Şafak Bilici

SERİLER

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$ serisinin yakınsak olması için;

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n \end{aligned}\right\} \text{KISMİ TOPLAMLAR}$$

$\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ dizisinin yakınsak olması gerekir

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Geometrik Seriler

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3$$ serisinin yakınsak olması için;

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a \\ S_2 &= a + ar \\ S_3 &= a + ar + ar^2 \\ &\vdots \\ S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \end{aligned}\right\} \text{KISMİ TOPLAMLAR}$$

$\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ dizisinin yakınsak olması gerekir.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$- \quad r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a \cdot (1-r^n) \implies \boxed{S_n = \frac{a \cdot (1-r^n)}{1-r}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot (1-r^n)}{1-r}$$

$|r| < 1$

yakınsaktır.

Toplamı $\frac{a}{1-r}$

$|r| > 1$

ıraksak.

$r = 1$

$$\sum a \cdot 1^{n-1} = a + a \dots + a$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = a \\ S_2 = 2a \\ \vdots \\ S_n = n \cdot a \end{array}\right\} \quad \{S_1, S_2, S_3, \dots S_n, \dots\}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

ıraksaktır.

Örnek

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = ?$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1/9}{1-1/3} = \frac{1}{6} \,//$$

Örnek

$5.\overline{23}$ devrik ondalık sayısını geometrik serileri kullanarak rasyonel olarak ifade ediniz.

$$5.2323\ldots = 5 + 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \cdots$$

$$= 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}$$

Teleskobik Seriler

Bir serinin kısmi toplamları eğer o serinin terimlerini basit terimlere ayırmak suretiyle formülize edilebiliyor ise bu seriye teleskobik seri denir.

$$\# \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = ?$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = ?$$

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$1 = (A+B)n + B$$

$$A = 1, \; B = -1$$

$S_1 = 1 - 1/2$

$S_2 = 1 - 1/2 + 1/2 - 1/3$

$\vdots$

$S_n = 1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + \cdots + 1/n - 1/(n+1)$

$\vdots$

$\{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = ?$$

$$\boxed{= \lim_{n\to\infty} 1 - 1/(n+1) = 1}$$

n. Terim Testi:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

- $L \neq 0$, ıraksak
- $L = 0$, ıraksak veya yakınsak

Teorem:

$\sum a_n = A$ $\sum b_n = B$ ise

- $\sum a_n + b_n = A + B$
- $\sum a_n - b_n = A - B$
- $\sum \lambda . a_n = \lambda . A$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+k}^{\infty} a_{n-k} = \sum_{n=1-k}^{\infty} a_{n+k}$$

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = ?$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} = 8$$

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{4 . \frac{1}{2}}^{a} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4$$

Negatif Olmayan Seriler İçin Bazı Testler

1) İntegral Testi

$\{a_n\}$ terimleri pozitif olan bir dizi ve $a_n = f(n)$ olsun burada f, bütün $x \geq N$ için x'in azalan fonksiyonudur. Bu durumda $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ile $\int_N^{\infty} f(n)\,dn$ integrali ile birlikte yakınsar veya ıraksar.

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \neq \int_N^{\infty} f(n)\,dn$$

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serinin karakterini p'nin çeşitli değerlerine göre irdeleyerek belirleyiniz.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^p}\,dn = \lim_{A \to \infty} \int_1^{A} n^{-p}\,dn = \lim_{A \to \infty} \left. \frac{n^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^A$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p} \right)$$

$\nearrow$ $1-p > 0$, seri ıraksak.

$\longrightarrow$ $1-p < 0$, seri yakınsak

$\searrow$ $1-p = 0$, ıraksak.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Örnek

$p=1$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ Harmonik serisi, ıraksak.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{A \to \infty} \ln n \Big|_1^A = \lim_{A \to \infty} \ln A - \ln 1 = \infty$$

Harmonik seri ıraksaktır.

Örnek

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.(\ln n)^p}$$ serisinin karakterini p'ye göre irdeleyerek inceleyiniz.

$$\int_0^{\infty} \frac{dn}{n.(\ln n)^p} = \lim_{A \to \infty} \int_2^A \frac{dn}{n.(\ln n)^p} = \lim_{A \to \infty} \int_{\ln 2}^A \frac{du}{u^p}$$

$p \leq 1$

$p > 1$

$$\sum_{u=\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^p} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.(\ln n)^p}$$

terim çıkarınca serinin karakteri değişmez

2) Karşılaştırma Testi

Teorem: $\sum a_n$, $\sum c_n$, $\sum d_n$ negatif olmayan terimlerden oluşan seriler olsun. Bazı N tam sayısı için $\forall n > N$ de $d_n \leq a_n \leq c_n$ ise

- Eğer $\sum c_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.
- Eğer $\sum d_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$$ Karakteri ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$$

ıraksaklar

$5n > 5n-1$

$$\frac{1}{5n} < \frac{1}{5n-1}$$

ıraksak ıraksak

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$ Karakteri?

$$n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1 = n! > 2.2.2.\ldots.2 = 2^{n-1}$$

$$n! > 2^{n-1}$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$ yakınsaktır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$ ← Terim ekleneck veya çıkarmak Karakteri değiştirmez

→ yakınsak

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$ Karakteri?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0+1}^{\infty} \frac{1}{n-1+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

→ ıraksak (terim özelliği)

eşit

Örnek

$$5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$$

Karakteri?

$$2^n + \sqrt{n} > 2^n$$

$$\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$$

yakınsak

yakınsak

yakınsak.

3) Limit Karşılaştırma Testi

N bir tamsayı olmak üzere $\forall n \geq N$ tamsayıları için $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olsun.

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olmak üzere

- $L \neq 0$ ve $L \neq \infty \Rightarrow \sum a_n$ ve $\sum b_n$ aynı karakterli.
- $L = 0 \Rightarrow \sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsak.
- $L = \infty \Rightarrow \sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksak.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2$$

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ aynı karakterde olup ıraksaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = 1$$

$$b_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

İki seri de aynı karakterli yakınsak

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad \text{Karakteri} = ?$$

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{harmonik ıraksak}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

$\sum b_n$ ıraksak, $L=\infty$, $\sum a_n$ ıraksak ıraksaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n.\ln n}{n^2+5}$$

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ ıraksak}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n.\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n}+\ln n\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \infty$$

$\sum b_n$ ıraksak, $L=\infty$, $\sum a_n$ ıraksak

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$$

$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, p serisi , yakınsak

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

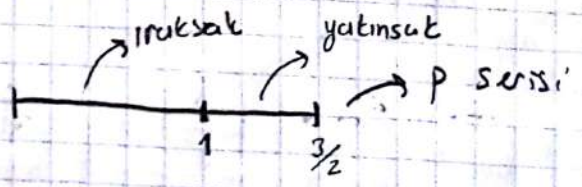
$\sum b_n$ yakınsak , $L=\infty$ bir şey söylenemez.

$\sim\sim$

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2-p}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$\forall p \in \mathbb{R} \cap (3/2, -\infty)$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{3}{2}-p\right)\cdot n^{\frac{1}{2}-p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}-p\right)\cdot n^{3/2-p}} = 0$$

$b_n = \sum \frac{1}{n^p}$ $(1<p<3/2)$ yakınsak ve $L=0$

$\hookrightarrow \sum a_n \longrightarrow$ yakınsak

(faktöriyel)

4) Oran Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olsun $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = w$

- $w < 1 \Longrightarrow \sum a_n$ yakınsak
- $w > 1 \Longrightarrow \sum a_n$ ıraksak
- $w = 1 \Longrightarrow$ test sonuç vermez

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1}+5}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2^n(2+5/2^n)}{2^n(1+5/2^n)} = \frac{2}{3}$$

, yakınsaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4 > 1$$

, ıraksaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{99^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{99^n}{n!}} = 0 < 1$$

, yakınsaktır.

5) Kök Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = w$

- $w<1 \Longrightarrow$ yakınsak.
- $w>1 \Longrightarrow$ ıraksak.
- $w=0 \Longrightarrow$ Test sonuç vermez

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

, yakınsaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{3/n}} = 2 > 1$$

, ıraksaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0 < 1$$

, yakınsaktır.

Örnek

Terimleri $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ çift} \end{cases}$ olmak üzere $\sum a_n$

serisi veriliyor. karakteri?

$$\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$$

$$f(n) = \begin{cases} n & ; n \text{ asal} \\ 1 & ; n \text{ asal değil} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{f(n)}{2^n}, \ \sum a_n \ ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

ÖDEV

Alterne Seriler Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

Bir serinin terimlerinin bazıları + bazıları - terimli ise bu serilere değişik işaretli seriler denir.

Eğer bir serinin işaretleri +-+-+-... şeklinde ise bu serilere alterne seriler denir.

Değişik işaretli bir serinin terimlerinin mutlak değerleri alındığında elde edilen seri yakınsak ise böyle serilere mutlak yakınsak denir.

Eğer bir seri yakınsak fakat mutlak yakınsak değilse şartlı yakınsaktır.

Alterne Seriler için Şartlı yakınsaklık testi:

- Alterne Olmalı
- $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
- $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

bunları sağlıyor ve mutlak yakınsak değil ise şartlı yakınsak seridir.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Seriyi mutlak değere alınca pozitif harmonik seri oluyor, ıraksak oluyor. Mutlak yakınsak değildir.

i) Alterne ✓

ii) $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ ✓

iii) $\lim_{n \to \infty} 1/n = 0$ ✓

Şartlı yakınsak

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$ mutlak yakınsak mı? Eğer yakınsaksa değer?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$, mutlak yakınsaktır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$ mutlak yakınsak mı?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$$ yakınsak mı?

$$|\sin n| \leq 1$$

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \longrightarrow \text{yakınsak}$$

yakınsak , mutlak yakınsaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ yakınsak olduğundan mutlak yakınsaktır.

Örnek

p pozitif bir sabit,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$ yakınsaklığı = ?

Bu serinin mutlak değerlerinden oluşan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>1$ için yakınsak olduğundan, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ mutlak yakınsaktır.

$p \leq 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ şartlı yakınsak mı?

i) alterne seri ✓

ii) $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{n^p}$ ✓

iii) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p}$ ✓

şartlı yakınsak

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{2^n}$$ mutlak yakınsak mı, yakınsak ise değeri?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} =$$ yakınsak, mutlak yakınsak

$$-2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = 2 \frac{a}{1-r} = -4/3$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 \cdot (-1)^n}{2^n} = +2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

KUVVET SERİLERİ

$x=0$ etrafındaki Kuvvet Serileri

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$x=a$ etrafındaki Kuvvet Serileri

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \dots$$

$n \in \mathbb{N}$ için $c_n \in \mathbb{R}$ olup serinin katsayılarıdır.

a: Kuvvet serisinin merkezidir.

Kuvvet serisi her yerde ıraksak olsa da burada yakınsaktır.

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$$ hangi aralıkta hangi fonksiyon?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(x-2)}{2}\right)^{n-1}$$

$a=1 \qquad r = -\frac{(x-2)}{2}$

$|r| = \left|-\frac{(x-2)}{2}\right| < 1 \quad , \quad -2 < x-2 < 2$

$\boxed{0 < x < 4}$ için

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{(x-2)}{2}\right)} = \frac{2}{x}$$

Oran Testi ile Kuvvet Serisinin Yakınsaklığı

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$ yakınsaklık aralığı, yakınsaklık merkezi yakınsaklık yarıçapı?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x \cdot \frac{n}{n+1} \right| = |x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

$x=-1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ ıraksak

$x=1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$, şartlı yakınsak.

- $-1 < x \leq 1$ → Yakınsaklık Aralığı
- $x=0$ → Yakınsaklık Merkezi
- $R=1$ → Yakınsaklık Yarıçapı

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x^2 \frac{(2n-1)}{2n+1} \right| = |x^2$$

$|x^2| < 1$, $-1 < x < 1$

- $-1 \leq x \leq 1$ → Yakınsaklık Aralığı
- $x = 0$ → Yakınsaklık Merkezi
- $R = 1$ → Yakınsaklık Yarıçapı

$x = -1$ için,

$$\sum_{n=1}^{x=-1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

$\sum b_n = \sum 1/n$, ıraksak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$, iki şei aynı karakterli yani ıraksak.

Şartlı yakınsak □

$x = 1$ için,

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, yukarıdaki gibi şartlı yakınsaktır.

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$$, tüm x'ler için yakınsaktır.

- $-\infty < x < \infty$
- $I: x=0$
- $R=\infty$

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)\cdot x| = \infty$$

0 hariç her yerde ıraksaktır.

- $x=0$
- $R=0$

Kuvvet Serileri için Yakınsaklık Teoremi

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $x = c \neq 0$ için yakınsak ise

$|x| < |c|$ şartını sağlayan tüm x'ler için mutlak yakınsaktır.

Eğer seri $x = d$ için ıraksak ise $|x| > |d|$ şartını sağlayan x'ler için ıraksaktır.

$\sum c_n (x-a)^n$ serisi için aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir.

1) R pozitif bir sayı; $|x-a| < R$ için yakınsak; $|x-a| < R$ için ıraksak aralığın uçlarında durum değişebilir.
2) Tüm x'ler için yakınsak olabilir. $R = \infty$
3) Yakınsaklık merkezi dışında her yerde ıraksar. $R = 0$

Kuvvet Serilerinde İşlemler

Kuvvet Serilerinin Çarpımı

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x)$, $|x| < R$

ve

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = B(x)$, $|x| < R$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R.$$

$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \ldots \quad b_1 + b_2 x + b_3 x^2 \quad c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \ldots$

$c_0 = a_0 b_0$
$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$
$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$
$\vdots$
$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Örnek

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = ?$$

$1 + x + x^2 + x^3 \ldots \qquad 0 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}$

$a_0 = 1 \qquad b_0 = 0 \qquad c_0 = 0$
$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1 \qquad c_1 = 1$
$a_2 = 1 \qquad b_2 = -1/2 \qquad c_2 = 1/2$
$\vdots \qquad b_3 = 1/3 \qquad c_3 = 5/6$

$$\text{Sonuç} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 \ldots$$

Teorem: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x|<R$ için mutlak yakınsak ise ve f fonksiyonu sürekli ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$, $|f(x)|<R$ için yakınsar.

Teorem: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisi $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahip ise $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ vardır. Bu fonksiyonun her mertebeden türevi vardır.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n (x-a)^{n-1} \quad , \quad a-R<x<a+R$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2} \quad , \quad a-R<x<a+R$$

Teorem: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisi $a-R<x<a+R$ yakınsak ise

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n dx \quad , \quad a-R<x<a+R$$

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + K \right] \quad a-R<x<a+R$$

$\frac{1}{1-x^2}$ $\frac{1}{1+x}$

Örnek

a) $\frac{1}{(1-x)^2}$ b) $\frac{1}{(1-x)^3}$ c) $\ln(1+x)$

fonksiyonlarının kuvvet serisi gösterilimlerini ve yakınsaklık aralıklarını bul.

d) c şıkkında bulduğunuz kuvvet serisini $\ln 2$'yi ifade etmek için kullanabilir miyiz?

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}, \quad -1<x<1$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1} x^n = 1+2x+3x^2+\dots = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1$$

$\to n=1$

$x=-1 \to$ ıraksak
$x=1 \to$ ıraksak

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = 1+2x+3x^2\dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1$$

türev

$$\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)x^{n-2} = 2+6x+12x^2 = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad -1<x<1$$

$$\frac{1}{2}.\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).x^{n-2} = 1+3x+6x^2+\dots = \frac{1}{(1-x)^3} \quad -1<x<1$$

$x=-1 \to$ ıraksak

$x=1 \to$ ıraksak

$f(x)=\ln x+1$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^n) \rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n \cdot x^n \, dx$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

c) $\ln(1+x)$'in türevi $\frac{1}{1+x}$ in kuvvet serisi elde edilir ve bu seri integre edilir ise $\ln(1+x)$ elde edilmiş olur.

$$x \rightarrow -t \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^t = 1-t+t^2-t^3+\dots = \frac{1}{1-(-t)}, \quad |-t|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot t^n = \frac{1}{1+t}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n \cdot t^n \, dt = \int_0^x (1-t+t^2+\dots)\,dt \quad , \quad |t|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^t \frac{t^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^x = \left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\dots\right)\Bigg|_0^x = \ln(1+t)\Bigg|_0^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\dots = \ln|1+x| \quad , \quad -1<x<1$$

$x=-1 \longrightarrow$ ıraksak

$x=1 \longrightarrow$ şartlı yakınsak $\quad , \quad \boxed{-1<x\leq 1}$

d) $\ln 2 = \ln|x+1|$, $1 \in (-1,+1]$ olduğu için

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

Örnek

Arctan x için bir kuvvet serisi bulunuz. Bu seriden yararlanarak $\pi/4$ ifade edilebilir mi?

