PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Primer recuperatorio — Primer cuatrimestre – 2018

Duración: 4 horas. — 16/VI/18 – 9:00 hs.

Curso:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Se colocarán 10 bolas en 6 urnas. Suponiendo que las bolas son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables calcular la probabilidad de que al menos una urna quede vacía.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.16**] Designamos mediante A al evento "al menos una urna queda vacía". Queremos calcular $\mathbf{P}(A)$.

Sea Ω el espacio muestral correspondiente a todas las configuraciones distintas que se obtienen al colocar 10 bolas indistinguibles en 6 urnas. Como todas las configuraciones distintas son equiprobables, tenemos que

$$\mathbf{P}(\Lambda) = \frac{|\Lambda|}{|\Omega|}, \qquad \Lambda \subset \Omega,$$

donde $|\Lambda|$ representa la cantidad de elementos del conjunto Λ.

Si representamos las 10 bolas por estrellas e indicamos las 6 urnas por los espacios determinados por 5 barras, queda claro que la cantidad de configuraciones distintas es igual a la cantidad de formas de elegir 10 lugares de 15. Por lo tanto,

$$|\Omega| = \binom{15}{10} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11 = 3003.$$

Para calcular la cantidad de elementos del evento A observamos que A^c es el evento "ninguna urna queda vacía", esta condición impone la restricción que 6 estrellas deben estar separadas por las 5 barras: $*|*|*|*|*|*$. El problema se reduce a contar la cantidad de configuraciones distintas que se pueden obtener al colocar 4 bolas en 6 urnas. De allí que

$$|A^c| = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126.$$

En consecuencia, $|A| = |\Omega| - |A^c| = 3003 - 126 = 2877$. Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2877}{3003} = 0.958.$$

□

2. En un proceso de elaboración de maderas se producen dos tipos de fallas: de corte y de lijado. Las cantidades de fallas de corte y de lijado en cada pieza, X e Y, respectivamente, son variables aleatorias independientes con funciones de probabilidad

$$p_X(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2^x}{x!},\ x \in \{0, 1, 2\}; \quad p_Y(y) = \frac{1}{13} \cdot \frac{3^y}{y!},\ y \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Sabiendo que una pieza tiene exactamente dos fallas calcular la probabilidad de que sean fallas de corte.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.25**] La cantidad de fallas de cada pieza de madera elaborada es la suma de las cantidades de fallas de corte y de lijado: $X+Y$. Queremos calcular $p := \mathbf{P}(X = 2|X+Y = 2)$.

Usando la definición de probabilidad condicional, y observando que

$$\{X+Y=2\} = \bigcup_{y=0}^{2} \{X = 2-y, Y = y\},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X=2|X+Y=2) &= \frac{\mathbf{P}(X=2, X+Y=2)}{\mathbf{P}(X+Y=2)} = \frac{\mathbf{P}(X=2, Y=0)}{\mathbf{P}(X+Y=2)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(X=2, Y=0)}{\sum_{y=0}^{2} \mathbf{P}(X=2-y, Y=y)}. \end{aligned}$$

Como X e Y son variables aleatorias independientes, su función de probabilidad conjunta será

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X=x, Y=y) &= \mathbf{P}(X=x) \cdot \mathbf{P}(Y=y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2^x}{x!}\right) \cdot \left(\frac{1}{13} \cdot \frac{3^y}{y!}\right) \\ &= \frac{2^x \cdot 3^y}{65 \cdot x! \cdot y!}. \end{aligned}$$

