1. BREVE CENNO DI LOGICA CLASSICA

La **logica** può essere definita come la scienza che studia il ragionamento deduttivo, ovvero le condizioni in base alle quali un ragionamento risulta *corretto* e *vero*. Un ragionamento è corretto se segue uno schema logico valido. Per esempio:

"se A è B e B è C allora A è C".

L'esempio più classico di questo tipo di ragionamento è:

" Socrate è un uomo, tutti gli uomini sono mortali, allora Socrate è mortale".

In questo caso

- A: Socrate
- B: uomo
- C: mortale

Si tratta di un ragionamento non solo corretto, ma anche vero nella sua conclusione. Il ragionamento:

"il canguro è un animale, gli animali sono mammiferi,
allora il canguro è un mammifero"

è corretto come il primo, ma non è vero nella sua conclusione, perchè si basa su un giudizio ("gli animali sono mammiferi") falso. Infine il ragionamento:

"il canguro è un marsupiale, i marsupiali sono animali, dunque Socrate è mortale"

non è corretto nel suo schema logico, ma il giudizio finale è corretto.

Si può asserire che la correttezza di un ragionamento dipende esclusivamente dalla *forma*, ovvero dal fatto che il ragionamento si adatti a certe regole formali: si tratta della branca della logica detta **logica formale**.

D'altra parte la verità di un ragionamento riguarda la *materia* del ragionamento, il cui significato sarà tra poco chiarito: si tratta della **logica materiale**. Si pongono, ora, alcune definizioni, che sono alla base di questo tentativo di schematizzazione.

Definizione 1. Il **concetto** è la rappresentazione universale di qualcosa.

Bisogna fare attenzione a non confondere il concetto e l'immagine: entrambi contengono un certo messaggio, ma si distinguono in quanto uno dipende dal "pensare" e l'altra dal "sentire". Le immagini rappresentano aspetti sensibili delle cose, i concetti ne rappresentano il contenuto intelligibile. Ad esempio, quando si parla del concetto di uomo, non si pensa ad un particolare essere umano, ma all'essere vivente che ha tutte le caratteristiche umane. Se si vede un oggetto di colore giallo, se ne riconosce il colore proprio perchè si ha il concetto di giallo.

Definizione 2. Il **giudizio** è l'operazione per la quale viene negato o affermato un concetto rispetto ad un'altro: in altre parole, il giudizio, rispettivamente, unisce o divide tra loro due concetti.

Esempio 1. Dicendo: "l'informatico è un uomo", si uniscono i concetti "informatico" e "uomo"; dicendo "il serpente non è un mammifero", i concetti "serpente" e "mammifero" vengono separati.

Definizione 3. I due concetti che vengono "uniti" o "divisi" nel giudizio costituiscono la **materia** del giudizio. In particolare la materia è formata da

- **soggetto**
- **predicato**.

L'*affermazione* e la *negazione*, rispettivamente, uniscono o dividono soggetto e predicato.

Esempio 2. Nell'Esempio 1, nel giudizio "l'informatico è un uomo", naturalmente "informatico" è il soggetto, "uomo" è predicato e la forma del giudizio è un'affermazione; nel giudizio "il serpente non è un mammifero" il soggetto è "serpente", il predicato è "mammifero" e il giudizio è una negazione.

Definizione 4. La **proposizione** è una frase mediante la quale un soggetto viene legato mediante il verbo essere (**copula**) ad un predicato. Quindi la proposizione è formata dai seguenti elementi:

- soggetto
- predicato
- copula.

Osservazione 1. Definita in questi termini, una proposizione potrebbe essere vera o falsa: questo può essere stabilito tramite il *giudizio*.

Bisogna dire che logica classica è riduttiva perchè incapace di render conto finanche del linguaggio naturale. Inoltre ci sono aspetti di questo linguaggio, come il contesto o l'intonazione, che certamente la logica non riesce ad esprimere, ma spesso il significato della frase dipende proprio da questi elementi.

Invece, nel caso del linguaggio matematico, la logica è abbastanza appropriata. Anche in questo caso, però non si usa rigorosamente la formalizzazione logica, perchè il discorso ne risulterebbe eccessivamente appesantito.

Alla base della logica (matematica) ci sono le così dette *proposizioni atomiche*, o *dichiarative*, ovvero le proposizioni (nel senso della logica classica) delle quali (tramite giudizio) si possa affermare con certezza se sono vere o false. Se una proposizione atomica è vera, ad essa si attribuisce valore di verità 1 (o V o anche T), se è falsa si attribuisce ad essa valore di verità 0 (o F).

