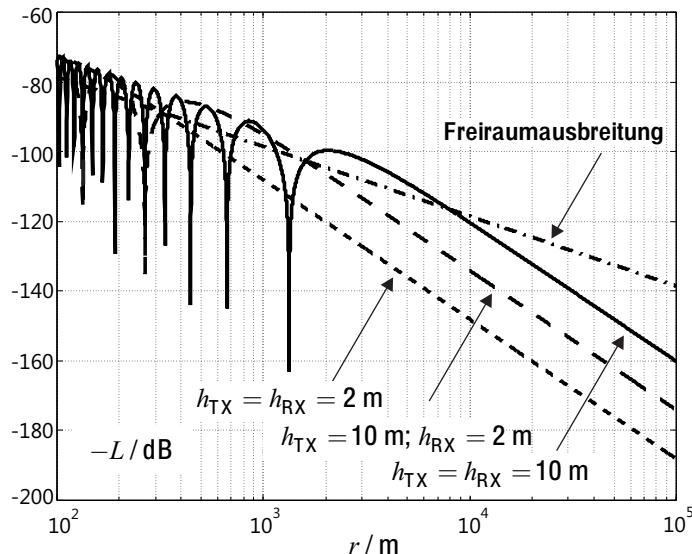
hängt also von den Antennenhöhen und der Wellenlänge ab. ■

Für große Abstände ( $d > d_{\text{break}}$ ) ergibt sich also der in Bild 8.11 erkennbare Abfall von 40 dB/Dekade ( $\sim 1/r^4$ ). Dieser Abfall ist stärker als der Abfall für Freiraumausbreitung von 20 dB/Dekade ( $\sim 1/r^2$ ).

In Makrozellen von zellulären Mobilfunksystemen mit typischen Radien zwischen 2 km und 30 km finden wir in der Regel einen Pfadverlust der mit dem Faktor  $r^n$  ansteigt (bzw. eine Empfangsleistung, die mit  $1/r^n$  abfällt) wobei der Exponent  $n$  in der Größenordnung von 4 liegt ( $n \approx 4$ ). Der Exponent  $n$  wird auch als *Pfadverlustexponent* bezeichnet.

### Beispiel 8.4 Einfluss der Antennenhöhe bei der Zweiwegeausbreitung

Um den Einfluss der Antennenhöhe zu verdeutlichen, variieren wir die Höhe von Sende- und Empfangsanenne ( $f = 2 \text{ GHz}$ ). Bild 8.12 zeigt zunächst noch einmal den Verlauf für identische Höhen von Sender und Empfänger von  $h_{\text{TX}} = h_{\text{RX}} = 2 \text{ m}$ .



**Bild 8.12** Einfluss der Antennenhöhe auf die Funkfelddämpfung bei der Zweiwegeausbreitung

Erhöhen wir die Position der Sendeantenne ( $h_{TX} = 10 \text{ m}, h_{RX} = 2 \text{ m}$ ), so erreichen wir bei größeren Entfermungen einen höheren Empfangsspeigel (um ca. 14 dB) und damit eine höhere Reichweite. Der Effekt lässt sich noch steigern, wenn wir auch die Position der Empfangsantenne erhöhen ( $h_{TX} = h_{RX} = 10 \text{ m}$ ). ■

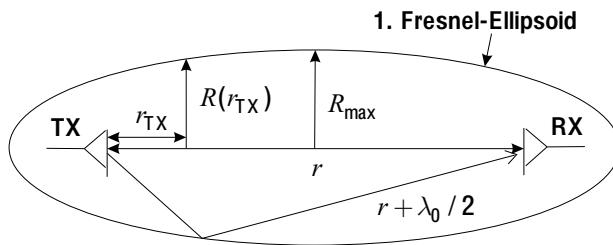
## 8.2.4 Richtfunkstrecken

Bei Richtfunkstrecken zwischen entfernten Standorten strebt man Freiraumausbreitungsbedingungen an. Durch erhöhte Standorte der Antennen und durch Verwendung von Antennen mit einer hohen Richtwirkung vermindert man zunächst den Einfluss der Bodenreflexion. Weiterhin sollte der Raum zwischen den Antennen frei von Hindernissen sein. Eine einfache, direkte Sichtverbindung reicht hierfür jedoch nicht aus, da sich die elektromagnetischen Felder als Welle ausbreiten und somit an Kanten gebeugt werden.

Anhand von analytischen Modellen (*Knife-Edge*-Beugung, [Geng98]) kann man zeigen, dass die Übertragung spürbar beeinflusst wird, falls Objekte in das erste Fresnel-Ellipsoid hineinragen. Das erste Fresnel-Ellipsoid sollte also frei von Hindernissen sein. Zur Bestimmung der Oberfläche des ersten Fresnel-Ellipsoide betrachten wir Signalwege, die um die halbe Wellenlänge größer sind als der direkte Antennenabstand  $r$  (Bild 8.13).

Für den Fall, dass der Abstand  $r$  zwischen den Antennen deutlich größer ist als der Radius  $R_{\max}$  des Ellipsoide, kann mit folgender Näherung gerechnet werden [Geng98] (Bild 8.13).

$$R(r_{TX}) = \sqrt{\lambda_0 \frac{r_{TX}(r - r_{TX})}{r}} \quad (8.16)$$

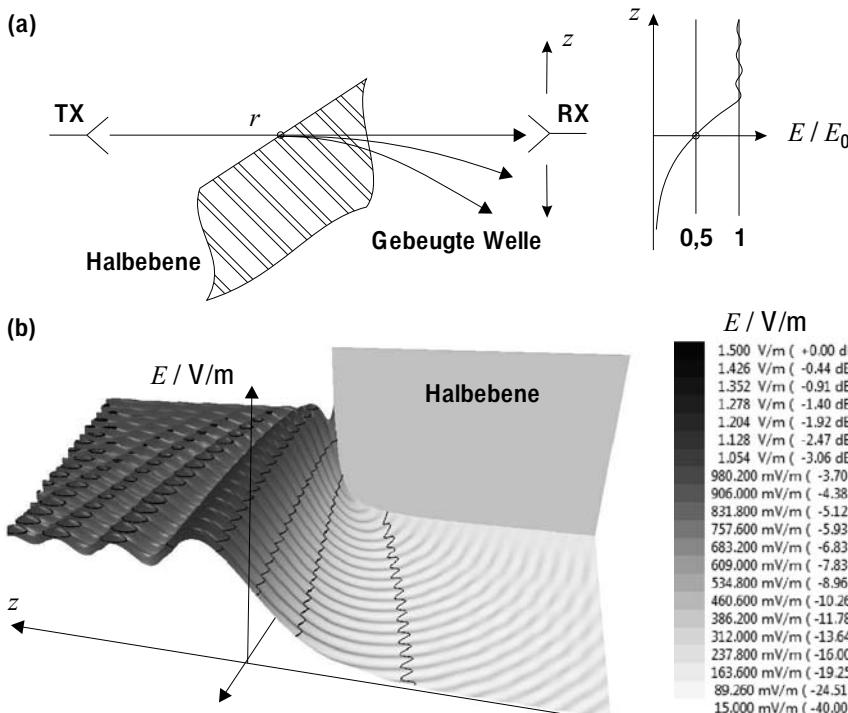


**Bild 8.13** Erstes Fresnel-Ellipsoid

Der maximale Radius ergibt sich in der Mitte zwischen den Antennen mit

$$R_{\max} = \sqrt{\lambda_0 \frac{r}{4}} . \quad (8.17)$$

Die analytischen Überlegungen zur Beeinflussung der Wellenausbreitung durch Objekte im Fresnel-Ellipsoid gehen von einer senkrechten Halbebene aus, die in das Ellipsoid hineinragt. Falls die Halbebene das Ellipsoid zur Hälfte abdeckt, ist die Empfangsfeldstärke auf den halben Wert gefallen. Die Empfangsleistung beträgt dann nur noch ein Viertel des Wertes der Freiraumübertragung (Bild 8.14). Ist die Halbebene außerhalb des Fresnel-Ellipsoide, so herrschen näherungsweise Freiraumbedingungen.



**Bild 8.14** Zur Erläuterung der Kantenbeugung (Knife-Edge-Modell): (a) Geometrie und (b) Wellenfeld hinter der Halbebene

### Beispiel 8.5 Fresnel-Ellipsoid

Zwei Antennen einer Richtfunkstrecke ( $f = 6 \text{ GHz}$ ) befinden sich im Abstand von  $r = 20 \text{ km}$  auf Masten mit einer Höhe  $h$ . In der Mitte der Strecke liegt ein ausgedehnter Gebäudekomplex der Höhe  $h_G = 10 \text{ m}$ . Wie hoch müssen die Masten mindestens sein, wenn die Gebäude nicht in das erste Fresnel-Ellipsoid hineinragen sollen?

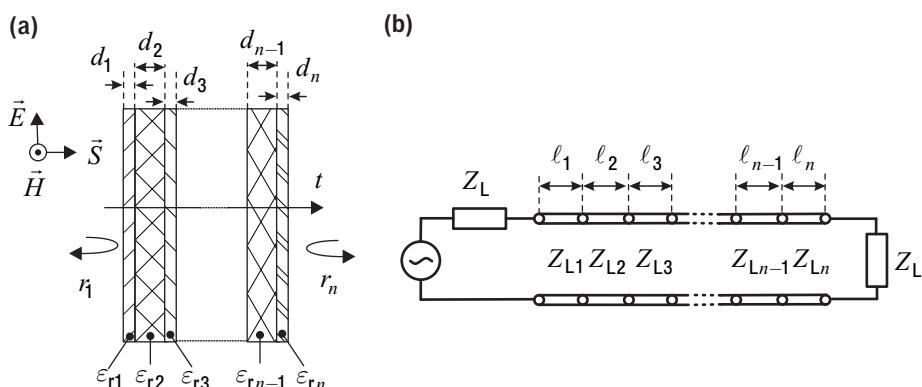
Da sich die Gebäude in der Mitte der Richtfunkverbindung befinden, kann direkt Gleichung (8.17) angewendet werden, um den Radius des Fresnel-Ellipsoids an der interessierenden Stelle zu berechnen.

$$R_{\max} = \sqrt{\lambda_0 \frac{r}{4}} = \sqrt{\frac{c_0}{f} \cdot \frac{r}{4}} = 15,8 \text{ m} \quad (8.18)$$

Addieren wir die Gebäudehöhe  $h_G$  zum Wert  $R_{\max}$ , so erhalten wir für die minimale Masthöhe  $h_{\min} = h_G + R_{\max} \approx 25,8 \text{ m}$ . ■

### 8.2.5 Geschichtete Medien

Im Innern von Gebäuden kommt es zur Wellenausbreitung durch Wände und Decken. Diese sind in der Regel in erster Näherung geschichtet aufgebaut. Um grundlegende Erkenntnisse für die Wellenausbreitung durch Wände und Decken zu gewinnen, wollen wir daher als einfaches Modell die Wechselwirkung zwischen einer homogenen ebenen Welle und einem geschichteten Medium betrachten. Besonders einfach wird die Berechnung, wenn ein senkrechter Einfall angenommen wird (Bild 8.15a).



**Bild 8.15** (a) Senkrechter Einfall einer homogenen ebenen Welle auf ein geschichtetes Medium, (b) Berechnung mit Leitungsabschnitten

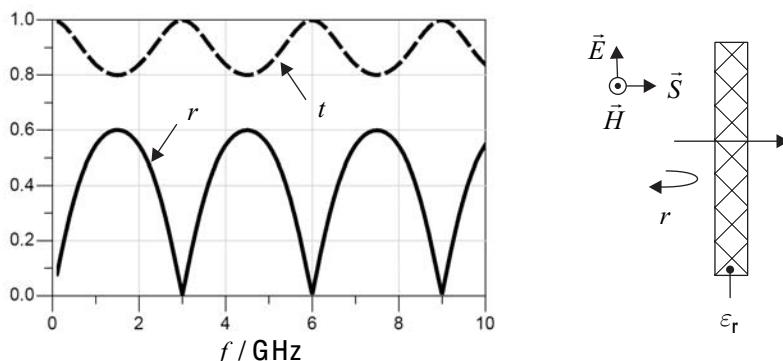
Im Fall des senkrechten Einfalls handelt es sich um ein *eindimensionales* Problem, welches mit Hilfe der Leitungstheorie behandelt werden kann, da sich auch hier TEM-Wellen eindimensional ausbreiten. Bild 8.15b zeigt ein Ersatzmodell mit Leitungsstücken für die unterschiedlichen Schichten der Wand. Die Leitungslängen entsprechen dabei den Wanddicken  $d_i$  und die Füllmaterialien der Leitungen den Materialien der Wand mit den entsprechenden Werten für die

relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_{ri}$  und den Verlustfaktor  $\tan\delta_{ei}$ . Die Quell- und Abschlusswiderstände sowie die Leitungswellenwiderstände der Leitung ohne Materialfüllung müssen einheitlich sein ( $Z_L$ ). Die Leitungswellenwiderstände mit Füllmaterial sind dann unterschiedlich und besitzen die Werte  $Z_{Li} = Z_L / \sqrt{\epsilon_{ri}}$ .

