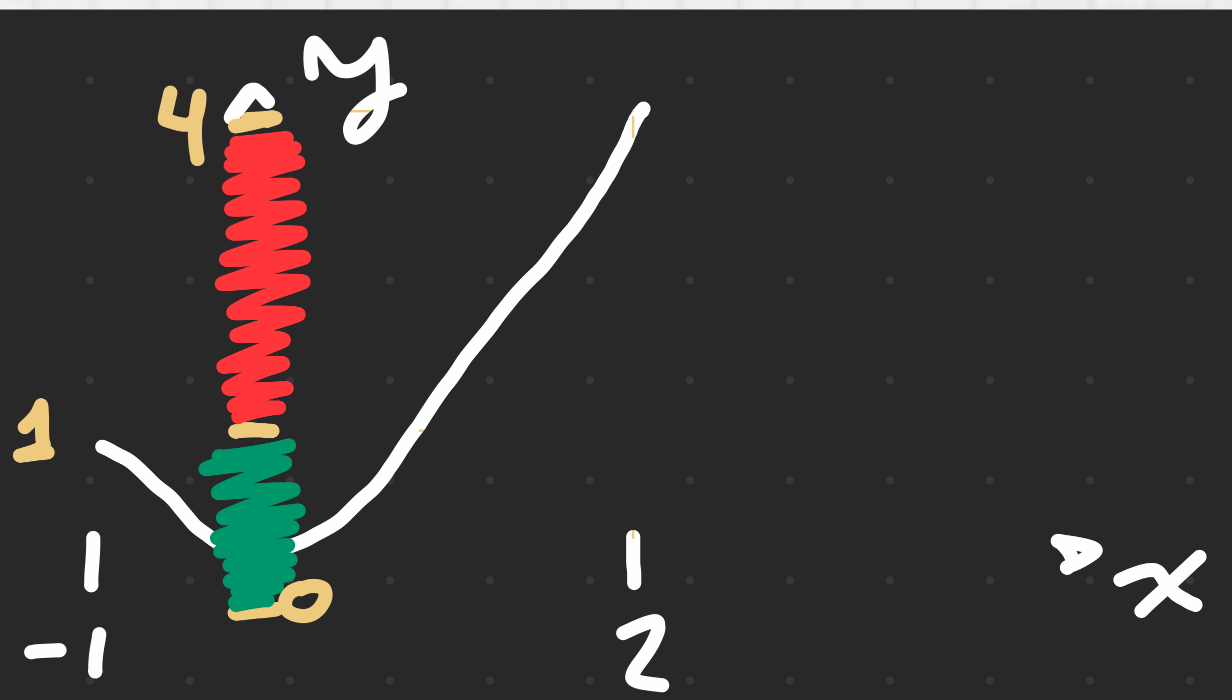
Eventos equivalentes

siempre analizar de que espacio parto → voy
D ó C → D ó C

3. Sea X una V.A. con función de densidad
$$f_X(x) = \frac{2(x+1)}{9}\,\mathbb{1}\{-1 \le x \le 2\}$$
Hallar la función de densidad de $Y = X^2$

X, Y no son ind

sop



$$f_X(x) = \frac{2(x+1)}{9}\,\mathbb{1}\{-1<x<2\}$$

$$f_{h(x)}(h(x)) = f_Y(y)$$

$Sop(X) = [-1, 2]$

$Sop(h(X)) = Sop(Y) = [0, 4]$

$$\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y) = \mathbb{P}(X \le \pm\sqrt{y}) = \mathbb{P}(X \le h^{-1}(y))$$

$\mathbb{P}(Y \le y)$ con $y \in [0,1]$

$$= \mathbb{P}(|X| \le \pm\sqrt{y}) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$\mathbb{P}(\cancel{X = -\sqrt{y}})$ → 0

x puede ser negativo o positivo

$$\mathbb{P}(Y \le y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \mathbb{P}(X^2 \le y) & 0 \le y \le 4 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

estudio que pasa con $y \in [0, 4]$

$Y \in [0,1]$ $\quad \mathbb{P}(Y \leq y)$

$$\mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) + \cancel{\mathbb{P}(X = -\sqrt{y})} \; 0$$

$Y \in [1,4]$ $\quad \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y})$

x es solo positivo

$$\underbrace{\mathbb{P}(Y \leq y)}_{F_Y(y)} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & 0 < y < 1 \\ F_X(\sqrt{y}) & 1 < y < 4 \\ 1 & y > 4 \end{cases}$$

ahora integro

$$\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_Y(y)$$

$$\frac{\partial \left(F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right)}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

