GUÍA II

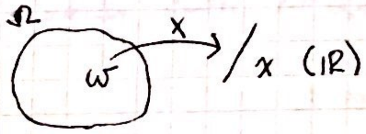
2.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de PROB. en el que

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ son v.a.

$\{X$ es va $\Leftrightarrow$ $\omega \in \Omega : X(\omega) \le \alpha\} \in \mathcal{A}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$



si $A_\alpha \in \mathcal{A}$ es v.a.

$\downarrow$

Todos los ω q' cumplen la condición

a) $X(\omega) = \omega$

posibles n° q' toman $X(\omega)$

$\uparrow$

como $\omega \in \Omega$.

$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 1 \\ 2 & \omega = 2 \\ 3 & \omega = 3 \\ 4 & \omega = 4 \\ 5 & \omega = 5 \\ 6 & \omega = 6 \end{cases}$ valores a evaluar

- $\alpha < 1$: $A_\alpha = \emptyset$

  todos los $\omega < 1$

- $1 \le \alpha < 2$: $A_\alpha = \{1\} \notin \mathcal{A}$

  ω's.

- $2 \le \alpha < 3$: $A_\alpha = \{1, 2\} \notin \mathcal{A}$

  con que uno no pertenezca ya está.

b) $X(\omega) = \mathbb{1}\{\omega \text{ es par}\}$

$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \text{ es par} \to \omega = 2,4,6 \\ 0 & \omega \text{ es impar} \to \omega = 3,5,1 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ mis valores a evaluar $\to$ los q' puede tomar α.

α toma valor menor a cero = vacío $\to$ no está ahí

$\uparrow$

$\left.\begin{array}{ll} \alpha < 0 : & A_\alpha = \emptyset \in \mathcal{A} \\ 0 \le \alpha < 1 : & A_\alpha = \{1,3,5\} \in \mathcal{A} \\ \alpha \le 1 : & A_\alpha = \{\Omega\} \in \mathcal{A} \end{array}\right\}$ es $\underline{\underline{\text{va}}}$

impar $\uparrow$ α toma valor cero

$\downarrow$

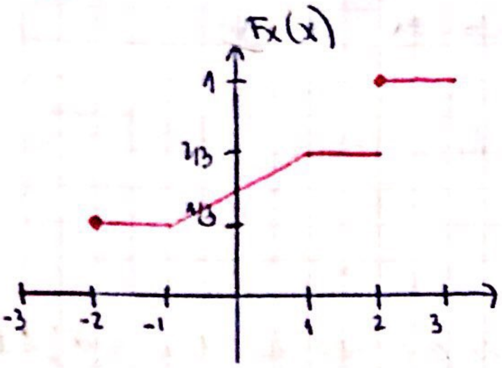
Puede tomar 0 y 1

c) $X(\omega) = \mathbb{1}\{\omega \in \{1,4\}\} = \begin{cases} 1 & \omega \in \{1,4\} \\ 0 & \omega \in \{2,3,5,6\} \end{cases}$.

$\alpha < 0 : A_\alpha = \emptyset$

$0 \le \alpha < 1 : A_\alpha = \{2,3,5,6\} \in \mathcal{A}$ $\quad$ no es va

(2.2) Sea X una v.a , $F_X(x) = P(X \leq x)$



FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN

• $F_X(x) = P(X \leq T)$ → FUNCIÓN ACUMULATIVA

si → es continua → PROB puntual es cero

→ es discontinua → PROB puntual valor del salto (longitud)

los puntos de disconti nuidad

→ átomos ⇒ $P(X=a)>0$ → masa positiva

a) ¿X concentra masa positiva?

Los puntos son los de discontinuidad

$\{x=-2\}$ y $\{x=2\}$

si quisiera sacar la P de esos puntos , son los saltos.

$P(X=-2) = 1/3$ $\quad P(X=2) = 1-\frac{2}{3} = 1/3$

$A=\{-2, 2\}$

b) $P(-2 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(-2) = 1 - 1/3 = 2/3$

