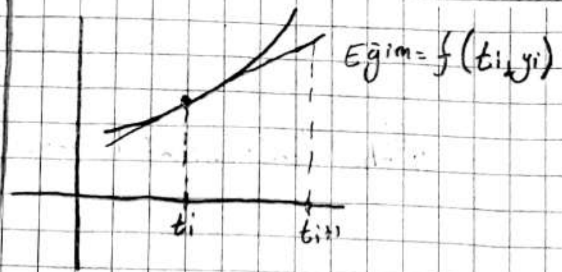
NÜMERİK ANALİZ

Şafak Bilici

Konular

- Nümerik Hesaplamalar ve Hatalar
- Lineer Olmayan Eşitliklerin Çözümü
- Lineer Sistemlerin Çözümü
- Nümerik İntegral
- Nümerik Türev
- Sonlu Farklar
- Eğri Uydurma
  - Enterpolasyon
  - Regresyon
- Adi Diferansiyel Denklemler



Verilen:

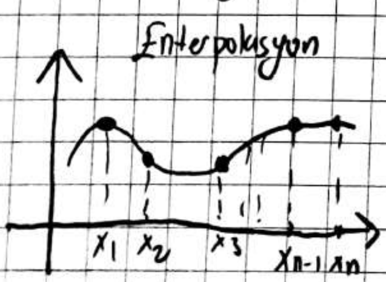
$$dy/dt \cong \Delta y/\Delta t = f(t, y)$$

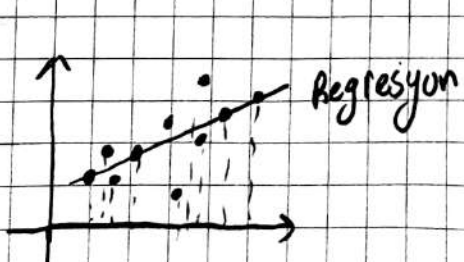
$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

Geniş çaptaki matematik problemlerini ve mühendislik sistemlerinin çözümü için kullanılan metotlar topluluğudur. Fiziksel bir sistemin matematiksel bir gösterimini sağlamaktır.

Hatasız veri noktalarının arasında kalan ara noktaları belirlemek için kullanılır. Ara değerleri tahmin etmek → Enterpolasyon

Veriler ile ilgili belirgin bir hata söz konusu ise regresyon uygulanır. Deneysel sonuçlar bu tipe girer. Veri noktalarının genel eğilimini gösteren ve herhangi bir noktadan özellikle geçmesi gerekmeyen tek bir eğri bulmaktır.





Mühendislik Problemlerinin Çözümleri

- Analitik (teorik) ⟶ Sürekli Veriler
- Nümerik (deneysel) ⟶ Ayrık Veriler

Nümerik Yöntem

Sonuçlar daima sayısaldır

Yaklaşık çözüm için iteratif çözüm kullanılır.

Yaklaşık çözümün hassasiyeti adım sayısı arttırılarak sağlanır.

Problemin çözümü yaklaşık olarak bulunduğunda hata analizi yapılır.

Analitik Yöntem

Matematiksel fonksiyonlar olarak çözüm üretilir, bu çözüm bazı veriler için sayısal değere dönüşür.

Tek ve kesin sonuç.

Karışık olmayan problemler için.

Nümerik

$y = x^2 - 3x + 2$

$y' = 2x - 3$

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y'	0	-1.16	0.24	-0.24	-0.16	0

Analitik

$y = x^2 - 3x + 2$

$y' = 2x - 3 = 0$

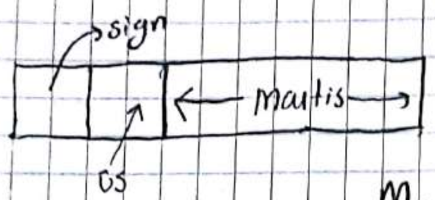
$2x = 3$

$x = 3/2 = 1.5$

D ⟶ Decimal Point

S ⟶ Significant Point

Floating Point



$M \cdot b^{e}$

üs

mantis

taban

156,78

$0,15678 \cdot 10^{3}$

$2/3 = 0.\overline{6} \quad 5(S) = 0.66666 \rightarrow 5(D)$

$\sqrt{2} = 1.4142135 \quad 5(S) = 1.4142 \rightarrow 4(D)$

trunc

Chopping ⟶ trunc, round

$5(S) = 0.66667$

$5(S) = 1.4142$

Round

$\pi = 3.141592654$

4(D)

3.1416 ⟶ round

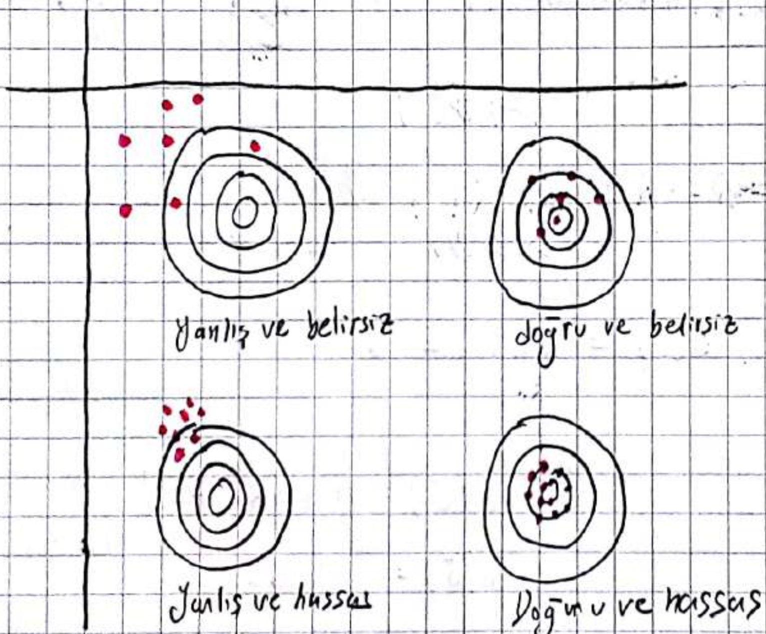
3.1415 ⟶ trunc

Round of Error = |3.1416 − 3.1415|

örnek

	TRUNC		ROUND	
	3S	3D	3S	3D
34.78219	34.7	34.782	34.8	34.782
3.478219	3.47	3.748	3.48	3.748
0.3478219	0.347	0.347	0.348	0.348
0.03478219	0.034	0.034	0.035	0.035

Doğruluk (Accuary) / Hassaslık (Precision)



Hesaplanan veya ölçülen değerin gerçek değere ne kadar uyduğunu ifade eder. ⟶ Doğruluk

Hesaplanan veya ölçülen değerlerin ne kadar uyumlu olduğunu ifade eder. ⟶ Hassaslık ta:

ıplaran yaklaşık değer arasındaki

derir.

ı - yaklaşık değer|

ey

üyüklüklein mertebeleri dikkate alınır bu yüzden

yapılır.

l Bağıl Hata = Gerçek Hata / gerçek değer

Eg eg

KeskinColor

Örnek

Bir köprü ve perçinin uzunluğunu ölçmek ile görevlendirildiğinizi ve bunları da sırasıyla 9999 ve 9 bulduğunuzu var sayın. Gerçek değerler de 10000 ve 10 cm ise;

a) Gerçek Hata

Köprü → $10000 - 9999 = 1cm$

Perçin → $10 - 9 = 1cm$

b) Gerçek bağıl Oransal Hata

Köprü → $E_b = (1/10000) * 100 = \%0.01$

Perçin → $E_b = (1/10) * 100 = \%10$

Yaklaşım Hatası: Gerçek değerin bilinmediği, ancak hesaplanan yaklaşık değeri bir önceki değer ile birbirine olan yakınlığını veren hata.

$$\boxed{E_y = (X_{yeni} - X_{eski}) / X_{yeni}}$$

Yuvarlatma Hatası: Kesirli ve özellikle devreden sayılarda yapılan hatadır. Noktanın sağında kalan kısım belirli bir basamak kadar alınır. Yuvarlatma kesilen noktanın sağında kalan kısım 5 ve üzerindeyse 1 arttırılarak kullanılır.

