



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

*Поиск потенциала электрического поля в
периодической структуре*

Студент _____
ФН2-62Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. Д. Егоров

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

К. Е. Казаков

(И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
2. Обзор задачи	3
2.1. Физическая составляющая задачи	3
2.2. Математическая постановка задачи	3
3. Решение двумерного уравнения Лапласа	4
3.1. Аппроксимация уравнения Лапласа методом конечных элементов	4
3.2. Метод конечных элементов на треугольной сетке	6
3.2.1. Триангуляция области	6
3.2.2. Сборка глобальной матрицы жесткости	7
3.3. Применение граничных условий первого рода	8
3.4. Применение периодических граничных условий	9
4. Программная реализация алгоритма	10
Заключение	10
Список использованных источников	11

Введение

1. Постановка задачи

Найти потенциал электрического поля между двумя бесконечными пластинами, профиль одной из которых плоский, а профиль другой описывается некоторой периодической функцией. Значения потенциала на пластинах заданы и константны.

2. Обзор задачи

2.1. Физическая составляющая задачи

Для постоянного электрического (электростатического) поля уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

где ρ — объемная плотность внешних зарядов. Электрическое поле \mathbf{E} выражается через только скалярный потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad (3)$$

подставляя (3) в (1), получим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (4)$$

Уравнение (4) есть уравнение Пуассона. При $\rho = 0$, т.е. при отсутствии внешних сил, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (5)$$

2.2. Математическая постановка задачи

Из условия поставленной задачи известно, что внешних сил нет, следовательно, потенциал электростатического поля должен удовлетворять уравнению (5). Через функцию $w(x)$ зададим профиль искривленной пластины, $w(x)$ — некоторая периодическая функция с периодом T , т.е. $w(x) = w(x+T)$. Пусть плоская пластина находится над искривленной на уровне y_a . Значение потенциала на пластинах заданы и константны, обозначим значение на верхней (плоской) пластине как φ_a , на нижней (искривленной) — φ_w . Так как профиль задан периодической функцией,

следовательно необходимо использовать условие равенства потенциалов в точках x и $x + T$, т.е. $\varphi(x, y) = \varphi(x + T, y)$.

Из этих условий составим систему, которую требуется решить:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y_a) = \varphi_a, \\ \varphi(x, w(x)) = \varphi_w, \\ \varphi(x, y) = \varphi(x + T, y), \end{cases} \quad (6)$$

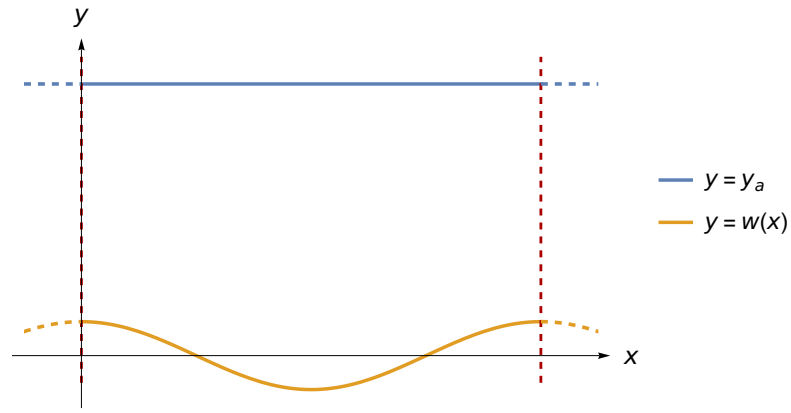


Рис. 1. Иллюстрация области, в которой будет решаться задача

3. Решение двумерного уравнения Лапласа

3.1. Аппроксимация уравнения Лапласа методом конечных элементов

Рассмотрим уравнение Лапласа в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{в } \Omega, \\ u = g & \text{на } \Gamma_D, \end{cases}$$

где Γ_D — часть границы области, на которой заданы граничные условия первого рода, $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\Gamma_D \neq \emptyset$.

Опираясь на сведения из источника [1], представим решение задачи в виде $u = u_0 + u_g$, где функция u_0 обращается в ноль на границе Γ_D а u_g — некоторая, произвольная, но наперед заданная функция, значения которой совпадают с g на границе области, $u_g|_{\Gamma_D} = g$.

И переходим к следующей задаче с однородными граничными условиями первого рода на Γ_D относительно функции u_0 :

$$\begin{cases} -\Delta u = \Delta u_g & \text{в } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_D. \end{cases}$$

Запишем слабую постановку задачи для определения u_0 , способом описанным в разделе **16.3.1** источника [1]: необходимо определить $u_0 \in V_D$, такое, что

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad v \in V_D,$$

где пространство V_D состоит из функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные и обращающихся в ноль на части Γ_D границы расчетной области:

$$V_D = \{v \in V : v|_{\Gamma_D} = 0\},$$

а пространство V состоит из произвольных заданных в Ω функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные.

