9.14 Se arroja un dado piramidal n veces. El dado tiene las caras numeradas 1, 2, 3, 4 y están cargadas con probabilidades p_1, p_2, p_3, p_4, respectivamente. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 la cantidad de lanzamientos en los que el dado cae en la cara 1, 2, 3, 4, respectivamente. Mostrar que la distribución de (X_1, X_2, X_3, X_4) pertenece a una familia exponencial a 3 parámetros.

$$\underbrace{(X_1, X_2, X_3, X_4)}_{\underline{X}} \sim \mathcal{M}(n, p_1, p_2, p_3, p_4), \quad 0 < p_i < 1$$

$$\theta = [p_1, p_2, p_3, p_4]$$

Como $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \longrightarrow p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$

$$\Rightarrow \theta = [p_1, p_2, p_3]$$

$$p_\theta(\underline{x}) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} p_4^{x_4} \; \mathbb{1}\{x_1+x_2+x_3+x_4=n\}$$

$$= e^{x_1 \ln(p_1)} e^{x_2 \ln(p_2)} e^{x_3 \ln(p_3)} e^{x_4 \ln(p_4)} \frac{n!\,\mathbb{1}\{x_1+x_2+x_3+x_4=n\}}{x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!}$$

$$= e^{x_4 \ln(1-p_1-p_2-p_3)} e^{x_1 \ln(p_1)} e^{x_2 \ln(p_2)} e^{x_3 \ln(p_3)} \underbrace{\frac{n!\,\mathbb{1}\{x_1+x_2+x_3+x_4=n\}}{x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!}}_{h(\underline{x})}$$

$$= e^{(n-x_1-x_2-x_3) \ln(1-p_1-p_2-p_3)} e^{x_1 \ln(p_1)} e^{x_2 \ln(p_2)} e^{x_3 \ln(p_3)} h(x)$$

$$= h(x)\, \underbrace{e^{n \ln(1-p_1-p_2-p_3)}}_{A(\theta)} \underbrace{e^{x_1\left(\ln\left(\frac{p_1}{1-p_1-p_2-p_3}\right)\right)} e^{x_2 \ln\left(\frac{p_2}{1-p_1-p_2-p_3}\right)} e^{x_3\left(\ln\left(\frac{p_3}{1-p_1-p_2-p_3}\right)\right)}}$$

$$c_i(\theta) = \ln\left(\frac{p_i}{1-p_1-p_2-p_3}\right), \quad i = 1,2,3$$

$$r_i(x) = x_i$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Es familia exponencial}}$