



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
*К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*  
*НА ТЕМУ:*

*Поиск потенциала электрического поля в  
периодической структуре*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-62Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. Д. Егоров  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

К. Е. Казаков  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2023 г.

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2. Обзор задачи</b>	<b>3</b>
2.1. Физическая составляющая задачи	3
2.2. Математическая постановка задачи	3
<b>3. Решение двумерного уравнения Лапласа</b>	<b>4</b>
3.1. Аппроксимация уравнения Лапласа методом конечных элементов	4
3.2. Метод конечных элементов на треугольной сетке	6
3.2.1. Триангуляция области	6
3.2.2. Сборка глобальной матрицы жесткости	7
3.2.3. Применение граничных условий первого рода	8
3.2.4. Применение периодических граничных условий	9
<b>4. Примеры решения задачи</b>	<b>10</b>
4.1. Задача № 1	10
<b>5. Программная реализация алгоритма</b>	<b>13</b>
<b>Заключение</b>	<b>13</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>14</b>

# Введение

## 1. Постановка задачи

Найти потенциал электрического поля между двумя бесконечными пластинами, профиль одной из которых плоский, а профиль другой описывается некоторой периодической функцией. Значения потенциала на пластинах заданы и константны.

## 2. Обзор задачи

### 2.1. Физическая составляющая задачи

Для постоянного электрического (электростатического) поля уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  — объемная плотность внешних зарядов. Электрическое поле  $\mathbf{E}$  выражается через только скалярный потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad (3)$$

подставляя (3) в (1), получим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (4)$$

Уравнение (4) есть уравнение Пуассона. При  $\rho = 0$ , т.е. при отсутствии внешних сил, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (5)$$

### 2.2. Математическая постановка задачи

Из условия поставленной задачи известно, что внешних сил нет, следовательно, потенциал электростатического поля должен удовлетворять уравнению (5). Через функцию  $w(x)$  зададим профиль искривленной пластины,  $w(x)$  — некоторая периодическая функция с периодом  $T$ , т.е.  $w(x) = w(x+T)$ . Пусть плоская пластина находится над искривленной на уровне  $y_a$ . Значение потенциала на пластинах заданы и константны, обозначим значение на верхней (плоской) пластине как  $\varphi_a$ , на нижней (искривленной) —  $\varphi_w$ . Так как профиль задан периодической функцией,

следовательно необходимо использовать условие равенства потенциалов в точках  $x$  и  $x + T$ , т.е.  $\varphi(x, y) = \varphi(x + T, y)$ .

Из этих условий составим систему, которую требуется решить:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y_a) = \varphi_a, \\ \varphi(x, w(x)) = \varphi_w, \\ \varphi(x, y) = \varphi(x + T, y). \end{cases} \quad (6)$$

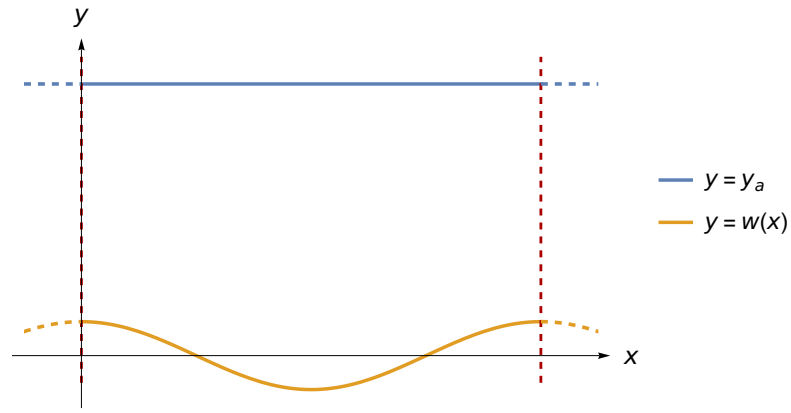


Рис. 1. Иллюстрация области, в которой будет решаться задача

### 3. Решение двумерного уравнения Лапласа

#### 3.1. Аппроксимация уравнения Лапласа методом конечных элементов

Рассмотрим уравнение Лапласа в двумерной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{в } \Omega, \\ u = g & \text{на } \Gamma_D, \end{cases}$$

где  $\Gamma_D$  — часть границы области, на которой заданы граничные условия первого рода,  $\Gamma_D = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$ .

