Test de Hipótesis

¿Cómo construir el test?

Vimos → Método cociente de verosimilitud → p/ test unilaterales

→ Método para familias CVM → "

El método + gral es el cociente de max verosimilitud

Este nos sirve para encontrar "el test" o sea $\delta(\underline{X})$ dado el

Estadístico de Prueba ¿Qué es?

1) conocido

– Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_c^2)$, test para μ unilateral

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sum X_i - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}}_{\text{estadístico de Prueba}} \sim \overbrace{\mathcal{N}(0,1)}^{\text{distribución conocida}}$$

'Bajo H_0' o sea $\mu = \mu_0$

2)

– Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_c, \sigma^2)$, " " σ^2 unilateral

$$\Rightarrow \frac{\sum^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_n$$

si $\sigma^2 = \sigma_0^2$

③

- Si $X \sim U(0,\theta)$, " " θ unilateral

$$\Rightarrow \frac{\max\{X_i\}}{\theta_0} \xrightarrow[\theta=\theta_0]{} (F_U)^n$$

¿Qué pone en caso ① si hip son bilaterales?

$X \sim N(\mu, \sigma_c^2)$ $\quad H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

Sale por cuenta de mat. Varo! (no lo vemos) $\Rightarrow$ "De modo intuitivo"

Usamos el estadístico de prueba para armar el test

Rechazo H_0 si:

10.7 En 1761 James Short midió 53 veces la paralaje solar. El promedio de las mediciones resultó ser 8.616 segundos de grado. Suponiendo que la distribución de las mediciones es una normal de media μ y desvío $\sigma = 0.75$, decidir a un nivel de significación $\alpha = 0.05$ si hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis $\mu = 8.789$. Hallar el p-valor.

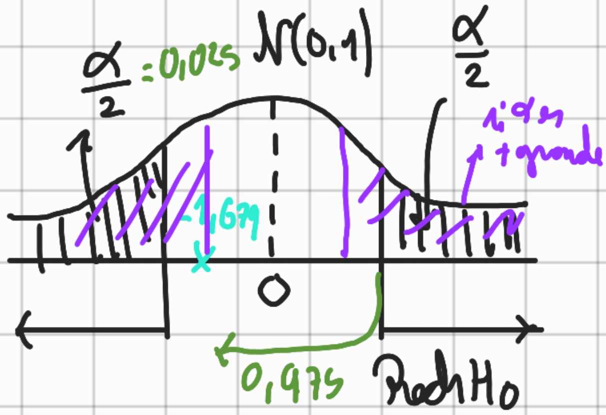
X: medición paralaje $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 0{,}75^2)$ Test ① pero bilateral

$H_0: \mu = 8{,}789$ $\qquad H_1: \mu \neq 8{,}789$ $\qquad \alpha = 0{,}05,\ n = 53$

Ojo! en las hipótesis van parámetros (no olvidar) $\qquad$ Dato: $\bar{X} = 8{,}616$

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma} \underset{\text{si } \mu=\mu_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \Leftarrow \text{Estadístico de prueba}$$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\left|\overbrace{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}}^{=z}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$



$$= \mathbb{1}\left\{\left|\sqrt{53}\,\frac{\bar{X}-8{,}789}{0{,}75}\right| > 1{,}96\right\}$$

$z_{1-0{,}025} = z_{0{,}975} = 1{,}96$

Para decidir: $$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{\left|\underbrace{\sqrt{53}\,\frac{8{,}616-8{,}789}{0{,}75}}_{-1{,}679}\right| > 1{,}96\right\} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{no hay evidencia suficiente para rechazar } H_0}$

Para encontrar α, uso como valor crítico a $\alpha = -1,679$

<u>P-valor</u>:

$$\mathbb{P}(z < -1,679 \text{ ó } z > 1,679) =$$
$$= \mathbb{P}(|z| > 1,679) = 2 \cdot \mathbb{P}(z < -1,679) = 0,0932$$

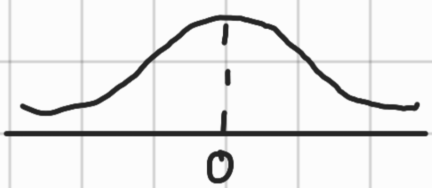
<u>Obs</u>: Con $\alpha = 0,05 <$ P-valor $\Longrightarrow$ no Rechazo

Con $\alpha = 0,1 >$ P-valor $\Longrightarrow$ Rechazo H_0

---

si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ¿Como doy test si ambos son desconocidos?

