Guía 10: Test de hipótesis

En nuestro contexto tenemos $X \sim F_\theta$, $\theta = ??$

Queremos decidir si $H_0: \theta \in \Theta_0$ ó $H_1: \theta \in \Theta_1$

donde $\Theta_0 \cup \Theta_1 =$ Espacio paramétrico

Basamos la decisión en una m.a. $X_1, \dots X_n$ de tamaño 'n'

Regla de decisión $\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{\text{"Rechazo } H_0\text{"}\}$

0 indica ir por H_0

1 indica ir por H_1 — se responde adecuadamente

Decido

		no Rech H_0	Rech H_0
Realidad	H_0 es V	OK	error tipo I
	H_0 es F	error tipo II	OK

Como no tenemos certeza de como/cuando nos equivocamos

Medimos riesgos = Prob de equivocarme !!

Los vamos a mirar en la curva de potencia

$$\pi_\delta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\text{Rech } H_0) = \mathbb{P}_\theta(\delta(\underset{\sim}{X}) = 1)$$

en particular, nivel de significación

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\text{Rech } H_0) = \sup_{\theta \in \Theta} \pi(\theta)$$

solo es un valor

El otro:

$$\beta(\theta) = 1 - \pi_\delta(\theta) \quad \text{para } \theta \in \Theta_1$$

$$= \mathbb{P}(\text{'no Rech } H_0\text{'})$$

son varios valores

10.1 Las políticas de fomento del empleo están determinadas por la tasa de desocupación y tienen por objetivo mantenerla por debajo de un nivel que se considera aceptable, por ejemplo un 4 %. Si se quiere diseñar un test acorde con esa situación,

(**a**) ¿cuál debe ser la hipótesis nula y cuál la alternativa?;

(**b**) ¿qué significan los errores de tipo I y los errores de tipo II?;

(**c**) ¿qué valores considera apropiados para el nivel de significación del test?

X Personas desempleadas en n personas $\sim Bin(n, p)$

También: $X = \mathbb{1}\{\text{Desempleado}\} \sim Ber(p)$

Voy a tomar m.a

p = tasa de desocupación = proba de que una persona (elegida al azar) esté desempleada

siempre intervalo cerrado

siempre estricto

Hipótesis?! $H_0: p \geq 0{,}04$ $\quad H_1: p < 0{,}04$

son acerca del parámetro desconocido!!

Error de tipo I: Decir que el desempleo es bajo cuando en realidad es alto

Error de tipo II: Decir que el desempleo es alto cuando en realidad es bajo

Nos vamos un poco del enunciado:

Propuesta: Propongo encuestar 60 personas y, si ninguna está desempleada, diremos que el desempleo es bajo (por debajo de 0,04)

$X_i \sim Ber(p)$

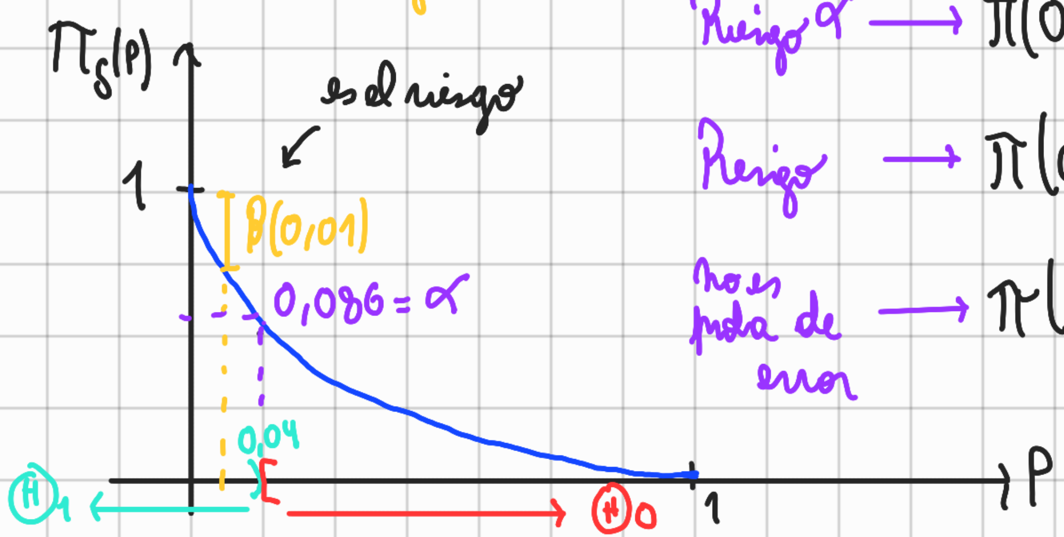
Osea: propongo considerar una m.a. $X_1, \dots, X_n$, $n = 60$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{\text{"ninguna de las 60 está desempleada"}\}$$
$$= \mathbb{1}\{\underbrace{\sum_{i=1}^{60} X_i}_{\sim Bi(60,p)} = 0\}$$

