0.1 Funzioni

Definizione 1. Siano A e B due insiemi non vuoti, $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relazione tra gli elementi di A e gli elementi di B. Si dice che $\mathcal{R}$ è *relazione funzionale* se

$$\forall a \in A, \exists! b \in B \text{ tale che } (a,b) \in \mathcal{R}.$$

In tal caso, per ogni $a \in A$ è lecito porre $f(a) = b$, dove b è l'unico elemento di B tale che $(a,b) \in \mathcal{R}$. Allora la terna ordinata $f = (A, B, \mathcal{R})$ si dice *applicazione* o *funzione* o anche *mappa* tra A e B. A è detto *insieme di partenza* o *dominio* di f, B è detto *insieme di arrivo* di f, $\mathcal{R}$ si dice *grafico* di f. Se $f(a) = b$, allora b è detto *valore assunto* da f in a.

Osservazione 1. Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ è un'applicazione dall'insieme A all'insieme B, allora il grafico di f può essere scritto come

$$\mathcal{R} = \{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\}.$$

Esempio 1. La relazione $\mathcal{R} = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ : \ m = n-1\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ non è funzionale. Infatti esiste, per esempio, $n = 0 \in \mathbb{Z}$ tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$, $(0,m) \notin \mathcal{R}$ (dovrebbe essere $m = 0 - 1 = -1$, ma $-1 \notin \mathbb{N}$).

Esercizio 1. Siano $A = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 3, x, y\}$. Stabilire quali delle seguenti relazioni tra A e B sono funzionali:.

1. $\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (3,3), (5,x), (6,x), (7,3)\}$
2. $\mathcal{R}_2 = \{(3,3), (5,x), (6,x), (7,3)\}$
3. $\mathcal{R}_3 = \{(1,x), (3,3), (5,x), (6,x), (7,3)\}$
4. $\mathcal{R}_4 = \{(1,x), (3,3), (5,x), (6,x), (7,3), (5,2)\}$.

Osservazione 2. Normalmente, per indicare l'applicazione $f = (A, B, \mathcal{R})$, si usa la notazione

$$f : A \longrightarrow B \text{ tale che } \forall a \in A \ f(a) = b$$

dove $f(a) = b \iff (a,b) \in \mathcal{R}$ oppure:

$$f : A \longrightarrow B \qquad a \mapsto f(a).$$

Entrambe evidenziano come una applicazione definisca una legge che ad ogni elemento di A associa in modo univoco un elemento di B.

Esempio 2. La relazione $\mathcal{R}_1 = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ m = n-1\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è funzionale. Resta così definita l'applicazione $f = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathcal{R}_1)$, cioè $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = n-1$, ovvero:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad n \mapsto n - 1.$$

Esempio 3. La relazione

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ : \ y = \frac{1}{x-4} \ \right\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

non è funzionale. Infatti esiste $x = 4 \in \mathbb{Q}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{Q}$, $(4, y) \notin \mathcal{R}_2$ (si dovrebbe avere $y =$ una frazione avente denominatore 0).

Esempio 4. La relazione

$$\mathcal{R}_3 = \left\{ \ (x, y) \in \mathbb{Q} - \{4\} \times \mathbb{Q} \ : \ y = \frac{1}{x-4} \ \right\} \subseteq \mathbb{Q} - \{4\} \times \mathbb{Q}$$

è funzionale (è cambiato il primo insieme rispetto alla relazione dell'esempio 3). Si può considerare, quindi, $g = (\mathbb{Q} - \{4\}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}_3)$, ovvero $g : Q - \{4\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che $\forall x \in \mathbb{Q} - \{4\}, \ g(x) = \frac{1}{x-4}$. Si può scrivere:

$$g : Q - \{4\} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad x \mapsto \frac{1}{x-4}.$$

Esempio 5. La relazione

$$\mathcal{R}_4 = \left\{ \ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ x - y^2 = 0 \ \right\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

non è funzionale. Infatti esiste $x = 1 \in \mathbb{R}$ tale che $(1, 1) \in \mathcal{R}_4$ e $(1, -1) \in \mathcal{R}_4$.

