GUÍA 9

HOJA N°

FECHA

9.1 $\underbrace{X_1, X_2, X_3}_{=\underline{X}}$ m.a de distribución Ber(p)

a) Verificar que $\underbrace{T = X_1 + X_2 + X_3}_{\uparrow\, T(\underline{X})}$ es un estadístico suficiente para p

La suma de Bernoulli's es una Binomial
$\Rightarrow T \sim Bin(3, p)$

ESTADISTICO SUFICIENTE (E.S)

Un estadistico T es una función de la muestra que no depende del parametro desconocido.
Ademas es suficiente si $T(t)$ no depende del parametro desconocido $\forall t$ $\rightarrow$ tengo que calcular una $\mathbb{P}$ condicional y verificar que cumpla eso.

$$\underbrace{p_\theta(\underline{X} \mid T = t)}_{=\ \underbrace{p_{\underline{X}}\big|_{T=t}}_{\text{lo puedo escribir así tb.}}} = \frac{p_\theta(t \mid \underline{X} = \underline{x}) \cdot p_\theta(\underline{X})}{p_\theta(t)} = \frac{p_\theta(\underline{X})}{p_\theta(t)} \mathbb{1}\{T(\underline{X}) = t\}$$

$\uparrow$?

$$= \frac{\prod_{i=1} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}}{\binom{3}{t} p^t (1-p)^{3-t}}$$

$\theta = t = \Sigma$

$$= \frac{\cancel{p^{\Sigma x_i}} \ \cancel{(1-p)^{3-\Sigma x_i}}}{\binom{3}{t} \cancel{p^t} \ \cancel{(1-p)^{3-t}}} = \frac{1}{\binom{3}{t}}$$

$\Rightarrow$ no depende de p $\Rightarrow$ T es estad. suficiente!

NOTA

b) ¿$T = X_1 + 2X_2 + X_3$ es E.S para p?

Voy a probar con un valor de T

$T = 2$ (no se si fue $X_1 + X_2$ o $2X_2$).

Preguntar

$$p_\theta(\underline{X} \mid T=2) = \frac{p_\theta(\underline{X}) \, \mathbb{1}\{T(\underline{x}) = 2\}}{p_\theta(T=2)}$$

$$= \frac{p^{\sum x_i} (1-p)^{3-\sum x_i}}{\underbrace{p^2(1-p)} + \underbrace{p(1-p)^2}}$$

X_i

$$p(X_2 \mid T=2) = \frac{p^1(1-p)^0}{p^2(1-p) + p(1-p)^2}$$

$T = 2 = 2X_2$

$\underline{1 = X_2}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

9.3 X_n : M.A de tamaño n $\sim Poi(\lambda)$

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Hallar $X_n | T = t$

Deducir que T es un E.S para λ

$p(x|n$

Conviene plantearlo con propiedades.

Si $X_i \sim Poi(\lambda)$; $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poi(\lambda . n)$

Ademas. $X_i \Big|_{T=t} \sim Bin(t, 1/n)$

$$\Rightarrow \underline{X}\Big|_{T=t} \sim Mult(t, (1/n, \dots 1/n))$$

no depende de $\lambda \Rightarrow$ T es E.S ✓

9.2 X_n M.A de tam. m con densidad

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}\{x>\theta\}$$

Verificar que $T = \min(X_1, \dots, X_n)$ es E.S para θ

Una muestra aleatoria distribuye como:

$$f_\theta(\underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

$$f_\theta(\underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \mathbb{1}\{x_i>\theta\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\theta} e^{-x_i} \mathbb{1}\{x_i>0\} = e^{n\theta} e^{-\sum x_i} \mathbb{1}\{x_i>\theta\}$$

$$= \underbrace{e^{-\sum x_i}}_{h(x)} \underbrace{e^{n\theta} \mathbb{1}\{\min(\underline{X})>\theta\}}_{g(T(X),\theta)}.$$

si todos son + grandes que θ, el + chico es + grande que θ!

se puede separar

$\Rightarrow$ T es E.S para θ

NOTA

(9.4) Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son FAMILIAS EXPONENCIALES a 1 parametro.

a) Bernoulli (p)
b) Pascal (q, p)
c) Poisson (λ)
d) Exp (λ)

Familia exponencial a K parametros:

una flia $\mathcal{F}$ de distribucion $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$ /

$$\circledast \quad \boxed{f_\theta(x) = e^{\left[\sum_{i=1}^{k} T_i(x)\,\eta_i(\theta) - d(\theta)\right]} h(x)}$$

son vectores!

