Definizione 1. Si dice che due insiemi X e Y sono *equipotenti* Y se esiste una bigezione tra X e Y.

Definizione 2. Si dice che un insieme X è *infinito* se esiste un'applicazione ingettiva ma non surgettiva di X in X.

Esempio 1. Sicuramente l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito in quanto (per esempio) l'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, è ingettiva ma non surgettiva.

Osservazione 1. Se X è un insieme infinito e Y è un insieme che lo contieme, allora anche Y è infinito. Quindi gli insiemi numerici $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono infiniti in quanto contengono $\mathbb{N}$.

Definizione 3. Si dice che un insieme X è *finito* se è vuoto o se non è infinito.

Teorema 1. *Sia X un insieme finito non vuoto. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ ed ed esiste un'applicazione bigettiva $\gamma : J_n \to X$, dove $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Osservazione 2. Con le stesse notazioni del Teorema 1, si può scrivere

$$X = \{\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(n)\}.$$

Inoltre si dice che X ha *cardinalità* n e si scrive:

$$|X| = n.$$

Proposizione 1. *Due insiemi finiti X e Y sono equipotenti se e solo se hanno la stessa cardinalità.*

Definizione 4. Un'applicazione bigettiva di un insieme finito in sé si dice *permutazione*

Osservazione 3. Si denoterà con $\mathcal{S}_n$ l'insieme delle permutazioni dell'insieme $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. S_n si chiama insieme delle perumutazioni su n oggetti perché un qualunque insieme di cardinalità n è bigettivo a J_n e quindi studiare le permutazioni su J_n equivale a studiare le permutazioni su un qualunque insieme di cardinalità n.

Osservazione 4. Siano X, Y due insiemi finiti. Allora può esistere un'applicazione ingettiva avente X come insieme di partenza e Y come insieme di arrivo solo se $|X| \leq |Y|$ e inoltre, se $f : X \to Y$ è un'applicazione ingettiva tra X e Y, allora $|f(X)| = |X|$. Può esistere un'applicazione surgettiva avente X come insieme di partenza e Y come insieme di arrivo solo se $|X| \geq |Y|$. Infine, se $|X| = |Y|$ allora un'applicazione $f : X \to Y$ è ingettiva se e soltanto se è surgettiva e quindi se e soltanto se è bigettiva.

Osservazione 5. Può essere utile pensare le applicazioni tra insiemi finiti usando il *modello delle parole*: se A e B sono insiemi finiti, con $|A| = n$, $|B| = k$, e se $f : A \to B$ è un'applicazione, si può immaginare che gli elementi di A siano delle caselle e gli elementi di B siano delle lettere da inserire nelle caselle nel modo che segue: posto, per comodità

$$A = \{a_1, \dots, a_n\},\ B = \{b_1, \dots, b_k\},$$

per ogni $j \in \{1, \dots, k\},\ i \in \{1, \dots, n\}$, b_j viene inserito nella casella a_i se e solo se $b_j = f(a_i)$. In questo modo f diventa una parola di lunghezza n:

$$b_{i_1}. \dots, b_{i_n}.$$

Esempio 2. Siano $A = \{1, 2, 3, , 5, 6, 7\},\ B = \{a, b, c, d, e, g, h, l\}$. Allora l'applicazione $f : A \to B$ tale che

$$f(1) = d,\ f(2) = c,\ f(3) = a,\ f(4) = a,\ f(5) = d,\ f(6) = e,\ f(7) = h$$

può essere scritta col modello delle parole come:

$$dcaadeh$$

pensando le caselle ordinate secondo l'ordine naturale di A.
Se la parola che rappresenta un'applicazione f tra due insiemi finiti A e B non contiene ripetizioni, allora f è ingettiva; se contiene tutti gli elementi di B, allora f è surgettiva.

