Prossima lezione mercoledì 15-12-2021 ore <u>9.00</u> come al solito!

<u>GRAFI</u>

Notazione. Sia A insieme $|A| \geq 2$.
Si indica con $\mathcal{P}_2(A) = \{B \subset A \ : \ |B| = 2\}$

Esempio $\quad A = \{a, b, c, d\}$

$$\mathcal{P}_2(A) = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}\}$$

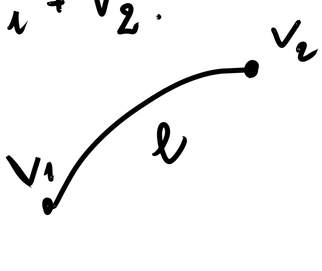
$$\binom{4}{2} = \frac{(4)_2}{2!} = \frac{\cancel{4}^{\,2} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1} = 6 \text{ elementi OK!} \qquad (4-2+1=3)$$

<u>Def</u>. Si dice *grafo* una terna ordinata (V, L, φ) dove V è un insieme $|V| \geq 2$ che si dice insieme dei vertici o dei nodi, L è un insieme $L \neq \emptyset$ e

$$\varphi : L \longrightarrow \mathcal{P}(V)$$

$\forall\, l \in L \quad \varphi(l) = \{v_1, v_2\}$ dove $v_1, v_2 \in V \quad v_1 \neq v_2$.

v_1, v_2 si dicono estremi del lato l

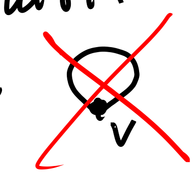


Se due lati hanno un vertice in comune si dicono <u>incidenti</u>; se due vertici v e w sono estremi di un lato l

allora si dicono <u>adiacenti</u>. Un vertice z che non sia estremo di alcun lato si dice <u>isolato</u>.
$|V|$ si dice ordine del grafo.

Def. Un grafo $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ si dice finito se V e L sono insiemi finiti.

Precisazioni: 1. Studieremo essenzialmente i grafi finiti.

2. non sono ammessi i cappi su un vertice  ovvero i lati che hanno come estremi uno stesso vertice perché $\varphi : L \longrightarrow \mathcal{P}_2(V)$.

3. non si considera mai il caso limite nel quale tutti i vertici siano isolati.

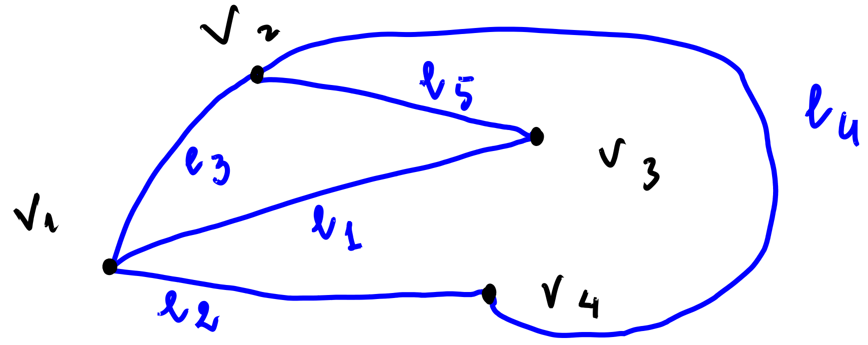
Un grafo finito può essere rappresentato graficamente.

Esempio. $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $\qquad$ $L=\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$

$\varphi : L \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ $\qquad$ $\varphi(l_1)=\{v_1,v_3\}$; $\varphi(l_2)=\{v_1,v_4\}$; $\varphi(l_3)=\{v_1,v_2\}$;
$\varphi(l_4)=\{v_2,v_4\}$; $\varphi(l_5)=\{v_2,v_3\}$

$d(v_1) = 3$
$d(v_2) = 3$
$d(v_3) = 2$
$d(v_4) = 2$



Semplice

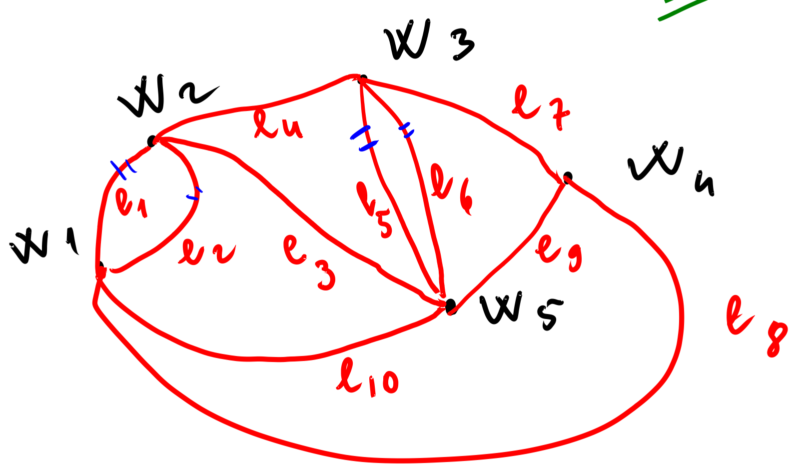
è una possibile rappresentazione di G.

