10.9 En la *Burbuja feliz* se acaba de instalar una máquina para llenar sifones de soda. La máquina es eficaz cuando el desvío estándar de la cantidad de soda en los sifones no supera 25 mililitros. En una muestra de 10 sifones se observaron las siguientes cantidades (en litros) de soda:

1.029, 0.943, 1.071, 0.986, 0.962, 0.995, 0.991, 1.002, 1.003, 0.978.

Suponiendo que la cantidad de soda en los sifones obedece a una distribución normal. ¿se puede asegurar, con un nivel de significación de 0.05, que la máquina no es eficaz?

X: Cantidad de soda en los sifones $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$H_0: \sigma^2 \leq (0{,}025)^2 \qquad H_1: \sigma^2 > (0{,}025)^2$

X pertenece a una flia exponencial $c(\sigma^2) = \dfrac{-1}{2\sigma^2}$ ↓ creciente

$$\Longrightarrow \delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 \text{ si } T > K_\alpha \\ 0 \text{ si } T \leq K_\alpha \end{cases}$$

Como μ y σ^2 son desconocidos, de la clase se que un estadístico de prueba de σ^2 es $T = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$\Rightarrow \quad \delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2} > k_\alpha \right\}$$

$$\alpha = \mathbb{P}_{\sigma^2=(0{,}025)^2}\left(\delta(\underline{x})=1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2} < k_\alpha \right) = 0{,}05$$

Dato: $n=10$

$$\Rightarrow \quad k_\alpha = \chi^2_{9,\,0{,}95} = 16{,}9189$$

$$\Rightarrow \quad \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(0{,}025)^2} > 16{,}9189 \right\}$$

Evaluando en la muestra:

$\underline{X} =$ 1.029, 0.943, 1.071, 0.986, 0.962, 0.995, 0.991, 1.002, 1.003, 0.978.

$$\bar{X} = 0{,}996$$

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \underbrace{\frac{\sum^{n}(x_i-0{,}996)^2}{(0{,}025)^2}}_{14{,}2944} > 16{,}9189 \right\} = 0$$

Como no rechazo H_0, no puedo asegurar que la máquina no es eficaz