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1, \quad f(t) = -t^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}, \quad |t|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n . t^{2n} = \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Bigg|_0^x = \arctan t \Bigg|_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x, \quad -1<x<1$$

$x=-1$ için

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ için mutlak y. $\sum b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, ıraksak. şartlı yakınsak

$x=1$, şartlı yakınsak.

$-1 \leq x \leq 1$

$x=1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ toplamını bul ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ yakınsadığı değeri bul.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

türev

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

x ile çarp

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

türev al

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

x ile çarp

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} \quad , \ |x|<1$$

$x = \pm 1$'de ıraksak

$x = \frac{1}{2} \in (-1,+1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$$

Taylor ve Maclourin

f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun.
Bu durumda f tarafından $X=a$ noktasında türetilen Taylor Serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} \cdot (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3$$

$a=0$ için Maclourin.

- e^x $x=0$'da taylor formülü?

$f(x)=e^x$ $\quad f(0)=1$

$f'(x)=e^x$ $\quad f''(0)=1$

$f''(x)=e^x$ $\quad f'''(0)=1$

$\vdots$

$f^n(x)=e^x$ $\quad f^n(0)=1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

- $\cos x$ $x=0$'da taylor?

$f(x)=\cos x$ $\quad f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x$ $\quad f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x$ $\quad f''(0)=-1$

$f^3(x)=\sin x$ $\quad f^3(0)=0$

$f^4(x)=\cos x$ $\quad f^4(0)=1$

$f^5(x)=-\sin x$ $\quad f^5(0)=0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

- $\sin x$ $x=0$'da taylor.

$f(x)=\sin x$ $\quad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x$ $\quad f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x$ $\quad f''(0)=0$

$f^3(x)=-\cos x$ $\quad f'''(0)=-1$

$f^4=\sin x$ $\quad f^4(0)=0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Örnek

$f(x) = 1/x$ $x=2$ noktasında taylor serisini bul. Bu seri hangi x'ler için $1/x$'e yakınsar?

$f(x) = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$f'''(x) = -6x^{-4}$

$$f^{n}(x) = (-1)^{n} \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$f^{n}(2) = (-1)^{n} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}}$$

$f(2) = 1/2$

$f'(2) = -1/4$

$f''(2) = 1/4$

$f'''(2) = -3/8$

$f^{4}(2) = 3/4$

$$\frac{1}{x} = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(2)}{k!}(x-2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^k \cdot k!}{2^{k+1}}}{k!} \cdot (x-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^k}{2^{k+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (x-2)^k}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-(x-2)}{2}\right)^{k-1}$$

$a = \frac{1}{2}$ $r = \frac{2-x}{2}$ $|r| < 1 \rightarrow \left|\frac{2-x}{2}\right| < 1$

$\rightarrow \boxed{0 < x < 4}$

Taylor Serisinin Yakınsaklığı

Taylor Teoremi

Eğer f ve ilk n türevi a ile b arasında kapalı aralıkta sürekli, f^n a ile b arasında türevlenebilir ise a ile b arasında

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^n_a (b-a)^n}{n!} + \frac{f^{n+1}(c).(b-a)^{n+1}}{n+1}$$

olacak şekilde $c \in (a,b)$ vardır.

Taylor Formülü

Eğer f fonksiyonunun a'yı içeren bir I açık aralığında tüm mertebeden türevleri varsa

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

sağlanır.

$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} . (x-a)^{n+1}$ olup $c \in (a,x)$ dir.

$\forall x \in I$ için $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ise $x=a$ da üretilen taylor serisi I aralığında f'e yakınsar.

$e^x \cdot \cos x$?

Örnek

$\lim_{x \to \infty}$ $\quad \sin x = \frac{\tan x}{x^3}$

$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad \Big| \; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$

$= \tan x$

Örnek

$\sin 35° = ?$

$x = \frac{\pi}{6}$

$f(x) = \sin x$	$f(\pi/6) = 1/2$
$f'(x) = \cos x$	$f'(\pi/6) = \sqrt{3}/2$
$f^2(x) = -\sin x$	$f^2(\pi/6) = -1/2$
$f^3(x) = -\cos x$	$f^3(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots$$

$$\sin 35° = \sin \frac{7\pi}{36} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7\pi}{36} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2!} \cdot \left(\frac{7\pi}{36} - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!}\left(\frac{7\pi}{36} - \frac{\pi}{6}\right)^3 \cdots$$

Parametrik Denklemler
VE
Kutupsal Koordinatlar

PARAMETRİK DENKLEMLER

Düzlem Eğrilerinin Parametrize Edilmesi

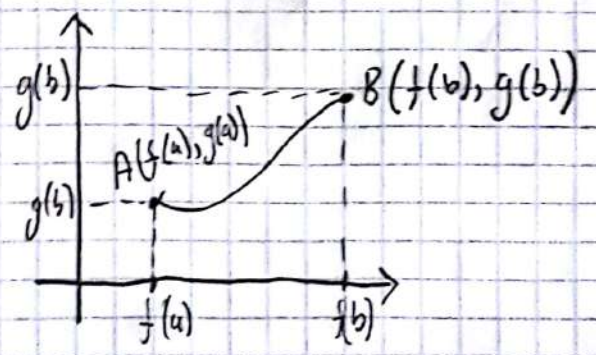
Tanım Eğer x ve y t değişeninin I aralığında $x=f(t)$, $y=g(t)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonları ise, o zaman bu denklemlerle tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir.

$$\left.\begin{array}{l} x=f(t) \\ y=g(t) \end{array}\right\}$$ parametrik denklemler ile verilen eğri

$a \leq t \leq b$ için

$t=a$ için $$\left.\begin{array}{l} x=f(a) \\ y=g(a) \end{array}\right\} A(f(a),g(a))$$

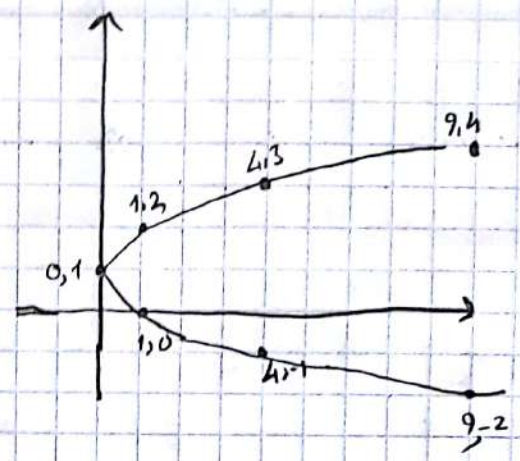
$t=b$ için $$\left.\begin{array}{l} x=f(b) \\ y=g(b) \end{array}\right\} B(f(b),g(b))$$



Örnek

$x = t^2$, $y = t + 1$, $-\infty < t < \infty$ eğrisini çiziniz.

t	x	y	
-3	9	-2	(9,-2)
-2	4	-1	(4,-1)
-1	1	0	(1,0)
0	0	1	(0,1)
1	1	2	(1,2)
2	4	3	(4,3)
3	9	4	(9,4)



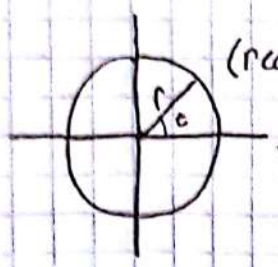
$t = y - 1$

$x = t^2$

$x = (y-1)^2$

---

r yarıçaplı çemberin parametrizasyonu



$(r\cos t, r\sin t)$

$x = r.\cos t$

$y = r.\sin t$

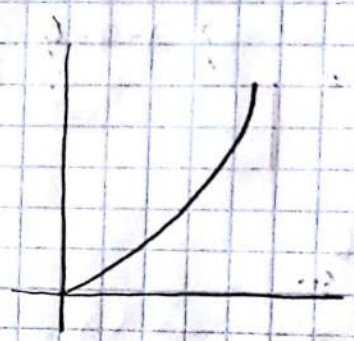
Örnek

xy düzleminde hareket eden parçacığın P(x, y) konumu

$x = \sqrt{t}$
$y = t$, $t \geq 0$ ile verilmiştir.

parçacığın yolu ve hareketi?

t	x	y	
0	0	0	(0,0)
1	1	1	(1,1)
4	2	4	(2,4)
9	3	9	(3,9)
16	4	16	(4,16)

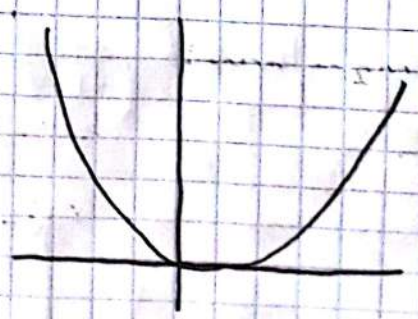


$x = \sqrt{y}$

Örnek

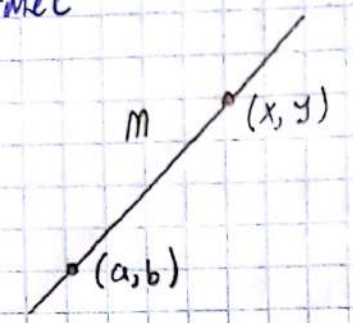
$x = t \quad y = t^2$

t	x	y
-2	-2	4
-1	-1	1
0	0	0
1	1	1
2	2	4



$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \end{array}\right\} \boxed{y = x^2}$

(a,b) noktasından geçen ve eğimi m olan doğruyu parametrize etmek



$$\frac{y-b}{x-a}=m \qquad y=m(x-a)+b$$

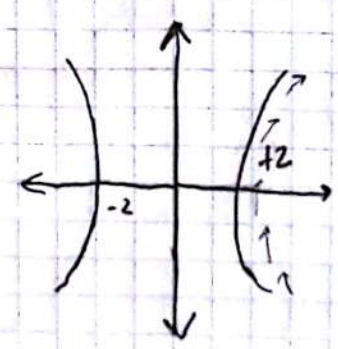
$$x-a=t$$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=a+t \\ y&=mt+b \end{aligned}}$$

Örnek

$x=t+\frac{1}{t}$, $y=t-\frac{1}{t}$ $t>0$ ile parametrize edilen $P(x,y)$ noktasının hareket ettiği yolu bulunuz.

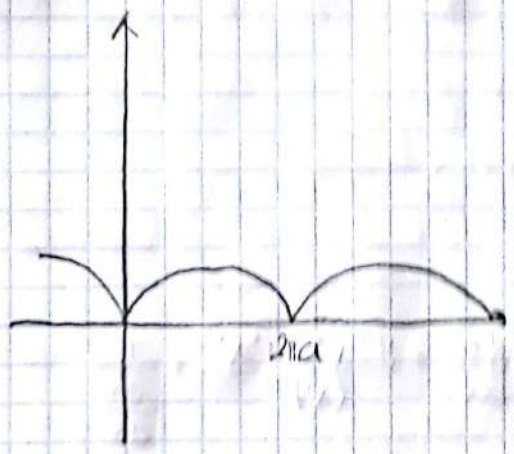
$$\boxed{\begin{aligned} x+y&=2t \\ x-y&=\frac{2}{t} \\ x^2-y^2&=4 \end{aligned}}$$



BAZI ÖZEL PARAMETRİK EĞRİLER

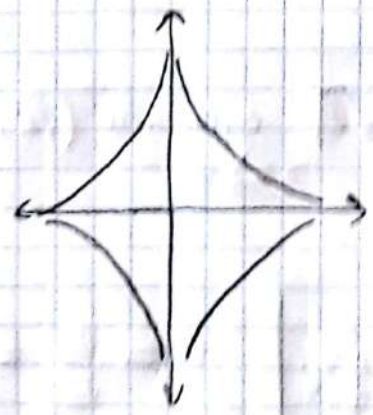
1) Sikloid Eğrisi

Bir a yarıçaplı çember çevresindeki noktanın ötelenme hareketiyle geçtiği yolu gösteren eğri.



$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

2) Astroid Eğrisi



$$x = \cos^3 t$$
$$y = \sin^3 t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

PARAMETRİK EĞRİLERLE HESAPLAMA

Teğetler ve Ekler:

Eğer f ve g fonksiyonları t noktasında türevlenebilir ise $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ parametrik eğrisi de t noktasında türevlenebilir.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y^{\cdot}}{x^{\cdot}}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y^{\cdot}}{x^{\cdot}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y^{\cdot}}{x^{\cdot}}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{y^{\cdot\cdot}x^{\cdot} - y^{\cdot}x^{\cdot\cdot}}{(x^{\cdot})^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{y^{\cdot\cdot}x^{\cdot} - y^{\cdot}x^{\cdot\cdot}}{(x^{\cdot})^3}$$

Örnek

$x=\sec t$ $y=\tan t$; $(-\pi/2 < t < \pi/2)$ eğrisinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktasındaki değeri?

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{2},1)} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{(\sqrt{2},1)} = \left.\frac{1+\tan^2 t}{\sec t \cdot \tan t}\right|_{t=\pi/4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2} = \sec t \\ 1 = \tan t\end{array}\right\} \pi/4$$

Örnek

$x = t - t^2$

$y = t - t^3$

$\frac{d^2y}{dx}$; t cinsinden hesapla.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

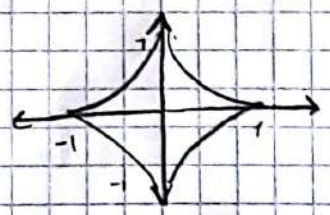
$$= \frac{-6t\,(1-2t)-(1-3t^2)\cdot 2}{(1-2t)^2} = \frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

Örnek

$x = \cos^3 t$

$y = \sin^3 t$

$0 \le t \le 2\pi$



$$A = 4\cdot\int_0^1 y\cdot dx = -12\int_{\pi/2}^{0} \sin^4 t\cdot\cos^2 t = 12\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

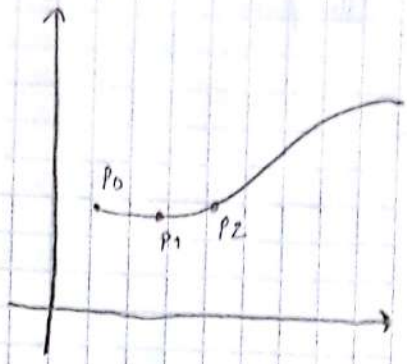
$x = \cos^3 t$

$dx = -3\cos^2 t.\sin t\,dt$

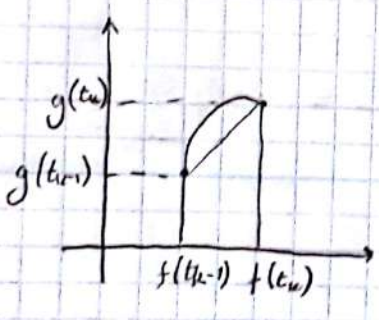
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t)\,dt$$

$x=0$	$t=\pi/2$
$x=1$	$t=0$

Eğrinin Uzunluğu :



C: $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ $a\le t\le b$ parametrik denklemleri ile verilmiş bir eğri olsun. f ve g $[a,b]$ aralığında sürekli, türevlenebilir olsun. Ayrıca $f'(t)$ ve $g'(t)$ aynı anda sıfır değil. Bu eğriyi $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$ şeklinde n alt aralığa bölelim.



$$L_k=\sqrt{\left[\frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right]^2+\left[\frac{g(t_k)-g(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right]^2}\cdot\Delta t_k$$

$$L_k=\sqrt{f'(t_k^*)+g'(t_k^{**})}\;\Delta t\quad,\quad t_k^*,\,t_k^{**}\in(t_{k-1},t_k)$$

$$\lim_{\|P\|\to 0}L_k=\int_a^b\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt=L=\frac{ds}{dt}$$

$\hookrightarrow$ $a\le t\le b$ için uzunluk

Örnek

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

eğrisinin yay uzunluğu?

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} r\, dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r \text{ br}$$

Örnek

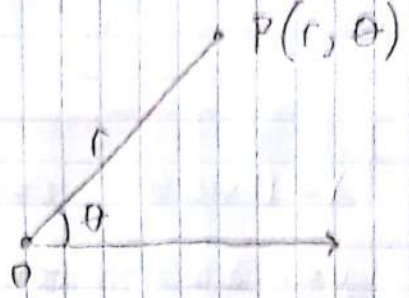
$$\left.\begin{array}{l} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi$$ eğrisinin yay uzunluğu?

