Guia 6

6.1 Una empresa produce discos que son defectuosos con probabilidad 0.01 y los vende en paquetes de 10. Ofrece una garantía de que como máximo 1 de los 10 discos del paquete es defectuoso, en caso contrario devolverá el dinero de la compra. ¿Qué proporción de los paquetes no satisface la garantía? Si Lucas compra tres paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que le devuelvan el dinero de la compra de exactamente uno de ellos?

a) A = "se produce un disco sano" $\quad \mathbb{P}(A) = 0{,}99 \quad \mathbb{P}(\bar{A}) = 0{,}01$

X = "cant de discos defectuosos en un paquete de 10 discos"

$X \sim \mathcal{B}(10, 0{,}01)$

cant defectuosos $\Rightarrow$ 0 garantia, 1 garantia, >1 devolucion) dicotomia

B = "no satisface garantia"

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X>1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) \overset{me}{=} 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1)$$

$$= 1 - (0{,}99)^{10} - \binom{10}{1} 0{,}01 (0{,}99)^{9} = \boxed{4{,}26\ 10^{-3}} \rightarrow \text{prob de que se lo devuelvan}$$

b) Lucas compra 3 paquetes $\rightarrow$ $\mathbb{P}$("le devuelvan el dinero" por 1 de ellos)

W = "cant de paquetes devueltos despues de comprar 3"

$W \sim (3, \mathbb{P}(B))$

cant paquetes defect $\Rightarrow$ $\underline{D}$ $\underline{\bar{D}}$ $\underline{\bar{D}}$ dicotomia

$$\mathbb{P}(W=1) = \binom{3}{1} 4{,}26\ 10^{-3} (0{,}99)^{2} = \boxed{1{,}26\ 10^{-2}}$$

6.2 Un tirador tiene probabilidad p de dar en el blanco. Se le ofrecen dos alternativas para ganar un premio: a) hacer 3 disparos con la condición de dar por lo menos 2 veces en el blanco; b) hacer 5 disparos con la condición de dar por lo menos 3 veces en el blanco. ¿Para qué valores de p es más favorable la primera alternativa?

a

$\mathbb{P}(\text{"dar blanco"}) = p$

premio

ⓐ al menos 2 blancos en 3 disparos

ⓑ al menos 3 blancos en disparos

$X =$ "cant de blancos en 3 disparos" $\quad X \sim Ber(3, p)$

$Y =$ " " " "5" " $\quad Y \sim Ber(5, p)$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0 \cup X=1) \overset{me}{=} 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1)$$

$$= 1 - (1-p)^3 - \binom{3}{1} p (1-p)^2$$

$$= \boxed{-2p^3 + 3p^2}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(P<3) \overset{me}{=} 1 - (1-p)^3 - \binom{3}{1} p (1-p)^2 - \binom{3}{2} p^2 (1-p) = \boxed{p^3}$$

3

$P_X = -2p^3 + 3p^2 \qquad P_Y = p^3$

$-2p^3 + 3p^2 = 3p$

$-5p^3 + 3p^2 = 0$

$\to p_1 = 0$

$\to p_2 = \frac{3}{5}$

$P_X \quad P_Y$

$0 \quad \frac{3}{5}$

ej $p = \frac{1}{2}$

$\boxed{P_X = \frac{1}{2}}$

$P_Y = 0{,}125$

$p = \frac{4}{5}$

$\boxed{P_X = 0{,}896}$

$P_Y = 0{,}512$

6.3 Se arroja una moneda equilibrada 18 veces.

(**a**) Calcular la probabilidad de obtener exactamente 13 caras.

