PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Primer recuperatorio — Segundo cuatrimestre – 2018

Duración: 4 horas. — 24/11/18 – 9:00 hs.

Curso:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Alejo, Teodoro, Carla y Gastón se ordenan al azar en una fila para comprar en el kiosco de la escuela. Calcular la probabilidad de que Alejo compre antes que Teodoro o Gastón.

Solución:

El experimento consiste en ordenar al azar 4 personas en una fila, por lo tanto todos los posibles resultados son todas las permutaciones de las cuatro personas, resultando en un espacio de resultados equiprobables. La cantidad de resultados posibles del experimento se calcula como $4! = 24$ ya que consiste en todas las permutaciones de los 4 elementos, que en este caso son las personas.

Definimos los siguientes eventos:

AT: "Alejo compra antes que Teodoro"
AG: "Alejo compra antes que Gastón"

El ejercicio pide calcular:

$$\mathbf{P}(AT \cup AG) = \mathbf{P}(AT) + \mathbf{P}(AG) - \mathbf{P}(AT \cap AG)$$

Como todas las configuraciones posibles son equiprobables, para calcular las probabilidades requeridas usamos la definición de Laplace: $\mathbf{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$, siendo $\#\Omega$ la cantidad de resultados posibles del experimento, y $\#A$ la cantidad de elementos que contiene el conjunto A.

Realizando un esquema de todos los resultados posibles, contamos las siguientes cantidades:

$$\#AT = 6 \cdot 2 = 12,\ \#AG = 6 \cdot 2 = 12,\ \#(AT \cap AG) = 6 + 2 = 8$$

La probabilidad pedida resulta:

$$\mathbf{P}(AT \cup AG) = \mathbf{P}(AT) + \mathbf{P}(AG) - \mathbf{P}(AT \cap AG) = \frac{12}{24} + \frac{12}{24} - \frac{8}{24} = \frac{2}{3}$$

2. Un helicóptero que cuenta con dos motores debe realizar un vuelo de 15 minutos. Los tiempos hasta la falla de cada motor son variables aleatorias independientes con distribución uniforme entre 5 y 25 minutos. Si alguno de los motores falla, el helicóptero no puede completar el vuelo. Sabiendo que ambos motores funcionaban a los 10 minutos, calcular la probabilidad de que el helicóptero no pueda completar el vuelo.

Solución:

Definimos a las variables X_i, $i = \{1, 2\}$ como el tiempo hasta la falla del motor i. Por el enunciado sabemos que X_1, X_2 son variables aleatorias *iid*, con distribución Uniforme en $(5, 25)$. Se pide calcular:

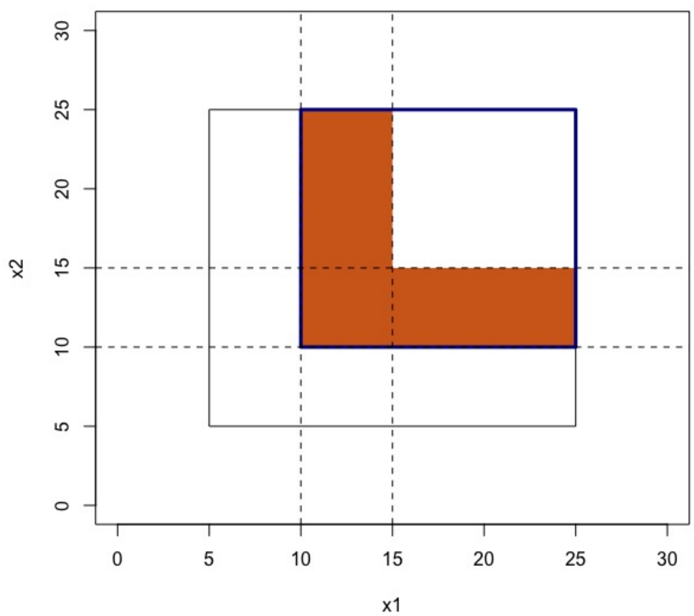
$$\mathbf{P}(\text{mín}\{X_1, X_2\} < 15 |\, \text{mín}\{X_1, X_2\} > 10) =$$
$$\mathbf{P}(\{X_1 < 15\} \cup \{X_2 < 15\} | X_1 > 10, X_2 > 10)$$

Como las variables son independientes y con distribución uniforme, podemos resolver el ejercicio de manera geométrica, graficando el soporte conjunto de las variables aleatorias y sobre él sombreando las regiones correspondientes a las probabilidades que debemos calcular. Una vez identificadas las regiones calculamos las áreas correspondientes para poder resolver lo pedido.

