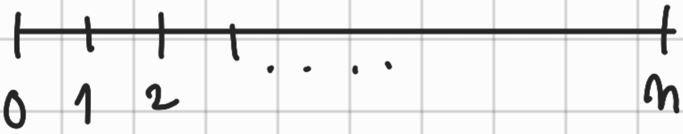
9.3 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución Poisson(λ) y sea $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Hallar la distribución de $\mathbf{X}_n | T = t$ y deducir que T es un estadístico suficiente para λ.

Se puede hacer por definición, por conocimiento de $X_n | T = t$ (proceso de Poisson) o por

$X \sim Poi(\lambda)$ "X_n" $= \underline{X} = (X_1, \dots X_n)$ $X_i \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$

Ver que $\underline{X} \mid \sum X_i = t = (X_1, \dots, X_n) \mid \sum_i X = t$

Ejemplo:



X_i: # ero en la hora 'i'

$(X_1, \dots, X_n) \mid \underbrace{\sum X_i}_{\text{total}} = t$ $\sim$ Multinomial$\left(t, \frac{\cancel{\lambda}}{n\cancel{\lambda}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots\right)$

no depende de λ!

$\Downarrow$

$\sum X_i$ es suficiente para λ

$$\Rightarrow \boxed{\underline{X} \mid T = t \sim \mathcal{M}\left(t, \frac{1}{n}, \dots\right) \Rightarrow \text{Estadístico suficiente}}$$

Otra forma:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x) = \frac{e^{-n\lambda}\,\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\,\mathbb{1}\{x_i \geq 0\}$$

Por teorema de factorización

$$g(T(\underline{x}),\lambda) = e^{-n\lambda}\,\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$h(\underline{x}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\,\mathbb{1}\{x_i \geq 0\}$$

$\Longrightarrow$

Estadístico suficiente

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

9.4 Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son familias exponenciales a 1 parámetro: (**a**) Bernoulli(p); (**b**) Pascal($4, p$); (**c**) Poisson(λ); (**d**) Exponencial(λ).

(a)

$X \sim \mathcal{B}er(p)$

$$f_p(x) = p^x (1-p)^{1-x} \mathbb{1}\{x \in \{0,1\}\}$$

$$= (1-p) \left(\frac{p}{1-p}\right)^x \mathbb{1}\{x \in \{0,1\}\}$$

$$= \underbrace{(1-p)}_{A(p)} e^{x \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)} \underbrace{\mathbb{1}\{x \in \{0,1\}\}}_{h(x)}$$

$$C(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$r(x) = x$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Es familia Exponencial}}$

(b)

$X \sim \mathrm{Par}(4, \theta)$

$$f_\theta = \frac{\theta 4^\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}\{x>4\}, \quad \theta>0$$

$$= \underbrace{\theta 4^\theta}_{A(\theta)} e^{-(\theta+1)\ln x} \underbrace{\mathbb{1}\{x>4\}}_{h(x)}$$

$C(\theta) = -\theta - 1$

$r(x) = \ln x$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Es familia Exponencial}}$

(d)

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow f_\lambda(x) = \underbrace{\lambda}_{A(\lambda)} e^{-\lambda x} \overbrace{\mathbb{1}\{x>0\}}^{h(x)}, \quad K=1$$

$C(\lambda) = -\lambda$, $r_1(x) = x$ ó $C(\lambda) = \lambda$, $r_1(x) = -x$ ó $C(\lambda) = 2\lambda$, $r_1(x) = \frac{-x}{2}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Es familia Exponencial}}$

(c)

$X \sim \mathcal{P}oi(\mu)$

$c(\mu) = \log \mu$

$r(x) = x$

$$f_\mu(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \mathbb{1}\{x \in \mathbb{N}_0\} = \underbrace{\frac{1}{x!} \mathbb{1}\{x \in \mathbb{N}_0\}}_{h(x)} e^{x \log \mu} \underbrace{e^{-\mu}}_{A(\mu)}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Es familia Exponencial}}$

9.5 Una moneda tiene una probabilidad de cara p, $p \in \{2/5, 4/5\}$. En 10 lanzamientos de la moneda se observaron exactamente 3 caras. Estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que en otros tres lanzamientos se observe exactamente una cara.

Una sola muestra

X: Cant de caras en 10 lanzamientos, $X \sim \text{Bin}(10, p)$

$$f_p(x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}$$

Muestra: $X = 3$

Una sola muestra

mayor verosimilitud

$$\Rightarrow L(x=3, 2/5) = f_{2/5}(3) = \binom{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^{10-3} = 0{,}2150$$

$$\Rightarrow L\left(x=3, \frac{4}{5}\right) = f_{4/5}(3) = \binom{10}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^{10-3} = 0{,}78643 \cdot 10^{-3}$$

0.

Propiedad: Principio de invariancia

si $\hat{\theta}$ es estimador MV de θ y $\alpha(\theta)$ es función biyectiva

$$\Rightarrow \widehat{\alpha(\theta)}_{MV} = \alpha(\hat{\theta}_{MV})$$

$$\lambda = \mathbb{P}(1C \text{ en } 3 \text{ lanzamientos}) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{3-1} = \frac{54}{125}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Rta: } \frac{54}{125}}$$

9.6 La cantidad de accidentes de tránsito por semana en la intersección de Paseo Colón y Estados Unidos tiene una distribución de Poisson de media λ.

(**a**) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de λ basado en una muestra aleatoria de la cantidad de accidentes durante n semanas. Mostrar que se trata de un estimador insesgado para λ y hallar la expresión de su error cuadrático medio.