Esempio 3.

- P: 8 è un numero primo
- Q: il cane è un mammifero.

Certamente la proposizione P è falsa, la proposizione Q è vera. Quindi il valore di verità di P è 0, il valore di verità di Q è 1.

Esempio 4. Le proposizioni

- R: il mare è rilassante
- S: x è positivo

non possono essere classificate come proposizioni atomiche: R non è di carattere oggettivo, per cui ciascuno può attribuire ad essa valore di verità 0 o 1 secondo i propri gusti; S presenta una variabile e quindi, come si vedrà in seguito, è un *predicato*. Le proposizioni atomiche possono essere combinate tramite i *connettivi logici*.

Definizione 5. (NEGAZIONE) Data una proposizione P, la negazione della proposizione P si indica con

$$\bar{P} \text{ oppure } \neg P.$$

Se P è vera allora $\neg P$ è falsa. Se P è falsa allora $\neg P$ è vera.

Esempio 5. La proposizione

P: "gli iscritti all'università di Bari sono meno di 1000"

è falsa, dunque ha valore di verità 0; quindi

$\neg P$: "non è vero che gli iscritti all'università di Bari sono meno di 1000"

che si traduce in

$\neg P$: "gli iscritti all'università di Bari sono più di 1000"

ha valore di verità 1.

Esempio 6. La proposizione
Q: "Matera non è una citta della Puglia"
è vera e dunque valore di verità 1. Pertanto
$\neg Q$: "Matera è una citta della Puglia"
è falsa e quindi ha valore di verità 0.

Dalla definizione si deduce subito la tavola di verità della negazione

P	$\neg P$
1	0
0	1

Definizione 6. (CONGIUNZIONE, $\wedge$) Siano P e Q due proposizioni. La proposizione "P e Q"(congiunzione di P e Q) si denota con

$$P \wedge Q.$$

È vera quando P e Q sono entrambe vere ed è falsa altrimenti (ovvero falsa quando almeno una delle due è falsa).

La tavola di verità della congiunzione è:

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Esercizio 1. Scrivere la congiunzione delle seguenti proposizioni.
P: La mosca è un insetto.
Q: 4 è un numero primo.
Allora si ha:

$P \wedge Q$: La mosca è un insetto e 4 è un numero primo.

Naturalmente $P \wedge Q$ ha valore di verità 0 perchè P ha valore di verità 1 mentre S ha valore di verità 0

Esercizio 2. Scrivere la congiunzione delle seguenti proposizioni.
R: -5 è un numero negativo.
S: 8 è un numero pari.
Allora si ha:

$R \wedge S$: -5 è un numero negativo e 8 è un numero pari.

Certamente $R \wedge S$ ha valore di verità 1 perchè sia R che S hanno valore di verità 1.

Definizione 7. (DISGIUNZIONE, $\vee$) Siano P e Q due proposizioni. La proposizione "P o Q"(disgiunzione di P e Q) si denota con $P \vee Q$ ed è falsa quando P e Q sono entrambe false ed è vera altrimenti (ovvero vera quando almeno una delle due è vera).

Si deduce la tavola di verità della disgiunzione:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Esercizio 3. Scrivere la disgiunzione delle seguenti proposizioni.
P: 3 è un numero dispari.
Q: 3 è un numero primo.
Allora si ha:

$P \vee Q$: 3 è un numero dispari o 3 è un numero primo.

Ovviamente $P \vee Q$ ha valore di verità 1 perché P e Q hanno valore di verità 1.

Si nota con questo esercizio che la disgiunzione ha un significato diverso rispetto alla lingua italiana: infatti in italiano "o" ha più la valenza di escludere uno dei due casi in considerazione, cioè corrisponde al latino "aut". Il connettivo $\vee$ corrisponde invece al latino "vel", che ammette la possibilità che entrambi i casi si possano verificare.

Esercizio 4. Scrivere la disgiunzione delle seguenti proposizioni.
R: 4 è un numero dispari.
S: 4 è un numero pari.
Allora si ha:

$R \vee S$: 4 è un numero dispari o 4 è un numero pari.

Ovviamente $R \vee S$ ha valore di verità 1 perché, anche se R ha valore di verità 0, S ha valore di verità 1.

Esercizio 5. Scrivere la tabella di verità di $P \wedge \neg P$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
1	0	0
0	1	0

La proposizione $P \wedge \neg P$ è sempre falsa.