Cenni di calcolo combinatorio

Proposizione 2. *(Principio dei cassetti) Siano A un insieme finito, B un sottoinsieme di A, $B \neq A$. Allora $|B| < |A|$.*

Benchè appaia un'osservazione ovvia, il principio dei cassetti può essere utilizzato in alcune situazioni, come si vede dal seguente esempio:

Esempio 3. Usando il principio dei cassetti, si può provare che a Roma vivono almeno due persone che hanno lo stesso numero di capelli.
La dimostrazione si basa sul fatto che il numero di capelli di un essere umano è al massimo 200.000. Si indicano con $\mathcal{A}$ l'insieme degli abitanti di Roma e con $B = \{0, 1, 2, \ldots, 200.000\}$ l'insieme dei numeri naturali da 0 a 200.000. Il numero di abitanti di Roma è poco più di 2.825.000. Si suppone per assurdo che tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ abbiano un unmero diverso di capelli. Allora l'applicazione

$$F : \mathcal{A} \to B \text{ tale che } \forall x \in \mathcal{A},\ F(x) = \text{numero dei capelli di } x$$

è chiaramente ingettiva e quindi risulta $|F(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}| > 2.825.000$: questo non è possibile perchè $F(\mathcal{A}) \subset B$ e $|F(\mathcal{A})| > 2.825.000$, mentre $|B| = 200.000$, che contraddice il principio dei cassetti.

Proposizione 3. *Siano A, B, C insiemi. Risulta allora:*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| \tag{1}$$
$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Osservazione 6. Esiste anche una formula generalizzata per un numero qualsiasi di insiemi del principio di inclusione-esclusione, che viene omessa. Si osserva inoltre che se $C = \emptyset$, allora (1) diviene:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

che è il principio di inclusione-esclusione relativo a due insiemi.

Esercizio 1. Determinare il numero degli studenti di una classe di 36 alunni che svolgono attività extrascolastiche, sapendo che:

- 18 studiano musica
- 20 praticano il calcio
- 12 praticano atletica
- 12 studiano musica e praticano atletica
- 10 studiano musica praticano il calcio
- 6 praticano il calcio e l'atletica

- 2 praticano il calcio e l'atletica e studiano musica.

Se si indicano con M l'insieme degli studenti che studiano musica, con C l'insieme degli studenti che praticano il calcio, con A l'insieme degli studenti che praticano atletica allora si ha:

- $|M| = 18$, $|C| = 20$, $|A| = 12$
- $|M \cap C| = 10$
- $|M \cap A| = 12$
- $|C \cap A| = 6$
- $|M \cap C \cap A| = 2$

Quindi:

$$|M \cup C \cup A| = |M| + |C| + |A| - |M \cap C| - |M \cap A| - |C \cap A| + |M \cap C \cap A|$$

Quindi il numero delgi studenti che svolgono attività extrascolastiche è

$$|M \cup C \cup A| = 18 + 20 + 12 - 6 - 10 - 12 + 2 = 34$$

Proposizione 4. *Sia $h \in \mathbb{N}^*$. Siano inoltre assegnati h insiemi non vuoti e finiti*

$$A_1, A_2, \ldots, A_h.$$

Allora si ha:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots A_h| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_h|,$$

ovvero la cardinalità del prodotto cartesiano di h insiemi non vuoti e finiti è uguale al prodotto delle cardinalità dei singoli insiemi.

Definizione 5. Siano $n, k \in \mathbb{N}^*$. Si dice *disposizione con ripetizioni di k elementi di classe n* una n-pla ordinata con ripetizioni di k oggetti.

Proposizione 5. *Il numero delle disposizioni con ripetizioni di k elementi di classe n è k^n.*

Dimostrazione. Una disposizione con ripetizioni di k elementi di classe n può essere considerata una parola di lunghezza n con ripetizioni (e quindi un'applicazione di un insieme di cardinalità n in un insieme di cardinalità k). La scelta del primo elemento (ovvero di una lettera da inserire nella prima casella) può essere fatta in k modi, la seconda ugualmente in k modi, e così ogni scelta fino alla n-ma: pertanto le possibili disposizioni (ovvero parole) con ripetizioni saranno:

$$\underbrace{k \cdot k \cdot \cdots \cdot k}_{n \text{ volte}} = k^n.$$

Osservazione 7. Si può dimostrare la Proposizione 5 utilizzando la Proposizione 4.

