$\underline{X}^{(n)}$	muestra aleatoria (vector aleatorio)
$\underline{x}^{(n)}$	realizacion de la muestra (numeros)

familia parametrica

$$\mathcal{F} \{ F_\theta(x) \,/\, \theta \in \Theta \}$$

condiciones

- $\Theta \neq$ vacio
- $F_\theta(x)$ son distinguibles segun θ $(\theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow F_1 \neq F_2)$

todas las distribuciones (vistas) son parametricas

---

funcion de verosimilitud

$$L_\theta(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

---

familias regulares

- $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ es abierto
- el soporte de $f_\theta(x)$ no depende del parametro θ

---

fam parametrica $\longrightarrow$ fam regular

$\downarrow$

fam exponencial

$$f_\theta(x) = A(\theta)\, e^{\sum_{i=1}^{k} c_i(\theta) r_i(x)}\, h(x)$$

---

teorema de Factorizacion

$$f_\theta(\underline{x}) = g(r(\underline{x}), \theta)\, h(\underline{x})$$

realizacion

$\boxed{T = r(\underline{X})}$ estadistico $\longrightarrow$ es sufic $\forall \theta$ si $X|_{T=t}$ es ind $\forall t$

Metodo de max verosimilitud

$$L(\theta|\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

Fam regular/exp

uso $\frac{\delta \ln f_\theta}{\delta\theta} = 0$

"maximo a mano"

Si $\hat{\theta}_{mv}$ para θ

$\Rightarrow \hat{\lambda}_{mv} = g(\theta_{mv})$ para $g(\theta) = \lambda$

$\boxed{\text{Guia 9}}$

9.1 Sea X_1, X_2, X_3 una muestra aleatoria de la distribución Bernoulli(p).

(a) Verificar que $T = X_1 + X_2 + X_3$ es un estadístico suficiente para p.

$T(\underline{X}) = X_1 + X_2 + X_3$

$X_i \sim Ber(p)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\underline{X} = x \mid T = t) = \frac{\mathbb{P}(\underline{X} = x \cap T = t)}{\mathbb{P}(T = t)}$$

$\circledast$ $T \sim Bin(3, p) \longrightarrow \mathbb{P}(T = t) = \binom{3}{t} p^t (1-p)^{3-t}$

$\circledast$ $\mathbb{P}(\underline{X} = x \cap T = t) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } T \neq \sum^3 x_i \\ \prod^3 p^x (1-p)^{1-x_i} & \text{si } T = \sum^3 x_i \end{cases}$

prob discretas

$$\frac{\prod^3 p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}}{\binom{3}{t} p^t (1-p)^{3-t}} = \frac{\cancel{p^{\sum^3 x_i}} \cancel{(1-p)^{3-\sum^3 x_i}}}{\binom{3}{t} \cancel{p^{\sum x_i}} \cancel{(1-p)^{3-\sum x_i}}} = \frac{1}{\binom{3}{t}} \Rightarrow \text{No depende de } \theta = p$$

T es suficiente

9.2 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución con densidad

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbf{1}\{x > \theta\}.$$

Verificar que $T = \min(X_1, \ldots, X_n)$ es un estadístico suficiente para θ.

$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}\{x>\theta\} \longrightarrow$ no es familia regular

$$L_\theta(x) = \prod^n e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}\{x>\theta\}$$
$$= \prod^n e^{\theta - x} \mathbb{1}\{x>\theta\}$$
$$= e^{n\theta - \sum^n x_i} \mathbb{1}\{\min(\underline{x})>\theta\}$$
$$= \underbrace{e^{-\sum x_i}}_{h(\underline{x})} \underbrace{e^{n\theta} \mathbb{1}\{\min(\underline{x})>\theta\}}_{g(r(\underline{x}),\theta)} \rightarrow \text{teorema de factorización}$$

$\theta - x_1 + \theta - x_2 = 2\theta - \sum x_i$

$r(\underline{x}) = T$ $\qquad$ T es estadístico suficiente

9.3 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución Poisson(λ) y sea $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Hallar la distribución de $\mathbf{X}_n|T = t$ y deducir que T es un estadístico suficiente para λ.