(**b**) En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

En virtud de la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ y estimar la probabilidad de que en la semana del 24 de diciembre de 2017 no ocurra ningún accidente en la mencionada esquina.

a) X: # accidentes en 1 semana $\sim P(\lambda)$

m.a. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ busco EMV

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \mathbb{1}\{x_i \in \mathbb{N}_0\}$$

esto vale 1 ya que los X_i ya son un numero en los naturales

$$= \lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\overbrace{\mathbb{1}\{x_i \in \mathbb{N}_0\}}}{x_i!}$$

Buscamos el máximo de $L(\lambda)$ en $\underbrace{\{\lambda > 0\}}$

Como no me dicen en que espacio parametrico uso el natural de la Poisson

Una estrategia cuando la familia es regular es maximizar $\log L(\lambda)$

En los indicadores no hay λ

$$\log L(\lambda) = \left(\sum x_i\right) \log \lambda - n\lambda + \log\left(\frac{\pi\{\dots\}}{x_i!}\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \log L(\lambda) = \sum_1^n x_i \frac{1}{\lambda} - n = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{\sum_1^n x_i}{n} = \overline{x}$$

Pto crítico

Verifico que es máx:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \log L = \underbrace{\sum x_i}_{+} \underbrace{\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)}_{-} < 0 \Rightarrow \text{Es máximo}$$

a la función de λ de x_i, la evaluo en el vector aleatorio

El estimador MV de λ es

$$\Longrightarrow \hat{\lambda}_{MV} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} X_i}{n} = \overline{X}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\lambda}_{MV} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} X_i}{n} = \overline{X}}$$

Vimos que $\hat{\lambda} = \bar{X}$

$\Rightarrow E[\hat{\lambda}] = \lambda \Rightarrow B(\hat{\lambda}) = \lambda - \lambda = 0 \longrightarrow$ Es insesgado

$$\Rightarrow V(\hat{\lambda}) = V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{V(x_i)}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

Entonces:

$$ECM(\hat{\lambda}) = 0 + \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{Es insesgado, } ECM(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n}}$$

(6)

$0, 0, 0 \dots \leftarrow 10$ veces

$1, 1, \dots \longleftarrow 29$ veces

Valor estimado de λ: $\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{100}$

$$= \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 29 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 13 + 5 \cdot 6}{100} = 2{,}12$$

Ahora me piden estimar $\mathbb{P}(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \alpha(\lambda)$ función de λ

Propiedad: Principio de invarianza

si $\hat{\theta}$ es estimador MV de θ y $\alpha(\theta)$ es función biyectiva

$$\Rightarrow \widehat{\alpha(\theta)}_{MV} = \alpha(\hat{\theta}_{MV})$$

Obs: Aún cuando α no sea biy (iny) puede usarse ppio de invarianza

$$\Longrightarrow \widehat{P(X=0)} = e^{-\hat{\lambda}} \text{ evaluando:}$$

El valor estimado es: $\widehat{\mathbb{P}(X=0)} = e^{-2{,}12} = 0{,}12$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\mathbb{P}}(X=0) = 0{,}12}$$

9.7 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución uniforme sobre el intervalo $[0, \theta]$.

(**a**) Hallar un estadístico suficiente para θ basado en $\mathbf{X}_n$.

(**b**) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en $\mathbf{X}_n$.

(**c**) Sea $\hat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ hallado en el inciso anterior. Mostrar que $\mathbf{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \frac{n}{n+1}\theta$ y $\mathbf{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ para concluir que $\hat{\theta}_n$ converge en media cuadrática a θ cuando $n \to \infty$.

(a)

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{U}(0, \theta), \quad f_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\}$$

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\}}$$

$$\mathbb{1}\{\max(x_1, \dots, x_n) < \theta\}$$

$$\mathbb{1}\{\min(x_1, \dots, x_n) > 0\}$$

$$L(\theta) = f_\theta(\underline{x}) = \underbrace{\frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{\max(x_1, \dots, x_n) < \theta\}}_{g(\max(x_1, \dots, x_n), \theta)} \underbrace{\mathbb{1}\{\min(x_1, \dots, x_n) > 0\}}_{h(\underline{x})}$$

Por lo tanto, por teorema de factorización

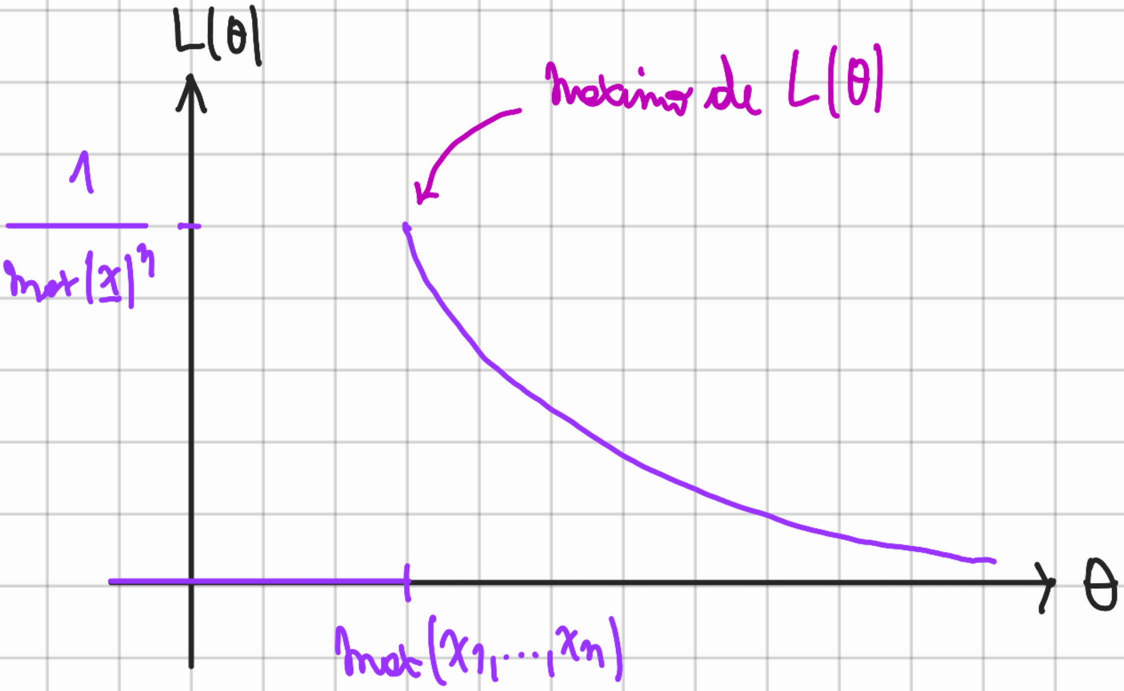
$$\Rightarrow \boxed{T = \max(X_1, \dots, X_n)}$$

