Guía 5

5.1 En una urna hay 4 bolas verdes, 3 amarillas y 3 rojas. Se extraen tres. Sean X la cantidad de bolas verdes extraídas e Y la cantidad de rojas. Hallar las funciones de probabilidad de las variables condicionales $Y|X = x$.

5.2 Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo. Hallar la densidad condicional de $Y|X = x$ y la densidad marginal de X cuando

(**a**) (X, Y) tiene distribución uniforme sobre el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1.

(**b**) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2x+1} e^{-\left(2x + \frac{y}{4x+2}\right)} \mathbf{1}\{x > 0, y > 0\}$.

(**c**) $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x}\, \mathbf{1}\{0 < y < x\}$.

(**d**) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{6} x^4 y^3 e^{-xy}\, \mathbf{1}\{1 < x < 2, y > 0\}$.

5.3 Al comenzar el día un tanque contiene una cantidad aleatoria Y de miles de litros de leche. Durante el día se vende una cantidad aleatoria X de la leche contenida en el tanque en forma tal que la de densidad conjunta es $f_{X,Y}(x, y) = 0.5\ \mathbf{1}\{0 < x < y < 2\}$.

(**a**) Hallar $f_{Y|X=1.5}(y)$ y $f_{X|Y=0.8}(x)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(1.75 < Y < 2|X = 1.5)$ y $\mathbf{P}(0.5 < X < 0.75|Y = 0.8)$.

(**c**) X e Y, ¿son independientes?

5.4 Sea (X, Y) un vector aleatorio con la densidad conjunta del **Ejercicio 3.22**.

(**a**) Hallar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X=x}(y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir respecto a la independencia de X e Y?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(1 < XY < 5|X = \sqrt{5})$.

5.5 Sean X e Y dos variables aleatorias tales que X tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(3, 4)$ y para cada $x \in (3, 4)$, $Y|X = x$ tiene distribución normal de media x y varianza 1. Calcular $f_Y(5)$ y $\mathbf{P}(X > 3.5|Y = 5)$.

5.6 Sean T_1 y T_2 variables exponenciales independientes de intensidad λ. Sean $S_1 = T_1$ y $S_2 = T_1 + T_2$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de S_1 y S_2. ¿Son S_1 y S_2 independientes?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(S_1 \in [1/2, 1]|S_2 = 2)$.

5.7 Un viajante tiene tres alternativas de viaje a su trabajo: A, B y C. Se sabe que la proporción de veces que usa estos medios es respectivamente: 0.5, 0.3 y 0.2. El tiempo (en horas) de viaje con el transporte i es una variable aleatoria T_i con densidad: $f_{T_A}(t) = 2t\ \mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 1\}$ para el medio A, $f_{T_B}(t) = 0.5t\ \mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 2\}$ para el medio B, y $f_{T_C}(t) = 0.125t\ \mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 4\}$ para el medio C.

(**a**) Si ha transcurrido media hora de viaje y aun no ha llegado al trabajo, calcular la probabilidad de que llegue por el medio de transporte A.

(**b**) Si tardó exactamente media hora en llegar al trabajo, calcular la probabilidad de que lo haya hecho por el medio de transporte A.

5.8 [*ver* **Ejercicio 4.14**] Drácula y Renfield se dieron cita en una esquina de Mataderos a las 0:00. Drácula llegará a las 0:00+X y Renfield a las 0:00+Y, donde X e Y (en minutos) son variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{35} e^{-\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{7}\right)} \mathbf{1}\{x > 0, y > 0\}.$$

Sabiendo que el primero en llegar a la cita tuvo que esperar exactamente 5 minutos al otro calcular la probabilidad de que el primero en llegar a la cita haya sido Drácula.

5.9 Un receptor recibe una señal de amplitud aleatoria $X = S + N$, donde S es una señal equiprobable sobre el *alfabeto* $\{0.1, 0.2, 0.3\}$ y N es un ruido con distribución normal estándar independiente de S. Si se recibe una señal de amplitud 0.87 ¿cuál es la probabilidad de que contenga la *letra* 0.2?

5.10 La corporación *Cobani Products* produjo 6 RoboCops, cada uno de los cuales está fallado con probabilidad 1/4. Cada RoboCop es sometido a una prueba tal que si el Robocop está fallado se detecta la falla con probabilidad 4/5. Sea X la cantidad de RoboCops fallados y sea Y la cantidad detectada de RoboCops fallados.

