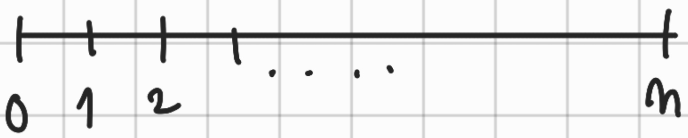
9.3 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución Poisson(λ) y sea $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Hallar la distribución de $\mathbf{X}_n | T = t$ y deducir que T es un estadístico suficiente para λ.

Se puede hacer por definición, por conocimiento de $X_n | T = t$ (proceso de Poisson) o por

$X \sim Poi(\lambda)$ "X_n" $= \underline{X} = (X_1, \dots X_n)$ $X_i \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda)$

Ver que $\underline{X} \mid \sum X_i = t = (X_1, \dots, X_n) \mid \sum_i X = t$

Ejemplo:



X_i: # ero en la hora 'i'

$$(X_1, \dots, X_n) \mid \underbrace{\sum X_i}_{\text{total}} = t \rightarrow \sim \text{Multinomial}\left(t, \frac{\cancel{\lambda}}{n\cancel{\lambda}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

$\uparrow$

no depende de λ!

$\Downarrow$

$\sum X_i$ es suficiente para λ

$$\Rightarrow \boxed{\underline{X} \mid T = t \sim \mathcal{M}\left(t, \frac{1}{n}, \dots\right) \Rightarrow \text{Estadístico suficiente}}$$

Otra forma:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \mathbb{1}\{x_i \geq 0\}$$

Por teorema de factorización

$$g(T(\underline{x}), \lambda) = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$h(\underline{x}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \mathbb{1}\{x_i \geq 0\}$$

$\Longrightarrow$ Estadístico suficiente

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} X_i}$$