Опираясь на сведения из источника [1], представим решение задачи в виде  $u = u_0 + u_g$ , где функция  $u_0$  обращается в ноль на границе  $\Gamma_D$  а  $u_g$  — некоторая, произвольная, но наперед заданная функция, значения которой совпадают с  $g$  на границе области,  $u_g|_{\Gamma_D} = g$ .

И переходим к следующей задаче с однородными граничными условиями первого рода на  $\Gamma_D$  относительно функции  $u_0$ :

$$\begin{cases} -\Delta u = \Delta u_g & \text{в } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_D. \end{cases}$$

Запишем слабую постановку задачи для определения  $u_0$ , способом описанным в разделе **16.3.1** источника [1]: необходимо определить  $u_0 \in V_D$ , такое, что

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad v \in V_D,$$

где пространство  $V_D$  состоит из функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные и обращающихся в ноль на части  $\Gamma_D$  границы расчетной области:

$$V_D = \{v \in V : v|_{\Gamma_D} = 0\},$$

а пространство  $V$  состоит из произвольных заданных в  $\Omega$  функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные.

Для аппроксимации задачи с помощью МКЭ рассмотрим конечномерное пространство  $V_h$ , аппроксимирующее пространство  $V$  и пространство  $V_{D,h} = V_h \cap V_D(\Omega)$ , элементы которого приближают элементы пространства  $V_D$ .

Пусть функция  $u_{g,h} \in V_h$  представляет собой аппроксимацию функции  $u_g$ , задающей граничное условие первого рода. В качестве функции  $u_{g,h}$ .

Тогда конечномерная задача примет вид:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{0,h} \cdot \nabla v_h \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_{g,h} \cdot \nabla v_h \, d\Omega, \quad v_h \in V_D,$$

Пусть  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , — базис в пространстве  $V_h$ , причем часть функций  $\varphi_i$  с номерами  $i \in I$  образуют базис в пространстве  $V_{D,h}$ , т.е. обращаются в ноль на границе  $\Gamma_D$ . Количество таких индексов будем считать равным  $M = |I| < N$ ,  $|I| > 1$ .

Тогда последнее уравнение будет эквивалентно

$$\int_{\Omega} \nabla u_{0,h} \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u_{g,h} \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega, \quad i \in I.$$

Представляя неизвестное решение в виде линейной комбинации базисных функций:

$$u_{0,h} = \sum_{i \in I} u_{0,h,i} \varphi_i, \quad u_{g,h} = \sum_{i=1}^N u_{g,h,i} \varphi_i,$$

окончательно получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов  $U_h = \{u_{0,h,i}\}$ :

$$A u_{0,h} = b,$$

где  $A = A_{M \times M}$  — матрица жесткости,  $b = b_{M \times 1}$ ,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i, j \in I, \quad (7)$$

$$b_i = - \sum_{j=1}^N u_{g,h,j} \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i \in I. \quad (8)$$

### 3.2. Метод конечных элементов на треугольной сетке

#### 3.2.1. Триангуляция области

Зададим в нашей области  $\Omega$  правильную триангуляцию  $\mathcal{T}$ , т. е. такое разбиение области  $\Omega$  на треугольные ячейки, что любые два треугольника имеют либо общее ребро, либо общую вершину, либо пустое пересечение. Таким образом,

$$\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T.$$

Каждый треугольник  $T$  при этом задается набором трех своих узлов  $P_k$  с координатами  $P_k = (x_k, y_k)$ . Будем считать, что узлы треугольника обходятся в положительном направлении (против хода часовой стрелки).