Osservazione 8. Dalla dimostrazione della Proposizione 5, segue che anche il numero delle applicazioni di un insieme A di cardinalità n in un insieme B di cardinalità k è k^n. Se si usa il simbolo B^A per l'insieme delle applicazioni di A in B, ovvero:

$$B^A = \{f : A \to B\},$$

si ha la seguente identità:

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Definizione 6. (facoltativa) Siano A un insieme non vuoto, B un sottoinsieme di A. Si dice *applicazione caratteristica di* B l'applicazione

$$f_B : A \to \{0,1\} \quad \text{tale che} \quad \forall x \in A \quad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in B \\ 0 \text{ se } x \notin B \end{cases}$$

Corollario 1. *Sia A un insieme finito, con $|A| = n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Allora*

$$|\mathfrak{P}(A)| = 2^n.$$

Dimostrazione. (facoltativa) Si proverà che l'insieme delle parti di A è equipotente all'insieme $\{0,1\}^A = \big\{f : A \to \{0,1\}\big\}$ delle applicazioni dell'insieme A nell'insieme $\{0,1\}$, ovvero che è bigettiva l'applicazione

$$\Phi : \mathfrak{P}(A) \to \{0,1\}^A \quad \text{tale che} \quad \forall B \in \mathfrak{P}(A),\ \Phi(B) = f_B,$$

dove f_B è l'applicazione caratteristica di B (Definizione 6).
Siano $B, C \in \mathfrak{P}(A)$, con $B \neq C$: si deve allora verificare che $\Phi(B) \neq \Phi(C)$, ovvero $f_B \neq f_C$. Poiché f_B e f_C hanno lo stesso inseme di partenza A e lo stesso inseme di arrivo $\{0,1\}$, si deve verificare che esiste almeno un elemento di A nel quale assumono valore diverso. Dalla teoria degli insiemi è noto che

$$B \neq C \iff \big((\exists x \in B \text{ tale che } x \notin C) \vee (\exists x \in C \text{ tale che } x \notin B)\big).$$

Si suppone (per esempio) che $\exists x \in B$ tale che $x \notin C$ (nell'altra eventualità il ragionamento è del tutto analogo). Poichè $x \in B$, risulta che $f_B(x) = 1$ mentre, poiché $x \notin C$ risulta $f_C(x) = 0$ e quindi $f_B(x) \neq f_C(x)$, cioé $f_B \neq f_C$. Segue l'ingettività di Φ.
Sia $f \in \{0,1\}^A$. Per provare la surgettività di Φ si deve dimostrare che esiste $B \in \mathfrak{P}(A)$ tale che $f = \Phi(B)$. Si pone

$$B = f^{-1}(1) = \{x \in A \ : \ f(x) = 1\}$$

e si verifica che $f = f_B = \Phi(B)$. Infatti f e f_B sono applicazioni aventi entrambe insieme di partenza A e insieme di arrivo $\{0, 1\}$. Sia $x \in A$: se $x \in B$, allora $f(x) = 1$ e, per come è definita l'applicazione caratteristica di B, anche $f_B(x) = 1$; se $x \notin B$, allora $f(x) \neq 1$ e quindi dovrà essere $f(x) = 0$; d'altra parte, per come è definita l'applicazione caratteristica di B, $f_B(x) = 0$. Quindi esiste $B \in \mathfrak{P}(A)$ tale che $\Phi(B) = f$. Quindi Φ è ingettiva e surgettiva, cioè bigettiva.

Definizione 7. Siano $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n \leq k$. Si dice *disposizione semplice di k elementi* di classe n una n-pla ordinata senza ripetizioni di k oggetti.