Esercizio 6. Scrivere la tavola di verità di $P \vee \neg P$

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
1	0	1
0	1	1

La proposizione $P \vee \neg P$ è sempre vera.

Definizione 8. (IMPLICAZIONE, $\longrightarrow$) Siano P e Q due proposizioni. La proposizione implicazione "P implica Q"(si può anche leggere "se P allora Q") si denota con

$$P \longrightarrow Q.$$

È falsa quando P è vera e Q è falsa ed è vera altrimenti (in altre parole, se P è vera allora Q deve essere vera).

Si può scrivere la tavola di verità della implicazione

P	Q	$P \longrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Esercizio 7. Scrivere l'implicazione delle seguenti proposizioni:
P: La penna bic scrive.
Q: la penna bic ha inchiostro.
$P \longrightarrow Q$: Se la penna bic scrive allora la penna bic ha inchiostro.
Se la penna non scrive non si può sapere se ha inchiostro o meno.

Esercizio 8. Scrivere l'implicazione delle seguenti proposizioni:
P: Mario va negli Stati Uniti
Q: Mario ha il passaporto
$P \longrightarrow Q$: Se Mario va negli Stati Uniti allora Mario ha il passaporto.
Se Mario non va negli Stati Uniti non si può dire nulla.

Definizione 9. (DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA $\longleftrightarrow$) Due proposizioni P e Q si dicono equivalenti e si scrive

$$P \longleftrightarrow Q,$$

si può anche leggere "P se e solo se Q") se P è vera se e soltanto se Q è vera.

La tavola di verità dell'equivalenza è:

P	Q	$P \longleftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Formule della logica proposizionale

Definizione 10. Siano assegnati n simboli,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

che si chiameranno **variabili proposizionali**. Le **formule della logica proposizionale** si ottengono a partire da $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nel seguente modo:

(1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono formule
(2) se P e Q sono formule, allora sono formule anche

$$\neg P,\ P \wedge Q,\ P \vee Q,\ P \longrightarrow Q,\ P \longleftrightarrow Q$$

(3) le formule sono espressioni ottenute esclusivamente per mezzo di (1) e (2).

Osservazione 2. Le variabili proposizionali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ previste nella Definizione 10 non sono in generale delle proposizioni, ma sono *placeholders* (variabili metasintattiche), alle quali si possono sostituire delle proposizioni (atomiche o meno). Si consideri, per esempio, la formula

$$a \longrightarrow (a \vee b),$$

dove a e b sono variabili. Allora si potrebbe sostituire ad a la proposizione "$1+3=4$" e a b "$5<-1$" ottenendo

$$1+3=4 \longrightarrow (1+3=4) \vee (5<-1).$$

Esempio 7. Siano p e q variabili proposizionale. Allora sono formule della logica proposizionale:

$$\begin{array}{ll} (1) & (p \wedge q) \longrightarrow \big(\neg(p \vee q) \longrightarrow (p \wedge (\neg q))\big) \\ (2) & (p \longrightarrow q) \longleftrightarrow \big((\neg q) \longrightarrow (\neg p)\big). \end{array}$$

Si può limitare l'uso delle parentesi usando le seguenti convenzioni di precedenza:

- prima "$\neg$"
- dopo "$\wedge$" e "$\vee$"
- infine "$\longrightarrow$" e "$\longleftrightarrow$"

In questo modo (1) e (2) possono essere scritte rispettivamente come:

$$p \wedge q \longrightarrow \big(\neg(p \vee q) \longrightarrow p \wedge \neg q\big)$$

$$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow \big(\neg q \longrightarrow \neg p\big).$$

Le formule della logica proposizionale danno luogo alle loro tavole di verità, che si sviluppano in base alle tavole di verità dei connettivi logici. Se una formula contiene k variabili proposizionali, la rispettiva tavola di verità è formata da 2^k righe, che corrispondono a tutti i possibili casi per i valori di verità delle variabili (il motivo sarà spiegato nel capitolo relativo al calcolo combinatorio). Si possono ovviamente considerare le tavole di verità di formule costruite anche a partire da altre formule, secondo la (2) della Definizione 10.

Definizione 11. Una formula proposizionale sempre vera viene detta **tautologia**; una formula proposizionale sempre falsa viene detta **contraddizione**.

Esempio 8. La formula $p \vee \neg p$ è una tautologia (legge del terzo escluso); la formula $p \wedge \neg p$ è una contraddizione.

Definizione 12. Siano P e Q formule della logica proposizionale. Si dice che Q è conseguenza logica di P e si scrive

$$P \Longrightarrow Q$$

quando Q è vera ogni qualvolta è vera P.

