10.10 Las cajas de leche en polvo de la marca *Spiky Milk* anuncian un peso neto de un kilo. El peso neto de las cajas (en kilos) W es una variable aleatoria con distribución normal. En una muestra aleatoria de 75 cajas se observó que $\sum_{i=1}^{75} w_i = 74.4$ y $\sum_{i=1}^{75} w_i^2 = 73.81$. Testear:

(**a**) $H_0 : \mu = 1$ contra $H_1 : \mu < 1$.

(**b**) $H_0 : \sigma = 0.14$ contra $H_1 : \sigma < 0.14$.

W: Peso neto de las cajas en kilos, $W \sim N(\mu, \sigma^2)$

(a)

$H_0: \mu = 1$ $\qquad$ $H_1 < 1$

W pertenece a una flia exponencial $\quad c(\sigma^2) = \frac{-1}{2\sigma^2}$ → creciente

Cuando μ, σ^2 son desconocidos un estadístico de prueba de test de μ es:

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{W} - \mu_0}{S} \sim t_{n-1} \quad \text{con } S^2 = \frac{\sum (W_i - \bar{W})^2}{n-1}$$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\sqrt{75}\,\frac{\bar{W} - 1}{S} < K_\alpha\right\}$$

$$\alpha = 0{,}05 = \mathbb{P}_{\mu=1}\left(\delta(\underline{X}) = 1\right) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\sqrt{75}\,\frac{\overline{W}-1}{S}}_{t_{74}} < K_\alpha\Big) = 0{,}05$$

$$\Longrightarrow K_\alpha = t_{74,\,0{,}05} = -1{,}6657$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\sqrt{75}\,\frac{\overline{W}-1}{S} < -1{,}6657\right\}}$$

C. Aux

$$(W_i - \overline{W})^2 = W_i^2 - 2\overline{W}W_i + \overline{W}^2 \quad , \quad \overline{W} = \frac{\sum^n W_i}{n}$$

mis datos son : $\sum_{i=1}^{75} W_i = 74{,}4$; $\sum_{i=1}^{75} W_i^2 = 73{,}81$

Entonces se que $\overline{W} = \frac{74{,}4}{75} = 0{,}992$

$$S^2 = \frac{\sum^{75} W_i^2 - 2 \cdot 0{,}992 \sum^{75} W_i + \sum^{75} (0{,}992)^2}{74} \approx \frac{13}{185000} \xrightarrow{\sqrt{\ }} 8{,}38 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \sqrt{75}\ \frac{0{,}992 - 1}{8{,}38 \cdot 10^{-3}} < -1{,}6657 \right\}$$

$$= \mathbb{1}\left\{ -8{,}2675 < -1{,}6657 \right\}$$

$\Rightarrow$ Rechazo H_0, tengo evidencia para decir que $\mu < 1$

(b)

Como μ y σ^2 son desconocidos, de la clase se sigue un estadístico de prueba de σ^2 es $T = \frac{\sum^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

W pertenece a una flia exponencial $c(\sigma^2) = \frac{-1}{2\sigma^2}$ $\downarrow$ creciente

$$H_0 : \sigma^2 = (0,14)^2 \qquad H_1 : \sigma^2 < (0,14)^2$$

$$\delta(\underline{W}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum^n (W_i - \bar{W})^2}{\sigma_0^2} < K_\alpha \right\}$$

$$K_\alpha = \chi^2_{74,\,0{,}05} = 55{,}1892$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta(\underline{W}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum^n (W_i - \bar{W})^2}{(0{,}14)^2} < 55{,}1892 \right\}}$$

CAUX

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i - \bar{w})^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 - 2\bar{w} \sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{w}^2$$

Con mis datos:

$$\sum_{i=1}^{75} (w_i - \bar{w})^2 = S^2 \cdot 74 = \frac{13}{2500}$$

$$\delta(\underline{w}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\frac{13}{2500}}{(0{,}14)^2} < 55{,}1892 \right\} = \mathbb{1}\left\{ 0{,}265 < 55{,}1892 \right\}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{no Rechazo } H_0}$

Otro test útil y que es lo mismo:

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} < 55{,}1892 \right\}$$