"original" $P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

$P(-2 \leq X \leq 2) = P(-2 < X \leq 2) + P(X=-2)$

$= \underbrace{F_X(2) - F_X(-2)}_{2/3} + \frac{1}{3} \text{ salto} = 1$

• $P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) + P(X=a)$

• $P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) + P(X=a) - P(X=b)$

• $P(a < x < b) = P(a < x \leq b) - P(X=b)$

$P(-2 \leq X < 2) = P(-2 < X \leq 2) + P(X=-2) - P(X=2) =$

$= 2/3 + 1/3 - 1/3 = 2/3$

$P(X=a)$ = salto

$F_X(2)$ = gráfico

$P(-2 < X < 2) = P(-2 < X \leq 2) - P(X=2) = 2/3 - 1/3 = 1/3$

Scanned with CamScanner

c) $P(X \in (-2,-1)) = P(-2 < X < -1) = P(-2 < X \leq -1) - P(X=-1)$

$= F_X(-1) - F_X(-2) - P(X=-1) =$

$= 1/3 - 1/3 - 0 = 0$ ✓

gráfico

pq es continua en ese pedazito → sirve para PUNTUAL

$P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) =$

$= P(-1 \leq X < 1) + P(X=1) =$

$= -1/3 + 2/3 + 0 = 1/3$

$P(X \in (1,2)) = P(1 < X < 2) = P(1 < X \leq 2) - P(X=2) =$

$1 - 2/3 - 1/3 = 0$

si quiero q $X<2$ y además q' $X \leq 1{,}5$

d) $P(X \leq 1.5 \mid X < 2) = \dfrac{P(X \leq 1.5 \cap X < 2)}{P(X<2)} = \dfrac{P(X \leq 1{,}5)}{P(X<2)} =$

$P(X \leq 1{,}5) = F_X(1{,}5)$
$P(X<2) = F_X(2^-)$ IZQ
$P(X>2) = F_X(2^+)$ DER

$F_X(2^-) = F_X(2) - P(X=2)$
$F_X(2^+) = F_X(2) + P(X=2)$

$= \dfrac{F_X(1{,}5)}{F_X(2) - P(X=2)} = \dfrac{2/3}{1-1/3} = \dfrac{2/3}{2/3} = 1$

$X \leq 2$ y $X \leq 1.5$ } $X \leq 1{,}5$

$P(X \leq 1.5 \mid X \leq 2) = \dfrac{P(X \leq 1{,}5)}{F_X(2)} = \dfrac{F_X(1{,}5)}{F_X(2)} = \dfrac{2/3}{1} = 2/3$

e) $P(X=-2 \mid |X|=2) = \dfrac{P(X=-2)}{P(|X|=2)} = \dfrac{P(X=-2)}{P(X=2)+P(X=-2)} = \dfrac{1/3}{1/3+1/3} =$

INTERSEC ⇒ $X=-2$ y $X=2$ $X=-2$

$= \dfrac{1/3}{2/3} = 1/2$

$P(|X|=a) = P(X=a) + P(X=-a)$

2.3

3/8 V

5/8 R

3 V
5R

T=8

$\#\Omega = \frac{8}{4}$

a) 4 extracciones $\boxed{\text{con}}$ reposición → Hallar y graficar función PROB

PROB cte.

↓

Bolas verdes obs

Exito = todos bolas verdes

X: Bolas verdes.

Laplace = $\frac{\text{Favorables}}{\text{Totales}}$

$R(x) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ → Puede haber 4 verdes xq tiene repo

$P_x(0) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{(5)^4}{(8)^4} = \frac{625}{4096}$

$P_x(1) = \binom{4}{1}\left(\frac{5}{8}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right)^1 = \frac{375}{1024}$

↓

combinatorio → formas de escribir $\binom{4}{1}$

Calcu

4C1

BINOMIAL

$$\boxed{P_x(k) = \binom{m}{k}(p)^k(1-p)^{m-k}}$$

m = total tiros

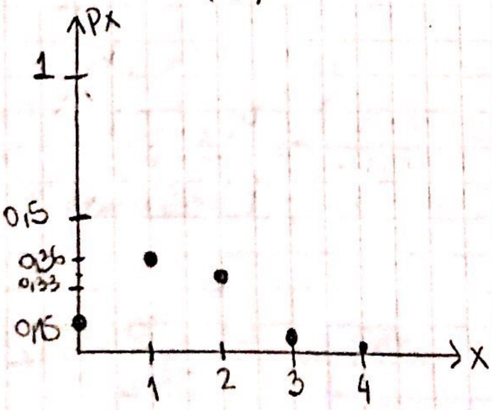
p = prob exito

K = valor quiero

$P_x(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{675}{2048}$

$P_x(3) = \binom{4}{3}\left(\frac{5}{8}\right)^1\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{135}{1024}$

$P_x(4) = \binom{4}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^0\left(\frac{3}{8}\right)^4 = \frac{81}{4096}$



BINOMIAL → contar éxitos en cant fija de ensayos independientes. EJ = extracción con repo.

↓

Experimento con 2 resultados posibles

Exito o FRACASO

↓

p>0 → se repite m veces

$X \sim \text{BIN}(m, p)$ — proba. p = exito, m = veces.

$$\boxed{P_x(k) = \binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}}$$

siendo $k \in R(x)$ — k = cant exito

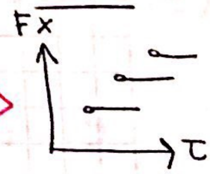
↓

rango

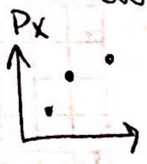
↓

posibles valores de X → imagen V.A

grafico de DISCRETA



escalonada



Nada puntos.