Bei der Simulation mit einem Schaltungssimulator können zum Beispiel abschnittsweise Koaxialleitungen gewählt werden, deren Außenradius dem 2,3-Fachen des Innenradius entspricht. Damit haben die Leitungen im leeren (vakuumgefüllten) Zustand einen Leitungswellenwiderstand von  $50\Omega$ . Quelle und Last können dann durch die üblichen  $50\Omega$ -Tore dargestellt werden.

### Beispiel 8.6 Wellenausbreitung durch eine einfache dielektrische Schicht

Eine homogene ebene Welle fällt senkrecht auf eine verlustlose dielektrische Schicht ( $\epsilon_r = 4$ ,  $\tan\delta_e = 0$ ) der Dicke  $d = 25\text{ mm}$ . Die mit Hilfe eines Schaltungssimulators berechneten Transmissions- und Reflexionsfaktoren im Frequenzbereich von 0,1 bis 10 GHz sind in Bild 8.16 dargestellt.



**Bild 8.16** Reflexions- und Transmissionsfaktor für eine einschichtige Wand

Wir erkennen ein frequenzabhängiges Verhalten mit Dämpfungsminima und -maxima. Bei Vielfachen von 3 GHz erhalten wir stets volle Transmission ( $t = 1$ ) bei verschwindendem Reflexionsfaktor ( $r = 0$ ). Bei einer Frequenz von 3 GHz beträgt die Wellenlänge in der Schicht:

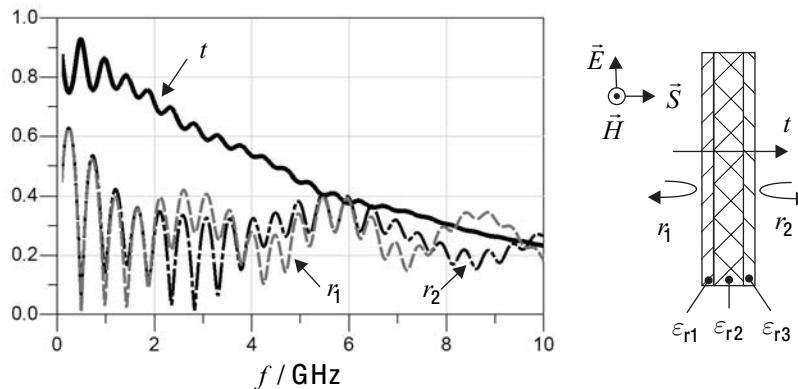
$$\lambda(3\text{ GHz}) = \frac{c_0}{f\sqrt{\epsilon_r}} = 50\text{ mm} \quad . \quad (8.19)$$

Die Wandstärke  $d$  entspricht hier also der halben Wellenlänge  $d = 25\text{ mm} = \lambda/2$ . In Abschnitt 3.1.9.2 hatten wir bei  $\lambda/2$ -langen Leitungen von der *Autotransformation* gesprochen. Die Eingangsimpedanz entspricht dort – unabhängig vom Leitungswellenwiderstand – gerade eben der Abschlussimpedanz. Im Falle des Einschichtenproblems mit einer Wand aus verlustlosem Material bedeutet dies, dass die Wand für Frequenzen, bei denen die Wanddicke gerade eben ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist, transparent erscheint. ■

### Beispiel 8.7 Wellenausbreitung durch eine dreifach geschichtete Wand

Wir nehmen nun ein realistischeres Wandmodell mit drei verlustbehafteten Schichten. Für die drei Schichten gelte:

- Erste Schicht:  $d_1 = 30 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_{r1} = 3$ ,  $\tan \delta_{\epsilon1} = 0,01$
- Zweite Schicht:  $d_2 = 115 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_{r2} = 4,5$ ,  $\tan \delta_{\epsilon2} = 0,05$
- Dritte Schicht:  $d_3 = 15 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_{r3} = 3$ ,  $\tan \delta_{\epsilon3} = 0,01$



**Bild 8.17** Reflexions- und Transmissionsfaktor für eine dreischichtige Wand

Das Ergebnis der Simulation sehen wir in Bild 8.17. Es zeigt sich ein insgesamt komplexes frequenzabhängiges Verhalten mit Resonanzen bei niedrigen Frequenzen und einer zunehmenden Dämpfung bei hohen Frequenzen. ■

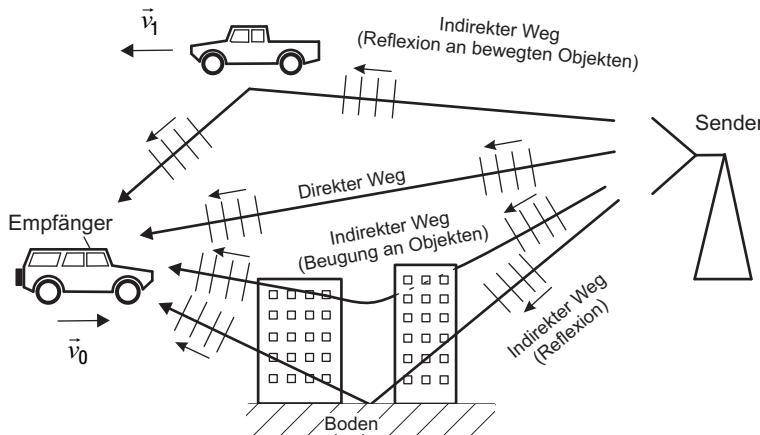
## ■ 8.3 Komplexe Umgebungen

Die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten einfachen Ausbreitungsmodelle berücksichtigen isolierte physikalische Effekte, wie die eindimensionale Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle durch ein geschichtetes Medium, die Zweiwegeausbreitung oder die Dämpfung in Luft. In einem praktischen Ausbreitungsszenario (z.B. in Makrozellen von zellulären Mobilfunksystemen in städtischen Umgebungen oder die Funkversorgung innerhalb von Gebäuden) werden verfeinerte Modelle benötigt, die dem komplexen Wellenausbreitungsgeschehen Rechnung tragen.

### 8.3.1 Mehrwegeausbreitung

Bild 8.18 zeigt einen Sender und einen Empfänger in einer komplexen Umgebung. Die elektromagnetischen Wellen breiten sich hier auf einer Vielzahl von Wegen vom Sender zum Emp-

fänger aus (Mehrwegeausbreitung). Neben der Ausbreitung auf dem direkten Weg<sup>1</sup> kommt es zu Reflexionen an ruhenden und bewegten Objekten. Weiterhin werden Wellen an Objekten gebrochen. Bewegen sich nun auch noch Sender oder Empfänger, so entsteht ein orts- und zeitabhängiger Übertragungskanal, bei dem sich die Empfangseigenschaften sehr rasch ändern können.



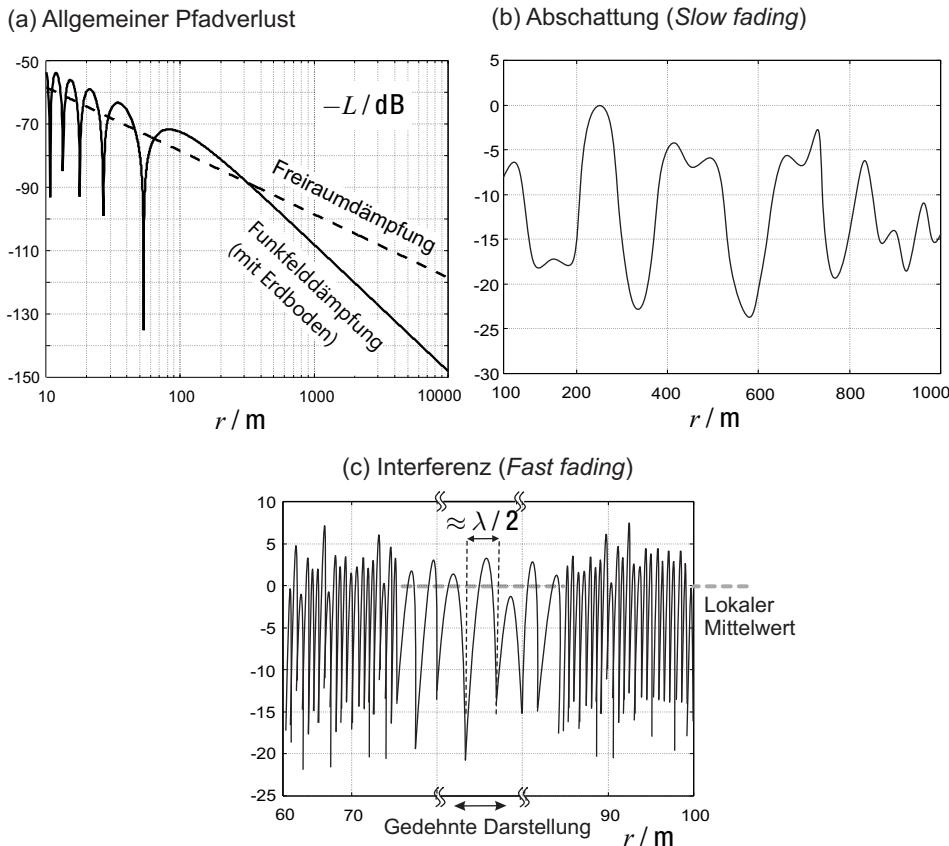
**Bild 8.18** Mehrwegeausbreitung zwischen Sender und Empfänger in einer komplexen Umgebung

Wir betrachten die Funkfelddämpfung zwischen einem Sender (zum Beispiel einer Mobilfunkbasisstation) und einem Empfänger in einer heterogenen Umgebung. Der Empfänger entferne sich vom Sender (Abstand  $r$ ). Bei der Betrachtung der Funkfelddämpfung in einer komplexen Umgebung können drei Anteile unterschieden werden:

- Zunächst ist da der *allgemeine Pfadverlust* nach dem Freiraummodell oder der Zweiwegeausbreitung (Bild 8.19a).
- Durch große Objekte (Gebäude, Geländeerhöhungen, Bewaldung) kommt es zu einer zusätzlichen, *langsam*en Variation der Empfangsleistung. Dieser Effekt wird als Abschattung (*Shadowing, Slow fading*) bezeichnet (Bild 8.19b).
- Wellen, die sich auf unterschiedlichen Wegen ausbreiten, treffen aufgrund unterschiedlicher Weglängen mit unterschiedlichen Phasenlagen ein. Bei bewegtem Sender oder Empfänger oder sich zeitlich ändernder Umgebung (z.B. bewegte Objekte in der Umgebung) kommt es zu zeitlich und räumlich schwankenden Empfangspegeln aufgrund von konstruktiven und destruktiven Überlagerungen. Dieses Phänomen der schwankenden Empfangsleistung wird als *Fast fading* (oder *Multipath fading*) bezeichnet (Bild 8.19c). In Abständen von halben Wellenlängen ist dabei mit starken Einbrüchen des Empfangspegels zu rechnen.

Zur Abschätzung der Reichweite realer Funksysteme reichen die in Abschnitt 8.2 vorgestellten einfachen Wellenausbreitungsmodelle oft nicht aus. In komplexen Umgebungen werden daher *empirische, semi-empirische* oder *physikalische* Modelle eingesetzt [Geng98] [Saun07].

<sup>1</sup> Falls eine Sichtverbindung vorliegt, spricht man auch von einer LOS-Verbindung (*LOS, Line Of Sight*). Die Ausbreitung auf dem direkten Pfad kann auch entfallen. Bei Funkverbindungen ohne Sichtverbindung nennt man dies NLOS-Verbindung (*None Line Of Sight*).



**Bild 8.19** Beiträge zur Funkfelddämpfung: (a) allgemeiner Pfadverlust aufgrund der Entfernung, (b) Abschattung durch große Objekte, (c) Interferenz durch Mehrwegeausbreitung

**Empirische Modelle** basieren auf ausgedehnten Messreihen, die in bestimmten Umgebungs-situationen aufgezeichnet wurden. Aus diesen Messwerten werden mit statistischen Me-thoden Modelle entwickelt, die eine Vorhersage von mittleren Feldstärkewerten oder Leis-tungspiegeln ermöglichen. Im Bereich der Mobilfunkfrequenzen unter 2 GHz sind historisch das Okumura-Hata-Modell und seine Erweiterung, das COST-Hata-Modell, von Bedeutung. Für unterschiedliche Geländetypen (großstädtisch, kleinstädtisch, ländlich) existieren Nä-herungsformeln, die als Grundlage für Planungen verwendet werden können.