Desarrollando la probabilidad condicional:

$$\mathbf{P}(\{X_1 < 15\} \cup \{X_2 < 15\} | X_1 > 10, X_2 > 10) =$$

$$\frac{\mathbf{P}(\{(X_1 < 15) \cup (X_2 < 15)\} \cap \{X_1 > 10, X_2 > 10\})}{\mathbf{P}(X_1 > 10, X_2 > 10)}$$



Para calcular la probabilidad, calculamos el área de la región sombreada de naranja y la dividimos por el área bordeada con azul, resultando:

$$\mathbf{P}(\{X_1 < 15\} \cup \{X_2 < 15\} | X_1 > 10, X_2 > 10) = \frac{5 \cdot 10 + 5 \cdot 15}{15^2} = \frac{5}{9}$$

---

3. El tiempo (en horas) logrado por un maratonista es $X = 2 + T$; donde T es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 1 /3. Hallar el tiempo medio logrado por el maratonista, si se sabe que es inferior a 140 minutos.

Solución:

La variable aleatoria X es el tiempo logrado por el maratonista. Entonces el ejercicio pide hallar $\mathbf{E}[X|X < 7/3]$.

Sabemos que $X = 2 + T$, por lo tanto

$$\begin{aligned} E[X|X < 7/3] &= E[2 + T \mid 2 + T < 7/3] \\ &= E[2 + T \mid T < 1/3] \\ &= 2 + E[T \mid T < 1/3] \end{aligned}$$

Podemos escribir a la esperanza de T como:

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[T \mid T < 1/3]\mathbf{P}(T < 1/3) + \mathbf{E}[T \mid T \geq 1/3]\mathbf{P}(T \geq 1/3)$$

Como la distribución exponencial tiene la propiedad de *pérdida de memoria*, podemos decir que:

$$\left(T \mid T \geq \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{3} + \widetilde{T}, \text{ con } \widetilde{T} \sim \mathcal{E}(3).$$

Entonces:

$$\frac{1}{3} = \mathbf{E}\left[T \mid T < 1/3\right] \cdot (1 - e^{-1}) + \left[\frac{1}{3} + \mathbf{E}[\widetilde{T}]\right] \cdot e^{-1}$$

Despejando:

$$\mathbf{E}\left[T \mid T < \tfrac{1}{3}\right] = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}e^{-1}}{1-e^{-1}} = 0.1393.$$

Resulta: $\mathbf{E}[X \mid X < 7/3] = 2 + 0.1393 = 2.1393$

---

4. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ dada por:

$$F_X(x) = (1 - e^{-x^2})\mathbf{1}\{x > 0\}.$$

Hallar la distribución de la variable aleatoria $Y = -\ln[F_X(X)]$.

Solución:

Del ejercicio 2.13 *ítem* b, se sabe que $U = F_X(X)$ tiene distribución uniforme en $(0, 1)$. Por lo tanto el ejercicio pide pide hallar la distribución de la variable aleatoria $Y = -\ln U$, donde U es una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$.

Para hallar la función de distribución de Y notamos que como U toma valores en $(0, 1)$ entonces Y tomará valores en $(0, \infty)$. Por lo tanto consideramos dos casos:

- Si $y \leq 0$, entonces $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = 0$.
- Si $y > 0$, entonces:

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(-\ln U \leq y) = \mathbf{P}(\ln U \geq -y) = \mathbf{P}(U \geq e^{-y}) = 1 - e^{-y}.$$

Por lo tanto se tiene que Y tiene distribución exponencial de media 1:

$$F_Y(y) = (1 - e^{-y})\mathbf{1}\{y > 0\}.$$

---

5. La probabilidad de acertar a un blanco es $\frac{1}{5}$. Se realizan 10 tiros independientes y se cuenta la cantidad de aciertos. Sean X la cantidad total de aciertos en los 10 tiros, e Y la cantidad de aciertos en el primer tiro. Hallar $\mathbf{E}[Y|X]$.