Escribo la función de potencia:

$$\pi_\delta(p) = \mathbb{P}(\text{"Rech } H_0\text{"}) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{60} X_i = 0\right) = (1-p)^{60}$$

Depende de la regla de decisión



Riesgo $\alpha \longrightarrow \pi(0,04) = 0,086$

Riesgo $\longrightarrow \pi(0,1) = 0,0017$

no es prob. de error $\longrightarrow \pi(0,01) = 0,547$

Cuando miro los valores de $\Pi_\delta(p)$ en Θ_0 me da las probas de equivocarme

En Θ_1 los errores me los dice $\Pi_\delta(p)$ en complemento

$$\beta(0{,}01) = 1 - 0{,}547 = 0{,}453$$ ← Esto si es un riesgo

Acá se ve que $\Pi_\delta(p)$ depende de δ (Regla de decisión)

Hasta aquí fijamos una regla de decisión y con esto calculamos los α, β, en general; $\Pi(p)$

Lo mas común es fijar n y α y deducir la regla de decisión

$$\text{Construir un Test} \equiv \text{Dar regla } \delta(\underline{X})$$

Si en una muestra de 60 personas se encontró 1 desempleado ¿Que decisión tomaría? ¿diría que el desempleo es bajo ($<0{,}04$)?

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^{60} x_i = 0\right\} = \mathbb{1}\{1=0\} = 0 \longrightarrow$$

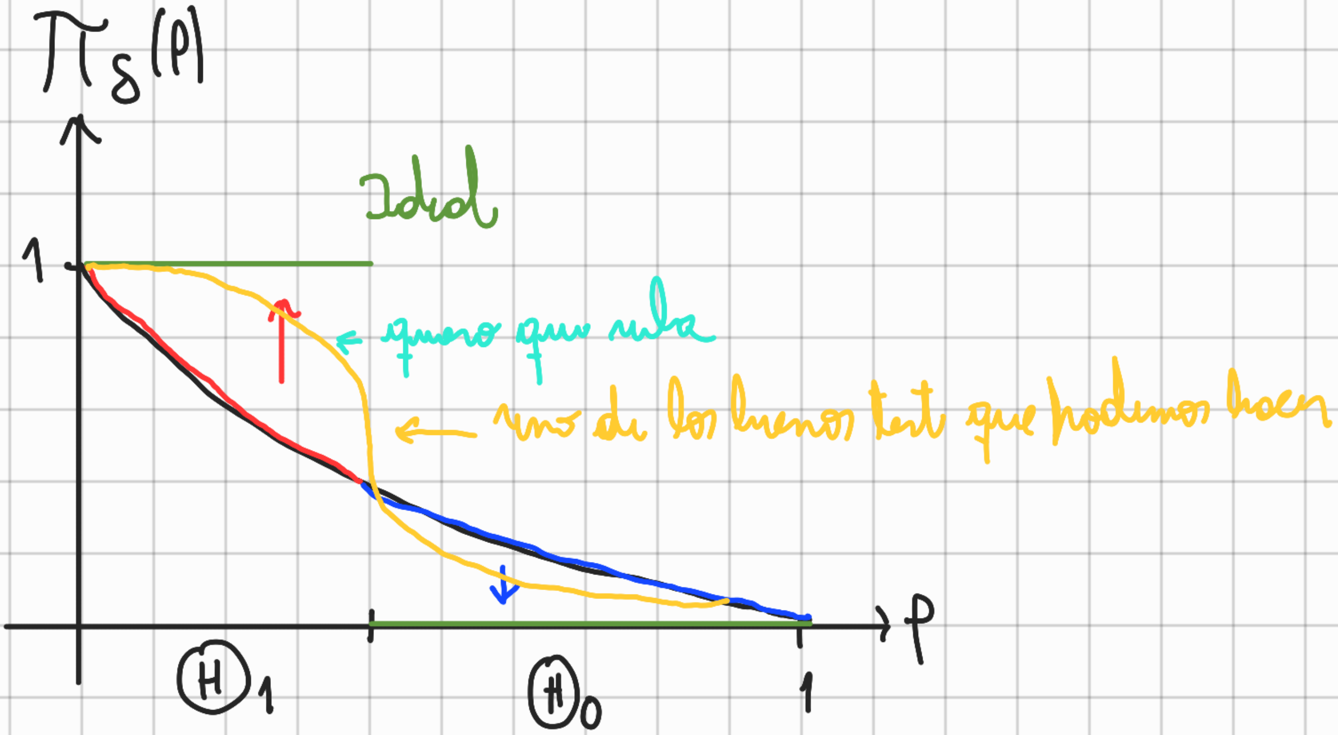
$\longrightarrow$ "Apunta a H_0", diremos que no hay evidencia para rechazar H_0