$(T_1\ T_2\ \ldots\ T_K)\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_K \end{pmatrix}$

donde $d : \Theta \in \mathbb{R}$

$\eta : \Theta \in \mathbb{R}^k$ $\quad h: \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$T : \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}^k$

$\circledast$ ⚠ ACORDARSE: si es una M.A

$f_\theta(\underline{X}) = \prod f_\theta(x)$

⚠ las indicadoras suelen ir en la $h(x)$ (para que sea exponencial no tiene que tener θ en la indicadora porque no se puede hacer $e^{\ln(\mathbb{1}\{\ldots\})}$)

a) Bernoulli(p)

$$f_\theta(x) = p^x (1-p)^{1-x}\ \mathbb{1}\{x \in [0,1]\}$$

$$\downarrow e^{\ln(\ )}$$

$$f_p(x) = e^{x\ln(p)}\ e^{(1-x)\ln(1-p)}\ \mathbb{1}\{x \in [0,1]\}.$$

$$= e^{x\ln(p)}\ e^{\ln(1-p)}\ e^{-x(\ln(1-p))}\ \mathbb{1}\{x \in [0,1]\}$$

$$= e^{\underbrace{x}_{T(x)}\underbrace{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}_{\eta(p)} + \underbrace{\ln(1-p)}_{d(p)=-\ln(1-p)}}\ \underbrace{\mathbb{1}\{x \in [0,1]\}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow$ es una flia exponencial de 1 parametro ✓

NOTA

HOJA N°

FECHA

b) Pascal $(4, p)$

$$f_p(x) = \binom{x-1}{3}(1-p)^{x-4}\, p^4\, \mathbb{1}\{x \geq 4\}.$$

$$= e^{(x-4)\ln(1-p)}\, e^{4\ln(p)} \binom{x-1}{3} \mathbb{1}\{x \geq 4\}.$$

$$= e^{x\ln(1-p)}\, e^{-4\ln(1-p)}\, e^{4\ln(p)} \binom{x-1}{3} \mathbb{1}\{x \geq 4\}$$

$$= e^{\left[\underbrace{x}_{T(x)} \underbrace{\ln(1-p)}_{n(p)} - \underbrace{4\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}_{d(p)}\right]} \underbrace{\binom{x-1}{3} \mathbb{1}\{x \geq 4\}}_{h(x)}.$$

$\Rightarrow$ es una flia exp de 1 param.

c) Poi (λ)

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \mathbb{1}\{x \geq 0\}.$$

$$= \frac{e^{x\ln(\lambda)}\, e^{-\lambda \cancel{\ln(e)}}}{\cancel{e^{\ln(x)}}\, x!} \mathbb{1}\{x \geq 0\} = e^{x(\ln(\lambda))}\, e^{-\lambda}\, \underbrace{\frac{1}{x!} \mathbb{1}\{x \geq 0\}}_{h(x)};$$

$$= e^{\left[\underbrace{x}_{T(x)} \underbrace{\ln(\lambda)}_{n(\lambda)} - \underbrace{\lambda}_{d(\lambda)}\right]} \underbrace{\frac{1}{x!} \mathbb{1}\{x \geq 0\}}_{h(x)}.$$

NOTA

d) Exp(λ)

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}\{x \geq 0\}.$$

$$= e^{\ln(\lambda)} e^{-\lambda(x)} \mathbb{1}\{x \geq 0\}.$$

$$= e^{\overset{\uparrow}{\underset{T(x)}{-x}}\,\overset{\uparrow}{\underset{n(\lambda)}{\lambda}} + \underbrace{\ln(\lambda)}_{d(\lambda)}} \underbrace{\mathbb{1}\{x \geq 0\}}_{h(x)}. \checkmark$$

(9.5) Una moneda tiene una $\mathbb{P}(\text{cara}) = p$; $p \in \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$

En 10 lanzamientos de la moneda se observaron exactam. 3 caras

Estimar por máxima verosimilitud la $\mathbb{P}$ de que en otros 3 lanzam. se observe EXACTAMENTE una cara.

