Esercizi di MATEMATICA DISCRETA 9° serie
C.L. **Informatica e tecnologie per la produzione del software**

1. Sono assegnate sull'insieme $A = \mathbb{Z}_4$ le leggi di composizione interne $+$, $\cdot$.
   (a) Verificare che $(A, +, \cdot)$ è un anello
   (b) stabilire se $(A, +, \cdot)$ è un anello di Boole
   (c) trovare i divisori dello zero di A
   (d) trovare gli elementi unitari di A (gli elementi che hanno inverso moltiplicativo)
   (e) trovare tutti i sottogruppi di $(A, +)$
   (f) tracciare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di $(A, +)$ ordinato per inclusione
   (g) stabilire se questo reticolo è di Boole.

2. Sono assegnate sull'insieme $A = \mathbb{Z}_6$ le leggi di composizione interne $+$, $\cdot$.
   (a) Verificare che $(A, +, \cdot)$ è un anello
   (b) stabilire se $(A, +, \cdot)$ è un anello di Boole
   (c) trovare i divisori dello zero di A
   (d) trovare gli elementi unitari di A (gli elementi che hanno inverso moltiplicativo)
   (e) trovare tutti i sottogruppi di $(A, +)$
   (f) tracciare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di $(A, +)$ ordinato per inclusione
   (g) stabilire se questo reticolo è di Boole.

3. Sono assegnate sull'insieme $A = \mathbb{Z}_7$ le leggi di composizione interne $+$, $\cdot$.
   (a) Verificare che $(A, +, \cdot)$ è un anello
   (b) stabilire se $(A, +, \cdot)$ è un anello di Boole
   (c) trovare tutti gli elementi unitari di $(A, +, \cdot)$ e stabilire se si tratta di un campo
   (d) trovare tutti i sottogruppi di $(A, +)$
   (e) tracciare il diagramma di Hasse dei sottogruppi di $(A, +)$ ordinato per inclusione; stabilire se questo reticolo è di Boole
   (f) trovare tutti gli sottogruppi di $(A^*, \cdot)$
   (g) tracciare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di $(A^*, \cdot)$ ordinato per inclusione; stabilire se questo reticolo è di Boole.

4. Sono assegnate sull'insieme $A = \mathbb{Z}_8$ le leggi di composizione interne $+$, $\cdot$.
   (a) Verificare che $(A, +, \cdot)$ è un anello
   (b) stabilire se $(A, +, \cdot)$ è un anello di Boole
   (c) trovare i divisori dello zero di A
   (d) trovare gli elementi unitari di A (gli elementi che hanno inverso moltiplicativo)
   (e) trovare tutti i sottogruppi di $(A, +)$
   (f) tracciare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di $(A, +)$ ordinato per inclusione
   (g) stabilire se questo reticolo è di Boole.

5. Sono assegnate sull'insieme $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ le leggi di composizione interne $+$, $\cdot$ definite come segue: $\forall (x,y),(z,t) \in A$

$$(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t), \qquad (x,y)\cdot(z,t)=(xz,yt)$$

e sia $B = \{(x,0) | x \in \mathbb{Z}_2\}$.

(a) Determinare l'elemento neutro della struttura $(A,+)$
(b) determinare l'elemento neutro della struttura $(A,\cdot)$
(c) provare che $(A,+)$ è un gruppo abeliano
(d) provare che $(A,\cdot)$ è un monoide commutativo
(e) verificare che $(A,+,\cdot)$ è un anello commutativo
(f) stabilire se $(A,+,\cdot)$ è un anello di Boole
(g) determinare l'unità di $(A,\cdot)$
(h) trovare i divisori dello zero di A
(i) trovare gli elementi unitari di A (gli elementi che hanno inverso moltiplicativo)
(j) verificare che B è un sottogruppo di $(A,+)$
(k) verificare che per ogni $\alpha,\beta \in B$ risulta $\alpha\cdot\beta \in B$
(l) stabilire se la struttura $(B,+,\cdot)$ è un anello (sottoanello di A)
(m) stabilire se $(B,+,\cdot)$ è un anello unitario (cioè se esiste l'unità)
(n) stabilire se l'unità di B coincide con l'unità di A
(o) tracciare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di $(A,+)$ ordinato per inclusione
(p) stabilire se questo reticolo è di Boole.

6. Sono assegnate sull'insieme $A = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ le leggi di composizione interne $+$, $\cdot$ definite come segue: $\forall (x,y),(z,t) \in A$

$$(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t), \qquad (x,y)\cdot(z,t)=(xz,yt)$$

e sia $B = \{(x,0) | x \in \mathbb{Z}_3\}$.