P/ test de μ el estadístico de prueba es $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$



$\leftarrow$ t Student

Entonces al igual que la normal, sea a la derecha / izq o bilateral

10.8 Para ir de su casa al trabajo, Aparicio va por un camino por el que tarda, en media, 40 minutos en llegar. Juan le sugiere otro camino para reducir ese tiempo. Aparicio lo probó 10 veces y tardó en llegar los siguientes tiempos:

$$41.1,\ 42.2,\ 40.5,\ 39.9,\ 40.3,\ 36.6,\ 39.3,\ 42.5,\ 37.8,\ 40.5.$$

Suponiendo que los tiempos de viaje obedecen a una distribución normal, ¿se puede asegurar, con un nivel de significación de 0.1, que el camino sugerido por Juan es más rápido?

X: Tiempo trabajo - casa por nuevo camino $\sim N(\mu, \sigma^2)$, $\alpha = 0{,}1$

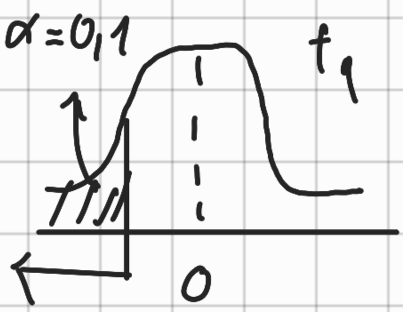
Vemos que: $\bar{x} = 40{,}07$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

$$S = \sqrt{S^2} = 1{,}818$$

$H_0: \mu \geq 40$ $\qquad$ $H_1: \mu < 40$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \underbrace{\sqrt{10}\left(\frac{\bar{x} - 40}{S}\right)}_{t_9 \text{ si } \mu = 40} < t_{9,0,1} \right\}$$

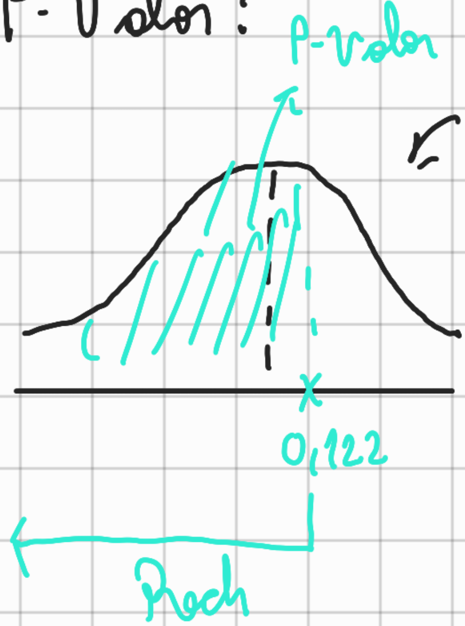


$$= \mathbb{1}\left\{ \underbrace{\sqrt{10}\left(\frac{\bar{x} - 40}{S}\right)}_{0{,}122} < -1{,}383 \right\}$$

$$= 0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{no hay evidencia para rechazar } H_0 \text{ osea no hay evidencia para decir que el camino de Juan es mas rápido}}$

P-Valor:



$$T = \sqrt{10}\,\frac{\bar{X} - 40}{S} \underset{H_0}{\sim} t_9$$

$$\mathbb{P}(T < 0{,}122) = 0{,}5472$$

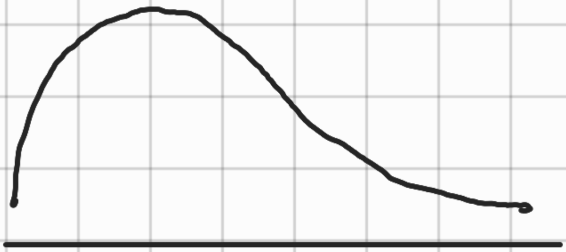
¡¡Altísimo!!

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ambos desconocidos. El estadístico de prueba para test de σ^2 es $\boxed{\frac{\sum_{i}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}} \sim \chi^2_{n-1}$

es igual!!

