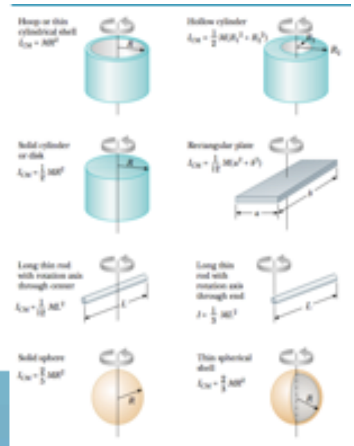
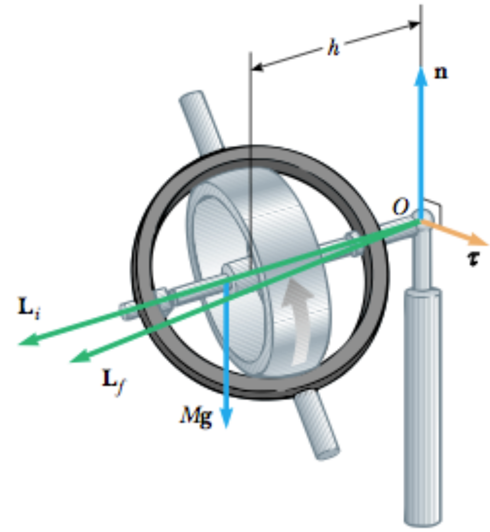
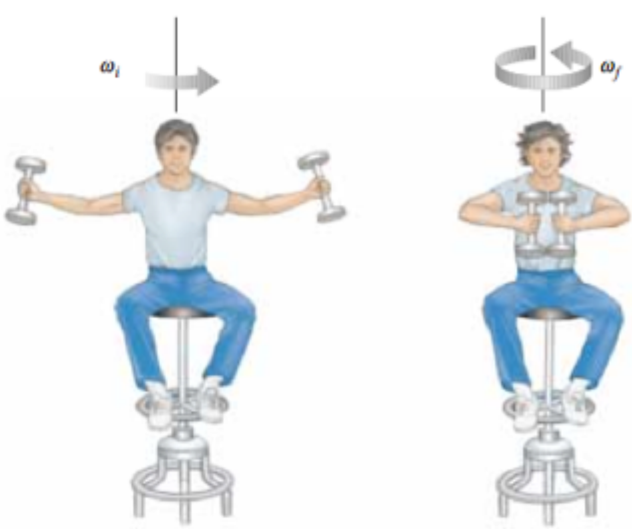
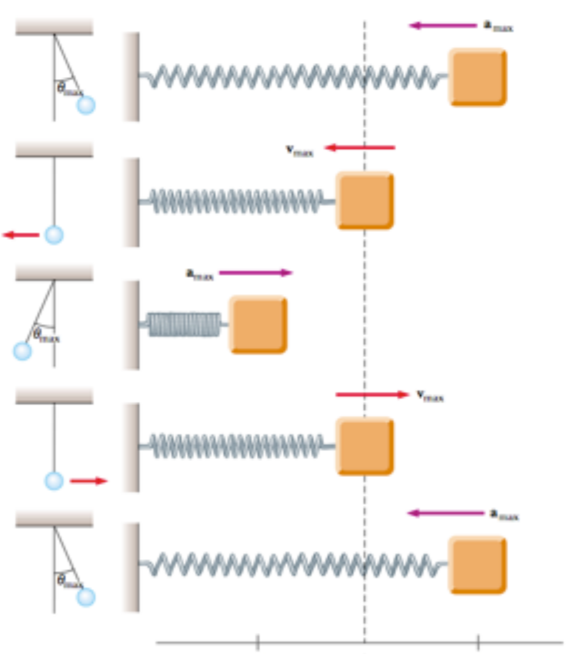


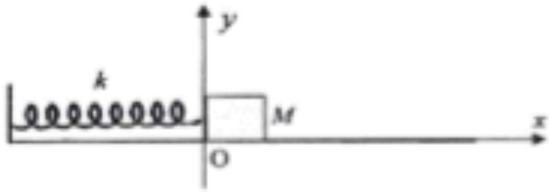


FİZİK-1 PROBLEMLERİ-VI





Problem (5) (20 puan)



Yay sabiti k=480 N/m ve bloğun kütlesi M=0,3kg olan yay-blok sistemi yay uzamamış haldeyken yaya bağlı blok O noktasında durmaktadır. Sürtünmesiz ortamda blok $+x_0$ kadar çekilip serbest bırakılıyor. Blok, O noktası etrafında basit harmonik hareket yapıyor. Blok O denge konumundan 2m/s hızla geçtiğine göre;

(a) Bloğun yaptığı hareketin genliğini (x_0 maksimum uzanımı) bulunuz.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\vartheta^2 \quad , (x_0 = A)$$

$$A^2 = \frac{m\vartheta^2}{k} = \frac{0{,}3\,(4)}{480}$$

$$\boxed{A = 0{,}05m} = x_0$$

yada;

$$\vartheta = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\,(A^2 - x^2)}$$

O denge durumunda $x = 0$

$$\vartheta^2 = \frac{k}{m}A^2$$

$$A^2 = \frac{m\vartheta^2}{k} = \frac{0{,}3\,(4)}{480} = x_0^2$$

$$\boxed{A = x_0 = 0{,}05m}$$

(b) Blok O noktasından x=+2,5cm uzaklıktan geçerken kinetik ve potansiyel enerjisini bulunuz.

$$K = \frac{1}{2}m\vartheta^2 = 0{,}45\,J$$

$$\vartheta^2 = \frac{k}{m}\,(x_0^2 - x^2)$$

$$\vartheta^2 = \frac{480}{0{,}3}\left[(0{,}05)^2 - (0{,}025)^2\right]$$

$$\vartheta^2 = 3\,m^2/s^2 \quad , \boxed{K = \frac{1}{2}m\vartheta^2 = 0{,}45\,J}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\,(480)\,(0{,}025)^2$$

$$\boxed{U = 0{,}15\,J}$$

(c) Hareketin titreşim frekansını bulunuz.

$$T = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow w = 2\pi f \quad \left(T = \frac{1}{f}\right)$$

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{480}{0{,}3}} = \boxed{\begin{aligned} &\frac{20}{\pi}\,s^{-1} \\ = &\frac{20}{3}\,s^{-1} \end{aligned}}$$

Problem (4) (25 puan)

(a) 2kg lık bir parçacık xy düzleminde hareket ediyor. Parçacığın konumu orjine göre zamanın fonksiyonu olarak $\vec{r} = (6\vec{i} + 5t\vec{j})$ şeklinde verilmektedir. Burada t saniye ve r ise metre cinsindendir. Parçağın açısal momentumunu orjine göre bulunuz.

m=2kg.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = (6\hat{i}+5t\hat{j}) \times m\vec{v}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(6\hat{i}+5t\hat{j})$$

$$\vec{v} = 5\hat{j}\ (m/s)$$

$$\vec{v} = 5\hat{j}\ m/s$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = 2.(5\hat{j})$$

$$\vec{p} = 10\hat{j}\ kg.m/s$$

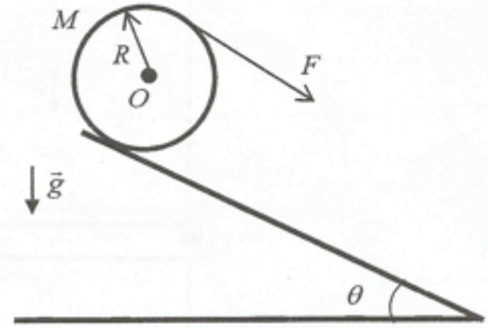
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

sıfır

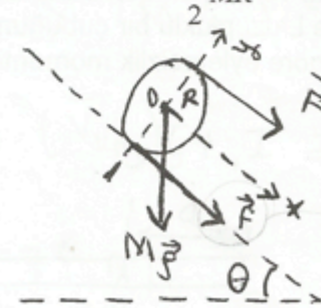
$$\vec{L} = (6\hat{i}+5t\hat{j}) \times 10\hat{j}$$

$$\vec{L} = 60\hat{k}\ kg.m^2/s$$

(b)



M kütleli R yarıçaplı bir tel bobin eğik düzleme paralel sabit bir F kuvveti ile açılıyor. Bobinin içi dolu silindir şeklinde olduğunu ve kaymadığını varsayınız. Sürtünme kuvvetini F, M, g ve θ ve cinsinden bulunuz. (Silindirin kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti $\frac{1}{2}MR^2$ dir)



$$\Sigma F_x = F + f + Mg\sin\theta = M a_{KM}$$

$$\Sigma \tau_{KM} = (F - f) R = I_{KM}\alpha$$

$$\alpha = \frac{a_{KM}}{R}$$

$$F - f = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a_{KM}}{R^2} = \frac{1}{2}M a_{KM}$$

$$F - f = \frac{1}{2}\left[F + f + Mg\sin\theta\right]$$

$$3f = F - Mg\sin\theta$$

$$f = \frac{F - Mg\sin\theta}{3}$$

Problem (4) (25 puan)

(a) 1,5kg lık bir parçacık xy düzleminde $\vec{V} = (4\vec{i} - 2\vec{j})\, m/s$ hızı ile hareket ediyor. Parçacığın konumu orjine göre $\vec{r} = (2\vec{i} + 3\vec{j})\, m$ olduğuna göre, parçağın açısal momentumunu orjine göre bulunuz.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \vec{P} = (6\hat{i} - 3\hat{j})\ kg.m/s$$

$$\vec{L} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \times (6\hat{i} - 3\hat{j})$$

$$\vec{L} = -6\hat{k} - 18\hat{k} = -24\hat{k}\ kg.\ m^2/s$$

(b) Açısal momentum ve tork kavramlarını kullanarak; Net torkun, açısal momentumun zamana göre değişme hızına eşit olduğunu $\left(\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}\right)$ gösteriniz.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \Sigma \vec{\tau} = \vec{r} \times \Sigma \vec{F}$$

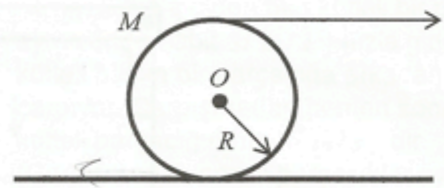
$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

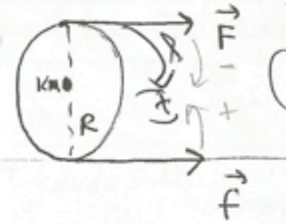
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \cancelto{0}{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}$$

(c)



M kütleli R yarıçaplı bir tel bobin yere paralel sabit bir F kuvveti ile açılıyor. Bobinin içi dolu silindir şeklinde olduğunu ve kaymadığını varsayınız. Sürtünme kuvvetini F cinsinden bulunuz. (Silindirin kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti $\frac{1}{2}MR^2$ dir.)



$(f - F)R =$

$$\Sigma F_x = F + f = M a_{KM}$$

$$\Sigma \tau_{KM} = (F - f)R = I_{KM}\alpha = I_{KM}\frac{a_{KM}}{R}$$

$$F - f = \frac{1}{2}M\cancel{R^2} \cdot \frac{a_{KM}}{\cancel{R^2}}$$

$$F + f = M a_{KM}$$

$$2F = \frac{3}{2} M a_{KM}$$

$$a_{KM} = \frac{4F}{3M}$$

$$f = F - \frac{1}{2} M \cdot \frac{4F}{3M}$$

$$f = \frac{F}{3}$$

$a_{KM} = \frac{4f}{3M}$

$F = f - \frac{1}{2}M\frac{4f}{3M}$

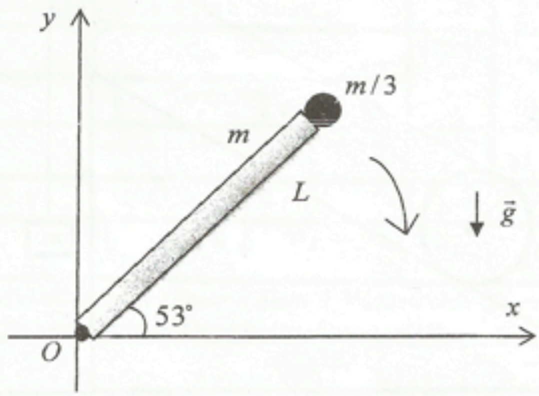
$F = f - \frac{4f}{6}$

$F = \frac{2f}{6}$

$\frac{6F}{2} = \frac{2f}{2}$

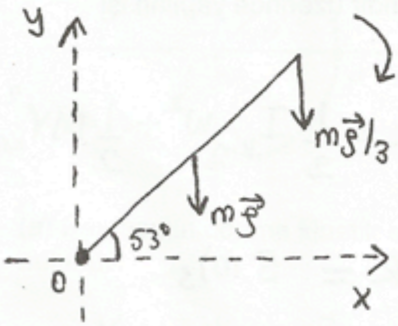
$f = 3F$

Problem (3) (25 puan)



