GUÍA 10

HOJA N°

FECHA

(10.4) Se vende 2 variedades de soja:

TIPO 1: $\sim N(6{,}2, (0.45)^2)$

TIPO 2: $\sim N(7, (0.45)^2)$

Vivaldo compro del tipo 2 y quiere asegurarse de que lo sean.

a) Diseñar un test de hipotesis /

$\mathbb{P}$(Vivaldo siga comprando aunque le hayan dado tipo 1) $= 0{,}05$.

→ es una regla de decisión entre 2 hipotesis H_0 y H_1 basada en una muestra $X^{(n)}$

→ rechazo H_0 y H_0 era verdadero = error tipo 1

→ Hipotesis:

$H_0: \mu = 6.2$ (son tipo 1) vs $H_1: \mu = 7$ (son del tipo 2).

$$\mathbb{P}_\theta(\text{error tipo I}) = \alpha = 0{,}05 = \mathbb{P}_{\theta \in H_0}(\delta(X^{(n)}) = 1) \quad (\Delta)$$

→ Propongo $\delta(X^{(n)}) = \mathbb{1}\left\{ \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} > K_\alpha \right\}$ (*)

→ (*) en (Δ): $\mathbb{P}(\bar{X} > K_\alpha) = 0{,}05$

↓ Normalizo para poder calcular por tabla

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 6{,}2}{\frac{0{,}45}{\sqrt{n}}} > \frac{K_\alpha - 6{,}2}{\frac{0{,}45}{\sqrt{n}}} \right) = 0{,}05$$

$$\frac{K_\alpha - 6{,}2}{\frac{0{,}45}{\sqrt{n}}} = z_{0{,}95} \overset{\text{TABLA}}{=} 1{,}645$$

$$K_\alpha = 1{,}645 \cdot \frac{0{,}45}{\sqrt{n}} + 6{,}2$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(X^{(n)}) = \mathbb{1}\left\{ \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} > \frac{1{,}645 \cdot 0{,}45}{\sqrt{n}} + 6{,}2 \right\} \text{ siendo } n \text{ la cant de la muestra}}$$

b) Calcular β

β = $\mathbb{P}$ de cometer el error tipo II : aceptar H_0 cuando es falsa

$\beta = \mathbb{P}_{\theta \in H_1}(\delta(X^{(n)}) = 0)$

Normalizo pero con los datos de H_1 !!

$$\beta = \mathbb{P}(\bar{X} < K_\alpha) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\frac{0,45}{\sqrt{n}}} < \frac{\left(\frac{1,645 \cdot 0,45}{\sqrt{n}} + 6,2\right) - \mu_1}{\frac{0,45}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X} - 7)\sqrt{n}}{0,45} < \frac{\frac{0,74025 + 6,2\sqrt{n} - \overset{7}{\mu_1}\sqrt{n}}{\cancel{\sqrt{n}}}}{\frac{0,45}{\cancel{\sqrt{n}}}}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X} - 7)\sqrt{n}}{0,45} < \frac{0,74025 + \sqrt{n}\,\overset{-0,8}{(6,2 - 7)}}{0,45}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X} - 7)\sqrt{n}}{0,45} < \frac{0,74025 - 0,8\sqrt{n}}{0,45}\right) = \beta}$$

c) ¿Cuántas hectáreas deben cultivarse para que $\beta \leq 0,1$?

$\uparrow n$?

Me fijo en la tabla de Normal $(0,1)$

$\mathbb{P}(Z \leq z) = \Phi(z) = $ ~~0,1~~

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{(\bar{X} - 7)\sqrt{n}}{0,45} < \frac{0,74025 - 0,8\sqrt{n}}{0,45}\right) \leq 0,1$$

$$\frac{0,74025 - 0,8\sqrt{n}}{0,45} \leq z_{0,9} \overset{\text{TABLA}}{=} 1,28155$$

$$-0,8\sqrt{n} \leq \frac{1,28155 \cdot 0,45}{0,74025}$$

HOJA Nº

FECHA

10.8 Aparicio va a trabajar por un camino por el que tarda media $\rightarrow \mu_0 = 40$ min

Juan le sugiere otro camino + rápido

A lo probo 10 veces y tardo:

$$\begin{bmatrix} 41,1 & 42,2 & 40,5 & 39,9 & 40,3 \\ 39,3 & 42,5 & 37,8 & 40,5 & 36,6 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que T: tiempo de viaje $\sim N(\mu, \sigma^2)$

Se puede asegurar con un $\alpha = 0,1$ que el camino de Juan es + rápido?

Hipotesis: $H_0: \mu_0 \geq 40$ vs $H_1: \mu_1 < 40$

Test: $\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} < K_\alpha \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

$\rightarrow$ PIVOTE cuando no tengo la varianza!

Si $\delta(\underline{X}) = 1$: rechazo H_0

$\bar{X}$: promedio $= \dfrac{\sum_{i}^{n} X_i}{n} = 40,07$

$n \uparrow$ las 10 veces que probo.

$S = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = 1,826.$

Propiedad: para distribuciones normales.

$$\boxed{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}}$$

t-Student!

$\Rightarrow \delta(X) = \mathbb{1}\left\{ \dfrac{(\bar{X}-40)\sqrt{10}}{\sqrt{1,826}} < K_{0,1} \right\}$

$\boxed{K_{\underset{\alpha}{0,1}} = t_{n-1, \alpha/2}} = \underbrace{t_{9, 0,05} = -t_{9, 0,95}}_{\text{Propiedad}} = -1,83311$

$$\delta(\underline{X}) = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{10}\,(\bar{X}-40)}{\sqrt{1,826}} < -1,83311 \right\}$$

δ(la prueba de 10 veces) =

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1,826}}(40,7-40) = 1,63812 \overset{?}{<} -1,83311.$$

FALSO!

$\Rightarrow$ no verifica que ese camino sea + rápido.

HOJA N°

FECHA

(10.10) las cajas de leche en polvo de la marca Spiky Milk anuncian un peso neto de un kilo

W: peso neto de las cajas (en Kg) $\sim N(\mu, \sigma^2)$

En una muestra de 75 cajas $= n$. se observó:

$$n.\bar{X} = \sum_{i=1}^{75} \omega_i = 74,4 \qquad \sum_{i=1}^{75} \omega_i^2 = 73,81$$

a) $H_0\ \mu = 1$ vs $H_1\ \mu < 1$ ← VARIANZA DESCONOCIDA
~~MEDIA CONOCIDA~~
⇒ T-Student

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} < t_{74,\alpha} \right\}$$

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum^{75} (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)}{n-1}$$

$$= \frac{\sum^{75} X_i^2 - 2\left(\sum^{75} X_i\right)\bar{X} + \sum_{i=1}^{75} \bar{X}^2}{74} \qquad \sum_{i=1}^{75}\bar{X}^2 = 75.\bar{X}^2$$

$$S^2 = \frac{73,81 - 2.\bar{X}\,74,4 + 75.\bar{X}^2}{74}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{74,4}{75} = 0,992$$

$S = 0,00838$

$$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sqrt{75}(\bar{X}-1)}{0,00838} < t_{74,\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

supongo $\alpha = 0,05$

$-t_{74,0,975}$

$\cong -1,667$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{75}(0,992-1)}{0,00838}}_{-8,26754} \overset{?}{<} -1,667$$

✓ se rechaza H_0!

