1° esonero dalla prova scritta di

MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica e tecnologie per la produzione del software

22 novembre 2012

traccia A

1. Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ l'applicazione tale che per ogni $x \in \mathbb{Q}$ $f(x) = 3x^2 - x - 1$ e sia
$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid f(x) = f(y)\}.$$
   (a) Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza
   (b) determinare la classe di equivalenza di -1
   (c) per ogni $x \in \mathbb{Q}$, determinare la classe di equivalenza di x.

Soluzione:

(a) $\forall x \in \mathbb{Q}$ si ha, ovviamente $f(x) = f(x)$ e quindi $(x,x) \in \mathcal{R}$, ovvero $\mathcal{R}$ è riflessiva
$\forall x, y \in \mathbb{Q}$, se $(x,y) \in \mathcal{R}$, allora $f(x) = f(y)$, quindi $f(y) = f(x)$, cioè $(y,x) \in \mathcal{R}$, ovvero $\mathcal{R}$ è simmetrica
$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$, se $(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R}$, allora $f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)$ da cui $f(x) = f(z)$, cioè $(x,z) \in \mathcal{R}$, ovvero $\mathcal{R}$ è transitiva

(b) $[-1] = \{x \in \mathbb{Q} \mid f(x) = f(-1)\}$; $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) - 1 = 3$

$x \in [-1] \iff f(x) = 3 \iff 3x^2 - x - 1 = 3 \iff 3x^2 - x - 4 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{6} = \begin{cases} \frac{1+7}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{1-7}{6} = -1 \end{cases}$$

quindi $[-1] = \{-1, \frac{4}{3}\}$

(c) $[x] = \{y \in \mathbb{Q} \mid (x,y) \in \mathcal{R}\} = \{y \in \mathbb{Q} \mid f(x) = f(y)\}$

$y \in [x] \iff f(x) = f(y) \iff 3x^2 - x - 1 = 3y^2 - y - 1 \iff 3x^2 - 3y^2 = x - y \iff$
$3(x-y)(x+y) = x - y \iff x - y = 0 \vee 3(x+y) = 1 \iff x = y \vee y = \frac{1-3x}{3}$

2. Completando la seguente tabella,

$[x] = \{x, \frac{1-3x}{3}\}$.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(\neg p \wedge \neg q) \wedge r$	$\neg p \to \neg q$	$(\neg p \to \neg q) \vee r$	A
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1

stabilire se la proposizione $A := ((\neg p \wedge \neg q) \wedge r) \vee ((\neg p \to \neg q) \vee r)$ è una tautologia.

Risposta:

3. Provare, usando il principio di induzione completa che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n^2+3n+2)(2n+3).$$

Soluzione:

$P(0)$: sin: $\sum_{k=0}^{1} k^2 = 0^2 + 1^2 = 1$ dx: $\frac{1}{\cancel{6}} \cdot 2 \cdot 3 = 1$

Supposto vero $P(n)$: $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n^2+3n+2)(2n+3)$

Si deve provare che: $\sum_{k=0}^{n+2} k^2 = \frac{1}{6}\left((n+1)^2 + 3(n+1)+2\right)\left(2(n+1)+3\right)$

ovvero: $\sum_{k=0}^{n+2} k^2 = \frac{1}{6}(n^2+2n+1+3n+3+2)(2n+5) =$

$= \frac{1}{6}(2n^3+5n^2+10n^2+25n+12n+30) =$

$= \frac{1}{6}(2n^3+15n^2+37n+30).$

$$\sum_{k=0}^{n+2} k^2 = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 + (n+2)^2 = \frac{1}{6}(n^2+3n+2)(2n+3) + (n+2)^2 =$$

$= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6+6n^2+24n+24) =$

$= \frac{1}{6}(2n^3+3n+37n+30).$

$$
\begin{array}{r|l}
396 & 2 \\
198 & 2 \\
99 & 11 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad 396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \qquad
\begin{array}{r|l}
156 & 2 \\
78 & 2 \\
39 & 3 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}
\qquad 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13
$$

M.C.D.$(396, 156) = 12$

$12 \mid 144$ e quindi la congruenza lineare ha soluzioni

4. Stabilire se la congruenza lineare

$$396x \equiv 144 (\text{mod } 156)$$

ha soluzioni. In caso affermativo, individuarle tutte precisando quante e quali di esse sono non congrue (mod 156).

