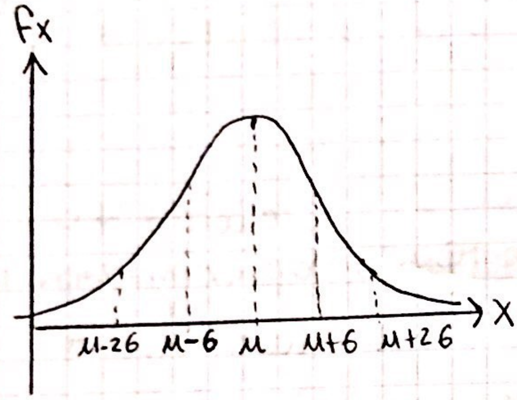
GUÍA 8

DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$E[X] = \mu$ $\quad V(X) = \sigma^2$ $\qquad \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$



$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$
$\hookrightarrow N(0,1)$

$Z \sim N(0,1)$ V.A NORMAL ESTANDAR
- $\rightarrow \varphi(z) = f_Z(z)$
- $\rightarrow \Phi(z) = F_Z(z) = P(Z \leq z)$

PROPIEDAD

1) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

2) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

SUMA DE NORMALES INDEPENDIENTES

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\quad X_1, X_2$ ind

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

y se extiende a n variables

$$aX_1 + bX_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

normal estandar

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z) = \text{Tabla}$$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P(z_1 < Z < z_2)$$
$$= \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

→ $P(-x_1 < x < x_2) = P(-3 < z < 3) = 2\Phi(3) - 1$

→ $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = P(-1 < z < 1) \cong 0{,}68$

→ $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(-2 < z < 2) \cong 0{,}95$.

→ $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = P(-3 < z < 3) \cong 0{,}99$

→ $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$

cuando dice

Teorema central del límite ⇝ "aproximadamente"

sea X_n sucesión de v.a. ind idénticamente distribuidos, $E[X_n] = \mu_n$ $V(X_n) = \sigma_n^2$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$ entonces la distribución de

$S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$

↓ tiende a.

variable ↑ ↗ media.

$$\phi = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

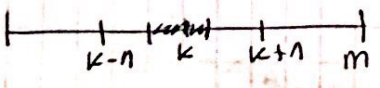
↳ desvío.

tiende a la normal estándar cuando $n \to \infty$.

Aproximar con una normal

$X \sim Bin(n, p)$ $\quad X \approx Y \sim N(np, np(1-p))$

$P(X = k) \cong P(k - 0{,}5 \le Y \le k + 0{,}5)$.



GUÍA 8

(1) $\mu = 3$ $\sigma^2 = 4$ X = precio del kilo de asado

Como $ > 0

$X \sim N(3,4) \rightarrow$ el modelo no es válido porque podría haber nº neg.

$X \sim N(8,4) \rightarrow$ medio

$X \sim N(14,4) \rightarrow$ es válido

(2) $X = S + N$ $S \sim Ber(3/4)$ $\sigma = 1/2$

$N \sim N(0, 1/4)$

N y S ind

$S = 1 \rightarrow$ señal tiene info útil

$S = 0 \rightarrow$ señal tiene info no útil

$X > c \rightarrow$ deja pasar señal

$X \leq c \rightarrow$ no deja pasar la señal

ERROR: I no pasa señal con info útil $\rightarrow S=1$

II pasa señal sin info $\rightarrow S=0$.

valor de c, para q' P de error sea mínimo

$$P(\text{ERROR}) = P(I \cup II) = P(\{(S=1) \cap (X \leq c)\} \cup \{(S=0) \cap X > c\})$$

$$P(S=1) \cdot P(X \leq c \mid S=1) + P(S=0) P(X > c \mid S=0)$$

Como X depende de S de por sí no puedo poner $P(S=1)\, P(X \leq c)$.

↓

entonces condiciono a mi X c/ S.

$$X_{|S=1} \sim N(1, \tfrac{1}{4})$$

$$X = 1 + N$$

$$E[X] = E[1+N] = 1 + \overset{0}{E[N]} = 1.$$

$$V(X) = V(1+N) = V(N) = 1/4.$$

$$X_{|S=0} \sim N(0, 1/4).$$

mi variable es c

$$\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

es una función de c.

$$P(\text{ERROR}) = \frac{3}{4} \cdot \phi\left(\frac{c-1}{1/2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \phi\left(\frac{c-0}{1/2}\right)\right) = g(c)$$

↳ la estandarizo

si yo quero el mínimo ERROR, derivo.

