PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Segundo recuperatorio — Segundo cuatrimestre – 2017

Duración: 4 horas. — 14/XII/17 – 9:00 hs.

---

1. Un coche de la línea A del subte parte desde la terminal San Pedrito con 8 pasajeros. El conductor anuncia que solo se detendrá en las estaciones Lima, Piedras, Perú o Plaza de Mayo. Cada pasajero elige al azar la estación en que bajará. Calcular la probabilidad de que exactamente 3 pasajeros bajen en la estación Lima y ninguno en Perú.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.15**] Se seleccionan los 3 pasajeros que se bajarán en la estación Lima: hay $\binom{8}{3}$ maneras diferentes de efectuar dicha selección. Se observa que los 5 pasajeros restantes se pueden bajar en la estación Piedras o Plaza de Mayo: hay 2^5 maneras diferentes en que pueden hacer eso. Como formas diferentes en que 8 pasajeros se pueden bajar al azar en 4 estaciones hay 4^8, se concluye que

$$p = \frac{\binom{8}{3}2^5}{4^8} = \frac{7}{256} = 0.02734.$$

□

---

2. Monk ingresa en un *Rapipago* para pagar una cuenta. El tiempo desde que ingresa en la fila hasta que llega a la caja es una variable aleatoria con distribución uniforme entre 11 y 13 minutos, independientemente de esto el tiempo desde que llega a la caja hasta que paga la cuenta también es uniforme pero entre 1 y 3 minutos. Sea Q la proporción del tiempo que Monk esperará en la fila. Calcular $\mathbf{P}(Q > 6/7)$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.22**] Sean X e Y los tiempos en minutos desde que Monk ingresa en la fila hasta que llega a la caja y desde que llega a la caja hasta que paga la cuenta. Como el vector (X, Y) se distribuye uniformemente sobre el cuadrado de lado 2, $C = [11, 13] \times [1, 3]$, tenemos que

$$\mathbf{P}((X,Y) \in \mathcal{B}) = \frac{\text{área}(\mathcal{B} \cap C)}{\text{área}(C)} = \frac{\text{área}(\mathcal{B} \cap C)}{4}, \qquad \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2.$$

Como la proporción del tiempo que Monk esperará en la caja es $Q = \frac{X}{X+Y}$ se tiene que

$$\mathbf{P}\left(Q > 6/7\right) = \mathbf{P}\left((X,Y) \in \mathcal{B}\right),$$

donde $\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{x}{6}\right\}$. Esto es así porque

$$\frac{X}{X+Y} > \frac{6}{7} \iff 7X > 6(X+Y) \iff X > 6Y \iff Y < \frac{X}{6}.$$

Como el área de $B \cap C$ es el área del trapecio de vértices $(11,1), (13,1), \left(13, \frac{13}{6}\right), \left(11, \frac{11}{6}\right)$, tenemos que

$$\text{área}(\mathcal{B} \cap C) = (13 - 11) \cdot \frac{\left(\frac{11}{6} - 1\right) + \left(\frac{13}{6} - 1\right)}{2} = 2.$$

Por lo tanto, $\mathbf{P}(Q > 6/7) = 2/4 = 1/2$. □

---

3. Una urna contiene tres bolas numeradas 1, 2 y 3. Se extraen al azar dos bolas de la urna, una por una y sin reposición. Sea X el número de la primera bola extraída e Y el número de la segunda. Calcular $\mathbf{cov}(X, Y)$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 3.18**] La distribución de (X, Y) es equiprobable sobre el conjunto $A = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \frac{1}{6}\mathbf{1}\{(x,y) \in A\}.$$

En consecuencia, las distribuciones marginales son equiprobables sobre el conjunto $\{1,2,3\}$, y por lo tanto $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 2$. Observando que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[XY] &= \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} xy\,\mathbf{P}(X = x, Y = y) \\
&= \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2}{6} \\
&= \frac{22}{6} = \frac{11}{3},
\end{aligned}$$

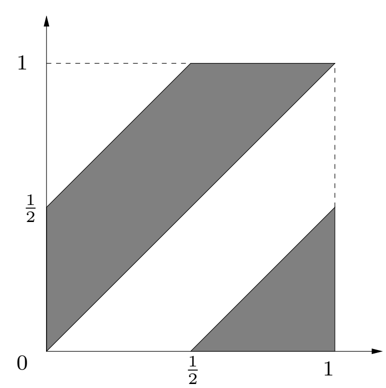
se concluye que

$$\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = \frac{11}{3} - 4 = -\frac{1}{3}.$$

□

---

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el recinto sombreado



Hallar y graficar la función de distribución de $U = Y - X$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.28**] Se quiere hallar la función de distribución de $U = Y - X$, $F_U(u) = \mathbf{P}(U \leq u)$.