Esempio 6. Siano $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $f : A \to A$ tale che:

$$f(a) = a, \qquad f(b) = a, \qquad f(c) = e, \qquad f(d) = e, \qquad f(e) = a.$$

Il grafico di f è:

$$\mathcal{R} = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\} = \{(a, a), (b, a), (c, e), (d, e), (e, a)\}.$$

Osservazione 3. Date due funzioni $f = (A, B, \mathcal{R})$ e $g = (A', B', \mathcal{R}')$, risulta che $f = g$ se e solo se $A = A'$, $B = B'$, e $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$. Quindi:

$$f = g \iff \big(\ A = A' \ \wedge \ B = B' \ \wedge \ (\forall a \in A, \ f(a) = g(a) \ ) \big).$$

Esempio 7. Le due funzioni:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto 6n + 3$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto (1 + 2n)3$$

coincidono. Infatti hanno stesso indieme di partenza e stesso insieme di arrivo e inoltre:

$$\forall n \in N, \quad f(n) = 6n + 3 = (1 + 2n)3 = g(n).$$

Nota Bene 1. Il generico elemento del dominio può essere denotato con un simbolo qualunque, per cui:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto 6n + 3$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad t \mapsto 6t + 3$$

sono la stessa funzione.

Definizione 2. Siano A, B insiemi $f : A \to B$ un'applicazione, $X \subseteq A$. Si dice *immagine diretta* o semplicemente *immagine* di X mediante f e si indica con $f(X)$ il sottoinsieme di B i cui elementi sono i valori assunti da f negli elementi di X, ovvero

$$f(X) = \{b \in B : \exists a \in X \text{ tale che } f(a) = b\} = \{f(a) : a \in X\} \subseteq B.$$

Se, in particolare $X = A$, si ha:

$$f(A) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b\} = \{f(a) : a \in A\}.$$

Esempio 8. Assegnata la funzione,

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad a \mapsto 4a$$

si vogliono calcolare l'immagine di $\mathbb{Z}$ e l'immagine di $X = \{1, -1, -3, -4, 0\}$. Risulta:

$$g(\mathbb{Z}) = \{b \in \mathbb{Z} : \exists a \in \mathbb{Z} \text{ tale che } g(a) = b\} = \{4a : a \in \mathbb{Z}\}$$

Quindi $g(\mathbb{Z})$ è l'insieme dei multipli di 4. Inoltre:

$$g(X) = \{b \in \mathbb{Z} : \exists a \in X \text{ tale che } g(a) = b\ \}.$$

Poichè $g(1) = 4,\ g(-1) = -4,\ g(-3) = -12,\ g(-4) = -16,\ g(0) = 0$, si ha:

$$g(X) = \{-4, 4, 0, -16, -12\}.$$

Osservazione 4. Siano A, B insiemi $f : A \to B$ un'applicazione, $a \in A$. Allora l'immagine del sottoinsieme $\{a\}$ di A è

$$f(\{a\}) = \{f(a)\}$$

e certamente è diversa dal valore $f(a)$ assunto da f in a: infatti $f(a) \in B$ mentre $f(\{a\}) \subseteq B$.

Definizione 3. Siano A, B insiemi, $f : A \to B$ un'applicazione, $Y \subseteq B$. Si dice *controimmagine* o *immagine reciproca* di Y il sottoinsieme di A:

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}.$$

In particolare,

$$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\} = A.$$

Osservazione 5. Siano A, B insiemi $f : A \to B$ un'applicazione, $b \in B$. Poiché $\{b\} \subseteq B$, si può considerare $f^{-1}(\{b\}) \subseteq A$, che per comodità si denota con $f^{-1}(b)$.

Esempio 9. Assegnata la funzione:

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad a \mapsto 4a$$

si vogliono calcolare le controimmagini di $Y = \{5, 7\}$ e di $Y' = \{2, -4, 0\}$.
Risulta:

$$g^{-1}(Y) = \emptyset$$

Infatti si devono cercare:

- $a \in \mathbb{Z}$ tale che $g(a) = 5,$ ovvero $4a = 5,$
- $a \in \mathbb{Z}$ tale che $g(a) = 7,$ ovvero $4a = 7,$

ma ovviamente non esiste alcun valore intero a tale che $4a = 5$ o $4a = 7$. Si ha inoltre:

$$g^{-1}(Y') = \{-1, 0\}$$

Infatti, si deve cercare

$$a \in \mathbb{Z} \text{ tale che } g(a) = 2, \text{ ovvero } 4a = 2,$$

e questo non è verificato da nessun intero a; si devono inoltre cercare:

- $a \in \mathbb{Z}$ tale che $g(a) = -4,$ ovvero $4a = -4$, e questo è verificato per $a = -1$,
- $a \in \mathbb{Z}$ tale che $g(a) = 0,$ ovvero $4a = 0$, e ciò è verificato per $a = 0$.

Esempio 10. Siano A e B due insiemi e $c \in B$ un elemento fissato. Si definisce la funzione costante di valore costante c

$$f_c : A \to B \qquad a \mapsto c,$$

vale a dire $\forall a \in A\ f_c(a) = c$. Se $Y \subseteq B$ si ha:

$$f_c^{-1}(Y) = \begin{cases} A & \text{se } c \in Y \\ \emptyset & \text{se } c \notin Y. \end{cases}$$

Inoltre $f(X) = \{c\}$ per ogni sottoinsieme X non vuoto di A.

