PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Evaluación integradora — Primer cuatrimestre – 2019
Duración: 4 horas. — 4/07/2019 – 9:00 hs.

Curso: Año y cuatrimestre de cursada:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Lucas tiene tres dados de seis caras; dos equilibrados y uno cargado de manera tal que la probabilidad de obtener un 1 es 1/3 y los restantes resultados son equiprobables. Lucas elige un dado al azar, lo arroja y obtiene un 4. ¿Cuál es la probabilidad de que haya elegido un dado equilibrado?

Solución:

Definimos los siguientes eventos:

- E: "Lucas elige el dado equilibrado",
- C: "Lucas elige el dado cargado",
- A: "Al arrojar el dado se obtiene un 4".

Debemos calcular $\mathbf{P}(E|A)$.

Por el enunciado podemos decir que: $\mathbf{P}(E) = 2/3$, $\mathbf{P}(C) = 1/3$, $\mathbf{P}(A|E) = 1/6$ y $\mathbf{P}(A|C) = 2/15$.

A partir de la definición de probabilidad condicional y la fórmula de probabilidad total, desarrollamos la probabilidad pedida:

$$\mathbf{P}(E|A) = \frac{\mathbf{P}(A\cap E)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|E)\cdot\mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}(A|E)\cdot\mathbf{P}(E)+\mathbf{P}(A|C)\cdot\mathbf{P}(C)} \frac{2/3\cdot 1/6}{2/3\cdot 1/6 + 1/3\cdot 2/15} = \frac{5}{7}$$

2. El tiempo (en horas) que Tomás pasa mirando su serie favorita y escuchando música durante el fin de semana son variables aleatorias X e Y respectivamente, con función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0.5e^{-0.5(x+y)}\mathbf{1}\{0 < x < y\}.$$

Sabiendo que un fin de semana Tomás pasó más de dos horas mirando su serie favorita, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado menos de seis horas en total mirando la serie y escuchando música?

Solución:

Sean X el tiempo en horas que Tomás pasa mirando su serie favorita, e Y el tiempo en horas que Tomás pasa escuchando música, debemos calcular $\mathbf{P}(X + Y < 6|X > 2)$.
Tenemos como dato la densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y), por lo tanto calculamos la probabilidad pedida desarrollando la probabilidad condicional y calculando las integrales correspondientes.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X + Y < 6|X > 2) &= \frac{\mathbf{P}(X + Y < 6, X > 2)}{\mathbf{P}(X > 2)}\\ &= \frac{\int_2^3 \int_x^{6-x} 0.5e^{-0.5(x+y)} dydx}{\int_2^\infty \int_x^\infty 0.5e^{-0.5(x+y)} dydx}\\ &= 1 - 2e^{-1} = 0.2642\end{aligned}$$

---

3. Mica y Carla estudian juntas para un examen y cada una de ellas tiene probabilidad 0.6 de aprobarlo. Sea X_1 la variable aleatoria que toma el valor 1 si Mica aprueba el examen ó 0 si no, y X_2 la variable aleatoria que toma el valor 1 si Carla aprueba el examen ó 0 si no. Si $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0.14$, calcular la probabilidad de que ambas amigas aprueben el examen.

Solución:

Se definen $X_1 = \mathbf{1}\{$"Mica aprueba el examen"$\}$, $X_2 = \mathbf{1}\{$"Carla aprueba el examen"$\}$. Sabemos que X_1 y X_2 son variables aleatorias con distribución $Ber(0.6)$. A demás, $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0.14$. El ejercicio pide calcular la probabilidad de que ambas amigas aprueben, es decir $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Desarrollamos a partir de las propiedades de covarianza:

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] - \mathbf{E}[X_1]\mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] - 0.6^2 = 0.14.$$

Como X_1 y X_2 son variables aleatorias con distribución $Ber(0.6)$, toman solo los valores 0 y 1, entonces

$$\mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] = \sum \sum x_1 x_2 \mathbf{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1).$$

Finalmente,

$$\mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] - 0.6^2 = \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) - 0.6^2,$$

resultando $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1/2$.

---

4. A una tienda de ropa entran clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. La cantidad de prendas que compra cada cliente es independiente, y puede ser 0, 1 ó más de 1 con probabilidades respectivas 0.4, 0.35, 0.25. Sabiendo que en las dos primeras horas entraron exactamente 2 clientes, calcular la probabilidad de que 1 cliente no compre nada y 1 cliente compre una sola prenda.

Solución:

Resolvemos el ejercicio de dos formas distintas.

1. Tenemos que el arribo de clientes sigue un Proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. Podemos definir las siguientes variables:

   - $N(2)$: Cantidad de clientes que arriban en las dos primeras horas,
   - $N_N(2)$: Cantidad de clientes que no compran nada en las dos primeras horas,
   - $N_U(2)$: Cantidad de clientes que compran una prenda en las dos primeras horas,
   - $N_M(2)$: Cantidad de clientes que compran más de una prenda en las dos primeras horas.

   Debemos calcular $\mathbf{P}(N_N(2) = 1, N_U(2) = 1 | N(2) = 2)$.