Proposizione 6. *Il numero delle disposizioni semplici di k elementi di classe n, con $n \leq k$, è*

$$(k)_n = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1).$$

Dimostrazione. Una disposizione semplice di k elementi di classe n può essere considerata una parola di lunghezza n senza ripetizioni (e quindi un'applicazione ingettiva di un insieme di cardinalità n in un insieme di cardinalità k). La scelta del primo elemento (ovvero di una lettera da inserire nella prima casella) può essere fatta in k modi, la seconda in $k-1$ modi, perché il secondo elelmento deve essere diverso dal primo, e così per ogni scelta fino alla n-ma che può essere fatta in $k-(n-1) = k-n+1$ modi: pertanto le possibili disposizioni (ovvero parole) senza ripetizioni saranno:

$$k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot (k-n+1).$$

Osservazione 9. Dalla dimostrazione della Proposizione 6, segue che anche il numero delle applicazioni ingettive di un insieme di cardinalità n in un insieme di cardinalità k, con $n \leq k$, è $(k)_n$.

In particolare il numero delle disposizioni semplici di n elementi di classe n (ovvero il numero delle applicazioni bigettive tra due insiemi di cardinalità n) è:

$(n)_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$

dove il numero $n!$ si indica con il nome di n *fattoriale*.

Corollario 2. *Il numero delle permutazioni di un insieme di cardinalità n, $n \in \mathbb{N}^*$, è $n!$, ovvero:*

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$

Osservazione 10. Si definisce anche

$$0! = 1.$$

Definizione 8. Siano r, s interi positivi, con $r \leq s$, $s \neq 0$. Si dice *coefficiente binomiale* il numero

$$\binom{s}{r} = \frac{s!}{r!(s-r)!}$$

Osservazione 11. Siano r, s interi positivi, con $r \leq s$, $s \neq 0$, $r \neq 0$. Allora risulta:

$$\binom{s}{r} = \frac{(s)_r}{r!}. \tag{2}$$

Infatti si ha:

$$\binom{s}{r} = \frac{s\cdot\ldots\cdot(s-r+1)(s-r)\cdot\ldots\cdot 1}{r!(s-r)!} = \frac{s\cdot\ldots\cdot(s-r+1)(s-r)!}{r!(s-r)!}$$

da cui segue 2.

Proposizione 7. *Valgono le seguenti identità, che si lasciano da dimostrare per esercizio:*

a) $\binom{s}{0} = 1$
b) $\binom{s}{1} = s$
c) $\binom{s}{s} = 1$
d) $\binom{s}{s-1} = s$
e) $\binom{s}{r} = \binom{s-1}{r} + \binom{s-1}{r-1}$.

Teorema 2. *Vale la formula del binomio di Newton:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *si ha:*

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^h b^{n-h}. \tag{3}$$

Definizione 9. Si dice *combinazione semplice di k elementi di classe n* una n-pla non ordinata senza ripetizioni di k oggetti.

Osservazione 12. Con le stesse notazioni della Definizione 9, una combinazione semplice di k elementi di classe n non è altro se non un sottoinsieme di cardinalità n di un insieme di cardinalità k.

Proposizione 8. *Il numero dei sottoinsiemi di h elementi di un insieme di k elementi, ovvero il numero delle combinazioni semplici di n elementi di classe h è uguale a*

$$\binom{k}{h}.$$

Dimostrazione. Il numero $(k)_h$ delle disposizioni semplici va diviso per $h!$ (numero delle permutazioni su h oggetti), poiché non interessa l'ordine nel caso delle combinazioni semplici: per la Definizione 8 tale numero è proprio

$$\binom{k}{h}.$$

Osservazione 13. La Proposizione 8 e la formula del binomio di Newton forniscono una diversa dimostrazione del Corollario 1. Siano $n \in \mathbb{N}^*$, e sia A un insieme con $|A| = n$. Allora la cardinalità dell'insieme delle parti di A può essere pensata come

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}$$

poiché per ogni $h = 1, \ldots, n$, il coefficiente binomiale $\binom{n}{h}$ è il numero dei sottoinsiemi di cardinalità h di A. D'altra parte, per la formula del binomio di Newton, (3), si ha:

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} 1^h 1^{n-h} = (1+1)^n = 2^n.$$

Definizione 10. Siano $n, k \in \mathbb{N}^*$. Si dice *combinazione con ripetizioni di k elementi di classe n* una n-pla non ordinata con ripetizioni di k oggetti.

