ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA C.L. **INFORMATICA**

Esercizi sulla teroria degli insiemi

1. Stabilire quali delle seguenti scritture sono corrette:

$$2 \in \mathbb{R}, \quad \frac{2}{3} \subset \mathbb{Q}, \quad \sqrt{3} \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \emptyset, \quad \{-3\} \subset \mathbb{Q},$$

$$\{2\} \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \quad \emptyset \in \{\emptyset\}, \quad \emptyset \subset \{\emptyset\}, \quad \mathbb{N} \in \mathbb{Z}.$$

2. Considerati gli insiemi $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $Y = \{a, b, e, f, g\}$, stabilire se:
   (a) $X \subset Y$
   (b) $Y \subset X$
   (c) $X \cap Y = \emptyset$

3. Considerati gli insiemi $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{6, 7, 8\}$, stabilire se:
   (a) $X \subset Y$
   (b) $Y \subset X$
   (c) $X \cap Y = \emptyset$

4. Considerati gli insiemi $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a\}$, stabilire se:
   (a) $X \subset Y$
   (b) $Y \subset X$
   (c) $X \cap Y = \emptyset$

5. Considerati gli insiemi $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{1, 2, a, e, f, \star\}$, calcolare: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$, $A - B$, $B - A$.

6. Considerato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e il suo sottoinsieme $B = \{2, 4, 5\}$, determinare $\complement_A(B)$, $A - B$, $B - A$.

7. Determinare l'insieme delle parti dei seguenti insiemi:

$$\emptyset, \quad A = \{1\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{1, 2, 3\}, \quad D = \{1, 2, 3, 4\}.$$

8. Stabilire se le seguenti relazioni sono di equivalenza sull'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$. In caso affermativo, determinare l'insieme quoziente.
   (a) $\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (e, e), (b, a), (b, b), (c, a), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d), (d, d)\}$
   (b) $\mathcal{R}_2 = \{(a, a), (b, c), (b, b), (c, a), (c, c), (a, b), (a, c), (d, d)\}$
   (c) $\mathcal{R}_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
9. Sia
$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \ 3|(a^2 - b^2)\}$$
Si verifichi che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e si determinino le classi di equivalenza di 5,7,-2.
10. Sia $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{N}$
$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \ \Leftrightarrow \ ab = cd.$$
Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su X. Si determinino le classi di equivalenza degli elementi $(0, 0)$, $(1, 9)$ di X.
11. Sia $X = \mathbb{R}^2$; si consideri su X la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \ \Leftrightarrow \ b = d \text{ e } \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a - c = m.$$
Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su X. Si determinino le classi di equivalenza individuate dagli elementi $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(\pi, 0)$di X.
12. Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
$$(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \ a^2 = b^2.$$
Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$. Si determini la classe di equivalenza di ogni $a \in \mathbb{R}$.
13. Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$
$$(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \ 3|(2a + b).$$
Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Si determinino le classi di equivalenza di 1, 0, -5.