En general no es simple construir <u>Reglas de decisión</u>!

Métodos → Cociente de verosimilitudes (Video 1)

→ CVM (Video 2)

→ Cociente de máx verosimilitudes



↓ no me estoy equivocando

↓ me estoy equivocando

Test de cociente de Verosimilitudes $X \sim f_\theta$

Cociente: Verosimil

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad y \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

De una muestra, cual es el θ mas creíble de que provenga esa muestra

Idea: tomo m.a. $X_1, \dots, X_n$ y evalúo $f_\theta(\underline{x}) = L(\theta)$

Fijo nivel α

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{f_{\theta_1}(\underline{x})}{f_{\theta_0}(\underline{x})} > K_\alpha \right\}$$

Crece si es mas probable que la muestra provenga de distribución con θ_1 (antes que con θ_0) $\longrightarrow$ Regla indica "ir por H_1"

Rechazo H_0 si es mas verosimil que la muestra provenga de θ_1,

¿que tanto mas? depende de α

<u>Ejemplo</u>: Construir una regla de decisión para probar

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad H_1 : \lambda = \lambda_1 \qquad (\lambda_1 > \lambda_0)$$

si $X \sim Exp(\lambda)$ y se fija un nivel de significación α y tamaño n

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{f_{\lambda_1}(\underline{X})}{f_{\lambda_0}(\underline{X})} > K_\alpha \right\}$$

C. Aux

$$f_\lambda(\underline{x}) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_1^n x_i} \prod_i^n \mathbb{1}\{x_i > 0\}$$

$$= \mathbb{1}\left\{ \frac{\lambda_1^n \, e^{-\lambda_1 \sum_1^n X_i} \prod \{X_i > 0\}}{\lambda_0^n \, e^{-\lambda_1 \sum_1^n x_i} \prod \{X_i > 0\}} > K_\alpha \right\}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n}_{n^o \text{ conocido}} e^{-(\lambda_1-\lambda_0)\sum_1^n X_i} > K_\alpha \iff e^{-(\lambda_1-\lambda_0)\sum_1^n X_i} > K'_\alpha$$

$$\iff -\underbrace{(\lambda_1-\lambda_0)}_{>0} \sum_1^n X_i > K''_\alpha \iff \sum_i^n X_i < K'''_\alpha$$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \sum_1^n X_i < K'''_\alpha \right\}$$

$$\alpha = \sup_{\lambda \in \Theta_0 = \lambda_0} \mathbb{P}_\lambda(\delta(\underline{X}) = 1) = \underbrace{\mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\sum_1^n X_i < K_\alpha''' \right)}_{\text{si } \lambda = \lambda_0 :\ \sum_1^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda_0)}$$

K_α''' es el α-cuantil de esta distribución

$\Longrightarrow$ ya tengo la $\delta(\underline{X})$

Si $n=10$, $\alpha=0{,}05$, $\lambda_0=3$, $\lambda_1=6$

¿Cuál es la regla?