Для аппроксимации задачи с помощью МКЭ рассмотрим конечномерное пространство V_h , аппроксимирующее пространство V и пространство $V_{D,h} = V_h \cap V_D(\Omega)$, элементы которого приближают элементы пространства V_D .

Пусть функция $u_{g,h} \in V_h$ представляет собой аппроксимацию функции u_g , задающей граничное условие первого рода. В качестве функции $u_{g,h}$.

Тогда конечномерная задача примет вид:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{0,h} \cdot \nabla v_h \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_{g,h} \cdot \nabla v_h \, d\Omega, \quad v_h \in V_D,$$

Пусть φ_i , $i = \overline{1, N}$, — базис в пространстве V_h , причем часть функций φ_i с номерами $i \in I$ образуют базис в пространстве $V_{D,h}$, т.е. обращаются в ноль на границе Γ_D . Количество таких индексов будем считать равным $M = |I| < N$, $|I| > 1$.

Тогда последнее уравнение будет эквивалентно

$$\int_{\Omega} \nabla u_{0,h} \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_{g,h} \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega, \quad i \in I.$$

Представляя неизвестное решение в виде линейной комбинации базисных функций:

$$u_{0,h} = \sum_{i \in I} u_{0,h,i} \varphi_i, \quad u_{g,h} = \sum_{i=1}^N u_{g,h,i} \varphi_i,$$

окончательно получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов $U_h = \{u_{0,h,i}\}$:

$$A u_{0,h} = b,$$

где $A = A_{M \times M}$ — матрица жесткости, $b = b_{M \times 1}$,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i, j \in I, \quad (7)$$

$$b_i = - \sum_{j=1}^N u_{g,h,j} \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i \in I. \quad (8)$$

3.2. Метод конечных элементов на треугольной сетке

3.2.1. Триангуляция области

Зададим в нашей области Ω правильную триангуляцию \mathcal{T} , т. е. такое разбиение области Ω на треугольные ячейки, что любые два треугольника имеют либо общее ребро, либо общую вершину, либо пустое пересечение. Таким образом,

$$\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

Каждый треугольник T при этом задается набором трех своих узлов P_k с координатами $P_k = (x_k, y_k)$. Будем считать, что узлы треугольника обходятся в положительном направлении (против хода часовой стрелки).

Рассмотрим простейший случай: выберем базисные функции φ_k такие, что φ_k — кусочно-линейная функция, принимающая значение единица в узле P_k и ноль во всех остальных узлах. В пределах одного треугольника она продолжена линейно.

В силу аддитивности интеграла относительно области интегрирования формулы (7) и (8) могут быть записаны в виде

$$A_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i, j \in I, \quad (9)$$

$$b_i = - \sum_{j=1}^N u_{g,h,j} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i \in I. \quad (10)$$

Таким образом, задача вычисления интегралов для коэффициентов матрицы жесткости задачи и ее правой части сводится к задаче вычисления тех же интегралов по отдельным треугольникам.

Рассмотрим один из треугольников T триангуляции \mathcal{T} . Будем считать, что его вершины имеют координаты $P_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 3}$. Пусть φ_i , $i = \overline{1, 3}$, — базисные функции соответствующие этим вершинам и данному треугольнику. Таким образом

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Функции φ_i являются линейными в пределах T и имеют следующий вид

$$\varphi_i(x, y) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{pmatrix}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где для удобства обозначения считается, что $P_4 = P_1$, $x_4 = x_1$, $y_4 = y_1$, аналогично индекс 5 идентичен индексу 2.

Из формулы (11) получаем следующие соотношения:

$$\nabla \varphi_i(x, y) = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ y_{i+2} - y_{i+1} \end{pmatrix},$$

где $|T|$ — площадь треугольника T , такая, что

$$|T| = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем следующее выражение для матрицы жесткости конечного элемента T :

$$A_{T,ij} = \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = \frac{|T|}{(2|T|)^2} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

3.2.2. Сборка глобальной матрицы жесткости

В предыдущем пункте было рассмотрено, как составляется матрица жесткости для одного элемента T триангуляции \mathcal{T} . Основываясь на формулах (9, 10, 12) имеем:

Для каждого элемента T триангуляции \mathcal{T}	
A_T	симметричная матрица размером 3×3 ,
\mathbf{b}_T	вектор правой части, состоящий из 3, компонент
\mathbf{u}_T	вектор неизвестных, состоящий из 3 компонент.

Для решения задачи необходимо составить полную систему $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, где A — матрица жесткости размером $N \times N$, \mathbf{b} — вектор правой части длины N , \mathbf{u} — вектор неизвестных длины N , N — количество узлов триангуляции \mathcal{T} , для этого нужно собрать все локальные матрицы жесткости A_T , т. е. учесть вклад каждого конечного элемента.

