PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Primer recuperatorio — Segundo cuatrimestre – 2017

Duración: 4 horas. — 18/XI/17 – 13:00 hs.

---

1. Se extraen cuatro bolas al azar sin reposición de una urna que contiene 3 bolas rojas y 5 verdes. Las bolas rojas están numeradas del 1 al 3. Calcular la probabilidad de que se haya extraído la bola 1 sabiendo que alguna de las bolas extraídas fue roja.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.14**] Indicaremos mediante A al evento de que se extraiga la bola 1, y mediante B al evento de que alguna de las bolas extraídas sea roja. Se quiere calcular la probabilidad condicional $\mathbf{P}(A|B)$. Usando la definición de probabilidad condicional y que la bola 1 es roja se obtiene que

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Combinatoria de por medio, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= 1 - \mathbf{P}(A^c) = 1 - \frac{\binom{1}{0}\binom{7}{4}}{\binom{8}{4}} = 1 - \frac{35}{70} = \frac{1}{2}, \\
\mathbf{P}(B) &= 1 - \mathbf{P}(B^c) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} = 1 - \frac{5}{70} = \frac{13}{14}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{P}(A|B) = 7/13$. □

---

2. Una catacumba será iluminada con 4 antorchas cuyas duraciones (en horas) son independientes y cada una de las cuales se mantiene encendida durante un tiempo aleatorio con función de densidad $f(t) = \frac{2}{t^2}\mathbf{1}\{t > 2\}$. La catacumba se mantendrá iluminada mientras alguna de las antorchas se mantenga encendida. Las cuatro antorchas se encenderán simultáneamente a las 0:00 del 1 de enero. Usando los números aleatorios 0.118, 0.843, 0.346 y 0.728 simular las duraciones de las 4 antorchas y a partir de esos valores determinar hasta qué hora la catacumba se mantendrá iluminada.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.13**] Sea T el tiempo durante el cual una antorcha se mantiene encendida. De acuerdo con el **Ejercicio 2.13** para simular un valor de T usando una variable aleatoria $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ se hace lo siguiente: $\hat{T}(U) = F_T^{-1}(U)$. Como para cada $t > 2$ se tiene que

$$\mathbf{P}(T \leq t) = \int_2^t \frac{2}{\tau^2} d\tau = -\frac{2}{\tau}\Big|_2^t = 1 - \frac{2}{t},$$

la función de distribución de T es

$$F_T(t) = \left(1 - \frac{2}{t}\right)\mathbf{1}\{t \geq 2\}.$$

Sea $u \in (0,1)$, observando que $F_T(t) = u \iff 1 - \frac{2}{t} = u \iff \frac{2}{t} = 1 - u$, se obtiene que $F_T^{-1}(u) = \frac{2}{1-u}$. Por lo tanto, las simulaciones de las duraciones en horas de cada una de las cuatro antorchas son:

u	0.118	0.843	0.346	0.728
$F_T^{-1}(u)$	2.2676	12.739	3.0581	7.3529

De acuerdo con esos valores la última antorcha se apagará en 12.739 horas. Por lo tanto, la catacumba se mantendrá iluminada hasta las 12:44:20. □

---

3. La corporación *Cobani Products* produce lotes de RoboCops. La proporción de RoboCops fallados tiene distribución $\beta(1,2)$. Sabiendo que la proporción de RoboCops fallados en un lote es mayor que 1/2 calcular la esperanza de la proporción de RoboCops fallados en dicho lote.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 3.7**] Sea X la proporción de RoboCops fallados en el lote. Se sabe que la densidad de la distribución $\beta(1,2)$ es $f_X(x) = 2(1-x)\mathbf{1}\{0 < x < 1\}$. Se quiere calcular $\mathbf{E}[X|X > 1/2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X|X > 1/2] &= \frac{\mathbf{E}[X\mathbf{1}\{X > 1/2\}]}{\mathbf{P}(X > 1/2)} = \frac{\int_{1/2}^1 x \cdot 2(1-x)dx}{\int_{1/2}^1 2(1-x)dx} \\
&= \frac{\int_0^{1/2} 2x(1-x)dx}{\int_0^{1/2} 2xdx} = \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

porque

$$\int_0^{1/2} 2x(1-x)dx = 2\left(\frac{(1/2)^2}{2} - \frac{(1/2)^3}{3}\right) = \frac{1}{6} \text{ y } \int_0^{1/2} 2xdx = \frac{1}{4}.$$