$T = \sum^n X_i$ $\qquad$ $X_n | T=t \sim ?$

$X_i \sim Poi(\lambda)$

$X = \dfrac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$

$X_n|_{T=\sum x_i} = (x_1, \; ,x_n)\,\Big|_{T=\sum^n x_i}$

$$L_\theta(x) = \prod^n \frac{\mu^{x_i} e^{-\mu}}{x!} \mathbb{1}\{x \geq 0\}$$
$$= \frac{\mu^{\sum^n x_i} e^{-n\mu}}{\prod^n x_i!} \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) \geq 0\}$$
$$= \underbrace{\frac{\mathbb{1}\{\min(\underline{x})\geq 0\}}{\prod^n x_i!}}_{h(\underline{x})} \underbrace{\mu^{\sum^n x_i} e^{-n\mu}}_{g(r(x),\theta)}$$

$r(x) = \sum x_i$ es estadístico suficiente

9.4 Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son familias exponenciales a 1 parámetro: (**a**) Bernoulli(p); (**b**) Pascal($4, p$); (**c**) Poisson(λ); (**d**) Exponencial(λ).

Bernoulli $X \sim Ber(p)$

$$p_X(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x} \, \mathbb{1}\{x \in \{0,1\}\}$$

$$= p^x \frac{(1-p)}{(1-p)^x} \, \mathbb{1}\{x \in \{0,1\}\}$$

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (1-p) \, \mathbb{1}\{x \in \{0,1\}\}$$

$$= e^{\underbrace{x}_{r(x)} \underbrace{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}_{c(\theta)}} \underbrace{(1-p)}_{A(\theta)} \underbrace{\mathbb{1}\{x \in \{0,1\}\}}_{h(x)}$$

X es Familia exponencial

Pascal $X \sim Pas(4, p)$

$$p_X(x) = \binom{x-1}{4-1} (1-p)^{x-4} \, p^4 \, \mathbb{1}\{x \geq 4\}$$

$$= \binom{x-1}{3} (1-p)^{x-4} \, p^4 \, \mathbb{1}\{x \geq 4\}$$

$$= \binom{x-1}{3} e^{(x-4)\ln(1-4)} \, p^4 \, \mathbb{1}\{x \geq 4\}$$

$$= \underbrace{p^4}_{A(\theta)} \, e^{\underbrace{x}_{r_1(x)} \underbrace{\ln(1-4)}_{c_1(x)} - \underbrace{4}_{r_2(x)} \underbrace{\ln(1-4)}_{c_2(\theta)}} \underbrace{\binom{x-1}{3} \mathbb{1}\{x \geq 4\}}_{h(x)}$$

$r(x) = x - 4$

$c(x) = \ln(1-4)$

Poisso $X \sim Poi(\mu)$

$$p_X(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \, \mathbb{1}\{x \geq 0\}$$

$$= \underbrace{e^{-\mu}}_{A(\theta)} \, e^{\underbrace{x}_{r(x)} \underbrace{\ln(\mu)}_{c(\theta)}} \underbrace{\mathbb{1}\{x \geq 0\}}_{h(x)}$$

Exponencial $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$p_X(x) = \underbrace{\lambda}_{A(\theta)} e^{\underbrace{-\lambda}_{c(\theta)} \underbrace{x}_{r(x)}} \underbrace{\mathbb{1}\{x \geq 0\}}_{h(x)}$$

9.5 Una moneda tiene una probabilidad de cara p, $p \in \{2/5, 4/5\}$. En 10 lanzamientos de la moneda se observaron exactamente 3 caras. Estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que en otros tres lanzamientos se observe exactamente una cara.

