TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE - (GUÍA 8)

PRELIMINARES

SEA $(X_n)_{n\geq 1}$ UNA SUCESIÓN DE V.A, CADA UNA CON SU FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $F_{X_n}(x)$. DECIMOS QUE $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, X V.A CON FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $F_X(x)$, SII:

$$\boxed{\bullet \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

SI ESTO PASA, ENTONCES TMB VALE:

- $\lim_{n\to\infty} f_{X_n}(x) = f_X(x) \quad \forall x \in R_X$ (CONTINUA)
- $\lim_{n\to\infty} P_{X_n}(x) = P_X(x) \quad \forall x \in R_X$ (DISCRETAS)

EJEMPLO

$X_1 \sim Exp(2)$

$X_2 \sim Exp(3/2)$

$\vdots$

$X_n \sim Exp\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$F_{X_n}(x) = 1 - e^{-\left(\frac{n+1}{n}\right)x}$

$\lim_{n\to\infty} 1 - e^{-\frac{n+1}{n}x} = 1 - e^{-x}$

- $X_1 \dots X_n$ V.A.I.I, $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, $VAR(X_i) = \sigma^2$

$S_n = \sum X_i \rightarrow \mathbb{E}[S_n] = n\mu$, $VAR(S_n) = n\sigma^2$

$\sigma_{S_n} = \sqrt{n}\,\sigma$

NOTA

$\overline{X} = \frac{S_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$

PROMEDIO $\quad VAR(\overline{X}) = VAR\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

SI SABEMOS COMO DISTRIBUYEN LAS X_i ¿COMO DISTRIBUYE S_n? Ó $\overline{X}$?

- **DE MOIVRE** OBSERVÓ QUE SI $X_i \sim BER\left(\frac{1}{2}\right)$:

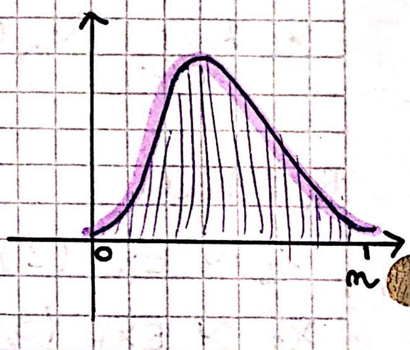
$S_n \sim Bi\left(n, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbb{E}[S_n] = n\frac{1}{2}$, $VAR(S_n) = n\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)$

CON $\sigma_{S_n} = \sqrt{n}\sqrt{1/4} = \sqrt{n}/2$

$n >> 1 : Bi\left(n, \frac{1}{2}\right) \approx N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$

- $S_n = \sum^{n} X_i$

$P_{S_n}(k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2}^{k} \frac{1}{2}^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$



$\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n/4}} \approx N(0,1)$

ES DECIR $\quad \frac{S_n - n/2}{\sqrt{n}/2} \xrightarrow{d} N(0,1)$

- **LAPLACE** GENERALIZO LA OBS ANTERIOR, $X_i \sim BER(p)$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_n \approx N(np, np(1-p)) \quad n >> 1 \\ \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1) \end{array}}$$

TEOREMA DE LAPLACE - DE MOIVRE

NOTA

• LINDERBERG Y LEVY LO GENERALIZAN PARA CUALQUIER V.A X_i

TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE (TCL)

X_i V.A.i.i, $\mathbb{E}[X_i]=\mu$ VAR$(X_i)=\sigma^2$ CON $n>>1$:

$\sum X_i \leftarrow S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$ Y QUE $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$

ES DECIR:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\overbrace{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}}^{Z\quad F(Z)} \leq x\right) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

LAS X_i NORMALES $\rightarrow \Sigma$ NORMALES $\rightarrow$ NO APROXIMO POR TCL!

EL TCL CON $\bar{X}$:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

HAY 3 CASOS POSIBLES.

EJEMPLO 1

BATERIA: $\mu_T = 40$ DISPONGO DE 25 BATS INDEP.

$\sigma_T = 20$

APROXIMAR LA $\mathbb{P}$ DE QUE SE USE 1100 hs.

T_i: TIEMPO BATERIA $\bar{I}$ESIMA

$\mu_T: 40$ $\quad \sigma_T = 20$ $\quad \sigma_T^2 = 400$

$S_{25} = \sum_{i=1}^{25} T_i \Rightarrow \mathbb{E}[S_{25}] = \mu^{n} n = 25.40 = 1000$

VAR$(S_n) = 25.400 = 10\,000$

$\downarrow$ T_i INDEPENDIENTES

$\sigma_{S_{25}} = \sqrt{10\,000} = 100$ $\qquad VA(S_{25}) = 10\,000 = \sigma^2$

$\sqrt{10\,000} = \sigma$

$$\mathbb{P}(S_{25} > 1100 \text{ hs}) \overset{\text{ESTANDARIZO}}{=} \mathbb{P}\left(\frac{S_{25} - 1000}{100} > \frac{1100 - 1000}{100} \right)$$

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{S_{25} - 1000}{100}}_{\approx Z \sim N(0,1)} > 1 \right) \qquad S_n = S_{25} \quad n \gg 1$$

$$\underset{TCL}{\approx} \mathbb{P}(Z > 1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 1) = 1 - \phi(1) \to \text{TABLA}$$
$$= 0,1587$$

