PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.16 - 61.09 - 81.04)

Primer recuperatorio | Primer cuatrimestre – 2022
Duración: 4 horas. | 25/6/22 – 9:00 hs.

Curso: Corrector/a:

Apellido y Nombres:

Padrón:

---

1. Se tienen tres cajas C_1, C_2 y C_3. En C_1 hay 6 bolas blancas y 4 rojas, en C_2 5 blancas y 3 rojas, y en C_3 3 blancas y 9 rojas. Se extraen dos bolas al azar de C_1. Si ambas bolas extraídas son del mismo color, se extrae una bola de C_2, en caso contrario se extrae una bola de C_3. Si la bola extraída fue roja, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas de C_1 también hayan sido rojas?

---

2. Nicolás quiere ir a ver su película favorita al cine, la cual tiene funciones a las 18:00 y a las 23:00. La hora a la que sale de su casa Nicolás es una variable aleatoria con distribución uniforme entre las 16:00 y las 21:00. Independientemente de la hora de salida, el tiempo de viaje hasta el cine (en horas) es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(1, 2)$. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de media hora en el cine hasta que empiece su película?

---

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{2xy}{(x+1)^2} e^{-\frac{y}{x+1}} \mathbf{1}\{0 < x < 1, y > 0\}$$

Calcular $P(2.5 < \mathbf{E}[Y|X] < 3)$.

---

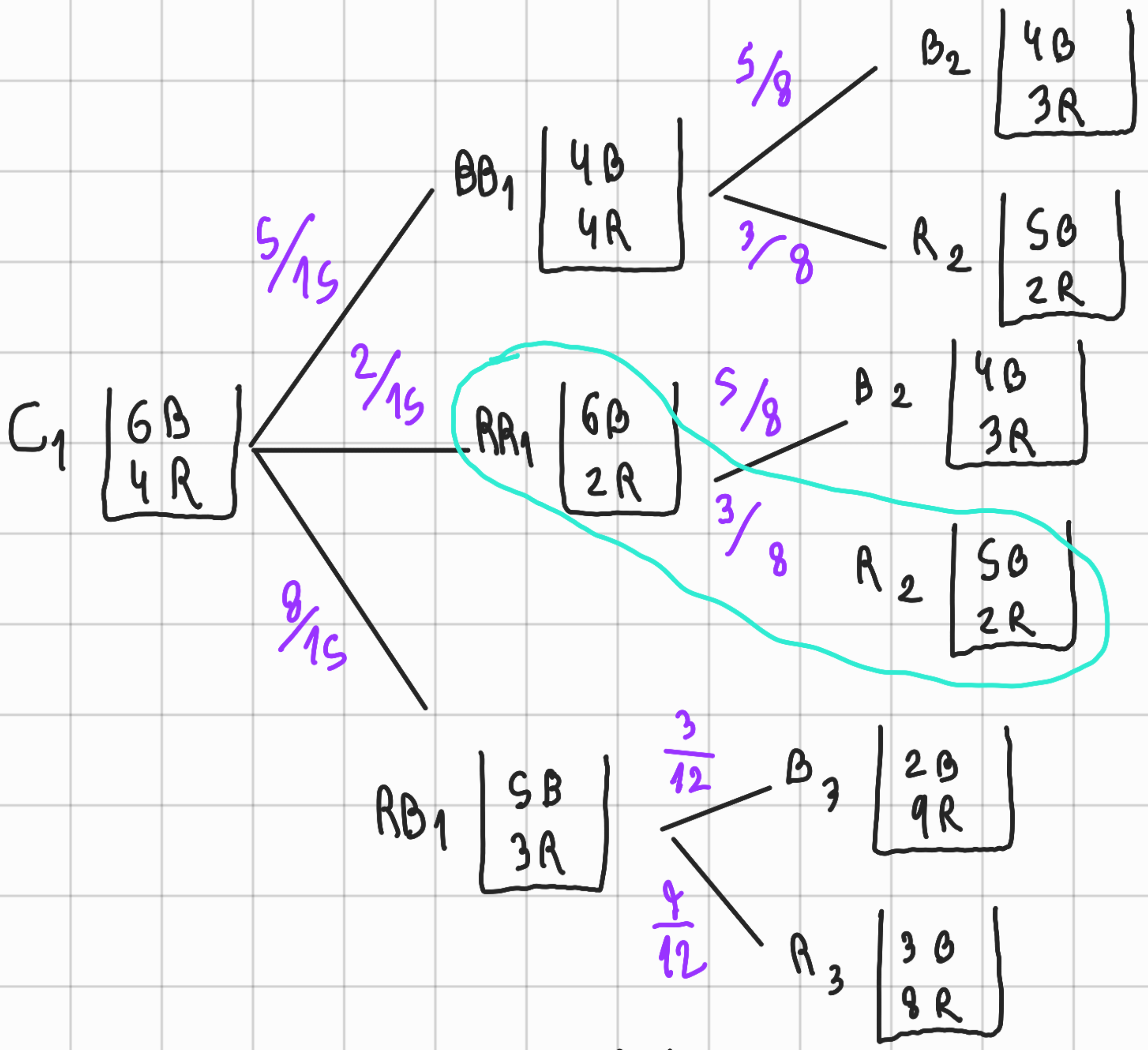
4. Una placa metálica recibe impactos de partículas α provenientes de tres fuentes radiactivas A, B o C de forma independiente. La probabilidad de que cada partícula provenga de la fuente A, B o C es 0.25, 0.3 o 0.45, respectivamente. Si en 8 impactos hubo exactamente 3 partículas emitidas por B, calcular la probabilidad de que 2 o más partículas hayan sido emitidas por A.

