Probabilidad y Estadística - Práctica 5/12/22

Capítulo 11

Estimación por Intervalo

Definición 1. *Dada $X_1, \dots, X_n$ una m.a de una población con distribución $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$, un intervalo de confianza para θ de nivel $1-\alpha$ es un intervalo $(a(\underline{X}), b(\underline{X}))$ aleatorio, tal que*

$$\mathbb{P}(\theta \in (a(\underline{X}), b(\underline{X}))) = 1-\alpha$$

donde $1-\alpha$ es el nivel de confianza.

Método del Pivote

Dada $X_1, \dots, X_n$ una m.a de una población con distribución $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$, y sea $U = r(\underline{X}, \theta)$ una V.A cuya distribución no depende de θ. Sean a, b tales que $\mathbb{P}(a < U < b) = 1-\alpha$. Luego $\mathcal{S}(\underline{X}) = \{\theta : a \leq r(\underline{X}, \theta) \leq b\}$ es una región de confianza de nivel $1-\alpha$ para θ.

Ejercicio 1. *Un emisor transmite una señal de valor μ. El canal de comunicaciones corrompe la transmisión con un ruido normal aditivo $N \sim \mathcal{N}(0,1)$. El receptor recibe una señal de valor $X = \mu + N$. El emisor transmitió 9 veces la señal y el receptor recibió los siguientes valores:*

$$8.016,\ 8.488,\ 7.395,\ 9.011,\ 7.532,\ 7.841,\ 8.651,\ 6.917,\ 8.490.$$

En base a esa información muestral construir un intervalo de confianza de nivel 0.95 para el valor de la señal transmitida.

Resolución 1. *Sea*

$$X_i = \text{Señal i-ésima recibida por el transmisor.}$$

$$X_i = \mu + N \sim \mathcal{N}(\mu, 1).$$

Tenemos una m.a $X_1, X_2, \dots, X_9 \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$.

Necesitamos encontrar A, B tal que

$$\mathbb{P}(A < \mu < B) = 1-\alpha = 0.95$$

$A(\underline{X}),\ B(\underline{X})$

Cuando uno quiere un pivote, piensa en el estimador de maxima verosimilitud.

Buscamos un Pivote,

EMV de la media

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$U = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Buscamos un Pivote,

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

$$Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$U = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$ → Estandariza para