Osservazione 3. In altre parole dire che Q è conseguenza logica di P vuol dire che certamente Q ha valore di verità V quando P ha valore di verità V.

Definizione 13. Si dice che P e Q sono semanticamente equivalenti se P è conseguenza logica di Q e Q è conseguenza logica di P; ovvero se $P \Longrightarrow Q$ e $Q \Longrightarrow P$. Si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q$$

Osservazione 4. Si può anche parlare di conseguenza logica di più di una formula della logica proposizionale: vale a dire se $P_1, \ldots, P_k, Q$ sono $k+1$ formule, si dice che Q è conseguenza logica di $P_1, \ldots, P_k$ e si scrive:

$$(P_1, \ldots, P_k) \Longrightarrow Q$$

se Q è vera quando sono vere $P_1, \ldots, P_k$.

Esempio 9. Siano P e Q due formule della logica proposizionale. Allora Q è conseguenza logica di P e di $P \longrightarrow Q$. In simboli:

$$(P, P \longrightarrow Q) \Longrightarrow Q.$$

Infatti, considerata la tavola di verità:

P	Q	$P \longrightarrow Q$	Q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

si osserva che nell'unico caso (il primo) nel quale sia P che $P \longrightarrow Q$ hanno valore di verità 1, anche Q ha valore di verità 1.

Esempio 10. Siano A e B due formule. Si osserva facilmente che $A \wedge B$ non è conseguenza logica di $A \vee B$, in quanto se A ha valore di verità 0 e B ha valore di verità 1, allora $A \vee B$ ha valore di verità 1, ma $A \wedge B$ ha valore di verità 0.

Proposizione 1. *Siano P e Q due formule della logica proposizionale. Allora P e Q sono semanticamente equivalenti se e solo se hanno la stessa tavola di verità.*

Dimostrazione. Si suppone che P e Q siano semanticamente equivalenti. Quando P ha valore di verità 1, allora anche Q deve avere valore di verità 1, perchè Q è conseguenza logica di P. Quando P ha valore di verità 0, allora anche Q deve avere valore di verità 0, altrimenti P non potrebbe essere conseguenza logica di Q. La dimostrazione si completa scambiando i ruoli di P e Q fra loro.
Se, viceversa, P e Q hanno la stessa tavola di verità, allora quando P è vera Q è vera e quindi Q è conseguenza logica di P; quando Q è vera anche P è vera e quindi P è conseguenza logica di Q. Segue che P e Q sono semanticamente equivalenti.

Osservazione 5. Si osserva facilmente, come conseguenza della precedente proposizione, che due formule sono semanticamente equivalenti se e soltanto se $P \longleftrightarrow Q$ è una tautologia.

Esempio 11. Siano P e Q formule. Allora sono semanticamente equivalenti $P \longrightarrow Q$ e $\urcorner Q \longrightarrow \urcorner P$, ovvero:

$$(P \longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\urcorner Q \longrightarrow \urcorner P).$$

Si prova utilizzando la proposizione precedente, con la seguente tavola di verità:

P	Q	$\urcorner P$	$\urcorner Q$	$P \longrightarrow Q$	$\urcorner Q \longrightarrow \urcorner P$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Esercizi 1. Siano P e Q formule. Provare che valgono le seguenti equivalenze semantiche:

(1) $P \leftrightarrow Q \iff (P \longrightarrow Q \wedge Q \longrightarrow P)$
(2) $P \longrightarrow Q \iff \urcorner(P \wedge \urcorner Q)$
(3) $P \longrightarrow Q \iff \urcorner P \vee Q$
(4) $\urcorner(P \vee Q) \iff \urcorner P \wedge \urcorner Q$
(5) $\urcorner(P \wedge Q) \iff \urcorner P \vee \urcorner Q$.

Una teoria matematica si basa su un certo numero di assiomi assegnati su una certe struttura, a partire dai quali si dimostrano i **Teoremi**. Ma cos'è una dimostrazione? è la costruzione di una serie di argomentazioni consistenti che portino infine ad un'affermazione vera. Per dimostrare la validità di un argomento si potrebbe sempre far ricorso alle tavole di verità. Però questo potrebbe essere un procedimento molto lungo e noioso: se ci sono molte variabili proposizionali, le relative tavole di verità possono diventare ingestibili. Per questo si utilizzano le **regole di inferenza** o **metateoremi** che forniscono dei modelli per costruire argomentazioni anche molto complicate. La più usata delle regole di inferenza è

$$(P \wedge (P \longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q \qquad \textbf{modus ponens}.$$

Sostanzialmente: dalla validità in contemporanea di P e di $P \longrightarrow Q$ segue la validità di Q. Questa regola di inferenza dà luogo al classico metodo di dimostrazione diretta.

