PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.16 - 61.09 - 81.04)

Evaluación Parcial — Primer cuatrimestre – 2022
Duración: 4 horas. — 4/6/22 – 9:00 hs.

Curso: Corrector/a:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Micaela tiene un mazo de 60 cartas de *'Magic: El Encuentro'* que cuenta con 24 cartas de tierras y el resto cartas de hechizos. Si Micaela elige 7 cartas al azar, calcular la probabilidad de que tenga entre 2 y 4 tierras en sus 7 cartas.

2. Cierto objeto se produce mediante dos procesos consecutivos, cuyos tiempos (en minutos) son variables aleatorias X_1 y X_2 independientes con distribución $\mathcal{U}(10, 20)$ y $\mathcal{E}(1/15)$ respectivamente. Hallar la ecuación de la recta de regresión del tiempo total de producción dado el tiempo del primer proceso.

3. El largo y el ancho (en metros) de las chapas rectangulares producidas por una máquina son variables aleatorias X e Y respectivamente, con distribución uniforme sobre el triángulo de vértices $(0, 0), (2, 2), (0, 2)$. Hallar y graficar la función de distribución del perímetro de las chapas producidas por dicha máquina.

4. Leon comienza su turno trabajando de lavacopas en el *Bar los Amigos* a las 20:00, donde rompe copas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 3 por hora. Si el sábado rompió la quinta copa exactamente a las 22:00, calcular la probabilidad de que entre las 20:00 y 21:00 hubiera roto a lo sumo una copa.

5. Se tiene un sistema de 100 partículas que responden a las leyes de la física clásica, donde cada partícula posee una masa de 2 kg y cuya velocidad (en m/s) es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 2. Las velocidades de las distintas variables pueden considerarse independientes. Calcular *aproximadamente* la probabilidad de que la energía cinética del sistema sea mayor a 40 J.

Recordar que la energía cinética de una partícula se puede calcular como $E = \frac{1}{2}mv^2$.

(1)

Espacio equiprobable $\Rightarrow$ Laplace

60 total: 24 cartas de tierra $\rightarrow P(\text{Tierra}) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

36 cartas de hechizos

$N \sim H(60, 7, 24)$

N: Cantidad de Tierras en 7 cartas extraídas sin reposición de un mazo de 60"

$$\mathbb{P}(2 \leq N \leq 4) = \mathbb{P}(N=2) + \mathbb{P}(N=3) + \mathbb{P}(N=4)$$

$$= \frac{\binom{24}{2}\binom{36}{5}}{\binom{60}{7}} + \frac{\binom{24}{3}\binom{36}{4}}{\binom{60}{7}} + \frac{\binom{24}{4}\binom{36}{3}}{\binom{60}{7}}$$

$$= 0{,}774567$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(2 \leq N \leq 4) = 0{,}774567}$$

(2)

X_1: Tiempo del 1er proceso $\sim \mathcal{U}(10,20)$

X_2: Tiempo del 2do proceso $\sim \mathcal{E}(1/15)$

T: Tiempo total de producción. $T = X_1 + X_2$ quiero $\hat{T}$

$$E[T \mid X_1 = x_1] = E[X_1 + X_2 \mid X_1 = x_1]$$
$$= E[x_1 + X_2]$$
$$= E[x_1] + E[X_2] = x_1 + 15$$

$$E[T \mid X_1] = X_1 + 15$$

$\leftarrow E[T \mid X_1]$ es el mejor aproximador de T por X_1 y como me quedó lineal coincide con la recta de regresión

$$\Rightarrow \boxed{\hat{T} = X_1 + 15}$$

Si lo planteaba como guía 3:

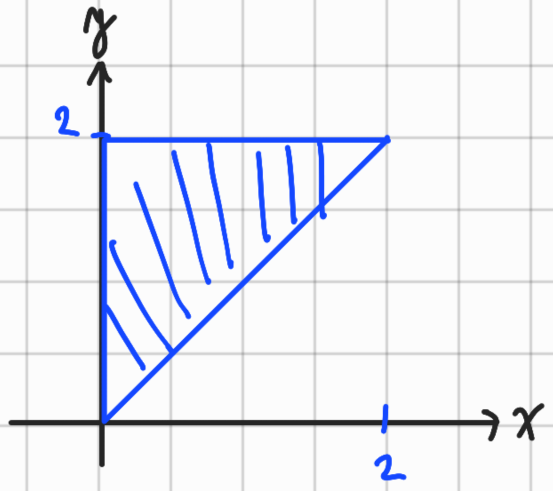
$$\hat{T} = \frac{Cov(X_1, \hat{T})}{\quad}$$

(3)

X: Largo de las chapas rectangulares (en metros)

Y: Ancho " " " " (en metros)

