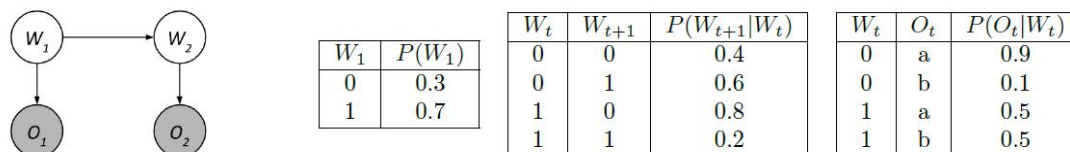


习题四：隐藏马可夫模型和粒子滤波器（共 50 分）

1、隐藏马可夫模型（20 分）

考虑下面的隐藏马可夫模型：



假设我们观察到 $O_1 = a$ 和 $O_2 = b$ 。使用前向算法（forward algorithm）一步一步地计算概率 $P(W_2|O_1 = a, O_2 = b)$ 。

(a) 计算 $P(W_1, O_1 = a)$ 。（5 分）

$$P(W_1, O_1 = a) = P(W_1)P(O_1 = a|W_1)$$

$$P(W_1 = 0, O_1 = a) = (0.3)(0.9) = 0.27$$

$$P(W_1 = 1, O_1 = a) = (0.7)(0.5) = 0.35$$

(b) 根据前面的结果，计算 $P(W_2, O_1 = a)$ 。（5 分）

$$P(W_2, O_1 = a) = \sum_{w_1} P(w_1, O_1 = a)P(W_2|w_1)$$

$$P(W_2 = 0, O_1 = a) = (0.27)(0.4) + (0.35)(0.8) = 0.388$$

$$P(W_2 = 1, O_1 = a) = (0.27)(0.6) + (0.35)(0.2) = 0.232$$

(c) 根据前面的结果，计算 $P(W_2, O_1 = a, O_2 = b)$ 。（5 分）

$$P(W_2, O_1 = a, O_2 = b) = P(W_2, O_1 = a)P(O_2 = b|W_2)$$

$$P(W_2 = 0, O_1 = a, O_2 = b) = (0.388)(0.1) = 0.0388$$

$$P(W_2 = 1, O_1 = a, O_2 = b) = (0.232)(0.5) = 0.116$$

(d) 最后，计算 $P(W_2|O_1 = a, O_2 = b)$ 。（5 分）

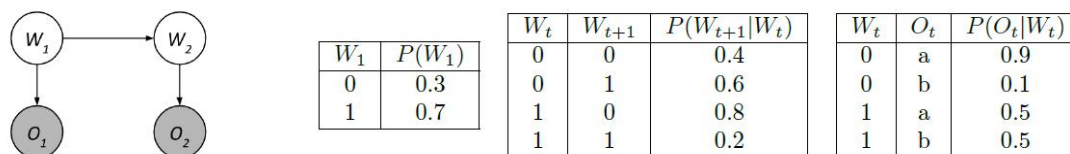
Renormalizing the distribution above, we have

$$P(W_2 = 0|O_1 = a, O_2 = b) = 0.0388 / (0.0388 + 0.116) \approx 0.25$$

$$P(W_2 = 1|O_1 = a, O_2 = b) = 0.116 / (0.0388 + 0.116) \approx 0.75$$

2、粒子滤波器（30 分）

我们用粒子滤波器来估算概率分布 $P(W_2|O_1 = a, O_2 = b)$ 。这里是和前题同样的 HMM。



从下面两个代表 W_1 分布的粒子开始：

$$P_1: W_1 = 0$$

$$P_2: W_1 = 1$$

用下面的随机数来运行我们的粒子滤波器

[0.22, 0.05, 0.33, 0.20, 0.84, 0.54, 0.79, 0.66, 0.14, 0.96]

(a) 观测：观察到证据 $O_1 = a$ 后，计算两个粒子的权重。（5 分）

$$w(P_1) = P(O_t = a|W_t = 0) = 0.9$$

$$w(P_2) = P(O_t = a|W_t = 1) = 0.5$$

(b) 重采样：使用上面提供的随机数，基于权重，重新对 P_1 和 P_2 采样。（5 分）

We now sample from the weighted distribution we found above. Using the first two random samples, we find:

$$P_1 = \text{sample}(\text{weights}, 0.22) = 0$$

$$P_2 = \text{sample}(\text{weights}, 0.05) = 0$$

(c) 预测：使用上面的随机数，对 P_1 和 P_2 作时间更新（time update）。（5 分）

$$P_1 = \text{sample}(P(W_{t+1}|W_t = 0), 0.33) = 0$$

$$P_2 = \text{sample}(P(W_{t+1}|W_t = 0), 0.20) = 0$$

(d) 更新：观察到证据 $O_2 = b$ 后，计算两颗粒子新的权重。（5 分）

$$w(P_1) = P(O_t = b|W_t = 0) = 0.1$$

$$w(P_2) = P(O_t = b|W_t = 0) = 0.1$$

(e) 重采样：使用上面提供的随机数，基于权重，重新对 P_1 和 P_2 采样。（5 分）

Because both of our particles have $X = 0$, resampling will still leave us with two particles with $X = 0$.

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = 0$$

(f) 根据以上结果，估算的概率分布 $P(W_2|O_1 = a, O_2 = b)$ 。（5 分）

$$P(W_2 = 0|O_1 = a, O_2 = b) = 2/2 = 1$$

$$P(W_2 = 1|O_1 = a, O_2 = b) = 0/2 = 0$$