Alcuni esercizi risolti di **MATEMATICA DISCRETA**
C.L. **Informatica**

1. È assegnata la seguente relazione $\mathcal{R}$ sull'insieme $\mathbb{Q}^*$ dei numeri razionali non nulli

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^* \quad (a,b) \in \mathcal{R} \;\Leftrightarrow\; \big((\exists h \in \mathbb{Z})(a = 5^h b)\big).$$

   (a) Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza

   (b) determinare la classe di euivalenza di $\frac{1}{5}$.

   Soluzione 1a)

   $\mathcal{R}$ è riflessiva poichè $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 5^0 a$, e quindi

$$\forall a \in \mathbb{Q}^* \quad (a,a) \in \mathcal{R}.$$

   $\mathcal{R}$ è simmetrica. Siano, infatti $a, b \in \mathbb{Q}^*$ tali che $(a,b) \in \mathcal{R}$. Allora $\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 5^h b$ quindi $5^{-h} a = 5^{-h} 5^h b = b$ cioè $(b,a) \in \mathcal{R}$. Pertanto

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^* \quad (a,b) \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; (b,a) \in \mathcal{R}.$$

   $\mathcal{R}$ è transitiva. Siano, infatti $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ tali che $(a,b) \in \mathcal{R}$, $(b,c) \in \mathcal{R}$. Allora $\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 5^h b$, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $b = 5^k c$. Quindi $a = 5^h b = 5^h 5^k c = 5^{h+k} c$, ovvero $\exists t = h + k \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 5^t c$ e pertanto $(a,c) \in \mathcal{R}$, cioè

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}^* \quad \big((a,b) \in \mathcal{R} \;\wedge\; (b,c) \in \mathcal{R}\big) \;\Rightarrow\; (a,c) \in \mathcal{R}.$$

   1b) Si ha:

$$a \in [\frac{1}{5}]_{\mathcal{R}} \;\Leftrightarrow\; (a, \frac{1}{5}) \in \mathcal{R} \;\Leftrightarrow\; \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a = 5^h \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow\; \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a = 5^{h-1} \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a = 5^k.$$

2. È assegnata la seguente relazione $\mathcal{R}$ sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri razionali non nulli

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;;\; 2 \mid (x+y)^2\}.$$

   (a) Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza

   (b) determinare la classe di euivalenza di 0 rispetto a $\mathcal{R}$.

   Soluzione 2a)

   $\mathcal{R}$ è riflessiva poiché $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\quad 2 \mid (x+x)^2$, cioè $(x,x) \in \mathcal{R}$.

   $\mathcal{R}$ è simmetrica. Siano, infatti $x, y \in \mathbb{Z}$, tali che $(x,y) \in \mathcal{R}$. Allora $2 \mid (x+y)^2$ e quindi $2 \mid (y+x)^2$, ovvero $(y,x) \in \mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ è transitiva. Siano $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tali che $2 \mid (x+y)^2$ e $2 \mid (y+z)^2$. Allora $2 \mid x^2+y^2+2xy$ e $2 \mid y^2+z^2+2yz$ e quindi sommando, $2 \mid x^2+2y^2+2xy+z^2+2yz$. D'altra parte $2 \mid 2y^2+2xy+2yz$, per cui $2 \mid x^2+z^2$ ed inoltre $2 \mid 2xz$ e, ancora sommando, $2 \mid x^2+z^2+2xz$, vale a dire $2 \mid (x+z)^2$.

2b) Si ha:

$$\begin{aligned} x \in [0]_{\mathcal{R}} \ &\Leftrightarrow \ (x,0) \in \mathcal{R} \ \Leftrightarrow \ 2 \mid (x+0)^2 \\ &\Leftrightarrow \ 2 \mid x^2 \ \Leftrightarrow \ 2 \mid x. \end{aligned}$$

Quindi $[0]_{\mathcal{R}} = \{2h \ : h \in \mathbb{Z}\}$.