Guía 7

7.1 Sea $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ el proceso de conteo asociado a un proceso de Poisson de intensidad 2 y sea $N(a,b) = N(b) - N(a)$ el incremento del proceso en el intervalo $(a,b]$. Calcular

(**a**) $\mathbf{P}(N(1) = 0)$.

(**b**) $\mathbf{P}(N(1,2) = 1)$.

(**c**) $\mathbf{P}(N(1) = 0, N(1,2) = 1, N(2,4) = 2)$.

(**d**) $\mathbf{cov}\,(N(1,3), N(2,4)\,)$.

Sea S_3 el tiempo de espera hasta que ocurre el tercer evento del proceso de Poisson. Calcular

(**e**) $\mathbf{P}(S_3 > 1/2)$

(**f**) $\mathbf{P}(N(1/4) = 1 | S_3 = 1/2)$

(**g**) $\mathbf{P}(S_3 > 1/2 | N(1/4) = 1)$.

7.2 En la Ciudad de Buenos Aires ocurren accidentes de tránsito de acuerdo con un proceso de Poisson con intensidad 2 por hora.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el tercer accidente después de las 0:00 ocurra después de las 0:30.

(**b**) Calcular la probabilidad de que entre la una y las dos de la mañana ocurra exactamente un accidente.

7.3 Un radioisótopo emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por hora. Las partículas emitidas se registran con un contador. Cuando el contador registra una partícula tarda dos minutos en reacondicionarse y no registra ninguna partícula emitida durante ese intervalo de tiempo. Calcular la probabilidad de que las primeras 5 partículas emitidas sean registradas por el contador.

7.4 Un detector de partículas emite señales de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 2 por segundo: *tic,tac,tic,tac,tic,tac,...* el contador registra solamente los *tac*'s. Sabiendo que el contador registró exactamente una señal en el primer segundo, calcular la probabilidad de que no registre ninguna señal en el siguiente.

7.5 Los colectivos de la línea 61.09 llegan a la parada de Paseo Colón 850 según un proceso Poisson de intensidad 12 por hora.

(**a**) Andrés llega a la parada del 61.09 a las 19:30. Calcular la probabilidad de que Andrés tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

(**b**) Jemina llega a la parada del 61.09 a las 19:31. Calcular la probabilidad de que Jemina tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

(**c**) Matías llega a la parada del 61.09 a las 19:3X, donde X es equiprobable sobre el conjunto $\{2,3,4,5\}$ e independiente del proceso de arribos de colectivos. Calcular la probabilidad de que Matías tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

(**d**) Magdalena llega a la parada del 61.09 a las 19:00+U, donde U es uniforme sobre el intervalo (0,60) e independiente del proceso de arribos de colectivos. Calcular la probabilidad de que Magdalena tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

7.6 El peso de ciertas bolsas de naranjas es una variable aleatoria exponencial de media 3 kilos. Se van agregando bolsas en una balanza hasta que el peso supera 5 kilos. Calcular la probabilidad de que el peso final en la balanza supere los 7 kilos.

7.7 Llamadas arriban a una central telefónica de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. Sabiendo que entre las 9:00 y las 10:00 arribaron exactamente 3 llamadas, calcular la probabilidad de que

(**a**) la primera llamada después de las 9:00 haya arribado antes de las 9:15.

(**b**) la segunda llamada después de las 9:00 haya arribado antes de las 9:30.

7.8 A una estación de trenes llegan personas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 50 por minuto. El tren parte a los 15 minutos. Sea T la cantidad total de tiempo que esperaron los pasajeros. Hallar $\mathbf{E}[T]$ y $\mathbf{var}(T)$. (*sugerencia*: condicionar al valor de $N(15)$ y usar la fórmula de probabilidad total.)

7.9 Un radioisótopo emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 6 por hora. Sabiendo que entre las 0:00 y las 0:30 el radioisótopo emitió exactamente 3 partículas calcular la probabilidad de que la primera partícula emitida después de las 0:00 se haya emitido después de las 0:10 y la cuarta se haya emitido después de las 0:40.

7.10 Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 20 metros. La máquina detecta cada falla con probabilidad 0.75 y corta el alambre en la primer falla detectada.

