$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\8&1&5&9&3&4&2&7&6\end{pmatrix}\qquad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&4&9&5&1&8&6&3&2\end{pmatrix}$$

f^{-1}, g^{-1}, $g\circ f$, $f\circ g$, $(g\circ f)^{-1}$, $(f\circ g)^{-1}$

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&7&5&6&3&9&8&1&4\end{pmatrix}=(1\,2\,7\,8)\circ(3\,5)\circ(4\,6\,9)$$

$$g^{-1}=\begin{pmatrix}7&4&9&5&1&8&6&3&2\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&9&8&2&4&7&1&6&3\end{pmatrix}=$$

$$=(1\,5\,4\,2\,9\,3\,8\,6\,7)$$

$f=(1\,8\,7\,2)\circ(3\,5)\circ(4\,9\,6)$ $\qquad$ $g=(1\,7\,6\,8\,3\,9\,2\,4\,5)$

classe di permutazione di f: dispari dispari pari

quindi la classe di permutazione di f è pari.

$f=(1\,2)\circ(1\,7)\circ(1\,8)\circ(3\,5)\circ(4\,6)\circ(4\,9)$ $\to$ classe di permutazione pari

g ha classe di permutazione pari perché è un ciclo di lunghezza dispari: $g=(1\,5)\circ(1\,4)\circ(1\,2)\circ(1\,9)\circ(1\,3)\circ(1\,8)\circ(1\,6)\circ(1\,7)$.

per esercizio calcolare la classe di permutazione di f^{-1} e di g^{-1}.

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\8&1&5&9&3&4&2&7&6\end{pmatrix}\qquad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&4&9&5&1&8&6&3&2\end{pmatrix}$$

$$g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&4&9&5&1&8&6&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\8&1&5&9&3&4&2&7&6\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 9 & 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = (1\,3) \circ (2\,7\,4) \circ (5\,9\,8\,6)$$

dispari pari dispari $\to$ pari

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 5 & 9 & 3 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 9 & 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 8 & 1 & 6 & 3 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (1\,5\,6\,3\,8\,4) \circ (7\,9)$$

pari.

scrivete $f \circ g$ e $g \circ f$ come prodotto di scambi e calcolate le permutazioni inverse.

$$a = r_h 10^h + r_{h-1} 10^{h-1} + \dots + r_1 10 + r_0$$

$$\begin{cases} 1221 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \\ \underbrace{1+2+2+1}_{} = 6 \text{ multiplo di } 3 \end{cases}$$

1221 divisibile per 3

$a \equiv b \pmod{n}$ allora $n \mid a \iff n \mid b$

$10 \equiv 1 \pmod{9}$ $\qquad$ $10 \equiv 1 \pmod{3}$

$10^k \equiv 1^k = 1 \pmod{9}$ $\qquad$ $10^k \equiv 1 \pmod{3}$

$$a = r_h 10^h + r_{h-1} 10^{h-1} + \dots + r_1 10 + r_0 \equiv r_h + r_{h-1} + \dots + r_1 + r_0 \pmod{9}$$
$$\pmod{3}$$

$9 \mid a \iff 9 \mid r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$

$3 \mid a \iff 3 \mid r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$

$10 \equiv -1 \pmod{11}$ $\qquad$ $10-(-1)=11$ multiplo di 11

$10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$ $\qquad$ $10^k \equiv 1 \pmod{11}$ se k è pari

$10^k \equiv -1 \pmod{11}$ se k è dispari

$$a = r_n 10^n + r_{n-1}10^{n-1} + \dots + r_1 + r_0 \equiv r_n(-1)^n + r_{n-1}(-1)^{n-1} + \dots - r_1 + r_0 \pmod{11}$$

$$11 \mid a \iff 11 \mid r_n(-1)^n + r_{n-1}(-1)^{n-1} + \dots - r_1 + r_0 .$$

$\overset{a}{3}x + \overset{b}{4}y = 5$ $\qquad$ M.C.D.$(3,4) = 5$

$\overset{a}{3} = \overset{q_1}{0}\cdot \overset{b}{4} + \overset{r_1}{3}$

$\overset{b}{4} = \overset{q_2}{1}\cdot \overset{r_1}{3} + \overset{r_2}{1} \implies 1 = 4 + 3(-1)$

$\overset{r_1}{3} = 3 \cdot \overset{r_2}{1} + \overset{r_3}{0}$

$1 = 3(-1) + 4\cdot 1$

$5 = 3(-5) + 4\cdot 5$

una soluzione è $(-5, 5)$ $\qquad$ $3\cdot(-5) + 4\cdot 5 = 5$

$\bar{a} = a \qquad \bar{b} = b \qquad (-5 + 4h, 5 - 3h) \qquad h \in \mathbb{Z}$

tutte e sole le soluzioni dell' equazione Diofantea.

$\forall p, q \in \mathbb{Q}^* \quad (p,q) \in \mathcal{R} \iff \exists h \in \mathbb{Q}$ tale che $9pq = h^2$

di equivalenza

$\mathcal{R}$ è riflessiva: $\forall p \in \mathbb{Q}^* \quad 9 \cdot p \cdot p = 9p^2 = (3p)^2$

e quindi esiste $h = 3p \in \mathbb{Q}$ tale che $9p \cdot p = h^2$ per cui $(p,p) \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ è simmetrica $\forall p, q \in \mathbb{Q}^* \quad 9q \cdot p = 9pq$

$(p,q) \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Q}$ tale che $9 \cdot p \cdot q = h^2$ ma anche
$9q \cdot p = h^2$

per cui $(q,p) \in \mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ è transitiva: Siano $p, q, r \in \mathbb{Q}^*$ tali che $(p,q) \in \mathcal{R} \wedge (q,r) \in \mathcal{R}$
$\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Q}$ tale che $9 \cdot p \cdot q = h^2 \wedge \exists k \in \mathbb{Q}$ tale che $9 \cdot q \cdot r = k^2$
$\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Q}$ tale che $p = \frac{h^2}{9q} \wedge \exists k \in \mathbb{Q}$ tale che $r = \frac{k^2}{9q}$

$$\Rightarrow \quad 9pr = \cancel{9}p \cdot \frac{k^2}{\cancel{9}q} = p \cdot \frac{k^2}{q} = \frac{h^2}{9q} \cdot \frac{k^2}{q} = \frac{h^2 \cdot k^2}{9q^2} = \left(\frac{hk}{3q}\right)^2$$

quindi esiste $t = \frac{hk}{3q} \in \mathbb{Q}$ tale che $9pr = t^2$, per cui

$(p,r) \in R$.