---

5. El tiempo de duración (en días) de un componente crítico de un submarino es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 10. Cuando un componente falla se lo reemplaza inmediatamente por uno nuevo. Si un submarino se prepara para un viaje de un año de duración, hallar la cantidad mínima de componentes que debe llevar el submarino a su viaje para que la probabilidad de que no le alcancen sea menor a 0.05.

(1)

1. Se tienen tres cajas C_1, C_2 y C_3. En C_1 hay 6 bolas blancas y 4 rojas, en C_2 5 blancas y 3 rojas, y en C_3 3 blancas y 9 rojas. Se extraen dos bolas al azar de C_1. Si ambas bolas extraídas son del mismo color, se extrae una bola de C_2, en caso contrario se extrae una bola de C_3. Si la bola extraída fue roja, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas de C_1 también hayan sido rojas?



$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{En } C_1 \text{ sacar 2 rojas}}_{RR_1}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{En } C_1 \text{ sacar 2 blancas}}_{BB_1}) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{En } C_1 \text{ sacar 1 y 1}}_{BR_1}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{En } C_2 \text{ sacar 1 roja}}_{R_2|RR_1}) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}} = \frac{3}{8} \qquad \mathbb{P}(\underbrace{\text{En } C_2 \text{ sacar 1 B}}_{B_2|RR_1}) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}} = \frac{5}{8}$$

$$\mathbb{P}(RR_1 \mid R_2 \cup R_3) = \frac{\mathbb{P}(RR_1, R_2 \cup R_3)}{\mathbb{P}(R_2 \cup R_3)} = \frac{\mathbb{P}(R_2|RR_1)\,\mathbb{P}(RR_1)}{\mathbb{P}(R_2 \cup R_3)} =$$

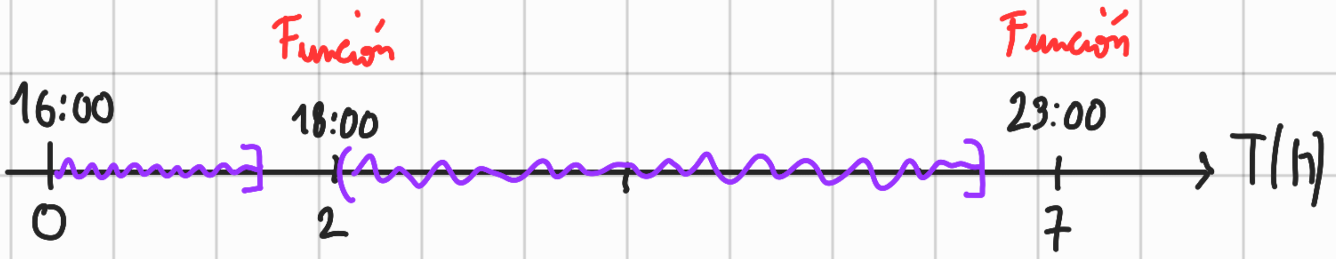
$$\mathbb{P}(R_2 \cup R_3) = \mathbb{P}(R_2|RR_1)\,\mathbb{P}(RR_1) + \mathbb{P}(R_2|BB_1)\,\mathbb{P}(BB_1) + \mathbb{P}(R_3|RB_1)\,\mathbb{P}(RB_1)$$