(**a**) Hallar la media y la varianza de la longitud de los rollos de alambre.

(**b**) Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.11 Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 20 metros. La máquina detecta cada falla con probabilidad 0.75 y corta el alambre en la primer falla detectada antes de los 20 metros o a los 20 metros si no se detectan fallas antes.

(**a**) Hallar la media de la longitud de los rollos de alambre.

(**b**) Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.12 Lucas emite señales de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 3 por minuto, mientras que Monk las emite de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 5 por minuto. Los dos procesos de Poisson son independientes.

(**a**) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida después de las 0:00 haya sido emitida después de las 0:10.

(**b**) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida haya sido emitida por Lucas.

(**c**) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida después de las 0:00 haya sido emitida después de las 0:10 y que haya sido emitida por Lucas.

7.13

(**a**) Sean Π_1 y Π_2 dos procesos de Poisson independientes de intensidad 2. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros eventos provengan del proceso Π_1?

(**b**) Sean T_1, T_2, T_3 variables aleatorias independientes exponenciales de media 1/2. Calcular la probabilidad de que T_1 supere a $T_2 + T_3$ (*sugerencia: no es necesario hacer ninguna cuenta*).

7.14 Estando *maduras las brevas* fuerzas patriotas arribarán a la Plaza de la Victoria organizadas en dos fracciones: los Chisperos conducidos por French y Beruti y los Patricios dirigidos por Saavedra. Los Patricios arribarán de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 60 por hora y los Chisperos de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 40 por hora. Los dos procesos de Poisson son independientes. Sabiendo que el 25 de mayo entre las 12:00 y las 12:03 arribaron exactamente 2 Chisperos a la Plaza de la Victoria calcular la probabilidad de que entre las 12:01 y las 12:02 hayan arribado por lo menos 2 integrantes de las fuerzas patriotas.

7.15 Clientes arriban a un servidor de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. El tiempo de trabajo consumido en cada servicio tiene distribución normal de media 5 minutos y desvío estándar 1/2 . Calcular la media y la varianza del tiempo de trabajo consumido por el servidor entre las 11:00 y las 12:00.

7.16 Familias de africanos migran a la Unión Europea de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 3.000 por semana. Si el número de integrantes de cada familia es independiente y puede ser $5, 4, 3$ con probabilidades respectivas 0.1, 0.4, 0.5, calcular la media y la varianza de la cantidad de africanos que migran a la Unión Europea durante un período de 4 semanas.

7.17 Vehículos arriban a un puesto de peaje de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por minuto de acuerdo con los siguientes porcentajes: 70 % de autos, 10 % de motos, y 20 % de camiones. Los autos transportan en promedio una carga de 400 kg., las motos de 120 kg., y los camiones de 1300 kg.

(**a**) Hallar la probabilidad de que en media hora crucen por el peaje a lo sumo 2 autos.

(**b**) Hallar la probabilidad de que en 1 minuto pasen 7 autos, 1 moto y 2 camiones.

(**c**) Hallar la carga media que transporta un vehículo que pasa por el peaje.

(**d**) Hallar la carga media total que atraviesa el peaje durante 1 hora.

7.18 A una línea de embalaje arriban en forma independiente piezas producidas por las máquinas A y B. Las piezas de la máquina A lo hacen según un proceso Poisson de tasa 2 por minuto, mientras que las de la máquina B también lo hacen en forma Poisson pero con tasa 1 por minuto. Las piezas de ambas máquinas llegan a la línea de embalaje y por orden de arribo son embaladas de a pares. Hallar la media y la varianza del tiempo transcurrido hasta la aparición de un par embalado formado por una pieza proveniente de cada máquina.

Ejercicios Complementarios

7.19 Una fábrica textil produce rollos de tela para una camisería. La tela se teje en una máquina que produce fallas de tejido de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 2 cada 300 metros. La tela se corta en piezas de 100 metros de largo y cada pieza pasa a la máquina de teñido. Cuando una pieza de tela no tiene fallas de tejido la cantidad de fallas de teñido es una variable aleatoria con distribución Poisson de media 1. En cambio, si la pieza tiene fallas de tejido la cantidad de fallas de teñido una variable aleatoria con distribución Poisson de media 2. Hallar la distribución de la cantidad de fallas en una pieza enrollada.

