$\overset{a}{3}x + \overset{b}{4}y = \overset{c}{5}$ M.C.D. $(3,4) = 1 \mid 5$

$3 = 4 \cdot 0 + 3$

$4 = 3 \cdot 1 + 1$ esistono soluzioni

$1 = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1$ $\bar{c} = \frac{c}{d} = \frac{5}{1} = 5$

$5 = 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 5$ $(-5, 5)$ è una soluzione

$\bar{b} = \frac{b}{d} = \frac{4}{1} = 4$ $\bar{a} = \frac{a}{d} = \frac{3}{1} = 3$

$(-5 + 4 \cdot h, 5 - 3h)$ $h \in \mathbb{Z}$ tutte le soluzioni

$h = 1$ $(-5+4, 5-3) = (-1, 2)$

$h = -1$ $(-5-4, 5+3) = (-9, 8)$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

È possibile eseguire sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 10 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -8 \\ 16 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_4 \\ a^4_1 & a^4_2 & a^4_3 & a^4_4 \end{vmatrix}$$

i_2

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 7 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 10 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=} \cancel{0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -7 & 7 & -8 \\ -6 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right)} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 3 & -3 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

-21

$$\cancel{0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 5 & -7 & -8 \\ 3 & -6 & 0 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right)} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 3 & -6 & -3 \\ 10 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -7 \\ 3 & -6 \\ 10 & -1 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot \left(-8 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right) + (-26 - 210 - 21) - (420 + 15 - 84)$$

$$= 3\cdot(-8\cdot(12+30) + (-15-21)) + \underbrace{(-257)-(351)}_{-608} =$$

$$= 3(-336-36) - 608 = 3(-372) - 608 = 1.116 + 608 = 1724.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango di B

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

3 pivot e quindi il rango di B è 3.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango di C

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono 2 pivot e quindi il rango di C è 2

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabiliamo se D è invertibile e calcoliamo l'eventuale matrice inversa

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$(-1)(2-(-1)) + (1-0) = -3+1 = -2 \neq 0$$

Allora D è invertibile.

$$D^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1/2 & -3/2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1/2 \\ \frac{1}{2} & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rango di E $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Poichè ci sono 3 pivot, il rango di E è 3

E è invertibile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} R_3]{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - 3R_3]{R_1 + 2R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & -1 & 0 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & -2/5 & 3/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \qquad x * y = x - y + 3$

Siano $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x * (y * z) = x * (y - z + 3) = x - (y - z + 3) + 3 = x - y + z - 3 + 3 = x - y + z$

$(x * y) * z = (x - y + 3) * z = x - y + 3 - z + 3 = x - y - z + 6$

$x * (y * z) \neq (x * y) * z$

$\cancel{x} - \cancel{y} - z + 6 = \cancel{x} - \cancel{y} + z$

$z = 3$.

non è associativa.

Per esempio $-2 * (-1 * 2) = -2 * (-1 - 2 + 3) = -2 * 0 =$

$= -2 - 0 + 3 = 1$

$((-2) * (-1)) * 2 = (-2 + 1 + 3) * 2 = 2 * 2 = \cancel{2} - \cancel{2} + 3 = 3$.

Esiste un elemento neutro e

$\forall x \in \mathbb{Z}$

$x * e = x = e * x$

$x * e = x - e + 3 = x$

$e = 3$ elemento neutro a destra

$3 * x = 3 - x + 3 = 6 - x \neq x$

Non esiste l'elemento neutro