(**a**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.

(**b**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y = y]$.

5.11 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad en el que $\Omega = \{1, 2, \dots, 11, 12\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ y $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 1/12$ para todo $\omega \in \Omega$. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aleatoria definida por

$$X(\omega) = \mathbf{1}\{\omega \in \{1,2\}\} + 2\,\mathbf{1}\{\omega \in \{3,4,5,6\}\} + 3\,\mathbf{1}\{\omega \in \{7,8,9,10,11,12\}\}.$$

(**a**) Hallar la expresión de $\mathbf{E}[Y|X]$ para la variable aleatoria $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

1. $Y(\omega) = \omega$.
2. $Y(\omega) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4}\right)$.

5.12 Se arroja un dado 36 veces. Sean X e Y las cantidades de resultados pares e impares respectivamente. Hallar la esperanza condicional $\mathbf{E}[Y|X]$ y el valor de $\mathbf{cov}(X, Y)$.

5.13 Una rata está atrapada en un laberinto. Inicialmente puede elegir una de tres sendas. Si elige la primera se perderá en el laberinto y luego de 12 minutos volverá a su posición inicial; si elige la segunda volverá a su posición inicial luego de 14 minutos; si elige la tercera saldrá del laberinto luego de 9 minutos. En cada intento, la rata elige con igual probabilidad cualquiera de las tres sendas. Calcular la esperanza del tiempo que demora en salir del laberinto.

5.14 Una rata está atrapada en un laberinto. Inicialmente elige al azar una de tres sendas. Cada vez que vuelve a su posición inicial elige al azar entre las dos sendas que no eligió la vez anterior. Por la primera senda, retorna a la posición inicial en 8 horas, por la segunda retorna a la posición inicial en 13 horas, por la tercera sale del laberinto en 5 horas. Calcular la esperanza del tiempo que tardará en salir del laberinto.

5.15 Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar y sea Y una variable aleatoria tal que $\mathbf{E}[Y|X] = X^2$. Calcular $\mathbf{cov}(X, Y)$.

5.16 Sea (X, Y) un vector aleatorio tal que X tiene distribución exponencial de media 2, $\mathbf{E}[Y|X] = X$ y $\mathbf{var}[Y|X] = X$. Usando el Teorema de Pitágoras calcular el valor de $\mathbf{var}[Y]$.

5.17 En el contexto del **Ejercicio 5.1**.

(**a**) Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$ y la función $\phi(x) = \mathbf{var}[Y|X = x]$.

(**b**) Hallar la esperanza y varianza condicional de Y dada X.

5.18 Sea (X, Y) el vector aleatorio considerado en el **Inciso** (**b**) del **Ejercicio 5.2**.

(**a**)

1. Hallar la distribución de las variables condicionales $Y|X = x$.
2. Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.
3. Hallar la esperanza condicional de Y dada X.
4. Hallar y graficar la función de distribución de la esperanza condicional de Y dada X.
5. Calcular $\mathbf{P}(1 < \mathbf{E}[Y|X] < 2)$.
6. Hallar y graficar la "varianza de regresión" $\phi(x) = \mathbf{var}(Y|X = x)$.
7. Hallar la varianza condicional de Y dada X.
8. Hallar y graficar la función de distribución de la varianza condicional de Y dada X.
9. Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{var}(Y|X) > 1)$.
10. Calcular $\mathbf{var}(Y)$.

(**b**) Repetir el inciso anterior para los restantes incisos del **Ejercicio 5.2**

5.19 Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{13}{48\pi} \exp\left(-\frac{169}{288}\left(\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{5(x-1)y}{13} + y^2\right)\right).$$

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[Y|X]$.

(**b**) Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

5.20 Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 3/4, 0 < y < 3/4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3/4 < x < 1, 3/4 < y < 1\}$.

Hallar la función de distribución de $\mathbf{E}[Y|X]$ y $\mathbf{var}[Y|X]$. ¿Cuál es la probabilidad de que esta varianza condicional tome un valor inferior a $1/32$?