(**b**) Hallar el número más probable de caras y calcular la probabilidad de que se obtenga ese número.

a

○ → dicotomía
● →

$p = \frac{1}{2}$

X = "cant de caras obtenidas en 18 tiros"

$X \sim \beta(18, p)$

$$\mathbb{P}(X=13) = \binom{18}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5} = \boxed{0{,}032}$$

6.4 La probabilidad de que un pasajero que reserva un asiento no se presente al vuelo es 0.04, de manera independiente unos de otros. En consecuencia, la política de una empresa es vender 100 reservas en un avión que tiene solo 98 asientos. Estimar la probabilidad de que todas las personas que se presentan para un vuelo en particular encuentren asientos disponibles.

$\mathbb{P}($"no se presente"$) = 0{,}04 \longrightarrow \mathbb{P}($"se presenta"$) = 1 - 0{,}96$

$N = 100 \longrightarrow \mathbb{P}($"2 de 100 no se presenten"

X = "cant personas que se presentan de las 100"

$$X \sim \beta(100, 0{,}96) \longrightarrow \mathbb{P}(X=98) = \binom{100}{98}\, 0{,}96^{98}\, 0{,}04^{2} \cong \boxed{0{,}14}$$

6.6 Se lanza un dado equilibrado sucesivas veces.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del tercer lanzamiento.

(**b**) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del sexto lanzamiento, dado que no ocurrió en los primeros 3 lanzamientos.

$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \geq 0{,}9$[illegible]

a

$\underline{A}$ $\underline{B}$ $\underline{C}$ $\underline{2}$ ← geom

_ _ _ _ _ _ $\underline{2}$

$\mathbb{P}($"el primer 2 aparezca después del 3 tiro"$) = 1 - \mathbb{P}($"salga 2 en el 1°, 2° ó 3°"$)$

defino variable aleatoria

X_i = "valor obtenido al tirar dado"

$X_i \sim M\left(n, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \longrightarrow$ PB → salió 2 / no salió 2 } dicotomía

1 2 3 4 5 6

$$\mathbb{P}(X_1) = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(X_2) = \frac{5}{6}\frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(X_3) = \frac{5^2}{6}\frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(N>3) = 1 - \mathbb{P}(N\leq 3) = 1 - \mathbb{P}(N=1) - \mathbb{P}(N=2) - \mathbb{P}(N=3)$$

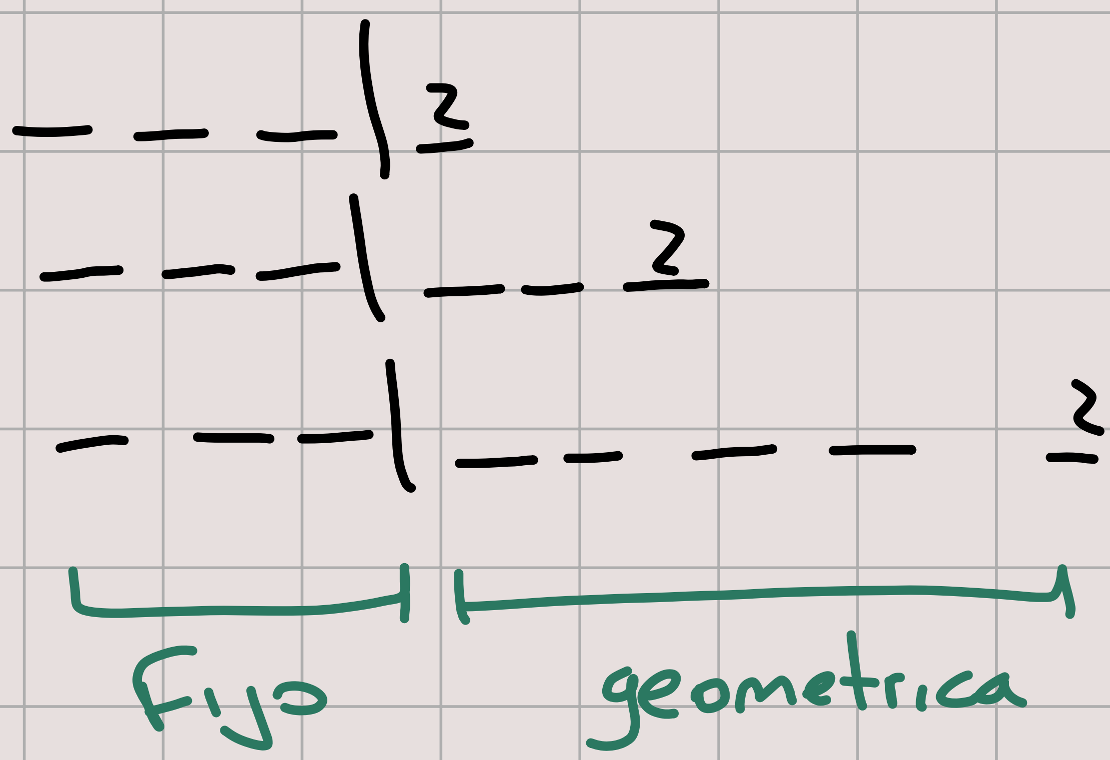
$$1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\frac{1}{6} - \frac{5^2}{6^2}\frac{1}{6} = \boxed{0{,}57} \quad \frac{125}{216}$$