27.657 → 27.66 (2D)

27.653 → 27.65 (2D)

Kesme Hatası: Bir değerin hesaplanması için sonsuz sayıda terim alınması gerekirken sonlu sayıda terim alınınca oluşan hata. Eklenen her yeni terim sonucu değiştirir fakat göz ardı edilir.

Taylor Serisi, bir fonksiyonun herhangi bir değerinin fonksiyonun ve türevlerinin bir başka noktadaki değerleri cinsinden tahmin edilmesidir.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$ 0. dereceden yaklaşım

$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ 1. dereceden yaklaşım

$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i) \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}$ 2. dereceden yaklaşım

örnek

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

$x_i = 0$ $x_{i+1} - x_i = h = 1$ $f(0) = 1.2$

$f(1)$'i hesapla. $f(1) = 0.2$

(1) $f(x_{i+1}) \cong f(x_i) \longmapsto f(1) \cong f(0) \longmapsto e = 1.2 - 0.2 = 1$

(2) $f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i) * h = 1.2 - 0.25 * 1 = 0.95 \mapsto e = |0.2 - 0.95| = 0.75$

(3) $f(x_{i+1}) \cong 1.2 - 0.25 - 0.5 = 0.45 \longmapsto e = |0.2 - 0.45| = 0.25$

Keskin Color

Örnek

Bir köprü ve perçinin uzunluğunu ölçmek ile görevlendirildiğinizi ve bunları da sırasıyla 9999 ve 9 bulduğunuzu var sayın. Gerçek değerler de 10000 ve 10 cm ise;

a) Gerçek Hata

Köprü → $10000 - 9999 = 1cm$

Perçin → $10 - 9 = 1cm$

b) Gerçek bağıl Oransal Hata

Köprü → $E_b = (1/10000) * 100 = \%0.01$

Perçin → $E_b = (1/10) * 100 = \%10$

Yaklaşım Hatası: Gerçek değerin bilinmediği, ancak hesaplanan yaklaşık değeri bir önceki değer ile birbirine olan yakınlığını veren hata.

$$\boxed{E_y = (X_{yeni} - X_{eksi}) / X_{yeni}}$$

Yuvarlatma Hatası: Kesirli ve özellikle devreden sayılarda yapılan hatadır. Noktanın sağında kalan kısım belirli bir basamak kadar alınır. Yuvarlatma kesilen noktanın sağında kalan kısım 5 ve üzerindeyse 1 arttırılarak kullanılır.

27.657 → 27.66   27.653 → 27.65

Kesme Hatası: Bir değerin hesaplanması için sonsuz sayıda terim alınması gerekirken sonlu sayıda terim alınınca oluşan hata. Eklenen her yeni terim sonucu değiştirir fakat göz ardı edilir.

Taylor Serisi, bir fonksiyonun herhangi bir değerinin fonksiyonun ve türevlerinin bir başka noktadaki değerleri cinsinden tahmin edilmesidir.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$ 0. dereceden yaklaşım

$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ 1. dereceden yaklaşım

$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i) \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}$ 2. dereceden yaklaşım

örnek

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

$x_i = 0$ $x_{i+1} - x_i = h = 1$ $f(0) = 1.2$

$f(1)$'i hesapla. $f(1) = 0.2$

① $f(x_{i+1}) \cong f(x_i) \longmapsto f(1) \cong f(0) \longmapsto e = 1.2 - 0.2 = 1$

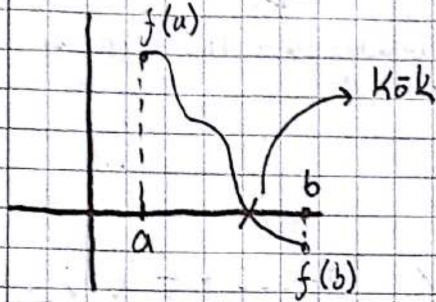
② $f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i) * h = 1.2 - 0.25 * 1 = 0.95 \mapsto e = |0.2 - 0.95| = 0.75$

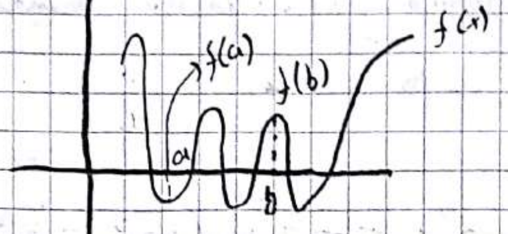
③ $f(x_{i+1}) \cong 1.2 - 0.25 - 0.5 = 0.45 \longmapsto e = |0.2 - 0.45| = 0.25$

KeskinColor

LINEER OLMAYAN DENKLEMLERIN ÇÖZÜMÜ

$\boxed{\text{Teorem}}$: Eger $f(x)$ fonksiyonu $f(a)-f(b)$ aralığında sürekliyse $f(a)$ ve $f(b)$ ters işaretli iseler (a,b) aralığında en az bir adet gerçek kök vardır





Kapalı Yöntem: Kökler bir alt ve bir üst sınır ile belirlenen aralığın içinde yer alır. Bu yöntemlerin tekrarları
Grafik yöntem / Basit iterasyon / Yarıya bölme / Regula False / Secant

Açık Yöntem: X'i sadece bir tek başlangıç değerine ihtiyaç duyulan veya kökü kıskaca almayan 2 başlangıç değeri gerektiren yöntemlerdir. Bu yöntemler bazen ıraksayabilir. Yakınsadıkları vakit, kapalı yöntemlerden daha hızlı sonuç verir.

Newton Raphson

1.5 $\Delta x = 0.75$

$\Delta x = 0.375$

x_0	$f(x_0)$
4.5	-1.75
4.875	-0.4844
5.25	$+1.0625$

$4.5 \xrightarrow{+0.375} 4.875 \xrightarrow{+0.375} 5.25$

$\Delta x = 0.1875$

x_0	$f(x_0)$
4.875	-0.4844
5.0625	$+0.2539$

$4.875 \xrightarrow{+0.1875} 5.0625$

$|x_{i+1} - x_i| \leq \epsilon \longrightarrow$ kabul edilebilir hata

$\epsilon \rightarrow 0.1$

$|5.063 - 4.969| = 0.094 \leq \epsilon$

$x_{kök} \cong 5.063$

Jacobi Iterasyonu

Kökü bulunacak $f(x)=0$ denklemi $x=g(x)$ olacak şekilde $g(x)$ ve $h(x)$ olarak 2 parçaya ayrılır

$f(x)=g(x)-h(x)=0$ olarak yazarız. Denklem sayımız 1 iken 2'ye çıkmış olmasına rağmen işlem basitleşir. Başlangıçta köke yakın olduğu farzedilen bir x_0 seçilir, x_0 değeri $g(x)$'te ve $h(x)$'te yerine koyularak yeni x değeri hesaplanır. iki ardışık kök arasındaki fark ε'dan küçük eşit oluncaya kadar işleme devam edilir. Bir $f(x)$ fonksiyonunda birden fazla $g(x)$ ve $h(x)$ elde edebiliriz. Uygun $g(x)$ $h(x)$ çiftini seçebilmek için

$$\left|\frac{dg}{dx}\right|_{x_0} > \left|\frac{dh}{dx}\right|_{x=0}$$

Şartı aranır.

Amaç $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının kesişim noktasını bulmaktır.

Örnek

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ $\quad x_0 = 4 \quad \epsilon = 0.005$

① $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 = 2x + 3$

$x = \sqrt{2x+3}$

$\underset{g(x)}{x} = \underset{h(x)}{\sqrt{2x+3}}$ $\implies \left|\frac{dg}{dx}\right| > \left|\frac{dh}{dx}\right|$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$h(x) = \sqrt{2x+3} \qquad h'(x) = (2x+3)^{-1/2}$

$g(x)$	$h(x)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
4	3.316	0.684
3.316	3.104	0.212
3.104	3.034	0.7
3.034	3.011	0.023
3.011	3.004	0.007
3.004	3.001	$0.003 \leq \epsilon$

$x_{kök} \cong 3.001$

KoshinColor

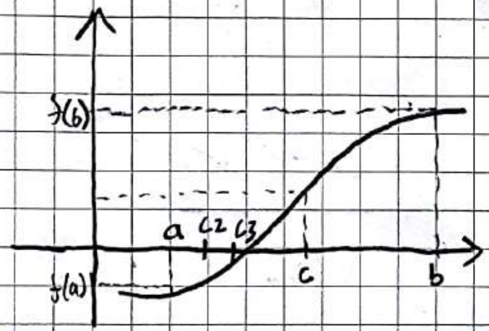
Yarıya Bölme Yöntemi (Bisection)

$f(x)=0$ kökünü bulmak için kökü içine alan 2 aralık belirleyelim. $x=a$, $x=b$ için $f(a)$, $f(b)$ hesaplanır.