$R(x) = \{0,1,2,3\}$.

b) $m=4$ $N=8$ R=cant de objeto que sería éxito. = cant de verde q hay.
x = éxito
$R=3$

HiPERGEOMÉTRICA

extracciones sin repo

$$P(X=x) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{m-x}}{\binom{N}{m}}$$

X: cant éxitos
R: cant de objetos que → q' hay cumplen con cierta cond.
N: total de objetos
m: cantidad extraída

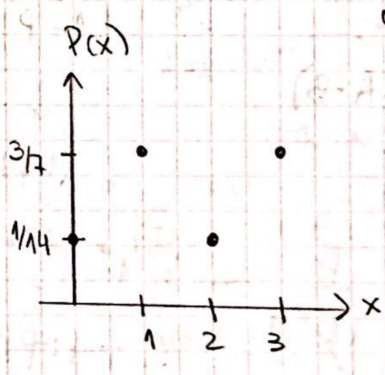
$$P(x=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{8-3}{4-0}}{\binom{8}{4}} = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{14}$$

$$P(x=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$$

$$P(x=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$$

$$P(x=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{1}}{\binom{8}{4}} = 1/14$$

OJO R → total de bolas verdes q' tengo.



2.4 moneda cargada $P(\text{cara}) = 5/8$ $P(\text{seca}) = 3/8$

a) N_K → siendo K, la K ésima cara. → hallar la función de probabilidad.

Pascal

Pas (K,p)

$X \sim Pas(K,p)$

$$P_{N_K}(x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}\,p^k$$

$$\boxed{P_{N_K}(m) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}\,p^k}$$

siendo $p = \frac{5}{8}$ q' halla cara

K = éxitos X = total lanzamientos

K = exitos
$p = \frac{5}{8}$ de salir cara
m = cant. de tiros

Hay K-1 → caras

$\underbrace{(m-1)}_{\text{total}} - \underbrace{(K-1)}_{\text{caras}}$ → secas.

b) N_1 sea par

m = total de tiros hasta 1ra cara → quiero q' sea par

↓ cant de tiros hasta 1ra cara

uso pascal ⇒ $P_{N_1}(m) = \binom{m-1}{0} (1-p)^{m-1} p^1 = (1-p)^{m-1} p^1$

⇓ se me transformó en geométrica

$N_1 \sim Geo(p)$

si es par $\underline{2k}$

m = 2k porq' quiero q' sea par

Para el c

$$\boxed{P(N_a = A \mid N_b = B) = P(N_{(a-b)} = A - B)}$$

(*) ↓ con $a \geq b$, $A \geq B$

$$P(N_1 \text{ es par}) = \sum_{m \text{ par}} P_{N_1}(m) = \sum_{k=1}^{\infty} P_N(2k) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-1} p = \frac{p}{(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{(1-p)^2}_{x}\right]^k$$

↓ $(1-p)^{2k} \cdot (1-p)^{-1}$

OBS $\boxed{\frac{x_0}{1-x}}$ → resultado

$$= \frac{p}{\cancel{(1-p)}} \cdot \frac{\left[(1-p)^{\cancel{2}}\right]^1}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \boxed{\frac{3}{11}}$$

↓ $p = 5/8$

c) $P(N_1 = 3)$ y $P(N_2 = 5 \mid N_1 = 2)$

$P_{N_1}(3) = \binom{2}{0} (1-p)^2 \cdot p = 0{,}088$

porq como se q' salió cara el 2, empiezo de nuevo

$\underbrace{\bar{C}\, C \mid \bar{C}\, \bar{C}\, C}$ → $N_1 = 3$

$$P(N_2 = 5 \mid N_1 = 2) = \frac{P(N_2 = 5 \cap N_1 = 2)}{P(N_1 = 2)} = P(N_1 = 3) = 0{,}088$$

d) $P(N_1 > 3)$ y $P(N_1 > 5 \mid N_1 > 2)$

↓

$1 - P(N_1 \leq 3) = 1 - \overset{0,625}{P(N_1 = 1)} - \overset{0,234}{P(N_2 = 2)} - \overset{0,088}{P(N_3 = 3)} \cong 0{,}053$

uso (*) → $P(N_1 > 5 \mid N_1 > 2) = P(N_1 > 3) \cong 0{,}053$

e) $P(N_2 > 3) = 1 - P(N_2 \leq 3) = 1 - P(N_2 = 1) - P(N_2 = 2) - P(N_3 = 3) \cong 0{,}317$