$$\phi = F_Z$$
$$F'_Z = f_Z = \varphi(z)$$

$$g'(c) = \frac{3}{4} f_Z\left(\frac{c-\overset{\mu}{1}}{\underset{\sigma}{1/2}}\right) \cdot \overset{\text{regla cad}}{2} + \frac{1}{4}(-2)\left(f_Z\left(\frac{c}{1/2}\right)\right) = F'_Z = f_Z = \varphi(z)$$

$$g'(c) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\underset{1}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(2(c-1))^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(2c)^2} = 0$$

mínimo

$2(c-1) = \frac{(c-1)}{1/2} = "z"$ → cuando es $(0,1)$ $\quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$

$$= \frac{3}{2} e^{-2(c-1)^2} - \frac{1}{2} e^{-2c^2} = 0.$$

$$3 e^{-2(c-1)^2} = e^{-2c^2}.$$

$$\ln(3) - 2(c-1)^2 = -2c^2$$

$$\boxed{c \cong 0{,}23.}$$

8.3 T: duración de lámpara

$T \sim N(100, \sigma^2)$ comprador exige por lo menos 90% tengan duración sup 80 horas.

¿ valor máx varianza?

$$P(T \geq 80) \geq 0{,}9.$$

$$1 - P(T \leq 80) \geq 0{,}9.$$

$$\phi(z) = P(Z \leq z)$$

$$1 - \phi\left(\frac{80-100}{\sigma}\right) \geq 0{,}9.$$

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \phi(z)$$

$$\phi\left(-\frac{20}{\sigma}\right) \leq 0{,}1$$

$z_{0,1} = -\underbrace{z_{0,9}}$ ↳ ya está tabulado 1,2815 $\quad \phi(z = 0{,}9) = 1{,}28$

$$-\frac{20}{\sigma} \leq z_{0,1}$$

var Normal ↳ σ^2.

$$-\frac{20}{\sigma} \leq -z_{0,9} \rightarrow -\frac{20}{\sigma} \leq -1{,}2815. \quad \frac{-20}{-1{,}2815} \geq \sigma \rightarrow \boxed{15{,}6 \geq \sigma}$$ valor máx.

$\boxed{243{,}6 \geq \sigma^2.}$ ↳ valor máx

2

8.4 10% pesan más de 500kg $P(X>500)=0,1$

7% " menos de 410 kg $P(X<410)=0,07$ DISTRIBUCIÓN de los pesos es normal

a) intervalo de confianza al 95% para el peso de los novillos (X) X: peso $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P(410 < X < 500) = 0,95$$

NO HACER.

8.5 Ajustan bien si → eje (2) y buje (1)

$$P(0,005 < D_1 - D_2 < 0,035)$$

$D_2 \sim N\left(0,75, \frac{1}{30000}\right)$

$D_1 \sim N\left(0,77, \frac{1}{30000}\right)$

$$X = D_1 - D_2$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ → busco parámetros

$$E[X] = E[D_1 - D_2] = E[D_1] - E[D_2]$$

$$E[X] = 0,02$$

$$V(X) = V(D_1 - D_2) = V(D_1) + V(D_2) = \frac{1}{15000}$$

$P(0,005 < X < 0,035)$ = estandarizo

$$P\left(\frac{0,005 - 0,02}{\sqrt{\frac{1}{15000}}} < \overset{N\sim(0,1)}{Z} < \frac{0,035 - 0,02}{\sqrt{\frac{1}{15000}}}\right) =$$

$$P(-1,84 < z < 1,84) \overset{\text{PROP}}{=} 2\,\Phi(1,84) - 1 =$$

$$= 2 \cdot (0,96712) - 1 = \boxed{0,93}$$

8.6

$X_1 \sim N(1, 1/9)$

$X_2 \sim N(2, 1/3)$

$X_3 \sim N(3, 1/2)$

σ: desvío estandar

var de normal σ².

$$P(X_1 - \tfrac{1}{2}X_2 > 2 - \tfrac{1}{3}X_3) =$$

$$P(\underbrace{X_1 - \tfrac{1}{2}X_2 + \tfrac{1}{3}X_3}_{Y} > 2) =$$

$Y = X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3$ → cl de normales

↳ si no tuviera ½ y todo eso adelante los parámetros son la suma.

