MATRICI

Definizione 1. Siano $n, m \in \mathbb{N}^*$. Una *matrice* a coefficenti un un campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ di tipo (n, m) è una tabella di $n \times m$ elementi di $\mathbb{K}$ organizzati in n righe ed m colonne. I numeri che costrituiscono la matrice si dicono elementi o coefficienti della matrice stessa. L'insieme delle matrici di tipo (n, m) a coefficenti in $\mathbb{K}$ si indica con con $M_{n,m}(\mathbb{K})$.

Esempio 1. Alcuni esempi di matrici sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

matrice di tipo $(3, 3)$ a coefficienti in $\mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,5}(\mathbb{Q})$$

matrice di tipo $(2, 5)$ a coefficenti in $\mathbb{Q}$,

$$\begin{pmatrix} [1]_5 & [3]_5 \\ [0]_5 & [2]_5 \\ [4]_5 & [4]_5 \\ [1]_5 & [0]_5 \\ [1]_5 & [0]_5 \end{pmatrix} \in M_{5,2}(\mathbb{Z}_5)$$

matrice di tipo $(5, 2)$ a coefficenti in $\mathbb{Z}_5$.

La generica matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ verrà scritta come

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_j & \cdots & a^1_m \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_j & \cdots & a^2_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^i_1 & a^i_2 & \cdots & a^i_j & \cdots & a^i_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_j & \cdots & a^n_m \end{pmatrix}.$$

Quindi, se $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, a^i_j indica l'elemento di posto (i, j), ovvero l'elemento che si trova sulla riga i-ma e sulla colonna j-ma (si dice che i è l'indice di riga, j è l'indice di colonna).

Osservazione 1. Si può anche usare la notazione compatta:

$$A = (a^i_j), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad j = 1, \ldots, m;$$

inoltre si possono anche incontrare le notazioni:

$$A = (a_{ij}) \text{ oppure } A = (a^{ij}) \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

dove il primo indice indica la riga di appartenenza, il secondo la colonna.

Esempio 2. Considerata la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

si ha: $a_2^1 = \sqrt{2},\ a_3^2 = 1,\ a_3^3 = 2$.

Nota Bene 1. Si indicherà con $\mathbf{0} \in M_{n,n}$ la matrice i cui coefficieni sono tutti zeri. Quindi:

$$\mathbf{0} = (a_j^i),\ \text{tale che } \forall i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\ \ a_j^i = 0.$$

Definizione 2. Sia $n \in \mathbb{N}^*$. Una matrice di tipo (n, n) si dice *quadrata*. L'insieme $M_{n,n}(\mathbb{K})$ si indica con $M_n(\mathbb{K})$.

Definizione 3. Siano $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_j^i) \in M_n(\mathbb{K})$. Gli elementi di A aventi indici uguali, ovvero $a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n$, formano la *diagonale principale* di A.

Nota Bene 2. Due matrici $A = (a_j^i) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ $B = (b_k^h) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ sono uguali se e solo se $n = p,\ m = q$, ovvero A e B sono dello stesso tipo e se

$$\forall i = 1, \dots, n\ \ \forall j = 1, \dots, m\ \ \text{si ha}\ \ a_j^i = b_j^i.$$

ovvero A e B hanno gli stessi elementi nelle stesse posizioni.

Definizione 4. Siano $n, m \in \mathbb{N}^*$. Sull'insieme $M_{n,m}(\mathbb{K})$ delle matrici di tipo (n, m) e' possibile definire l'operazione di somma:

$$+ : M_{n,m}(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K}) \qquad (A, B) \mapsto A + B$$

definita come segue; se $A = (a_j^i), B = (b_j^i) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, allora si pone

$$A + B = (a_j^i + b_j^i), \qquad i = 1, \dots, n,\ \ j = 1, \dots, m$$

ovvero le matrici si sommano termine a termine.

Nota Bene 3. Due matrici si possono sommare solo se sono dello stesso tipo.

Esempio 3. Date le matrici a coefficienti in $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$A+C$ e $B+C$ non esistono; invece esiste $A+B$ perché A e B sono entrambe due matrici quadrate di ordine 3 e si ha:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1. Date A e B dell'Esempio 3 e

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

calcolare $A + D$ e $D + C$.