NOTA

HOJA N°

FECHA

b) $H_0: \sigma = 0,14$ vs $H_1: \sigma < 0,14$: VARIANZA CONOCIDA
MEDIA DESCONOCIDA

$\Downarrow$

CHI CUADRADO.

$\downarrow$

como se distribuyen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
que es una flia de cociente de
verosimilitud monotomo (CVM)
~~en el estadístico~~

$\Downarrow$

el test de hipotesis queda expresado como:

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{T(\underline{X}) < K_\alpha\}$$

⚠ < porque estoy testeando $\sigma = \sigma_0$ vs $\sigma < \sigma_0$

donde $K_\alpha \,/\, \mathbb{P}_{\theta=\theta_0}(T(\underline{X}) < K_\alpha) = \alpha$

Ademas $N(\mu, \sigma^2)$ es una flia exponencial

$$\Rightarrow T(\underline{X}) = \sum (X_i - \bar{X})^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}\left\{\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}}_{=(n-1)S^2} < \frac{K_\alpha}{\sigma^2}\right\}$$

PROP: $\sim \chi^2_{n-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{K_\alpha}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1,\,1-\alpha}}$$

supongo $\alpha = 0,05$

$$\Rightarrow \delta(X) = \mathbb{1}\left\{\frac{\sum^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} < \chi^2_{74,\,0.95}\right\}$$

$\approx$

$$= \mathbb{1}\left\{\frac{\sum X_i^2 - \sum 2 \cdot X_i \bar{X} + \sum \bar{X}^2}{\sigma^2} < 90,531\right\}$$

$$= \mathbb{1}\left\{\frac{73,84 - 2 \cdot 74,4 \cdot \frac{74,4}{75} + \cancel{75} \cdot \left(\frac{74,4^2}{\cancel{75^2}}\right)}{(0,14)^2} < 90,531\right\}$$

$$= \mathbb{1}\{0,265361 < 90,531\}$$

✓ Si, rechazo H_0.

HOJA N°

FECHA

(10.12) X_i: duracion (en horas) de una muestra de 6 lamparas.

61 1905 1076 623 33 167 $n=6$.

$X_i \sim Exp(\lambda)$

$\alpha = 0{,}05$

Refutar la hipotesis de que $\lambda \leq 0{,}0005$ ← hay que determinar si se puede refutar.

Hallar el p-valor.

→ $H_0: \lambda \leq 0{,}0005$ vs $H_1: \lambda > 0{,}0005$

→ como la exponencial es una flia exponencial a 1 parametro

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}\{x > 0\}.$$

$$= e^{-\lambda x} e^{\ln \lambda} \mathbb{1}\{x>0\} = e^{\underset{T(x)}{-x}\,\underset{n(\lambda)}{\lambda} + \underset{\delta(\lambda)}{\ln(\lambda)}} \underbrace{\mathbb{1}\{x \geq 0\}}_{h(x)}.$$

~~y ademas es CVM $X^{(n)} = X$~~

cuyo $T(X) = X$

y ademas es CVM $\Rightarrow T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$

→ un test para el problema se puede hacer:

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{T(\underline{X}) > K_\alpha\}.$$

$$= \mathbb{1}\{\sum X_i > K_\alpha\}.$$

$$= \mathbb{1}\{\underbrace{\lambda \sum X_i}_{\sim \chi^2_{2n}} > \lambda K_\alpha\}.$$

$$\Rightarrow \lambda K_\alpha = \chi^2_{2n, 1-\alpha} = \chi^2_{12; 0{,}95} = 21{,}026.$$

$$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{\underbrace{0{,}0005 \cdot 3865}_{1{,}9325} > 21{,}026\}.$$

NO REFUTA QUE $\lambda \leq 0{,}0005$

¡no se puede!

→ Hallar el P-VALOR

- es como una regla + exigente que el test, va después de la muestra
- es el menor nivel de significación α para rechazar H_0

¿P-VALOR?

HOJA N°

FECHA

10.14) M.A de una población $\sim \mathcal{U}(0,\theta)$: $\theta > 0$

Diseñar $\delta(\underline{X})$ para $H_0 : \theta \leq 1$

con $\alpha = 0{,}05$ / $\pi(\theta = 1{,}1) = 0{,}9$

$\mathcal{U}(0,\theta)$ no es una flia exponencial pero es CVM

y la muestra es CVM en $T(\underline{X}) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i)$

Demostración:

$\rightarrow f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x < \theta\} \Rightarrow f_\theta(\underline{X}^{(n)}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < X_i < \theta\}$

$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{\underbrace{\min(x_i) > 0}_{=1}\}\mathbb{1}\{\max(x_i) < \theta\}$

$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{\underbrace{\max(x_i)}_{T(X)} < \theta\}$

$\rightarrow$ tengo que ver que sea creciente de verosimilitud monotono (CVM) en ese estadístico:

Hipotesis que se tiene que cumplir

(1) $f_{\theta_1}(\underline{X}^{(n)}) \neq f_{\theta_2}(\underline{X}^{(n)})$ verifica porque $\theta_1 < \theta_2$

(2) $\frac{f_{\theta_2}(\underline{X}^{(n)})}{f_{\theta_1}(\underline{X}^{(n)})} = g(T(X^{(n)})) = (*)$

g tiene que ser NO DECRECIENTE (creciente o cte) en el conjunto S ; $S = \{t : t = T(X^{(n)})\}$

$S = (0,\theta_2) \cup (0,\theta_1) = (0,\theta_2)$

$$(*) = \begin{cases} \frac{1/\theta_2^n}{1/\theta_1^n} = \frac{\theta_1^n}{\theta_2^n} & \text{si } t \in (0,\theta_1) \\ \infty & \text{si } t \in [\theta_1, \theta_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow g$ es creciente $\Rightarrow$ puedo usar el test de Neimman Pearson para hipotesis unilaterales. (Δ)

$\rightarrow$ como tengo:

$H_0 : \theta \leq 1$ vs $H_1 : \theta > 1$ $\longrightarrow$

$$\delta(\underline{X}^{(n)}) = \mathbb{1}\left\{ \max(X_i) > K_\alpha \right\}$$

con K_α / $\alpha = \mathbb{P}_{\theta=\theta_0}\big(\underbrace{\max(X_i)}_{T(X)} > K_\alpha\big)$

¿como distribuye eso?

$$\mathbb{P}(\max(X_i) \leq t) \overset{PROP}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t) \underset{X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta)}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{t}{\theta} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$$

$$\Rightarrow F_T(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{0 < t < \theta\} + \mathbb{1}\{t \geq \theta\}.$$

→ pero yo queria $(> K_\alpha)$.

