

PROBABILIDAD (61.09-81.04-81.16-61.06-81.03)

Primer cuatrimestre - 2024

Cuarto parcial

28 de mayo 2024 - 9h

Duración: 2 horas

*Escribir claramente en su hoja: **apellido, nombres - padrón- código de materia.***

El parcial debe resolverse a mano. Una vez terminado debe subirse al campus una foto o escaneado del mismo. Los ejercicios recibidos después de las 11:10 del 28/5/2024 no serán considerados como entregados.

1. Los correos arriban a una casilla de email de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 6 por hora. De manera independiente, estos pueden ser spam o no spam. Un correo es spam con probabilidad 0.1. Sabiendo que entre las 8:00 y las 11:00 llegaron exactamente 3 correos spam, calcular la probabilidad de que el segundo spam haya llegado entre las 9:00 y las 11:00.
2. Se lanza un dado equilibrado hasta observar por décima vez un 4. Estimar la probabilidad de lograrlo en menos de 80 tiros.

28/05/2024

Alumno: Batallón DAVID L

Padron: 97529

Código: 81.04

Ejercicio 2

defino la variable aleatoria S_n con distribución Binomial (n, p) siendo $n=80$ y $p=1/6$

1.1

LA Aproximación por la densidad normal

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad \begin{aligned} E(S_n) &= \frac{40}{3} \\ \text{VAR}(S_n) &= \frac{100}{9} \end{aligned}$$

y la corrección por continuidad

$$P(S_n = k) = P\left(k - \frac{1}{2} < S_n < k + \frac{1}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{k - np + 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - np - 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Para $k=10$:

$$P(S_n = 10) \approx \Phi\left(\frac{10 - \frac{40}{3} + 1/2}{\sqrt{100/9}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - \frac{40}{3} - 1/2}{\sqrt{100/9}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{-\frac{17}{6}}{10/3}\right) - \Phi\left(\frac{-\frac{23}{6}}{10/3}\right)$$

$$= \Phi\left(-\frac{17}{20}\right) - \Phi\left(-\frac{23}{20}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{17}{20}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{23}{20}\right)\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{23}{20}\right) - \Phi\left(\frac{17}{20}\right) = \Phi(1.15) - \Phi(0.85) =$$

