PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Evaluación Parcial — Primer cuatrimestre – 2019

Duración: 4 horas. — 1/6/19 – 9:00 hs.

Curso: Corrector:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Un comercio de electrodomésticos recibe un lote de 20 lavarropas. El lote se considera bueno si contiene como máximo un lavarropas con defectos. La división de control de calidad elige 3 lavarropas al azar para controlarlos y rechaza el lote si encuentra alguno con defectos. Si el lote es bueno, calcular la máxima probabilidad de tomar una decisión incorrecta acerca del mismo.

Solución:

Se tiene que un lote de lavarropas cuenta con 20 unidades. El lote es bueno si la cantidad de unidades defectuosas es 0 ó 1. El experimento consiste en elegir al azar una muestra de 3 lavarropas y rechazar el lote completo si en dicha muestra se encuentra alguna unidad defectuosa. Definimos el siguiente evento:

A: *Alguna unidad es defectuosa en la muestra de tamaño 3.*

Por lo tanto, $\mathbf{P}(\text{“Rechazar el lote“}) = \mathbf{P}(A)$. Como la muestra se selecciona al azar, todas las distintas muestras de 3 elementos tienen las mismas chances de ser elegidas, por lo tanto para calcular $\mathbf{P}(A)$ usamos la definición de Laplace. En este caso, resulta más sencillo calcular la probabilidad del complemento de A, ya que significaría calcular la probabilidad de que todas las unidades en la muestra de tamaño 3 sean buenas. Entonces:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{\#\bar{A}}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{20-k}{3}}{\binom{20}{3}},$$

donde k representa la cantidad de unidades defectuosas en el lote. El ejercicio nos pide calcular la máxima probabilidad de tomar una decisión incorrecta cuando el lote es bueno, esto es: rechazar el lote cuando tiene 0 ó 1 lavarropas defectuosos. Calculamos ambas probabilidades y la respuesta será la que devuelva un número mayor.

Si k=0, $\mathbf{P}(\text{“Rechazar el lote“}) = \mathbf{P}(A) = 0$.
Si k=1, $\mathbf{P}(\text{“Rechazar el lote“}) = 1 - \frac{\binom{20-1}{3}}{\binom{20}{3}} = 3/20$.

Por lo tanto, la máxima probabilidad de tomar una decisión incorrecta cuando el lote es bueno es de $3/20$.

---

2. Una computadora ejecuta un programa en dos etapas. Los tiempos (en minutos) que demoran la primera y segunda etapas son variables aleatorias X e Y con distribución uniforme sobre la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 10, 0 < y < x\}$. Calcular la probabilidad de que el programa completo demore entre 8 y 12 minutos en ejecutarse.

Solución:

Definimos las variables aleatorias:

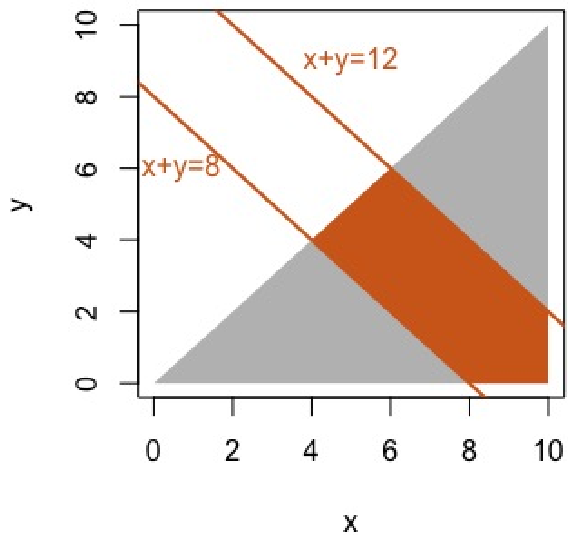
X: Duración (en minutos) de la primera etapa.
Y: Duración (en minutos) de la segunda etapa.

