



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
*К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*  
*НА ТЕМУ:*

*Поиск потенциала электрического поля между  
заряженными пластинами*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-62Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. Д. Егоров  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

К. Е. Казаков  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2023 г.

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2. Обзор задачи</b>	<b>3</b>
2.1. Физическая составляющая задачи	3
2.2. Математическая постановка задачи	4
<b>3. Решение двумерного уравнения Лапласа</b>	<b>5</b>
3.1. Аппроксимация уравнения Лапласа	5
3.2. Метод конечных элементов на треугольной сетке	6
3.2.1. Триангуляция области	6
3.2.2. Сборка глобальной матрицы жесткости	8
3.2.3. Наложение граничных условий первого рода	9
3.2.4. Наложение периодических граничных условий	9
<b>4. Примеры решения задачи</b>	<b>11</b>
4.1. Задача № 1 (задача с граничными условиями первого рода)	11
4.1.1. Условие задачи	11
4.1.2. Решение	12
4.1.3. Оценка погрешности аппроксимации решения	14
4.1.4. Погрешность аппроксимации на сетках	15
4.2. Задача № 2 (периодические граничные условия)	18
4.2.1. Условие задачи	18
4.2.2. Решение	18
4.2.3. Проверка решения на удовлетворение условиям периодичности	19
4.3. Задача № 3 (периодические граничные условия)	21
4.3.1. Условие задачи	21
4.3.2. Решение	21
4.3.3. Проверка решения на удовлетворение условиям периодичности	22
<b>5. Программная реализация</b>	<b>24</b>
<b>Заключение</b>	<b>24</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>25</b>

## Введение

Задача по вычислению потенциала электрического поля является задачей раздела электростатики. Она возникает при вычислении электростатического поля в различных конденсаторах. Ее решение сводится к решению уравнения Пуассона или его частного случая — уравнения Лапласа. Данные уравнения появляются и при решении ряда задач из других сфер: аэродинамики, гидродинамики, механики сплошных сред. Так что методы, рассмотренные в данной работе, могут быть применены и к другим задачам, что показывает актуальность данной проблемы.

## 1. Постановка задачи

Найти потенциал электрического поля между двумя бесконечными пластинами, профиль одной из которых плоский, а профиль другой описывается некоторой периодической функцией. Значения потенциала на пластинах заданы и константны.

## 2. Обзор задачи

### 2.1. Физическая составляющая задачи

Для постоянного электрического (электростатического) поля уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  — объемная плотность внешних зарядов. Электрическое поле  $\mathbf{E}$  выражается через только скалярный потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad (3)$$

подставляя (3) в (1), получим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (4)$$

Уравнение (4) есть уравнение Пуассона. При  $\rho = 0$ , т.е. при отсутствии внешних сил, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа [1]

$$\Delta\varphi = 0. \quad (5)$$

## 2.2. Математическая постановка задачи

Из условия поставленной задачи известно, что внешних сил нет, следовательно, потенциал электростатического поля должен удовлетворять уравнению (5). Через функцию  $w(x)$  зададим профиль искривленной пластины,  $w(x)$  — некоторая периодическая функция с периодом  $T$ , т.е.  $w(x) = w(x + T)$ . Пусть плоская пластина находится над искривленной на уровне  $y_a$ . Значение потенциала на пластинах заданы и константны, обозначим значение на верхней (плоской) пластине как  $\varphi_a$ , на нижней (искривленной) —  $\varphi_w$ . Так как профиль задан периодической функцией, следовательно необходимо использовать условие равенства потенциалов в точках  $x$  и  $x + T$ , т.е.  $\varphi(x, y) = \varphi(x + T, y)$ .

Из этих условий составим систему, которую требуется решить:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y_a) = \varphi_a, \\ \varphi(x, w(x)) = \varphi_w, \\ \varphi(x, y) = \varphi(x + T, y). \end{cases} \quad (6)$$

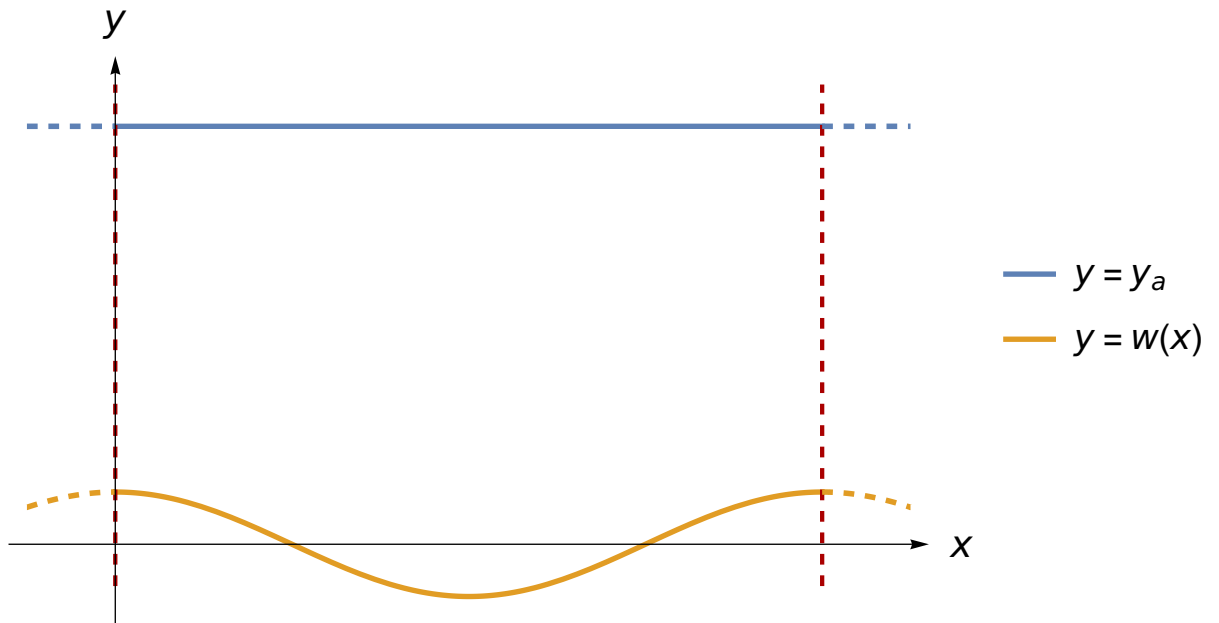


Рис. 1. Иллюстрация области, в которой будет решаться задача

### 3. Решение двумерного уравнения Лапласа

#### 3.1. Аппроксимация уравнения Лапласа

Рассмотрим уравнение Лапласа в двумерной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{в } \Omega, \\ u = g & \text{на } \Gamma_D, \end{cases}$$

где  $\Gamma_D$  — часть границы области, на которой заданы граничные условия первого рода,  $\Gamma_D = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$ .

Опираясь на сведения из источника [2], представим решение задачи в виде  $u = u_0 + u_g$ , где функция  $u_0$  обращается в ноль на границе  $\Gamma_D$ , а  $u_g$  — некоторая произвольная, но наперед заданная функция, значения которой совпадают с  $g$  на границе области,  $u_g|_{\Gamma_D} = g$ .

Тогда переходим к следующей задаче с однородными граничными условиями первого рода на  $\Gamma_D$  относительно функции  $u_0$ :

$$\begin{cases} -\Delta u = \Delta u_g & \text{в } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_D. \end{cases}$$

Запишем слабую постановку задачи для определения  $u_0$ , способом описанным в разделе **16.3.1** источника [2]: необходимо определить  $u_0 \in V_D$ , такое, что

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad v \in V_D,$$

где пространство  $V_D$  состоит из функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные и обращающихся в ноль на части  $\Gamma_D$  границы расчетной области:

$$V_D = \{v \in V : v|_{\Gamma_D} = 0\},$$

а пространство  $V$  состоит из произвольных заданных в  $\Omega$  функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные.

Для аппроксимации задачи с помощью метода конечных элементов (МКЭ) рассмотрим конечномерное пространство  $V_h$ , аппроксимирующее пространство  $V$  и пространство  $V_{D,h} = V_h \cap V_D(\Omega)$ , элементы которого приближают элементы пространства  $V_D$ .