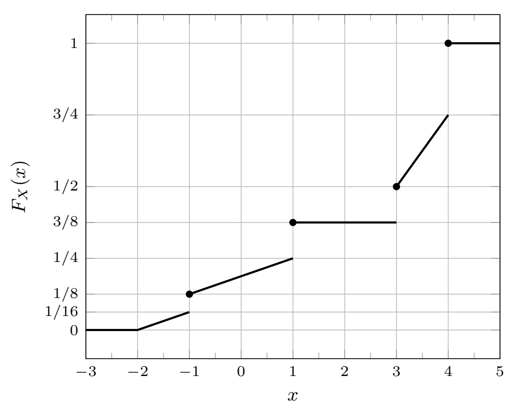
En consecuencia,

$$\frac{\mathbf{P}(X=2, Y=0)}{\sum_{y=0}^{2} \mathbf{P}(X=2-y, Y=y)} = \frac{\frac{2^2 \cdot 3^0}{65 \cdot 2! \cdot 0!}}{\frac{2^2 \cdot 3^0}{65 \cdot 2! \cdot 0!} + \frac{2^1 \cdot 3^1}{65 \cdot 1! \cdot 1!} + \frac{2^0 \cdot 3^2}{65 \cdot 0! \cdot 2!}} = \frac{2}{2+6+\frac{9}{2}} = \frac{4}{25}.$$

$\square$

---

3. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \le x)$ tiene el siguiente gráfico:



Calcular $\mathbf{E}[X^2 | -1 < X \le 3]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.2** y **Ejercicio 3.1**] Por una parte, observamos que la función de distribución de X es discontinua en los puntos del conjunto $\mathbb{A} = \{-1, 1, 3, 4\}$ y que sus saltos en esos puntos miden $1/16, 1/8, 1/8, 1/4$, respectivamente. De allí, se deduce que

$$\mathbf{P}(X=-1) = \frac{1}{16}, \quad \mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(X=4) = \frac{1}{4}.$$

Por otra parte, observamos que la derivada de $F_X(x)$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ es

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{16}\mathbf{1}\{-2 < x < -1\} + \frac{1}{16}\mathbf{1}\{-1 < x < 1\} + \frac{1}{4}\mathbf{1}\{3 < x < 4\}.$$

Para calcular $\mathbf{E}[X^2|-1<X\leq 3]$ usamos la identidad

$$\mathbf{E}[X^2|-1<X\leq 3]=\frac{\mathbf{E}[X^2\mathbf{1}\{-1<X\leq 3\}]}{\mathbf{P}(-1<X\leq 3)}.$$

Para calcular el numerador recordamos que la expresión general de la esperanza de funciones de X es

$$\mathbf{E}[g(X)]=\int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}} g(x)\cdot\frac{dF_X(x)}{dx}\,dx+\sum_{x\in\mathbb{A}} g(x)\cdot\mathbf{P}(X=x).$$

Evaluando esa expresión en $g(x)=x^2\mathbf{1}\{-1<x\leq 3\}$ obtenemos

$$\mathbf{E}[X^2\mathbf{1}\{-1<X\leq 3\}]=\int_{-1}^{1} x^2\cdot\frac{1}{16}\,dx+1^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}+\frac{10}{8}=\frac{1}{24}+\frac{5}{4}=\frac{31}{24}.$$

Para calcular el denominador recordamos que $\mathbf{P}(a<X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$. De allí que

$$\mathbf{P}(-1<X\leq 3)=F_X(3)-F_X(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

Finalmente,

$$\mathbf{E}[X^2|-1<X\leq 3]=\frac{31/24}{3/8}=\frac{31}{9}.$$

□

---

4. Un objeto se produce en una línea de montaje mediante dos procesos consecutivos independientes. En minutos, cada proceso se realiza en un tiempo exponencial de media 5. Calcular la probabilidad de que el primer proceso consuma más de la mitad del tiempo que se necesita para elaborar el objeto.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.14 (b)**] El tiempo necesario para elaborar el objeto es X_1+X_2, donde X_1 y X_2 son los tiempos consumidos por el primer y el segundo proceso en la elaboración del mismo. Queremos calcular $\mathbf{P}(X_1>\frac{1}{2}(X_1+X_2))$.

