Def. Siano A e B formule. Si dice che B è conseguenza logica di A e si scrive

$$A \Rightarrow B$$

se B è vero ogni qualvolta A è vero.

Def. Siano A e B formule. Si dice che A e B sono semanticamente equivalenti se B è conseguenza logica di A e A è conseguenza logica di B

$$A \Leftrightarrow B \quad \text{vuol dire} \quad A \Rightarrow B \quad \wedge \quad B \Rightarrow A.$$

Prop. Siano A e B due formule. Risulta che A e B sono semanticamente equivalenti se e soltanto se hanno la stessa tavola di verità.

Dim. Supponiamo che A e B siano semanticamente equivalenti. Se A ha valore di verità 1, allora anche B ha valore di verità 1, perché B è conseguenza logica di A. Se A ha valore di verità 0, allora anche B ha valore di verità 0, perché se B avesse valore di verità 1, A, che è conseguenza logica di B, avrebbe valore di verità 1.
Scambiando tra loro A e B si deduce che A e B hanno le stesse

tavola di verità.

Viceversa: Supponiamo che A e B abbiano la stessa tavola di verità. Se A ha valore di verità 1, allora anche B ha valore di verità 1 e quindi B è conseguenza logica di A. Se B ha valore di verità 1, allora anche A ha valore di verità 1 e quindi A è conseguenza logica di B e dunque A e B sono semanticamente equivalenti.

Osservazione. A e B siano due formule. Allora

$A \Leftrightarrow B$ se e solo se $A \leftrightarrow B$ è una tautologia

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
0	0	1

Teoria matematica

Assiomi

$\downarrow \longrightarrow$ regole di inferenza

Teoremi

MODUS PONENS o METODO DI DIMOSTRAZIONE DIRETTA

P, Q formule

$$\left(P \wedge (P \to Q)\right) \Rightarrow Q$$

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Quando P e $P \to Q$ sono veri, anche Q è vero.

Esempio. Se n è un numero intero pari, allora anche n^2 è un numero intero pari.

P: n è pari

n pari significa che esiste un numero intero h tale che $n = 2h$

Q: n^2 è pari

$$n^2 = (2h)^2 = 2^2 h^2 = 2(2h^2) \quad \text{pari perché}$$

esiste il numero intero $k = 2h^2$ tale che $n^2 = 2k$.

se (P vero $\wedge$ $P \to Q$ vero) allora (Q è vero).

Esercizio: Se n è un numero dispari, allora anche n^2 è un numero dispari

n è un numero dispari vuol dire che esiste h numero intero tale che $n = 2h+1$.

MODUS TOLLENS o DIMOSTRAZIONE PER CONTRAPPOSIZIONE

P, Q siano due formule.

$$(P \to Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg Q \to \neg P$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

ESEMPIO Sia n un numero intero. Se n^2 è pari allora n è pari.

P: n^2 è pari

$\neg P$: n^2 non è pari

$\neg P$: n^2 è dispari

Q : n è pari $\qquad\qquad$ $\neg Q$: n non è pari

$\neg Q$: n è dispari

$$P \to Q \iff \neg Q \to \neg P$$

$\neg Q \to \neg P$ si scrive: se n è dispari allora n^2 è dispari.

già dimostrata (esercizio).

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

$$\left(\neg Q \to (R \wedge \neg R)\right) \Rightarrow Q$$

Esempio. Q: Non esistono x, y numeri interi tali che

$$3x + 6y = 5$$

$\neg Q$: supponiamo che esistano due numeri interi x_0 e y_0 tali che $3x_0 + 6y_0 = 5$

allora $3(x_0 + 2y_0) = 5$

e quindi 5 sarebbe un multiplo di 3

$\underbrace{R: \text{5 non è multiplo di 3}} \wedge \underbrace{\neg R: \text{5 è multiplo di 3}}$.

Esercizio: Dimostrare le seguenti equivalenze semantiche.

1. $P \leftrightarrow Q \iff ((P \to Q) \land (Q \to P))$

2. $P \to Q \iff \neg(P \land \neg Q)$

3. $P \to Q \iff \neg P \lor Q$

4. $(\neg(P \lor Q)) \iff (\neg P \land \neg Q)$.

5. $\neg(P \land Q) \iff \neg P \lor \neg Q$.