Esempio 11. La funzione:

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \qquad x \mapsto 3$$

manda tutti gli elementi di $\mathbb{R}$ in 3. Si osserva che per ogni sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$, risulta

$$f_3(X) = \{3\};$$

Se invece Y è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, risulta:

$$f_3^{-1}(Y) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } 3 \in Y \\ \emptyset & \text{se } 3 \notin Y. \end{cases}$$

Esempio 12. Fissato un insieme A, si può definire la *funzione identità* o *funzione identica*

$$id_A : A \to A \qquad a \mapsto a \qquad \forall a \in A,$$

Cioè per ogni $a \in A\ \ id_A(a) = a$,

Proposizione 1. *Siano A, B insiemi $f : A \to B$ una funzione, e siano $X, X' \subseteq A$ e $Y, Y' \subseteq B$. Risulta:*

1. $f(\emptyset) = \emptyset$
2. *se* $X \subseteq X'$, *allora* $f(X) \subseteq f(X')$
3. $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$
4. $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$
5. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
6. *se* $Y \subseteq Y'$, *allora* $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$
7. $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$
8. $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$

Dimostrazione. Per provare 1., si suppone che $X \subseteq X'$ e si considera $y \in f(X)$: allora esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$; ma risulta anche $x \in X'$, e dunque $y \in f(X')$. Si è dimostrato che ogni elmento di $f(X)$ appartiene a $f(X')$, per cui $f(X) \subseteq f(X')$.
Per provare 2., si considera $z \in f(X \cap X')$: allora $z = f(x)$ con $x \in X \cap X'$, ovvero $x \in X$ e $x \in X'$. Segue che $z = f(x)$ con $x \in X$ cioè $z = f(x) \in f(X)$; allo stesso modo $z = f(x) \in f(X')$ e quindi $z \in f(X) \cap f(X')$.
Per provare 3., si osserva che, essendo $X \subseteq X \cup X'$ e $X' \subseteq X \cup X'$, sarà, per 1., $f(X) \subseteq f(X \cup X')$ e $f(X') \subseteq f(X \cup X')$ e allora $f(X \cup X')$ contiene l'unione di $f(X)$ e $f(X')$, cioè è verificata l'inclusione $f(X) \cup f(X') \subseteq f(X \cup X')$. Per provare l'altra inclusione, si prende $y \in f(X \cup X')$: esiste x in $X \cup X'$ tale che $y = f(x)$. Poichè $x \in X$ o $x \in X'$, sarà $y \in f(X)$ o $y \in f(X')$, per cui $y \in f(X) \cup f(X')$ e ciò prova l'inclusione $f(X \cup X') \subseteq f(X) \cup f(X')$, per cui l'uguaglianza 3. è verificata.
Le dimostrazioni delle restanti proprietà sono simili a quelle provate e si lasciano per esercizio.

□

Osservazione 6. L'uguaglianza tra gli insiemi $f(X \cap X')$ e $f(X) \cap f(X')$ non vale, in generale: per provarlo si espone il seguente esempio.

Esempio 13. Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posto $X = [-2, 0]$ e $X' = [0, 2]$, si ha $f(X) = [0, 4], f(X') = [0, 4]$ e quindi $f(X) \cap f(X') = [0, 4]$. Invece, $X \cap X' = \{0\}$ e dunque $f(X \cap X') = \{0\}$, per cui, in questo caso, $f(X \cap X') \neq f(X) \cap f(X')$.

Definizione 4. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dice che f è una funzione *iniettiva o ingettiva* se elementi distinti di A hanno immagini distinte in B. Ovvero,

$$\forall a, a' \in A, \qquad a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$

Si ricorda che $P \implies Q$ equivale a $\neg Q \implies \neg P$, per cui la definizione può essere equivalentemente scritta come:

$$\forall a, a', \in A \qquad f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'.$$

Esempio 14. L'applicazione:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad n \mapsto 3n - 4 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

è iniettiva. Infatti, $\forall n, n' \in \mathbb{Z}$, se $f(n) = f(n')$ allora $3n - 4 = 3n' - 4$, che implica $n = n'$

Esempio 15. L'applicazione

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad x \mapsto x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

non è iniettiva, perchè esistono (per esempio) 2 e -2 tali che $f(-2) = 4 = f(2)$.

Definizione 5. Per ogni numero reale x, il *modulo o valore assoluto* è così definito:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

Esercizio 2. Si verifichi che la funzione

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad x \mapsto |x| \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

non è iniettiva.

Nota Bene 2. Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora per ogni $b \in B$ l'insieme controimmagine $f^{-1}(b)$ ha al più un elemento.