Criterio de máxima verosimilitud:

"Si algo ocurrio es porque era muy probable que ocurra" (tenia alta $\mathbb{P}$ de ocurrencia).

Basicamente tengo que analizar por "cual me la juego"

$$\underbrace{\mathcal{L}(\theta)}_{\mathcal{L}(\theta|\underline{X})} = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

Función de verosimilitud de θ dada la muestra $\underline{X}$ (solo depende de θ !!!)

$\Rightarrow X \sim \text{Ber}(\theta) \quad p \in \{2/5, 4/5\}.$ ← θ siempre va a ser el parametro desconocido

10 lanzamientos es una muestra: $\underline{X}_{10} \sim \text{Bin}(10, p)$

$$\mathcal{L}(\theta|X) = \binom{10}{x} \theta^x (1-\theta)^{10-x} = \binom{10}{3} \theta^3 (1-\theta)^7$$

3 exitos en 10 lanzamientos.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(2/5 \mid \underline{X}) = \binom{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(1-\frac{2}{5}\right)^7 = 0{,}215$$ ← ESTE ES MÁXIMO

$$\mathcal{L}(4/5 \mid \underline{X}) = \binom{10}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(1-\frac{2}{5}\right)^7 = 0{,}000786$$

HOJA N°

FECHA

$\Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = 2/5$ ← ESTIMADOR DE MV: es aquel $\hat{\theta}$ / $\mathcal{L}(\theta)$ sea máx $\hat{\theta}_{MV}$

Rta final.

$\Rightarrow \mathbb{P}(\underbrace{X_3 = 1}_{\text{1 exito en 3 lanzamientos.}} \mid \hat{\theta} = 2/5) = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 = \boxed{0,432}$

(9.6) X_i = # accidentes de tránsito por semana $\sim Poi(\lambda)$.

a) Hallar $\hat{\theta}_{MV}$ de λ basado en una muestra aleatoria de la # de accidentes durante n semanas
Mostrar que se trata de un ESTIMADOR INSESGADO PARA λ
y hallar la expresión de su ERROR CUADRÁTICO MEDIO

$\theta = \lambda$; $X_i \sim Poi(\theta)$; $\underline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Poi(n.\theta)$ ← PROP SUMA de n poiss.

PROP: Si $X_i \sim$ flia exponencial a k param.
$\Rightarrow$ $\underline{X}$ distribución conjunta de X_i $\sim$ tb flia exponencial

PROP: Si es flia exponencial, es REGULAR
$\Rightarrow$ puedo usar el logaritmo

$$\text{Log}[\mathcal{L}(\theta)] = \sum_{i=1}^{n} \log f_\theta(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta \mid \underline{X}) = \frac{(n\theta)^x e^{-(n\theta)}}{x!} \Longrightarrow x \ln(n\theta) - n\theta - \ln(x!) = \ln(\mathcal{L}(\theta))$$

para que sea máximo luego que derivar e igualar a cero

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln[\mathcal{L}(\theta)]\right] = \frac{x}{n\theta}\, n - n = 0. \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{x}{n}}$$

Probar que ese sea el máximo (AM 1)
PAJA

NOTA

Sesgo de un estimador : $\mathbb{B}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$

$\hat{\theta}$. es insesgado si $\mathbb{B}(\hat{\theta}) = 0$

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\theta = \theta$$

$\Rightarrow \mathbb{B}(\theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta = \theta - \theta = 0$ ✓ $\hat{\theta}$ es insesgado.

