10.18 [Maronna pp. 143-144] Una de las más celebres "Leyes de Murphy" establece que *"si se deja caer al suelo una tostada untada con dulce, la probabilidad de que caiga del lado del dulce es mayor que la de que caiga del lado del pan"*.

(**a**) Para verificarla, se realizó un experimento en la University of Southwestern Louisana, en el que se dejaron caer 1000 tostadas untadas con mermelada de grosellas, de las cuales cayeron 540 del lado del dulce. ¿Qué conclusión puede sacar?

(**b**) El comité de investigaciones de la University of Southwestern Louisana decreta que, para que el experimento sea considerado concluyente, deberá cumplir con (i) si la Ley de Murphy es falsa, la probabilidad de que el test la confirme debe ser $\leqslant 0.01$; (ii) si la Ley es cierta, y la probabilidad de caer del lado del dulce es > 0.6, entonces la probabilidad de confirmarla debe ser $\geqslant 0.95$. ¿Cuántas tostadas hay que arrojar para que se cumplan estas condiciones?

(a)

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si cae del lado con mermelada} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$X \sim Ber(p) \longrightarrow$ Familia exponencial

$X \sim Ber(p)$ que es familia exponencial de 1 parametro

$C(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$ $\quad r(x) = x$

$\downarrow$

creciente

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$H_0: p \leq 0,5 \qquad H_1: p > 0,5$$

$$\delta(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i > K_\alpha \right\}$$

Por TCL se que $\dfrac{\sum^n X_i - n E[X_i]}{\sqrt{n \operatorname{Var}(X_i)}} \underset{(a)}{\overset{\mathcal{D}}{\sim}} \mathcal{N}(0,1)$

$E[X_i] = p \quad , \quad \operatorname{Var}(X_i) = p(1-p)$

$$\alpha = \mathbb{P}_{p=0,5}(\delta(\underset{\sim}{X}) = 1) = \mathbb{P}_{p=0,5}\left(\sum X_i > K_\alpha\right)$$

$$= \mathbb{P}_{p=0,5}\left(\frac{\sum X_i - n0,5}{\sqrt{n.0,5.0,5}} > K'_\alpha\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \Phi(K'_\alpha)$$

por TCL

Voy a pedir un $\alpha = 0,05$

$$\Rightarrow \quad \delta(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum X_i - n0,5}{\sqrt{n.0,5.0,5}} > 1,64485 \right\}$$

Evalúo en x:

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{540 - 1000.0{,}5}{\sqrt{1000.0{,}25}} > 1{,}64485 \right\} =$$

$$= \mathbb{1}\left\{ 2{,}5298 > 1{,}64485 \right\} = 1$$

$\Rightarrow$ La ley de Murphy es cierta

(b)

(i) me dice que $\alpha = 0{,}01$ (mismas hipótesis)

$$1 - \Phi(k'_\alpha) \leq 0{,}01 \longrightarrow k'_\alpha \leq z_{0{,}99} \rightarrow k'_\alpha \leq 2{,}326$$

$$\Rightarrow \quad \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum X_i - n\, 0{,}5}{\sqrt{n.0{,}25}} > 2{,}326 \right\}$$

Evalúo en la muestra $\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ 2{,}5298 > 2{,}326 \right\} = 1$

→ Para el 1er Test

(ii) me dice que $\beta(0,6) \geq 0,95$

$\beta(p) = \mathbb{P}_{p=0,6}(\text{no Rech } H_0) \geq 0,95$

$\mathbb{P}($