**Semi-empirische Modelle** Durch Hinzunahme von physikalischen Zusammenhängen aus den einfachen Ansätzen in Abschnitt 8.2 (Freiraumausbreitung, Zweistrahlttheorie, Kanten-beugung), können die Modelle verfeinert werden, so dass sich in Ansätzen z.B. auch Beugungseffekte infolge von Geländeerhebungen und Gebäuden berücksichtigen lassen. Die so erweiterten Modelle werden als semi-empirisch bezeichnet. Semi-empirische Modelle stellen also eine Kombination von empirischen mit einfachen physikalischen Modellen dar und sind bei der Planung von Mobilfunksystemen weit verbreitet. Ein gängiges Modell für Makrozellen ist das COST231/Walfish-Ikegami Modell, welches auf Beugungsmodellen und empirischen Korrekturfaktoren basiert [COST231] [Saun07].

**Physikalische Modelle** beschreiben das Funkfeld auf Basis einer detaillierten Analyse der Wellenausbreitungssphänomene. Bei Vorgabe einer Szenerie (Antennenpositionen, Geländeeverlauf, Bebauung) lassen sich die relevanten Ausbreitungspfade ermitteln und auswerten. Für größere Distanzen und bei Objekten, die im Vergleich zur Wellenlänge groß sind, kann auf strahlenoptische Verfahren (*Ray tracing*, Strahlverfolgung) und die verallgemeinerte Beugungstheorie (UTD, *Uniform Theory of Diffraction*) zurückgegriffen werden. Das Einbeziehen realer Geländedaten erlaubt gegenüber den empirischen und semi-empirischen Modellen eine deutliche Steigerung der Genauigkeit bei der Feldstärkeprädiktion. Der Preis, den man für die gesteigerte Genauigkeit bezahlen muss, liegt in dem hohen numerischen Aufwand bei der Simulation der Wellenausbreitungssphänomene.

Falls das Modell nur Aussagen in einem kleinen räumlichen Bereich machen soll, zum Beispiel im Inneren eines Gebäudes (so etwa zwischen zwei benachbarten Räumen oder zwischen benachbarten Geschossen), so kommen gegebenenfalls auch EM-Simulatoren in Betracht, wie wir sie in Abschnitt 6.13.2 kennengelernt haben. Die hier angestrebte Lösung der Maxwellschen Gleichungen bedeutet allerdings einen deutlich erhöhten numerischen Aufwand. Dafür erwarten wir in diesem Fall allerdings auch die akkuratesten Ergebnisse.

### 8.3.2 Clutter Factor-Modell

Das Zweiwegemodell in Abschnitt 8.2.3 ist für die Praxis der Funknetzplanung oft ein zu einfaches Modell, da es die Einflüsse morphologischer Strukturen (Gebäude, Vegetation etc.) nicht berücksichtigt. Es ist offensichtlich, dass elektromagnetische Wellen gestreut und gedämpft werden, wenn sie durch dichte Vegetation fortschreiten. In städtischen Umgebungen stellen zudem Gebäude Hindernisse dar, die den direkten Ausbreitungspfad blockieren und dafür sorgen, dass nun eine über die Gebäudekante gebeugte Welle mit reduzierter Leistungsdichte den dominanten Signalanteil am Empfängerort liefert.

Der *zusätzliche Pfadverlust*  $L_{\text{Clutter}}$  durch die unterschiedliche Art der Flächennutzung kann durch die Einbeziehung von Flächennutzungsdatenbanken (*Clutter database*, *Land-use database*) und der Zuweisung spezifischer Dämpfungswerte bei der Funknetzplanung berücksichtigt werden. Typische Landnutzungs-(*Clutter*-)kategorien sind: Städtische Umgebung, Industriegebiet, Wald, Landwirtschaft etc. [ITU452-14]. Flächennutzungsdatenbanken sind im Allgemeinen im Pixel-(Raster-)Format verfügbar mit einer Auflösung von – beispielsweise – 30 m × 30 m.

Obgleich die Flächennutzungsklassifikation zunächst sehr grob erscheinen mag, kann die Qualität der Pfadverlustvorhersage doch deutlich gesteigert werden, wenn zuverlässige Dämpfungswerte (in dB) für die unterschiedlichen Nutzungsarten verfügbar sind. Der Gesamtpfadverlust  $L_{\text{Gesamt}}$  drückt sich dann aus durch Addition eines allgemeinen Pfadverlustes – zum Beispiel auf Basis des Zweiwegemodells  $L_{\text{PEL}}$  – und eines Pfadverlustes  $L_{\text{Clutter}}$ , der die Umgebung des mobilen Nutzers am Empfangsort berücksichtigt.

$$L_{\text{Gesamt}} = L_{\text{PEL}} + L_{\text{Clutter}} \quad (8.20)$$

Realistische Dämpfungswerte für unterschiedliche Flächennutzungsklassen können zum Beispiel durch Referenzmessungen in geeigneten Umgebungen ermittelt werden [Ande03]. Alternativ können für typische Flächennutzungsklassen auch mathematische Modelle aus der Literatur herangezogen werden [ITU452-14].

### 8.3.3 Okumura-Hata-Model

Das Okumura-Hata-Modell ist ein empirisches Modell, welches auf Messungen basiert, die in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts im Raum Tokio durchgeführt wurden. Die Messergebnisse wurden in mathematische Modelle umgesetzt, um Näherungen für den zu erwartenden Pfadverlust in unterschiedlichen Umgebungen angeben zu können [Hata80] [ITU529] [Okum68] [Saun07]. Das Okumura-Hata-Modell unterscheidet zwischen offenem Gelände (*Open area*) und unterschiedlichen Graden an städtischer Bebauung (*Suburban area* und *Urban area*).

Die Näherungsformeln für den Pfadverlust gelten für die folgenden Randbedingungen:

- Frequenzbereich:  $150 \text{ MHz} \leq f \leq 1500 \text{ MHz}$ ,
- Abstand  $r$  zwischen Sender und Empfänger:  $r \geq 1 \text{ km}$ ,
- Höhe der Basisstation:  $30 \text{ m} \leq h_b \leq 200 \text{ m}$  und
- Höhe der Mobilstation:  $1 \text{ m} \leq h_m \leq 10 \text{ m}$ .

Der Pfadverlust  $L$  (in dB) hängt von der Flächennutzung ab und kann durch folgende Gleichungen abgeschätzt werden:

$$L/\text{dB} = A + B \lg(r) - E \quad (\text{Urban area}) \quad (8.21)$$

$$L/\text{dB} = A + B \lg(r) - C \quad (\text{Suburban area}) \quad (8.22)$$

$$L/\text{dB} = A + B \lg(r) - D \quad (\text{Open area}), \quad (8.23)$$

wobei  $r$  der Abstand zwischen Sender und Empfänger in der Einheit km ist.

Für die Koeffizienten  $A, B, C, D$  und  $E$  gilt

$$A = 69,55 + 26,16 \lg(f) - 13,82 \lg(h_b) \quad (8.24)$$

$$B = 44,9 - 6,55 \lg(h_b) \quad (8.25)$$

$$C = 2(\lg(f/28))^2 + 5,4 \quad (8.26)$$

$$D = 4,78(\lg(f))^2 - 18,33 \lg(f) + 40,94 \quad (8.27)$$

$$E = (1,1 \lg(f) - 0,7) h_m - (1,56 \lg(f) - 0,8) \quad (\text{für kleine und mittelgroße Städte}) \quad (8.28)$$

$$E = 8,29(\lg(1,54 h_m))^2 - 1,1 \quad (\text{für Großstädte bei } f < 300 \text{ MHz}) \quad (8.29)$$

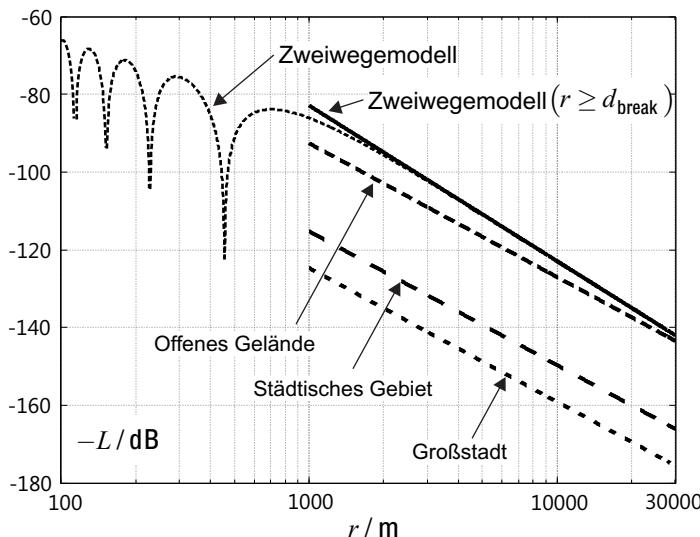
$$E = 3,2(\lg(11,75 h_m))^2 - 4,97 \quad (\text{für Großstädte bei } f \geq 300 \text{ MHz}) \quad (8.30)$$

mit der Betriebsfrequenz  $f$  in der Einheit MHz, der Höhe der Basisstation  $h_b$  in der Einheit Meter (m) und der Höhe des mobilen Teilnehmers  $h_m$  ebenfalls in Metern (m).

Das Okumura-Hata-Modell ist begrenzt auf Frequenzen unterhalb von  $f = 1,5 \text{ GHz}$ . Eine Erweiterung auf Frequenzen bis  $2 \text{ GHz}$  wurde in einem COST (*European Cooperation in Science and Technology*)-Projekt entwickelt [COST231].

#### Beispiel 8.8 Abschätzung des Pfadverlustes mit dem Okumura-Hata-Modell

Als Anwendungsbeispiel für das Okumura-Hata-Modell betrachten wir eine Basisstation mit einer Höhe von  $h_b = 40 \text{ m}$  und einer Mobilstation von  $h_m = 1,8 \text{ m}$ . Die Betriebsfrequenz sei  $f = 950 \text{ MHz}$ . Wir betrachten zunächst den Pfadverlust über offenem Gelände (*Open area*) für Entfernung zwischen  $r = 1 \text{ km}$  und  $r = 30 \text{ km}$ .



**Bild 8.20** Pfadverlust nach dem Okumura-Hata-Modell für unterschiedliche Flächennutzung im Vergleich zum Zweiwegemodell für eine Frequenz von  $f = 950$  MHz und Antennenhöhen von  $h_b = 40$  m und  $h_m = 1,8$  m

Die Ergebnisse vergleichen wir mit dem Zweiwegemodell aus Abschnitt 8.2.3. Weiterhin betrachten wir die vereinfachte Pfadverlustformel für größere Distanzen (Gleichung (8.14),  $r > d_{\text{break}}$ ). Mit Gleichung (8.15) berechnen wir eine *Break point*-Entfernung von  $d_{\text{break}} = 1,01$  km, so dass diese Formel in unserem Beispiel anwendbar sein sollte.

Das Okumura-Hata-Modell für offenes Gelände prognostiziert einen etwas höheren Wert für den Pfadverlust als das Zweiwegemodell (Bild 8.20). Der Pfadverlustexponent bei der Zweiwegeausbreitung beträgt  $n = 4$  (Abschnitt 8.2.3). Das Okumura-Hata-Modell liefert einen Pfadverlustexponenten von  $n = B/10 = 3,44$  und damit einen flacheren Verlauf als das Zweiwegemodell.

In städtischem Gebiet – und erst recht in Großstädten – finden wir erhöhte Werte für den Pfadverlust aufgrund von Abschattungen durch dichte Bebauung. ■

### 8.3.4 Physikalische Modelle und numerische Feldberechnung

Einfache physikalische Ausbreitungsmodelle können ohne hohen Rechenaufwand *analytisch* ausgewertet werden, wie bereits in Abschnitt 8.2 anhand folgender Szenarien gezeigt:

- Freiraumdämpfung (Abschnitt 8.2.1)
- Zusatzdämpfung durch atmosphärischen Einflüsse (Abschnitt 8.2.2)
- Zweiwegemodell (Abschnitt 8.2.3)
- Beugung an einer Halbebene (Abschnitt 8.2.4)
- Durchgangsdämpfung geschichteter Medien (Abschnitt 8.2.5)

In Makrozellen von Mobilfunksystemen ist die Beugung über eine größere Anzahl von Gebäuden sowie über Geländeerhebungen von besonderem Interesse. Folglich wurden eine Reihe von Modellen entwickelt, die diese Mehrfachbeugung berücksichtigen (*Multiple knife-edge diffraction, Rooftop diffraction*). Zu diesen Modellen finden sich weiterführende Beschreibungen in der Fachliteratur, z.B. [Saun07].