Пусть функция  $u_{g,h} \in V_h$  представляет собой аппроксимацию функции  $u_g$ , задающей граничное условие первого рода.

Тогда конечномерная задача примет вид:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{0,h} \cdot \nabla v_h \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_{g,h} \cdot \nabla v_h \, d\Omega, \quad v_h \in V_{D,h},$$

Пусть  $\varphi_i$  — базис в пространстве  $V_h$ ,  $i = \overline{1, N}$ , причем часть функций  $\varphi_i$  с номерами  $i \in I$  образуют базис в пространстве  $V_{D,h}$ , т.е. обращаются в ноль на границе  $\Gamma_D$ . Количество таких индексов будем считать равным  $M = |I| < N$ ,  $|I| > 1$ .

Тогда последнее уравнение будет эквивалентно

$$\int_{\Omega} \nabla u_{0,h} \cdot \nabla \varphi_i d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_{g,h} \cdot \nabla \varphi_i d\Omega, \quad i \in I.$$

Представляя неизвестное решение в виде линейной комбинации базисных функций:

$$u_{0,h} = \sum_{i \in I} u_{0,h,i} \varphi_i, \quad u_{g,h} = \sum_{i=1}^N u_{g,h,i} \varphi_i,$$

окончательно получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов  $U_h = \{u_{0,h,i}\}$ :

$$A u_{0,h} = b,$$

где  $A = A_{M \times M}$  — матрица жесткости,  $b = b_{M \times 1}$ ,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i, j \in I, \quad (7)$$

$$b_i = - \sum_{j=1}^N u_{g,h,j} \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i \in I. \quad (8)$$

### 3.2. Метод конечных элементов на треугольной сетке

#### 3.2.1. Триангуляция области

Зададим в нашей области  $\Omega$  правильную триангуляцию  $\mathcal{T}$ , т. е. такое разбиение области  $\Omega$  на треугольные ячейки, что любые два треугольника имеют либо общее ребро, либо общую вершину, либо пустое пересечение. Таким образом,

$$\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T.$$

Каждый треугольник  $T$  при этом задается набором трех своих узлов  $P_k$  с координатами  $P_k = (x_k, y_k)$ . Будем считать, что узлы треугольника обходятся в положительном направлении (против хода часовой стрелки).

Рассмотрим простейший случай: выберем базисные функции  $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$  такие, что  $\varphi_k$  — кусочно-линейная функция, принимающая значение единица в узле  $P_k$  и ноль во всех остальных узлах, в пределах одного треугольника она продолжена линейно.

В силу аддитивности интеграла относительно области интегрирования формулы (7) и (8) могут быть записаны в виде

$$A_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i, j \in I, \quad (9)$$

$$b_i = - \sum_{j=1}^N u_{g,h,j} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i \in I. \quad (10)$$

Таким образом, задача вычисления интегралов для коэффициентов матрицы жесткости задачи и ее правой части сводится к задаче вычисления тех же интегралов по отдельным треугольникам.

Рассмотрим один из треугольников  $T$  триангуляции  $\mathcal{T}$ . Будем считать, что его вершины имеют координаты  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1,3}$ . Пусть  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , — базисные функции соответствующие этим вершинам и данному треугольнику. Таким образом

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Функции  $\varphi_i$  являются линейными в пределах  $T$  и имеют следующий вид

$$\varphi_i(x, y) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{pmatrix}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где для удобства обозначения считается, что  $P_4 = P_1$ ,  $x_4 = x_1$ ,  $y_4 = y_1$ , аналогично индекс 5 идентичен индексу 2.

Из формулы (11) получаем следующие соотношения:

$$\nabla \varphi_i(x, y) = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix},$$

где  $|T|$  — площадь треугольника  $T$ , такая, что

$$|T| = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем следующее выражение для матрицы жесткости конечного элемента  $T$ :

$$A_{T,ij} = \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = \frac{|T|}{(2|T|)^2} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

### 3.2.2. Сборка глобальной матрицы жесткости

В предыдущем пункте было рассмотрено, как составляется матрица жесткости для одного элемента  $T$  триангуляции  $\mathcal{T}$ . Основываясь на формулах (9, 10, 12) для каждого элемента  $T$  триангуляции  $\mathcal{T}$  имеем:

- $A_T$  — симметричная матрица размером  $3 \times 3$ ,
- $b_T$  — вектор правой части, состоящий из 3 компонент,
- $u_T$  — вектор неизвестных, состоящий из 3 компонент.

Для решения задачи необходимо составить полную систему  $Au = b$ , где  $A$  — матрица жесткости размером  $N \times N$ ,  $b$  — вектор правой части длины  $N$ ,  $u$  — вектор неизвестных длины  $N$ ,  $N$  — количество узлов триангуляции  $\mathcal{T}$ . Для этого нужно собрать все локальные матрицы жесткости  $A_T$ , т. е. учесть вклад каждого конечного элемента.

Проиллюстрируем эту процедуру на примере: есть треугольник  $T$ , составленный из узлов  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3)$ ,  $P_5 = (x_5, y_5)$  (номера узлов взяты из глобальной нумерации), для него были получены следующая матрица жесткости  $A_T$  и вектор правой части  $b_T$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1.3 & -0.5 & 7 \\ -0.5 & -0.45 & 0.3 \\ 7 & 0.3 & 2.1 \end{pmatrix}, \quad b_T = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что полная система состоит из 7 узлов. Тогда мы расширяем матрицу  $A_T$  до размера  $7 \times 7$ , добавляя нулевые строки и столбцы на место отсутствующих узлов, аналогично для вектора  $b_T$ . Таким образом получаем следующие матрицу и вектор правой части

$$\hat{A}_T = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & -0.5 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0.3 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b}_T = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2.1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для полной системы матрица жесткости  $A$  и вектор правой части  $b$  имеют следующий вид

$$A = \sum_{T \in \mathcal{T}} \hat{A}_T, \quad b = \sum_{T \in \mathcal{T}} \hat{b}_T.$$



### 3.2.3. Наложение граничных условий первого рода

Полную систему уравнений  $Au = b$  можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}u_j = b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где  $a_{ij}$  — компоненты матрицы  $A$ , а  $b_j$ , и  $u_j$  — компоненты вектора правой части  $b$  и вектора неизвестных  $u$  соответственно. Значения решения в узлах, принадлежащих границе  $\Gamma_D$  известны и равны  $u_k = g(P_k), \forall k \in K$ , где  $K$  — множество индексов узлов принадлежащих границе  $\Gamma_D$ . Тогда уравнения (13) могут быть переписаны следующим образом

$$\sum_{j \in I} a_{ij}u_j = b_i - \sum_{k \in K} a_{ik}g(P_k), \quad i \in I, \quad (14)$$

где, как было указано выше,  $I$  — множество индексов узлов, лежащих внутри области,  $|I| + |K| = N$ . Что приводит к уменьшению размера матрицы  $A$  от  $N \times N$  до  $M \times M$ , по средствам удаления строк и столбцов с номерами  $k \in K$  [2].

### 3.2.4. Наложение периодических граничных условий

В поставленной задаче помимо условий первого рода дополнительно наложены условия периодичности на левой и правой границах. Обозначим множество индексов узлов, принадлежащих данной части границы, как  $PB$ . Это множество такое, что

$$PB = PB_l \cup PB_r,$$

где  $PB_l$  — множество индексов узлов принадлежащих левой границе,  $PB_r$  — множество индексов узлов принадлежащих правой границе. Зададим такое разбиение исходной области, что количество узлов на левой и правой границах будет одинаково, т. е.  $|PB_l| = |PB_r|$  и будет выполнено следующее условие: для любого узла  $P$ , принадлежащего левой границе  $PB_l$ , найдется единственный узел  $\tilde{P}$ , принадлежащий правой границе  $PB_r$ , такой, что вертикальные координаты этих узлов будут совпадать, т. е.

$$\forall P = P(x, y) \in PB_l \quad \exists! \tilde{P} = P(\tilde{x}, \tilde{y}) \in PB_r : y = \tilde{y}.$$

Тогда можно задать массив с парами индексов таких узлов, а условие периодичности, предполагает равенство значений в соответствующих парах узлов.