⊛ $\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i < 1{,}8\right\}$ donde 1,8 es el cuantil 0,05 de $\Gamma\left(10, \underset{\lambda_0}{\underset{\parallel}{3}}\right)$

notar que no importa el valor de λ_1, sólo que sea $\lambda_1 > \lambda_0$

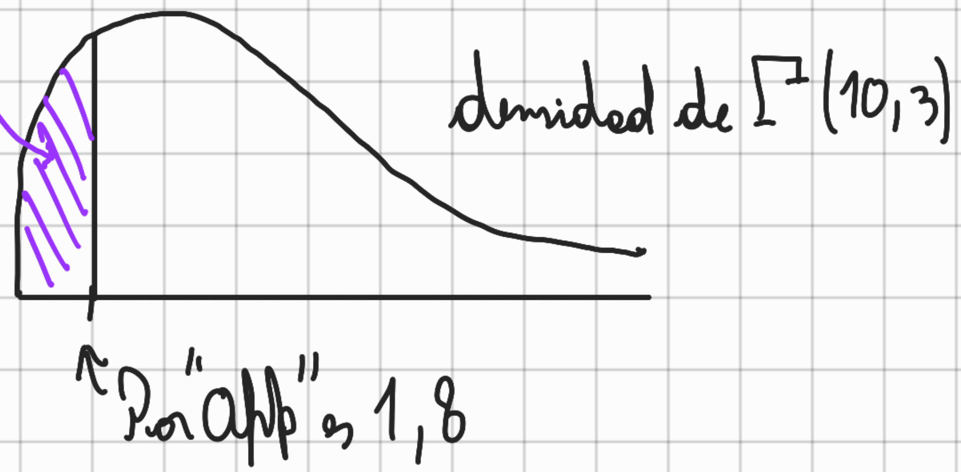
Obs: Esta regla sirve para $H_1: \lambda = \lambda_1$ con $\lambda_1 > 3$ o sea esta regla ⊛ sirve para testear $H_0: \lambda = 3$ $\quad H_1: \lambda > 3$

Si $\alpha = 0,05$

$n = 10$

$\lambda_0 = 3$

$\sum_i X_i \sim \Gamma(10,3)$



10.5 Un productor afirma que la media del voltaje de ruptura de ciertos capacitores es mayor que 200. El voltaje de ruptura de dichos capacitores obedece a una distribución normal de varianza 25. Usando una muestra aleatoria de tamaño 10 diseñar un test de hipótesis de nivel de significación $\alpha = 0.05$ para decidir si la afirmación del productor es verdadera y calcular la probabilidad de decidir erróneamente cuando el verdadero valor de la media del voltaje de ruptura es 210.

X: Voltaje de ruptura de un capacitor

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 25)$, $\mu \in \Theta = \mathbb{R}$

$\underline{X} = [X_1 \; X_2 \; \cdots \; X_n]^T$, $n = 10$, $\alpha = 0{,}05$

$\underbrace{H_0 : \mu \leq \underbrace{200}_{\mu_0}}_{\mu \in \Theta_0}$ $\qquad$ $\underbrace{H_1 : \mu > \underbrace{200}_{\mu_0}}_{\mu \in \Theta_1}$

$\Theta_0 = \mathbb{R}_{\leq 200}$ $\qquad$ $\Theta_1 = \mathbb{R}_{> 200}$

$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

Mediante el cociente de verosimilitud se demuestra que el test óptimo es:

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} > K_\alpha \right\}$$

$$\Pi(\mu) = \mathbb{P}_\mu(\text{Rechazar } H_0) = \mathbb{P}_\mu(\delta(\underline{X} = 1))$$

$$= \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} > K_\alpha \right);\ \mu \in \mathbb{R} = \Theta$$

$$= \mathbb{P}_\mu\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > \sqrt{n\sigma^2}\, K_\alpha + n\mu_0 \right)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 25)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