Observando que $X_1>\frac{1}{2}(X_1+X_2)\iff X_1>X_2\iff \text{mín}(X_1,X_2)=X_2$, tenemos

$$\mathbf{P}\left(X_1>\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right)=\mathbf{P}(\text{mín}(X_1,X_2)=X_2),$$

y como X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes con distribuciones exponenciales de intensidad $1/5$, resulta que

$$\mathbf{P}\left(X_1>\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right)=\frac{1/5}{1/5+1/5}=\frac{1}{2}.$$

□

---

5. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(-1,1)$ y sea Y una variable aleatoria tal que $\mathbf{E}[Y|X]=X^3-1$. Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.15**] La ecuación de la recta de regresión de Y dada X es

$$y=\frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\mathbf{var}(X)}\,(x-\mathbf{E}[X])+\mathbf{E}[Y].$$

De la relación $X\sim\mathcal{U}(-1,1)$ sabemos que $\mathbf{E}[X]=0$ y $\mathbf{var}(X)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Como $\mathbf{E}[X]=0$, tenemos que $\mathbf{cov}(X,Y)=\mathbf{E}[XY]$. Para calcular $\mathbf{E}[Y]$ y $\mathbf{E}[XY]$ usamos las propiedades de la esperanza condicional:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]] = \mathbf{E}[X^3 - 1] = \mathbf{E}[X^3] - 1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3\,dx - 1 = -1, \\
\mathbf{E}[XY] &= \mathbf{E}[X\mathbf{E}[Y|X]] = \mathbf{E}[X^4 - X] = \mathbf{E}[X^4] - \mathbf{E}[X] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta de regresión de Y dada X es

$$y = \frac{3}{5}x - 1.$$

$\square$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Primer recuperatorio — Primer cuatrimestre – 2018
Duración: 4 horas. — 16/VI/18 – 9:00 hs.

Curso:

Apellido y Nombres:

Padrón:

---

1. Se colocarán 10 bolas en 6 urnas. Suponiendo que las bolas son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables calcular la probabilidad de que al menos una urna quede vacía.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.16**] Designamos mediante A al evento "al menos una urna queda vacía". Queremos calcular $\mathbf{P}(A)$.

Sea Ω el espacio muestral correspondiente a todas las configuraciones distintas que se obtienen al colocar 10 bolas indistinguibles en 6 urnas. Como todas las configuraciones distintas son equiprobables, tenemos que

$$\mathbf{P}(\Lambda) = \frac{|\Lambda|}{|\Omega|}, \qquad \Lambda \subset \Omega,$$

donde $|\Lambda|$ representa la cantidad de elementos del conjunto Λ.

Si representamos las 10 bolas por estrellas e indicamos las 6 urnas por los espacios determinados por 5 barras, queda claro que la cantidad de configuraciones distintas es igual a la cantidad de formas de elegir 10 lugares de 15. Por lo tanto,

$$|\Omega| = \binom{15}{10} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11 = 3003.$$

Para calcular la cantidad de elementos del evento A observamos que A^c es el evento "ninguna urna queda vacía", esta condición impone la restricción que 6 estrellas deben estar separadas por las 5 barras: $*|*|*|*|*|*$. El problema se reduce a contar la cantidad de configuraciones distintas que se pueden obtener al colocar 4 bolas en 6 urnas. De allí que

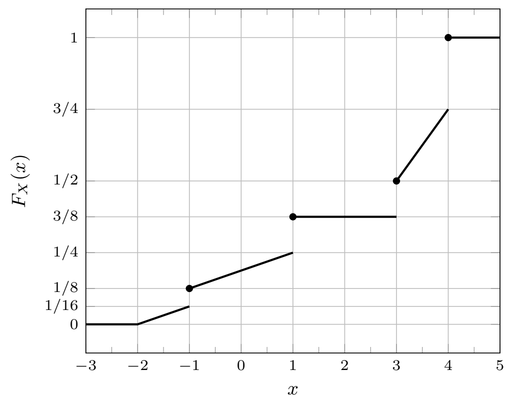
$$|A^c| = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126.$$