Пусть на узлы  $P_p$  и  $P_q$  наложено условие периодичности, т. е.

$$u_p = u(P_p) = u(P_q) = u_q.$$

Тогда, чтобы учесть периодичность, нужно изменить систему, полученную на предыдущем этапе. Применяется следующий алгоритм:

- заменить все значения в  $p$ -ом ряду матрицы  $A$  на  $a_{pj} + a_{qj}$ , т. е. сложить  $p$ -ую и  $q$ -ую строки, аналогично для вектора правой части  $b$ : заменить  $b_p$  на  $b_p + b_q$ ,
- заметить  $q$ -ую системы на условие  $u_p - u_q = 0$ .

Однако, при данном подходе симметричность матрицы системы теряется. Если симметричность важна, можно поступить, как в случае с граничными условиями первого рода:

- заменить все значения в  $p$ -ой строке матрицы  $A$  на  $a_{pj} + a_{qj}$ , т. е. сложить  $p$ -ую и  $q$ -ую строки, аналогично для вектора правой части  $b$ : заменить  $b_p$  на  $b_p + b_q$ ,
- заменить все значения в  $p$ -ого столбца матрицы  $A$  на  $a_{jp} + a_{jq}$ , т. е. сложить  $p$ -ый и  $q$ -ый столбцы,
- удалить  $q$ -ую строку и  $q$ -ый столбец из системы.

В результате размер решаемой системы уменьшится на единицу, а условие  $u_p = u_q$  будет применено уже к итоговому решению [3]. Таким образом рассматриваются все узлы, на которые наложено условие периодичности. В данной работе был применен алгоритм с сохранением симметричности матрицы жесткости.

## 4. Примеры решения задачи

### 4.1. Задача №1 (задача с граничными условиями первого рода)

#### 4.1.1. Условие задачи

Для проверки алгоритма, рассмотрим его работу на примере задачи для которой решение известно: поиск потенциала в прямоугольной области  $\Omega = [0, 4] \times [0, 2]$  с граничными условиями первого рода:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = \varphi(4, y) = 0, \\ \varphi(x, 2) = 10. \end{cases}$$

Точное решение этой задачи:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20(1 - (-1)^n)}{\pi n \left[ \exp\left(-\frac{\pi n}{2}\right) - \exp\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right]} \left[ \exp\left(-\frac{\pi n}{4}y\right) - \exp\left(\frac{\pi n}{4}y\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right) \quad (15)$$

Естественно, все члены ряда вычислить не получится, ограничимся первыми 350. Тогда точное решение в области  $[0, 4] \times [0, 2]$  выглядит как на рис. 2.

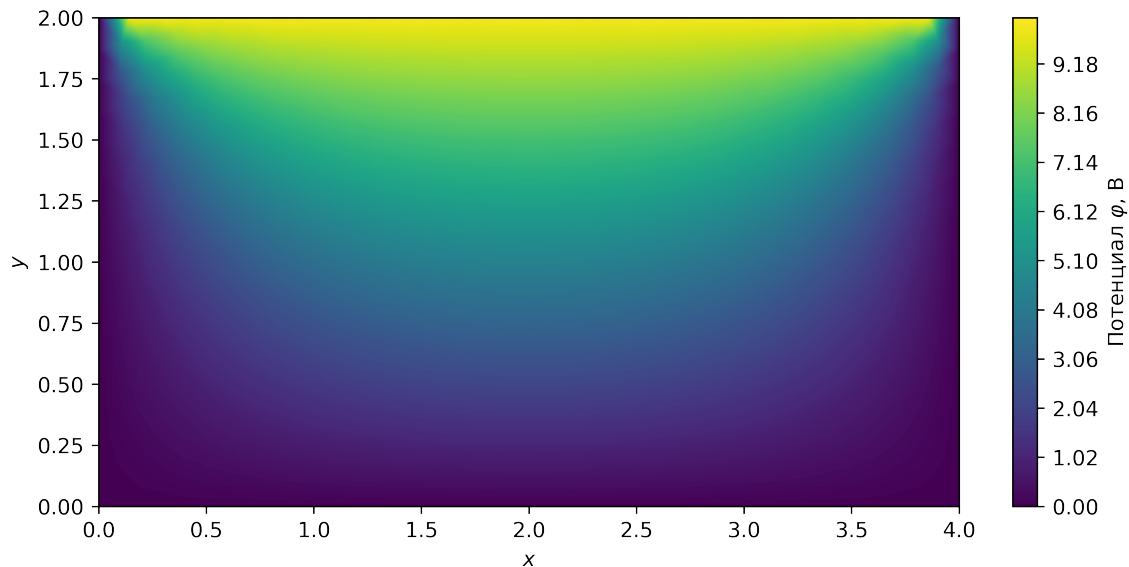


Рис. 2. Точное решение задачи №1

### 4.1.2. Решение

Численное решение будем искать на сетках с разными размерами конечного элемента: будет варьироваться параметр  $S_{max}$ , отвечающий за максимальную площадь конечного элемента. Для построения сеток в данном примере использовалась библиотека CALFEM [4], в которой отношение самой длинной и самой короткой сторон треугольного конечного элемента в среднем стремится к 1.

Полученные сетки с параметром  $S_{max}$  равным 0.05, 0.01, 0.001 выглядят следующим образом:

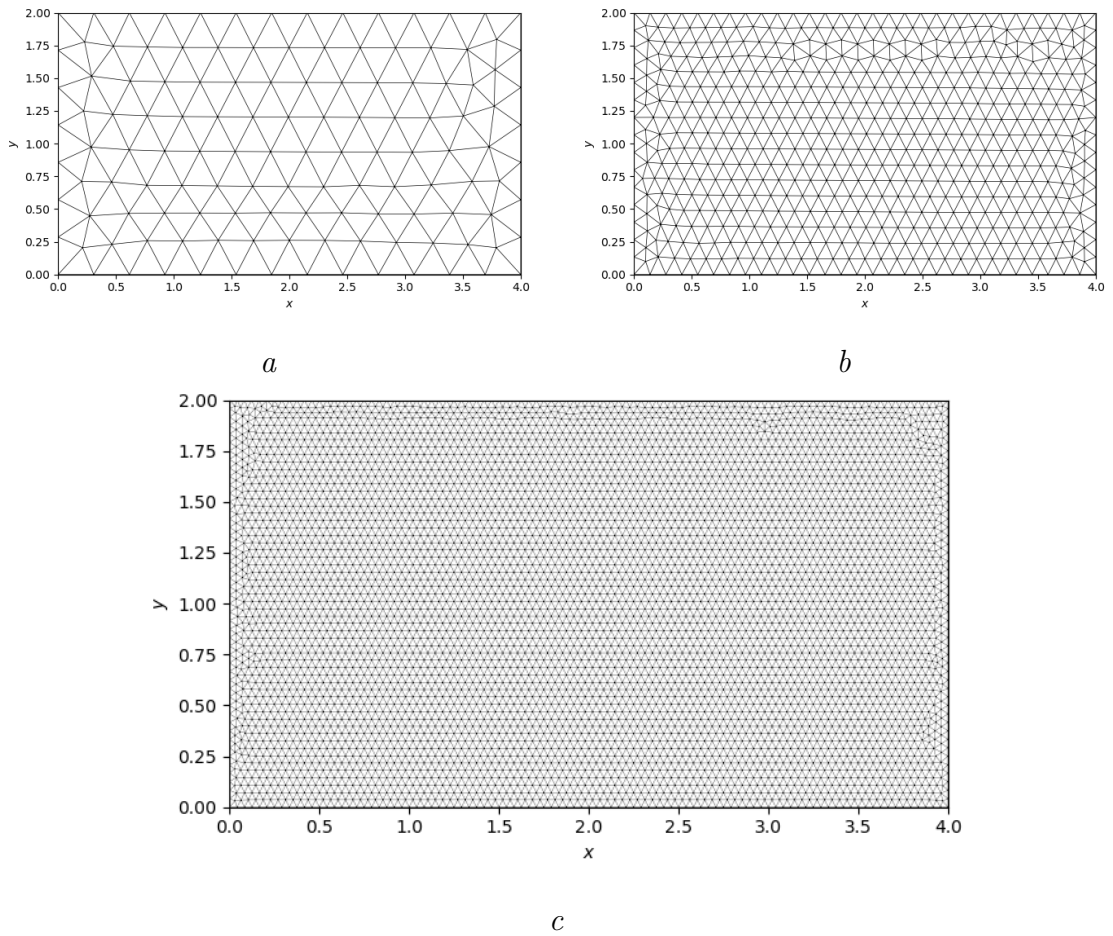


Рис. 3. Иллюстрации разбиения области  $\Omega$  задачи № 1: *a* — параметр  $S_{max} \rightarrow 0.05$ ; *b* — параметр  $S_{max} \rightarrow 0.01$ ; *c* — параметр  $S_{max} \rightarrow 0.001$