EJEMPLO 2

EL PESO W QUE RESISTE UN PUENTE SIN DAÑOS ESTRUCTURALES: $W \sim N(1400, 100)$

X_i = PESO CAMIÓN ARENA $\quad \mathbb{E}[X_i] = 22 \quad \sigma_{X_i} = \frac{1}{4}$

Kg

CALCULAR $\mathbb{P}$ DE QUE HAYA DAÑOS CON 64 CAMIONES

$$\mathbb{P}(S_{64} > W) = \mathbb{P}(\underbrace{S_{64} - W}_{\approx N} > 0) =$$

CALCULA LOS DATOS DE MI NUEVA V.A

$$\mathbb{E}[S_{64} - W] = \mathbb{E}[S_{64}] - \mathbb{E}[W] = (64 \times 22) - 1400 = 8$$

$$VAR(S_{64} - W) \underset{\text{SON INDEP}}{=} VAR(S_{64}) + VAR(W) = \frac{64 \cdot 1}{16} + 100^2 = 10.004$$

$$\mathbb{P}(S_{64} - W > 0) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{(S_{64} - W) - 8}{\sqrt{10\,004}}}_{\approx Z \sim N(0,1)} > \frac{0 - 8}{\sqrt{10\,004}} \right)$$

EN ESTE CASO EL PUENTE ES 1 SOLO

$$\left.\begin{array}{l} S_{64} \approx N(\;) \\ W \sim N(\;) \end{array}\right\} S_{64} - W \approx N(\;)$$

BOLSAS DE ARENA (28.5.18)

TODAS PIERDEN PES

$\mathbb{P}(Z > -0{,}07948) = \mathbb{P}(Z < 0{,}07948) = \phi(0{,}07948)$

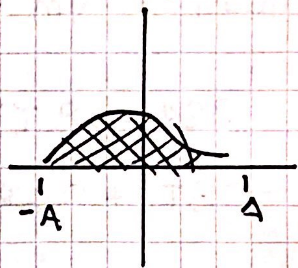
$= 0{,}5318$

$\phi(-Z) = 1 - \phi(Z)$

$\phi(-0{,}07) = 1 - \phi(0{,}07)$

$\mathbb{P}(Z > -x) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq -x)$

$1 - \phi(-x) = \phi(x)$



EJEMPLO 3

UN AVION: 324 ASIENTOS $\quad \mathbb{P} = 0{,}2 \rightarrow$ CANCELAN EL PASAJE

CALCULAR EL MAX DE PASAJES QUE SE PUEDAN VENDER SI SE DESEA $\mathbb{P} < 0{,}05 \rightarrow$ INDIGNADOS PASAJEROS

LO ALEATORIO

$\mathbb{P}(\#\text{CONFIRMADOS} > 324) \leq 0{,}05$

$\downarrow$

$S_m = \sum_{i=1}^{m} X_i \,, \quad X_i \sim \text{BER}(0{,}8)$ PORQUE CANCELAN CON 0,2

$\mu_X = 0{,}8 \qquad \mathbb{E}[S_m] = m \times 0{,}8 =$

$\text{VAR}(X_i) = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16 \qquad \text{VAR}(S_m) = m\,(0{,}8 \times 0{,}2)$

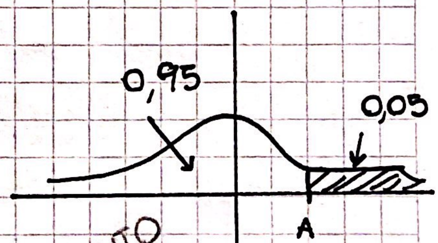
$\sigma_{S_m} = \sqrt{m}\,\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}$

HALLAR $m \in \mathbb{N} \,/\, \mathbb{P}(S_m > 324) \leq 0{,}05$

CUANTIL

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_m - 0{,}8m}{\sqrt{m}\sqrt{0{,}16}} > \frac{324 - 0{,}8m}{\sqrt{m}\sqrt{0{,}16}}\right) \leq 0{,}05$$

POR TCL $\approx Z \sim N(0,1)$



$$\mathbb{P}\left(Z > \frac{324 - 0{,}8m}{\sqrt{m}\sqrt{0{,}16}}\right) \leq 0{,}05$$

DA VUELTA

BUSCO EL COMPLEMENTO EN TABLA

$A = Z_{0,95} = 1{,}645$

$$\mathbb{P}\left(\frac{324 - 0{,}8m}{\sqrt{m}\sqrt{0{,}16}} > Z_{0,95}\right) = 1{,}645$$

$324 - 0{,}8m \geqslant 1{,}645 \times \sqrt{0{,}16}\ \sqrt{m}$

$324 - 0{,}8\,m \geqslant 0{,}658\sqrt{m}$

$m = T^2 \qquad \sqrt{m} = T \rightarrow (T > 0)$

$324 - 0{,}8T^2 \geqslant 0{,}658T$

$-0{,}8T^2 + 0{,}658T + 324 \leq 0 \rightarrow T_1 = 19{,}7175$

$T_2 = -20{,}54$ NO

$T_1^2 = 388{,}78$

$\downarrow$

$m = 388 \xrightarrow{\text{REDONDEO}}$ $0 \leq T < 19{,}7175$

$0 \leq m < 388{,}78$

$\downarrow$

389 NO CABE ACA

+ DOS FORMULAS EN 8.9.