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta=\theta_0}(T > K_\alpha) = 1 - \mathbb{P}(T \leq K_\alpha) = 1 - \left(\frac{K_\alpha}{\theta_0}\right)^n$$

$$\Rightarrow K_\alpha = \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\max\limits_{1 \leq i \leq n}(X_i)}{\underbrace{\theta_0}_{=1}} > \sqrt[n]{\underbrace{1-\alpha}_{0,95}} \right\} \quad \alpha = 0,05.$$

Tengo que usar el dato de la f. de potencia.

$$\pi(\theta) = \mathbb{P}(\text{rechazar } H_0) = \mathbb{P}(\delta(\underline{X}^n) = 1)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\max(X_i)}{1} > \sqrt[n]{0,95}\right) = 0,9$$

$$\mathbb{P}(\max(X_i) > 1,1\sqrt[n]{0,95}) = 0,9$$

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > \underbrace{\sqrt[n]{0,95}}_{t}) = 0,9.$$

$$1 - \left(\frac{t}{\theta}\right)^n = 0,9$$

HOJA N°

FECHA

$$1 - \left(\frac{\cancel{1,1}\sqrt[n]{0,95}}{(1,1)^{n-1}}\right)^{n} = 0,9.$$

$$0,1 = \frac{0,95}{1,1^{n-1}}$$

$$1,1^{n-1} = \frac{0,95}{0,1} = 9,5.$$

$$n = \frac{\ln 9,5}{\ln 1,1}.$$

$$\underline{n = 23,62.} \quad \text{uso } 24.$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(\underline{X}) = 1\!\!1\left\{ \max_{1 \leq i \leq 24} (X_i) > \underset{\simeq \sqrt[24]{0,95}}{0,9978} \right\}}$$

NOTA

HOJA Nº

FECHA

10.18 "Si se cae una tostada al piso, es + probable que caiga del lado del dulce"

a) Se realizaron 1000 experimentos. 540 cayeron del lado del dulce
¿Que conclusion se puede sacar?

TESTS CON BERNOULLI !

$X_1 \dots X_n$ MA con $X_i \sim Ber(p)$ y $n \gg 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$$

es un pivote aprox para p.

$$\underbrace{H_0: p \leq 1/2}_{\text{rechazo la ley de Murphy}} \quad vs \quad H_1: p > 1/2.$$

$$X_i \sim Ber(p) \begin{cases} 1: \text{cayo del lado del dulce} \\ 0 \text{ no " " " " "} \end{cases}$$

$\Rightarrow p = 1/2$

$$\Rightarrow \delta(X) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} > K_\alpha \right\}$$

con $\alpha = 0{,}05$ (supongo). $\Rightarrow K_\alpha = z_{1-\alpha} = z_{0{,}95}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sqrt{1000}\left(\frac{540}{1000} - 1/2\right)}{\sqrt{1/2\,(1-1/2)}}}_{2{,}5298} > 1{,}64485$$

$\Rightarrow$ se cumple: rechazo H_0

$\Rightarrow$ se cumple la ley de Murphy !

... Falsa.

$H_0: \mu \leq 0,6$ vs. $\mu > 0,6$

b) ~~i) la P de que el test confirme la ley~~
Para decretar la ley como V

i) si es Falsa, $\mathbb{P}$ de tomarla como V $\leq 0,01$] error tipo 1
H₀V ↙ Rechazo H₀.

ii) Si es cierta (H₀F) y $\mathbb{P}$ de caer del lado dulce es $>0,6$,
⇒ $\mathbb{P}$ de confirmarla $\geq 0,95$.
↓ RH₀.

¿Cuantas tostadas hay que arrojar para que se cumplan?

i) $\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 \mid \underbrace{H_0 V}_{p \leq 1/2}) = \alpha \leq 0,01$.

$$\mathbb{P}(\delta(X) = 1) \leq 0,01$$

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}}_{\sim N(0,1)} \geq z_{1-0,01}\right)$$

ii) $\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} > z_{0,99}\right) \geq 0,95$

↓ $p > 0,6$.

$$\delta_1(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X} > 10 \\ 0 & \text{si } \bar{X} \leq 10 \end{cases}$$

Tomo $n = 100$

$\alpha = P(\delta(\underline{X}) = 1) = P(\bar{X} > 10)$

$\rightarrow \bar{X} \sim N(10, \frac{(1,5)}{100})$

$1 - \phi\left(\frac{10 - 10}{1,5/10}\right) = 0,5$

¡No sirve, muestro mayor promedio

quiero $\alpha = 0,05$

$\Rightarrow P(\delta_1(\underline{X}) = 1)$

$$\delta_2(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X} > k \\ 0 & \text{si } \bar{X} \leq k \end{cases}$$

$0,05 = \underset{\mu=10}{P}(\bar{X} > k) = P\left(\frac{\bar{X} - 10}{0.15} > k\right) \quad \bar{X} \sim N\left(10, \frac{1,5^2}{100}\right)$

$0,05 = P\left(\frac{\bar{X} - 10}{0,15} > \overset{\to\, \mathcal{z}_{0,95}}{1,645}\right)$

$$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\bar{X} - 10}{0,15} > 1,645 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Cuando tomo la muestra obtengo $\bar{x}$

si $\frac{\bar{x} - 10}{0,15} > 1,645 \Rightarrow$ Rechazo Hoy compro la maquina

$(NS = 0,05)$

↳ nivel de significación.

$= \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$\alpha = 1/3$

(b) ERROR TIPO II → $\theta = 2$ cuando es falsa
si las bolas son de distinto color

$\theta = 2$ es falso

$\boxed{\text{Tomo para } \theta = 0}$

$H_0: \theta = 0$

$P(X = 1 | \theta = 0) = 0$

$\boxed{\theta = 1}$

$H_0: \theta = 1$

$P(X = 1 | \theta = 1) = \text{hipergeométrica}(4, 3, 2)$

población ↑ extracciones
↳ exitos

$= \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = 1/2$ → Proba de aceptar $\theta = 1$ siendo que en realidad es falso

$\boxed{\theta = 3}$

$P(X = 1 | \theta = 3) = \text{hiper}(4, 1, 2)$

$= \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = 1/2$

$\boxed{\theta = 4}$ $P(X = 1 | \theta = 4) = 0$

GUIA Quiero α <<

(10.1) Mantener por debajo de un nivel aceptable, por ejemplo 4%.