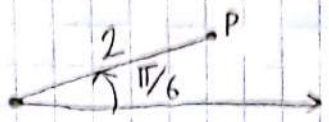
$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t \qquad \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t . \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t) . 9\cos^4 t . 9\sin^4 t}\, dt$$

$$L = 4 . \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t\, dt = 12 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{2}\, dt = -3\frac{\cos 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = +6 \text{ br}$$

KUTUPSAL KOORDİNATLAR





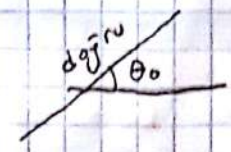
$P(2, -11\pi/6)$ $P(2, \pi/6)$

$P(-2, 7\pi/6)$ $P(-2, -5\pi/6)$

$$\left.\begin{array}{l} P(2, \pi/6 + 2\pi n) \\ P(-2, -5\pi/6 + 2\pi n) \end{array}\right\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

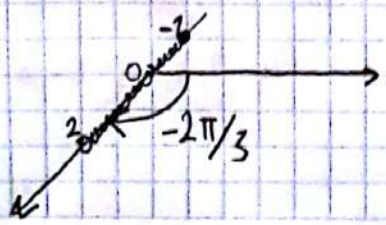
$$\left.\begin{array}{l} r = a \\ \vee \\ r = -a \end{array}\right\}$$ a yarıçaplı O merkezli çember.

$$\left.\theta = \theta_0\right\}$$

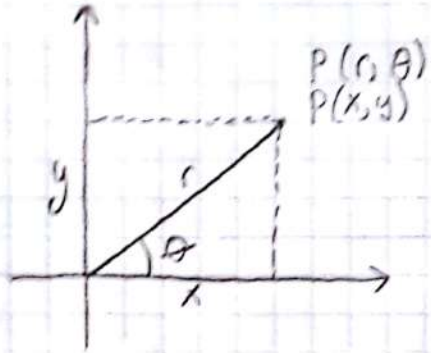


Örnek

Kutupsal koordinatı $\theta = -2\pi/3$ ve $-1 \leq r < 2$ şartlarını sağlayan nokta kümesinin grafiğini çiz.



Kutupsal Koordinatlar İle Kartezyen Koordinatlar Arasındaki İlişki:



$x = r.\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = r.\sin\theta$	$\theta = \arctan\frac{y}{x}$

Örnek

Aşağıdaki kutupsal denklemleri kartezyene dönüştür.

1) $r\cos\theta = 2 \longrightarrow x = 2$

2) $r^2\cos\theta.\sin\theta = 4 \longrightarrow x.y = 4$

3) $r^2.\cos^2\theta - r^2.\sin^2\theta = 1 \longrightarrow x^2 - y^2 = 1$

4) $r = 1 + 2r\cos\theta \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 + 2x$

5) $r = 1 - \cos\theta \longrightarrow x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} - x$

Örnek

$r = 4\cos\theta$

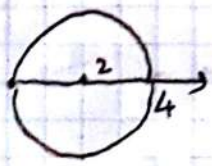
$r^2 = 4r\cos\theta$

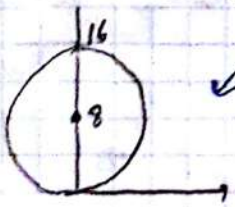
$x^2+y^2 = 4x$

$x^2 - 4x + y^2 = 0$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$

$m(2,0)$; $r = 2$





$r = 16\sin\theta$

$r^2 = 16r\sin\theta$

$x^2+y^2 = 16y$

$x^2+y^2-16y = 0$

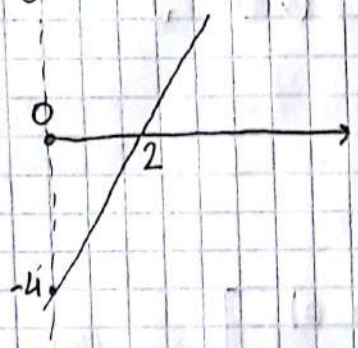
$x^2 + (y-8)^2 = 8^2$

$m(0,8)$; $r = 8$

$$r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$$

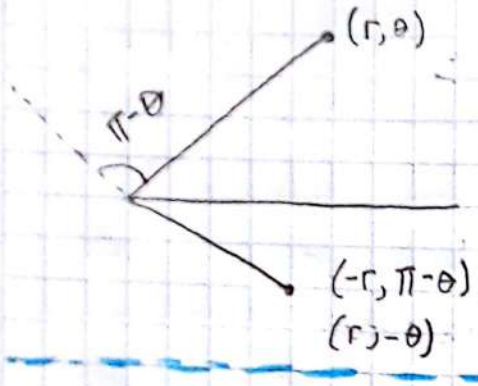
$$2r\cos\theta - r\sin\theta = 4$$

$$2x - y = 4$$

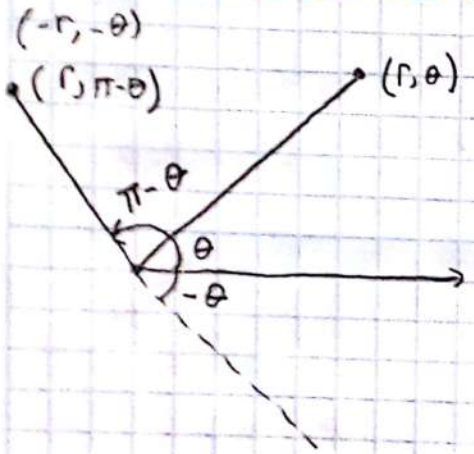


Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi

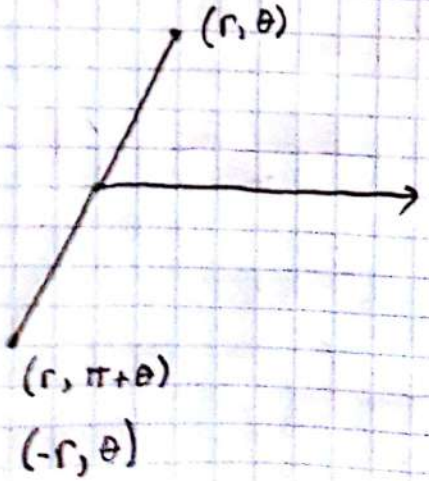
Simetri



$$\left.\begin{array}{c} r = f(\theta) = -f(\pi-\theta) \\ \text{veya} \\ r = f(\theta) = -f(-\theta) \end{array}\right\}$$ grafik x eksenine göre simetrik



$$\left.\begin{array}{c} r = f(\theta) = f(\pi-\theta) \\ \text{veya} \\ r = f(\theta) = -f(-\theta) \end{array}\right\}$$ grafik y eksenine göre simetrik



$$\left.\begin{array}{c} r = f(\theta) = f(\pi+\theta) \\ r = -r = f(\theta) \end{array}\right\}$$ grafik orijine göre simetrik

$r = f(\theta)$ Kutupsal Eğrisinin Eğimi

$$r = f(\theta)$$
$$x = r \cdot \cos\theta$$
$$y = r \cdot \sin\theta$$
$$x = f(\theta) \cdot \cos\theta$$
$$y = f(\theta) \cdot \sin\theta$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(?,?)} = \left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right]_{\theta=\theta_0}$$

$$= \left.\frac{f'(\theta) \cdot \sin\theta + f(\theta) \cdot \cos\theta}{f'(\theta) \cdot \cos\theta - f(\theta) \cdot \sin\theta}\right]_{\theta=\theta_0}$$

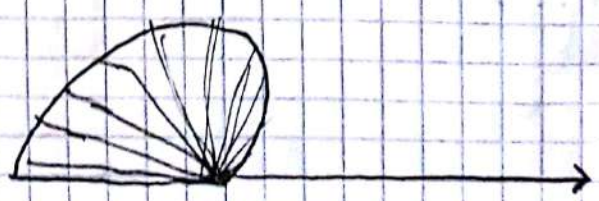
$$\boxed{m = \frac{f'(\theta_0) \cdot \sin\theta_0 + f(\theta_0) \cdot \cos\theta_0}{f'(\theta_0) \cdot \cos\theta_0 - f'(\theta_0) \sin\theta_0}}$$

Örnek

$r = a(1 - \cos\theta)$; (a sabit) eğrisini çiz

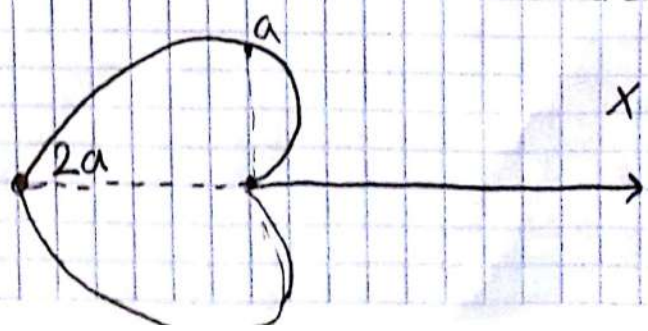
$f(\theta) = f(-\theta) \longrightarrow$ X ekseline göre simetrik

θ	r
0	0
$\pi/3$	$a/2$
$\pi/2$	a
$2\pi/3$	$3a/2$
π	$2a$



Çizim $[0, 2\pi]$ arası yapılır

X eks. simetri alınır



ÖDEV

$r = a(1 + \cos\theta)$

Örnek

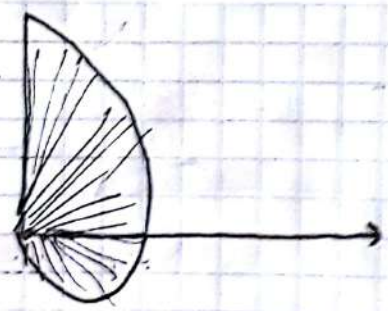
$r = a(1 + \sin\theta)$; a sabit

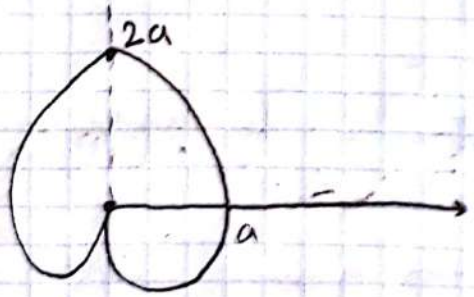
$f(\theta) = -f(-\theta) \longrightarrow$ y eksenine göre simetrik

θ	r
$-\pi/2$	0
$-\pi/6$	$a/2$
0	a
$\pi/6$	$3a/2$
$\pi/2$	$2a$

Çizim $[-\pi/2, \pi/2]$ arası yapılır

y eks. simetri alınır



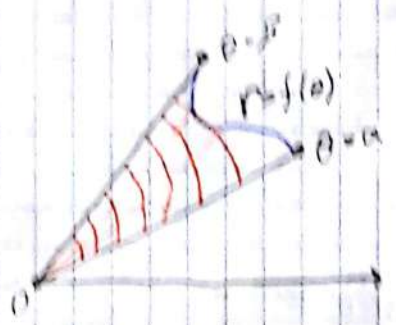


ödev

$r = a(1 - \sin\theta)$

Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar

Alan



$\theta=\alpha$ ile $\theta=\beta$ ışınları ve $r=f(\theta)$ eğrisi ile sınırlı bölgeyi n tane dairesel kesite bölelim.

2π açı $\longrightarrow \pi r_k^2$

$\Delta\theta_k$ açı $\longrightarrow A_k = ?$

$$A_k = \frac{\pi r_k^2 \cdot \Delta\theta_k}{2\pi} = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k$$

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k = \boxed{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta}$$

Örnek: $r = 2(1+\cos\theta)$ Kardoidin alanı

$f(\theta) = f(-\theta) \mapsto$ y eksenine göre simetrik

$[0, 2\pi]$

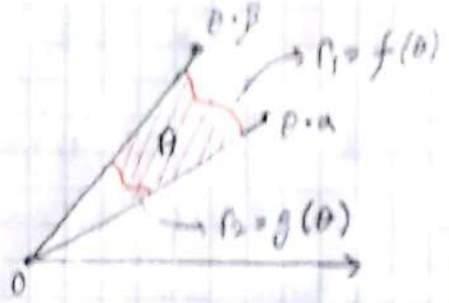
θ	r
0	4
$\pi/3$	3
$\pi/2$	2
$2\pi/3$	1
π	0

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [2(1+\cos\theta)]^2 \, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left(1 + \cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$A = 4\left(\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big]_0^{\pi} = 6\pi \text{ br}^2$$

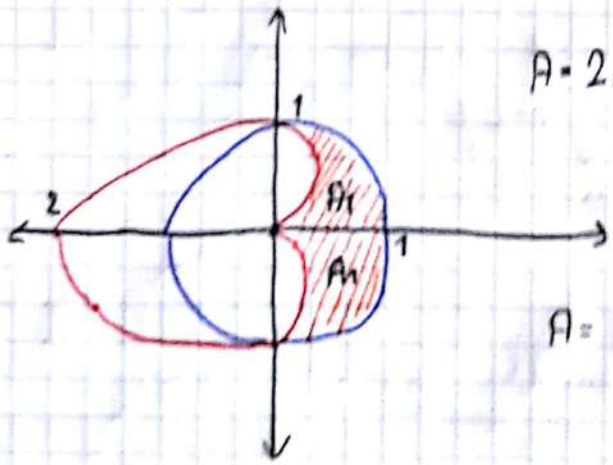
İki Eğri ile Sınırlı Bölge için Alan



$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\theta)\,d\theta}$$

Örnek

$r=1$ çemberinin içinde $r=1-\cos\theta$ Kardiodinin dışında kalan bölgenin alanı?



$$A = 2A_1 = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [1-\cos\theta]^2\,d\theta\right]$$

$$A = 2 - \frac{\pi}{4}\ br^2$$

Kutupsal Eğrinin Uzunluğu

$r = f(\theta)$ eğrisinin $\alpha \leq \theta \leq \beta$ arasındaki yay uzunluğu.

$x = r\cos\theta = f(\theta) \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \sin\theta = f(\theta) \cdot \sin\theta$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(f'(\theta) \cdot \cos\theta - f(\theta)\sin\theta\right)^2 + \left(f'(\theta)\sin\theta + f(\theta) \cdot \cos\theta\right)^2}\, d\theta$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

Örnek

$r = 1 - \cos\theta$ Kardoidinin uzunluğu=?

$r = 1 - \cos\theta$

$\frac{dr}{d\theta} = \sin\theta$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$

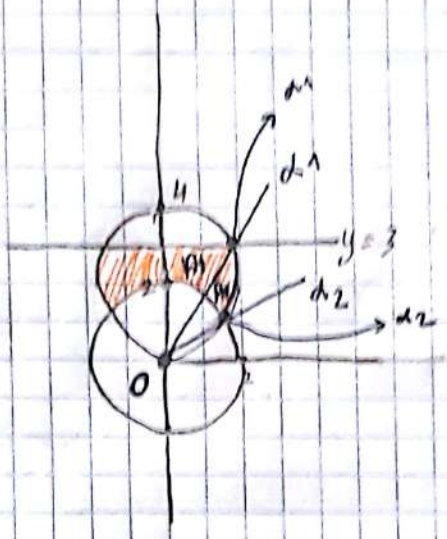
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\, d\theta$$

$\longrightarrow 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(1 - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta = 2 \cdot \int_0^{\pi} 2 \cdot \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8 \text{ br}$$

Örnek

$r=2$, $r=4\sin\theta$, $r\sin\theta=3$ ile sınırlı bölgenin alanını veren integral=?



$r=4\sin\theta$

$r^2=4r\sin\theta$

$\sqrt{x^2+y^2}=4y$

$x^2+(y-2)^2=4$

$M(0,2)$; $r=2$

$r\sin\theta=3$

$\downarrow$

$y=3$

$$A=2(A_1+A_2)=2A_1+2A_2$$

$$\left.\begin{array}{l} r=2 \\ r=4\sin\theta \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2=4\sin\theta \\ \sin\theta=1/2 \end{array} \Rightarrow \theta=\pi/6$$

$$\left.\begin{array}{l} r\sin\theta=3 \\ r=4\sin\theta \end{array}\right\} \quad 4\sin^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$r\sin\theta=3$

$r=3/\sin\theta$

$$A=2\left[\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}(4\sin\theta)^2d\theta-\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}2^2d\theta\right]+2\left[\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\frac{3}{\sin\theta}\right)^2d\theta-\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}2^2d\theta\right]$$

Vektörler
VE
Uzay Geometrisi

Skaler Çarpım

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \cos\theta$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektörel Çarpım

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \sin\theta$

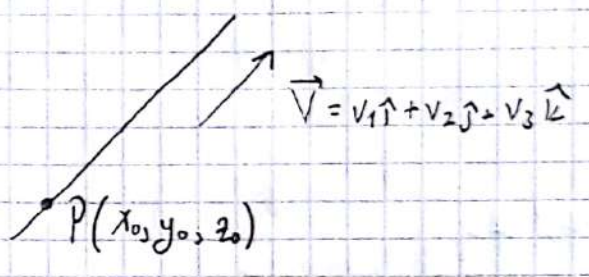
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

-UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM-

Doğrular

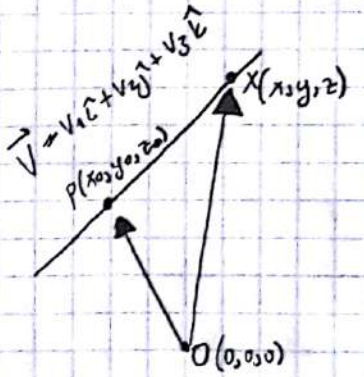


$$\left[(x-x_0)\hat{i} + (y-y_0)\hat{j} + (z-z_0)\hat{k}\right] = t.\left[v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}\right]$$

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \longrightarrow$$ Doğrunun simetrik denklemi

// -Kanonik //

$$\left.\begin{aligned} x &= v_1 t + x_0 \\ y &= v_2 t + y_0 \\ z &= v_3 t + z_0 \end{aligned}\right\}$$ Doğrunun parametrik denklemi.