Proposizione 1. *Siano $n, m \in \mathbb{N}^*$. La struttura algebrica $(M_{n,m}(\mathbb{K}), +)$ verifica le seguenti proprietà*

1. *commutativa:* $\forall A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $A + B = B + A$;
2. *associativa* $\forall A, B, \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. *esiste l'elemento neutro della struttura $M_{n,m}(\mathbb{K})$, che è la matrice nulla $\mathbf{0}$:*

$$\exists\ \mathbf{0} \in M_{n,m}(\mathbb{K}) \text{ tale che } \ \forall A \in M_{n,m}(\mathbb{K}), \quad A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A;$$

4. *ogni elemento ammette opposto:*

$$\forall A = (a^i_j) \in M_{n,m}(\mathbb{K}), \exists -A = (-a^i_j) \in M_{n,m}(\mathbb{K}), \quad \text{tale che} \quad A+(-A) = (-A)+A = \mathbf{0} = A.$$

Quindi $(M_{n,m}(\mathbb{K}), +)$ e' un gruppo abeliano.

Esempio 4. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R}),$$

risulta:

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{6} & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente: $A + (-A) = \mathbf{0}$

Definizione 5. Siano V e K insiemi non vuoti. Si definisce *legge di composizione esterna* un'applicazione

$$\bullet : K \times V \to V \qquad (\alpha, v) \in K \times V \mapsto \alpha \bullet v.$$

Definizione 6. Siano $(V, +)$ un gruppo abeliano, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo e $\bullet : K \times V \to V$ una legge di composiizone estena su V. Si dice che $(V, +, \bullet)$ è uno *spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{K}$ se sono verificate le seguenti condizioni:

(V$_1$) $\quad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in V \quad \alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w$

(V$_2$) $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall v \in V \quad (\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v$

(V$_3$) $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall v \in V \quad (\alpha \cdot \beta) \bullet v = \alpha \bullet (\beta \bullet v) = \beta \bullet (\alpha \bullet v)$

(V$_4$) $\quad \forall v \in V \quad 1_{\mathbb{K}} \bullet v = v.$

Se (V$_1$), (V$_2$), (V$_3$), (V$_4$) sono verificati, gli elementi di V si chiamano *vettori*, gli elementi di $\mathbb{K}$ si chiamano *scalari*.

Definizione 7. Siano $A = (a^i_j) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Si definisce il prodotto

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a^i_j), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Resta così definita una legge di composizione esterna:

$$\cdot : \mathbb{K} \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Esempio 5. Si ha:

$$-\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ 3\sqrt{2} & -2 & \sqrt{6} & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4 & -\sqrt{6}\\ -6 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & -5\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Proposizione 2. *Risulta:*

- $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall A,B\in M_{n,m}(\mathbb{K})\quad \alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall A\in M_{n,m}(\mathbb{K})\quad (\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall A\in M_{n,m}(\mathbb{K})\quad (\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)=\beta\cdot(\alpha\cdot A)$
- $\forall A\in M_{n,m}(\mathbb{K})\quad 1_{\mathbb{K}}\cdot A=A.$

Pertanto il gruppo abeliano $(M_{n,m}(\mathbb{K}),+)$ *è uno spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{K}$.

Definizione 8. Sia $A=(a^i_j)\in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $n,m\in\mathbb{N}^*$. Si dice *matrice trasposta* di A e si denota con il simbolo A^t la matrice ottenuta scambando le righe e le colonne di A. Quindi $A^t\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e si ha: $A^t=(a^j_i),\ j=1,\dots,m\ \ i=1,\dots,n.$

Nota Bene 4. Si possono usare anche le notazioni ${}^tA$ e A_{-1} per denotare la matrice trasposta di una matrice $A\in M_{n,m}(\mathbb{K})$.

Esempio 6. La matrice trasposta di

$$A=\begin{pmatrix}0 & i & 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & i & 2 & 2\end{pmatrix}\in M_{2,5}(\mathbb{C})$$

è la matrice

$$A^t=\begin{pmatrix}0 & 3\\ i & 1\\ 2 & i\\ -1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\in M_{5,2}(\mathbb{C})$$

Definizione 9. Sia $A=(a^i_j)\in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata di ordine $n\in\mathbb{N}^*$. Si dice che A è una matrice simmetrica se $A^t=A$. In definitiva, A è una matrice simmetrica se

$$\forall i,j=1,\dots,n \text{ risulta } a^i_j=a^j_i.$$

Esempio 7. È simmetrica la matrice

$$\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Definizione 10. Sia $n\in\mathbb{N}^*$. Si definiscono i *simboli di Kroneker* δ^i_j, $i,j=1,\dots,n$ nel modo seguente:

$$\delta^i_i=\begin{cases}1 \text{ se } i=j\\ 0 \text{ se } i\neq j\end{cases}$$

Definizione 11. Si definisce la *matrice identità* o *matrice identica* di ordine n come
$$I_n = (\delta^i_j), \quad i,j = 1,\dots,n.$$
In definitiva I_n ha tutti 1 sulla diagonale principale e zero altrove. Quindi
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$
Ovviamente la matrice identica è una matrice simmetrica.