(a) Determinare l'elemento neutro della struttura $(A,+)$
(b) determinare l'elemento neutro della struttura $(A,\cdot)$
(c) provare che $(A,+)$ è un gruppo abeliano
(d) provare che $(A,\cdot)$ è un monoide commutativo
(e) verificare che $(A,+,\cdot)$ è un anello commutativo
(f) verificare che $(A,+,\cdot)$ non è un anello di Boole
(g) determinare l'unità di $(A,\cdot)$
(h) trovare i divisori dello zero di A
(i) trovare gli elementi unitari di A (gli elementi che hanno inverso moltiplicativo)
(j) verificare che B è un sottogruppo di $(A,+)$
(k) verificare che per ogni $\alpha,\beta \in B$ risulta $\alpha\cdot\beta \in B$
(l) stabilire se la struttura $(B,+,\cdot)$ è un anello (sottoanello di A)
(m) stabilire se $(B,+,\cdot)$ è un anello unitario (cioè se esiste l'unità)
(n) stabilire se l'unità di B coincide con l'unità di A
(o) tracciare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di $(A,+)$ ordinato per inclusione
(p) stabilire se questo reticolo è di Boole.

7. Sono assegnate sull'insieme $A = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ le leggi di composizione interne $+$, $\cdot$ definite come segue: $\forall(x, y), (z, t) \in A$

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t), \qquad (x, y) \cdot (z, t) = (xz, yt)$$

e sia $B = \{(0, y) | y \in \mathbb{Z}_3\}$.

(a) Determinare l'elemento neutro della struttura $(A, +)$
(b) determinare l'elemento neutro della struttura $(A, \cdot\ )$
(c) provare che $(A, +)$ è un gruppo abeliano
(d) provare che $(A, \cdot\ )$ è un monoide commutativo
(e) verificare che $(A, +, \cdot\ )$ è un anello commutativo
(f) verificare che $(A, +, \cdot\ )$ non è un anello di Boole
(g) determinare l'unità di $(A, \cdot\ )$
(h) trovare i divisori dello zero di A
(i) trovare gli elementi unitari di A (gli elementi che hanno inverso moltiplicativo)
(j) verificare che B è un sottogruppo di $(A, +)$
(k) verificare che per ogni $\alpha, \beta \in B$ risulta $\alpha \cdot \beta \in B$
(l) stabilire se la struttura $(B, +, \cdot\ )$ è un anello (sottoanello di A)
(m) stabilire se $(B, +, \cdot\ )$ è un anello unitario (cioè se esiste l'unità)
(n) stabilire se l'unità di B coincide con l'unità di A.

8. Sono assegnate sull'insieme $A = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$ le leggi di composizione interne $+$, $\cdot$ definite come segue: $\forall(x, y), (z, t) \in A$

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t), \qquad (x, y) \cdot (z, t) = (xz, yt)$$

e sia $B = \{(x, 0) | x \in \mathbb{Z}_4\}$.

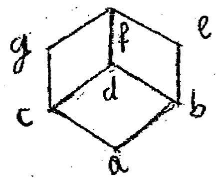
(a) Determinare l'elemento neutro della struttura $(A, +)$
(b) determinare l'elemento neutro della struttura $(A, \cdot\ )$
(c) provare che $(A, +)$ è un gruppo abeliano
(d) provare che $(A, \cdot\ )$ è un monoide commutativo
(e) verificare che $(A, +, \cdot\ )$ è un anello commutativo
(f) verificare che $(A, +, \cdot\ )$ non è un anello di Boole
(g) determinare l'unità di $(A, \cdot\ )$
(h) trovare i divisori dello zero di A
(i) trovare gli elementi unitari di A (gli elementi che hanno inverso moltiplicativo)
(j) verificare che B è un sottogruppo di $(A, +)$
(k) verificare che per ogni $\alpha, \beta \in B$ risulta $\alpha \cdot \beta \in B$
(l) stabilire se la struttura $(B, +, \cdot\ )$ è un anello (sottoanello di A)
(m) stabilire se $(B, +, \cdot\ )$ è un anello unitario (cioè se esiste l'unità)
(n) stabilire se l'unità di B coincide con l'unità di A.