$P(N_2 > 5 \mid N_2 > 2) = P(N_2 > 3) =$

2.5 N: cantidad de partículas α emitidas por seg

$N \sim Po(\alpha)$

μ = media = $1/2$

Poisson

$$\frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!}$$

a) emita + de 3 por segundo

$$P(N>3) = 1 - P(N\leq 3) = 1 - (P(N=0) + P(N=1) + P(N=2) + P(N=3)) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot e^{-1/2}}{0!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 e^{-1/2}}{1!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-1/2}}{2!}$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{-1/2}}{3!} = 1 - 0{,}6065 - 0{,}3033 - 0{,}0758 - 0{,}0126 =$$

$2n \rightarrow$ par

$2n+1 \rightarrow$ impar

$$P(N>3) = 1{,}8 \times 10^{-3}$$

b) $P(N \text{ sea impar}) = P(2m+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1} \cdot e^{-1/2}}{(2m+1)!} =$

↑ Poisson con $2n+1$

$$= e^{-1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!} = e^{-1/2} \cdot \frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{2} =$$

$$= e^{-1/2} \cdot \operatorname{senh}(1/2) = \boxed{0{,}32}$$

Serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^m = \frac{x^0}{1-x}$$

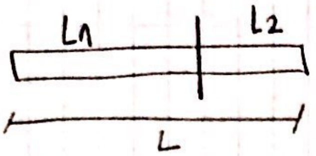
Serie exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} =$$

$$\underset{(\text{par})}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2m!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} , \quad \underset{(\text{impar})}{\operatorname{senh} x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Scanned with CamScanner

(2.6) Long pieza más larga $>$ 3. long chica.



$P(L_1 > 3L_2) =$

UNIFORME → se sortea uniformemente entre 0 y L.

si $L_2 > 3L_1$ y $P(L_1 + L_2) = 1$.

$1 - L_1 > 3L_1$

$1/4 > L_1 > 0$ y $1/4 > 1 - L_2$

$-3/4 > -L_2$

$\frac{3}{4} > L_2 > 0$.

son disjuntos.
↓

$P(1/4 > L_1 > 0 \cup 3/4 > L_2 > 0)$

$P(1/4 > L_1 > 0) \cup (3/4 > L_2 > 0) =$

long del intervalo

$1/4 + 1/4 = \boxed{1/2}$

CONTINUA

UNIFORME

$X \sim U(a,b)$

$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}\{x \in (a,b)\}$
densidad

$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}\{a \leq x < b\} + \mathbb{1}\{x \geq b\}$.
distribución

$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a)$

(2.7) X. va $2x \, \mathbb{1}\{0 \leq x \leq 1\}$

suma de los primeros 2 es 3

$0,\underline{a}\ \underline{b}$

Calcular prob → 1er dígito sea 2.

$a+b = 3$ y $a = 2$

A: $a = 2$
B: $a + b = 3$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B) \Rightarrow$

a	b	
0	3	→ (0,03 , 0,04)
1	2	(0,12 , 0,13)
2	1	(0,21 , 0,22)
3	0	(0,30 , 0,31)

$P(A \cap B) \to a = 2 \ \ b = 1$

intervalo ⇒ $(0,21 , 0,22)$

$P(0{,}21 \leq x \leq 0{,}22) = \int_{0,21}^{0,22} 2x\,dx = x^2 \Big|_{0,21}^{0,22} = \frac{43}{10000}$

$$P(B) = P(0{,}03 < x < 0{,}04) + P(0{,}12 < x < 0{,}13) + P(0{,}21 < x < 0{,}22) + P(0{,}3 < x < 0{,}4)$$

$$P(B) = x^2 \Big|_{0{,}03}^{0{,}04} + x^2 \Big|_{0{,}12}^{0{,}13} + x^2 \Big|_{0{,}21}^{0{,}22} + x^2 \Big|_{0{,}30}^{0{,}31} =$$

$$P(B) = \frac{7}{10000} + \frac{1}{400} + \frac{43}{10000} + \frac{61}{10000}.$$

$$P(A|B) = \frac{4{,}3 \times 10^{-3}}{17/1250} = \frac{43}{136} = 0{,}316.$$

2.8 T_k es mi va

~~tiemp~~ k = cantidad de partículas.