Alumno: Batzllzn David L

Padron: 97529

Código: 81.04

$$= 0,87493 - 0,80234$$

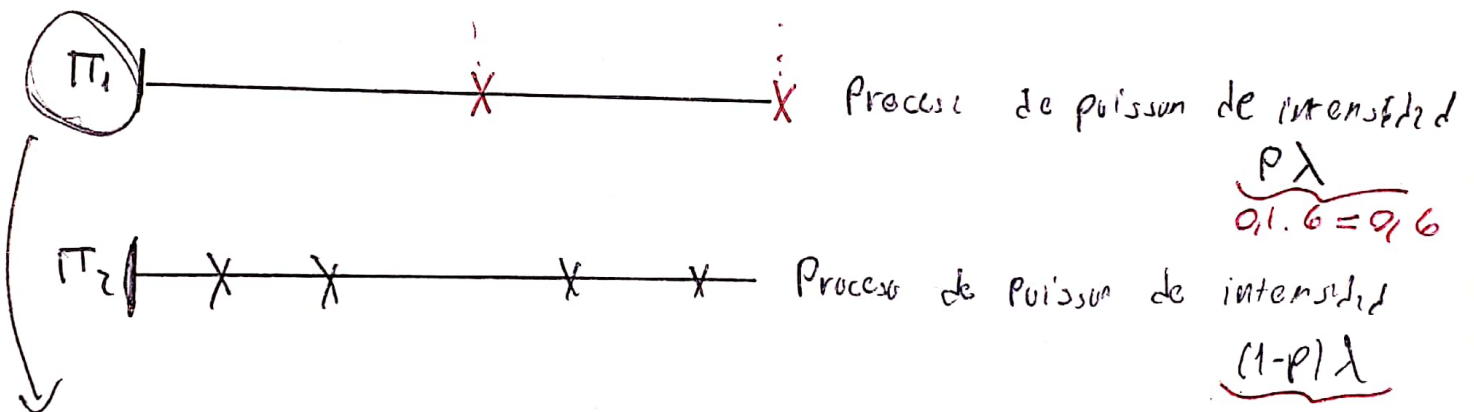
$$= 0,07259 \approx P(S_n = 10)$$

Alumno: Batzillon David L
 Padron: 97579
 codigo: 81.04

Ejercicio 1

Tengo un proceso de Poisson de intensidad $\lambda = 6$ que ~~debe~~ ^{debe} que represente los Arribos de mails.

Los mails pueden ser spam o no spam independientes
 \Rightarrow utilizar teorema de colas con



Me piden que calcule la probabilidad de que el segundo spam llegue entre los 9 y 11 sabiendo que entre los 8 y 11 llegaron 3.

Puede ser que el primer spam llegue entre 8 y 9 y los otros dos entre 9 y 11 o los 3 entre 9 y 11

$$P(N(9,11) = 2 | N(8,11) = 3) = \frac{P(N(8,9) = 1, N(9,11) = 2)}{P(N(8,11) = 3)} + \frac{P(N(8,9) = 0, N(9,11) = 3)}{P(N(8,11) = 3)}$$

$$\begin{aligned}
 N(8,9) &\sim \text{Poi}(1 \cdot 0,6) = \text{Poi}(0,6) \\
 N(9,11) &\sim \text{Poi}(2 \cdot 0,6) = \text{Poi}(1,2)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} N(8,9) \\ N(9,11) \end{aligned}} \right\} \text{indep} \Rightarrow \text{interseccion} = \text{Prod de Prob}$$

$$N(8,11) \sim \text{Poi}(3 \cdot 0,6) = \text{Poi}(1,8)$$

$$P(N(9,11)=2 \mid N(8,11)=3) = \frac{\frac{0,6^1 \cdot e^{-0,6}}{1!} \cdot \frac{1,2^2 \cdot e^{-1,2}}{2!}}{\frac{1,8^3 \cdot e^{-1,8}}{3!}} + \frac{\frac{0,6^0 \cdot e^{-0,6}}{0!} \cdot \frac{1,2^3 \cdot e^{-1,2}}{3!}}{\frac{1,8^3 \cdot e^{-1,8}}{3!}}$$

$$= \frac{\frac{0,6^1 \cdot 1,2^2}{2!}}{\frac{1,8^3}{3!}} + \frac{\frac{0,6^0 \cdot 1,2^3}{3!}}{\frac{1,8^3}{3!}}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{8}{27}$$

$$= \frac{20}{27}$$

Index of comments

1.1 Mal. Se trata de una distribución Pascal. Notar que se lanza el dado HASTA conseguir 10's 4.

2) X_i : "Cantidad de tiros ^{PARA} ~~hasta~~ observar el i -ésimo 4"

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \text{Pas}(10, 1/6), \text{ con } X_i \sim G(1/6) \quad 2.1$$

Se podría utilizar la pascal para obtener la probabilidad exacta, pero habría que evaluarla 80 veces.

Asumiendo que 10 es un valor suficientemente grande, puedo aproximar utilizando teorema central del límite, ya que tengo una sucesión de v.a. i.i.d. ✓

$$X_i \text{ tiene varianza } \sigma^2 = \frac{(1-1/6)}{1/6^2} = 30 \Rightarrow \sigma = \sqrt{30}$$

$$\text{tiene esperanza } \mu = 6$$

$$\Rightarrow P(X < 80) = P\left(\frac{X - 10 \cdot 6}{\sqrt{30} \sqrt{10}} < \frac{80 - 10 \cdot 6}{\sqrt{30} \sqrt{10}}\right) \overset{\text{TCL}}{\sim} \Phi(1,1547) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow P(X < 80) \approx \underline{0,93822} \quad \times$$