9. Sull'insieme $R = \{a, b, c, d, e, f\}$ è definita la relazione

$$\leq = \{(a, a)(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, b), (b, e), (b, f), (c, c), (c, e), (c, f), (d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (f, f)\}.$$

(a) Verificare che la relazione $\leq$ è d'ordine
(b) tracciare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(R, \leq)$ e stabilire se si tratta di un reticolo; in caso affermativo, stabilire se si tratta di un reticolo distributivo e per ciascun elemento determinare gli eventuali complementi

10. È assegnato il diagramma

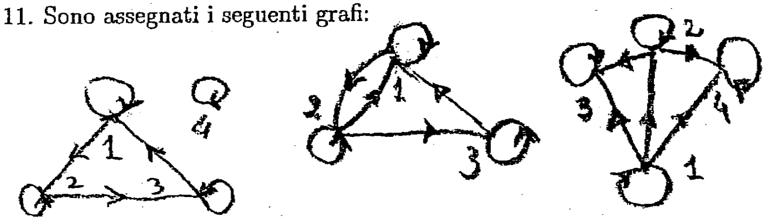


(a) Scrivere la relazione d'ordine $\leq$ su $R = \{a, b, c, d\}$ avente tale diagramma come diagramma di Hasse

(b) verificare che $(R, \leq)$ è un reticolo

(c) stabilire se $(R, \leq)$ è di Boole.

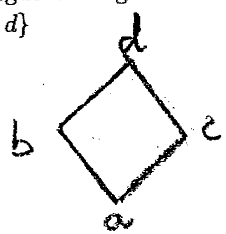
11. Sono assegnati i seguenti grafi:



(a) Quali di essi sono i grafi di una relazione d'ordine?

(b) stabilire se si tratta di ordine totale o parziale

12. È assegnato il seguente diagramma di Hasse di un insieme ordinato $\{a, b, c, d\}$



(a) Verificare che è un reticolo

(b) verificare che è di Boole

(c) disegnare il grafo ordinato della relazione d'ordine

13. Si consideri il reticolo $(D_{15}, |\ )$ dei divisori di 15 ordinato per divisibilità.

(a) Tracciare il diagramma di Hasse

(b) trovare il complemento di ciascun elemento di D_{15}, se esiste

(c) stabilire se detto reticolo è di Boole.

14. Si consideri il reticolo $(D_{12}, |\ )$ dei divisori di 12 ordinato per divisibilità.

(a) Tracciare il diagramma di Hasse

(b) trovare il complemento di ciascun elemento di D_{12}, se esiste

(c) stabilire se detto reticolo è di Boole.

15. Si consideri il reticolo $(D_{105}, |\ )$ dei divisori di 105 ordinato per divisibilità.

(a) Tracciare il diagramma di Hasse

(b) trovare il complemento di ciascun elemento di D_{105}, se esiste

(c) stabilire se detto reticolo è di Boole.

16. Si consideri il reticolo $(D_{45}, |\ )$ dei divisori di 45 ordinato per divisibilità.

(a) Tracciare il diagramma di Hasse

(b) trovare il complemento di ciascun elemento di D_{45}, se esiste

(c) stabilire se detto reticolo è di Boole.

17. Si consideri il reticolo $(D_{36}, | \,)$ dei divisori di 36 ordinato per divisibilità.

(a) Tracciare il diagramma di Hasse

(b) trovare il complemento di ciascun elemento di D_{36}, se esiste

(c) stabilire se detto reticolo è di Boole.

18. Sull'insieme $\mathcal{R} = \{a, b, c, d\}$ è assegnata la seguente legge di composizione $\vee$:

∨	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

(a) Tracciare il diagramma di Hasse del reticolo ordinato associato

(b) scrivere la tabella dell'operazione $\wedge$

(c) determinare di ciascun elemento di R gli eventuali complementi

(d) stabilire se il reticolo è di Boole.

19. Sull'insieme $\mathcal{R} = \{a, b, c, d, e, f\}$ è assegnata la seguente legge di composizione $\vee$:

∨	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	b	c	e	e	f
c	c	c	c	e	e	f
d	d	e	e	d	e	f
e	e	e	e	e	e	f
f	f	f	f	f	f	f

(a) Tracciare il diagramma di Hasse del reticolo ordinato associato

(b) trovare la tabella dell'operazione $\wedge$

(c) stabilire se il reticolo $(\mathcal{R}, \vee, \wedge)$ è distributivo

(d) per ciascun elemento di $\mathcal{R}$, determinare gli evenuali complementi

(e) stabilire se reticolo è di Boole.

20. Sull'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ sono assegnate le leggi di composizione

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

(a) Verificare che $(A, +, \cdot\,)$ è un anello di Boole

(b) scrivere le tabelle delle operazioni $\vee$ e $\wedge$ del reticolo di Boole associato.