Sabemos que el vector aleatorio $(X,Y) \sim \mathcal{U}(A)$, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 10, 0 < y < x\}$. Por lo tanto,

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{50}\mathbf{1}\{(x,y) \in A\}.$$

Debemos calcular $\mathbf{P}(8 < X + Y < 12) = \mathbf{P}(8 - X < Y < 12 - X)$.

Graficamos el soporte de la función de densidad (región gris), sombreando en naranja la región correspondiente a la probabilidad pedida.



Luego, como la densidad conjunta es uniforme, calculamos la probabilidad pedida como el volumen sobre la región naranja o, de forma equivalente, como el área de la región naranja dividido el área de la región gris:

$$\mathbf{P}(8 < X + Y < 12) = \mathbf{P}(8 - X < Y < 12 - X) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{8 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{50} \right) = 0.36.$$

---

3. Se arrojan dos dados piramidales equilibrados con los números 1,2,3,4 en sus caras. Sea U el mínimo de los resultados observados y V el máximo, hallar la ecuación de la recta de regresión de V dado U.

Solución:

Definimos las variables aleatorias:

U: Mínimo de los resultados observados al tirar un dado de 4 caras.
V: Máximo de los resultados observados al tirar un dado de 4 caras.

Entonces, la recta de regresión de V dado U será:

$$\hat{V} = \frac{\mathbf{cov}(U,V)}{\mathbf{var}(U)} \cdot (U - \mathbf{E}[U]) + \mathbf{E}[V].$$

Debemos calcular entonces: $\mathbf{cov}(U,V), \mathbf{var}(U), \mathbf{E}(U)$ y $\mathbf{E}(V)$. Para ello hallamos la función de probabilidad conjunta de (U,V). Sabemos que todos los elementos de $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{1,2,3,4\}\}$ (resultados posibles al arrojar los dos dados) son equiprobables, por lo tanto la función de probabilidad conjunta de (U,V), y las funciones de probabilidad marginales resultan:

$p_{U,V}(u,v)$	u=1	u=2	u=3	u=4	$p_V(v)$
v=1	1/16	0	0	0	1/16
v=2	2/16	1/16	0	0	3/16
v=3	2/16	2/16	1/16	0	5/16
v=4	2/16	2/16	2/16	1/16	7/16
$p_U(u)$	7/16	5/16	3/16	1/16	1

Usando las definiciones y propiedades para vectores aleatorios discretos:

$$\mathbf{E}[h(U,V)] = \sum_u \sum_v h(u,v) \cdot p_{U,V}(u,v)$$

$$\mathbf{var}(U) = \mathbf{E}[U^2] - \mathbf{E}[U]^2, \mathbf{cov}(U,V) = \mathbf{E}[U \cdot V] - \mathbf{E}[U]\mathbf{E}[V].$$

Calculamos los valores necesarios, resultando:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U] &= 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{3}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 15/8, \\
\mathbf{E}[V] &= 1 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{7}{16} = 25/8, \\
\mathbf{var}(U) &= 1 \cdot \frac{7}{16} + 2^2 \cdot \frac{5}{16} + 3^2 \cdot \frac{3}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - (15/8)^2 = 55/64, \\
\mathbf{cov}(U,V) &= \sum_u \sum_v u \cdot v \cdot p_{U,V}(u,v) - (15/8) \cdot (25/8) = 25/64.
\end{aligned}$$

La recta de regresión pedida resulta:

$$\hat{V} = \frac{5}{11} \cdot U + \frac{25}{11}.$$

---

4. Un galpón es iluminado por dos lámparas halógenas cuyas duraciones (en miles de horas) son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de media 2. Hallar la distribución del tiempo en el que el galpón estará iluminado por una sola lámpara.

Solución:

Definimos las variables aleatorias:

T_i: Duración (en miles de horas) de la lámpara i, $i = 1, 2$.
Con T_1, T_2 variables aleatorias *iid* $\mathcal{E}(1/2)$.

Definimos W como el tiempo en el que el galpón está iluminado por una sola lámpara, entonces:

$$W = (T_2 - T_1)\mathbf{1}\{T_2 > T_1\} + (T_1 - T_2)\mathbf{1}\{T_1 > T_2\},$$

o lo que es equivalente, $W = \text{máx}(T_1, T_2) - \text{mín}(T_1, T_2)$.

