9.8 El tamaño, X (en GB), de ciertos archivos es una variable aleatoria cuya densidad es

$$f_\theta(x) = 3\theta^3 x^{-4} \mathbf{1}\{x \geqslant \theta\}, \qquad \theta > 0.$$

(**a**) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de los tamaños de n archivos.

(**b**) Hallar expresiones para la esperanza y la varianza del estimador de máxima verosimilitud de θ.

(**c**) Mostrar que el estimador de máxima verosimilitud de θ converge en media cuadrática al verdadero valor de θ.

el sop. dep. de θ

nos fijamos

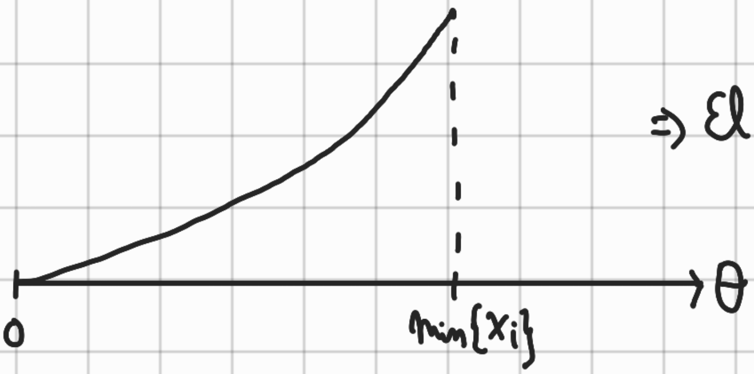
no puedo usar log

(a)

$$L(\theta) = \prod_{i=3}^{n} 3\theta^3 x_i^{-4} \mathbb{1}\{x_i \geq \theta\}$$

$$= 3^n \theta^{3n} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-4} \mathbb{1}\{x_i \geq \theta\}}_{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-4} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \geq \theta\}}_{\mathbb{1}\{\theta \leq \min x_i\}}}$$

$$L(\theta) = \underbrace{3^n}_{\text{cte}} \theta^{3n} \underbrace{\prod_1^n x_i^{-4}}_{\text{cte respecto de } \theta} \mathbb{1}\{0 \leq \min x_i\}$$



$\Rightarrow$ El máximo de $L(\theta)$ se da en $\min\{x_i\}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MV} = \min\{X_i, i=1,\dots,n\}}$$

(b)

Busco la F de densidad de $\hat{\theta}_{MV}$, Busco F de distribución

$$F_{\hat{\theta}}(t) = \mathbb{P}(\min\{X_i\} \leq t)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_i\} > t)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)\,\mathbb{P}(X_2 > t) \dots \mathbb{P}(X_n > t)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t)$$

$$\mathbb{P}(X_i > t) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq t) = 1 - \int_{\theta}^{t} 3\theta^3 x^{-4}\, dx$$

$$= 1 - 3\theta^3 \left(- \frac{x^{-3}}{3} \Big|_{\theta}^{t} \right)$$

$$= 1 + \theta^3 \left(t^{-3} - \theta^{-3} \right) = 1 + \theta^3 t^{-3} - 1 = \theta^3 t^{-3}$$

$$\Rightarrow F_{\hat{\theta}}(t) = 1 - (\theta^3 t^{-3})^n = (1 - \theta^{3n}\, t^{-3n})\, \mathbb{1}\{t \leq \theta\},\ \theta > 0$$

$$\Rightarrow f_{\hat{\theta}}(t) = -\theta^{3n}(-3n)\, t^{-3n-1} = 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n-1}\ \mathbb{1}\{\theta \leq t\}$$

$$\Rightarrow E\left[\hat{\theta}_{VM}\right] = \int_{\theta}^{\infty} t \cdot 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n-1}\, dt$$

$$= \int_{\theta}^{\infty} 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n}\, dt$$

$$= \frac{3n\,\theta^{3n}}{(3n-1)\,\theta^{3n-1}} \underbrace{\int_{\theta}^{\infty} \underbrace{(3n-1)\,\theta^{3n-1}\, t^{-3n}}_{\sim Par(\theta,\, 3n-1)}\, dt}_{=1}$$

$$= \frac{3n\,\theta^{3n}}{(3n-1)\,\theta^{3n-1}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E\left[\hat{\theta}_{VM}\right] = \frac{3n}{3n-1}\,\theta}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Var}(\hat{\theta}_{VM}) = E\left[\hat{\theta}_{VM}^{2}\right] - E\left[\hat{\theta}_{VM}\right]^{2}$$

$$E\left[\hat{\theta}_{VM}^{2}\right] = \int_{\theta}^{\infty} t^{2} \cdot 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n-1}\,dt$$

$$= \int_{\theta}^{\infty} 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n+1}\,dt$$

$$= \frac{3n\,\theta^{3n}}{(3n-2)\,\theta^{3n-2}} \int_{\theta}^{\infty} \overbrace{(3n-2)\,\theta^{3n-2}\, t^{-3n+1}}^{Par(\theta,\,3n-2)}\,dt$$

$$= \frac{3n\,\theta^{3n}}{(3n-2)\,\theta^{3n-2}} = \frac{3n}{3n-2}\,\theta^{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(\hat{\theta}_{VM}) = \frac{3n}{3n-2}\,\theta^{2} - \left(\frac{3n}{3n-1}\,\theta\right)^{2} = \left(\frac{3n}{3n-2} - \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2}\right)\theta^{2}$$

$$= \frac{3n}{27n^{3}-36n+15n-2}\,\theta^{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{VM}) = \frac{3n}{27n^{3}-36n+15n-2}\,\theta^{2}}$$

(c)

Convergencia en media cuadrática:

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\theta}) = 0 \, , \; \forall \theta \in \hat{H}$$

Error cuadrático medio : $ECM(\hat{\theta}) = B(\hat{\theta})^2 + V(\hat{\theta})$

Sesgo : $B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$

$$\Rightarrow B(\hat{\theta}) = \frac{3n}{3n-1}\theta - \theta = \left(\frac{3n}{3n-1} - 1\right)\theta = \frac{1}{3n-1}\theta$$

$$\Rightarrow B(\hat{\theta})^2 = \left(\frac{1}{3n-1}\right)^2 \theta^2$$

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{3n-1}\right)}_{\to 0}\theta^2 + \underbrace{\frac{3n}{27n^3 - 36n^2 + 15n - 2}}_{\to 0}\theta^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El estimador } \hat{\theta}_{VM} \text{ converge en media cuadrática a } \theta}$