(a) H_0: " la tasa de desocupación $\geq 4\%$

H_1: " " " $< 4\%$

(b) ERROR TIPO I → H_0 es rechazada cuando es verdadera

ERROR TIPO II → H_0 es aceptada cuando H_1 es verdadera

(c) Nivel de significación $= P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ es verdadera})$

$= \alpha = 0{,}05$ (prueba)

(10.2) 4 bolas

θ rojas

$4-\theta$ verdes

$H_0: \theta = 2$

$H_1: \theta \neq 2$ Si las 2 bolas son del mismo color se rechaza H_0

(a) Nivel de significación

$\alpha = P(\text{Rechazar } H_0 | \theta = 2)$

X = " cant de bolas verdes en la extracción "

Rechazo si $(X=2 \cup X=0)$

$P(X=0 \cup X=2 | \theta=2) = P(X=0|\theta=2) + P(X=2|\theta=2)$

$X \sim$ Hipergeométrica $H(4, 2, 2)$

población

Máxima proba de cometer error del tipo II → 1 ?

(c) Función potencia π

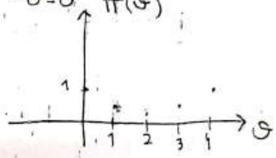
$\pi(0) = P(\delta(x) = 1) = 1 - \beta_{\theta=0} = 1$

$\pi(1) = 1 - \beta_{\theta=1} = 1/2$

$\pi(2) = \alpha = 1/3$

$\pi(3) = 1 - \beta_{\theta=3} = 1/2$

$\pi(4) = 1 - \beta_{\theta=4} = 1$



(d) sin repo

$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 | \theta=2) = P(X=0 \cup X=2 | \theta=2)$

$= P(X=0|\theta=2) + P(X=2|\theta=2)$

$= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}$

$\beta_{\theta=0} = 0$

$\beta_{\theta=1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

$\beta_{\theta=3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

$\beta_{\theta=4} = 0$

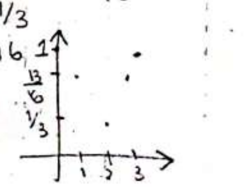
$\pi(0) = 1$

$\pi(1) = 1 - 3/16 = 13/16$

$\pi(2) = \alpha = 1/3$

$\pi(3) = 13/16$

$\pi(4) = 1$



(10.4) 2 variedades de soja

Tipo 1 $\sim N(6{,}2, (0{,}45)^2)$

Tipo 2 $\sim N(7, (0{,}45)^2)$

(A) $H_0: \mu = \mu_0 = 6{,}2 \;\wedge\; H_1 = \mu_1\; \mu_0 = 7$

Quiero $\underset{\mu=\mu_0}{P}(\delta(1)) = 0{,}05$ = "normalizo" en normal

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > k\right) = P\left(\frac{\bar{X}-6{,}2}{\frac{0{,}45}{\sqrt{n}}} > 0{,}95\right)$$

$$P\left(\frac{\bar{X}-6{,}2}{\frac{0{,}45}{\sqrt{n}}} > 1{,}6448\right)$$

test

Para ver si ... H_0 ... variedad ... Tipo (1) ⇒ ... es ...

(b) $\beta = P(\text{ERROR TIPO II}) = P(\text{aceptar } H_0 \text{ cuando es falsa})$

$= P(\delta(\underline{X}) = \emptyset) = \frac{\bar{X}-6{,}2}{\sqrt{n}} < 1{,}6448$

Quiero la prueba de rechazar H_1

$$= 1 - P(H_0) = P\left(\frac{\bar{X}-6{,}2}{\frac{0{,}45}{\sqrt{n}}} > 1{,}6448\right)$$

$$= P\left(\bar{X} > \frac{1{,}6448}{\sqrt{n}} \cdot 0{,}45 + 6{,}2\right)$$

$\bar{X} \sim N(7, (0{,}45)^2)$ ahora depende de los datos de H_1

Normalizo

$$P\left(\frac{\bar{X}-7}{\frac{0{,}45}{\sqrt{n}}} < \frac{\left(\frac{1{,}6448 \cdot 0{,}45}{\sqrt{n}} + 6{,}2\right) - 7}{\frac{0{,}45}{\sqrt{n}}}\right)$$

(10.5) 53 veces

Promedio 8616 s. grados

mediciones $\sim N(\mu, (0{,}75)^2)$

Quiero testear

$H_0: \mu_0 = 8{,}729 \qquad H_1: \mu_1 \neq 8{,}789$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left(\frac{\sum x_i - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \mathbb{1}\left(\frac{\sum x_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \mathbb{1}\left(\frac{53.8616 - 53.8789}{\sqrt{53}\cdot 0{,}75} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \qquad P(\delta(x) = 1 \ldots$$

$$\mathbb{1}\left(\frac{53.8{,}616 - 53.87{,}89}{\sqrt{53}\cdot 0{,}75} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\to \mathbb{1}\left(\frac{53.8{,}616 - 53.8{,}789}{\sqrt{53}\cdot 0{,}75} > 1{,}96\right) +$$

$n \sum x_i = 456{,}6\ldots$

$$\mathbb{1}\left(\frac{53.8{,}616 - 53.8{,}789}{\sqrt{53}\cdot 0{,}75} < -1{,}96\right)$$

$$\frac{53.8{,}616 - 53.8{,}789}{\sqrt{53}\cdot 0{,}75} = -1{,}67$$

-1,96 1,96

cae en el intervalo ⇒ No puedo rechazar H_0

Para no rechazar tiene que caer en el intervalo.

$$\frac{\bar{X}-7}{\frac{0,45}{\sqrt{n}}} < 1,6448 + \frac{\sqrt{n}(6,2-7)}{0,45}$$

$$\beta = \phi\left(1,6448 + \frac{\sqrt{n}}{0,45}(6,2-7)\right)$$

(c) $\beta \le 0,1$

$$\phi\left(1,6448 + \frac{\sqrt{n}}{0,45}(6,2-7)\right) \le 0,1$$

$$z_{0,1} = -z_{0,9} \Rightarrow 1,6448 + \frac{\sqrt{n}}{0,45}(6,2-7) \le -1,2816$$

$$1,6448 - \frac{\sqrt{n}}{0,45}\cdot 0,8 \le -1,2816$$

$$n \ge \left(\frac{(+1,2816+1,6448)\cdot 0,45}{0,8}\right)^2$$

$$n \ge 2,706 \approx \underline{3}$$

(d) P-valor del test → Menor valor de significación para el cual rechazo Ho

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{\sum x_i}{n} = 6,907 \qquad \bar{X} = \frac{1,644\cdot 0,45}{\sqrt{10}} + 6,2$$

$$\frac{-6,907 + (6,434)}{\sqrt{10}\cdot 0,45} = -0,332$$

$$P(\bar{X} > -0,332) = 1 - \phi(-0,332) =$$

$$= 1 - 1 + \phi(0,332) \approx 0,6293$$

DUDA
Esto bien??

