GUÍA: 2

VARIABLES ALEATORIAS (GUÍA 2)

FUNCIÓN INDICADORA DE UN CONJUNTO $A \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbb{1}_A$:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

EJ

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & x \in (-\infty, x_0] \\ F_2(x) & x \in (x_0, x_1] \\ F_3(x) & x \in (x_1, x_2] \end{cases}$$

$$F(x) = F_1(x)\,\mathbb{1}\{x \leq x_0\} + F_2(x)\,\mathbb{1}\{x_0 < x \leq x_1\} + F_3\{x_1 < x \leq x_2\}$$

$$F(x) = F_1(x)$$

SOPORTE DE UNA FUNCIÓN F:

$$SOP(F) = \{x \in Dom F \,/\, F(x) \neq 0\}$$

SEA $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ UN ESPACIO DE PROBABILIDAD COMPLETO

SE LLAMA **VARIABLE ALEATORIA** A UN FUNCIÓN

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ TAL QUE A CADA $w \in \Omega$ LE ASIGNO UN Nº REAL, ES DECIR, $X(w) = x \in \mathbb{R}$

EJ

E.A: 'LANZO UNA MONEDA 2 VECES'

$\Omega = \{(1\,1)\,(1,0)\,(0,1)\,(0\,0)\}$

X: # CARAS OBSERVADAS

NOTA

$X((1,1)) = 2$ $\quad X((0,1)) = 1$

$X((1,0)) = 1$ $\quad X((0,0)) = 0$

A ES EQUIVALENTE A DECIR QUE $X = 1$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{ w \in \Omega / X(w) = 1 \})$$

RANGO DE X (R_X) SON LOS VALORES QUE PUEDE TOMAR X. ES DECIR, $R_X = \text{IMG}(X)$.

$R_X = \{0, 1, 2\}$

SI DEFINO OTRA VARIABLE ALEATORIA Y: RESULTADO DEL 2^{DO} LANZAMIENTO $R_Y = \{0, 1\}$

$\mathbb{P}(X=0) = 1/4$ $\quad \mathbb{P}(X=1) = 1/2$ $\quad \mathbb{P}(X=2) = 1/4$

$\mathbb{P}(Y=0) = 1/2$ $\quad \mathbb{P}(Y=1) = 1/2$

- SI R_X ES DISCRETO → X (V.A) DISCRETA
  ES CONTINUA → X (V.A) CONTINUA.

- X (V.A) DISCRETA → FUNCIÓN DE PROBABILIDAD PUNTUAL
  ↳ ESCALER
  CONTINUA → FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

F DE DISTRIBUCIÓN (ACUMULADA)

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

SE LLAMA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD PUNTUAL O DE MASA, A UNO $p_X : R_X \rightarrow [0,1]$

$$x \rightarrow p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

VARIABLE

PROPIEDAD

- $\sum p(x) = 1$
- $A \subset R_X \; ; \; \mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} p_X(x)$

A 'ES PAR' $\mathbb{P}(A) = p(2) + p(4)$

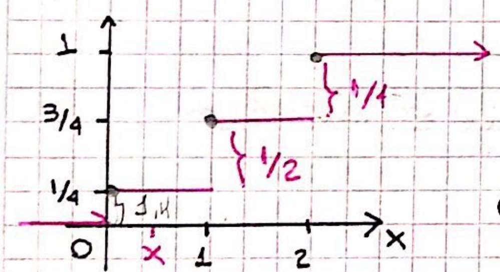
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE X

$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

$(\mathbb{P}((-\infty, x]))$

REPRESENTACIÓN DE $p_X(x)$ → TABLAS
→ DIAGRAMA DE BARRAS

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$x < 0$: $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = 0$

$x = 0$ $F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/4$

$0 < x < 1$ $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq 1) =$

$1 \leq x < 2$ = $F_X(x) = 3/4 \; \hat{=} \; 1/4$

$x \geq 2$: $F_X(x) = 1$

$$F_X(x) = \frac{1}{4} \mathbb{1}\{0 \leq x < 1\} + \frac{3}{4} \mathbb{1}\{1 \leq x < 2\} + 1 \; \mathbb{1}\{x \geq 2\}$$

EN GENERAL X ES (V.A) DISCRETA

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{s \in R_X \\ s \leq x}} p_X(s)$$

VARIABLES ALEATORIAS DE BERNOULLI

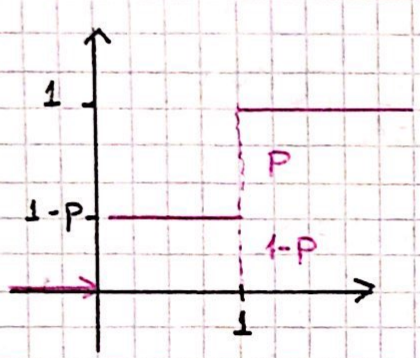
X	0	1
$P_X(x)$	$1-P$	P

ASIGNO 1 LO EQUILIBRADO

$$X < \begin{matrix} 1 \text{ 'EXITO'} \\ 0 \text{ 'FRACASO'} \end{matrix}$$

- $0 < P < 1$
- $X \sim BER(P)$

$$P_X(x) = P^x (1-P)^{1-x}$$



$x < 0 : F_X(x) = 0$

$x = 0 : F_X(0) = 1-P$

$0 < x < 1 : F_X(x) = 1-P$

$x = 1 \quad F_X(x) = P(X \leq 1) = 1$

$x > 1 \quad F_X(x) = 1$

$$F_X(x) = (1-P)\, \mathbb{1}\{0 \leq x < 1\} + \mathbb{1}\{x \geq 1\}$$

EJ

X: # CARA AL ARROJAR UNA MONEDA 1 VEZ

$$X \sim BER(1/2)$$

Y: # SACAR 1 ARROJANDO UN DADO EQUILIBRADO

$$Y \sim BER(1/6)$$

→ P

VARIABLE ALEATORIA GEOMETRICA

E.A REALIZAR ENSAYO BERNOULLI INDEPENDIENTE HASTA OBSERVAR EL 1^{ER} EXITO

X: # ENSAYOS REALIZADOS

↓ HACER LO DE ARRIBA N VECES HASTA QUE SUCEDA EA

- $R_X : \mathbb{N}$

- $$\sum_{N \in \mathbb{N}} P_X(N) = \sum_{N=1}^{\infty} (1-P)^{N-1} \cdot P = P \sum_{N=1}^{\infty} (1-P)^{N-1} = P \sum_{j=0}^{\infty} (1-P)^j$$

NOTA

$$P = \frac{1}{1-(1-P)} = 1$$

NOMBRE $X \sim G(P)$ $0 < P < 1$

X_1: # LANZAR UNA MONEDA HASTA 1° CARA, $X \sim g(1/2)$

X_2: # LANZAR UN DADO HASTA EL PRIMER 1, $X_2 \sim g(1/6)$

→ FIJO CANT DE ENSAYOS

VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL

REALIZO N ENSAYOS BERNOULLI DE PARAMETRO P, DE MANERA INDEPENDIENTE.