Error cuadrático medio (ECM)

$ECM(\hat{\theta}) = \mathbb{V}(\hat{\theta}) - \mathbb{B}^2(\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$

corolario: si $\hat{\theta}$ es insesgado $\Rightarrow ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$

$$ECM(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,Var(X) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cancel{n}\theta = \boxed{\frac{\theta}{n}}$$

(9.7) X_n una muestra aleatoria de tam n $\sim \mathcal{U}[0,\theta]$

↑ FLIA NO REGULAR
NO PUEDO DERIVAR

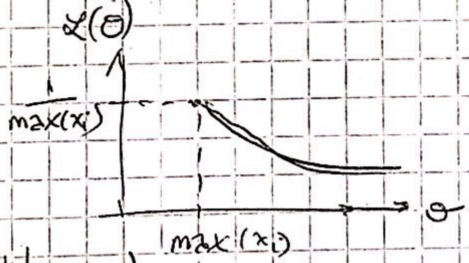
a) Hallar un E.S. para θ basado en X_n

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\,\mathbb{1}\{0 < x < \theta\}.$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}\,\mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\} = \frac{1}{\theta^n}\,\mathbb{1}\{\max_{1\le i\le n}(x_i) < \theta\}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MV}(X^n) = \max_{1\le i\le n}(x_i)} : \text{MAXIMO MUESTRAL}$$

↑ hay que verlo graficamente



b) $\hat{\theta}_{MV}$

$$F_\theta(x) = \frac{x^n}{\theta^n}\,\mathbb{1}\{0 < x < \theta\} + \mathbb{1}\{x > 0\}$$

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \frac{n\,x^{n-1}}{\theta^n}\,\mathbb{1}\{0 < x < \theta\}$$

NOTA

P 12/11

9.7 · X_n M.A $\sim \underbrace{\mathcal{U}(0,\theta)}$ flias no regulares

b) EMV de θ basado en X_n.

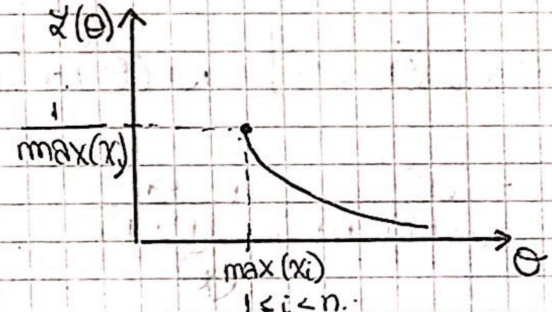
$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x < \theta\}$$

$\downarrow$

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{\max_{1\leq i \leq n}(x_i) < \theta\}.$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_{MV}(\underline{X}^{(n)}) = \max_{1 \leq i \leq n}(x_i) = X_{(n)}$: maximo muestral.

$\Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \max(X_n)$.



c) $F_{\hat{\theta}}(x) = \frac{x^n}{\theta^n} \mathbb{1}\{0 < x < \theta\} + \mathbb{1}\{x > 0\}. = P(U_1 \leq u, U_2 < u) = \frac{u^2}{\theta^2}$.

$\downarrow$

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}\{0 < x < \theta\}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \int_0^\theta \frac{x x^{n-1} n}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{n+1} \frac{\theta^{\cancel{n+1}}}{\cancel{\theta^n}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \frac{n\theta}{n+1}}$$ ✓

$$B[\hat{\theta}] = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = \frac{-\theta}{n-1}$$ NO ES INSESGADO.

PERO ES ASINTÓTICAMENTE INSESGADO.

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}^2] = \int_0^{\theta} x^2 \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n}{n+2} \theta^2$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}^2] - \mathbb{E}[\hat{\theta}]^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}$$

$n^3 + 2n^2 + n$

$n^3 + 2n^2$

$$= \frac{\theta^2 [n(n+1)^2 - n^2(n+2)]}{(n+1)^2 (n+2)}$$

$$\boxed{Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2 (n+2)}}$$

converge en media cuadratico: calcular ECM y ver si lim da cero

$$ECM(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}) + B^2(\theta)$$

$$= \underbrace{\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2}}_{(*)}$$

$\lim_{n \to \infty} (*) = 0.$ ✓ cv en media cuadratico.