Esempio 8. Si ha, per esempio
$$I_1 = (1) \in M_1(\mathbb{K}) \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$$

Definizione 12. Siano $n, m, s \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{m,s}(\mathbb{K})$. Si dice *prodotto* (righe per colonne) di A per B la matrice $A \cdot B \in M_{n,s}(\mathbb{K})$, ottenuta moltiplicando le righe di A per le colonne di B, ovvero $A \cdot B = (c^i_j)$, dove
$$c^i_j = \sum_{t=1}^{m} a^i_t b^t_j.$$

Esempio 9. Sono date le matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Q}) \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & -14 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$
non si può eseguire il prodotto di A per B; si può eseguire invece il prodotto di B per A e risulta:
$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} -5 & -14 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 + (-14) \cdot 0 & -5 \cdot 2 + (-14) \cdot (-1) & -5 \cdot 3 + (-14) \cdot (-2) \\ \frac{1}{2} \cdot 1 + (-\frac{7}{4}) \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot 2 + (-\frac{7}{4}) \cdot (-1) & \frac{1}{2} \cdot 3 + (-\frac{7}{4}) \cdot (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 4 & 13 \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{4} & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Esempio 10. Date le matrici a coefficienti reali
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
si possono eseguire entrambi i prodotti $A \cdot B$ e$B \cdot A$ e risulta:
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 12 & 3 & -2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Nota Bene 5. A questo punto è evidente che il prodotto tra due matrici A eB non quadrate non può commutare: infatti può succedere che esista il prodotto $A \cdot B$ ma non il prodotto $B \cdot A$ o che esistano entrambi ma che siano di tipo diverso. Con il seguente esempio si dimostra che anche il prodotto di due matrici quadrate non commuta, in generale.

Esempio 11. Date le matrici A e B quadrate di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

si ha:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{2}{15} \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{8}{5} \\ -1 & -\frac{16}{15} \end{pmatrix}$$

ed è evidente che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Esercizio 2. Sono assegnate le seguenti matrici a coefficenti in $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcolare i prodotto nei casi in cui è possibile.

Osservazione 2. Sia $n \in \mathbb{N}^*$. Allora esiste una legge di composizione interna:

$$\cdot : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}) \qquad (A, B) \mapsto A \cdot B$$

Proposizione 3. *La struttura algebrica $(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$, $n \in \mathbb{N}^*$, verifica le seguenti proprietà:*

1. *è associativa*
$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \qquad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
2. *Esiste l'elemento neutro, che è la matrice identità $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ tale che*
$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \qquad A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

e quindi, in virtù dell'esempio 11, $(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è un monoide non commutativo.

Corollario 1. *La struttura algebrica $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}^*$, verifica le proprieta' distributive della somma rispetto al prodotto:*

$$\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{K}), \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad e \quad C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B.$$

e quindi è un anello non commutativo.

Si deve cercare di capire se l'anello $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ ha divisori dello zero ed elementi invertibili. Con il seguente esempio si dimostra che ammette divisori dello zero.

Esempio 12. La matrice non nulla:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

è un divisore dello zero, in quanto ha la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

come codivisore dello: infatti B è non nulla e si ha

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definizione 13. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$, si dice *invertibile* se e solo se esiste $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (ovvero se è un elemento unitario dell'anello $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$).

Si può stabilire se una matrice di $M_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$ è invertibile calcolandone il *rango*. L'algoritmo di Gauss-Jordan permette di calcolare il rango di una matrice, e quindi di stabilire se una matrice quadrata è invertibile, e di determinarne la matrice inversa, nel caso esista.

Definizione 14. Siano $n, m \in \mathbb{N}^*$, e sia

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_j^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_j^2 & \cdots & a_m^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^i & a_2^i & \cdots & a_j^i & \cdots & a_m^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_j^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Il primo elemento non nullo di ogni riga di A si dice *pivot* di quella riga. Se una riga è nulla, allora non ammette pivot.

Esempio 13. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,5}\mathbb{R}),$$

la seconda riga è priva di pivot; il pivot della prima riga è $1 = a_1^1$, il pivot della terza riga è $5 = a_5^3$, il pivot della quarta riga è $1 = a_2^4$.