(10.6) media > 200 $\qquad \sigma^2 = 25$, $\sigma = 5$

Voltaje $\sim N(\mu, 5)$

$n = 10$

$0,05$

$H_0: \mu \le 200$ vs $H_1: \mu > 200$

$P(\delta(X) = 1)$

$$P\left(\frac{n.\sum x_i - n.\mu}{\sqrt{n}.\sigma} > K\right)$$

como tengo una desigualdad me importa todo un lado y el otro

$$P\left(\frac{n\sum x_i - 2000}{\sqrt{10}.5} > \underbrace{z_{1-\alpha}}_{1,64}\right) \rightarrow \underline{\text{TEST}}$$

$$P\left(n\sum x_i > 1,64.\sqrt{10}.5 + 2000\right)$$

$$P\left(n\sum x_i > 2025,9\right)$$

$P(H_0 \text{ verdadero} \mid \mu = 210) = P(\text{ERROR TIPO II})$

$= \beta(210) = 1 - \pi(210)$

$$\pi(\mu) = \pi(\text{Rechazar } h_0) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{5}{\sqrt{n}}} > \frac{\frac{1,64.5}{\sqrt{n}} + 200 - \mu}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\beta(210) = \phi(-4,67) \approx 0$$

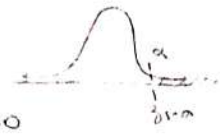
$$\underbrace{1 - \phi(4,67)}_{\pi}$$

(10.7) Varillas $\sim N(\mu, 5)$

$n = 36$

promedio $= 51,74$

$\alpha = 0,05$



$H_0: \mu_0 = 50$ vs $H_1: \mu_1 > 50$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\sum x_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} > z_{1-\alpha} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - n\mu}{\sqrt{n}.\sigma} > z_{1-\alpha}\right) = 0,05$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - 36.50}{\sqrt{36}.5} > z_{0,95}\right) = 0,05$$

$$P\left(\bar{X} > 1,645.\sqrt{36}.5 + 36.50\right)$$

$$P\left(\bar{X} > 1849,35\right) = 0,05$$

$\bar{X} = \sum x_i . n = 36.51,74 = 1862,64$

$1862,64 > 1849,35$ ¡sí! $\Rightarrow$ Rechazo Ho

P-valor

posta

$$P\left(\frac{\bar{X} - n\mu}{\sqrt{n}.\sigma} > \frac{1862,64 - 36.50}{6.5}\right)$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} > 2,088\right) = 1 - \Phi(2,088) \approx 0,022$$

$$\mathbb{1}\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{10}(40,07 - 40)}{1,326}}_{0,121} < -1,3303\right\}$$

0,121 no cumple $\Rightarrow$ No puedo rechazar Ho

No puedo asegurar que el camino de Juan es más rápido

que no sea eficaz

(10.9) $\sigma^2 < 25$

$n = 10$ $\quad H_0: \sigma \leq 25$

$\alpha = 0,05$ $\quad H_1: \sigma > 25$

$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$

Pivote para $\sigma^2 \rightarrow \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} > k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$k_\alpha = \chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{9;0,05} \rightarrow \boxed{3,325}$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} > 3,325\right\}$$

$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum (x_i - 0,996) = 11115$

$\frac{11115}{(25)^2} = 17,784 > 3,325$ sí

$\Rightarrow$ Puedo rechazar Ho y el NS es eficaz (0,05)

(10.8) $\mu = 40$

$n = 10$

"Tiempo de viaje" $\sim N(\mu, \sigma^2)$ 10% → 0,10

$H_0: \mu_0 \geq 40$ vs $H_1: \mu_1 < 40$

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} < k_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Si $\delta(\underline{x}) = 1$ rechazo H_0

Pivote cuando no tengo la varianza

$$\delta(\underline{x}) = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} < k_\alpha \right\} = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} < k_\alpha \right\}$$

$$= 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} < k_\alpha \right\} = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} < k_\alpha \right\}$$

$$k_{0,1} = \overset{\text{t-student}}{t_{n-1;0,1}} = t_{9;0,1} = -t_{9;1-0,1} = -t_{9;0,9}$$

k_α

$= -1,38303$

$$\rightarrow \delta(\underline{x}) = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} < -1,38303 \right\}$$

es ⊖ pq que en cotabla tengo 0,9 y yo tengo 0,1

$\bar{X} = 40,07$

$$s^2 = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$\boxed{S = 1,826}$

$$\rightarrow 1\!\!1\left\{ \frac{(\bar{X}-40)\sqrt{10}}{1,826} < -1,38303 \right\}$$

(10.10) W: Peso lata ~ V.A. $n = 75$

$\sum w_i = 74,4 \wedge \sum w_i^2 = 73,81$

(a) $H_0: \mu = 1$ vs $H_1: \mu < 1$ media conocida varianza desconocida

Supongo $\alpha = 0,05$

$$\delta(\underline{x}) = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} < t_{74} \right\}$$

$$t_{74,\alpha} = t_{74,0,05} = -t_{74,0,95} = -1,667$$

como no tengo σ uso t

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n-1}$$

$$= \frac{\sum x_i^2}{n-1} - \frac{2\sum x_i \bar{x}}{n-1} + \frac{\sum \bar{x}^2}{n-1}$$

$$= \frac{1}{74}\left(\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + \sum \bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{74}\left(73,81 - 2.\bar{X}.74,4 + 75.\bar{X}^2\right)$$

Se que $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{74,4}{75} = 0,992$

$$s^2 = \frac{1}{74}\left(73,81 - 2.0,992.74,4 + 75.(0,992)^2\right)$$

$\boxed{S = 0,00838}$

$$\delta(\underline{x}) = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{75}\,(0,992 - 1)}{0,00838} < -1,667 \right\}$$

$-8{,}26 < -1{,}67$ sí

Rechazo H_0.

(b) $H_0: \sigma = 0{,}14$ vs $H_1: \sigma < 0{,}14$

PIVOTE

varianza con media desconocida (no)

$\hookrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 \sim \chi^2_{n-1}$

$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} < \chi^2_{24;0{,}95} \right\}$

El que cumple con H_1

$\chi^2_{24;0{,}05} \approx 51{,}739$

$\mathbb{1}\left\{ \underbrace{\frac{0{,}000027}{(0{,}14)^2}}_{0{,}00137} < 51{,}739 \right\}$ sí

$\Rightarrow$ Rechazo H_0

(6.11) ? $f_0(y) = \frac{f_0(x = 50e^{-y})}{\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|} = \frac{1/50}{1/50} e^{-y} \mathbb{1}\{0 < e^{-y} 50 < 50\}$ $y > 0$ $\hookrightarrow y_0 \sim \exp(1)$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{x}\Big|_y = -1/50e^{-y}$

$f_1(y) = \frac{f_1(x = 50e^{-y})}{1/50} e^{-y} = \frac{50 e^{-y}}{1250} 50 e^{-y} \mathbb{1}\{y > 0\}$ $\hookrightarrow \exp(2)$

$H_0: \lambda = 1$ $H_1: \lambda = 2$

(10.13) $n = 10$

$\alpha = 0{,}05$

$\mu \leq 55$ $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{55}$

$H_0: \mu \leq 55$ vs $H_1: \mu > 55$

$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \lambda \sum x_i > \chi^2_{2n, 1-\alpha} \right\}$ o