$p_1 = 2/5$
$p_2 = 4/5$
$n = 10$ lanzamientos

$X =$ "cant de caras observadas"

$\cancel{X \sim Bin(n,p) = Bin(10,p)}$

$X \sim Ber(p)$

$P_\theta(x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x} \mathbb{1}\{x \geq 0\}$

— Función de verosimilitud

$L(\underline{x}, \theta) = \prod f_\theta(x)$

esta en binomial es un solo experimento

$L(x=3, \frac{2}{5}) = f_{\frac{2}{5}}(3) = \binom{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^7 \boxed{\simeq 0{,}21}$ ⟶ max verosimilitud

$L(x=3, \frac{4}{5}) = f_{\frac{4}{5}}(3) = \binom{10}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^7 \boxed{\simeq 0{,}78\ 10^{-3}}$

$\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid \hat\theta = \frac{2}{5})$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{"1c en 3 intentos"}) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{54}{125}}$

Se usa el θ_{mv} que fue estimado

9.6 La cantidad de accidentes de tránsito por semana en la intersección de Paseo Colón y Estados Unidos tiene una distribución de Poisson de media λ.

(**a**) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de λ basado en una muestra aleatoria de la cantidad de accidentes durante n semanas. Mostrar que se trata de un estimador insesgado para λ y hallar la expresión de su error cuadrático medio.

(**b**) En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

En virtud de la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ y estimar la probabilidad de que en la semana del 24 de diciembre de 2017 no ocurra ningún accidente en la mencionada esquina.

a

$L(\underline{x}, \mu) = \max P_\mu(x) = \prod \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \mathbb{1}\{x \geq 0\}$ ⟶ es una fam regular

$= \mu^{\sum x_i} e^{-n\mu} \frac{\mathbb{1}\{\min_{(x)} \leq 0\}}{\prod x!}$

Fam regular

$\to \frac{\partial l_n}{\partial \mu} = \left(\ln\left(\mu^{\sum x_i}\right) + \ln\left(e^{-n\mu}\right) + \ln\left(\prod \frac{\mathbb{1}\{x>0\}}{x!}\right)\right)'$

$= \left(\sum x_i \ln(\mu) - n\mu + \ln\left(\prod \frac{\mathbb{1}\{x>0\}}{x!}\right)\right)'$

$= \frac{\sum x_i}{\mu} - n = 0$

$= \boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n}}$ media muestral

Sesgo $\quad B(\mu) = \mathcal{E}(\hat{\mu}) - \mu$

$$= \mathcal{E}\left(\frac{\sum^n x_i}{n}\right) - \mu$$

$$= \frac{1}{n} \sum^n \mathcal{E}(x_i) - \mu$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\mu - \mu = 0 \longrightarrow \mu \text{ es insesgado}$$

$$\Rightarrow ECM(\hat{\mu}) = V(\hat{\mu}) - \underbrace{B^2(\mu)}_{\to 0} = E((\hat{\mu}-\mu)^2)$$

$$= V(\hat{\mu}) = V\left(\frac{\sum^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum V(x_i) = \frac{1\cancel{n}\mu}{n^{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{\mu}{n}}$$

$$\boxed{EMV(\hat{\mu}) = \frac{\mu}{n}}$$

(b) En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

En virtud de la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ y estimar la probabilidad de que en la semana del 24 de diciembre de 2017 no ocurra ningún accidente en la mencionada esquina.

b $\quad n=100$ semanas $\qquad$ valor de λ estimado $\hat{\lambda} = \frac{\sum^n X_i}{100}$

en 10 semanas $\to$ 1 accidente

en 29 " " $\to$ 2 accidentes

en 100 " " $\to$ 5 accidentes

} cada semana es ind a la otra

x_i = cant de accidentes por semana

$$\lambda_{mv} = \frac{\sum^n x_i}{100} = \frac{0\,10 + 1\,29 + 2\,25 + 3\,17 + 4\,13 + 5\,6}{100} \text{ ¿?}$$

$$\lambda_{MV} = \max_{\lambda} P_{\lambda}(\underline{x}) =$$

9.7 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución uniforme sobre el intervalo $[0, \theta]$.

(a) Hallar un estadístico suficiente para θ basado en $\mathbf{X}_n$.

(b) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en $\mathbf{X}_n$.

