Def. Siano A, B insiemi non vuoti, $R \subset A \times B$. Si dice che R è funzionale se

$$\forall a \in A \quad \exists!\, b \in B \quad \text{tale che} \quad (a, b) \in R$$

$\exists!$ esiste un unico

Notazione $f = (A, B, R)$ si dice funzione tra A e B

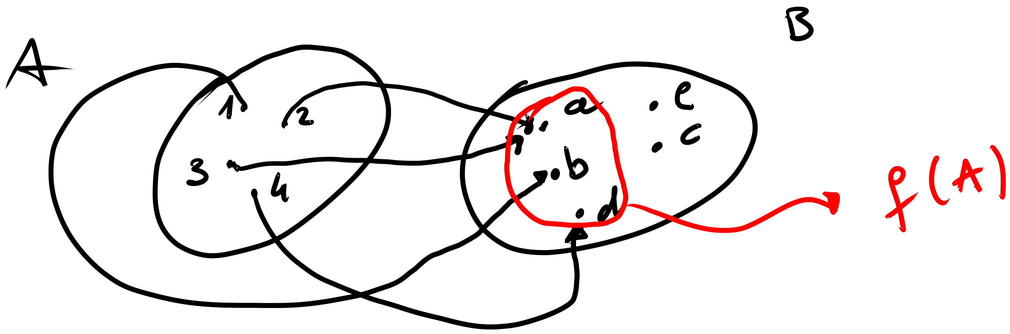
$$f : A \longrightarrow B \qquad a \longmapsto f(a)$$

$f(a)$ è l'unico elemento $b \in B$ tale che $(a, b) \in R$.
A insieme di partenza o dominio, B insieme di arrivo, R grafico

Esempi. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad B = \{a, b, c, d, e\}$

$f_1 : A \to B$

$f_1(1) = b \quad f_1(2) = a \quad f_1(3) = a \quad f_1(4) = d.$



$R_1 = \{(1, b), (2, a), (3, a), (4, d)\}$ funzionale

2. $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\qquad n \longmapsto -3n$

$R_2 = \{ (0,0), (1,-3), (2,-6), (3,-9) \ldots \ldots \}$ grafico di f_2

R_1 è la relazione funzionale che definisce f_2.

<u>Def</u> Siano $f : A \longrightarrow B$ una funzione tra A e B, $X \subset A$
Si dice immagine (diretta) di X tramite f l'insieme

$$f(X) = \{ b \in B \ : \ \exists\, a \in X \text{ tale che } f(a) = b \} =$$

$$= \{ f(a) \ : \ a \in X \} \subset B$$

Può accadere che $X = A$. In tal caso $f(A)$ si dice immagine di f.

Esempi: 1. $X = \{2, 4\}$ $\qquad f_1(X) = \{a, d\}$

$f_1(A) = \{a, b, d\} \subset B$.

2. $Y = \{0, 4, 7, 2\}$
$f_2(Y) = \{0, -12, -21, -6\}$.

3. $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad n \longmapsto n^2$

$T = \{-2, 2\} \subset \mathbb{Z}$ $\qquad f_3(T) = \{4\}$.

$S = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$ $\qquad f_3(S) = \{9, 4, 0, 1\}$.