$\Rightarrow$ mejor definiciones

$X_i =$ "sale el 2 o no" $\qquad X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$

VA geo nro de ensayos hasta primer exito

$$N \sim \text{geom}\left(\tfrac{1}{6}\right) \qquad p_N(n) = p(1-p)^{n-1}, \ n\in\mathbb{N}$$



(b) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del sexto lanzamiento, dado que no ocurrió en los primeros 3 lanzamientos.

$$\mathbb{P}(N>6 \mid N>3) = 1 - \mathbb{P}(N\leq 6 \mid N>3)$$

$$1 - \frac{\mathbb{P}(N\leq 6 \cap N>3)}{\mathbb{P}(N>3)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(N=4 \cup N=5 \cup N=6)}{1-\mathbb{P}(N\leq 3)}$$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(N=4 \cup N=5 \cup N=6)}{1 - \cancel{\mathbb{P}(N=0)} - \ldots - \mathbb{P}(N=3)} \quad (*)$$

me

me ind

$$\mathbb{P}(N=6) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{46656} =$$
$$\mathbb{P}(N=5) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{7776}$$
$$\mathbb{P}(N=4) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{1296}$$
$$\mathbb{P}(N=3) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$$
$$\mathbb{P}(N=2) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{36}$$
$$\mathbb{P}(N=1) = \frac{1}{6}$$

$$(*) = 1 - \left(\frac{\frac{3125}{46656} + \frac{625}{7776} + \frac{125}{1296}}{\frac{125}{216}}\right) \simeq 1 - \frac{0{,}243}{\frac{125}{216}} \simeq \boxed{\frac{125}{216}}$$

Como N tiene la prop de Falta de memoria

$$\mathbb{P}(N>n+k \mid N>n) = \mathbb{P}(N>k)$$

me queda $\Rightarrow \mathbb{P}(N>6 \mid N>3) = \boxed{\mathbb{P}(N>3)}$

6.7 ¿Cuán larga debe ser una sucesión de dígitos decimales equiprobables para que la probabilidad de que aparezca el dígito 6 sea por lo menos 0.99?

X_i = "cant de numeros 6 en i digitos", $i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_i \geq 1) \geq 0{,}99$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_i < 1) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(X_i = 0)}$$

$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{9}{10}$

$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^2$

$\mathbb{P}(X_i = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^i \longrightarrow 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^i \geq 0{,}99$

$\left(\frac{9}{10}\right)^i \leq 0{,}01 \longrightarrow$ igualo luego discretizo

$\left(\frac{9}{10}\right)^i = 0{,}01$

$\log_{\frac{9}{10}} 0{,}01 = i = \frac{\log_{10} 0{,}01}{\log_{10} \frac{9}{10}} \cong 43{,}7$