9.8 X: tamaño de ciertos archivos.

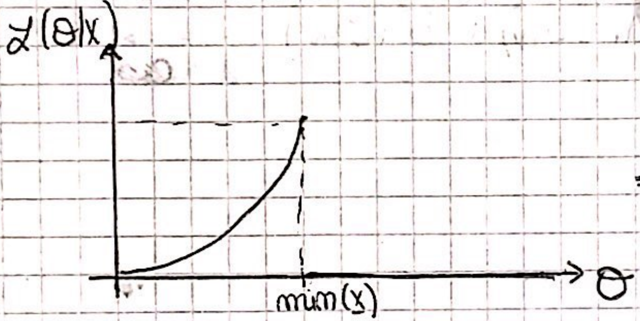
$$f_\theta(x) = \frac{3\theta^3}{x^4}\,\mathbb{1}\{x \geq 0\} \qquad \theta > 0.$$

$\downarrow$

$X \sim \text{Paretto}(0, 3) \qquad \Theta = (0, +\infty).$

a) EMV de θ basada en X_n.

$$\mathcal{L}(\theta \mid \underline{x}) = 3^n \theta^{3n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{-4} \right) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i > \theta\}}_{\mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > \theta\}}.$$



$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MV} = \min\{\underline{x}\}}$$

b) Esperanza y Var del $\hat{\theta}_{MV}$

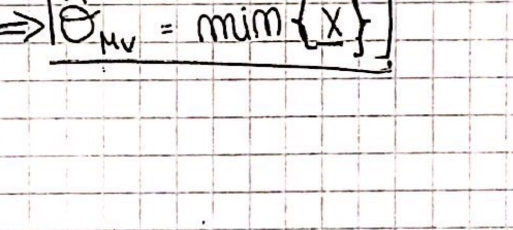
el mínimo sea mayor = todos tienen que ser mayores.

$$\mathbb{P}(\min\{\underline{x}\} > t) = \mathbb{P}^n(X_1 > t) = (*)$$

$$\mathbb{P}(X_1 > t) = \int_t^{\infty} f_\theta(x)\,dx = \mathbb{1}\{t < \theta\} + \mathbb{1}\{t > \theta\}\, 3\theta^3 \left. \frac{x^{-3}}{-3} \right|_t^{\infty}.$$

$$\mathbb{P}(X_1 > t) = \mathbb{1}\{t < \theta\} + \mathbb{1}\{t > \theta\}\, \cancel{3}\theta^3 \frac{t^{-3}}{\cancel{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(*) = \begin{cases} \left(\dfrac{\theta}{t}\right)^{3n} & \text{si } t > \theta \\ 1 & \text{si } t < \theta. \end{cases}}$$



esa área es la esperanza (Δ).

$$(\Delta) = \mathbb{E}[\min(\underline{x})] = \theta + \int_\theta^{\infty} \left(\frac{\theta}{t}\right)^{3n} dt = \theta + \theta^{3n} \frac{t^{-3n+1}}{-3n+1} = \theta + \frac{\theta^{3n}\,\theta^{-3n+1}}{3n \pm 1}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[\underbrace{\min\{\underline{X}\}}_{\theta}] = \theta + \frac{\theta}{3n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta}$$ es asintótic. insesgado.

$$\mathbb{E}[\min\{\underline{X}\}^2] = \int_0^\infty 2t\,\mathbb{P}(\min\{\underline{X}\} \geq t) = \int_0^\theta 2t\,dt + \int_\theta^\infty 2t\,\frac{\theta^{3n}}{t^{3n}}\,dt.$$

$$= \theta^2 + 2\theta^{3n}\left.\frac{t^{-3n+2}}{-3n+2}\right|_\theta^\infty = \theta^2 + 2\theta^{3n}\frac{\theta^{-3n+2}}{3n-2} = \theta^2 + \frac{2\theta^2}{3n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta^2$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\min\{\underline{X}\}) = \theta^2 + \frac{2\theta^2}{3n-2} - \left(\theta + \frac{\theta}{3n-1}\right)^2}$$

c) $ECM(\hat{\theta}_{MV}) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_{MV} - \theta)^2] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_{MV}) + B^2(\theta_{MV}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

12/11

9.10) X = duración en años de cierto tipo de disp.

función intensidad: $\lambda(x) = \frac{3}{\theta^3} x^2 \mathbb{1}\{x>0\}$.