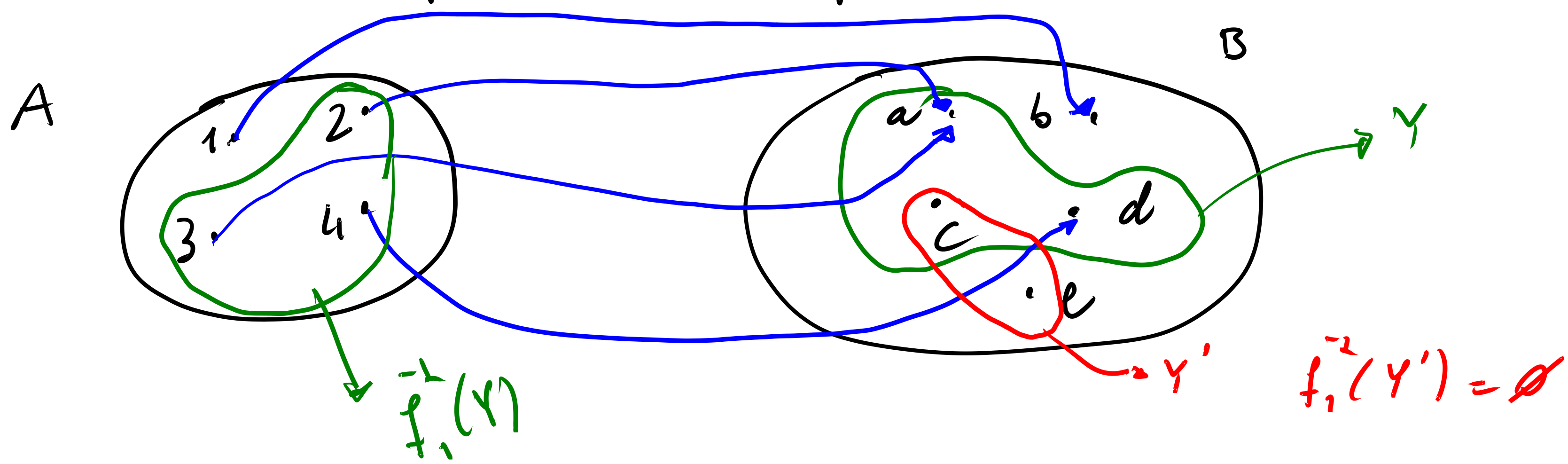
Def. Siano $f: A \to B$ una funzione, $Y \subset B$. Si dice immagine reciproca o controimmagine mediante f di Y il sottoinsieme di A

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\} =$$

$$= \{a \in A : \exists\, b \in Y \text{ tale che } f(a) = b\} \subset A.$$

Esempi: 1. $Y = \{a, c, d\}$ $\qquad f_1^{-1}(Y) = \{2, 3, 4\}$

perché $f_1(2) = f_1(3) = a$ $\qquad f_1(4) = d$



$Y' = \{c, e\}$ $\qquad f_1^{-1}(Y') = \emptyset$

2. $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \underset{\cup \, Y_0}{\mathbb{Z}}$ $\qquad n \longmapsto -3n$

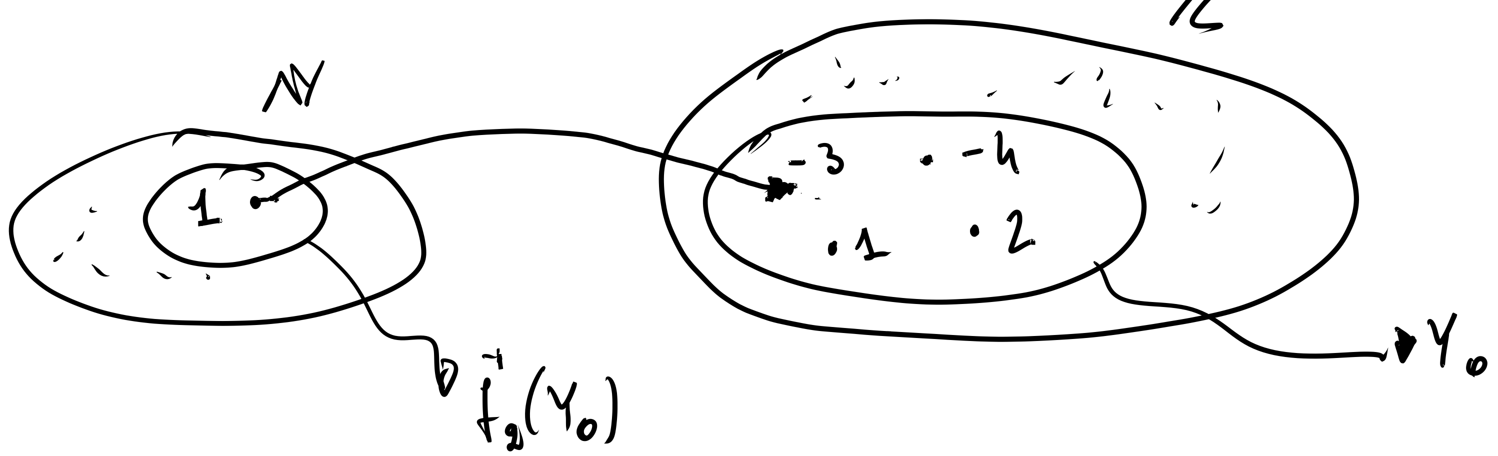
$Y_0 = \{-3, -4, 1, 2\}$ $\qquad f_2^{-1}(Y_0) = \{1\}$ $\qquad f_2(1) = -3$