$\log_{\frac{9}{10}} 0{,}01 \leq 43{,}7$

$43 \leq i$ ⊗

⊛ $\mathbb{P}(X_{43} = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^{43} \longrightarrow 1 - 0{,}0107 = 0{,}98$ ×

⊛ $\mathbb{P}(X_{44} = 0) = 0{,}0096 \rightarrow 1 - 0{,}0096 = 0{,}9903$ ✓

$\Rightarrow i \geq 44$

6.8 [*ver* **Ejercicio 4.7**] Una lámpara se mantendrá encendida durante un tiempo exponencial de media 3 horas. Lucas enciende la lámpara y, mientras la lámpara está encendida, lanza un dado equilibrado de veinte en veinte segundos (el primero cuando enciende la lámpara). Hallar el número esperado de 3's observados hasta que se apague la lámpara.

$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \quad E(X) = 3 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$

X = "tiempo en horas de la lampara encendida"

Se lanzó un dado c/20 seg

$\underbrace{\_ \ \underset{-}{3} \ \_ \ \_ \ \_}_{\text{c/tiros depende del tiempo de encendido}}$

Y = "cant de 3's en n experimentos"

$Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$

Si paso 1 hora — 3600 s

$5{,}55 \cdot 10^{-3}$ — 20 s

$\Rightarrow$ en 60 s

tiros 1 2 3 4

tiempo 20 40 60

$\boxed{\frac{3600 \; X}{20} + 1}$ redondeo para atras

v a

$n \in \mathbb{N}$ (redondeo) $\Rightarrow \boxed{n(X) = \frac{3600 \; X}{20} + 1}$ cant de tiros en X horas $= n$ / cant de experimentos

$Y \sim \mathcal{B}\left(n(X), \frac{1}{6}\right) \qquad \mathbb{P}(Y \leq y) = \binom{n(X)}{y} \left(\frac{1}{6}\right)^{y} \left(\frac{5}{6}\right)^{n(X)-y}$

$\Rightarrow$ tengo variable condicionada al valor de X

$Y_{X=x} \sim \mathcal{B}in\left(n(X), \frac{1}{6}\right)$

$Y_{n(x)=n} \sim \mathcal{B}_{in}\left(n, \frac{1}{6}\right) \longrightarrow E\left(Y_{n(x)=n}\right) = E\left(Y \mid n(x)=n\right) = n(x) \quad E(Y) = \boxed{n(x)\frac{1}{6}}$

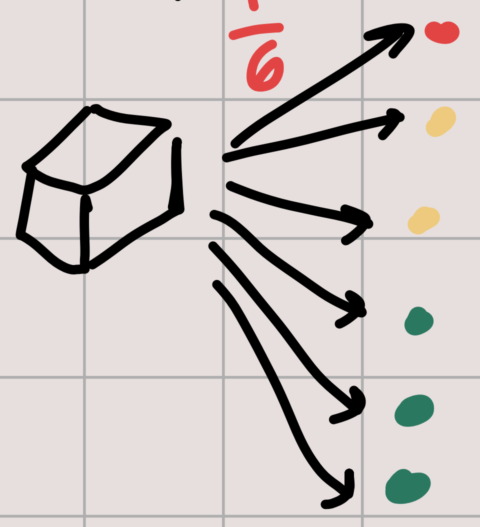
$E[Y] = E\left[E[Y \mid n(x)]\right] = E\left[n(x)\frac{1}{6}\right] = \boxed{\frac{n(x)}{6}}$

6.11 Un dado equilibrado tiene pintadas sus seis caras de la siguiente forma: rojo, amarillo, amarillo, verde, verde, verde. Calcular la esperanza de la cantidad de lanzamientos del dado que deberán realizarse para observar sus tres colores.

