# PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Primer recuperatorio — Primer cuatrimestre – 2019
Duración: $4$ horas. — 15/6/19 – 9:00 hs.

Curso: Corrector:

Apellido y Nombres:

Padrón:

**1.** Se colocarán 12 bolas en 5 urnas. Suponiendo que las bolas son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables, calcular la probabilidad de que la primer urna quede vacía, sabiendo que la última urna contiene exactamente 3 bolas.

***Solución:***

Definimos los eventos $A$: "la urna 1 está vacía", y $B$: "la urna 5 contiene exactamente 3 bolas". Debemos calcular

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

.

Como las bolas son indistinguibles y todas las configuraciones distintas son equiprobables, para calcular las probabilidades del numerador y denominador utilizamos la fórmula de Laplace, y el método de *bolas y urnas* (o de *Bose-Einstein*).

La cantidad de configuraciones distintas son $\binom{16}{12}$.

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

.

$\#(A \cap B) = \binom{11}{9}$, es la cantidad de formas distintas en las que la urna 1 está vacía y la urna 5 tiene exactamente 3 bolas, que es equivalente a contar todas las formas de ordenar 9 bolas indistinguibles en 3 urnas.

$\#(B) = \binom{12}{3}$, es la cantidad de formas distintas en las que la urna 5 tiene exactamente 3 bolas, que es equivalente a contar todas las formas de ordenar 9 bolas indistinguibles en 4 urnas.

La probabilidad pedida resulta:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = 1/4$$

.

**2.** Sea $T$ el tiempo hasta que ocurre la primera falla de los televisores de marca *Veep*, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma

$$\lambda(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2} \mathbf{1}\left\{t > 0\right\}$$

Simular una muestra de 2 valores del tiempo hasta la primera falla de televisores *Veep*, usando los números aleatorios 0.385 y 0.711.

***Solución:***

Definimos la variable aleatoria $T$ como el tiempo hasta la primera falla de los televisores. Como la función intensidad de fallas $\lambda$ es de la forma

$$\lambda(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2} \mathbf{1}\left\{t > 0\right\},$$

la función de distribución de $T$ es:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \left(1 - e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}\right) \mathbf{1}\{t > 0\} = \left(1 - e^{-\int_0^t \frac{1}{2}x^{-1/2}dx}\right) \mathbf{1}\{t > 0\}, \\ &= \left(1 - e^{-\sqrt{t}}\right) \mathbf{1}\{t > 0\}. \end{aligned}$$

Dado que $F_T$ es una función de distribución, cumple las siguientes condiciones:

- Es no decreciente.
- $\lim_{x \to +\infty} F_T(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_T(x) = 0$.
- Es continua a derecha.

Entonces definiendo $X = F_T^{-1}(U)$ con $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ donde $F_T^{-1}$ denota la inversa generalizada, por el Teorema de Simulación se tiene que $X$ es una variable aleatoria cuya función de distribución es la función $F_T$ dada.

Dado que $F_T$ es continua, la inversa generalizada resulta simplente $F_T^{-1}(u) = (-\ln(1-u))^2$, para $u \in (0,1)$. Por lo tanto, para cada número aleatorio $u_i \in (0,1)$, se obtiene una muestra del tiempo mediante $t_i = (-\ln(1-u_i))^2$.

Utilizando los valores $u_1 = 0.385$ y $u_2 = 0.711$, tenemos que $t_1 \approx 0.2363$ y $t_2 \approx 1.5409$.

**3.** Se cortan chapas rectangulares de área 3 $m^2$. La longitud (en metros) de la base de las chapas es una variable aleatoria $X$ con densidad

$$f_X(x) = \frac{2}{3} x \mathbf{1}\{1 < x < 2\}$$

Hallar la covarianza entre la base y la altura de las chapas.

***Solución:***

Sea $X$ la longitud (en metros) de la base de las chapas, y $H$ su altura (en metros), entonces $X \cdot H = 3$. Debemos calcular $\mathbf{cov}(X, H)$. Desarrollando y aplicando propiedades:

$$\mathbf{cov}(X, H) = \mathbf{cov}(X, 3/X) = \mathbf{E}(X \cdot 3/X) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(3/X) = \mathbf{E}(3) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(3/X).$$

Usando la definición para variables continuas, calculamos las esperanzas:

$$\mathbf{E}(X) = \int_1^2 \frac{2}{3}x^2 dx = 14/9$$

$$\mathbf{E}(3/X) = \int_1^2 \frac{2}{3} \cdot x \cdot \frac{3}{x} dx = 2$$

La covarianza pedida resulta $\mathbf{cov}(X, H) = -1/9$

**4.** Sea $X$ una variable aleatoria con función de probabilidad

$$p_X(x) = \tfrac{2^x}{7x!},\ x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Sea $Y = 4X - X^2$. Hallar la función de probabilidad de $Y|Y > 0$.

