GUÍA (5) variables condicionales

- CASO **DISCRETO**

$Y|_{X=x}$ es va con

- $P_{Y|X=x}(y) = \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$ ≅ Bayes

$y \in R(y)$

OBS
$P_Y(y) = \sum_x P_X(x)\, P_{Y|X=x}(y)$ ← Prob total

X,Y ind.
$P_{Y|X=x}(y) = P_Y(y)$

- $E[Y|X=x] = \sum_y y \cdot P_{Y|X=x}(y) = \underbrace{\varphi(x)}_{\text{función de regresión}}$

- $Var(Y|_{X=x}) = E[Y^2|X=x] - E^2[Y|X=x] = \underbrace{\psi(x)}_{\text{varianza de regresión}}$

  - $E[Y^2|X=x] = \sum_y y^2\, P_{Y|X=x}(y) =$

Caso **CONTINUO**

- $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$

- $E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X=x}(y)\, dy = \underbrace{\varphi(x)}_{\text{función de regresión}}$

- $var(Y|X=x) = E[Y^2|X=x] - E^2[Y|X=x]$

Si $\varphi(x)$ es lineal en X → coincide con la recta de regresión

Predicción

esperanza condicional de y dado x

$E[Y|X] = \varphi(X)$

sean X, Y va con $E[X], E[Y] < \infty$

si $\varphi(x) = E[Y|X=x]$.

$V[Y|X] = E[Y^2|X] - E^2[Y|E]$

varianza condicional

PROP:

1) $E[E[Y|X]] = E[Y]$

2) $E[g(X) \cdot Y|X] = g(X)\, E[Y|X]$

3) $Y = g(X)$

$E[Y|X] = g(X)$

4) X e Y ind

$E[Y|X] = E[Y]$

$\downarrow$

$g(x), h(y)$ ind

5) $E[aY_1 + bY_2|X] = aE[Y_1|X] + bE[Y_2|X]$

6) $Y_1 \leq Y_2 \Rightarrow E[Y_1|X] \leq E[Y_2|X]$

7) Y v.a $/ E[Y^2] < \infty$

$\Rightarrow E[Y^2|X] \geq (E[Y|X])^2$

Pitagoras

$var(Y) = E[Var(Y|X)] + var(E[Y|X])$

5.1

4V
3A 3R

T = 10

se extraen 3 bolas

X: cantidad de verdes extraidos

Y: " " rojas "

$$P(Y \mid X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$$

conjunta

X\Y	0	1	2	3	$P_x(x)$
0	1/120	3/40	3/40	1/120	1/6
1	1/10	3/10	1/10	0	5/10
2	3/40	3/20	0	0	6/20
3	1/30	0	0	0	1/30
$P_y(y)$	7/24	21/40	7/40	1/120	1 ✓

• los que sumen + 3 de baja.

$$\boxed{P(x,y) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{y}\binom{3}{3-x-y}}{\binom{10}{3}}}$$

$P(0,0) = 1/120$ $\quad P(1,0) = 1/10$

$P(0,1) = 3/40$ $\quad P(1,1) = 3/10$

$P(0,2) = 3/40$

$$P(Y \mid X=1=y) = P(Y=y \mid X=1) = \frac{P(X=1, Y=y)}{P(X=1)} = \frac{P_{xy}(1,y)}{P_x(1)}$$

$Y = 0, 1, 2, 3$

$$P(Y \mid X=1=0) = \frac{P_{xy}(1,0)}{P_x(1)} = \frac{1/10}{21/40} = \frac{4}{21}$$

$$P(Y \mid X=1=1) = \frac{P_{xy}(1,1)}{P_x(1)} = \frac{3/10}{21/40} = 4/7$$

$$P(Y \mid X=1=2) = \frac{P_{xy}(1,2)}{P_x(1)} = \frac{1/10}{21/40} = 4/21$$

$$P(Y \mid X=1=3) = \frac{P_{xy}(1,3)}{P_x(1)} = 0$$

Y	0	1	2	3
$P_{Y/X=1}$	4/21	12/21	4/21	0

→ la sumatoria me debería dar 1 pero bueno.

<u>En gral</u>

$X=0$

$$P(X=0, Y=y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{3}{3-y}}{\binom{10}{3}} \qquad P(X=0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$$

$$\boxed{P(Y|X=0=y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{3}{3-y}}{\binom{6}{3}}}$$

$X=1$ $\quad P(X=1, Y=y) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{y}\binom{3}{2-y}}{\binom{10}{3}}$

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}$$

$$\boxed{P(Y|X=1=y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{3}{2-y}}{\binom{6}{2}}}$$

$X=2$ $\quad P(X=2, Y=y) \quad \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{y}\binom{3}{1-y}}{\binom{10}{3}}$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$$

$$\boxed{P(Y|X=2=y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{3}{1-y}}{\binom{6}{1}}}$$

$$\boxed{P(Y|X=3=y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{3}{3-x-y}}{\binom{6}{3-x}}}$$

observo que

$$Y|X=x \sim Hip(6, 3, 3-x) = (N, d, n).$$

Tabla $\leftarrow E[Y|X=x] = (3-x) \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$

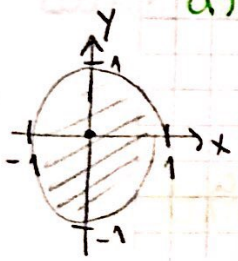
$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \rightarrow$$ como es lineal en x, es la recta de regresión.