$\Omega = \{R, A, V\}$ $\quad E[$cant de lanzamiento para observar los 3 colores"$]$

equilibrado

$\frac{1}{6}$



$N =$ "cant de tiros observar los 3 colores"

$N_1 = \underline{V}$ ← primer color

$N_2 = \begin{cases} \underline{V}\ \underline{R} \\ \underline{V}\ \underline{V}\ \underline{V}\ \underline{V}\ \underline{R} \end{cases}$

seg color

$N = N_1 + N_2$

↑ obtengo primer color

en c/uno lo pienso como dicotomia "salio nuevo color" o no

$N_3 = \begin{cases} \underline{V}\ \underline{R}\ \underline{A} \\ \underline{V}\ \underline{V}\ \underline{V}\ \underline{R}\ \underline{A} \\ \underbrace{\underline{V}}_{N_1}\ \underbrace{\underline{V}\ \underline{V}\ \underline{R}\ \underline{V}}_{N_2}\ \underbrace{\underline{A}}_{N_3} \end{cases}$

$N_1 = 1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$

$N_2 =$ suma de geometricas → verde, roja, amarillo

$N_3 =$ " ______ "

$$E(N) = E(N_1 + N_2 + N_3) = E(N_1) + E(N_2) + E(N_3)$$

* $E(N_1) = 1$

* $E(N_2) = E(E(N_2 | D_1)) = \sum_{d \in D} E[N_2 | D_1 = d]\, \mathbb{P}(D = d) = \frac{6}{5}\frac{1}{6} + \frac{3}{2}\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} = \boxed{\frac{17}{10}}$

v.a discreta

$D_1 =$ "el primer color observado"

$N_2 | D_1 = R \sim geo\left(\frac{5}{6}\right) \sim E[N_2 | D_1 = R] = \frac{6}{5}$

$N_2 | D_1 = V \sim geo\left(\frac{1}{2}\right) \sim E[N_2 | D_1 = V] = 2$

$N_2 | D_1 = A \sim geo\left(\frac{2}{3}\right) \to E[N_2 | D_1 = A] = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$

como salo Amarillo el exito se da si sale V ó R

$$E(N_3) = E\big[E[N_2|D_2]\big] = \sum_{d \in D} E[N_2|D_2=d]\,\mathbb{P}(D=d)$$

$$D_2 = \begin{cases} 0 & \text{si salio V,R} \\ 1 & \text{si salio V,A} \\ 2 & \text{si salio RA} \end{cases}$$

$$= E[N_2|D_2=0]\,\mathbb{P}(D=0) + \mathbb{P}(N_2|D_2=1)\,\mathbb{P}(D_2=1) + E[N_2|D_2=2]\,\mathbb{P}(D_2=2) \quad (*)$$

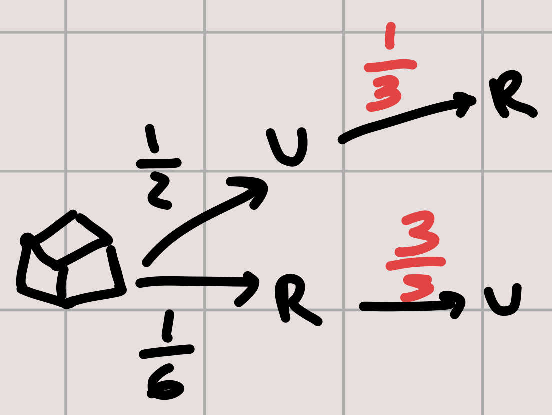
$$N_2|D_2=0 \sim geo\left(\tfrac{1}{3}\right) \sim E=3$$

$$N_2|D_2=1 \sim geo\left(\tfrac{1}{6}\right) \sim E=6$$

$$N_2|D_2=1 \sim geo\left(\tfrac{1}{2}\right) \sim E=2$$

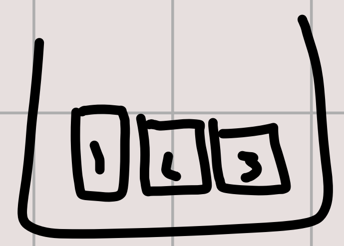
$(*)$ $\quad 3\,\mathbb{P}(D_2=0) + 6\,\mathbb{P}(D_2=1) + 2\,\mathbb{P}(D_2=2)$

$\mathbb{P}(D_2=0) = \mathbb{P}($se observo verde y rojo"$)$



$\frac{1}{6-3}$

6.12 Un estacionamiento, al abrir, tiene capacidad para tres coches. Cada minuto pasa un coche por allí y la probabilidad de que quiera estacionarse es 0.8. Calcular la probabilidad de que se llene en exactamente 10 minutos.