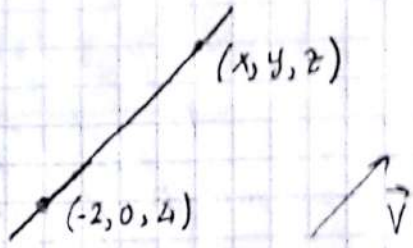
$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} + t.\vec{V}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t.\vec{V}$$

Örnek

$(-2, 0, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi?



$$(x+2)\hat{i} + y\hat{j} + (z-4)\hat{k} = t(2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-4}{-2} = t$$

$x = 2t - 2$

$y = 4t$

$z = -2t$

$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = -2\hat{i} + 4\hat{k} + t\vec{v}$

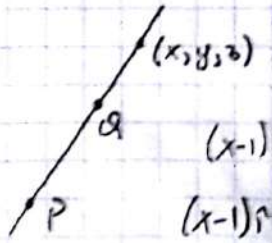
$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

Örnek

$P(-3, 2, -3)$ $Q(1, -1, 4)$ nok. veriliyor.

a) P, Q'dan geçen doğru denklemi?

b) $\overline{PQ}$ doğru parçasını parametrize et



$(x-1)\hat{i} + (y+1)\hat{j} + (z-4)\hat{k} \,//\, (1-(-3))\hat{i} + (-1-2)\hat{j} + (4+3)\hat{k}$

$(x-1)\hat{i} + (y+1)\hat{j} + (z-4)\hat{k} = t(4\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{7} = t$$

$x = 4t + 1$

$y = -3t - 1$

$z = 7t + 4$

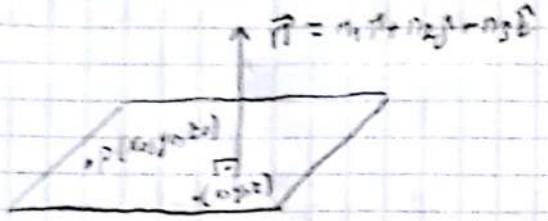
b)

$P(-3, 2, -3) \rightsquigarrow -3 = 4t + 1,\ 2 = 3t - 1,\ -3 = 7t + 4$ $\quad t = -1$

$Q(1, -1, 4) \rightsquigarrow 1 = 4t + 1,\ -1 = 3t - 1,\ 4 = 7t + 4$ $\quad t = 0$

$\longrightarrow -1 \leq t \leq 0$

Düzlem



$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen $\vec{n}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi:

$$(x-x_0)\hat{i} + (y-y_0)\hat{j} + (z-z_0)\hat{k} \perp n_1\hat{i} + n_2\hat{j} + n_3\hat{k}$$

$$\boxed{n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0}$$

- $3x - 2y + z - 7 = 0 \longrightarrow \vec{n} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$
- $5x - 3y + 9 = 0 \longrightarrow \vec{n} = 5\hat{i} - 3\hat{j}$
- $y - 21 = 0 \longrightarrow \vec{n} = \hat{j}$

Örnek: $P(-3, 0, 7)$ nok. geçen $\vec{n} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ vektörüne dik olan düzlem denklemi?

$$(x+3)\hat{i} + y\hat{j} + (z-7)\hat{k} \perp \vec{n}$$

$$5(x+3) + 2y - (z-7) = 0$$

$$5x + 2y - z + 22 = 0$$

Örnek

$A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$

noktasından geçen düzlem?

$\vec{AB} = (2,0,-1)$

$\vec{AC} = (0,3,-1)$

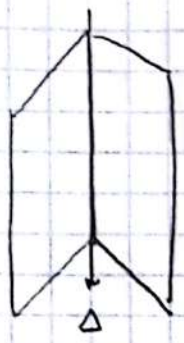
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

$(x-0)\hat{i} + (y-0)\hat{j} + (z-1)\hat{k} \perp \vec{n}$

$$\boxed{3x + 2y + 6z - 6 = 0}$$

Kesişim Doğruları

Paralel olmayan iki düzlem bir doğru boyunca kesişir.



$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$\vec{n}_{P_1}: a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} = 0$

$\vec{n}_{P_2}: a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k} = 0$

$\vec{\Delta}: \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

Örnek

$3x - 6y - 6z = 15$ ve $2x + y - 2z = 5$

düzlemlerinin kesişim doğrusunun

a) doğrultusuna paralel bir vektör

b) kesişim doğrusunun parametrik denklemi

$n_1 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 6\hat{k}$

a) $n_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = 18\hat{i} - 6\hat{j} + 15\hat{k}$

$z = 0$ keyfi değer için

b) $x = 3,\ y = -1,\ z = 0$: $P(3, -1, 0)$

$\vec{V} = 18\hat{i} - 6\hat{j} + 15\hat{k}$

$(x-3)\hat{i} + (y+1)\hat{j} + z\hat{k} \,//\, t.\vec{V}$

$\frac{x-3}{18} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z}{15} = t$

$x = 18t + 3$

$y = -6t - 1$

$z = 15t$

Örnek

$x = 8/3 + 2t \quad y = -2t \quad z = 1+t$ doğrusunun

$3x+2y+6z=6$ düzlemi ile kesiştiği noktanın koord. bul.

$3x+2y+6z=6$

$3(8/3 + 2t) + 2(-2t) + 6(1+t) = 6$

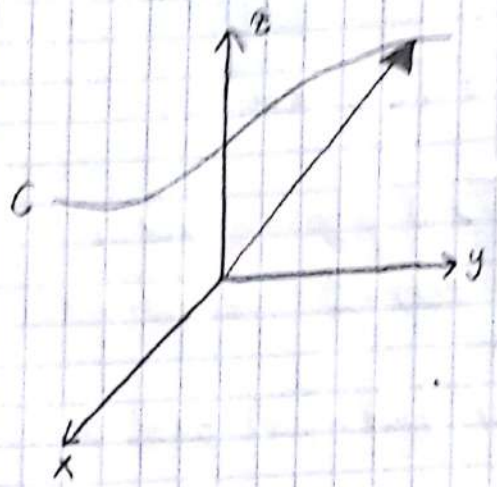
$\boxed{t=-1}$

$x = 8/3 + 2t \qquad x = 2/3$

$y = -2t \qquad y = 2$

$z = 1+t \qquad z = 0$

Vektör Değerli Fonksiyonlar
Ve
Uzayda Hareket



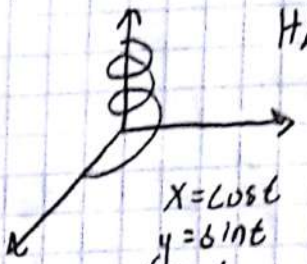
$(C): x = f(t)\ ,\ y = g(t)\ ,\ z = h(t)$

C eğrisinin vektörel denklemi

$\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$

Bu vektörel denklem C eğrisi boyunca hareket eden bir parcacığın yolunu temsil eder.

HELİS



$x = \cos t$
$y = \sin t$
$z = t$

Limitler ve Süreklilik

$\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$, D tanım bölgeli vektör değerli bir fonksiyon ve L bir vektör olsun

Eğer $\varepsilon > 0$ için $t \in D$ değerlerinde $|t - t_0| < \varepsilon$'ken

$|\vec{r}(t) - \vec{L}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $t \to t_0$ iken $\vec{r}(t) \to L$'dir. $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$ ile gösterilir.

Eğer $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ise $\vec{r}(t)$ vektör fonksiyonu $t = t_0$'da süreklidir.

Örnek

$$\lim_{t \to \pi/4} \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} + t.\hat{k} = ?$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} + \frac{\pi}{4}\hat{k}$$

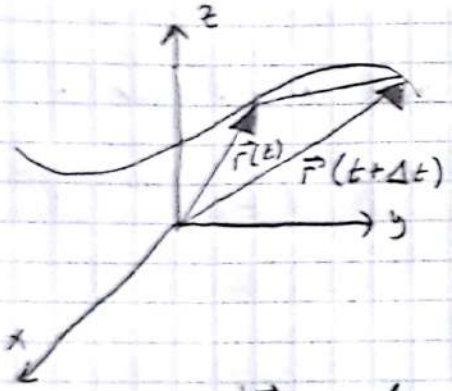
Örnek

$\vec{r}(t) = \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} + \lfloor t \rfloor\,\hat{k}$ sürekli midir?

$\downarrow$

sürekli değil

Türevler ve Hareket



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\left(\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right) \hat{i} + \left(\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right) \hat{j} + \left(\frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right) \hat{k} \right]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df}{dt}\hat{i} + \frac{dg}{dt}\hat{j} + \frac{dh}{dt}\hat{k}$$

Eğer f, g, h fonksiyonları t'de türevlere sahip ise $\vec{r}(t)$ fonksiyonu t'de diferansiyellenebilir.

Eğer $\frac{d\vec{r}}{dt}$ sürekli ve asla 0 olmuyor ise, $\vec{r}(t)$ tarafından tanımlanan eğri düzgün eğridir. Sonlu sayıda düzgün eğri parçaları ile sürekli olarak şekilde elde edilen eğri parçalı sürekli eğridir.

Örnek: $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\hat{i} + 2\sin t\,\hat{j} + 5\cos^2 t\,\hat{k}$

Bir uzay Eğrisi Boyunca Yay Uzunluğu

$\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$ vektörel denklemi ile verilen bir eğrinin $t=t_1$'den $t=t_2$'ye kadar olan yay uzunluğu

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot dt = \int_{0}^{t_2} |\vec{v}(t)|\, dt$$

Yay Uzunluğu Parametresi

$$S = \int_{0}^{t} |\vec{v}|\, dt = |\vec{v}|\, t$$

$$S = |\vec{v}|\, t$$

Teğet Birim Vektör

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

D'nin $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ gibi n tane reel sayıdan oluşan bir küme olduğunu varsayalım. D üzerinde bir reel değerli f fonksiyonu D'deki her elemana bir $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ değeri karşılık getirir.

D: Fonksiyonun tanım kümesi

W: Fonksiyonun değer kümesi

- $z = \sqrt{y - x^2}$

$y - x^2 \geq 0$

$y \geq x^2$

$D = y - x^2 \geq 0$

$W = [0, \infty)$

- $z = 1/x.y$

$D = x.y \neq 0$

$W = (-\infty, 0] \cup (0, \infty)$

- $W = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$

$D = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (0, 0, 0)$

$W = (0, \infty)$

- $z = \sin(x.y)$

$D = (-\infty, \infty)$

$W = [-1, 1]$

- $W = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$D = (-\infty, \infty)$

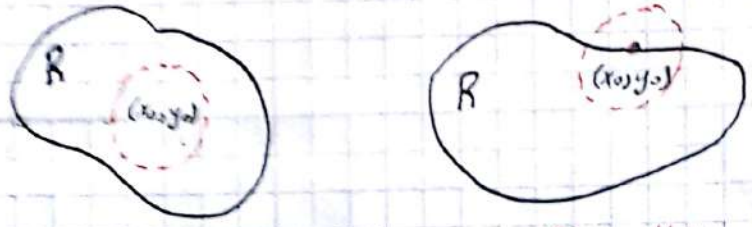
$W = [0, \infty)$

- $W = x.y.\ln z$

$D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \cup z \in \mathbb{R}^{>0}$

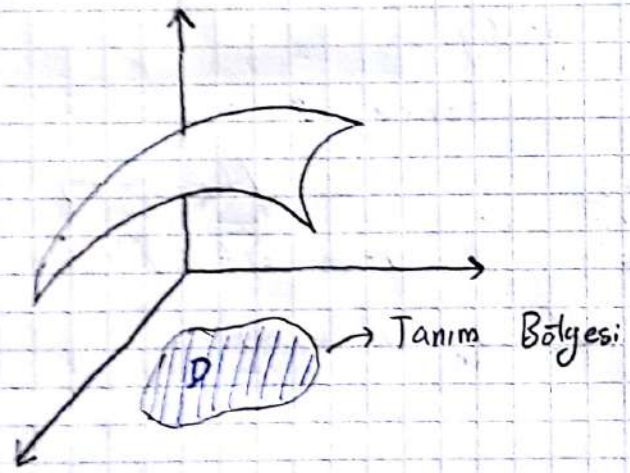
$W = (-\infty, \infty)$

İç Nokta: Eğer (x_0, y_0) noktası civarı ile birlikte bir R bölgesi içinde kalıyor ise iç noktadır. Aksi halde sınır noktadır.



İç Nokta Sınır Nokta

Eğer bir bölge tamamen iç noktalardan oluşuyor ise açık bölge tüm sınır noktalarını da içeriyor ise kapalı bölgedir.



İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri / Seviye Eğrileri / Kontur Eğrisi

Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun değerlerini resmetmenin 2 yolu vardır. Ya yüzeyi çizebiliriz ya da tanım bölgesindeki eğrileri çizerek isimlendirebiliriz.

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu düzlemdeki noktaların kümesine seviye eğrisi denir.

Örnek

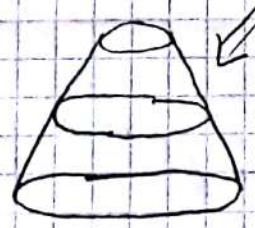
$f(x,y)=100-x^2-y^2$ eğrisinin grafiğini çiz.

$f(x,y)=0$, $f(x,y)=51$, $f(x,y)=75$ seviye eğrileri?

$f(x,y)=0 \Rightarrow 100=x^2+y^2$, $10^2=x^2+y^2$

$f(x,y)=51 \Rightarrow 100-51=x^2+y^2$, $7^2=x^2+y^2$

$f(x,y)=75 \Rightarrow 100-75=x^2+y^2$, $5^2=x^2+y^2$



Kontür eğrisi

3 Değişkenli Fonksiyonlar

$f(x,y,z)=c$ ile seviye yüzeyleri ifade ediliro

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Longrightarrow$ Küre

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Longrightarrow$ Elipsoid

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c} \Longrightarrow$ Hiperbolik Parabloid

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \Longrightarrow$ Eliptik Parabloid

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Longrightarrow$ Kanatlı Hiperboloid

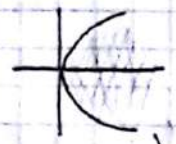
$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Longrightarrow$ İki Kanatlı Hiperboloid

Örnek

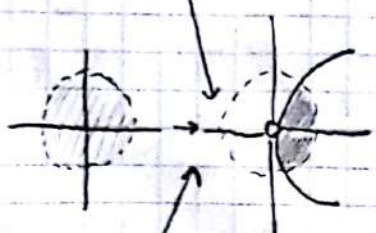
$$z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

tanım bölgesini bul ve çiz.

$4x-y^2 \geq 0 \longrightarrow$



$1-x^2-y^2>0 \longrightarrow$



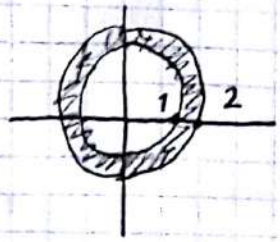
$1-x^2-y^2 \neq 1$

Örnek

$$z=\overbrace{\arcsin\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)}^{m}+\overbrace{\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)}^{n}$$

$\sin m=(x^2+y^2)/4$ $\qquad$ $\sec n = x^2+y^2$

$-4 \leq x^2+y^2 \leq 4$ $\qquad$ $-x^2-y^2 \leq 1 \leq x^2+y^2$



İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık, f'nin tanım kümesindeki her (x,y) noktası için $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ olduğu her yerde $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse (x,y) noktası (x_0,y_0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L limitine yaklaşıyor denir ve

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

veya

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L$$ ile gösterilir.

Örnek

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2 - xy}{2x+y} = \frac{3}{4}$$

Örnek

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0$$

Örnek

$f(x,y) = y/x$ ise $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$ limiti mevcut mudur?

(0,0)'dan geçen doğruların denklemi $y=mx$ olsun

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y/x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} mx/x = m$$

- Limit değeri (0,0)'a yaklaşan doğrunun eğimine bağlıdır. Yol değiştirdiğinde değer değişir. Oysa limit varsa tektir. Yani bu durumda limit yoktur. Limit değeri m'ye bağlı olmayıp bir sayı olsaydı yine de limit var diyemezdik.

Örnek

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$ olduğunu ispatlayınız.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ iken $\left| \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$

$y^2 < x^2+y^2$

$4|x|y^2 < 4|x|\,(x^2+y^2)$

$\dfrac{4|x|y^2}{x^2+y^2} < 4|x| = 4\sqrt{x^2} < 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta$

$4\delta = \varepsilon$ olarak seçilebilir.

