PREDICATI

P: x è un numero pari

$x = 5$ 5 è un numero pari 0

$x = 2$ 2 è un numero pari 1

$\forall$ si legge "per ogni"
$\forall$ quantificatore universale

$\exists$ si legge "esiste"
$\exists$ quantificatore esistenziale

Per esprimere un predicato si usa questo modo di esprimersi

$$(\forall x \in U_x)(P(x))$$

U_x è l'universo

$$(\exists x \in U_x)(P(x))$$

"$\in$" simbolo di appartenenza

$P(x)$ è una proprietà che ha senso per tutti gli elementi $x \in U_x$.

Ogni numero intero relativo è pari

$P(x)$: x è pari

$\mathbb{Z} = \{ \dots\dots ; 2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

$Q: (\forall x \in \mathbb{Z})(P(x))$

$Q: \forall x \in \mathbb{Z}$ x è pari   falso

perché, per esempio, esiste $5 \in \mathbb{Z}$ tale che 5 non è pari.

$\forall x \in \mathbb{Z}$ x è un numero intero   vero.

$R: \forall x \in \mathbb{Z}$ x è positivo   falso

-2 non verifica R.

Def. Un predicato è un'affermazione che coinvolge una o più variabili : $x, y, z, \dots$ ciascuna delle quali varia in un universo $U_x, U_y, U_z, \dots$ con l'uso di un opportuno quantificatore.

A: "ogni numero intero relativo moltiplicato per 1 dà per risultato lo stesso numero intero".

In simboli

$A: (\forall a \in \mathbb{Z})(\underbrace{a \cdot 1 = 1 \cdot a = a}_{(a \cdot 1 = a \,\wedge\, 1 \cdot a = a)})$ $\qquad P(a): a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

A è vera

$\neg A$ è falsa

$\neg A: (\exists a \in \mathbb{Z})(a \cdot 1 \neq a \vee 1 \cdot a \neq a)$ $\qquad$ falsa

Precisazione:

$\neg A: (\exists a \in \mathbb{Z}) \neg (P(a))$

$(\exists a \in \mathbb{Z}) \neg (a \cdot 1 = a \wedge 1 \cdot a = a)$

$(\exists a \in \mathbb{Z}) \left(\neg(a \cdot 1 = a) \vee \neg(1 \cdot a = a) \right)$

$(\exists a \in \mathbb{Z}) (a \cdot 1 \neq a \vee 1 \cdot a \neq a)$ $\qquad$ falsa

$\underbrace{\neg(a \wedge b)} \Leftrightarrow \underbrace{\neg a \vee \neg b}$

$\neg(a \wedge b) \longleftrightarrow \neg a \vee \neg b$

B: Ogni numero intero naturale è dispari

$n \in \mathbb{Z}$ si dice dispari se $\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2h + 1$

$n \in \mathbb{N}$ " " " " $\exists h \in \mathbb{N}$ " " $n = 2h + 1$

per esempio: -15 è dispari e infatti esiste $h = -8 \in \mathbb{Z}$ tale che $-15 = 2(-8) + 1$

scriviamo B in simboli

B: $(\forall n \in \mathbb{N})$ (n è dispari) falsa ($P(n)$: n è dispari)

è falsa perché c'è almeno un numero pari

B è falsa e quindi $\neg B$ è vera

$\neg B: (\exists n \in \mathbb{N}) \neg (P(n))$

$(\exists n \in \mathbb{N}) \neg$ (n è dispari)

$(\exists n \in \mathbb{N})$ (n non è dispari)

$(\exists n \in \mathbb{N})$ (n è pari)

C: Esiste un numero naturale che è un quadrato (perfetto)

C è vera

$C: (\exists n \in \mathbb{N}) (\overbrace{\exists h \in \mathbb{N} \quad n = h^2}^{P(n)})$

C: $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\exists h \in \mathbb{N}$ $n = h^2$ vera

$\neg C: (\forall n \in \mathbb{N}) (\neg P(n))$

$\neg C: (\forall n \in \mathbb{N}) \neg (\exists h \in \mathbb{N} \quad n = h^2)$

$\neg C: (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall h \in \mathbb{N} \quad \neg (n = h^2))$

$\neg C: (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall h \in \mathbb{N} \quad n \neq h^2)$ falso

In generale $\neg\big((\forall x \in U_x)(P(x))\big)$ diventa

$$(\exists x \in U_x)(\neg P(x))$$

$\neg\big((\exists x \in U_x)(P(x))\big)$ diventa

$$(\forall x \in U_x)(\neg P(x))$$

Esempi 1. P_1: tutti hanno almeno un cugino falsa

In simboli: Sia U l'insieme di tutti gli esseri umani.