$f(a) * f(b) \geq 0$ kontrol edilir. öyle ise kök yoktur.

$f(a) * f(b) = 0$ ise (a veya b) veya (a ve b) köktür.

$f(a) * f(b) < 0$ ise yeni bir ara nokta belirlenir.



$$x_{ort} = x_c = \frac{a+b}{2}$$

- $f(a) * f(c) \leq 0$
  - $< \longmapsto f_a * f_c < 0 \longmapsto b=c$
  - $= \longmapsto f_a * f_c = 0 \longmapsto$ a veya c kök
- $f(b) * f(c) \leq 0$
  - $< \longmapsto f_b * f_c < 0 \longmapsto a=c$
  - $= \longmapsto f_b * f_c = 0 \longmapsto$ b veya c kök

Örnek

$$f(x) = x^3 - 6.5x^2 + 13.5x - 9$$

$a = 1.75$

$\varepsilon = 0.017$

$b = 2.5$

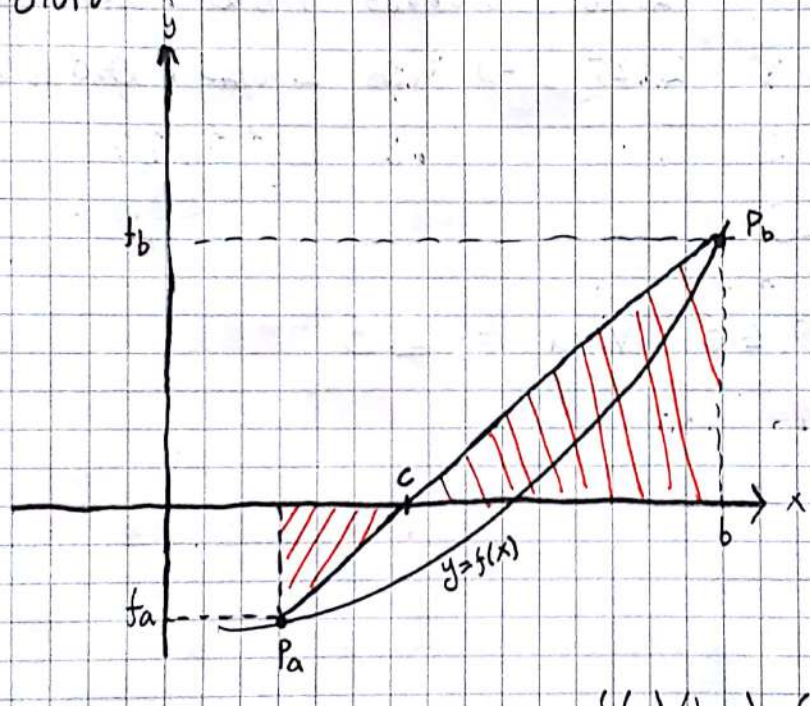
a	fa	b	fb	c	fc
1.75	0.07813	2.5	−0.2500	2.125	−0.06836
1.75	0.07813	2.125	−0.06836	1.9375	0.022905
1.9375	0.022905	2.125	−0.06836	2.03125	$0.01608 \leq \varepsilon$

$x_{kök} \cong 2.03125$

$|2.03125 - 1.9375| \leq \varepsilon$ veya $f_c \leq \varepsilon$

Regula False (False Position) Yöntemi

Bisection'a alternatif yöntem. Bisection'ın eksikliği; ab aralığını 2'ye bölerken, fa ve fb değerlerini dikkate almaz. Örneğin fa 0'a fb'den daha yakın ise kökün a'ya b'den daha yakın olduğu bilgisini kullanmamış olur.



$\overset{\triangle}{acP_a} \cong \overset{\triangle}{cbP_b}$

$$-f(a)(b-c) = f(b)(c-a)$$

$$-bf(a)+cf(a) = cf(b)-af(b)$$

$$af(b)-bf(a) = cf(b)-cf(a)$$

$$c(f(b)-f(a)) = af(b)-bf(a)$$

$$\boxed{c = \frac{a\,f(b)-b\,f(a)}{f(b)-f(a)}}$$

$fa * fc \leq 0$ → a veya c kök
→ fa ile fc arasında

$fb * fc \leq 0$ → b veya c kök
→ fb veya fc arasında

örnek

$$f(x) = x^3 - 5x - 7$$

$a = 2.25$ $b = 0.3$ $\epsilon = 0.023$

a	fa	b	fb	c	fc
2.25	-3.875	3.0	5.0	2.64286	-1.75474
2.64286	-1.75474	3.0	5.0	2.73564	-0.20550
2.73564	-0.20550	3.0	5.0	2.74607	-0.02248

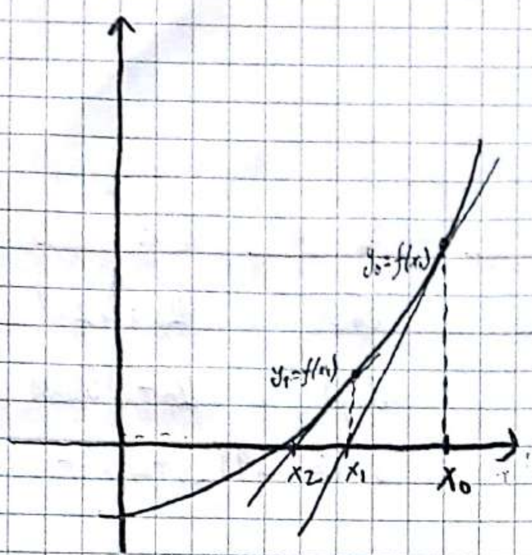
$$X_{kök} \cong 2.74607$$

$(3S) \Rightarrow 2.75$

$(3D) \Rightarrow 2.746$

$$c = \frac{2.5 * 5.0 - 3.0 * (-3.875)}{5.0 - (-3.875)} = 2.64286$$

Newton Raphson Yöntemi



$y=f(x)$ fonksiyonunda $x=x_0$ alınarak $y_0=f(x_0)$ hesaplanır.
P noktasından çizilen teğetin eğimi $\tan\alpha$'dır.

$$\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0-x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

Eğim aynı zamanda fx fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevine eşit olacağından;

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \quad , \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

İterasyona son vermek için $y=f(x_k)$ değerinin 0'a yaklaşması ya da $|x_{k+1}-x_k| \leq \varepsilon$ olması lazım.

Türevi kolay alınabilen fonksiyonlar için kullanılabilir.

örnek

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 5$$

$x_0 = -2{,}5 \qquad \varepsilon = 0{,}00001$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 4$$

k	x_k	x_{k+1}	Δx
0	-2,5	-2,05036	0,4499
1	-2,05036	-1,96104	0,08932
2	-1,96104	-1,957592	0,003448
3	-1,957592	-1,957587	0,000005 $\leq \varepsilon$

$$x_{k+1} = -1{,}957587 \cong x_{kök}$$

round 4S $\longrightarrow$ -1,958

4D $\longrightarrow$ -1,9576

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k}$$

Örnek

Kenar uzunluğu a olan (a=6) bir kare 4 köşesinden x uzunluğunda kesilerek üstü açık bir kutu haline getirilmektedir. Hacmini max yapan x değerini newton rapsin yöntemi ile çöz.

