ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA C.L. **INFORMATICA**

Esercizi su relazioni di equivalenza ed applicazioni

1. È assegnata su $\mathbb{Q}^*$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \mid \frac{x}{y} = 1 \ \vee \ \frac{x}{y} = -1\}.$$

   (a) Provare che $\mathcal{R}$ è di equivalenza
   (b) verificare che $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}) \notin \mathcal{R}$
   (c) individuare due elementi di $\mathbb{Q}^*$ in relazione tra loro
   (d) determinare la classe di equivalenza di 2.

2. È assegnata la seguente relazione $\mathcal{R}$ sull'insieme $\mathbb{Q}^*$ dei numeri razionali non nulli

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^* \quad (a, b) \in \mathcal{R} \ \Leftrightarrow \ \big(\exists h \in \mathbb{Q} \text{ tale che } 4ab = h^2\big).$$

   (a) Provare che $\mathcal{R}$ è di equivalenza
   (b) verificare che $(1, 5) \notin \mathcal{R}$
   (c) individuare due elementi di $\mathbb{Q}$ in relazione tra loro
   (d) determinare la classe di equivalenza di $\frac{1}{3}$.

3. È assegnata la seguente relazione $\mathcal{R}$ sull'insieme $\mathbb{Q}^*$ dei numeri razionali non nulli

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}^* \quad (p, q) \in \mathcal{R} \ \Leftrightarrow \ \big(\exists h \in \mathbb{Q} \text{ tale che } 9pq = h^2\big).$$

   (a) Provare che $\mathcal{R}$ è di equivalenza
   (b) verificare che $(2, 1) \notin \mathcal{R}$
   (c) individuare due elementi di $\mathbb{Q}^*$ in relazione tra loro
   (d) determinare la classe di equivalenza di 1.

4. È assegnata su $\mathbb{Q}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid \exists \ h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } p - q = h\}.$$

   (a) Provare che $\mathcal{R}$ è di equivalenza
   (b) verificare che $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}) \notin \mathcal{R}$
   (c) individuare due elementi di $\mathbb{Q}$ in relazione tra loro
   (d) determinare la classe di equivalenza di 0.

5. Siano $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ le applicazioni così definite:

$$\forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = \frac{2x - 3}{5}; \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g(n) = 3n + 4.$$

(a) Determinare $g(-\frac{2}{3})$, $f(\{-2,0,1\})$, $g^{-1}(\{1,-\frac{1}{2}\})$
(b) stabilire se f è ingettiva o surgettiva
(c) stabilire se g è ingettiva o surgettiva
(d) determinare, se possibile, le applicazioni inverse f^{-1}, g^{-1}
(e) determinare, se possibile, $f \circ g$, $g \circ f$.

6. Siano $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ e $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ le applicazioni così definite:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \;\; f(n) = \frac{n-3}{2}; \;\; \forall x \in \mathbb{Q} \;\; g(x) = \frac{3x-1}{4}.$$

(a) Determinare $g(\frac{3}{2})$, $f(\{-2,0,3\})$, $f^{-1}(\{-1,-\frac{1}{3}\})$
(b) stabilire se f è ingettiva o surgettiva
(c) stabilire se g è ingettiva o surgettiva
(d) determinare, se possibile, le applicazioni inverse f^{-1}, g^{-1}
(e) determinare, se possibile, $g \circ f$, $f \circ g$.

7. Siano $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ e $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ le applicazioni così definite:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \; f(n) = \frac{-n+2}{3}; \;\; \forall x \in \mathbb{Q} \; g(x) = \frac{2x+3}{5}$$

(a) Determinare $g(\{0,1,-\frac{3}{2}\})$, $f^{-1}(\{-1,-\frac{1}{3},0\})$, $g(2)$
(b) stabilire se f è ingettiva o surgettiva
(c) stabilire se g è ingettiva o surgettiva
(d) determinare, se possibile, le applicazioni inverse f^{-1}, g^{-1}
(e) determinare, se possibile, $f \circ g$, $g \circ f$.

8. Siano $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ le applicazioni così definite:

$$\forall x \in \mathbb{Q} \; f(x) = \frac{2x+1}{3}; \;\; \forall n \in \mathbb{Z} \; g(n) = -2n+3$$

(a) Determinare $f(\{\frac{1}{2},1,2\})$, $g(4)$, $f^{-1}(\{-\frac{1}{3},-2\})$
(b) stabilire se f è ingettiva, surgettiva
(c) stabilire se g è ingettiva, surgettiva
(d) determinare, se possibile, le applicazioni inverse f^{-1}, g^{-1}
(e) determinare, se possibile, $g \circ f$, $f \circ g$.