

Esonero di **MATEMATICA DISCRETA**¹
Informatica (corso A)
20 novembre 2020

Nome e cognome.....

1. Stabilire se la seguente proposizione è vera e scriverne la negazione

$$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{Z} \text{ tali che } x + 2y = 2x + zx.$$

¹Tutte le risposte devono essere giustificate

Nome e cognome.....

2. Utilizzando il principio d'induzione completa, verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2.$$

Nome e cognome.....

3. Verificare che la relazione su \mathbb{Z} :

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2 \mid (a^3 - b^3)\}$$

è di equivalenza e verificare che la classe di equivalenza di 0 rispetto a \mathcal{R} è l'insieme dei numeri pari, ovvero:

$$[0]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = 2h\} = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\}.$$

Nome e cognome.....

4. Sono assegnati gli insiemi $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$.
- (a) Stabilire se esistono funzioni iniettive di A in B e in caso affermativo determinarne il numero e scriverle tutte, usando il modello delle parole e aiutandosi con un opportuno diagramma;
 - (b) Stabilire se esistono funzioni surgettive di A in B e in caso affermativo determinarne il numero e scriverle tutte, usando il modello delle parole e aiutandosi con un opportuno diagramma.
 - (c) stabilire se esistono funzioni bigettive tra A e B .

Nome e cognome.....

5. Rispondere ad almeno una delle seguenti domande:

- (a) Sia A insieme finito, con $|A| = n$. Quanto vale $|\mathcal{P}(A)|$? Dare una dimostrazione del risultato.
- (b) Siano A un insieme non vuoto, \mathcal{R} una relazione di equivalenza su A e, per ogni $x \in A$, sia $[x]_{\mathcal{R}}$ la classe di equivalenza di x rispetto a \mathcal{R} . Provare che

$$(a, b) \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset.$$

- (c) Qual è la formula che esprime il numero delle disposizioni con ripetizioni di k elementi in classe n ? Come si dimostra la formula?