Indicamos mediante Λ al recinto sombreado, cuya área es $1/2$. Como (X, Y) se distribuye uniformemente sobre Λ, tenemos que

$$\mathbf{P}((X,Y) \in \mathcal{B}) = \frac{\text{área}(\mathcal{B} \cap \Lambda)}{\text{área}(\Lambda)} = 2 \cdot \text{área}(\mathcal{B} \cap \Lambda), \qquad \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2.$$

En particular, si para cada $u \in \mathbb{R}$ se define

$$\mathcal{B}_u := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \leq u\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x + u\}$$

se obtiene que

$$F_U(u) = 2 \cdot \text{área}(\mathcal{B}_u \cap \Lambda).$$

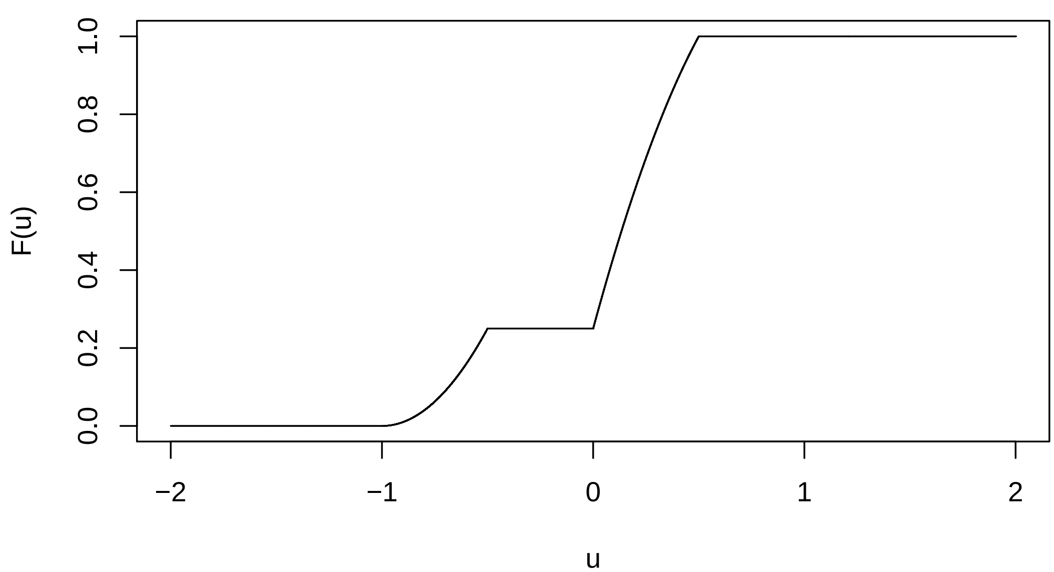
Observando que

$$\text{área}(\mathcal{B}_u \cap \Lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < -1, \\ (1+u)^2/2 & \text{si } -1 \leq u < -1/2, \\ 1/8 & \text{si } -1/2 \leq u < 0, \\ 1/8 + 1/2 - (1-u)^2/2 & \text{si } 0 \leq u < 1/2, \\ 1/2 & \text{si } u \geq 1/2, \end{cases}$$

se concluye que

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < -1, \\ (1+u)^2 & \text{si } -1 \leq u < -1/2, \\ 1/4 & \text{si } -1/2 \leq u < 0, \\ 5/4 - (1-u)^2 & \text{si } 0 \leq u < 1/2, \\ 1 & \text{si } u \geq 1/2. \end{cases}$$

El gráfico de la función de distribución de U se muestra en la siguiente figura:



□

5. Un productor de limones tiene 3500 limoneros. La cantidad de limones que produce cada limonero es una variable aleatoria Poisson de media 600. El peso (en gramos) de cada limón es una variable aleatoria de media 100. Todas las variables involucradas son independientes. Calcular la esperanza del peso de la producción de limones.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.22**] El peso, W, de la producción de limones de un limonero depende de la cantidad de limones que produce y del peso en gramos de cada limón. Si denotamos mediante N a la cantidad de limones producidos por un limonero y mediante L_k al peso en gramos del k-ésimo limón, tenemos que

$$W = \sum_{k=1}^{N} L_k,$$

donde N es una variable aleatoria con distribución Poisson de media 600 y L_k, $k \in \mathbb{N}$, son variables aleatorias de media 100. Como $N, L_1, L_2 \dots$ son independientes tenemos que $\mathbf{E}[W|N] = 100N$, y en consecuencia,

$$\mathbf{E}[W] = \mathbf{E}[\mathbf{E}\,[W|N]] = \mathbf{E}[100N] = 100\mathbf{E}[N] = 100 \cdot 600 = 60000.$$

El peso de la producción es la suma de los pesos de 3500 limoneros: $W_1, \dots, W_{3500}$, y como $W_i \sim W$ para todo i, tenemos que

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{3500} W_i\right] = \sum_{i=1}^{3500} \mathbf{E}[W_i] = 3500\mathbf{E}[W] = 210000000.$$

Por lo tanto, la esperanza de la producción de limones para un productor que tiene 3500 limoneros es 210 toneladas. $\square$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Segundo recuperatorio — Segundo cuatrimestre – 2017
Duración: 4 horas. — 14/XII/17 – 9:00 hs.

---

1. Un coche de la línea A del subte parte desde la terminal San Pedrito con 8 pasajeros. El conductor anuncia que solo se detendrá en las estaciones Lima, Piedras, Perú o Plaza de Mayo. Cada pasajero elige al azar la estación en que bajará. Calcular la probabilidad de que exactamente 3 pasajeros bajen en la estación Lima y ninguno en Perú.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.15**] Se seleccionan los 3 pasajeros que se bajarán en la estación Lima: hay $\binom{8}{3}$ maneras diferentes de efectuar dicha selección. Se observa que los 5 pasajeros restantes se pueden bajar en la estación Piedras o Plaza de Mayo: hay 2^5 maneras diferentes en que pueden hacer eso. Como formas diferentes en que 8 pasajeros se pueden bajar al azar en 4 estaciones hay 4^8, se concluye que

$$p = \frac{\binom{8}{3}2^5}{4^8} = \frac{7}{256} = 0.02734.$$

□

---

2. Una urna contiene tres bolas numeradas 1, 2 y 3. Se extraen al azar dos bolas de la urna, una por una y sin reposición. Sea X el número de la primera bola extraída e Y el número de la segunda. Calcular $\mathbf{cov}(X, Y)$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 3.18**] La distribución de (X, Y) es equiprobable sobre el conjunto $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \frac{1}{6}\mathbf{1}\{(x, y) \in A\}.$$

En consecuencia, las distribuciones marginales son equiprobables sobre el conjunto $\{1, 2, 3\}$, y por lo tanto $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 2$. Observando que

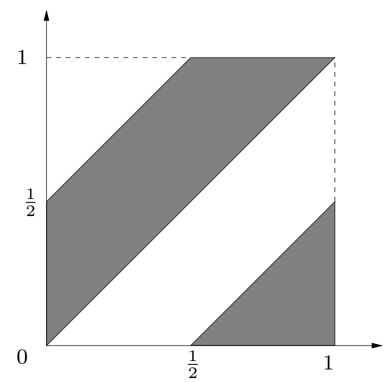
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[XY] &= \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} xy\,\mathbf{P}(X = x, Y = y) \\
&= \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{6} \\
&= \frac{22}{6} = \frac{11}{3},
\end{aligned}$$

se concluye que

$$\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = \frac{11}{3} - 4 = -\frac{1}{3}.$$

□

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el recinto sombreado



Hallar y graficar la función de distribución de $U = Y - X$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.28**] Se quiere hallar la función de distribución de $U = Y - X$, $F_U(u) = \mathbf{P}(U \leq u)$.