que no dependa
de μ

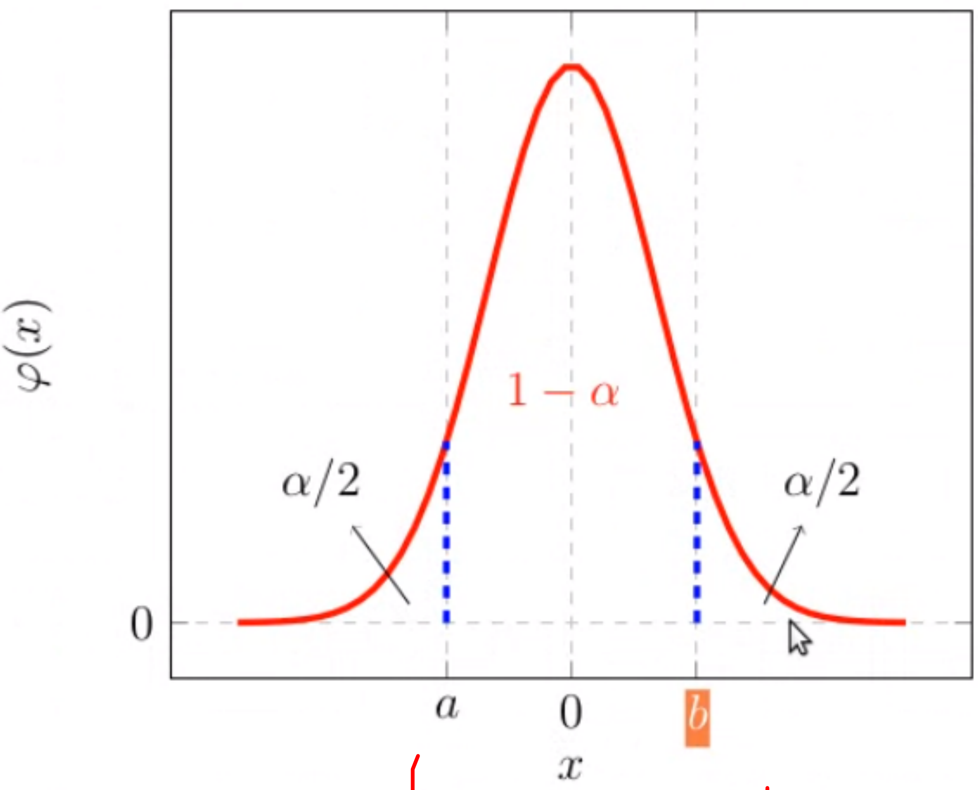
x

Luego,

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(a < \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} < b\right) = \mathbb{P}\left(z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} < z_{1-\alpha/2}\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

2

σ



Queres el mas
Chico posible

Mi intervalo será

$$I(\underline{X}) = \left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ahora, tenemos $n = 9$, $\bar{x} = 8.047$, $1-\alpha = 0.95 \to \alpha = 0.05$.

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$
$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = -1.96 = -z_{0.975} = -z_{1-\alpha/2}.$$

Dada la muestra, obtenemos

$$I(\underline{x}) = (7.40,\ 8.70).$$

Ejercicio 2. *La tensión de ruptura de ciertos capacitores obedece a una distribución normal. Se pusieron a prueba 10 capacitores ys obtuvieron las tensiones de ruptura*

$$196.73,\ 204.37,\ 201.57,\ 197.58,\ 205.89,\ 199.03,\ 201.75,\ 206.53,\ 199.31,\ 202.27.$$

En base a la información muestral construir una cota inferior de confianza de nivel 0.95 *para la media de la tensión de ruptura de dichos capacitores.*

Resolución 2. *Definamos la V.A*

$$X_i = \text{Tensión de ruptura del i-ésimo capacitor.} \qquad X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Nos piden un cota inferior para μ.

$$\mathbb{P}(\mu > A(\underline{X})) = 1 - \alpha.$$

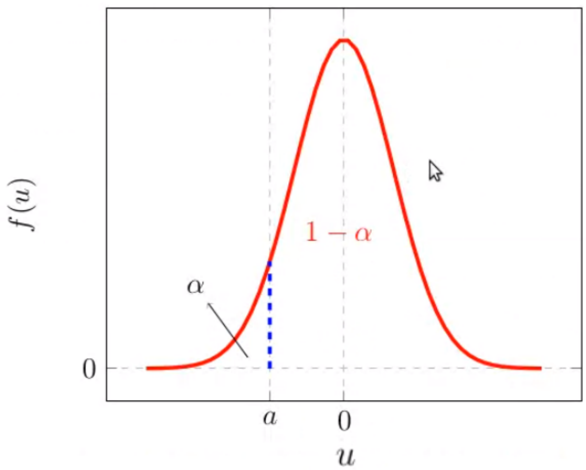
Proponemos un pivote,

$$U = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$$

se da vuelta por el (-), se ve a ojo

Luego,

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{S} < a\right) = 1 - \alpha$$



$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{S} < t_{n-1,\alpha}\right) = 1 - \alpha = 0.95, \quad \alpha = 0.05$$

Cuantil (Numero)

$$\mathbb{P}\left(\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha}\right) = 0.95$$

Por lo tanto,

$$CI(\underline{X}) = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha}$$

α

$\alpha = 0.05$

Por enunciado tenemos que $\alpha = 0.05$, $n = 10$, $\bar{x} = 201.503$, $s = 3.3745191$, $t_{9,0.05} = -1.8331$,

$$CI(\underline{x}) = 203.4591 \Big] \rightarrow a$$

Ejercicio 3. *Sea T una variable aleatoria con distribución exponencial de intensidad λ. Hallar un intervalo de confianza de nivel* 0.90 *para λ suponiendo que $\sum_{i=1}^{10} t_i = 29.51$*

Resolución 3. Debería buscar el EMV de λ

Nos piden un intervalo de confianza para λ, tal que

$$\mathbb{P}(A(\underline{X}) < \lambda < B(\underline{X})) = 1 - \alpha = 0.9$$

pero no nos sirve pues no se sabe la dist $\rightarrow \frac{n}{\bar{X}}$

asique probamos con uno suficiente $\Rightarrow \sum_i X_i$

Tenemos que $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim \Gamma(n, \lambda)$. No nos sirve como pivote, porque su distribución depende de λ. Propongo

