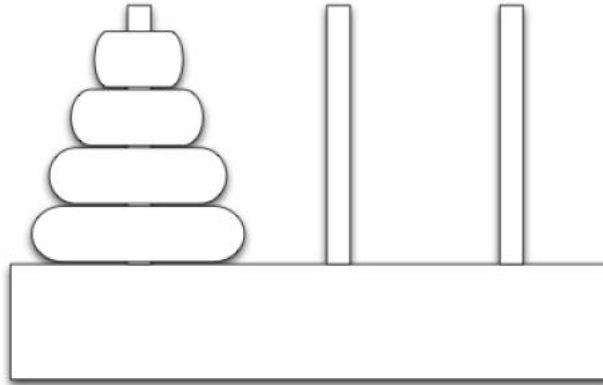


习题一：搜索（共 60 分）

1、汉诺塔（10 分）



汉诺塔是个经典的递归算例。起始，最左边的立柱上有 N 个大小不同的盘子，按照从小到大的顺序排列，右边两个立柱是空的。每一次操作只可以把一个盘子从一个立柱移到另一个上，而且任何立柱上的盘子必须保持小盘在上，大盘在下的排列。目的是把所有的盘子从最左边的立柱移到最右边的立柱上去。

在这里，我们把汉诺塔当作一个搜索问题。

（1）给这个问题提出一个状态表达（state representation）（2 分）

假设 N 个盘子从小到大依照 1, 2, 3, ..., N 排列。用三个列表，每个列表顺序排列，表示哪个盘子在哪根柱子上。

$[[i, \dots], [j, \dots], [k, \dots]]$

（2）这个问题的状态空间有多大？（2 分）

假设 K 根柱子， N 只盘子， K^N 。

（3）初始状态是什么？（2 分）

$([1, \dots, N], [], [])$

（4）从任何一个当前状态，可以允许什么样的移动？（2 分）

从每个列表中，pop 出第一个数字，push 到另外一个列表的前面，并且该数字必须小于插入列表的第一个数字。

（5）目标状态是什么？（2 分）

$([], [], [1, \dots, n])$

2、n-pacmen 搜索（15 分）

考虑一个同时控制 n 个 pacmen 的问题。多个 pacmen 可以同时移动，可以出现在同一个方块里。在每个时间点上，每个 pacman 可以选择停止不动，或者向上下左右任意一个方向移动一步。游戏的目的是用最少的步骤，使得所有的 pacmen 都到达同一个方块。

在这个问题里，我们采用以下定义： M 代表迷宫中非墙的方块数，即 pacman 可以到达的方块； $p_i = (x_i, y_i): i = 1 \dots n$ ，代表第 i 个 pacman 的当前位置。假设迷宫是连通的，pacman 可以到达任何非墙的方块。

（1）描述这个问题的状态空间。这个状态空间有多大？（4 分）

总共 n 个吃豆人，每个吃豆人有可能在 M 个位置中的任意一个， n 元素的列表或者元组，空间大小为 M^n 。

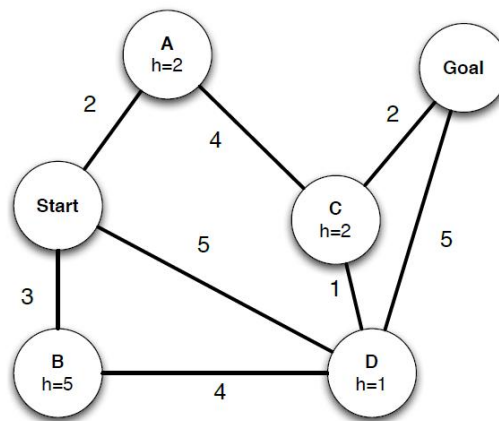
（2）给出这个问题的分叉因子（branching factor）的最严上限。（4 分）

每个吃豆人可以有五种动作：停止，四个方向，总共 n 个吃豆人， 5^n

（3）假设我们采用统一代价搜索，总共扩张的节点数的上限是多少？将此上限表达为 n 和 M 的函数，并解释你如何得到该结果。（Bound the number of nodes expanded by uniform cost tree search on this problem, as a function of n and M .)（7 分）

扩张节点数的上限是 b^D ，其中 b 是分叉因子， D 是搜索树的深度。所以结果是 $5^{(nM/2)}$ ，因为 b 是 5^n ，而最大深度是 $M/2$ ，因为每个吃豆人最多走 $M/2$ 步到达汇合点。