$V(x) = (6-x2)^2 \cdot x$

$V(x) = x^3 - 6x + 9x$

$V'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$

$\boxed{f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0}$

$x_0 = 0 \quad \varepsilon = 0.001$

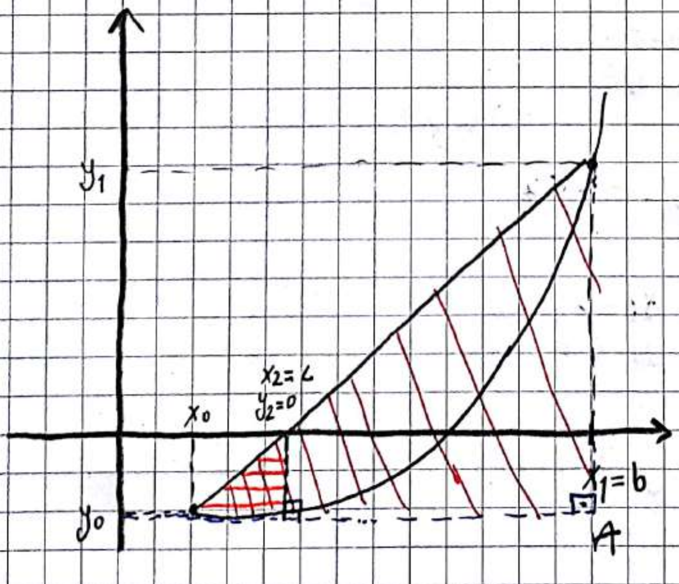
$f'(x) = 2x - 4$

K	x_k	x_{k+1}	Δx
0	0	3/4	3/4
1	3/4	0.975	
2	0.975	0.9996	
3	0.9996	1.000095	

$x_{kök} \cong 1.000095$

Secant (Kiriş) Yöntemi

Regula falsi yöntemiyle aynı temele dayanır. Farklı işaretlere sahip $f(x_0)$ ve $f(x_1)$ değerlerini veren x_1, x_0 arasındaki $x_2 = c$ noktası $f(x)$'in $f(x_0)$, $f(x_1)$'den geçen kirişinin x eksenini kestiği nokta olarak kabul edilmekte ve $f(x_2)$ hesaplanarak bu değer $f(x_1)$ ve $f(x_0)$'dan hangisi ile aynı işaretli ise onun yerine konularak ardışık 2 kök değeri arasındaki mutlak değer farkı epsilondan küçük olana kadar işleme devam edilir.



$$\boxed{x_{k+1} = x_0 - \frac{x_k - x_0}{y_k - y_0} \cdot (y_0)}$$

$$\overset{\triangle}{x_0 x_2 y_0} \cong \overset{\triangle}{y_0 A y_1}$$

$$\frac{-y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1 + (-y_0)}{x_1 - x_0}$$

$$-y_0 (x_1 - x_0) = (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)$$

$$x_2 - x_0 = -\frac{(x_1 - x_0)}{y_1 - y_0} (y_0)$$

$$\boxed{x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot (y_0)}$$

KeskinColor

64 40

Örnek

$f(x) = x^3 - 20x + 16 \quad , \quad 3 < x < 5 \quad , \quad \varepsilon = 0.008$

$x_0 = 3 \qquad f(x_0) = -17 = y_0$

$x_1 = 5 \qquad f(x_1) = 41 = y_1$

$x_2 = x_0 - \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot y_0 = 3.586 \qquad f(x_2) = y_2 = -9.6$

$x_0 = 3.586 \qquad x_1 = 5$
$y_0 = -9.6 \qquad y_1 = 41$

$x_3 = 3.854 \qquad y_3 = -3.083$

$x_0 = 3.854 \qquad x_1 = 5$
$y_0 = -9.6 \qquad y_1 = 41$

$x_4 = 3.64 \qquad y_4 = -8.57$

$x_0 = 3.64 \qquad x_1 = 5$
$y_0 = -8.57 \qquad y_1 = 41$

$x_5 = 3.875 \qquad y_5 = -3.081$

LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Matrisler ve Özellikleri

Alt Üçgen Matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Üst Üçgen Matris

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Bant Matris

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots & & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & \\ \cdots & & & a_{i-1,j-3} & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & \\ \cdots & & & & a_{i,j-2} & a_{i,j-1} & a_{i,j} & \end{bmatrix}$$

L_1 / a_{11}

$L_2 - (a_{21} * L_1)$

$L_3 - (a_{31} * L_1)$

$L2 / a_{22}$

$L1 - (a_{12} * L_2)$

$L_3 - (a_{32} - L_2)$

L_3 / a_{33}

$L_1 - (a_{13} * L_3)$

$L_2 - (a_{23} * L_3)$

Doğrusal Denklem Takımları

- Dolaysız Yöntem
  - Cramer Yöntemi
  - Eliminasyon Yöntemi
    - Gauss
    - Gauss Jordan
  - Yoğunlaştırılmış Yok etme

- Dolaylı Yöntem
  - Jacobi Yöntemi
  - Gauss-Seidel

Cramer Yöntemi

Değişken sayısı az ise tercih edilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{|A|} \qquad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{bmatrix}}{|A|}$$

Gauss Yok Etme (Eliminasyon) Yöntemi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = c_i \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 + a_{12}' x_2 + a_{13}' x_3 + \dots + a_{1n} x_n = c_1 \\ \qquad\quad x_2 + a_{23}' x_3 + \dots + a_{2n} x_n = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn} x_n = c_n \end{array}\right]$$

$L1 / a_{11}$

$L2 / a_{21}$, $L2 - L1$, $L2 * a_{21}$

L_3 / a_{31} , $L_3 - L_1$, $L_3 * a_{31}$

L_2 / a_{22}

L_3 / a_{32} , $L_3 - L_2$, $L_3 * a_{32}$

L_3 / a_{33}

$$\left.\begin{array}{l} k = 1, \dots, n \\ i = n - k + 1 \end{array}\right\} \quad X_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[c_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right]$$

Dolaysız Yöntemler - Eliminasyon Yönt.

- Gauss Jordan Yöntemi

Üst üçgen haline getirilen matris birim matris yapılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} ① & 2.\text{satır} - 3.\text{satır} * \alpha_{23} \\ ② & 1.\text{satır} - 3.\text{satır} * \alpha_{13} \\ ③ & 1.\text{satır} - 2.\text{satır} * \alpha_{12} \end{array}\right\} \begin{bmatrix} \beta_1 - \beta_3 * \alpha_{13} - (\beta_2 - \beta_3 * \alpha_{23}) * \alpha_{12} \\ \beta_2 - \beta_3 * \alpha_{23} \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Dolaysız Yöntemler - Yoğunlaştırılmış Yöntemler

- Cholesky Yöntemi

Bu yöntemde katsayılar matrisi biri alt biri üst 2 matrise ayrılır.

$$[A][X] = [C]$$

$[A]$ → Lower, Upper

$$[L][U][X] = [C]$$

$$[U][X] = [Y]$$

$$[L][Y] = [C]$$

$$[U][X] = [Y]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22} & L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12}+L_{32} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33} \end{bmatrix}$$

$L_{11} = a_{11}$ $\qquad$ $L_{21} = a_{21}$

$U_{12} = a_{12}/a_{11}$ $\qquad$ $L_{22} = a_{22} - (a_{21} * (a_{12}/a_{11}))$

$U_{13} = a_{13}/a_{11}$ $\qquad$ $U_{23} = (a_{23} - a_{21} * (a_{13}/a_{11})) / (a_{22} - a_{21} * (a_{12}/a_{11}))$

$L_{31} = a_{31}$

$L_{32} = a_{32} - a_{33} * (a_{12}/a_{11})$

$L_{33} = a_{33} - (L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23})$

Örnek

$$3.6x_1 + 2.4x_2 - 1.8x_3 = 6.3$$
$$4.2x_1 - 5.8x_2 + 2.1x_3 = 7.5$$
$$0.8x_1 + 3.5x_2 + 6.5x_3 = 3.7$$

$$\begin{bmatrix} 3.6 & 2.4 & -1.8 \\ 4.2 & -5.8 & 2.1 \\ 0.8 & 3.5 & 6.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_{11} = 3.6$ $\quad L_{21} = 4.2$ $\quad L_{31} = 0.8$

$U_{12} = 0.67$ $\quad L_{22} = -8.6$ $\quad L_{32} = 2.96$

$U_{13} = -0.5$ $\quad U_{23} = -0.49$ $\quad L_{33} = 8.4$

$$\begin{bmatrix} 3.6 & 0 & 0 \\ 4.2 & -8.6 & 0 \\ 0.8 & 2.96 & 8.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.3 \\ 7.5 \\ 3.7 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 1.75$ $\quad y_2 = -0.02$ $\quad y_3 = 0.28$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.67 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.49 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.02 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 0.28$

