Guía 3

3.1 Sea X un variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \frac{x^3}{3}\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x < 1\} + \frac{2x+1}{6}\,\mathbf{1}\{1 \leqslant x < 2\} + \mathbf{1}\{x \geqslant 2\}.$$

(**a**) Calcular $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[X|X < 1]$ y $\mathbf{E}[X|X \leqslant 1]$.

3.2 Sea X una variable aleatoria con la función de distribución definida en el **Ejercicio 2.2**.

(**a**) Calcular $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[X|\,|X| = 2]$.

3.3 Hallar la media de las variables aleatorias definidas en el **Ejercicio 2.4**.

3.4 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad en el que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$ y $\mathbf{P}(\{1,2\}) = 1/6$, $\mathbf{P}(\{3,4\}) = 1/3$, $\mathbf{P}(\{5,6\}) = 1/2$.

(**a**) Definir una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \subset X(\Omega)$ y $\mathbf{E}[X] = 0$. ¿Es única?

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[X|X > -1]$ para la variable aleatoria definida en el **Inciso** (**a**)

(**c**) Repetir el **Inciso** (**a**) y el **Inciso** (**b**) para el caso en que $\{-1, 1\} \subset X(\Omega)$.

3.5 La cantidad de moscas que arriban a la mesa de un asado tiene una distribución Poisson de media 10. Calcular la media de la cantidad de moscas que podrán arribar a la mesa del asado si se sabe que no podrán arribar más de 4.

3.6 Sea T una variable aleatoria con distribución exponencial de media 3. Calcular $\mathbf{E}[T|T \leqslant 2]$.

3.7 Sea X un variable aleatoria con función de densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(**a**) Si $f_X(x) = \frac{9!}{3!5!}x^3(1-x)^5\,\mathbf{1}\{0 < x < 1\}$, calcular $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Si $f_X(x) = \frac{1}{6}x^3 e^{-x}\,\mathbf{1}\{x > 0\}$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

(**c**) Hallar $\mathbf{E}[X|X > 1/2]$ con los datos del **Inciso** (**b**).

3.8 Sea Z una variable normal estándar, φ su función de densidad, y sea $z_0 > 0$.

(**a**) Hallar la media de $Z|Z > z_0$ (en función de z_0).

(**b**) Deducir que $1 - \Phi(z_0) \leqslant \frac{\varphi(z_0)}{z_0}$.

(**c**) Comparar la estimación que brinda el inciso anterior para $\mathbf{P}(Z > 3)$ con el valor tabulado.

(**d**) Si $X = \sigma Z + \mu$ y $x_0 > \mu$, hallar la media de $X|X > x_0$ (en función de x_0, μ y σ).

3.9 Sean Z_1 y Z_2 dos variables aleatorias normales estándar (no necesariamente independientes). Demostrar que

$$\mathbf{P}(\text{máx}(Z_1, Z_2) > 5) \leqslant \frac{2e^{-\frac{25}{2}}}{5\sqrt{2\pi}}.$$

3.10 Se construye un círculo uniendo los extremos de un alambre.

(**a**) Si la longitud del alambre L es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 60 cm., calcular la media del área del círculo.

(**b**) Si el área del círculo A es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 15 cm^2, calcular la media del perímetro del círculo.

3.11 Sea T^* la variable aleatoria definida en el **Ejercicio 2.12**. Calcular $\mathbf{E}[T^*]$ y $\mathbf{var}[T^*]$.

3.12 Sean X e Y dos variables aleatorias independientes uniformes sobre el intervalo $(0, \pi)$. Calcular $\mathbf{E}[X \operatorname{sen}(XY)]$.

3.13 Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el triángulo de vértices $(1, 1), (6, 2), (2, 9)$. Calcular $\mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{E}[Y]$.

3.14 Sea X una variable aleatoria a valores en $\{2, 3, 4\}$ tal que $\mathbf{P}(X = x) = p_x$, $x \in \{2, 3, 4\}$, de media 3.

(**a**) Hallar p_2, p_3, p_4 para que $\mathbf{var}[X]$ sea la máxima posible.

(**b**) Hallar p_2, p_3, p_4 para que $\mathbf{var}[X]$ sea la mínima posible.

3.15 Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(8, 10)$.

(**a**) Calcular la media y la varianza de $Y = 2(X - 1)$.

(**b**) Calcular la media de $Y = 2X^2 + 1$.

(**c**) Calcular la media de $Y = 2(X - 1)(X - 3)$.

(**d**) Hallar $\text{mín}_{c \in \mathbb{R}} \mathbf{E}[(X - c)^2]$.

(**e**) Hallar a y b tales que $aX + b$ tenga media 0 y desvío 1.

3.16 La potencia W disipada por una resistencia es proporcional al cuadrado del voltaje V (*i.e.*, $W = rV^2$, donde r es una constante). Calcular $\mathbf{E}[W]$ cuando $r = 3$ y el voltaje tiene distribución normal de media 6 y varianza 1.

3.17 [*ver* **Ejercicio 2.34**] Sean X_1 y X_2 variables de Bernoulli, de parámetros p_1 y p_2.