$-4 = f_2(n)$ non è possibile

$-4 = -3n$

$Y_1 = \{-2, -1, 1, 2\}$ $\qquad f_2^{-1}(Y_1) = \emptyset$

$0, -3, -6, -9, -12, \dots$



3. $f_3 : \underset{\substack{\cup \\ f_3^{-1}(Y_2)}}{\mathbb{Z}} \longrightarrow \underset{\substack{\cup \\ Y_2}}{\mathbb{N}}$ $\qquad n \longmapsto n^2$

$Y_2 = \{0, 1, 2\}$ $\qquad f_3^{-1}(Y_2) = \{0, 1, -1\}$

$f_3(0) = 0$ $\qquad f_3(1) = 1$ $\qquad f_3(-1) = 1$

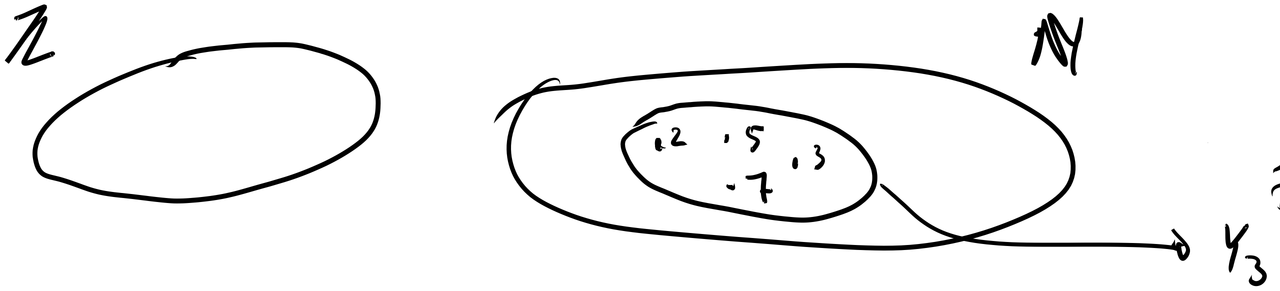
$$Y_3 = \{2, 3, 5, 7\} \qquad f_3^{-1}(Y_3) = \emptyset$$

$?\ \exists\, n \in \mathbb{Z}$ tale che $f_3(n) = 2$ cioè $n^2 = 2$ NO

$\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tale che $f_3(n) = 3$ cioè $n^2 = 3$ NO

$\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tale che $f_3(n) = 5$ " $n^2 = 5$ NO

$\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tale che $f_3(n) = 7$ " $n^2 = 7$ NO.



$f_3^{-1}(Y_3) = \emptyset$.