τ = tiempo

$$f_{T_k} = \frac{(1/2)^k}{(k-1)!} \tau^{k-1} e^{-\tau/2} \mathbb{1}\{\tau > 0\}$$

a) $\underbrace{P(T_1 > 3)}_{(3 < \tau < \infty)} = \int_3^\infty f_{T_1}(\tau)\, d\tau \quad k=1$

$$\int_3^\infty \frac{(1/2)^k}{(k-1)!} \tau^{k-1} e^{-\tau/2}\, d\tau =$$

$$\int_3^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2}}\, d\tau = \frac{1}{2}\int_3^\infty e^{-\tau/2}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(-\cancel{2}\, e^{-\tau/2}\Big|_3^\infty\right) = -\underbrace{e^{-\infty/2}}_{0} + e^{-3/2} = \boxed{e^{-3/2}}$$

continua

Gamma

$\Gamma(\nu, \lambda) \sim T$

$$f_{T_m}(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \lambda e^{-\lambda\tau} \mathbb{1}\{\tau > 0\}.$$

$$P(T > \tau) = e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}$$

$$P(T \le \tau) = F_T(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}$$

$$P(T_1>5 \mid T_1>2) = \frac{P(T_1>5 \cap T_1>2)}{P(T_1>2)}$$

Si pido que

$\underbrace{T_1>5 \text{ y } T_1>2}_{T_1>5}$

$$= \frac{P(T_1>5)}{P(T_1>2)} = \frac{\int_5^{\infty} \frac{1}{2} e^{-T/2}\, dT}{\int_2^{\infty} 1/2\, e^{-T/2}\, dT}$$

$\frac{1}{2} e^{-T/2} \rightarrow T_1$

$$= \frac{e^{-5/2}}{e^{-2/2}} = \frac{e^{-5/2}}{e^{-1}}$$

esta es expo por eso lo cumple

"Perdida de memoria"

$P(X > s+T \mid X > s) = P(X>\tau)$

$\downarrow$

solo para exponenciales y geometricos.

b) $P(T_3>3)$

ahora

$T_3 \rightarrow \quad f_{T_3}(\tau) = \frac{(1/2)^3}{2!} \tau^2 e^{-\tau/2}$

$\downarrow$

gamma

chequeo gamma $\downarrow$

$$\frac{(\lambda\tau)^{m-1}}{m-1!} \lambda e^{-\lambda\tau} =$$

$\lambda = 1/2$

$m = k = 3$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\tau\right)^2}{2!} 1/2\, e^{-1/2 T} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{2!} t^2 e^{-1/2 \tau}$$

dos meses

$$P(T>3) = e^{-\frac{1}{2}3} \sum_{0}^{2} \frac{\left(\frac{1}{2}.3\right)^k}{k!} =$$

$$P(T>3) = e^{-3/2} \left(\frac{(3/2)^0}{0!} + \frac{(3/2)^1}{1!} + \frac{(3/2)^2}{2!} \right) =$$

$$P(T>3) = e^{-3/2} \left(1 + 3/2 + 9/8 \right) =$$

$$\boxed{P(T>3) = 0{,}81}$$

$$P(T_3>5 \mid T_3>2) = \frac{P(T_3>5)}{P(T_3>2)} = 0{,}587$$

$\underbrace{T_3>5 \text{ y } T_3>2}_{T_3>5}$

T_3 es gama

$$P(T_3>5) = e^{-1/2 \cdot 5} \sum_{k=0}^{2} \frac{(\frac{1}{2} \cdot 5)^k}{k!}$$

$$P(T_3>5) = e^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{(\frac{5}{2})^0}{0!} + \frac{(\frac{5}{2})^1}{1!} + \frac{(\frac{5}{2})^2}{2!} \right) = 0{,}54$$

$$P(T_3>2) = e^{-1} \left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} \right) = 0{,}92$$

2.9 MOSTRAR q' $\exists$ V.A Z tal que.

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

NORMAL

$$F_Z(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)\, dT$$

$$f_Z(z) = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 z^2}$$

estandar $(0,1)$

$(\mu, \sigma^2) = (0,1)$

a) $\Phi(0) = 0{,}500$ $\quad \Phi(3) = 0{,}99865$

$\Phi(1) = 0{,}53983$ $\quad \Phi(4) = 1$

$\Phi(2) = 0{,}97725$ $\quad \Phi(5) = 1$

$\Phi(6) = 1$

b) $\alpha \in 0{,}5$ $\quad \alpha \in 0{,}75$

$Z_\alpha = 0$ $\quad Z_\alpha = 0{,}68$

$Z_{0,9} = 1{,}29$ ...