$\downarrow$ Probando x, puedo verificar.

(5.2) (X,Y) vector aleatorio continuo

Hallar la densidad condicional de $Y|X=x$ y la marginal de X

a) $(X,Y) \sim \mathcal{U}(\text{círculo})$ $\hookrightarrow$ $C=(0,0)$, $R=1$



$x^2+y^2=1$

$|y| = \sqrt{1-x^2}$

$-\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\text{área}} = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi}$$

$-1 \leq x \leq 1$

$-1 \leq y \leq 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\ \mathbb{1}\{x \in$$

$$\boxed{f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}} = \frac{1/\pi}{\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ \mathbb{1}\{-1,1\}$$

$$\boxed{f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ \{-1,1\}.}$$

Scanned with CamScanner

b) $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2x+1} e^{-\left(2x + \frac{y}{4x+2}\right)} \mathbb{1}\{x>0, y>0\}$

se ve difícil para integrar

se que

$f_{Y|X=x} = \frac{f_{XY}}{f_X} \Rightarrow \boxed{f_X \cdot f_{Y|X=x} = f_{XY}}$

Busco la forma de factorizar

$$f_{XY} = \frac{1}{2x+1} e^{-\left(2x + \frac{y}{4x+2}\right)} \mathbb{1}\{x>, y>0\}.$$

el soporte me dice que podrían ser exponencial, gamma... las que sean $[0, +\infty)$.

Exponencial $\lambda e^{-\lambda x} \rightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

gamma $\frac{\lambda^v}{(v-1)!} x^{v-1} e^{-\lambda x}$

Tiene más pinta de exponencial.

$\left(2x + \frac{y}{4x+2}\right)$. veo que me falta

$2x \rightarrow X \sim \mathcal{E}(\lambda=2)$ (en x) $\rightarrow 2e^{-2x}$

$\frac{y}{4x+2} \rightarrow \mathcal{E}(\lambda = 1/4x+2)$ (en y) $\rightarrow \boxed{Y|X}$ $\rightarrow \frac{1}{4x+2} e^{-\frac{1}{4x+2} y}$

si los multiplico

$$2e^{-2x} \cdot \frac{1}{4x+2} e^{-\frac{1}{4x+2} y} = \frac{1}{2x+1} e^{-\left(2x + \frac{1}{4x+2} y\right)}$$ ✓

$$f_X(x) = 2e^{-2x} \qquad f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{4x+2} e^{-\frac{1}{4x+2} y}.$$

Scanned with CamScanner

Mezclas

M v.a discreta ; $R(M) = \{m_1, m_2, \dots, m_N\}$.
sean $X_1, X_2, \dots X_n$ N variables aleatorias, ind de M.

Y es Mezcla de $X_1, X_2, \dots, X_N$ tal que:

$Y|_{M=m_i} = X_i \qquad i = 1, \dots, N$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = \sum_{i=1}^{N} P(M = m_i) \cdot P(Y|_{M=m_i} \le y) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} P(M = m_i)\, P(X_i \le y)$$

$$F_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} P(M=m_i)\, F_{X_i}(y)$$

continuo

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} P(M=m_i)\, f_{X_i}(y)$$

discreto

$$P_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} P(M=m_i)\, P_{X_i}(y)$$

Esperanza de mezcla

$$E[E[Y|M]] \leftarrow E[Y] = \sum_{i=1}^{N} E[X_i]\, P(M=m_i) \qquad \text{(con mezcla)}$$

Varianza mezcla — Pitágoras.

1° $VAR(Y) = E[Y^2] - E^2[Y]$

$$E[Y^2] = \sum_{i=1}^{N} E[X_i^2]\, P(M=m_i)$$

2° $Var(Y) = E(Var\, Y|M) + VAR[E[Y|M]]$

5.2

c) $f_{XY}(x,y) = e^{-x} \, \mathbb{1}\{0<y<x\}$.

$$f_X(x) = \int_0^x e^{-x}\,dy = e^{-x}\cdot x \; \mathbb{1}\{0<x\}.$$

$$f_{Y|X=x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}\cdot x} = \frac{1}{x} \, \mathbb{1}\{0<y<x\}.$$

d) $\frac{1}{6} x^4 y^3 e^{-xy} \; \mathbb{1}\{1<x<2,\ y>0\} = f_{XY}(x,y)$

↳ gamma

↓ uniforme en x

$$\Gamma(\nu,\lambda) = \frac{\lambda^\nu x^{\nu-1} e^{-\lambda x}}{(\nu-1)!}$$

↓

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2-1} = 1 \; \mathbb{1}\{1<x<2\}$$

$\boxed{x = y}$

$\lambda = x \quad \nu = 4$

$$\left[\Gamma(x,4) = \frac{x^4}{3!} y^3 e^{-xy}\right] \checkmark$$

$3! \to 6$ ✓

$$f_{Y|X=x} = \frac{1}{6} x^4 y^3 e^{-xy} \, \mathbb{1}\{y>0\} \quad Y|X=x \sim \Gamma(x,4)$$

$$f_X(x) = 1 \; \mathbb{1}\{1<x<2\} \to X \sim \mathcal{U}(1,2)$$

Si quisiera calcular $E[Y]$, tengo 3 formas.