Osservazione 7. Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora per ogni X, X' sottoinsiemi di A vale l'uguaglianza

$$f(X \cap X') = f(X) \cap f(X').$$

Sia $y \in f(X) \cap f(X')$, allora $y \in f(X)$ e $y \in f(X')$, per cui esistono $x \in X$ e $x' \in X'$ tali che $f(x) = y$ e $f(x') = y$. Allora $f(x) = f(x')$, e quindi per l'ingettività di f, sarà $x = x' \in X \cap X'$ e dunque $y \in f(X \cap X')$, ovvero $f(X) \cap f(X') \subseteq f(X \cap X')$. L'altra inclusione vale in generale (cf. Proposizione 1).

Definizione 6. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dice che f è una funzione *suriettiva o surgettiva* se $Im(f) = B$, ovvero ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A. In simboli:

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b$$

Esempio 16. L'applicazione

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad n \mapsto 3n - 4 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

non è surgettiva. Infatti, fissato $z \in \mathbb{Z}$, si cerca $n \in \mathbb{Z}$ tale che $f(n) = z$, ovvero $3n - 4 = z$ allora $3n = z + 4$ ovvero $n = \frac{z+4}{3}$ che non sempre appartiene a $\mathbb{Z}$ (per esempio, se $z = 1$, $\frac{1+4}{3} = \frac{5}{4} \notin \mathbb{Z}$).

Esempio 17. La funzione

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad n \mapsto 3n - 4 \qquad \forall n \in \mathbb{Q}$$

è surgettiva. Infatti, fissato $m \in \mathbb{Q}$, si cerca, se esiste, $n \in \mathbb{Q}$ tale che $m = 3n - 4$, ovvero $3n = m + 4$, e quindi $n = \frac{m+4}{3} \in \mathbb{Q}$. Si conclude che

$$\forall m \in \mathbb{Q} \qquad \exists n = \frac{m+4}{3} \in \mathbb{Q} \text{ tale che } m = f(n).$$

Esercizio 3. Provare che le applicazioni

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad x \mapsto x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$f' : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad x \mapsto x^4 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

non sono suriettive.

Esercizio 4. Provare che l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^5 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

è surgettiva.

Nota Bene 3. $f : A \to B$ è una funzione surgettiva, se e solo se $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, per ogni $b \in B$.

Nota Bene 4. Sia $f : A \to B$ una funzione. Allora si può considerare l'applicazione ridotta $f_\sharp : A \to f(A)$ che opera come f ma ha come insieme di arrivo $f(A)$. Quindi

$$f_\sharp : A \to f(A) \qquad x \mapsto f(x).$$

Si osservi che $f_\sharp$ è sempre surgettiva.

Definizione 7. Una funzione $f : A \to B$ è detta *biettiva o bigettiva* se è sia ingettiva che surgettiva. Ovvero

$$\forall b \in B, \exists! a \in A \text{ tale che } f(a) = b$$

Infatti, per la surgettività di f risulta

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b$$

inoltre per ogni b è unico $a \in A$ tale che $f(a) = b$, poiché se $a' \in A$ è tale che $f(a') = f(a) = b$, per l'ingettività risulta $a' = a$.

Nota Bene 5. Quindi, se $f : A \to B$ è una funzione bigettiva, allora per ogni $b \in B$ l'insieme controimmagine $f^{-1}(b)$ è costituito esattamente da un elemento.

Nota Bene 6. Sia $f : A \to B$ una funzione ingettiva. Allora $f_\sharp : A \to Im(f) = f(A)$ è surgettiva e ingettiva, e quindi .

Nota Bene 7. Fissato un insieme A, si vede facilmente che la funzione identità Id_A è bigettiva.

Esercizio 5. Verificare che la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^5 - 4 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

è bigettiva.

Esercizio 6. Verificare che le funzioni

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad x \mapsto x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$f' : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad x \mapsto x^4 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

non sono bigettive.

Definizione 8. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. La funzione composizione di f e g, si indica con $g \circ f$ (si legge anche g composto f, o g cerchietto f) ed è la funzione

$$g \circ f : A \to C \text{ tale che } \qquad \forall\, a \in A \;\; (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Risulta comodo visualizzare la composizione usando il seguente diagramma:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B \qquad\qquad a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a))$$

ovvero prima si applica f e poi g ad ogni elemento di A. L'insieme di partenza della funzione composta $g \circ f$ è uguale a quello di f; l'insieme di arrivo di $g \circ f$ coincide con l'insieme di arrivo di g.