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)\,dt} \quad \Delta \longrightarrow$$

$$= 1 - e^{-\int_0^x \frac{3}{\theta^3} t^2\,dt}\, \mathbb{1}\{x>0\} = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^3} \mathbb{1}\{x>0\}.$$

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^3} \mathbb{1}\{x>0\} \qquad X \sim \text{Weibull}(3, \theta).$$

a) Hallar un est. suficiente para θ basado en M.A de n disposit.

$$f_\theta(x) = \underbrace{3x^2 \mathbb{1}\{x>0\}}_{h(x)}\, e^{\underbrace{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^3 - 3\ln\theta}_{l(\theta)}}$$

$T(x) = x^3 \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^3$

$\eta(\theta) = -1/\theta^3$

$\xi(\theta) = 3\ln\theta$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n X_i^3 \text{ es est. suficiente.}}$$

b) EMV de θ

$$\hat{\theta}_{MV} \in \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\ L(\theta|X).$$

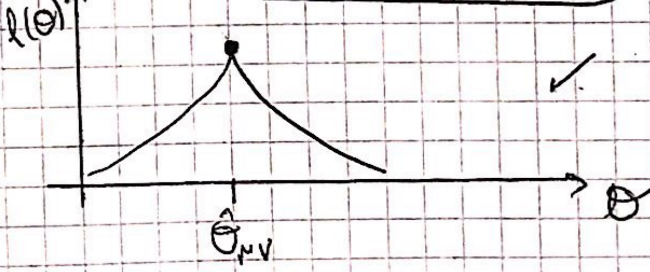
como es flia exponencial puedo derivar el exp.

para que sea MÁX

$$l'(\theta) = \frac{3\sum X_i^3}{\theta^4} - \frac{3n}{\theta} \overset{\downarrow}{=} 0 \implies \boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{\left(\sum X_i^3\right)^{1/3}}{n^{1/3}}}$$

$$\frac{\cancel{3}\sum X_i^3}{\theta^{\cancel{4}3}} = \frac{\cancel{3}n}{\cancel{\theta}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sum X_i^3}{n}} = \theta$$



✓

c) Simular 10 valores de X cuando $\theta = 1$. calcular EMV de $\hat{\theta}$

usando 0,186 0,178 0,488 0,255 0,392

0,234 0,597 0,205 0,611 0,651

$$\mu = 1 - e^{-x^3} \longrightarrow x^3 = -\ln(1-\mu)$$

$$x = \sqrt[3]{-\ln 1 - \mu}$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} -\ln(1-\mu_i)\right)^{1/3} = \frac{1}{10^{1/3}} \ln\left(\prod_{i=1}^{10}(1-\mu_i)\right) = 0,81$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = 0,81}$$

d) 10 máquinas 2.00 5,48 2,43 1,90 3,62

5.85 1,58 2,30 2,87 2,71

EMV de θ

$$\hat{\theta}_{MV} = \left(\frac{1}{10}\sum x_i\right)^{1/3} = \boxed{3,68}$$

Rta final

$$\hat{\mathbb{P}}_{MV}(X > 2,5) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}_{\hat{\theta}_{MV}}(X > 2,5) = e^{-\left(\frac{2,5}{3,68}\right)^3} = \boxed{0,73}$$

invarianza

uso $\triangle$ $1 - F_\theta(x)$

P 12/11

$\rightarrow 129 \cdot \frac{3}{7} \cong 55{,}28$ (*)

9.11 Votaron 129 ciudados

Se extrajeron (s/repos) 7 sobres al azar → hubo 3 verdes

$V = \#$ verdes

Estimador por MV # de votos por el candidato verde que había en la urna

$\Theta = \{3, 4, 5, \dots\ 124, 125\}.$

$$f_V(3) = \frac{\binom{V}{3}\binom{129-V}{4}}{\binom{129}{7}} = S_V$$

porque es una hipergeom.