Uzunluğu L, kütlesi m olan türdeş bir çubuğun bir ucuna m/3 kütleli küçük bir cisim bağlanmıştır. Sistem (çubuk+cisim), şekildeki gibi O noktasından geçen xy düzlemine dik bir eksen etrafında serbestçe dönebilecek durumdadır. m kütleli L uzunluklu türdeş bir çubuğun kütle merkezinden geçen ve çubuğa dik bir eksene göre eylemsizlik momenti $I_{KM}=\frac{1}{12}mL^2$ dir. Sürtünmeler önemsenmiyor.
Sistem şekildeki konumda iken;

(a) Sistemin açısal ivmesini g ve L cinsinden bulunuz.



$$\tau_0 = mg\frac{L}{2}\cos 53^\circ + mg\frac{L}{3}\cos 53^\circ = I_0\alpha$$

$$\tau_0 = \frac{mgL}{2} = I_0\alpha$$

$$I_0 = I_{\text{çubuk}} + I_{\text{cisim}}$$

$$I_{\text{çubuk}} = I_{km} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

$$I_{\text{cisim}} = \frac{mL^2}{3}$$

$$I_0 = \frac{2mL^2}{3}$$

$$\alpha = \frac{mgL}{2}\,\frac{3}{2mL^2} = \frac{3}{4}\,\frac{g}{L}$$

(b) Sistemin kütle merkezini birim vektörler ve L cinsinden bulunuz.

$$\vec{r}_{km} = x_{km}\,\hat{i} + y_{km}\,\hat{j}$$

$$x_{km} = \frac{mL/2\,\cos 53^\circ + mL/3\,\cos 53^\circ}{3m/4} = \frac{2L}{3}$$

$$y_{km} = \frac{mL/2\,\sin 53^\circ + mL/3\,\sin 53^\circ}{3m/4} = \frac{8}{9}L$$

$$\vec{r}_{km} = \frac{2L}{3}\,\hat{i} + \frac{8L}{9}\,\hat{j}$$

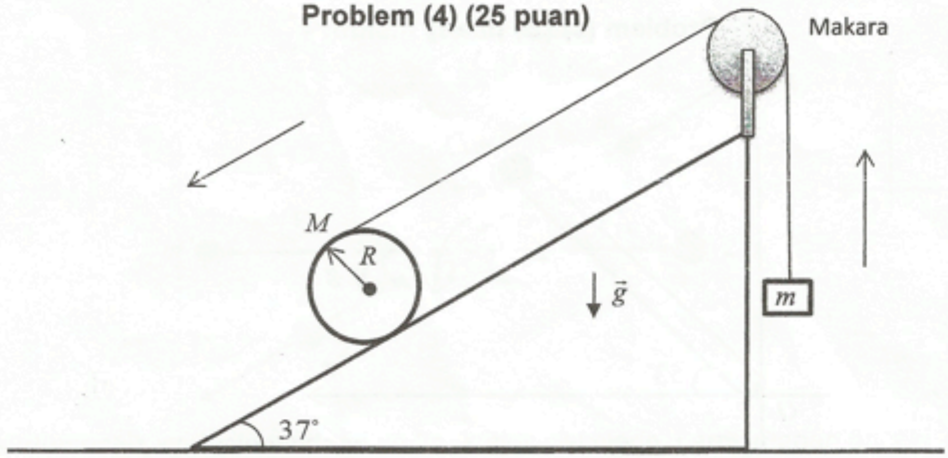
(c) Sistemin kütle merkezinin çizgisel ivmesini g cinsinden bulunuz.

$$a_{km} = \alpha\, r_{km}$$

$$r_{km} = \sqrt{\left(\frac{2L}{3}\right)^2 + \left(\frac{8L}{9}\right)^2} = \frac{10}{9}L$$

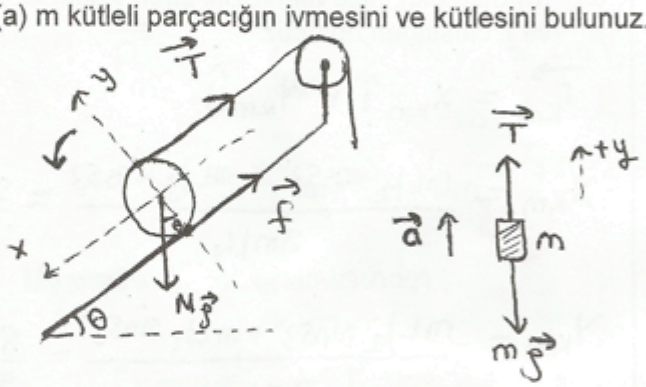
$$a_{km} = \frac{3g}{4L}\cdot\frac{10}{9}L = \frac{5}{6}g$$

Problem (4) (25 puan)



M=16kg kütleli R=10cm yarıçaplı içi dolu düzgün bir silindir, sürtünmeli bir eğik düzlem üzerinde m kütleli küçük bir parçacığa şekildeki gibi bağlıdır. İpin ve makaranın ağırlıkları önemsenmiyor. Silindir durgun haldeyken kaymadan aşağı doğru yuvarlanmaya başladığında kütle merkezinin çizgisel ivmesi $a_{KM} = 2\, m/s^2$ olarak ölçülüyor. (M kütleli R yarıçaplı içi dolu düzgün bir silindirin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$ dir)

(a) m kütleli parçacığın ivmesini ve kütlesini bulunuz.



$$a = 2a_{km} = 4\ m/s^2$$

$$\Sigma F_x = Mg\sin\theta - f - T = M a_{km} \quad \text{---(1)}$$

$$\tau_{KM} = (f-T)R = I_{km}\frac{a_{km}}{R}$$

$$f - T = \frac{1}{2} M a_{km} \quad \text{-----(2)}$$

$$T - mg = 2m\, a_{km} \Rightarrow T = mg + 2m a_{km}$$

(1) ve (2) taraf tarafa toplanır ve T yerine konursa;

$$m = \frac{M\left(g\sin\theta - \frac{3}{2}a_{km}\right)}{2g + 4a_{km}} = \frac{12}{7}\ kg$$

(b) Silindirin açısal hızı 50 rad/s' ye ulaştığında, silindir üzerinde yapılan işi hesaplayınız.

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I_{km} w^2 + \frac{1}{2} M V_{km}^2$$

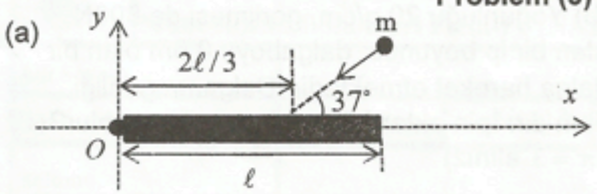
$$V_{km} = wR = 5\ m/s$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)w^2 + \frac{1}{2}m(5)^2$$

$$W = 300\ J$$

Problem (3) (25 puan)

(a)



Kütlesi M ve uzunluğu ℓ olan türdeş bir çubuk şekildeki gibi bir ucundan geçen xy düzlemine dik bir eksen etrafında (O noktası) serbestçe dönebilecek durumdadır. Başlangıçta durgun olan M kütleli çubuğa doğru, m kütleli küçük bir cisim hareket ediyor. m kütleli cisim, dönme ekseninden $2\ell/3$ kadar uzakta bir noktada M kütleli çubuğa çarparak yapışıyor. **(M=12m)**. Sistemin (çubuk+küçük cisim) çarpışmadan sonraki ve çarpışmadan önceki kinetik enerji oranlarını bulunuz. $\left(\frac{K_s}{K_i}=?\right)$

(M kütleli ℓ uzunluklu türdeş bir çubuğun bir ucundan geçen ve çubuğa dik bir eksene göre eylemsizlik momenti $I=\frac{1}{3}M\ell^2$ dir. Sürtünmeler önemsenmiyor)

$$\frac{K_s}{K_i}=\frac{\frac{1}{2}Iw^2}{\frac{1}{2}mV^2}=\frac{Iw^2}{mV^2}$$

Açısal momentum Korunur;

$$\vec{L_i}=\vec{L_s}\Rightarrow mV\sin 37^0\,\frac{2\ell}{3}=Iw$$

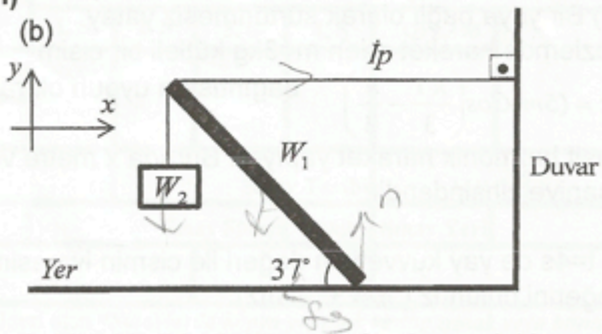
$$I=\frac{1}{3}M\ell^2+m\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2=\frac{40}{9}m\ell^2$$

$$mV\sin 37^0\left(\frac{2\ell}{3}\right)=\frac{40}{9}m\ell^2 w$$

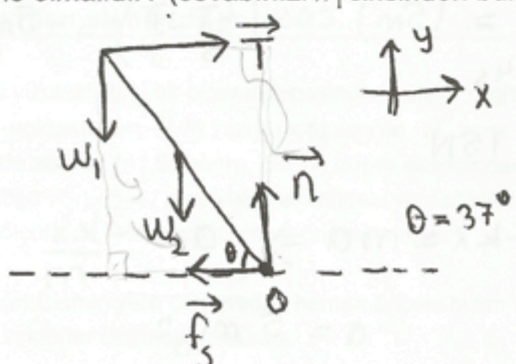
$$V=\frac{100}{9}\ell w$$

$$\frac{K_s}{K_i}=\frac{(40/9\,m\ell^2)w^2}{m(100/9\,\ell w)^2}=\frac{9}{250}=0{,}036$$

(b)



Şekildeki gibi ağırlığı W_1 olan L uzunluklu türdeş bir çubuğun bir ucuna ağırlığı W_2 olan bir cisim asılmıştır. Çubuk ile yer arasındaki statik sürtünme katsayısı $\mu_s=0{,}8$ dir. Sistemin **dengede** kalabilmesi için W_2 ağırlığı ne olmalıdır? (cevabınızı W_1 cinsinden bulunuz)



$$\sum\vec{\tau}_0=0\Rightarrow TL\sin 37^0=W_2L\cos 37^0+W_1\frac{L}{2}\cos 37^0$$

$$\sum\tau_0=W_1L\cos 37+W_1\frac{L}{2}\cos 37-TL\sin 37=0$$

$$\boxed{3T=4W_2+2W_1}$$

$$\sum\vec{F}=0\Rightarrow\sum F_x=0 \text{ ve } \sum F_y=0$$

$$(T=f_s)\quad (n=W_1+W_2)$$

$$T=f_s=\mu_s N=\mu_s(W_1+W_2)$$

$$4W_2+2W_1=3\underbrace{\mu_s(W_1+W_2)}_{T}$$

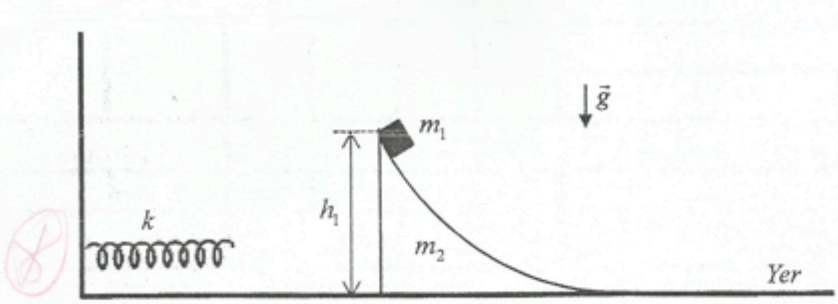
$$W_2=\frac{1}{4}W_1=0{,}25W_1$$

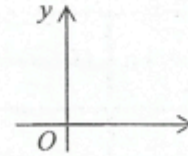
$$\sum F_x=T-f_s=0\Rightarrow T=f_s$$

$$\sum F_y=n-W_1-W_2=0$$

$$n=W_1+W_2$$

Problem (2) (25 puan)





$m_1 = 3kg$ kütleli cisim ile $m_2 = 1kg$ kütleli kavisli bir cisim şekildeki gibi başlangıçta durgundurlar. m_1 kütleli cisim $h_1 = 0{,}8m$ lik yükseklikten kavis üzerinden serbest bırakılıyor ve yere ulaştığı anda hareketini yatay düzlemde devam ettiriyor. Bu sırada m_2 kütleli kavisli cisim negatif x yönünde (sola doğru) hareket ederek yay sabiti k=100 N/m olan bir yayı sıkıştırıp, ters yönde hareketini sürdürerek m_1 kütleli cisme yetişiyor ve daha sonra m_1 kütleli cisim kavis üzerinde h_2 kadar yükseliyor. (Sürtünmeler önemsenmiyor) (**Enerji ve Momentum Korunum yasalarını kullanınız**).