□

---

4. Lucas y Monk esperan para ser atendidos en la fila de un cajero. El cajero demora tiempos exponenciales independientes de media 5 minutos para atender a cada cliente. Si el tiempo de atención para Lucas fue menor que el tiempo de atención para Monk, hallar la función de distribución del tiempo total de atención de ambos.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.14**] Sean L y M los tiempos de atención (en minutos) para Lucas y Monk, respectivamente. Se sabe que $L \sim \mathcal{E}(1/5)$, que $M \sim \mathcal{E}(1/5)$, y que L y M son independientes. Se quiere hallar la función de distribución

$$F_{L+M|L<M}(t) := \mathbf{P}(L + M \leq t | L < M) = \frac{\mathbf{P}(L + M \leq t,\, L < M)}{\mathbf{P}(L < M)}.$$

Para $t < 0$ la probabilidad que aparece en el lado derecho de la igualdad es igual a 0; para $t \geq 0$ dicha probabilidad se puede obtener calculando integrales:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(L + M \leq t, L < M) &= \int_0^{t/2} \left(\int_\ell^{t-\ell} f_{L,M}(\ell, m) dm \right) d\ell \\
&= \int_0^{t/2} (1/5)e^{-\ell/5} \left(\int_\ell^{t-\ell} (1/5)e^{-m/5} dm \right) d\ell \\
&= \int_0^{t/2} (1/5)e^{-\ell/5} \left(e^{-\ell/5} - e^{-(t-\ell)/5} \right) d\ell \\
&= \int_0^{t/2} \left((1/5)e^{-2\ell/5} - (1/5)e^{-t/5} \right) d\ell \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - e^{-t/5} - \frac{t}{5} e^{-t/5} \right).
\end{aligned}$$

Y como $\mathbf{P}(L < M) = 1/2$ resulta que

$$F_{L+M|L<M}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-t/5}\left(1 + \frac{t}{5}\right) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

□

5. Se tira repetidas veces una moneda con probabilidad 0.4 de cara. Sea N la cantidad de tiradas hasta que la diferencia entre la cantidad de caras y cecas observadas sea 2. Calcular $\mathbf{E}[N]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.13**] Indicamos mediante H_i, $i = 1, 2$ al evento de que el i-ésimo resultado del tiro la moneda fue cara, y mediante T_i, $i = 1, 2$ al evento de que el i-ésimo resultado del tiro la moneda fue ceca. Observamos que

$$N|H_1H_2 \sim 2, \quad N|H_1T_2 \sim 2+N, \quad N|T_1H_1 \sim 2+N, \quad N|T_1T_2 \sim 2.$$

Usando la fórmula de probabilidades totales obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[N] &= \mathbf{E}[N|H_1H_2]\mathbf{P}(H_1H_2) + \mathbf{E}[N|H_1T_2]\mathbf{P}(H_1T_2) \\
&\quad + \mathbf{E}[N|T_1H_2]\mathbf{P}(T_1H_2) + \mathbf{E}[N|T_1T_2]\mathbf{P}(T_1T_2) \\
&= 2(0.4)^2 + \mathbf{E}[2+N](0.4)(0.6) + \mathbf{E}[2+N](0.6)(0.4) + 2(0.6)^2.
\end{aligned}$$

Usando la propiedad de linealidad del operador esperanza obtenemos que

$$\mathbf{E}[N] = 2 + 2\mathbf{E}[N](0.4)(0.6) = 2 + 0.48\mathbf{E}[N].$$

Por lo tanto, $\mathbf{E}[N] = 2/0.52 = 3.8462$. $\square$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Primer recuperatorio — Segundo cuatrimestre – 2017

Duración: 4 horas. — 18/XI/17 – 13:00 hs.

---

1. Una catacumba será iluminada con 4 antorchas cuyas duraciones (en horas) son independientes y cada una de las cuales se mantiene encendida durante un tiempo aleatorio con función de densidad $f(t) = \frac{2}{t^2}\mathbf{1}\{t > 2\}$. La catacumba se mantendrá iluminada mientras alguna de las antorchas se mantenga encendida. Las cuatro antorchas se encenderán simultáneamente a las 0:00 del 1 de enero. Usando los números aleatorios 0.118, 0.843, 0.346 y 0.728 simular las duraciones de las 4 antorchas y a partir de esos valores determinar hasta qué hora la catacumba se mantendrá iluminada.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.13**] Sea T el tiempo durante el que una antorcha se mantiene encendida. De acuerdo con el **Ejercicio 2.13** para simular un valor de T usando una variable aleatoria $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ se hace lo siguiente: $\hat{T}(U) = F_T^{-1}(U)$. Como para cada $t > 2$ se tiene que

