Поиск потенциала электрического поля между заряженными пластинами

Докладчик: Егоров А. Д.
Научный руководитель: Казаков К. Е.

Группа ФН2-62Б

14 июня 2023 г.

Постановка задачи

Задача

Найти потенциал электрического поля между двумя бесконечными пластинами, профиль одной из которых плоский, а профиль другой описывается некоторой периодической функцией. Значения потенциала на пластинах заданы и константны.

Математическая формулировка задачи

$$
\begin{cases}
\Delta u(x, y) = 0, \\
u(x, y_a) = \varphi_a, \\
u(x, w(x)) = \varphi_w, \\
u(x, y) = u(x + T, y).
\end{cases}
$$

$w(x)$ — периодическая функция, задающая профиль искривленной пластины, φ_a, φ_w — значения потенциалов на пластинах.

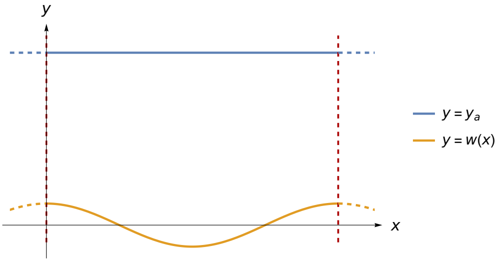


Иллюстрация области, в которой будет решаться задача

Аппроксимация уравнения Лапласа

Представим решение задачи в виде $u = u_0 + u_g$, где u_0 — функция, обращающаяся в ноль на границе Γ_D, u_g — произвольная функция, значения которой совпадают с g на границе области, $u_g|_{\Gamma_D} = g$.

Задача с однородными граничными условиями первого рода на Γ_D относительно функции u_0

$$\begin{cases} -\Delta u = \Delta u_g \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D. \end{cases}$$

Слабая постановка задачи для определения $u_0 \in V_D$

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, d\Omega = -\int_\Omega \nabla u_g \cdot \nabla v \, d\Omega,$$

$$v \in V_D = \{v \in V : \; v|_{\Gamma_D} = 0\},$$

Пространство V состоит из произвольных заданных в Ω функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные.

Аппроксимация методом конечных элементов

$$\int_\Omega \nabla u_{0,h} \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega = - \int_\Omega \nabla u_{g,h} \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega, \quad i \in I.$$

где φ_i — функции, образующие базис в пространстве V_h (конечномерное пространство аппроксимирующее V), $i = \overline{1, N}$,
I — множество идексов ф-ий φ_i, образующих базис в пространстве $V_{D,h} = V_h \cap V_D(\Omega)$, Γ_D. $M = |I| < N$, $|I| > 1$.

Представляя неизвестное решение в виде линейной комбинации базисных функций:

$$u_{0,h} = \sum_{i \in I} u_{0,h,i} \varphi_i, \quad u_{g,h} = \sum_{i=1}^{N} u_{g,h,i} \varphi_i,$$

Получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов $\{u_{0,h,i}\}$:

$$A u_{0,h} = b, \tag{1}$$

где $A = A_{M \times M}$ — матрица жесткости, $b = b_{M \times 1}$,

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega, \ i, j \in I, \quad b_i = - \sum_{j=1}^{N} u_{g,h,j} \int_\Omega \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega, \ i \in I.$$

Триангуляция области

Зададим правильную триангуляцию $\mathcal{T}$ области Ω.
Для отдельного треугольника $T \in \mathcal{T}$ с координатами вершин $P_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1,3}$, базисные функции φ_i, соответствующие этим вершинам, в T продолжены линейно.

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad \nabla\varphi_i(x, y) = \frac{1}{2|T|}\begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix}, \ i, j = 1, 2, 3,$$

где $|T|$ — площадь треугольника. Тогда формулы коэффициентов СЛАУ (1) примут вид

$$A_{ij} = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, d\Omega = \sum_{T\in\mathcal{T}} \frac{1}{4|T|}\begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}, \ i, j \in I,$$

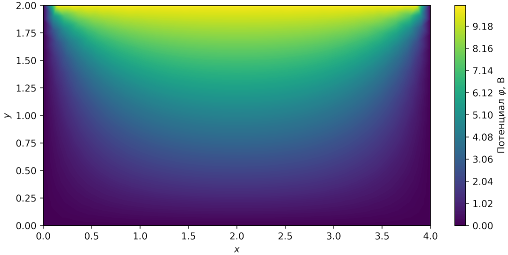
$$b_i = -\sum_{j=1}^{N} u_{g,h,j} \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, d\Omega =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} u_{g,h,j} \sum_{T\in\mathcal{T}} \frac{1}{4|T|}\begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}, \quad i \in I.$$

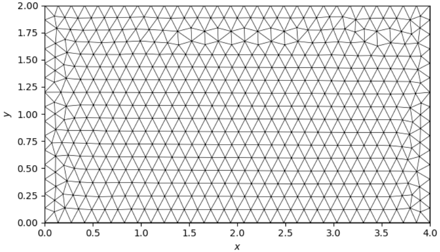
Задача № 1

Условие:

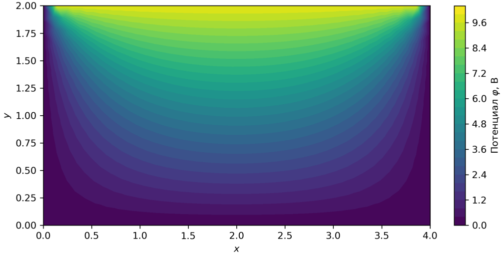
$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = \varphi(4, y) = 0, \\ \varphi(x, 2) = 10. \end{cases}$$



Точное решения



Разбиение области Ω с элементы с $S_{max} = 0.01$



Решение на сетке с $S_{max} = 0.01$

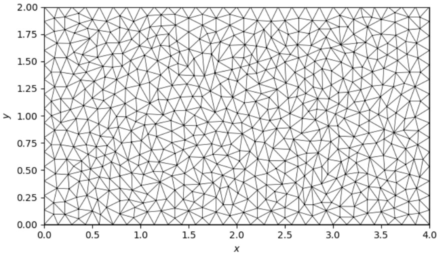
$$\mathrm{avg}(\mathrm{AbsErr}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left| u_{exact,i} - u_{approx,i} \right|, \quad N \text{ — количество узлов сетки}$$

$$\mathrm{Err}^2_{L_2} = \| u_{exact} - u_{approx} \|^2_{L_2} \approx \sum_{i=1}^{N_{el}} S_i \sum_{j=1}^{3} \frac{(u_{exact,\,ij} - u_{approx,\,ij})^2}{3}.$$

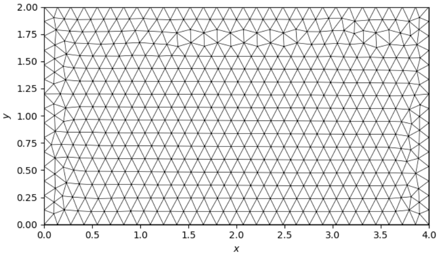
N_{el} — количество конечных элементов, S_i — площадь i-ого конечного элемента, $u_{exact,\,ij}$, $u_{approx,\,ij}$ — точное и приближенное значения решения в j-ом узле i-ого элемента.

Оценка погрешности аппроксимации решения в зависимости от длины ребра и максимальной площади конечного элемента для задачи № 1

N	S_{max}	avg(h)	avg(AbsErr)	$\mathrm{Err}^2_{L_2}$
216	0.05	0.3	0.0289	0.0539
1020	0.01	0.135	0.0121	0.0147
1874	0.005	0.1	0.0044	0.0042
10778	0.001	0.041	0.00107	0.00096
22124	0.0005	0.029	0.00053	0.00046



Разбиение области Ω с $S_{max} = 0.01$ и $\operatorname{avg}\left(h_{max}/h_{min}\right) \approx 1.4$



Разбиение области Ω с $S_{max} = 0.01$ и $\operatorname{avg}\left(h_{max}/h_{min}\right) \approx 1.1$

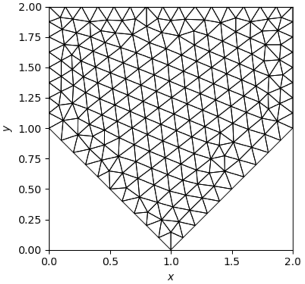
$\operatorname{avg}(h)$	$\operatorname{avg}\left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right)$	$\max\left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right)$	$\operatorname{avg}(\mathrm{AbsErr})$	$\mathrm{Err}^2_{L_2}$
0.3	1.1	1.5	0.03	0.05
0.3	1.4	2	0.02	0.034
0.135	1.1	1.4	0.01	0.015
0.127	1.4	2.3	0.008	0.013
0.04	1.1	1.4	0.001	0.001
0.04	1.4	2.3	0.003	0.007
0.038	1	1.5	0.0007	0.0004
0.036	1.4	2.3	0.0052	0.0047

Задача № 2

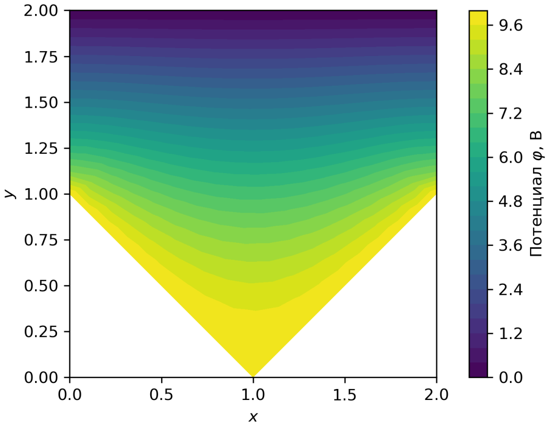
Область $\Omega = \{-\infty \leqslant x \leqslant \infty,\ w(x) \leqslant y \leqslant 2\}$, $w(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2$, $w(x) = |x - 1| + 1, \forall x \in [0, 2]$, потенциал на верхней пластине равен 0 В, на нижней — 10 В.

