**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н. Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

# РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

## *К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*

## *НА ТЕМУ:*

# *Поиск потенциала электрического поля в периодической структуре*

Студент ФН2-62Б (Группа) _______ (Подпись, дата) А. Д. Егоров (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы _______ (Подпись, дата) К. Е. Казаков (И. О. Фамилия)

2023 г.

# Оглавление

# Введение

## 1. Постановка задачи

Найти потенциал электрического поля между двумя бесконечными пластинами, профиль одной из которых плоский, а профиль другой описывается некоторой периодической функцией. Значения потенциала на пластинах заданы и константны.

## 2. Обзор задачи

### 2.1. Физическая составляющая задачи

Для постоянного электрического (электростатического) поля уравнения Максвелла имеют вид

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{2}$$

где $\rho$ — объемная плотность внешних зарядов. Электрическое поле $\mathbf{E}$ выражается через только скалярный потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi, \tag{3}$$

подставляя (3) в (1), получим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{4}$$

Уравнение (4) есть уравнение Пуассона. При $\rho = 0$, т.е. при отсутствии внешних сил, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{5}$$

### 2.2. Математическая постановка задачи

Из условия поставленной задачи известно, что внешних сил нет, следовательно, потенциал электростатического поля должен удовлетворять уравнению (5). Через функцию $w(x)$ зададим профиль искривленной пластины, $w(x)$ — некоторая периодическая функция с периодом $T$, т.е. $w(x) = w(x+T)$. Пусть плоская пластина находится над искривленной на уровне $y_a$. Значение потенциала на пластинах заданы и константны, обозначим значение на верхней (плоской) пластине как $\varphi_a$, на нижней (искривленной) — $\varphi_w$. Так как профиль профиль задан периодической функцией, следовательно необходимо использовать условие равенства потенциалов в точках $x$ и $x + T$, т.е. $\varphi(x, y) = \varphi(x + T, y)$.

Из этих условий составим систему, которую требуется решить:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y_a) = \varphi_a, \\ \varphi(x, w(x)) = \varphi_w, \\ \varphi(x, y) = \varphi(x + T, y), \end{cases} \tag{6}$$

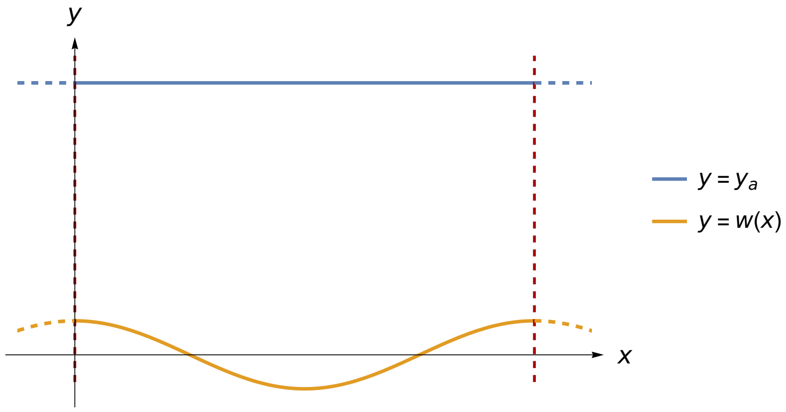


Рис. 1. Иллюстрация области, в которой будет решаться задача

# 3. Решение двумерного уравнения Лапласа

## 3.1. Аппроксимация уравнения Лапласа методом конечных элементов

Рассмотрим уравнение Лапласа в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u = g \quad \text{на} \quad \Gamma_D, \end{cases}$$

где $\Gamma_D$ — часть границы области, на которой заданы граничные условия первого рода, $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\Gamma_D \neq \varnothing$.

Опираясь на сведения из источника [1], представим решение задачи в виде $u = u_0 + u_g$, где функция $u_0$ обращается в нуль на границе $\Gamma_D$б а $u_g$ — некоторая, произвольная, но наперед заданная функция, значения которой совпадают с $g$ на границе области, $u_g|_{\Gamma_D} = g$.

И переходим к следующей задаче с однородными граничными условиями первого рода на $\Gamma_D$ относительно функции $u_0$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \Delta u_g \text{ в } \Omega, \\ u_0 = 0 \text{ на } \Gamma_D. \end{cases}$$

Запишем слабую постановку задачи для определения $u_0$, способом описанным в разделе **16.3.1** источника [1]: необходимо определить $u_o \in V_D$, такое, что

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, d\Omega = -\int_\Omega \nabla u_g \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad v \in V_D,$$

где пространство $V_D$ состоит из функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные и обращающихся в нуль на части $\Gamma_D$ границы расчетной области:

$$V_D = \{v \in V : \ v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

а пространство $V$ состоит из произвольных заданных в $\Omega$ функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные.

Для аппроксимации задачи с помощью МКЭ рассмотрим конечномерное пространство $V_h$, аппроксимирующее пространство $V$ и пространство $V_{D,h} = V_h \cap V_D(\Omega)$, элементы которого приближают элементы пространства $V_D$.

Пусть функция $u_{g,h} \in V_h$ представляет собой аппроксимацию функции $u_g$, задающей граничное условие первого рода. В качестве функции $u_{g,h}$.

Тогда конечномерная задача примет вид: определить $u_{0,h} \in V_{D,h}$, такую, что

$$\int_\Omega \nabla u_{0,h} \cdot \nabla v_h \, d\Omega = -\int_\Omega \nabla u_{g,h} \cdot \nabla v_h \, d\Omega, \quad v_h \in V_D,$$

Пусть $\varphi_i$, $\mathrm{i} = \overline{1, N}$, — базис в пространстве $V_h$, причем часть функций $\varphi_i$ с номерами $i \in I$ образуют базис в пространстве $V_{D,h}$, т.е. обращаются в нуль на границе $\Gamma_D$. Количество таких индексов будем считать равным $M = |I| < N, \ |I| > 1$.

Тогда последнее уравнение будет эквивалентно

$$\int_\Omega \nabla u_{0,h} \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega = -\int_\Omega \nabla u_{g,h} \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega, \quad i \in I.$$

Представляя неизвестное решение в виде линейной комбинации базисных функций:

$$u_{0,h} = \sum_{i \in I} u_{0,h,i} \varphi_i, \quad u_{g,h} = \sum_{i=1}^{N} u_{g,h,i} \varphi_i,$$

окончательно получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов $U_h = \{u_{0,h,i}\}$:

$$A u_{0,h} = b,$$

где $A = A_{M\times M}$ — матрица жесткости, $b = b_{M\times 1}$,

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, d\Omega, \quad i,j \in I. \tag{7}$$

$$b_i = -\sum_{j=1}^{N} u_{g,h,j} \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, d\Omega, \quad i \in I. \tag{8}$$

### 3.2. Метод конечных элементов на треугольной сетке

# 4. Программная реализация алгоритма

Построение сеток — Wolfram Mathematica, алгоритм метода конечных элементов реализован на языке C++

# Заключение

# Список использованных источников

1. Методы численного анализа математических моделей / М. П. Галанин, Е. Б. Савенков. – 2-е изд., испр. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. – 591 [1] с.: ил.