Por el ejercicio *4.14*, sabemos que W se puede pensar como una mezcla de variables aleatorias exponenciales de manera que si $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$ y $T_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$, independientes, entonces la densidad de W está dada por:

$$f_W(w) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot f_{T_2}(w) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot f_{T_1}(w).$$

Como $\lambda_1 = \lambda_2$, se tiene que $f_{T_1} = f_{T_2}$, y entonces $W \sim \mathcal{E}(1/2)$.

---

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{y^2 x}{2} e^{-xy}\mathbf{1}\{x > 0,\ 0 < y < 2\}$$

Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{E}[X|Y] > 4/3)$.

Solución:

Sablemos que

$$f_{XY}(x, y) = \frac{y^2 x}{2} e^{-xy}\mathbf{1}\{x > 0,\ 0 < y < 2\}.$$

Por lo tanto, factorizando,

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}\{0 < y < 2\} \cdot y^2 x e^{-xy}\mathbf{1}\{x > 0\}.$$

Podemos decir entonces que $Y \sim \mathcal{U}(0, 2)$ y $X|Y = y \sim \Gamma(2, y)$.

$\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y = y] = 2/y$, por tener distribución Gamma, por lo tanto:

$$\mathbf{E}[X|Y] = \varphi(Y) = 2/Y.$$

Calculamos la probabilidad pedida, a partir de que conocemos la distribución de la variable aleatoria Y:

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}[X|Y] > 4/3) = \mathbf{P}\left(\frac{2}{Y} > \frac{4}{3}\right) = \mathbf{P}(Y < 3/2) = 3/4.$$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Evaluación Parcial	Primer cuatrimestre – 2019
Duración: 4 horas.	1/6/19 – 9:00 hs.

Curso: Corrector:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Un comercio de electrodomésticos recibe un lote de 20 lavarropas. El lote se considera bueno si contiene como máximo un lavarropas con defectos. La división de control de calidad elige 3 lavarropas al azar para controlarlos y rechaza el lote si encuentra alguno con defectos. Si el lote es bueno, calcular la máxima probabilidad de tomar una decisión incorrecta acerca del mismo.

Solución:
Se tiene que un lote de lavarropas cuenta con 20 unidades. El lote es bueno si la cantidad de unidades defectuosas es 0 ó 1. El experimento consiste en elegir al azar una muestra de 3 lavarropas y rechazar el lote completo si en dicha muestra se encuentra alguna unidad defectuosa. Definimos el siguiente evento:

A: *Alguna unidad es defectuosa en la muestra de tamaño 3.*

Por lo tanto, $\mathbf{P}(\text{“Rechazar el lote“}) = \mathbf{P}(A)$. Como la muestra se selecciona al azar, todas las distintas muestras de 3 elementos tienen las mismas chances de ser elegidas, por lo tanto para calcular $\mathbf{P}(A)$ usamos la definición de Laplace. En este caso, resulta más sencillo calcular la probabilidad del complemento de A, ya que significaría calcular la probabilidad de que todas las unidades en la muestra de tamaño 3 sean buenas. Entonces:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{\#\bar{A}}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{20-k}{3}}{\binom{20}{3}},$$

donde k representa la cantidad de unidades defectuosas en el lote. El ejercicio nos pide calcular la máxima probabilidad de tomar una decisión incorrecta cuando el lote es bueno, esto es: rechazar el lote cuando tiene 0 ó 1 lavarropas defectuosos. Calculamos ambas probabilidades y la respuesta será la que devuelva un número mayor.

Si k=0, $\mathbf{P}(\text{“Rechazar el lote“}) = \mathbf{P}(A) = 0$.
Si k=1, $\mathbf{P}(\text{“Rechazar el lote“}) = 1 - \frac{\binom{20-1}{3}}{\binom{20}{3}} = 3/20$.

Por lo tanto, la máxima probabilidad de tomar una decisión incorrecta cuando el lote es bueno es de 3/20.