X: # EXITOS OBSERVADOS

TIRO 5 VECES LA MONEDA, P DE LA CANTIDAD DE VECES QUE SALIÓ X.

$R_X = \{0, 1, 2, \dots N\}$ → CANTIDAD DE X

$P_X(0) = P(X=0) = (1-P)^N$

$P_X(1) = P(X=1) = N P (1-P)^{N-1}$ → PUEDE SER EN CUALQUIER POSICIÓN

$P_X(k) = P(X=k) = P^k (1-P)^{N-k} \binom{N}{k}$ → COMO ANANA

• $\sum_{k=0}^{N} P_X(k) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} P^k (1-P)^{N-k} = (P+(1-P))^N = 1^N = 1$

→ FIJO CANT EXITOS

VARIABLE ALEATORIA PASCAL

ENSAYO DE BERNOULLI DE PARAMETRO P HASTA OBSERVAR K EXITOS.

X: # ENSAYOS REALIZADOS

TIRO N VECES HASTA LLEGAR AL K EXITO PACTADO.

• $R_X = \{k, k+1, k+2 \dots\} = \mathbb{N}_{\geq k}$

• $P_X(N) = P(X=N) = \binom{N-1}{k-1} P^k (1-P)^{N-k}$ ← CANT TOTAL

CANT TOTAL (1 FIJO) $\frac{N-1}{(k-1)(N-k)}$ ↓ REPETIDO

FIJO ↑

0 1 0 0 1 0 1

OBS! Si $k=1 \Rightarrow PAS(1,P) \sim g(P)$

Si $N=1 \Rightarrow Bi(1,P) \sim Ber(P)$

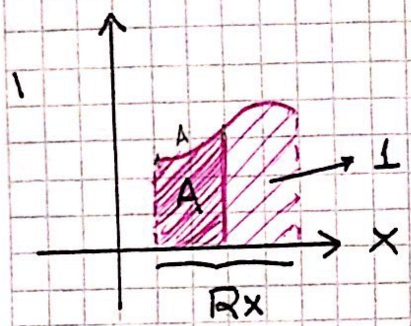
VARIABLE ALEATORIAS CONTINUAS

SE LLAMA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD O DE MASA, A UNA $f_X : R_X \to \mathbb{R}_{>0}$ QUE VERIFICA:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (ii) $A \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \displaystyle\int_A f_X(x)\,dx$ → AREA BAJO EL CONJUNTO X

CHIQ

• $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty; x]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds$



VALE QUE: $F_X'(x) = f_X(x)$

CHIQ

EN PARTICULAR $\mathbb{P}(X \in [A,B]) = \mathbb{P}(A \leq X \leq B) = \displaystyle\int_A^B f_X(x)\,dx$

$$\mathbb{P}(X = A) = \int_A^A f_X(x)\,dx = 0$$

$$\mathbb{P}(A \leq X \leq B) = \mathbb{P}(A \leq X < B) = \mathbb{P}(A < X \leq B) = \mathbb{P}(A < X < B)$$

V.A.C: UNIFORME EN EL SEGMENTO

CHI → UNIFORME = EQUIPROBABLE

$X \sim \mathcal{U}(A,B)$

$f_X(x) = k\,\mathbb{1}\{A < x < B\}$

COMO ES UNIFORME CADA PUNTO ACUMULA LO MISMO → / → PENDIENTE

PRIMERA

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} k\,\mathbb{1}\{A<x<B\}\,dx = \int_A^B k\,dx = 1$

ENTONCES $f_X(x) = \dfrac{1}{B-A}\,\mathbb{1}\{A < x < B\}$

C

$k =$

NOTA

EN PARTICULAR, ELEGIR UN Nº AL AZAR EN $(0,1)$ ES

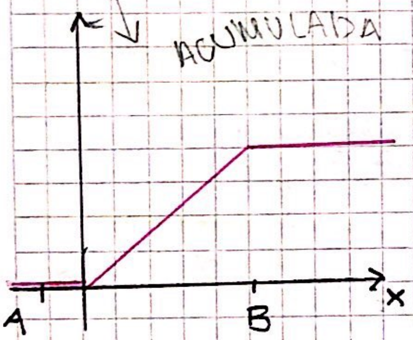
$U \sim \mathcal{U}(0,1) \qquad f_U(u) = \mathbb{1}\{0 < u < 1\}$

- $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{B-A}\,\mathbb{1}\{A < s < B\}\,ds =$

SOLUCION

$$\begin{cases} x < A & 0 \\ A < x < B & \displaystyle\int_A^x \frac{1}{B-A}\,ds = \frac{x-A}{B-A} \xrightarrow{} \frac{FAV}{TOT} \\ x \geq B & \displaystyle\int_A^B \frac{1}{B-A}\,ds = 1 \end{cases}$$

$\underline{F_X(x)} = \left(\dfrac{x-A}{B-A}\right)\mathbb{1}\{A \leq x < B\} + \mathbb{1}\{x \geq B\}$



OTRA FORMA:

