RESUMEN PROBABILIDAD Y ESTADISTICA B

CAPITULO 8

Def: **DISTRIBUCION NORMAL MULTIVARIADA**

Tiene de densidad: $$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2 \ldots . x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

Y se nota como: $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Donde $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{(X_1)} \\ \mathbb{E}_{(X_2)} \\ \vdots \\ \mathbb{E}_{(X_p)} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} Cov(X_1, X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p, X_1) & \cdots & Cov(X_p, X_p) \end{bmatrix}$

Props:

1- Si $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_p\left(\mathbf{0}, \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)\right)$ entonces:

$X_1, X_2, \ldots, X_p$ son independientes y $X_i \sim \mathcal{N}(0, \lambda_i)$

2- Si $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{PxP}$ no singular, entonces:

$\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{b} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{A\mu} + \boldsymbol{b}, \mathbf{A\Sigma A}^T)$

Def: **TEOREMA DE SUMA DE NORMALES**

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_p$ VA independientes con $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_i, {\sigma_i}^2\right)$, con i=1, … n

y sea $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

entonces Y tendrá distribución normal de parámetros:

$\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$ y ${\sigma_Y}^2 = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {\sigma_i}^2$

RESUMEN PROBABILIDAD Y ESTADISTICA B
CAPITULO 8

<u>Def:</u> TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE (TCL)

Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de VA i.i.d. con $\mathbb{E}_{(X_i)} = \mu < \infty$ y $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$, i = 1, 2, … n, entonces (bajo ciertas condiciones generales):

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Es decir:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \leq t\right) \xrightarrow{n \to \infty} \phi_{(t)}$$

<u>JUSTIFICACION TCL:</u>

Como $Var(X_i) < \infty$ y Xi son i.i.d., entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mathbb{E}_{[X_i]}}{\sqrt{n \cdot Var(X_i)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$$

Entonces como n = (algo>30/40/50) es lo suficientemente grande:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mathbb{E}_{[X_i]}}{\sqrt{n \cdot Var(X_i)}} \leq \frac{t - n \cdot \mathbb{E}_{[X_i]}}{\sqrt{n \cdot Var(X_i)}}\right) \simeq \phi_{\left(\frac{t - n \cdot \mathbb{E}_{[X_i]}}{\sqrt{n \cdot Var(X_i)}}\right)}$$

$\left(\begin{matrix} \phi \ es\ \mathcal{F}_X \ de\ una\ normal \\ estandar, sacar\ de\ tabla \end{matrix}\right)$

RESUMEN PROBABILIDAD Y ESTADISTICA B

CAPITULO 8

<u>Def:</u> APROXIMACION POR DENSIDAD NORMAL

Sea S_n una variable aleatoria con distribución Binomial (n,p):

$$\mathbb{P}_{(S_n=k)} \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \qquad \left(\begin{matrix}\varphi\ es\ la\ densidad\ \ de \\ una\ normal\ estandar\end{matrix}\right)$$

<u>Def:</u> CORRECCION POR CONTINUIDAD

Sea S_n una variable aleatoria con distribución Binomial (n,p):

$$\mathbb{P}_{(S_n=k)} = \mathbb{P}_{\left(k-\frac{1}{2}<S_n<k+\frac{1}{2}\right)} \approx \phi\left(\frac{k-np+1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \phi\left(\frac{k-np-1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}\phi\ es\ \mathcal{F}_X\ \ de\ una\ normal \\ estandar, sacar\ de\ tabla\end{matrix}\right)$$