   Desarrollando la probabilidad condicional,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_N(2) = 1, N_U(2) = 1 | N(2) = 2) &= \frac{\mathbf{P}(N_N(2) = 1, N_U(2) = 1, N_M(2) = 0)}{\mathbf{P}(N(2) = 2)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(N_N(2) = 1)\mathbf{P}(N_U(2) = 1)\mathbf{P}(N_M(2) = 0)}{\mathbf{P}(N(2) = 2)} \\
&= \frac{3.2e^{-3.2} 2.8e^{-2.8} e^{-2}}{8^2 e^{-8}/2!} \\
&= 0.28
\end{aligned}
$$

2. Podemos decir que $(N_N(2), N_U(2), N_M(2))|N(2) = 2 \sim \mathcal{M}(2, 0.4, 0.35, 0.25)$
   Por lo tanto $\mathbf{P}(N_N(2) = 1, N_U(2) = 1 | N(2) = 2) = 2 \cdot 0.4 \cdot 0.35 = 0.28$

---

5. La urna a contiene 4 bolas blancas y 3 rojas. La urna b contiene 7 bolas blancas y 7 rojas. El experimento consiste en elegir una urna al azar, extraer una bola y reponerla en la misma urna. Si se realiza el experimento 200 veces, calcular aproximadamente la probabilidad de observar más de 90 bolas rojas.

Solución:

Definimos el evento R : “La bola extraída es roja”, entonces usando la fórmula de probabilidad total:

$$\mathbf{P}(R) = \mathbf{P}(R|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(R|B)\mathbf{P}(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{14}\frac{1}{2} = \frac{13}{28}$$

Sea $X_i = \mathbf{1}\{\text{la bola de la extracción i es roja}\}$, entonces $X_i \sim Ber(13/28)$, debemos calcular $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{200} X_i > 90)$

Como $X_1, \ldots, X_{200}$ son independientes y están idénticamente distribuidas, por el Teorema Central del Límite:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i < t\right) \cong \phi\left(\frac{t - n \cdot \mathbf{E}(X_1)}{\sqrt{n \cdot \mathbf{var}(X_1)}}\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i > 90\right) &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i \geq 90,5\right) \\
&= 1 - \phi\left(\frac{90,5 - 650/7}{\sqrt{4875/98}}\right) \\
&= 1 - \phi(-0.334) \\
&= 1 - 0.3691 = 0.6309.
\end{aligned}$$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Evaluación integradora — Primer cuatrimestre – 2019

Duración: 4 horas. — 4/07/2019 – 9:00 hs.

Curso: Año y cuatrimestre de cursada:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Lucas tiene tres dados de seis caras; dos equilibrados y uno cargado de manera tal que la probabilidad de obtener un 1 es 1/3 y los restantes resultados son equiprobables. Lucas elige un dado al azar, lo arroja y obtiene un 4. ¿Cuál es la probabilidad de que haya elegido un dado equilibrado?

Solución:

Definimos los siguientes eventos:

- E: "Lucas elige el dado equilibrado",
- C: "Lucas elige el dado cargado",
- A: "Al arrojar el dado se obtiene un 4".

Debemos calcular $\mathbf{P}(E|A)$.

Por el enunciado podemos decir que: $\mathbf{P}(E) = 2/3$, $\mathbf{P}(C) = 1/3$, $\mathbf{P}(A|E) = 1/6$ y $\mathbf{P}(A|C) = 2/15$.

A partir de la definición de probabilidad condicional y la fórmula de probabilidad total, desarrollamos la probabilidad pedida:

$$\mathbf{P}(E|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap E)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|E) \cdot \mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}(A|E) \cdot \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(A|C) \cdot \mathbf{P}(C)} \frac{2/3 \cdot 1/6}{2/3 \cdot 1/6 + 1/3 \cdot 2/15} = \frac{5}{7}$$

2. Mica y Carla estudian juntas para un examen y cada una de ellas tiene probabilidad 0.6 de aprobarlo. Sea X_1 la variable aleatoria que toma el valor 1 si Mica aprueba el examen ó 0 si no, y X_2 la variable aleatoria que toma el valor 1 si Carla aprueba el examen ó 0 si no. Si $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0.14$, calcular la probabilidad de que ambas amigas aprueben el examen.

Solución:

Se definen $X_1 = \mathbf{1}\{$"Mica aprueba el examen"$\}$, $X_2 = \mathbf{1}\{$"Carla aprueba el examen"$\}$. Sabemos que X_1 y X_2 son variables aleatorias con distribución $Ber(0.6)$. A demás, $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0.14$. El ejercicio pide calcular la probabilidad de que ambas amigas aprueben, es decir $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Desarrollamos a partir de las propiedades de covarianza:

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] - \mathbf{E}[X_1]\mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] - 0.6^2 = 0.14.$$

Como X_1 y X_2 son variables aleatorias con distribución $Ber(0.6)$, toman solo los valores 0 y 1, entonces

$$\mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] = \sum\sum x_1 x_2 \mathbf{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1).$$

Finalmente,

$$\mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] - 0.6^2 = \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) - 0.6^2,$$

resultando $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1/2$.