Indicamos mediante Λ al recinto sombreado, cuya área es $1/2$. Como (X, Y) se distribuye uniformemente sobre Λ, tenemos que

$$\mathbf{P}((X, Y) \in \mathcal{B}) = \frac{\text{área}(\mathcal{B} \cap \Lambda)}{\text{área}(\Lambda)} = 2 \cdot \text{área}(\mathcal{B} \cap \Lambda), \qquad \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2.$$

En particular, si para cada $u \in \mathbb{R}$ se define

$$\mathcal{B}_u := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \leq u\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x + u\}$$

se obtiene que

$$F_U(u) = 2 \cdot \text{área}(\mathcal{B}_u \cap \Lambda).$$

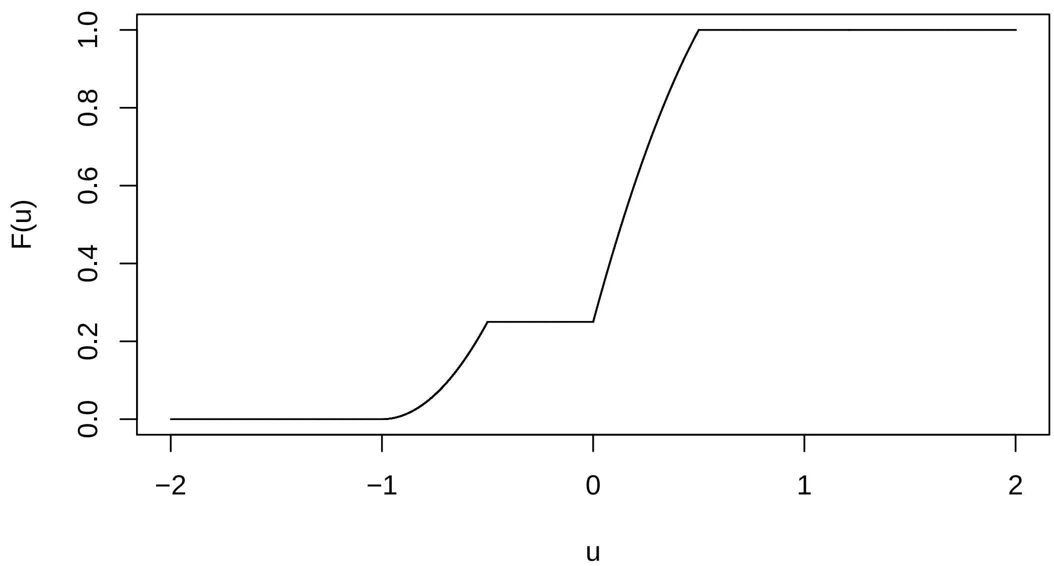
Observando que

$$\text{área}(\mathcal{B}_u \cap \Lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < -1, \\ (1+u)^2/2 & \text{si } -1 \leq u < -1/2, \\ 1/8 & \text{si } -1/2 \leq u < 0, \\ 1/8 + 1/2 - (1-u)^2/2 & \text{si } 0 \leq u < 1/2, \\ 1/2 & \text{si } u \geq 1/2, \end{cases}$$

se concluye que

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < -1, \\ (1+u)^2 & \text{si } -1 \leq u < -1/2, \\ 1/4 & \text{si } -1/2 \leq u < 0, \\ 5/4 - (1-u)^2 & \text{si } 0 \leq u < 1/2, \\ 1 & \text{si } u \geq 1/2. \end{cases}$$

El gráfico de la función de distribución de U se muestra en la siguiente figura:



□

---

4. A partir de las 10:00 clientes arriban a la fila de un banco de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 2 por minuto. Calcular la probabilidad de que a las 10:03 haya al menos 3 clientes en la fila, sabiendo que el primer cliente arribó antes de las 10:01.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 7.1**] Poniendo el 0 a las 10:00 y usando el minuto como la unidad de la escala, el intervalo $(0,1]$ representa el minuto que transcurre desde las 10:00 hasta las 10:01, y el intervalo $(1,3]$ los dos minutos que transcurren desde las 10:01 hasta las 10:03. Sea $N(a,b)$ la cantidad de clientes que arriban a la fila durante el intervalo $(a,b]$. Se quiere calcular $\mathbf{P}(N(0,3)\geq 3|N(0,1)\geq 1)$.