$F_X(x) = \dfrac{x}{B-A} + C \;/\; F_X(A) = 0$

$\downarrow \; C = \dfrac{-A}{B-A} = -\dfrac{A}{B} + 1$

- Si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

$F_U(u) = u\,\mathbb{1}\{0 < u < 1\} + \mathbb{1}\{u \geq 1\}$

PROPIEDAD $(A \subset \mathbb{R})$

- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \displaystyle\int_A \frac{1}{B-A}\,\mathbb{1}\{A < x \leq B\}\,dx = \frac{1}{B-A}\int \mathbb{1}\{\cdots\}$

$$\frac{1}{B-A}\int_{A\cap(A,B)} 1\,dx = \frac{\text{LONG}(A\cap(A,B))}{\text{LONG}(A,B)} = \frac{\text{'LONG FAVORABLES'}}{\text{'LONG POSIBLES'}}$$

tiene que ser uniforme

Remarcar

EJ

$X \sim \mathcal{U}(1,4)$

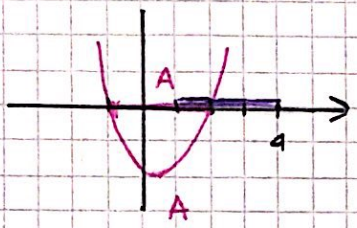
CALCULAR $\mathbb{P}(X^2 - X - 2 < 0) = \mathbb{P}(A)$

•) $F_X(X) = \frac{1}{3}\mathbb{1}\{1 < x < 4\}$

EX

M

$x^2 - X - 2 < 0 = (X+1)(X-2) < 0$



DOMF

$$= \frac{\text{LONG}((-1,2)\cap(1,4))}{\text{LONG}(1,4)} = 1/3$$

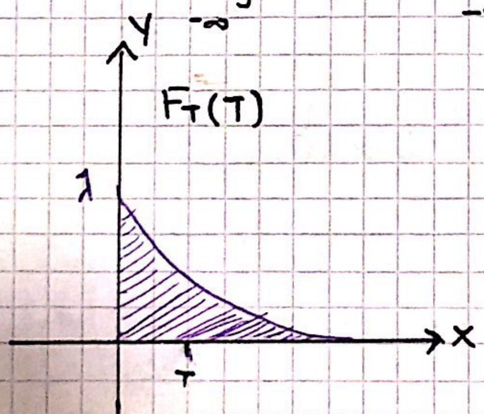
V.A : EXPONENCIAL

DE PARAMETRO λ $(\lambda > 0)$

$T,\ F_T(T) = \lambda e^{-\lambda T}\mathbb{1}\{T>0\}$

• $R_T = \mathbb{R}_{>0}$

• $F_T(T) = \int_{-\infty}^{T} F_T(S)\,dS = \int_{-\infty}^{T} \lambda e^{-\lambda T}\,dS =$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(T)\,dT = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda T}\mathbb{1}\{T>0\}\,dT$$

DOY VUELTA

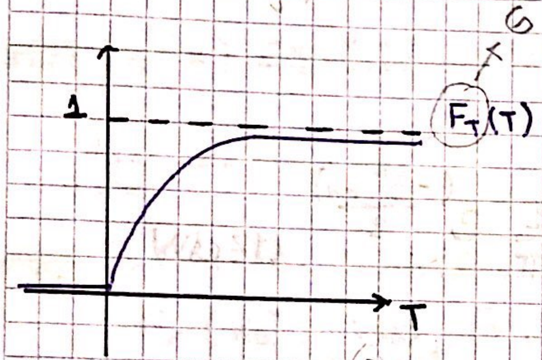
$$= e^{-\lambda T}\Big|_0^{+\infty} = 1 - \lim_{T\to\infty} e^{-\lambda T} = 1 - 0 = 1$$

NOTA

FECHA

(λ = TASA DE OCURRENCIA)

$$\begin{cases} T<0 & F_T(T)=0 \\ T\geq 0 & F_T(T) = (1-e^{-\lambda T})\, \mathbb{1}\{T\geq 0\} \end{cases}$$



- $S(T) = 1 - F_T(T) = \mathbb{P}(T>T)$ FUNCIÓN DE SUPERVIVENCIA

Si T MIDE TIEMPO DE DURACIÓN HASTA LA 1° OCURRENCIA DE UN PROCESO QUE TIENE UNA TASA (λ)

$$\boxed{\lambda = \frac{\#\text{OCURRENCIAS}}{\text{UNIDAD DE TIEMPO}} = \text{CTE}}$$

$$S(T) = \mathbb{P}(T>T) = 1 - (1-e^{-\lambda T}) = e^{-\lambda T}$$

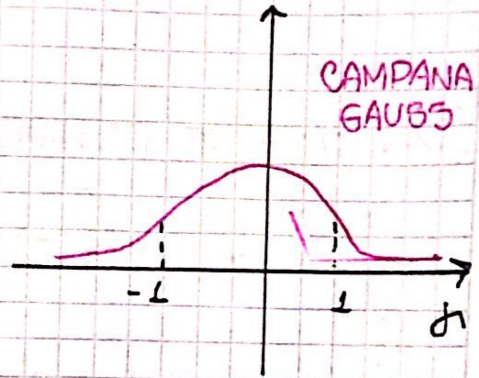
DECRECE DE MANERA EXPONENCIAL, LA $\mathbb{P}$ QUE ESA OCURRENCIA PASE CON + TIEMPO.

$T \sim \text{Exp}(\lambda)$

NOTA

V.A: NORMAL ESTANDAR

$$Z \to F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$$



- $R_Z = \mathbb{R}$

$$\int F_Z(z)\,dz = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\,dz = I$$

$$I^2 = \left(\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\,dz\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{1}{2\pi}\, e^{\frac{(-z^2+w^2)}{2}}\,dz\,dw$$

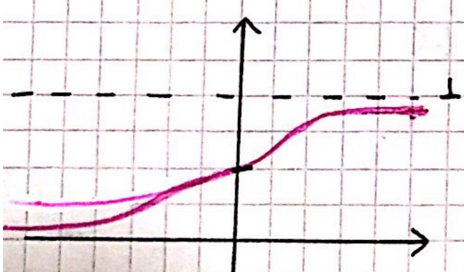
$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ w = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \longrightarrow z^2 + w^2 = r^2 \qquad |J| = r$$

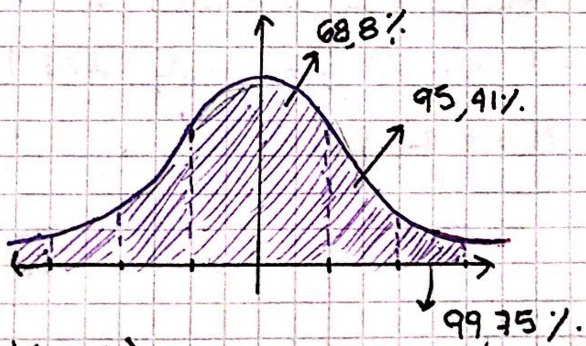
$$= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\, e^{-r^2/2}\, r\,dr\,d\theta = -e^{-r^2/2}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

$I^2 = 1 \to I = 1 \quad (>0)$

NOMBRE: $F_Z(z) = \varphi(z)$

$F_Z(z) = \Phi(z)$ TABULADA ENTRE $(-3$ y $3)$





$$Z \sim N(0,1)$$

NOTA

ENTONCES:

X DISCRETA → $F_X(x)$ ESCALERA

X CONTINUA → $F_X(x)$ ES CONTINUA.