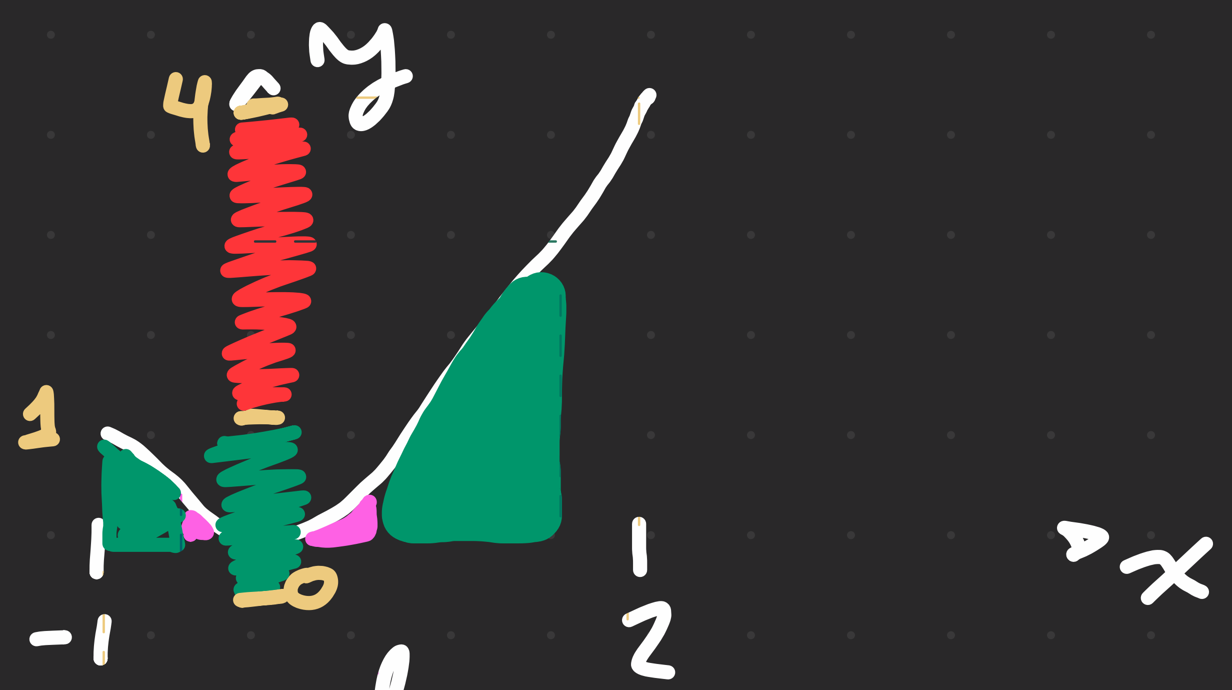
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right)$$

reempl

$$\frac{\partial F_Y(y)}{\partial x} = \frac{\partial F_X(\sqrt{y})}{\partial y} = f_X(\sqrt{y})\,\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

reepl

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y< \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) & 0<y<1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) & 1<y<4 \\ 0 & y>4 \end{cases}$$