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$

İki Kat Limit (Ardışık Limit)

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ limitini hesaplarken

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] \quad , \quad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]$$

limitlerinin değerleri birbirine eşitse ardışık limit vardır denir.

- Ancak bu limitin varoldugu anlamına gelmez.
- Eğer iki katlı limit yoksa limit yoktur.

Örnek

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y.\sin\pi x}{x+y-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1}\frac{y.\sin\pi x}{x+y-2}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1} = -\pi$$

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1}\frac{y.\sin\pi x}{x+y-2}\right] = \lim_{y\to 1}\frac{0}{y-1} = 0$$

$-\pi \neq$ olduğundan iki kat limit yoktur ve bu yüzden limit yoktur.

Örnek

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{x+y}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2x-y}{x+y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2x-y}{x+y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$$

limit yoktur.

Süreklilik

Eğer

- $f(x_0,y_0)$ tanımlı
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ limiti mevcut
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ise $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0,y_0)'da süreklidir.

Eğer bir fonksiyon tanım kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyon süreklidir.

Örnek

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

- $(x,y) \neq (0,0)$ için

Fonksiyon $(0,0)$ noktası hariç her yerde tanımlı ve her noktada limite sahip ve bu limit değeri o noktadaki tanımlı değerdir. Yani fonksiyon $(x,y) \neq (0,0)$ için süreklidir.

- $(x,y) = (0,0)$ için

Fonksiyon $(0,0)$'da tanımlı. $x=0$, $y=0$ olarak yerine yazılamaz. Çünkü bu fonksiyon $(x,y) \neq (0,0)$ için tanımlı. Çift katlı limit var ve değeri 0'dır. Fakat $y=x$ için

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1$. Limit yoktur. $(0,0)$'da sürekli değildir.

Örnek

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = ?$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{2x^2y}{y^4+y^2}\right] = 0$$

İki kat limit var fakat bu limit var anlamına gelmez.

$y=x^2$ için

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2x^2}{x^4+(x^2)^2} = 1 \qquad 1\neq 0 \text{ limit yoktur.}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y & ; \ (x,y)\neq(1,2) \\ 0 & ; \ (x,y)=(1,2) \end{cases}$$

(1,2)'deki sürekliliği?

1) $f(x,y)$, (1,2)'de tanımlı. $f(1,2)=0$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} x^2+2y = 5 \neq f(1,2)=0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 2} x^2+2y\right] = 5 \\ &\lim_{y\to 2}\left[\lim_{x\to 1} x^2+2y\right] = 5 \end{aligned}\right\}$$

2 kat limit var fakat kesin limit var diyemeyiz. Fakat varsa değeri 5 olur.

Limit yok ise $f(x,y)$ sürekli değildir

Limit var ise 5 olur değeri fakat $5\neq 0$ olduğundan sürekli değil.

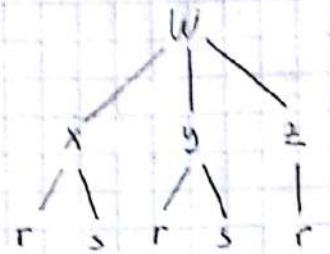
Bileşke Fonksiyonun Sürekliliği

Eğer f fonksiyonu (x_0, y_0)'da sürekli ve g fonksiyonu $f(x_0, y_0)$ noktasında sürekli ise $h(x,y) = g(f(x,y))$ fonksiyonu da (x_0, y_0)'da süreklidir.

Örnek

$w = x + 2y + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r + \ln s$, $z = 2r$

$\frac{\partial w}{\partial r} = ?$ $\quad \frac{\partial w}{\partial s} = ?$



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot 2r + \underbrace{2z}_{4r} \cdot 2 = 12r + \frac{1}{s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \rightarrow 0$$

$$= -\frac{r}{s^2} + \frac{2}{s}$$

Örnek

$w = x^2 + y^2$, $x = r - s$, $y = r + s$ $\quad \frac{\partial w}{\partial r} = ?$ $\quad \frac{\partial w}{\partial s} = ?$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = 4r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 4s$$

Önemli Not:

$w = f(x)$, $x = g(r,s)$ $\qquad$ w'nun r ve s'ye göre türevi

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{\frac{dw}{dx}} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}$$

Teorem: (Kapalı Türev için Formül)

$F(x,y)$'nin türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu ve $F(x,y)=0$ denkleminin y'yi x'in türevlenebilir fonksiyonu olarak tanımlandığını kabul edelim ve $F_y \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \text{ olur.}$$

Örnek

$x^3y^2 = 5e^{xy}$ ve $y=f(x)$ veriliyor. $\frac{dx}{dy} = ?$

I. yol

$$x^3 \cdot y^2 - 5e^{xy} = 0$$

$$3x^2 \cdot y^2 + x^3 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 5 \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(xy)}_{y + x \cdot \frac{dy}{dx}} \cdot e^{xy} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y^2 + 5ye^{xy}}{x^3 \cdot 2y - 5x \cdot e^{xy}}$$

II. yol

$$F: x^3y^2 - 5e^{xy} = 0$$

$$F_x = 3x^2y^2 - 5ye^{xy}$$

$$F_y = 2x^3y - 5xe^{xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{5ye^{xy} - 3x^2y^2}{2x^3y - 5xe^{xy}}$$

Örnek

$$y^2 - x^2 - \sin(xy) = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2x - \left[\cos(xy) \cdot \left(y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$$

- Eğer $F(x,y,z)=0$ ve $z = z(x,y)$ ise $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

F'in x'e göre $\Rightarrow$ $F_x \cdot \overset{1}{\frac{dx}{dx}} + F_x \cdot \overset{0}{\cancel{\frac{dy}{dx}}} + F_x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$

F'in y'ye göre $\Rightarrow$ $F_x \cdot \overset{0}{\cancel{\frac{dx}{dy}}} + F_y \cdot \overset{1}{\frac{dy}{dy}} + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

- Eğer $F(x,y,z)=0$ ve $x = X(y,z)$ ise $\frac{\partial x}{\partial y} = ?$, $\frac{\partial x}{\partial z} = ?$

F'in y'ye göre $\Rightarrow$ $F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + F_y \frac{dy}{dy} + F_z \cdot \overset{0}{\cancel{\frac{dz}{dy}}} = 0$ $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}$

F'in z'ye göre $\Rightarrow$ $F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + F_y \cdot \overset{0}{\cancel{\frac{dy}{dz}}} + F_z \cdot \frac{dz}{dz} = 0$ $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_x}$

Örnek

$$x^3 + z^2 + y \cdot e^{xz} + z \cdot \cos y = 0 \ , \ z = z(x,y) \ , \ \frac{\partial z}{\partial x} = ? \ , \ \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

X'e göre $\Rightarrow$ $3x^2 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(xz)}_{1 \cdot z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}} \cdot e^{xz} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos y + z \cdot 0 = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - yze^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$$\rightarrow 6x + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} + 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \cdot e^{xz}$$

$$+ y \cdot \left(z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{d}{dx}(xz) \cdot e^{xz} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos y = 0$$

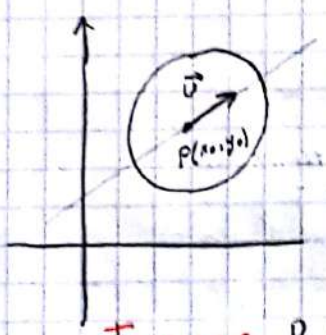
YÖNLÜ TÜREVLER VE GRADYENT VEKTÖRLER

Düzlemde Yönlü Türev

$f(x,y)$ fonksiyonu xy düzlemindeki bir R bölgesi boyunca tanımlanmış olsun. $P_0(x_0,y_0)$'ın R'de bir nokta ve $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$'nin BİRİM VEKTÖR olduğunu kabul edelim.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + su_1 \\ y &= y_0 + su_2 \end{aligned}\right\}$$

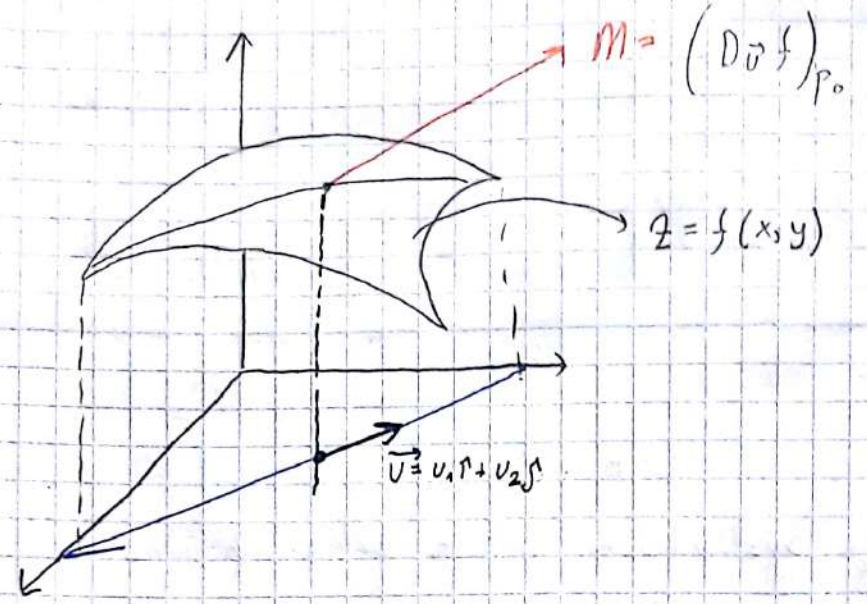
P_0'dan geçen $\vec{u}$'ya paralel olan doğrunun s yay parametresine göre parametrik denklemi olsun.



P_0'da $\frac{df}{ds}$'yi hesaplarsak f'nin P_0 noktasında $\vec{u}$ yönündeki değişim oranını buluruz.

Tanım: $P_0(x_0,y_0)$ noktasında $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$ BİRİM vektör yönünde f'nin türevi limitin mevcut olması şartı ile

$$\left(D_{\vec{u}}f\right)_{P_0} = \left(\frac{df}{ds}\right)_{P_0,\vec{u}} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+u_1s,\, y_0+u_2s)-f(x_0,y_0)}{s}$$ 'dır.



$T = f(x,y)$ düzlemindeki bir bölge üzerinde bulunan her (x,y) noktasındaki sıcaklık ise, $f(x_0,y_0)$ ifadesi $P_0(x_0,y_0)$'daki sıcaklık $(D_{\vec{u}} f)_{P_0}$, P_0 noktasında $\vec{u}$ yönünde ani sıcaklık değişim oranını gösterir.

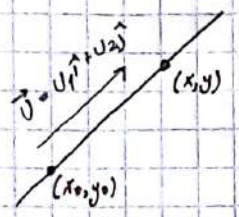
Örnek

Yönlü türev tanımını kullanarak $P_0(1,2)$ noktasında $f(x,y) = x^2 + xy$ fonksiyonunun $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$ birim vektörü yönündeki türevi?

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) - f(1,2)}{s} = \frac{5/\sqrt{2} \cdot s + s^2}{s} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Hesaplama ve Gradyantler

$P_0(x_0, y_0)$'dan geçen ve $\vec{U} = U_1\hat{i} + U_2\hat{j}$ birim vektörü yönünde s'ye göre parametrelemiş.



$$(x-x_0)\hat{i} + (y-y_0)\hat{j} \;//\; U_1\hat{i} + U_2\hat{j}$$

$$\frac{x-x_0}{U_1} = \frac{y-y_0}{U_2} = s$$

$f(x,y)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + sU_1 \\ y &= y_0 + sU_2 \end{aligned}\right\}$$ doğrusunu ele alalım ve $\frac{df}{ds}$'yi hesaplayalım.

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{df}{ds} = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\right)}_{\nabla f \text{ gradyant vektör.}}\cdot\underbrace{\left(\underbrace{\frac{dx}{ds}}_{U_1}\hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{ds}}_{U_2}\hat{j}\right)}_{\vec{U} \text{ birim vektör}}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{U},P_0} = \nabla f\Big|_{P_0}\cdot\vec{U}$$ Birim vektör olmalı.

$\nabla f\Big|_{P_0}$; $f(x,y)$'nin (x_0,y_0) noktasındaki gradyant vektörü olup

$$\nabla f\Big|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}\hat{j}$$ 'dır.

Örnek

$f(x,y) = x.e^y + \cos(x.y)$ fonksiyonunun $(2,0)$ noktasında $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ yönündeki türevini bul.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} = \left[e^y - y\sin(xy)\right]\hat{i} + \left[x.e^y - \sin(xy)\right]$$

$$\nabla f\Big|_{P_0} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{u} = \frac{3\hat{i} - 4\hat{j}}{5} = \frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right) = \left(D_{\vec{u}}f\right)_P = \nabla f\Big|_{P_0} . \vec{u} = (1+2j)\left(\frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j}\right) = -1$$

Yönlü Türevin Özellikleri

$$D_{\vec{u}}f = \left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}} = \nabla f . \vec{u} = |\nabla f| . \underbrace{|\vec{u}|}_{1} . \cos\theta$$

- $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ ise f fonksiyonu $\vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ yönünde en hızlı şekilde artar. Bu yöndeki değişim oranı $D_{\vec{u}}f = |\nabla f| . \underset{1}{|\vec{u}|} \underset{1}{\cos\theta} = |\nabla f|$ olur.

- $\cos\theta = -1 \Longrightarrow \theta = 180°$ ise f fonksiyonu $\vec{u} = \frac{-\nabla f}{|\nabla f|}$ yönünde en hızlı şekilde azalır. $D_{\vec{u}}f = |\nabla f| . |\vec{u}| . \cos\theta = -|\nabla f|$

- $\cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 90°$ $\vec{u}$ ∇f'e dik olduğu yönde değişim oranı 0'dır.

$$D_{\vec{u}}f = |\nabla f|\,|\vec{u}| . \cos\theta = 0$$

Örnek

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

a) (1,1) noktasında fonksiyonun en hızlı artım yönü ve değişim oranı

b) " " " " " azalım " " " " .

c) " " " " " sıfır değişim yönü?

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad , \quad \nabla f\Big|_{(1,1)} = \hat{i} + \hat{j} \; ; \; D_{\vec{u}} f = \nabla f\Big|_{(1,1)} \cdot \underset{1}{\vec{u}} = |\nabla f|\,\underset{1}{|\vec{u}|}\cos\theta$$

a) $\cos\theta = 1$ ise yeni $\vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$ yönünde en hızlı artar. Değişim oranı $|\nabla f| = \sqrt{2}$

b) $\cos\theta = -1$ ise yeni $\vec{u} = \frac{-\nabla f}{|\nabla f|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$ yönünde en hızlı azalım $-|\nabla f| = -\sqrt{2}$'dir.

c) $\nabla f \perp \vec{u}$; $\vec{u}$; ∇f'e dik ise bu yönle değişimin sıfır olduğu yönlerdir.

$\nabla f = \hat{i} + \hat{j}$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$ veya $-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$; $\nabla f \cdot \vec{u} = 0$ olmalı.

Seviye Eğrilerinin Teğetleri Ve Gradyentler

Eğer $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonu, $\vec{r} = g(t)\hat{i} + h(t)\hat{j}$ düzgün eğrisi boyunca sabit bir C değerini alıyor ise yani:

$r = g(t)\hat{i} + h(t)\hat{j}$

$x = g(t)$

$y = h(t)$

$f(g(t), h(t)) = C$

t'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 0 \text{ 'dır.}$$

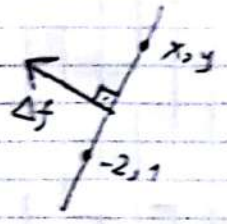
$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\right)}_{\nabla f}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\frac{dg}{dt}}\hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\frac{dh}{dt}}\hat{j}\right)}_{\frac{dr}{dt}} = 0$$

$$\nabla f \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Sonuç: $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonun tanım kümesindeki her (x_0, y_0) noktasında, f'nin gradyant vektörü (x_0, y_0) boyunca seviye eğrisine normaldir.