9

(a) m_1 kütleli cisim ile m_2 kütleli kavisli cismin birbirlerinden hemen ayrıldıktan sonraki hızlarını birim vektörler cinsinden bulunuz.

$$\Sigma \vec{P}_i^\circ = 0 \quad ve \quad \Sigma \vec{P}_s = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 \qquad 3$$

$$\Sigma \vec{P}_i^\circ = \Sigma \vec{P}_s \Rightarrow \vec{V}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{V}_1 = -3\vec{V}_1$$

$$E_i^\circ = E_s \Rightarrow K_i + U_i^\circ = K_s + U_s$$

$$0 + m_1 g h_1 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 + 0$$

$$3 \qquad 24 = \frac{1}{2}(3)V_1^2 + \frac{1}{2}(1)(-3\vec{V}_1)^2$$

$$V_1^2 = 4 \Rightarrow \vec{V}_1 = 2\hat{i}\ m/s$$

$$\vec{V}_2 = -6\hat{i}\ m/s \qquad 3$$

7

(b) Yayın ne kadar sıkıştığını bulunuz.

$$E_i^\circ = E_s \qquad 2$$

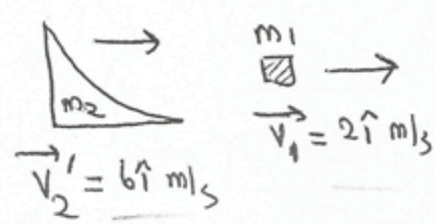
$$\frac{1}{2}m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}kx^2 \qquad 3$$

$$x = \frac{6}{10} = 0{,}6m \qquad 2$$

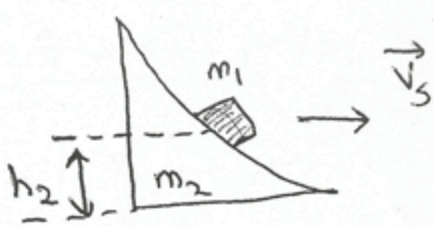
9

(c) m_1 kütleli cisim kavisli cisim üzerinde tekrardan ne kadar yükselir? ($h_2 = ?$)

önce:



sonra:



$$\Sigma \vec{P}_i^\circ = \Sigma \vec{P}_s \Rightarrow m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2' = (m_1+m_2)\vec{V}_s \qquad 3$$

$$\vec{V}_s = 3\hat{i}\ m/s \quad ve \quad E_i^\circ = E_s$$

$$1 \qquad \underbrace{\frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2'^2}_{m_1 g h_1} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_s^2 + m_1 g h_2 \qquad 3$$

$$24 = \frac{1}{2}4(3)^2 + 3(10)h_2$$

$$h_2 = 0{,}2m \qquad 2$$

Problem (3) (25 puan)

(a) Eylemsizlik momenti $400\ kg.m^2$, yarıçapı 6m olan ve kendi merkezi etrafında dönen bir platformun merkezinden 2m uzaklıkta, 50kg kütleli bir kişi durmaktadır. Platform, 3 rad/s lik açısal hızı ile dönmektedir. Kişi, platformun en dış kenarına doğru radyal olarak yürümeye başlıyor. Kişi plaformun en dış kenarına ulaştığı anda açısal hızı hesaplayınız. (sürtünmeler önemsizdir). **(10 puan)**

Açısal Momentum Korunur;

$$L_i = L_s \Rightarrow I_i w_i = I_s w_s$$

$$w_s = \frac{I_i w_i}{I_s} \quad ; \quad w_i = 3\ rad/s$$

$$I_i = I_{platform} + (I_{kişi})_i$$

$$I_i = 400 + 50(2)^2 = 600\ kg.m^2$$

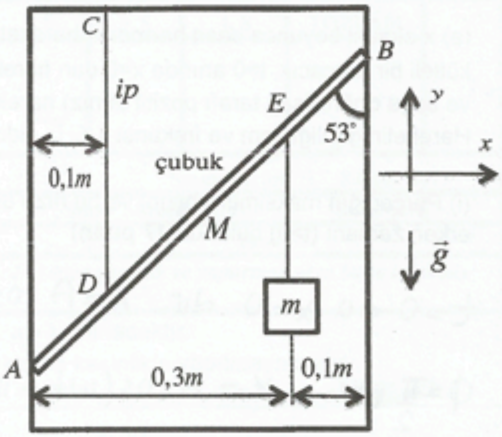
$$I_s = I_{platform} + (I_{kişi})_s$$

$$I_s = 400 + 50(6)^2 = 2200\ kg.m^2$$

$$w_s = \frac{600}{2200}(3) = \frac{18}{22}\ rad/s$$

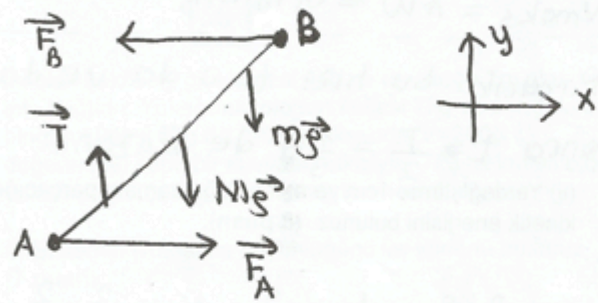
$$w_s = \frac{9}{11}\ rad/s$$

(b)



Kütlesi M=2kg olan düzgün bir çubuk şekildeki gibi iki düşey pürüzsüz **(sürtünmesiz)** duvar arasında bir ipe asılmış ve çubuk dengede tutulmuştur. Çubuğun uç noktaları (A ve B noktaları) duvar ile temas halindedir. E noktasında m=5kg kütleli bir cisim asılmıştır.

(i) Çubuğun serbest cisim diyagramını çiziniz. **(4 puan)**



(ii) CD ipindeki gerilmeyi hesaplayınız. **(4 puan)**

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = Mg + mg$$

$$T = g(M+m) = 70\ N$$

(iii) A ve B noktalarında çubuğa uygulanan tepki kuvvetler birim vektörler cinsinden bulunuz. **(7 puan)**

$$\Sigma \tau_B = 0 \Rightarrow F_A(0,3) + 20(0,2) + 50(0,1) = 70(0,3)$$

$$0,3 F_A = 12 \Rightarrow F_A = 40\ N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \vec{F_A} + \vec{F_B} = 0$$

$$\vec{F_B} = -40\hat{i}\ (N) \quad , \quad \vec{F_A} = 40\hat{i}\ (N)$$

Problem (4) (25 puan)

(a) x ekseni boyunca basit harmonik hareket yapan m=2kg kütleli bir parçacık, t=0 anında x=0 dan harekete başlıyor ve sağa doğru (sağ tarafı pozitif alınız) hareket ediyor. Hareketin genliği 2cm ve frekansı 1,5Hz olduğuna göre;

(i) Parçacığın maksimum hızını ve bu hıza ulaştığı en erken zamanı (t>0) bulunuz. **(7 puan)**

$t=0$ da $x=0$ dır. $x = A\cos(\omega t + \phi)$

$\phi = \frac{\pi}{2}$ olur. $x = A\cos(\omega t + \pi/2)$ veya

$x = A\sin\omega t$, $V = A\omega\cos\omega t$

$A = 0{,}02\,m$, $\omega = 2\pi f = 9\ rad/s$

$V_{maks} = A\omega = 0{,}18\ m/s$

Parçacık bu hızı $t=0$ da ve daha sonra $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{3}s$ de kazanır.

(ii) Yerdeğiştirme 1cm ye eşit olduğu zaman, parçacığın kinetik enerjisini bulunuz. **(8 puan)**

$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

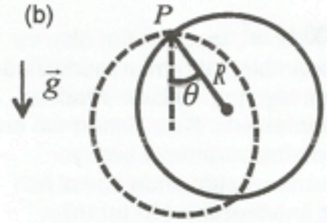
$V^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$

$K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$

$K = \frac{1}{2}(2)(9)^2(4-1)\times10^{-4}$

$K = 243\times10^{-4}\ J$

(b)



Yarıçapı R kütlesi M olan bir disk P noktasından duvara tutturularak, düzlemde salınım yapan bir fiziksel sarkaç olarak kullanılıyor. Küçük salınımlar (titreşimler) için sarkacın peryodunu π, g ve R cinsinden bulunuz. (Diskin kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$ dir.) **(10 puan)**

$\Sigma\tau_p = -MgR\sin\theta$

$= I_p\alpha$

$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\sin\theta \approx \theta$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{MgR}{I_p}}_{=\omega^2}\theta = 0$

$\omega^2 = \frac{MgR}{I_p} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{MgR}{I_p}}$

$I_p = MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = \pi\sqrt{6\frac{R}{g}}$

Problem 1- 25 puan

(a)(10 puan) İki parçacıklı bir sistemde; m_1=2 kg, $\vec{r}_1 = (2t^2)\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ ve m_2=4 kg, $\vec{r}_2 = \hat{\imath} + (t)\hat{\jmath}$, olacak şekilde kütle ve konum değerlerine sahiptir. Burada t saniye ve konumlar metre cinsindendir. t=2 s'de sistemin kütle merkezinin hızını ($\vec{V}_{KM}$) ve sistemin kütle merkezinin doğrusal momentumunu ($\vec{P}_{KM}$), birim vektörler cinsinden bulunuz.

$$\vec V_{km} = \frac{m_1\vec V_1 + m_2\vec V_2}{(m_1+m_2)}$$ 2

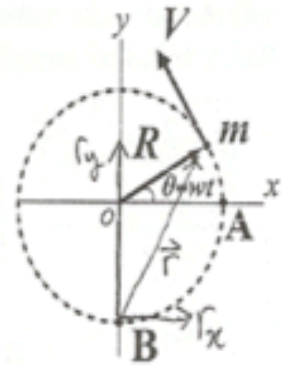
$$\vec V_1 = \left.\frac{d\vec r_1}{dt}\right|_{t=2} = 4t\,\hat\imath = 8\hat\imath \ (m/s)$$ 2

$$\vec V_2 = \left.\frac{d\vec r_2}{dt}\right|_{t=2} = \hat\jmath \ (m/s)$$ 2

$$\vec V_{km} = \frac{16\hat\imath + 4\hat\jmath}{(2+4)} = \boxed{\frac{8\hat\imath + 2\hat\jmath}{3}}\ (m/s)$$ 2

$$\vec P_{km} = M.\vec V_{km} = \boxed{16\hat\imath + 4\hat\jmath \ \left(kg\frac{m}{s}\right)}$$ 2

(b) (15 puan) m kütleli bir parçacık, xy-düzleminde yer alan R yarıçaplı dairesel yörüngede, V sabit hızıyla dönmektedir. Cismin hareketine **A** noktasında başladığını kabul ederek, **B noktasına** göre, $\vec{L}$ açısal momentumunu birim vektörler ve soruda verilenler cinsinden bulunuz. [İpucu: $\theta = wt = (\frac{V}{R})t$]



$$\vec L = \vec r \times \vec p$$ 2

$$\vec r = (R\cos\theta)\hat\imath + (R\sin\theta + R)\hat\jmath \ , \ \theta = \frac{Vt}{R}$$ 2

$$\vec r = \left[R\cos\left(\frac{Vt}{R}\right)\right]\hat\imath + \left[R\sin\left(\frac{Vt}{R}\right) + R\right]\hat\jmath \quad \text{I}$$ 2

$$\vec V = \frac{d\vec r}{dt} \Rightarrow \vec V = \left[-V\sin\frac{Vt}{R}\right]\hat\imath + \left[V\cos\left(\frac{Vt}{R}\right)\right]\hat\jmath$$ 2

2 $$\vec V = (-V\sin\theta)\hat\imath + (V\cos\theta)\hat\jmath \quad \text{II}$$

$$\vec L = m\,\vec r \times \vec v$$ 2 (I ve II'den)

$$\vec L = m\left[R\cos\theta\,\hat\imath + R(1+\sin\theta)\hat\jmath\right] \times \left[-V\sin\theta\,\hat\imath + V\cos\theta\,\hat\jmath\right]$$

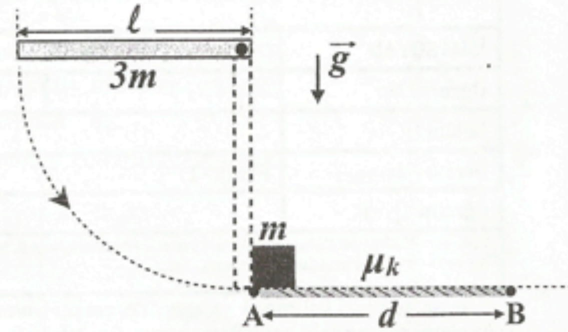
3 $$= mVR\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta\right)\hat k$$

$$\boxed{L = mVR(1+\sin\theta)\hat k}$$

Problem 2- 25 puan

Şekilde görüldüğü gibi, **3m** kütleli, **ℓ** uzunluğunda homojen bir çubuk, bir ucu etrafında sürtünmesiz dönebilecek durumda asılıdır. Çubuk yatay durumda serbest bırakılıyor. Çubuk tam dikey konuma geldiğinde, (A-noktasında) durmakta olan **m** kütleli cisimle **esnek olarak** çarpışıyor. Cevaplarınızı soruda verilenlerin bir kısmı veya tamamı cinsinden bulunuz.