(c) Sea $\hat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ hallado en el inciso anterior. Mostrar que $\mathbf{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \frac{n}{n+1}\theta$ y $\mathbf{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ para concluir que $\hat{\theta}_n$ converge en media cuadrática a θ cuando $n \to \infty$.

$$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0, \theta)$$

(a) $f_\theta(x)$ no es Familia regular $\longrightarrow$ $f_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\}$

$$f_\theta(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 0\} \mathbb{1}\{\max(\underline{x}) < \theta\}$$

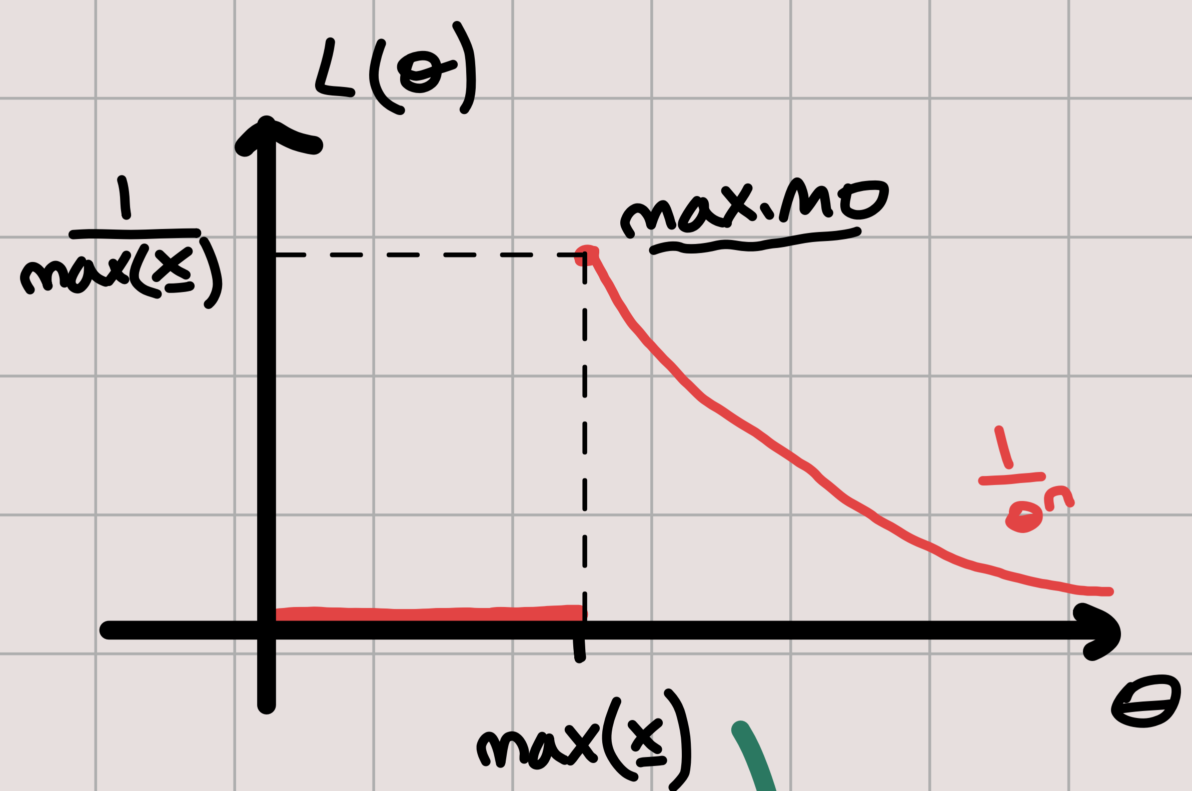
teorema de factorizacion $\longrightarrow$ $\underbrace{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{\max(\underline{x}) < \theta\}}_{g(r(\underline{x}), \theta)} \underbrace{\mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 0\}}_{h(\underline{x})}$

$$\mathbb{1}\{\underbrace{\max(\underline{x})} < \theta\}$$

$\boxed{r(\underline{x}) = \max(\underline{x})} \longrightarrow$ es estadistico suficiente