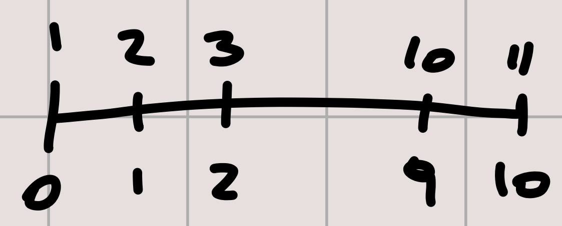


estacionamiento

$\mathbb{P}(\text{"coche quier estaciona"}) = 0,8$

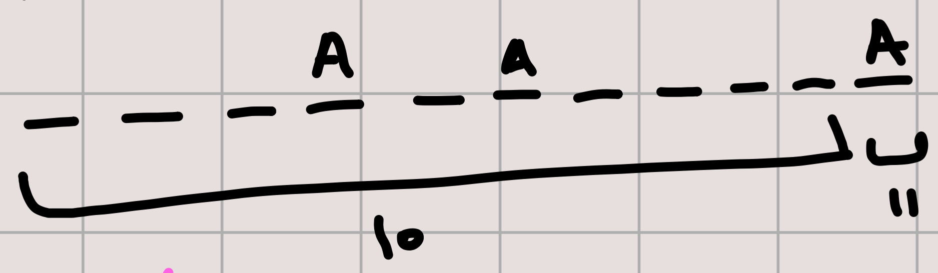
c/1 minuto $\longrightarrow$ pasa auto

$\mathbb{P}(\text{"el estacionamiento se llena en 10 minutos"})$ $\hookrightarrow$ minuto 10 llega un auto y completa



N = "cant de coches estacionados" en 10 minutos

$N \sim Bin\left(10, \frac{4}{5}\right) \longrightarrow$ hay 11 autos



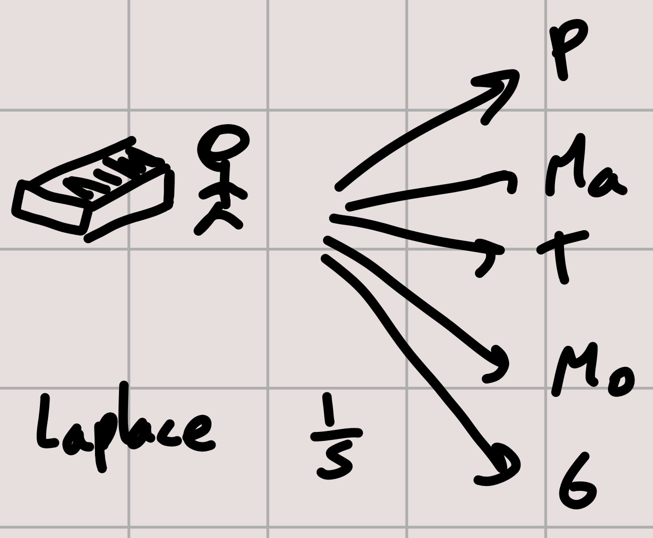
$\binom{10}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^8 \approx 7,3\ 10^{-5}$

ind

$= 7,3\ 10^{-5}\ \frac{4}{5} = \boxed{5,8\ 10^{-5}}$

el primero se cuenta?