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E[Y] = E[X_1 - \tfrac{1}{2}X_2 + \tfrac{1}{3}X_3] =$$

$$= E[X_1] - \tfrac{1}{2}E[X_2] + \tfrac{1}{3}E[X_3] =$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\cdot 2 + \tfrac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

$$V(Y) \overset{\text{somind}}{=} V(X_1 - \tfrac{1}{2}X_2 + \tfrac{1}{3}X_3) = var(X_1) + var(-\tfrac{1}{2}X_2) + var(\tfrac{1}{3}X_3) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{2}$$

↳ pongo escribirlo directo con ⊖

$V(Y) = 1/4$.

$Y \sim N(1, 1/4)$

$Z \sim N(0,1)$ "estandarizo"

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \le 2) = 1 - P\Big(\underbrace{\frac{Y-1}{1/2}}_{Z} \le \frac{2-1}{1/2}\Big)$$

$$= 1 - P(Z \le 2) = 1 - \phi(2)$$

↳ tabla

$$= 1 - 0{,}97725$$

$$\boxed{P(Y>2) = 0{,}02275.}$$

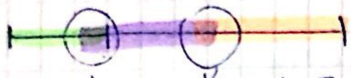
HOJA N° 3

FECHA

8.7 L_A : long A $\quad L_A \sim N(50, 0{,}25)$

$L_B \sim N(30, 0{,}0625)$

$L_C \sim N(65, 0{,}25)$



superposición de 5cm

porque le saco la superposición

$L = L_A + L_B + L_C - 10\text{ cm} =$

$P(139 < L < 141) = ?$ $\qquad L \sim N(\mu, \sigma^2)$

Busco los parametros de L

$E[L] = E[L_A + L_B + L_C - 10\text{cm}] = 50 + 30 + 65 - 10$

$E[L] = 135\text{ cm}$

$V(L) = V(L_A + L_B + L_C - 10\text{cm}) = 0{,}25 + 0{,}0625 + 0{,}25$

$V(L) = 0{,}5625$

$L \sim N(135, 0{,}5625)$

$P(139 < L < 141) =$

la estandarizo

$$P\left(\frac{139-135}{\sqrt{0{,}5625}} < \frac{L-135}{\sqrt{0{,}5625}} < \frac{141-135}{\sqrt{0{,}5625}}\right) =$$

$P(16/3 < Z < 8) = \phi(8) - \phi(16/3) = 1 - 1$

$Z \sim N(0,1)$

es más grande de los valores en tabla

$\phi(3{,}5) \cong 0{,}999\ldots$

aproximo que son 1.

$$\boxed{P(139 < L < 141) = 0}$$

NOTA

8.8)

X_i: peso de paquete de café

$X_i \sim N(500gr, \sigma^2)$ σ = desvío estándar.

X_i son ind.

$$Y = \sum_{i=1}^{12} X_i \rightarrow Y \text{ es la sumatoria de c/ peso.}$$

PESO PROMEDIO

$$\bar{Y} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{12}}{12}$$

$\bar{Y} \sim N(\mu_i, \sigma_2^2) \rightarrow$ BUSCO parametros.

$$E[\bar{Y}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{12}\right] = \frac{1}{12} E[\sum X_i] =$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} [E[X_i]] = \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 500$$

$$E[\bar{Y}] = 500$$

$$Var(\bar{Y}) = \left(\frac{1}{12}\right)^2 12 \cdot \sigma^2 = \frac{1}{12}\sigma^2$$

$$\bar{Y} \approx N(500, \tfrac{1}{12}\sigma^2)$$

$$P(490 < \bar{Y} < 510) = 0,99$$

99% de seguridad que mase pese de 10gr.

Estandarizo.

Encontrar
$\Phi(A) = 3$.
$A = \underbrace{z_3}_{\text{normal inversa}}$
$z_3 = 4 = $ ainas

$$P\left(\frac{490-500}{\frac{\sigma}{\sqrt{12}}} < \overset{N\sim(0,1)}{Z} < \frac{510-500}{\frac{\sigma}{\sqrt{12}}}\right) = 0,99$$

PROP
$P(-3 < z < 3) = 2\Phi(3) - 1$

$$P\left(-\frac{10\sqrt{12}}{\sigma} < z < \frac{10\sqrt{12}}{\sigma}\right) = 0,99$$

como lo de adentro es lo mismo

$$\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{10\sqrt{2}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{10\sqrt{2}}{\sigma}\right) - 1 = 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{10\sqrt{2}}{\sigma}\right) = 0,995$$

$\rightarrow$ Tabla
2,57 $\rightarrow$ 0,99492
2,58 $\rightarrow$ 0,99506

$\frac{10\sqrt{2}}{\sigma} = z_{0,995}$

$\therefore$ Escalar.