Nota Bene 8. L'insieme di arrivo di f **deve** essere uguale al dominio di g, altrimenti la funzione composta $g \circ f$ non esiste!.
In generale, anche se sono definite $g \circ f$ e $f \circ g$, esse sono diverse:

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Questo si può vedere con i seguenti esempi

Esempio 18. Considerate le applicazioni:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad x \mapsto x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad t \mapsto t + 2 \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

esistono $g \circ f$ e $f \circ g$, ma $g \circ f \neq f \circ g$.
Infatti, l'insieme di arrivo di f è $\mathbb{N}$, che coincide con il dominio di g, e risulta:

$$g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad a \mapsto a^2 \mapsto a^2 + 2.$$

Analogamente l'insieme di arrivo di g è $\mathbb{Z}$, che coincide con il dominio di f, e si ha:

$$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad b \mapsto b + 2 \mapsto (b + 2)^2.$$

Quindi, $g \circ f \neq f \circ g$ poichè non sono diversi l'insieme di partenza e quello di arrivo.

Esempio 19. Considerate le applicazioni:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad x \mapsto x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad t \mapsto t + 2 \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

esistono $g \circ f$ e $f \circ g$, ma $g \circ f \neq f \circ g$. Infatti, l'insieme di arrivo di f è $\mathbb{N}$, che coincide con il dominio di g, e risulta:

$$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \quad a \mapsto a^2 \mapsto a^2 + 2.$$

Analogamente, l'insieme di arrivo di g è $\mathbb{N}$, che coincide con il dominio di f, e si ha:

$$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \quad b \mapsto b + 2 \mapsto (b + 2)^2.$$

Poichè $(g \circ f)(1) = 3$, $(f \circ g)(1) = 9$ ovvero $(g \circ f)(1) \neq f \circ g)(1)$, risulta $g \circ f \neq f \circ g$: quindi, pur avendo $g \circ f$ e $f \circ g$ stesso insieme di partenza e stesso insieme di arrivo, esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $(g \circ f)(x) \neq f \circ g)(x)$.

Esercizio 7. Considerate le funzioni:

$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^* \qquad x \mapsto \frac{x}{3} + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

$$f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q} \qquad y \mapsto \frac{1}{y} \qquad \forall Y \in \mathbb{Q}^*$$

Stabilire se esistono $f \circ h$ e $h \circ f$ e in caso affermativo calcolare come operano.
Poiché il codominio di h è $\mathbb{Q}^*$ che coincide col dominio di f, allora esiste

$$f \circ h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{N} \;\; (f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\frac{x}{3} + 1) = \frac{1}{\frac{x}{3} + 1} = \frac{3}{x+3}.$$

Si può anche scrivere:

$$f \circ h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : x \mapsto \frac{x}{3} + 1 \mapsto \frac{1}{\frac{x}{3} + 1} = \frac{3}{x+3}.$$

Poiché l'insiem di arrivo di f è $\mathbb{Q}$ mentre il dominio di h è $\mathbb{Q}^*$, allora non esiste $h \circ f$

Proposizione 2. *Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, tre funzioni allora*

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *(proprietà associativa della composizione di funzioni).*
2. $f \circ id_A = id_B \circ f = f$*, dove* $id_A : A \to A$ *e* $id_B : B \to B$ *le funzioni identità di* A *e* B*, rispettivamente.*
3. *Se f e g sono funzioni ingettive, allora $g \circ f$ è ingettiva. Se f e g sono funzioni surgettive, allora $g \circ f$ è sugettiva. Se f e g sono funzioni bigettive, allora $g \circ f$ è bigettiva (non è vero il viceversa!).*

Dimostrazione. Si lasciano per esercizio le dimostrazioni di 1 e 2. Si prova 3. Si suppone che $f : A \to B$ e $g : B \to C$ siano funzioni ingettive. Siano $a, b \in A$ tali che $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ cioè, per definizione $g(f(a)) = g(f(b))$; ma g è ingettiva e quindi $f(a) = f(b)$ e poiché f è ingettiva si ha $a = b$, ovvero $g \circ f$ è iniettiva. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funzioni surgettive. Si deve dimostrare che $\forall c \in C$ esiste $a \in a$ tale che $(g \circ f)(a) = c$. Fissato $c \in C$, poichè g è surgettiva, esiste $b \in B$ tale che $g(b) = c$. Ora $b \in B$ e f è surgettiva, quindi esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Ma allora $c = g(b) = g(fa)) = (g \circ f)(a)$. Quindi $g \circ f$ è surgettiva.
Per concludere, se f e g sono bigettive, allora sono ingettive e surgettive e allora la loro funzione composta è bigettiva. □

Per provare che non vale il viceversa, si presenta il seguente esempio:

Esempio 20. Sono dati gli insiemi $A = \{1\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{t\}$ e le applicazioni:

$$f : A \to B \quad \text{tale che} \quad f(1) = a$$

$$g : B \to C \qquad x \mapsto t, \qquad \forall x \in B$$

La funzione composta $g \circ f$ è surgettiva, ma f non è surgettiva; d'altra parte $f \circ g$ è ingettiva, ma g non lo è.