Observando que $\mathbf{P}(N(0,3)\geq 3|N(0,1)\geq 1) = 1-\mathbf{P}(N(0,3)\leq 2|N(0,1)\geq 1)$, el problema se reduce a calcular $\mathbf{P}(N(0,3)\leq 2|N(0,1)\geq 1)$. Usando la definición de probabilidad condicional y que $N(0,3)=N(0,1)+N(1,3)$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N(0,3)\leq 2|N(0,1)\geq 1) &= \frac{\mathbf{P}(N(0,1)\geq 1, N(0,3)\leq 2)}{\mathbf{P}(N(0,1)\geq 1)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(N(0,1)\geq 1, N(0,1)+N(1,3)\leq 2)}{\mathbf{P}(N(0,1)\geq 1)}.\end{aligned}$$

Para calcular la probabilidad del evento $A := \{N(0,1)\geq 1, N(0,1)+N(1,3)\leq 2\}$ se lo puede descomponer de la siguiente manera:

$$A = \{N(0,1)=1, N(1,3)\leq 1\}\cup\{N(0,1)=2, N(1,3)=0\}.$$

Usando la aditividad de la probabilidad y la propiedad de *independencia de los incrementos* *del proceso de Poisson sobre intervalos disjuntos* se obtiene que

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(N(0,1) = 1)\mathbf{P}(N(1,3) \leq 1) + \mathbf{P}(N(0,1) = 2)\mathbf{P}(N(1,3) = 0)$$

Debido a que la intensidad del proceso de arribos es 2, se tiene que $N(a,b)$ tiene la distribución Poisson de media $2(b-a)$, i.e.,

$$\mathbf{P}(N(a,b) = n) = e^{-2(b-a)}\frac{(2(b-a))^n}{n!}.$$

En particular,

$$\mathbf{P}(N(0,1) = m) = e^{-2}\frac{2^m}{m!} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(N(1,3) = n) = e^{-4}\frac{4^n}{n!}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N(0,1) = 1) &= \mathbf{P}(N(0,1) = 2) = 2e^{-2}, \\
\mathbf{P}(N(1,3) = 0) &= e^{-4}, \\
\mathbf{P}(N(1,3) \leq 1) &= \mathbf{P}(N(1,3) = 0) + \mathbf{P}(N(1,3) = 1) = e^{-4} + 4e^{-4} = 5e^{-4}.
\end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$\mathbf{P}(A) = 2e^{-2} \cdot 5e^{-4} + 2e^{-2} \cdot e^{-4} = 12e^{-6},$$

y como $\mathbf{P}(N(0,1) \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(N(0,1) = 0) = 1 - e^{-2}$ se obtiene que

$$\mathbf{P}(N(0,3) \leq 2|N(0,1) \geq 1) = \frac{12e^{-6}}{1-e^{-2}} = 0.0344.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(N(0,3) \geq 3|N(0,1) \geq 1) = 0.9656.$$

□

---

5. El control de recepción para lotes de varillas consiste en seleccionar 5 varillas al azar del lote y aceptarlo solamente si se encuentran al menos 4 varillas de longitud admisible y ninguna corta. Si las longitudes de las varillas son independientes y cada varilla es de longitud admisible con probabilidad 0.8, corta con probabilidad 0.05, y larga con probabilidad 0.15, calcular aproximadamente la probabilidad de aceptar al menos 60 lotes de un total de 100 lotes revisados.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 6.15** y **Ejercicio 8.12**] Sean $X_1, \dots, X_{100}$ 100 variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, cada una con distribución Bernoulli (p), donde p es la probabilidad de aceptar un lote revisado: $X_i = 1$ significa que se acepta el lote i y $X_i = 0$ que se lo rechaza. Con esa nomenclatura la cantidad de lotes aceptados de un total de 100 revisados es $S_{100} := \sum_{i=1}^{100} X_i$. De acuerdo con el Teorema central del límite

$$\mathbf{P}(S_{100} \leq x) = \mathbf{P}\left(\frac{S_{100} - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} \leq \frac{x - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right).$$

Sean L_a, L_c y L_ℓ las cantidades de varillas admisibles, cortas y largas, respectivamente, entre 5 varillas examinadas. La probabilidad p de aceptar un lote es

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(L_a \geq 4, L_c = 0) = \mathbf{P}(L_a = 4, L_\ell = 1) + \mathbf{P}(L_a = 5) \\ &= 5(0.8)^4(0.15) + (0.8)^5 = 0.63488. \end{aligned}$$

Como $100p = 63.488$ y $\sqrt{100p(1-p)} = 4.8146$ tenemos que

$$\mathbf{P}\left(S_{100} \leq x\right) \approx \Phi\left(\frac{x - 63.488}{4.8146}\right).$$

Como S_{100} tiene la distribución Binomial, usaremos la corrección por continuidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(S_{100} > 59.5\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 59.5\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{59.5 - 63.488}{4.8146}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0.82813) = 1 - 0.20375 = 0.79625. \end{aligned}$$

$\square$