Для того, чтобы в дальнейшем качественно сравнить результаты, граничные условия для алгоритма МКЭ будут задаваться с помощью точного решения. Тогда решения поставленной задачи, полученные на сетках рис. 3, выглядят следующим образом:

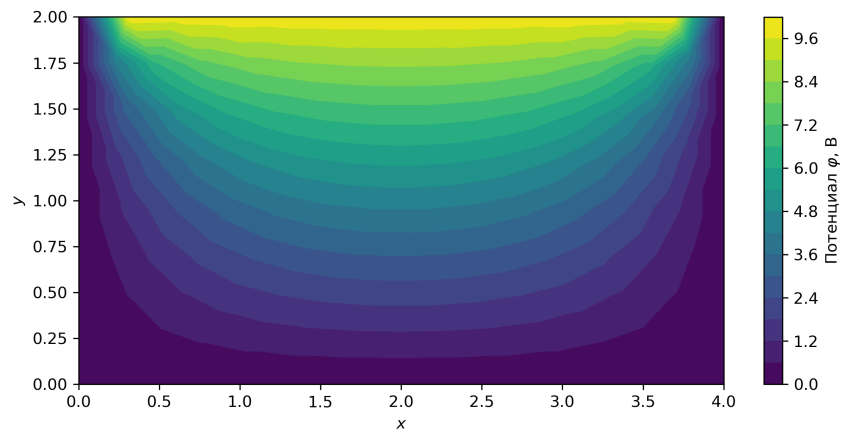


Рис. 4. Численное решение задачи №1 с разбиением области  $\Omega$  на элементы с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.05$

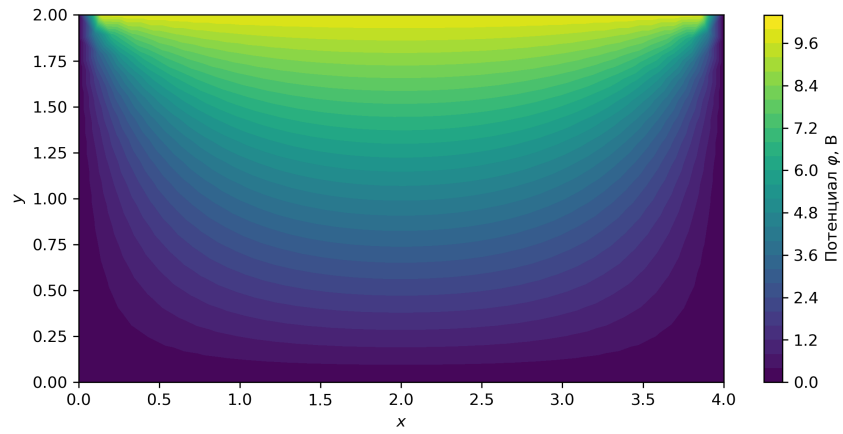


Рис. 5. Численное решение задачи №1 с разбиением области  $\Omega$  на элементы с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.01$

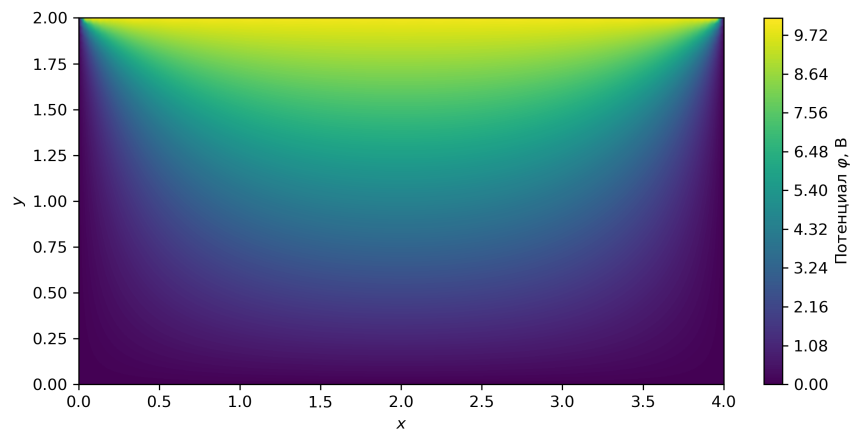


Рис. 6. Численное решение задачи №1 с разбиением области  $\Omega$  на элементы с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.001$

### 4.1.3. Оценка погрешности аппроксимации решения

Для оценки погрешности полученного решения  $u_{approx}$  относительно точного решения  $u_{exact}$  возьмем среднее значение абсолютной погрешности по всем узлам (16) и квадрат погрешности решения в норме  $L_2$  (17):

$$\text{avg}(\text{AbsErr}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u_{exact,i} - u_{approx,i}|, \quad (16)$$

где  $N$  — количество узлов,  $u_{exact,i}$ ,  $u_{approx,i}$  — точное и приближенное решения в  $i$ -ом узле;

$$\text{Err}_{L_2}^2 = \|u_{exact} - u_{approx}\|_{L_2}^2 = \int_S (u_{exact} - u_{approx})^2 dS, \quad (17)$$

где  $S$  — площадь области  $\Omega$ . Численный аналог формулы (17) получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_S (u_{exact} - u_{approx})^2 dS &= \sum_{i=1}^{N_{el}} \int_{S_i} (u_{exact} - u_{approx})^2 dS, \\ \int_{S_i} (u_{exact} - u_{approx})^2 dS &\approx \frac{S_i}{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} (u_{exact,ij} - u_{approx,ij})^2, \\ u_{approx,ij} &= \sum_{k=1}^{N_v} u_{approx,ij} \varphi_{ik}, \end{aligned}$$

где  $N_{el}$  — количество конечных элементов,  $S_i$  — площадь  $i$ -ого конечного элемента,  $N_v$  — количество узлов конечного элемента,  $u_{exact,ij}$ ,  $u_{approx,ij}$  — точное и приближенное значения решения в  $j$ -ом узле  $i$ -ого элемента,  $\varphi_{ik}$  — базисная функция в  $k$ -ом узле  $i$ -ого конечного элемента.

Так как в качестве конечного элемента выбран треугольный элемент, а базисные функции такие, что имеют значение 1 в своем узле и 0 во всех остальных, то формула для вычисления погрешности решения в норме  $L_2$  примет вид

$$\text{Err}_{L_2}^2 \approx \sum_{i=1}^{N_{el}} S_i \sum_{j=1}^3 \frac{(u_{exact,ij} - u_{approx,ij})^2}{3}. \quad (18)$$

#### 4.1.4. Погрешность аппроксимации на сетках

Для анализа качества аппроксимации дополнительно построим решения на сетках с параметром  $S_{max}$  равным 0.005, 0.0005.

Таблица 1. Оценка погрешности аппроксимации решения в зависимости от максимальной площади конечного элемента для задачи № 1

Количество конечных элементов	Максимальная площадь конечного элемента, $S_{max}$	Средняя длина ребра конечного элемента, $h$	avg(AbsErr)	$Err_{L_2}^2$
216	0.05	0.3	0.0289	0.0539
1020	0.01	0.135	0.0121	0.0147
1874	0.005	0.1	0.0044	0.0042
10778	0.001	0.041	0.00107	0.00096
22124	0.0005	0.029	0.00053	0.00046

Из таблицы 1 видно, что avg(AbsErr) и  $Err_{L_2}^2$  являются величинами порядка  $O(h^2)$  или же  $O(S_{max})$  и меняются линейно в зависимости от площади конечного элемента.

Исследуем зависимость погрешности решения от отношение самой длинной и самой короткой сторон треугольного конечного элемента. Для этого построим сетки с помощью Wolfram Mathematica, с параметром  $S_{max}$  равным 0.05, 0.01, 0.001.