Definizione 15. Una matrice si dice *a scala* se le eventuali righe nulle sono le ultime (in basso); inoltre il pivot della prima riga è a sinistra del pivot della seconda, il pivot della seconda riga è a sinistra del pivot della terza, e così via fino all'ultima riga non nulla.

Esempio 14. La matrice A dell'esempio 13 non è a scala; lo è invece la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'*algoritmo di Gauss* permette di ottenere una matrice a scala a partire da una qualunque matrice, usando le seguenti operazioni elementari sulle righe:

- scambiare tra loro le righe
- sommare a una riga un'altra moltiplicata per una costante.

Esempio 15. Sia A la matrice dell'esempio 13. Scambiando fra di loro la seconda e la quarta riga si ottiene la matrice a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 16. Si può vedere in questo esempio come si applica l'algoritmo di Gauss per ottenere una matrice a scala a partire dalla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - \frac{1}{2}R_1]{R_3 - \frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nota Bene 6. Si osservi che, applicando in modo diverso l'algoritmo di Gauss ad una matrice assegnata, si possono ottenere matrici a scala diverse, però si dimostra che il numero delle righe non nulle di due matrici a scala (ovvero il numero dei pivot) è lo stesso. Questo giustifica la definizione che segue.

Definizione 16. Si dice *rango* o *caratteristica* di una matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ il numero k dei pivot di una matrice a scala ottenuta da A mediante l'algoritmo di Gauss. Naturalmente $k \leq n$ e $k \leq m$.

Esempio 17. La matrice $A \in M_{4,5}(\mathbb{R})$ dell'esempio 13 ha rango 3; la matrice $B \in M_{4,5}(\mathbb{R})$ dell'esempio 14 ha rango 3; la matrice $C \in M_{4,5}(\mathbb{R})$ dell'esempio 16 ha rango 4.

Definizione 17. Si dice che una matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ è *a scala ridotta* se A è una matrice a scala e inoltre i pivot di tutte le righe sono uguali a 1.

Nota Bene 7. Nessuna delle matrici a scala degli esempi trattati è una matrice a scala ridotta.

L'*algoritmo di Gauss-Jordan* permette di ottenere una matrice a scala ridotta a partire da una qualunque matrice usando le seguenti operazioni elementari sulle righe:

- scambiare tra loro le righe
- sommare a una riga un'altra moltiplicata per una costante
- moltiplicare una riga per una costante non nulla.

Esempio 18. In questo esempio si mostra come, applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan, si possa ottenere una matrice a scala ridotta a partire dalla stessa matrice C dell'esempio 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - R_3]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_4]{\frac{3}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice a scala ridotta ottenuta a partire da C è:

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Nota Bene 8. Si osservi che non c'è un'unico modo di applicare l'algoritmo di Gauss-Jordan: com'è ovvio a partire da una matrice qualunque $A \in M_{n.m}(\mathbb{K})$ si possono utilizzare le operazioni elementari in maniera diversa, ma si dimostra che si arriva comunque all'unica matrice a scala ridotta. Nell'esempio 16, la matrice a scala ottenuta a partire dalla matrice C è:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando la prima riga per $\frac{1}{3}$, la seconda riga per $\frac{3}{2}$, la terza per $\frac{1}{3}$, si ottiene la matrice a scala ridotta C' dell'esempio 18.

Teorema 1. *Una matrice quadrata di ordine n è invertibile se e soltanto se il suo rango è n.*

L'algoritmo di Gauss-Jordan permette anche di calcolare la matrice inversa di una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile. Una volta accertato che il rango di A sia n, si considera la matrice

$$\big(A \mid I_n\big) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & 1 & 0 & 0\dots & \cdots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & 0 & 1 & 0\dots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n,2n}(\mathbb{K}).$$

Alla matrice $\big(A \mid I_n\big)$ si applica l'algoritmo di Gauss-Jordan fino ad ottenere una matrice a scala ridotta, ma del tipo $\big(I_n \mid B\big)$: risulta allora $B = A^{-1}$.

Esempio 19. Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

Se ne calcola il rango, utilizzando l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

La matrice a scala ottenuta ha 3 pivot e quindi il rango di A è 3. Quindi A è invertibile. Si considera allora la matrice $\big(A \mid I_3\big)$ e ad essa si applica l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}R_3]{-\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Allora risulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Infatti si ha (si verifichi per esercizio):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota Bene 9. C'è un criterio che permette di vedere subito se una matrice quadrata è invertibile o meno (cf. Teorema 2): questo criterio utilizza un numero che si associa ad ogni matrice quadrata e si chiama *determinante*. La definizione di determinamte si può dare ricorsivamente. Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ il determinante di A si indica con $det(A)$ o anche con $|A|$.