1) $E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$

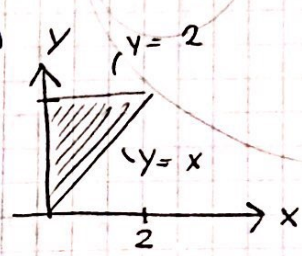
3) $\boxed{E[Y] = E[E[Y|X]]}$

Porque la $E[Y|X]$ la puedo sacar de tabla

2) $E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

5.3 Y: miles de litros de leche
X: cantidad de leche vendida

$f_{XY}(x,y) = 0{,}5 \; 1\!\!1\{0 < x < y < 2\}$



a) $f_{Y|X=1{,}5}(y)$ y $f_{X|Y=0{,}8}(x)$

$$f_X(x) = \int_x^2 0{,}5\, dy = 0{,}5y \Big|_x^2 = 1 - 0{,}5x \; 1\!\!1\{0<x<2\}$$

$$f_Y(x) = \int_0^y 0{,}5\, dx = 0{,}5y \; 1\!\!1\{0<y<2\}$$

$$f_{Y|X=1{,}5}(y) = \frac{0{,}5}{1-0{,}5\cdot(1{,}5)} = 2 \; 1\!\!1\{0<x<2\}$$

$$f_{X|Y=0{,}8}(x) = \frac{0{,}5}{0{,}5\cdot 0{,}8} = \frac{5}{4} = 1{,}25 = 1\!\!1\{0<x<2\}$$

b) $P(1{,}75 < y < 2 | X=1.5) = P(1{,}75 < Y|_{X=1{,}5} < 2) =$

$$\int_{1{,}75}^2 2\, dy = 2(2-1{,}75) = \frac{1}{2}$$

$P(0{,}5 < X|_{Y=0{,}8} < 0{,}75) =$

$$\int_{0{,}5}^{0{,}75} 1{,}25\, dx = \frac{5}{16}$$

$$\boxed{P(a < Y|_{X=x} < b) = \int_a^b f_{Y|X=x}\, dy}$$

c) $f_{XY} = f_X \cdot f_Y \rightarrow$ no son ind ↳ con $X|_{Y=y}$ igual

$0{,}5 \neq (0{,}5y)(1-0{,}5x) \rightarrow$ aparte soporte ◺ ≠ ▭

5.4

$$f_{XY}(x,y) = \frac{5}{8\pi} e^{-\frac{25}{32}\left(x^2 - \frac{6}{5}xy + y^2\right)}$$ → pag 7 del cuaderno ②

a) $f_Y(y)$ y $f_{Y|X=x}(y)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_{XY} = \frac{f_{Y|X=x}}{f_X} \qquad f_{XY} = \frac{f_{X|Y=y}}{f_Y}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\, x^2} \qquad f_{Y|X=x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{4}{5}} e^{-1/2 \frac{(y-\frac{3}{5}x)^2}{(4/5)}}$$

$X \sim N(0,1)$

$$Y|_{X=x} \sim N\left(\frac{3}{5}x, \frac{16}{25}\right)$$

$Y \sim N(0,1)$ → por simetría

$$\frac{f_{Y|X=x}}{f_X} = \frac{f_{X|Y=y}}{f_Y}$$

b) $P(1 < XY \mid X=\sqrt{5} < 5) = P\left(\frac{1}{\sqrt{5}} < Y|_{X=\sqrt{5}} < \frac{5}{\sqrt{5}}\right) =$

se que $X=\sqrt{5}$.

$$\int_{1/\sqrt{5}}^{5/\sqrt{5}} f_{Y|X=x}(y)\, dy = \qquad Y|_{X=x} \sim N\left(\frac{3}{5}\cdot x, \frac{16}{25}\right)$$

siendo $X=\sqrt{5}$

veo que la integral está fea

si $Z = \frac{X-\mu}{6}$ → Estandarizo mi normal a $N \sim (0,1)$

↓

$Z \sim N(0,1)$

Teoría ↓

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = F_Z(z) = \phi(z)$$

Si $X \sim N(0,1)$

↓

tabla

$\mu = \frac{3}{5}\sqrt{5} \quad \sigma = 4/5$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{5}} < Y|_{X=x} < \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \phi\left(\frac{5/\sqrt{5} - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{1/\sqrt{5} - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\phi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \phi\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \phi(1{,}118) - \phi(-1{,}118)$$