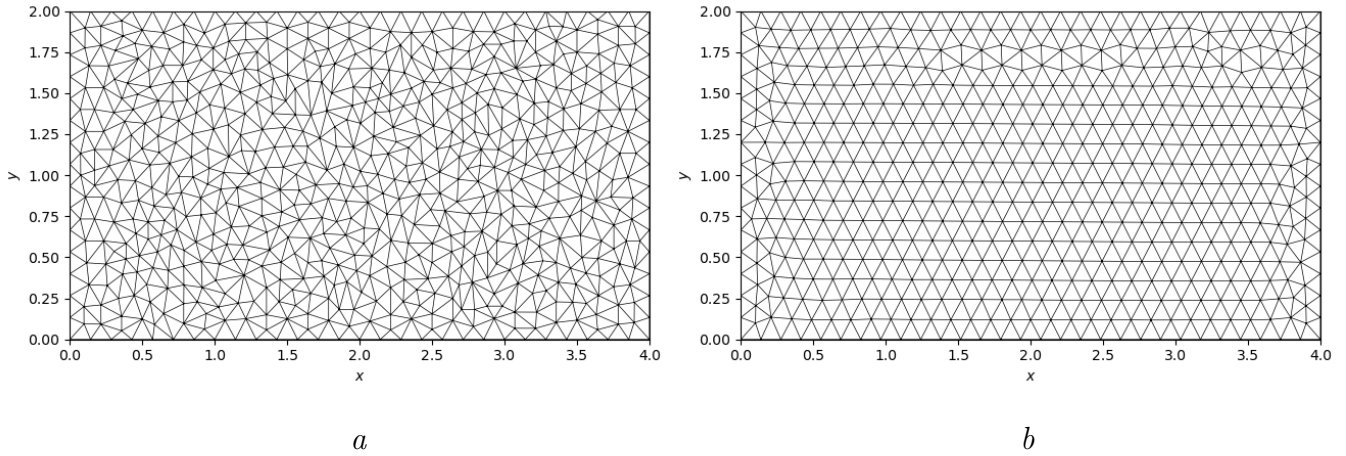


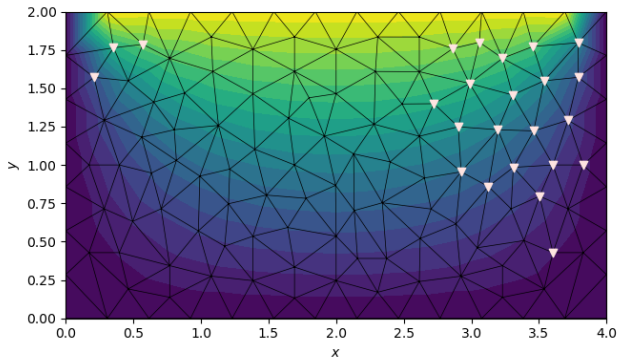
Рис. 7. Иллюстрации разбиения области  $\Omega$  задачи № 1 с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.01$ :  $a$  — сетка Wolfram Mathematica;  $b$  — сетка CALFEM

На этапе построения сетки видно, что, в отличие от CALFEM, где в среднем отношение большего и меньшего ребер конечного элемента  $\frac{h_{max}}{h_{min}} \approx 1.1$ , сетка в Wolfram Mathematica выходит менее структурированной, для нее отношение большего и меньшего ребер в среднем равно  $\frac{h_{max}}{h_{min}} \approx 1.4$ .

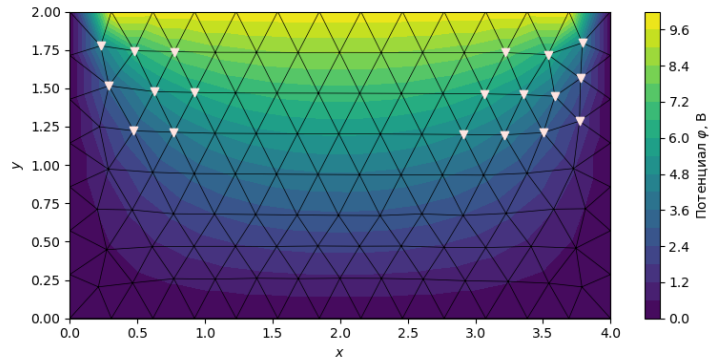
Таблица 2. Сравнение решений задачи №1 в зависимости от отношения большего и меньшего ребер конечного элемента

Средняя длина ребра конечного элемента, $h$	$\text{avg} \left( \frac{h_{max}}{h_{min}} \right)$	$\max \left( \frac{h_{max}}{h_{min}} \right)$	$\text{avg}(\text{AbsErr})$	$\text{Err}_{L_2}^2$
0.3	1.1	1.5	0.03	0.05
0.3	1.4	2	0.02	0.034
0.135	1.1	1.4	0.01	0.015
0.127	1.4	2.3	0.008	0.013
0.04	1.1	1.4	0.001	0.001
0.04	1.4	2.3	0.003	0.007
0.038	1	1.5	0.0007	0.0004
0.036	1.4	2.3	0.0052	0.0047

Из таблицы видно, что при уменьшении ребра  $h$ , отношение длин сторон конечного элемента  $\text{avg} \left( \frac{h_{max}}{h_{min}} \right)$  начинает играть существенную роль. Также отдельно рассмотрим узлы сетки, в которых абсолютная погрешность отличается от своего среднего значения больше чем на 20%.



a



b

Рис. 8. Иллюстрация точек с наибольшим отклонением численного решения от точного для задачи №1 с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.05$ : a — на сетке с  $\text{avg} \left( \frac{h_{max}}{h_{min}} \right) \approx 1.4$ ;

b — на сетке с  $\text{avg} \left( \frac{h_{max}}{h_{min}} \right) \approx 1.1$



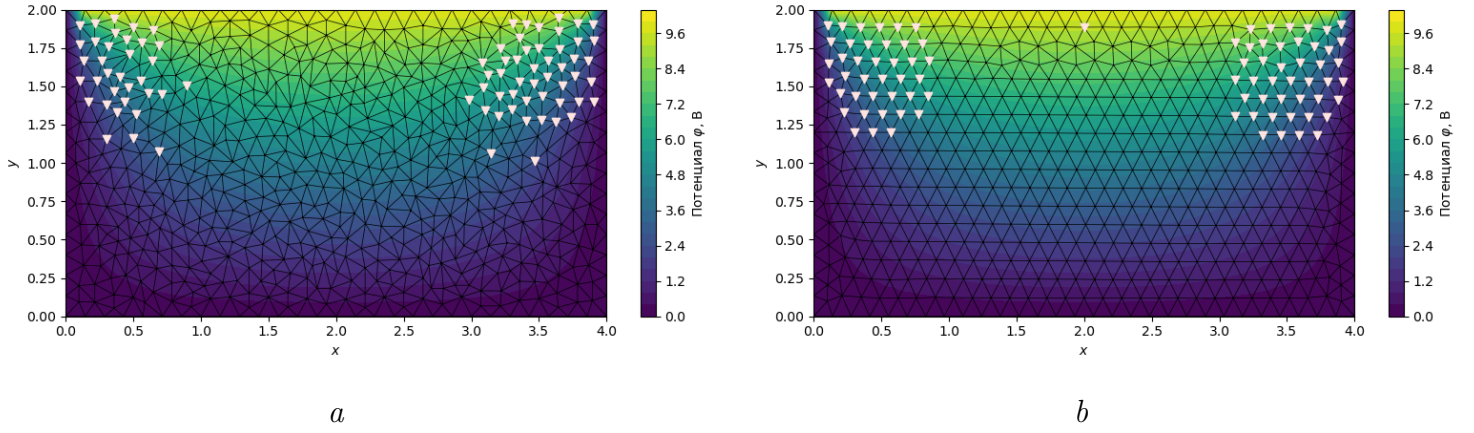


Рис. 9. Иллюстрация точек с наибольшим отклонением численного решения от точного для задачи №1 с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.01$ :  $a$  — на сетке с  $\text{avg}\left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right) \approx 1.4$ ;  
 $b$  — на сетке с  $\text{avg}\left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right) \approx 1.1$

