

GUÍA 12

12.2

$$\sigma^2 = 16 \text{ cm}^2$$

$$(12.2) X = \text{longitud (cm)} \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \begin{cases} P(\mu + 10) = 0,35 \\ P(\mu - 14) = 0,75 \end{cases}$$

$$X_1 = \text{long de la colonilla} \rightarrow 12,1 \text{ cm} \quad \begin{cases} P(\mu = 10) = 0,35 \\ P(\mu = 14) = 0,75 \end{cases}$$

- No tengo datos de μ , pero sé que es cero MAD

$$P_{T|x=\bar{x}}(\theta) = \frac{\sum f_{\bar{x}|T=\theta}(x) p_T(\theta)}{\sum f_{\bar{x}|T=\theta}(x) p_T(\theta)}$$

siendo T la distribución de μ .

$$\sum f_{\bar{x}|T=\theta}(x) p_T(\theta) = \underbrace{f_{\bar{x}|T=10}(x)}_{\substack{\text{NORMAL} \\ \text{CON EL VALOR} \\ \text{DE } \mu}} p_T(10) + \underbrace{f_{\bar{x}|T=14}(x)}_{0,75} p_T(14)$$

$$\Rightarrow N(10, 4) \quad N(14, 4)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}4} \left[\frac{1}{4} e^{-\frac{(12,1-10)^2}{8}} + \frac{3}{4} e^{-\frac{(12,1-14)^2}{8}} \right] = 0,124$$

$$P_{T|x=\bar{x}}(\mu) = \begin{cases} \frac{f_{\bar{x}|T=10}(12,1)}{p_T(10)} & \text{si } \mu = 10 \\ \frac{f_{\bar{x}|T=14}(12,1)}{p_T(14)} & \text{si } \mu = 14 \end{cases}$$

$$P_{T|x=\bar{x}}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}4} e^{-\frac{(12,1-10)^2}{8}} & \frac{1}{4} \text{ si } \mu = 10 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}4} e^{-\frac{(12,1-14)^2}{8}} & \frac{3}{4} \text{ si } \mu = 14 \end{cases}$$

GUÍA 12

HOJA N°

FECHA

ESTIMACIÓN BAYESIANA

$$(12.2) L = \text{longitud varilla (cm)} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

σ : desvio estandar
 σ^2 : variancia

$$\mu \text{ V.A discreta - V.A.D}$$

$$\begin{array}{l} \text{prior } \rightarrow \\ P(\mu = 10) = 0,25 \\ P(\mu = 14) = 0,75 \end{array}$$

$$x_1 = 12,1$$

se observa que la long de la varilla es 12,1 cm

Estimar la P de que la long. de otra varilla del mismo tipo sea mayor que 13cm. $\rightarrow P(X_2 > 13 | X_1 = 12,1) = ?$

ed V.A.D :

$$P_T | \underline{x} = \underline{x} (\Theta) = \frac{\sum f(x) p_T (\Theta)}{\sum f(x) p_T (\Theta)} = \textcircled{*}$$

T : distribución de μ .

$$\underbrace{f_{\underline{x}|T=10}(x)p_T(10)}_{\sim N(10, 4)} + \underbrace{f_{\underline{x}|T=14}(x)p_T(14)}_{\sim N(14, 4)} = \textcircled{*}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} \left[\frac{1}{4} e^{-\frac{(12,1-10)^2}{8}} + \frac{3}{4} e^{-\frac{(12,1-14)^2}{8}} \right] = 0,124 = \textcircled{A}$$

$$P_T | \underline{x} = 12,1 (\mu) = \begin{cases} \frac{f_{\underline{x}|T=10}(12,1) p_T(10)}{0,124} & \text{si } \mu = 10 \\ \frac{f_{\underline{x}|T=14}(12,1) p_T(14)}{0,124} & \text{si } \mu = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{T|X_1=12,1}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}4} \cdot \frac{e^{-\frac{(12,1-10)^2}{8}}}{0,124} \cdot \frac{1}{4} \rightarrow 0,232.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}4} \cdot \frac{e^{-\frac{(12,1-14)^2}{8}}}{0,124} \cdot \frac{3}{4} \rightarrow 0,768.$$