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} T_i \sim \Gamma(n, 1/2)$$

se distribuye así por estos mismos argumentos

χ^2_{2n}

Otra opción

Propongo, $\min(T_1, T_2, \ldots, T_n) \sim \mathcal{E}(\lambda n)$

$$\lambda \min(T_1, T_2, \ldots, T_n) \sim \mathcal{E}(n)$$

Esto no serviría porque no sabemos nada del min

$$T_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

$$W = \lambda T_i$$

$$\mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(\lambda T_i \leq w) = F_{T_i}(w/\lambda) = 1 - e^{w}, \quad w > 0$$

el pivote se arma siempre de forma inteligente con los datos del enunciado jajajaja (si te di
minimo, como podes ver nada que ver con el estadistico suficiente/maxima verosimilitud)

Tenemos que $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim \Gamma(n, \lambda)$. No nos sirve como pivote, porque su distribución depende de λ. Propongo

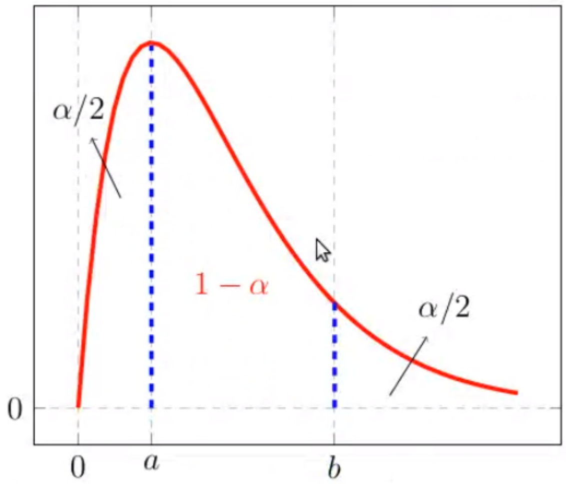
$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} T_i \sim \Gamma(n, 1/2) \equiv \chi^2_{2n}$$

Se puede laburar con la gamma tambien, esto es por cuestion de si solo tenes las tablas pero con la gamma de (n,1) tambien anda

$$2\lambda n \bar{T} \sim \chi^2_{2n}$$

Promedio porque sí

$$\mathbb{P}(a < 2\lambda n\bar{T} < b) = 1-\alpha$$



$$\mathbb{P}(\chi^2_{2n,\alpha/2} < 2\lambda n\bar{T} < \chi_{2n,1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\chi^2_{2n,\alpha/2}}{2n\bar{T}} < \lambda < \frac{\chi^2_{2n,1-\alpha/2}}{2n\bar{T}}\right)$$

El intervalo será

$$IC(\underline{X}) = \left(\frac{\chi^2_{2n,\alpha/2}}{2n\bar{T}}, \frac{\chi^2_{2n,1-\alpha/2}}{2n\bar{T}}\right).$$

Intervalos de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$

Si $\hat{\theta}$ es el EMV

$$\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}-\theta) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

Si $\hat{\theta}$ es consistente para θ (por Slutsky) vale que

$$\sqrt{nI(\hat{\theta})}(\hat{\theta}-\theta) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

Ejercicio 5. *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $\mathcal{G}(p)$. Hallar un intervalo de confianza de nivel 0.9 para p.*

Resolución 5. *Recordar que*

EMV

Siempre se parece un poco a la Var

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}, \qquad I(p) = \frac{1}{p^2(1-p)}.$$

$$\sqrt{nI(p)}(\hat{p}-p) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\sqrt{I(p)}(\hat{p}-p) \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 0.9$$

↳ pero no lo quiero despejar!

Por Slutsky

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\sqrt{I(\hat{p})}(\hat{p}-p) \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 0.9$$

Despejando se obtiene que

$$\mathbb{P}\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{p})}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{p})}}\right) = 0.9$$

$$\mathbb{P}\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{n}}\right) = 0.9$$

El intervalo será

$$IC(\underline{X}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

O

Ejercicio 4. *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con $X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$. Obtener un intervalo de confianza asintótico para θ de nivel $1-\alpha$.*

Tarea para el hogar

Resolución 4.

$$\theta_{EMV} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

$$U = \frac{\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\theta}.$$

11.7 ⟹ min