6.10 Chocolatines Jack lanza una colección de muñequitos con las figuras de los personajes de *Kung Fu Panda*: Panda, Tigre, Mono, Grulla y Mantis. Cada vez que Lucas compra un chocolatín es igualmente probable que obtenga alguno de los personajes. Sea N la cantidad de chocolatines que Lucas debe comprar hasta completar la colección, hallar $\mathbf{E}[N]$ y $\mathbf{var}(N)$. Interpretar los resultados.



N = "cant chocolates que debe comprar hasta complementar"

$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N$

$\underline{M} \quad \underbrace{\underline{M}\ \underline{M}\ \underline{T}}_{N2}$

N_1 = "cant de chocolate para obtener el primer muñeco" $\Rightarrow N_1 = 1$ ¿no es va?

N_2 = "cant de choc – – – el segundo – distinto"

$N_2 \longrightarrow$ pero como son equiprobable $\quad geo\left(\frac{4}{5}\right) \longrightarrow E(N_2) = \frac{5}{4}$

$$E[N] = E[N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5] = E[N_1] + E[N_2] + E[N_3] + E[N_4] + E[N_5]$$

$$= 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} \cong 11{,}4 \rightarrow 12 \text{ cho}$$

6.9 Lucas y Monk lanzan monedas simultáneamente hasta obtener en un lanzamiento dos resultados iguales. Si los dos obtienen cara gana Lucas; si ambos obtienen ceca gana Monk. La moneda de Lucas es equilibrada, pero la moneda de Monk tiene probabilidad 1/3 de cara. Calcular la probabilidad de que Monk gane el juego.

○ ○ gana monk

● ● gana lucas

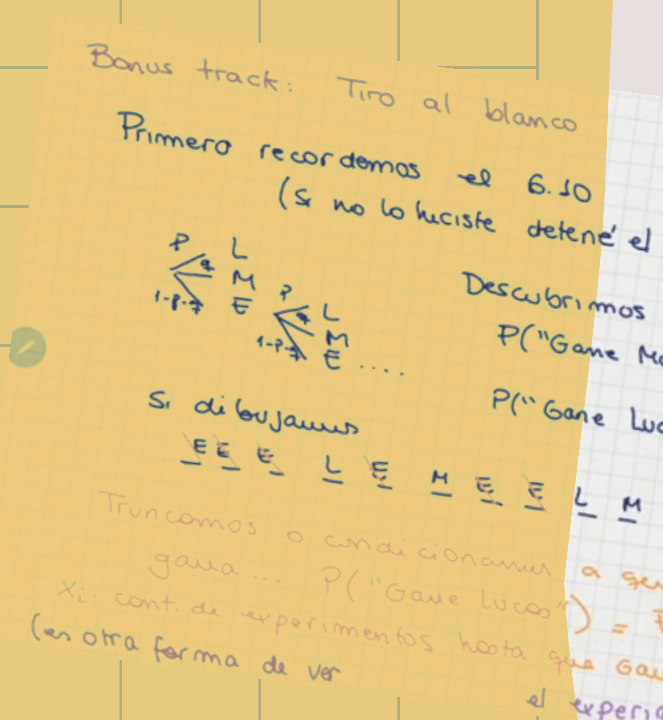
● Monk

$\mathbb{P}(M=c) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(M=s) = \frac{2}{3}$

lucas

$\mathbb{P}(L=c) = \frac{1}{2}$



$\mathbb{P}(\text{"M gane"}) =$

$M \sim Ber\left(\frac{1}{3}\right)$

$L \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$

M = "saca cara"

L = "saca cara"

cc gana M

sc / cs sigue

ss gana L

gane Lucas

$\mathbb{P}(M=c \cap L=c) \overset{ind}{=} \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(M=s \cap L=s) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

6.14 En una fábrica hay cuatro máquinas A, B, C y D que producen el 40 %, 30 %, 20 % y 10 % de la producción total, respectivamente.

(**a**) Se eligen al azar 14 artículos de la producción. Calcular la probabilidad de que exactamente 5 provengan de la máquina A, 4 de la máquina B, 3 de la máquina C y 2 de la máquina D.