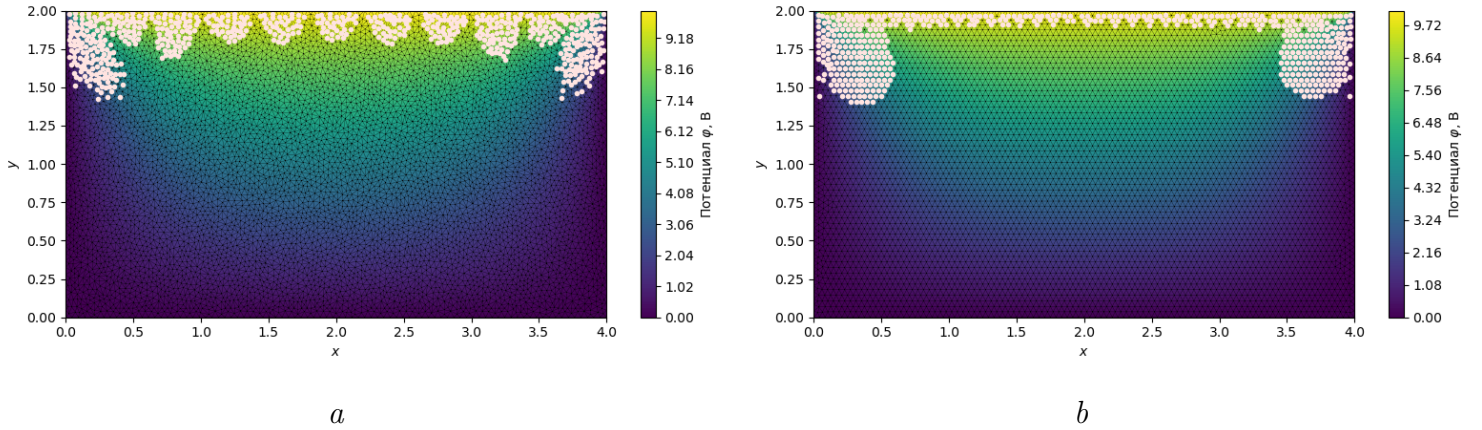


Рис. 10. Иллюстрация точек с наибольшим отклонением численного решения от точного для задачи №1 с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.001$ :  $a$  — на сетке с  $\text{avg}\left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right) \approx 1.4$ ;  
 $b$  — на сетке с  $\text{avg}\left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right) \approx 1.1$

Как видно из таблицы 2 и рисунков 8–10 большая погрешность аппроксимации возникает в приграничных областях, где заданы разные значения на границах. Также видно, что на сетке с отношением  $\text{avg}\left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right) \approx 1.4$  ошибка «проникает» глубже внутрь области, чем на сетке с отношением  $\text{avg}\left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right) \approx 1.1$ .

## 4.2. Задача № 2 (периодические граничные условия)

### 4.2.1. Условие задачи

Найти потенциал в области  $\Omega = \{-\infty \leq x \leq \infty, w(x) \leq y \leq 2\}$ , где  $w(x)$  — периодическая функция с периодом  $T = 2$ , такая что  $w(x) = |x - 1| + 1, \forall x \in [0, 2]$ , на верхней пластине потенциал равен 0 В, на нижней — 10 В.

### 4.2.2. Решение

Рассмотрим задачу при  $x \in [0, 2]$ . Запишем систему, которую нужно решить:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, 2) = 0, \\ \varphi(x, w(x)) = 10, \\ \varphi(0, y) = \varphi(2, y). \end{cases}$$

Тогда численное решение задачи № 2, полученное методом конечных элементов при разбиении  $\Omega$  с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.01$  выглядит следующим образом:

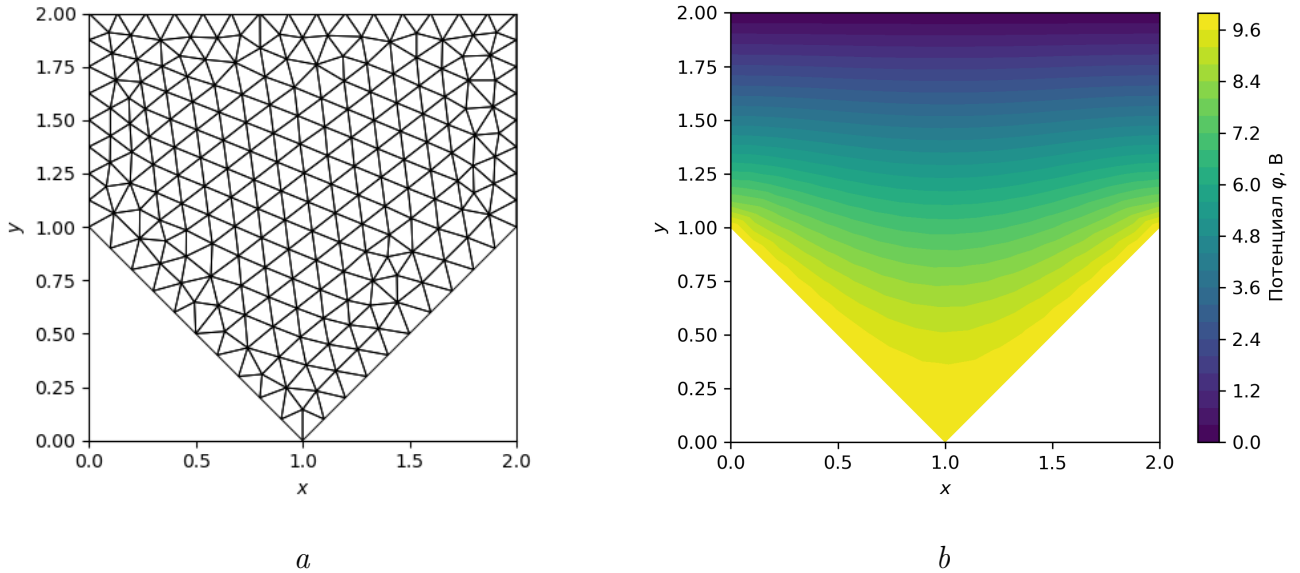


Рис. 11. Иллюстрации к решению задачи № 2 на отрезке  $[0, 2]$ :

$a$  — иллюстрация разбиения исследуемой области с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.01$ ;

$b$  — численное решение задачи № 2 с разбиением исследуемой области на элементы с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.01$

Аналогично рассмотрим задачу, расширив область поиска решения до трех периодов функции  $w(x)$ :