$$\mathbf{P}(T \leq t) = \int_2^t \frac{2}{\tau^2} d\tau = -\frac{2}{\tau}\bigg|_2^t = 1 - \frac{2}{t},$$

la función de distribución de T es

$$F_T(t) = \left(1 - \frac{2}{t}\right)\mathbf{1}\{t \geq 2\}.$$

Sea $u \in (0, 1)$, observando que $F_T(t) = u \iff 1 - \frac{2}{t} = u \iff \frac{2}{t} = 1 - u$, se obtiene que $F_T^{-1}(u) = \frac{2}{1-u}$. Por lo tanto, las simulaciones de de las duraciones en horas de cada una de las cuatro antorchas son:

u	0.118	0.843	0.346	0.728
$F_T^{-1}(u)$	2.2676	12.739	3.0581	7.3529

De acuerdo con esos valores la última antorcha se apagará en 12.739 horas. Por lo tanto, la catacumba se mantendrá iluminada hasta las 12:44:20. □

---

2. Lucas y Monk esperan para ser atendidos en la fila de un cajero. El cajero demora tiempos exponenciales independientes de media 5 minutos para atender a cada cliente. Si el tiempo de atención para Lucas fue menor que el tiempo de atención para Monk, hallar la función de distribución del tiempo total de atención de ambos.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.14**] Sean L y M los tiempos de atención (en minutos) para Lucas y Monk, respectivamente. Se sabe que $L \sim \mathcal{E}(1/5)$, que $M \sim \mathcal{E}(1/5)$, y que L y M son independientes. Se quiere hallar la función de distribución

$$F_{L+M|L<M}(t) := \mathbf{P}(L + M \leq t | L < M) = \frac{\mathbf{P}(L + M \leq t,\, L < M)}{\mathbf{P}(L < M)}.$$

Para $t < 0$ la probabilidad que aparece en el lado derecho de la igualdad es igual a 0; para $t \geq 0$

dicha probabilidad se puede obtener calculando integrales:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(L+M\leq t, L<M) &= \int_0^{t/2}\left(\int_\ell^{t-\ell} f_{L,M}(\ell,m)dm\right)d\ell\\
&= \int_0^{t/2}(1/5)e^{-\ell/5}\left(\int_\ell^{t-\ell}(1/5)e^{-m/5}dm\right)d\ell\\
&= \int_0^{t/2}(1/5)e^{-\ell/5}\left(e^{-\ell/5}-e^{-(t-\ell)/5}\right)d\ell\\
&= \int_0^{t/2}\left((1/5)e^{-2\ell/5}-(1/5)e^{-t/5}\right)d\ell\\
&= \frac{1}{2}\left(1-e^{-t/5}-\frac{t}{5}e^{-t/5}\right).
\end{aligned}$$

Y como $\mathbf{P}(L<M)=1/2$ resulta que

$$F_{L+M|L<M}(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0,\\ 1-e^{-t/5}\left(1+\frac{t}{5}\right) & \text{si } t\geq 0.\end{cases}$$

$\square$

---

3. Un motoquero transita por una avenida. Las probabilidades de que al momento de llegar a un semáforo este se encuentre en rojo, amarillo o verde son 0.4, 0.1 y 0.5 respectivamente. Los estados de los semáforos son independientes y el motoquero sólo se detiene al encontrar un semáforo en rojo. Calcular la covarianza entre la cantidad de luces verdes y la cantidad de luces amarillas que atravesó hasta detenerse.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 6.20** y **Ejercicio 5.15**] Sea N la cantidad de semáforos observados por el motoquero hasta que se encontró con un semáforo en rojo. Sean N_v y N_a la cantidad de luces verdes y amarillas atravesadas por el motoquero hasta que se detuvo. Tenemos que $N\sim\mathcal{G}(0.4)$ y que $N_v+N_a=N-1$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}(N_v,N_a) &= \mathbf{cov}(N_v,N-1-N_v)\\
&= \mathbf{cov}(N_v,N)-\mathbf{cov}(N_v,1)-\mathbf{cov}(N_v,N_v)\\
&= \mathbf{cov}(N_v,N)-\mathbf{var}(N_v),
\end{aligned}$$

y el problema se reduce a calcular $\mathbf{cov}(N_v,N)$ y $\mathbf{var}(N_v)$.