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(\triangle)$

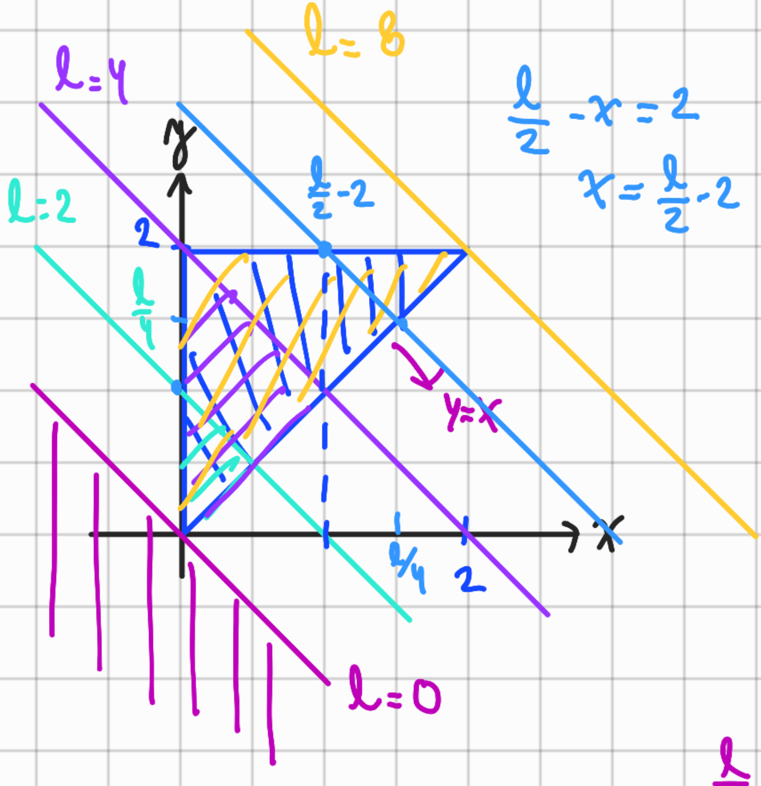


Altura triángulo: $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2} \mathbb{1}\{\triangle\}$

L: Perímetro de las chapas, $L = 2X + 2Y = 2(X+Y)$

$$\mathbb{P}(L \leq l) = \mathbb{P}(2(X+Y) \leq l) = \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{l}{2} - X\right)$$



$\frac{l}{2} - x = 2$

$x = \frac{l}{2} - 2$

$$\mathbb{P}(L \leq l) = \begin{cases} 0 \text{ si } l < 0 \\ \circledast \text{ si } 0 \leq l < 4 \\ \circledast\circledast \text{ si } 4 \leq l < 8 \\ 1 \text{ si } l \geq 8 \end{cases}$$

l

$\frac{l}{2} - x = x \rightarrow x = \frac{l}{4}$

$\circledast$

$$\mathbb{P}(L \leq l) = \int_0^{\frac{l}{4}} \int_x^{\frac{l}{2}-x} \frac{1}{2} \, dy\, dx = \int_0^{l/4} \frac{l}{4} - x \, dx = \frac{l^2}{16} - \frac{(l/4)^2}{2} = \frac{l^2}{32}$$

$\circledast\circledast$

$$\mathbb{P}(L \leq l) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(L > l)}_{\text{Area}(\triangledown)} = 1 - \int_{l/4}^{2} \int_{\frac{l}{2}-y}^{y} \frac{1}{2} \, dx\, dy$$

$$= 1 - \int_{\ell/4}^{2} y - \frac{\ell}{4}\, dy = 1 - \left[\frac{2^2}{2} - \frac{(\ell/4)^2}{2} - \left(\frac{\ell}{4}\left(2 - \frac{\ell}{4}\right)\right)\right]$$

$$= 1 - \left[2 - \frac{\ell^2}{32} - \frac{\ell}{2} + \frac{\ell^2}{16}\right] = -\frac{\ell^2}{32} + \frac{\ell}{2} - 1$$

$$\boxed{\mathbb{P}(L \leq \ell) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ell < 0 \\ \frac{\ell^2}{32} \text{ si } 0 \leq \ell < 4 \\ -\frac{\ell^2}{32} + \frac{\ell}{2} - 1 \text{ si } 4 \leq \ell < 8 \\ 1 \text{ si } \ell \geq 8 \end{cases}}$$

(4)

$\Pi \sim \left(\frac{3}{h}\right)$

$$\mathbb{P}\left(N(0,1) \leq 1 \mid G_5 = 2\right) = \mathbb{P}\left(\underbrace{N(0,1) \mid G_5 = 2}_{Bin\left(4,\, p = \frac{1}{2}\right)} \leq 1\right)$$

$$= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbb{P}\left(N(0,1) \leq 1 \mid G_5 = 2\right) = \frac{5}{16}}$$

(5)

V_i: Velocidad de la partícula i, $V_i \sim Exp(2)$

$$E_i = \frac{1}{2} m V_i^2 \Rightarrow \mathbb{P}(E_{100} \geq 40 J)$$

$$E_{100} = \sum_{i=1}^{100} E_i$$

$$E[E_i] = \frac{1}{2} m \, E[V_i^2]$$

$$= \frac{1}{2} m \left(Var(V_i) + E[V_i]^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} 2Kg \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$Var[E_i] = \left(\frac{2}{2}\right)^2 Var(V_i^2) = \left(E(V_i^4) - E[V_i^2]^2 \right)$$

$$= \left(\int_0^\infty v^4 \, 2 e^{-2v} dv - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right)$$

$$= \left(\frac{\Gamma(5)}{2^5} \cdot 2 \underbrace{\int_0^\infty \frac{2^5}{\Gamma(5)} v^4 e^{-2v} dv}_{=1} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \left(\frac{4!}{2^4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{4}$$

$$E[E_{100}] = \sum_{i=1}^{100} E[E_i] = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$Var[E_{100}] = \sum_{i=1}^{100} Var(E_i) = 100 \cdot \frac{5}{4} = 125$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{E_{100}-50}{\sqrt{125}} > \frac{40-50}{\sqrt{125}}\right) \underset{\text{TCL}}{\approx} 1-\Phi(-0{,}8944272)$$

$$1-0{,}188233 \simeq 0{,}811767$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(E_{100} > 40\,\mathrm{J}) \approx 0{,}811767}$$