TEORÍA

$\boxed{\phi(-z) = 1 - \phi(z)}$

↓ las tablas no suelen tener positivo

$$= \phi(1{,}118) - [1 - \phi(1{,}118)] =$$

$$= \phi(1{,}118) - 1 + \phi(1{,}118) =$$

↓ tablas

$$= 0{,}86864 - 1 + 0{,}86864 =$$

$$\boxed{P\left(\frac{1}{\sqrt{5}} < Y|_{X=x} < \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0{,}737}$$

5.5 $X \sim (3,4) \quad Y|_{X=x} \sim N(x, 1) \rightarrow \forall x \in (3,4)$

$f_Y(5)$ y $P(X > 3{,}5 \mid Y = 5)$. $\quad f_{Y|X=x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$

$$f_X = 1 \, \mathbb{1}\{3 < x < 4\}$$

$$f_{Y|X=x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}} \, \mathbb{1}\{x \in (3,4)\}$$

$$\underline{f_{XY} =} \frac{f_{Y|X=x}}{f_X} = \underline{f_{Y|X=x}} \qquad f_{X|Y} = \frac{f_{X|Y=y}}{f_Y}$$

$$f(5) = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dx = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5-x)^2}{2}} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_3^4 e^{-\frac{(25 - 2.5.x + x^2)}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_3^4 e^{-\frac{25}{2} + \frac{10x}{2} - \frac{x^2}{2}} dx$$

$P(X > 3{,}5 \mid_{y=5}) = P(X > 3{,}5) = P(3{,}5 < X < 4) =$

$$\int_{3{,}5}^{4} f_{X|Y=y}\, dx =$$

$$f_{xy} = \frac{f_{X|Y=y}}{f_Y} = \checkmark \quad \text{lasaco} \Big\} \uparrow \text{integro}$$

(5.7) T_1 y T_2 v. exp ind de λ.

$T_1, T_2 \sim \exp(\lambda)$ $\quad S_1 = T_1 \quad S_2 = T_1 + T_2$

a) densidad conjunta S_1 y S_2, son ind?

$(S_1, S_2) = (T_1, T_1 + T_2)$

$$f_{T_1} \cdot f_{T_2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por ind}}}{=} f_{T_1 T_2}(t_1, t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(t_1 + t_2)}\, \mathbb{1}\{t_1 > 0, t_2 > 0\}$$

$$f_{S_1 S_2} = \frac{f_{t_1 t_2}}{\left|\frac{dS_1S_2}{dt_1t_2}\right|} \qquad \begin{vmatrix} \frac{dS_1}{dt_1} & \frac{dS_1}{dt_2} \\ \frac{dS_2}{dt_1} & \frac{dS_2}{dt_2} \end{vmatrix}$$

$f_{S_1S_2} = f_{t_1 t_2}$ -

$\boxed{S_1 = T_1}$

$S_2 = T_1 + T_2$

$\boxed{T_2 = S_2 - S_1.}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$t_1 > 0 \rightarrow S_1 > 0.$

$t_2 > 0 \rightarrow S_2 > S_1$

$$\boxed{f_{S_1 S_2} = \lambda^2 e^{-\lambda(\cancel{S_1} + S_2 - \cancel{S_1})}}\ \mathbb{1}\{S_1 > 0, S_2 > S_1\}.$$

↳ conjunta

$$f_{S_1}(s_1) = \int_0^\infty f_{S_1S_2}\, ds_2 = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda s_2}\, ds_2 =$$

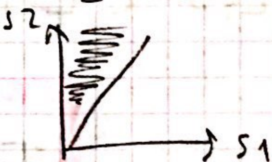
$$= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda s_2}\, ds_2 = \lambda^{\cancel{2}} \left.\frac{e^{-\lambda s_2}}{-\cancel{\lambda}}\right|_0^\infty =$$

$$= \lambda[0-(-1)] = \lambda\, \mathbb{1}\{s_1>0\}.$$

$$f_{S_2}(s_2) = \int_0^{s_2} \lambda^2 e^{-\lambda s_2}\, ds_1 = \lambda^2 e^{-\lambda s_2} s_2\, \mathbb{1}\{s_2>0\}$$

$$f_{S_2} \cdot f_{S_1} = \lambda^3 e^{-\lambda s_2} s_2 \neq f_{S_2 S_1}$$

no son independientes → mirar soporte.
$s_2 > s_1$



b) $P(s_1 \in [1/2, 1] \mid s_2 = 2)$

$$P(1/2 < s_1 < 1 \mid s_2 = 2) = \int_{1/2}^{1} f_{s_1 \mid s_2 = 2}\, ds_1$$

$$f_{s_1 \mid s_2 = 2} = \frac{f_{S_1S_2}}{f_{S_2}} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda \cdot 2}}{\lambda^2 e^{-\lambda 2} \cdot 2} = \frac{1}{2}\, \mathbb{1}\{s_2 > s_1\}$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - 1/2\right) = \boxed{\frac{1}{4} = P(1/2 < s_1 < 1 \mid s_2 = 2)}$$

5.15 X v.a $\sim N(0,1) \to E[X]=0 \quad V[X]=1$

Y v.a $/ \; E[Y|X]=X^2$ ~> dato de Y.