$\sigma = 10/\sqrt{2} \div 2{,}576$

$$\boxed{\sigma = 13{,}45.}$$

Scanned with CamScanner

(4)

8.10 Cada 10 seg se desplaza 3cm $\left\langle \begin{matrix} \text{der} \\ \text{izq} \end{matrix} \right\}$ igual p.

cada caminata es independiente

$p = 1/2$

Desp de 2 minutos se desplazo l veces hacia izq

$l = 0, 1, 2, \ldots, 12$

ESTIMAR PROB de q' la bola roja vaya a parar a la urna 4

aproximación por la densidad normal

$$P(S_m = k) \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\, \varphi\left(\frac{\overset{\text{valor}}{k} - \overset{\text{esperanza}}{mp}}{\underbrace{\sqrt{np(1-p)}}_{\text{varianza}}}\right)$$

porque por estandarización tiende a cero ↵

φ es la normal $N\sim(0,1)$

$$P(l=4) \sim \frac{1}{\sqrt{12 \cdot 1/2\,(1-1/2)}}\, \varphi\left(\frac{4 - \overset{12 \cdot \frac{1}{2}}{6}}{\sqrt{12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)(1-1/2)}}\right)$$

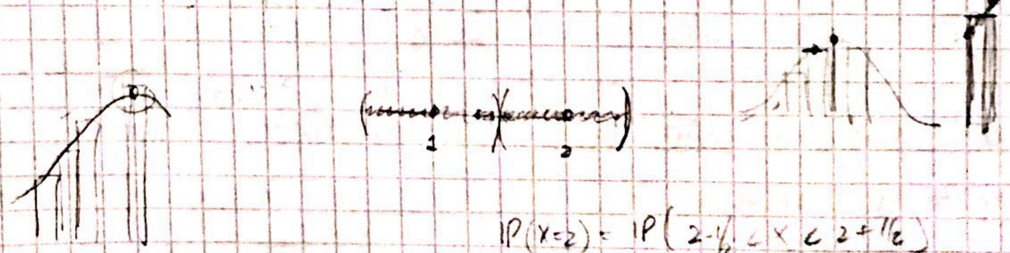
$$P(l=4) \sim \frac{\sqrt{3}}{3}\, \varphi\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \sigma = 1 \quad \mu = 0$$

$$P(l=4) \sim \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x)^2}{2}}$$ siendo $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\boxed{P(l=4) \sim \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2/3} \sim 0{,}118.}$$

¿a q' caja es más probable q' vaya?



$P(X=2) = P\left(2 - \frac{1}{2} < X < 2 + \frac{1}{2}\right)$

8.1.1 CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

↳ hacer a la binomial.

$$P(S_m = k) = P\left(k - \frac{1}{2} < S_m < k + \frac{1}{2}\right) \cong$$

$$\phi\left(\frac{k - mp + 1/2}{\sqrt{mp(1-p)}}\right) - \phi\left(\frac{k - mp - 1/2}{\sqrt{mp(1-p)}}\right)$$

Entre los primeros 10.000 dígitos decimales de un n° al azar en (0,1) el 7 aparezca 968 veces.

X: cantidad de veces q' aparece 7 entre los 1°s 10.000 dígitos decimales.

$X \sim Bin(10.000, 1/10)$

↳ hay 10 dígitos y son eficaces.

$P(X \leq 968) = ?$

$E[X] = m \cdot p = 10000 \cdot \frac{1}{10} = 1000$

$V(X) = m\,p(1-p) = 900 \qquad \sigma = \sqrt{900} = 30$

CORRIJO POR CONTINUIDAD.

corrección x continuidad

$$P(X \leq 968) = P\left(\underbrace{\frac{X - 1000}{30}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{968 - 1000 + 1/2}{30}\right)$$

$P(Z \leq -1{,}05) = \phi(-1{,}05) = 1 - \phi(1{,}05) =$

$$\boxed{P(X \leq 968) \cong 0{,}14686}$$

Scanned with CamScanner

8.12. PPP (λ) $\lambda = 3000$ x hora.

9:00 9:30. 1500 partículas.

$1/2$

9:00 9:10

$1/6$

llegan 450.

$\lambda \cdot 1/6 = 3000 \cdot 1/6 =$

$N(1/6) \sim Poi(500)$

$N(1/2) \sim Poi(1500)$

$P(N(1/6) > 450 \mid N(1/2) = 1500) =$

como tengo 2 poisson condiciono y tengo una Binomial.

$\frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6}$.