Solución:

Definimos la variable $X_i = \mathbf{1}\{\text{Acierta en el blanco}\}$, entonces $X_i \sim Ber(1/5)$.

Sean $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ e $Y = X_1$, entonces debemos hallar $\mathbf{E}[Y|X]$

Sabemos por definición de Esperanza condicional que $\mathbf{E}[Y|X] = \varphi(X)$, donde $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.

Como Y sólo toma los valores 0 y 1, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y|X=x] = \mathbf{P}(Y=1|X=x) &= \frac{\mathbf{P}(Y=1, X=x)}{\mathbf{P}(X=x)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(X_1=1, \sum_{i=1}^{10} X_i = x)}{\mathbf{P}(X=x)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(X_1=1, \sum_{i=2}^{10} X_i = x-1)}{\mathbf{P}(X=x)}
\end{aligned}$$

Ahora, sabemos que las variables $X_1, \ldots, X_{10}$ son independientes, y que $X = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{B}(10, 1/5)$, y $\sum_{i=2}^{10} X_i \sim \mathcal{B}(9, 1/5)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=1|X=x) &= \frac{\mathbf{P}(X_1=1) \cdot \mathbf{P}(\sum_{i=2}^{10} X_i = x-1)}{\mathbf{P}(X=x)} \\
&= \frac{\frac{1}{5}\binom{9}{x-1}(1/5)^{x-1}(4/5)^{9-(x-1)}}{\binom{10}{x}(1/5)^{x}(4/5)^{10-x}} \\
&= \frac{x}{10} = \varphi(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{E}[Y|X] = \varphi(X) = \frac{X}{10}$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Primer recuperatorio — Segundo cuatrimestre – 2018
Duración: 4 horas. — 24/11/18 – 9:00 hs.

Curso:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Alejo, Teodoro, Carla y Gastón se ordenan al azar en una fila para comprar en el kiosco de la escuela. Calcular la probabilidad de que Alejo compre antes que Teodoro o Gastón.

Solución:

El experimento consiste en ordenar al azar 4 personas en una fila, por lo tanto todos los posibles resultados son todas las permutaciones de las cuatro personas, resultando en un espacio de resultados equiprobables. La cantidad de resultados posibles del experimento se calcula como $4! = 24$ ya que consiste en todas las permutaciones de los 4 elementos, que en este caso son las personas.

Definimos los siguientes eventos:

AT: "Alejo compra antes que Teodoro"
AG: "Alejo compra antes que Gastón"

El ejercicio pide calcular:

$$\mathbf{P}(AT \cup AG) = \mathbf{P}(AT) + \mathbf{P}(AG) - \mathbf{P}(AT \cap AG)$$

Como todas las configuraciones posibles son equiprobables, para calcular las probabilidades requeridas usamos la definición de Laplace: $\mathbf{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$, siendo $\#\Omega$ la cantidad de resultados posibles del experimento, y $\#A$ la cantidad de elementos que contiene el conjunto A.

Realizando un esquema de todos los resultados posibles, contamos las siguientes cantidades:

$$\#AT = 6 \cdot 2 = 12,\ \#AG = 6 \cdot 2 = 12,\ \#(AT \cap AG) = 6 + 2 = 8$$

La probabilidad pedida resulta:

$$\mathbf{P}(AT \cup AG) = \mathbf{P}(AT) + \mathbf{P}(AG) - \mathbf{P}(AT \cap AG) = \frac{12}{24} + \frac{12}{24} - \frac{8}{24} = \frac{2}{3}$$

2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ dada por:

$$F_X(x) = (1 - e^{-x^2})\mathbf{1}\{x > 0\}.$$

Hallar la distribución de la variable aleatoria $Y = -\ln[F_X(X)]$.

Solución:

Del ejercicio 2.13 *ítem* b, se sabe que $U = F_X(X)$ tiene distribución uniforme en $(0,1)$. Por lo tanto el ejercicio pide pide hallar la distribución de la variable aleatoria $Y = -\ln U$, donde U es una variable aleatoria uniforme en $(0,1)$.