$$A = \frac{\frac{3}{8}\,\frac{2}{15}}{\frac{3}{8}\,\frac{2}{15} + \frac{3}{8}\,\frac{5}{15} + \frac{9}{12}\cdot\frac{8}{15}} = \frac{2}{23}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{Rta: } \frac{2}{23}}$$

(2)

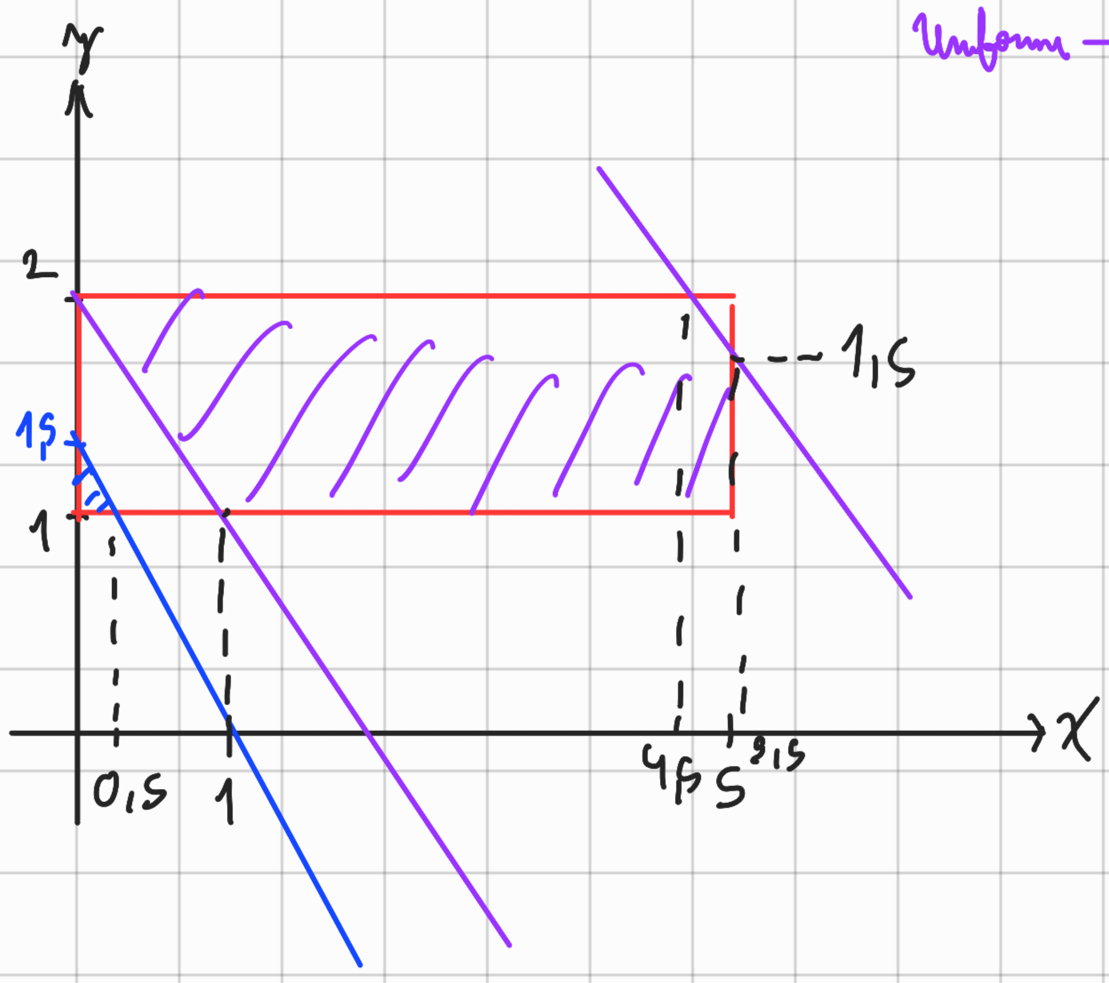
X: Tiempo en que sale $\sim U(0,5)$
Y: Tiempo de viaje $\sim U(1,2)$
Ind