$Y = N(1/6) \mid N(1/2) = 1500 \sim Bin(1500, 1/3)$

veces corrección $+1/2$

$P(Y > 450) = 1 - P(Y \leq 450) = 1 - P\left(\frac{Y-500}{18{,}26} \leq \frac{450-500}{17{,}70}\right)$

$P(Y > 450) = 1 - P(Z \leq -2{,}71) = 1 - \Phi(-2{,}71) =$

$1 - (1 - \Phi(2{,}71)) = 0{,}99664$

$$\boxed{P(N(1/6) > 450 \mid N(1/2) = 1500) \cong 0{,}99664}$$

8.13. 100 plazos o lugares. $P(c) = 0{,}1$

$X = \begin{cases} 1 \to \text{cliente no cancela} \\ 0 \to \text{'' cancela} \end{cases}$

$X_i \sim Ber(0{,}9)$

éxito no cancele.

S_n: clientes que no cancelan dentro de los n plazos vendidos

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Bin(n, 0{,}9)$

clientes independientes.

$P(S_n > 100) \leq 0{,}01$

aproximo la Binomial con una normal xq sino $\sum_{i=101}^{m} \binom{n}{s} 0{,}9^{s} \cdot 0{,}1^{m-s} \leq 0{,}01$

ver teoría $\leftarrow S_m \approx Y \sim N(0{,}9\,n \;;\; n\,\underbrace{(0{,}9 \cdot 0{,}1)}_{P(1-P)})$

$P(S_n > 100) = 1 - P(S_m \leq 100) =$

estandarizo.

$$1 - \phi\left(\frac{100 - n\,0{,}9}{\sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1 n}}\right) \leq 0{,}01$$

$$1 - \phi\left(\frac{100 - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{0{,}09\,n}}\right) \leq 0{,}01$$

$$0{,}99 \leq \phi\left(\frac{100 - n \cdot 0{,}9 + \frac{1}{2}}{\sqrt{0{,}09\,n}}\right)$$

$$2{,}33 \leq \frac{100{,}5 - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{0{,}09\,n}}$$

$$2{,}33\sqrt{0{,}09 n} \leq 100{,}5 - n \cdot 0{,}9$$

$0{,}699$

$$0 \leq 100{,}5 - n \cdot 0{,}9 - 2{,}33 \cdot \frac{3}{10}\sqrt{m}$$

si digo $x = \sqrt{n}$

$x^2 = m$

$10{,}84 \quad y \quad -10{,}$

$$\boxed{n \leq 10{,}81}$$

8.14.

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si no fuma} \\ 1 & \text{si fuma} \end{cases} \qquad X_i \sim Be(p)$$

PROPORCIÓN o PROMEDIO $\leftarrow \overline{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{m} \cdot n\, E[X_i] = p.$$

$$var(\bar{X}) = var\left(\frac{1}{m}\sum X_i\right) = \frac{1}{m^{\cancel{2}}}\cancel{n}\, p(1-p)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{m}p(1-p)}.$$

$$P(|\bar{x} - p| < 0{,}01) > 0{,}95.$$

estandarizo

$$P\left(\frac{|\bar{x}-p|}{\sqrt{\frac{1}{n}p(1-p)}} < \frac{0{,}1}{\sqrt{1/n\, p(1-p)}}\right) > 0{,}95.$$

$\rightarrow N(0,1) \sim Z.$

$$P\left(|Z| < \frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{1}{n}(p(1-p))}}\right) > 0{,}95.$$

despejo el módulo

$$2\Phi\left(\frac{0{,}01}{\sqrt{\frac{1}{n}(p(1-p))}}\right) - 1 > 0{,}95.$$

$$\frac{0{,}01}{\sqrt{\frac{1}{n}p(1-p)}} > 1{,}95996.$$

despejo ...

$$n > \frac{p(1-p)}{2{,}6 \times 10^{-3}} \rightarrow$$

p con mayor incertidumbre $p = 0{,}5$.

$\hookrightarrow$ gráfico.

si me verifica para el máx verifico para todo. $\leftarrow \boxed{n > 9584}$

8.16.

$L \sim N(30, 2^2)$

$\$ = $ longitud $= L_i$ COSTO $= \$20$

ganancia $= \$ -$ costo.

$w_i =$ ganancia c/u.

$w_i = L_i - 20$.

$E[w_i] = E[L_i] - 20 = 10$.

$var(L_i) = 4$ $Var(w_i) = 4$

si llamo $T = \sum_{i=1}^{50} w_i$ → la suma de todos las ganancias.