Un altra regola di inferenza è

$$(P \longrightarrow Q) \iff (\urcorner Q \longrightarrow \urcorner P) \qquad \textbf{modus tollens},$$

che permette di eseguire le dimostrazioni usando il metodo di dimostrazione indiretta o per contrapposizione.
Si segnalano, inoltre:

$$((P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R)) \longrightarrow (P \longrightarrow R)$$
$$(P \wedge Q) \longrightarrow P$$
$$P \longrightarrow (P \vee Q).$$

Un altro tipo di dimostrazioni sono quelle per **contraddizione** o **assurdo**. Si verifica che è una tautologia:

$$\big(\urcorner Q \longrightarrow (R \wedge \urcorner R)\big) \longrightarrow Q.$$

Nella pratica, si procede nel modo seguente: si vuol provare che Q è vero, allora si suppone che $\urcorner Q$ non sia vero e si ottiene una contraddizione di tipo $R \wedge \urcorner R$.

Predicati

Naturalmente, la logica proposizionale non è in grado di esprimere tutti i possibili enunciati della matematica. Si è visto che la proposizione
S: x è positivo
non è una proposizione atomica poiché presenta una variabile: pertanto non può essere in alcun modo, così com'è scritta, inquadrata nella logica proposizionale. Per poter dare a S un valore di verità, per prima cosa si deve definire l'universo in cui varia la x, che non è altro che un *insieme* U_x al quale x appartiene: in simboli $x \in U_x$ e inoltre si può effettuare una delle seguenti operazioni

(1) si sostituisce a x un determinato valore
(2) si fa precedere la x da un quantificatore.

I quantificatori sono:

$\forall$ che si legge "per ogni", e si chiama **quantificatore universale**

$\exists$ che si legge "esiste", e si chiama **quantificatore esistenziale**.

Si suppone che l'universo nel quale varia x sia l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Sostituendo a x i valori 6 e -3, per esempio, S diventa:
"6 è positivo" che ha valore di verità 1;
"-3 è positivo" che ha valore di verità 0.
Se si usano i quantificatori, si ha:
"$(\forall x \in \mathbb{Z})$ (x è positivo)" che ha valore di verità 0;
"$(\exists x \in \mathbb{Z})$ (x è positivo)" che ha valore di verità 1.
Se invece l'universo nel quale varia x è l'insieme

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

la proposizione

$$\text{“}(\forall x \in \mathbb{N}^*)(x \text{ è positivo})\text{”}$$

è vera, ha quindi valore di verità 1.
Si pone la seguente:

Definizione 14. Un **predicato** è un'affermazione che coinvolge una o più variabili: $x, y, z \dots$, ciascuna delle quali sia variabile in un *dominio* o *universo* D_x, D_y, $D_z, \dots$.

Ad un predicato, in generale, non si può attribuire valore di verità: lo si può a fare nel momento in cui si inseriscono opportunamente i quantificatori o si effettuano sostituzioni al posto delle variabili.
I predicati possono esprimere formalmente qualunque affermazione di carattere matematico.

Esempio 12. Si vuol esprimere sotto forma di predicato la proposizione:
P : "sommando 0 a un qualunque numero intero, si ottiene quel numero intero."
Si tratta, naturalmente, di una proposizione vera. Precisato che l'universo in cui varia la variabile x è l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, si può scrivere

$$P : (\forall x \in \mathbb{Z})(x + 0 = 0 + x = x).$$

Esempio 13. Si vuol esprimere sotto forma di predicato la proposizione:
Q : "ogni numero intero è pari."
Si tratta, naturalmente, di una proposizione falsa, poiché tutti i numeri dispari non sono pari. Formalmente il predicato si scrive:

$$Q : (\forall n \in \mathbb{Z})((\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k)).$$

Se si vuol negare Q, per ottenere un'affermazione vera, si deve scrivere:

$$\neg Q : (\exists n \in \mathbb{Z})((\forall k \in \mathbb{Z})(n \neq 2k)).$$

Questo risulta evidente per le Leggi di De Morgan per i predicati:

$$\neg(\forall x \in A \ P(x)) \longleftrightarrow (\exists x \in A \ \neg P(x))$$

$$\neg(\exists x \in A \ P(x)) \longleftrightarrow (\forall x \in A \ \neg P(x))$$

dove A è l'universo in cui varia x, $P(x)$ è una certa proprietà che ha senso per x.