PROPIEDADES

(1) $0 \leq F_X(X) \leq 1$

(2) $F_X(X)$ ES CRECIENTE (XQ ACUMULA)

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

(3) $F_X(X)$ ES SEMICONTINUA A DERECHA:

$$F_X(x_0^+) \lim_{x \to x_0^+} F_X(x_0) = F_X(x_0)$$

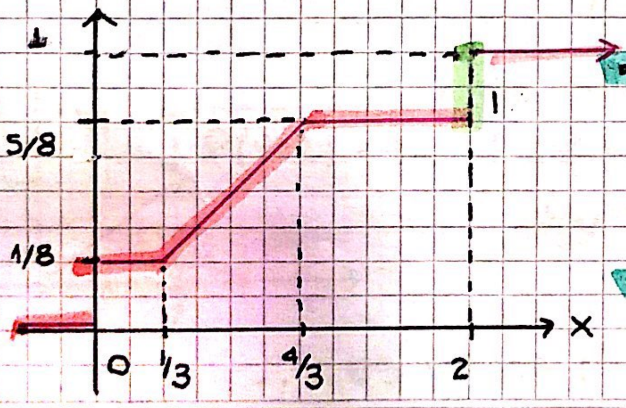
$$F_X(x_0^+) - F_X(x_0^-) = \mathbb{P}(X = x_0) \overset{\text{DISCRETA}}{=} p_X(x_0)$$

V.A: MIXTAS

X V.A MIXTA, SI $R_X = D \cup C$ CON $D, C \subset \mathbb{R}$

NO TIENE NI FUNCION DE PROBABILIDAD PUNTUAL, NI DENSIDAD. VIENEN DADAS POR SU $F_X(x)$.

EJ. SEA X CON $F_X(x)$:



- EN 0 DE REPENTE ACUMULO 1/8
  $\mathbb{P}(X=0) = 1/8$
- ENTRE 1/3 Y 4/3 EMPIEZO A ACUMULAR DE MANERA CTE

$= \mathbb{P}(X=2) = 3/8$

$(1 - 5/8)$

$R_X = \{0, 2\} \cup \{1/3 ; 4/3\}$

EN ESTE INTERVALO LA FUNCION VALE LO VIOLETA

$F_X(x) = \frac{1}{8} \mathbb{1}\{0 \le x < 1/3\} + \{\frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\} \mathbb{1}\{1/3 \le x < 4/3\}$
$+ 5/8 \, \mathbb{1}\{4/3 \le x < 2\} + \mathbb{1}\{x \geq 2\} \cdot 1$

PROPIEDADES DE $F_X(X)$

X . V.A 'CUALQUIERA' $A < B \in \mathbb{R}$:

(1) $\mathbb{P}(A < X \le B) = F_X(B^+) - F_X(A^+)$

(2) $\mathbb{P}(A \le X \le B) = F_X(B^+) - F_X(A^-) =$

(3) $\mathbb{P}(A < X < B) = F_X(B^-) - F_X(A^+) =$

(4) $\mathbb{P}(A \le X < B) = F_X(B^-) - F_X(A^-)$

$\boxed{}$ = FUNCION (GRAFICO, HAY 3 CTES Y UNA RECTA)

$\boxed{}$ = FUNCIÓN INDICADORA

LO QUE VALE ES $\boxed{}$ EN $\{\}$

ENTONCES $\mathbb{P}(0 < X \le 1) = F_X(1^-) - F_X(0^+) = \frac{11}{24} - \frac{1}{8} = 1/3$

$\mathbb{P}(0 \le X \le 1) = F_X(1) - F_X(0^-) = \frac{11}{24} - 0 = 11/24$

$\mathbb{P}(0 < X < 1) = F_X(1^-) - F_X(0) = 11/24 - 1/8 = 1/3$

$\mathbb{P}(0 \le X < 1) = F_X(1^-) - F_X(0^-) = 11/24 - 0 = 11/24$

EJEMPLO

UNA MAQUINA LLENA BOTELLA. EL LIQUIDO INTRODUCIDO RESPONDE A V.A $X \sim \mathcal{U}(0,5)$ (LITROS) → B CAP MAX (2)

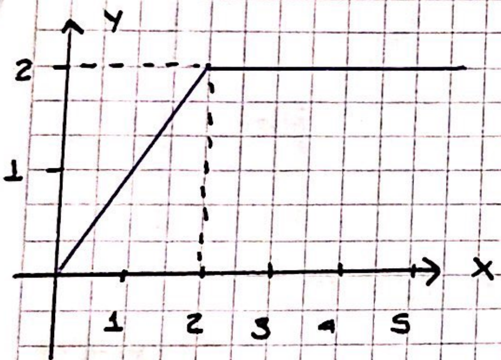
HALLAR LA ~~CANTI~~ DISTRIBUCIÓN DE CANTIDAD EN LAS BOT.

Y LITROS EN LA BOTELLA

X LITROS QUE EXPENDE LA MAQUINA

$F_Y(y)$?