7.20 La llegada de aviones a un aeropuerto de una determinada ciudad responde a un proceso Poisson con una media de 12 aviones por hora. Un oficial de control llega cada día de la semana y permanece en el aeropuerto el tiempo necesario hasta que llega el décimo avión. Si al cabo de una semana (5 días hábiles) el tiempo que permaneció el oficial en el aeropuerto superó las 4 horas, ¿cuál es la probabilidad de que dicho tiempo haya excedido las 5 horas? Suponer que los tiempos de permanencia de dos días diferentes son independientes.

7.21 Clientes ingresan a un banco según un proceso de Poisson de tasa 10 por hora. El 30 por ciento de los clientes son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que en el lapso hasta la llegada del sexto hombre hayan ingresado exactamente 2 mujeres?

7.22 A un hospital llegan personas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 1 cada hora. Cuando una persona ingresa al hospital, la probabilidad de que esté gravemente enferma es 0.4. (cada una en forma independiente de las otras). La jornada de atención del hospital es de 24 horas.

(**a**) El costo de atender a una persona que está gravemente enferma es de \$10 y el de atender a una persona que no esté gravemente enferma es de \$2. Hallar el costo medio de una jornada de atención.

(**b**) Sabiendo que el costo de una jornada de atención fue de \$10, hallar la distribución de la cantidad de personas que llegaron al hospital en esa misma jornada.

7.23 ☣ Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 25 metros. La máquina corta el alambre en la primer falla detectada después de los 50 metros, pero detecta las fallas con probabilidad 0.9. Si entre los 50 y los 150 metros no detecta ninguna falla, la máquina corta el alambre a los 150 metros. Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.24 [*ver* **Ejercicio 7.13**] Lucas entra en un banco que tiene dos cajas independientes. Pablo está siendo atendido por el cajero 1 y Pedro por el cajero 2. Lucas será atendido tan pronto como Pedro o Pablo salgan de la caja. El tiempo, en minutos, que demora el cajero i en completar un servicio es una variable aleatoria exponencial de media 2^{3-i}, $i = 1, 2$. Hallar

(**a**) la probabilidad de que Pablo sea el primero en salir;

(**b**) la probabilidad de que Pablo sea el último en salir.

7.25 En hora pico, una autopista recibe tráfico de 3 entradas, A, B y C, en forma independiente, que tienen tasas de 30, 35 y 25 vehículos por minuto, respectivamente. De los vehículos que llegan por A o B, el 30 % se desvía por colectora (o sea, no van por la autopista). En la autopista hay un puesto de peaje (luego de las 3 entradas).

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que al peaje lleguen 3 autos en menos de 5 segundos?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen más de 5 autos hasta que pasa uno proveniente de la entrada A?

(**c**) Se sabe que en un lapso de 15 segundos pasaron por el peaje 20 vehículos. ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad de ellos haya pasado en los últimos 5 segundos?

(**d**) En el peaje se instala un contador de vehículos, pero el mismo funciona intermitentemente. Cada vez que funciona, el tiempo durante el cual lo hace no es fijo sino que es una variable $T_i \sim U(10, 15)$ segundos. Sea X_i la cantidad de vehículos registrados la i-ésima vez que funciona el dispositivo. La cantidad de veces que el dispositivo funciona durante un minuto es una variable N_j distribuida uniformemente a valores $\{1, 2, 3, 4\}$. Si cada una de las secuencias $\{T_i\}$, $\{X_i\}$ y $\{N_j\}$ son i.i.d., hallar la cantidad media de vehículos registrados por el dispositivo durante 1 hora.

7.26 ⚓ En la fila de un cajero automático hay personas esperando realizar una operación; cada vez que una persona termina su operación, la siguiente comienza la suya. Las personas son impacientes, e independientemente de lo que hagan las demás, cada una espera solamente un tiempo exponencial de tasa 1; luego del cual si no ha comenzado su operación se retira de la fila. Por otra parte, los tiempos consumidos en cada operación son independientes y exponenciales de tasa 10. Si una persona está utilizando el cajero, hallar la probabilidad de que la octava persona en la fila realice su operación.