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=E[XY]-\underbrace{E[X]}_{0}E[Y]}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E[XY]$$

$$E[Y|X]=X^2$$

$$E[XY]=E[E[X\cdot Y|X]]=E[X^2\cdot X]=E[X^3]$$

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=E[X^3]}$$

$$E[Y]=E[E[Y|X]]$$

$$\boxed{E[g(X)\cdot Y]=E[E[Y|X]\cdot g(X)]}$$

↳ prop que sale de las prop de la esperanza condicional

5.16 (X,Y) vector aleatorio $\quad 1/\lambda=2 \to \lambda=1/2$

$X\sim \exp(1/2)$

$E[Y|X]=X \qquad V[Y|X]=X$

calcular $V[Y]$ usando propiedades.

$$V[Y] = E[\,var(Y|X)] + var[E[Y|X]]$$

$$V[Y] = E[X] + Var[X]$$

como X es exponencial

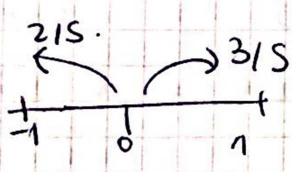
$E[X] = 2 \qquad var[X] = 4$

$$\boxed{V[Y] = 6}$$

5.22 X: cantidad de impactos por segundo

$X \sim Po(2)$

Y: desplazamiento en el impacto.



$E[X] = \mu = 2$

$$p_X(x) = \frac{2^x\, e^{-2}}{x!} \qquad x \in \mathbb{N}_0$$

$F =$ "posición final de la partícula"

sigo ✱

$$F = \sum_{i=1}^{X} Y_i \Rightarrow E[F] = E[E[F|X]] = E\left[\frac{X}{5}\right]$$

$$F|_{X=x} = \sum_{i=1}^{x} Y_i \qquad = \frac{1}{5}\underbrace{E[X]}_{2} = \boxed{\frac{2}{5} = E[F]}$$

idea de rato y camino

$$E[F] = E\left[\sum_{i=1}^{x} Y_i\right] = x\,E[Y_i]$$

$$E[Y_i] = E[Y|D]\,P(D) + E[Y|I]\,P(I) = 1\cdot\frac{3}{5} - 1\cdot\frac{2}{5}.$$

$$E[Y_i] = \frac{1}{5} \qquad E[F|X=x] = x\,\frac{1}{5} \ ✱$$

5.6 T_1 y T_2 exp ind $\qquad 1/\lambda = 1 \rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

$X_1 = T_1 + T_2 \qquad X_2 = T_1 - T_2 \qquad X_3 = \frac{T_1}{T_2}$

a) Conjunta de X_1 y X_2 ¿son ind?

$X_1 = T_1 + T_2 \qquad X_2 = T_1 - T_2$

$X_1 - T_2 = T_1 \qquad X_2 = X_1 - T_2 - T_2 = X_1 - 2T_2$

$T_1 \sim exp(1)\ [0, +\infty]$

$T_2 \sim exp(1)\ [0, +\infty]$

$T_1 = X_1 - \left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right) \qquad \frac{X_1 - X_2}{2} = T_2$

$T_1 + T_2 = X_1$

$T_1 = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}$

$0 < T_1 < \infty$

$0 < T_2 < \infty$

$T_1 > 0$

$T_2 > 0$

$$|J| = \left|\frac{d(X_1, X_2)}{d(T_1, T_2)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = |-1-1| = 2$$

$f_{T_1} = \lambda e^{-\lambda x} = e^{-x}$

$$f_{T_1 T_2} = e^{-T_1} e^{-T_2} = e^{-(T_1 + T_2)} = e^{-(X_1)}$$

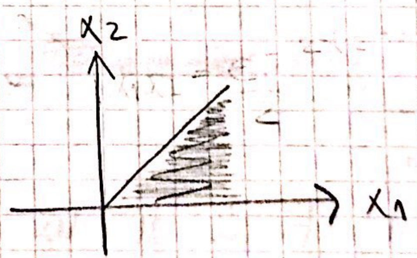
$\frac{X_1 + X_2}{2} > 0$

$$f_{X_1, X_2} = \frac{f_{T_1 T_2}}{2} = \frac{e^{-(X_1)}}{2} \ \mathbb{1}\{0 < X_2 < X_1\}$$

$X_1 + X_2 > 0 \rightarrow X_2 > -X_1$

$X_1 - X_2 > 0 \rightarrow X_1 > X_2 \qquad X_1 = X_2$

$[-X_1 < X_2 < X_1]$



no son $\underline{\underline{ind}}$ → soporte

↳ uno depende del otro

b) X_1 y X_3

$X_1 = T_1 + T_2 \qquad X_3 = \frac{T_1}{T_2} = T_1 \cdot \frac{1}{T_2}$

$X_1 = X_3 T_2 + T_2 = T_2(X_3 + 1)$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/T_2 & -T_1/T_2^2 \end{vmatrix}$$