Örnek: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ elipsinin $(-2,1)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi nedir?

$$\nabla f = \frac{2x}{4}\hat{i} + 2y\hat{j}, \quad \nabla f\Big|_{(-2,1)} = -\hat{i} + 2\hat{j}$$



$$(x-(-2))\hat{i} + (y-1)\hat{j} \perp \nabla f$$

$$x + 2 + 2(y-1) = 0$$

$$-x + 2y - 4 = 0$$

Gradyentler İçin Cebirsel Kurallar

1) $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$

2) $\nabla(k.f) = k(\nabla f)$

3) $\nabla(f.g) = g.\nabla f + f.\nabla g$

4) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Uzayda türevlenebilir $f(x,y,z)$ fonksiyonu ve $\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ birim vektörü verilsin.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P} = (D_{\vec{u}}f)_P = \nabla f\Big|_P . \vec{u}$$

Örnek

$f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ 'nin $P_0(1,1,0)$ noktasında

a) $\vec{v} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ yönündeki türevi.

b) En hızlı artım yönü ve değişim değeri

c) " " azalım " " " "

a) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = (3x^2 - y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j} - \hat{k}$; $\nabla f\Big|_{P_0} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{u} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}}{|\vec{v}|} = \frac{2}{7}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$

$(D_{\vec{u}}f)_{P_0} = \nabla f\Big|_{P_0} . \vec{u} = (2i - 2j - \hat{k}).(2\hat{i}/7 - 3\hat{j}/7 + 6\hat{k}/7)$
$= 4/7$

b) $\cos\theta = 1$ $\theta = 0$ $\vec{v} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$ yön, değişim oranı $= |\nabla f| = 3$

c) $\cos\theta = -1$ $\theta = 180$ $\vec{v} = \frac{-\nabla f}{|\nabla f|} = -\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$ yön, değişim oranı $= -|\nabla f| = -3$

Belirli Bir Yöndeki Değişimi Tahmin Etmek

Küçük bir ds mesafesini bir P_0 noktasından belirli bir $\vec{u}$ yönünde hareket ettirirken türevlenebilir bir fonksiyon değerindeki değişim:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = \nabla f\Big|_{P_0} \vec{u} \quad \text{idi.}$$

$$\frac{df}{ds} = \nabla f . \vec{u}$$

$$df = \nabla f . \vec{u} . ds$$

Örnek

$P(x,y,z)$ noktası $P_0(0,1,0)$'dan $P_1(2,2,-2)$'ye 0.1 birim hareket ederse

$f(x,y,z) = y\sin x + 2yz$ fonksiyon değişimi?

$$\nabla f\Big|_{P_0} = \hat{i} + 2\hat{k}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{P_1 - P_0}}{|P_1 - P_0|} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$$

$$\frac{df}{ds} = \nabla f . \vec{u} \Rightarrow df = \nabla f . \vec{u} . ds$$

$$df = (\hat{i} + 2\hat{k})\left(2\hat{i}/3 + 1/3 - 2\hat{k}/3\right) . \underbrace{ds}_{0.1}$$

$$df = \frac{-2}{3} . 0.1 = \frac{-2}{30}$$

TEĞET DÜZLEMLER VE NORMAL DOĞRULAR

Eger $\vec{r} = g(t)\hat{i} + h(t)\hat{j} + m(t)\hat{k}$ türevlenebilir fonksiyonu

$f(x,y,z) = c$ seviye yüzeyi üzerinde bir düzgün eğri ise

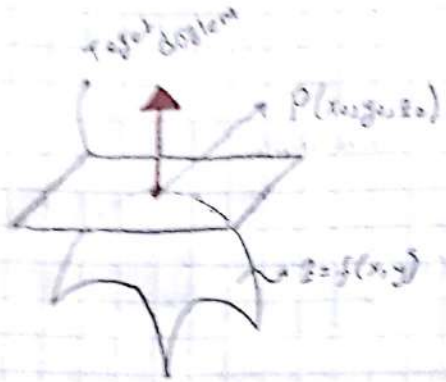
$$\left.\begin{array}{l} x = g(t) \\ y = h(t) \\ z = m(t) \end{array}\right\} \quad f(x,y,z) = c$$

$$f(g(t), h(t), m(t)) = c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{j} \right)}_{\nabla f} \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{j} \right)}_{\frac{d\vec{r}}{dt}} = 0$$

$$\nabla f \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$F = f(x,y) - z$$

$$\nabla F\Big|_P = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k} \right)\Bigg|_{P_0}$$

$$(x-x_0)\hat{i} + (y-y_0)\hat{j} + (z-z_0)\hat{k} \perp \nabla F\Big|_P$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_P (x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0}$$

↳ Teğet Düzlem Denklemi

$$(x-x_0)\hat{i} + (y-y_0)\hat{j} + (z-z_0)\hat{k} \parallel \nabla F\Big|_P$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_P} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_P} = C}$$

↳ Normal Doğrunun Kanonik Denklemi

Örnek

$P_0(1,2,4)$ noktasında $x^2+y^2+z-9=0$ yüzeyinin

a) Teğet düzlem denklemi

b) Normal doğru denklemi

a) $F(x,y,z) = x^2+y^2+z-9 = 0$

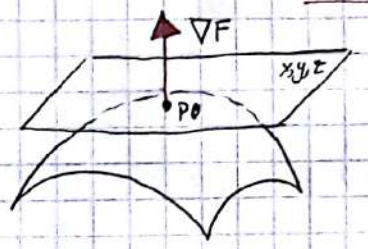
$\nabla F|_{P_0} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

$$(x-1)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z-4)\hat{k} \perp \nabla F|_{P_0}$$

$$2(x-1) + 4(y-2) + z - 4 = 0$$

$$\underline{2x + 4y + z - 14 = 0}$$

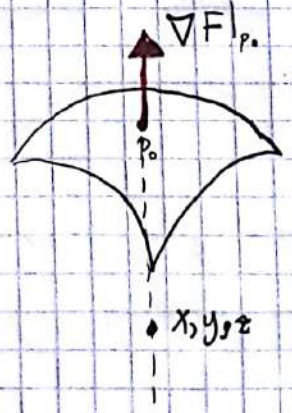
Teğet düzlem



b) $(x-1)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z-4)\hat{k} \parallel \nabla F|_{P_0}$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{1} = t$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t+1 \\ y &= 4t+2 \\ z &= t+4 \end{aligned}\right\}$$ normal doğrunun parametrik denklemi



Örnek

$(0,0,0)$ noktasında $z = x.\cos y - y.e^{x}$ yüzeyinin teğet düzlem denklemi?

$$\nabla F\Big|_{P_0} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

$$(x-0)\hat{i} + (y-0)\hat{j} + (z-0)\hat{k} \perp \nabla F\Big|_{P_0}$$

$$x - y - z = 0$$

Örnek

İKİ DEĞİŞKENLİ BİR FONKSİYONU LİNEERLEŞTİRMEK

f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, bir (x_0, y_0) noktasındaki $f(x,y)$ fonksiyonunun lineerleştirilmesi:

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0).(y-y_0)$$

Örnek

$(3,2)$ noktasında $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ fonksiyonunun lineerizasyonu?

$f(3,2) = 8$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,2)} = \left.2x-y\right|_{(3,2)} = 4 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3,2)} = \left.-x+y\right|_{(3,2)} -1$$

$$L(x,y) = 8 + 4(x-3) + (-1).(y-2)$$

Örnek

Lineer yaklaşım kullanarak $\sqrt{(0.9)^2+3.1} \cong ?$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$

$f(1,3) = 2$ $\qquad x_0 = 1$, $y_0 = 3$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,3)} = \frac{1}{2}$ $\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,3)} = \frac{1}{4}$

$L(x,y) = 2 + \frac{1}{2}\cdot(x-1) + \frac{1}{4}\cdot(y-3)$

$\sqrt{(0.9)^2+3.1} = f(0.9, 3.1) \cong L(0.9, 3.1) = 2 + \frac{1}{2}\cdot(0.9-1) + \frac{1}{4}(3.1-3)$

$= \frac{79}{40}$

Diferansiyeller

$y = f(x)$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \Delta f = f(a+\Delta x) - f(a) \\ df = f'(a)\cdot\Delta x \end{array}\right\}$ idi.

Tanım: Eger (x_0, y_0) yakınındaki bir (x_0+dx, y_0+dy) noktasına hareket edersek, fonksiyonun lineerleştirilmesinde elde edilen degişim:

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0 y_0)dy$$

toplam diferansiyelidir.

Örnek

Silindirik bir konserve kutusunun $r=3cm$ ve $h=12cm$ sahip olacak şekilde tasarladığım fakat yarıçap ve yüksekliğin sırasıyla $dr=0.08$ $dh=-0.3$ miktarlarında değiştiğini var-sayalım. Hacimdeki değişim = ?

$$V=\pi r^2 h$$

$$dV=V_r dr+V_h dh$$

$$dV=2\pi r h dr+\pi r^2 dh$$

$$dV=2\pi 3.12.0.08-\pi.3^2.0.3=3.06\pi$$

Örnek

Bir firma $h=8m$, $r=2m$ dik dairesel silindirik depolara tanklı imal ediyor. Tankların hacimleri yükseklik ve yarıçaptaki küçük değişimlere ne kadar hassastır?

$$dV=V_r dr+V_h dh$$

$$dV=2\pi r h dr+\pi r^2 dh$$

$$dV=2\pi.2.8.dr+\pi.4dh$$

$$dV=32\pi dr+4\pi dh$$

r'deki 1 birim değişim $\longrightarrow 32\pi$

h'deki " " " $\longrightarrow 4\pi$

Örnek

Dik dairesel bir silindirin $V=\pi r^2 h$ hacmi r ve h'in ölçülmüş değerlerinden hesaplanırken r en fazla %2 hata ile; h en fazla %5'lik hata ile ölçülmüş ise V'nin hesaplanmasında ortaya çıkan yüzdelik hata nedir?

$$\left.\begin{matrix} r & dr \\ 100 & ? \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left|\frac{100.dr}{r}\right| \leq 2$$

$$\left.\begin{matrix} h & dh \\ 100 & ? \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left|\frac{100.dr}{r}\right| \leq 5$$

$$\left.\begin{matrix} V & dV \\ 100 & ? \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left|\frac{100.dV}{V}\right| \leq ?$$

$$dV = 2\pi r h\, dr + \pi r^2 dh$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi r h\, dr + \pi r^2 dh}{\pi r^2 h} = \frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

$$\left|\frac{100.dV}{V}\right| = \left|\frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h}\right| \leq 2.\left|\frac{dr}{r}\right| + \left|\frac{dh}{h}\right| \leq 2\times 2 + 5 = 9$$

%9

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonlar

- Bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasında $f(x,y,z)$'nin lineerleştirilmesi:

$$L(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)$$

- Eğer f'nin 2. kısmi türevleri sürekli ise ve x, y, z ; x_0, y_0, z_0'da dx, dy, dz küçük miktarlarında değişiyor ise toplam diferansiyel:

$$df = f_x(x_0, y_0, z_0)\,dx + f_y(x_0, y_0, z_0)\,dy + f_z(x_0, y_0, z_0)\,dz$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

Örnek

Eğer $f(x-z, y-z) = 0$ ise

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad \text{araştır.}$$

$$f(u,v) = 0 \quad , \quad u = x-z \quad , \quad v = y-z$$

x'e göre

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(1 - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(- \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

y'ye göre

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(- \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(1 - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}} + \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} = 1$$

ALIŞTIRMALAR

Örnek

$L_1: r_1(t) = \langle t, 1+t, 0 \rangle$

$L_2: r_2(s) = \langle 1, s, 0 \rangle$

doğrularının kesiştiği noktayı ve bu doğrular arasındaki açı?

$$r_1(t) = r_2(s) \Longrightarrow \left.\begin{matrix} t=1 \\ 1+t=s \end{matrix}\right\} \quad t=1,\ s=2 \qquad P(1,2,0)$$

$$L_1: \left.\begin{matrix} x=t \\ y=1+t \\ z=0 \end{matrix}\right\} \text{ Parametrik denklemi} \Longrightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{0} = t$$

$$L_2: \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=s \\ z=0 \end{matrix}\right\} \text{ parametrik denklemi} \Longrightarrow \frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0} = s$$

$\vec{v_1} = \hat{i} + \hat{j} + 0.\hat{k} = \hat{i} + \hat{j}$

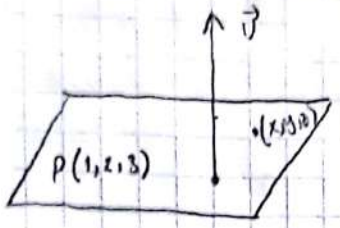
$\vec{v_2} = 0.\hat{i} + \hat{j} + 0.\hat{k} = \hat{j}$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{|\vec{v_1}|\,|\vec{v_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

ALIŞTIRMALAR

Örnek

$P(1,2,3)$ noktasından geçen ve $L: x=1+t,\ y=1+3t,\ z=2t$ doğrusuna dik olan düzlemin vektörü?



$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} = t$$

$$\vec{v} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$(x-1)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z-3)\hat{k} \perp \vec{v}$$

$$(x-1) + 3(y-2) + 2.(z-3) = 0$$

$$x + 3y + 2z = 13$$

Örnek

f fonksiyonu: $f(x,y) = xy$, $x>0,\ y>0$ ile tanımlanıyor. $f(x,y)=1$ seviye eğrisini, t parametresine göre parametrize ediniz. Bu parametrizasyonu kullanarak, $t=2$ değerine karşılık gelen noktada seviye eğrisinin teğet vektörünün, ∇f gradyant vektörüne dik olduğunu gösterin.

$xy=1$

parametrik = $\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=1/t \end{array}\right\}$ $\vec{r}(t) = t\hat{i} + \frac{1}{t}\cdot\hat{j}$, seviye eğrisinin teğet vektörü $\longrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} - \frac{1}{t^2}\hat{j}$

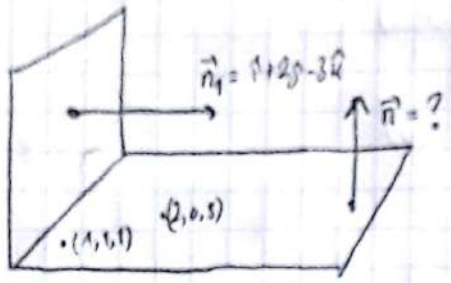
$t=2 \longrightarrow (2, 1/2)$ / $f(x,y)=xy$, $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$, $\nabla f\Big|_{(2,1/2)} = \frac{1}{2}\hat{i} + 2\hat{j}$

$$\left(\hat{i} - \frac{1}{4}\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\hat{i} + 2\hat{j}\right) = 0 \ \checkmark$$

ALIŞTIRMALAR

Örnek

(1,1,1) ve (2,0,3) noktasından geçen ve $x+2y-3z=0$ düzlemine dik olan düzlem denklemini bul.



$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k} = \vec{n}$$

$$(x-1)\hat{i} + (y-1)\hat{j} + (z-1)\hat{k} \perp -\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$-(x-1) + 5(y-1) + 3(z-1) = 0$$

$$x + 5y + 3z - 7 = 0 \checkmark$$

Örnek

Bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu parçalı olarak

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 1/2 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ile veriliyor. f'nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli olduğunu gösterin.

Eğer $(x,y) \neq (0,0)$ ise $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ olup f süreklidir.

$(x,y) = (0,0)$'da fonksiyon tanımlıdır. $f(0,0) = 1/2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)(1+\cos\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$= \frac{\overbrace{\sin\sqrt{x^2+y^2}}^{1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\overbrace{\sin\sqrt{x^2+y^2}}^{1}}{\sqrt{x^2+y^2}\,(1+\cos\sqrt{x^2+y^2})} = \frac{1}{2}$$

EKSTREMUM DEĞERER VE EYER NOKTALARI

Tanım: $f(x,y)$ noktaları (a,b) noktalarını içeren bir $\mathbb{R}$ bölgesinde tanımlı olsun.

Eğer merkezi (a,b)'de olan açık bir daire içindeki tüm (x,y) tanım kümesi noktaları,

- $f(a,b) \geq f(x,y)$ ise f'nin bir yerel maksimum değeridir.
- $f(a,b) \leq f(x,y)$ ise f'nin bir yerel minimum değeridir.

Yerel Ekstremum Değerler için

1. Türev Testi

Eğer $f(x,y)$ kendi tanım kümesinin bir (a,b) iç noktasında yerel maksimum veya yerel minimum değere sahip ise ve aynı noktada birinci kısmi türevi mevcut ise,

$$f_x(a,b) = 0 \quad , \quad f_y(a,b) = 0 \text{ 'dır.}$$

Kritik Nokta: Bir $f(x,y)$ fonksiyonu tanım kümesindeki bir iç nokta; f_x ve f_y'nin ikisinin de sıfır olduğu veya f_x veya f_y'nin bir veya ikisinin mevcut olmadığı durumlarda f'nin bir kritik noktasıdır.

Eyer Nokta: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunda eğer (a,b) merkezli her açık daire hem $f(x,y) \geq (a,b)$ hem de $f(x,y) < (a,b)$ olacak şekilde (x,y) noktalarını içeriyorsa fonksiyon (a,b) kritik noktasında bir eyer noktasına sahiptir. Eyer noktasının koordinatları $(a, b, f(a,b))$'dir.

Örnek

$f(x,y) = x^2+y^2-4y+9$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerini bul.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y-4=0 \end{array}\right\} x=0,\ y=2 \longrightarrow (0,2) \text{ noktası}$$

$f(0,2) = 0^2+2^2-4\cdot 2+9 = 5$

$(0+h,\ 2+k)$ noktası $(0,2)$ noktası civarındaki noktaları ifade etsin. h ve k çok küçük negatif veya pozitif sayılardır.