$\chi^2_{2n, 1-\alpha} = \chi^2_{20; 0{,}95} = 31{,}410$

$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\{ 2\lambda n \bar{x} > 31{,}410 \}$

Como todos superaron los 50 m. de duración, tomo $\bar{x} \approx 50$

$\delta(\underline{x})\ \mathbb{1}\{ \underbrace{2 \cdot \tfrac{1}{55} \cdot 10 \cdot 50}_{18{,}18} > 31{,}410 \}$

No es mayor, $\Rightarrow$ no puedo rechazar H_0

(10.14) $\sim \mathcal{U}(0, \theta)$, $\theta > 0$ $\alpha = 0{,}05$

$H_0: \theta \leq 1$ vs $H_1: \theta > 1$

$\pi(1{,}1) = 0{,}9$

PIVOTE $\rightarrow \frac{X_{(n)}}{\theta} = \frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{\theta}$

$f(x) = n x^{n-1} \mathbb{1}\{0 \leq x \leq 1\}$

No tengo ninguna tabla para socorrerlos datos $\Rightarrow$

Necesito F grande $\Rightarrow$ integro la f

$\int_0^x n x^{n-1}\, dx = x^n \Big|_0^x = x^n$

(10.12) $n = 6$ ▸ Preg no está bien

X = "Duración" $\sim \exp(\lambda)$

$\alpha = 0{,}05$

$H_0: \lambda \leq 0{,}0005$ vs $H_1: \lambda > 0{,}0005$

$f_\lambda(x) = \lambda . e^{-\lambda x}$

Pivote $\rightarrow \lambda \sum x_i \sim \chi^2_{2n}$

$\delta(\underline{x}) = 1\!\!1 \{ \lambda \sum x_i > \chi^2_{2n} \}$

$\chi^2_{2n, 1-\alpha} = \chi^2_{12; 0,95} = 12{,}095$

$\delta(\underline{x}) = 1\!\!1 \{ \lambda \sum x_i > 12{,}095 \}$

$\lambda = 0{,}0005$

$\lambda \sum x_i = 0{,}0005 . 3865 = \boxed{1{,}9325}$

$\delta(\underline{x}) = 1\!\!1 \{ 1{,}9325 > 12{,}095 \}$

no

No puedo rechazar H_0

DUDA

$\alpha = P(\text{ERROR I}) = \delta(\underline{x}) = 1 = 1\!\!1 \left\{ \frac{\max(x_i)}{\vartheta} > k_{1-\alpha} \right\}$

$P\left(\frac{\max(x_i)}{\vartheta} > k_{1-\alpha} \right) = \underbrace{0{,}05}_{\alpha}$

$1 - F_x(k_{1-\alpha}) = 0{,}05$

$F_x(k_{0,95}) = 0{,}95$

$k_{0,95} = F^{-1}_x(0{,}95)$

$F_x(x) = x^n = u$

$x = \sqrt[n]{u} \rightarrow k_{0,95} = \sqrt[n]{0{,}95}$

↳ inversa de la $\underline{F}$

$\delta(\underline{x}) = 1\!\!1 \left\{ \frac{\max(x_i)}{1} > \sqrt[n]{0{,}95} \right\}$

Quiero que $\pi(1{,}1) = 0{,}9$

$\pi(1{,}1) = P(\delta(\underline{x}) = 1) = 0{,}9$

$= P(\max(x_i) > \sqrt[n]{0{,}95}) = 0{,}9$

$= P_\vartheta\left(\frac{\max(x_i)}{1{,}1} > \frac{\sqrt[n]{0{,}95}}{1{,}1} \right) = 1 - \left(\frac{\sqrt[n]{0{,}95}}{1{,}1} \right)^n \leq 0{,}9$

$= 1 - \frac{0{,}95}{1{,}1^n} \leq 0{,}9$

$\frac{0{,}95}{1{,}1^n} = 0{,}1$

$1{,}1^n = 9{,}5 \qquad n = \frac{\ln 9{,}5}{\ln 1{,}1}$

DUDA

(10.15) $X \sim U(15, 15+\theta)$ $E[X] = \frac{30+\theta}{2}$

$H_0: \frac{30+\theta}{2} \geq 20$ vs $H_1: \frac{30+\theta}{2} < 20$

$\delta(X) = 1\!\!1\left\{ \frac{\max(x_i)}{15+\theta} < \sqrt[n]{0{,}01} \right\}$

$\boxed{n=4}$

$\frac{25}{25}$ 0,316

Como hay un "corrimiento"

$\frac{30+\theta}{2} \geq 20$

$\frac{15+\theta+15}{2} \geq 20$

$15+\theta \geq 40-15$

$\boxed{15+\theta \geq 25}$

$1 < 0{,}316$ NO

No puedo rechazar Ho

(10.16) ?

(10.17) $n=100$

$X = \begin{cases} 1 & \text{voto azul} \\ 0 & \text{voto amarillo} \end{cases}$

$\Rightarrow X_1 \sim Be(p)$

$H_0: p \leq 0{,}35$ vs $H_1: p > 0{,}35$ $N(0,1)$

$\delta(X) = 1 = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} > k' \right\} = 0{,}05$

de la normal

$\boxed{1\!\!1\left\{ \frac{10\bar{x} - 0{,}35.10}{\sqrt{0{,}35-(0{,}35)^2}} > z_{1-\alpha} \right\} \to 1{,}64}$

(i) $\delta(X) = 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} > k_{1-\alpha} \right\}$

$= 1\!\!1\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-1/2)}{1/2} > z_{0{,}99} = 2{,}32 \right\}$

(ii) Una vez que la ley es cierta, ... confirmarlo es 0,45

$\Rightarrow P\left(\frac{\sum x_i - n\,1/2}{\sqrt{n}.1/2} > 2{,}32 \right) = 0{,}45$

Como tengo un nuevo ... que la ley es cierta debo ... de nuevo

$\left(\sum x_i > 2{,}32.\sqrt{n}.1/2 + n.1/2 \right)$

multiplico y divido por $\sqrt{n}$ y

$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} \Rightarrow P\left(\frac{X_i - 0{,}6.n}{0{,}48.\sqrt{n}} > \frac{2{,}32\sqrt{n}.1/2 + n.1/2 - 0{,}6n}{0{,}48.\sqrt{n}} \right)$ $N(0,1)$

$P\left(\frac{\sum X_i - 0{,}6n}{0{,}48\sqrt{n}} > \frac{2{,}32\sqrt{n}.1/2 + 1/2n + 0{,}6n}{0{,}48\sqrt{n}} \right)$

$z_{1-\alpha} = z_{0{,}05} = -1{,}64$

$\Rightarrow \frac{2{,}32\sqrt{n}.1/2 - 0{,}1.n}{0{,}48\sqrt{n}} = -1{,}64$

(10.18) → DUDA → Examen?

$$X = \begin{cases} 1 & \text{cayó del lado de la bala} \\ 0 & \text{no cayó " " "} \end{cases}$$