↓

$\frac{dX_1 X_3}{dT_1 T_2}$

$\boxed{T_2 = \frac{X_1}{(X_3+1)}}$

$X_3 \cdot T_2 = T_1$

$\boxed{\frac{X_3 X_1}{(X_3+1)} = T_1}$

$$f_{x_1x_3} = \frac{f_{T_1T_2}}{|J|} = \frac{e^{-\left(\frac{x_1(1+x_3)}{1+x_3}\right)}}{\left|-\frac{T_1}{T_2^2} - \frac{1}{T_2}\right|} = \frac{e^{-\left(\frac{x_1\cancel{(1+x_3)}}{\cancel{1+x_3}}\right)}}{\frac{(1+x_3)^2}{x_1}}$$

$$\left[e^{-(T_1+T_2)} = e^{-\left(\frac{x_1}{1+x_3} + \frac{x_1 x_3}{1+x_3}\right)}\right]$$

$$f_{x_1x_3} = \frac{e^{-x_1} \cdot x_1}{(1+x_3)^2} \, \mathbb{1}\{x_1>0;\ x_3>0\}$$

veo que una no depende de la otra

ver si los puedo separar.

$f_{x_1x_3} = f_{x_1} f_{x_3}$

(5.8) 0:00 → cita

D = 0:00 + x

R = 0:00 + y

el 1ro en llegar espera 5 minutos al otro.

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{35} e^{-\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{7}\right)} \mathbb{1}\{x>0,\ y>0\}$$

Prob → 1ro sea drac.

$$f_{XY} = \underbrace{\frac{1}{5} e^{-\left(\frac{x}{5}\right)}}_{f_X} \cdot \underbrace{\frac{1}{7} e^{-\left(\frac{y}{7}\right)}}_{f_Y}$$

$X \sim exp(1/5)$

$Y \sim exp(1/7)$

$$J = \begin{cases} 1 & \text{primero llega drac.} \to \text{MIN sea} \\ 2 & \text{'' '' Raul.} \end{cases}$$

W = tiempo de espera

$W = \text{Máx} - \text{mín} = V - U$

Por el 4.14

$W|_{J=1} \sim Exp(1/7)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ → continua

$$P(J=1 \mid W=5) = \frac{P(J=1) \cdot f_{W|J=1}(5)}{f_{W|J=1}(5)\, P(J=1) + f_{W|J=2}(5)\, P(J=2)}$$

↳ discreta

Bayes para mezclas:

$$P(X=x_0 \mid Y=y_0) = \frac{P(X=x_0) \cdot f_Y(X=x_0|y_0)}{\left[\sum_{\forall x} f_{Y|X=x}(y_0)\, P(X=x)\right]}$$

X es discreta

Y es continua

$f_Y(y)$ → puedo pensarlo como v. auxiliar de mezcla

$$P(J=1 \mid W=5) = \frac{\overbrace{\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}+\frac{1}{5}}}^{P(J=1)} \cdot \frac{1}{7} e^{-\frac{1}{7}\cdot 5}}{\frac{1}{7}e^{-\frac{1}{7}5} \cdot \frac{1/5}{1/7+1/5} + \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}5} \cdot \frac{1/7}{1/5+1/7}} =$$

Del 4.14

$W|_{J=1} \sim exp(\lambda_2)$

$W|_{J=2} \sim Exp(\lambda_1)$

↓

EJ: sabiendo que pasó $J=1$ (min es x)

↓

$W = X - Y$

↓

sabes cual es

$$P(J=1 \mid W=5) = \frac{\frac{7}{12} \cdot 0{,}0699}{0{,}0408 + 0{,}0307}$$

$$\boxed{P(J=1 \mid W=5) = 0{,}57}$$

5.10 6 ROBOCOPS → C/U $P(F) = 1/4$

F: el robocop está fallado

$P(D|F) = 4/5$ → D: detectar la falla

$\bar{D}$: pasa como si fuera bueno

$R \begin{cases} D \; 1/4 \begin{cases} 4/5 \\ 1/5 \end{cases} \\ \bar{D} \; 3/4 \end{cases}$

X: cantidad fallados   Y: cantidad de recorte de fallados.

a) $\varphi(x) = E[Y|X=x]$

$Y|X=x$ → sabiendo cuantos estaban fallados (x), cuantos detecto

cant de fallado de 6.