5.21 La longitud de los rollos de tela producidos por cierta máquina obedece a una distribución uniforme entre 20 y 30 metros. Un buen día un cliente requiere un rollo con por lo menos 28 metros, de los que no hay ninguno en stock.

(**a**) Calcular la cantidad media de rollos que será necesario producir para satisfacer la demanda del cliente.

(**b**) Calcular la longitud total media de tela producida para satisfacer esa demanda.

(**c**) Calcular la longitud total media de tela de los rollos que irán a stock (es decir sin incluir el vendido al cliente).

5.22 Una partícula suspendida en agua es bombardeada por moléculas en movimiento térmico y recibe (por segundo) una cantidad de impactos con distribución Poisson de media 2. Por cada impacto la partícula se mueve un milímetro hacia la derecha con probabilidad $3/5$ o un milímetro hacia la izquierda con probabilidad $2/5$. Hallar la posición media de la partícula al cabo de un segundo.

5.23 El peso de ciertas bolsas de naranjas es una variable aleatoria uniforme entre 3 y 6 kilos. Se van agregando bolsas en una balanza hasta que el peso supere 5 kilos. Hallar la media y la varianza del peso final así obtenido.

5.24 En el contexto del **Ejercicio 5.9** hallar la media y la varianza de la señal recibida.

Ejercicios Complementarios

5.25 [*Grimmett, pág. 111*] Sean T_1 y T_2 variables exponenciales independientes de media 1. Sean $X_1 = T_1 + T_2$, $X_2 = T_1 - T_2$ y $X_3 = T_1/T_2$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de X_1 y X_2. ¿Son X_1 y X_2 independientes?

(**b**) Hallar la densidad conjunta de X_1 y X_3. ¿Son X_1 y X_3 independientes?

(**c**) Hallar las densidades condicionales $f_{X_1|X_2=0}(x_1)$, $f_{X_1|X_3=1}(x_1)$.

(**d**) Calcular $p_1 = \mathbf{P}(X_1 > 1|X_2 = 0)$ y $p_2 = \mathbf{P}(X_1 > 1|X_3 = 1)$. Observe que $X_2 = 0$ y $X_3 = 1$ son eventos equivalentes. ¿Cómo se explica que $p_1 < p_2$?

(**e**) Estimar por simulación las probabilidades del inciso anterior. Para ello simular 100000 pares (T_1, T_2) y usarlos para estimar las probabilidades $\mathbf{P}(X_1 > 1|\,|X_2| < 0.01)$ y $\mathbf{P}(X_1 > 1|\,|X_3 - 1| < 0.01)$. Hacer un gráfico representando las diversas zonas de integración involucradas, y explicar por qué la segunda probabilidad es aproximadamente el doble de la primera.

5.26 Sea (X, Y) una variable bidimensional con la densidad conjunta del **??**. Encuentrar la densidad de $Z = XY$ sabiendo que $Y = 0.25$.

5.27 Sean X e Y variables aleatorias independientes tal que $X \sim U(0,1)$ y $f_Y(y) = 2y\ \mathbf{1}\{0 < y < 1\}$. Se desea calcular $\mathbf{P}(X+Y<1|X=Y)$. Jekyll propone:

$$\mathbf{P}(X+Y<1|X=Y) = \mathbf{P}(2X<1) = \mathbf{P}(X<1/2) = 1/2.$$

Pero Hyde no está de acuerdo y dice:

$$\mathbf{P}(X+Y<1|X=Y) = \mathbf{P}(2Y<1) = \mathbf{P}(Y<1/2) = 1/4.$$

Si ambos hubieran razonado correctamente, ¿convenimos que $1/2 = 1/4$? Explicar lo sucedido.

5.28 [*ver* **Ejercicio 5.10**] La corporación *Cobani Products* produjo n RoboCops, cada uno de los cuales está fallado con probabilidad ϕ. Cada RoboCop es sometido a una prueba tal que si el Robocop está fallado se detecta la falla con probabilidad δ. Sea X la cantidad de RoboCops fallados y sea Y la cantidad detectada de RoboCops fallados.

(**a**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y=y]$.

(**b**) Mostrar que

$$\mathbf{E}[X|Y] = \frac{n\phi(1-\delta) + (1-\phi)Y}{1-\phi\delta}.$$

5.29 Sean X e Y variables aleatorias con distribución uniforme sobre la región del plano Λ. Hallar $\mathbf{E}[Y|X]$ cuando:

(**a**) Λ es el cuadrado de vértices $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$.