Osserv. Sia $f: A \longrightarrow B$. Se $a \in A$ $f(a)$ si dice valore assunto da f in a.

$$f(a) \in B \qquad \underbrace{f(\{a\}) = \{f(a)\} \subset B}_{} \qquad \{a\} \subset A$$

Prop. Siano $f: A \to B$, $X_1, X_2 \subset A$, $Y_1, Y_2 \subset B$. Risulta

1. $X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$ $\wedge$ $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$

2. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$ $\wedge$ $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

3. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ $\wedge$ $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

Dim. 2. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$

sia $y \in f(X_1 \cap X_2) \Rightarrow \exists\, x \in X_1 \cap X_2$ tale che $f(x) = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in X_1$ tale che $f(x) = y \;\wedge\; \exists\, x \in X_2$ tale che $f(x) = y$

$\Rightarrow\; y \in f(X_1) \;\wedge\; y \in f(X_2) \Rightarrow\; y \in f(X_1) \cap f(X_2)$

Non vale in generale l'altra inclusione, cioè <u>non è vero</u>, in generale, che <u>$f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$</u>.

controesempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^2$

$X_1 = \{-2, 0\}$ $\qquad X_2 = \{0, 2\}$ $\qquad X_1 \cap X_2 = \{0\}$

$f(X_1 \cap X_2) = \{0\}$

$f(X_1) = \{4, 0\}$ $\qquad f(X_2) = \{0, 4\}$

$f(X_1) \cap f(X_2) = \{0, 4\}$ $\qquad f(X_1 \cap X_2) = \{0\}$

$$f(X_1) \cap f(X_2) \not\subset f(X_1 \cap X_2).$$

Def. Sia $f: A \to B$ una funzione. Si dice che f è iniettiva se

$\forall\, x, y \in A \qquad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$p \to q \iff \neg q \to \neg p$

La condizione di ingettività diventa

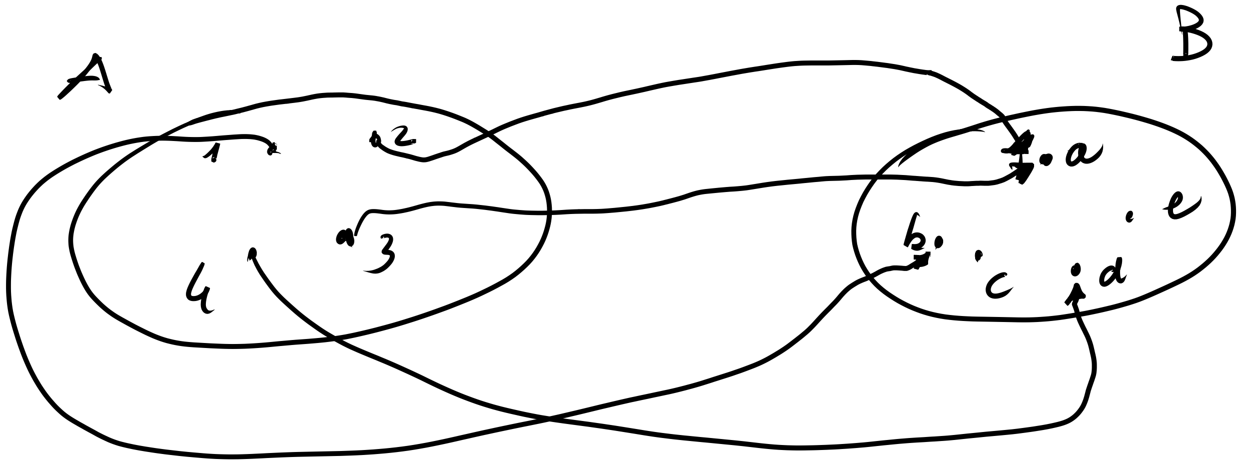
$\forall x, y \in A \quad \neg (f(x) \neq f(y)) \Rightarrow \neg (x \neq y)$

$\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ←

Esempi. 1. $f_1 : A \to B \quad A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{a, b, c, d, e\}$

$f_1(1) = b \quad f_1(2) = a \quad f_1(3) = a \quad f_1(4) = d$

$2 \neq 3 \wedge f_1(2) = f_1(3)$ allora f_1 non è ingettiva



2. $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad n \longmapsto -3n$

è ingettiva.