Éxito en n exp, robocops.

n - ensayos
p - prob exito

Bin $(n, p) =$

$$\boxed{E[Y|X=x] = x \cdot p = \frac{4}{5}x} \rightarrow \varphi(x)$$

b) $X|Y=y$ → sabiendo cuantos se detectaron cuantos están fallados

↳ éxito

Total fallados

$X|_{Y=y} = Y|_{Y=y} + M_{|Y=y} =$

detectados   ↳ no detectados

$X|_{Y=y} = y + M_{|Y=y}$ → $(y-6)\,P(F|\bar{D})$

↳ binomial → $(y-6)$ → éxito

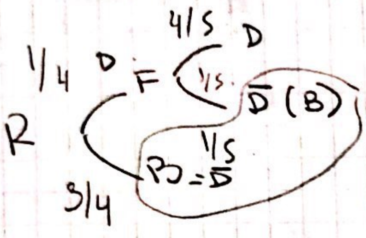
$Bin \sim (n = 6-y, \; p = P(F|\bar{D}))$ $P(F|\bar{D})$

robocop fallado   ↳ sabiendo los no detectados.

$$\mathbb{P}(F|\bar D) = \frac{P(F\cap \bar D)}{P(\bar D)} = \frac{\overbrace{P(\bar D|F)}^{1/5}\,\overbrace{P(F)}^{1/4}}{P(\bar D)} = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}$$

$P(D|F) = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $P(\bar D) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{4}$

$P(D|\bar F) = 1/5$



$$\boxed{P(F|\bar D) = \frac{1}{16}}$$

$$\boxed{X|_{Y=y} = y + (6-y)\frac{1}{16} = \varphi(y)}$$

5.12 Dado → 36 veces $\qquad E[Y|X] =$

X: cant resultados pares

Y: cantidad de resultados impares

$X+Y=36$

$Y=36-X$

$X \sim BIN(36, p_X)$

$Y \sim BIN(36, p_Y)$

$E[Y|X=x] = E[36-X \,|\, X=x] = 36-x$

$p_X = 1/2 \quad p_Y = 1/2$

son ≠ distintos

$E[Y|X] = 36-X$] → nueva v.a

→ $\varphi(X)$ = esta recta reg.

dato que depende.

$$\hat y(x) = \frac{cov(X,Y)}{\underbrace{var(X)}_{m p_x(1-p_x)}}\left(x - \overbrace{E(X)}^{m p_X}\right) + \overbrace{E(Y)}^{m p_Y}$$

$$36 - x = \frac{cov(X,Y)}{\frac{1}{2}36(1-\frac{1}{2})}\cdot\left(x - 36\cdot\frac{1}{2}\right) + 36\cdot\frac{1}{2}$$

$$36 - x = \frac{cov(x,y)}{18 - 9}(x - 18) + 18.$$

$$18 - x = \frac{cov}{9}(x - 18)$$

$$\frac{18 - x}{x - 18} = \frac{cov}{9}.$$

$$\frac{-1(-18 + x)}{18 + x} = \frac{cov}{9}.$$

$$\boxed{-9 = cov(x,y)}$$ → puede ser neg

↓

uno crece
y otro decrece
$cov < 0$

Dos crecen
$cov > 0$

PROP exp y geo

SP $X \sim exp$.

$$\boxed{E[X \mid X>2] = 2 + E[X].}$$

$\rightarrow$ por perdida de memoria.

GUÍA 6

PROCESOS de Bernoulli (caso particular de Binomial)

↓

Cada variable aleatoria es un ensayo

ÉXITO — FRACASO

$p(E) = p$ $\quad$ $p(F) = 1 - p$

Bernoulli → Resultado de un experimento con 2 resultados posibles.

→ PROCESO Ber: experimentos que constan de una sucesión de pruebas ÉXITO – FRACASO, independientes, con prob. cte de éxito en cada prueba.

↓

→ Sucesión de V.A's independientes

$X_i \sim Ber(p)$

↓ variable aleatoria de c/ ensayo

$Ber(p) \sim Bin(1, p)$

BINOMIAL (suma de Bernoullis) → si tengo nº fijos de ensayos, y quiero los éxitos en m ensayos.

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i = \text{nº éxitos en } m \text{ ensayos}$$

$X \sim Bin(m, p)$ — m: ensayos; p: prob éxito

PROP:

Para $X_i \sim Ber(p)$ ind.

$E[X_i] = p$

$V[X_i] = p(1-p)$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i] = \sum_{i=1}^{m} p = mp$$

GEOMÉTRICA (caso particular de Pascal) → Las m pruebas o ensayos hasta que llegue al 1er éxito

↳ PNP: NO tiene memoria (única discreta, continua exp)

$N \sim Geo(p)$ ↳ éxito

$X \sim Geo(p)$

$$P(X \geq n + m \mid X \geq m) = P(X \geq n)$$

$n, m \in \mathbb{N}$

Pascal ↑

$N_k = \sum_{i=1}^{k} N_i$ ↳ Geo ind.