Cuando se sabe que un semáforo no está en rojo, la probabilidad condicional de que se encuentre en verde es $\frac{0.5}{0.5+0.1}=\frac{5}{6}$ y en consecuencia,

$$N_v|N=n\sim\mathcal{B}\left(n-1,\,\frac{5}{6}\right).$$

De donde se deduce que $\mathbf{E}[N_v|N]=\frac{5}{6}(N-1)$ y $\mathbf{var}(N_v|N)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}(N-1)=\frac{5}{36}(N-1)$.

Para calcular $\mathbf{cov}(N_v,N)$ podemos observar que la esperanza condicional $\mathbf{E}[N_v|N]$ es una función lineal de N, motivo por el cual coincide con la recta de regresión de N_v dada N; y como la pendiente de esa recta es igual a $\frac{\mathbf{cov}(N_v,N)}{\mathbf{var}(N)}$ se obtiene que $\mathbf{cov}(N_v,N)=\frac{5}{6}\mathbf{var}(N)$.

Al mismo resultado se puede llegar teniendo en cuenta que las propiedades de la esperanza condicional, $\mathbf{E}[\mathbf{E}[N_v|N]]=\mathbf{E}[N_v]$ y $\mathbf{E}[N_vN|N]=N\mathbf{E}[N_v|N]$, implican que $\mathbf{cov}(N_v,N)=\mathbf{cov}(\mathbf{E}[N_v|N],N)$:

$$\mathbf{cov}(N_v,N)=\mathbf{cov}(\mathbf{E}[N_v|N],N)=\mathbf{cov}\left(\frac{5}{6}(N-1),N\right)=\frac{5}{6}\mathbf{cov}(N,N)=\frac{5}{6}\mathbf{var}(N).$$

Ahora bien, como $N \sim \mathcal{G}(2/5)$, resulta que $\mathbf{E}[N] = \frac{5}{2}$ y $\mathbf{var}(N) = \frac{3/5}{(2/5)^2} = \frac{15}{4}$, obtenemos que

$$\mathbf{cov}(N_v, N) = \frac{5}{6} \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{24}.$$

Para calcular $\mathbf{var}(N_v)$ aplicamos el *Teorema de Pitágoras*:

$$\begin{aligned}\mathbf{var}(N_v) &= \mathbf{E}[\mathbf{var}(N_v|N)] + \mathbf{var}(\mathbf{E}[N_v|N]) = \mathbf{E}\left[\frac{5}{36}(N-1)\right] + \mathbf{var}\left(\frac{5}{6}(N-1)\right) \\ &= \frac{5}{36}\left(\mathbf{E}[N]-1\right) + \frac{25}{36}\mathbf{var}(N) = \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{2} + \frac{25}{36} \cdot \frac{15}{4} = \frac{405}{144}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathbf{cov}(N_v, N_a) = \mathbf{cov}(N_v, N) - \mathbf{var}(N_v) = \frac{75}{24} - \frac{405}{144} = \frac{1080}{3456} = \frac{5}{16}.$$

□

---

4. A la posada *El Póney Pisador* ingresarán tres tipos de clientes de la *Tierra Media*: *hobbits*, *elfos* y *dwarves*. Los *hobbits*, los *elfos* y los *dwarves* ingresarán de acuerdo con tres procesos de Poisson independientes de intensidades $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$ por hora, respectivamente. *El Póney Pisador* abrirá sus puertas a las 0:00. Calcular la probabilidad de que el cuarto cliente de la *Tierra Media* ingrese después de las 0:30 y entre los primeros tres haya por lo menos un *hobbit* y por lo menos un *elfo*.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 7.12**] Desde que abre sus puertas, el proceso de ingresos de clientes de la *Tierra Media* a *El Póney Pisador* es el proceso de Poisson superpuesto

$$\Pi = \Pi_h \cup \Pi_e \cup \Pi_d = \{S_n : n \geq 1\},$$

donde Π_h, Π_e y Π_d son los procesos de Poisson que regulan los ingresos a la posada de los *hobbits*, los *elfos* y los *dwarves*, respectivamente. Sean

$$X_h := \sum_{i=1}^{3} \mathbf{1}\{S_i \in \Pi_h\},\ X_e := \sum_{i=1}^{3} \mathbf{1}\{S_i \in \Pi_e\}\ \text{ y } X_d := \sum_{i=1}^{3} \mathbf{1}\{S_i \in \Pi_d\}$$

las cantidades de *hobbits*, *elfos* y *dwarves* entre los tres primeros clientes que ingresan a la posada. Se quiere calcular $\mathbf{P}\left(S_4 > 0.5, X_h \geq 1, X_e \geq 1\right)$. De acuerdo con el *Teorema de superposición y competencia de procesos de Poisson independientes* tenemos que

(i) S_4 y (X_h, X_e, X_d) son independientes.