(**b**) Λ es el cuadrado de vértices $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$ y $(0,-\sqrt{2})$. ¿X e Y son independientes?

5.30 [*ver* **Ejercicio 3.29** y **Ejercicio 5.13**] Se arroja sucesivas veces un dado equilibrado. Sea K el número de tiradas hasta obtener por primera vez un resultado distinto de as, y sea, para cada entero $m > 1$, X_m el número de tiradas hasta obtener por primera vez m ases seguidos (por ejemplo si las primeras 9 tiradas resultan $1,1,2,1,4,5,1,1,1$ sería $K=3$ $X_2 = 2$, $X_3 = 9$).

(**a**) ¿Qué distribución tiene K? Hallar $\mathbf{E}[K]$.

(**b**) Se sabe que $\mathbf{E}[X_2] = 42$. Describir la variable aleatoria $\mathbf{E}[X_2|K]$. Comprobar la consistencia de esta descripción con el dato $\mathbf{E}[X_2] = 42$.

(**c**) Describir la expresión general de $\mathbf{E}[X_m|K]$ en términos de $\mathbf{E}[X_m]$. Deducir una expresión general para $\mathbf{E}[X_m]$.

(**d**) Calcular $\mathbf{E}[X_5]$.

(**e**) Si cada tirada del dado insumiera un segundo, estimar (en años) el tiempo medio necesario hasta obtener 20 ases seguidos.

5.31 Juan y Roberto concursan por un trabajo en IBM. Mientras esperan a ser atendidos por el Examinador, Juan descubre desesperado que olvidó su calculadora. Cuando el Examinador los atiende, Juan le pide una, pero el Examinador (que no cursó esta materia ni leyó la columna de Adrián Paenza en la contratapa de Página

12 del domingo 18 de julio del 2010), se la niega y le dice que piensa que no le será necesaria.

Uno de los enunciados de la prueba dice: "Escriba una secuencia de 200 bits elegidos al azar en $\{0,1\}$.".

El Examinador saca copia de los exámenes, identificando las copias, y se los entrega al Corrector (que cursó esta materia el primer cuatrimestre del 2010) que no puede identificarlos, pero sabe que su amigo Juan olvidó la calculadora. El Corrector mira las pruebas y sin dudarlo sabe cuál es la de su amigo Juan.

Uno:

```
01001110111001000011101010110010011110110101101110011010011001010110
00010011100001010111011010110001010010001100001110101011000011101100
0100010000101001101101110011110101010111001100001010001000101100
```

Otro:

```
01111001011010100110110111000011101110110010100001011001101011001101
100010011000110101110011011110111101111111101000111000101001000000000
1110110000010001001110101111010001011011010100001110011110110001
```

¿Podría, a la luz del **Ejercicio 5.30**, explicar cómo hizo, y cuál de las dos secuencias pertenecía a Juan?

5.32 Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Sabiendo que $X \sim N(0, 2)$ y $\mathbf{E}[Y|X] = 2X^2 + 1$.

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[Y]$ y $\mathbf{cov}(X, Y)$.

(**b**) Hallar una ecuación de la recta de regresión de Y dado X.

5.33 ☣ Dado un vector $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$, sea $T(x_1, \dots, x_n)$ la variable aleatoria discreta con rango $\{x_1, \dots, x_n\}$ definida por $P(T = x_i) = 1/n$. Consideramos además n réplicas independientes $X_1, \dots, X_n$ de una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2.

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[T]$.

(**b**) Hallar $\mathbf{var}[T]$.

(**c**) Describir la variable aleatoria $\mathbf{E}[T(X_1, \dots, X_n)|(X_1, \dots, X_n)]$. Comparar con **Ejercicio 3.32**. Hallar $\mathbf{E}[T(X_1, \dots, X_n)]$ (en términos de μ).

(**d**) Describir la variable aleatoria $\mathbf{var}[T(X_1, \dots, X_n)|(X_1, \dots, X_n)]$. Comparar con **Ejercicio 3.32**. Hallar $\mathbf{E}[\mathbf{var}[T(X_1, \dots, X_n)]]$ (en términos de σ^2).