En consecuencia, $|A| = |\Omega| - |A^c| = 3003 - 126 = 2877$. Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2877}{3003} = 0.958.$$

□

2. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ tiene el siguiente gráfico:



Calcular $\mathbf{E}[X^2 | -1 < X \leq 3]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.2** y **Ejercicio 3.1**] Por una parte, observamos que la función de distribución de X es discontinua en los puntos del conjunto $\mathbb{A} = \{-1, 1, 3, 4\}$ y que sus saltos en esos puntos miden $1/16, 1/8, 1/8, 1/4$, respectivamente. De allí, se deduce que

$$\mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{16}, \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(X = 4) = \frac{1}{4}.$$

Por otra parte, observamos que la derivada de $F_X(x)$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ es

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{16}\mathbf{1}\{-2 < x < -1\} + \frac{1}{16}\mathbf{1}\{-1 < x < 1\} + \frac{1}{4}\mathbf{1}\{3 < x < 4\}.$$

Para calcular $\mathbf{E}[X^2 | -1 < X \leq 3]$ usamos la identidad

$$\mathbf{E}[X^2 | -1 < X \leq 3] = \frac{\mathbf{E}[X^2 \mathbf{1}\{-1 < X \leq 3\}]}{\mathbf{P}(-1 < X \leq 3)}.$$

Para calcular el numerador recordamos que la expresión general de la esperanza de funciones de X es

$$\mathbf{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}} g(x) \cdot \frac{dF_X(x)}{dx}\, dx + \sum_{x \in \mathbb{A}} g(x) \cdot \mathbf{P}(X = x).$$

Evaluando esa expresión en $g(x) = x^2 \mathbf{1}\{-1 < x \leq 3\}$ obtenemos

$$\mathbf{E}[X^2 \mathbf{1}\{-1 < X \leq 3\}] = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{16}\, dx + 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{10}{8} = \frac{1}{24} + \frac{5}{4} = \frac{31}{24}.$$

Para calcular el denominador recordamos que $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$. De allí que

$$\mathbf{P}(-1 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Finalmente,

$$\mathbf{E}[X^2 | -1 < X \leq 3] = \frac{31/24}{3/8} = \frac{31}{9}.$$

$\square$

3. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(-1, 1)$ y sea Y una variable aleatoria tal que $\mathbf{E}[Y|X] = X^3 - 1$. Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.15**] La ecuación de la recta de regresión de Y dada X es

$$y = \frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\mathbf{var}(X)}(x - \mathbf{E}[X]) + \mathbf{E}[Y].$$

De la relación $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$ sabemos que $\mathbf{E}[X] = 0$ y $\mathbf{var}(X) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Como $\mathbf{E}[X] = 0$, tenemos que $\mathbf{cov}(X,Y) = \mathbf{E}[XY]$. Para calcular $\mathbf{E}[Y]$ y $\mathbf{E}[XY]$ usamos las propiedades de la esperanza condicional:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]] = \mathbf{E}[X^3 - 1] = \mathbf{E}[X^3] - 1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3\,dx - 1 = -1,\\
\mathbf{E}[XY] &= \mathbf{E}[X\mathbf{E}[Y|X]] = \mathbf{E}[X^4 - X] = \mathbf{E}[X^4] - \mathbf{E}[X] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta de regresión de Y dada X es

$$y = \frac{3}{5}x - 1.$$

□

---

4. Meteoro circula en el *Mach 5* por una autopista cuyos radares de velocidad están distribuidos de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad 1/25 por km. El *Mach 5* detecta cada radar con probabilidad 0.985 independientemente de todo lo demás. Cuando detecta un radar, Meteoro se asegura de circular a la velocidad máxima permitida, pero cuando no lo detecta circula en exceso de velocidad. Cada vez que pasa por un radar en exceso de velocidad recibe una multa de \$4000. Calcular la probabilidad de que al recorrer 400 km Meteoro reciba más de \$4000 en multas.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 7.17**] Sea Σ la cantidad de \$ que Meteoro recibirá en multas al recorrer 400 km de la autopista en su *Mach 5*. Queremos calcular $\mathbf{P}(\Sigma > 4000)$.