Se $n = 1$, allora $A = (a) \in M_1(\mathbb{K})$ e si pone $det(A) = a$ Se $n = 2$, allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_1(\mathbb{K})$$

e si pone

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{2}$$

Esempio 20. Si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = -2, \qquad \begin{vmatrix} i & -2 \\ 1+i & 2 \end{vmatrix} = 2i + 2(1+i) = 4i + 2$$

Per estendere la definizione di determinante a una matrice di qualunque ordine, occorre dare la seguente:

Definizione 18. Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Si dice *complementeo algebrico* dell'elemento a_{ij} il prodotto $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$, dove A_{ij} è la matrice quadrata di ordine $n + 1$ ottenuta da A sopprimendo la riga i-a e la colonna j-ma.

Esempio 21. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si ha, per esempio:

- il complemento algebrico di a_{11} è:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$$

- il complemento algebrico di a_{12} è:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

- il complemento algebrico di a_{32} è :

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Definizione 19. Data $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$, il determinante è dato, per ogni i fissato, dalla formula:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{ij} det(A_{ij})$$

oppure per ogni j fissato da

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{ij} det(A_{ij})$$

ovvero il determinante della matrice A e' ottenudo effettuando la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i rispettivi comlementi algebrici.

Osservazione 3. In realtà la Definizione 19 può essere posta grazie al Teorma di Laplace, che afferma che la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i rispettivi comlementi algebrici non dipende dalla particolare riga (o colonna) scelta.

Osservazione 4. Nel caso di una matrice di ordine 2, usando la Definizione 19 e sviluppando rispetto alla prima riga, si ha:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d + b \cdot (-c) = ab - bc,$$

perché il complemento algebrico di $a_{11} = a$ è $A_{11} =)-1)^{1+1}d = d$, mentre il complemento algebrico di $a_{12} = b$ è $A_{12} =) - 1)^{1+2}c = -c$. Quindi si ottiene esattamente (2) [1] . Infatti per dare la definizione ricorsiva di determinante è necessario soltanto quella di determinante di una matrice di ordine 1.

Esempio 22. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

si vuol calcolare $det(A)$ sviluppando rispetto prima riga. Si ha:

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \frac{1}{3} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-3) + 3 + \frac{1}{3} \cdot 4 = -6 + \frac{4}{3} = -\frac{14}{3} \end{aligned}$$

Se si sceglie di sviluppare rispetto alla prima colonna si ha:

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -9 + 0 - (-3 - \frac{4}{3}) = -9 + \frac{13}{3} = -\frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Quindi si ottiene lo stesso risultato.

Il seguente teorema fornisce la formula per calcolare la matrice inversa di una matrice quadrata con determinante diverso da 0.

[1] il lettore può verificare per esercizio che se si cambia riga o colonna il risultato non cambia.

Teorema 2. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora A e' invertibile se e solo se il determinate di A è diverso da zero.*

Teorema 3. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ con $det(A) \neq 0$. Allora la matrice inversa di A e' $A^{-1} = (b_{ij})$ dove*

$$b_{ij} = \frac{1}{det(A)}(-1)^{i+j}det(A_{ji}) = \frac{1}{det(A)} \cdot complemeto\ algebrico\ di\ a_{ji}$$

Esempio 23. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

risulta $det(A) = 3 + 4 = 7 \neq 0$, e quindi A è invertibile. Per calcolare la matrice inversa di A, si devono determinare i complementi algebrici di tutti gli elementi di A

- il complemento algerbico di a_{11} e' 3
- il complemento algerbico di a_{12} e' -2
- il complemento algerbico di a_{21} e' 2
- il complemento algerbico di a_{22} e' 1.

Si scrive la matrice dei complementi algebrici che si chiama *matrice aggiunta* di A e si denota con $agg(A)$

$$agg(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi si moltiplica la matrice aggiunta per $\frac{1}{det(A)}$, ottenendo la matrice:

$$A' = \frac{1}{det(A)} \cdot agg(A) = \frac{1}{7} \cdot agg(A) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Infine di questa si considera la matrice trasposta:

$$A^{-1} = {}^t(A') = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

È opportuno controllare che la matrice ottenuta sia proprio la matrice inversa (per verificare che non ci siano stati errori di calcolo):

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 24. Calcolare, se possibile, la matrice inversa della matrice

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $det(C) = -2 \neq 0$, sicuramente C è invertibile. La matrice aggiunta di C è:

$$agg(C) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$C^{-1} = \frac{1}{-2} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$