(ii) $S_4 \sim \Gamma(4, \lambda)$, donde $\lambda = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{53}{30}$. Esto es, $S_4 \sim \Gamma\left(4, \frac{53}{30}\right)$.

(iii) $(X_h, X_e, X_d) \sim \text{Mul}(3, p_h, p_e, p_d)$, donde $p_h = \frac{3}{5} \cdot \frac{30}{53} = \frac{18}{53}$, $p_e = \frac{2}{3} \cdot \frac{30}{53} = \frac{20}{53}$ y $\frac{1}{2} \cdot \frac{30}{53} = \frac{15}{53}$. Esto es, $(X_h, X_e, X_d) \sim \text{Mul}\left(3, \frac{18}{53}, \frac{20}{53}, \frac{15}{53}\right)$.

De (i) se obtiene que

$$\mathbf{P}\left(S_4 > 0.5, X_h \geq 1, X_e \geq 1\right) = \mathbf{P}\left(S_4 > 0.5\right) \mathbf{P}\left(X_h \geq 1, X_e \geq 1\right).$$

De (ii) se obtiene que

$$\mathbf{P}\left(S_4 > 0.5\right) = e^{-\frac{53}{60}} \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!}\left(\frac{53}{60}\right)^i = e^{-\frac{53}{60}}\left(1 + \frac{53}{60} + \frac{1}{2}\left(\frac{53}{60}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{53}{60}\right)^3\right) \approx 0.98735$$

De (iii) se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_h \geq 1, X_e \geq 1) &= 1 - \mathbf{P}(X_h = 0 \vee X_e = 0) \\ &= 1 - \left(\mathbf{P}(X_h = 0) + \mathbf{P}(X_e = 0) - \mathbf{P}(X_h = 0, X_e = 0)\right) \\ &= 1 - \left(\left(\frac{35}{53}\right)^3 + \left(\frac{33}{53}\right)^3 - \left(\frac{15}{53}\right)^3\right) \approx 0.49329.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{P}\left(S_4 > 0.5, X_h \geq 1, X_e \geq 1\right) \approx 0.98735 \cdot 0.49329 \approx 0.48705$. □

---

5. María prepara una *Chocotorta* utilizando los siguientes ingredientes: un pote de dulce de leche de 500 gramos, un pote de crema de 250 gramos, y 121 galletitas de chocolate. Los pesos en gramos de las galletitas de chocolate son variables aleatorias independientes de media 3.75 y desvío estándar 0.5. ¿A cuántas personas, como máximo, les podrá convidar *Chocotorta* si pretende que cada una reciba una porción de 40 gramos con una probabilidad no menor que 0.95?

R. [*Referencia*: **Ejercicio 8.16**] Indicamos mediante W_i, $i = 1, \dots, 121$ el peso en gramos de la i-ésima galletita de chocolate. El peso total de la *Chocotorta* es $750 + \sum_{i=1}^{121} W_i$. Se quiere hallar el máximo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{P}\left(750 + \sum_{i=1}^{121} W_i > 40n\right) \geq 0.95.$$

Se observa que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{121} W_i\right] = 121(3.75) = 453.75$ y que $\mathbf{var}\left(\sum_{i=1}^{121} W_i\right) = 121(0.5)^2 = 30.25$. De acuerdo con el *Teorema central del límite* tenemos que

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{121} W_i - 453.75}{\sqrt{30.25}} \leq z\right) \approx \Phi(z).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(750 + \sum_{i=1}^{121} W_i > 40n\right) &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{121} W_i > 40n - 750\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{121} W_i - 453.75}{\sqrt{30.25}} > \frac{40n - 750 - 453.75}{\sqrt{30.25}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{40n - 1203.75}{5.5}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
1 - \Phi\left(\frac{40n - 1203.75}{5.5}\right) \geq 0.95 \quad &\iff \quad \frac{40n - 1203.75}{5.5} \leq z_{0.05} = \\
&\iff \quad n \leq \frac{-5.5(1.6449) + 1203.75}{40} = 29.868.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, María le podrá convidar *Chocotorta* a un máximo de 29 personas. □