$X \sim Be(1/2)$

$H_0: p = 1/2$ vs $H_1: p > 1/2$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} > \underbrace{k}_{z_{1-\alpha}} \right\} - 0{,}05 \text{ supongo}$$

(a)
$$\mathbb{1}\left\{ \underbrace{\frac{\sqrt{1000}.(\bar{x} - 1/2)}{\sqrt{1/2 - (1/2)^2}}}_{2{,}52} > 1{,}64 \right\}$$

$\bar{x} = 540/1000$, $\sqrt{1/2 - (1/2)^2} = 1/2$

es mayor ⇒ Rechazo H_0

⇒ Es verdad la ley

(b) P (rechazar Ho | Ho es verdadero) = $\alpha < 0{,}01$

Si la ley es falsa (Ho es verdadero), es probable que confirme que es falsa (Rechazo Ho)

(i) ⇒ $\alpha = P(\delta(\underline{X})=1) = P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} > z_{1-\alpha}\right) < 0{,}01$
$p \leq 1/2$

poco rechazar
uso el valor de p de H_0

(ii) P (rechazar Ho | Ho es falso) = $P(\delta(x)=1) \geq 0{,}95$
$p > 0{,}6$

Donde va cada p y porque?

c

$2{,}32\sqrt{n}.1/2 - 0{,}1\sqrt{n}\,n = -1{,}64\sqrt{n}$
$0{,}413$

$\frac{29}{25}\sqrt{n} - 0{,}1\sqrt{n}.n = -0{,}7.\sqrt{n}$

$1{,}94\sqrt{n} = 0{,}1\sqrt{n}.n$

$19{,}4 \cong n$

(10.19) $n = 100$

10 defectuosos → $\sum x_i = 10$

$\alpha = 0{,}05$

$$X: \begin{cases} 1 & \text{artículo defectuoso} \\ 0 & \text{no " "} \end{cases}$$

$X \sim Be(p)$

$H_0: p = 0{,}05$ vs $H_1: p \neq 0{,}5$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} < k_{\frac{\alpha}{2}} \right\} + \mathbb{1}\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} > 1-\frac{\alpha}{2} \right\}$$

$k_{\frac{\alpha}{2}} = -1{,}96 \wedge k_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} = \frac{\sum x_i - np}{\sqrt{n}(\sqrt{p(1-p)})} = \frac{10 - 0{,}05.100}{\sqrt{100}.(\sqrt{0{,}05(1-0{,}05)})} = 2{,}30$$

-1,96 1,96 2,30

Cae fuera de intervalo ⇒ Rechazo Ho.

(10.21) X: fuente que emite partículas / s

$X \sim Poi(\lambda)$ $\quad n = 3.60.60 = 10800$

$\alpha = 0{,}01$ $\quad \sum x_i = 5029$

$H_0: \lambda = 0{,}5$ vs. $H_1: \lambda \neq 0{,}5$

Media conocida y varianza $\quad \bar{X} = \frac{5029}{10800} = 0{,}46$

PIVOTE $\rightarrow \dfrac{(\bar{X}-\lambda)\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0,1)$

- $\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}} < k_{\frac{\alpha}{2}}\right\} + \mathbb{1}\left\{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}} > k_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

- $\dfrac{(\bar{X}-\lambda)\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}} = \underline{-5{,}05}$

- $k_\alpha = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{1}{200}} = z_{0{,}995}$ $\quad$ por ser bilateral

$\Rightarrow z_{0{,}995} = 2{,}57 \quad \wedge \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = -2{,}57$

- Rechazo $\quad$ No Rechazo

$-5{,}05 \quad -2{,}57 \quad 0 \quad 2{,}57$

$\Rightarrow$ Rechazo $\underline{H_0}$

(10.22) $n = 80$ $\quad \alpha = 0{,}05$

Cont. de accidentes	0	1	2	3	4
Frecuencia	28	25	20	5	2

$H_0: \mu \geq 2 \;\wedge\; H_1: \mu < 2$ $\qquad$ X: "Cont de accidentes por semana" $\sim Poi(\lambda)$

$H_0: \lambda \geq 2 \;\wedge\; H_1: \lambda < 2$

MEDIA CONOCIDA, VARIANZA también.

PIVOTE $\rightarrow \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \rightarrow \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\mu}}$

$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}} < z_\alpha\right\}$

$\bar{X} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{0.28 + 1.25 + 2.20 + 3.5 + 4.2}{80}$

$\Rightarrow \boxed{\bar{X} = 1.1}$

$z_\alpha = z_{0{,}05} = -z_{0{,}95} = \underline{-1{,}64}$

Para la muestra

$\dfrac{(1{,}1-2)\sqrt{80}}{\sqrt{2}} = -5{,}69 < -1{,}64$ $\quad$ $\underline{\text{sí}}$

$\Rightarrow$ Rechazo Ho

No se puede afirmar que $\underline{\lambda \geq 2}$

10.20 n bolas negras
Eusebio → $n \geq 24$
10 bolas rojas
Despues de extraer → 28 rojos
$\alpha = 0,1$
X_i: "La bola i es negra" $\sim Be(p)$
Por el momento tengo $24 + 10 = 34$ (negros, rojos)

$H_0 : p \geq \frac{24}{34}$ vs $H_1 : p < \frac{24}{34}$

PIVOTE PARA BERNOULLI → $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$

. De los 100 extracciones = n, tengo 28 rojos y 72 negros

$\Rightarrow \bar{X} = \frac{72}{100} = 0,72$

$\delta(X) = 1\!\!1 \left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} < z_\alpha \right\}$ mirar notas de Grynberg

$\underbrace{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}}_{0,45} = 0,31$ ^ $z_\alpha = z_{0,1} = -z_{0,9} = -1,29$

$\delta(X) = \{ 0,31 < -1,29 \}$ no

⇒ No puedo rechazar Ho

10.23 X, Y V.A $\sim N(\mu, \sigma^2)$ desconocido pero iguales

$\bar{x} = 27,8$
$s^2_x = 3,9$
$\bar{y} = 26,5$
$s^2_y = 4,2$
$n = n_x = 30$
$m = m_y = 27$

$\alpha = 0,05$

PIVOTE → $\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{S^2_p}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}$

$\mu_x - \mu_y \leq 0$ $0 \to \boxed{\Delta = 0}$

$H_0 : \mu_y \geq \mu_x$ vs $H_1 : \mu_y < \mu_x$

Quiero refutar que con el superfluidante la resistencia del hormigon aumenta.