Estandarizo

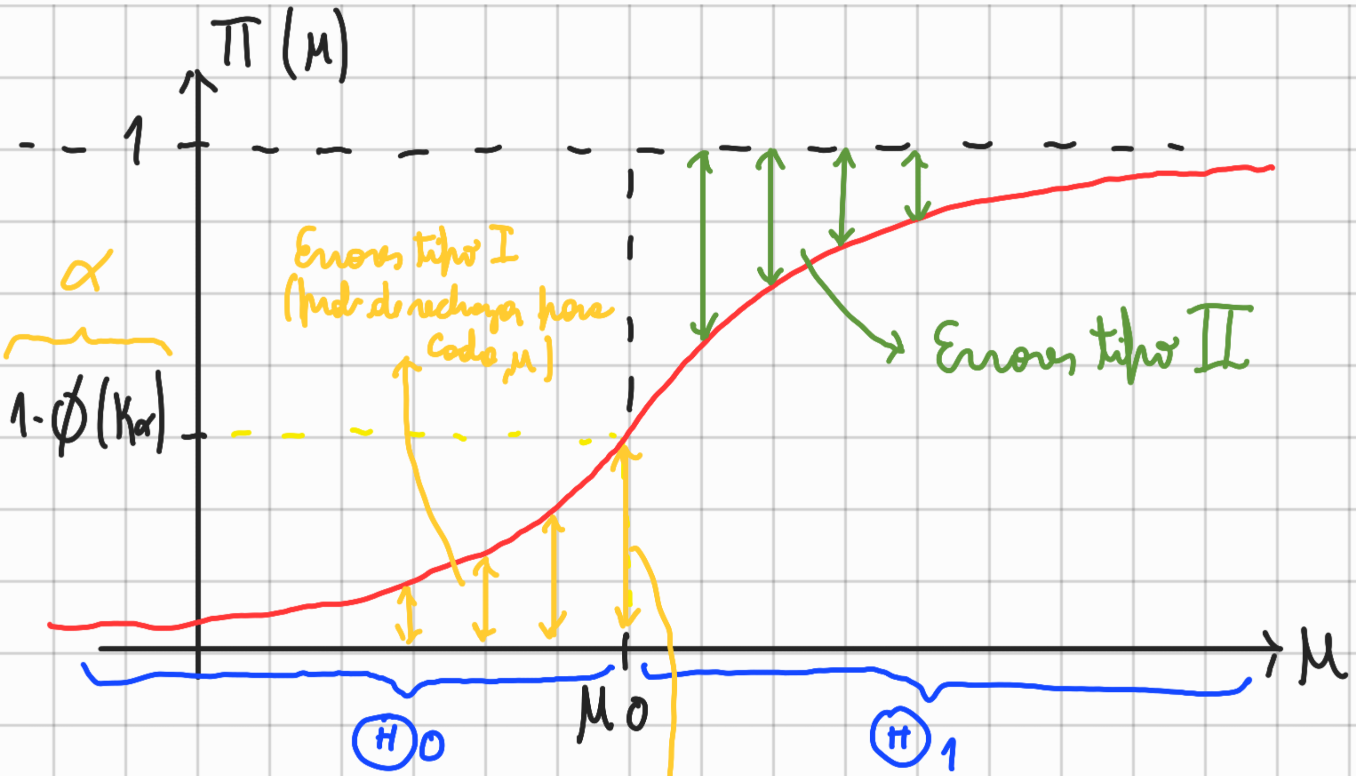
$$= \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} > \frac{\sqrt{n\sigma^2}\, K_\alpha + n\mu_0 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > K_\alpha + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) \right)$$

$$= 1 - \phi\left(K_\alpha + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) \right)$$

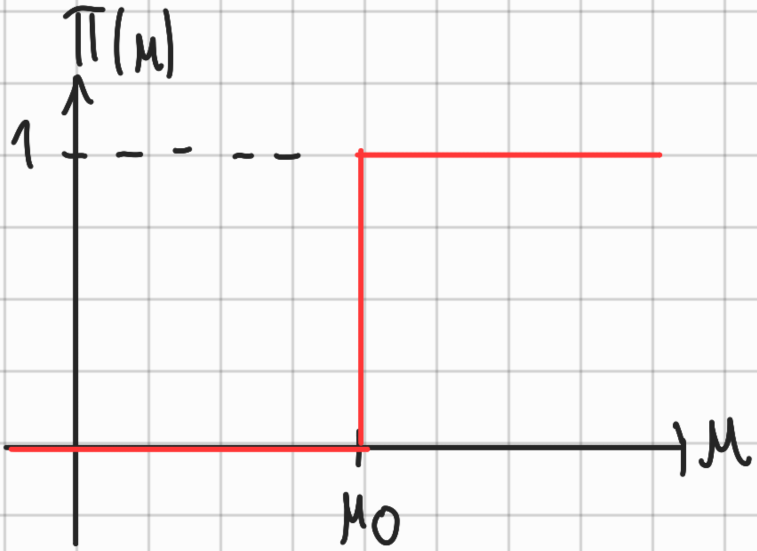
$$\Rightarrow \Pi(\mu) = 1 - \phi\left(K_\alpha + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) \right), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Cuando $\mu \longrightarrow \infty \Longrightarrow \Pi(\mu) \longrightarrow 1$