La dimostrazione delle due proposizioni che seguono viene omessa.

Proposizione 9. *Il numero delle combinazioni con ripetizione di k elementi di classe n è dato da*

$$\binom{k+n-1}{n}.$$

Proposizione 10. *Il numero delle applicazioni surgettive di un insieme di cardinalità n in un insieme di cardinalità m, $n \geq m$ è:*

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n.$$

Esempio 4. Per $n = 3$, $m = 2$

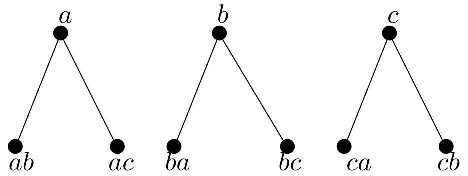
$$\sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} (-1)^{2-k} k^3 = \binom{2}{1} (-1)^1 + \binom{2}{2} (-1)^0 8 = -2 + 8 = 6.$$

Esempio 5. Per $n = 4$, $m = 3$

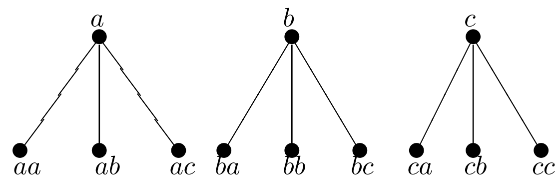
$$\sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} (-1)^{3-k} k^4 = \binom{3}{1} (-1)^2 + \binom{3}{2} (-1)^1 2^4 + \binom{3}{3} (-1)^0 3^4$$
$$= 3 - 3 \cdot 16 + 81 = 3 - 48 + 81 = 36.$$

Osservazione 14. Risultano molto utili dei particolari diagrammi nella individuazione di tutte le applicazioni o le applicazioni ingettive o surgettive tra insiemi finiti, come illustrato negli esempi che seguono.

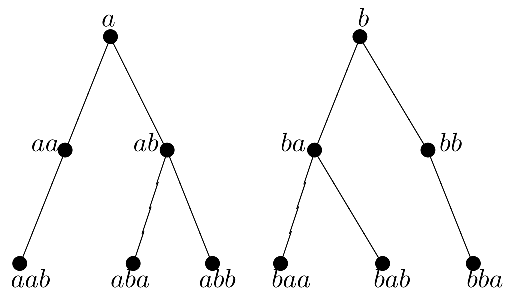
Esempio 6. Si vogliono determinare le $(3)_2 = 6$ (cf. Proposizione 6) applicazioni ingettive tra l'insieme $\{1, 2\}$ e l'insieme $\{a, b, c\}$, ovvero le parole di lunghezza 2 senza ripetizioni formate da a, b, c. A tale scopo si può tracciare un diagramma del tipo:



Esempio 7. Si possono individuare tutte le parole di lunghezza 2, anche con ripetizioni, formate dalle lettere a, b, c, ovvero le applicazioni tra l'insieme $\{1, 2\}$ e l'insieme $\{a, b, c\}$ (che sono in numero di $9 = 3^2$, come risulta dalla Proposizione 5) utilizzando il diagramma:



Esempio 8. Per determinare tutte le 6 applicazioni surgettive dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ sull'insieme $\{a, b\}$ (cf. Esempio 4) si può utilizzare il diagramma:



Esercizio 2. Tenendo conto del modello delle parole e utilizzando opportuni diagrammi, individuare

(1) tutte le applicazioni ingettive dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ nell'insieme $\{a, b, c, d, e\}$
(2) tutte le applicazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ nell'insieme $\{a, b, c, d\}$
(3) tutte le applicazioni surgettive dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ nell'insieme $\{a, b\}$.