2. INSIEMI

Quello di "insieme" è un concetto primitivo: questo vuol dire che non si può dare la definizione di insieme senza ricorrere ad altri concetti che a loro volta non potrebbero essere definiti (anche il concetto di punto, in geometria, ad esempio, è primitivo). Si può pensare ad un insieme come a un gruppo, una collezione, una famiglia di oggetti, che vengono chiamati elementi dell'insieme.

Un insieme A, quindi, è formato da elementi e per poter dire di aver assegnato l'insieme A, bisogna aver dato dei criteri tramite i quali si possa essere in grado di stabilire se un elemento appartenga o meno a A.

Per esempio hanno senso matematicamente:

- A=l'insieme dei punti di un piano
- B=l'insieme dei cittadini italiani
- C=l'insieme dei numeri interi positivi
- D=l'insieme dei numeri interi che siano contemporaneamente pari e dispari.

Si osservi che non ci sono numeri interi che siano contemporaneamente pari e dispari, per cui l'insieme D, sebbene sia ben definito, è privo di elementi: D non è altro che *l'insieme vuoto*, che è l'unico insieme privo di elementi e si denota con il simbolo

$$\emptyset.$$

Per esprimere la circostanza che un elemento appartenga ad un insieme, si usa il *simbolo di appartenenza*

$$\text{“} \in \text{”}$$

si legge: "appartiene" oppure "è elemento di". Per esempio si può scrivere:

$$5 \in C.$$

Si osservi che frasi del tipo: "la strada è l'insieme dell'asfalto che contiene" oppure "un litro è l'insieme di 10 decilitri", non definiscono insiemi.

Per assegnare un insieme X si possono elencare i suoi elementi, per esempio:

$$X = \{a, b, 3, *, -1, 0\};$$

oppure enunciare una *proprietà caratteristica*, ovvero una proprietà P verificata da tutti e soli gli elementi di X. Se $x \in X$, la scrittura "$\mathcal{P}(x)$" vuol dire che x verifica, cioè rende vera, la proprietà $\mathcal{P}$.

Esempio 14. Se la proprietà è:

$$\mathcal{P}_0\text{: è un numero pari}$$

allora risulterà $\mathcal{P}_0(2)$, $\mathcal{P}_0(16)$.
Se invece è:

$$\mathcal{P}_1\text{: è un intero maggiore di 5.}$$

Risulterà certamente: $\mathcal{P}_1(7), \mathcal{P}_1(100)$.

Quindi, utilizzando la proprietà caratteristica, si potrà scrivere:

$$X = \{x : P(x)\}$$

Ad esempio:

$$Y = \{a, b, c, \ldots, u, v, z\} = \{x : x \text{ è una lettera dell'alfabeto italiano}\}.$$

L'insieme Y è stato espresso sia tramite l'elencazione dei suoi elementi sia tramite la proprietà caratteristica.

Si possono visualizzare gli insiemi anche tramite i ben noti diagrammi di Venn.
Sia A un insieme. Per esprimere la circostanza che un elemento x non appartenga a A si scrive

$$x \notin A.$$

Quindi $\neg(x \in A)$ si scrive $x \notin A$.

Si useranno sempre i seguenti simboli per gli insiemi numerici:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots,\}$ insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ insieme dei numeri interi relativi
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ insieme dei numeri razionali,
- $\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali.

Inoltre, si scriverà:

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots,\}$
- $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 0\}$
- $\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\}$
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

Si osservi che ci possono essere diverse rappresentazioni di uno stesso numero razionale. Se $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, allora si ha:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \iff \big((\exists c \in \mathbb{Z}^* \text{ tale che } q = cr \wedge p = cs) \vee (\exists c' \in \mathbb{Z}^* \text{ tale che } r = c'p \wedge s = c'q)\big)$$

Si ricorda che i numeri razionali sono tutti e soli i numeri che ammettono una rappresentazione decimale con cifre decimali periodiche da un certo punto in poi (potendo essere anche 0 la cifra periodica). Per ottenere la rappresentazione di un numero razionale $\frac{p}{q}$ in forma decimale basta eseguire la divisione tra numeratore p e denominatore q: per esempio $\frac{15}{4} = 3,75$; $\frac{4}{3} = 1,\overline{3}$. Viceversa si ha la formula:

$$c, a_1a_2 \dots a_h\overline{b_1b_2 \dots b_k} = \frac{ca_1a_2 \dots a_h}{10^h} + \frac{b_1b_2 \dots b_k}{10^h \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{k}}.$$

Per esempio:

$$3,\overline{9} = 3 + \frac{9}{9} = 4; \quad 22,12\overline{305} = \frac{2212}{100} + \frac{305}{100 \cdot 999} = \frac{2210093}{99900} \ .$$

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali contiene i numeri razionali e i numeri irrazionali. I numeri irrazionali sono i numeri decimali non periodici, come $\pi = 3,141592654\dots$, $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, $\sqrt[3]{-5} = -1,709975947\dots$.