$f(x,y) = x^2+(y-2)^2+5$, $f(0+h, 2+k) = \underset{>0}{h^2} + \underset{>0}{k^2} + 5$, $f(0+h, 2+k) > f(0,2)$

$f(0,2)$ noktasında yerel minimuma sahip.

Örnek

$f(x,y) = y^2-x^2$, $\left.\begin{array}{l} f_x = -2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{array}\right\} x=y=0$, $f(0,0)=0$

$f(0+h,\ 0+k) = h^2-k^2$, bazı noktalar için $+$, bazıları için $-$. Fonksiyon $(0,0)$'da eyer noktasına sahiptir. Bu eyer noktasının koordinatı: $(0,0,f(0,0))$

Yerel Ekstremum Değerler için

2. Türev Testi

Teorem: (a,b) merkezli bir daire boyunca $f(x,y)$ ile onun birinci ve ikinci kısmi türevlerinin sürekli olduğu ve $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ varsayalım. Eğer (a,b) noktasında

- $f_{xx} < 0$, $f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0 \rightarrow f$'in (a,b)'de yerel maksimumu var
- $f_{xx} > 0$, $f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0 \rightarrow f$'in (a,b)'de yerel minimumu var.
- $f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0 \rightarrow f$'in (a,b)'de eyer noktası var
- $f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0 \rightarrow$ Test sonuç vermez.

$$\begin{array}{c|cc|} & x & y \\ \hline x & f_{xx} & f_{xy} \\ y & f_{yx} & f_{yy} \end{array} = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Örnek

$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = y - 2x - 2 = 0 \\ f_y = x - 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} (-2,0) \qquad \left.\begin{array}{l} f_{xx} = -2 \\ f_{yy} = -2 \\ f_{xy} = 1 \end{array}\right\} \Delta = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 = 3$$

$\Delta > 0 \longrightarrow f_{xx} < 0$ olduğundan maksimumdur.

Örnek

$f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = -6x + 6y = 0 \\ f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = y \\ 6y(2-y) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (0,0) \\ (2,2) \end{array} \qquad \begin{array}{l} f_{xx} = 6 \\ f_{yy} = 6 - 12y \\ f_{xy} = 6 \end{array}$$

$\Delta_{(0,0)} = -72 < 0 \longrightarrow$ eyer noktası

$\Delta_{(2,2)} = 72 > 0 \longrightarrow f_{xx} = -6 < 0 \longrightarrow$ yerel maksimum

Örnek

$f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2y^2 - 5$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4x^3 + 2xy^2 \\ f_y = 4y^3 + 2x^2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f_x = 2x(2x^2 + y^2) = 0 \\ f_y = 2y(2y^2 + x^2) = 0 \end{array}\right\} (0,0)$$

$f_{xx} = 12x^2 + y^2$

$f_{yy} = 12y^2 + x^2$, $\Delta_{(0,0)} = 0$ olur 2. türev testi sonuç vermez

$f_{xy} = 4xy$

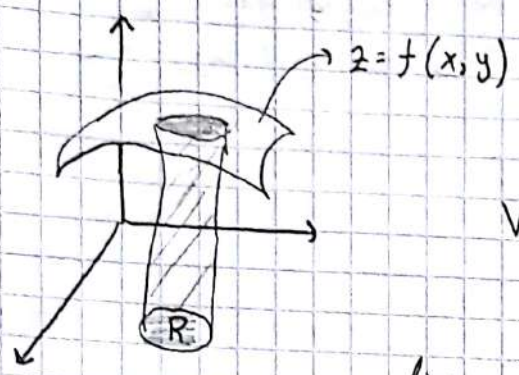
1. ye bakalım,

$f(0+h, 0+k) = h^4 + k^4 + h^2k^2 - 5$

$f(0+h, 0+k) > f(0,0)$, yerel minimum noktası.

İKİ KATLI İNTEGRALLER

$f(x,y)$ fonksiyonu $R: a \le x \le b$, $c \le y \le d$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde tanımlı olsun

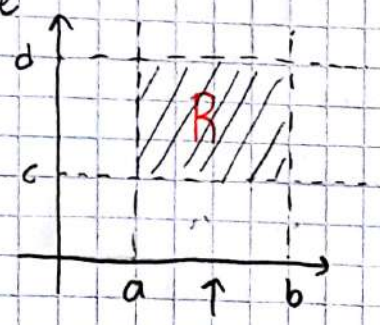


$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

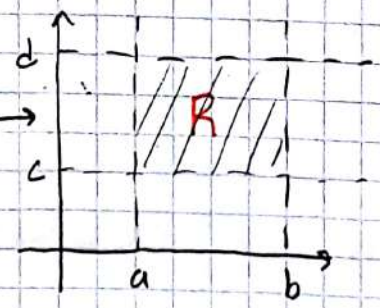
$$\lim_{\|P\| \to 0} S_n = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k, y_k)\, \Delta x_k \Delta y_k$$

Fubini Teoremi (1)

Eğer $f(x,y)$, $R: a \le x \le b$; $c \le y \le d$ dikdörtgensel bölgesinde sürekli ise



$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\, dy\, dx$$

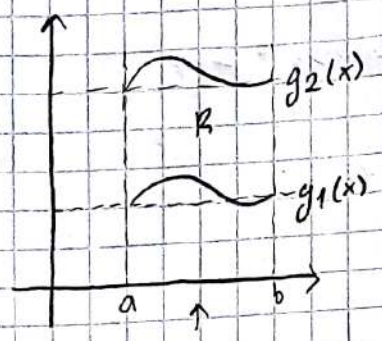


$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\, dx\, dy$$

Fubini Teoremi (2)

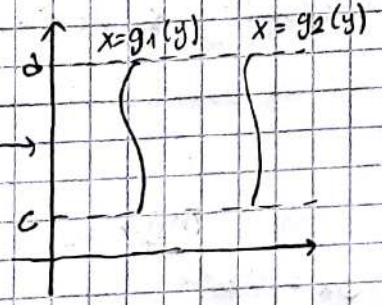
$f(x,y)$ bir R bölgesi üzerinde sürekli olsun

- Eğer R, g_1 ve g_2 $[a,b]$'de sürekli ise $a \le x \le b$, $g_1 \le y \le g_2$ ile tanımlı ise



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

- Eğer R, h_1 ve h_2 $[c,d]$'de sürekli ve $c \le y \le d$, $h_1 \le y \le h_2$ ile tanımlı ise



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=c}^{y=d}\int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Örnek

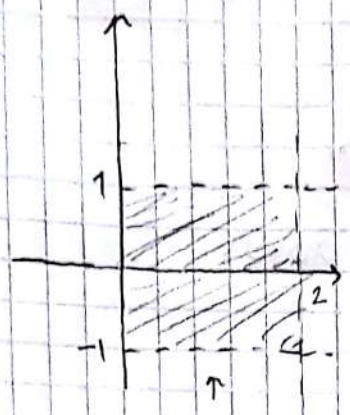
R: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ dikdörtgensel bölge üzerindeki $z = 4-x-y$ düzlemi altındaki hacmi hesaplayınız.

$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=2}\left(4y-xy-y^2/2\right)\Big|_0^1\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2}\left(7/2 - x\right)dx = 5\ br^3$$

Örnek

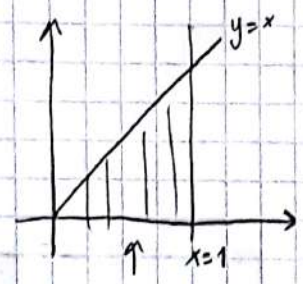
$R: 0 \le x \le 2 \;,\; -1 \le y \le 2 \;,\; f(x,y) = 100 - 6x^2y$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA = ?$



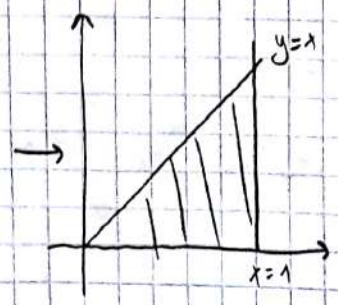
$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=-1}^{y=1} 100 - 6x^2y = \int_{x=0}^{2} 200\,dx = 400$$

Örnek

Üçgen tabanı xy düzleminde olan ve x ekseni $y=x$ ve $x=1$ doğrularını sınırlı, tepesi $f(x,y) = 3-x-y$ düzleminde bulunan prizmanın hacmi?



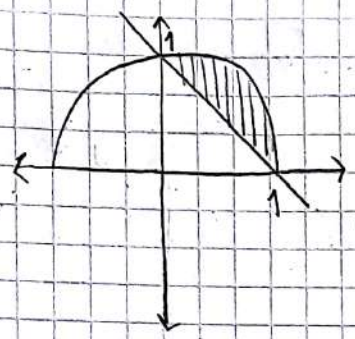
$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} (3-x-y)\,dy\,dx = 1br^3$$



$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} (3-x-y)\,dx\,dy = 1br^3$$

Örnek

R: $x^2+y^2=1$ çemberi ve $x+y=1$ doğrusunun 1. bölgede sınırladıkları bölge alan $\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini iki farklı şekilde ifade ediniz.

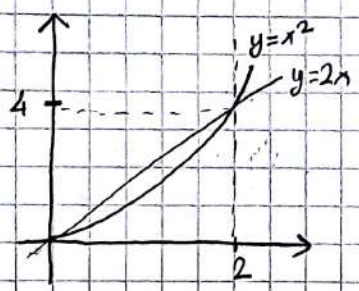


$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Örnek

$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=x^2}^{y=2x} (4+2x)\,dy\,dx$$



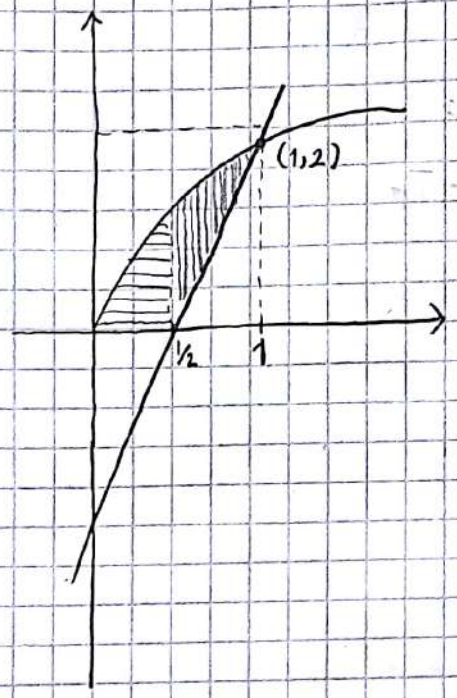
$$\int_{0}^{4}\int_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} (4+2x)\,dx\,dy$$

Özellik:

- $f(x,y)\geq 0$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA$
- $f(x,y)\leq g(x,y)$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA \leq \iint_R g(x,y)\,da$
- $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$, $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, $R_1 \cup R_2 = R$

Örnek

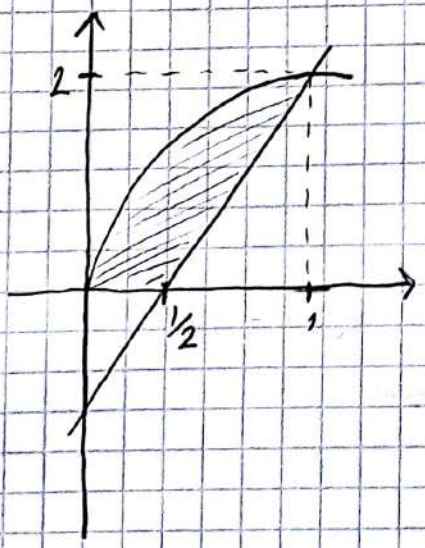
$z = 16 - x^2 - y^2$ yüzeyinin altında, $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi, $y = 4x - 2$ doğrusu ve x ekseni ile sınırlanan K bölgesi üzerinde bulunan katı cismin hacmini gösterelim.



I. yol

$$\int_{x=0}^{x=1/2}\int_{y=0}^{y=2\sqrt{x}} (16 - x^2 - y^2)\,dy\,dx + \int_{x=1/2}^{x=1}\int_{y=4x-2}^{y=2\sqrt{x}} (16 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$$

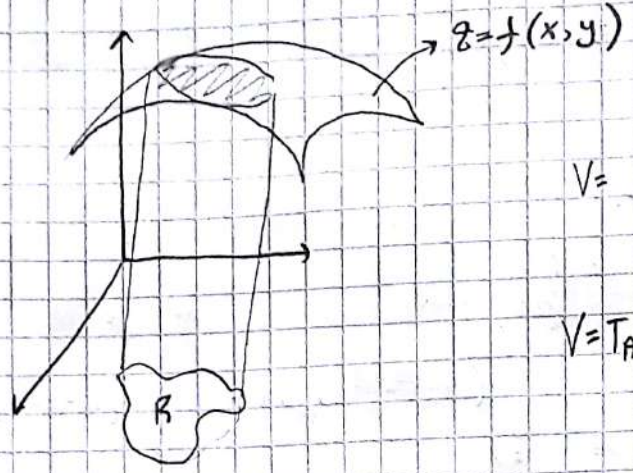
$y=0$: giriş kapısı; $y=2\sqrt{x}$: çıkış kapısı; $y=4x-2$: giriş kapısı; $y=2\sqrt{x}$: çıkış kapısı



II. yol

$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=y^2/4}^{x=\frac{y+2}{4}} (16 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

İki Katlı İntegral ile Alan Hesabı



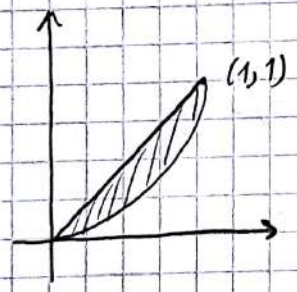
$$V = \iint_R f(x,y)\,dA \text{ idi}$$

$$V = T_A \cdot \underset{\uparrow 1}{h} = T_A$$

$$R_{ALAN} = \iint_R dA$$

Örnek

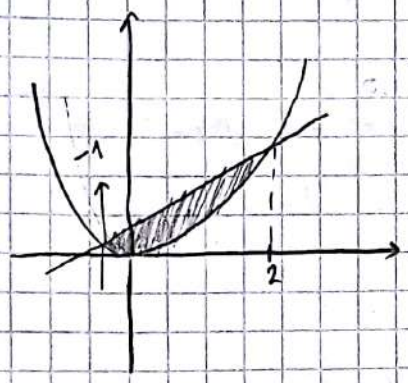
I. bölgede $y=x$ ve $y=x^2$ ile sınırlanan alanın integrali?



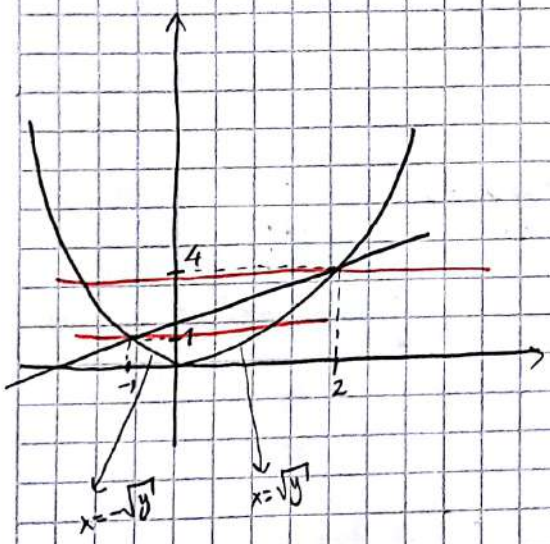
$$A = \iint_R dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=x} dy\,dx = 1/6$$

Örnek

$y=x^2$ ve $y=x+2$ ile çevrelenen R bölgesinin alanını iki farklı şekilde çiz.



$$A_R = \int_{x=-1}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=x+2} dy\,dx$$



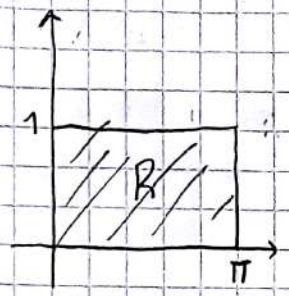
$$A_R = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{y=1}^{y=4} \int_{x=-2+y}^{x=\sqrt{y}} dx\,dy$$

Ortalama Değer

R üzerinde ortalama degeri $\frac{1}{R_{ALAN}} \cdot \iint_R f(x,y)\, dA$

Örnek

$f(x,y) = x.\cos(xy)$ fonksiyonunun $R: 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 1$ dikdörtgeni üzerinde ortalama değeri?