Рассмотрим задачу при $x \in [0, 2]$:

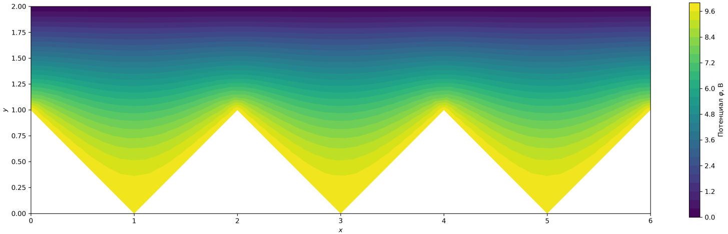
$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, 2) = 0, \\ \varphi(x, w(x)) = 10, \\ \varphi(0, y) = \varphi(2, y). \end{cases}$$



Разбиение Ω с $S_{max} = 0.01$



Решение на сетке с $S_{max} = 0.01$



Решение на отрезке $[0, 6]$ на сетке с $S_{max} = 0.01$

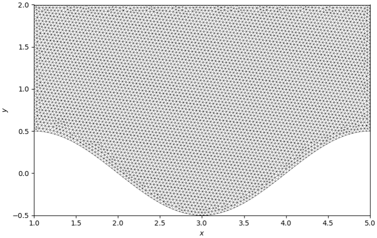
Область решения	Координаты (x, y)	Значение потенциала φ, В
1 период $w(x)$	(0.0, 1.27)	6.3158
	(2.0, 1.27)	6.3158
3 периода $w(x)$	(0.0, 1.27)	6.3093
	(2.0, 1.27)	6.2896
	(4.0, 1.27)	6.2946
	(6.0, 1.27)	6.3093
1 период $w(x)$	(0.0, 1.92)	0.6551
	(2.0, 1.92)	0.6551
3 периода $w(x)$	(0.0, 1.92)	0.6547
	(2.0, 1.92)	0.6549
	(4.0, 1.92)	0.6555
	(6.0, 1.92)	0.6547

Задача № 3

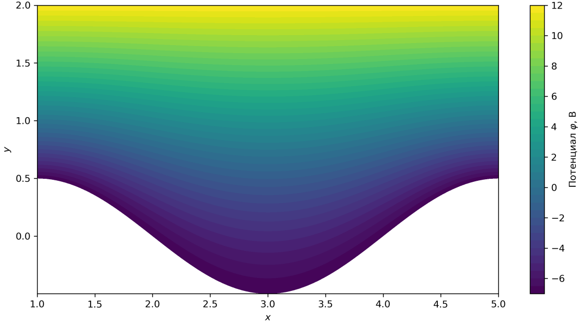
Область $\Omega = \{-\infty \leqslant x \leqslant \infty,\ \ w(x) \leqslant y \leqslant 2\}$, $w(x) = \dfrac{1}{2} sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, потенциал на верхней пластине равен 12 В, на нижней — -7 В.

Рассмотрим задачу при $x \in [1, 5]$:

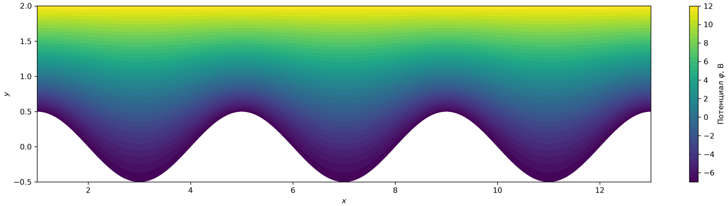
$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, 2) = 0, \\ \varphi(x, w(x)) = 10, \\ \varphi(0, y) = \varphi(2, y). \end{cases}$$



Разбиение Ω с $S_{max} = 0.001$



Решение на сетке с $S_{max} = 0.001$



Решение на отрезке $[1, 13]$ на сетке с $S_{max} = 0.001$

Область решения	Координаты (x, y)	Значение потенциала φ, В
1 период $w(x)$	(1.0, 1.25)	3.4191
	(5.0, 1.25)	3.4191
3 периода $w(x)$	(1.0, 1.25)	3.4191
	(5.0, 1.25)	3.4185
	(9.0, 1.25)	3.4184
	(13.0, 1.25)	3.4191
1 период $w(x)$	(1.0, 1.6)	7.4927
	(5.0, 1.6)	7.4927
3 периода $w(x)$	(1.0, 1.6)	7.4927
	(5.0, 1.6)	7.4926
	(9.0, 1.6)	7.4927
	(13.0, 1.6)	7.4927

Заключение

В ходе курсовой работы был изучен и реализован метод конечных элементов для решения уравнения Лапласа. Реализация метода была проверена на тестовом примере с известным решением, также с ее помощью были решены и исследованы несколько вариантов исходной задачи с разными профилями пластин и заданными на них потенциалами. Все описанные подходы выполнены на языке C++ с демонстрацией результатов работы.