***Solución:***

Se tiene como dato la función de probabilidad de $X$,

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_X(x)$ | 1/7 | 2/7 | 2/7 | 4/21 | 2/21 |

Como $Y = 4X - X^2$, entonces podemos decir que el soporte de $Y$ es el conjunto $\{0, 3, 4\}$. Debemos hallar la probabilidad de que $Y$ tome cada uno de esos valores y luego encontrar la función de probabilidad de $Y|Y > 0$.

$$p_Y(0) = \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 4) = 5/21$$
$$p_Y(3) = \mathbf{P}(Y = 3) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 3) = 10/21$$
$$p_Y(4) = \mathbf{P}(Y = 4) = \mathbf{P}(X = 2) = 6/21.$$

La función de probabilidad pedida es:

$$p_{Y|Y>0}(y) = \frac{p_Y(y)\mathbf{1}\{y \in \{3, 4\}\}}{\mathbf{P}(Y > 0)} = \begin{cases} 10/16 & \text{si} \quad y = 3 \\ 6/16 & \text{si} \quad y = 4 \end{cases}$$

**5.** En una competencia de matemática, los tiempos (en minutos) que demora un equipo en resolver cada uno de los dos problemas son variables aleatorias exponenciales independientes de media 10. Si en total el equipo demoró exactamente 18 minutos en resolver los dos problemas, calcular la probabilidad de que la resolución del primero haya demorado más de 12 minutos.

***Solución:***

Sean $T_1$ y $T_2$ los tiempos (en minutos) que demora el equipo en resolver el primero y el segundo problema respectivamente. Si definimos $S_1 = T_1$ y $S_2 = T_1 + T_2$, debemos calcular $\mathbf{P}(S_1 > 12|S_2 = 18)$. Como $T_1$ y $T_2$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial, como se estudió en el ejercicio *5.7*, $S_1|S_2 = t \sim \mathcal{U}(0, t)$, por lo tanto $S_1|S_2 = 18 \sim \mathcal{U}(0, 18)$ resultando $\mathbf{P}(S_1 > 12|S_2 = 18) = 6/18$

# PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

| | |
|---|---|
| Primer recuperatorio | Primer cuatrimestre – 2019 |
| Duración: 4 horas. | 15/6/19 – 9:00 hs. |

Curso: Corrector:

Apellido y Nombres:

Padrón:

**1.** Se colocarán 12 bolas en 5 urnas. Suponiendo que las bolas son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables, calcular la probabilidad de que la primer urna quede vacía, sabiendo que la última urna contiene exactamente 3 bolas.

***Solución:***

Definimos los eventos $A$: "la urna 1 está vacía", y $B$: "la urna 5 contiene exactamente 3 bolas". Debemos calcular

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

.

Como las bolas son indistinguibles y todas las configuraciones distintas son equiprobables, para calcular las probabilidades del numerador y denominador utilizamos la fórmula de Laplace, y el método de *bolas y urnas* (o de *Bose-Einstein*).

La cantidad de configuraciones distintas son $\binom{16}{12}$.

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

.

$\#(A \cap B) = \binom{11}{9}$, es la cantidad de formas distintas en las que la urna 1 está vacía y la urna 5 tiene exactamente 3 bolas, que es equivalente a contar todas las formas de ordenar 9 bolas indistinguibles en 3 urnas.

$\#(B) = \binom{12}{3}$, es la cantidad de formas distintas en las que la urna 5 tiene exactamente 3 bolas, que es equivalente a contar todas las formas de ordenar 9 bolas indistinguibles en 4 urnas.

La probabilidad pedida resulta:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = 1/4$$

.

**2.** Sea $T$ el tiempo hasta que ocurre la primera falla de los televisores de marca *Veep*, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}\mathbf{1}\left\{t > 0\right\}$$

Simular una muestra de 2 valores del tiempo hasta la primera falla de televisores *Veep*, usando los números aleatorios 0.385 y 0.711.

***Solución:***

Definimos la variable aleatoria $T$ como el tiempo hasta la primera falla de los televisores. Como la función intensidad de fallas $\lambda$ es de la forma

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}\mathbf{1}\left\{t > 0\right\},$$

la función de distribución de $T$ es:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \left(1 - e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}\right)\mathbf{1}\{t > 0\} = \left(1 - e^{-\int_0^t \frac{1}{2}x^{-1/2}dx}\right)\mathbf{1}\{t > 0\}, \\ &= \left(1 - e^{-\sqrt{t}}\right)\mathbf{1}\{t > 0\}. \end{aligned}$$

Dado que $F_T$ es una función de distribución, cumple las siguientes condiciones:

- Es no decreciente.
- $\lim_{x\to+\infty} F_T(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_T(x) = 0$.
- Es continua a derecha.

Entonces definiendo $X = F_T^{-1}(U)$ con $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ donde $F_T^{-1}$ denota la inversa generalizada, por el Teorema de Simulación se tiene que $X$ es una variable aleatoria cuya función de distribución es la función $F_T$ dada.