(b)

$$\Rightarrow L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{\max(x_1,\dots,x_n) < \theta\} \mathbb{1}\{\min(x_1,\dots,x_n) > 0\}, \quad \theta > 0$$

No puedo derivar (como derivo una $\mathbb{1}$) ni aplicar ln (la $\mathbb{1}$ vale 0 o 1)

Miro el gráfico



$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \max(X_1,\dots,X_n)}$$

(c)

Como se distribui $\hat{\theta}$?

$$F_{\hat{\theta}}(t) = \mathbb{P}(\hat{\theta} \leq t) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq t) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t) \dots \mathbb{P}(X_n \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n$$

$$= F_{X_1}(t)^n$$

$$= \left(\frac{1}{\theta} t\right)^n \mathbb{1}\{t < \theta\} + 1 \, \mathbb{1}\{t \geq \theta\}$$

$$f_{\hat{\theta}}(t) = \frac{d}{dt} F_{\hat{\theta}} = n \left(\frac{1}{\theta} t\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < t < \theta\}$$

$$= \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbb{1}\{0 < t < \theta\} \longrightarrow \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt = 1 \checkmark$$

$$E[\hat{\theta}] = \int_0^\theta t \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt = \frac{n}{\theta^n} \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^\theta \right)$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{E[\hat{\theta}] = \frac{n}{n+1}\theta}$$

$$Var(\hat{\theta}) = E(\theta^2) - E(\theta)^2$$

$$E(\theta^2) = \int_0^\theta t^2 \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^{n+1} dt = \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+2}}{n+2}$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$E(\theta)^2 = \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 = \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$$

$$= \frac{n^3 + 2n^2 + n - n^3 - 2n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(\hat{\theta}) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}}$$

Convergencia en media cuadrática:

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\theta}) = 0, \ \forall \theta \in \Theta$$

Error cuadrático medio: $ECM(\hat{\theta}) = B(\hat{\theta})^2 + V(\hat{\theta})$

Sesgo: $B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$

$$B(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+1}\theta - \theta = \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)\theta = \frac{-1}{n+1}\theta$$

$$ECM(\hat{\theta}) = \frac{1}{(n+1)^2}\theta^2 + \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}^{\to 0}\theta^2 + \overbrace{\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}}^{\to 0} = 0$$

$\Rightarrow$ $\hat{\theta}$ converge en media cuadrática a θ cuando $n \to \infty$

9.8 El tamaño, X (en GB), de ciertos archivos es una variable aleatoria cuya densidad es

$$f_\theta(x) = 3\theta^3 x^{-4} \mathbf{1}\{x \geqslant \theta\}, \qquad \theta > 0.$$

(**a**) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de los tamaños de n archivos.

(**b**) Hallar expresiones para la esperanza y la varianza del estimador de máxima verosimilitud de θ.

(**c**) Mostrar que el estimador de máxima verosimilitud de θ converge en media cuadrática al verdadero valor de θ.

(a)

el rango dep de θ

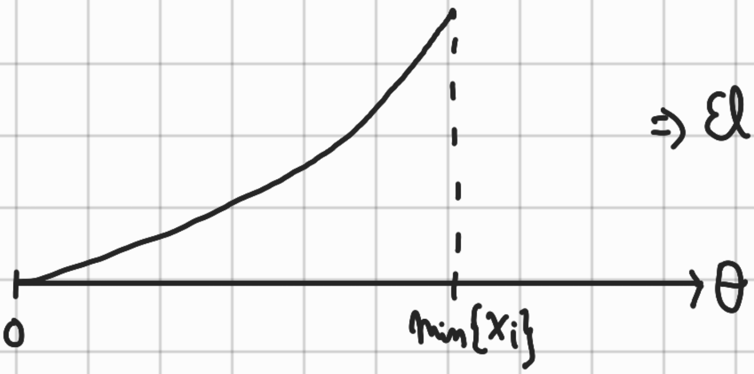
nos fija rango

no puedo usar log

$$L(\theta) = \prod_{i=3}^{n} 3\theta^3 x_i^{-4} \mathbb{1}\{x_i \geq \theta\}$$

$$= 3^n \theta^{3n} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-4} \mathbb{1}\{x_i \geq \theta\}}_{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-4} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \geq \theta\}}_{\mathbb{1}\{\theta \leq \min x_i\}}}$$

$$L(\theta) = \underbrace{3^n}_{\text{cte}} \theta^{3n} \underbrace{\prod_{1}^{n} x_i^{-4}}_{\text{cte respecto de } \theta} \mathbb{1}\{0 \leq \min x_i\}$$



$\Rightarrow$ El máximo de $L(\theta)$ se da en $\min\{x_i\}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MV} = \min\{X_i, i = 1, \dots, n\}}$$

(b)