(Bir ucundan geçen ve bir eksen etrafında dönen **M** kütleli, **L** uzunluğunda çubuğun bir ucuna göre eylemsizlik momenti, $I = \frac{1}{3}ML^2$)



(a) (8 puan) Çarpışmadan hemen önce çubuğun açısal hızını bulunuz? (w_i = ?)

$$I=\frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow I=\frac{1}{3}(3m)\ell^2$$

$$\boxed{I=m\ell^2}$$

$$K_i + U_i = K_s + U_s \quad \text{(Enerji)}$$

$$0+0=\frac{1}{2}I(w_i)^2+\left[-(3m)g\left(\frac{\ell}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\ell^{\cancel{2}}w_i^2 = 3\cancel{m}g\frac{\ell}{\cancel{2}}$$

$$\ell w_i^2 = 3g$$

$$\boxed{w_i=\sqrt{3g/\ell}} \quad //$$

(b) (7 puan) Çarpışmadan hemen sonra **m** kütleli cismin hızını (**V**) ve çubuğun açısal hızını (w_s) bulunuz?

$$Iw_i = Iw_s + mV.\ell \quad \text{(Açısal mom.)}$$

$$\boxed{I(w_i-w_s)=mV\ell} \quad \text{I}$$

$$(m\ell^2)(w_i-w_s)=mV\ell \Rightarrow \boxed{w_i-w_s=V/\ell} \quad \text{II}$$

$$\frac{1}{2}Iw_i^2=\frac{1}{2}Iw_s^2+\frac{1}{2}mV^2$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\underbrace{I(w_i-w_s)}_{}(w_i+w_s)=\frac{1}{\cancel{2}}mV^2$$

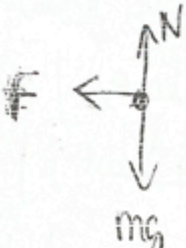
$$\cancel{m}\cancel{V}.\ell\,(w_i+w_s)=\cancel{m}V^{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{w_i+w_s=V/\ell} \quad \text{III}$$

II ve III

$$\left.\begin{array}{l} w_i-w_s=V/\ell \\ w_i+w_s=V/\ell \end{array}\right\} \quad \boxed{w_s=0}$$

$$w_i=V/\ell \Rightarrow \boxed{V=\ell w_i=\sqrt{3g\ell}}$$

(c) (10 puan) Çarpışmadan sonra, **m** kütleli cisim kinetik sürtünme katsayı $\mu_k = 1$ olan (A ve B noktaları arası) yüzeyde **d** kadar yol aldıktan sonra, B noktasındaki hızını bulunuz.



$$F=N.\mu_k = mg.\mu_k, \ \mu_k=1 \Rightarrow \boxed{F=mg}$$

$$\Delta K = -F.\Delta x$$

$$\boxed{V_A=\sqrt{3g\ell}}$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2-\frac{1}{2}mV_A^2 = -mg.d$$

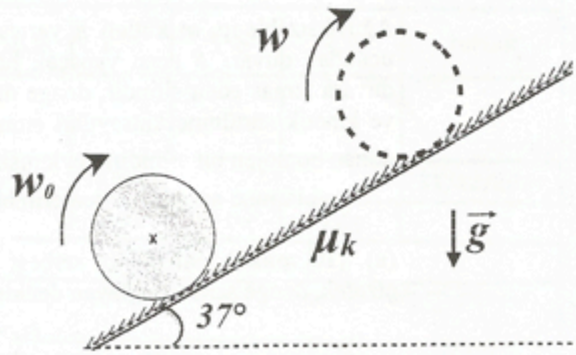
$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2=\frac{1}{2}\cancel{m}\,3g\ell-\cancel{m}gd$$

$$\boxed{V_B=\sqrt{g(3\ell-2d)}}$$

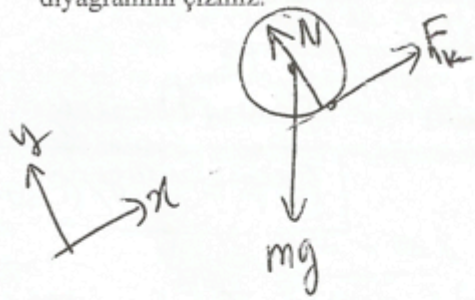
Problem 3- 25 puan

M kütleli, ***R*** yarıçaplı ve kütle merkezi etrafında eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}MR^2$ olan bir disk, w_0 ilk açısal hızı ile dönmektedir. Disk, şekilde görüldüğü gibi **sürtünmeli** ve eğimli bir yüzeye, kütle merkezinin çizgisel hızı sıfır olacak şekilde konuyor. Disk, bir miktar kaydıktan (patinaj yaptıktan) hemen sonra eğik düzlem üzerinde yukarı doğru kaymadan yuvarlanarak hareket ediyor. Kinetik sürtünme katsayısı μ_k olan yüzey, *37°* eğime sahiptir.

Cevaplarınızı soruda verilenlerin bir kısmı veya tamamı cinsinden bulunuz. *(Cos37°=0.8; Sin37°=0.6)*



(a) (5 puan) Diskin, tam kayma anında serbest cisim diyagramını çiziniz.



(b) (5 puan) Diskin tam kayma anında serbest cisim diyagramını ve hareket denklemlerini kullanarak çizgisel ivmesini (**a**=?) ve açısal ivmesini (**α** =?) bulunuz.

$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_k - mg\sin\theta = ma$ (I)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0$ (II)

$\Sigma \tau_{km} = I\alpha \Rightarrow -F_k R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\cdot\alpha$ (III)

$\boxed{F_k = N\mu_k = mg\cos\theta\,\mu_k}$

İlk denklemde yazarsak

$mg\cos\theta\,\mu_k - mg\sin\theta = ma$

$a = (\mu_k\cos\theta - \sin\theta)g$

$\theta = 37° \Rightarrow \boxed{a = \left(\frac{4\mu_k - 3}{5}\right)g}$

III. denklem $\alpha = -2\mu_k\cos\theta\,\frac{g}{R}$

$\boxed{\alpha = -\frac{8}{5}\frac{\mu_k\cdot g}{R}}$

(c) (8 puan) Eğer kinetik sürtünme katsayısı μ_k=1 ise disk tam yuvarlanma hareketine ne kadar sürede geçer.

$\boxed{\alpha = -\frac{8}{5}\frac{g}{R}}$

$w(t) = w_0 + \alpha t$

$w(t) = w_0 - \left(\frac{8g}{5R}\right)t$

$V(t) = \cancel{V_0}^{0} + at = \left(\frac{g}{5}\right)t$

kaymadan yuvarlanma $\Rightarrow$ $V = Rw$

$\frac{gt}{5} = R\left(w_0 - \frac{8gt}{5R}\right)$

$\boxed{t = \frac{5Rw_0}{9g}}$

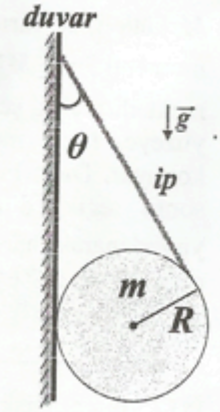
(d) (7 puan) Diskin tam yuvarlanma hareketine başladığı zaman, çizgisel (**V**=?) ve açısal (**w**=?) hızını bulunuz.

$V = \frac{gt}{5} = \frac{g}{5}\left(\frac{5Rw_0}{9g}\right) = \boxed{\frac{Rw_0}{9}}$

$w = \frac{V}{R} \Rightarrow \boxed{w = \frac{w_0}{9}}$

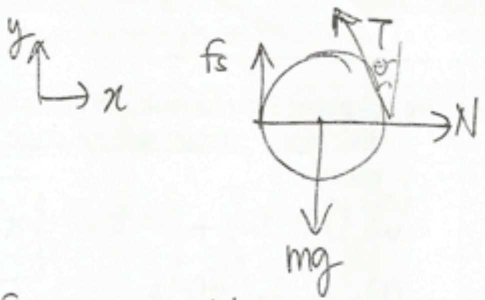
Problem 4- 25 puan

Ağırlıksız bir ip, ***m*** kütleli ***R*** yarıçaplı silindir etrafına sarıldıktan sonra diğer ucundan duvara ***θ*** açısı yapacak biçimde asılmıştır. Şekilde gösterildiği gibi duvara temas eden silindir, denge durumundadır. Duvar ile silindir arası statik ve kinetik sürtünme katsayıları sırasıyla μ_s ve μ_k'dır. Kütle merkezi etrafında dönen homojen bir silindirin eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}mR^2$'dir.



Cevaplarınızı soruda verilenlerin bir kısmı veya tamamını kullanarak bulunuz.

(a) (10 puan) Silindirin serbest cisim diagramını çizerek, denge şartını sağlayan denklemleri yazınız.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N - T\sin\theta = 0$ (I)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta + f_s - mg = 0$ (II)

$\Sigma \tau_{cm} = 0 \Rightarrow TR - f_s R = 0$ (III)

(b) (8 puan) İpteki ***T*** gerilimini, f_s sürtünme kuvvetini ve duvarın uyguladığı ***N*** normal kuvveti bulunuz.

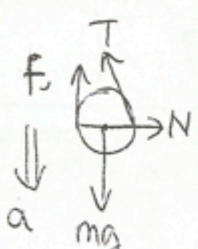
III'den $T = f_s$

II'den $T(\cos\theta + 1) = mg$

$\boxed{T = f_s = mg/(\cos\theta + 1)}$

I'den $N = T\sin\theta = \boxed{\dfrac{mg\sin\theta}{\cos\theta + 1}}$

(c) (7 puan) Daha küçük μ_s statik sürtünme katsayısı değerleri için denge bozulacak ve silindir kayacaktır. Böyle bir durumda, silindir duvarla hala temas halinde iken kütle merkezinin ivmesini ve dönen silindirin açısal ivmesini bulunuz.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = T\sin\theta$, $f = N\mu_k = T\sin\theta\,\mu_k$

$\Sigma F_y = -ma \Rightarrow T\cos\theta + f - mg = -ma$

$\boxed{T(\cos\theta + \sin\theta\,\mu_k) = mg - ma}$ (I)

$\Sigma \tau_{cm} = I\alpha \Rightarrow TR - fR = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right)$

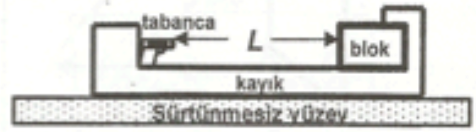
$\boxed{a = R\alpha}$

$T(1 - \sin\theta\,\mu_k) = \frac{ma}{2} \Rightarrow \boxed{T = \dfrac{ma}{2(1 - \sin\theta\,\mu_k)}}$ (II)

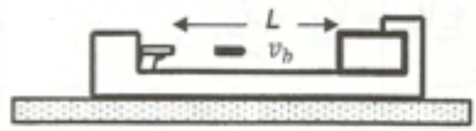
II'yi I'de yerine koyarsak $\boxed{a = \dfrac{2(1 - \sin\theta\,\mu_k)}{\cos\theta - \mu_k\sin\theta + 2}}$ ve $\boxed{\alpha = \dfrac{a}{R}}$

Problem 1

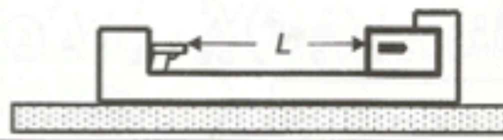
Şekil-1'de gösterildiği gibi bir blok ve bir tabanca, sürtünmesiz bir yüzey üzerinde bulunan uzun bir kayığın (durgun) karşılıklı uçlarına sıkıca sabitlenmiştir. Mermi tabancayı v_b hızıyla terk ederek (Şekil -2) karşı uçtaki bloğa çarpıp içine gömülmektedir (Şekil -3). Merminin kütlesi m_b ve tabanca-blok-kayık (platform) sisteminin kütlesi ise m_p. Aşağıdaki soruları v_b, L, m_b, and m_p cinsinden cevaplayınız.



Şekil-1



Sekil-2



Şekil-3

(a) Mermi tabancayı terk ettikten hemen sonra platformun hızı v_p ne olur?