3、搜索（15 分）



对上面的状态空间图，采用下面几种图形搜索（graph search）的策略，列出每种策略是按什么样的顺序扩张（expand）节点的，并给出最终从 **Start** 到 **Goal** 的路径分别是什么。在搜索过程中遇到两个相同值的状态时，字母靠前的优先级别高。此外，在图形搜索中，一个状态最多只会扩张（expand）一次。

（1）深度优先，depth first search（2 分）

扩张顺序: Start, A, C, D, B, Goal

路径: Start, A, C, D, Goal

（2）广度优先，breath first search（2 分）

States Expanded: Start, A, B, D, C, Goal

Path Returned: Start-D-Goal

（3）统一代价搜索，uniform cost search（3 分）

States Expanded: Start, A, B, D, C, Goal

Path Returned: Start-A-C-Goal

（4）贪婪搜索，greedy search，用节点中给出的启发值 heuristic, h （3 分）

States Expanded: Start, D, Goal

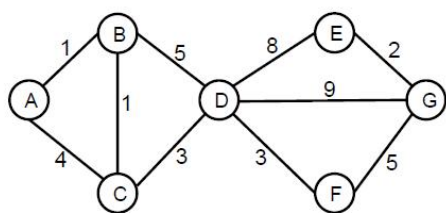
Path Returned: Start-D-Goal

（5）A*搜索，采用同样的启发值，heuristic, h （5 分）

States Expanded: Start, A, D, B, C, Goal

Path Returned: Start-A-C-Goal

4、搜索（20 分）



Node	h_1	h_2
A	9.5	10
B	9	12
C	8	10
D	7	8
E	1.5	1
F	4	4.5
G	0	0

考虑上面左边的状态空间图，A 是初始状态，G 是目标状态，边线上标的值是代价（cost），每根边线都是双向的。右表中列的是启发值（heuristic），其中 h_1 具备一贯性（consistent），而 h_2 不具备一贯性（consistent）。

（1）可能路径（5 分）

对下面每种图形搜索策略（graph search），不考虑树搜索（tree search），标出所有可能返回的路径。注意到，对有些搜索策略，可能的路径依赖于如何选择相同值（tie-breaking behavior），例如深度优先算法可以选择 AB 作为起始路径，也可以选择 AC 作为起始路径，因为 B 和 C 离 A 都是一步远。所以，记得要标记出所有可能的路径。

搜索策略	A-B-D-G	A-C-D-G	A-B-C-D-F-G
深度优先（DFS）	x	x	x
广度优先（BFS）	x	x	
统一代价（UCS）			x
A*搜索采用启发值 h_1			x
A*搜索采用启发值 h_2			x

（2）启发函数性质（15 分）

假设你在生成新的启发函数 h_3 ，如下表所示，除了 $h_3(B)$ 所有的值都已经固定了。

Node	A	B	C	D	E	F	G
h_3	10	?	9	7	1.5	4.5	0

对以下不同的条件，分别写出 $h_3(B)$ 的可能值。例如，用 $[0, \infty]$ 代表非负数，用 \emptyset 代表空，等等。

（a）什么样的 $h_3(B)$ 值让 h_3 可容许（admissible）？（5 分）

$0 \leq h_3(B) \leq 12$

To make h_3 admissible, $h_3(B)$ has to be less than or equal to the actual optimal cost from B to goal G, which is the cost of path B-C-D-F-G, i.e. 12. The answer is $0 \leq h_3(B) \leq 12$

(b) 什么样的 $h_3(B)$ 值让 h_3 具备一贯性 (consistent)? (5 分)

$$H(B)-H(D) \leq 5$$

$$H(B)-H(C) \leq 1$$

$$H(A)-H(B) \leq 1$$

$$9 \leq H(B) \leq 10$$

All the other nodes except node B satisfy the consistency conditions. The consistency conditions that do involve the state B are:

$$h(A) \leq c(A;B) + h(B) \quad h(B) \leq c(B;A) + h(A)$$

$$h(C) \leq c(C;B) + h(B) \quad h(B) \leq c(B;C) + h(C)$$

$$h(D) \leq c(D;B) + h(B) \quad h(B) \leq c(B;D) + h(D)$$

Filling in the numbers shows this results in the condition: $9 \leq h_3(B) \leq 10$

(c) 什么样的 $h_3(B)$ 值会让 A* 图形搜索先节点 A, 然后节点 C, 然后节点 B, 然后节点 D, 依序扩张 (expand)? (5 分)

The A* search tree using heuristic h_3 is on the right. In order to make A* graph search expand node A, then node C, then node B, suppose $h_3(B) = x$, we need

$$1 + x > 13$$

$$5 + x < 14 \text{ (expand B)} \text{ or } 1 + x < 14 \text{ (expand B)}$$

so we can get $12 < h_3(B) < 13$