(**a**) Mostrar que si $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0$, entonces X_1 y X_2 son independientes.

(**b**) Si $p_1 = p_2 = 0.7$ y $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0.1$, hallar $\rho(Y_1, Y_2)$, siendo $Y_1 = X_1(1 - X_2)$, $Y_2 = X_2(1 - X_1)$.

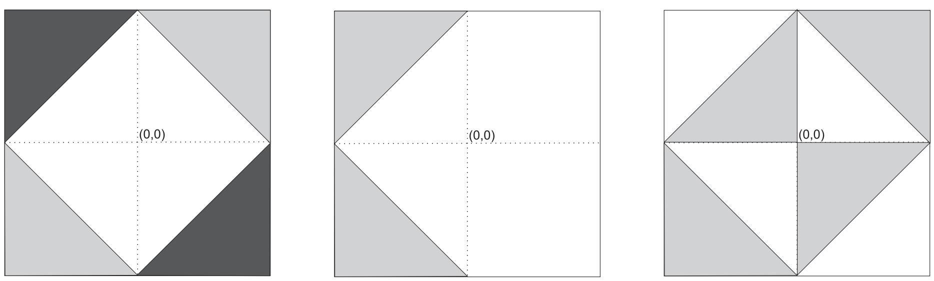
3.18 [*ver* **Ejercicio 2.37**] Se colocan 3 bolas en 3 urnas c_1, c_2, c_3 eligiendo al azar, para cada bola, la urna en que se coloca. Sea X_i la cantidad de bolas en c_i y sea N la cantidad de urnas que contienen alguna bola.

(**a**) Calcular $\mathbf{E}[N]$, $\mathbf{var}[N]$ y $\mathbf{cov}(N, X_1)$.

(**b**) Mostrar que N y X_1 no son independientes.

(**c**) Calcular $\mathbf{cov}(X_i, X_j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$.

3.19 En cada uno de los casos que se ilustran en las siguientes figuras se define una distribución conjunta para las variables X e Y.



(a) (b) (c)

(a) La densidad vale 1 en la región blanca, 1/2 en la región gris clara y 3/2 en la región gris oscura. (b) y (c) La distribución es uniforme en la región grisada.

Hallar en cada caso el signo de la covarianza *sin escribir cuentas.*

3.20 Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el triángulo de vértices $(0, 0), (2, 2), (0, 2)$.

(**a**) Calcular $\mathbf{cov}(X, Y)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{var}[X + Y]$

(**c**) Calcular $\mathbf{cov}(3X - Y + 2, X + Y)$.

3.21 Juan y María hacen una prueba para comparar sus reflejos. Cada uno tiene un pulsador y, cuando una luz se enciende, el que presiona primero gana el duelo. Los tiempos de reacción (en segundos) de cada uno son variables aleatorias independientes uniformes sobre el intervalo $U(0, 2)$. Considerar las variables W: "tiempo de reacción del ganador" y L: "tiempo de reacción del perdedor".

(**a**) Hallar la ecuación de la recta de regresión de L dado W.

(**b**) Calcular el tiempo medio de reacción del ganador si se sabe que el perdedor reaccionó en más de 1 segundo.

3.22 Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \frac{5}{8\pi}e^{-\frac{25}{32}\left(x^2-\frac{6}{5}xy+y^2\right)}$. Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

3.23 Sea X una variable aleatoria positiva de media 15. Demostrar que $\mathbf{P}(X \geqslant 60) \leqslant 0.25$.

3.24 Sea X una variable aleatoria de media 10 y varianza 15. Demostrar que $\mathbf{P}(5 < X < 15) \geqslant 0.4$.

3.25 Los pesos de ciertos paquetes de café son variables aleatorias independientes con distribución normal de media 500 g. y desvío estándar σ. ¿Cómo deben ser los valores de σ para tener una seguridad del 99 % de que el peso promedio de 100 paquetes no se desviará en más de 10 g. de 500 g.?

3.26 Se quiere saber la proporción de fumadores en una población. Para ello se eligen n individuos al azar y se halla la proporción de los que fuman. ¿Qué valor debe tener n para que esta proporción no difiera de la real en más de 0.01, con probabilidad mayor o igual que 0.95?

Ejercicios Complementarios

3.27 La Gorda (110 kg.) y El Flaco (60 kg.) quieren poner un subibaja en su jardín. Tienen un tablón de tres metros, pero no se deciden acerca de en que punto apoyarlo para que resulte equilibrado cuando ambos se sientan, y ya se han golpeado bastante haciendo pruebas. ¿Podría ayudarlos?

3.28 Sea X una variable aleatoria discreta con distribución equiprobable sobre los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Hallar expresiones para $\mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{var}(X)$.

3.29 [ver **Ejercicio 2.40**] Se arroja repetidas veces una moneda equilibrada. Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de tiradas hasta que por primera se obtiene cara en dos tiradas consecutivas". Calcular $\mathbf{E}[N]$.