$\boxed{\phi(a) + \phi(-a) = 1}$

c) $P(-0{,}43 < Z < 1{,}32) = \phi(1{,}32) - \phi(-0{,}43) =$

$\phi(1{,}32) - (1 - \phi(0{,}43)) = 0{,}573.$

$P(1{,}28 < Z < 1{,}64) = \phi(1{,}64) - \phi(1{,}28) = 0{,}0498$

$P(|Z| < 1{,}64) = P(-1{,}64 < Z < 1{,}64) = 0{,}899$

d) $P(z<a) = 0{,}05 \rightarrow a =$

$\Phi(a) = 0{,}05 = 1 - 0{,}95 = \Rightarrow a = -1{,}65$

muestra

busco $1 - 0{,}95$

$P(z>b) = 0{,}1 = 1 - \Phi(b) \Rightarrow b = -1{,}2816$

$P(|z|<c) = P(-c<z<c) = 0{,}95$

$P(c) - P(-c) = 0{,}95$

$2P(c) - 1 = 0{,}95$

$P(c) = 0{,}975 \rightarrow \boxed{c = 1{,}96}$

2.10 Sea Z una variable normal estandar.

$\downarrow X = Z^2$ $\quad$ continua $\quad$ $N(\mu, \sigma^2) = N(0,1)$

a) Función distribución usando ϕ

$\Phi z = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)\,dt \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P(z^2 \leq x)$

$x = z^2$ $\qquad = P(-\sqrt{x} \leq z \leq \sqrt{x}) =$

$\sqrt{x} = |z|$ $\qquad \phi(\sqrt{x}) - \phi(-\sqrt{x}) = 2\phi(\sqrt{x})$

$-\sqrt{x} < z < \sqrt{x}$

$$\boxed{F_X(x) = 2\phi(\sqrt{x})}$$

b) $f_X(x) = \frac{dF_X}{dx} = \cancel{2}\phi'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-1/2\,x}$

c) $\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x}\, dx = \sqrt{2\pi}$ → con cambio de variable

↗ gamma

$y = 2x$

$dy = 2\,dx$

$x^{-1/2} = \sqrt{2}\, y^{-1/2}$

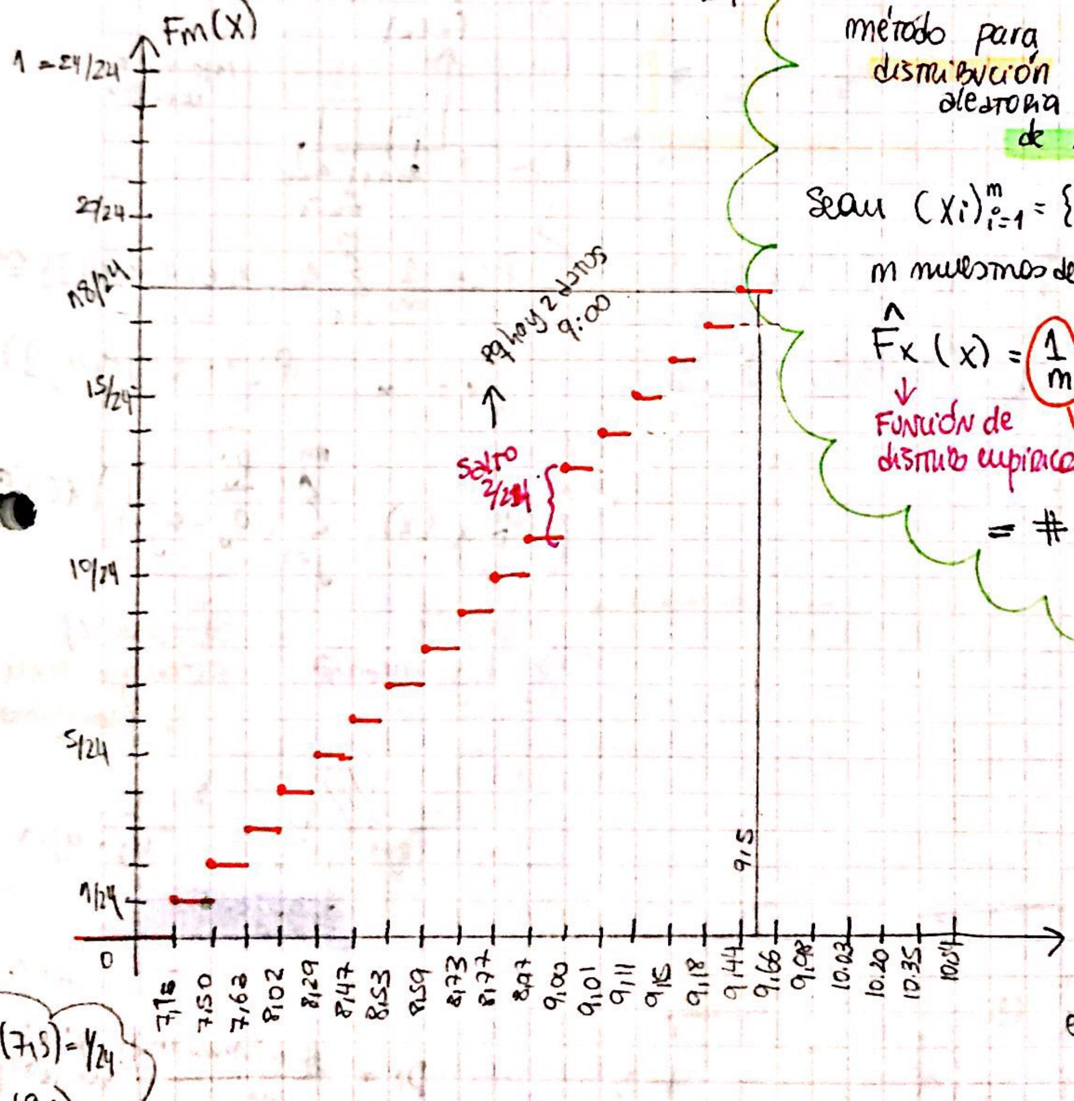
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} y^{-1/2} e^{-y/2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