Para hallar la función de distribución de Y notamos que como U toma valores en $(0,1)$ entonces Y tomará valores en $(0,\infty)$. Por lo tanto consideramos dos casos:

- Si $y \leq 0$, entonces $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = 0$.
- Si $y > 0$, entonces:

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(-\ln U \leq y) = \mathbf{P}(\ln U \geq -y) = \mathbf{P}(U \geq e^{-y}) = 1-e^{-y}.$$

Por lo tanto se tiene que Y tiene distribución exponencial de media 1:

$$F_Y(y) = (1 - e^{-y})\mathbf{1}\{y > 0\}.$$

3. La probabilidad de acertar a un blanco es $\frac{1}{5}$. Se realizan 10 tiros independientes y se cuenta la cantidad de aciertos. Sean X la cantidad total de aciertos en los 10 tiros, e Y la cantidad de aciertos en el primer tiro. Hallar $\mathbf{E}[Y|X]$.

Solución:

Definimos la variable $X_i = \mathbf{1}\{\text{Acierta en el blanco}\}$, entonces $X_i \sim Ber(1/5)$.

Sean $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ e $Y = X_1$, entonces debemos hallar $\mathbf{E}[Y|X]$

Sabemos por definición de Esperanza condicional que $\mathbf{E}[Y|X] = \varphi(X)$, donde $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.

Como Y sólo toma los valores 0 y 1, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y|X=x] = \mathbf{P}(Y=1|X=x) &= \frac{\mathbf{P}(Y=1, X=x)}{\mathbf{P}(X=x)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(X_1=1, \sum_{i=1}^{10} X_i = x)}{\mathbf{P}(X=x)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(X_1=1, \sum_{i=2}^{10} X_i = x-1)}{\mathbf{P}(X=x)}
\end{aligned}
$$

Ahora, sabemos que las variables $X_1, \dots, X_{10}$ son independientes, y que $X = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{B}(10, 1/5)$, y $\sum_{i=2}^{10} X_i \sim \mathcal{B}(9, 1/5)$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=1|X=x) &= \frac{\mathbf{P}(X_1=1) \cdot \mathbf{P}(\sum_{i=2}^{10} X_i = x-1)}{\mathbf{P}(X=x)} \\
&= \frac{\frac{1}{5}\binom{9}{x-1}(1/5)^{x-1}(4/5)^{9-(x-1)}}{\binom{10}{x}(1/5)^x(4/5)^{10-x}} \\
&= \frac{x}{10} = \varphi(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\mathbf{E}[Y|X] = \varphi(X) = \frac{X}{10}$

---

4. Clientes arriban a una ferretería según un proceso de Poisson de intensidad 20 por hora. La ferretería abre a las 9:00. Cada cliente requiere un tiempo de servicio (en minutos), cuya distribución es exponencial de media 7, independiente del momento de arribo. Si se sabe que el primer cliente llegó antes de las 9:10, calcular la probabilidad de que haya salido de la ferretería después de las 09:10.

Solución:

Según el enunciado, los clientes arriban a la ferretería según un proceso de Poisson de intensidad 20 por hora (1/3 por minuto). Definimos la variable T como el tiempo de servicio (en minutos) del primer cliente, y X como el momento despues de las 9:00 en el que arriba el primer cliente. Entonces sabemos que:

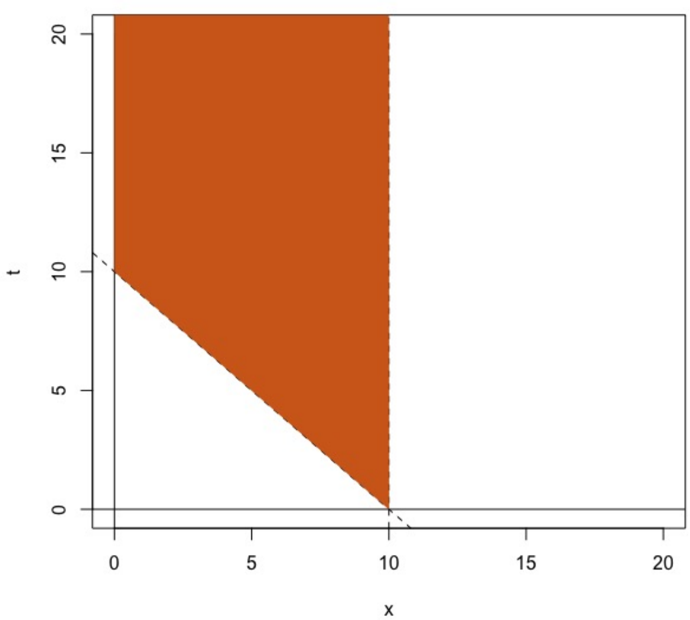
$$T \sim \mathcal{E}(1/7) \text{ y } X \sim \mathcal{E}(1/3)\ ,\ T \text{ y } X \text{ independientes.}$$