Elektromagnetische Wellenausbreitung wird, wie wir aus Kapitel 2 wissen, durch die Maxwell-schen Gleichungen beschrieben. Bei Makrozellen ist es praktisch unmöglich numerische Verfahren zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen direkt anzuwenden. EM Simulationsverfahren (Abschnitt 6.13.2) benötigen eine Segmentierung des betrachteten Lösungsvolumens in Zellen mit einer Auflösung unterhalb einer Wellenlänge. Das resultierende mathematische Problem würde so viele Unbekannte besitzen, dass es praktisch nicht lösbar wäre. Weiterhin würde ein direkter Einsatz von EM Simulatoren eine genaue Kenntnis der Geometrie (Gebäude, Bäume, Fahrzeuge usw.) und Materialparameter erfordern. In der Praxis sind die Daten in der Regel nicht in ausreichender Detaillierung für ein größeres Gebiet verfügbar.

Die zuvor diskutierten empirischen und semi-empirischen Modelle liefern bei moderatem Aufwand realitätsnahe Abschätzungen und werden daher bevorzugt bei Makrozellenplanungen eingesetzt. Voraussetzung für die Anwendbarkeit sind geeignete Flächennutzungsdaten und eine sorgfältige Kalibration und Validierung des Modells durch eigene Feldstärkemessungen [Grah07].

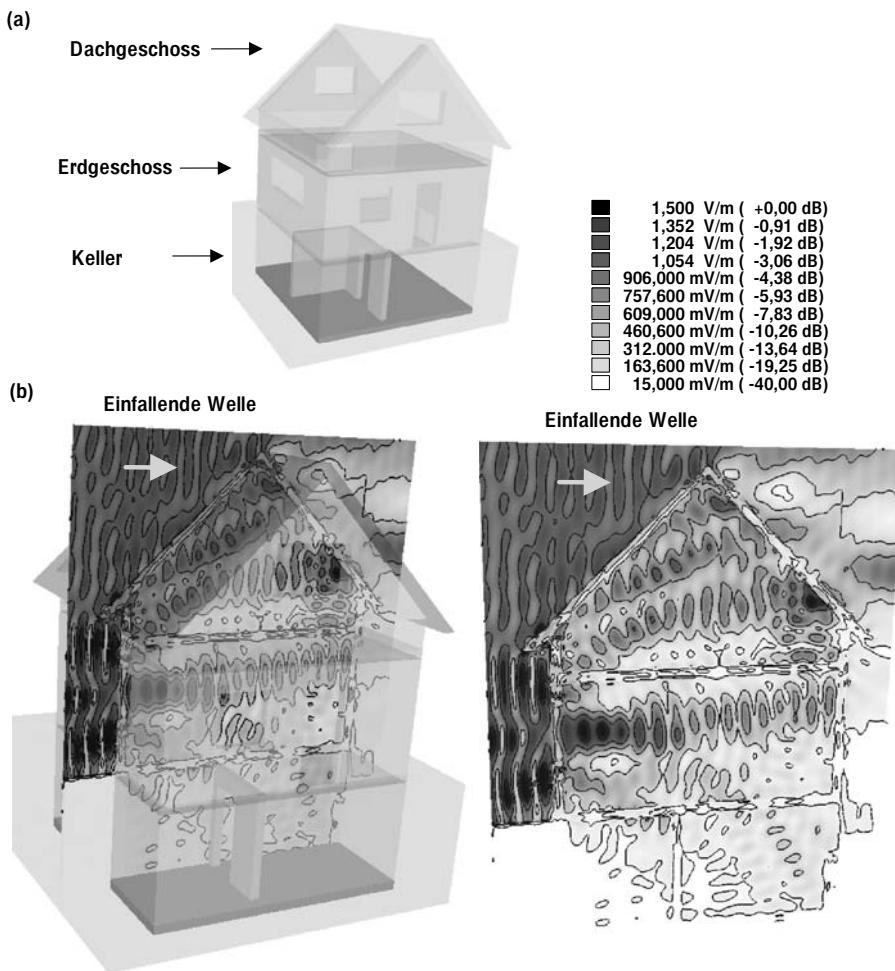
Werden jedoch beschränkte Versorgungsgebiete untersucht, z.B. Pikozeilen in zellularen Mobilfunknetzen mit einer exemplarischen Größe von  $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ , sind *strahlenoptische Ausbreitungsmodelle* eine interessante Alternative. Diese Verfahren werten die dominanten Ausbreitungsphase elektromagnetischer Wellen unter der Annahme einer strahlförmigen Ausbreitung aus (*Ray-tracing, Ray-launching*). Reale physikalische Effekte (Reflexion, Beugung, Absorption) können so mit vertretbarem Aufwand berücksichtigt werden, was aber die Verfügbarkeit detaillierter dreidimensionaler Gebäudemodelle in einem Vektordatenformat voraussetzt.

Reine EM-Simulationen – also der direkte Ansatz der Maxwellschen Gleichungen – sind nur möglich, falls das Simulationsgebiet – ausgedrückt in Wellenlängen – nicht zu groß ist. Dies kann zum Beispiel bei der Nahbereichskommunikation der Fall sein, wenn in einem Gebäude die Funkversorgung zwischen Nachbarräumen oder Etagen untersucht werden soll. Beispiel 8.9 zeigt die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Gebäude bei einer Frequenz von 450 MHz.

### Beispiel 8.9 Gebäudedämpfung im Bereich Bündelfunkanwendungen bei 450 MHz

Als Beispiel für den Einsatz eines EM Simulators [Empi10] betrachten wir die Berechnung der Gebäudedämpfung bei einer Frequenz von  $f = 450 \text{ MHz}$ . Bild 8.21a zeigt ein einfaches Gebäudemodell für eine erste Abschätzung. Das Gebäudemodell beinhaltet ein Kellergeschoss, Erdgeschoss, Dachgeschoss mit entsprechenden Tür- und Fensteröffnungen. Es kommen unterschiedliche Materialien (Beton, Stein, Holz, Metall und Glas sowie Erdboden im Außenbereich) zum Einsatz.

Im Außenraum des Gebäudes repräsentiere eine einfallende, vertikal polarisierte, homogene ebene Welle mit einer Amplitude von  $E_z = 1 \text{ V/m}$  das einfallende Wellenfeld einer entfernt stehenden Basisstationsantenne. Bild 8.21b veranschaulicht die Wellen-



**Bild 8.21** Gebäudefeldstarkeverteilung bei einer Frequenz von 450 MHz: (a) Einfaches Gebäudemodell sowie (b) Betrag der elektrischen Feldstarkeverteilung in einer vertikalen Schnittebene

ausbreitung in der komplexen Gebäudeumgebung anhand einer Darstellung der elektrischen Feldstärke in einer vertikalen Schnittebene.

Die berechnete Verteilung der elektrischen Feldstärke im gesamten Gebäudemodell erlaubt es, realistische Zahlenwerte für den Pfadverlust anzugeben (*Outdoor-to-indoor-path loss*). So können Versorgungsvorhersagen in unterschiedlichen Gebäudebereichen (z.B. für die Bereiche Keller oder Erdgeschoss) gemacht werden. Hierbei interessieren insbesondere lokale Mittelwerte, so dass die Feldstärke noch über ausreichend große Raumbereiche zu mitteln ist.

Elektromagnetische Feldsimulationen sind auch unter didaktischen Gesichtspunkten bedeutsam, denn sie visualisieren Wellenausbreitungsphänomene und fördern so das anschauliche Verständnis der relevanten physikalischen Effekte. Die Darstellungen der Feldstarkeverteilungen in Bild 8.21b zeigen physikalische Effekte wie:

- *Abschattung* (reduzierte Feldstärkewerte hinter dem Gebäude),
- *stehende Wellen* vor dem Gebäude (und im Innern des Gebäudes) aufgrund von *Reflexionen*,
- *Dämpfung* durch Wände und
- *Beugung* von Wellen um Gebäudekanten und durch Fenster- und Türöffnungen.

Ingenieure sind in der Regel visuell orientiert und fassen technische Zusammenhänge anhand von graphischen Darstellungen schneller auf als durch langwierige mathematische Abhandlungen. ■

## ■ 8.4 Übungsaufgaben

### Übung 8.1

Leiten Sie den Zusammenhang in Gleichung (8.13) zur Zweiwegeausbreitung her.

### Übung 8.2

Die Antennen von Sender und Empfänger ( $f = 400 \text{ MHz}$ ) befinden sich auf gleicher Höhe ( $h_{\text{TX}} = h_{\text{RX}} = 5 \text{ m}$ ) und im Abstand  $r = 2 \text{ km}$  voneinander. Es gelten die Zusammenhänge für die Zweiwegeausbreitung.

Der Abstand zwischen Sender und Empfänger steige nun auf einen Wert von  $r = 3 \text{ km}$ . Auf welche Antennenhöhe muss die Empfängerantenne gesetzt werden, wenn die Empfangsleistung sich gegenüber der ursprünglichen Position nicht ändern soll?

### Übung 8.3

Betrachtet werde eine Satellitenverbindung zwischen einer Bodenstation und einem Satelliten auf einer geostationären Umlaufbahn ( $r = 36000 \text{ km}$ ). Die Einflüsse der Atmosphäre werden vernachlässigt. Die Frequenz beträgt  $f = 10 \text{ GHz}$ . Die Bodenstation habe einen Gewinn von  $G_B = 30 \text{ dBi}$ . Für den Satellit gelte  $G_S = 20 \text{ dBi}$ .

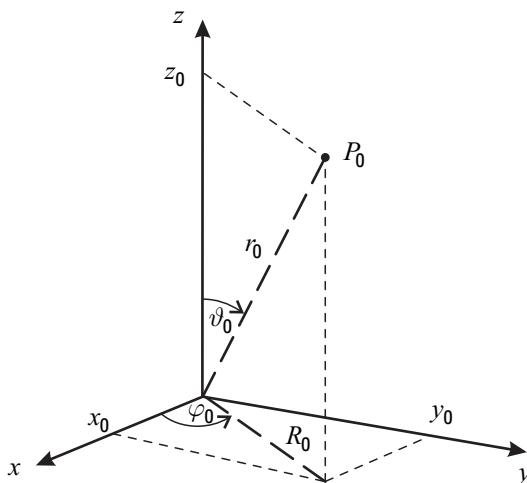
- a) Berechnen Sie die isotrope Funkfelddämpfung.
- b) Wie groß ist die Empfangsleistung bei einer Sendeleistung von 1 W?

# A

## Anhang

### ■ A.1 Koordinatensysteme

Koordinatensysteme dienen dazu, die Lage von Objekten im dreidimensionalen Raum zu beschreiben. Am gebräuchlichsten ist das kartesische Koordinatensystem. Für zylindrische oder kugelförmige Geometrien besitzen das Zylinder- und Kugelkoordinatensystem Vorteile [Blum88].



**Bild A.1** Definition von kartesischen Koordinaten sowie Zylinder- und Kugelkoordinaten

Bild A.1 zeigt die Interpretation der unterschiedlichen Koordinatenrichtungen bei Angabe der Lage des Punktes  $P_0$  im Raum. Die Lage kann alternativ beschrieben werden durch

- kartesische Koordinaten  $(x_0, y_0, z_0)$ ,
- Zylinderkoordinaten  $(R_0, \varphi_0, z_0)$  oder
- Kugelkoordinaten  $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ .

### A.1.1 Kartesisches Koordinatensystem

Kartesische Koordinaten:  $x, y, z$

Einheitsvektoren: Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ , bilden ein Rechtssystem und besitzen die Länge Eins ( $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$ ). Sie zeigen für jeden Punkt des Raumes immer in Richtung der Koordinatenachsen  $x, y$  und  $z$ , d.h. sie sind „raumfest“.

Linien-, Flächen- und Volumenelement:

$$\text{Linienelement: } d\vec{s} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Flächenelement: } d\vec{A} = dy dz \vec{e}_x + dx dz \vec{e}_y + dx dy \vec{e}_z \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Volumenelement: } dv = dx dy dz \quad (\text{A.3})$$

Differentialoperatoren:

$$\text{Gradient: } \text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Divergenz: } \text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \text{Rotation: } \text{rot } \vec{V} &= \nabla \times \vec{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x \\ &\quad + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Skalarer Laplace-Operator: } \Delta \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Vektor-Laplace-Operator: } \Delta \vec{V} = (\nabla^2 V_x) \vec{e}_x + (\nabla^2 V_y) \vec{e}_y + (\nabla^2 V_z) \vec{e}_z \quad (\text{A.8})$$

$$\text{mit } \nabla^2 V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{und } \nabla^2 V_y = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{und } \nabla^2 V_z = \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

Kartesische Einheitsvektoren ausgedrückt durch Einheitsvektoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_x = \vec{e}_R \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi = \vec{e}_r \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{e}_\theta \cos \vartheta \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_R \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi = \vec{e}_r \sin \vartheta \sin \varphi + \vec{e}_\theta \cos \vartheta \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z = \vec{e}_r \cos \vartheta - \vec{e}_\theta \sin \vartheta \quad (\text{A.14})$$

## A.1.2 Zylinderkoordinatensystem

Zylinderkoordinaten:  $R, \varphi, z$

Einheitsvektoren: Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ , bilden ein Rechtssystem und besitzen die Länge Eins ( $|\vec{e}_R| = |\vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_z| = 1$ ). Die beiden erstgenannten Einheitsvektoren sind nicht „raumfest“, denn der Einheitsvektor in radialer Richtung  $\vec{e}_R$  zeigt stets von der  $z$ -Achse fort und  $\vec{e}_\varphi$  zeigt stets in Umfangsrichtung.