$x_2 = 0.12$

$x_1 = 1.81$

Dolaylı Yöntemler (İteratif Yönt.)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n$$

$$x_1 = \frac{-1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n\right) + \frac{c_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{-1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n\right) + \frac{c_2}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{-1}{a_{nn}}\left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}\right) + \frac{c_n}{a_{nn}}$$

1. Katsayılar maximum diyagonel olması sağlanır.
2. Sonrasında değişkenler çekilir.

- Basit iterasyon (Jacobi)

örnek

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9$$
$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -8$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$

Başlangıç değeri: $x_1 = x_2 = x_3$

$\mathcal{E} = 0.001$

$|x_{k+1} - x_k| \leq \mathcal{E}$

max diyagonal: $\begin{matrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{matrix} \longrightarrow 48$

$$x_1 = (9 - x_2 + 2x_3)/3$$

$$x_2 = (-8 + x_1 + 3x_3)/4$$

$$x_3 = (1 - x_1 + x_2)/4$$

# iterasyon	x_1	$\lvert\Delta x_1\rvert$	x_2	$\lvert\Delta x_2\rvert$	x_3	$\lvert\Delta x_3\rvert$
0	1	–	1	–	1	–
1	3.333	2.333	-1	2	0.250	0.750
2	3.5	⋮	-0.979	⋮	-0.833	⋮
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
12	3.001	0.002	-1.999	0.001	-1	0.0001
13	3.0	0.001	-2	0.0001	-1	0.001

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$

$x_3 = -1$

İşlem yapılan iterasyonda bir önceki iterasyon sonuçları kullanılır.

KeskinColor

- Gauss - Seidel Yöntemi:

- max diyagonel bulunur
- her denklemden 1 değişken çekilir
- başlangıç değerleriile işleme devam edilir.
- tüm değişkenin $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$ 'a uyması beklenir
- her iterasyon adımında kullanılan değişkenin aldığı son değer hesaplamaya katılır.

Örnek

Bir önceki sayfadaki denklem takımı için:

# iterasyon	x_1	$\lvert\Delta x_1\rvert$	x_2	$\lvert\Delta x_2\rvert$	x_3	$\lvert\Delta x_3\rvert$
0	1	—	1	—	1	—
1	3.333	2.333	-0.417	1.417	-0.688	1.688
2	2.680	0.348	-1.845	1.428	-0.882	0.194
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	3.00	0.001	-2.0	0	-1	0

NON-LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

İki Değişkenli Eşitlikler

$f(x,y)=0$

$g(x,y)=0$

Taylor Serisini açarak çözüme gidilir.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0).h + \frac{f''(x_0).h^2}{2!} + \cdots$$

$$X_0 = \Delta x = x_{k+1} - x_k$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0).h + \frac{g''(x_0).h^2}{2!} \cdots$$

$$f(x_0+h, y_0+h) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}.h + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}.\frac{h^2}{2!} \cdots$$

$$g(x_0+h, y_0+h) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}.h + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}h + \cdots$$

Sadece 1. dereceden türev alınarak eşitlik sıfıra eşitlenir.

$$f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = 0$$

$$g(x_0,y_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta y \end{aligned}\right\} |x_{n+1}-x_n|, |y_{n+1}-y_n| < \varepsilon$$

(iki değişkenli)

KeskinColor

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial h(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial h(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{x_0,y_0,z_0} \\ -g_{x_0,y_0,z_0} \\ -h_{x_0,y_0,z_0} \end{bmatrix}$$

3 bilinmeyenli:

Örnek

$x^2+y-3=0 \qquad x_0=0.7$

$x+y^2-5=0 \qquad y_0=1.7$

$\varepsilon = 0.008$

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-x^2-y \\ 5-x-y^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.4 & 1 \\ 1 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.81 \\ 1.41 \end{bmatrix}, \quad \Delta x = 0.31, \quad \Delta y = 0.38$$

$x_1 = 0.7+0.31 = 1.8, \quad y_1 = 1.7+0.38 = 2.8$

$$\begin{bmatrix} 2.02 & 1 \\ 1 & 4.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10 \\ -0.34 \end{bmatrix}, \quad \Delta x = -0.01, \quad \Delta y = -0.08$$

$x = 1 \qquad y = 2$

KeshinColor

NÜMERİK İNTEGRAL

- Newton Cotes İntegral Formülleri

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n . x^0$ şeklinde yazılır.

Nümerik integral, $\int_a^b f(x)\,dx$ integralini yaklaşık olarak bulmaktır.

İntegral sınırları a ve b sabit iseler ve fonksiyon bu aralıkta sürekli ise integralin sonucu da sabit olup. $y = f(x)$ eğrisinin altında kalan $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan alana eşittir.

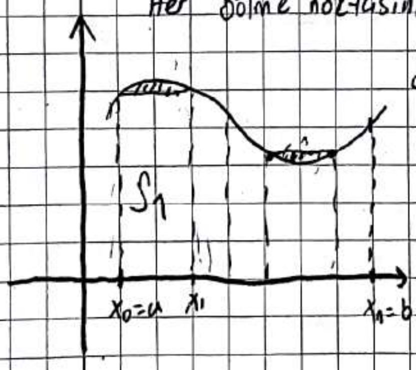
Trapez (Yamuklar) Yöntemi

$$I = \sum_{i=1}^{n} h_i * f_i \quad , \; f_i \longrightarrow f(x_i)$$

$h_i \longrightarrow$ i. dikdörtgenin genişliği , $h_i = x_{i+1} - x_i$

Eğer dikdörtgenlerin genişlikleri eşit ise $h = \dfrac{b-a}{n}$

Her bölme noktasında dik doğrular çizip, diklerin fx kesişimlerini birer doğruyla birleştirerek n tane yamuk elde edebiliriz.



Her yamuğun alanı $\dfrac{a+b}{2} . h$ 'dır.

$S_1 = \dfrac{y_0 + y_1}{2} * h$, $S_2 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} * h$

$S_n = \dfrac{y_{n-1} + y_n}{2} . h$ $\quad \boxed{S_T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}$

$$S_T = \frac{1}{2} * h \left(y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \dots + y_n \right) = S_T = h . \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

KeskinColor

$a \rightarrow x_0$

$b \rightarrow x_n$

$$h = \Delta x = \frac{x_n - x_0}{2}$$

$$S = \Delta x \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_0 + k.\Delta x) \right]$$

örnek

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \qquad n=4$$

$a = x_0 = 0$

$b = x_n = 1$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$$

	X	f(x)
x_0	0	1
+h x_1	0.25	0.9412
+h x_2	0.50	0.8
+h x_3	0.75	0.64
+h x_4	1	0.5

$$S_T = 0.25. \left[\frac{1+0.5}{2} + (0.9412 + 0.8 + 0.64) \right] = 0.78279$$

Örnek

$$\int_{-1}^{2} x^3\,dx$$

$$S_1 = \int_{0}^{2} x^3\,dx \qquad S_2 = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx \qquad n=4$$

S1

	X	$f(x)$		X	$f(x)$
x_0	0	0	x_0	-1	- 1
x_1	0,5	0.125	x_1	-0.75	- 0.4218
x_2	1	1	x_2	-0.5	- 0,125
x_3	1.5	3.375	x_3	-0.25	- 0.0156
x_4	2	8	x_4	0	- 0

$$h = \Delta x = \frac{1}{2} = 0.5$$

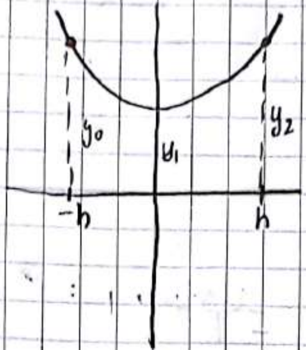
$$S_1 = 0.5\left[\frac{8+0}{2} + (0.125+1+3.375)\right] = 4.25\ br^2$$

$$S_2 = 0.25\left[\frac{1+0}{2} - (0.4218+0.125+0.0156)\right] = 0.25\ br^2$$

$$ST = 4.5\ br^2$$

Simpson Yöntemi

$f(x) = ax^2+bx+c$ şeklinde verilmişse



$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2+bx+c)\, dx$$

Analitik:

$$S = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \Big|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}(ah^2+6ch)$$

Denklemin katsayıları bilinmediğinden S eşitliğini y_0, y_1, y_2 cinsinden yazalım.