(b) $\theta_{MV} \longrightarrow L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{\max(\underline{x}) < \theta\}$

como no es regular hay que graficar



estoy viendo θ

numero

$$L(\theta) = \begin{cases} 0 & \max(\underline{x}) > \theta \\ \frac{1}{\theta^n} & \max(\underline{x}) < \theta \end{cases}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \max(\underline{x})}$$

(c)

(c) Sea $\hat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ hallado en el inciso anterior. Mostrar que $\mathbf{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \frac{n}{n+1}\theta$ y $\mathbf{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ para concluir que $\hat{\theta}_n$ converge en media cuadrática a θ cuando $n \to \infty$.

$$E_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{n}{n+1}\theta \qquad Var_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

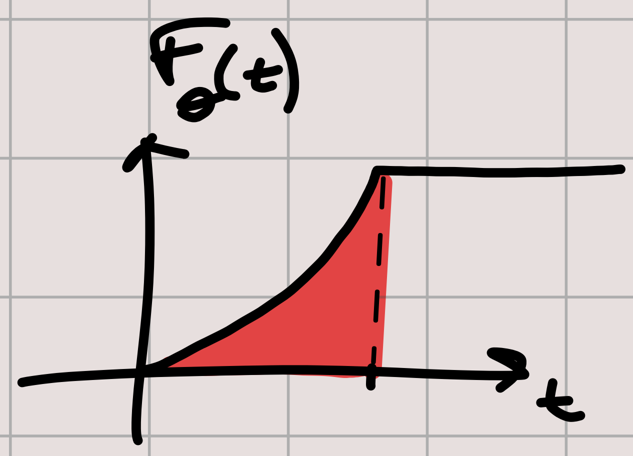
$$F_\theta(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{0<t<\theta\} + \mathbb{1}\{t>\theta\}$$

$\hat{\theta}$ es va

$$F_{\hat{\theta}}(t) = \mathbb{P}(\hat{\theta} \le t) = \mathbb{P}(X_1 \le t, X_2 \le t, \ , X_n \le t)$$

$$\underset{\text{muestra aleat (i.i.d.)}}{=} \mathbb{P}(X_1 \le t)\,\mathbb{P}(X_2 \le t) \quad \mathbb{P}(X_n \le t) \longrightarrow X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta)$$

$$F_\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n & \text{si} \quad 0<t<\theta \\ 1 & \text{si} \quad t \ge \theta \end{cases}$$



Distribución	Notación	$f_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}[a,b]$	$1/(b-a)$	$[a,b]$	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$

$$\frac{dF_\theta(t)}{dt} = n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}\mathbb{1}\{0<t<\theta\}$$

$$E(\hat{\theta}) = \int_0^\theta t\,\frac{n}{\theta^n}t^{n-1}\,dt = \frac{n}{\theta^n}\,\frac{\theta^{n+1}}{(n+1)} = \frac{\cancel{\theta^n}\,\theta}{\cancel{\theta^n}}\,\frac{n}{n+1} = \theta\,\frac{n}{n+1} \longrightarrow \text{tiene sesgo}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta\, n}{n+1} \Rightarrow \theta \quad \text{L'Hopital} \longrightarrow \text{asintoticamente insesgado}$$

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta(\hat{\theta}) = \theta$$

$$Var_\theta(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - E^2(X)$$

$$= \int_0^t t^2\,\frac{n}{\theta^n}t^{n-1}\,dt - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2$$

$$= \frac{n}{\cancel{\theta^n}}\,\frac{\theta^{\cancel{n}+2}}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \boxed{\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} 0$$

teorema

$$\left.\begin{array}{l} Var_\theta(\hat\theta) \to 0 \\ E_\theta(\hat\theta) \to \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \hat\theta \text{ es débilmente consistente}$$

$$ECM(\hat\theta) = Var(\hat\theta) + B^2(\theta)$$

$$= \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \Rightarrow 0 + 0 = 0$$

$$E(\hat\theta) - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = \theta\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{\theta(\cancel{n} - \cancel{n}+1)}{n+1}$$

$$= \boxed{\frac{\theta}{n+1}}$$

Si converge en media cuadrática

⊛ Calculo ECM y veo límite $n \to \infty$

tiene que dar 0

9.8 El tamaño, X (en GB), de ciertos archivos es una variable aleatoria cuya densidad es

$$f_\theta(x) = 3\theta^3 x^{-4} \mathbf{1}\{x \geqslant \theta\}, \qquad \theta > 0.$$

(a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de los tamaños de n archivos.