• $R_Y = [0,2]$

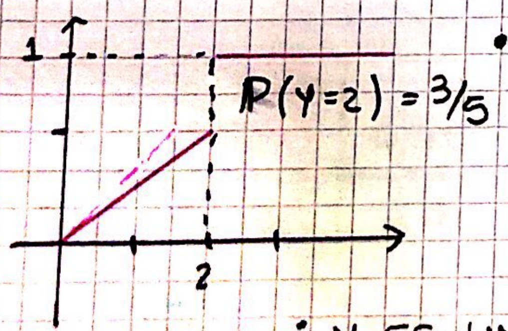


$$Y = \begin{cases} X & X < 2 \\ 2 & X \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 0 & F_Y(y) = 0 \\ y \geq 2 : & F_Y(y) = 1 \\ 0 < y < 2 & F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y) = F_X(y) = \frac{y}{5} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \frac{x}{5} \mathbb{1}\{0 \leq x < 5\} + \mathbb{1}\{x \geq 5\}$$

$$F_Y(y) = \frac{y}{5} \mathbb{1}\{0 \leq y < 2\} + \mathbb{1}\{y \geq 2\}$$



• ES EQUIVALENTE QUE $\{Y = 2\}$ A QUE $\{2 \leq X < 5\}$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(2 \leq X \leq 5) =$$

$$\frac{LONG((2,5))}{LONG((0,5))} = \frac{3}{5}$$

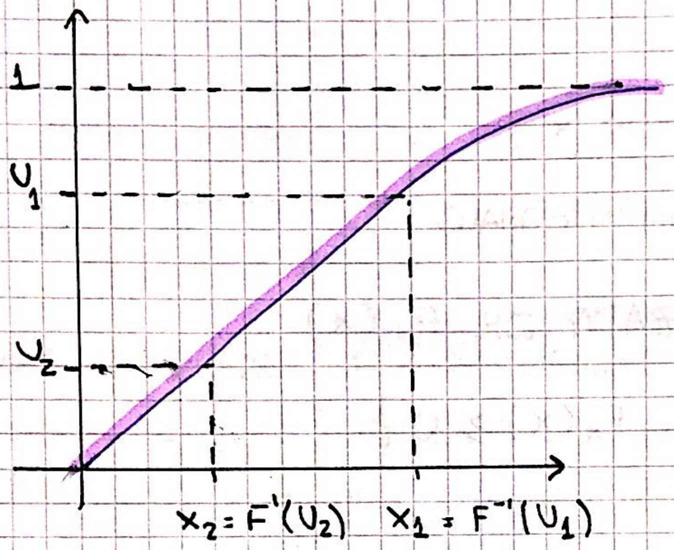
∴ Y ES UN V.A MIXTA

SIMULACIÓN

16/09

SIMULAR VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA X LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $F_X(X)$ PRESCINTA.

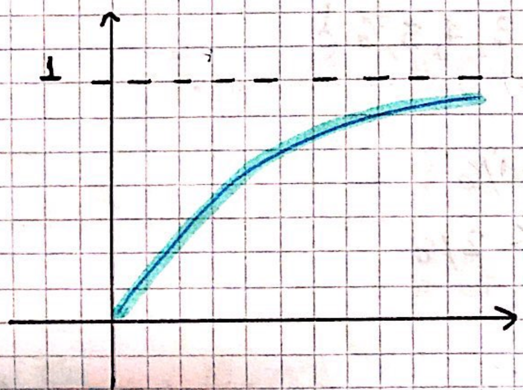
- SIMULAR USANDO VALOR DE UNA $U \sim \mathcal{U}(0,1)$



U	X
U_1	$X_1 = F^{-1}(U_1)$
U_2	$X_2 = F^{-2}(U_2)$

EJEMPLO

SIMULAR 3 VALORES DE UNA V.A. $T \sim EXP(1/3)$



$$F_T(T) = 1 - e^{-1/3 T}, \ \forall T > 0$$

$$U = 1 - e^{-1/3 T}$$

$$-U + 1 = e^{-1/3 T}$$

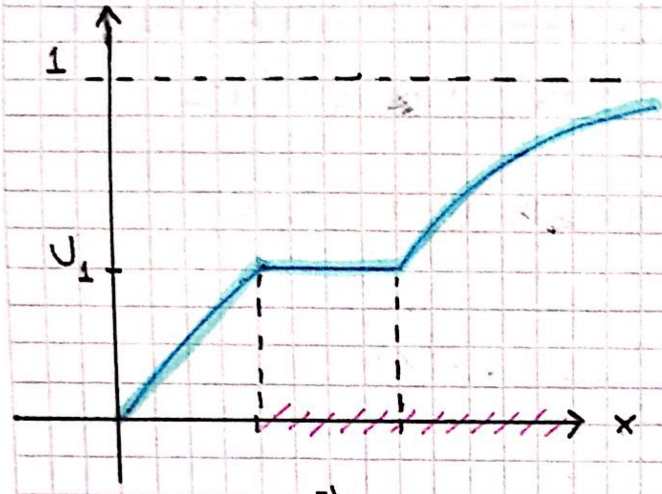
$$\ln(1-U) = \ln(e^{-1/3 T})$$

$$T = -3 \ln(1-U)$$

U	0,988	0,724
T	13,26	3,86

NOTA

CUANDO FALLA? CUANDO $F_X(x)$ NO ES BIYECTIVA
($F_X(x)$ NO ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE)



$F_X^{-1}(U)$ ES UN INTERVALO

INVERSA GENERALIZADA DE $F_X(x)$

$$F_X^{-1}(U) = \text{MÍN} \{ x : F_X(x) \geq U \}$$

EJEMPLO

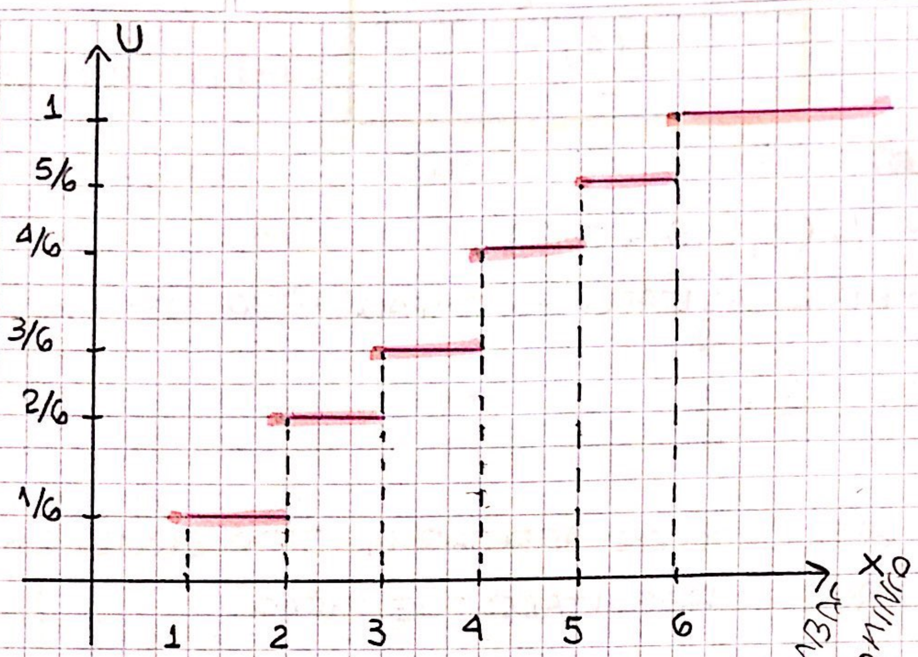
SIMULAR 2 VALORES DE UN DADO EQUILIBRADO
USANDO $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