$P(T > 460) = 1 - P(T \leq 460) =$

BUSCO parámetros de T

$E[T] = E[\sum_1^{50} w_i] = \sum E[w_i] = 50 \cdot 10 = 500$

$V(T) = var(\sum_1^{50} w_i) = 50 \cdot 4 = 200$.

$T \sim N(500, 200)$

estandarizo

$1 - P\left(\frac{T - 500}{\sqrt{200}} \leq \frac{460 - 500}{\sqrt{200}}\right) = 1 - P(Z \leq -2{,}82)$

$\searrow Z \sim N(0,1)$

$= 1 - \phi(-2{,}8284) = 1 - (1 - \phi(2{,}8284))$

$= \phi(2{,}8284) \cong 0{,}99767$

$$\boxed{P(T > 460) \cong 0{,}99767}$$

¿ cuántas varillas hay que vender para que

$P(T \geq 460) \geq 0{,}9 \rightarrow 1 - P(T < 460) \geq 0{,}9$

⋮ inversa.

NOTA

8.17

T: duración en minutos de c/ llamada

$T \sim N(\mu, 0{,}2^2)$ $2 x minuto.

W: costo de 100 llamadas.

$W = \sum_{i=1}^{100} 2 \cdot T_i$ ⟹ busco parámetros

$P(W < 190) \geq 0{,}99$
↓ estandarizo

$E[W] = E\left[\sum_{i=1}^{100} 2 \cdot T_i\right]$
$= 100 \cdot 2 \cdot \mu$

$P\left(\frac{W - \mu}{4} < \frac{190 - \mu}{4}\right) \geq 0{,}99$

$\frac{W-\mu}{4} \sim Z \sim N(0,1)$

$V(W) = 100 \cdot 4 \cdot 0{,}04 = 16 \rightarrow \sigma^2$

$P(Z \leq 47{,}5 - 50\mu) \geq 0{,}99$.

$\Phi(47{,}5 - 50\mu) \geq 0{,}99$
↳ inversa.

$47{,}5 - 50\mu \geq 2{,}32635$.

$\boxed{\mu \leq 0{,}903473}$

8.18

F: "fracción de unidades defectuosas"

$F \sim N(0{,}1, (0{,}03)^2)$

independientes.

D: "producción diaria"

$D \sim N(500, 120^2)$

costo diario = $50 x unidad.

W: costo total x 90 días

$W = \sum_{i=1}^{90} C_i$

costo $= 50 \cdot D + 100 \cdot F \cdot D$.
↓
por defectuosa.

busco C_i.

NOTA

$$E[C] = 50 \cdot E[D] + 100\, E[F]\, E[D]$$

$$\underline{E[C] = 50 \cdot 500 + 100 \cdot 0{,}1\ 500 = 30.000}$$

$$\text{var } C = \text{var}\left(50D + 100\, \underset{\sim}{F \cdot D} \right) =$$

como acá tengo multiplicación de variables.

$$\text{var}(c) = E[c^2] - E[c]^2$$

$$C^2 = 2500\, D^2 + 10\,000\, D^2 F + 10\,000\, D^2 F^2$$

$$E[c^2] = 2500\, E[D^2] + 10000\, E[D^2] \cdot E[F] +$$

$$10\,000\, E[D^2] \cdot E[F^2].$$

$$\text{var}(D) = E[D^2] - E[D]^2$$

$$E[D^2] = \text{var}(D) + E[D]^2 = 264400.$$

$$\text{var}(f) = E[f^2] - E[f]^2 \Rightarrow E[f^2] = 0{,}0109$$

$$\underline{\text{var}(c) = E[c^2] - E[c]^2 = 54219600}$$

sigo con w.

$$E[w] = E\left[\sum c_i\right] = 90 \cdot E[c] = 90 \cdot 30000$$

$$E[w] = 2700\,000$$

$$\text{var}(w) = \text{var}\left(\sum c_i\right) = 90 \cdot 54219600 = 4879764000$$

$$\sigma = \sqrt{\ }$$

$$P(w > w) \geq 0{,}95.$$

estandarizo

$$P\left(Z > \frac{w - 2700000}{69855{,}3}\right) \geq 0{,}95$$

$$\phi\left(\frac{w - 2700000}{69855{,}3}\right) \leq 0{,}95 + 1$$

$$\boxed{w \leq 2585098{,}5}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

8.19

W: peso que resiste el puente.

$W \sim N(1400, 100^2)$.

P_i: peso de c/ camion.