Çizgisel momentum korunur:

$$\underbrace{\sum \vec{P}_i}_{\text{Şekil-1}} = \underbrace{\sum \vec{P}_s}_{\text{Şekil-2}}$$

$$0 = m_b v_b \hat{i} + m_p \vec{v}_p \quad (2)$$

$$\boxed{\vec{v}_p = -\frac{m_b}{m_p} v_b \hat{i}} \quad (3)$$

(b) Mermi tabancayı terk ettikten hemen sonra merminin ve platformun kütle merkezinin hızı ne olur?

$$(\vec{v}_{km})_i = (\vec{V}_{km})_s = 0$$

veya

$$(\vec{V}_{km})_s = \frac{m_b v_b \hat{i} - \cancel{m_p} \cdot \frac{m_b v_b \hat{i}}{\cancel{m_p}}}{m_b + m_p} = 0 \quad (5)$$

(c) Mermi bloğun içinde durduktan hemen sonra platformun hızı ne olur?

$$\underbrace{\sum \vec{P}_i}_{\text{Şekil-2}} = \underbrace{\sum \vec{P}_s}_{\text{Şekil-3}} \quad (2)$$

$$m_b v_b \hat{i} - m_p \left(\frac{m_b}{m_p} v_b\right) \hat{i} = (m_b + m_p) \vec{V}_{ps}$$

$$\boxed{V_{ps} = 0} \quad (3)$$

(d) Merminin bloğa çarpıp içine gömülmesi esnasında gerçekleşen enerji kaybını hesaplayınız.

$$\Delta K = K_s - K_i \; ; \; K_i = \underbrace{\frac{1}{2} m_b v_b^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2}_{\text{Şekil-2}} , \; K_s = 0 \quad (2)$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} m_b v_b^2 - \frac{1}{2} \cancel{m_p} \frac{m_b^2}{m_p^{\cancel{2}}} v_b^2$$

$$\boxed{\Delta K = -\frac{1}{2} m_b v_b^2 \left(1 + \frac{m_b}{m_p}\right)} \quad (3)$$

(e) Merminin tabanca içinde durgun olduğu durum ile bloğun içine gömülüp durgun hale geldiği durum arasında platform ne kadar hareket eder?

Mermi platforma göre $v_{mp} = v_b - v_p$ göreli hızı ile hareket eder. (1)

$$L = v_{mp} t \Rightarrow \boxed{t = \frac{L}{v_b - v_p}} \quad (2)$$

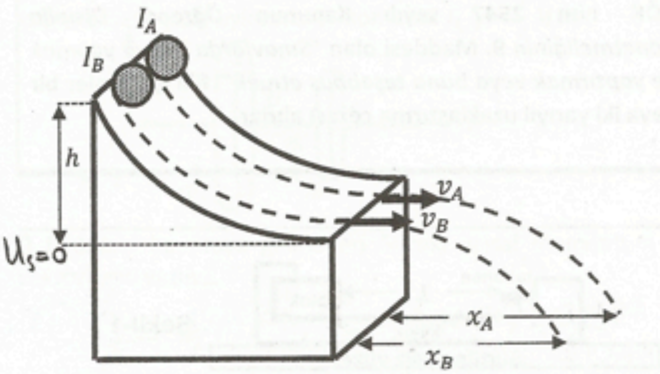
Aynı sürede platformun aldığı yol: X_p

$$X_p = v_p \cdot t = v_p \frac{L}{v_b - v_p} = \frac{m_b}{m_p} \frac{\cancel{v_b} L}{\cancel{v_b}\left(1 - \frac{m_b}{m_p}\right)}$$

$$\boxed{X_p = \left(\frac{m_b}{m_b + m_p}\right) L} \quad (2)$$

(13) **Problem 2** (12)

(a) Şekilde gösterildiği gibi, aynı yarıçaplı R ve aynı kütleli M bir küresel kabuk (A) ve bir katı küre (B) eğrisel bir rampadan aşağı durgun halden başlayarak aynı h yüksekliğinden kaymadan yuvarlanmaktadır. Her iki küre de rampayı yatay olarak terk etmektedir. Kürelerin kütle merkezlerinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti: $I_A = \frac{2}{3}MR^2$ (küresel kabuk) ve $I_B = \frac{2}{5}MR^2$ (katı küre).



i) Küreler rampayı terk ederken hızlarının oranını v_A/v_B bulunuz.

$$\cancel{K_i}_{0} + U_i = K_s + \cancel{U_s}_{0}$$

A küresi ; $Mgh = \frac{1}{2}I_A w_A^2 + \frac{1}{2}MV_A^2$ (2)

$$\cancel{M}gh = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cancel{M}\cancel{R^2}\right)\frac{V_A^2}{\cancel{R^2}} + \frac{1}{2}\cancel{M}V_A^2 \quad (1)$$

$$\boxed{2gh = \frac{5}{3}V_A^2} \quad (1) \quad (2)$$

B küresi : $Mgh = \frac{1}{2}I_B w_B^2 + \frac{1}{2}MV_B^2$ (2)

$$\cancel{M}gh = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\cancel{M}\cancel{R^2}\right)\frac{V_B^2}{\cancel{R^2}} + \frac{1}{2}\cancel{M}V_B^2 \quad (1)$$

$$\boxed{2gh = \frac{7}{5}V_B^2} \quad (2) \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} : \frac{V_A^2}{V_B^2} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (2)$$

ii) Küreler yere çarptıklarında menzillerin oranını x_A/x_B bulunuz. (Küreler rampayı terk ettikten sonra uçuş süreleri eşittir).

$$\left.\begin{aligned} X_A &= V_A \cdot t \\ X_B &= V_B \cdot t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{X_A}{X_B} = \frac{V_A}{V_B} \quad (2)$$

$$\boxed{\frac{X_A}{X_B} = \sqrt{\frac{3}{7}}} \quad (1)$$

(b) Bir disk 600 dev/min açısal hızla dönerken yavaşlayarak 10 s'de durgun hale gelmektedir. Açısal ivmesinin sabit olduğunu varsayarak ($\pi = 3$)

i) Diskin açısal ivmesini rad/s² biriminde bulunuz.

$$w_i = 600\frac{dev}{min} = \frac{60\cancel{0}\cdot 2\pi\, rad}{6\cancel{0}s} = \boxed{60\frac{rad}{s}} \quad (1)$$

$$w_s = w_i + \alpha t \quad (1)$$

$$0 = 60 + \alpha \cdot 10$$

$$\boxed{\alpha = -6\ rad/s^2} \quad (2)$$

ii) Disk durmadan önce kaç devir yapar?

$$\Delta\theta = w_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (1)$$

$$\Delta\theta = 60 \cdot 10 - \frac{1}{\cancel{2}} 6 \cdot \cancel{100}^{50}$$

$$\Delta\theta = 600 - 300 \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = 300\ rad} \quad (2)$$

$$\begin{array}{cc} 1\,dev & 2\pi\ rad \\ X & 300\ rad \end{array}$$

$$X = \frac{300}{2\pi} = \frac{300}{6} = \boxed{50\,dev} \quad (1)$$

iii) $t = 5s$'de diskin merkezinden $r = 1$m uzaklıktaki bir noktanın teğetsel ve radyal ivmesini bulunuz.

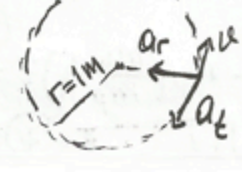
$$a_t = r\alpha \Rightarrow \boxed{a_t = 6\ m/s^2} \quad (1)$$

$$a_r = w^2 r \quad (1)$$

$$w = w_i + \alpha t$$

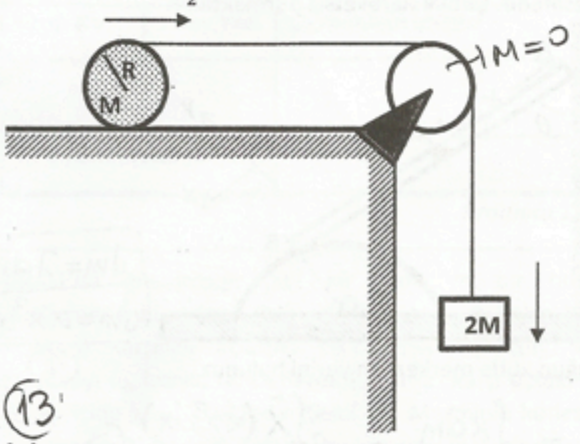
$$w = 60 - 6 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{w = 30\ rad/s} \quad (1)$$

$$a_r = (30)^2 \cdot 1 = \boxed{900\ rad/s^2} \quad (1)$$



Problem 3

Aşağı doğru hareket eden $2M$ kütleli bir blok hafif bir iple bağlanarak sürtünmesi ve kütlesi ihmal edilen sabit bir makaradan geçirilmiştir. İp diğer ucundan yatay ve sürtünmeli düzlemde bulunan R yarıçaplı ve M kütleli bir diske sarılmıştır. Disk düzlemde kaymadan yuvarlanmaktadır. Diskin kütle merkezlerinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti: $I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$.



13

(a) Disklerin ve bloğun serbest cisim diyagramlarını çiziniz ve hareket denklemlerini (kuvvet ve tork) yazınız.

<u>Yuvarlanan disk</u>

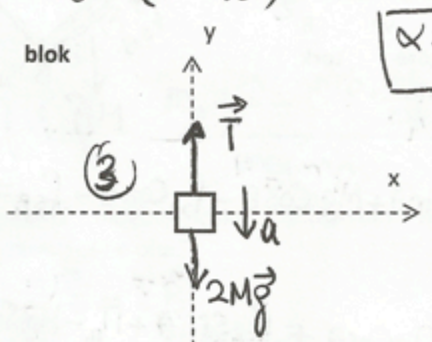
① $\Sigma F_x = T + f_s = Ma_{KM}$ (1)

① $\Sigma F_y = n - Mg = 0$ (2)

① $\Sigma \tau_0 = (T - f_s)R = I\alpha$ (3)

$\boxed{\alpha = \frac{a_{KM}}{R}}$ ①

blok



① $\Sigma F_y = T - 2Mg = 2M(-a)$ (4)

ve ① $\boxed{a = 2a_{KM}}$ (5)

(b) Bloğun ivmesini g'ye bağlı bulunuz.

$(1) \Rightarrow T + f_s = Ma_{KM}$ (6)

$(3) \Rightarrow T - f_s = \frac{I}{R^2} a_{KM}$ (7)

$(4) \Rightarrow 4Mg - 2T = 8Ma_{KM}$ (8)

$(6) + (7) + (8)$

$4\cancel{M}g = \cancel{M}(1 + \frac{1}{2} + 8)a_{KM}$

$4g = \frac{19}{2} a_{KM}$

$\boxed{a_{KM} = \frac{8}{19} g}$ 6

$a = 2a_{KM} \Rightarrow \boxed{a = \frac{16}{19} g}$

(c) Disk ile yüzey arasındaki sürtünme kuvvetini M ve g'ye bağlı bulunuz.

$(6) \Rightarrow T + f_s = Ma_{KM}$

$(7) \Rightarrow -T + f_s = -\frac{1}{2}Ma_{KM}$

$2f_s = (1 - \frac{1}{2})M a_{KM}$

$f_s = \frac{1}{4} M a_{KM}$

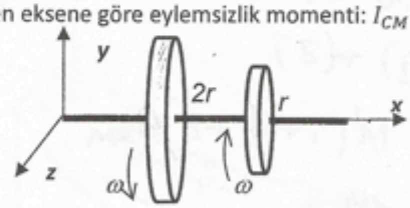
$f_s = \frac{1}{\cancel{4}} M \frac{\cancel{8}^{\,2}}{19} g$

$\boxed{f_s = \frac{2}{19} Mg}$ 6

(12)

Problem 4

(a) Yarıçapları r ve $2r$ olan özdeş kütleli iki disk, merkezinden geçen sürtünmesiz bir çubuk (x-ekseni üzerinde) etrafında aynı açısal hızla ω zıt yönlerde dönmektedir. Bu iki disk birbirlerine temas edecek şekilde yavaşça bir araya getiriliyorlar. Yüzeyler arasındaki sürtünme kuvveti disklerin ortak açısal hızla dönmesine neden oluyor. R yarıçaplı ve M kütleli bir diskin diskin kütle merkezlerinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti: $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$.



i) Disklerin bir araya gelmeden önceki açısal momentum vektörlerini yazınız.

$$(1)\ I_1 = \frac{1}{2}mr^2,\ I_2 = \frac{1}{2}M(2r)^2 = 2Mr^2 \ (1)$$

$$\boxed{\vec{L}_{1i} = I_1\vec{w} = \frac{1}{2}mr^2 w\,(-\hat{i})}\ (1)$$

$$\vec{L}_{2i} = I_2\vec{w} = \boxed{2mr^2 w\,\hat{i}}\ (1)$$

ii) Diskelerin bir araya getirildikten sonraki ortak açısal hız vektörü $\vec{\omega}'$nü bulunuz.

$$\sum\vec{L}_i = \sum\vec{L}_s$$

$$I_1\vec{w} + I_2\vec{w}_2 = (I_1+I_2)\vec{w}_s\ (2)$$

$$\frac{1}{2}Mr^2 w(-\hat{i}) + 2Mr^2 w\hat{i} = \frac{5}{2}Mr^2\vec{w}_s$$

$$\frac{3}{2}w\hat{i} = \frac{5}{2}\vec{w}_s \Rightarrow \boxed{\vec{w}_s = \frac{3}{5}w\,\hat{i}}\ (2)$$

iii) Yüzeyler arasındaki sürtünme kuvvetinden dolayı kaybolan enerji ne kadardır?

