$R = \{(p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $p - q = h\}$

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right) \notin R$ $\qquad$ $(x,y) \in R$ $\qquad$ $[0]_R$

R è una relazione di equivalenza

R è riflessiva: $\forall p \in \mathbb{Q}$ $\quad (p,p) \in R$ da dimostrare.

$\forall p \in \mathbb{Q} \quad p - p = 0 \in \mathbb{Z}$ e quindi $\underline{\forall p \in \mathbb{Q}}$ $\exists h = 0 \in \mathbb{Q}$ tale che $p - p = h$

per cui $\underline{(p,p) \in R}$.

R è simmetrica: $\forall p,q \in \mathbb{Z} \quad (p,q) \in R \Rightarrow (q,p) \in R$

Siano $p,q \in \mathbb{Z}$ con $(p,q) \in R \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $p - q = h \Rightarrow$

$\exists K = -h \in \mathbb{Z}$ tale che $q - p = K \Rightarrow (q,p) \in R$

R è transitiva: $\forall p,q,r \in \mathbb{Z} \quad (p,q) \in R \wedge (q,r) \in R \Rightarrow (p,r) \in R$

Siano $p,q,r \in \mathbb{Z}$ tali che $(p,q) \in R \wedge (q,r) \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $p - q = h) \wedge (\exists K \in \mathbb{Z}$ tale che $q - r = K) \Rightarrow$

$\Rightarrow p - r = p - q + q - r = h + K \Rightarrow \exists t = h + k \in \mathbb{Z}$ tale che $p - r = t \Rightarrow$

$\Rightarrow (p,r) \in R$.

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right) \notin R$ perché $\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3 + 10}{6} = \frac{13}{6} \notin \mathbb{Z}$

$(-2, -5) \in R$ perché $-2 - (-5) = -2 + 5 = 3 \in \mathbb{Z}$

$\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ $\qquad \frac{5}{2} - \frac{11}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \in \mathbb{Z}.$

$[0]_R = \{q \in \mathbb{Q} : (0, q) \in R\} = \{q \in \mathbb{Q} : \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $0 - q = h\}$

$q \in \mathbb{Q} \qquad q \in [0]_R \iff -q \in \mathbb{Z} \iff q \in \mathbb{Z}$

$[0]_R = \mathbb{Z}.$

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ g $\qquad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

$x \mapsto \frac{2x-3}{5} \qquad n \mapsto 3n + 4$

f è ingettiva : siano $\underline{x_1, x_2 \in \mathbb{Q}}$ con $\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}$ $\Rightarrow \frac{2x_1 - 3}{5} = \frac{2x_2 - 3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow \cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2 \Rightarrow \underbrace{x_1 = x_2}.$

f è surgettiva : sia $y \in \mathbb{Q}$ cerchiamo, se esiste, $x \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) = y$

$f(x) = y \iff \frac{2x-3}{5} = y \iff 2x - 3 = 5y \iff 2x = 5y + 3 \iff x = \frac{5y+3}{2} \in \mathbb{Q}$

$\exists x = \frac{5y+3}{2} \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) = y$

non è obbligatorio ma si può fare la verifica

$f\left(\frac{5y+3}{2}\right) = \frac{\cancel{2}\left(\frac{5y+3}{\cancel{2}}\right) - 3}{5} = \frac{5y + \cancel{3} - \cancel{3}}{5} = \frac{\cancel{5}y}{\cancel{5}} = y$

La funzione $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ è bigettiva e quindi esiste la funzione inversa $f^{-1}: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita nel modo che segue

$\forall y \in \mathbb{Q} \quad f^{-1}(y) = \frac{5y+3}{2}$ perché $f\left(\frac{5y+3}{2}\right) = y$

cioè $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{Q}$

$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x-3}{5}\right) = \frac{\cancel{5} \cdot \left(\frac{2x-3}{\cancel{5}}\right) + 3}{2} = \frac{2x - \cancel{3} + \cancel{3}}{2} = x$$

g è ingettiva ma non surgettiva per esercizio

$\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$

$g \circ f$ non esiste perché l'insieme di arrivo di f è diverso dall'insieme di partenza di g.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{Q} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

$f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(3n+4) = \frac{2(3n+4)-3}{5} =$$

$$= \frac{6n+8-3}{5} = \frac{6n+5}{5}$$