$f_X(x)$

4. El voltaje de cierto componente es una V.A con función de distribución

$$F_X(x) = \frac{x}{x+1}\mathbb{1}\{x>0\}$$

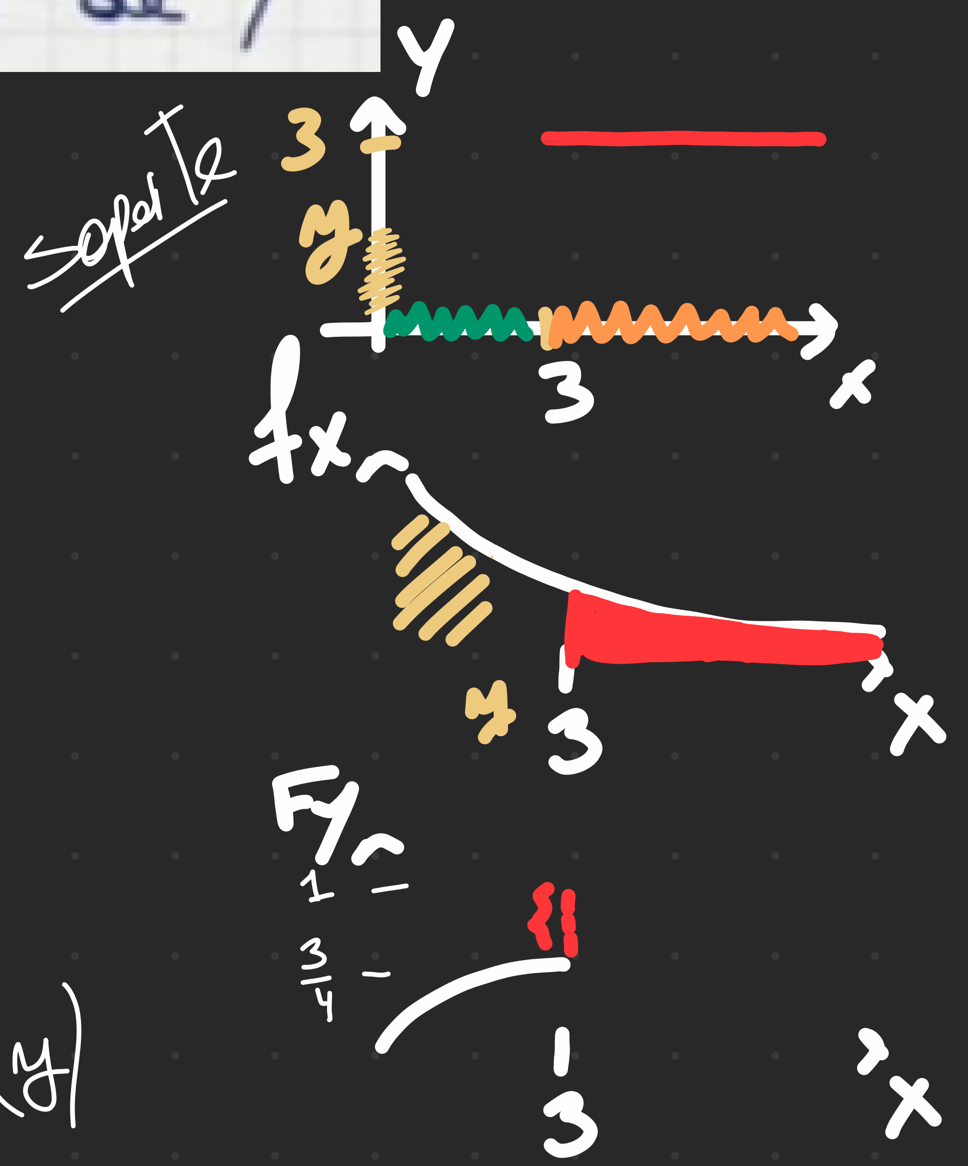
La medición del voltaje se comporta como

$$Y = X\,\mathbb{1}\{X<3\} + 3\,\mathbb{1}\{X\geq 3\}$$

Hallar la función de distribución de Y

X cont
Y cont

$$Y = g(X) = \begin{cases} X & x<3 \\ 3 & x\geq 3 \end{cases}$$



$sop(Y) = [0,3]$

$$\mathbb{P}(Y\leq y) = F_Y(y) \overset{\text{me}}{=} \mathbb{P}(g(X)\leq y)$$

$x\leq 3$

$$\mathbb{P}(Y\leq y) = \mathbb{P}(X\leq y) = F_X(y) = \frac{y}{(y+1)^2} = F_Y(y)$$

$$\mathbb{P}(Y\leq y) = \mathbb{P}(\underset{\text{cte}}{3}\leq y) \quad \otimes$$

$$f_X(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\mathbb{1}\{x>0\}$$

$$F_Y(y) = \frac{y}{(y+1)^2}\mathbb{1}\{0\leq y<3\} + \mathbb{1}\{y>3\}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & 0<y \\ \dfrac{y}{(y+1)^2} & 0<y\leq 3 \\ 1 & y\geq 3 \end{cases}$$

1. Sean X e Y v.a. independientes, con $X \sim Poi(\lambda)$ e $Y \sim Poi(\mu)$. Hallar la distribución de $W = X+Y$

$Rg(X) = Rg(Y) = \mathbb{N}_0$ $\quad x, y \to Dis$

$Rg(W) = \mathbb{N}_0$ $\quad \Rightarrow W \to Dis$

sop

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(X+Y \leq w)$$
$$= \mathbb{P}(Y \leq w - X)$$