$$\Delta K = K_s - K_i$$

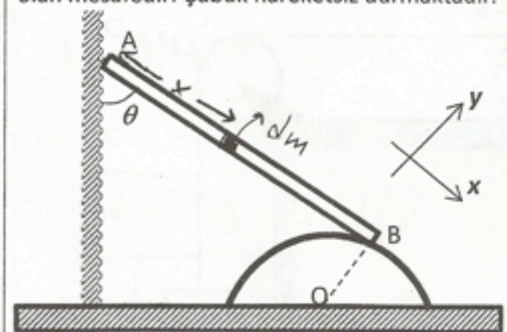
$$K_s = \frac{1}{2}(I_1+I_2)w_s^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}MR^2\frac{9}{25}w^2$$

$$\boxed{K_s = \frac{9}{20}MR^2w^2}\ (1)$$

$$K_i = \frac{1}{2}(I_1+I_2)w^2 = \frac{1}{2}\frac{5}{2}MR^2 w^2$$

$$\boxed{K_i = \frac{5}{4}MR^2w^2}\ (1)\quad \boxed{\Delta K = -\frac{16}{20}MR^2w^2}\ (2)$$

(b) M kütleli ve L uzunluklu çubuk bir ucundan (A) sürtünmeli duvara yaslı dururken, diğer ucu (B) sürtünmeli dairesel bir tümsek (merkezi O) üzerinde teğetsel olarak bir noktadan dokunacak şekilde durmaktadır. Çubuğun birim uzunluk başına kütlesi sabit olmayıp $\lambda = \alpha x^3$ (α pozitif bir sabittir) ile verilmektedir. Burada x tahtanın A ucundan olan mesafedir. Çubuk hareketsiz durmaktadır.



$$dm = \lambda dx$$
$$dm = \alpha x^3 dx\ (1)$$

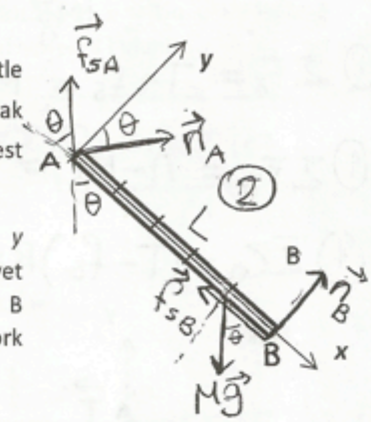
i) Çubuğun kütle merkezinin yerini bulunuz.

$$X_{km} = \frac{\int x\,dm}{(1)\int dm} = \frac{\int_0^L x(\alpha x^3 dx)}{\int_0^L \alpha x^3 dx}\ (1)$$

$$X_{km} = \frac{\alpha \frac{x^5}{5}\Big|_0^L}{\alpha\frac{x^4}{4}\Big|_0^L} = \frac{L^5}{5}\cdot\frac{4}{L^4}\ (1)$$

$$\boxed{X_{km} = \frac{4}{5}L}\ (1)$$

ii) Eğer çubuğun kütle merkezi $x_{cm} = \frac{4}{5}L$ olarak veriliyorsa, tahtanın serbest cisim diyagramını çiziniz.



iii) Verilen x ve y eksenlerine göre kuvvet denklemlerini ve B noktasına göre tork denklemini yazınız.

x-ekseni

$$\sum F_x = n_A\sin\theta + Mg\cos\theta - f_{sA}\cos\theta - f_{sB} = 0\ (2)$$

y-ekseni

$$\sum F_y = n_A\cos\theta + f_{sA}\sin\theta + n_B - Mg\sin\theta = 0\ (2)$$

Tork (B noktası)

$$\sum\tau_B = (f_{sA}\cdot\sin\theta)L + (n_A\cos\theta)L - (Mg\sin\theta)\cdot\frac{L}{5} =\ (2)$$

SORU 1: $m = 1$ kg kütleli bir parçacık, $t = 0$ da orijinden harekete başlayarak, $\vec{r} = (t^2 + t)\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath}$ ile verilen anlık konum vektörüne göre xy-düzleminde hareket etmektedir.

8

a) $t = 1$ s de parçacığın çizgisel momentumu ve orijine göre açısal momentumunu hesaplayınız.

$\vec{r} = (t^2+t)\hat{i} + 3t\hat{j}$; $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\boxed{\vec{v} = (2t+1)\hat{i} + 3\hat{j}}$ 1

$t = 1$ s de $\Rightarrow$ $\begin{cases} \boxed{\vec{r}_1 = (2\hat{i}+3\hat{j})\ m} \ 1 \\ \boxed{\vec{v}_1 = (3\hat{i}+3\hat{j})\ m/s} \ 1 \end{cases}$

$\vec{P} = m\vec{v}_1 = (1kg)(3\hat{i}+3\hat{j})\frac{m}{s} = (3\hat{i}+3\hat{j})\ kg\frac{m}{s}$

$P = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}\ kgm/s$ 2

$\boxed{\vec{L} = m\,\vec{r}_1 \times \vec{v}_1}$ 1 $= (1kg)(2\hat{i}+3\hat{j}) \times (3\hat{i}+3\hat{j})\frac{m}{s}$

$\hat{k}$ $-\hat{k}$

$\vec{L} = (6-9)\hat{k}$

$\boxed{\vec{L} = -3\hat{k}\ J.s \ \ 2 \ \ |\vec{L}| = 3\ J.s}$

5

b) $t = 1$ s de parçacığa etki eden kuvveti, torku ve hesaplayınız.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = 2\hat{i}\ m/s^2}$ 2

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 2N\,\hat{i}}$ 1

$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$ 1 $= (2\hat{i}+3\hat{j}) \times (2\hat{i})$

$\boxed{\vec{\tau} = -6\hat{k}\ J}$ 1

4

c) $t = 1$ s de parçacığın açısal momentumdaki değişim miktarını bulunuz. Açısal momentum korunur mu? Nedenini açıklayınız.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{t=1} = -6\hat{k}\ J}$ 2

Açısal momentum korunmaz
Çünkü $\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$ dır. 2

8

d) $t = 1$ s ile $t = 2$ s, zaman aralığında parçacık için **iş-kinetik enerji** teoremini doğrulayınız.

$\boxed{W_{Toplam} = \Delta K}$ 1 $\Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$

$t = 2$ s de $\begin{cases} \vec{r}_2 = (6\hat{i} + 6\hat{j})\ m \\ \vec{V}_2 = (5\hat{i} + 3\hat{j})\ m/s \end{cases}$ 1

Sol taraf : $\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$

$W = 2\hat{i} \cdot \left[6(\hat{i}+\hat{j}) - (2\hat{i}+3\hat{j})\right]$

$\boxed{W = 2\hat{i} \cdot (4\hat{i}+3\hat{j})}$ 1 $\Rightarrow \boxed{W = 8J}$ 2

Sağ taraf : $\boxed{\Delta K = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2)}$ 1

$V_1^2 = 18\ \frac{m^2}{s^2}$ ve $V_2^2 = 34\ m^2/s^2$

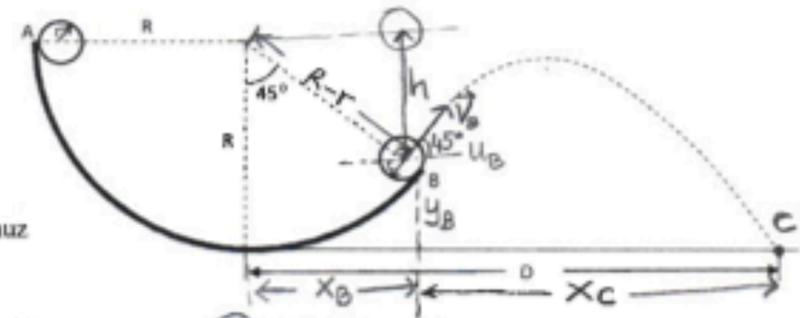
$\Delta K = \frac{1}{2} \cdot 1(34-18) \Rightarrow \boxed{\Delta K = 8J}$ 2

Eşit

SORU 2: $r = 1m$ yarıçaplı bir küre $R = 11m$ yarıçaplı yolda kaymadan yuvarlanıyor. Küre yolun alt noktasından R kadar yukarıdaki bir yükseklikten(A noktası) ilk hızsız yuvarlanmaya başlıyor. Görüldüğü gibi 135^0 lik açı sonrasında B noktasında yoldan ayrılıyor. Kürenin eylemsizlik momenti; $I = \frac{2}{5}mr^2$. $g = 10\ m/s^2$

Dikkat!

$\boxed{h = (R-r)\cos 45^\circ \quad u_B = 0 \text{ seçildi}}$



12

a) Kürenin B noktasındaki hızını bulunuz ($\cos 45^0 = \sin 45^0 = 0{,}7$ alınız).

$K_A + U_A = K_B + U_B$ 6

$\boxed{0 + mgh = \frac{1}{2}m v_{KM}^2 + \frac{1}{2}I_{KM}\omega^2}$, $\boxed{\omega = \frac{v_{KM}}{r}}$ 2 veya $\boxed{mgh = \frac{1}{2}I_B\omega^2}$

$\boxed{h = (R-r)\cos 45}$ 2

$\cancel{m} g(R-r)\cos 45 = \frac{1}{2}\cancel{m} v_{KM}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}\cancel{m}\cancel{r^2}\frac{v_{KM}^2}{\cancel{r^2}}$

$g(R-r)\cos 45 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)v_{KM}^2 \Rightarrow v_{KM} = \sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)\cos 45}$

$v_{KM} = \sqrt{\frac{10}{\cancel{7}}\cdot\cancel{10}\cdot\underbrace{(11-1)}_{10}\cdot\cancel{0{,}7}} \Rightarrow \boxed{v_{KM} = 10 m/s}$ 3

13

b) Küre yolun tabanında hangi D uzaklığında yere çarpar($\sqrt{129} \cong 11$ alınız).

Şekle göre: $x_B = (R-r)\sin 45$

$x_B = 10 \cdot 0{,}7 \Rightarrow \boxed{x_B = 7m}$ 2

$y_B = R - h = R - (R-r)\cos 45$

$y_B = 11 - 10\cdot 0{,}7 \Rightarrow \boxed{y_B = 4m}$ 2

$\boxed{y_C = y_B + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2}$ 1

$\boxed{0 = 4 + \underbrace{10\cdot\sin 45}_{0{,}7}\cdot t - 5t^2}$ 1

$\boxed{5t^2 - 7t - 4 = 0}$ 1

$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4\cdot 5\cdot 4}}{10} = \frac{7 \pm \sqrt{129}}{10}$

pozitif kök alınır. $t = \frac{7+11}{10}$

$\boxed{t = 1{,}8 s}$ 2 (B'den C'ye uçuş süresi)

$x_C = v_{xB} \cdot t = 10 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}8$

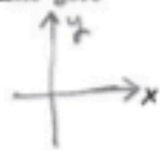
$\boxed{x_C = 12{,}6 m}$ 2

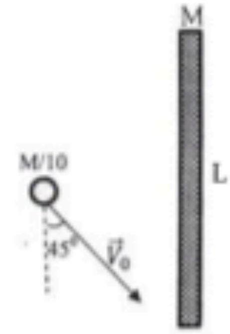
$D = x_B + x_C$

$D = 7 + 12{,}6$

$\boxed{D = 19{,}6 m}$ 2

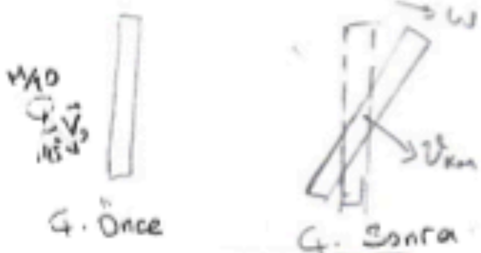
SORU 3: M kütleli, L uzunluklu düzgün bir çubuk başlangıçta, sürtünmesiz düzlemde durgundur. $\frac{M}{10}$ kütleli bir parçacık şekilde görüldüğü gibi çubuğa göre düşeyle 45^0 lik açı ile V_0 hızı ile çubuğa doğru kaymaktadır. Parçacık çubuğun alt ucuna çarpar ve durur. Çarpışma sonrası sadece çubuk hareketlidir. **Bütün cevaplarınızı M, L ve V_0 cinsinden veriniz.** Çubuğun kütle merkezine göre eylemsizlik momenti; $I_{KM} = \frac{1}{12} ML^2$ dir.





8

a) Çarpışmadan sonra çubuğun kütle merkezinin çizgisel hızını birim vektörler cinsinden bulunuz.



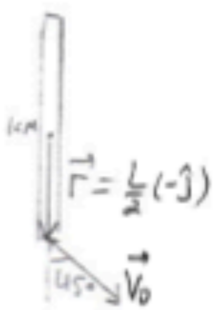
$$\boxed{\vec{P}_{1i} + \underbrace{\cancel{\vec{P}_{2i}}}_{0} = \cancel{\vec{P}_{1s}} + \vec{P}_{2s}}$$ 2

$$\boxed{\frac{M}{10} \cdot \frac{V_0}{\sqrt{2}} (\hat{\imath} - \hat{\jmath}) = M \cdot \vec{v}_{KM}}$$ 3

$$\boxed{\vec{v}_{KM} = \frac{V_0}{10\sqrt{2}} (\hat{\imath} - \hat{\jmath})}$$ 3

8

b) Çarpışmadan sonra çubuğun kütle merkezine göre açısal hızını bulunuz.