$$\alpha = \sup_{\mu \in \Theta_0} \mathbb{P}_\mu(\text{Rechazar } H_0) = \sup_{\mu \in \Theta} \mathbb{P}_\mu(\text{Error tipo I})$$

Test ideal:



$$\underbrace{\Pi(\theta)}_{\text{Rechazar}} \begin{cases} \theta \in \underbrace{\Theta_0}_{\text{Ho verdadera}} & \longrightarrow \text{Error Tipo I} \\ \theta \in \Theta_1 & \longrightarrow \text{nada} \end{cases}$$

$$\underbrace{1-\Pi(\theta)}_{\text{Aceptar}} \begin{cases} \theta \in \Theta_0 & \longrightarrow \text{nada} \\ \theta \in \underbrace{\Theta_1}_{\text{Ho es falsa}} & \longrightarrow \text{Error tipo 2} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ Prob de no rechazar Ho cuando es falsa (error de tipo 2)

Volvemos al problema

$$\underbrace{1-\Phi(K_\alpha)}_{\text{la I más larga}} = \alpha \implies \Phi(K_\alpha) = 1-\alpha \implies K_\alpha = z_{1-\alpha}$$

$$= z_{1-0{,}05}$$

$$= z_{0{,}95}$$

$$\approx 1{,}645$$

Entonces:

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} > z_{1-\alpha} \right\}$$ es un test con nivel de significación α

Reemplazando los datos:

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 10.200}{\sqrt{10.25}} > 1,645 \right\}$$

$$= \mathbb{1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i > 1,645 . \sqrt{250} + 2000 \right\}$$

$$= \mathbb{1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i > 2026,01 \right\}$$

$$\mathbb{P}\left(\text{"decidir erróneamente cuando el verdadero valor de } \underbrace{\mu \text{ es } 210}_{} \text{"}\right) = \mathbb{P}_{\mu}(\text{no rechazar } H_0)\Big|_{\mu=210}$$

Error de tipo II

$\mu \in \Theta_1 \Longrightarrow H_0$ es falsa

Entonces decidir erróneamente $\equiv$ no rechazar

$= \underbrace{1 - \Pi(210)}_{\text{Una de las flechas } \updownarrow \text{ verdes}}$

$\Pi(\mu) = 1 - \phi\left(z_{1-\alpha} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu)\right), \mu \in \mathbb{R}$

$\Pi(\mu) = 1 - \phi\left(1{,}645 + \frac{\sqrt{10}}{5}(200-\mu)\right)$

$$= 1-\Pi(210) = 1 - \left[1 - \phi\left(1{,}645 + \frac{\sqrt{10}}{5}(200-210)\right)\right]$$

$$= \phi(-4{,}6796)$$

$$\simeq 0$$

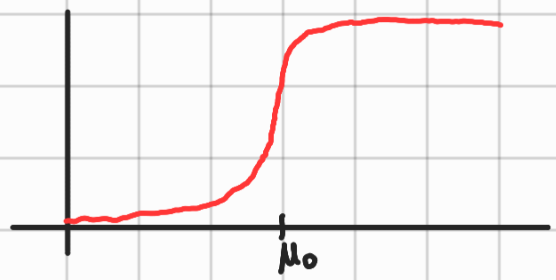
si hubiera sido 203

$1-\Pi(203) \cong \phi(-0{,}2524) \cong 0{,}4 \longleftarrow$ 40% del error

$\downarrow$

Esta mas cerca de $\mu_0 = 200 \longrightarrow$ máximo error de tipo II: $1-\alpha$

si tomara mas muestras



← Cada vez se aplana mas y disminuyen los fallos de los errores