Рассмотрим простейший случай: выберем базисные функции  $\varphi_k$  такие, что  $\varphi_k$  — кусочно-линейная функция, принимающая значение единица в узле  $P_k$  и ноль во всех остальных узлах, в пределах одного треугольника она продолжена линейно.

В силу аддитивности интеграла относительно области интегрирования формулы (7) и (8) могут быть записаны в виде

$$A_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i, j \in I, \quad (9)$$

$$b_i = - \sum_{j=1}^N u_{g,h,j} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i \in I. \quad (10)$$

Таким образом, задача вычисления интегралов для коэффициентов матрицы жесткости задачи и ее правой части сводится к задаче вычисления тех же интегралов по отдельным треугольникам.

Рассмотрим один из треугольников  $T$  триангуляции  $\mathcal{T}$ . Будем считать, что его вершины имеют координаты  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1,3}$ . Пусть  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , — базисные функции соответствующие этим вершинам и данному треугольнику. Таким образом

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Функции  $\varphi_i$  являются линейными в пределах  $T$  и имеют следующий вид

$$\varphi_i(x, y) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{pmatrix}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где для удобства обозначения считается, что  $P_4 = P_1$ ,  $x_4 = x_1$ ,  $y_4 = y_1$ , аналогично индекс 5 идентичен индексу 2.

Из формулы (11) получаем следующие соотношения:

$$\nabla \varphi_i(x, y) = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix},$$

где  $|T|$  — площадь треугольника  $T$ , такая, что

$$|T| = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем следующее выражение для матрицы жесткости конечного элемента  $T$ :

$$A_{T,ij} = \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = \frac{|T|}{(2|T|)^2} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

### 3.2.2. Сборка глобальной матрицы жесткости

В предыдущем пункте было рассмотрено, как составляется матрица жесткости для одного элемента  $T$  триангуляции  $\mathcal{T}$ . Основываясь на формулах (9, 10, 12) для каждого элемента  $T$  триангуляции  $\mathcal{T}$  имеем:

- $A_T$  — симметричная матрица размером  $3 \times 3$ ,
- $b_T$  — вектор правой части, состоящий из 3, компонент,
- $u_T$  — вектор неизвестных, состоящий из 3 компонент.

Для решения задачи необходимо составить полную систему  $Au = b$ , где  $A$  — матрица жесткости размером  $N \times N$ ,  $b$  — вектор правой части длины  $N$ ,  $u$  — вектор неизвестных длины  $N$ ,  $N$  — количество узлов триангуляции  $\mathcal{T}$ , для этого нужно собрать все локальные матрицы жесткости  $A_T$ , т. е. учесть вклад каждого конечного элемента.

Проиллюстрируем эту процедуру на примере. У нас есть треугольник  $T$ , составленный из узлов  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3)$ ,  $P_5 = (x_5, y_5)$  (номера узлов взяты из

глобальной нумерации), для него были получены следующая матрица жесткости  $A_T$  и вектор правой части  $b_T$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1.3 & -0.5 & 7 \\ -0.5 & -0.45 & 0.3 \\ 7 & 0.3 & 2.1 \end{pmatrix}, \quad b_T = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что полная система состоит из 7 узлов. Тогда мы расширяем матрицу  $A_T$  до размера  $7 \times 7$ , добавляя нулевые строки и столбцы на место отсутствующих узлов, аналогично для вектора  $b_T$ . Таким образом получаем следующие матрицу и вектор правой части

$$\hat{A}_T = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & -0.5 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0.3 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b}_T = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2.1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для полной системы матрица  $A$  и вектор правой части  $b$  имеют следующий вид

$$A = \sum_{T \in \mathcal{T}} \hat{A}_T, \quad b = \sum_{T \in \mathcal{T}} \hat{b}_T.$$

