__Def.__ Siano A, B insiemi. Si dice che A e B sono __disgiunti__ quando $A \cap B = \emptyset$

Es. 1. Sia P l'insieme dei numeri interi pari e sia D l'insieme dei numeri interi dispari

$$P \cap D = \emptyset$$

e dunque P e D sono disgiunti.

Inoltre $P \cup D = \mathbb{Z}$.

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad B = \{0, 6, 9, 8\}$

$$A \cap B = \emptyset$$

e quindi A e B sono disgiunti.

Sia A un insieme. Si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

Es. $A = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$.

Osserv. $\forall A$ insieme $\quad \emptyset \in \mathcal{P}(A) \ \wedge \ A \in \mathcal{P}(A)$.

Osserv. Siano a, b due oggetti $\quad \{a,b\} = \{b,a\}$
e quindi è irrilevante l'ordine con cui si scrivono gli elementi. Per questo $\{a,b\}$ si chiama coppia non ordinata.

Siano A un insieme, $a, b \in A$. Si indica col simbolo (a,b), la coppia ordinata la cui prima coordinata è a la seconda coordinata è b.

$$(a,b) \neq (b,a).$$

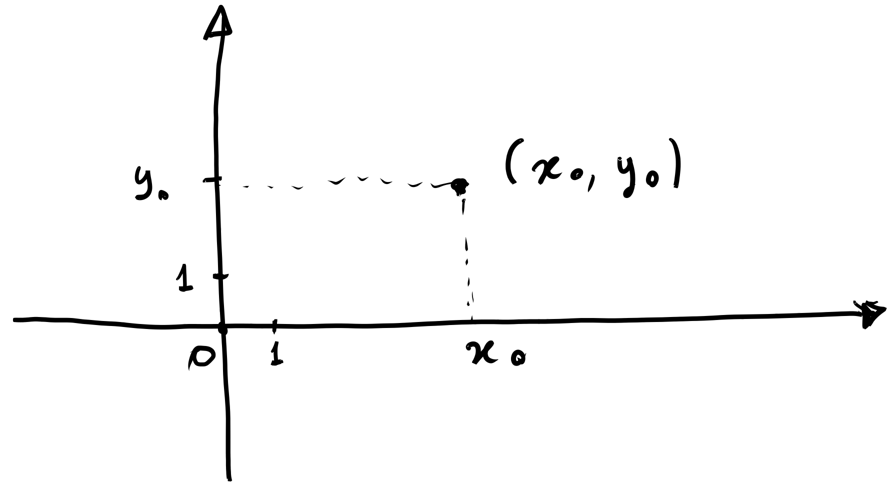
Naturalmente si possono considerare le coppie ordinate di elementi di insiemi diversi: se X e Y sono due insiemi, $x \in X$, $y \in Y$ $\quad (x,y) \neq (y,x)$.

Def. Siano A, B insiemi. L'insieme i cui elementi sono tutte le possibili coppie ordinate la cui prima coordinata è un elemento di A e la seconda coordinata è un elemento di B si dice prodotto (insieme) prodotto cartesiano di A e B. Questo insieme si indica col simbolo $A \times B$.

$A \times B = \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$

Osserv. $A \neq B \qquad A \times B \neq B \times A.$

Esempio: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Il piano cartesiano si può identificare con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esempio. $A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 2, 3, 4\}$

$$
\begin{aligned}
A \times B = \{ & (a,1), (a,2), (a,3), (a,4) \\
& (b,1), (b,2), (b,3), (b,4) \\
& (c,1), (c,2), (c,3), (c,4) \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B \times A = \{ & (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) \\
& (3,a), (3,b), (3,c), (4,a), (4,b), (4,c) \}.
\end{aligned}
$$

$A \times B \neq B \times A$ in questo caso $A \times B \cap B \times A = \emptyset$.

Def. Siano A e B insiemi. Una relazione tra gli elementi di A e gli elementi di B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

In altri termini una relazione tra gli elementi di A e gli elementi di B è un insieme di coppie ordinate la cui prima coordinata è un elemento di A mentre la seconda coordinata è un elemento di B.

Esempi. 1. $A = \{a, b, c\}$ $\qquad B = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathcal{R}_0 = \{(a, 1)\} \subset A \times B$

$\mathcal{R}_0$ è una relazione tra gli elementi di A e gli elementi di B.

$\mathcal{R}_1 = \{(b, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 4)\}$ è una relazione

$\mathcal{R}_1 \subset A \times B$

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{R}_2 = \{(\sqrt{2}, 3), (5, -2), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

4. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; ; \; b = 2a\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$R = \{ \dots (0,0), (1,2), (-1,-2), (3,6) \dots \}$

5. $R' = \{ (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \ : \ m = -n \} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

R' è una relazione tra gli elementi di $\mathbb{N}$ e gli elementi di $\mathbb{Z}$.

