A insieme $A \neq \emptyset$ $\quad R \subset A \times A$. Si dice che R è di equivalenza se è riflessiva, simmetrica, transitiva.

Riflessiva $\quad \forall x \in A \quad (x,x) \in R$

Simmetrica $\quad \forall x,y \in A \quad (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

transitiva $\quad \forall x,y,z \in A \quad \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R\big) \Rightarrow (x,z) \in R.$

Esempi

1. Π = insieme delle rette del piano

   $R \subset \Pi \times \Pi$ tale che $\quad rRs \Leftrightarrow r$ ha la stessa direzione di s

   R è di equivalenza.

2. A = insieme dei residenti a Bari

   $\tilde{R} = \{(a,b) \in A \times A :$ a ha la stessa madre di b$\}$

   $\tilde{R}$ è riflessiva, simmetrica, transitiva

   $\tilde{R}$ è di equivalenza

3. $R_0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ così definita

   $R_0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3 \mid (x-y)\}$

$a,b \in \mathbb{Z} \quad b \neq 0 \qquad b \mid a \iff \exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = h \cdot b$

R_0 è una relazione di equivalenza.

R_0 è riflessiva: $\forall x \in \mathbb{Z}$ $\quad 3 \mid x - x$ poiché $3 \mid 0$

allora $(x, x) \in R_0$

R_0 è simmetrica: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad (x, y) \in R_0 \Rightarrow (y, x) \in R_0$

siano $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $\underbrace{(x, y) \in R_0}$ $\Rightarrow 3 \mid x - y \Rightarrow$

1. $(a \mid b \Rightarrow a \mid -b)$

$\Rightarrow 3 \mid -(x-y) \Rightarrow 3 \mid y - x \Rightarrow \underbrace{(y, x) \in R_0}$.

R_0 è transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ $\big((x, y) \in R_0 \wedge (y, z) \in R_0\big) \Rightarrow (x, z) \in R_0$

siano $x, y, z \in \mathbb{Z}$ con $(x, y) \in R_0 \wedge (y, z) \in R_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \mid x - y \ \wedge \ 3 \mid y - z \xRightarrow{4.} 3 \mid (x - y) + (y - z) \Rightarrow$

$a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$

$\Rightarrow 3 \mid x - z \Rightarrow (x, z) \in R_0$.

R_0 è una relazione di equivalenza.

4. $R_1 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\quad R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 7 \mid 2a + 5b\}$

R_1 è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$.

R_1 è riflessiva. $\forall a \in \mathbb{Z}$ $\underbrace{(a, a) \in R_1}$ ovvero $\forall a \in \mathbb{Z}$ $\underbrace{7 \mid 2a + 5a}_{\text{tesi}}$

Modus ponens P, Q $(P \wedge (P \to Q)) \Rightarrow Q$

P (vera) si chiama ipotesi
Q si chiama tesi.

Osserviamo che $2a+5a = 7a$ e poiché $7 \mid 7a$ risulta $7 \mid 2a+5a$.

$$7 \mid 7a \Rightarrow 7 \mid 2a+5a \Rightarrow (a,a) \in R_1$$

$$(a,a) \in R_1 \Leftrightarrow 7 \mid 2a+5a \Leftrightarrow 7 \mid 7a$$

R_1 è simmetrica: Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ in modo che

$$\underbrace{(a,b) \in R_1}_{\text{ipotesi}} \Rightarrow \underbrace{(b,a) \in R_1}_{\text{tesi}}$$

$$\underbrace{(a,b) \in R_1}\Leftrightarrow 7 \mid 2a+5b \wedge \underbrace{7 \mid 7a+7b} \Rightarrow$$

$a \Rightarrow a \wedge b$
b vera

$$\Rightarrow 7 \mid 7a+7b-(2a+5b) \Rightarrow 7 \mid 5a+2b \Rightarrow 7 \mid 2b+5a$$

4.

$$\Rightarrow \underbrace{(b,a) \in R_1}.$$

R_1 è transitiva. Siano $a,b,c \in \mathbb{Z}$ in modo che

$$\underbrace{(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1}_{\text{ipotesi}} \Rightarrow \underbrace{(a,c) \in R_1}_{\text{tesi}}$$

$(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1 \Leftrightarrow 7 \mid 2a+5b \wedge 7 \mid 2b+5c \Rightarrow$

$\stackrel{4.}{\Rightarrow} 7 \mid 2a+5b+2b+5c \Rightarrow 7 \mid \underline{2a+5c+7b} \wedge 7 \mid 7b \Rightarrow$

$\stackrel{4.}{\Rightarrow} 7 \mid 2a+5c+\cancel{7b}-\cancel{7b} \Rightarrow 7 \mid 2a+5c \Rightarrow (a,c) \in R_1$

Esempi

$(1,1), (2,2) \ldots (-1,-1) \in R_1$

$7 \mid 2a+5b$ $\quad a=1 \quad b=-6$

$$\underbrace{(1,-6) \in R_1}$$

$2 \cdot 1 + 5(-6) = 2-30 = -28 \quad 7 \mid -28.$

$(-6,1) \in R_1 \quad 2\cdot(-6)+5\cdot 1 = -12+5 = -7$

multiplo di 7.

Esercizio $R' = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 4 \mid x+3y\}$ è di equivalenza.

5. $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 5 \mid 3a - 2b\}$

R_2 è riflessiva? $\qquad \underbrace{(1,1) \notin R_2} \qquad 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$

$7 \nmid 1$

$\underbrace{\exists 1 \in \mathbb{Z}}$ tale che $(1,1) \notin R_2$

$\neg(\forall x \in \mathbb{Z} \ (x,x) \in R_2)$

$\exists x \in \mathbb{Z}$ tale che $(x,x) \notin R_2$

R_1 è simmetrica?

Siano $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $\underbrace{(x,y) \in R_2}$ $\Rightarrow$

$5 / 3x - 2y \Rightarrow 5 / 3x - 2y \wedge 5 / 5x - 5y \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 / 5x - 5y - (3x - 2y) \Rightarrow 5 / 2x - 3y \underset{1.}{\Rightarrow} 5 / 3y - 2x \Rightarrow$

4.

$\Rightarrow \underbrace{(y,x) \in R_2}$

R_2 non è transitiva $\quad \underbrace{(4,1) \in R_2 \qquad (1,14) \in R_2}$

$5 / 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \qquad 5 / 3 \cdot 1 - 2 \cdot 14$

$5 / 10 \qquad 3 - 28 = -25 \qquad 5 / -25)$

$(4,14) \overset{?}{\in} R \qquad 3 \cdot 4 - 2 \cdot 14 = 12 - 28 = -16 \qquad 5 / 16$

Poiché esistono $4, 1, 14 \in \mathbb{Z}$ tali che

$(4,1) \in R_2 \wedge (1,14) \in R_2$ ma $(4,14) \notin R_2$

e quindi R_2 non è transitiva.