### 3.2.3. Применение граничных условий первого рода

Полную систему уравнений  $Au = b$  можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где  $a_{ij}$  — компоненты матрицы  $A$ , а  $b_j$ , и  $u_j$  — компоненты вектора правой части  $b$  и вектора неизвестных  $u$  соответственно. Значения решения в узлах, принадлежащих границе  $\Gamma_D$  известны и равны  $u_k = g(P_k), \forall k \in K$ , где  $K$  — множество индексов узлов принадлежащих границе  $\Gamma_D$ . Тогда уравнения (13) могут быть переписаны следующим образом

$$\sum_{j \in I} a_{ij} u_j = b_i - \sum_{k \in K} a_{ik} g(P_k), \quad i \in I, \quad (14)$$

где, как было указано выше,  $I$  — множество индексов узлов, лежащих внутри области,  $|I| + |K| = N$ . Что приводит к уменьшению размера матрицы  $A$  от  $N \times N$  до  $M \times M$ , по средствам удаления строк и столбцов с номерами  $k \in K$  [1].



### 3.2.4. Применение периодических граничных условий

В поставленной задаче помимо условий первого рода дополнительно наложены условия периодичности на левой и правой границах. Обозначим множество индексов узлов, принадлежащих данной части границы, как  $PB$ . Это множество такое, что

$$PB = PB_l \cup PB_r,$$

где  $PB_l$  — множество индексов узлов принадлежащих левой границе,  $PB_r$  — множество индексов узлов принадлежащих правой границе. Зададим такое разбиение исходной области, что количество узлов на левой и правой границах будет одинаково, т. е.  $|PB_l| = |PB_r|$  и будет выполнено следующее условие: для любого узла  $P$ , принадлежащего левой границе  $PB_l$ , найдется единственный узел  $\tilde{P}$ , принадлежащий правой границе  $PB_r$ , такой, что вертикальные координаты этих узлов будут совпадать, т. е.

$$\forall P = P(x, y) \in PB_l \quad \exists! \tilde{P} = P(\tilde{x}, \tilde{y}) \in PB_r : y = \tilde{y}.$$

Тогда можно задать массив с парами индексов таких узлов, а условие периодичности, предполагает равенство значений в соответствующих парах узлов.

Пусть на узлы  $P_p$  и  $P_q$  наложено условие периодичности, т. е.

$$u_p = u(P_p) = u(P_q) = u_q.$$

Тогда, чтобы учесть периодичность нужно изменить систему, полученную на предыдущем этапе. Применяется следующий алгоритм:

- заменить все значения в  $p$ -ом ряду матрицы  $A$  на  $a_{pj} + a_{qj}$ , т. е. сложить  $p$ -ую и  $q$ -ую строки, аналогично для вектора правой части  $b$ : заменить  $b_p$  на  $b_p + b_q$ ,
- заметить  $q$ -ую системы на условие  $u_p - u_q = 0$ .

Однако, при данном подходе симметричность матрицы системы теряется. Если симметричность важна, можно поступить, как в случае с граничными условиями первого рода:

- заменить все значения в  $p$ -ой строке матрицы  $A$  на  $a_{pj} + a_{q,j}$ , т. е. сложить  $p$ -ую и  $q$ -ую строки, аналогично для вектора правой части  $b$ : заменить  $b_p$  на  $b_p + b_q$ ,
- заменить все значения в  $p$ -ого столбца матрицы  $A$  на  $a_{jp} + a_{jq}$ , т. е. сложить  $p$ -ый и  $q$ -ый столбцы,
- удалить  $q$ -ую строку и  $q$ -ый столбец из системы.

В результате размер решаемой системы уменьшится на единицу, а условие  $u_p = u_q$  будет применено уже к итоговому решению [2]. Таким образом рассматриваются все узлы, на которые наложено условие периодичности.

## 4. Примеры решения задачи

### 4.1. Задача №1

Для проверки алгоритма, рассмотрим его работу на примере задачи для которой решение известно: поиск потенциала в прямоугольной области  $\Omega = [0, 4] \times [0, 2]$  с граничными условиями первого рода:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = \varphi(4, y) = 0, \\ \varphi(x, 2) = 10. \end{cases}$$

Точное решение этой задачи:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20(1 - (-1)^n)}{\pi n \left[ \exp\left(-\frac{\pi n}{2}\right) - \exp\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right]} \left[ \exp\left(-\frac{\pi n}{4}y\right) - \exp\left(\frac{\pi n}{4}y\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)$$

Естественно, все члены ряда вычислить не получится, ограничимся первыми 250. Тогда точное решение в области  $[0, 4] \times [0, 2]$  выглядит как на рис. 2.