Linien-, Flächen- und Volumenelement:

$$\text{Linienelement: } d\vec{s} = dR \vec{e}_R + R d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Flächenelement: } d\vec{A} = R d\varphi dz \vec{e}_R + dR dz \vec{e}_\varphi + R dR d\varphi \vec{e}_z \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Volumenelement: } dv = R dR d\varphi dz \quad (\text{A.17})$$

Differentialoperatoren:

$$\text{Gradient: } \text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Divergenz: } \text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{R} \frac{\partial (RV_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \text{Rotation: } \text{rot } \vec{V} &= \nabla \times \vec{V} = \left( \frac{1}{R} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_R \\ &\quad + \left( \frac{\partial V_R}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial R} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$+ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial (RV_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \text{Skalarer Laplace-Operator: } \Delta \phi &= \nabla^2 \phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\text{Vektorieller Laplace-Operator: } \Delta \vec{V} = \nabla^2 \vec{V} = \text{grad div } \vec{V} - \text{rot rot } \vec{V} \quad (\text{A.23})$$

Umrechnung auf kartesische Koordinaten:

$$x = R \cos \varphi \quad (\text{A.24})$$

$$y = R \sin \varphi \quad (\text{A.25})$$

$$z = z \quad (\text{A.26})$$

Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten ausgedrückt durch Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_R = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi = \vec{e}_r \sin \vartheta + \vec{e}_\theta \cos \vartheta \quad (\text{A.27})$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi = \vec{e}_\vartheta \quad (\text{A.28})$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z = \vec{e}_r \cos \vartheta - \vec{e}_\theta \sin \vartheta \quad (\text{A.29})$$

### A.1.3 Kugelkoordinatensystem

Kugelkoordinaten:  $r, \vartheta, \varphi$

Einheitsvektoren: Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ , bilden ein Rechtssystem und besitzen die Länge Eins ( $|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\vartheta| = |\vec{e}_\varphi| = 1$ ). Keiner der Einheitsvektoren ist „raumfest“.

Linien-, Flächen- und Volumenelement:

$$\text{Linienelement: } d\vec{s} = dr \vec{e}_r + r d\vartheta \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.30})$$

$$\text{Flächenelement: } d\vec{A} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r + r \sin \vartheta dr d\varphi \vec{e}_\vartheta + r dr d\vartheta \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.31})$$

$$\text{Volumenelement: } d\nu = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \quad (\text{A.32})$$

Differentialoperatoren:

$$\text{Gradient: } \text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \text{Divergenz: } \text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} \\ &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (V_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \text{Rotation: } \text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial (V_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r V_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \text{Skalarer Laplace-Operator: } \Delta \phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\text{Vektorieller Laplace-Operator: } \Delta \vec{V} = \nabla^2 \vec{V} = \text{grad div } \vec{V} - \text{rot rot } \vec{V} \quad (\text{A.37})$$

Umrechnung auf kartesische Koordinaten:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta \quad (\text{A.38})$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta \quad (\text{A.39})$$

$$z = r \cos \vartheta \quad (\text{A.40})$$

Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten ausgedrückt durch Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \vartheta = \vec{e}_R \sin \vartheta + \vec{e}_z \cos \vartheta \quad (\text{A.41})$$

$$\vec{e}_\vartheta = \vec{e}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \vec{e}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \vec{e}_z \sin \vartheta = \vec{e}_R \cos \vartheta - \vec{e}_z \sin \vartheta \quad (\text{A.42})$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi = \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.43})$$

## A.2 Logarithmische Darstellung von technischen Größen

### A.2.1 Dimensionslose Größen

Dimensionslose reelle Größen wie der Antennengewinn  $G$  oder die Beträge von Streuparametern  $|s_{ij}|$  werden häufig logarithmiert angegeben. Bei leistungsbezogenen Größen (z.B. Gewinn  $G$ ) wird der Faktor 10 vor der Logarithmusfunktion ( $\lg x = \log_{10} x = \text{Logarithmus zur Basis } 10$ ) und bei spannungs- oder feldstärkebasierten Größen (z.B. Streuparameter  $s_{ij}$ ) der Faktor 20 gewählt.

$$s_{ij}/\text{dB} = 20 \lg |s_{ij}| \quad \text{und} \quad G/\text{dB} = 10 \lg G \quad (\text{A.44})$$

Da die Pseudoeinheit „dB“ auf die Logarithmierung hinweist, wird im Allgemeinen auf eine besondere Kennzeichnung beim Formelsymbol verzichtet, da Verwechslungen ausgeschlossen sind: Die Notationen  $G = 1$  oder  $G = 0 \text{ dB}$  beschreiben den gleichen Gewinn, einmal linear und einmal logarithmisch ausgedrückt.

Die logarithmische Darstellung bietet mehr Übersicht als die lineare Darstellung, wenn die Werte mehrere Größenordnungen überschreiten, und bewahrt auch bei kleinen Werten ein ausreichendes Auflösungsvermögen. Tabelle A.1 zeigt eine Gegenüberstellung logarithmischer und linearer Größen.

**Tabelle A.1** Gegenüberstellung linearer und logarithmischer Größen

Logarithmische Größe dB	Lineare Größe (Spannungsbezug)	Lineare Größe (Leistungsbezug)
+40	100	$10\,000 = 10^4$
+30	$\approx 31,6$	$1\,000 = 10^3$
+20	10	$100 = 10^2$
+10	$\approx 3,16$	$10 = 10^1$
+6	$\approx 2$	$\approx 4$
+3	$\approx 1,41$	$\approx 2$
0	1	1
-3	$\approx 0,707$	$\approx 0,5$
-6	$\approx 0,5$	$\approx 0,25$
-10	$\approx 0,316$	$0,1 = 10^{-1}$
-20	0,1	$0,01 = 10^{-2}$
-30	$\approx 0,0316$	$0,001 = 10^{-3}$
-40	0,01	$0,0001 = 10^{-4}$

Wird statt des dekadischen Logarithmus der natürliche Logarithmus verwendet, so nutzt man die Pseudoeinheit *Neper* (Np). Bei leistungsbezogenen Größen wird der Vorfaktor 1/2 vor der natürlichen Logarithmusfunktion verwendet.

$$G/\text{Np} = \frac{1}{2} \ln G \quad \text{und} \quad s_{ij}/\text{Np} = \ln |s_{ij}| \quad (\text{A.45})$$

Die Pseudoeinheiten Neper und dB können mit  $1\text{Np} = 20/\ln(10)\text{ dB} \approx 8,686\text{ dB}$  ineinander umgerechnet werden.

### A.2.2 Relative und absolute Pegel

Auch bei dimensionsbehafteten Größen, wie der Spannung  $U$  oder der Leistung  $P$ , ist eine logarithmische Darstellung üblich. Vor der Logarithmierung muss die Größe aber entweder auf eine *Bezugsgröße* (zum Beispiel das Maximum der Spannungsfunktion  $U_0$ ) oder auf eine feste *Referenzspannung* oder Referenzleistung normiert werden. Im ersten Fall spricht man von einem *relativen Pegel* und im zweiten Fall von einem *absoluten Pegel*. Wie bei dimensionslosen Größen wird bei leistungsbezogenen Größen (z.B. Leistung  $P$ , Strahlungsleistungsdichte  $S$ ) der Faktor 10 und bei spannungs- oder feldstärkebasierten Größen (Spannung  $U$ , Strom  $I$ , elektrische Feldstärke  $E$ ) der Faktor 20 gewählt.

$$\frac{U}{\text{dB}} = 20\lg\left(\frac{U}{U_0}\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{P}{\text{dB}} = 10\lg\left(\frac{P}{P_0}\right) \quad (\text{Relativer Pegel}) \quad (\text{A.46})$$

Bei absoluten Pegeln wird an die Pseudoeinheit dB zusätzlich noch die Referenzeinheit (z.B.  $\mu\text{V}$ ) angehängt.

$$\frac{U}{\text{dB}\mu\text{V}} = 20\lg\left(\frac{U}{1\mu\text{V}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{P}{\text{dBmW}} = 10\lg\left(\frac{P}{1\text{mW}}\right) \quad (\text{Absoluter Pegel}) \quad (\text{A.47})$$

Bei der Einheit dBmW hat sich in der Praxis die Verkürzungsform dBm etabliert. Eine Leistung von  $P = 3\text{ dBm}$  entspricht also einer Leistung von  $P = 2\text{ mW}$ .

Mit relativen Pegeln können bei einem Zweitor auch Übertragungsfunktionen definiert werden, z.B. wenn das Verhältnis von Ausgangsleistung  $P_{\text{out}}$  und Eingangsleistung  $P_{\text{in}}$  betrachtet wird.

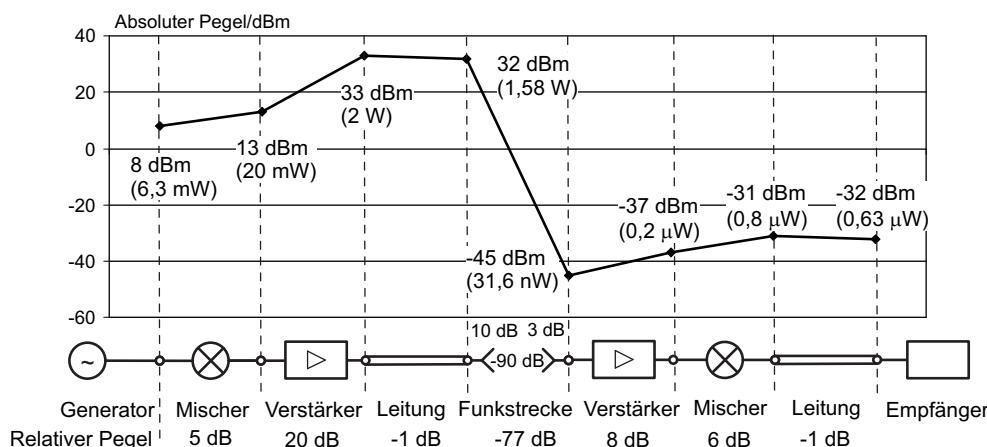
$$\frac{a}{\text{dB}} = 10\lg\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right) \quad (\text{A.48})$$

### A.2.3 Pegelplan einer Übertragungsstrecke

Mit logarithmischen Größen lassen sich sehr übersichtlich Pegelpläne aufstellen. Bild A.2 zeigt einen Pegelplan für eine Übertragungsstrecke mit Generator, Mischern, Verstärkern, Leitungen und Empfänger sowie einer Freiraumübertragung mit Antennen. Der Generator erzeugt ein Signal mit einer Leistung von 8 dBm. Die aktiven Komponenten Mischer und Verstärker besitzen positive relative Pegel (Verstärkungsfaktor und Konversionsgewinn) und heben so die Signalleistung an.

Die Leitungen und die Funkstrecke führen zu Leistungsverlusten. Die Funkstrecke im Beispiel besteht aus zwei Antennen mit den Gewinnen  $G_A = 3\text{ dBi}$  und  $G_B = 10\text{ dBi}$  sowie der isotropen Funkfelddämpfung  $L_{F0} = 90\text{ dB}$ . Dies ergibt für die Funkstrecke einen relativen Pegel von  $-77\text{ dB}$ . Am Empfänger erhalten wir eine Empfangsleistung von  $-32\text{ dBm}$ .

Falls alle Komponenten *angepasst betrieben* werden, können die logarithmierten Transmissionsfaktoren sowie die Verstärkungswerte als relative Pegel verwendet werden, die die Ein- und Ausgangsleistungen miteinander verknüpfen. Die Verknüpfung der logarithmischen Größen ist besonders übersichtlich, da diese einfach addiert werden können.