Dado que $F_T$ es continua, la inversa generalizada resulta simplente $F_T^{-1}(u) = (-\ln(1-u))^2$, para $u \in (0,1)$. Por lo tanto, para cada número aleatorio $u_i \in (0,1)$, se obtiene una muestra del tiempo mediante $t_i = (-\ln(1-u_i))^2$.

Utilizando los valores $u_1 = 0.385$ y $u_2 = 0.711$, tenemos que $t_1 \approx 0.2363$ y $t_2 \approx 1.5409$.

**3.** Sea $X$ una variable aleatoria con función de probabilidad

$$p_X(x) = \tfrac{2^x}{7x!},\ x \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Sea $Y = 4X - X^2$. Hallar la función de probabilidad de $Y|Y > 0$.

***Solución:***

Se tiene como dato la función de probabilidad de $X$,

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_X(x)$ | 1/7 | 2/7 | 2/7 | 4/21 | 2/21 |

Como $Y = 4X - X^2$, entonces podemos decir que el soporte de $Y$ es el conjunto $\{0, 3, 4\}$. Debemos hallar la probabilidad de que $Y$ tome cada uno de esos valores y luego encontrar la función de probabilidad de $Y|Y > 0$.

$$\begin{aligned}
p_Y(0) &= \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 4) = 5/21 \\
p_Y(3) &= \mathbf{P}(Y = 3) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 3) = 10/21 \\
p_Y(4) &= \mathbf{P}(Y = 4) = \mathbf{P}(X = 2) = 6/21.
\end{aligned}$$

La función de probabilidad pedida es:

$$p_{Y|Y>0}(y) = \frac{p_Y(y)\mathbf{1}\{y \in \{3,4\}\}}{\mathbf{P}(Y > 0)} = \begin{cases} 10/16 & \text{si} \quad y = 3 \\ 6/16 & \text{si} \quad y = 4 \end{cases}$$

**4.** Clientes ingresan a un banco de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 15 por hora. La probabilidad de que cada cliente sea *Select* es 0.2, independientemente de todo lo demás. Sabiendo que entre las 10:00 y las 10:15 ingresaron exactamente 2 clientes *Select*, calcular la esperanza del tiempo a partir de las 10:00 hasta que ingresó el cuarto cliente *Select*.

***Solución:***

El ingreso de clientes al banco sigue un proceso de Poisson de intensidad 15 por hora. A demás, la probabilidad de que cada uno de los clientes sea Select es 0.2, por lo tanto, por el teorema de adelgazamiento, el ingreso de clientes *Select* al banco sigue un proceso de Poisson de intensidad $15 \cdot 0.2 = 3$ por hora (o 1/20 por minuto). Si definimos la variable $T$ como el tiempo (en minutos) hasta el ingreso del cuarto cliente *Select*, y $N_S(0, 15)$ a la cantidad de clientes *Select* que ingresan entre las 10:00 y las 10:15, debemos calcular

$$E(T|N_S(0, 15) = 2).$$

Podemos definir a $(T|N_S(0, 15) = 2) = 15 + T^*$ donde $T^* \sim \Gamma(2, 1/20)$.

Por lo tanto,

$$E(T|N_S(0,15)=2) = \mathbf{E}(15+T^*) = 15 + E(T^*) = 55.$$

**5.** Para la construcción de un edificio se compran pallets que contienen 198 ladrillos. Por problemas de fabricación y manipuleo, cada ladrillo puede usarse con probabilidad 0.6. ¿Cuántos pallets deberán comprarse como mínimo para poder levantar una pared de 4000 ladrillos con probabilidad mayor a 0.95?

***Solución:***

Definimos las variables $X_i$ como la cantidad de ladrillos útiles en el pallet i (198 ladrillos). Entonces $X_i \sim \mathcal{B}(198, 0.6)$, $i = 1, \dots, n$. Debemos calcular el número mínimo de pallets para poder levantar una pared de 4000 ladrillos con probabilidad mayor a 0.95. Definimos la cantidad total de ladrillos útiles en $n$ pallets como $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Como podemos suponer que $X_1, \dots, X_n$ son independientes y están idénticamente distribuidas, por el Teorema Central del Límite:

$$\mathbf{P}(T < t) \cong \phi\left(\frac{t - n \cdot \mathbf{E}(X_1)}{\sqrt{n \cdot \mathbf{var}(X_1)}}\right).$$

Sabemos que $\mathbf{E}(X_1) = 198 \cdot 0.6 = 118.8$ y $\mathbf{var}(X_1) = 198 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 47.52$ por tener distribución Binomial, entonces para encontrar el n pedido:

$$\mathbf{P}(T > 4000) \cong 1 - \phi\left(\frac{4000 - n \cdot 118.8}{\sqrt{n \cdot 47.52}}\right) > 0.95$$

$$\phi\left(\frac{4000 - n \cdot 118.8}{\sqrt{n \cdot 47.52}}\right) < 0.05$$

$$\frac{4000 - n \cdot 118.8}{\sqrt{n \cdot 47.52}} < -1.6449.$$

$$n > 33.12$$

Por lo tanto, como mínimo deben comprarse 34 pallets.