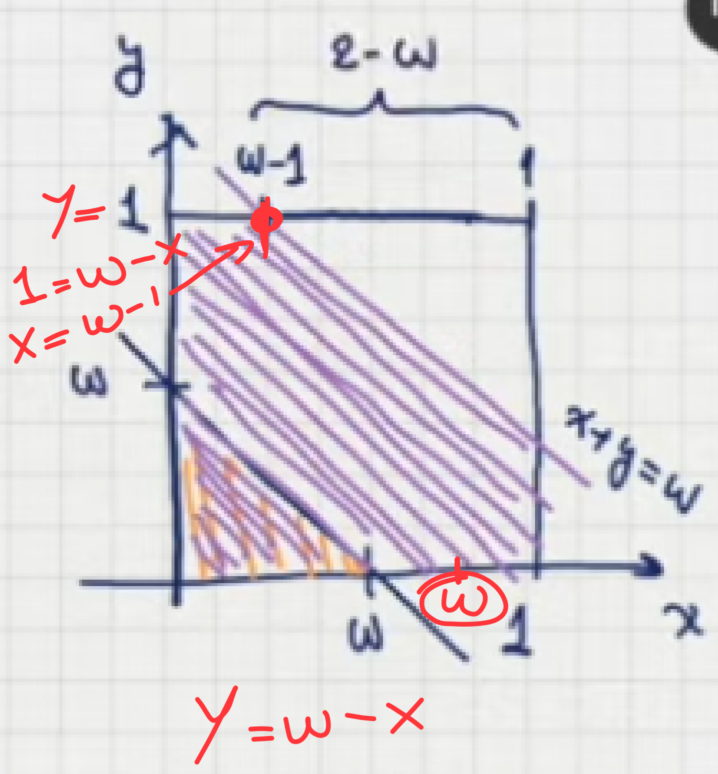
X, Y son ind $\to P_{XY}$

conozco $P_X(x)$, $P_Y(y)$ $\Rightarrow$ $P_W(0) = \mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0)$

$P_W(1) = \mathbb{P}(X+Y=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=0 \cup {X=0 \atop Y=1})$

$$= \mathbb{P}(Y \leq w - X)$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ (*) & \text{si } 0 \leq w < 1 \\ (**) & \text{si } 1 \leq w < 2 \\ 1 & \text{si } w \geq 2 \end{cases}$$