Calculamos lo pedido:

$$\mathbf{P}(X+T>10|X<10) = \frac{\mathbf{P}(X+T>10, X<10)}{\mathbf{P}(X<10)}$$

$$= \frac{\int_0^{10}\int_{10-x}^{\infty}\frac{1}{7}e^{-t/7}\frac{1}{3}e^{-x/3}dtdx}{1-e^{-10/3}}$$

$$= 0.3702$$



5. El volumen de hormigón (en m^3) que cargan los camiones mezcladores destinados a una obra es aleatorio con distribución uniforme entre 7 y 8. A efectos de modelar probetas, de cada camión que llega a la obra se extrae un volumen de hormigón (en m^3) uniformemente distribuido entre 0 y 1, independiente del volumen que carga el camión. El resto se utiliza para llenar una platea de 600 m^3. Calcular la mínima cantidad de camiones que deben llegar a la obra para que la probabilidad de que el hormigón alcance para llenar la platea sea mayor a 0.95.

Solución:

Definimos las siguientes variables aleatorias:

X_i: "Volumen de hormigon que carga el camión i"
Y_i: "Volumen destinado para moldear probetas el camión i"

Con $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias *iid* con distribución $\mathcal{U}(7,8)$, e $Y_1, \ldots, Y_n$ variables aleatorias *iid* con distribución $\mathcal{U}(0,1)$, independientes de las anteriores.

Si definimos T_i como el volumen del camión i destinado a llenar la platea, entonces $T_i = X_i - Y_i$. El volumen total destinado a llenar la platea será $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$, donde n es la cantidad de camiones que llegan a la obra.

El ejercicio nos pide hallar el valor de n tal que $\mathbf{P}(T > 600) > 0.95$

Como T es una suma de variables aleatorias *iid*, por el teorema central del límite sabemos que:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - n\mathbf{E}(T_1)}{\sqrt{n\mathbf{var}(T_1)}} < k\right) \cong \phi(k)$$

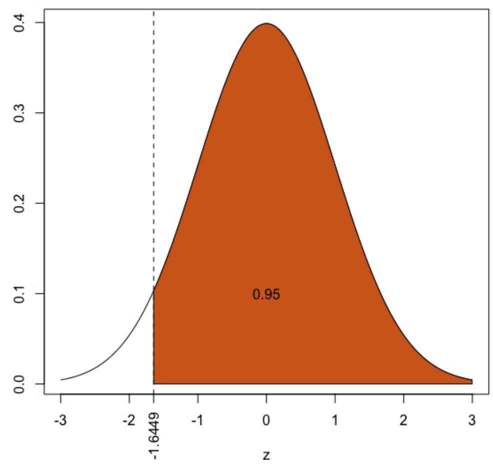
Por lo tanto, para hallar el valor pedido necesitamos encontrar $\mathbf{E}[T_1]$ y $\mathbf{var}(T_1)$. Usando propiedades:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[T_1] &= \mathbf{E}[X_1 - Y_1] = \mathbf{E}[X_1] - \mathbf{E}[Y_1] = 7.5 - 0.5 = 7 \\ \mathbf{var}[T_1] &= \mathbf{var}[X_1 - Y_1] = \mathbf{var}[X_1] + \mathbf{var}[Y_1] = 1/6 \end{aligned}$$

Ya que las variables son independientes.

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i > 600\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - 7n}{\sqrt{n/6}} > \frac{600 - 7n}{\sqrt{n/6}}\right) \cong 1 - \phi\left(\frac{600 - 7n}{\sqrt{n/6}}\right) > 0.95$$

Entonces debemos hallar el cuantil de la variable normal estandar que acumule "a derecha" más de 0.95 de probabilidad



$$\frac{600 - 7n}{\sqrt{n/6}} < -1.6449$$

$$-7n + 0.6715\sqrt{n} + 600 < 0$$
$$n > (9.306)^2 = 86.6$$
$$n \geq 87$$

Como mínimo se necesitan 87 camiones para llenar la platea.