2.11 Precio en dólares del kilo de asado → 24 carnicerías

a) m carnicerías

X = precio del kg. saltos = $\frac{1}{24}$



en 10,54 y 1

Función de distribución empírica.

método para estimar la función distribución de una variable aleatoria, a partir de un conjunto de muestras de la variable.

Sean $(x_i)_{i=1}^{m} = \{x_1, x_2, \dots x_m\}$ los m muestras de la v.a. X.

$$\hat{F}_X(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}\{x_i \leq x\}$$

Función de distrib. empírica

$\frac{1}{m}$ → saltos

$$= \frac{\#\{(i = 1, 2, \dots m \,/\, x_i \leq x)\}}{m}$$

cant. m de muestras menores que x.

OBS.

$F_m(7{,}15) = 1/24$

$F_m(9{,}5)$ ↓ miro gráfico

$$P(X > 9{,}5) = 1 - P(X \leq 9{,}5) = 1 - F_m(9{,}5) =$$

$$= 1 - \frac{18}{24} = 1/4 = \boxed{0{,}25}$$

Scanned with CamScanner

b) Usando los intervalos con extremos.

7,1 , 7,85 , 8,35 , 9,65 , 10,15 , 10,90 .

Hallar función histograma.

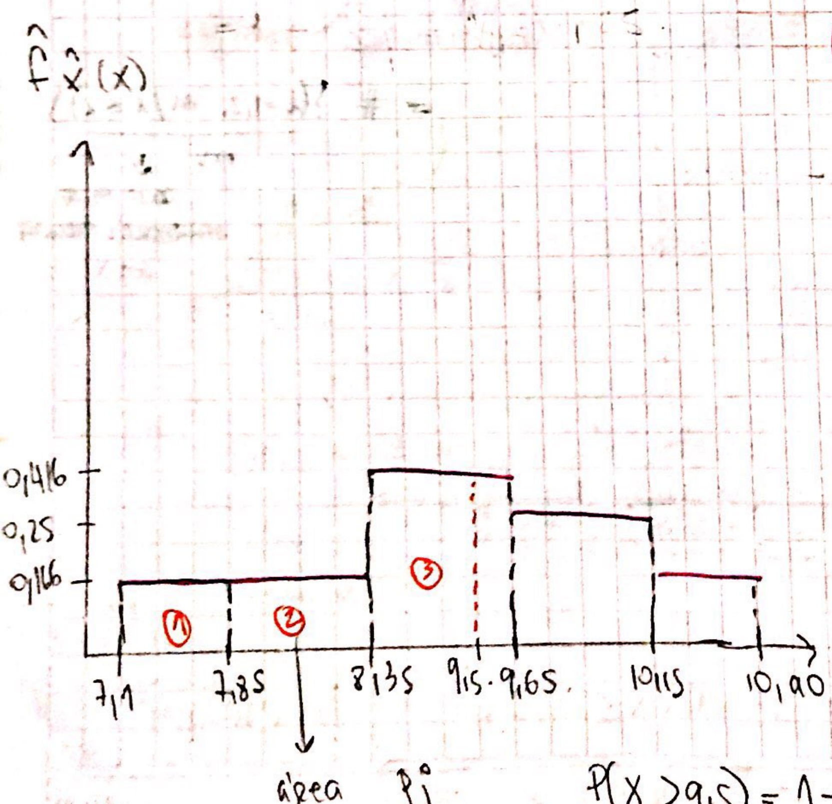
$(a_{j-1}, a_j]$	$l_j = a_j - a_{j-1}$	f_j (nº de muestras en el int)	p_j	h_j ($\hat{f}_X$)
(7,1 , 7,85]	0,75	3	$\frac{3}{24} = 0{,}125$	$\frac{0{,}125}{0{,}75} = 0{,}166$
(7,85 , 8,35]	0,5	2	2/24	$0{,}16\overline{6}$
(8,35 , 9,65]	1,3	13	13/24	$0{,}41\overline{6}$
(9,65 , 10,15]	0,5	3	3/24	0,25
(10,15 , 10,90]	0,75	3	3/24	$0{,}16\overline{6}$