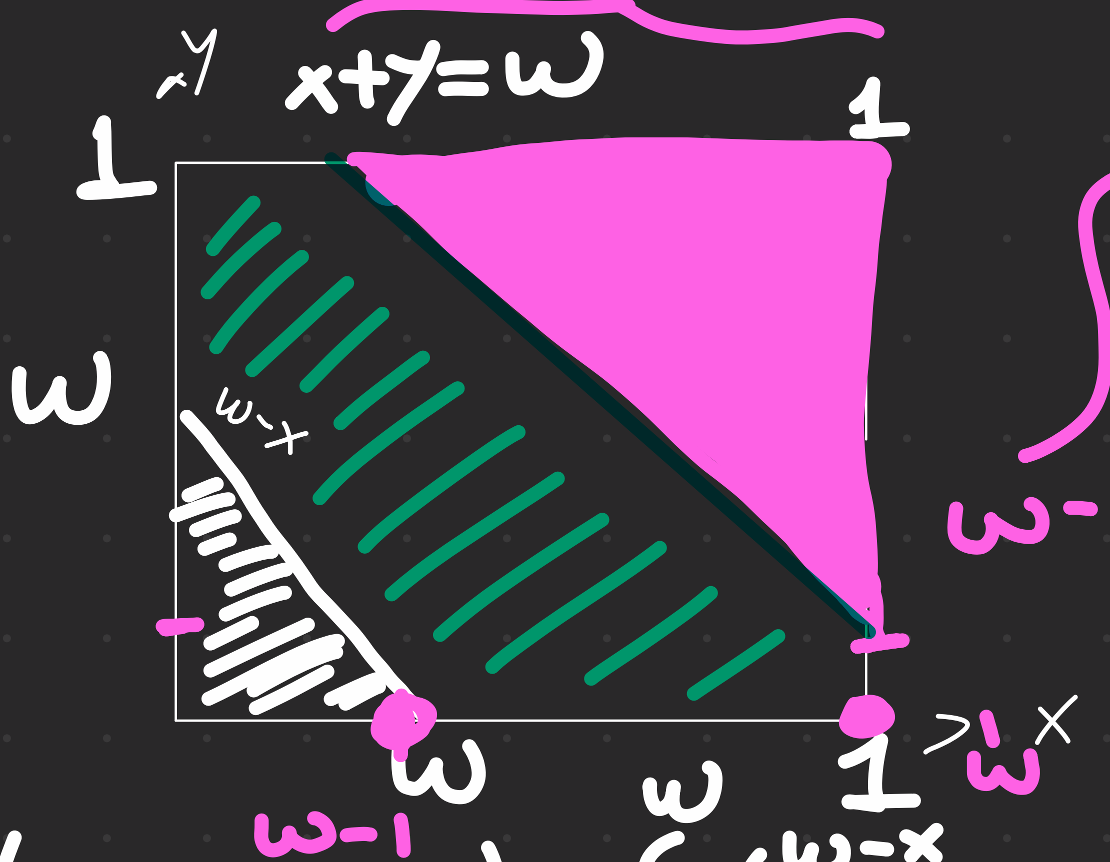
(*) Si $0 \leq w < 1$

$P(W \leq w) = \frac{w^2}{2} \cdot 1.$

(**) si $1 \leq w < 2$

$P(W \leq w) = 1 - P(W > w) = 1 - (2$

más fácil por el complemento



$$\int_{w-1}^{1}\int_{w-x}^{1} dy\,dx$$

$$\int_{w-1}^{1} 1-w+x \, dx$$

- $\mathbb{P}(X+Y=w) = \int_0^{w-1}\int_0^{w-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$

$1-w(1-w+1)+x^2$

- $\rightarrow \mathbb{P}(W \leq w)$, $1 \leq w \leq 2$

$\iint f_{XY}(x,y) \rightarrow$ complemento

$1-\iint f_{XY}(x,y)$

4.19 La cantidad L de langostas que arriban a la mesa de un asado tiene una distribución Poisson de media 2 y la cantidad M de moscas tiene una distribución Poisson de media 8. L y M son independientes.

(**a**) Hallar la función de probabilidad de $L+M$.

(**b**) Hallar la función de probabilidad de $M|(L+M=10)$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(M > 2 | L+M = 10)$.

$$\left.\begin{array}{l} L \sim Poi(2) \\ M \sim Poi(8) \end{array}\right\} \text{ind} \qquad h(L+M)$$

$$L+M = H \longrightarrow L+M \sim Poi(2+8) = Poi(10)$$

$$p_H(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h<0 \\ \dfrac{(10)^h e^{-10}}{h!} & \text{si } h \geq 0 \end{cases}$$

M \ L	0	1	2		10
0	0	1	2		
1	1	2	3		
2	2	3	4		

10 10 10 10 10 10 10 10 $\rightarrow H=10$

(b) $\mathbb{P}(M | H=10) = \dfrac{\mathbb{P}(M=m, H=10)}{\mathbb{P}(H=10)} = \dfrac{\mathbb{P}(M \cap L+M=10)}{\mathbb{P}(L+M=10)}$

$$= \sum_{i=0}^{10} \frac{\mathbb{P}(M = m_i \cap L + m_i = 10)}{\mathbb{P}(M=10)} =$$

$L = 10 - m_i$

4.6 Un voltaje aleatorio V_1 –medido en voltios– con distribución uniforme sobre el intervalo $[180, 220]$ pasa por un limitador no lineal de la forma

$$g(v_1) = \frac{v_1 - 190}{20}\mathbf{1}\{190 \leqslant v_1 \leqslant 210\} + \mathbf{1}\{210 < v_1\}.$$

Hallar la función de distribución del voltaje de salida $V_2 = g(V_1)$.