$\sim N(10, 4)$ 0,232.

$$\Rightarrow P(X_2 > 13 | X_1 = 12,1) = P(X_2 > 13 | \mu = 10) \cdot P(\mu = 10 | X_1 = 12,1) + P(X_2 > 13 | \mu = 14) \cdot P(\mu = 14 | X_1 = 12,1).$$

$\sim N(14, 4)$. 0,768.

$$\Rightarrow P(X_2 > 13 | \mu = 10) = 1 - \phi\left(\frac{13 - 10}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \phi(1,5).$$

PARA ~~ESTA~~
NORMALIZAR
UNA NORMAL!

$$P(X_2 > 13 | \mu = 14) = 1 - \phi(0,5) = 1 - \phi(0,5)$$

prop.

$$\Rightarrow P(X_2 > 13 | X_1 = 12,1) = \underbrace{\left[1 - \phi(1,5)\right]}_{0,93319} \cdot 0,232 + \underbrace{\phi(0,5)}_{0,5} \cdot 0,768. \\ = 0,5465.$$

~~PROBLEMA~~ 12.7 X: # de muertes de soldados. $\sim \text{Poi}(\mu)$.
en 1 caballería por año.

Muertes:	0	1	2	3	4	número.
Frecuencia:	109	65	22	3	1.	$\rightarrow 200$ muertes

priori

$$\begin{cases} \mu \sim \mathcal{F}(2, 4) \\ \rightarrow \text{media: } 1/2 \rightarrow V/\lambda \Rightarrow 1/2 \Rightarrow V = \frac{1}{2} \Rightarrow 2V = \lambda \\ \rightarrow \text{varianza: } 1/8. \rightarrow V/\lambda^2 = 1/8 \Rightarrow \frac{V}{\lambda^2} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\left(\text{calcular la media a posteriori de } \mu \right) \Rightarrow \frac{V}{\lambda^2} = \frac{V}{(2V)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4V} = \frac{1}{8}.$$

$\downarrow \mu \sim \mathcal{F}(2, 4)$ coballerías.

Y # muertes por año de 10 soldados.

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \text{Poi}(10\mu)$$

Propiedad.

$$\Rightarrow V = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$\Rightarrow \lambda = 9.$$

$$\left[Z = \text{Muertos por 20 años.} = \sum_{i=1}^{20} Y_i \sim \text{Poi}(20, 10\mu) \right. \\ \left. \sim \text{Poi}(200\mu). \right]$$

esta es la que necesito.

y tiene que ser $Z = 200$ (para que coincida con los datos de la tabla).

12.4) $T = p \sim \text{Beta}(v_1, v_2)$

como se distribuye p para cualquier x

$$f_{T|x=\infty}(p) = \frac{p^x | T=p}{\int_{-\infty}^{\infty} p^x | T=p \frac{d}{dp} f_T(p) dp}$$

Busca como se distribuye x para $T=p$

$$\cdot p^x | T=p \stackrel{(x)}{\sim} \text{Binomial} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

(dato conocido de los n trios)

$$\cdot f_T(p) = \frac{\Gamma(v_1+v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} p^{v_1-1} (1-p)^{v_2-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(v_1+v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} p^{v_1-1} (1-p)^{v_2-1} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} dp$$

$$\frac{\Gamma(v_1+v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \binom{n}{x} \int_{-\infty}^{\infty} p^{v_1-1+x} (1-p)^{v_2+n-x} dp$$

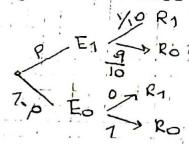
$$\underbrace{\frac{\Gamma(v_1+v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \binom{n}{x} \cdot \frac{\Gamma(v_1+x)\Gamma(v_2+n-x)}{\Gamma(v_1+v_2+n)}}_{\text{Beta}(v_1+x, v_2+n-x)}$$

$$f_{T|x=\infty}(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \cdot \frac{\Gamma(v_1+v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} p^{v_1-1}$$
 ~~$\frac{\Gamma(v_1+v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \binom{n}{x} \frac{\Gamma(v_1+x)\Gamma(v_2+n-x)}{\Gamma(v_1+v_2+n)}$~~

12.6) $P(E_1) = p$
 $P(R_1|E_1) = \frac{9}{10}$

$P(R_0|E_0) = 1$

5 dígitos \rightarrow 4 unos



ARBOL DE PROBABILITY

$X|T=p$: cantidad de 1s recibidos en 5 dígitos.