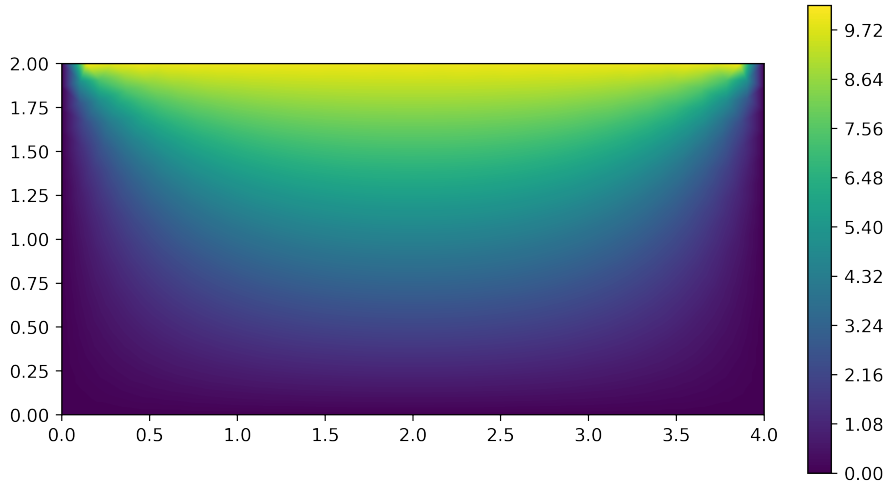


Рис. 2. Точное решение задачи №1

Численное решение будем искать на сетках с разными размерами конечного элемента. Разбиение области на конечные элементы будем осуществлять в математическом пакете Wolfram Mathematica, с помощью функции *DiscretizeRegion*, будем варьировать параметр *MaxCellMeasure*. Рассмотрим решение на сетках с параметром *MaxCellMeasure* равным 0.05, 0.01, 0.001. Получим следующие разбиения области:

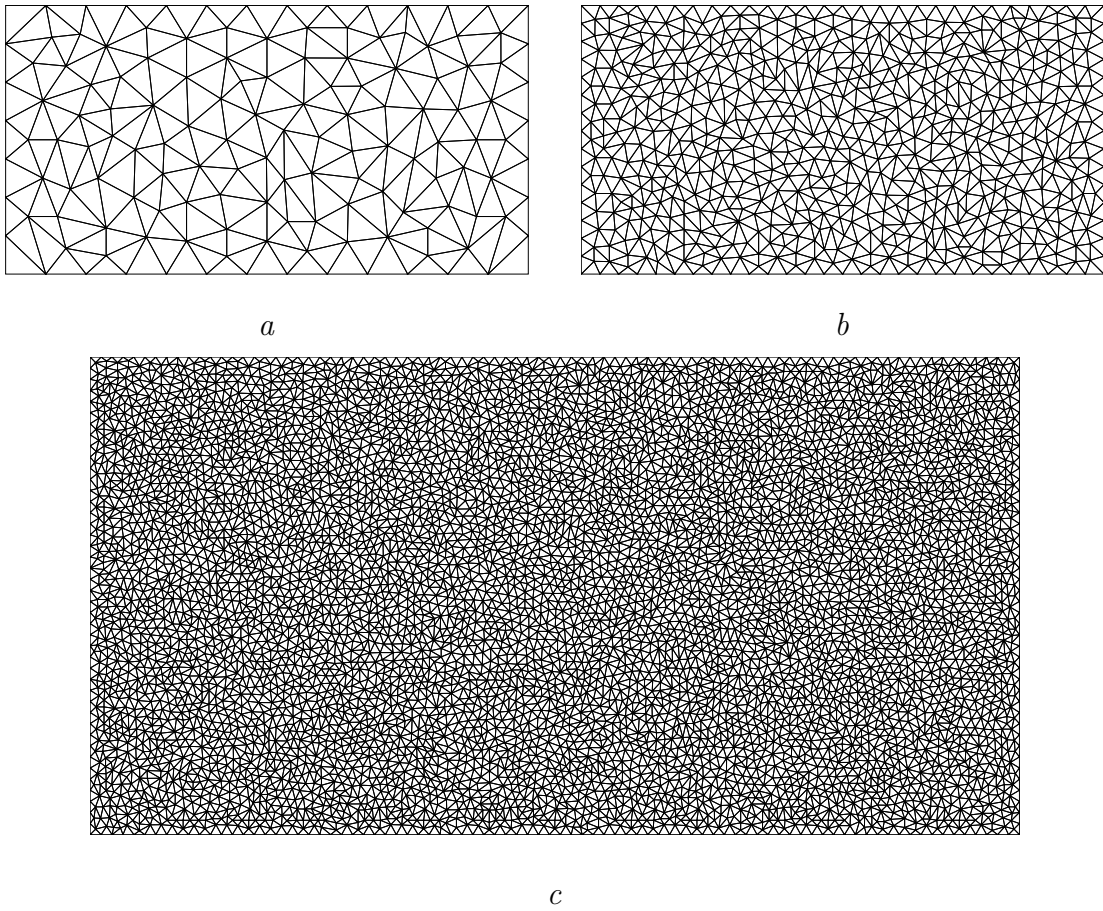


Рис. 3. Иллюстрации разбиения области  $\Omega$  задачи № 1:

$a$  — иллюстрация разбиения области  $\Omega$  с параметром  $MaxCellMeasure \rightarrow 0.05$ ;

$b$  — иллюстрация разбиения области  $\Omega$  с параметром  $MaxCellMeasure \rightarrow 0.01$ ;

$c$  — иллюстрация разбиения области  $\Omega$  с параметром  $MaxCellMeasure \rightarrow 0.001$

Решение задачи № 1 при разбиении  $\Omega$  с параметром  $MaxCellMeasure \rightarrow 0.05$  выглядит следующим образом:

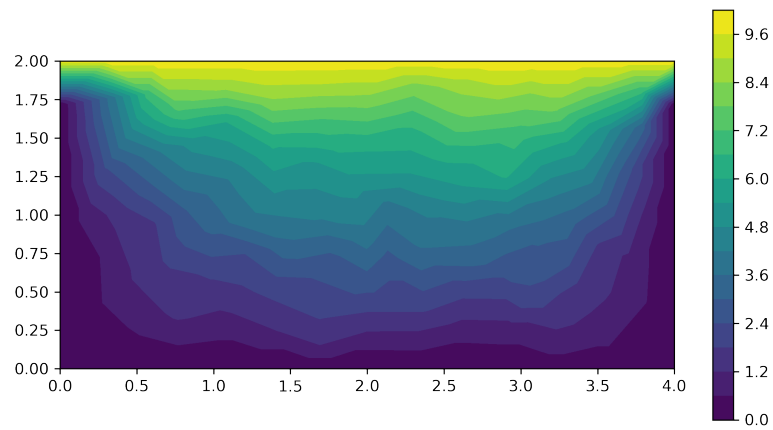


Рис. 4. Иллюстрация области, в которой будет решаться задача

---

Узел	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность

## 5. Программная реализация алгоритма

Построение сеток — Wolfram Mathematica, алгоритм метода конечных элементов реализован на языке C++

## Заключение

## Список использованных источников

1. Галанин, М.П. Методы численного анализа математических моделей / М. П Галанин, Е.Б. Савенков. – 2-е изд., испр. – Москва : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. – 591 с.: ил. – ISBN 978-5-7038-4796-1.
2. Stahel, A. Calculus of Variations and Finite Elements. 2003. P. 151–152.