

**10.12** Los siguientes datos son las duraciones (en horas) de una muestra de 6 lámparas: 61, 1905, 1076, 623, 33, 167. Suponiendo que los datos obedecen a una distribución exponencial de intensidad  $\lambda$  determinar si ellos permiten con un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  refutar la hipótesis de que  $\lambda \leq 0.0005$ . Hallar el  $p$ -valor.

$X$ : Duraciones en horas de las lámparas  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$H_0: \lambda \leq \underbrace{0,0005}_{\lambda_0} \quad H_1: \lambda > 0,0005$$

Como  $\text{Exp}(\lambda)$  pertenece a una familia exponencial con

$$C(\lambda) = -\lambda \quad \text{y} \quad r(x) = x$$

↓  
Decreciente

Para la ma  $(X_1, \dots, X_n)$  se tiene  $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

$$\Rightarrow \delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T > K_\alpha \\ 0 & \text{si } -T \leq K_\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } T < \underbrace{-K_\alpha}_{K'_\alpha} \\ 0 & \text{si } T \geq K'_\alpha \end{cases}$$

$$\alpha = \mathbb{P}_{\lambda_0}(\delta(\underline{x}) = 1) = \mathbb{P}_{\lambda_0}(T < K'_\alpha) = \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^6 X_i}_{\sim \Gamma(6, 0,0005)} < K'_\alpha\right)$$

$$P(G < K'_\alpha) = 0,05 \rightarrow K'_\alpha = Z_{0,05} \quad \swarrow \text{Quantil de } N(6,0,0005)$$

$$K_\alpha \approx 5226,03$$

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < 5226,03 \right\}$$

$$\text{ma : } \underline{x} = (61, 1905, 1076, 623, 33, 167)$$

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1} \{ 3865 < 5226,03 \} = 1$$

$\Rightarrow$  Rejeita  $H_0$

$$p\text{-valor} = P_{\lambda_0} (G < 3865) = 0,014249$$

$$\Rightarrow p\text{-valor} = 0,014249$$