Definizione 9. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dice *inversa* di f una funzione $f' : B \to A$ tale che

$$f \circ f' = id_B \ \text{ e } \ f' \circ f = id_A.$$

Se f' esiste, si dice che f è *invertibile.*

Proposizione 3. *Sia $f : A \to B$ una funzione. Si verifica che, se esiste una funzione inversa di f, essa è unica e si indica con il simbolo f^{-1}.*

Dimostrazione. Siano g e h due funzioni inverse di f. Allora $f \circ g = id_B$, cioè $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in B$, e quindi $f(g(b)) = b = f(h(b))$. Poiché f è iniettiva $g(b) = h(b)$, per ogni $b \in B$, ovvero $g = h$. □

Teorema 1. *Una funzione $f : A \to B$ è invertibile se e soltanto se f è bigettiva.*

Dimostrazione. (Cenno) Si suppone che f sia bigettiva, allora, se $b \in B, \exists! a \in A$ tale che $f(a) = b$. Si definisce $f^{-1}(b) = a$, dove a è l'unico elemnto di A tale che $f(a) = b$. Si prova che $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$.
La verifica del viceversa viene omessa. □

Nota Bene 9. Se $f : A \to B$ una funzione bigettiva, allora anche la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ è biettiva e inoltre: $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ (si verifichi per esercizio).

Nota Bene 10. La funzione identica $id_A : A \to A$ su un insieme A è bigettiva e quindi invertibile e risulta:$(id_A)^{-1} = id_A$.

Esempio 21. Poiché le funzioni

$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^* \qquad x \mapsto \frac{x}{3} + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

$$f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q} \qquad y \mapsto \frac{1}{y} \qquad \forall Y \in \mathbb{Q}^*$$

non sono susurgettive (perché?) e quindi non bigettive, non ammettono la funzione inversa.

Esempio 22. La funzione

$$h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad x \mapsto \frac{x}{3} + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

è ingettiva e surgettiva. Siano $x, x' \in \mathbb{Q}$ tali che $h(x) = h(x')$. Allora

$$\frac{x}{3} + 1 = \frac{x'}{3} + 1$$

da cui, con semplici calcoli, segue $x = x'$, ovvero h è ingettiva.
Sia ora $y \in \mathbb{Q}$: si cerca, se esiste, $x \in \mathbb{Q}$ tale che $h(x) = y$. Sviluppando i calcoli:

$$y = \frac{x}{3} + 1 \Longleftrightarrow y - 1 = \frac{x}{3} \Longleftrightarrow x = 3(y-1).$$

Allora h è surgettiva, quindi è anche bigettiva, pertanto ammette l'inversa, ovvero:

$$h^{-1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad y \mapsto 3(y-1) \qquad \forall y \in \mathbb{Q}$$

Esempio 23. La funzione

$$h : \mathbb{Q} - \{1\} \to \mathbb{Q}^* \qquad x \mapsto \frac{1}{x-1} \qquad \forall x \in \mathbb{Q} - \{1\}$$

è ingettiva e surgettiva. Siano $x, x' \in \mathbb{Q} - \{1\}$ tali che $h(x) = h(x')$. Allora

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x'-1}$$

da cui segue facilmente che $x = x'$ e quindi che h è ingettiva.
Sia $y \in \mathbb{Q}^*$: si cerca, se esiste, $x \in \mathbb{Q}$ tale che $h(x) = y$. Ciò significa $y = \frac{1}{x-1}$; poiché $x \neq 1$, segue $y(x-1) = 1$, e poiché $y \neq 0$, ciò equivale a $x - 1 = \frac{1}{y}$ ovvero a $x = \frac{1}{y} + 1$. Quindi h è anche surgettiva. Essendo h bigettiva, esiste la funzione inversa:

$$h^{-1} : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q} - \{1\} \qquad y \mapsto \frac{1}{y} + 1 \qquad \forall y \in \mathbb{Q}^*.$$

Proposizione 4. *Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funzioni bigettive: per il punto 3. della Proposizione 2, la funzione composta $g \circ f$ è bigettiva. Quindi è invertibile e risulta:*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id_A \qquad \text{e} \qquad (g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = id_B$$

Infatti:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A$$

e, in maniera analoga:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_A \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_B$$

□

Osservazione 8. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si provano le seguenti inclusioni:

1. $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$ per ogni $A' \subseteq A$
2. $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$ per ogni $B' \subseteq B$.