$x=-h$ için $f(x_0) = f(-h) = y_0 = ah^2-bh+c$

$x=0$ için $f(x_0) = f(0) = y_1 = c$

$x=h$ için $f(x_0) = f(h) = y_2 = ah^2+bh+c$

$y_0+y_2 = 2ah^2+2c$

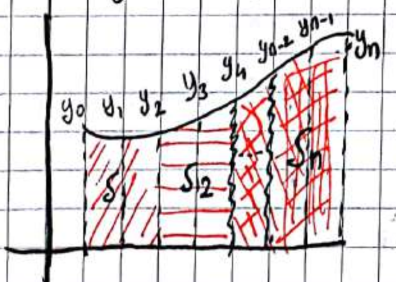
$y_1 = c$

$y_0+y_2 = 2ah^2+2y_1$

$y_0+y_2-2y_1 = 2ah^2$

$\Rightarrow S = h/3\,(y_0-2y_1+y_2+6y_1)$

$S = h/3\,(y_0+4y_1+y_2)$



$S_1 = h/3\,(y_0+4y_1+y_2)$

$S_2 = h/3\,(y_2+4y_3+y_4)$

$- - - - - - - - - -$

$h = \Delta x = \dfrac{x_n - x_0}{n}$

$+\; S_n = h/3\,(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$

$S = h/3\,(y_0+4y_1+y_2+y_2+4y_3+ \dots + y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$

$$S = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{k=1,3,5\dots}^{n-1} f(x_0+k\Delta x) + 2\cdot \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0+i\Delta x) \right]$$

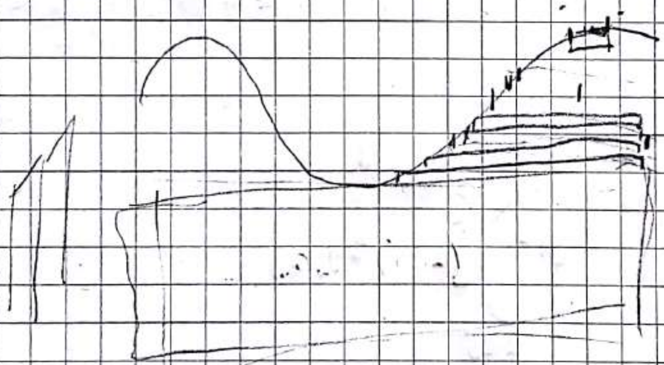
Örnek

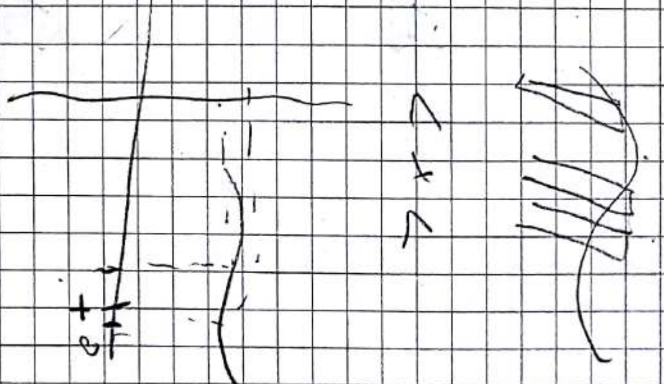
$$\int_{-1}^{2} x^3 dx = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{2} x^3 dx \qquad h=0.5$$

$$S_1 = \frac{0.5}{3}\left[0+8+4*(0.25+3.375)+2*1\right] = 4 \text{ br}^2$$

$$S_2 = \frac{0.25}{3}\left[-1+0+4*(-0.4218-0.0156)+2*(-0.125)\right] = -0.245 \text{ br}^2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 + 0.245 = \underline{4.25 \text{ br}^2}$$





$\lim_{x\to a} f(x) = L$

$0 < |x-a| < \delta$

$|x-a| < \delta$

$|f(x)-L| < \varepsilon$

Çift Katlı İntegral

Örnek

$$\int_{2}^{3}\int_{x}^{2x^3}(x^2+y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{2}^{3} g(x)\,dx \qquad h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-2}{4}=0,25$$

X	g(x)
2	g_0
2.25	g_1
2.5	g_2
2.75	g_3
3	g_4

Analitik = 790.55 br^2

$$S_s=\frac{0.25}{3}\left[g_0+g_4+4(g_1+g_3)+2g_2\right]$$

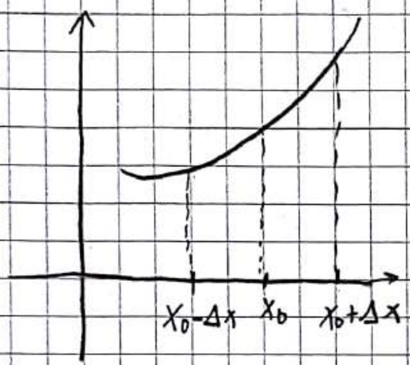
$$=790.451\ br^2$$

$$g_0=\int_{2}^{16}(4+y)\,dy \qquad g_1=\int_{2.25}^{2\cdot(2.25)^3}\left[(2.25)^2+y\right]dy$$

$$g_2=\int_{2.5}^{2\cdot(2.5)^3}\left[(2.5)^2+y\right]dy \qquad g_3=\int_{2.75}^{2(2.75)^3}\left[(2.75)^2+y\right]dy \qquad g_4=\int_{3}^{54}(9+y)\,dy$$

Nümerik Türev

x'in çeşitli değerleri için f(x) fonksiyonunun türevlerinin yine f(x) cinsinden yaklaşık olarak hesaplanması şeklinde tanımlanır. Nümerik türev, enterpolasyon ile yakın ilişkilidir. Önce yakın noktalardan geçen p(x) enterpolasyon polinomu oluşturulur. Sonra türev bulunur.



$x=x_0$ alındığında $f(x)$'in 1. türevi

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta f x_0}{\Delta x}$$

İleri fark türev operatörü

- İleri fark ile türev
- Geri fark ile türev
- Merkezi fark ile türev

Taylor Serisi

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1!}+\dots$$

$$f'(x_0)=\frac{f(\overset{x_0+\Delta x}{x_1})-f(x_0)}{\underset{\Delta x}{h}}$$

+1 -1
+1 -2 +1
+1 -3 +3 -1
+1 -4 +6 -4 +1

2. Türev

$$f''(x_0)=\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0+\Delta x)=\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f''(x_0)=\frac{\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}-\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$f''(x_0)=\frac{f(x_0+2\Delta x)-2f(x_0+\Delta x)+f(x_0)}{(\Delta x)^2}$$

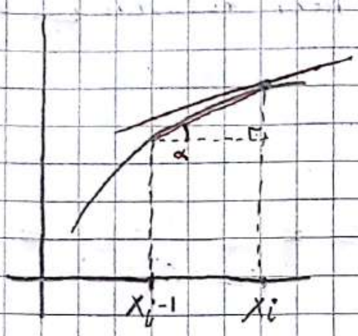
örnek

$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ $\quad h=0.01$ in 1. türevini $(x=4)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(4.01) - f(4)}{0.01} = \frac{24.1302 - 24}{0.01} = 13.02$$

Geri Fark ile Türev



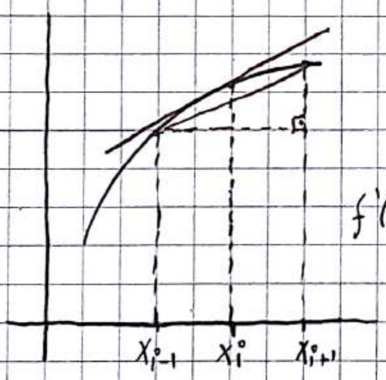
$$\tan\alpha = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} = \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \frac{\nabla y_0}{\Delta x}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i) \cdot \frac{h}{1!}$$

$$f''(x_0) = \frac{f'(x_0) - f'(x_{-1})}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{\Delta x}\right) - \left(\frac{f(x_{-1}) - f(x_{-2})}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

Merkezi Fark ile Türev



$$f'(x_i) = \left(\frac{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} + \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{\Delta x}}{2}\right)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} = \frac{\delta y_i}{2\Delta x}$$

Örnek

$y=e^x$ fonksiyonunun $X_0=1$ noktasındaki türevini $\Delta x=0.1$ alarak ileri, geri ve merkezi türev ile bulunuz.