Açısal Momentum

Korunur.

$$\boxed{\sum \vec{L}_i = \sum \vec{L}_s}$$ 2

$$\boxed{\frac{M}{10} \cdot V_0 \, r \, \mathrm{Sin}45 = I_{KM} \, \omega}$$ 3

$$\frac{\cancel{M}}{10} V_0 \cdot \frac{\cancel{L}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{12} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \cdot \omega$$

3

$$\omega = \frac{12}{20\sqrt{2}} \frac{V_0}{L} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{3}{5\sqrt{2}} \frac{V_0}{L}}$$

Saatin tersi

9

c) Çarpışmadan dolayı oluşan enerji kaybını bulunuz.

2

$$\boxed{K_i = \frac{1}{2} \frac{M}{10} V_0^2 \Rightarrow K_i = \frac{M}{20} V_0^2}$$

2

$$\boxed{K_s = \frac{1}{2} M v_{KM}^2 + \frac{1}{2} I_{KM} \omega^2}$$

$$v_{KM}^2 = \frac{V_0^2}{100 \cdot \cancel{2}} \cdot \cancel{2} \Rightarrow v_{KM}^2 = \frac{V_0^2}{100}$$

$$K_s = \frac{1}{2} M \frac{V_0^2}{100} + \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{12}_{4}} M \cancel{L^2} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{50} \cdot \frac{V_0^2}{\cancel{L^2}}$$

$$K_s = \frac{M}{200} V_0^2 \left(1 + \frac{3}{2}\right)$$

$$K_s = \frac{M}{\cancel{200}_{40}} V_0^2 \cdot \frac{\cancel{5}}{2}$$

$$\boxed{K_s = \frac{1}{80} M V_0^2}$$ 3

$$\boxed{\Delta K = K_s - K_i}$$ 1

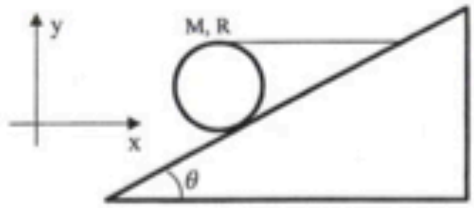
$$\Delta K = M V_0^2 \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{\underset{(4)}{20}}\right)$$

$$\boxed{\Delta K = -\frac{3}{80} M V_0^2}$$ Kayıp enerji

1

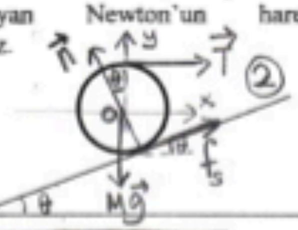
13

SORU 4: (a) M kütleli top şekildeki gibi, θ eğimli eğik düzlem üzerinde hareketsiz durmaktadır. Yüzey sürtünmeli olup, top bir iple üst yüzeyinde eğik düzleme yere paralel olacak şekilde tutturulmuştur.



8

i) Topun serbest cisim diyagramını çizerek, verilen koordinata göre öteleme ve dönme için denge koşullarını sağlayan Newton'un hareket denklemlerini yazınız.



i) Öteleme dengesi

② $\boxed{\sum F_x = T + f_s\cos\theta - n\sin\theta = 0}$ (1)

② $\boxed{\sum F_y = n\cos\theta + f_s\sin\theta - Mg = 0}$ (2)

ii) Dönme dengesi

② $\boxed{\sum \tau_0 = T.R - f_s.R = 0}$ (3)

$\boxed{f_s = T}$

5

ii) Elde ettiğiniz denklemleri kullanarak $\theta = 45^0$ için ipteki gerilme kuvvetini Mg cinsinden bulunuz.

$(1) \Rightarrow T(1+\cos\theta) = n\sin\theta$ (4)

$(2) \Rightarrow Mg - T\sin\theta = n\cos\theta$ (5)

$\frac{(4)}{(5)}: \quad \frac{T(1+\cos\theta)}{Mg - T\sin\theta} = \tan\theta = \tan 45 = 1$

$T(1+\cos\theta) = Mg - T\sin\theta$

$T(1+\underbrace{\cos 45 + \sin 45}_{\sqrt{2}}) = Mg$

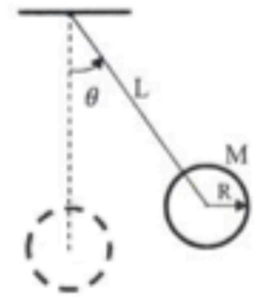
$\boxed{T = \frac{Mg}{1+\sqrt{2}}}$ ⑤

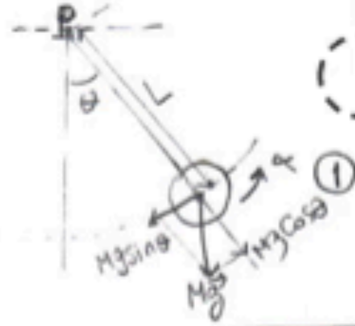
12

SORU 4:(b) M kütleli ve R yarıçaplı bir disk, L uzunluklu ve kütlesi ihmal edilen bir çubuğun ucuna merkezinden tutturularak bir fizik sarkaç yapılmıştır. Şekilde ki gibi denge noktası etrafında düzlemde salınım hareketi yapmaktadır. Diskin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$ dir.

5

i) Disk için kuvvet diyagramını çizerek, hareket denklemini elde ediniz.





Dikkat!

$\boxed{\sum \vec{\tau}_p = \vec{r}\times\vec{F} = I_p\vec{\alpha}}$; $\boxed{\alpha = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$

$\boxed{-(Mg\sin\theta)L = I_p\ddot{\theta}}$ ②

$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{MgL}{I_p}\sin\theta = 0}$ ②

7

ii) Küçük salınımlar için salınımın periyodunu ve frekansını bulunuz.

Küçük salınımlarda $\sin\theta \cong \theta$ olur.

$\boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{MgL}{I_p}}_{\omega^2}\theta = 0}$ ②

① $\boxed{\omega^2 = \frac{MgL}{I_p}}$; $I_p = I_{km} + ML^2$

$\boxed{I_p = \frac{1}{2}MR^2 + ML^2}$ ②

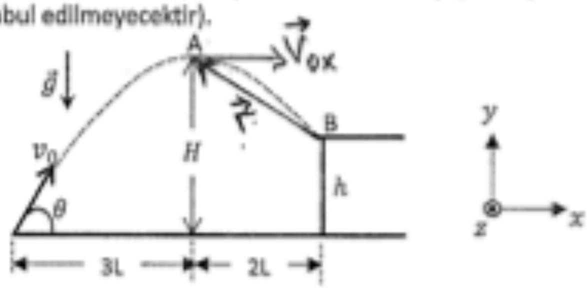
$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{R^2}{2}+L^2\right)}{gL}}}$ ①

$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gL}{\left(\frac{R^2}{2}+L^2\right)}}}$ ①

17

PROBLEM 1

a) Yerden θ açısı ve v_0 ilk hızı ile atılan bir cismin ulaştığı maksimum yükseklik (A noktası) H'tır. Cisim h yüksekliğinde (B noktası) bulunan duvara şekildeki gibi çarptığına göre $\frac{H}{h}$ oranını bulunuz. (Enerji korunumu ile yapılan çözümler kabul edilmeyecektir).



A noktasına çıkış süresi: t_A

$v_{Ay} = v_{oy} - g t_A$ (1)

$0 = V_{oy} - g\, t_A \Rightarrow \boxed{t_A = \frac{V_{oy}}{g}}$ (2)

$H = V_{oy} t_A - \frac{1}{2} g t_A^2$ (1)

$H = V_{oy} \frac{V_{oy}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_{oy}^2}{g^2}$ (1)

$\boxed{H = \frac{V_{oy}^2}{2g}}$ (2)

$3L = V_{ox} \cdot t_A$ (1) $\Rightarrow \boxed{L = \frac{V_{ox} V_{oy}}{3g}}$ (1)

B noktasına çarpma süresi: t_B

$5L = V_{ox}\, t_B$ (1) $\Rightarrow \boxed{t_B = \frac{5L}{V_{ox}}}$ (1)

ve

$t_B = \frac{5 \cancel{V_{ox}} V_{oy}}{3 g \cancel{V_{ox}}} \Rightarrow \boxed{t_B = \frac{5}{3} \frac{V_{oy}}{g}}$ (1)

$h = V_{oy} \cdot t_B - \frac{1}{2} g t_B^2$ (1)

$h = V_{oy} \left(\frac{5}{3} \frac{V_{oy}}{g} \right) - \frac{1}{2} \cancel{g} \cdot \frac{25}{9} \frac{V_{oy}^2}{g^{\cancel{2}}}$ (1)

$h = \frac{V_{oy}^2}{g} \left(\frac{5}{3} - \frac{25}{18} \right)$

$\boxed{h = \frac{5}{18} \frac{V_{oy}^2}{g}}$ (1)

$\frac{H}{h} = \frac{\frac{V_{oy}^2}{2g}}{\frac{5}{18} \frac{V_{oy}^2}{g}} \Rightarrow \boxed{\frac{H}{h} = \frac{9}{5}}$ (2)

8

b) m kütleli cisim A noktasında iken, B noktasına göre açısal momentumunun yönü ve büyüklüğünü verilenler cinsinden bulunuz.

$\vec{L}_B = \vec{r} \times \vec{P} = m\, \vec{r} \times \vec{V}_{ox}$ (1)

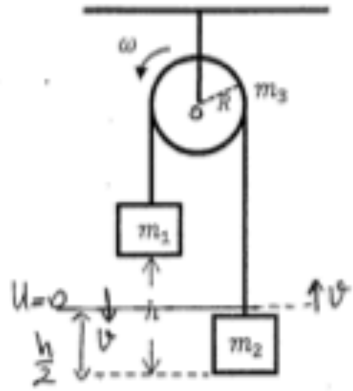
şekilden;

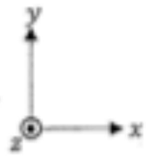
$\vec{r} = 2L(-\hat{i}) + (H-h)\hat{j}$ (2) ; $\vec{V}_{ox} = V_0 \cos\theta\, \hat{i}$ (1)

$\vec{L}_B = m \left[-2L\hat{i} + (H-h)\hat{j} \right] \times V_0 \cos\theta\, \hat{i}$ (1)

$\boxed{\vec{L}_B = m v_0 (H-h) \cos\theta\, (-\hat{k})}$ (3)

PROBLEM 2





Kütleleri $m_1 = 6M$ ve $m_2 = 3M$ olan bloklar, yarıçapı R ve kütlesi $m_3 = 2M$ olan bir makara üzerinden geçen ip ile şekilde görüldüğü gibi birbirlerine bağlanmışlardır. İp kütlesizdir ve makara üzerinden kaymamaktadır. Makara kendi ekseni etrafında sürtünmesiz olarak dönmektedir. Kütleler başlangıçta durgun ve aralarındaki mesafe h kadardır. (Makara için eylemsizlik momenti $I_{mak} = \frac{1}{2}m_3R^2$).

(7) **a)** Enerjinin korunumunu kullanarak, iki blok aynı hizadan geçerken hızlarını bulunuz.

$$\Sigma K_i + \Sigma U_i = \Sigma K_s + \Sigma U_s$$

(3)

$$0 + m_1 g\frac{h}{2} - m_2 g\frac{h}{2} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\omega = \frac{v}{R})$$

$$(m_1 - m_2)\frac{gh}{2} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_3 R^2\frac{V^2}{R^2}$$

$m_1 = 6M$, $m_2 = 3M$ ve $m_3 = 2M$

$$3M g\frac{h}{2} = \left(\frac{9M}{2} + \frac{M}{2}\right)V^2 \quad (2)$$

$$3gh = 10V^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{3gh}{10}}} \quad (2)$$

b) Sistemin $\vec{L}$ açısal momentum vektörünü yazınız.

(3)

$$\vec{L} = (m_1 vR + m_2 vR + I\omega)\hat{k} \quad (1)$$

$$\vec{L} = \left(9MvR + \frac{1}{2}2M R^2 \frac{v}{R}\right)\hat{k} \quad (1)$$

$$\boxed{\vec{L} = 10MvR\hat{k}} \quad (1)$$

c) Sisteme etkiyen net torku ($\vec{\tau}$) yazınız.

(3)

$$\Sigma\vec{\tau}_o = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\Sigma\vec{\tau}_o = (m_1 g - m_2 g)\cdot R\,\hat{k} \quad (2)$$

$$\boxed{\Sigma\vec{\tau}_o = 3MgR(\hat{k})} \quad (1)$$

d) Açısal momentum ve tork kavramlarını kullanarak, m_1 ve m_2 kütlelerinin lineer ivmelerini bulunuz.