Busco la F de densidad de $\hat{\theta}_{MV}$, Busco F de distribución

$$F_{\hat{\theta}}(t) = \mathbb{P}(\min\{X_i\} \leq t)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_i\} > t)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)\,\mathbb{P}(X_2 > t) \dots \mathbb{P}(X_n > t)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t)$$

$$\mathbb{P}(X_i > t) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq t) = 1 - \int_{\theta}^{t} 3\theta^3 x^{-4}\,dx$$

$$= 1 - 3\theta^3 \left(-\frac{x^{-3}}{3} \Big|_{\theta}^{t} \right)$$

$$= 1 + \theta^3 (t^{-3} - \theta^{-3}) = 1 + \theta^3 t^{-3} - 1 = \theta^3 t^{-3}$$

$$\Rightarrow F_{\hat{\theta}}(t) = 1 - (\theta^3 t^{-3})^n = (1 - \theta^{3n} t^{-3n})\,\mathbb{1}\{t \leq \theta\},\ \theta > 0$$

$$\Rightarrow f_{\hat{\theta}}(t) = -\theta^{3n}(-3n)\,t^{-3n-1} = 3n\,\theta^{3n}\,t^{-3n-1}\ \mathbb{1}\{\theta \leq t\}$$

$$\Rightarrow E\left[\hat{\theta}_{VM}\right] = \int_{\theta}^{\infty} t \cdot 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n-1}\, dt$$

$$= \int_{\theta}^{\infty} 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n}\, dt$$

$$= \frac{3n\,\theta^{3n}}{(3n-1)\,\theta^{3n-1}} \underbrace{\int_{\theta}^{\infty} \underbrace{(3n-1)\,\theta^{3n-1}\, t^{-3n}}_{\sim \mathrm{Par}(\theta,\, 3n-1)}\, dt}_{=1}$$

$$= \frac{3n\,\theta^{3n}}{(3n-1)\,\theta^{3n-1}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E\left[\hat{\theta}_{VM}\right] = \frac{3n}{3n-1}\,\theta}$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\theta}_{VM}) = E[\hat{\theta}^2_{VM}] - E[\hat{\theta}_{VM}]^2$$

$$E[\hat{\theta}^2_{VM}] = \int_{\theta}^{\infty} t^2 \cdot 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n-1}\, dt$$

$$= \int_{\theta}^{\infty} 3n\,\theta^{3n}\, t^{-3n+1}\, dt$$

$$= \frac{3n\,\theta^{3n}}{(3n-2)\,\theta^{3n-2}} \int_{\theta}^{\infty} \underbrace{(3n-2)\,\theta^{3n-2}\, t^{-3n+1}}_{Pa(\theta,\,3n-2)}\, dt$$

$$= \frac{3n\,\theta^{3n}}{(3n-2)\,\theta^{3n-2}} = \frac{3n}{3n-2}\,\theta^2$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\theta}_{VM}) = \frac{3n}{3n-2}\,\theta^2 - \left(\frac{3n}{3n-1}\,\theta\right)^2 = \left(\frac{3n}{3n-2} - \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^2\right)\theta^2$$

$$= \frac{3n}{27n^3 - 36n + 15n - 2}\,\theta^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(\hat{\theta}_{VM}) = \frac{3n}{27n^3 - 36n + 15n - 2}\,\theta^2}$$

(c)

Convergencia en media cuadrática:

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\theta}) = 0 \,, \; \forall \theta \in \Theta$$

Error cuadrático medio: $ECM(\hat{\theta}) = B(\hat{\theta})^2 + V(\hat{\theta})$

Sesgo: $B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$

$$\Rightarrow B(\hat{\theta}) = \frac{3n}{3n-1}\theta - \theta = \left(\frac{3n}{3n-1} - 1\right)\theta = \frac{1}{3n-1}\theta$$

$$\Rightarrow B(\hat{\theta})^2 = \left(\frac{1}{3n-1}\right)^2 \theta^2$$

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{3n-1}\right)}_{\to 0}\theta^2 + \underbrace{\frac{3n}{27n^3 - 36n^2 + 15n - 2}}_{\to 0}\theta^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El estimador } \hat{\theta}_{VM} \text{ converge en media cuadrática a } \theta}$

9.9 La duración, X, en años de ciertos discos rígidos tiene la distribución Pareto con densidad

$$f_\theta(x) = \theta x^{-(\theta+1)}\mathbf{1}\{x > 1\}, \qquad \theta > 1.$$

(a) Usar el *criterio de factorización de Neyman-Fisher* para hallar un estadístico suficiente para θ, basado en una muestra aleatoria de la duración de n discos.

(b) Mostrar que las distribuciones f_θ, $\theta > 1$, pertenecen a una familia exponencial y usar esa propiedad para hallar un estadístico suficiente para θ. ¿Cuál es su distribución? :*notar que* $\log X \sim$Exponencial(θ).

(c) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n discos rígidos. Mostrar que se trata de un estimador asintóticamente insesgado y cuya varianza tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

(d) Hallar la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud de θ. : *es fácil ver que* $I(\theta) = \theta^{-2}$.

(a)

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{-(\theta+1)}\, \mathbb{1}\{x>1\}, \quad \theta > 1$$

Muestra: $(X_1, \dots X_n) \overset{iid}{\sim} \text{Par}(1,\theta)$

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x) = \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\theta+1)} \mathbb{1}\{x_i>1\} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-(\theta+1)} \cdot \prod_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i>1\}$$

$$= \underbrace{\theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-\theta}}_{g(r(\underline{x}),\theta)} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-1} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i>1\}}_{h(x)}$$

Por teorema de factorización

$$\Longrightarrow \boxed{T = \prod_{i=1}^n X_i}$$

(6)

$$f(\theta) = \theta\, x^{-(\theta+1)}\, \mathbb{1}\{x>1\}$$

$$= \underbrace{\theta}_{A(\theta)}\, e^{-(\theta+1)\ln x}\, \underbrace{\mathbb{1}\{x>1\}}_{h(x)}$$

$c(\theta) = -\theta-1$

$r(x) = \ln x$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Pertenecen a una familia exponencial}}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{T = \ln X \text{ es un estadístico suficiente para } \theta}$

¿Distribución de T?