$$\boxed{\frac{S_{V+1}}{S_V}} = \frac{\binom{V+1}{3}\binom{128-V}{4}}{\binom{V}{3}\binom{129-V}{4}} = \frac{\frac{(V+1)!}{\cancel{3!}(V-2)!}}{\frac{V!}{\cancel{3!}(V-3)!}} \quad \frac{\frac{(128-V)!}{\cancel{4!}(124-V)!}}{\frac{(129-V)!}{\cancel{4!}(125-V)!}}$$

$$\frac{S_{V+1}}{S_V} = \frac{(V+1)}{(V-2)}\frac{(125-V)}{(129-V)} \geq 1 \iff (V-2)(129-V) \leq (V+1)(125-V)$$

para que sea creciente esto tiene que ser mayor o igual a 1

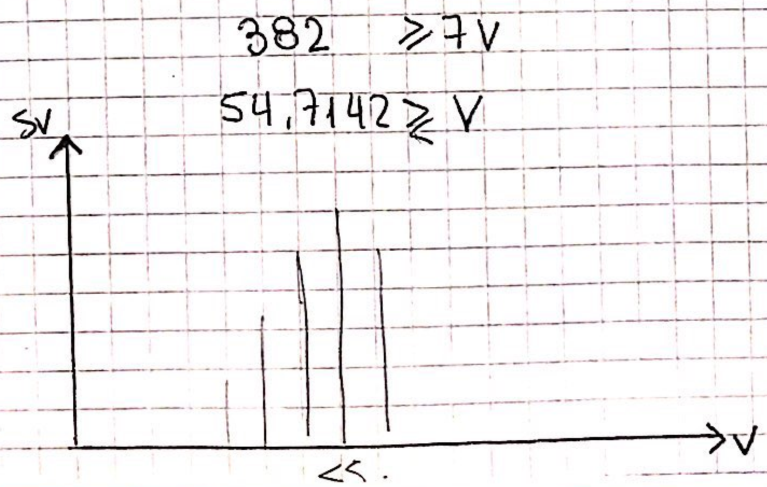
$$\cancel{-V^2} + 124V + 125 \geq \cancel{-V^2} + 131V - 258$$

$$382 \geq 7V$$

$$54{,}7142 \geq V$$

lo evalúo en 54, 55 y 56

es el max



$$\boxed{\hat{V}_{MV} = 55}$$ (*)

9.12) $\Gamma(v, \lambda)$ es flia expon a 2 parametros. Mostrar.

Hallar un estimador suficiente para (v, λ) basado en una muestra Aleat. de tamaño n.

$$f_\theta(x) = \frac{\lambda^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}\{x>0\}$$

$$= \mathbb{1}\{x>0\} e^{v \ln(\lambda) - \ln(\Gamma(v)) + (v-1)\ln(x) - \lambda x}$$

$$= \underbrace{\mathbb{1}\{x>0\}}_{A(x)} e^{\underbrace{(\ln(x), x)}_{T(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} v-1 \\ -\lambda \end{pmatrix}} + v \ln(\lambda) - \ln(\Gamma(v))}$$ ✓ es flia exponencial

porque es flia exp.

$T(\underline{x}) = (\sum \ln(x_i), x_i)$ es est. suf.

I 5/11

9.13) $\underline{X}^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ M.A de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) $\theta = (\mu, \sigma^2)$

por ser normal $\longrightarrow f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

densidad conjunta $\longrightarrow f_{\theta, \underline{X}^{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$$= e^{-\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2}}$$

$$= e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln(\sqrt{2\pi}\sigma)} \cdot e^{\underbrace{(x, x^2)}_{\vec{T}(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu/\sigma^2 \\ -1/2\sigma^2 \end{pmatrix}}_{\vec{\eta}(\theta)^{(t)}}}$$ $\longrightarrow$ traspuesta

$$\eta(\theta) = \begin{array}{cc} \eta(\theta) & h_1(\theta) \\ \end{array} \left(\mu/\sigma^2 \, ; \, -1/2\sigma^2 \right)$$

$$T(x) = \left(\overset{T_1(x)}{x} \, ; \, \overset{T_2(x)}{x^2} \right)$$

volviendo a la conjunta $\longrightarrow f_{\theta, \underline{X}^{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{\mu^2}{\sigma^2} \ln(\sqrt{2\pi}\sigma)} e^{(x_i, x_i^2)\begin{pmatrix} \mu/\sigma^2 \\ -1/\sigma^2 \end{pmatrix}}$

