9.6 La cantidad de accidentes de tránsito por semana en la intersección de Paseo Colón y Estados Unidos tiene una distribución de Poisson de media λ.

(**a**) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de λ basado en una muestra aleatoria de la cantidad de accidentes durante n semanas. Mostrar que se trata de un estimador insesgado para λ y hallar la expresión de su error cuadrático medio.

(**b**) En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

En virtud de la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ y estimar la probabilidad de que en la semana del 24 de diciembre de 2017 no ocurra ningún accidente en la mencionada esquina.

a) X: # accidentes en 1 semana $\sim \mathcal{P}(\lambda)$

m.a. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ busco EMV

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \mathbb{1}\{x_i \in \mathbb{N}_0\}$$

esto vale 1 ya que los X_i ya son un numero en los naturales

$$= \lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\overbrace{\mathbb{1}\{x_i \in \mathbb{N}_0\}}}{x_i!}$$

Buscamos el máximo de $L(\lambda)$ en $\underbrace{\{\lambda > 0\}}$

Como no me dicen en que espacio parametrico uso el natural de la Poisson

Una estrategia cuando la familia es regular es maximizar $\log L(\lambda)$

En la indicadora no hay λ

$$\log L(\lambda) = \left(\sum x_i\right) \log \lambda - n\lambda + \log\left(\frac{\pi\{\dots\}}{x_i!}\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \log L(\lambda) = \sum_1^n x_i \frac{1}{\lambda} - n = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{\sum_1^n x_i}{n} = \overline{x}$$

Pto crítico

Verifico que es máx:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \log L = \underbrace{\sum x_i}_{+} \underbrace{\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)}_{-} < 0 \Rightarrow \text{Es máximo}$$

a la función de λ de x_i, la evaluo en el vector aleatorio

El estimador MV de λ es

$$\Longrightarrow \hat{\lambda}_{MV} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} X_i}{n} = \overline{X}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\lambda}_{MV} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} X_i}{n} = \overline{X}}$$

Vimos que $\hat{\lambda} = \bar{X}$

$\Rightarrow E[\hat{\lambda}] = \lambda \Rightarrow B(\hat{\lambda}) = \lambda - \lambda = 0 \longrightarrow$ Es insesgado

$$\Rightarrow V(\hat{\lambda}) = V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{V(x_i)}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

Entonces:

$$ECM(\hat{\lambda}) = 0 + \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Es insesgado, } ECM(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n}}$

(6)

0, 0, 0... $\leftarrow$ 10 veces

1, 1, ... $\longleftarrow$ 29 veces

Valor estimado de λ: $\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{100}$

$$= \frac{0\cdot 10 + 1\cdot 29 + 2\cdot 25 + 3\cdot 17 + 4\cdot 13 + 5\cdot 6}{100} = 2{,}12$$

Ahora me piden estimar $\mathbb{P}(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \alpha(\lambda)$ función de λ

Propiedad: Principio de invarianza

si $\hat{\theta}$ es estimador MV de θ y $\alpha(\theta)$ es función biyectiva

$$\Rightarrow \widehat{\alpha(\theta)}_{MV} = \alpha(\hat{\theta}_{MV})$$

Obs: Aún cuando α no sea biy (iny) puede usarse ppio de invarianza

$$\Longrightarrow \widehat{P(X=0)} = e^{-\hat{\lambda}} \quad \text{evaluando:}$$

El valor estimado es: $\widehat{\mathbb{P}(X=0)} = e^{-2{,}12} = 0{,}12$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\mathbb{P}}(X=0) = 0{,}12}$$