---

2. Una computadora ejecuta un programa en dos etapas. Los tiempos (en minutos) que demora la primera y segunda etapa son variables aleatorias X e Y con distribución uniforme sobre la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 10, 0 < y < x\}$. Calcular la probabilidad de que el programa completo demore entre 8 y 12 minutos en ejecutarse.

Solución:

Definimos las variables aleatorias:

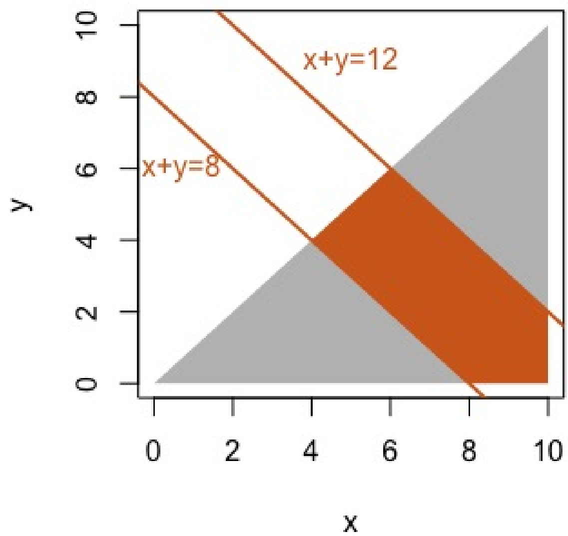
X: Duración (en minutos) de la primera etapa.
Y: Duración (en minutos) de la segunda etapa.

Sabemos que el vector aleatorio $(X, Y) \sim \mathcal{U}(A)$, donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 10, 0 < y < x\}$. Por lo tanto,

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{50}\mathbf{1}\{(x, y) \in A\}.$$

Debemos calcular $\mathbf{P}(8 < X + Y < 12) = \mathbf{P}(8 - X < Y < 12 - X)$.

Graficamos el soporte de la función de densidad (región gris), sombreando en naranja la región correspondiente a la probabilidad pedida.



Luego, como la densidad conjunta es uniforme, calculamos la probabilidad pedida como el volumen sobre la región naranja o, de forma equivalente, como el área de la región naranja dividido el área de la región gris:

$$\mathbf{P}(8 < X + Y < 12) = \mathbf{P}(8 - X < Y < 12 - X) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{8 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{50}\right) = 0.36.$$

---

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{y^2 x}{2} e^{-xy} \mathbf{1}\{x > 0,\ 0 < y < 2\}$$

Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{E}[X|Y] > 4/3)$.

Solución:

Sablemos que

$$f_{XY}(x, y) = \frac{y^2 x}{2} e^{-xy} \mathbf{1}\{x > 0,\ 0 < y < 2\}.$$

Por lo tanto, factorizando,

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}\{0 < y < 2\} \cdot y^2 x e^{-xy} \mathbf{1}\{x > 0\}.$$

Podemos decir entonces que $Y \sim \mathcal{U}(0,2)$ y $X|Y = y \sim \Gamma(2, y)$.

$\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y = y] = 2/y$, por tener distribución Gamma, por lo tanto:

$$\mathbf{E}[X|Y] = \varphi(Y) = 2/Y.$$

Calculamos la probabilidad pedida, a partir de que conocemos la distribución de la variable aleatoria Y:

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}[X|Y] > 4/3) = \mathbf{P}\left(\frac{2}{Y} > \frac{4}{3}\right) = \mathbf{P}(Y < 3/2) = 3/4.$$

---

4. Los aviones de la aerolínea *Aires* arriban a un aeropuerto de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por hora y los de la aerolínea *Cielos* de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 35 por hora. Los dos procesos de Poisson son independientes. Sabiendo que el 1 de Junio entre las 0:00 y las 0:05 arribaron exactamente dos aviones de la aerolínea *Aires*, calcular la probabilidad de que entre las 0:00 y las 0:02 haya arribado por lo menos un avión al aeropuerto.

