1) $H = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$

$$* : H \times H \longrightarrow H$$

$\forall (a,b), (c,d) \in H \qquad (a,b) * (c,d) = (a + bc, bd)$.

Verificare che $(H, *)$ è un gruppo non abeliano.

$*$ è associativa

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in H \qquad ((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (a,b) * ((c,d) * (e,f))$

$$((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (\underbrace{a+bc}_{a'}, \underbrace{bd}_{b'}) * (e,f) = (a' + b'e, b'f) =$$

$$= (a + bc + bde, bdf).$$

$$(a,b) * ((c,d) * (e,f)) = (a,b) * (\underbrace{c + de}_{c'}, \underbrace{df}_{d'}) = (a + bc', bd') =$$

$$= (a + b(c+de), bdf) = (a + bc + bde, bdf).$$

Quindi vale la proprietà associativa.

Cerchiamo, se esiste $(x,y) \in H$ tale che $\forall (a,b) \in H$

$$(a,b) * (x,y) = (x,y) * (a,b) = (a,b)$$

$$(a,b) * (x,y) = (a,b) \iff (a + bx, by) = (a,b) \iff \begin{cases} \cancel{a} + \overset{\neq 0}{b}x = \cancel{a} \\ by = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$(0,1)$ è il potenziale elemento neutro

Bisogna verificare che anche $(0,1)*(a,b)=(a,b)$

$$(0,1)*(a,b) = (0+1\cdot a, 1\cdot b) = (a,b) \qquad \text{ok.}$$

Allora certamente $(0,1)$ è l'elemento neutro della struttura algebrica $(H,*)$.

Sia $(a,b)\in H$: cerchiamo, se esiste $(z,t)\in H$ tale che

$$(a,b)*(z,t) = (z,t)*(a,b) = (0,1)$$

$$(a,b)*(z,t) = (0,1) \Leftrightarrow (a+bz, b\cdot t) = (0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a+bz=0 \\ bt=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+bz=0 \\ t=\frac{1}{b}\in \mathbb{Q}^* \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-\frac{a}{b} \\ t=\frac{1}{b} \end{cases}$$

Il potenziale elemento inverso di (a,b) è $\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$

Bisogna verificare che

$$\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)*(a,b) = (0,1)$$

$$\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)*(a,b) = \left(-\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\cdot a, \frac{1}{\cancel{b}}\cdot \cancel{b}\right) = (0,1) \qquad \text{ok.}$$

$\forall (a,b) \in H$ esiste l'inverso che è $(a,b)^{-1} = \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) \in H$.

$$(2,-1) * (1,1) = (2 + (-1)\cdot 1, (-1)\cdot 1) = (2-1, -1) = (1,-1)$$

$$(1,1) * (2,-1) = (1 + 1\cdot 2, 1\cdot(-1)) = (3,-1)$$

$$(2,-1) * (1,1) \neq (1,1) * (2,-1)$$

per cui $*$ non è commutativa.

2) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 6 & 10 \end{pmatrix} \in S_{10}$

(a) scrivere f come prodotto di cicli disgiunti e determinarne la classe di permutazione

(b) determinare l'ordine di f^{101} in S_{10}

(c) " il sottogruppo ciclico $\langle f \rangle = H$ generato da f e gli ordini dei suoi elementi.

(a) $f = \underbrace{(1\,2\,3\,4\,5)}_{\text{di lunghezza dispari e quindi di classe pari}} \circ \underbrace{(6\,7\,8\,9)}_{\text{di lunghezza pari e quindi di classe dispari}} = (1\,5) \circ (1\,4) \circ (1\,3) \circ (1\,2) \circ (6\,9) \circ (6\,8) \circ (6\,7)$

f di classe dispari

$$\Delta f = \Delta\big((1\,2\,3\,4\,5) \circ (6\,7\,8\,9)\big) = \Delta(1\,2\,3\,4\,5) \cdot \Delta(6\,7\,8\,9) = 1 \cdot (-1) = -1.$$

(b) $|f| = \text{m.c.m.}(|(1\,2\,3\,4\,5)|, |(6\,7\,8\,9)|) = \text{m.c.m.}(5,4) = 20$

$$f^{20} = id_{10} \quad e \quad 20 = \min\{h \in \mathbb{N}^* : f^h = id_{10}\}$$

$$f^{101} = f^{5\cdot 20+1} = (f^{20})^5 \cdot f = id_{10}^{\,5} \cdot f = f.$$

$$|f^{101}| = |f| = 20.$$

(c) $\langle f \rangle = \{f, f^2, f^3, \ldots\ldots, f^{20} = id_{10}\}$ $\qquad |\langle f \rangle| = 20$

$$(f^2)^{10} = f^{20} = id_{10} \qquad |f^2| = 10$$

$$(f^3)^{20} = f^{60} = (f^{20})^3 = id_{10}$$

$$|f^h| = \frac{20}{\text{M.C.D.}(h,20)}$$

$$|f^2| = \frac{20}{\text{M.C.D}(2,20)} = \frac{20}{2} = 10$$

$$|f^6| = \frac{20}{\text{M.C.D.}(6,20)} = \frac{20}{2} = 10$$

$$|f^5| = \frac{20}{\text{M.C.D.}(5,20)} = \frac{20}{5} = 4$$

3. $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^{y}$

$x \longmapsto \frac{2+x}{x}$

(a) calcolare $f(\{-2,-1\})$, $f^{-1}(\{1\})$

(b) stabilire se f è ingettiva / surgettiva

(c) stabilire se f ammette la funzione inversa e caso affermativo calcolarla.

(a) $f(-2) = \frac{2+(-2)}{-2} = 0$; $f(-1) = \frac{2+(-1)}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

$f(\{-2,-1\}) = \{0,-1\}$

$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 1\}$

$f(x) = 1 \iff \frac{2+x}{x} = 1 \iff \frac{2+\cancel{x}-\cancel{x}}{x} = 0 \iff 2 = 0$ impossibile

$f^{-1}(\{1\}) = \emptyset \Rightarrow f$ non è surgettiva

perché $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) \neq 1$.

f è ingettiva ?

Siano $x, x' \in \mathbb{R}^*$ tali che $f(x) = f(x')$

$$f(x) = f(x') \iff \frac{2+x}{x} = \frac{2+x'}{x'} \iff \frac{2x' + \cancel{xx'} - 2x - \cancel{xx'}}{xx'} = 0 \iff$$

$$\iff 2x' - 2x = 0 \iff x' = x$$

f è iniettiva.

$f(\mathbb{R}^*)$? $y \in \mathbb{R}$ cerchiamo, se esiste, $x \in \mathbb{R}^*$ tale che

$$f(x) = y$$

$$f(x) = y \iff \frac{2+x}{x} = y \iff \frac{2+x-xy}{x} = 0 \iff 2 + x(1-y) = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{-2}{1-y} \iff x = \frac{2}{y-1}$$

x esiste se e solo se $y \neq 1$

$$f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$\bar{f} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$$
$$x \longmapsto \frac{2+x}{x}$$

$\bar{f}$ è suriettiva

$\bar{f}$ è anche iniettiva

$\bar{f}$ è biiettiva per cui ammette la funzione inversa $\bar{f}^{-1}$.

$$\bar{f}^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

$$\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad \bar{f}^{-1}(y) = \frac{2}{y-1}.$$