Soluzione:

Le soluzioni sono tutte e sole le soluzioni della congruenza lineare $33x \equiv 12 (\text{mod } 13)$. Con l'algoritmo delle divisioni successive:

$$33 = 13 \cdot 2 + 7$$
$$13 = 7 \cdot 1 + 6$$
$$7 = 6 \cdot 1 + 1$$
$$6 = 6 \cdot 1 + 0$$

$1 = 7 - 6 = 7 - (13 - 7) = 13 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 = 13 \cdot (-1) + (33 + 13(-2)) \cdot 2 \Rightarrow$

$1 = 13 \cdot (-5) + 33 \cdot 2$; moltiplicando per 12:

$12 = 33 \cdot 24 + 13 \cdot (-60)$; $x_0 = 24$ è una soluzione; $x = 24 + 13h$, $h \in \mathbb{Z}$, sono tutte e sole le soluzioni delle due congruenze lineari; la minima soluzione positiva è 11, $x = 11 + 13k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ci sono 12 soluzioni non congrue mod 156 (della congruenza lineare della traccia): $11, 24, \ldots, 11 + 11 \cdot 12 = 154$.

5. Usando il metodo che si ritiene più opportuno, scrivere la scomposizione in fattori primi del numero 18.643.

Soluzione: Sia $n = 18.643$ $\quad \sqrt{n} \simeq 136,53$

$137^2 - n = 18.769 - n = 126$ non è un quadrato

$138^2 - n = 19.044 - n = 401$ " " " "

$139^2 - n = 19.321 - n = 678$ " " " "

$140^2 - n = 19.600 - n = 957$ " " " "

$141^2 - n = 19.881 - n = 1.238$ " " " "

$142^2 - n = 20.164 - n = 1521$ $\quad \sqrt{1521} = 39$

$n = 142^2 - 39^2 = (142 - 39) \cdot (142 + 39) = 103 \cdot 181$

103 è primo: per il crivello di Eratostene, basta verificare che non è divisibile per 2, 3, 5, 7, ovvero per tutti i numeri primi minori o uguali di $\sqrt{103}$

108 è primo: per lo stesso motivo, basta verificare che non è divisibile per 2, 3, 5, 7, 11.

(*) si cerca un eventuale $n \in \mathbb{N}$ tale che

$f(n) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{n-3}{2(n+1)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow n-3 = 3(n+1) \Leftrightarrow n-3 = 3n+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n-3 = -3-3 \Leftrightarrow 2n = -6 \Leftrightarrow n = -3 \notin \mathbb{N}$

Analogamente $f(n) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{n-3}{2n+2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3n-9 = -4n-4 \Leftrightarrow 7n = 5 \Leftrightarrow n = \frac{5}{7} \notin \mathbb{N}$

6. Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ e $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ le applicazioni così definite:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = \frac{n-3}{2n+2}; \quad \forall x \in \mathbb{Q}\ g(x) = -\frac{2}{3}x + 1.$$

(a) Determinare: $f(4)$, $g(\{1, \frac{2}{3}, -1\})$, $f^{-1}(\{\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\})$

(b) stabilire se f è ingettiva o surgettiva

(c) stabilire se g è ingettiva o surgettiva

(d) determinare, se possibile, g^{-1}, f^{-1}

(e) determinare, se possibile, $g \circ f$, $f \circ g$.

Soluzione:

(a)

$f(4) = \frac{4-3}{8+2} = \frac{1}{10}$

$g(\{1, \frac{2}{3}, -1\}) = \{\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{3}\}$

$g(1) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{-4+9}{9} = \frac{5}{9}$

$g(-1) = -\frac{2}{3}(-1) + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$

(*) $f^{-1}(\{\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\}) = \emptyset$

Tutte le operazioni sono consentite perché $2n+2 \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b)

Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(m) \Leftrightarrow \frac{n-3}{2n+2} = \frac{m-3}{2m+2} \Leftrightarrow (2m+2)(n-3) = (m-3)(2n+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{2mn} - 6m + 2n - \cancel{6} = \cancel{2nm} + 2m - 6n - \cancel{6} \Rightarrow -6m - 2m = -6n - 2n \Leftrightarrow$

$\Rightarrow -8m = -8n \Rightarrow m = n$. Allora f è ingettiva. Poiché si è già visto che non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = \frac{3}{2}$, f non è surgettiva.

(c)

Siano $x, x' \in \mathbb{Q}$, $g(x) = g(x') \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{2}{3}x' + 1 \Rightarrow x = x'$ e quindi g è ingettiva. Sia $y \in \mathbb{Q}$: bisogna chiedersi se esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che $g(x) = y \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + 1 = y \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{3-3y}{2} \in \mathbb{Q}$ $\forall y \in \mathbb{Q}$. Quindi g è surgettiva

(d) g è bigettiva e quindi esiste $g^{-1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $g^{-1}(y) = \frac{3-3y}{2}$ $\forall y \in \mathbb{Q}$

f non è bigettiva e quindi non è invertibile

(e) Poiché $g(\mathbb{Q}) \not\subseteq \mathbb{N}$, non esiste $f \circ g$.

Esiste, invece $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ e si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$

$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g\left(\frac{n-3}{2n+2}\right) = -\frac{\cancel{2}}{3} \frac{n-3}{\cancel{2}(n+1)} + 1 = \frac{-n+3+3n+3}{3(n+1)} = \frac{2n+6}{3n+3}$.