Atento a las condiciones del tránsito, Meteoro recibirá multas por \$ $4000N$, donde N es la cantidad de radares no detectados por el *Mach 5* mientras recorre los 400 km de la autopista. Como $\Sigma = 4000N$, el problema se reduce a calcular $\mathbf{P}(N > 1)$. De acuerdo con el *Teorema de coloreo y adelgazamiento*, la distribución de los radares no detectados por el *Mach 5* esta regulada por un proceso de Poisson de intensidad $(1 - 0.985)\cdot(1/25) = 0.015/25$ por km. En consecuencia, N tiene la distribución de Poisson de media $(0.015/25)\cdot 400 = 0.015\cdot 16 = 0.24$. Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(\Sigma > 4000) = \mathbf{P}(N > 1) = 1 - \mathbf{P}(N \leq 1) = 1 - e^{-0.24}(1 + 0.24) \approx 0.0246.$$

□

---

5. Ergueta reparte catálogos de productos de limpieza entre los vecinos del barrio. Por cada catálogo repartido, su potencial cliente le compra \$400 con probabilidad 0.1, \$300 con probabilidad 0.4, o no le compra nada con probabilidad 0.5. Estimar la mínima cantidad de catálogos que deberá repartir Ergueta para que la probabilidad de obtener un ingreso de no menos de \$7000 sea mayor que 0.95.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 8.19** y **Ejercicio 8.22**] Indicamos mediante X_i, $i = 1, \dots, n$, el ingreso (en \$) obtenido por Ergueta por el i-catálogo repartido. Queremos hallar el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 7000\right) \geq 0.95.$$

Utilizando que $\mathbf{P}(X_i = 400) = 0.1$, $\mathbf{P}(X_i = 300) = 0.4$, $\mathbf{P}(X_i = 0) = 0.5$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_i] &= 400\cdot(0.1) + 300\cdot(0.4) = 160,\\
\mathbf{var}(X_1) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 400^2\cdot(0.1) + 300^2\cdot(0.4) - 160^2 = 26400.
\end{aligned}$$

De acuerdo con el *Teorema central del límite* tenemos que

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \geq z\right) \approx 1 - \Phi(z),$$

donde $\mu = 160$ y $\sigma^2 = 26400$. En consecuencia, cualesquiera sean los valores $s \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0, 1)$ vale que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq s\right) \geq 1 - \alpha \quad &\iff \quad 1 - \Phi\left(\frac{s - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \geq 1 - \alpha \iff \Phi\left(\frac{s - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \leq \alpha \\
&\iff \quad \frac{s - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq z_\alpha \iff s - n\mu \leq z_\alpha \sqrt{n}\sigma \\
&\iff \quad \mu n + z_\alpha \sigma \sqrt{n} - s \geq 0 \iff \sqrt{n} \geq \frac{-z_\alpha \sigma + \sqrt{z_\alpha^2 \sigma^2 + 4\mu s}}{2\mu} \\
&\iff \quad n \geq \left(\frac{-z_\alpha \sigma + \sqrt{z_\alpha^2 \sigma^2 + 4\mu s}}{2\mu}\right)^2.
\end{aligned}$$

Poniendo $s = 7000$ y $\alpha = 0.05$ en las desigualdades anteriores, y usando que $\mu = 160$, $\sigma^2 = 26400$ y $z_{0.05} = -1.6449$, se concluye que

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 7000\right) \geq 0.95 \iff n \geq \left(\frac{267.2646 + \sqrt{4551430}}{320}\right)^2 = (7.5021)^2 = 56.2815.$$

Por lo tanto, Ergueta deberá repartir como mínimo 57 catálogos. $\square$