Inoltre, se f è una funzione biettiva allora valgono le inclusioni opposte, ovvero le uguaglianze.

Definizione 10. Si dice che due insiemi X e Y sono *equipotenti* Y se esiste una bigezione tra X e Y.

Definizione 11. Si dice che un insieme X è *infinito* se esiste un'applicazione ingettiva ma non surgettiva di X in X.

Esempio 24. Sicuramente l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito in quanto (per esempio) l'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, è ingettiva ma non surgettiva.

Esempio 25. La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ 2|x| & \text{se } x < 0, \\ 2x - 1 & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

è biettiva (si verifichi per esercizio). Quindi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ equipotenti.

Osservazione 9. Un insieme si dice *numerabile* se è equipotente a $\mathbb{N}$. Allora, per l'esempio 25, $\mathbb{Z}$ è numerabile. Si può provare che anche $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Osservazione 10. Se X è un insieme infinito ed è contenuto in un insieme Y, allora anche Y è infinito. Quindi gli insiemi numerici $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono infiniti in quanto contengono $\mathbb{N}$.

Definizione 12. Si dice che un insieme X è *finito* se è vuoto o se non è infinito.

La dimostrazione del seguente fondamentale Teorema viene omessa.

Teorema 2. *Sia X un insieme finito non vuoto. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ ed ed esiste un'applicazione bigettiva $\gamma : J_n \to X$, dove $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$.*

Osservazione 11. Nelle stesse condizioni del Teorema 2, si può scrivere

$$X = \{\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(n)\}.$$

Inoltre si dice che X ha *cardinalità* n e si scrive:

$$|X| = n.$$

Proposizione 5. *Due insiemi finiti X e Y sono equipotenti se e solo se hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Si supponga che X e Y siano equipotenti: allora esiste un'applicazione bigettiva $\varphi : X \to Y$; inoltre esiste $n \in \mathbb{N}$ ed esiste un'applicaione bigettiva $\gamma : J_n \to X$, per cui $|X| = n$. Allora l'applicazione $\varphi \circ \gamma : J_n \to Y$ è bigettiva, come applicazione composta di due applicazioni bigettive, e quindi $|Y| = n = |X|$.
Viceversa, si supponga che $|Y| = |X| = n$. Allora esistono due applicazioni bigettive $\gamma : J_n \to X$, $\rho : J_n \to Y$. Poichè γ è bigettiva, si può considerare l'applicazione inversa $\gamma^{-1} : X \to J_n$, anch'essa bigettiva. Quindi l'applicazione $\rho \circ \gamma^{-1} : X \to Y$ è un'applicazione bigettiva di X in Y: questo prova che X e Y sono equipotenti.

Definizione 13. Un'applicazione bigettiva di un insieme finito in sé si dice *permutazione*

Osservazione 12. Si denoterà con $\mathcal{S}_n$ l'insieme delle permutazioni dell'insieme $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$. S_n si chiama insieme delle perumutazioni su n oggetti perché un qualunque insieme di cardinalità n è bigettivo a J_n e quindi studiare le permutazioni su J_n equivale a studiare le permutazioni su un qualunque insieme di cardinalità n.

Osservazione 13. Siano X, Y due insiemi finiti. Allora può esistere un'applicazione ingettiva avente X come insieme di partenza e Y come insieme di arrivo solo se $|X| \leq |Y|$; invece può esistere un'applicazione surgettiva solo se $|X| \geq |Y|$. Infine, se $|X| = |Y|$ allora un'applicazione $f : X \to Y$ è ingettiva se e soltanto se è surgettiva e quindi se e soltanto se è bigettiva.

Osservazione 14. Può essere utile pensare le applicazioni tra insiemi finiti usando il *modello delle parole*: se A e B sono insiemi finiti, con $|A| = n$, $|B| = k$, e se $f : A \to B$ è un'applicazione, si può immaginare che gli elementi di A siano delle caselle e gli elementi di B siano delle lettere da inserire nelle caselle nel modo che segue: posto, per comodità

$$A = \{a_1, \dots, a_n\},\ B = \{b_1, \dots, b_k\},$$

per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, b_j viene inserito nella casella a_i se e solo se $b_j = f(a_i)$. In questo modo f diventa una parola di lunghezza n:

$$f(a_1) \dots f(a_n).$$

Esempio 26. Siano $A = \{1, 2, 3, , 5, 6, 7\}$, $B = \{a, b, c, d, e, g, h, l\}$. Allora $f : A \to B$ tale che

$$f(1) = d,\ f(2) = c,\ f(3) = a,\ f(4) = a,\ f(5) = d,\ f(6) = e,\ f(7) = h$$

può essere scritta col modello delle parole come:

$$dcaadeh$$

pensando le caselle ordinate secondo l'ordine naturale di A.
Se la parola che rappresenta un'applicazione f tra due insiemi finiti A e B non contiene ripetizioni, allora f è ingettiva; se contiene tutti gli elementi di B, allora f è surgettiva.