6. $R'' = \{ (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ m = -n \} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\underbrace{R' \neq R''}$$

$(1,-1) \in R'$, $(0,0) \in R'$, $(3,-3) \in R'$

$(1,-1) \in R''$, $(0,0) \in R''$, $(3,-3) \in R''$

$(-1,1) \in R''$ ma $(-1,1) \notin R'$

$-1 \notin \mathbb{N}$

Esempio $\quad A$ insieme

$$\Delta = \{ (a,b) \in A \times A \ : \ a = b \}$$

diagonale di A.

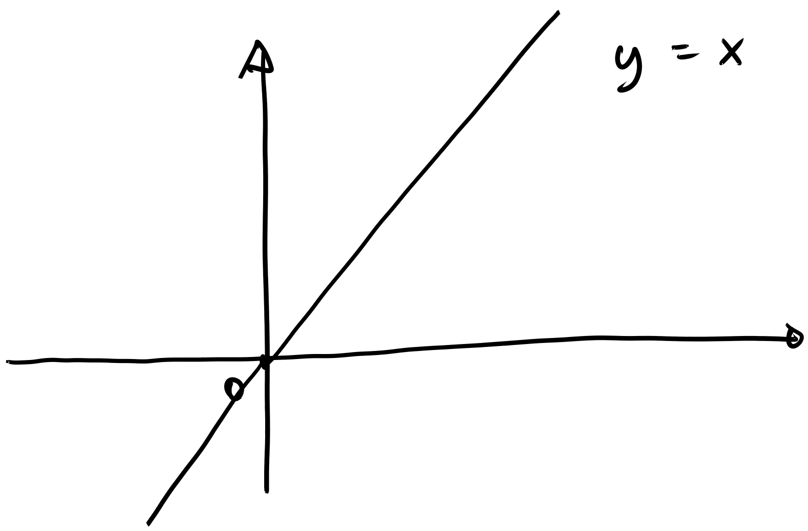
Osserv. Sia A un insieme

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$$

Per questo si considerano soltanto relazioni tra gli elementi di due insiemi non vuoti.

Def. Sia A un insieme $A \neq \emptyset$. Una relazione $\mathcal{R}$ tra gli elementi di A (o semplicemente su A). Si dice che $\mathcal{R}$ è <u>riflessiva</u> se $\forall a \in A$ la coppia $(a, a) \in \mathcal{R}$.

Es.



la bisettrice del 1° e 3° quadrante rappresenta la diagonale Δ di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La diagonale è riflessiva

Osserv. Sia A insieme non vuoto e sia $\mathcal{R}$ una relazione su A. $\mathcal{R}$ è riflessiva se e solo se $\Delta \subset \mathcal{R}$.

Osserv. Siano A un insieme non vuoto, $\mathcal{R}$ una relazione su A. Allora perché $\mathcal{R}$ non sia riflessiva basta che ci sia un elemento x di A tale che $(x, x) \notin \mathcal{R}$.

Esempio. Sia X l'insieme dei residenti a Bari.

$\mathcal{R} = \{ (x, y) \in X \times X \ : \ x$ ha la stessa madre di $y \}$

$\mathcal{R}$ è riflessiva, simmetrica

<u>Def</u>. Siano A un insieme, $\mathcal{R}$ una relazione su A. Si dice che A è simmetrica se

$$\left(\forall x, y \in A \right) \left((x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R} \right).$$

$A = \{a, b, c, d\}$

$R_1 = \{(a,a), (a,b), (b,b), (c,c), (d,d)\}$ riflessiva; non simmetrica $(a,b) \in R_1$ ma $(b,a) \notin R_1$

$R_2 = \{(a,a)\ (a,b), (b,a)\}$ non è riflessiva perché $(b,b), (c,c), (d,d) \notin R$; è simmetrica perché $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$

$R_3 = \{(a,b)\ (b,c), (a,c)\}$ non è riflessiva non è simmetrica

$R_4 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b), (a,b), (b,a)\}$ è riflessiva è simmetrica

$R_5 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,c), (a,c)\}$. è riflessiva non simmetrica

$R_6 = \{(a,a), (b,b), (d,d), (a,b), (b,c)\}$ non è riflessiva perché $(c,c) \notin R$. non è simmetrica

$R_7 = \{(a,b), (b,c), (a,c), (b,a), (c,b), (c,a)\}$ è simmetrica

$R_8 = \{(a,b), (b,c), (a,c), (b,a)\ (c,b)\}$ non è simmetrica perché $(a,c) \in R_8$ ma $(c,a) \notin R_8$.

$\subset$ simbolo dell'inclusione

A, B insiemi $\quad A \subset B \iff (\forall a \in A)(a \in B)$

$A \subset B$ se ogni elem. di A è anche elem. di B.

Sui libri si può trovare il simbolo

$$\subseteq$$

è la stessa cosa.

Se si usa $\subseteq$, allora $\subset$ corrisponde a $\subsetneq$.

Esempio. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $Y = \{2, 5\}$

$$X \times Y = \{(1,2), (1,5), \underline{(2,2)}, (2,5), (3,2), (3,5), (4,2), (4,5)\}$$

$$Y \times X = \{(2,1), \underline{(2,2)}, (2,3), (2,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

$X \times Y \cap Y \times X \neq \emptyset$ perché $(2,2) \in X \times Y \cap Y \times X$.