Evento de caso que recibe 1

$$\Rightarrow \sim \text{BIN}(5, P(\frac{9}{10} + 0))$$

$$\cdot P(X|T=p) \stackrel{(x)}{=} \binom{5}{x} \left(\frac{9}{10}\right)^x \left(1 - \frac{9}{10}\right)^{5-x}$$

$$P(X|T=p) \stackrel{(4)}{=} \binom{5}{4} \left(\frac{9}{10}\right)^4 \left(1 - \frac{9}{10}\right)^1$$

A demás,

$$f_T(p) = \frac{\Gamma(3+3)}{\Gamma(3)\Gamma(3)} p^2 (1-p)^2$$

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(3)^2} p^2 (1-p)^2 \cdot p^4 \left(\frac{9}{10}\right)^4 \left(1 - \frac{9}{10}\right) dp$$

$$\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(3)^2} \left(\frac{9}{10}\right)^4 \int_0^1 p^2 (1-p)^2 \cdot p^4 \left(1 - \frac{9}{10}\right) dp$$

DUDA?

$$\frac{\Gamma(V_2 + V_1 + n)}{\Gamma(V_1 + x) \Gamma(V_2 + n - x)} \cdot p^{V_1 + x - 1} (1-p)^{V_2 + n - x - 1}$$

$$\Rightarrow f_{\tau|x=x}(p) \sim \text{Beta}(V_1 + x, V_2 + n - x)$$

$$E[\tau|x=x] = \frac{V_1 + x}{V_2 + n - x + V_1 + x} = \frac{V_1 + x}{V_2 + V_1 + n}$$

(b) $V(\tau|V_1=x)$ to see

$$= \frac{(V_2+n-x)(V_1+x)}{(V_2+n-x)^2(V_1+V_2+n)}$$

Distribuir V_1 y V_2 tienen $V_1 + V_2$ al infinito

c)

d)

$$P(M=2 | X=4) =$$

Todo lo que puedo recibir

$$M|\tau=p \sim \text{Bin}(2, p) \rightarrow P(M=2 | \tau=p) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0$$

Duda

12.7	Muertes	0	1	2	3	4
	Frecuencia	109	65	22	3	1

$T \sim \text{Gommo}(2,4)$

$$f_T(u) = 16u e^{-4u} \quad \text{muerte cubierta}$$

$X = \text{"Muertes por año"} \sim \text{Poi}(\mu)$

$Y = \text{"Muertes por año de 10 soldados"}$

$Z = \text{"Muertes por 20 años"}$

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \text{Poi}(10\mu) \quad \text{GUÍA 7}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{20} Y_i \sim \text{Poi}(10 \cdot 20 \cdot \mu)$$

→ A partir de X y Y surge Z que es la suma de las Y .

Entonces Y necesito

$$f_{Z|T=\mu}(z) = \frac{(1200\mu)^z}{z!} e^{-200\mu}$$

Cont de muertos (tubos) = 122

$$\Rightarrow f_{T|Z=122}(u) = P_{Z|T=u}(122) \cdot f_T(u)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{Z|T=u}(122) f_T(u) du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1200\mu)^{122}}{122!} e^{-200\mu} \cdot 16u e^{-4u} du$$

$$\frac{(1200)^{122}}{122!} \cdot 16 \int_{-\infty}^{\infty} u^{123} e^{-204u} du$$