$F_X(x)$ CON $X \sim \mathcal{U}\{1,2,3,4,5,6\}$

$$F_X(x)^{-1} = \begin{cases} 1 & 0 \leq U < 1/6 \\ 2 & 1/6 \leq U < 2/6 \\ \vdots & \\ 6 & 5/6 \leq U < 1 \end{cases}$$

ENTONCES $F_X(x)^{-1} = \sum_{m=1}^{6} \mathbb{1}\left\{ \frac{m-1}{6} \leq U < 1/6 \right\}$

NOTA



VARIABLE ALEATORIA TRUNCADA → CAMBIA EL DOMINIO

SEA $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ UN ESPACIO DE PROBABILIDAD COMPLETO Y X UNA V.A DEFINIDA EN ESE ESPACIO. SEA $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) > 0$. SE LLAMA V.A $X|A$ Ó $X|X \in A$ A UNA V.A DEFINIDA EN $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ TAL QUE:

$$F_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X \leq x \mid X \in A)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq x, X \in A)$$

$$= \mathbb{P}(X \in A)$$

- $R_{X|A} = R_X \cap A$

CASO DISCRETO: $P_X(x)$ FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE X. $X|A$ DISCRETA.

$$P_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X = x \,/\, X \in A) = \frac{\mathbb{P}(X = x, X \in A)}{\mathbb{P}(A)}$$

ENTONCES $\boxed{\dfrac{P_X(x) \cdot \mathbb{1}\{x \in A\}}{\mathbb{P}(A)}}$

EJEMPLO.

$X \sim \mathcal{U}(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

A: 'EL RESULTADO ES IMPAR'

$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

X|A: RESULTADO DE ARROJAR UN DADO EQUILIBRADO QUE EL RESULTADO FUE IMPAR.

x	1	2	3	4	5	6
$P_X(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$P_{X\|A}$	$\frac{1/6}{1/2}$	0	$\frac{1/6}{1/2}$	0	$\frac{1/6}{1/2}$	0

$F_{X|A}(x): \mathbb{P}(X \leq x \mid X \in A) = \boxed{\sum_{s \leq x} P_{X/A}(s) = \frac{P_X(s)\, \mathbb{1}\{s \in A\}}{\mathbb{P}(A)}}$

CASO CONTINUO: X V.A CONTINUA CON $F_X(x)$, $A \in \mathcal{A}$ $\mathbb{P}(A) > 0$ X/A ES UNA VARIABLE ALE. CONTINUA CON FUNCION DE DENSIDAD $F_{X|A}(x)$. EN ESTE CASO SALE QUE:

$$\boxed{F_{X|A} = f_{X|A}(x)}$$

NOTA

LUEGO POR UN LADO

$$F_{X|A}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|A}(s)\,ds \qquad (1)$$

Y POR OTRO LADO: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{f_X(s)\,\mathbb{1}\{s\in A\}\,ds}{\mathbb{P}(A)}$

F(A) F(B)

ENTONCES DE (1) Y (2):

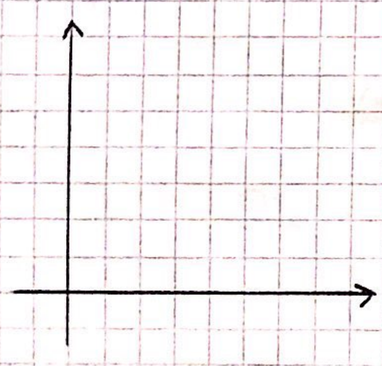
$$\boxed{f_{X|A}(x) = \frac{f_X(x)\cdot \mathbb{1}\{x\in A\}}{\mathbb{P}(A)}}$$

EJEMPLO (2.19, 2.20)

X: DIAMETRO DE ARANDELAS

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}\{0 < x \le 1\} + (2-x)\,\mathbb{1}\{1 < x < 2\}$$

$$D = \{0 \le x < 1/2\} \vee \{3/2 \le x < 2\} \qquad D^c = S \quad (S^c = D)$$



$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{4} + \overbrace{3\,\frac{1}{8}}^{\frac{1/2\cdot 1/2}{2}} = \frac{5}{8}$$

$$\mathbb{P}(D) = \frac{3}{8} \rightarrow 1 - \mathbb{P}(S)$$

$$S = \{1/2 \le x < 3/2\}$$

ME PIDEN HALLAR $f_{X|S}(x)$ Y $f_{X|D}(x)$

$$\mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$$

- $f_{X|S}(x) = \dfrac{f_X(x)\,\mathbb{1}\{x\in S\}}{\mathbb{P}(S)} = \dfrac{8}{5}\left(f_X(x)\,\mathbb{1}\{1/2 \le x < 3/2\}\right)$

$$F_{X|D}(x) = \frac{F_X(x)\,\mathbb{1}\{x \in D\}}{\mathbb{P}(D)} = \frac{8}{3}(F_X(x) \quad \cdots \quad)$$

PROPIEDAD DE PROBABILIDAD TOTAL (ROMPECABEZAS)

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad (A_i \cap A_j = \emptyset)$ VALE QUE:

- $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X \leq x \mid X \in A_i)\,\mathbb{P}(X \in A_i)$

ENTONCES

$$\boxed{F_X(x) = \sum_{i=1}^{n} F_{X|A_i}(x)\ \mathbb{P}(A_i)}$$

- **DISCRETAS**: $P_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P_{X|A_i}(s)\ \mathbb{P}(A_i)$

- **CONTINUAS**: $F_X(x) = \sum_{i=1}^{n} F_{X|A_i}(x)\ \mathbb{P}A_i$

APLICACIÓN DE TRUNCAMIENTO

$T \sim \text{EXP}(\lambda)$, $F_T(t) = 1 - e^{\lambda t}$, $S_T(t) = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(T > t)$

$$\boxed{\mathbb{P}(T > t+s) = \mathbb{P}(T > s)}$$

PROPIEDAD DE FALTA DE MEMORIA DE LA EXPONENCIAL.