$P_i \sim N(20, 0{,}25^2)$

$C = \sum_{i=1}^{m} P_i =$ peso de todos los camiones $\longrightarrow$ sumo el peso de c/ camion.

si $C \geq W$ hay daños.

$$P(C \geq W) > 0{,}1$$

$$P(C - W \geq 0) > 0{,}1.$$

$$E[C-W] = E[C] - E[W] = 20n - 1400.$$

$$V[C-W] = 0{,}0625 \cdot n + 10.000$$

$$P\left(\frac{(y-w)-(20n-1400)}{\sqrt{0{,}0625 \cdot n + 10000}} \geq \frac{0-(20n-1400)}{\sqrt{0{,}0625n+10000}}\right)$$

$\downarrow$ estandarizo. $N(0,1) \to Z$

$$P\left(Z \geq \frac{-20n+1400}{\sqrt{0{,}0625n+10000}}\right) > 0{,}1 \to \text{tapo la inversa}$$

$$\frac{-20n+1400}{\sqrt{0{,}0625n+10000}} < 1{,}28155.$$

despejo $\boxed{n > 72}$ $\to$ si hay + de 72 camiones hay prob falla de 0,1

8-20

PP($\lambda = 2{,}5$) x mes → fallos electrónico sistema.

↳ si ocurren 196 fallos se cambia.

calcular APROXIMADAMENTE la PROB que sea cambiado antes de 67,2 meses.

↓

Teorema central del límite → Estandarizar

↓

adquiere normal con un n sufi grande.

↓

tiende a normal

T: tiempo hasta falla 196

$T \sim \Gamma(196, 2{,}5)$

$E[T] = \frac{196}{2{,}5}$ $\quad var(T) = \frac{196}{(2{,}5)^2}$

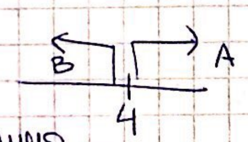
$$P(T < 67{,}2) = P\left(\frac{T - 196/2{,}5}{196/(2{,}5)^2} < \frac{67{,}2 - 196/2{,}5}{196/(2{,}5)^2} \right)$$

↑ estandarizo usando el teo central del límite.

$P(Z < -2) = \phi(-2) = 1 - \phi(2) =$

$$\boxed{P(T < 67{,}2) \cong 0{,}02275}$$

8-21



D: diámetro de c/ arandela

$D_A \sim U(4, 5)$

$D \sim U(3, 5)$

W_i: peso.

$W_i = (D_A^i)^3$

$W = 100g + \sum_{i=1}^{100} W_i$ $\quad P(W > 9600) =$

↓ cte del cajón

$1 - P(W \leq 9600)$

BUSCO parámetros de W

$E[W] = 100 + E\left[\sum_{i=1}^{100} W_i\right] = 100 + 100\, E[D^3]$.

$E[D_A^3] = \int_4^5 d^3\, dd = \frac{d^4}{4}\Big|_4^5 = 92{,}25$.

$E[W] = 100 + 100 \cdot 92,05 = 9325g$

$var(W) = var(100 + \sum^{100} W_i) = var(\sum^{100} W_i) = 100 \cdot var(W)$ DA 3.

$var(D_A^3) = E[(DA^3)^2] - E[DA^3]^2$

↳ la tengo.

$E[(DA^3)^2] = E[DA^6] = \int_4^5 d^6 \, dd = \frac{d^7}{7} \Big|_4^5 = 8860,4$

$var(W) = \underset{var(W_i)=310}{310} \cdot 100 = 31000$

$1 - P(W \leq 9600) \cong 1 - P\left(\frac{W - 9325}{\sqrt{310000}} \leq \frac{9600 - 9325}{\sqrt{310000}}\right)$

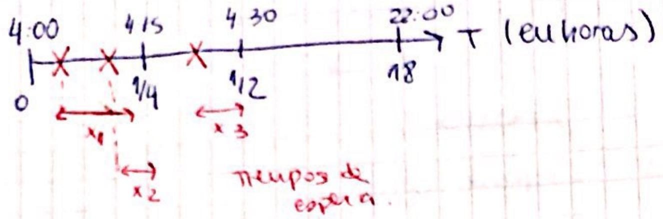
↳ tiende a ser $Z \sim N(0,1)$.

$1 - P(Z \leq 1,56189) = 1 - \phi(1,56189) =$

$\boxed{P(W > 9600) \cong 0,05938.}$

8.22 y 8.23 en clase.

