

9.12 Mostrar que la familia de distribuciones $\Gamma(\nu, \lambda)$ es una familia exponencial a 2 parámetros. Hallar un estadístico suficiente para (ν, λ) basado en una muestra aleatoria de tamaño n

Con $\theta = [\nu, \lambda]$. Para cada X_i tenemos que:

$$f_{\theta}(x) = \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma^2(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}\{x > 0\}, \quad \nu, \lambda > 0$$

$$= \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma^2(\nu)} e^{-\lambda x + (\nu-1)\ln x} \mathbb{1}\{x > 0\}$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma^2(\nu)}}_{A(\theta)} e^{-\lambda x + \nu \ln x} \underbrace{e^{-\ln x}}_{h(x)} \mathbb{1}\{x > 0\}$$

$$c_1(\theta) = -\lambda, \quad r_1(x) = x$$

$$c_2(\theta) = \nu, \quad r_2(x) = \ln x$$

\Rightarrow Es familia exponencial

$\Rightarrow T = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n \ln X_i \right)$ es suficiente para θ (basado en la m.a. X)