$\sum X_i = Y = \text{Cont de accidentes en 100 personas} \sim \text{Poi}(100)$

12.8) Cont de accidentes $\sim \text{Poi}(\mu) = X_i$

cont accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

A priori $\mu \sim \text{exp}(2) \rightarrow f_{\mu}(u) = \frac{1}{2} e^{-u/2}$

$$f_{U|Y=u}(u) = P_{Y|U=u}(u) f_U(u)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{Y|U=u}(u) f_U(u) du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(100\mu)^{212}}{212!} e^{-190\mu} \cdot \frac{1}{2} e^{-u/2} du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{100^{212}}{212!} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{212} e^{-\frac{190+\mu}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{100^{212}}{212!} \int_{-\infty}^{\infty} (20\mu)^{212} e^{-\frac{190+\mu}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{100^{212}}{212!} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{20}{2})^{212} \mu^{212} e^{-\frac{190+\mu}{2}} du$$

$$\Rightarrow f_{U|Y=u}(u) = \frac{(100\mu)^{212}}{212!} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{190+\mu}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{100^{212}}{212!} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{190+\mu}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{100^{212}}{212!} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{190+\mu}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{100^{212}}{212!} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{190+\mu}{2}}$$

convertido en uno solo going

$$16 \cdot \frac{200}{122!} \cdot \frac{123!}{204^{124}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{123!} \lambda^B e^{-\lambda^B u} du$$

$$\underbrace{16 \cdot 123 \left(\frac{200}{204} \right)^{122}}_{K} = 1$$

$$f_{T|Z=122}(u) = \frac{(200u)^{122} e^{-200u}}{122!} \cdot 16 \cdot \frac{123!}{204^{124}} \cdot \lambda^{123} e^{-\lambda^{123} u}$$

$$f_{T|Z=122}(u) = \frac{204^{124}}{123!} \lambda^{123} e^{-\lambda^{123} u} \sim \Gamma(124, \lambda)$$

$$E[T|Z=122] = \frac{124}{204}$$

$$\textcircled{a} \quad P(X_{101}|Y=212) = \int_0^{\infty} P(X_{101}=\phi|Y=u) f_{Y|Z=212}(u) du$$

$$\int_0^{\infty} P(X_{101}|Y=212) \cdot f_{Y|Z=212}(u) du$$

~ poisson con $\lambda = 201$

$$\int_0^{\infty} \lambda^u e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^u}{u!} \frac{201}{212} \lambda^{212} e^{-\lambda} du$$

$$\left(\frac{201}{212} \right)^{213} \int_0^{\infty} \lambda^{212} \frac{201}{2} \lambda^{212} e^{-\lambda} du = \left(\frac{201}{212} \right)^{213} \left(\frac{\frac{201}{2}^{213}}{212!} \right) = 1$$

$$\left(\frac{201}{203} \right)^{213} = 0,121$$

$$\textcircled{b} \quad \text{I.C.: } 1-\alpha = 0,95$$

$$n=100$$

$$\bar{x} = 212$$

$$\text{D. note: } T = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\bar{x}/n}} \sim N(0,1)$$

$$\Phi(-1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) < \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\bar{x}/n}} < 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu < \bar{x} < 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu$$

$$\text{I.C. (x)} = (-1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}, 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x})$$

$$= (-0,2854, 0,403)$$

(12.9) X : "tiempo hasta el segundo fallecimiento" $\sim \text{exp}(2, \lambda)$

a priori $\lambda \sim \text{exp}(1)$ $\Rightarrow T$

$$\lambda = 3/4$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|T}(x|t) f_T(t) dt dx$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{4} e^{-\frac{3}{4}t} e^{-\frac{3}{4}x} d\lambda dt dx \\ &= \frac{2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^3 \lambda^2 e^{-\frac{3}{4}t} e^{-\frac{3}{4}x} d\lambda dt dx \\ &= \Gamma(3, \frac{3}{4}) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{96}{343}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|T}(x|t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{4} e^{-\frac{3}{4}t} e^{-\frac{3}{4}x} d\lambda dt dx = \frac{3}{4} \Gamma(3, \frac{3}{4})$$

modo?