(b) Hallar expresiones para la esperanza y la varianza del estimador de máxima verosimilitud de θ.

(c) Mostrar que el estimador de máxima verosimilitud de θ converge en media cuadrática al verdadero valor de θ.

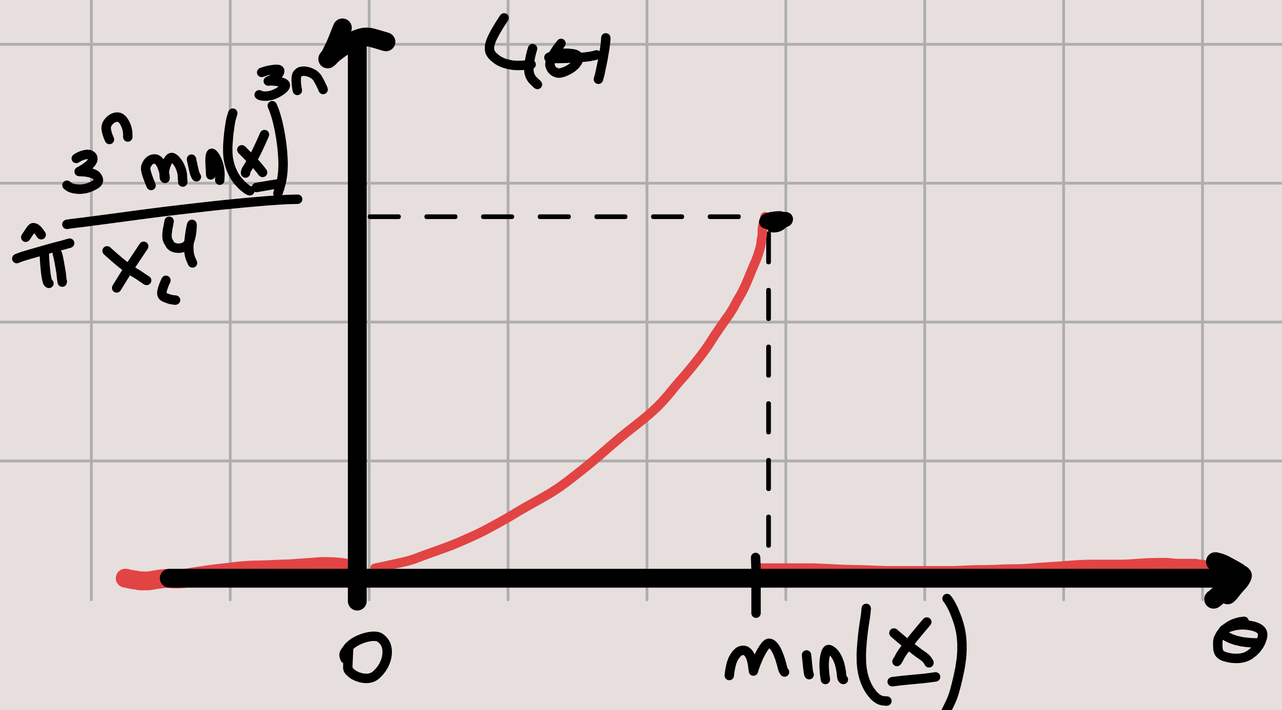
a) $f_\theta(x) = \dfrac{3\theta^3}{x^4} \mathbb{1}\{x > \theta\}$, $\theta > 0$ $\rightsquigarrow Par(\theta, 3)$

no es flia regular!

