Guia 3

3.5 La cantidad de moscas que arriban a la mesa de un asado tiene una distribución Poisson de media 10. Calcular la media de la cantidad de moscas que podrán arribar a la mesa del asado si se sabe que no podrán arribar más de 4.

$N \sim Po_i(\lambda)$ $\quad \lambda = 10$ $\qquad E(N) = \lambda \qquad P_N(n) = \dfrac{10^n e^{-10}}{n!}$

$$E(N \mid N \leq 4) = \frac{\sum_{\forall A_c}^{4} n \, \mathbb{P}(N=n)}{\mathbb{P}(N \leq 4)} =$$

$$\frac{0\frac{10^0 e^{-10}}{0!} + 1\frac{10 e^{-10}}{1!} + 2\frac{10^2 e^{-10}}{2!} + 3\frac{10^3 e^{-10}}{3!} + 4\frac{10^4 e^{-10}}{4!}}{\frac{10^0 e^{-10}}{0!} + \frac{10 e^{-10}}{1!} + \frac{10^2 e^{-10}}{2!} + \frac{10^3 e^{-10}}{3!} + \frac{10^4 e^{-10}}{4!}} = \frac{10 + 2\frac{10^2}{2!} + 3\frac{10^3}{3!} + 4\frac{10^4}{4!}}{10 + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!}}$$

3.6 Sea T una variable aleatoria con distribución exponencial de media 3. Calcular $\mathbf{E}[T|T \leqslant 2]$.

$T \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \qquad E(T) = 3 \qquad \frac{1}{\lambda} = 3 \quad \lambda = \frac{1}{3}$

$$E(T \mid T \leq 2) = \frac{E(T \mathbb{1}\{t \in A_c\})}{\mathbb{P}(T \leq 2)}$$

$\boxed{f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$

$$= \frac{\sum_{\forall A_c} t \, \mathbb{P}(T=t)}{\mathbb{P}(T \leq 2)} \longrightarrow \boxed{\text{como } T \text{ es exp} \rightarrow \text{uniforme} \quad \mathbb{P}(T=t) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t \, f_T(t) \, dt}{\mathbb{P}(T \leq 2)}$$

② $\mathbb{P}(T \leq 2) = F_T(2) = \int_0^2 f_T(t)\,dt = \int_0^2 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t}\,dt \cong 0{,}48$

① $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)\,dt = \int_0^2 t\,\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t}\,dt = 3 - 5e^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}43$

$E(T \mid T \leq 2) = \frac{①}{②} \cong \frac{0{,}43}{0{,}48} \cong \boxed{0{,}89}$

3.8 Sea Z una variable normal estándar, φ su función de densidad, y sea $z_0 > 0$.

(a) Hallar la media de $Z|Z > z_0$ (en función de z_0).

$Z \sim N(0,1) \qquad \varphi = f_Z(z) \quad , \; z_0 > 0$

$$E(Z \mid Z > z_0) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z\,\varphi(z)\,dt}{\mathbb{P}(Z > z_0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z\,\varphi(z)\,dt}{1 - \mathbb{P}(Z \leq z_0)}$$

② $1 - \mathbb{P}(Z \leq z_0) = 1 - \Phi(z_0)$

① $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt = \int_{z_0}^{\infty} t\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_0^2}{2}} = \varphi(z_0)$

$$E(Z \mid Z > 0) = \frac{①}{②} = \boxed{\frac{\varphi(z_0)}{1 - \Phi(z_0)}}$$

$$E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E[Z] + \mu \qquad x_0 > \mu$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$E(X \mid X > x_0) = E(\sigma Z + \mu \mid \sigma Z + \mu > x_0)$$

$$= \sigma E(Z \mid \sigma Z + \mu > x_0) + \mu$$

$$= \sigma \left(Z \mid Z > \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) + \mu$$

como $Z \sim N(0,1) \longrightarrow \varphi(t), \Phi(t)$

$$\Rightarrow \sigma E\left(Z \mid Z > \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) + \mu$$

$$E\left(Z \mid Z > \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\, \varphi(t)\, \mathbb{1}\{t > \frac{x_0-\mu}{\sigma}\}\, dt}{\mathbb{P}\left(Z > \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)}$$

$$\Longrightarrow \int_{\frac{x_0-\mu}{\sigma}}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dt = \varphi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)$$

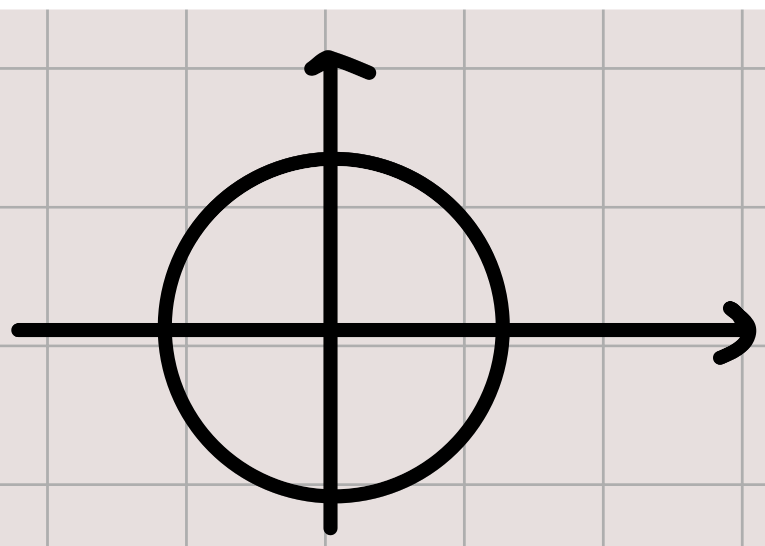
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(Z > \frac{x_0 - \mu}{z}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{z}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\varphi\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)}{1-\phi\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)}}$$

3.10 Se construye un círculo uniendo los extremos de un alambre.

(**a**) Si la longitud del alambre L es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 60 cm., calcular la media del área del círculo.

(**b**) Si el área del círculo A es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 15 cm^2, calcular la media del perímetro del círculo.



L = diametro $= 2\pi r$

$\frac{L}{2\pi} =$

$L \Rightarrow$ va $\rightarrow L \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{60}\right)$

$$\text{Area} = A(L) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$$

Area depende L va

$A \Rightarrow$ va

$$E(A) \rightsquigarrow E(A(L)) = E\left(\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\right) = E\left(\frac{L^2}{4\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}E(L^2)$$

$$E(L^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} l^2 f_L(l)\,dt = \int_0^{+\infty} l^2 \frac{1}{60} e^{-\frac{l}{60}}\,dl = 7200$$

$$\frac{7200}{4\pi} \cong \boxed{572\ \text{cm}^2}$$