(**b**) Si se sabe que en 14 artículos tomados al azar de la producción, exactamente 5 provienen de la máquina A, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres provenientes de la máquina C?

a

$$M\left(14, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right) \quad P_X(n, x_i) = \frac{14!}{5!\,4!\,3!\,2!}\left(\frac{4}{10}\right)^5\left(\frac{3}{10}\right)^4\left(\frac{2}{10}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$P_X(14, 5, 4, 3, 2) = \boxed{0,06}$$

b

$$\mathbb{P}(C=3 \mid A=5) = \frac{\mathbb{P}(A=5 \cap C=3)}{\mathbb{P}(A=5)}$$

$$\mathbb{P}(A=5) \longrightarrow \_\ \underline{A}\ \_\ \_ \Rightarrow \binom{14}{5}\left(\frac{4}{10}\right)^5\left(\frac{6}{10}\right)^9$$

$$* \ \mathbb{P}(A=5 \cap C=3) \longrightarrow M\left(14, \underset{A}{\frac{4}{10}}, \underset{C}{\frac{2}{10}}, \underset{\text{otro}}{\frac{4}{10}}\right) \longrightarrow P_X(14, 5, 3, 6) = \frac{14!}{5!\,3!\,6!}\left(\frac{4}{10}\right)^5\left(\frac{2}{10}\right)^3\left(\frac{4}{10}\right)^6$$

$$= 0,056$$

$$\Rightarrow \frac{0,056}{0,53} \simeq \boxed{0,105}$$

6.15 Un proceso de producción produce piezas con dos tipos de defectos independientes: por rotura con probabilidad 0.1 y por abolladura con probabilidad 0.2. Calcular la probabilidad de que al elegir 8 piezas,

(**a**) 1 tenga ambos defectos, 2 estén abolladas solamente, 3 estén rotas solamente, y el resto sean buenas.

(**b**) a lo sumo 1 tenga ambos defectos.

(**c**) menos de 5 tengan algún defecto.

(**d**) por lo menos 3 no tengan defectos.

$\mathbb{P}$("una pieza tenga ambos defectos") $= P(R)\,P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$

se aplica una Bernoulli

rotura $P(R)=0{,}1$

abolladura $P(A)=0{,}2$

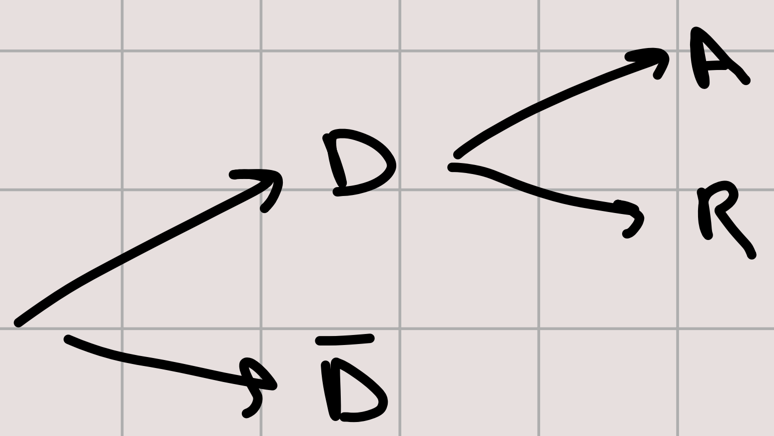
sin defect $P(B)=0{,}7$

P("1 defectos, 2 estan A, 3 estan R, 2 bien") $= \binom{8}{1}(0{,}02)\binom{7}{2}(0{,}2)^2\binom{5}{3}(0{,}1)^3\binom{2}{2}(0{,}7)^2$

$X_1 =$ "cant piezas con ambos"

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0)$$

$$\binom{8}{0}(0{,}02)^0(0{,}98)^8 = \longrightarrow 1 - \binom{10}{0}(0{,}98)^{10}$$



$P(D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R)$