Проиллюстрируем эту процедуру на примере. У нас есть треугольник T , составленный из узлов $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, $P_5 = (x_5, y_5)$ (номера узлов взяты из глобальной нумерации), для него были получены следующая матрица жесткости A_T и вектор правой части b_T

$$A_T = \begin{pmatrix} 1.3 & -0.5 & 7 \\ -0.5 & -0.45 & 0.3 \\ 7 & 0.3 & 2.1 \end{pmatrix}, \quad b_T = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что полная система состоит из 7 узлов. Тогда мы расширяем матрицу A_T до размера 7×7 , добавляя нулевые строки и столбцы на место отсутствующих узлов, аналогично для вектора b_T . Таким образом получаем следующие матрицу и вектор правой части

$$\hat{A}_T = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & -0.5 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0.3 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b}_T = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2.1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для полной системы матрица A и вектор правой части b имеют следующий вид

$$A = \sum_{T \in \mathcal{T}} \hat{A}_T, \quad b = \sum_{T \in \mathcal{T}} \hat{b}_T$$

3.3. Применение граничных условий первого рода

Полную систему уравнений $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где a_{ij} — компоненты матрицы A , b_j u_j — компоненты вектора правой части \mathbf{b} и вектора неизвестных \mathbf{u} соответственно. Значения решения u в узлах $P_k \in \Gamma_D$ известны и равны $u_k = g(P_k)$, $\forall P_k \in \Gamma_D$. Тогда уравнения (13) могут быть переписаны следующим образом

$$\sum_{j \in I} a_{ij} u_j = b_i - \sum_{P_j \in \Gamma_D} a_{ij} g(P_j), \quad i \in I, \quad (14)$$

где, как было указано выше, I — множество индексов, узлов лежащих внутри области, $|I| = M < N$. Что приводит к уменьшению размерности матрицы A от $N \times N$ до $M \times M$, по средствам удаления строк и столбцов с номерами $k \notin I$ [1].

3.4. Применение периодических граничных условий

В поставленной задаче помимо условий первого рода дополнительно наложены еще условия периодичности на левой и правой границах. Обозначим множество индексов узлов принадлежащих данной части границы как PB , такое

$$PB = PB_l \cup PB_r,$$

где PB_l — множество индексов узлов принадлежащих левой границе, PB_r — множество индексов узлов принадлежащих правой границе. Зададим такое разбиение исходной области, что количество узлов на левой и правой границах будет одинаково, т. е. $|PB_l| = |PB_r|$ и будет выполнено следующее условие: для любого узла P_l , принадлежащего левой границе PB_l , найдется единственный узел P_r на правой границе PB_r такой, что вертикальные координаты узлов будут совпадать, т. е.

$$\forall P_l = P(x_l, y_l) \in PB_l \exists! P_r = P(x_r, y_r) \in PB_r : y_l = y_r.$$

Тогда можно задать массив с парами индексов таких узлов, а условие периодичности, предполагает равенство значений в соответствующих парах узлов.

Пусть на узлы $P_p = P(x_p, y_p)$ и $P_q = P(x_q, y_q)$ наложено условие периодичности, т. е.

$$u_p = u(P_p) = u(P_q) = u_q$$

. Тогда, чтобы учесть периодичность нужно изменить систему, полученную на предыдущем этапе. Это можно поступить следующим образом:

- заменить все значения в p -ом ряду матрицы A на $a_{pj} + a_{qj}$, т. е. сложить p -ую и q -ую строки, аналогично для вектора правой части \mathbf{b} : заменить b_p на $b_p + b_q$,
- заметить q -ую строку системы на условие $u_p - u_q = 0$.

При данном подходе сохраняет симметричность матрицы теряется. Либо, если симметричность важна, можно поступить, как в случае с граничными условиями первого рода:

- заменить все значения в p -ой строке матрицы A на $a_{pj} + a_{q,j}$, т. е. сложить p -ую и q -ую строки, аналогично для вектора правой части \mathbf{b} : заменить b_p на $b_p + b_q$,
- заменить все значения в p -ого столбца матрицы A на $a_{jp} + a_{jq}$, т. е. сложить p -ый и q -ый столбцы,
- удалить q -ую строку и q -ый столбец из системы

В результате размерность решаемой системы уменьшилась на единицу, а условие $u_p = u_q$ будет применено уже к итоговому решению.

4. Программная реализация алгоритма

Построение сеток — Wolfram Mathematica, алгоритм метода конечных элементов реализован на языке C++

Заключение

Список использованных источников

1. Методы численного анализа математических моделей / М. П. Галанин, Е. Б. Савенков. – 2-е изд., испр. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. – 591 [1] с.: ил.