İleri Fark ile $\longrightarrow$ $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{e^{1.1}-e}{0.1}=2.86$

Geri Fark ile $\longrightarrow$ $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)-f(x_{-1})}{\Delta x}=\dfrac{e^{1}-e^{0.9}}{0.1}=2.59$

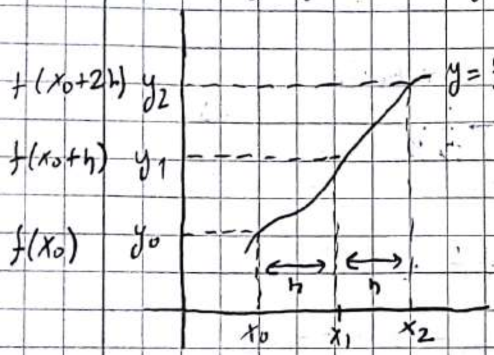
Merkezi Fark ile $\longrightarrow$ $f'(x_0)=\dfrac{f(x_{0+1})-f(x_{0-1})}{2\Delta x}=\dfrac{e^{1.1}-e^{0.9}}{0.2}=2.72$

KeskinColor

$E(y-\hat{y})^2 = (y-\hat{y})^2 + var(\varepsilon)$

SONLU FARKLAR

Problemlerimiz genellikle sürekli ve çok değişkenlidir ancak bazı durumlarda sadece belirli noktalarda belirlenmiş olabilir. Bu gibi durumlarda sonlu farklar kullanılarak fonksiyon için iyi bir tahminde bulunabilir.



- Δ ileri fark operatörü

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

- ∇ geri fark operatörü

$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

- E Kaydırma operatörü

$Ef(x) = f(x+h)$

$Ef(x) = f(x+h) = f(x) + \Delta f(x)$

$Ef(x) = f(x)(1+\Delta)$

$E = (1+\Delta)$

$E^2 f(x) = E(Ef(x)) = E(f(x+h)) = f(x+2h)$

$E^n f(x) = f(x+nh)$

2 veya daha yüksek dereceden ileri, geri ve merkezi farklar arasındaki ilişki:

1. Dereceden ileri fark

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

2. Dereceden ileri fark

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(f_{i+1} - f_i)$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

3. Dereceden ileri fark

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

1. Dereceden geri fark

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

2. Dereceden geri fark

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i)$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(f_i - f_{i-1})$$

$$\nabla^2 f_i = f_i - f_{i-1} - f_{i-1} + f_{i-2}$$

$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_i + f_{i-2}$$

1. Dereceden Merkezi Fark

$$\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$$

2. Dereceden Merkezi Fark

$$\delta^2 f_i = \delta(\delta f_i)$$

$$\delta^2 f_i = \delta(f_{i+1/2} - f_{i-1/2})$$

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

Keskin Color

n. Dereceden ileri Fark

$$\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$$

$$\Delta^k f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot f_{k-i} \quad , \quad \binom{k}{i} = \frac{k!}{i! \cdot (k-i)!}$$

Sonlu Fark Tabloları

İleri Farkı Kullanan Sonlu Fark Tablosu

x_i	$f(x_i)$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
x_4	f_4				

en son katsayı 0

Örnek $f(x) = x^3 - 3x \quad \Delta x = h = 1 \quad [-3, 2]$ fark tablosu

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
-3	-18					
		16				
-2	-2		-12			
		4		6		
-1	2		-6		0	
		-2		6		0
0	0		0		0	
		-2		6		
1	-2		6			
		4				
2	2					

Δx Δx

$\Delta^3 f(x) \rightarrow$ 3. dereceden

Fark Tablosunda Hatanın Yayılımı

x_i	fx_i	Δfx_i	$\Delta^2 fx_i$	$\Delta^3 fx_i$	$\Delta^4 fx_i$	$\Delta^5 fx_i$
x_0	f_0					
		Δf_0				
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$			
		Δf_1		$\Delta^3 f_0 + \varepsilon$		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1 + \varepsilon$		$\Delta^4 f_0 - 4\varepsilon$	
		$\Delta f_2 + \varepsilon$		$\Delta^3 f_1 - 3\varepsilon$		$\Delta^5 f_0 + 10\varepsilon$
x_3	$f_3 + \varepsilon$		$\Delta^2 f_2 - 2\varepsilon$		$\Delta^4 f_1 + 6\varepsilon$	
		$\Delta f_3 - \varepsilon$		$\Delta^3 f_2 + 3\varepsilon$		$\Delta^5 f_1 - 10\varepsilon$
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3 + \varepsilon$		$\Delta^4 f_2 - 4\varepsilon$	
		Δf_4		$\Delta^3 f_3 - \varepsilon$		
x_5	f_5		$\Delta^2 f_4$			
		Δf_5				
x_6	f_6					

$$\Delta^6 fx_i \longrightarrow \Delta^6 f_0 - 20\varepsilon$$

ENTERPOLASYON

Basit olarak enterpolasyon işlemi tablo halinde değerleri verilen değişkenin tabloda olmayan değerini bulabilmektir. Enterpolasyon bilinmeyen bir $y=f(x)$ fonksiyonunu $x_1, x_2, \dots, x_n$ ayrık noktalarıyla $f_1, f_2, \dots, f_n$ değerlerini kullanarak $\hat{f}(x)$ ile ifade edilmesidir. Fonksiyon polinom, üstel, trigonometrik, lineer veya herhangi özel bir fonksiyon olabilir.

$x_{k+1} - x_k = 1$

$x_{k+1} - x_k = \text{sabit}$

$x_{k+1} - x_k = \text{değişken}$

Enterpolasyon fonksiyonunu seçerken 2 yaklaşım kullanılır.

1) $f(x), [a,b] \longrightarrow |f(x) - \hat{f}(x)| \leq \varepsilon$

2) Periyodu 2π olan sürekli $\hat{f} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sin kx$

$|f(x) - \hat{f}(x)| \leq \varepsilon$

Lineer Enterpolasyon:

$F(x) = Ax + B$ ise lineer enterpolasyon adını alır.

$x \rightarrow [a, b]$

$\left.\begin{array}{l} f(a) = F(a) \\ f(b) = F(b) \end{array}\right\}$ sağlanması gerekir.

$Aa + b = f(a)$

$Ab + b = f(b)$

$A, B = ?$

$Aa + B = f(a)$

$\mp Ab \mp B = \pm f(b)$

$A(a-b) = f(a) - f(b)$

$$\boxed{A = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}}$$

$B = f(a) - A.a$

$B = f(a) - \left[\frac{f(a) - f(b)}{a-b}\right] a$

$$\boxed{B = \frac{f(a)(a-b) - (a f(a) - a f(b))}{a-b}}$$

Örnek $f(x) = 2x + 5$

x	y
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13

$\rightarrow [0, 4]$ $\hat{f} = Ax + B$

$A = \frac{13-5}{4-0} = 2$

$B = \frac{5.-4 - 0}{-4} = 5$

$\hat{f} = 2x + 5$

Gregory - Newton Enterpolasyon

$$\hat{f}(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i} \Delta^i f_0$$

$$\hat{f}(x) = f_0 + \binom{k}{1}\Delta f_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{n}\Delta^n f_0$$

$$k = \frac{x_i - x_0}{h}$$

$$\hat{f}(x) = f_0 + k\Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$\hat{f}(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{\left(\frac{x_i - x_0}{h}\right)\left(\frac{x_i - x_0}{h} - 1\right)}{2!} \cdot \Delta^2 f_0 + \dots$$

✓ $$\hat{f}(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)}{h^2\, 2!}\Delta^2 f_0 + \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)}{h^3\, 3!}\Delta^3 f_i$$

$h = 1$
$x_0 = 0$ ise

✓ $$\hat{f}(x) = f_0 + x\Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

Örnek

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$		
0	-4					
		2				
1	-2		14			
		16		18		
2	14		32		0	
		48		18		
3	62		50			0
		98		18		
4	160		68		0	
		166		18		
5	326		86			
		252				
6	578					