$$V_1 \sim \mu(180, 220)$$

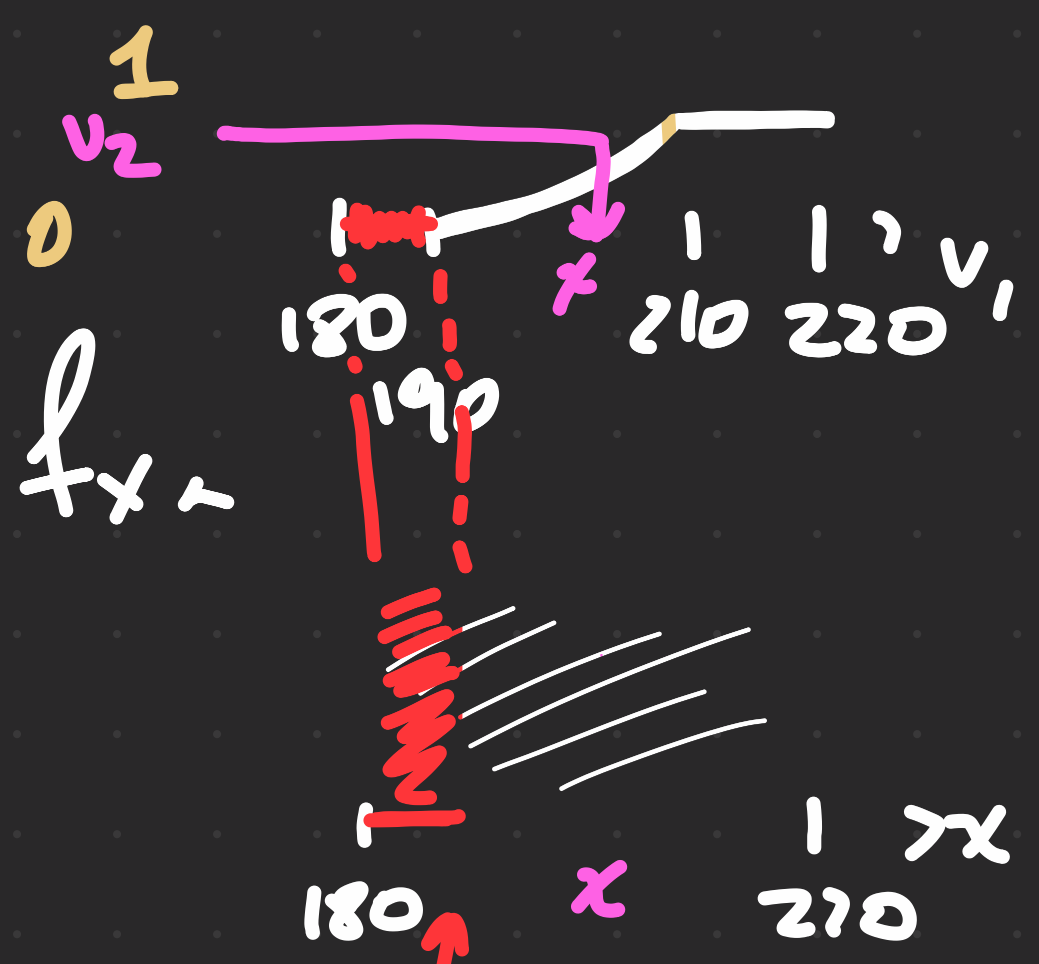
$$V_2 = g(V_1) = \frac{V_1 - 190}{20}\mathbb{1}\{190 \leq V_1 \leq 210\} + \mathbb{1}\{210 < V_1\}$$

$V_2 \nearrow$

$F_{V_2}(v_2)$

① $sop(V_1) = [180, 220]$

$sop(V_2) = [0, 1]$



acumula prob con $V_2 = 0$

$\mathbb{P}(V_2 = 0) = \frac{1}{4}$

$$F_{V_2}(v_2) = \mathbb{P}(V_2 \leq v_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_2 < 0 \\ \circledast & \text{si } 0 < v_2 < 1 \\ 1 & \text{si } v_2 > 1 \end{cases}$$

$$\circledast \quad \mathbb{P}(V_2 \leq v_2) = \mathbb{P}\left(\frac{V_1 - 190}{20} \leq v_2\right)$$

$0 < V_2 < 1$

$$= \mathbb{P}(V_1 \leq (v_2 20 + 190)) = F_X((v_2 20 + 190))$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx \quad \mathbb{1}\{sop(x) \ni x\}$$

$$= \int_{180}^{x} \frac{1}{40}\, dx = \frac{x - 180}{40}$$

$\circledast \rightarrow F_X(v_2 20 + 190) = \frac{v_2 20 + 190 - 180}{40}$

$$= \frac{v_2 20 + 10}{40} = \frac{v_2}{2} + \frac{1}{4}$$

→ me di cuenta
xq → rango e indicadoras
que había acumulación de probabilidad

Vec Aleatorio $\longrightarrow F_{XY}(x,y) \longrightarrow f_X, f_Y$

Func Aleatorias $\longrightarrow Y=g(X) \longrightarrow F_X \to F_Y$

jacobiano

⊛ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

⊛ VA continuas

$F_Y(y)$

① $F_Y = \dfrac{F_X}{|g'(x)|}$ $\quad x=g^{-1}(y)$

evaluo

② ev equivalentes