0.2 Permutazioni

Osservazione 15. Sia A un insieme finito, con $|A| = n$. Posto $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, una permutazione f di A si può rappresentare tramite una matrice di tipo $(2, n)$ (ovvero avente 2 righe e n colonne) ponendo sulla prima riga gli elementi di A in un ordine qualunque e sulla seconda riga gli elementi di A in maniera tale che $f(a_i)$ stia nella stessa colonna di a_i, $i = 1, \dots, n$. Cioè:

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & \dots & f(a_{n-1}) & f(a_n) \end{pmatrix}.$$

Esempio 27. Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e $h : A \to A$ tale che $h(1) = 3,\ h(2) = 1,\ h(3) = 2,\ h(4) = 5,\ h(5) = 4$. Si può scrivere:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Esempio 28. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Allora la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

individua immediatamente l'applicazione $f : X \to X$ tale che

$$f(1) = 8,\ f(2) = 7,\ f(3) = 3,\ f(4) = 1,\ f(5) = 6,\ f(6) = 2,\ f(7) = 5,\ f(8) = 4.$$

Osservazione 16. È molto facile calcolare l'applicazione composta di due permutazioni su un insieme finito, se si scrivono sotto forma di matrice. Ad esempio, siano:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 8 & 3 & 7 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Allora si ha:

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 5 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 6 & 4 & 5 & 9 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia S_n l'insieme delle permutazioni su n oggetti e non è lesivo della generalità considerare i primi numeri naturali non nulli

$$\{1, 2, \dots, n\}.$$

Definizione 14. Si sice che una permutazione f *muove* un elemento a se $f(a) \neq a$; si dice che *fissa* a se $f(a) = a$.

Definizione 15. Si dice *ciclo di lunghezza* r, e si indica con il simbolo $(c_1c_2 \dots c_r)$, $r \leq n$ la permutazione $f \in S_n$ tale che

$$f(c_1) = c_2, f(c_2) = c_3, \dots, f(c_{r-1}) = c_r, f(c_r) = c_1$$

e tutti gli altri elementi vengono fissati da f. Un ciclo di lunghezza 2 si chiama *scambio.*

Si osservi che si ha $(c_1c_2 \dots c_r) = (c_2 \dots c_rc_1) = (c_3 \dots c_rc_1c_2) = \dots (c_rc_1 \dots c_{r-1})$.

Osservazione 17. Si indicherà con $id_n \in S_n$ l'applicazione identità su J_n. Considerato uno scambio $(c_1c_2) \in S_n$, si verifica facilmente che:

$$(c_1c_2)^2 = (c_1c_2) \circ (c_1c_2) = id_n$$

Definizione 16. Si dice che due permutazioni f e g sono *disgiunte* se gli elementi mossi da f sono fissati da g.

Osservazione 18. Si può dimostrare che, se due permutazioni f e g sono disgiunte, allora

$$f \circ g = g \circ f.$$

Teorema 3. Sia $f \in S_n$. Allora f è un ciclo oppure può essere scritta, in modo unico a meno dell'ordine, come prodotto (ovvero come composizione) di cicli disgiunti.

Osservazione 19. Si può scrivere il ciclo $(c_1c_2 \dots c_r)$ come

$$(c_1c_2 \dots c_r) = (c_1c_r) \circ \dots \circ (c_1c_3) \circ (c_1c_2).$$

Quindi ogni ciclo può essere scritto come prodotto di scambi e dunque ogni permutazione può essere scritta prima come prodotto di cicli e poi come prodotto di scambi. La scomposizione in scambi non è unica. Per esempio:

$$\begin{aligned} f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} &= (1\ 3\ 2) \circ (4\ 5) = (1\ 2) \circ (1\ 3) \circ (4\ 5) \qquad (1) \\ &= (1\ 2) \circ (3\ 4) \circ (3\ 4) \circ (1\ 3) \circ (4\ 5). \end{aligned}$$

Teorema 4. Due scomposizioni in scambi di una stessa permutazione hanno la stessa parità.

Osservazione 20. Il Teorema 4 vuol dire che se si hanno due scomposizioni in scambi di una stessa permutazione, i numeri degli scambi che le compongono sono entrambi pari o entrambi dispari: in (1) si vede una scomposizione in 3 scambi e una scomposizione in 5 scambi della permutazione f.

Definizione 17. Si dice che una permutazione è *di classe pari* (rispettivamente *dispari*) se una sua qualunque scomposizione è costituita da un numero pari (rispettivamente dispari) di scambi.