$$f_\theta(\underline{x}) = \frac{3^n \theta^{3n}}{\prod x_i^{4n}} \mathbb{1}\{\min\{\underline{x}\} > \theta\}$$

$$L(\theta) = \frac{3^n \theta^{3n}}{\prod x_i^4} \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > \theta\} \longrightarrow \text{graficar}$$

4n



$$\boxed{\hat\theta_{MV} = \min\{\underline{x}\}}$$

b $E(\hat{\theta}_{mv})$ $\quad \hat{\theta} = \min(\underline{X})$

$$F_{\hat\theta}(t) = \mathbb{P}(\min(\underline{X}) \leq t)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\min(\underline{X}) > t)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)\,\mathbb{P}(X_2 > t) \quad \mathbb{P}(X_n > t)$$
$$= 1 - \prod^{n} \mathbb{P}(X_i > t)$$

$$\mathbb{P}(X_i > t) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq t) = 1 - \int_\theta^t \frac{3\theta^3}{x_i^{-4}}\,dx = 1 - \frac{\cancel{3}\theta^3}{\cancel{3}}\left(\frac{1}{\theta^3} - \frac{1}{t^3}\right)$$
$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\theta^3}{t^3} = \boxed{\frac{\theta^3}{t^3}}$$

$$F_{\hat\theta}(t) \begin{cases} \left(\frac{\theta}{t}\right)^3 \\ 1 \end{cases}$$

9.10 La duración en años de cierto tipo de dispositivos es una variable aleatoria X con función intensidad $\lambda(x) = 3\theta^{-3}x^2\mathbf{1}\{x > 0\}$.

(a) Hallar un estadístico suficiente para θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n dispositivos.

a $\lambda(x) = 3\theta^{-3}x^2\,\mathbb{1}\{x>0\} \rightsquigarrow \frac{3x^2}{\theta^3} \rightsquigarrow \frac{3}{2}\,2\,\underbrace{\frac{x^2}{\theta^{2+1}}}$ Pot(2, x)

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t')\,dt'}\,\mathbb{1}\{x>0\}$$ (*)

$$-\int_0^x 3\theta^{-3}t^2\,dt = -\frac{x^3}{\theta^3}$$

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\frac{x^3}{\theta^3}}\,\mathbb{1}\{x>0\}$$

$$\frac{\partial F_\theta(x)}{\partial x} = \frac{3x^2 e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^3}}{\theta^3}\,\mathbb{1}\{x>0\} \sim We.(3,\theta) \quad \theta > 0,\ x >$$

$c = 3$
$\alpha = \theta$

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod^{n} \frac{3x_i^2}{\theta^3}e^{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^3}\,\mathbb{1}\{x>0\} \longrightarrow \text{es reg}$$

$$= \underbrace{\frac{3^n}{\theta^{n3}}}_{A(\theta)}\, e^{\overset{c(\theta)}{-\frac{1}{\theta^3}}\overset{r(x)}{\sum^n x_i^3}}\,\underbrace{\prod x_i^2\,\mathbb{1}\{\min(x)>0\}}_{h(x)}$$

