9.10 La duración en años de cierto tipo de dispositivos es una variable aleatoria X con función intensidad $\lambda(x) = 3\theta^{-3}x^2\mathbf{1}\{x > 0\}$.

(a) Hallar un estadístico suficiente para θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n dispositivos.

(b) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n dispositivos.

(c) Usando los números aleatorios

$$0.186,\ 0.178,\ 0.488,\ 0.255,\ 0.392,\ 0.234,\ 0.597,\ 0.205,\ 0.611,\ 0.651.$$

simular 10 valores de X cuando $\theta = 1$ y en base a esa información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(d) Se pusieron a prueba 10 de esas máquinas y se obtuvieron los siguientes tiempos:

$$2.00,\ 5.48,\ 2.43,\ 1.90,\ 5.85,\ 1.58,\ 2.30,\ 2.87,\ 3.62,\ 2.71.$$

Basándose en la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que una máquina del mismo tipo funcione sin fallas más de dos años y medio.

(a)

X: Duración en años de ciertos dispositivos ; $\lambda(x) = 3\theta^{-3}x^2 \mathbb{1}\{x>0\}$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)\,dt} \mathbb{1}\{x \geq 0\} = \left(1 - e^{-x^3\theta^{-3}}\right)\mathbb{1}\{x \geq 0\}$$

→ Continua

CA: $$\int_0^x 3\theta^{-3} t^2\,dt = 3\theta^{-3}\frac{x^3}{3} = x^3\theta^{-3}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx} = -e^{-x^3\theta^{-3}} \cdot (-3x^2)\theta^{-3} = 3x^2\theta^{-3}e^{-x^3\theta^{-3}}\mathbb{1}\{x \geq 0\}$$

$$L(\theta) = f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n 3x_i^2\theta^{-3}e^{-x_i^3\theta^{-3}} = 3^n\theta^{-3n}\prod_{i=1}^n x_i^2\, e^{-\theta^{-3}\sum_{i=1}^n x_i^3}$$

$$= \underbrace{\theta^{-3n} e^{-\theta^3 \sum_{i=1}^{n} x_i^3}}_{g(r(x),\theta)} \underbrace{3^n \prod_{i=1}^{n} x_i^2}_{h(x)}$$

Por Teorema de factorización:

$$\Rightarrow \boxed{T = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \right) \text{ es estadístico suficiente para } \theta}$$

(b)

$$\ln(L(\theta)) = \underbrace{\ln(3^n)}_{\text{cte}} + \underbrace{\ln(\theta^{-3n})}_{= -3n\ln(\theta)} + \underbrace{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}_{\text{cte}} + (-\theta^{-3}) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}_{\text{Cte}}$$

$$\frac{d}{d\theta} \frac{1}{\theta^3} = \frac{-3\theta^2}{\theta^6} = \frac{-3}{\theta^4}$$

$$\frac{d \ln(L(\theta))}{d\theta} = -3n\frac{1}{\theta} + \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 3n\frac{1}{\theta} \Longrightarrow \theta = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n}\right)^{1/3}$$

Derivo otra vez para ver si es un máximo! $\Longrightarrow$ Elijo creer

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MV} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^3}{n}\right)^{1/3}}$$

(c)

$\underbrace{0.186,\ 0.178,\ 0.488,\ 0.255,\ 0.392,\ 0.234,\ 0.597,\ 0.205,\ 0.611,\ 0.651.}$ } Estos provienen de una $U(0,1)$

Realizaciones de una VA. $Y \sim U(0,1)$

Como Y es uniforme : $X = F_X^{-1}(Y)$

$$x_i = F_X^{-1}(y_i)$$

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-x^3\theta^{-3}}\right) \mathbb{1}\{x>0\}$$

$$1 - e^{-x^3\theta^{-3}} = w$$

$$e^{-x^3\theta^{-3}} = 1 - w$$

$$-x^3\theta^{-3} = \ln(1-w)$$

$$x = \sqrt{-\theta^3 \ln(1-w)} \implies x = \sqrt{-\theta^3 \ln(1-y)}$$

Con $\theta = 1$

$y = 0{,}186 \longrightarrow x = 0{,}590$

$y = 0{,}178 \longrightarrow x = 0{,}581$

$y = 0{,}488 \longrightarrow x = 0{,}875$

$y = 0{,}255 \longrightarrow x = 0{,}665$

$y = 0{,}392 \longrightarrow x = 0{,}792$

$y = 0{,}597 \longrightarrow x = 0{,}969$

$y = 0{,}234 \longrightarrow x = 0{,}644$

$y = 0{,}205 \longrightarrow x = 0{,}612$

$y = 0{,}611 \longrightarrow x \approx 0{,}981$

$y = 0{,}651 \longrightarrow x = 1{,}017$

Como todos estos x son una muestra $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$

El valor estimado $\hat{\theta}$ de θ para esta muestra es:

$$\hat{\theta} = \left(\frac{0{,}590^3 + 0{,}581^3 + 0{,}875^3 + 0{,}665^3 + 0{,}792^3 + 0{,}969^3 + 0{,}644^3 + 0{,}612^3 + 0{,}981^3 + 1{,}017^3}{10} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = 0{,}807}$$

(d)

Muestra $(x_1, x_2, \ldots x_{10}) =$ 2.00, 5.48, 2.43, 1.90, 5.85, 1.58, 2.30, 2.87, 3.62, 2.71.

Valor estimado $\hat{\theta}$ de θ para esta muestra:

$$\hat{\theta} = \left(\frac{2^3 + 5.48^3 + 2.43^3 + 1.90^3 + 5.85^3 + 1.58^3 + 2.30^3 + 2.87^3 + 3.62^3 + 2.71^3}{10} \right)^{1/3}$$

$$\hat{\theta} = 3{,}687$$

$$\hat{\lambda} = \mathbb{P}(X > 2{,}5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2{,}5) = 1 - \left(1 - e^{-2{,}5^3 \theta^{-3}}\right)$$

Por principio de invarianza:

$$= 1 - \left(1 - e^{-2{,}5^3 (3{,}687)^{-3}}\right)$$

$$= 6{,}20 \cdot 10^{-3} = 0{,}732$$

El valor estimado para $\hat{\lambda}$ por la muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ es:

0,732