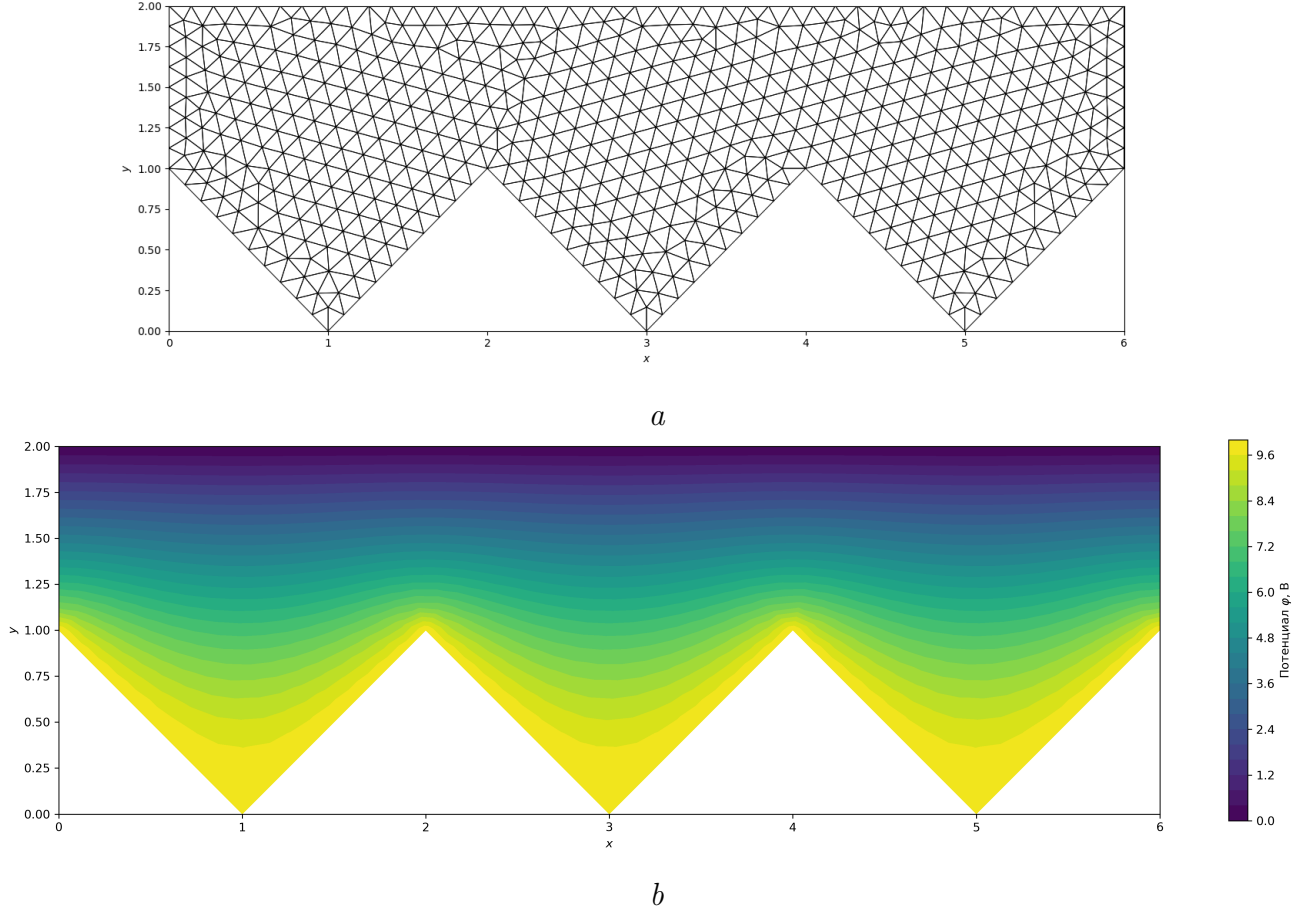


Рис. 12. Иллюстрации к решению задачи № 2 на отрезке  $[0, 6]$ :

$a$  — иллюстрация разбиения исследуемой области с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.01$ ;

$b$  — численное решение задачи № 2 с разбиением исследуемой области на элементы с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.01$

#### 4.2.3. Проверка решения на удовлетворение условиям периодичности

Из графиков видно, что решение гладко меняется внутри области, значения потенциалов в точках  $(x, w(x))$  и  $(x + T, w(x + T))$  выглядят равными. Удостоверимся в этом численно: с помощью формулы интерполирования на треугольной сетке

$$u(x, y) \approx \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j^{xy},$$

где  $N$  — количество узлов сетки,  $u_j$  — известное значение функции в  $j$ -ом узле,  $\varphi_j^{xy}$  — значение базисной функции в точке  $(x, y)$  [2]. Вычислим значения в точках,

в которых идеологически эти значения должны совпадать. Рассмотрим две группы точек:

1. Точки вида:  $(0, y)$ ,  $(2, y)$  — для решения построенного на одном периоде функции  $w(x)$ ,  $(0, y)$ ,  $(2, y)$ ,  $(4, y)$ ,  $(6, y)$  — для решения построенного на трех периодах функции  $w(x)$ :

Таблица 3. Сравнение значений численного решения задачи № 2 в первой группе точек

Область решения	Координаты $(x, y)$	Значение потенциала $\varphi$ , В
1 период $w(x)$	(0.0, 1.27)	6.3158
	(2.0, 1.27)	6.3158
3 периода $w(x)$	(0.0, 1.27)	6.3093
	(2.0, 1.27)	6.2896
	(4.0, 1.27)	6.2946
	(6.0, 1.27)	6.3093
1 период $w(x)$	(0.0, 1.92)	0.6551
	(2.0, 1.92)	0.6551
3 периода $w(x)$	(0.0, 1.92)	0.6547
	(2.0, 1.92)	0.6549
	(4.0, 1.92)	0.6555
	(6.0, 1.92)	0.6547

2. Точки вида  $(1, y)$  — для решения построенного на одном периоде функции  $w(x)$ ,  $(1, y)$ ,  $(3, y)$ ,  $(5, y)$  — для решения построенного на трех периодах функции  $w(x)$ :

Таблица 4. Сравнение значений численного решения задачи № 2 во второй группе точек

Область решения	Координаты $(x, y)$	Значение потенциала $\varphi$ , В
1 период $w(x)$	(1.0, 0.75)	8.3049
3 периода $w(x)$	(1.0, 0.75)	8.305
	(3.0, 0.75)	8.3061
	(5.0, 0.75)	8.3055
1 период $w(x)$	(1.0, 1.62)	2.8561
3 периода $w(x)$	(1.0, 1.62)	2.8556
	(3.0, 1.62)	2.858
	(5.0, 1.62)	2.8562

Из таблиц видно, что значения отличаются примерно на порядок  $O(h^2)$ , что показывает выполнение условий периодичности.

### 4.3. Задача №3 (периодические граничные условия)

#### 4.3.1. Условие задачи

Найти потенциал в области  $\Omega = \{-\infty \leq x \leq \infty, w(x) \leq y \leq 2\}$ , где  $w(x)$  — периодическая функция, такая что  $w(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ , на верхней пластине потенциал равен 12 В, на нижней — 7 В.

#### 4.3.2. Решение

Рассмотрим задачу при  $x \in [1, 5]$ . Запишем систему, которую нужно решить:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, 2) = 12, \\ \varphi(x, w(x)) = -7, \\ \varphi(1, y) = \varphi(5, y). \end{cases}$$

Тогда численное решение задачи №3, полученное методом конечных элементов при разбиение  $\Omega$  с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.001$  выглядит следующим образом:

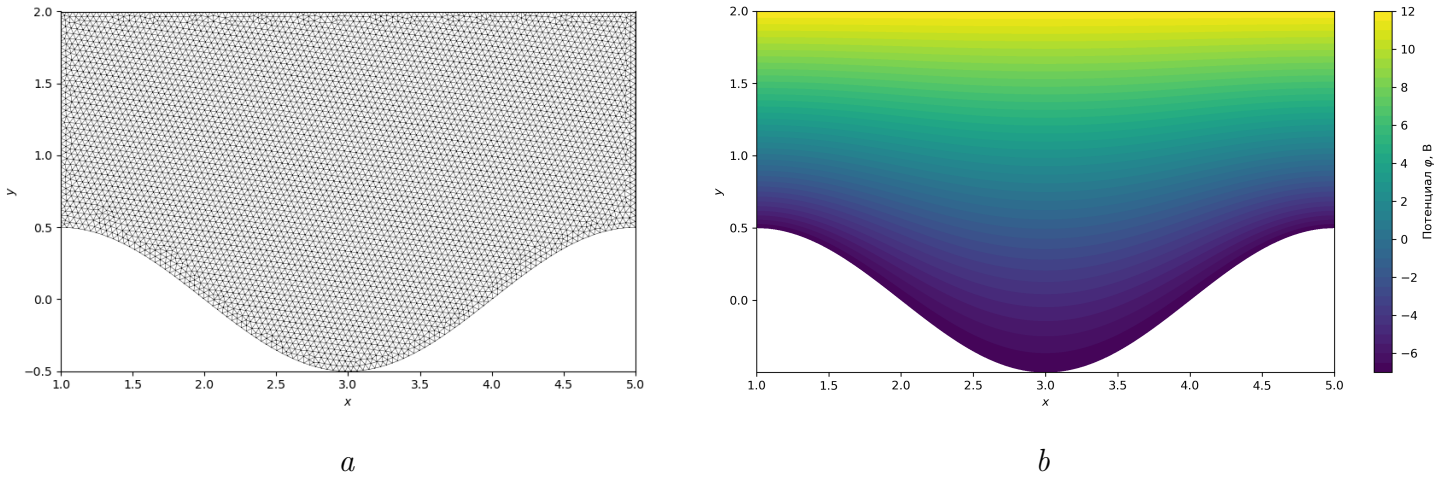


Рис. 13. Иллюстрации к решению задачи №3 на отрезке  $[1, 5]$ :

$a$  — иллюстрация разбиения исследуемой области с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.001$ ;

$b$  — численное решение задачи №3 с разбиением исследуемой области на элементы с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.001$

Как и в задаче №2 расширим область до 3 периодов и рассмотрим точки, в которых значения решения должны совпадать.