A: Espera más de $\frac{1}{2}$ h

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X+Y<1,5 \ \cup \ 2<X+Y<6,5)$$

Uniforme → Cociente de áreas



$$X+y=1,5 \\ y=1 \longrightarrow X=0,5$$

$$\triangle = \frac{0,5 \cdot 0,5}{2} = \frac{1}{8}$$

$2 = X + Y \longrightarrow X = 1$

$Y = 1$

$6{,}5 = X + Y$

si $Y = 2 \longrightarrow X = 4{,}5$

si $Y = 1 \longrightarrow X = 5{,}5$

si $X = 5 \longrightarrow Y = 1{,}5$

$$= 5 - \left(\frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{2} \right) = 4{,}375$$

$$\mathbb{P} = \frac{1}{5} \left(0{,}125 + 4{,}375 \right) = \frac{9}{10}$$

(3)

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2xy}{(x+1)^2} e^{-\frac{y}{x+1}} \mathbf{1}\{0 < x < 1, y > 0\}$$

Calcular $P(2.5 < \mathbf{E}[Y|X] < 3)$.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2xy}{(x+1)^2} e^{-\frac{y}{x+1}} \mathbb{1}\{0<x<1, y>0\}$$

$$= \underbrace{2x\, \mathbb{1}\{0<x<1\}}_{f_X} \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}\, y\, e^{-\frac{1}{x+1}y}\, \mathbb{1}\{y>0\}}_{Y|X=x \sim \Gamma\left(2, \frac{1}{x+1}\right)}$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{(x+1)^2}\, y\, e^{-\frac{1}{x+1}y}\, \mathbb{1}\{y>0\}$$

$$E[Y|X=x] \underset{\text{Tabla}}{=} \frac{2}{\frac{1}{x+1}} = 2x+2$$

$$E[Y|X] = 2X+2$$

$$\mathbb{P}(2{,}5 < E[Y|X] < 3) = \mathbb{P}(2{,}5 < 2X+2 < 3)$$

$$= \mathbb{P}(1/4 < X < 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} 2x\,dx = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Rta: } \frac{3}{16}}$$

(4)

4. Una placa metálica recibe impactos de partículas α provenientes de tres fuentes radiactivas A, B o C de forma independiente. La probabilidad de que cada partícula provenga de la fuente A, B o C es 0.25, 0.3 o 0.45, respectivamente. Si en 8 impactos hubo exactamente 3 partículas emitidas por B, calcular la probabilidad de que 2 o más partículas hayan sido emitidas por A.

X_A: Cont de partículas del tipo A en 8 impactos $\sim Bi(8, 0.25)$

X_B: " " " " " B " " $\sim Bi(8, 0.3)$

X_C: " " " " " C " " $\sim Bi(8, 0.45)$

$$(X_A, X_B, X_C) \sim M(8, 0.25, 0.3, 0.45)$$

$$(X_A, X_C) \mid X_B = 3 \sim M\left(5, \frac{0.25}{1-0.3}, \frac{0.45}{1-0.3}\right)$$

$$\hookrightarrow X_A \mid X_B = 3 \sim Bi\Big(5, \underbrace{\frac{0.25}{1-0.3}}_{\frac{5}{14}}\Big)$$

$$\mathbb{P}(X_A \mid X_B = 3 \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X_A \mid X_B = 3 < 2)$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0}\left(\frac{5}{14}\right)^0\left(1-\frac{5}{14}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{5}{14}\right)^1\left(1-\frac{5}{14}\right)^4\right]$$

$$= 0{,}58523$$

5. El tiempo de duración (en días) de un componente crítico de un submarino es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 10. Cuando un componente falla se lo reemplaza inmediatamente por uno nuevo. Si un submarino se prepara para un viaje de un año de duración, hallar la cantidad mínima de componentes que debe llevar el submarino a su viaje para que la probabilidad de que no le alcancen sea menor a 0.05.

