Sia $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathcal{R} = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \ b = d \ \wedge \ \exists n \in \mathbb{Z}$ tale che $a - c = n\}$

$[(0,0)]_{\mathcal{R}}$, $[(1,2)]_{\mathcal{R}}$ $[(\pi,0)]_{\mathcal{R}}$

$\mathcal{R}$ è riflessiva $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $((a,b),(a,b)) \in \mathcal{R}$

infatti: $b = b \ \wedge \ \exists n = 0 \in \mathbb{Z}$ tale che $a - a = 0$ verificato

$\mathcal{R}$ è simmetrica $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow (c,d)\mathcal{R}(a,b)$

ipotesi: $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow b = d \ \wedge \ \exists n \in \mathbb{Z}$ tale che $a - c = n \Rightarrow$

$\Rightarrow d = b \ \wedge \ \exists -n \in \mathbb{Z}$ tale che $c - a = -n \Rightarrow$

$\Rightarrow (c,d)\mathcal{R}(a,b)$

$\mathcal{R}$ è transitiva $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$

$(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ a $(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow (a,b)\mathcal{R}(e,f)$

Ipotesi: $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \ \wedge \ (c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow$

$(b = d \ \wedge \ \exists n \in \mathbb{Z}$ tale che $a - c = n) \ \wedge \ (d = f \ \wedge \ \exists m \in \mathbb{Z}$ tale che $c - e = m)$

$\Rightarrow b = d = f \ \wedge \ a - e = a - c + c - e = n + m \Rightarrow$

$\Rightarrow b = f \ \wedge \ \exists n + m \in \mathbb{Z}$ tale che $a - e = n + m \Rightarrow (a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

$$[(0,0)]_R = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : (0,0) \, R \, (a,b) \}$$

$$(a,b) \in [(0,0)]_R \iff b = 0 \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a - 0 = n$$
$$\iff b = 0 \wedge a \in \mathbb{Z}$$

$$[(0,0)]_R = \{ (n,0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z} \}$$

$$(a,b) \in [(1,2)]_R \iff b = 2 \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a - 1 = n$$
$$\iff b = 2 \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a = n + 1 \in \mathbb{Z}$$
$$\iff b = 2 \wedge a \in \mathbb{Z}$$

$$[(1,2)]_R = \{ (n,2) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z} \}$$

$$(a,b) \in [(\pi,0)]_R \iff b = 0 \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a - \pi = n$$
$$\iff b = 0 \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a = \pi + n$$

$$[(\pi,0)]_R = \{ (\pi + n, 0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\pi + 1 = 3{,}14\ldots + 1 = 4{,}14\ldots$$
$$\pi - 1 = 3{,}14\ldots - 1 = 2{,}14\ldots$$

2. Stabilire se esistono...

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $B = \{a, b, c\}$

$C = \{1, 2, a, b\}$ $\qquad$ $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \eta\}$

$X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $\qquad$ $Y = \{1, 5, 7\}$

Non possono esistere funzioni ingettive di A in B perché $|A| = 4$ $\quad |B| = 3$ $\quad 4 > 3$

Esistono funzioni surgettive di A in B.

Esempi

1	2	3	4	
a	a	b	c	surgettiva
a	a	b	b	non surgettiva

Non possono esistere funzioni surgettive da C a D ma esistono funzioni ingettive

Esempi

1	2	a	b	
α	γ	η	β	ingettiva
α	η	γ	γ	non ingettiva

Tra X e Y esistono funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Osserv. Se A e B sono due insiemi finiti aventi stessa cardinalità, allora ogni funzione iniettiva è suriettiva e quindi biiettiva; ogni funzione suriettiva è iniettiva e quindi biiettiva.

$a, b \in \mathbb{Z}$

$(a,b) \in R \iff 3 \mid 2a+b$ $\qquad R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$[1]_R, \; [0]_R, \; [-5]_R$

R è riflessiva: $\forall a \in \mathbb{Z} \quad (a,a) \in R$ tesi

sia $a \in \mathbb{Z}$ $\quad 3 \mid 2a+a$ perché $2a+a = 3a$ e

quindi $(a,a) \in R$

R è simmetrica:

Siano $a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

Siano $a,b \in \mathbb{Z}$ con $(a,b) \in R \Rightarrow 3 \mid 2a+b \wedge 3 \mid 3a+3b$

$\Rightarrow 3 \mid 3a+3b-(2a+b) \Rightarrow 3 \mid a+2b \Rightarrow 3 \mid 2b+a \Rightarrow$

$(b,a) \in R$

R è transitive: Siano $a,b,c \in \mathbb{Z}$ in modo che

$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$ dobbiamo provare che $(a,c) \in R$

$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow 3 \mid 2a+b \wedge 3 \mid 2b+c \Rightarrow 3 \mid 2a+b+2b+c$

$\Rightarrow 3 \mid 2a+3b+c \wedge 3 \mid 3b \Rightarrow 3 \mid 2a+\cancel{3b}+c-\cancel{3b} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \mid 2a+c \Rightarrow (a,c) \in R$

b vero $\quad a \Rightarrow a \wedge b$

$a \in [1]_R \iff (1,a) \in R \iff 3 \mid 2+a \iff \exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che

$3 \mid 2 \cdot 1 + a$

$2+a = 3h \iff \exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 3h-2$.

$[1]_R = \{ a \in \mathbb{Z} : \exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 3h-2 \} =$

$= \{ \dots -2, 1, 4, 7, \dots\dots\dots \}$

$a \in [0]_R \iff (0,a) \in R \iff 3 \mid 0+a \iff 3 \mid a$

$3 \mid 2 \cdot 0 + a$

$[0]_R = \{ 3h : h \in \mathbb{Z} \} = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6 \dots\dots \}$

$a \in [-5]_R \iff (-5,a) \in R \iff 3 \mid -10+a \iff \exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che

$3 \mid 2 \cdot (-5) + a$

$-10+a = 3h \iff \exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 3h+10$

$[-5]_R = \{ a \in \mathbb{Z} : \exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 3h+10 \} =$

$= \{ \dots, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\dots\dots \}$