---

3. A una tienda de ropa entran clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. La cantidad de prendas que compra cada cliente es independiente, y puede ser 0, 1 ó más de 1 con probabilidades respectivas 0.4, 0.35, 0.25. Sabiendo que en las dos primeras horas entraron exactamente 2 clientes, calcular la probabilidad de que 1 cliente no compre nada y 1 cliente compre una sola prenda.

Solución:

Resolvemos el ejercicio de dos formas distintas.

1. Tenemos que el arribo de clientes sigue un Proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. Podemos definir las siguientes variables:

   - $N(2)$: Cantidad de clientes que arriban en las dos primeras horas,
   - $N_N(2)$: Cantidad de clientes que no compran nada en las dos primeras horas,
   - $N_U(2)$: Cantidad de clientes que compran una prenda en las dos primeras horas,
   - $N_M(2)$: Cantidad de clientes que compran más de una prenda en las dos primeras horas.

   Sabemos que que $N(2) \sim Poi(8)$. A demás, por el teorema de adelgazamiento podemos decir que $N_N(2) \sim Poi(3.2)$, $N_U(2) \sim Poi(2.8)$ y $N_M(2) \sim Poi(2)$, independientes.

   Debemos calcular $\mathbf{P}(N_N(2) = 1, N_U(2) = 1 | N(2) = 2)$.

Desarrollando la probabilidad condicional,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_N(2)=1, N_U(2)=1|N(2)=2) &= \frac{\mathbf{P}(N_N(2)=1, N_U(2)=1, N_M(2)=0)}{\mathbf{P}(N(2)=2)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(N_N(2)=1)\mathbf{P}(N_U(2)=1)\mathbf{P}(N_M(2)=0)}{\mathbf{P}(N(2)=2)} \\
&= \frac{3.2e^{-3.2}2.8e^{-2.8}e^{-2}}{8^2e^{-8}/2!} \\
&= 0.28
\end{aligned}
$$

2. Podemos decir que $(N_N(2), N_U(2), N_M(2))|N(2)=2 \sim \mathcal{M}(2, 0.4, 0.35, 0.25)$
Por lo tanto $\mathbf{P}(N_N(2)=1, N_U(2)=1|N(2)=2) = 2 \cdot 0.4 \cdot 0.35 = 0.28$

---

4. Sea X una variable aleatoria con densidad

$$f_\theta(x) = 2\theta\mathbf{1}\{0 < x < 1/2\} + 2(1-\theta)\mathbf{1}\{1/2 \leq x < 1\}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Basándose en la muestra: $x_1 = 0.32, x_2 = 0.67$ y $x_3 = 0.85$, hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

Solución:

Definimos la función de verosimilitud como

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{3} f_\theta(x_i)$$

Evaluando en la muestra de tamaño 3 resulta:

$$L(\theta) = 2\theta(2(1-\theta))^2, \quad 0 < \theta < 1$$

Debemos encontrar el valor de θ que maximiza $L(\theta)$ con $0 < \theta < 1$. Como la función ln es monótona creciente, buscamos el valor de θ que maximiza $l(\theta) = ln(L(\theta))$.

$$
\begin{aligned}
l(\theta) = ln(L(\theta)) &= ln(8\theta) + 2ln(1-\theta) \\
\frac{dl(\theta)}{d\theta} &= \frac{8}{8\theta} + \frac{2}{1-\theta}(-1) = 0 \\
\theta &= 1/3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\hat{\theta}_{MV}(\underline{x}) = 1/3$

---

5. Un emisor transmite una señal de valor μ. El receptor recibe mediciones $X_i = \mu + \epsilon_i$ donde ϵ_i son los errores de medición. Los errores ϵ_i son variables aleatorias independientes y con distribución $\mathcal{N}(0, 3)$. Calcular el número mínimo de mediciones que debe recibir el receptor para poder construir un intervalo de confianza de nivel 0.95 para μ de longitud menor a 0.1.

Solución:

Tenemos que $X_i = \mu + \epsilon_i$ donde $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 3)$. Entonces $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 3)$. Buscamos el valor de n tal que la longitud del intervalo de confianza de nivel 0.95 para μ sea menor a 0.1.

Un intervalo de confianza de nivel 0.95 para μ basado en la muestra aleatoria $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ será el intervalo aleatorio $IC(\underline{X}) = [A(\underline{X}); B(\underline{X})]$ tal que $\mathbf{P}(A(\underline{X}) < \mu < B(\underline{X})) = 0.95$. Si desarrollamos el método del Pivote, utilizando como pivote a $U = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{3}}$ resulta:

$$IC(\underline{X}) = \left[\bar{X} - z_{0.975}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{0.975}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right]$$

La longitud del intervalo es $L = B(\underline{X}) - A(\underline{X}) = 2 \cdot z_{0.975}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$. Para que la longitud sea menor que 0.1, entonces $n > 4609.92$, por lo tanto el valor mínimo necesario será $n = 4610$.