$x_0=0$

$h=1$

$$\hat{f}(x)=f_0+x\Delta f_0+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\cdot\Delta^3 f_0$$

$$\hat{f}(x)=3x^3-2x^2+x-4$$

örnek

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	10		
		40	
4	50		32
		72	
6	122		32
		104	
8	226		32
		136	
10	362		

$$\hat{f}(x) = f_0 + \Delta f_0 \cdot \frac{x_i - x_0}{2} + \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)}{3!\,2}\,\Delta^2 f_0 +$$

$$10 + \frac{40}{2}\cdot(x-2) + \frac{(x-2)(x-4)}{8}\cdot \overset{8}{\cancel{32}}\ 4$$

$$\hat{f}(x) = 10 + 20(x-2) + 4\,(x-2)(x-4)$$

Değişken Dönüşümü yaparak Ayrık Noktaların
Eşit Aralık Hale Getirilmesi

Örnek

X	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-1	2				
		-1			
0	1		10		
		9		36	
3	10		46		24
		55		60	
8	65		106		24
		161		84	
15	226		190		
		351			
24	577				

$$\hat{f}(z) = f_0 + z.\Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$
$$+ \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!}\Delta^4 f$$

z	X	Δx	$\Delta^2 x$
0	-1		
		1	
1	0		2
		3	
2	3		2
		5	
3	8		2
		7	
4	15		2
		9	
5	24		

$$\hat{f}(z) = z^4 - 2z^2 + 2$$

$$\hat{f}(x) = (\sqrt{x+1})^4 - 2(\sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$\hat{f}(x) = x^2 + 1$$

$$\hat{x}(z) = -1 + 1.z + z(z-1) = z^2 - 1$$

$$x = z^2 - 1$$

$$\pm\sqrt{x+1} = z$$

z	x	Δx
0	2	
		2
1	4	
		2
2	6	
		2
3	4	
		2
4	10	

	f	Δ	Δ^2
2	3		
		4	
4	7		8
		12	
6	19		8
		20	
8	39		8
		24	
10	67		

$$\hat{f}(x) = 3 + z \cdot 4 + \frac{z \cdot (z-1) \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}}$$

$$\hat{x}(z) = 2 + 2 \cdot z$$

$$\frac{x-2}{2} = z$$

$$3 + \cancel{4z} + 4z^2 - \cancel{4z}$$

$$4z^2 + 3$$

$$\cancel{4} \cdot x - 2$$

$$(x-2)^2 + 3$$

$$\boxed{x^2 - 4x + 7}$$

Lagrange Enterpolasyonu

(x_i, y_i) , $i = 1,2,3,\dots,n$ (nokta aralığı eşit olsun veya olmasın)

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i$$

$$, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Örnek

$y = f(x)$

x_i	y_i
0	-5
1	1
3	25

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) \cdot y_i$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_0 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$$

|

|

|

$$\hat{f}(x) = 2x^2 + 4x - 5$$

Regresyon

Fiziksel olayların çoğunda 2 veya daha fazla değişken bulunabilir. Zamana göre değişen olayda değişik aralıklarla ölçülen zaman için n adet $f(x)$ değeri ölçülmüş olsun. Gözlenen olayın doğrusal değişim göstermesi bekleniyorsa $y = A + Bx$. Gözlemdeki x_6 değerinden hesaplanan $y = A + x_6 B$ değeri ile gözlemden elde edilen y_6 arasındaki farkı min olacak şekilde bir doğru denklemi bulmak isteyelim. $d_p = y_p - A - Bx_6$ şeklinde yazılabilir ancak bu farklar '−' veya '+' olacağından teorik fonksiyonun göstereceği doğru bu yüzden fonksiyonların yerine fonksiyonlarının karelerinin toplamının min olması lazım.

$$e_i = y_p - \hat{y_p} \quad , \quad \hat{y_p} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x$$

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_p$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_p - \beta_0 - \beta_1 x)^2 = 2\hat{\beta}_0 \sum + 2\hat{\beta}_1 \sum x_i = 2 \sum y_i$$

$$\frac{\partial SS}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_p - \beta_0 - \beta_1 x)^2 \cdot x_i = 2\hat{\beta}_0 \sum x_i + 2B \sum x_i^2 = 2\sum x_i y_p$$

$$\hat{\beta}_0 \sum + \hat{\beta}_1 \sum x_i = \sum y_i$$
$$\hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Keskin Color

Örnek

X	y
0	1
2	5,1
4	9
6	13
8	17
10	21

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 30 \\ 30 & 220 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66,1 \\ 470,2 \end{bmatrix}$$

$$y = 1,038 + 1,995X$$

KeskinColor

Örnek

x	y
3	2.25
4	3
5	3.75
6	4
7	5.75

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 25 \\ 25 & 135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.75 \\ 101.75 \end{bmatrix}$$

$y = ax$

$y - ax$

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2 \rightarrow \frac{dRSS}{da} = 2\sum (y_i - ax_i)(-x_i) = 0$$

$$\downarrow$$

$$a \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$a = \frac{101.75}{135} = 0.7537$$

$$\hat{y} = 0.7537x$$

Örnek

Verilen noktalardan $F(x) = A + Bx + Cx^2$ parabolü geçirilmek istenirse, hata karelerinin minimum olması için kullanılacak matris nedir?

$$RSS = \sum e_i = \sum (y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)^2$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial A} = \cancel{-2}\sum (y_i - A - Bx_i - Cx_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial B} = \cancel{-2}\sum (y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)\, x_i = 0$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial C} = \cancel{-2}\sum (y_i - A - Bx_i - Cx_i^2) . x_i^2 = 0$$

$$-\sum y_i + \sum A + \sum Bx_i + \sum Cx_i^2 = 0$$

$$-\sum x_i y_i + \sum Ax_i + \sum Bx_i^2 + \sum Cx_i^3 = 0$$

$$-\sum x_i^2 y_i + \sum Ax_i^2 + \sum Bx_i^3 + \sum Cx_i^4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Verilen Noktadan

Trigonometrik fonksiyon Geçirmek

Örnek

$f(x_i) = a_0 + a_1 \cos x_i + b_1 \sin x_i$

arka sayfadakiyle aynı şekil

$$\begin{bmatrix} n & \sum \cos x_i & \sum \sin x_i \\ \sum \cos x_i & \sum \cos^2 x_i & \sum \cos x_i \sin x_i \\ \sum \sin x_i & \sum \cos x_i \sin x_i & \sum \sin^2 x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ \sum y_i \cos x_i \\ \sum y_i \sin x_i \end{bmatrix}$$

En Küçük Kareler Yönteminde Kullanılacak Fonksiyonun Seçimi

- Fark tablosu ile uydurulacak fonksiyonun derecesine karar verilir.
- Grafik çizilir, simetri aranır. Simetri varsa $\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot x^{2k+2}$
- Logaritmik kağıt üzerine çizilen grafik kullanılacak logaritmik veya üstel fonksiyon hakkında bilgi verir.
- Bazen çizilen grafik parçalanır ve her parçaya ayrı eğri uydurulur.

KeshinColor

Lineer Olmayan Fonksiyonların Uydurulması

$F(x,a,b) = a.e^{bx}$
$F(x,a,b) = a x^{b}$

$\Big\}$ tarzı fonksiyonlar lineer hale getirilir. Fonksiyonların logaritması alınır.

$y = a.e^{bx}$

$\ln y = \ln a + bx$

$$\underbrace{\ln y}_{\hat{y}} = \underbrace{\ln a}_{A} + \underbrace{b}_{B}x \longrightarrow \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

$\sum \ln y$

$\sum x \ln y$

$b = B$

$A = \ln a \rightarrow a = e^{A}$

$y = a x^{b}$

$\ln y = \ln a + b \ln x$

$$\hat{y} = A + B\hat{x} \longrightarrow \begin{bmatrix} n & \sum \ln x \\ \sum \ln x & \sum \ln^2 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln y \\ \sum \ln x . \ln y \end{bmatrix}$$

KeskinColor

Örnek

x	y
0	5.2
2	56.628
3	186.472
4	616.679
5	2035.040

$y = ab^x$

$\ln y = \ln a + x . \ln b$

$\hat{y} = A + Bx$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln y \\ \sum \ln y . x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 14 \\ 14 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(69057509231) = 24.958 \\ 87.550 \end{bmatrix}$$

$A = 1.6491 \qquad B = 1.194$

$a = e^A = 5.2021$

$b = e^B = 3.299$

$y = 5.2021 * 3.299^x$