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$\overset{\text{es igual}}{=} \boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}} \sim \chi^2_{n-1}$$



Test de nivel asintótico

$$\delta(X) \qquad \sup_{\theta \in \Theta_0} \pi_\delta(\theta) = \alpha = \underset{\theta=\theta_0}{\mathbb{P}}(\text{Rech } H_0)$$

Def: decimos que $\delta_n(\underline{X})$ es una sucesión de test de nivel asintótico α si $\lim_{n\to\infty} \underset{\theta=\theta_0}{\mathbb{P}}(\delta_n(\underline{X})=1) = \alpha$

10.22 La cantidad de accidentes de tránsito por semana en la intersección de Paseo Colón y Estados Unidos obedece a una distribución de Poisson. En una muestra de 80 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4
Frecuencia	28	25	20	5	2

Al 5 % de significación asintótica, ¿se puede afirmar que la media de la cantidad de accidentes por semana en la intersección de Paseo Colón y Estados Unidos es menor que 2? Hallar el *p-valor* aproximado.

X: # Accidentes en 1 semana $\sim \mathcal{P}oi(\mu)$ $\qquad$ Ver que: $n=80$, $\bar{x}=1{,}1$

$H_0: \mu = 2 \qquad H_1: \mu < 2$

$Poi(\mu) \longleftarrow$ Familia exponencial a 1 parametro

$$c(\mu) = \ln \mu \longrightarrow \text{creciente}$$

$$r(x) = x$$

Como es test unilateral y flia exponencial $\Rightarrow$ Es de CVM

$\Rightarrow$ Se que el test es con $T = \sum X_i \Rightarrow$ ⊛

⊛ $$\delta(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{1}\left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{Poi(n\mu)} < K \right\}$$

$\alpha = \mathbb{P}_{\mu=2}\left(\sum X_i < K\right) \longleftarrow$ Horrible usar cuantiles de Poisson

Pero sabemos que por TCL $\dfrac{\sum_i X_i - n\mu}{\sqrt{n\mu}} \xrightarrow[(a)]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$

Busco la regla tq

$$\alpha = \mathbb{P}_{\mu=2}(\delta(\underset{\sim}{X}) = 1) = \mathbb{P}_{\mu=2}\left(\sum_{i}^{n} X_i < K\right)$$

$$\mathbb{P}_{\mu=2}\left(\sum X_i < K\right) = \mathbb{P}_{\mu=2}\left(\frac{\sum X_i - 2n}{\sqrt{2n}} < K'\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(K')$$

por TCL

$\Rightarrow$ si n grande: $$\mathbb{P}_{\mu=2}\left(\frac{\sum X_i - 2n}{\sqrt{2n}} < z_\alpha\right) \approx \alpha$$

En este caso: $n = 80$, $z_\alpha = z_{0,05} = -1,6449$

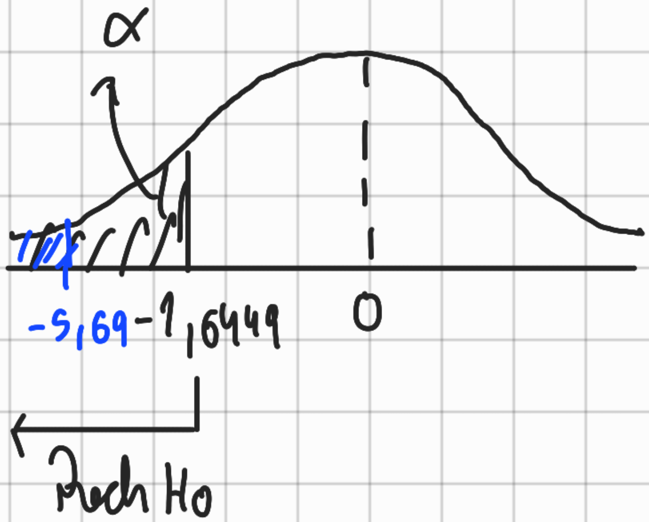
$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\frac{\sum^{n} X_i - 2n}{\sqrt{2n}} < -1,6449\right\}$$ es test de nivel asintótico α porque

$$\mathbb{P}_{\mu=2}\left(\delta(\underline{X}) = 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{\underbrace{\frac{\overset{88}{\sum^{80} x_i} - 2.80}{\sqrt{2.80}}}_{-5,69} < -1,6449\right\} = 1 \Longrightarrow$$ Hay evidencia para rechazar

Valor observado del estadístico de prueba

P-Valor aproximado:



$$\mathbb{P}(Z < -5,69) \approx 0$$