NOTA

VECTORES ALEATORIOS

$X_1 \dots X_m$ V.A DEFINIDA EN $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$(X_1 \quad X_m)$ VECTOR ALEATORIO m DIMENSIONAL.

- $R_{X_1 \dots X_m} = R_{X_1} \times R_{X_2} \cdot \quad \times R_{X_m}$

CASO DISCRETO: (X, Y V.A DISCRETAS)

(X, Y) VECTOR DISCRETO CON FUNCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA P_{XY}.

$$P_{XY}(x,y) - \mathbb{P}(X = x, Y = y) =$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA F_X:

$$F_{XY}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \sum^{S \leq x,\ T \leq y} \mathbb{P}(X = S, Y = T) =$$

$$\sum_{S \leq x,\ T \leq y} P_{XY}(S,T)$$

$P_{XY}(x,y)$: F DE PROB PUNTUAL O MASA BIDIMENSIONAL

-) $\displaystyle\sum_{\substack{x \in R_X \\ y \in R_Y}} P_{XY}(x,y) = 1$

-) $A \subset \mathbb{R}^2;\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((X,Y) \in A) = \displaystyle\sum_{x \in A} P_{XY}(x,y)$

NOTA

SEA (X,Y) VECTOR ALEATORIO EN F DE PROB. CONJUNTA $P_{XY}(x,y)$. SE LLAMA FUNCIONES DE PROBABILIDAD MARGINALES RESPECTO A X Y RESPECTO A Y A:

$$P_X(x) = \sum_{y \in R_Y} P_{XY}(x,y) \quad \forall x \in R_X$$

$$P_Y(y) = \sum_{x \in R_X} P_{XY}(x,y) \quad \forall y \in R_Y$$

$\mathbb{P}$('NO HAY ROJAS') $= \mathbb{P}(X=0) = \sum_{y \in R_Y} P_X(0,y) =$
$P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,1) + P_{XY}(0,2) = 5/70$

- $F_{XY}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$

CASO CONTINUO (X, Y V.A. CONTINUAS)

(X,Y) VECTOR ALEATORIO CONTINUO CON F DE DENSIDAD DE PROB CONJUNTA O DE MASA BIDIMENSIONAL.

$F_{XY}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ TAL QUE:

(i) $F_{XY}(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$
(ii) $\iint F_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$
(iii) $A \subset \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_A F_{XY}(x,y)\,dx\,dy}$$

$$\therefore F_{XY}(x,y) = \frac{1}{\text{AREA}(A)} \mathbb{1}\{(x,y) \in A\}$$

$B \subset \mathbb{R}^2$ =

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((X,Y) \in B) = \iint F_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \iint \frac{1}{\text{AREA}(A)} \mathbb{1}\{\ \}\,dx\,dy}$$

$$\frac{1}{\text{AREA}(A)} \iint_{A \cap B} 1\,dx\,dy = \frac{\text{AREA}(A \cap B)}{\text{AREA}(A)} = \frac{\text{'A. FAVORABLES'}}{\text{'A. POSIBLES'}}$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROB MARGINAL:

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{XY}(x,y)\,dy \quad \forall x \in R_X$

- $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{XY}(x,y)\,dx \quad \forall y \in R_Y$

CASO CONTINUO

FUNCION DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA

$$F_{XY}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{\infty}^{y}\int_{\infty}^{x} f_{XY}(s,t)\, ds\, dt$$

VALE QUE: $\dfrac{d^2 F_{XY}}{dx\, dy} = f_{XY}(x,y)$

(X,Y) VECTOR ALEATORIO, LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN MARGINALES, SE DEFINEN:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x, -\infty < Y < +\infty) =$$
$$\lim_{y \to +\infty} \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \lim_{y \to +\infty} F_{XY}(x,y)$$

ANALOGAMENTE: $F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{XY}(x,y)$

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

X, Y V.A DEFINIDAS EN $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ DECIMOS QUE X e Y SON INDEPENDIENTES, sii, $\forall a < b,\ c < d$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \cdot \mathbb{P}(c \leq Y \leq d)$$

OBS! LA DEFINICION ES EQUIVALENTE A PEDIR QUE $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y)$$

NOTA

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{P}$$

DE ACA SALE:
- $P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$
- $F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

EJEMPLO

Y/X	0	1	
0	1/3	1/6	1/2
1	1/6	1/3	1/2
	1/2	1/2	1

$(x,y) \to P_{XY}(x,y)$

$\left.\begin{array}{l} X \sim B(1/2) \\ Y \sim B(1/2) \end{array}\right\}$ NO SON INDEPENDIENTES

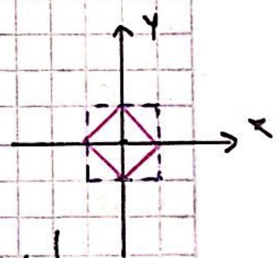
- PARA QUE X E Y DISCRETAS SEAN INDEPENDIENTES, LA TABLA DE VALORES DE P_{XY} DEBE SER LA TABLA DE MULTIPLICAR ENTRE LOS VALORES DE P_X P_Y.

CASOS CONTINUOS:

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall x,y \in R_{XY}$$

IMPLICA
- $SOP(F_{XY}) = SOP(F_X) \cdot SOP(F_Y)$ (CONDICION NECESARIA)
- PARTE ALGEBRAICA SE TIENE QUE PODER.

EJEMPLO



$(X,Y) \sim \mathcal{U}(\Lambda)$

$F_{XY}(x,y) = \frac{1}{2} \mathbb{1}\{|x|+|y| \leq 1\}$

$F_X(x) = (1+x)\,\mathbb{1}\{-1 \leq x < 0\} + (1-x)\,\mathbb{1}\{0 \leq x < 1\}$

$SOP(F_{XY}) =$ ROMBO

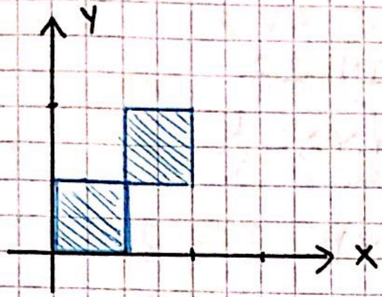
$\left.\begin{array}{l} SOP(F_X) = [-1\ 1] \\ SOP(F_Y) = [-1\ 1] \end{array}\right\}$ $SOP(F_X) \cdot SOP(F_Y)$ = CUADRADO

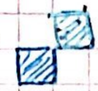
NOTA X e Y NO SON INDEP.