???

$$= e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - n\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)} e^{(\Sigma x_i, \Sigma x_i^2)\begin{pmatrix} \mu/\sigma^2 \\ -1/2\sigma^2 \end{pmatrix}}$$

$\therefore T^* = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)$ es estad. suf. para $\theta = (\mu, \sigma^2)$

DATOS para el 9 B → d) $\hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2$.

(9.14) Se arroja un dado piramidal n veces.

$\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

X_1 = # de lanzamientos en los que el dado cae en la cara 1
X_2 = " 2
X_3 = " 3
X_4 = " 4

Mostrar que la dist. de $(X_1\ X_2\ X_3\ X_4) \in$ flia exp. de 3 param.

¿Por qué no 4?
porque $\sum p_i = 1$ entonces uno queda definido.
$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$
$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$.

$(X_1\ X_2\ X_3\ X_4) \sim \mathcal{M}(n, (p_1, p_2, p_3, p_4))$

$$\Theta = \left\{ (p_1, p_2, p_3) : \begin{array}{l} p_1 > 0 \\ p_2 > 0 \\ p_3 > 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 < 1 \end{array} \right\}$$

porque es multin.

$$f_\theta(X_1, X_2, X_3, X_4) = \underbrace{\frac{n!}{X_1!\,X_2!\,X_3!\,X_4!}}_{h(X)} p_1^{X_1} p_2^{X_2} p_3^{X_3} (1 - p_2 - p_3 - p_1)^{X_4}\, \mathbb{1}\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = n\}$$

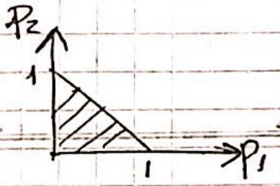
$$= h(X)\, e^{X_1 \ln(p_1) + X_2 \ln(p_2) + X_3 \ln(p_3) + \overset{= n - X_1 - X_2 - X_3}{X_4} \ln(1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)}$$

$$= \underbrace{(X_1\ X_2\ X_3)}_{T(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} \ln\left(\frac{p_1}{1 - p_1 - p_2 - p_3}\right) \\ \ln\left(\frac{p_2}{1 - p_1 - p_2 - p_3}\right) \\ \ln\left(\frac{p_3}{1 - p_1 - p_2 - p_3}\right) \end{pmatrix}}_{\eta(\theta)} \underbrace{+ n \ln(1 - p_1 - p_2 - p_3)}_{-\xi(\theta)}.$$

12/11

9.15 1200 ciudados. → 414 oficialistas. p_1
196 neutrales. $1-p_1-p_2$
resto opositores (590). p_2

Estimar por MV $(p_1, p_2)=\theta$



p_1: $\mathbb{P}$ de que sea oficialista
p_2: $\mathbb{P}$ " " " opositor.

$$L(\theta|X)=\frac{1200!}{414!\,196!\,590!}\,p_1^{414}\,p_2^{590}\,(1-p_1-p_2)^{196}.$$

$$=\frac{1200!}{414!\,196!\,590!}\,e^{\overbrace{414\ln p_1+590\ln p_2+196\ln(1-p_1-p_2)}^{(*)}}.$$

es flia exponencial

puedo maximar (*).

$\frac{\partial}{\partial p_1}$ $\frac{414}{\hat{p}_1}-\frac{196}{1-\hat{p}_1-\hat{p}_2}=0.$

$\frac{\partial}{\partial p_2}$ $\frac{590}{\hat{p}_2}-\frac{196}{1-\hat{p}_1-\hat{p}_2}=0.$

Propongo: $\boxed{\hat{p}_1=\frac{414}{1200}}$ $\boxed{\hat{p}_2=\frac{590}{1200}}$

$1200-1200=0$ ✓

$1200-1200=0$ ✓