$P_1 : (\forall x \in U)(\exists y \in U$ tale che y è cugino di $x)$ 0

$\neg P_1 : (\exists x \in U)(\forall y \in U$ y non è cugino di $x)$ 1

2. P_2 : tutti gli esseri umani sono cugini tra loro

$P_2 : (\forall x, y \in U)$ (x è cugino di y). falsa

$\neg P_2 : (\exists x, y \in U)$ $\neg$(x è cugino di y)

$\neg P_2 : (\exists x, y \in U)$ (x non è cugino di y)

3. P_3 : 3 è un numero primo $\qquad 1$

P_4 : $\sqrt{5}$ è un numero razionale $\qquad 0$

$P_3 \wedge P_4 \qquad 0$

$\neg (P_3 \wedge P_4) \qquad 1$

$\neg P_3 \vee \neg P_4 \qquad 1$

(3 non è un numero primo) $\vee$ ($\sqrt{5}$ non è un numero razionale)

0 $\qquad$ 1

$P_3 \vee P_4 \qquad 1$

$\neg (P_3 \vee P_4) \qquad 0$

$(\neg P_3 \wedge \neg P_4) \qquad 0$

(3 non è un numero primo) $\wedge$ ($\sqrt{5}$ non è un numero razionale)

0 $\qquad$ 1

4. $P_5 : (\forall a \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Z})(y - a^2 = -1)$

$P_5 : (\forall a \in \mathbb{N})\underbrace{\big((\exists y \in \mathbb{Z})(y = a^2 - 1)\big)}_{P(a)}$ vera

(per es. se $a = 1$ $y = 0$
se $a = 5$ $y = 24$ ......)

$\neg P_5$ è falsa

$\neg P_5 : (\exists a \in \mathbb{N})\ (\neg P(a))$ falsa.

$\neg P_5 : (\exists a \in \mathbb{N})\ ((\forall y \in \mathbb{Z})\ \neg(y = a^2 - 1))$ falsa

$\neg P_5 : (\exists a \in \mathbb{N})\ ((\forall y \in \mathbb{Z})\ (y \neq a^2 - 1))$ falsa

Osservazione

$(\forall x \in U)\ (P(x)) \longrightarrow (\exists x \in U)\ (P(x))$ vera

$(\exists x \in U)\ (P(x)) \longrightarrow (\forall x \in U)\ (P(x))$ falsa

INSIEMI

Il concetto di insieme è "primitivo" cioè non si può definire senza coinvolgere altri concetti che a loro volta non possono essere definiti

Per definire un insieme si possono per esempio elencarne gli elementi.

Esempi.

1. $A = \{0, -1, \sqrt{3}, 6, 28\}$ è un insieme
2. $B = \{a, x, b, 3\}$ è un insieme
3. $C = \{2, +, *, :, t\}$ è un insieme
4. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ insieme dei numeri naturali
5. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ insieme dei numeri relativi

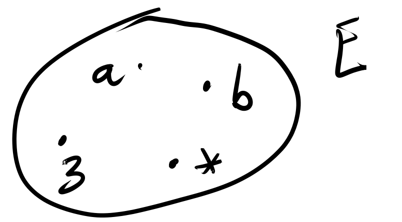
Si può definire un insieme tramite una "proprietà caratteristica", cioè una proprietà verificata da tutti e soli gli elementi di quell'insieme.

$$A = \{x : P(x)\}$$

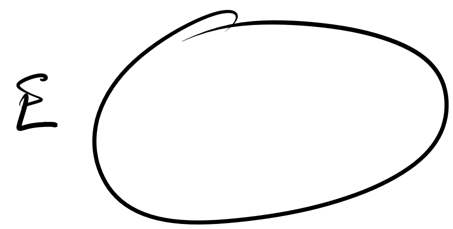
Esempi. $D = \{ x : x$ è una lettera dell'alfabeto italiano $\}$

$D = \{ a, b, c, d, \ldots\ldots, z \}$.

Diagrammi di Venn



$E = \{ a, b, 3, * \}$



Un insieme è formato da oggetti. Se A è un insieme, la circostanza che un oggetto a faccia parte degli oggetti che costituiscono l'insieme A si esprime dicendo che "a appartiene ad A" oppure "a è elemento di A" e si esprime in simboli tramite "$\in$", simbolo di appartenenza

$$a \in A$$

gli oggetti di un insieme A si dicono <u>elementi</u> di A.

$7 \in \mathbb{N}$ vero

$\pi \in \mathbb{N}$ falso $\pi = 3,14159\ldots$

Se si vuole esprimere in simboli la circostanza che un elemento a non appartenga a un insieme A si scrive in simboli

$$a \notin A .$$

In altre parole $\neg(a \in A)$ si scrive $a \notin A$.

Per esempio:

$$\pi \notin \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

Insieme dei numeri razionali;

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme di tutte le frazioni, ovvero l'insieme di tutti i numeri decimali con cifre decimali periodiche.

per es. $2,31 = 2,31\bar{0}$

Siano

$\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ $\qquad q \neq 0 \wedge s \neq 0$

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \iff (\exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } r = hp \wedge s = hq) \vee$$
$$(\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } p = kr \wedge q = ks)$$

per es. $\qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad \begin{array}{l} 2 = \overset{h}{2} \cdot 1 \\ 4 = \underset{h}{2} \cdot 2 \end{array}$

$p \to$ numeratore

$q \rightsquigarrow$ denominatore

$$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4}$$

Come si passa dalla rappresentazione sotto forma di frazione alla rappresentazione sotto forma di numero decimale

$$\frac{10}{3} = 3,\overline{3} \qquad \frac{1}{2} = 0,5$$