↓ NO CUMPLE

EJEMPLO

$(X, Y) \sim \mathcal{U}(\text{ROMBO})$



$SOP(F_{XY}) =$ 

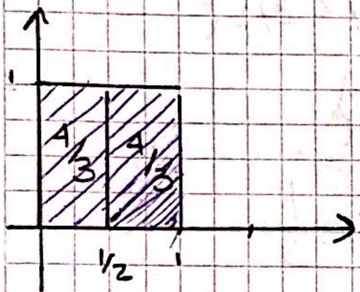
$SOP(F_X) = [0,1]$
$SOP(F_Y) = [0,1]$ $\Big\} \neq$ ROMBO

X E Y NO SON INDEPENDIENTES

EJEMPLO 5

$$(X, Y) \to F_{XY}(x,y) = \frac{4}{3}\, \mathbb{1}\{0 \leq x < 1/2 \ \& \ 0 \leq y < 1\} +$$

$$\frac{2}{3}\, \mathbb{1}\{1/2 \leq x < 1, \ 0 \leq y < 1\}$$



$SOP(F_{XY}) = [0,1] \times [0\ 1]$

(1) ✓

$SOP(F_X) = [0,1]$
$SOP(F_Y) = [0,1]$ $\Big\} = SOP(F_{XY})$

(2)

$Y \sim \mathcal{U}(0,1) \to F_Y(y) = \mathbb{1}\{0 \leq y < 1\}$

$X \sim \mathcal{U}(0,1) \to F_X(x) = \frac{2}{3}\, \mathbb{1}\{0 \leq x < 1/2\} + 1/3\, \mathbb{1}\{1/2 \leq x < 1\}$

$F_Y(y_0) \cdot F_X(x_0) \neq F_{XY}(x_0, y_0)$ ✗ $\therefore$ X E Y NO SON INDEPENDIENTES

NOTA

EJEMPLO 6

$(X,Y) \to f_{XY}(x,y) = \underbrace{6e^{-3x}e^{-2y}}_{\text{FUNCIONES DE VARIABLES SEPARADAS}} \underbrace{\mathbb{1}\{x>0, y>0\}}_{\mathbb{1}\{x>0\}\mathbb{1}\{y>0\}} =$

X E Y SON INDEP.

$f_{XY}(x,y) = \underbrace{3e^{-3x}\mathbb{1}\{x>0\}}_{f_X(x)} \underbrace{2e^{-2y}\mathbb{1}\{y>0\}}_{f_Y(y)}$

$X \sim Exp(3)$ $\quad$ $Y \sim EXP(2)$

EJEMPLO 7

$(X,Y) \to f_{XY}(x,y) = e^{-x/2}\mathbb{1}\{x>0, 1 \le y \le 3/2\}$

$2 \cdot \frac{1}{2} e^{-x/2}\mathbb{1}\{x>0\}\mathbb{1}\{1 \le y \le 3/2\}$

$= \underbrace{1/2\, e^{-x/2}\mathbb{1}\{x>0\}}_{f_X(x)} \cdot \underbrace{2\,\mathbb{1}\{1 \le y \le 3/2\}}_{f_Y(y)}$

$X \sim EXP(1/2)$ $\quad$ $Y \sim \mathcal{U}(1; 3/2)$

EJEMPLO 8

$(X,Y) \to f_{XY}(x,y) = k\, e^{-xy} \cdot \mathbb{1}\{x>0, y>0\}$

NO SE PUEDE ESCRIBIR COMO $f(x) \cdot g(y)$

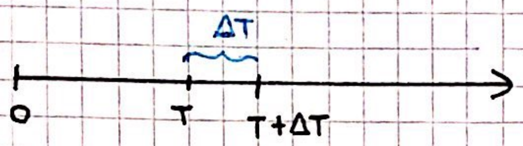
X E Y NO SON INDEP.

NOTA

FUNCION INTENSIDAD DE FALLAS

SEA T UNA V.A CONTINUA QUE MIDE EL TIEMPO DE FUNCIONAMIENTO (DE UNA MAQUINA) HASTA LA 1ª FALLA EN UN SISTEMA CON INTENSIDAD DE FALLA $\lambda(T)$.

QUIERO ESTUDIAR $\mathbb{P}(T < T+\Delta T \,/\, T > T)$ CUANDO $\Delta T \to \infty$



$$\mathbb{P}(T < T+\Delta T \,/\, T>T) = \frac{\mathbb{P}(T < T+\Delta T \,/\, T>T)}{\mathbb{P}(T>T)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T < T < T+\Delta T)}{\mathbb{P}(T>T)} = \frac{F_T(T+\Delta T) - F_T(T)}{1 - F_T(T)}$$

LUEGO

$$\lim_{\Delta T \to 0} \frac{\mathbb{P}(T < T+\Delta T / T>T)}{\Delta T} = \frac{F_T(T)}{1 - F_T(T)} = \lambda(T)$$

$$\lambda(T) = \frac{-d}{dT} \ln(1 - F_T(T))$$

$$-\int_0^T \lambda(s)\,ds = \ln(1 - F_T(T))$$ ELEVO AMBAS EN e.

$$\boxed{F_T(T) = 1 - e^{-\int_0^T \lambda(s)\,ds}}$$

ENTONCES $F_T(T) = \frac{dF_T(T)}{\lambda} = \lambda(T)\, e^{-\int_0^T \lambda_s (ds)}$

CON $\mathbb{1}\{T>0\}$

CASO PARTICULAR

$\lambda(T) \equiv \lambda \quad (CTE)$

$$\left.\begin{aligned} F_T(T) &= 1 - e^{-\lambda T} \\ f_T(T) &= \lambda e^{-\lambda T} \end{aligned}\right\} \quad T \sim EXP(\lambda)$$

NOTA