Definizione 15. Siano A, B insiemi. Si dice che A è **incluso** oppure è **contenuto** in B o anche che A **è sottoinsieme** di B e si scrive

$$A \subset B$$

se ogni elemento di A è anche elemento di B.

Osservazione 6. Lo studente faccia attenzione a non confondere il simbolo di appartenenza "$\in$" di un elemento ad un insieme, con il simbolo di inclusione di un insieme "$\subset$" di un insieme in un altro. Sono corrette le scritture:

$$3 \in \mathbb{N}; \quad \{-5\} \subset \mathbb{Z}; \quad \{\pm 4, 0, 2\} \subset \mathbb{Q}.$$

Sono invece errate:

$$1 \subset \mathbb{N}, \quad \{-5\} \in \mathbb{Z}.$$

Osservazione 7. Si osservi che, per ogni insieme A, l'insieme vuoto ed A stesso risultano essere sottoinsiemi di A:

$$(\forall A \text{ insieme}) \ (\emptyset \subset A),$$
$$(\forall A \text{ insieme}) \ (A \subset A).$$

Definizione 16. Siano A e B insiemi. Si dice che A e B sono uguali, e naturalmente si scrive $A = B$, se hanno gli stessi elementi.

Osservazione 8. Evidentemente risulta:

$$A = B \iff \big((\forall x \in A)(x \in B) \ \wedge \ (\forall x \in B)(x \in A)\big)$$

e quindi, dalla Definizione 15

$$A = B \iff \big((A \subset B) \wedge (B \subset A)\big).$$

Osservazione 9. Utilizzando (5) di Esercizi 1. e le formule di De Morgan, si può osservare che:

$$\begin{aligned} A \neq B \iff \neg(A = B) &\iff \neg\big((\forall x \in A)(x \in B) \ \wedge \ (\forall x \in B)(x \in A)\big) \\ &\iff \big(\neg\,((\forall x \in A)(x \in B))\big) \vee \big(\neg\,((\forall x \in B)(x \in A))\big) \\ &\iff (\exists x \in A \text{ tale che } x \notin B) \vee (\exists x \in B \text{ tale che } x \notin A)\,. \end{aligned}$$

Quindi si può concludere che due insiemi sono diversi se e solo se esiste almeno un elemento di uno che non appartiene all'altro.

Definizione 17. Si dice che A *è incluso* o *è contenuto propriamente o strettamente* in B o anche che A *è sottoinsieme proprio* di B e si scrive $A \subsetneqq B$ se e solo se $(A \subset B) \wedge (A \neq B)$. Quindi:

$$A \subsetneqq B \iff (A \subset B) \wedge (A \neq B).$$

Osservazione 10. Si osservi che $A \subsetneqq B$ se e solo se ogni elemento di A è anche elemento di B ed esiste almeno un elemento di B che non è elemento di A.

Esempio 15. Risulta sicuramente: $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$.

Esempio 16. Siano A = insieme dei residenti a Bari nati nel 2000, B = insieme dei residenti a Bari nati nel 2000 che praticano attività sportiva. Sicuramente sarà $B \subset A$, ma non si può scrivere $B \subsetneqq A$ se non si è sicuri che almeno un ragazzo tra i residenti a Bari nati nel 2000 non pratichi attività sportiva.

Il risultato seguente è di immediata verifica.

Proposizione 2. *Quali che siano gli insiemi A, B, C si ha:*

(1) $A \subset A$
(2) *se* $A \subset B$ *e* $B \subset A$ *allora* $A = B$
(3) *se* $A \subset B$ *e* $B \subset C$ *allora* $A \subset C$.