$\mu_x - \mu_y > 0$

$\Delta = \mu_x - \mu_y$

$\delta(X) = 1\!\!1 \left\{ \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{S^2_p}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} > k_{1-\alpha} \right\}$ siempre en función del Δ

Como n+m es mayor a 50, puedo aproximar la t-student a una normal (0,1)

$k_{1-\alpha} = k_{1-0,05} = k_{0,95} \to t_{55;0,95} = 1,67$

$S^2_p = \frac{(m-1)S^2_x + (n-1)S^2_y}{m+n-2} = 4,058$

$\delta(X) = 1\!\!1 \left\{ \underbrace{\frac{27,8 - 26,5 - 0}{\sqrt{4,058 \cdot \left(\frac{1}{27}+\frac{1}{30}\right)}}}_{2,43} > 1,67 \right\}$ sí

Rechazo Ho
⇒ Disminuye con el superfluidante

lo pueba de que pase algo es proporcional a la mal que haría si pasa

(10.24) "La probabilidad de un suceso es función creciente del daño que causa"

1000 tostados

supongo $\alpha = 0,05$

400 cancha → 220

600 alfombra → 350

$X = \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{cae lado manchado} \\ 0 & \text{no cae ''} \end{cases}$

n 1000 → X: 400 → dulce 220, 180

n 1000 → Y: 600 (MAYOR DAÑO) → 350 dulce, 250

$H_0: p_x \geq p_y \rightarrow p_x - p_y \geq 0$

vs

$H_1: p_x < p_y$

Quiero ver si la prueba de que caiga del lado con dulce en un lugar menos costoso (p_x) es mayor que la de que caiga en un lugar más costoso p_y

PIVOTE → $\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{1}{m}(1-\overline{x})\overline{x} + \frac{1}{n}\overline{Y}(1-\overline{Y})}} \sim N(0,1)$

$\overline{X} = \dfrac{220}{400} = 0,55 \quad \wedge \quad \overline{Y} = \dfrac{350}{600} = 0,58$

$S(\underline{x}) = 1\!\!1 \left\{ \underbrace{\dfrac{\overline{x} - \overline{Y}}{\underbrace{\sqrt{\frac{\overline{X}}{m}(1-\overline{X}) + \frac{\overline{Y}}{n}(1-\overline{Y})}}_{0,18}}}_{-0,16 > 1,64} > z_{1-\alpha} \right\} \quad z_{0,95} = 1,64$

$6,13\,10^{-4}$

No. No puedo rechazar H_0 ⇒ no puedo afirmar que caigan más del lado con dulce

$H_0: F_X = F$

(10.26) BONDAD DE AJUSTE

es para ver si la muestra obedece alguna distribución

• Ley de Benford: $P(D=d) = \log_{10}\left(\dfrac{d+1}{d}\right)$

Calculo

- $P(D=1) = \log_{10}\left(\frac{2}{1}\right) = 0,301$
- $P(D=2) = 0,176$
- $P(D=3) = 0,249$
- $P(D=4) = 0,096$
- $P(D=5) = 0,079$
- $P(D=6) = 0,066$
- $P(D=7) = 0,057$
- $P(D=8) = 0,051$
- $P(D=9) = 0,045$

$\boxed{n = 2500}$

n_i

$n_1 = 730$
$n_2 = 441$
$n_3 = 304$
$n_4 = 247$
$n_5 = 226$
$n_6 = 160$
$n_7 = 147$
$n_8 = 114$
$n_9 = 131$

$n \cdot p_i$

aprox

$np_1 = 752$
$np_2 = 440$
$np_3 = 312$
$np_4 = 248$
$np_5 = 197$
$np_6 = 167$
$np_7 = 144$
$np_8 = 127$
$np_9 = 114$

$np_i > 10$

$p_i =$

Para poner a prueba el test utilizo la distribución de la medida de dispersión D^2 muestral?

$D^2 = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2_{k-1,\,1-\alpha}$

Test → $\delta(\underline{x}) = 1\!\!1 \left\{ D^2 > \chi^2_{k-1,1-\alpha} \right\}$

$D^2 = 0,64 + 0,00227 + 0,217 + 0,09 + 3,97 + 0,325 + 0,028 + 1,327 + 2,585$

$\underbrace{D^2 = 9,14}$

(10.25) Gorollo de A → X, V.A

$m = 10$ años ... B → Y, V.A

$S_x^2 = 3,2$ ∧ 16 años = n $S_y^2 = 7,5$ $\alpha = 0,05$

MEDIA DESCONOCIDA

RIESGO ⟹ VARIANZA

PIVOTE → $\frac{1}{R} \cdot \frac{S^2x}{S^2y} \sim F_{m-1, n-1}$

$R = \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2 y}$ Cuanto más grande sea σ_y^2 menor es R

• Si la inv en B es más riesgosa ...

$H_0: R \geq 1$ vs $H_1: R < 1$

↳ Probar que el riesgo de A es mayor B. quiero rechazar eso

$\delta(\underline{X}) = 1\!\!1 \left\{ \frac{1}{R} \cdot \frac{S^2x}{S^2y} < k_\alpha \right\}$

$k_\alpha = k_{0,05} \to f_{9;15;0,05} = 0,334$

$\delta(\underline{x}) = 1\!\!1 \left\{ \underbrace{\frac{1}{1} \cdot \frac{3,2}{7,5}}_{0,42} < 0,334 \right\}$ no

No Rechazo H_0. con $\alpha = 0,05$ no puedo asegurar que el riesgo de B es Y más riesgoso

con $\alpha = 0,10$

$k_\alpha = k_{0,10} \to f_{9;15;0,10} = 0,47$ sí

Rechazo H_0

$\chi^2_{8,0,95} = 15,507$

$1\!\!1 \{ D^2 > \chi^2 \} = 1\!\!1 \{ 9,141 > 15,507 \}$ no

No puedo rechazar H_0

(10.27)

tamaño	1 a 1,15	1,15 a 1,42	1,42 a 2	2 a 3,2
frecuencia	23	25	26	26

$\alpha = 0,05$ $H_0: F_X = F$

$f_X(x) = 2x^{-3} 1\!\!1\{x \geq 1\}$

Busco la función de distribución F

$\int_1^x 2x^{-3}\,dx = \frac{2x^{-2}}{-2} \Big|_1^x = -(x^{-2} - 1) \to (1 - x^{-2}) 1\!\!1\{x \geq 1\}$

$\boxed{n = 100}$ Σ frecuencias

Calculo $P(a < \text{tamaño} \leq b)$

→ $P(1 < X < 1,15) = F(1,15) - F(1) = 1 - (1,15)^{-2} - 1 + (1)^{-2} = 0,2438$

→ $P(1,15 < X < 1,42) = F(1,42) - F(1,15) = 1 - (1,42)^{-2} - 1 + (1,15)^{-2} = 0,2602$

→ $P(1,42 < X < 2) = 0,2459$

→ $P(2 < X < 3,2) = 0,1523$

n	np
$n_1 = 23$	$np_1 = 24,38$
$n_2 = 25$	$np_2 = 26,02$
$n_3 = 26$	$np_3 = 24,59$
$n_4 = 26$	$np_4 = 15,23$

⟹ $D^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$

$D^2 = 7,3814$

$\delta(\underline{X}) = 1\!\!1 \{ D^2 > \chi^2_{3,0,95} \}$

$1\!\!1 \{ 7,3814 > 7,815 \}$ no No puedo rechazar H_0