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(\ln X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq e^t)$$

$$= \int_1^{e^t} \theta\, x^{-\theta-1}\, dx = \cancel{\theta}\, \frac{x^{-\theta}}{-\cancel{\theta}} \Big|_1^{e^t} = \underbrace{1^{-\theta}}_{=1} - e^{-t\theta}\, \mathbb{1}\{t \geq 0\}$$

$$f_T(t) = \frac{dF_T}{dt} = t\, e^{-t\theta}\, \mathbb{1}\{t \geq 0\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{T_i \sim Exp(\theta)}$$ ← lo pongo el i porque es es estadístico cuando solo tengo 1 muestra

¿Estadístico suficiente para θ basado en una muestra de n discos?

$$\Longrightarrow \boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i} \sim \Gamma(n, \theta)$$

↑ suma de exponenciales independientes

(c)

Los $\prod$ se van porque los x valen un número

$$L(\theta) = F_\theta(\underline{x}) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-\theta} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}$$

$$\ln(L(\theta)) = n \ln(\theta) - \theta \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\frac{d \ln(L(\theta))}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \underbrace{\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)}_{= \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)}}$$

$$E\left[\hat{\theta}_{MV}\right] = E\left[\frac{n}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)}_{=Y}}\right] = E\left[\frac{n}{Y}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{y} f_Y(y)\, dy$$

$Y \sim \Gamma(n, \theta)$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y} \frac{\theta^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\theta y}\, dy = \frac{n}{n-1}\theta \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^{n-1}}{(n-2)!} y^{n-2} e^{-\theta y}\, dy}_{=1}$$

$$\rightarrow E\left[\hat{\theta}_{MV}\right] = \frac{n}{n-1}\theta \neq \theta \quad \Rightarrow \boxed{\text{no es insesgado}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\theta = \theta \Rightarrow \boxed{\text{Es un estimador sesgado asintóticamente}}$$

$$Var(\hat{\theta}_{MV}) = E\left[\hat{\theta}_{MV}^2\right] - E\left[\hat{\theta}_{MV}\right]^2$$

$$E\left[\hat{\theta}_{MV}^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{y^2} \frac{\theta^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\theta y} dy$$

$$= \frac{n^2\theta^2}{(n-2)(n-1)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^{n-2}}{(n-3)!} y^{n-3} e^{-\theta y} dy}_{=1}$$

$$Var(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{n^2\theta^2}{(n-2)(n-1)} - \left(\frac{n}{n-1}\theta\right)^2$$

Cuando $n\to\infty$ $$= \theta^2\left(\underbrace{\frac{n^2}{(n-2)(n-1)}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{n^2}{(n-1)^2}}_{\to 1}\right) \longrightarrow 0$$

(d)

$$I(\theta) = -E\left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln\left(f_\theta(X)\right)\right]$$

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{-(\theta+1)}\, \mathbb{1}\{x>1\}, \quad \theta>1$$

$$\ln f_\theta = \ln\theta - (\theta+1)\ln x$$

$$\frac{d \ln f_\theta}{d\theta} = \frac{1}{\theta} - \ln x \quad , \quad \frac{d^2 \ln f_\theta}{d\theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$I(\theta) = -E\left[-\frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2} \quad , \text{con } q(\theta)=\theta, \; q'(\theta)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{\theta^2}}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)}$$

$\cancel{\theta}$

$$\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{n}\right)$$

9.10 La duración en años de cierto tipo de dispositivos es una variable aleatoria X con función intensidad $\lambda(x) = 3\theta^{-3}x^2\mathbf{1}\{x > 0\}$.

(a) Hallar un estadístico suficiente para θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n dispositivos.

(b) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n dispositivos.

(c) Usando los números aleatorios

$$0.186,\ 0.178,\ 0.488,\ 0.255,\ 0.392,\ 0.234,\ 0.597,\ 0.205,\ 0.611,\ 0.651.$$

simular 10 valores de X cuando $\theta = 1$ y en base a esa información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(d) Se pusieron a prueba 10 de esas máquinas y se obtuvieron los siguientes tiempos:

$$2.00,\ 5.48,\ 2.43,\ 1.90,\ 5.85,\ 1.58,\ 2.30,\ 2.87,\ 3.62,\ 2.71.$$

Basándose en la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que una máquina del mismo tipo funcione sin fallas más de dos años y medio.

(a)

X: Duración en años de ciertos dispositivos ; $\lambda(x) = 3\theta^{-3}x^2\,\mathbb{1}\{x>0\}$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)\,dt}\,\mathbb{1}\{x\geq 0\} = \left(1-e^{-x^3\theta^{-3}}\right)\mathbb{1}\{x\geq 0\}$$

→ Continua

CA: $\displaystyle\int_0^x 3\theta^{-3}t^2\,dt = 3\theta^{-3}\frac{x^3}{3} = x^3\theta^{-3}$

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx} = -e^{-x^3\theta^{-3}}\cdot(-3x^2)\theta^{-3} = 3x^2\theta^{-3}e^{-x^3\theta^{-3}}\,\mathbb{1}\{x\geq 0\}$$

$$L(\theta) = f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} 3x_i^2\theta^{-3}e^{-x_i^3\theta^{-3}} = 3^n\theta^{-3n}\prod_{i=1}^{n}x_i^2\,e^{-\theta^{-3}\sum_{i=1}^{n}x_i^3}$$

$$= \underbrace{\theta^{-3n} \, e^{-\theta^3 \sum_{i=1}^{n} x_i^3}}_{g(r(x),\theta)} \quad \underbrace{3^n \prod_{i=1}^{n} x_i^2}_{h(x)}$$