**Bild A.2** Pegelplan für eine Übertragungsstrecke

# Formelzeichen und Abkürzungen

$A$	Fläche ( $\text{m}^2$ )
$A_{\text{dB}}$	Dämpfung (dB)
$\vec{A}$	Magnetisches Vektorpotential (Tm)
$A_{\text{eff}}$	Effektive Antennenfläche ( $\text{m}^2$ )
$\mathbf{A}$	ABCD Matrix (Matrixelemente besitzen unterschiedliche Einheiten)
$\vec{B}$	Magnetische Flussdichte (Magnetische Induktion) (T; Tesla)
$B$	Bandbreite (Hz; Hertz)
$BW$	Bandbreite (Kreisfrequenz) (1/s)
$c$	Ausbreitungsgeschwindigkeit ( $\text{m}/\text{s}$ )
$C$	Kapazität (F; Farad)
$C(\varphi, \theta)$	Strahlungsdiagramm (dimensionslos)
$C'$	Kapazitätsbelag ( $\text{F}/\text{m}$ )
$D$	Direktivität (dimensionslos)
$\vec{D}$	Elektrische Flussdichte ( $\text{C}/\text{m}^2$ )
$\vec{E}$	Elektrische Feldstärke ( $\text{V}/\text{m}$ )
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix (dimensionslos)
$f$	Frequenz (Hz)
$f_c$	<i>Cut-off</i> -Frequenz (Hz)
$\vec{F}$	Kraft (N; Newton)
$\vec{F}_C$	Coulomb-Kraft (N)
$\vec{F}_L$	Lorentz-Kraft (N)
$G$	Leitwert ( $1/\Omega = S$ ; Siemens)
$G$	Gewinn (dimensionless)
$G$	Greensche Funktion ( $1/\text{m}$ )
$G'$	Leitwertsbelag ( $\text{S}/\text{m}$ )
$\vec{H}$	Magnetische Feldstärke ( $\text{A}/\text{m}$ )
$\mathbf{H}$	Hybrid Matrix (Matrixelemente besitzen unterschiedliche Einheiten)
$I$	Strom (A; Ampere)
$j$	Imaginäre Einheit (dimensionslos)
$\vec{J}$	Elektrische Stromdichte ( $\text{A}/\text{m}^2$ )

---

$\vec{J}_S$	Oberflächenstromdichte (A/m)
$k$	Koppelfaktor (dimensionslos)
$k$	Wellenzahl (1/m)
$k_c$	Cut-off-Wellenzahl (1/m)
$\vec{k}$	Wellenzahlvektor (1/m)
$\ell, L$	Länge (m)
$L$	Induktivität (H; Henry)
$L$	Pfadverlust (dimensionless)
$L'$	Induktivitätsbelag (H/m)
$p$	Leistungsdichte (W/m <sup>3</sup> )
$P$	Leistung (W; Watt)
$P_{\text{auf}}$	Aufgenommene Leistung (W)
$P_h$	Hinlaufende Leistung (W)
$P_{\text{rad}}$	Abgestrahlte Leistung (W)
$Q$	Ladung (C; Coulomb)
$Q$	Güte (dimensionslos)
$r$	Radiale Koordinate in Kugelkoordinaten, Abstand (m)
$R$	Radiale Koordinate in Zylinderkoordinaten (m)
$R$	Widerstand ( $\Omega$ )
$R_{\text{DC}}$	Gleichstromwiderstand ( $\Omega$ )
$R_{\text{ESR}}$	Ersatzserienwiderstand ( $\Omega$ )
$R_{\text{RF}}$	Hochfrequenzwiderstand ( $\Omega$ )
$R_{\text{rad}}$	Strahlungswiderstand ( $\Omega$ )
$R'$	Widerstandsbelag ( $\Omega/\text{m}$ )
$s_{ij}$	Streuparameter (dimensionslos)
$\mathbf{S}$	Streumatrix (dimensionslos)
$\vec{S}$	Poynting Vektor (W/m <sup>2</sup> )
$\vec{S}_{\text{av}}$	Mittelwert des Poynting Vektors (W/m <sup>2</sup> )
$t$	Zeit (s; Sekunde)
$T$	Periodendauer (s)
$\tan \delta$	Verlustfaktor (dimensionslos)
$U$	Spannung (V; Volt)
$\vec{v}$	Geschwindigkeit (m/s)
$v_{\text{ph}}$	Phasengeschwindigkeit (m/s)
$v_{\text{gr}}$	Gruppengeschwindigkeit (m/s)
$V$	Volumen (m <sup>3</sup> )
$w_e$	Elektrische Energiedichte (J/m <sup>3</sup> )

**318** Formelzeichen und Abkürzungen

---

$W_e$	Elektrische Energie (J; Joule)
$w_m$	Magnetische Energiedichte ( $J/m^3$ )
$W_m$	Magnetische Energie (J)
$x, y, z$	Kartesische Koordinaten (m)
$Y$	Admittanz (S)
$\mathbf{Y}$	Admittanzmatrix (S)
$Z_A$	Lastimpedanz ( $\Omega$ )
$Z_{in}$	Eingangsimpedanz ( $\Omega$ )
$Z_F$	Feldwellenwiderstand ( $\Omega$ )
$Z_{F0}$	Feldwellenwiderstand des freien Raumes ( $\Omega$ )
$Z_L, Z_0$	Leitungswellenwiderstand, Torwiderstand, Systemimpedanz ( $\Omega$ )
$Z_{0,cm}$	Gleichakt-Leitungswellenwiderstand ( $\Omega$ )
$Z_{0,diff}$	Gegentakt-Leitungswellenwiderstand ( $\Omega$ )
$Z_{0e}$	<i>Even mode</i> -Leitungswellenwiderstand ( $\Omega$ )
$Z_{0o}$	<i>Odd mode</i> -Leitungswellenwiderstand ( $\Omega$ )
$\mathbf{Z}$	Impedanzmatrix ( $\Omega$ )

# Literatur

- [Agil02] *Agilent*: Multiport & Balanced Device Measurement Application Note Series, Concepts in Balanced Device Measurements. Application Note 1373-2. Agilent, 2002
- [Agil10] *Agilent*: EMPro Users Guide. Agilent, 2010
- [Agil11] *Agilent*: ADS Users Guide. Agilent, 2011
- [Ahn06] *Ahn, H.-R.*: Asymmetric Passive Components in Microwave Integrated Circuits. John Wiley & Sons, 2006
- [Ande03] *Anderson, H.R.*: Fixed Broadband Wireless System Design. John Wiley & Sons, 2003
- [AWR10] *AWR Corporation*: TX-Line Software. AWR Corporation, 2010; <http://web.awrcorp.com/Usa/Products/Optional-Products/TX-Line/>
- [Bäch02] *Bächtold, W.*: Mikrowellenelektronik. Vieweg, 2002
- [Bäch99] *Bächtold, W.*: Mikrowellentechnik. Vieweg, 1999
- [Bala05] *Balanis, C.A.*: Antenna Theory. John Wiley & Sons, 2005
- [Bala08] *Balanis, C.A.*: Modern Antennas Handbook. John Wiley & Sons, 2008
- [Bala89] *Balanis, C.A.*: Advanced Engineering Electromagnetics. John Wiley & Sons, 1989
- [Bial95] *Bialkowski, M.E.*: Analysis of a Coaxial-to-Waveguide Adaptor Including a Discended Probe and a Tuning Post. IEEE Trans. MTT, Vol. 43, No. 2, 1995
- [Blum88] *Blume, S.*: Theorie elektromagnetischer Felder. Hüthig, 1988
- [Bowi08] *Bowick, C.*: RF Circuit Design. Newnes, 2008
- [Bron08] *Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.; Musiol, G.; Muehlig, H.*: Taschenbuch der Mathematik. Harri Deutsch, 2008
- [Bund03] *Bundesnetzagentur*: Allgemeinzuteilung von Frequenzen in den Frequenzteilbereichen gemäß Frequenzzuweisungsplanverordnung, Teil B: Nutzungsbestimmungen D138 und D150 für die Nutzung durch die Allgemeinheit für ISM-Anwendungen. Bundesnetzagentur, Vfg 76, 2003
- [Bund05] *Bundesnetzagentur*: Allgemeinzuteilung von Frequenzen für nichtöffentliche Funkanwendungen geringer Reichweite zur Datenübertragung; Non-specific Short Range Devices (SRD). Bundesnetzagentur, Vfg 92, 2005
- [Bund08] *Bundesnetzagentur*: Frequenznutzungsplan gemäß §54 TKG über die Aufteilung des Frequenzbereichs von 9 kHz bis 275 GHz auf die Frequenznutzungen sowie über die Festlegungen für diese Frequenznutzungen. Bundesnetzagentur, 2008

- [CEPT09] *CEPT/ECC: The European Table of Frequency Allocations and Utilisations in the Frequency Range 9 kHz to 3000 GHz.* European Conference of Postal and Telecommunications Administrations, Electronic Communications Committee, 2009
- [Clen05] *Clenet, M.: Design and Analysis of a Yagi-like Antenna Element Buried in LTCC Material for AEHF Communication Systems.* Defence R&D Canada, 2005
- [COST231] *Commission of the European Communities: Digital Mobile Radio: COST 231 View on the Evolution towards 3rd Generation Systems.* COST, 1999
- [Dell10] *Dellsperger, F.: Smith Chart Tool.* 2010; <http://www.fritz.dellsperger.net/downloads.htm>
- [Detl12] *Detlefsen, J.; Siart, U. : Grundlagen der Hochfrequenztechnik.* Oldenbourg, 2012
- [Deut00] *Deutsch, B.; Mohr, S.; Roller, A.: Elektrische Nachrichtenkabel. Grundlagen – Kabeltechnik – Kabelanlagen.* Publicis Corporate Publishing, 2000
- [Dobk08] *Dobkin, D.M.: The RF in RFID.* Elsevier, 2008
- [Dupo10] *Dupont International.* 2010; <http://www.dupont.com>
- [Elli07] *Ellinger, F.: Radio-Frequency Integrated Circuits and Technologies.* Springer, 2007
- [Empi10] *Empire: Users Guide.* IMST GmbH, 2010
- [Fett96] *Fettweis, A.: Elemente nachrichtentechnischer Systeme.* Teubner, 1996
- [Fink12] *Finkenzeller, K.: RFID Handbuch.* Hanser, 2012
- [Flei08] *Fleisch, D.: A Student's Guide to Maxwell's Equations.* Cambridge University Press, 2008
- [Garg01] *Garg, R.; Bhartia, P.; Bahl, I.; Ittipiboon, A.: Microstrip Antenna Design Handbook.* Artech House, 2001
- [Geng98] *Geng, N.; Wiesbeck, W.: Planungsmethoden für die Mobilkommunikation.* Springer, 1998
- [Glis11] *Glisson, Jr. T.H.: Introduction to Circuit Analysis and Design.* Springer, 2011
- [Göbe99] *Göbel, J.: Kommunikationstechnik.* Hüthig, 1999
- [Goli08] *Golio, M.; Golio, J.: The RF and Microwave Handbook.* CRC Press, 2008
- [Grah07] *Graham, A.W.; Kirkman, N.C.; Paul, P.M.: Mobile Radio Network Design in the VHF and UHF Bands - A Practical Approach.* John Wiley & Sons, 2007
- [Gron01] *Gronau, G.: Höchstfrequenztechnik.* Springer, 2001
- [Gros05] *Gross, F.: Smart Antennas for Wireless Communications.* McGraw-Hill, 2005
- [Gust06] *Gustrau, F.; Manteuffel, D.: EM Modeling of Antennas and RF Components for Wireless Communication Systems.* Springer, 2006
- [Hage09] *Hagen, Jon B.: Radio-Frequency Electronics: Circuits and Applications.* Cambridge University Press; 2. Auflage, 2009
- [Hata80] *Hata, M.: Empirical Formula for Propagation Loss in Land Mobile Radio Services.* IEEE Trans. on Vehicular Technology, 29, 317-25, 1980