(4)

$$\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1)$$

$$3MgR\hat{k} = \frac{d}{dt}(10MvR\hat{k}) \quad (1)$$

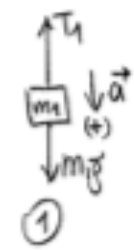
$$3\cancel{M}g\cancel{R} = 10\cancel{M}\cancel{R}\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a}$$

$$\boxed{a = \frac{3}{10}g} \quad (2)$$

e) İpteki gerilmeleri "**d**" şıkkında elde edilen sonucu kullanarak bulunuz.

(8)

$$\Sigma F = m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$



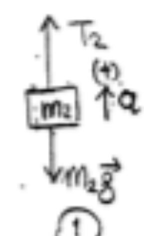
$$T_1 = m_1(g - a)$$

$$T_1 = 6M\left(g - \frac{3}{10}g\right)$$

$$\boxed{T_1 = \frac{42}{10}Mg} \quad (2)$$

— o —

$$\Sigma F = T_2 - m_2 g = m_2 a \quad (1)$$

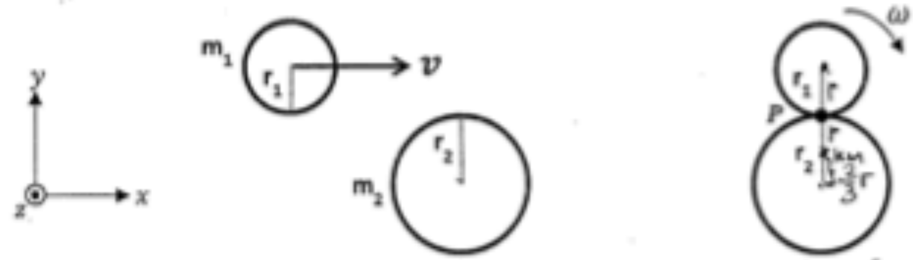


$$T_2 = m_2(g + a)$$

$$T_2 = 3M\left(g + \frac{3}{10}g\right)$$

$$\boxed{T_2 = \frac{39Mg}{10}} \quad (2)$$

PROBLEM 3



$m_1 = m$ kütleli ve $r_1 = r$ yarıçaplı bir disk v hızla ilerlerken, kütlesi $m_2 = 3m$ ve yarıçapı $r_2 = \frac{5}{3}r$ olan, düzgün ve sürtünmesiz buzlu bir yüzey üzerinde durmakta olan bir başka diske çarpmaktadır. İki top birbirini sıyıracak şekilde tamamen esnek olmayan çarpışma yaparak birbirlerine **P** noktasından yapışmaktadırlar. Çarpışma sonrası iki disk birlikte ω açısal hızı ile dönmektedir. Kütlesi m yarıçapı r olan bir diskin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}mr^2$. (Cevaplarınızı sadece m, r ve v'ye bağlı olarak ifade ediniz). **Çarpışmadan sonra;**

5 **a)** Kütle merkezinin konumunu P noktasına göre (P noktasını orijin seçiniz) bulunuz.

$m_1 = m,\ y_1 = r$

$m_2 = 3m,\ y_2 = -\frac{5}{3}r$

$$y_{KM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad 1$$

$$y_{KM} = \frac{\cancel{m}r + 3\cancel{m}(-\frac{5}{3}r)}{4\cancel{m}} = \frac{-4r}{4} \quad 2$$

$$\boxed{y_{KM} = -r} \quad 2$$

b) Sistemin eylemsizlik momentini yeni kütle merkezine göre bulunuz.

5

$$I_{KM}^{sis} = I_{KM}^{m_1} + I_{KM}^{m_2}$$

$$I_{KM}^{sis} = \left(\frac{1}{2}m_1 r_1^2 + m_1 d_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_2 r_2^2 + m_2 d_2^2\right) \quad 3$$

$m_1 = m,\ r_1 = r,\ m_2 = 3m,\ r_2 = \frac{5}{3}r,\ d_1 = 2r,\ d_2 = \frac{2}{3}r$

$$I_{KM}^{sis} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + m4r^2\right) + \frac{1}{2}\cancel{3}m\frac{25}{\cancel{9}_3}r^2 + \cancel{3}m\frac{4}{\cancel{9}_3}r^2$$

$$I_{KM}^{sis} = \left(\frac{1}{2} + 4 + \frac{25}{6} + \frac{4}{3}\right)mr^2 = \frac{60}{6}mr^2$$

$$\boxed{I_{KM}^{sis} = 10mr^2} \quad 2$$

c) Kütle merkezinin hızını bulunuz.

5

$$\Sigma\vec{P}_i = \Sigma\vec{P}_s$$

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1+m_2)\vec{V}_{KM} \quad 2$$

$$\cancel{m}.v\hat{i} + 0 = 4\cancel{m}\vec{V}_{KM} \quad 1$$

$$\boxed{\vec{V}_{KM} = \frac{v}{4}\hat{i}} \quad 2$$

d) Sistemin açısal hızını bulunuz.

5

$$\vec{L}_i = \vec{L}_s \quad 1$$

Yeni kütle merkezine göre;

$$L_i = mv_1(r_1 + y_{KM})$$

$$L_i = mv(r+r) \quad 1 \quad ; \quad L_s = I_{KM}^{sis}\omega \quad 1$$

$$2\cancel{m}v\cancel{r} = 10\cancel{m}r^{\cancel{2}}.\omega \quad 1$$

$$\boxed{\omega = \frac{v}{5r}} \quad 1$$

5 **e)** Sistemin kinetik enerjisini bulunuz.

$$K_s = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{KM}^2 + \frac{1}{2}I_{KM}^{sis}\omega^2 \quad 2$$

$$K_s = \frac{1}{2}\cancel{4}m\frac{v^2}{\cancel{16}_4} + \frac{1}{2}.10m\cancel{r^2}\frac{v^2}{\cancel{25}_5\cancel{r^2}} \quad 1$$

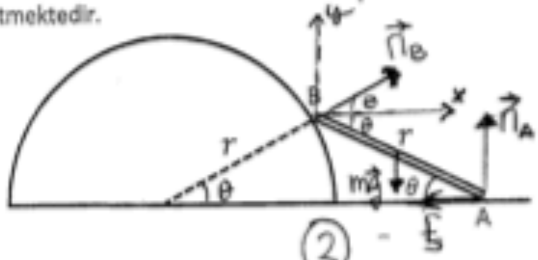
$$K_s = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\right)mv^2$$

$$\boxed{K_s = \frac{13}{40}mv^2} \quad 2$$

13

PROBLEM 4

Yarıçapı r olan durgun bir yarım silindir ve kütlesi m, uzunluğu silindirin yarıçapına eşit olan bir çubuk şekildeki gibi yerleştiriliyor. Çubuğun bir ucu sürtünme katsayısı $\mu_s = \frac{\sqrt{3}}{3}$ olan düzleme A noktasından diğer ucu da sürtünmesiz yarım silindire B noktasından temas etmektedir.



8

a) Çubuğun serbest cisim diyagramını verilen şekil üzerinde çiziniz ve statik denge şartı için denklemleri yazınız.

$$\Sigma F_x = n_B \cos\theta - f_s = 0 \quad (1) \quad 2$$

$$\Sigma F_y = n_B \sin\theta + n_A - mg = 0 \quad (2) \quad 2$$

$$\Sigma \tau_A = mg\frac{r}{2}\cancel{\cos\theta} - (n_B\cancel{\cos\theta})r\sin\theta - (n_B\sin\theta)r\cancel{\cos\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{2} - 2n_B\sin\theta = 0 \quad (3.a) \quad 2$$

VEYA

$$\Sigma \tau_B = n_A r\cos\theta - f_s r\sin\theta - mg\frac{r}{2}\cos\theta = 0 \quad (3.b)$$

5 b) Çubuğun statik dengede durabileceği en küçük θ açısını bulunuz.

1

$f_s = \mu_s n_A$ ise θ en küçük açı olur.

$$(3.a) \Rightarrow 2n_B\sin\theta = \frac{mg}{2} \Rightarrow \boxed{n_B\sin\theta = \frac{mg}{4}} \quad (4)$$

$$(1) \Rightarrow n_B\cos\theta - \mu_s n_A = 0 \Rightarrow \boxed{n_A = \frac{3n_B\cos\theta}{\sqrt{3}}} \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow \overbrace{n_B\sin\theta}^{mg/4} + \frac{3n_B\cos\theta}{\sqrt{3}} = mg$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}} n_B\cos\theta = mg\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}mg$$

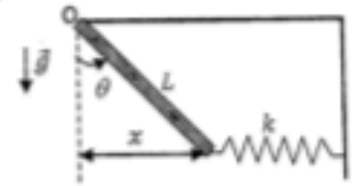
$$\boxed{n_B\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}mg} \quad (6)$$

$$\frac{(4)}{(6)} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \boxed{\theta = 30^\circ} \quad 4$$

12

PROBLEM 5

M kütleli L uzunluklu homojen bir çubuğun üst ucu, şekilde görüldüğü gibi O noktasından tutturulmuştur. Alt ucu ise k yay sabitli bir yay ile duvara bağlanmıştır. Çubuk-yay sistemi denge konumunda iken $x = 0$ ve $\theta = 0$'dır. Çubuğun alt ucu şekildeki gibi yatayda denge konumundan küçük bir x mesafesi kadar (veya küçük bir θ açısı kadar) hareket ettirilip serbest bırakılıyor (Çubuk için: $I_{KM} = \frac{1}{12}ML^2$).

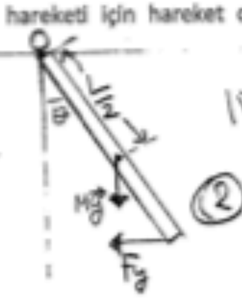


7 a) Sistemin salınım hareketi için hareket denklemlerini yazınız.

$$I_O = I_{KM} + ML^2$$

$$\boxed{I_O = \frac{1}{3}ML^2} \quad 1$$

$$|\vec{F}_y| = kx$$



$$\Sigma \tau_O = -Mg\sin\theta\frac{L}{2} - kx\cdot L\cos\theta = I_O\alpha \quad 2$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{ve} \quad x = L\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\left(Mg\frac{L}{2} + kL^2\cos\theta\right)\sin\theta}{I_O} = 0 \quad 2$$

5

b) Küçük salınımlar (titreşimler) için salınımın periyodunu bulunuz.

Küçük salınımlarda;

$\sin\theta \approx \theta$ ve $\cos\theta \approx 1$ olur. 1

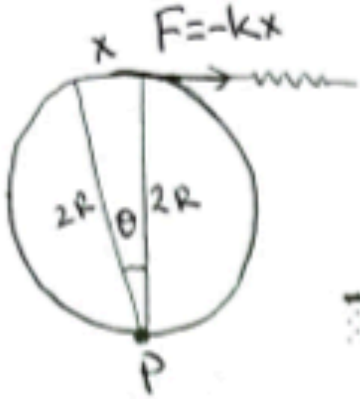
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{MgL+2kL^2}{2I_O}\right)}_{w^2}\theta = 0 \quad 2$$

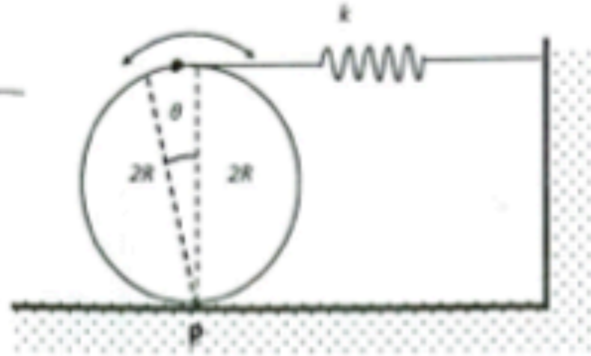
$$w = \sqrt{\frac{MgL+2kL^2}{\frac{2}{3}ML^2}} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{3MgL+6kL^2}{2ML^2}} \quad 1$$

$$T = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2ML}{3Mg+6kL}} \quad 1$$

PROBLEM 4

A uniform disk has mass M and radius R and rolls without slipping on the horizontal surface as it oscillates about its equilibrium position. Find the period of small oscillations of the disk by writing the torque acting about point P (τ_P). $\left(I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2\right)$





$\sum \tau_p = I_p \alpha$ ② $I_p = I_{cm} + MR^2$

⑥

$-kx\,2R = (I_{cm} + MR^2)\alpha$ $= \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$ ③

$x = 2R\theta$ ② $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ $= \frac{3}{2}MR^2$

$-k\,2R\theta\,2R = \frac{3}{2}MR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ②

$\ddot{\theta} + w^2\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{8}{3}\frac{k}{M}\theta = 0$

$w = \left(\frac{8}{3}\frac{k}{m}\right)^{1/2}$ ⑤

$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\left(\frac{3}{8}\frac{m}{k}\right)^{1/2}$ ② ③