Por Teorema de factorización:

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^3 \right) \text{ es estadístico suficiente para } \theta}$$

(b)

$$\ln(L(\theta)) = \underbrace{\ln(3^n)}_{\text{cte}} + \underbrace{\ln(\theta^{-3n})}_{= -3n \ln(\theta)} + \underbrace{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)}_{\text{cte}} + (-\theta^{-3}) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}_{\text{cte}}$$

$$\frac{d}{d\theta} \frac{1}{\theta^3} = \frac{-3\theta^2}{\theta^6} = \frac{-3}{\theta^4}$$

$$\frac{d \ln(L(\theta))}{d\theta} = -3n\frac{1}{\theta} + \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 3n\frac{1}{\theta} \implies \theta = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n}\right)^{1/3}$$

Derivo otra vez para ver si es un máximo! $\implies$ Elijo creer

$$\implies \boxed{\hat{\theta}_{MV} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^3}{n}\right)^{1/3}}$$

(c)

0.186, 0.178, 0.488, 0.255, 0.392, 0.234, 0.597, 0.205, 0.611, 0.651. } Estos provienen de una $U(0,1)$

Realizaciones de una VA. $Y \sim U(0,1)$

Como Y es uniforme : $X = F_X^{-1}(Y)$

$x_i = F_X^{-1}(y_i)$

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-x^3\theta^{-3}}\right) \mathbb{1}\{x>0\}$$

$$1 - e^{-x^3\theta^{-3}} = w$$

$$e^{-x^3\theta^{-3}} = 1 - w$$

$$-x^3\theta^{-3} = \ln(1-w)$$

$$x = \sqrt{-\theta^3 \ln(1-w)} \implies x = \sqrt{-\theta^3 \ln(1-y)}$$

Con $\theta = 1$

$y = 0{,}186 \longrightarrow x = 0{,}590$

$y = 0{,}178 \longrightarrow x = 0{,}581$

$y = 0{,}488 \longrightarrow x = 0{,}875$

$y = 0{,}255 \longrightarrow x = 0{,}665$

$y = 0{,}392 \longrightarrow x = 0{,}792$ $\qquad$ $y = 0{,}597 \longrightarrow x = 0{,}969$

$y = 0{,}234 \longrightarrow x = 0{,}644$ $\qquad$ $y = 0{,}205 \longrightarrow x = 0{,}612$

$y = 0{,}611 \longrightarrow x \approx 0{,}981$ $\qquad$ $y = 0{,}651 \longrightarrow x \approx 1{,}017$

Como todos estos x son una muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$

El valor estimado $\hat{\theta}$ de θ para esta muestra es:

$$\hat{\theta} = \left(\frac{0{,}590^3 + 0{,}581^3 + 0{,}875^3 + 0{,}665^3 + 0{,}792^3 + 0{,}969^3 + 0{,}644^3 + 0{,}612^3 + 0{,}981^3 + 1{,}017^3}{10} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = 0{,}807}$$

(d)

Muestra $(x_1, x_2, \ldots x_{10}) =$ 2.00, 5.48, 2.43, 1.90, 5.85, 1.58, 2.30, 2.87, 3.62, 2.71.

Valor estimado $\hat{\theta}$ de θ para esta muestra:

$$\hat{\theta} = \left(\frac{2^3 + 5.48^3 + 2.43^3 + 1.90^3 + 5.85^3 + 1.58^3 + 2.30^3 + 2.87^3 + 3.62^3 + 2.71^3}{10} \right)^{1/3}$$

$$\hat{\theta} = 3{,}687$$

$$\hat{\lambda} = \mathbb{P}(X > 2{,}5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2{,}5) = 1 - \left(1 - e^{-2{,}5^3 \theta^{-3}}\right)$$

Por principio de invarianza:

$$= 1 - \left(1 - e^{-2{,}5^3 (3{,}687)^{-3}}\right)$$

$$= 6{,}20 \cdot 10^{-3} = 0{,}732$$

El valor estimado para $\hat{\lambda}$ por la muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ es:

0,732

9.11 En una mesa electoral votaron 129 ciudadanos. Se extrajeron (sin reposición) 7 sobres al azar de la urna, se examinaron y resultó que el candidato verde obtuvo exactamente 3 votos. Estimar por máxima verosimilitud la cantidad de votos por el candidato verde que había en la urna.

X: # votos verdes en 7 sobres $\sim$ Hipergeométrica $(129, d, 7)$

Dato (muestra observada, sólo 1, no va a haber una productoria en $L(d)$)

$: X_1 = 3$

¿Qué es la verosimilitud? es la probabilidad "de lo que observo" como función de "d"

$$L(d) = \frac{\binom{d}{3}\binom{129-d}{4}}{\binom{129}{7}} \mathbb{1}\left\{\begin{matrix} d \in \mathbb{N} \\ d \geq 3 \\ 129-d \geq 4 \end{matrix}\right\}$$