Definizione 18. Siano A e B insiemi. Si dice insieme **unione** di A e B l'insieme

$$A \cup B = \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\}.$$

Definizione 19. Siano A e B insiemi. Si dice **intersezione** di A e B l'insieme

$$A \cap B = \{x \ : \ x \in A \wedge x \in B\}.$$

Esempio 17. Siano $A = \{a, b, 1, 2, 3, +, *, \circ\}$, $B = \{\pm 1, \pm 2, *, \sqrt{5}\}$. Allora

$$A \cup B = \{a, b, \pm 1, \pm 2, 3, +, *, \circ, \sqrt{5}\}, \quad A \cap B = \{1, 2, *\}.$$

Definizione 20. Si dice che due insiemi A e B sono **disgiunti** se la loro intersezione è vuota.

Esempio 18. Sono disgiunti, per esempio, gli insiemi $\mathbf{P} = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ è pari}\}$ e $\mathbf{D} = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ è dispari}\}$; l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e quello dei numeri irrazionali.

Proposizione 3. *Siano A, B, C insiemi. Si ha allora:*

(1) $A \cup \emptyset = A$; $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$
(2) $A \cup A = A \cap A = A$
(3) $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$
(4) $A \subset A \cup B$; $\quad A \cap B \subset A$

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *proprietà associativa dell'unione*
(6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *proprietà associativa dell'intersezione*
(7) $A \cup B = B \cup A$ *proprietà commutativa dell'unione*
(8) $A \cap B = B \cap A$ *proprietà commutativa dell'intersezione*
(9) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *proprietà distributive dell'intersezione rispetto all'unione,*
(10) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *proprietà distributive dell'unione rispetto all'intersezione.*

Osservazione 11. Si osservi che le proprietà enunciate in (1) della proposizione precedente sono casi particolare della proprietà (3), ma si è preferito, in ogni modo, evidenziarle.

Definizione 21. Siano A insieme e $B \subset A$. Si definisce il **complementare di** B **rispetto ad** A l'insieme :

$$\complement_A(B) = \{x \in A \ : \ x \notin B\}.$$

Proposizione 4. *Siano A insieme, B, C sottoinsiemi di A. Risulta allora:*
(1) $\complement_A(A) = \emptyset$
(2) $\complement_A(\emptyset) = A$
(3) $B \cup \complement_A(B) = A$
(4) $B \cap \complement_A(B) = \emptyset$
(5) $\complement_A(B \cup C) = \complement_A(B) \cap \complement_A(C)$
(6) $\complement_A(B \cap C) = \complement_A(B) \cup \complement_A(C)$.

Le proprietà (5) e (6) vanno sotto il nome di Leggi di De Morgan.

Proof. Si prova solo (5).

$$\begin{aligned} x \in \complement_A(B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \notin B \cup C \iff x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \\ &\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff x \in \complement_A(B) \wedge \complement_A(C) \\ &\iff x \in \complement_A(B) \cap \complement_A(C) \end{aligned}$$

□

Definizione 22. Siano A, B insiemi. Allora 'insieme:

$$A - B = \{x \in A \ : \ x \notin B\}$$

si dice **insieme differenza** tra l'insieme A e l'insieme B. L'insieme differenza tra A e B può anche essere denotato con $A \setminus B$.

Osservazione 12. Si prova che $A - B = \complement_A(A \cap B)$. Inoltre si può senz'altro dire che se $B \subset A$, allora $\complement_A(B) = A - B$.

Esempio 19. Si ha: $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$=insieme dei numeri irrazionali. Inoltre, facendo riferimento all'Esempio 17, risulta:

$$A - B = \{a, b, 3, +, \circ\}, \quad B - A = \{-1, -2, \sqrt{5}\},$$
$$\complement_{(A \cup B)}(A \cap B) = \{a, b, -1, -2, 3, +, \circ, \sqrt{5}\}.$$

Definizione 23. Sia A un insieme. Si dice **insieme delle parti di** A e si indica con $\mathfrak{P}(A)$ l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A. In simboli:

$$\mathfrak{P}(A) = \{X \ : \ X \subset A\}$$

Proposizione 5. *Sia A un insieme. Allora:*
(1) $A \in \mathfrak{P}(A)$
(2) $\emptyset \in \mathfrak{P}(A)$

(3) *se* $X \in \mathfrak{P}(A)$ *e* $Y \in \mathfrak{P}(A)$, *allora* $X \cup Y \in \mathfrak{P}(A)$ *e* $X \cap Y \in \mathfrak{P}(A)$.

Esempio 20.

1. $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
2. se $A = \{1\}$, allora $\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$
3. se $A = \{a, b\}$, allora $\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
4. se $A = \{1, 2, *\}$, allora $\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{*\}, \{1, 2\}, \{1, *\}, \{2, *\}, A\}$.