

Appello di **MATEMATICA DISCRETA - Informatica (corso A)**

6 luglio 2021

Nome e cognome.....

1. Calcolare il resto della divisione per 3 del numero 134.129^{1251} .

2. È assegnato il gruppo abeliano $(\mathbb{Z}_8, +)$.

(a) Calcolare $[2]_8 - [7]_8$;

(b) determinare tutti i generatori di $(\mathbb{Z}_8, +)$;

(c) determinare l'ordine di $[2]_8$ e di $[5]_8$ in $(\mathbb{Z}_8, +)$.

3. Verificare che la relazione su \mathbb{Z} :

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 8 \mid 5x + 3y\}.$$

è di equivalenza.

4. Stabilire se esiste un albero avente 3 vertici di grado 5, 2 vertici di grado 4, 1 vertice di grado 3, 7 vertici di grado 2 e 15 vertici di grado 1.

5. Rispondere (almeno) a uno dei seguenti quesiti

(a) Siano A un insieme non vuoto, \mathcal{R} una relazione di equivalenza su A e, per ogni $x \in A$, sia $[x]_{\mathcal{R}}$ la classe di equivalenza di x rispetto a \mathcal{R} . Provare che $\forall a, b \in A$ si ha:

$$(a, b) \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset.$$

(b) Provare che esistono infiniti numeri primi.

(c) Siano (G, \cdot) un gruppo, $a \in G$. Provare che l'insieme

$$\langle a \rangle = \{g \in G : \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } g = a^h\}$$

è un sottogruppo di (G, \cdot) .