$$E[T|X=3/4] = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 12 \quad \text{y} \quad \Gamma(3, \frac{3}{4})$$

Guia ④

② ④ $\rightarrow \text{PP}(2) \text{ por hora}$
 $x \omega \text{ dentro}$

S_3 : tiempo hasta que transcurra el tercer evento

$$P(S_3 > \frac{1}{2}) = 0,9197$$

$$S_3 \sim \Gamma(3, 2)$$

⑤ $\rightarrow N_{(1,2)} \sim \text{Poi}(2)$
 $P(N_{(1,2)} = 1) = 2 \cdot e^{-2}$

⑦ ③ $\rightarrow \text{PP}(10) \text{ por hora}$
 2 minutos en media distancia. J no requiere ninguno
 de los otros en ese intervalo.

Primeros 5 partículas se han registrado por el contador

2 mm 2 m 2 2

T_i : tiempo entre la partícula i y la $i+1$ $i=1,2,3,4$

$T_i \sim \text{exp}(\lambda) = \text{exp}(10)$

Quiero la probabilidad de que los primeros 5 partículas sean registradas.

$P(T_1 > \frac{2}{60}, T_2 > \frac{2}{60}, T_3 > \frac{2}{60}, T_4 > \frac{2}{60}) = \text{es decir la probabilidad de que los 5 partículas sean registradas}$

$$= P(T_1 > \frac{2}{60}) \cdot P(T_2 > \frac{2}{60}) \cdot P(T_3 > \frac{2}{60}) \cdot P(T_4 > \frac{2}{60}) = 0,21636$$

12.10 X: Tiempo de respuesta de uno de los tres en min. $\sim N(1, 1+4)$
3 muestras

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \sim Poi(4)$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \sim Poi(4)$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \sim Poi(4)$$

$$= \frac{1}{4!} e^{-4} \{ 3 < x < 7 \} \sim N(4, 4)$$

$$= \frac{1}{4!} e^{-4} \{ 3 < x < 7 \}$$

$$\frac{1}{4!} \cdot \frac{192}{64} dx = \frac{192}{64} \int_{0.7}^{6.7} dx = \frac{192}{64} \cdot 6 = 19.2$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \sim Poi(4)$$

$$= \frac{192}{64} \cdot 6 = 19.2 \sim Poi(6)$$

Esperanza?

PP (2) por sg
tic, toc, tic, toc
Registro solo los toc's
Se que es el primer segundo registro un toc
 $S_1 < 1 \quad P(tic) = 1/2$
 $P(toc) = 1/2$

Tengo 3 opciones
 $N_1(0,1) = 3 \quad N_1(1,2) = 0$
 $N_1, N_2, N_3 \sim Poi(1, 2)$
 $N_2(0,1) = 2 \quad N_2(1,2) = 0$ Descomponerlo
 $N_3(0,1) = 2 \quad N_3(1,2) = 1$

2 por segundo = PROMEDIO, NO APROXIMAMENTE
EN EL SIGUIENTE SEGUNDO VON 2 PARALELOS 2 PUNTOS

$$P(\text{No hay } x \text{ en el } 2\text{do} | \text{Hoy } x \text{ en el } 1) =$$

$$P(N_1(0,1) = 3, N_1(1,2) = 0) + P(N_2(0,1) = 2, N_2(1,2) = 0) +$$

$$P(N_3(0,1) = 2, P(1,2) = 1) \cdot \frac{1}{3}$$

$$\stackrel{\text{y uno con intercambios}}{\stackrel{\text{indep}}{=}} \frac{2^3 e^{-2}}{3!} + \frac{2^2 e^{-2} - 2}{2!} + \frac{e^{-2} 2^2 \cdot 2}{2!}$$

$$P(N(0,1) = 2) + P(N(0,1) = 3)$$

$$= \frac{2^3 e^{-2}}{3!} + \frac{2^2 e^{-2} - 2}{2!} + \frac{e^{-2} 2^2 \cdot 2}{2!}$$

$$= 0.2977$$