8.22 $\Pi \sim PPP(\lambda)$ $\lambda = 50 \frac{1}{min} = 50 \cdot 60 \frac{1}{h}$



X_i: tiempo de espera del i-ésimo pasajero

Y: tiempo total de espera.

$$Y = \sum_{i=1}^{N(0,18)} X_i \qquad X_i = m\frac{1}{4} - s_n$$

$$(m-1)\frac{1}{4} < s_n < m \cdot \frac{1}{4}$$

Buscamos aproximar

$$P(Y > 6400) = P\left(\sum_{i=1}^{N(0,18)} X_i > 6400\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 6400 \mid N(0,18) = n\right) \underbrace{e^{-\lambda 18}\frac{(\lambda 18)^n}{n!}}_{\mathbb{P}(N(0,18)=m)}$$

condiciono

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 6400 \mid N(0,18) = n\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N(0,18) = n > 6400\right)$$

$$\cong 1 - \phi\left(\frac{6400 - \sum_{i=1}^{n} X_i \mid N(0,18) = m}{\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N(0,18) = n\right)}}\right)$$

OTRA forma

T_i = tiempo espera del c/ pasaje.

$$P\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{72} T_i}_{Y} > 6400.\right) = \quad \text{PORQUE } 72 \text{ micros.}$$

$E[Y]$ y $V[Y]$

8.23

$P = P(M) = 0,7$

X_i = volumen i'ésimo de palada de Lucas (dm^3)

Y_i = " " " " " Monik (")

$X_i \sim U(2,4) \qquad Y_i \sim U(1,3)$

n: nº de paladas (determinístico)

1º forma

K: nº de paladas de Monik entre n

$K \sim Bin(n, p = 0,7)$ $\quad$ U: volumen total

$U = \sum_{i=1}^{K} Y_i + \sum_{i=1}^{m-K} X_i$ $\quad$ (convención: $\sum_{i=1}^{0} Y_i = 0$)

2do forma (mejor)

W: volumen de una palada i'ésima.

↳ mezcla de X_i, Y_i

$W_i = \begin{cases} X_i & \text{con prob } 1-P \\ Y_i & \text{" " } P \end{cases}$ $\qquad U = \sum_{i=1}^{m} W_i$

Buscamos el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$P(U > 4\ m^3) > 0,95.$

$P(U > 4000\ dm^3) > 0,95$

$P(\sum_{i=1}^{m} W_i > 4000) > 0,95$

$P(\sum_{i=1}^{n} W_i > 4000) \underset{\downarrow}{\simeq} 1 - \phi\left(\frac{4000 - E[\sum_{i=1}^{m} W_i]}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{m} W_i)}}\right)$

si m es lo "suf grande" por TCL.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} W_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[W_i] = n \cdot E[W_i] = n\left(\underbrace{\frac{2+4}{2}}_{E[W_i \mid Ucos] = E[X_i]}(1-p) + \underbrace{\frac{1+3}{2}}_{E[W_i \mid Mork] = E[Y_i]}p\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) \underset{ind}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(W_i) = n \cdot \mathrm{Var}(W)$$

$$\mathrm{Var}(W) = E[W^2] - E[W]^2$$

$$E[W^2] = E[W^2 \mid Ucos](1-p) + E[W^2 \mid Mork]\,p$$

$$= E[X^2](1-p) + E[Y^2]\,p$$

$$= (\mathrm{Var}(X) + E[X]^2)(1-p) + (\mathrm{Var}(Y) + E[Y]^2)\,p$$

$$= \left[\frac{(4-2)^2}{12} + \left(\frac{2+4}{2}\right)^2\right]\underbrace{(1-p)}_{0{,}3} + \left[\frac{(3-1)^2}{12} + \left(\frac{1+3}{2}\right)^2\right]\underbrace{p}_{0{,}7}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{m} W_i\right] = a$$

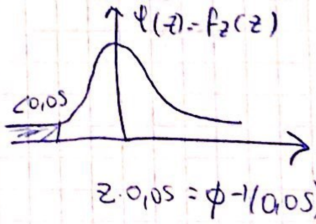
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) = b$$

de los cuentos

Buscamos el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \phi\left(\frac{4000 - na}{\sqrt{n}\, b}\right) > 0{,}95.$$

$$\phi\left(\frac{4000 - na}{\sqrt{n}\, b}\right) < 0{,}05.$$



$z_{0,05} = \phi^{-1}(0{,}05)$

$$\frac{4000 - na}{\sqrt{n}\, b} < \underbrace{z_{0,95}}_{-z_{0,05}}.$$

$n > 1741$