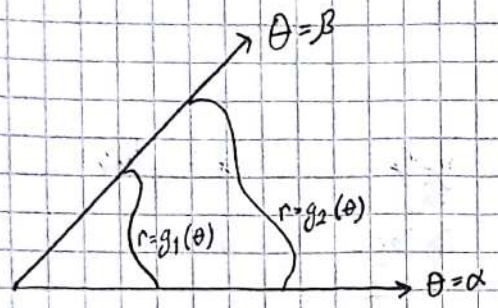
$$\text{Ort değer} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=1} x.\cos(xy)\, dy\, dx$$

Veya

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\pi} x.\cos(xy)\, dx\, dy$$

→ integralin çözümü sıkıntılı.

KUTUPSAL FORMDA İKİ KATLI İNTEGRAL



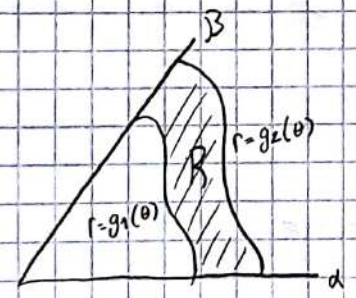
$f(r,\theta)$ fonksiyonu $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ ışınları; $r=g_1(\theta)$, $r=g_2(\theta)$ sürekli eğrileri ile sınırlanan bir R bölgesi üzerinde tanımlı fonksiyon alalım. $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq a$ olsun. Bu durumda R bölgesi $0 \leq r \leq a$ ve $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ile tanımlı yelpaze şeklinde bir bölgenin içinde kalır.

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$dA = r\,dr\,d\theta$

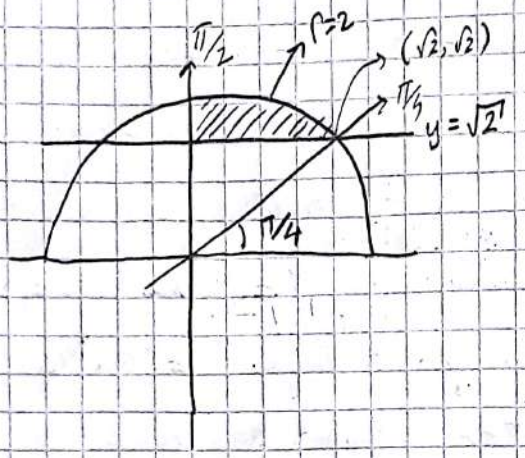
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)\Delta A_k = \iint_R f(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Örnek

R bölgesi $x^2+y^2=4$ çemberinin içinde $y=\sqrt{2}$ doğrusunun üzerinde I. kısımın integralini.



$y=\sqrt{2}$

$r\sin\theta=\sqrt{2}$

$r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta}$

$x^2+y^2=4$

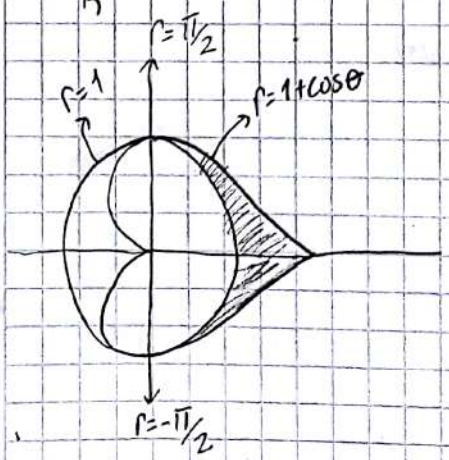
$r=2$

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}}^{r=2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

Örnek

$r=1+\cos\theta$ Kardiodinin içinde $r=1$ çemberinin dışında kalan R bölgesinde

$$\iint_R f(x,y)\,dA=?$$



$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\int_{r=1}^{r=1+\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$I = \int e^{x^2}dx \quad I^2 = \int e^{x^2}dx \cdot \int e^{y^2}dy$$

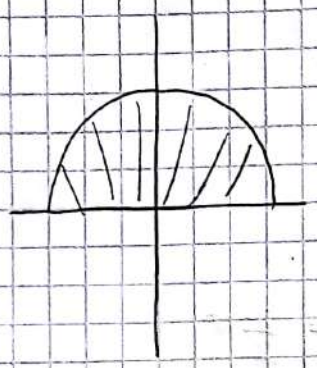
$$\iint e^{x^2+y^2}dxdy$$

SOR

Örnek

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA = ?$$

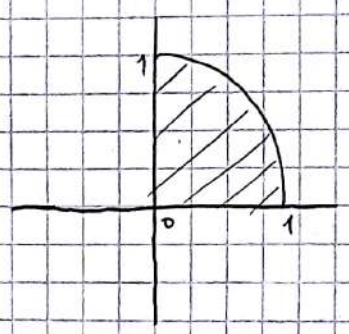
R: x ekseni, $y=\sqrt{1-x^2}$ ile sınırlı bölgedir.



$$\iint_R e^{x^2+y^2}dA = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{r=0}^{r=1} e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta = \left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)\pi$$

Örnek

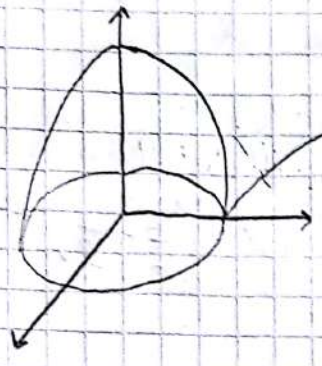
$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx = ?$$



$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{r=0}^{r=1} r^2\,r\,dr\,d\theta = \pi/8$$

Örnek

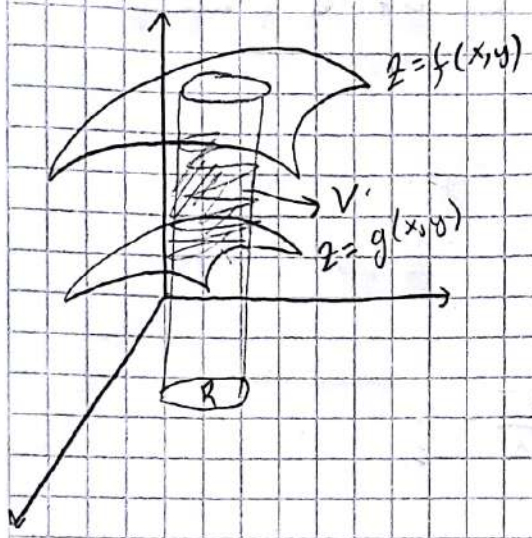
üstten $z = 9 - x^2 - y^2$ parabloidi ve alttan xy düzlemi ile sınırlı bölgenin hacmi?



$$\left.\begin{array}{l} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{array}\right\} x^2 + y^2 \leq 9$$

$$\iint_R (9 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{r=3} (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \frac{81}{2}\pi$$

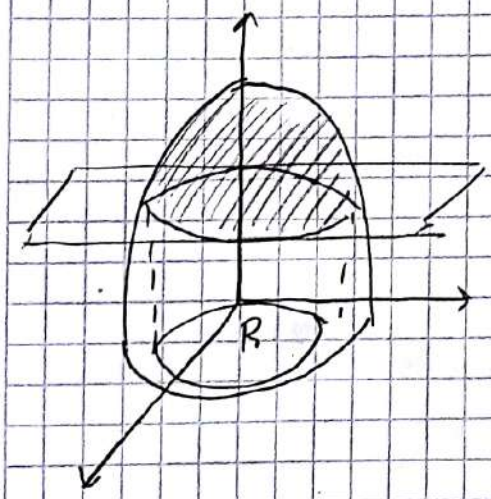
İki Yüzey Arasında Kalan Bölgenin Hacmi



$$V=\iint_R f(x,y)\,dA-\iint_R g(x,y)\,dA$$

Örnek

$z=9-x^2-y^2$ paraboloidi ve $z=8$ düzleminin arasında kalan kısmın hacmi?



R: $r=1$

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

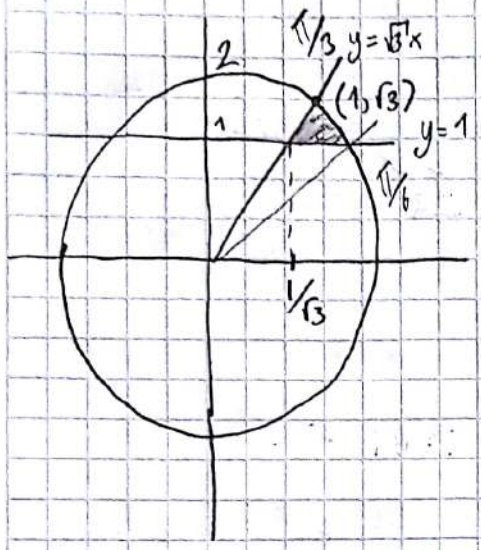
$dA=r\,dr\,d\theta$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (9-r^2)\,r\,dr\,d\theta-\int_0^{2\pi}\int_0^1 8\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\pi/2$$

Örnek

Kutupsal integrasyon kullanarak, xy düzlemindeki R bölgesinin $y=1$ doğrusu üzerinde $y=\sqrt{3}x$ doğrusunun altında kalan $x^2+y^2=4$ ile sınırlı bölgenin alanı?



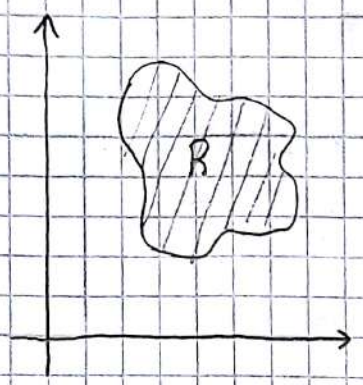
$y=1$

$r\sin\theta=1$

$r=1/\sin\theta$

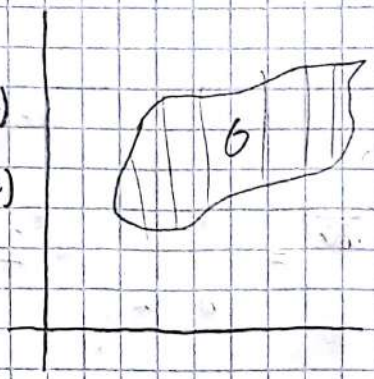
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{1/\sin\theta}^{r=2} r\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

İki KATLI İNTEGRALLERDE DEĞİŞKEN DÖNÜŞÜMÜ



$x = g(u,v)$

$y = h(u,v)$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_G f(g(u,v), h(u,v))\,|J(u,v)|\,\begin{matrix} du\,dv \\ dv\,du \end{matrix}$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

Kutupsal İfade:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

Örnek

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \frac{2x-y}{2}\, dx\, dy$$ integralini $u = \frac{2x-y}{2}$ $v = \frac{y}{2}$ dönüşümü ile yap.

$x = \frac{2u+2v}{2} = u+v$, $y = 2v$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

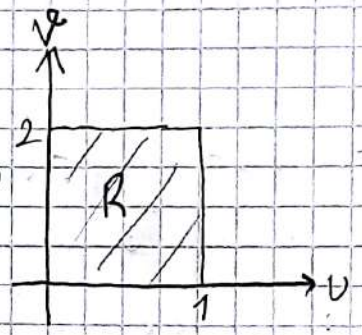
$y = 4 \longrightarrow 2v = 4 \longrightarrow v = 2$

$y = 0 \longrightarrow 2v = 0 \longrightarrow v = 0$

$x = y/2 \longrightarrow u+v = v \longrightarrow u = 0$

$x = y/2 + 1 \longrightarrow u+v = v+u \longrightarrow u = 1$

$\Rightarrow$



$$\int_{u=0}^{u=1} \int_{v=0}^{v=2} u \cdot 2 \, dv\, du = 2$$ jakobiyen

---

Örnek

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\, dy\, dx = ?$$

$u = x+y$ $\longrightarrow$ $x = \frac{u-v}{3}$

$v = y-2x$ $\longrightarrow$ $y = \frac{2u+v}{3}$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = 1/3$$

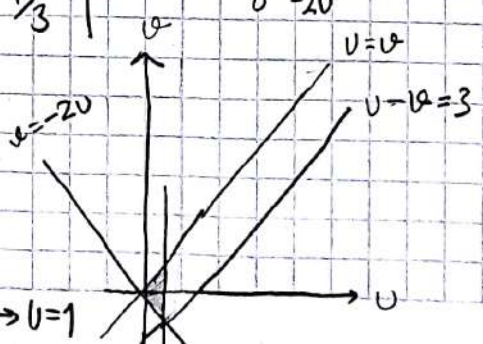
$$\int_0^1 \int_{-2u}^{u} \sqrt{u} \cdot v^2 \frac{1}{3}\, dv\, du = \frac{2}{9}$$

$x = 1 \longrightarrow \frac{u-v}{3} = 1 \longrightarrow u - v = 3$

$x = 0 \longrightarrow u = v$

$y = 0 \longrightarrow 2u = -v$

$y = 1-x \longrightarrow \frac{2u+v}{3} = 1 - \left(\frac{u-v}{3}\right) \longrightarrow u = 1$



Örnek

$$\int_1^2 \int_{1/y}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}}\, e^{\sqrt{xy}}\, dx\,dy = ?$$

$u = \sqrt{xy}$ $\quad u = \sqrt{x}\sqrt{y}$, $x = u/v$

$v = \sqrt{\frac{y}{x}}$ $\quad \sqrt{x}\, v = \sqrt{y}$, $y = u.v$

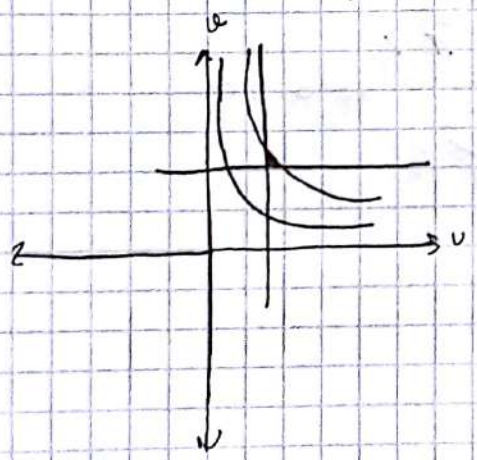
$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1/v & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}$$

$y = 1 \longrightarrow v.u = 1$

$y = 2 \longrightarrow v.u = 2$

$x = 1/y \longrightarrow \frac{1}{u.v} = \frac{u}{v} \longrightarrow u^2 = 1 \longrightarrow u = \pm 1$

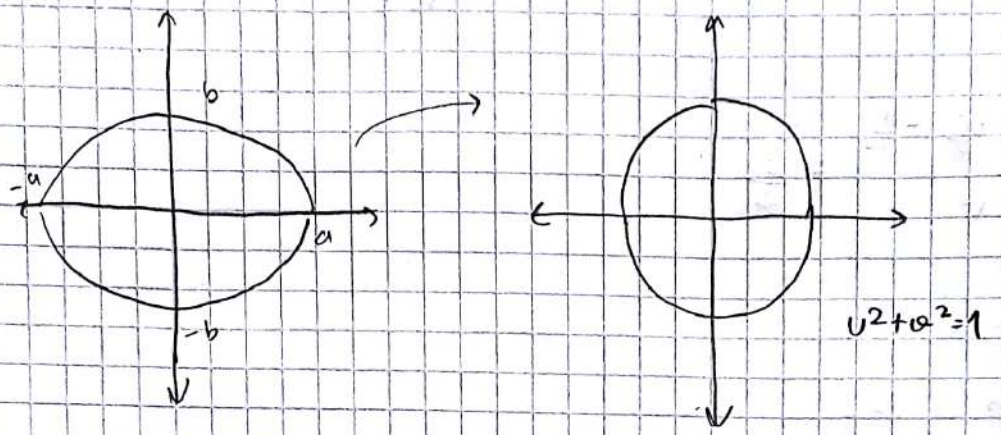
$x = y \longrightarrow u.v = \frac{u}{v} \longrightarrow v^2 = 1 \longrightarrow v = \pm 1$



$$\int_{u=1}^{u=2} \int_{v=1}^{v=2/u} e^{u}.2u\, dv\, du = 2e(e-2)$$

Örnek

R bölgesi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin çevrelediği R'nin alanını bul.



$u=x/a \quad v=y/b$

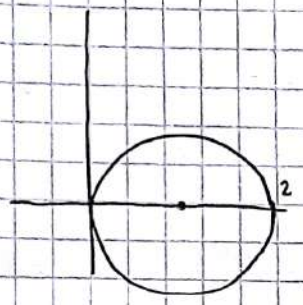
$J(u,v)=ab$

$u=r\cos\theta$
$v=r\sin\theta$
$du\,dv=r\,dr\,d\theta$

$$A=\iint_R ab\,du\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\,dr\,d\theta$$

Örnek

$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}$$ integralini R: $x^2+y^2=2x$ bölgesinde kutupsal.



$x=r\cos\theta$ $\quad dA = r\,dr\,d\theta$

$y=r\sin\theta$

$x^2+y^2=2x$

$r^2=2r\cos\theta$

$r=2\cos\theta$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{r\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \frac{16}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$$