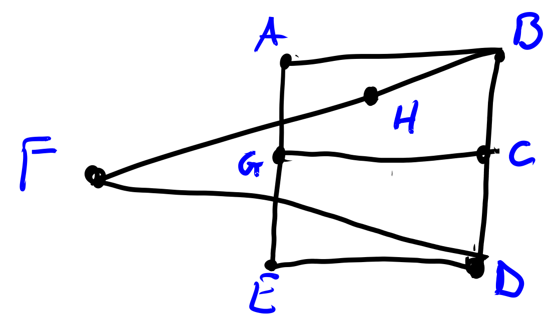
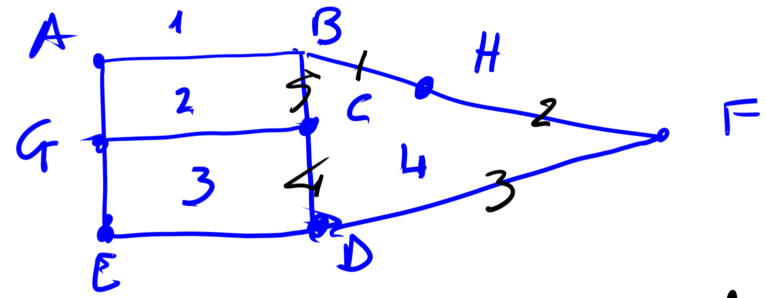
Esercizi

1.



$\mathcal{G}$

$2 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2 = 20$



(a) stabilire se $\mathcal{G}$ è un grafo planare e in caso affermativo verificare la formula di Eulero

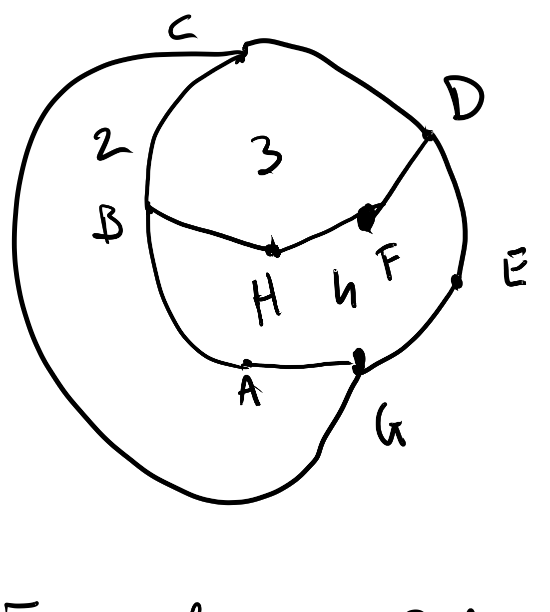
(b) stabilire se $\mathcal{G}$ è un grafo bipartito e in caso affermativo determinare i due partiti

(c) stabilire se $\mathcal{G}$ ammette un cammino o un circuito Euleriano.

(a) $|L| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v) = 10$ $\quad 10 > 9$

non si può dire niente riguardo alla planarità di $\mathcal{G}$ usando il criterio $|L| < 9$

1



planare

~~AB~~ ~~AG~~
~~BH~~ ~~BC~~
~~CG~~ ~~CD~~ ~~DF~~
~~DE~~ ~~EG~~
~~EH~~

Formula di Eulero: $|V| - |L| + |F| = 2$ $\quad 8 - 10 + 4 = 2$ OK.

(b) Poiché si trova un circuito di lunghezza dispari, risulta che il grafo non è bipartito.

(c) poiché ci sono 4 vertici dispari, il grafo G non ammette cammini né circuiti Euleriani.

2. Sia G un albero avente 2 vertici di grado 5, 4 vertici di grado 4, 2 vertici di grado 3, 4 vertici di grado 2 e nessun vertice di grado maggiore di 5.

(a) calcolare il numero dei vertici e il numero dei lati di G (senza rappresentazione)

(b) tracciare due alberi aventi stesso numero di vertici con gli stessi gradi di G, ma non isomorfi.

