PROBABILIDAD (61.09-81.04-81.16-61.06-81.03)

Primer cuatrimestre - 2024

Tercer parcial

18 de mayo 2024 - 9h

Duración: 2 horas

Escribir claramente en su hoja: **apellido, nombres - padrón- código de materia.**

El parcial debe resolverse a mano. Una vez terminado debe subirse al campus una foto o escaneado del mismo. Los ejercicios recibidos después de las 11:10 del 18/5/2024 no serán considerados como entregados.

---

1. Una máquina embala caramelos en cajas. Cada caja contiene 21 caramelos con probabilidad 0.5, 20 caramelos con probabilidad 0.3 y 19 caramelos con probabilidad 0.2. Independientemente, la cantidad de cajas que embala la máquina por día sigue una distribución de Poisson de media 100. Calcular la varianza de la cantidad de caramelos embalados por la máquina en un día.

2. Una máquina de ladrillos produce un ladrillo cada 2 minutos. La probabilidad de que fabrique un ladrillo defectuoso es 0.1. Calcular la esperanza del tiempo de funcionamiento de la máquina hasta fabricar 3 ladrillos sin defectos.

Federico Aprato | 105694 | CURSO 29 (81.04)

1) Defino variables aleatorias,

- N: número de cajas embaladas en un día. $N \sim Poisson(\lambda = 100)$

- X: número de caramelos en una caja. $P(X=21) = 0{,}5$
  $P(X=20) = 0{,}3$
  $P(X=19) = 0{,}2$

- Y: número total de caramelos embalados en un día:

$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, donde X_i son variables independientes idénticas distribuidas con la misma distribución que X.

Ahora, primero calculo la esperanza y varianza de X,

$\boxed{E(X) = 21 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 0{,}3 + 19 \cdot 0{,}2 = 20{,}3}$

$\boxed{E(X^2) = 21^2 \cdot 0{,}5 + 20^2 \cdot 0{,}3 + 19^2 \cdot 0{,}2 = 412{,}7}$

$\boxed{Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 412{,}7 - (20{,}3)^2 = 0{,}61}$

Para calcular la varianza de Y utilizo la ley total de la varianza:

$$Var(Y) = E[Var(Y|N)] + Var(E[Y|N])$$

Calculo $E[Var(Y|N)]$, dado $N=n$: $Y|N=n \sim$ (suma de n variables X_i)

La varianza de la suma de n variables X independientes es $n \cdot Var(X)$.

$$Var(Y \mid N=n) = n \cdot Var(X)$$

Entonces: $E[Var(Y|N)] = E[N \cdot Var(X)] = Var(X) \cdot E[N]$

$= 0{,}61 \cdot 100$

$\boxed{E[Var(Y|N)] = 61}$

Luego para $Var(E[Y|N])$, la esperanza de Y dado $N=n$ es:

$$E[Y \mid N=n] = n \cdot E(X)$$

propiedad: $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$

Entonces: $Var(E[Y|N]) = Var(N \cdot E(X)) = \underbrace{Var(N) \cdot (E(X))^2}$

Siendo $N \sim Poisson(\lambda = 100)$, $Var(N) = \lambda = 100$

$\boxed{Var(E[Y|N]) = 100 \cdot (20{,}3)^2 = 41209}$

Finalmente, sumando ambos términos obtengo la varianza total de Y.

$Var(Y) = E[Var(Y|N)] + Var(E[Y|N])$

$Var(Y) = 61 + 41209$

$\boxed{Var(Y) = 41270}$

✓

~~Federico~~ Federico Oprotte | 105694 | CURSO 29 | (81.04)

2) Para calcular la esperanza de lo que se pide, voy a utilizar los conceptos de la distribución geométrica y distribución gamma; porque estamos interesados en el tiempo hasta alcanzar un cierto numero de exitos en un proceso con una probabilidad constante de éxito.

Si la probabilidad de éxito (un ladrillo no defectuoso) es $p = 0{,}9$ entonces la probabilidad de fallo (un ladrillo defectuoso) es $q = 0{,}1$

El numero esperado de intentos hasta el primer éxito en una distribución geometrica con probabilidad de exito p es $\frac{1}{p}$

Cuando se necesita alcanzar r éxitos (en este caso, 3 ladrillos sin defectos), el tiempo hasta alcanzar el r-ésimo éxito en un proceso con probabilidad de éxito p sigue una distribución gamma con parametros r y p.

Teniendo todo esto en cuenta, ahora:

- Si $p = 0{,}9$, el número esperado de ladrillos hasta el primer no defectuoso es $\frac{1}{0{,}9} = \frac{10}{9}$ ladrillos.

- La maquina produce un ladrillo cada 2 minutos, por lo tanto, el tiempo esperado hasta producir un ladrillo no defectuoso es $\frac{10}{9} \cdot 2$ minutos

- Ya que necesito 3 éxitos, el tiempo esperado hasta alcanzar el tercer éxito (tercer ladrillo no defectuoso) en un proceso de Bernoulli con probabilidad de éxito p es:

$$r \cdot \frac{1}{p} \cdot (\text{Tiempo por intento})$$

$$E(T) = r \cdot \frac{1}{p} \cdot (\text{tiempo por intento})$$

$$\boxed{E(T) = 3 \cdot \frac{1}{0{,}9} \cdot 2 = 6{,}67 \text{ minutos}}$$

La esperanza del tiempo de funcionamiento hasta fabricar 3 ladrillos sin defectos es aproximadamente 6,67 minutos.

Escaneado con CamScanner