3.30 Sean X e Y dos variables aleatorias discretas cuya función de probabilidad conjunta $p_{X,Y}(x,y)$ se define por: $p_{X,Y}(-2,-8) = p_{X,Y}(-1,-1) = p_{X,Y}(0,0) = p_{X,Y}(1,1) = p_{X,Y}(2,8) = 1/5$. Sin calcularla, indicar, justificando la respuesta, cuál es el signo de la covarianza entre X e Y.

3.31 Sea B una variable de Bernoulli con parámetro $p = 0.01$.

(**a**) Si $B_1, \ldots, B_{100}$ son $n = 100$ réplicas independientes de B y $\bar{B} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} B_m$ es su promedio. Estimar por simulación $\mathbf{P}(|\bar{B} - p| < 0.03)$ y $\mathbf{P}(|\bar{B} - p| < 0.01)$.

(**b**) Lo mismo del inciso anterior pero con $n = 10000$.

3.32 Sea X una variable aleatoria, $\mu_X = \mu, \sigma_X^2 = \sigma^2$. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia independiente de réplicas de X, y se definen

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{m=1}^{n} X_m}{n} \\ W^2 &= \frac{\sum_{m=1}^{n} (X_m - \mu)^2}{n} \\ T^2 &= \frac{\sum_{m=1}^{n} (X_m - \bar{X})^2}{n} \end{aligned}$$

(**a**) Hallar $\mathbf{E}\left[\bar{X}\right]$ y $\mathbf{var}\left[\bar{X}\right]$, en función de μ y σ^2.

(**b**) Hallar $\mathbf{E}\left[W^2\right]$, en función de μ y σ^2.

(**c**) Mostrar que $T^2 = W^2 - (\bar{X} - \mu)^2$.

(**d**) Usar los incisos anteriores para mostrar que $\mathbf{E}\left[S^2\right] = \sigma^2$, donde $S^2 = \frac{n}{n-1} T^2$.

3.33 Sea X una variable aleatoria que representa la relación de níquel al resto de los metales en una aleación. Los siguientes datos corresponden a 18 muestras de una aleación: 1.75, 1.80, 1.29, 1.58, 0.95, 1.87, 1.99, 1.49, 1.12, 0.39, 1.62, 1.41, 1.35, 0.83, 0.71, 0.51, 1.19, 1.95.

(**a**) Calcular $\bar{X}$ y S^2 (ver **Ejercicio 3.32**).

(**b**) Según una publicación, la concentración de níquel en dicha aleación puede ser modelada a través de la distribución $f_X(x) = x/2\ \mathbf{1}\{0 < x < 2\}$. Comparar los resultados obtenidos en **Inciso** (**a**) con los valores teóricos de media y varianza asociados al modelo propuesto.

(**c**) Construir un histograma y explorar informalmente si el modelo propuesto podría considerarse correcto.

3.34 Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional, tal que X e Y tienen media y varianza finitas, y sea $c = \mathbf{cov}(X, Y)$.

(**a**) Si $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ son n réplicas independientes de (X, Y) y definimos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{E}[X])(Y_i - \mathbf{E}[Y]) \\ B &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \end{aligned}$$

(**b**) Hallar (en términos de c) $\mathbf{E}[A]$.

(**c**) Mostrar que $B = A - (\bar{X} - \mathbf{E}[X])(\bar{Y} - \mathbf{E}[Y])$

(**d**) Hallar (en términos de c) $\mathbf{cov}(\bar{X}, \bar{Y})$.

(**e**) Usando los incisos anteriores, hallar (en términos de c) $\mathbf{E}[B]$.

3.35 Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde las X_i son un conjunto de variables i.i.d. Sea S_n^* su correspondiente variable estandarizada. En cada uno de los siguientes casos, simular 100000 valores de S_n^*; computar y graficar la función de distribución empírica. Comparar la gráfica obtenida con la de la función de distribución de una variable $N(0,1)$.

(**a**) X_i es uniforme entre 0 y 1. Analizar los casos de $n = 2, 5, 12$.

(**b**) X_i es Bernoulli de parámetro $p = 1/2$. Analizar los casos de $n = 10, 30$.

(**c**) X_i es Bernoulli de parámetro $p = 0.001$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**d**) X_i es geométrica de parámetro $p = 0.001$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**e**) X_i es exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Analizar los casos de $n = 10, 30, 100$.

(**f**) X_i es Poisson de parámetro $\mu = 0.01$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**g**) X_i es Poisson de parámetro $\mu = 1$. Analizar los casos de $n = 1, 5$ (comparar con el inciso anterior).

3.36 Dado un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, consideramos $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Notamos e al vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son todas 1.

(**a**) Mostrar que $(x - \bar{x}e) \perp e$. ¿Qué relación geométrica hay entre x y $\bar{x}e$?

(**b**) Dada cualquier constante c, $x - ce = (x - \bar{x}e) + (\bar{x} - c)e$. Mostrar que la relación del **Ejercicio 3.32 Inciso** (**c**) es consecuencia del teorema de Pitágoras.

(**c**) ¿Cuál es la relación con el teorema de Steiner acerca del cambio paralelo de eje en el momento de inercia?

(**d**) Deducir usando propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, la relación del **Ejercicio 3.34 Inciso** (**c**).