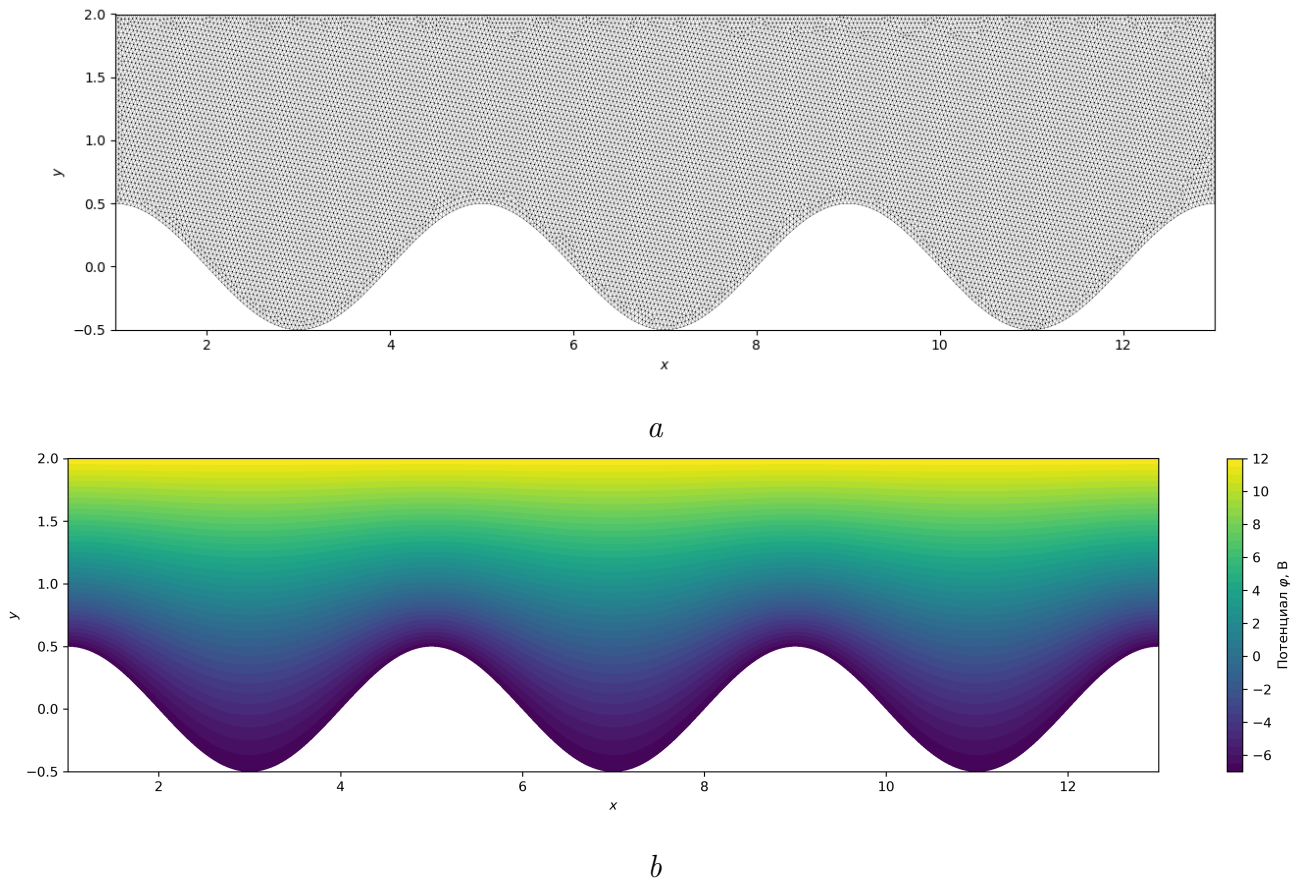


Рис. 14. Иллюстрации к решению задачи №3 на отрезке  $[1, 13]$ :

$a$  — иллюстрация разбиения исследуемой области с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.001$ ;

$b$  — численное решение задачи №3 с разбиением исследуемой области на элементы с параметром  $S_{max} \rightarrow 0.001$

#### 4.3.3. Проверка решения на удовлетворение условиям периодичности

Аналогично предыдущей задаче проверим выполнение периодических граничных условий. Рассмотрим две группы точек:

1. Точки вида:  $(1, y)$ ,  $(5, y)$  — для решения построенного на одном периоде функции  $w(x)$ ,  $(1, y)$ ,  $(5, y)$ ,  $(9, y)$ ,  $(13, y)$  — для решения построенного на трех периодах функции  $w(x)$  (таблица 5).
2. Точки вида  $(1, y)$  — для решения построенного на одном периоде функции  $w(x)$ ,  $(1, y)$ ,  $(3, y)$ ,  $(5, y)$  — для решения построенного на трех периодах функции  $w(x)$  (таблица 6).

Таблица 5. Сравнение значений численного решения задачи №3 в первой группе точек

Область решения	Координаты $(x, y)$	Значение потенциала $\varphi$ , В
1 период $w(x)$	(1.0, 1.25)	3.4191
	(5.0, 1.25)	3.4191
3 периода $w(x)$	(1.0, 1.25)	3.4191
	(5.0, 1.25)	3.4185
	(9.0, 1.25)	3.4184
	(13.0, 1.25)	3.4191
1 период $w(x)$	(1.0, 1.6)	7.4927
	(5.0, 1.6)	7.4927
3 периода $w(x)$	(1.0, 1.6)	7.4927
	(5.0, 1.6)	7.4926
	(9.0, 1.6)	7.4927
	(13.0, 1.6)	7.4927

Таблица 6. Сравнение значений численного решения задачи №3 во второй группе точек

Область решения	Координаты $(x, y)$	Значение потенциала $\varphi$ , В
1 период $w(x)$	(3.0, 0.0)	-4.7379
3 периода $w(x)$	(3.0, 0.0)	-4.7382
	(7.0, 0.0)	-4.73749
	(11.0, 0.0)	-4.7386
1 период $w(x)$	(3.0, 1.5)	7.205
3 периода $w(x)$	(3.0, 1.5)	7.2051
	(7.0, 1.5)	7.2051
	(11.0, 1.5)	7.205

Из таблиц 5, 6 видно, что значения отличаются примерно на порядок  $O(h^2)$ , что показывает выполнение условий периодичности.

## 5. Программная реализация

Алгоритм для решения задачи методом конечных элементов (МКЭ) был реализован на языке C++. МКЭ, в силу финитности базисных функций, предполагает решение системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей, для этого использовалась библиотека линейной алгебры для языка C++ — Eigen [5]. Для построения сеток использовались математический пакет Wolfram Mathematica и библиотека CALFEM [4] для языка Python. Графики и иллюстрации строились с помощью встроенных средств Wolfram Mathematica и библиотеки Matplotlib [6] для языка Python.

## Заключение

В ходе курсовой работы был изучен и реализован метод конечных элементов для решения уравнения Лапласа. Реализация метода была проверена на тестовом примере с известным решением, также с ее помощью были решены и исследованы несколько вариантов исходной задачи с разными профилями пластин и заданными на них потенциалами. Все описанные подходы выполнены на языке C++ с демонстрацией результатов работы.



## Список использованных источников

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. 6-е изд., испр. М.: Изд-во Наука, 1973. 507 с.
2. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. 2-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 591 с.: ил.
3. Stahel A. Calculus of Variations and Finite Elements. 2003. URL: [https://www.researchgate.net/publication/268051850\\_Calculus\\_of\\_Variations\\_and\\_Finite\\_Elements](https://www.researchgate.net/publication/268051850_Calculus_of_Variations_and_Finite_Elements) (дата обращения 27.05.2023)
4. CALFEM for Python. Computer Aided Learning of the Finite Element Method. URL: <https://calfem-for-python.readthedocs.io/> (дата обращения 8.06.2023)
5. Eigen. C++ template library for linear algebra: matrices, vectors, numerical solvers, and related algorithms. URL: <https://eigen.tuxfamily.org/> (дата обращения 20.05.2023)
6. Matplotlib. A comprehensive library for creating static, animated, and interactive visualizations in Python. URL: <https://matplotlib.org/> (дата обращения 8.06.2023)