Esercizi di **MATEMATICA DISCRETA**
C.L. **Informatica**

1. Si consideri la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, *)$, dove la legge di composizione interna $*$ è definita come segue:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x * y = x - y + 3.$$

   (a) Stabilire se $*$ è una legge associativa e/o commutativa
   (b) determinare l'eventuale elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Z}, *)$
   (c) se la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, *)$ ammette elemento neutro, determinare gli (eventuali) elementi di $\mathbb{Z}$ che hanno inverso rispetto alla legge $*$
   (d) concludere se la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, *)$ è un monoide o un gruppo (abeliano)
   (e) stabilire se $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto a $*$ (data una struttura algebrica $(A, \cdot)$, si dice che un sottoinsieme K di A è chiuso rispetto a "$\cdot$" se $\forall x, y \in K,\ x \cdot y \in K$)
   (f) stabilire se l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari è chiuso rispetto a $*$
   (g) stabilire se l'insieme $\mathbb{D}$ dei numeri dispari è chiuso rispetto a $*$
   (h) nel caso che $(\mathbb{Z}, *)$ sia un gruppo, stabilire se $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ ne sono sottogruppi.

2. Si consideri la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \bullet)$, dove la legge di composizione interna $\bullet$ è definita come segue:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \bullet y = xy + x.$$

   (a) Stabilire se $\bullet$ è una legge associativa e/o commutativa
   (b) determinare l'eventuale elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \bullet)$
   (c) se la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \bullet)$ ammette elemento neutro, determinare gli (eventuali) elementi di $\mathbb{Z}$ che hanno inverso rispetto alla legge $\bullet$

(d) concludere se la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \bullet)$ è un monoide o un gruppo (abeliano)

(e) stabilire se $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto a $\bullet$

(f) stabilire se l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari è chiuso rispetto a $\bullet$

(g) stabilire se l'insieme $\mathbb{D}$ dei numeri dispari è chiuso rispetto a $\bullet$

(h) nel caso che $(\mathbb{Z}, \bullet)$ sia un gruppo, stabilire se $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ ne sono sottogruppi.

3. Si consideri la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \oplus)$, dove la legge di composizione interna $\oplus$ è definita come segue:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \oplus y = x + y + 1.$$

(a) Stabilire se $\oplus$ è una legge associativa e/o commutativa

(b) determinare l'eventuale elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \oplus)$

(c) se la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \oplus)$ ammette elemento neutro, determinare gli (eventuali) elementi di $\mathbb{Z}$ che hanno inverso rispetto alla legge $*$

(d) concludere se la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \oplus)$ è un monoide o un gruppo (abeliano)

(e) stabilire se $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto a $\oplus$

(f) stabilire se l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari è chiuso rispetto a $\oplus$

(g) stabilire se l'insieme $\mathbb{D}$ dei numeri dispari è chiuso rispetto a $\oplus$

(h) nel caso che $(\mathbb{Z}, \oplus)$ sia un gruppo, stabilire se $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ ne sono sottogruppi.