Truco para hallar máx en una función discreta $\frac{L(d+1)}{L(d)} \geq 1$

$\iff L$ crece

$$\frac{L(d+1)}{L(d)} = \frac{\binom{d+1}{3}\binom{128-d}{4}}{\binom{d}{3}\binom{129-d}{4}} = \frac{\frac{(d+1)!}{\cancel{3!}\,(d-2)!}\;\frac{(128-d)!}{\cancel{4!}\,(124-d)!}}{\frac{d!}{\cancel{3!}\,(d-3)!}\;\frac{(129-d)!}{\cancel{4!}\,(125-d)!}}$$

$$= \frac{\frac{(d+1)\,\cancel{d!}\;\cancel{(128-d)!}}{(d-2)\,\cancel{(d-3)!}\;\cancel{(124-d)!}}}{\frac{\cancel{d!}\;(129-d)\,\cancel{(128-d)!}}{\cancel{(d-3)!}\;(125-d)\,\cancel{(124-d)!}}} = \frac{(d+1)(125-d)}{(d-2)(129-d)}$$

$$\frac{(d+1)(125-d)}{(d-2)(129-d)} \geq 1 \longrightarrow 125d - d^2 + 125 - d \geq 129d - d^2 - 258 + 2d$$

$$\longrightarrow -7d + 383 \geq 0 \longrightarrow d \leq 54{,}71$$

Entonces $L(d+1) \geq L(d)$ se cumple hasta $d = 54$

$$\Rightarrow L(54+1) \geq L(54) \Rightarrow L(55) \geq L(54)$$

Por máxima verosimilitud, la cantidad de votos por el candidato verde es 55

9.12 Mostrar que la familia de distribuciones $\Gamma(\nu, \lambda)$ es una familia exponencial a 2 parámetros. Hallar un estadístico suficiente para (ν, λ) basado en una muestra aleatoria de tamaño n

Con $\theta = [v, \lambda]$. Para cada X_i tenemos que:

$$f_\theta(x) = \frac{\lambda^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}\{x>0\}, \quad v, \lambda > 0$$

$$= \frac{\lambda^v}{\Gamma(v)} e^{-\lambda x + (v-1)\ln x} \mathbb{1}\{x>0\}$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda^v}{\Gamma(v)}}_{A(\theta)} e^{-\lambda x + v \ln x} \underbrace{e^{-\ln x} \mathbb{1}\{x>0\}}_{h(x)}$$

$c_1(\theta) = -\lambda, \; r_1(x) = x$

$c_2(\theta) = v, \; r_2(x) = \ln x$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Es familia exponencial}}$

$\Rightarrow$ $T = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right)$ es suficiente para θ (basado en la m. a. $\underline{X}$)

9.13

(a) Mostrar que la familia de distribuciones $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ puede expresarse en la forma

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2\right),$$

donde $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

(b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Hallar la expresión de la densidad conjunta y mostrar que $T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ es un estadístico suficiente para θ.

(c) Sea $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Mostrar que $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$ y deducir que $T' = (\bar{X}, S^2)$, donde

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

es un estadístico suficiente para θ.

(d) Hallar el estimador de máxima verosimilitud para θ basado en la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$.

(a) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_{\underbrace{(\mu, \sigma^2)}_{=\theta}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma^2)^{1/2}} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \, \mathbb{1}\{x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma^2)^{1/2}} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{1}{\sigma^2}\mu x - \frac{1}{2\sigma^2}\mu^2} \, \mathbb{1}\{x \in \mathbb{R}\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x}}$$

(b)

$$X_1, X_2, \dots X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f_\theta(\hat{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}}_{A(\mu,\theta^2)} \underbrace{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{*}$$

$*$ $c_1 = -\dfrac{1}{2\sigma^2}$; $c_2 = \dfrac{\mu}{\sigma^2}$; $r_1(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $r_2(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$h(\underline{x}) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{T = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)}$$

(c)

Propiedad:

no dinovede

Si $T(\underline{x})$ es suficiente para θ y $T'(\underline{x}) = w(T(\underline{x}))$ con w inyectiva

$\Rightarrow T'$ es suficiente para θ

$$T(\underline{X}) = \Big(\underbrace{\sum_{i}^{n} X_i}_{a} , \underbrace{\sum_{i}^{n} X_i^2}_{b} \Big)$$

$$T'(\underline{X}) = \left(\frac{\sum X_i}{n} , \frac{\sum X_i^2 - n\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)^2}{n-1} \right)$$

Ver que $T' = \left(\frac{a}{n} , \frac{b - a^2/n}{n-1} \right) = w(a,b) = (c,d)$

$$\begin{cases} c = a/n \\ d = \dfrac{b - a^2/n}{n-1} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = nc \\ b = (n-1)d + \dfrac{c^2}{n} \end{cases}$$

se ve que es inyectiva

$$\Longrightarrow \boxed{T' = (\hat{X}, S^2) \text{ es suficiente para } \theta}$$

(d) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$$\underbrace{L(\mu,\sigma^2)}= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x_i - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum x_i}$$

cte

→ 2 parametros ⇒ maximizo función de 2 variables

Primero aplico el logaritmo:

$$\log L(\mu,\sigma^2) = \log \text{cte} - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum x_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log L}{\partial \mu} = -\dfrac{n}{2\sigma^2}2\mu + \dfrac{\sum x_i}{\sigma^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2} + \dfrac{n\mu^2}{2(\sigma^2)^2} + \dfrac{\sum x_i^2}{2(\sigma^2)^2} - \dfrac{\mu\sum x_i}{(\sigma^2)^2} = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $\rightsquigarrow \mu = \dfrac{\sum x_i}{n}$

Ahora voy a la segunda

$$\rightarrow \frac{-n\sigma^2 + n\mu^2 + \sum x_i^2 - 2\mu \sum x_i}{2(\sigma^2)^2} = 0$$

$$-n\sigma^2 + n\frac{(\sum x_i)^2}{n^2} + \sum x_i^2 - 2\frac{\sum x_i}{n}\sum x_i = 0$$

$$n\sigma^2 = \frac{(\sum x_i)^2}{n} + \sum x_i^2 - \frac{2}{n}(\sum x_i)^2 = \sum x_i^2 - \frac{n^2}{n}\underbrace{\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)}_{\bar{X}}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right] = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \left(\bar{X} ; \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n}\right) = \left(\bar{X}, \frac{(n-1)s^2}{n}\right)$$