(a)

2	5
4	4
2	3
4	2
x	1

$$|V| = 2+4+2+4+x = 12+x$$

$$|L| = |V|-1 = (12+x)-1 = 11+x$$

$$2|L| = 2(11+x) = \sum_{v \in V} d(v) = 2\cdot 5 + 4\cdot 4 + 2\cdot 3 + 4\cdot 2 + x\cdot 1$$

$$= 10+16+6+8+x = 40+x$$

Equazione: $2(11+x) = 40+x$

$$22+\cancel{2}x = 40+\cancel{x}$$

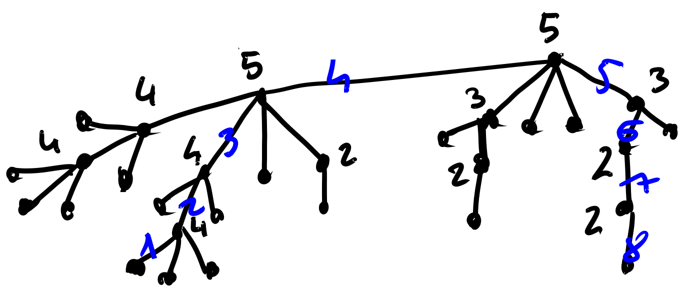
$x = 40 - 22 = 18$

Ci sono 18 vertici di grado 1

$|V| = 12 + x = 12 + 18 = 30$

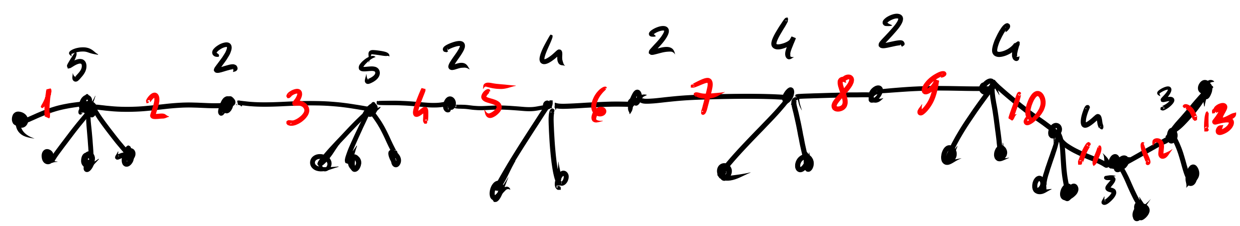
$|L| = 29$

(b)



→ i due vertici di grado 5 hanno distanza 1 tra loro

$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$

in $\mathcal{G}_2$ i due vertici di grado 5 hanno distanza 2 tra loro

altra giustificazione: $\mathcal{G}_2$ ha un cammino di lunghezza 13 mentre la massima lunghezza per un cammino di $\mathcal{G}_1$ è 8.

3. Calcolare gli elementi unitari e i divisori dello zero dell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

Prop. Un elemento $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ è unitario (ammette inverso rispetto a $\cdot$) se e solo se $M.C.D.(a, n) = 1$.

Quindi gli elementi unitari di $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ sono

$[1]_{12}$, $[5]_{12}$, $[7]_{12}$, $[11]_{12}$.

$M.C.D.(5, 12) = 1$

Calcoliamo gli elementi inversi

$[1]_{12}^{-1} = [1]_{12}$

$[5]_{12}^{-1} = [5]_{12}$ $\qquad [5]_{12} \cdot [5]_{12} = [25]_{12} = [1]_{12}$

$[7]_{12}^{-1} = [7]_{12}$ $\qquad [7]_{12} \cdot [7]_{12} = [49]_{12} = [1]_{12}$

$[11]_{12}^{-1} = [11]_{12}$ verifica $\qquad [11]_{12} \cdot [11]_{12} = [121]_{12} = [1]_{12}$.

Sono divisori dello zero: $[2]_{12}, [3]_{12}, [4]_{12}, [6]_{12}, [8]_{12}, [9]_{12}, [10]_{12}$.

Teorema In un anello finito $(A, +, \cdot)$ un elemento $a \in A$ non nullo o è dello zero o è unitario.

verifica $[2]_{12} \cdot [6]_{12} = [12]_{12} = [0]_{12}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango di A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

Ci sono 3 pivot e quindi il rango di A è 3, per cui la matrice è invertibile.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \underbrace{}_{I_3} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \qquad \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{\longrightarrow A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango di B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & -\underline{2} \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango 3 e quindi è invertibile

Calcoliamo B^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

I_3

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$