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) = 10$$

Si possono avere diverse rappresentazioni di uno stesso grafo.

Esempio

$d(w_1) = 4$
$d(w_2) = 4$
$d(w_3) = 4$
$d(w_4) = 3$
$d(w_5) = 5$



$v \in V$

$V = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$

$L = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

$\varphi : L \to P_2(V)$

$\varphi(e_1) = \{w_1, w_2\} = \varphi(e_2)$

$\varphi(e_3) = \{w_2, w_5\}$

$\varphi(e_5) = \{w_3, w_5\} = \varphi(e_6)$

$\varphi(e_4) = \{w_2, w_3\}$

$\varphi(e_7) = \{w_3, w_4\}$

$\varphi(e_8) = \{w_1, w_4\}$

$\varphi(e_9) = \{w_4, w_5\}$

$\varphi(e_{10}) = \{w_1, w_5\}$

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(w_1) + d(w_2) + d(w_3) + d(w_4) + d(w_5) = 20.$$

Non è un grafo semplice.

Se $G = (V, L, \varphi)$ è un grafo e se

$\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \dots = \varphi(e_k) = \{v, w\}$ allora si dice che

c'è un lato multiplo tra v e w.

Nell'esempio precedente, ci sono lati multipli tra w_1 e w_2 e inoltre tra w_3 e w_5.

Def. Si dice che un grafo $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ è semplice se φ è iniettiva.

Ovviamente non ci possono essere lati multipli in un grafo semplice.

Def.: Sia $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ un grafo e sia $v \in V$. Si dice grado o valenza di v il numero dei lati che hanno v come estremo. Il grado di v si indica col simbolo $d(v)$.

Def. Sia $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ un grafo. Il numero

$$\sum_{v \in V} d(v)$$

si dice grado complessivo di $\mathcal{G}$.

Si può anche scrivere così: $V=\{v_1,\dots,v_n\}$

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i).$$

Prop. Sia $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ un grafo. Allora

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|L|.$$

Dim. Il numero dei possibili estremi di lato è $\sum_{v \in V} d(v)$; tenendo conto che ogni lato ha 2 estremi

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|L|.$$

Corollario. Il numero dei vertici di grado dispari di un grafo è pari.

Dim. Sia $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$ un grafo.

V_p = insieme dei vertici di grado pari
V_d = " " " " " dispari

$$V_p \cap V_d = \emptyset \qquad \text{e inoltre} \qquad V_p \cup V_d = V.$$

$$\underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{2|L|} = \underbrace{\sum_{v \in V_p} d(v)}_{\text{pari}} + \sum_{v \in V_d} d(v) \Longrightarrow 2|L| - \sum_{v \in V_p} d(v) = \sum_{v \in V_d} d(v)$$

$$\sum_{v \in V_d} d(v) = 2|L| - \sum_{v \in V_p} d(v) \qquad \text{numero pari}$$

↳ somma di numeri dispari

Tenendo conto che la somma di numeri dispari è pari solo se il numero degli addendi è pari, si ottiene che il numero dei vertici di grado dispari deve essere pari.

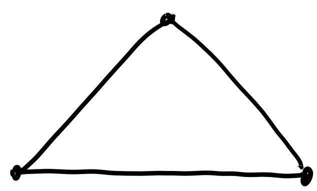
I vertici di grado dispari di un grafo si chiamano vertici dispari; i vertici di grado pari si dicono vertici pari.

Def. Si dice grafo regolare un grafo semplice tale che il grado dei vertici è costante; si dice grafo completo un grafo regolare tale che il grado di ciascun vertice sia $n-1$, dove $n = |V|$.

Esempi.

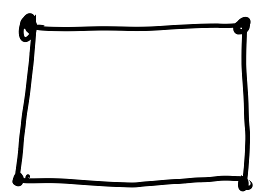
regolare e completo

$|V| = 2$



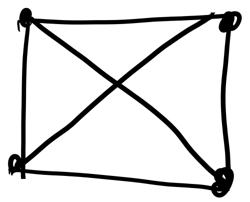
regolare e completo

$|V| = 3$

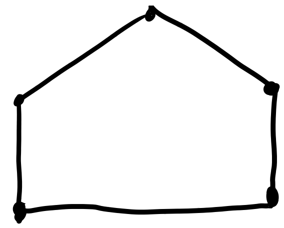


regolare (non completo)

$|V| = 4$

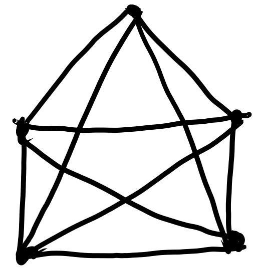


regolare e completo
$|V| = 4$



regolare
$|V| = 5$

$d = 2$



completo
$|V| = 5$

Non esiste un grafo di ordine 5 regolare di grado 3.

Sia $G = (V, L, \varphi)$ un grafo regolare con grado d.

Allora $|L| = \frac{n \cdot d}{2}$

Se $d = n-1$, allora $|L| = \frac{n(n-1)}{2}$.