- 
- [Hert04] *Herter, E.; Lörcher, W.: Nachrichtentechnik.* Hanser, 2004
  - [Heue09] *Heuermann, H.: Hochfrequenztechnik.* Vieweg+Teubner, 2009
  - [Hilb81] *Hilberg, W.: Impulse auf Leitungen.* Oldenbourg, 1981
  - [Ida07] *Ida, N.: Engineering Electromagnetics.* Springer, 2007
  - [IEEE02] *IEEE: IEEE Std 521-2002 Standard Letter Designations for Radar-Frequency Bands.* IEEE, 2002
  - [ITU00] *International Telecommunication Union: ITU-R Recommendation V.431: Nomenclature of the Frequency and Wavelength Bands Used in Telecommunications.* ITU, 2000
  - [ITU452-14] *International Telecommunications Union: Recommendation ITU-R P.452-14 Prediction Procedure for the Evaluation of Interference Between Stations on the Surface of the Earth at Frequencies above 0.1 GHz.* ITU, 2009
  - [ITU529] *International Telecommunications Union: Recommendation ITU-R P.529-2 Prediction Methods for the Terrestrial Land Mobile Service in the VHF and UHF Bands.* ITU, 1997
  - [ITU676] *International Telecommunications Union: Recommendation ITU-R P.676-7 Attenuation by Atmospheric Gases.* ITU, 2006
  - [Jans92] *Jansen, W.: Streifenleiter und Hohlleiter.* Hüthig, 1992
  - [Kark12] *Kark, K.: Antennen und Strahlungsfelder.* Vieweg+Teubner, 2012
  - [Klin11] *Klingbeil, H.: Elektromagnetische Feldtheorie: Ein Lehr- und Übungsbuch.* Vieweg+Teubner, 2011
  - [Krau99] *Kraus, J.D.; Fleisch, D.A.: Electromagnetics with Applications.* McGraw-Hill, 1999
  - [Leuc95] *Leuchtmann, P.: Einführung in die elektromagnetische Feldtheorie.* Pearson, 2005
  - [Ludw08] *Ludwig, R.; Bogdanov, G.: RF Circuit Design: Theory and Applications.* Prentice Hall, 2008
  - [Maas88] *Maas, S.A.: Nonlinear Microwave Circuits.* Artech House, 1988
  - [Maas98] *Maas, S.A.: The RF and Microwave Circuit Design Cookbook.* Artech House, 1998
  - [Macn10] *Macnamara, T.: Introduction to Antenna Placement and Installation.* John Wiley & Sons, 2010
  - [Mant04] *Manteuffel, D.; Gustrau, F.: EM-Feldsimulationen in der Ingenieurausbildung und zur Entwicklung von Komponenten der Mobilfunktechnik.* In ITG Fachbericht 184: Mobilfunktechnik: Stand der Technik und Zukunftsperspektiven. VDE, 2004
  - [Matl10] *MATLAB: MathWorks,* 2010
  - [Matt80] *Matthaei, G.L.; Young, L.; Jones, E.M.T.: Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures.* Artech House, 1980
  - [Mein92] *Meinke, H.; Gundlach, F.W.: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik.* Springer, 1992
  - [Mich81] *Michel, H.-J.: Zweitor-Analyse mit Leistungswellen.* Teubner, 1981

- [Moli11] *Molisch, A.F.*: Wireless Communications. John Wiley & Sons, 2010
- [Okum68] *Okumura, Y., Ohmori, E., Kawano, T., Fukuda, K.*: Field Strength and Its Variability in VHF and UHF Land-Mobile Radio Service. Review of the Electrical Communication Laboratory, 16, pp. 825-873, 1968
- [Pehl92] *Pehl, E.*: Mikrowellen in der Anwendung. Hüthig, 1992
- [Poza98] *Pozar, D.M.*: Microwave Engineering. John Wiley & Sons, 1998
- [Rame03] *Ramesh, M.; Yip, K.*: Design Formula for Inset Fed Microstrip Patch Antenna. Journal of Microwave and Optoelectronics, Vol. 3, p. 5-7, 2003
- [Roge10] *Rogers Corporation*: 2010; <http://www.rogerscorp.com>
- [Sain96] *Sainati, R.A.*: CAD of Microstrip Antennas for Wireless Applications. Artech House, 1996
- [Saun07] *Saunders, S.R.; Aragón-Zavala, A.*: Antennas and Propagation for Wireless Communication Systems. John Wiley & Sons, 2007
- [Schi99] *Schiek, B.*: Grundlagen der Hochfrequenz-Messtechnik. Springer, 1999
- [Schi05] *Schiffner, G.*: Optische Nachrichtentechnik: Physikalische Grundlagen - Entwicklung - moderne Elemente und Systeme. Teubner, 2005
- [Schm06] *Schmidt, L.-P.; Schaller, G.; Martius, S.*: Grundlagen der Elektrotechnik 3. Netzwerke. Pearson Studium, 2006
- [Schw02] *Schwab, A.*: Begriffswelt der Feldtheorie. Springer, 2002
- [Stin07] *Stiny, L.*: Handbuch passiver elektronischer Bauelemente. Franzis, 2007
- [Stra03] *Strassacker, G.; Süssel, R.*: Rotation, Divergenz und Gradient. Leicht verständliche Einführung in die elektromagnetische Feldtheorie. Teubner, 2003
- [Swan03] *Swanson, D.G. jun.; Hoefer, W.J.R.*: Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation. Artech House, 2003
- [Thum98] *Thumm, M.; Wiesbeck, W.; Kern, S.*: Hochfrequenzmesstechnik – Verfahren und Messsysteme. Teubner, 1998
- [Voge04] *Voges, E.*: Hochfrequenztechnik. Hüthig, 2004
- [Wade91] *Wadell, B.C.*: Transmission Line Design Handbook. Artech House, 1991
- [Weil08] *Weiland, T.; Timm, M.; Munteanu, I.*: A Practical Guide to 3-D Simulation. IEEE Microwave Magazine, Vol. 9, No. 6, S. 62-73, Dez. 2008
- [Whee78] *Wheeler, H.A.*: Transmission-Line Properties of a Strip Line Between Parallel Planes. IEEE Trans. MTT, Vol. 26, No. 11, 1978
- [Youn72] *Young, L.*: Microwave Filters Using Parallel Coupled Lines. Artech House, 1972
- [Zink00] *Zinke, O.; Brunswig, H.*: Hochfrequenztechnik. 6. Auflage, Springer, 2000

# Index

- $\lambda/2$ -Resonator, 183, 203
- $\lambda/2$ -Transformator, 88
- $\lambda/4$ -Resonator, 184
- $\lambda/4$ -Transformator, 88, 94, 189, 220
- 1-dB-Kompressionspunkt, 230
- 3D-EM-Simulation, 232
- Abfallzeit, 108
- Absoluter Pegel, 314
- Absorption, 245, 284
- Adjunkte, 164
- Admittanzmatrix, 151
- ADS, 6, 197, 199, 234
- Aktive HF-Schaltungen, 226
- Aluminium, 33
- Amperesches Gesetz, 39
- Anisotrope Materialien, 29
- Anpassschaltung, 88, 95, 171, 186, 231
- Anpassung, 77, 82, 87, 91, 97, 156, 314
- Anpassungsfaktor, 87
- Anstiegszeit, 108
- Antenne, 238
- Antennenhöhe, 295
- Antennenwirkfläche, 245
- Antennenwirkungsgrad, 246
- Arbeit, 26
- Asymmetrische Spannung, 145
- Augendiagramm, 109
- Ausbreitungskonstante, 70
- Autotransformation, 89, 299
- Balun*, 173, 224
- Bandbreite, 156, 189, 200, 247, 258
- Bandpass, 193, 200
- Bandsperre, 193
- Basisstationsantenne, 274
- Beamforming*, 278
- Bessel-Filter, 194
- Beugung, 284
- Bezugswiderstand, 152
- Bikonische Antenne, 249
- Binomialbelegung, 278
- Branchline*-Koppler, 216, 267
- Break point*-Entfernung, 295
- Brechung, 58, 283
- Brechungsindex, 58
- Brewster-Winkel, 60
- Butterfly stubs*, 192
- Butterworth-Filter, 194
- Cauer-Filter, 194
- Clutter Factor*-Modell, 303
- Combiner*, 216, 222
- Common mode*, 145, 174
- Coulomb-Kraft, 25
- Crosstalk*, 148
- Cut-off*-Frequenz, 115, 120, 126, 128
- Dämpfung, 292
- Dämpfungskonstante, 71, 81, 118
- Dachkapazität, 258
- dB, 313
- dBi, 242
- dBm, 314
- Dekade, 291
- Device Under Test*, 172
- Dielektrikum, 28
- Dielektrische Verschiebungsdichte, 30
- Dielektrischer Plattenleiter, 126
- Dielektrizitätskonstante, 25
- Differential mode*, 145, 174
- Differentialoperator, 310
- Differentialquotient, 69
- Differenzenquotient, 69
- Diffusionsgleichung, 47
- Diplexer, 227
- Dipol, 248
  - Basisstationsantenne, 274
  - Halbwellendipol, 255
  - Hertzscher Dipol, 250

- Planarer Dipol, 267
- Dispersion, 42, 126
- Divergenz, 36, 310
- Diversity*, 281
- Dolph-Tschebyscheff-Belegung, 278
- Dopplereffekt, 288
- Downtilt*, 276
- Drahtantenne, 255
- Dreileitersystem, 143
- Dreitor, 160
- Durchflutungsgesetz, 39, 66, 68, 116, 178
- DUT, 172
- E-Ebene*, 242, 251
- E-Welle*, 133
- Edge-coupled-line-Filter*, 203
- Effektive relative Dielektrizitätszahl, 123
- Eindringtiefe, 47
- Einfügedämpfung, 155, 193
- Einfallsebene, 58
- Eingangsimpedanz
  - Antenne, 246
  - Verlustbehaftete Leitung, 77
  - Verlustlose Leitung, 80
- Einheitsmatrix, 159
- Einheitsvektor, 310–312
- Einpolige Darstellung, 154
- Einzelstrahlercharakteristik, 269
- EIRP, 246
- Electrical downtilt*, 276
- Elektrische Energiedichte, 30
- Elektrische Feldstärke, 25
- Elektrische Flussdichte, 30
- Elektrische Stromdichte, 32
- Elektrische Wand, 257
- Elektrischer Fluss, 30
- Elementarladung, 25
- Elliptische Polarisation, 54
- EM-Simulation, 232
- Empfangsantenne, 238
- Empire, 6, 234
- Empirische Modelle, 302
- EMPro, 6, 136, 234
- Energie, 31, 35
- Energiedichte
  - Elektrische, 30
  - Magnetische, 35
- Energiegeschwindigkeit, 134
- Entartete Moden, 136
- Ersatzschaltbild, 179
  - einer Leitung, 68
- Ersatzserienwiderstand, 179
- Eulersche Formel, 79
- Evaneszente Welle, 61
- Even-mode*, 146, 204, 223
- Eye diagram*, 109
- Fading*, 301
- Faltdipol, 249
- Faradaysches Gesetz, 40
- Fast fading*, 301
- Feldlinienbild, 26
- Feldsimulation, 232
- Feldstärke
  - Elektrische, 25
  - Magnetische, 34
- Feldwellenwiderstand, 52, 56
- Fernfeld, 63, 239
- Fernfeldbedingung, 240
- Filter, 193
- Filterordnung, 193
- Fluss
  - Elektrischer, 30
  - Magnetischer, 34
- Flussdichte
  - Elektrische, 30
  - Magnetische, 34
- Freiraumausbreitung, 290
- Frequenzweiche, 227
- Fresnel-Ellipsoid, 296
- Friis-Gleichung, 290
- Fußpunktimpedanz, 246
- Funkfelddämpfung, 314
- Funkwellen, 283
- Güte, 180, 182
- Galliumarsenid, 123
- Gaußsches Gesetz
  - des elektrischen Feldes, 40
  - des magnetischen Feldes, 41
- Gebäudedämpfung, 306
- Gegentaktmode, 145, 174
- Gehäuseresonanz, 209
- Geschichtetes Medium, 298

- 
- Geschirmte Paralleldrahtleitung, 143  
 Geschwindigkeit, 134  
 Gewinn, 246  
 Gitterdiagramm, 103  
 Gleichtaktmode, 145, 174  
 Gold, 33, 49  
 Gradient, 27, 310  
 Greensche Funktion, 240  
 Grenzfrequenz, 120  
 Grenzwinkel der Totalreflexion, 61  
 Grundübertragungsdämpfung, 290  
 Grundwelle im Hohlleiter, 133  
 Gruppenantenne, 269  
 Gruppenfaktor, 269  
 Gruppengeschwindigkeit, 134  
 Gruppenlaufzeit, 193  
  
*H*-Ebene, 242  
*H*-Welle, 133  
 $H_{10}$ -Welle, 130  
*Hairpin*-Filter, 207  
 Halbwellendipol, 255  
 Halbwellenlängentransformator, 88  
 Halbwertsbreite, 244  
 Hauptkeule, 242  
 Hauptstrahlrichtung, 242  
 Helixantenne, 258  
 Hertzscher Dipol, 250  
 Hochpass, 187, 193, 198  
 Höhere Wellentypen, 120, 136  
 Hohlleiterwellenlänge, 133  
 Hohlleitungsfilter, 210  
 Hohlraumresonator, 139, 209  
 Homogene ebene Welle, 50, 66, 130, 283  
 – Lokale, 64  
 Homogenität, 42  
 Horizontale Polarisation, 54  
 Hornantenne, 250  
 Huygensches Prinzip, 273, 284  
 Hybridmatrix, 151  
 Hybridschaltungen, 123, 228  
 Hyperbolische Funktionen, 79  
  
 Idealer elektrischer Leiter, 33  
 IFA, 249  
 Impedanzbandbreite, 156  
 Impedanzmatrix, 150  
 Impuls, 106  
 Induktionsgesetz, 40  
 Induktivität, 35, 83, 101  
 Induktivitätsbelag, 69, 116  
*Insertion loss*, 155  
*Inset*-Speisung, 262  
 Interferenz, 293  
 Intermodulationspunkt 3. Ordnung, 230  
*Inverted-F*-Antenne, 249, 258, 267  
 Isotrope Funkfelddämpfung, 290  
 Isotroper Kugelstrahler, 240  
 Isotropie, 42, 159  
  
