10.2 Una urna contiene cuatro bolas: θ rojas y $4-\theta$ verdes. Para testear $H_0 : \theta = 2$ contra $H_1 : \theta \neq 2$ se realizarán dos extracciones de una bola con reposición y se rechazará H_0 si las dos bolas son del mismo color, de lo contrario no se la rechazará,

(**a**) Calcular el nivel de significación del test.

(**b**) Calcular la probabilidad de cometer errores de tipo II para todas las situaciones posibles. ¿Cuál es la máxima probabilidad de cometer un error de tipo II?

(**c**) Tabular y graficar la función de potencia del test.

(**d**) Repetir los incisos anteriores en el caso de que las dos bolas se hubiesen extraído sin reposición.

Primero S/reposición

θR

$4-\theta V$

2 extrac

$$H_0 : \underbrace{\theta = 2}_{\Theta_0 = \{2\}} \qquad H_1 : \underbrace{\theta \neq 2}_{\Theta_1 = \{0,1,3,4\}}$$

$(2^{s/r})$

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}(\text{“Rechazar } H_0\text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=2}(\text{“Extraigo dos bolas del mismo color”}) = \frac{\underbrace{\binom{2}{2}}_{\mathbb{P}(\text{Extraer 2 rojas})} + \underbrace{\binom{2}{2}}_{\mathbb{P}(\text{extraer 2 verdes})}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$$

En los casos donde $\theta \in \Theta_1$ y yo evalúo la $\pi(\theta)$ y me queda una combinatoria del tipo $\binom{1}{2}$, la defino como 0.

Sino otra función potencia es

$$\pi(\theta) = \frac{\theta}{4} \cdot \frac{(\theta-1)}{3} + \frac{(4-\theta)}{4} \frac{(3-\theta)}{3}$$

y vale que $\beta = 1 - \pi(\theta)$, con $\theta \in \Theta_1$

(b$^{s/r}$)

Errores de tipo II: no rechazar H_0 cuando es falsa

$$\mathbb{P}(\text{"Error de tipo II"}) = \mathbb{P}_{\Theta \in \Theta_1}(\overbrace{\text{"Extraer 2 bolas de} \neq \text{color"}}^{\overline{C}})$$

Para $\theta = 0$

$$\mathbb{P}_0(\overline{C}) = \mathbb{P}(\text{"1 V y 1 R cuando hay 0 R"}) = 0$$

Para $\theta = 1$

$$\mathbb{P}_1(\overline{C}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Para $\theta = 3$

$$\mathbb{P}_3(\overline{C}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$$

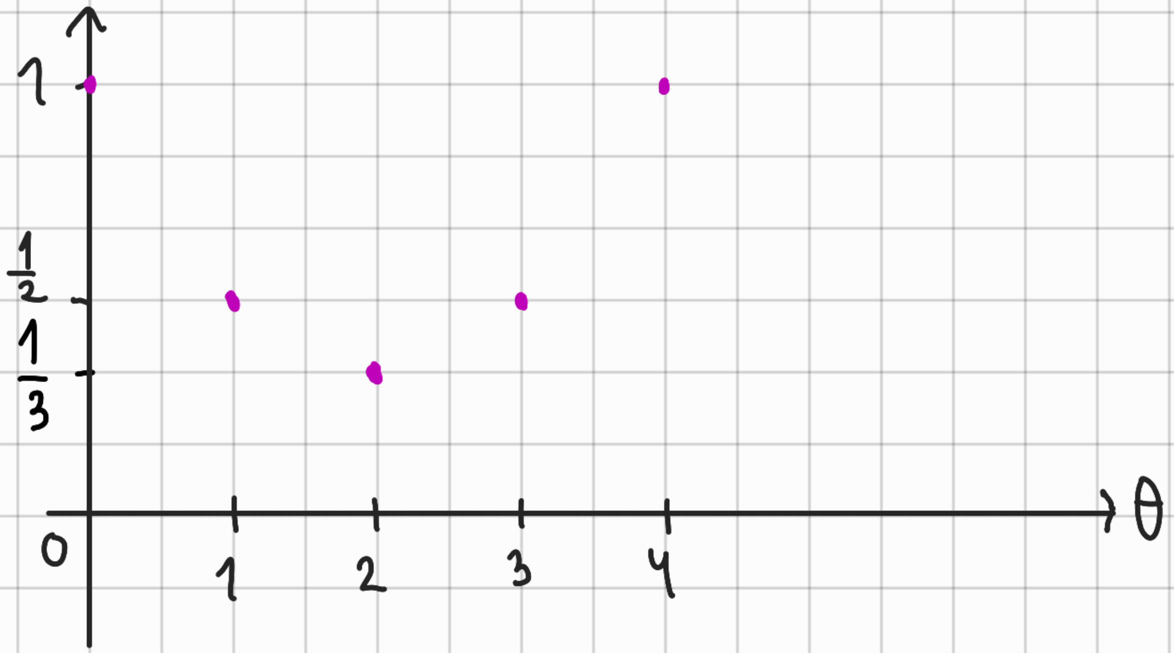
Para $\theta = 4$

$$\mathbb{P}_4(\overline{C}) = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{máximo } \mathbb{P}(\text{"Error tipo II"}) = \frac{1}{2}}$$

$(C^{s/r})$

$$\pi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\text{Rechazar } H_0) = \mathbb{P}_\theta(C) = \frac{\binom{\theta}{2} + \binom{4-\theta}{2}}{\binom{4}{2}}$$



(a $^{c/r}$)

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}(\text{"Rechazar } H_0\text{"})$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=2}\left(\text{"Extraigo dos bolas del mismo color"}\right) = \mathbb{P}(RR \cup VV) = \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(VV) =$$

$$= \mathbb{P}(R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(V)\mathbb{P}(V) = \left[\frac{\theta}{4} \cdot \frac{\theta}{4} + \frac{4-\theta}{4} \cdot \frac{4-\theta}{4}\right]_{\theta=2} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

(b $^{c/r}$)

$$\mathbb{P}(\text{"Error de tipo II"}) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_1}(\underbrace{\text{"Extraer 2 bolas de} \neq \text{color"}}_{\overline{C}})$$

<u>Caso $\theta = 0$</u>

$$\mathbb{P}_0(\overline{C}) = 0$$

<u>Caso $\theta = 4$</u>

$$\mathbb{P}_4(\overline{C}) = 0$$

Caso $\theta = 1$

$$\mathbb{P}_1(\bar{C}) = \mathbb{P}(RV) + \mathbb{P}(VR) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Caso $\theta = 3$

$$\mathbb{P}_3(\bar{C}) = \frac{3}{8}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{Máxima } \mathbb{P}(\text{"Error tipo II"}) = \frac{3}{8}}$$

$(C^{c/r})$

$$\pi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\text{Rechazar } H_0) = \frac{\theta^2}{16} + \frac{(4-\theta)^2}{16}$$