T_i: Duración (en días) de un componente crítico i $\quad T_i \sim \mathcal{E}xp(1/10)$

n: numero de componentes que lleve

$$\mathbb{P}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} T_i}_{=C} < 365\Big) < 0{,}05$$

Puedo suponer que cada T_i es independiente de la otra, como tengo una suma de VA independientes con la misma varianza y media finitas. $\Rightarrow$ TCL

$$E[T_i] = 10, \quad \mathbb{V}ar[T_i] = 10^2$$

$$E[C] = n10, \quad \mathbb{V}ar[C] = n10^2$$

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\frac{C - n10}{\sqrt{n}\,10} < \frac{365 - n10}{\sqrt{n}\,10}\right)}_{\text{Por TCL} \approx \Phi\left(\frac{365-10n}{10\sqrt{n}}\right)} < 0{,}05$$

Por TCL $\approx \Phi\left(\dfrac{365-10n}{10\sqrt{n}}\right) < 0{,}05$

$$\frac{365 - 10n}{10\sqrt{n}} < \gamma_{0.05}$$

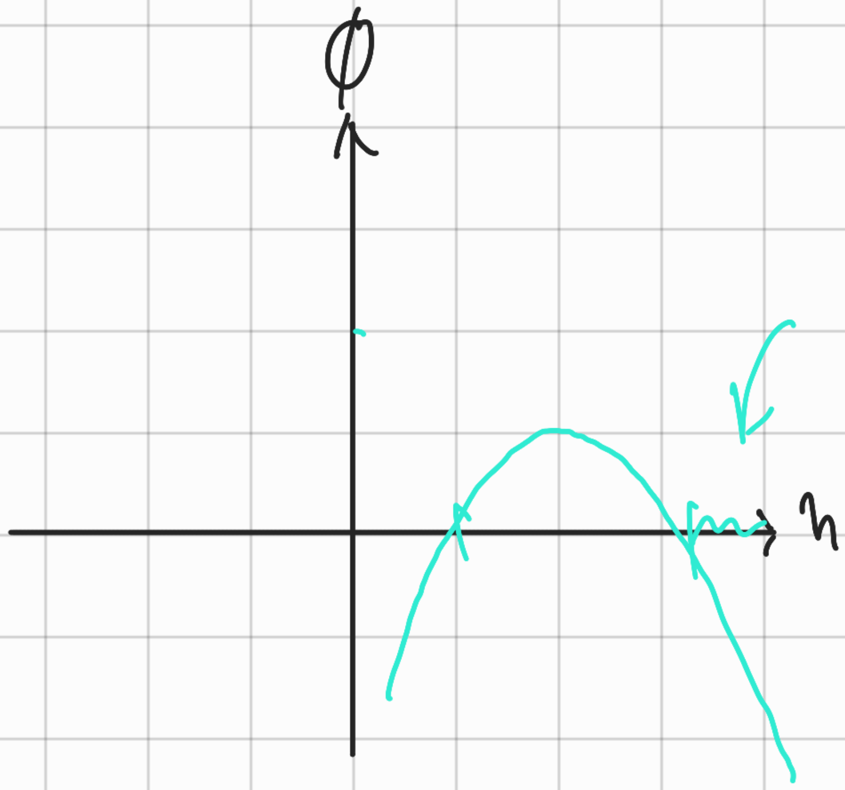
$$365 - 10n < -1{,}644854 \cdot 10\sqrt{n}$$

$$-10n + 16{,}4485\sqrt{n} + 365 < 0$$

$$x = \sqrt{n}$$

$$-10x^2 + 16{,}4485x + 365 < 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 6{,}92 \\ x_2 &= -5{,}275 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} n_1 &= 47{,}88 \\ n_2 &= 27{,}825 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \boxed{n \geq 48}$$