← **Pascal** → nº de ensayos hasta el k éxito

$E[N_k] = \frac{k}{p}$

$V[N_k] = \frac{k(1-p)}{p^2}$

$N \sim Pascal(k, p)$ ↳ cantidad éxitos

$X_m \sim Bin(m, p)$ $\quad$ $Y_k \sim Pas(k, p)$

$$P(Y_k \leq m) = P(X_m \geq k)$$

Los 1ros k éxitos ocurren en los primeros m ensayos (puede haber ⊕ éxitos) ←

En los 1ros m ensayos hay k éxitos o más ←

Relación Pascal y Bin

El nº de ensayos hasta 1er éxito se asocia con el mínimo

$T_1 = \min \{ i \in \mathbb{N} : \underbrace{X_i = 1}_{\text{éxito.}} \}$ → el 1ro q' aparece.

T_1: nº de ensayos hasta 1er éxito

approx.
↓
si T pasa dsp de m + n, es lo mismo que decir que pase después de m

$T_1 \sim Geo(p)$

← $P(T_1 > n+m \mid T_1 > m) = P(T_1 > n)$ → falta de memoria.

$\underbrace{0\,0 \ldots 0}_{m} ; \underbrace{0\,0 \ldots 0}_{n} ; 0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \ldots$

como en m no obtuve éxito, lo descarto y sigo y mi nuevo "cero" es donde arranca n.

El nº de ensayos hasta el k éxito.

$T_k = \min \{ i \in \mathbb{N} \Rightarrow X_i = 1 \cap i > T_{k-1} \}$ $k \in \mathbb{N} \geq 1$

T_k = nº ensayos donde ocurre el k éxito.

$T_k \sim Pas(k, p)$

De la Relación entre Pascal y Binomial

$P(Y_k \leq n) = P(X_n \geq k)$

$P(Y_k > n) = P(X_n < k)$ → concluyo q' valen los complementos.

$Y_k > n$ → necesito más de n ensayos para los k éxitos

$X_n < k$ → En n ensayos, no alcanzo a tener k éxitos (hay menos).

¿Cuál es el nº más probable de éxitos? → si fuera continua, para hallar el máx derivo = 0.

$(n+1)p - 1 \leq k_{MAX} \leq (n+1)p$ ⟶ sale de la relación entre.

$P(X_n = k) \geq P(X_n = k+1)$

$P(X_n = k) \geq P(X_n = k-1)$

Para la Binomial $k_{máx} / p(X_n = k_{máx})$

"cantidad máxima de éxitos"

$k_{máx}$ es ENTERO!

Sucesión de m pruebas, en cada una ocurre un solo evento de $A_1, \dots A_M$ con p → el resultado de c/prueba es independiente.

↑

MULTINOMIAL

(tengo + de 2 opciones)

prob de cada variable aleatoria

$$(X_1, X_2, X_3) \sim \text{MULTINOMIAL}\left(15, \overbrace{p_1 = \tfrac{3}{6}, p_2 = \tfrac{2}{6}, p_3 = \tfrac{1}{6}}\right)$$

↓ cant ensayos

$X_i \sim Bin(15, p_i)$ $\quad$ $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

$i = 1,2,3$

↳ las marginales son binomiales no indep.

si tengo 2es Bernoulli

En gral: ensayo con K resultados : $\overbrace{A_1, A_2}, \dots, A_k$

En c/ ensayo ocurre uno solo

$$p(A_i) = p_i \qquad \sum_{i=1}^{K} p_i = 1$$

si se realizan m ensayos

X_i = cant de veces que ocurre X_i en los m ensayos.

$$(X_1, X_2, \dots, X_M) \sim \text{MULTINOMIAL}(m, p_1, p_2, \dots, p_K)$$

PROB PUNTUAL ← $P(X_1 = m_1, \dots, X_K = m_K) = \dfrac{m!}{m_1!\, m_2! \dots m_K!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_K^{m_K}$

$\sum m_i = m$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = m\, p_i\, p_j \quad i \neq j.$$

$$\text{cov}(X_i, X_i) = V(X_i) = m\, p_i (1 - p_i)$$

si condiciono la multinomial

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) \sim \text{mul}(m = 20, 0{,}3, 0{,}2, 0{,}1, 0{,}4)$$

$$(X_1, X_2, X_3 \mid X_4 = 7) \sim \text{multi}(m = 13, p_1^*, p_2^*, p_3^*)$$

"si se que en 7 ocurrió X_4, entonces los otros pueden pasar en 20-7"

$$\sum_{i=1}^{m} p^* = 1$$

$$p^* = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + p_3} \quad i = 1,2,3$$

$$p_1^* = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{3}{6}.$$

generalizo:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \mid x_k = m) \sim MULT(n-m, p_1^*, p_2^*, \ldots p_{k-1}^*)$$

$m < n$

$$p_i^* = \frac{p_i}{1-p_k} = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i}.$$

cada $x_i \sim Bin(n-m, p_i^*)$

"ADelgazar" → ej 6.10.

ganaL
ganaM
empate.

si el empate a los dos me los obvia, lo puedo descontar condicionando lo que quiero.

dan lo mismo.

$P(\text{gane M on K}) = M_1 \cup (\text{empate} \cap M_2) \ldots$

o

$P(\text{gane M on K}) = P(\text{gane M} \mid \text{alguien gano})$

Scanned with CamScanner