Siano $\underline{n, m \in \mathbb{N}}$ $\quad \underline{f(n) = f(m)} \Rightarrow -3n = -3m \Rightarrow \underline{n = m}$

$\forall a, b \in A \quad a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$ non prova nulla, non è la def. di funzione ingettiva

3. $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\qquad x \mapsto x^2$

f_3 non è iniettiva perché $f(-1) = f(1) = 1$

$\exists -1, 1 \in \mathbb{Z}$ tali che $f(-1) = f(1)$.

Def. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dice che f è surgettiva se

$\forall y \in B \quad \exists x \in A$ tale che $f(x) = y$

o equivalentemente

$\forall y \in B \quad f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

o equivalentemente

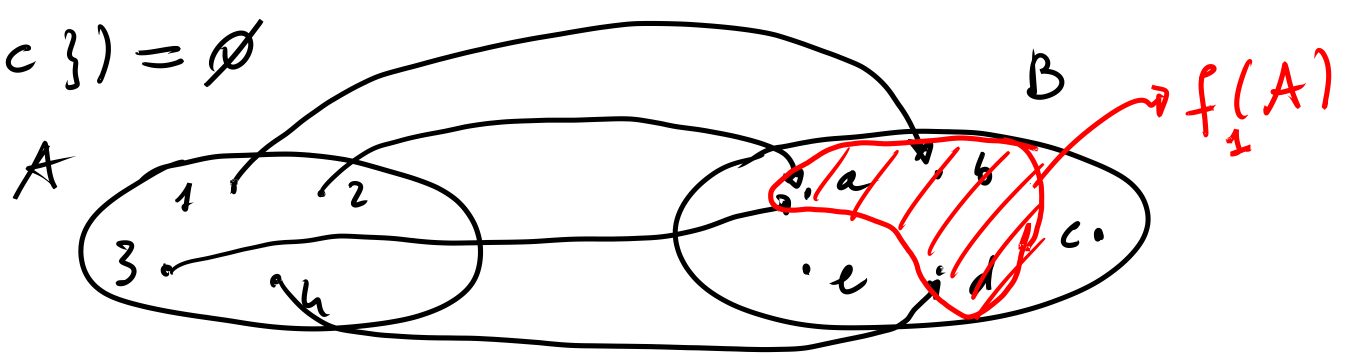
$f(A) = B$.

Esempi. 1. $f_1 : A \to B$ $\qquad A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$

non è surgettiva perché $\exists c \in B$ tale che $\forall x \in A \quad f_1(x) \neq c$

$f_1^{-1}(c) = f_1^{-1}(\{c\}) = \emptyset$



2. $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\qquad n \longmapsto -3n$

non è surgettiva perché $\exists\, 4 \in \mathbb{Z}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_2(n) \neq 4$

ovvero $\quad f_2^{-1}(4) = f_2^{-1}(\{4\}) = \emptyset$.

3. $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad x \longmapsto x^2$

non è surgettiva $\exists\, 10 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall x \in \mathbb{Z}$ $\quad f_3(x) \neq 10$

$x^2 \neq 10$

4. $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad x \mapsto 3x + 1$

f_4 è iniettiva:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\qquad \underline{f_4(x_1) = f_4(x_2)} \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow \underline{x_1 = x_2}$

f_4 è surgettiva:

$\forall y \in \mathbb{R}$ $\quad \exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che $\quad f_4(x) = y$

$3x + 1 = y$

$$3x = y - 1$$

$$x = \frac{y-1}{3} \in \mathbb{R}.$$

$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists\, x = \frac{y-1}{3} \in \mathbb{R}$ tale che $f_4(x) = y$

e quindi f_4 è surgettiva.

Def. Sia $f: A \to B$ funzione. Si dice che f è bigettiva se f è ingettiva e surgettiva.

Solo f_4 è bigettiva.