Ahora veo las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial^2 \mu} = -\frac{n}{\sigma^2} \qquad \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2 \partial \mu} = \frac{n\mu}{\sigma^4} - \frac{\sum x_i}{\sigma^4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log L}{\partial \mu} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} 2\mu + \dfrac{\sum x_i}{\sigma^2} = 0 \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2} \dfrac{1}{\sigma^2} + \dfrac{n\mu^2}{2(\sigma^2)^2} + \dfrac{\sum x_i^2}{2(\sigma^2)^2} - \dfrac{\mu \sum x_i}{(\sigma^2)^2} = 0 \end{cases}$$

9.14 Se arroja un dado piramidal n veces. El dado tiene las caras numeradas $1, 2, 3, 4$ y están cargadas con probabilidades p_1, p_2, p_3, p_4, respectivamente. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 la cantidad de lanzamientos en los que el dado cae en la cara $1, 2, 3, 4$, respectivamente. Mostrar que la distribución de (X_1, X_2, X_3, X_4) pertenece a una familia exponencial a 3 parámetros.

$$\underbrace{(X_1, X_2, X_3, X_4)}_{\underline{X}} \sim \mathcal{M}(n, p_1, p_2, p_3, p_4), \quad 0 < p_i < 1$$

$$\theta = [p_1, p_2, p_3, p_4]$$

Como $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \longrightarrow p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$

$$\Rightarrow \theta = [p_1, p_2, p_3]$$

$$p_\theta(\underline{x}) = \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, x_3!\, x_4!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} p_4^{x_4} \; \mathbb{1}\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n\}$$

$$= e^{x_1 \ln(p_1)} e^{x_2 \ln(p_2)} e^{x_3 \ln(p_3)} e^{x_4 \ln(p_4)} \frac{n!\, \mathbb{1}\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n\}}{x_1!\, x_2!\, x_3!\, x_4!}$$

$$= e^{x_4 \ln(1 - p_1 - p_2 - p_3)} e^{x_1 \ln(p_1)} e^{x_2 \ln(p_2)} e^{x_3 \ln(p_3)} \underbrace{\frac{n!\, \mathbb{1}\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n\}}{x_1!\, x_2!\, x_3!\, x_4!}}_{h(\underline{x})}$$

$$= e^{(n - x_1 - x_2 - x_3) \ln(1 - p_1 - p_2 - p_3)} e^{x_1 \ln(p_1)} e^{x_2 \ln(p_2)} e^{x_3 \ln(p_3)} h(x)$$

$$= h(x)\, \underbrace{e^{n \ln(1-p_1-p_2-p_3)}}_{A(\theta)}\, \underbrace{e^{x_1\left(\ln\left(\frac{p_1}{1-p_1-p_2-p_3}\right)\right)}\, e^{x_2 \ln\left(\frac{p_2}{1-p_1-p_2-p_3}\right)}\, e^{x_3\left(\ln\left(\frac{p_3}{1-p_1-p_2-p_3}\right)\right)}}$$

$$c_i(\theta) = \ln\left(\frac{p_i}{1-p_1-p_2-p_3}\right), \quad i = 1, 2, 3$$

$$r_i(x) = x_i$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Es familia exponencial}}$

9.15 Al finalizar el primer semestre de gobierno se realizó una encuesta entre 1200 ciudadanos, 414 de los cuales declararon ser oficialistas, 196 declararon no ser ni oficialistas ni opositores y el resto declaró ser opositor. En base a esa información muestral estimar por máxima verosimilitud (p_1, p_2), donde p_1 es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar sea oficialista y p_2 la de que sea opositor.

X_1 : Cant de ciudadanos oficialistas entre 1200

X_2 : Cant de ciudadanos opositores entre 1200

X_3 : Cant de ciudadanos ni oficialista ni opositor entre 1200

$$\theta = [p_1, p_2]$$

$$P(\text{"}\bar{O}_P \cap \bar{O}_F\text{"}) = 1 - \mathbb{P}(O_P \cup O_F) = 1 - p_1 - p_2$$

$$\underbrace{(X_1, X_2, X_3)}_{\underline{X}} \sim \mathcal{M}(1200, p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2)$$

$$L(\theta) = f_\theta(\underline{x}) = \frac{1200}{x_1!\, x_2!\, x_3!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, (1 - p_1 - p_2)^{x_3}$$

Del 9.14

$$= e^{x_3 \ln(1-p_1-p_2)}\, e^{x_1 \ln(p_1)}\, e^{x_2 \ln(p_2)}\, \underbrace{\frac{1200!\, \mathbb{1}\{x_1 + x_2 + x_3 = 1200\}}{x_1!\, x_2!\, x_3}}_{\ln(c)}$$

$$\ln L(\theta) = x_3 \ln(1-p_1-p_2) + x_1 \ln(p_1) + x_2 \ln(p_2) + \ln(c)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial p_1} = \dfrac{-x_3}{1-p_1-p_2} + \dfrac{x_1}{p_1} = 0 \quad (1) \\[2ex] \dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial p_2} = \dfrac{-x_3}{1-p_1-p_2} + \dfrac{x_2}{p_2} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Wolfram: $p_1 = \dfrac{x_1}{x_1+x_2+x_3}$; $p_2 = \dfrac{x_2}{x_1+x_2+x_3}$

Con $x_3 = 1200 - x_1 - x_2 \Longrightarrow p_1 = \dfrac{x_1}{1200}$; $p_2 = \dfrac{x_2}{1200}$

Para confirmar que son máximos: Derivadas segundas y matriz Hessiana

$\Longrightarrow$ Elijo creer!

En muestra ma $(x_1, x_2, x_3) = (414, 590, 196)$

$$\Longrightarrow \boxed{p_1 = 0{,}345 \; ; \; p_2 = 0{,}4917}$$