 Kalibrierung, 172  
 Kapazität, 31, 83, 101  
 Kapazitätsbelag, 69  
 Kartesisches Koordinatensystem, 310  
 Kettenmatrix, 151  
 Kirchhoffsche Regeln, 69  
*Knife-Edge*-Beugung, 296  
 Knotenregel, 70  
 Koaxialleitung, 113, 115  
 Kondensator, 179  
 Konversionsverlust, 230  
 Koordinatensysteme, 309  
 Koplanarleitung, 115  
 Kopplungsfaktor, 147  
 Kraft  
 – Coulomb, 25  
 – Lorentz, 35  
 Kreisfrequenz, 51  
 Kugelkoordinatensystem, 312  
 Kugelwelle, 63, 240  
 Kupfer, 33, 49  
 Kurzschluss, 100  
  
 Ladung, 24  
 Laplace-Operator, 310  
 Leerlauf, 100  
 Leistung, 155  
 Leistungsteiler, 213  
 Leitung, 67, 163  
 – Elektrisch kurze, 20, 78  
 – Schwache Verluste, 80  
 Leitungsbeläge, 69  
 Leitungsfilter, 202  
 Leitungskenngröße, 73, 74

- Leistungsstromdichte, 37  
 Leistungstheorie, 67  
 Leitungswellenwiderstand, 73, 124, 135
  - Koaxialleitung, 118
  - Verlustlose Leitung, 78
 Leitwertbelag, 69, 119  
 Leitwertform, 94  
 Lichtgeschwindigkeit, 51  
 Lineare Polarisation, 54  
 Linearität, 42  
 Litzenleiter, 143  
 Logarithmisch-periodische Dipolantenne, 249  
 Lorentz-Kraft, 35  
 Lorenz-Eichung, 251  
 LOS-Verbindung, 301  
*Low Noise Amplifier*, 227  
 LPDA, 249
- Magnetische Energiedichte, 35  
 Magnetische Feldstärke, 34  
 Magnetische Flussdichte, 34  
 Magnetische Induktion, 34  
 Magnetischer Fluss, 34  
 Magnetisches Vektorpotential, 34, 251  
 Makrozelle, 306  
 Maschenregel, 69  
 Mason-Regel, 166  
 Massefläche, 122  
 Materialgleichungen, 41  
 Maxwellsche Gleichungen, 37  
 Mehrantennensystem, 281  
 Mehrwegeausbreitung, 301  
*Microstrip*, 122  
 Mikrostreifenleitung, 115, 122, 202  
 mil, 123  
 MIMO, 281  
 Mischer, 228  
 MMIC, 123  
 Mobilfunk-Basisstationsantenne, 274  
 Modenkonversion, 146, 174  
*Monolithic Microwave Integrated Circuit*, 123, 227  
 Monopol, 249, 257  
*Multilayer Board*, 129  
 Multiplikatives Gesetz, 269  
 Muschelantenne, 250
- Nabla-Operator, 36, 310  
 Nahfeld, 239  
 Nebenkeule, 242  
 Nebenzipfeldämpfung, 243  
 Neper, 71, 313  
 Netzwerkanalysator, 171  
 NLOS-Verbindung, 301  
 Normierungswiderstand, 152  
 Nullphasenwinkel, 72  
 Oberflächenladungsdichte, 45  
 Oberflächenstromdichte, 45  
*Odd-mode*, 146, 204, 223  
 Öffnungswinkel, 244, 251  
 Oktave, 291  
 Okumura-Hata-Modell, 304  
 Optische Wellenleiter, 115  
 Ordnung eines Filters, 193  
 Oszillator, 231
- Parabolantenne, 250  
 Paralleldrahtleitung, 67, 114, 141  
 Parasitärer Durchlassbereich, 207  
 Pascalsches Dreieck, 278  
*Patch-Antenne*, 259, 269  
 PEC, 33  
 Pegel, 314  
 Pegelplan, 314  
 Periodendauer, 51, 73  
 Permeabilitätskonstante, 34  
 Pfadverlust, 283  
 Pfadverlustexponent, 305  
 Phase, 193  
 Phasengeschwindigkeit, 72  
 Phasengesteuerte Antenne, 273  
 Phasenkonstante, 71  
 Phasenzentrum, 240  
 Phasor, 39, 68, 71  
 Planare Antenne, 259  
 Planare Filter, 202  
 Plattenkondensator, 26, 28, 45  
 Polarisation, 28, 50, 242
  - Elliptische, 54
  - Lineare, 53
  - Zirkulare, 54
 Potential, 27  
*Power amplifier*, 226  
 Poynting-Vektor, 52, 63, 253

- Quasi-TEM-Welle, 123  
 Quasistatische Felder, 45  
 Quellendichte, 36  
 Quellenfeld, 26
- Radar, 287  
*Radial stubs*, 192  
*Rat-Race-Koppler*, 221  
 Raumladungsdichte, 25  
*Ray tracing*, 303  
 Reaktanz, 83  
 Rechte-Hand-Regel, 116  
 Rechteckfunktion, 106  
 Rechteckhohlleiter, 115, 129  
 Rechtssystem, 310  
 Reflexion, 283  
 Reflexionsdämpfung, 155  
 Reflexionsfaktor, 89, 153
  - Ebene Welle, 56
  - S-Parameter Berechnung , 161
  - Schräger Einfall, 58
 Relative Bandbreite, 200  
 Relative Dielektrizitätszahl, 29  
 Relative Permeabilitätszahl, 34  
 Relativer Pegel, 314  
 Resonanz, 209  
 Resonanzfrequenz, 180, 261  
 Resonator, 183  
*Return loss*, 155  
 Reziprozität, 158, 238, 244  
 Richtcharakteristik, 241, 253  
 Richtfaktor, 244  
 Richtfunk, 296  
 Richtfunktion, 244  
 Richtkoppler, 222  
 Ringverstärkung, 170  
 Rotation, 36, 310  
 Rückkopplungsregel, 166  
 Rückstreuquerschnitt, 288  
 Rückwärtskoppler, 223  
 Rückwirkungsfreie Schaltung, 160
- Sauerstoff-Resonanz, 293  
 Schaltungssimulation, 232  
 Schräger Einfall, 58  
 Seitengekoppelte Filter, 203  
 Sektorantenne, 274
- Semi-empirische Modelle, 302  
 Sende-Empfangsweiche, 212, 227  
 Sendeantenne, 238  
 Senkrechter Einfall, 56  
 Signalflussdiagramm, 166  
 Signalflussmethode, 166  
 Silber, 33  
 Simulation, 232  
 Skalarfeld, 27  
 Skineffekt, 46, 66, 119  
 Skintiefe, 47, 119, 178  
*Slow fading*, 301  
*Smart antenna*, 281  
 SMD, 124, 177, 228  
 Smith-Chart, 92, 186, 187  
 Snelliussches Brechungsgesetz, 58  
 Spannung, 27, 101  
 Spannungswelle, 74, 82  
 Sprungfunktion, 97  
 Spule, 35, 181  
 Statische Felder, 45  
 Stehende Welle, 85  
 Stehwellenverhältnis, 87  
*Stepped-impedance*-Filter, 208  
 Sternvierer, 114  
 Stetigkeitsbedingungen, 43  
 Stichleitung, 192  
 Strahlformung, 278  
 Strahlungsdiagramm, 241  
 Strahlungsleistungsdichte, 240  
 Strahlungswiderstand, 254  
 Streifenleitung, 115  
 Streumatrix, 153  
 Streuparameter, 150
  - Berechnung, 161
 Streuung, 286  
*Stripline*, 115, 127  
 Strom, 103  
 Stromdichte, 32, 37  
 Stromstärke, 31  
 Stromverdrängung, 46  
 Stromwelle, 82  
 Substrat, 123, 259  
*Surface-Mounted-Device*, 124  
 Symmetrie, 159  
 Symmetrierglied, 173, 224, 267  
 Symmetrische Leitung, 143

- 
- Systemimpedanz, 152  
 TE-Welle, 133  
 TE<sub>11</sub>-Mode, 121  
 Telegraphengleichung, 70  
 TEM-Welle, 53, 67, 120, 127, 298  
 Tiefpass, 187, 193  
 TM-Welle, 133  
 Toleranzschema, 193  
 Torbedingung, 150  
 Torwiderstand, 152  
 Totalreflexion, 61  
*Touchstone-SnP*-Datenformat, 173  
 Transiente Signale, 97  
 Transmissionsfaktor, 153  
 – Ebene Welle, 56  
 – S-Parameter Berechnung, 161  
 – Schräger Einfall, 58  
*Triplate*, 115, 127  
 Tschebyscheff-Filter, 194  
*Twisted Pair*, 114, 142  
*TX-Line*, 124  
  
 Übertrager, 224  
 Übertragungssymmetrie, 158  
 Umnormierung, 164  
 Unilaterale Schaltung, 160  
 Unitaritätsbedingung, 159  
 Unsymmetrische Leitung, 143  
 Unsymmetrische Spannung, 145  
  
 Vakuum, 29  
 Vektorfeld, 26, 32  
 Vektorpotential, 34  
 Verlustfaktor, 30, 43, 119, 123, 180, 182  
 Verlustfreiheit, 159  
 Verlustleistung, 32  
 Verlustlosigkeit, 78  
 Verschiebungsstromdichte, 37  
 Verstärker, 230  
  
 Vertikale Polarisation, 54  
 Verzerrung, 193  
*Via*, 129  
 Viertelwellenlängentransformator, 88  
 VNA, 171  
*Voltage Standing Wave Ratio*, 87, 91  
 Vorwärtsverstärkung, 170  
 VSWR, 87, 91  
  
 Wahre Stromdichte, 37  
 Walfish-Ikegami-Modell, 302  
 Wechselstromrechnung, 38  
 Wellenausbreitung, 46  
 Wellenausbreitungseffekte, 283  
 Wellenfahrplan, 103  
 Wellengleichung, 50, 71  
 Wellengrößen, 151  
 Wellenlänge, 51, 73, 134  
 Wellenzahl, 50, 134  
 Wellenzahlvektor, 51  
 Welligkeit, 87  
 Widerstand, 32, 177  
 – Gleichstrom/HF, 48  
 Widerstandsbelag, 69, 119  
 Wilkinson-Leistungsteiler, 213  
 Wirbeldichte, 37  
 Wirbelfeld, 33  
 Wirkleistung, 155  
 Wirkungsgrad, 246  
  
 Yagi-Uda-Antenne, 249  
  
 Zeitinvarianz, 42  
 Zeitsignale auf Leitungen, 97  
 Zirkulare Polarisation, 54, 267  
 Zirkulator, 211, 227  
 Zweidrahtleitung, 141  
 Zweitor, 150  
 Zweiwegeausbreitungsmodell, 293  
 Zylinderkoordinatensystem, 311

Frank Gustrau

# Hochfrequenztechnik

Drahtlose Technik erfreut sich vor allem in den Bereichen Kommunikation, Identifikation und Navigation zunehmender Verbreitung und Beliebtheit. Dieses Lehrbuch vermittelt praxisnah und anschaulich die Grundlagen der mobilen Kommunikationstechnik. Mathematisch fundiert und durch zahlreiche Beispiele und Übungen ergänzt, gibt das Buch einen Überblick über die Begriffe, Konzepte und Methoden der Hochfrequenztechnik. Es werden die wichtigsten Entwicklungswerzeuge vorgestellt und aktuelle Fragestellungen und Probleme aus der Praxis aufgegriffen und erklärt. Das Buch richtet sich an Studierende der Elektro-, Informations- und Kommunikationstechnik sowie Ingenieure in der Praxis.

Die zweite Auflage wurde komplett überarbeitet und um einige Themen und Begrifflichkeiten wie das Okumura-Hata-Modell und das Clutter-Factor-Modell erweitert.

**Aus dem Inhalt:** Elektromagnetische Felder und Wellen; Leitungstheorie und Signale auf Leitungen; Wellenleiter; Streuparameter; Hochfrequenzbauelemente und -schaltungen; Antennen; Funkwellen



Auf der Website

[http://www.fh-dortmund.de/gustrau\\_hochfrequenztechnik](http://www.fh-dortmund.de/gustrau_hochfrequenztechnik)

finden Sie Musterlösungen und 3D-Simulationen.

Der Autor:

Prof. Dr.-Ing. Frank Gustrau  
lehr Hochfrequenztechnik  
und Grundlagen der Kom-  
munikationstechnik an der  
FH Dortmund.

HANSER

[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

€ 29,99 [D] | € 30,90 [A]

ISBN 978-3-446-43245-1



9 783446 432451