Alcuni esercizi risolti di **MATEMATICA DISCRETA**
C.L. **Informatica**

1. È assegnata la permutazione di S_9:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 9 & 7 & 4 & 6 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scomporre f nel prodotto di cicli disgiunti e determinarne la classe di permutazione
(b) determinare la permutazione inversa della permutazione f
(c) determinare l'ordine di f nel gruppo $(S_9, \circ)$
(d) scrivere gli elementi del sottogruppo H di $(S_9, \circ)$ generato da f
(e) determinare l'ordine di tutti gli elementi di H
(f) scrivere la tabella di $(H, \circ)$.

Soluzione 1a) Risulta $f = (2\ 5\ 4\ 7\ ) \circ\ (3\ 9)$ e quindi f è di classe pari. Infatti $\sigma_1 = (2\ 5\ 4\ 7\ )$ e $\sigma_2 = (3\ 9)$ sono due cicli di lunghezza pari e quindi di classe dispari, pertanto $\Delta(f) = \Delta(\sigma_1) \cdot \Delta(\sigma_2) = (-1) \cdot (-1) = 1$.

1b) La permutazione inversa di f è:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 & 2 & 6 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

1c) L'ordine di f in $(S_9, \cdot)$ è:

$$\mid f \mid = m.c.m.(\mid \sigma_1 \mid, \mid \sigma_2 \mid) = m.c.m.(4, 2) = 4.$$

1e) $H =< f >= \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{f, f^2, f^3, f^4 = id\}$. Si può facilmente verificare che $f^2 = (2\ 4) \circ (5\ 7)$, che $f^3 = (2\ 7\ 4\ 5) \circ (3\ 9)$ e che in effetti $f^4 = f^2 \circ f^2 = id$ (ciò a conferma del risultato teorico $|f\mid = min\{h \in \mathbb{N}^* \mid f^h = id\}$). Naturalmente tutte le altre potenze di f coincidono con una tra le permutazioni f, f^2, f^3, f^4.

1f) La tabella di $(H, \circ)$ può essere scritta nei seguenti modi:

$\cdot$	id	f	f^2	f^3
id	id	f	f^2	f^3
f	f	f^2	f^3	id
f^2	f^2	f^3	id	f
f^3	f^3	id	f	f^2

$\cdot$	id	f	f^2	f^3
id	id	$(2\ 5\ 4\ 7\ ) \circ\ (3\ 9)$	$(2\ 4) \circ (5\ 7)$	$(2\ 7\ 4\ 5) \circ (3\ 9)$
f	$(2\ 5\ 4\ 7\ ) \circ\ (3\ 9)$	$(2\ 4) \circ (5\ 7)$	$(2\ 7\ 4\ 5) \circ (3\ 9)$	id
f^2	$(2\ 4) \circ (5\ 7)$	$(2\ 7\ 4\ 5) \circ (3\ 9)$	id	$(2\ 5\ 4\ 7\ ) \circ\ (3\ 9)$
f^3	$(2\ 7\ 4\ 5) \circ (3\ 9)$	id	$(2\ 5\ 4\ 7\ ) \circ\ (3\ 9)$	$(2\ 4) \circ (5\ 7)$

2. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo di ordine 4.

   (a) Se $(G, \cdot)$ è ciclico, determinare l'ordine di tutti gli elementi di G

   (b) se $(G, \cdot)$ non è ciclico, determinare l'ordine di tutti gli elementi di G e scriverne la tabella moltiplicativa

   (c) esibire un esempio di gruppo ciclico e di uno non ciclico di ordine 4.

Soluzione 2a) Sia g un generatore di $(G, \cdot)$. Allora

$$G = \{g^0 = 1_G, g, g^2, g^3\}.$$

Inoltre $|g^2| = \frac{4}{M.C.D.(4,2)} = 2$, $\quad |g^3| = \frac{4}{M.C.D.(4,3)} = 4$, e quindi g^3 è un altro generatore di $(G, \cdot)$.

2b) Sia $x \in G$, $x \neq 1_G$. Per il Teorema di Lagrange, $|x|$ è un divisore di 4 e quindi può essere 1, 2, 4. Ma x non è l'elemento neutro e quindi $|x| \neq 1$; inoltre $(G, \cdot)$ non è ciclico, pertanto nessun suo elemento può avere ordine 4 e dunque $|x| = 2$, cioè ogni elemento di G diverso dall'unità di G ha ordine 2; ovvero, posto $G = \{1_g, a, b, c\}$, si ha $|a| = |b| = |c| = 2$ e $a^2 = b^2 = c^2 = 1_G$. Inoltre deve essere $a \cdot b = b \cdot a = c$, $a \cdot c = c \cdot a = b$, $b \cdot c = c \cdot b = a$. Siano, infatti $x, y \in \{a, b, c\}$, $x \neq y$. Se fosse $x \cdot y = x$, allora moltiplicando a sinistra per x si avrebbe $x^2 \cdot y = x^2$ e quindi $y = 1_G$, assurdo. Analogamente si vede che non può essere $x \cdot y = y$. Si conclude che $(G, \cdot)$ è abeliano e la tabella di $(G, \cdot)$ (gruppo di Klein) è

$\cdot$	1_G	a	b	c
1_G	1_G	a	b	c
a	a	1_G	c	b
b	b	c	1_G	a
c	c	b	a	1_G

2c) Un esempio di gruppo ciclico di ordine 4 è $(\mathbb{Z}_4, +)$; anche il gruppo H dell'esercizio 1d) è un esempio di gruppo ciclico di ordine 4. Invece $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, +)$ è un gruppo non ciclico di ordine 4, come si può controllare facilmente usando la formula $|(a, b)| = m.c.m.(|a|, |b|)$ per calcolare gli ordini degli elementi di $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.