$$\boxed{r(\underline{x}) = \sum^{n} X_i^n}$$

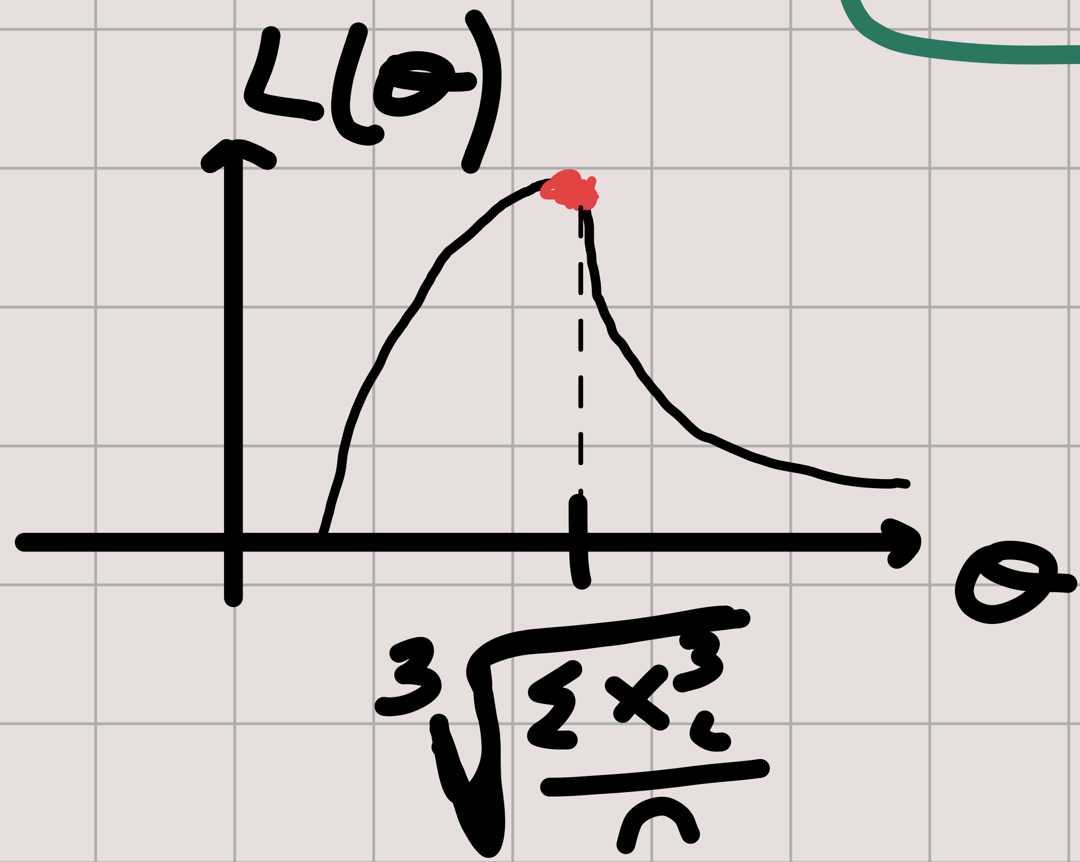
(b) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n dispositivos.

$$L(\theta) = \frac{3^n}{\theta^{n3}} \prod^n x_i^2 \, e^{-\frac{1}{\theta^3}\sum^n x_i^3} \longrightarrow \text{como es reg} \Rightarrow \frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \theta}$$

$$\ln(L(\theta)) = n\ln(3) - 3n\ln(\theta) + 2\sum \ln(x_i) - \frac{1}{\theta^3}\sum^n x_i^3$$

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \theta} = 0 - \frac{3n}{\theta} + 0 + \frac{3\sum^n x_i^3}{\theta^4} = 0$$

$$\frac{\cancel{3}\sum^n x_i^3}{\theta^{\cancel{4}3}} = \frac{\cancel{3}n}{\cancel{\theta}} \rightarrow \boxed{\sqrt[3]{\frac{\sum^n x_i^3}{n}} = \hat{\theta}_{mv}}$$



(c) Usando los números aleatorios

0.186, 0.178, 0.488, 0.255, 0.392, 0.234, 0.597, 0.205, 0.611, 0.651.

simular 10 valores de X cuando $\theta = 1$ y en base a esa información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ.

c) $\theta = 1 \longrightarrow F_\theta(x) = 1 - e^{-\frac{x^3}{\theta^3}} \mathbb{1}\{x>0\}$

$$F_1(x) = 1 - e^{-x^3} \quad \mathbb{1}\{x>0\}$$

$$\mu = 1 - e^{-x^3}$$

$$e^{-x^3} = 1 - \mu$$

$$-x^3 = \ln(1-\mu)$$

$\boxed{n=10}$ no hace falta pasarlo $\boxed{x^3 = -\ln(1-\mu)}$

simulo y obtengo

$$\hat{\theta}_{mv} = \left(\frac{\sum^{10} -\ln(1-\mu)}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}\left|\ln\left(\prod_{i=1}^{10}(1-\mu)\right)\right|^{\frac{1}{3}} = \hat{\theta}_{mv}$$