Solución:

A partir de los dos procesos de Poisson independientes, podemos definir las siguientes variables aleatorias:

$N_A(a,b)$: *Cantidad de arribos de la aerolínea Aires en el intervalo (a,b]*;
$N_C(a,b)$: *Cantidad de arribos de la aerolínea Cielos en el intervalo (a,b]*;
$N_T(a,b)$: *Cantidad de arribos totales en el intervalo (a,b]*.

Donde los intervalos $(a,b]$ están expresados en minutos, y con $N_T(a,b) = N_A(a,b) + N_C(a,b)$.

Entonces: $N_A(a,b) \sim Poi((b-a) \cdot 10/60)$, $N_C(a,b) \sim Poi((b-a) \cdot 35/60)$ y $N_T(a,b) \sim Poi((b-a) \cdot 45/60)$, ya que $N_A(a,b)$ y $N_C(a,b)$ son variables aleatorias independientes.

Debemos calcular

$\mathbf{P}(N_T(0,2) \geq 1 | N_A(0,5) = 2) = 1 - \mathbf{P}(N_T(0,2) = 0 | N_A(0,5) = 2)$.

Desarrollando:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_T(0,2) \geq 1 | N_A(0,5) = 2) &= 1 - \mathbf{P}(N_T(0,2) = 0 | N_A(0,5) = 2) \\
&= 1 - \frac{\mathbf{P}(N_T(0,2) = 0, N_A(0,5) = 2)}{\mathbf{P}(N_A(0,5) = 2)} \\
&= 1 - \frac{\mathbf{P}(N_T(0,2) = 0, N_A(2,5) = 2)}{\mathbf{P}(N_A(0,5) = 2)} \\
&= 1 - \frac{\mathbf{P}(N_T(0,2) = 0) \cdot \mathbf{P}(N_A(2,5) = 2)}{\mathbf{P}(N_A(0,5) = 2)} \\
&= 1 - \frac{e^{-3/2} \cdot (1/2)^2 \cdot e^{-1/2}/2!}{(5/6)^2 \cdot e^{-5/6}/2!} \\
&\cong 0.8879.
\end{aligned}
$$

---

5. La probabilidad de que un celular de marca *Acme* dure menos de 40 días es de 0.3. Si se eligen al azar 500 celulares de dicha marca, calcular *aproximadamente* la probabilidad de que más de 170 duren menos de 40 días.

Solución:

Definimos el evento D_i: El celular i dura menos de 40 días. Si T es la variable aleatoria que cuenta la cantidad de celulares que duran menos de 40 días (de 500 celulares) entonces podemos decir que $T \sim \mathcal{B}(500, 0.3)$, ya que $\mathbf{P}(D_i) = 0.3, i = 1, 2, \ldots, 500$, y podemos suponer que las duraciones de cada uno de los 500 celulares son independientes.

Debemos calcular $\mathbf{P}(T > 170)$. Como el cálculo exacto requiere un desarrollo extenso, y el ejercicio nos pide una aproximación de dicha probabilidad, lo pensaremos de la siguiente manera: a la variable T la podemos pensar como una suma, $T = \sum_{i=1}^{500} T_i$, con $T_i \sim Ber(0.3)$ independientes. Entonces, utilizando el Teorema Central del Límite:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(T > 170) &= \mathbf{P}\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} T_i - 500 \cdot 0.3}{\sqrt{500 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right) > \left(\frac{170 - 500 \cdot 0.3}{\sqrt{500 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right)\right) \\
&\cong 1 - \phi\left(\frac{170 - 500 \cdot 0.3}{\sqrt{500 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right) \\
&\cong 1 - \phi(1.9518) \\
&\cong 0.0255.
\end{aligned}
$$

Si usamos la corrección por continuidad:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T > 170) &= \mathbf{P}(T \geq 170.5) \\ &\cong 1 - \phi\left(\frac{170.5 - 500 \cdot 0.3}{\sqrt{500 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right) \\ &\cong 1 - \phi(2) \\ &\cong 0.0228.\end{aligned}$$