$p_j = \frac{f_j}{m}$

$h_j = \frac{p_j}{l_j}$

$P(X > 9{,}5) = 1 - P(X \leq 9{,}5)$

$\boxed{P(X > 9{,}5) = 0{,}3141}$



$P(X > 9{,}5) = 1 - P(7{,}15 < X \leq 9{,}5) = 1 - (Á① + Á② + Á③)$

$1 - (0{,}2075 + 0{,}4784) = 0{,}3141$

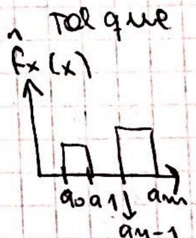
FUNCIÓN HISTOGRAMA

("gráfico de barras")

método p/ estimar funciones de densidad, a partir de un conjunto de muestras de la variable aleatoria.

sean $(x_i)_{i=1}^{m} = \{x_1, \dots, x_m\}$ las m muestras.

sea $(a_j)_{j=1}^{m}$ una partición tal que $a_0 < a_1 \dots < a_m$



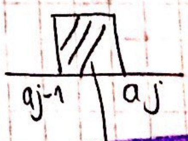
$p_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}\{x_i \in [a_{j-1}, a_j]\} \cong \mathbb{P}(X \in [a_{j-1}, a_j])$

$j = 1, 2, \dots m$

$\hat{f}_X(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j}{a_j - a_{j-1}} \mathbb{1}\{x \in [a_{j-1}, a_j)\}$

función histograma

altura de c/ rectángulo para c/ categoría



$h = \frac{p_j}{a_j - a_{j-1}}$

área = p_j

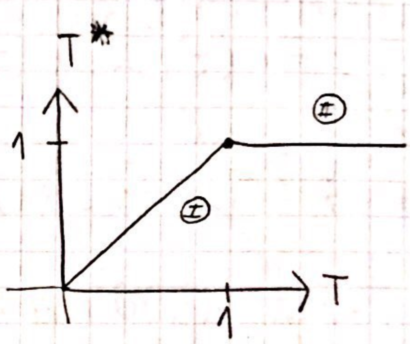
$p_j = \frac{\#\text{ nº muestras q' caen en c/a categoría}}{m}$ (f_j)

2.12 Sea T: duración en años del tiempo de trabajo sin fallos de un sistema electrónico.

$$F_T(t) = (1 - e^{-t}) \mathbb{1}\{t > 0\}.$$

a) $T^* = \min(T, 1)$

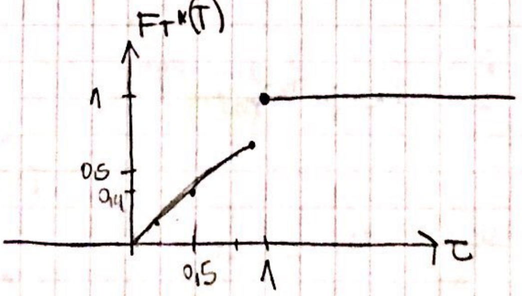
$$T^* = \begin{cases} T & \text{si } T < 1 \quad \text{I} \\ 1 & \text{si } T > 1 \quad \text{II} \end{cases}$$



si $T < 1 \to T^* = T \to F_{T^*}(t) = (1 - e^{-t}) \mathbb{1}\{t > 0\}$

si $T > 1 \to T^* = 1 \to 1$

$$F_{T^*}(T) = \begin{cases} F_T(T) & 0 < T < 1 \\ 1 & T > 1 \\ 0 & T < 0 \end{cases}$$



$f_T(1) = 0{,}63$

$f_T(0{,}5) = 0{,}4$

$f_T(0{,}2) = 0{,}18$

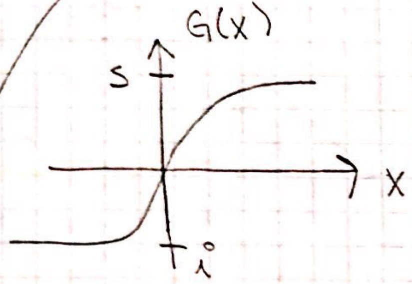
b) $P(T^* = 1) = 0{,}37 \rightsquigarrow$ salto

(2.13) Sea X. v.a $F_X(x) = P(X \leq x)$ estrictamente creciente.

Hallar expresión para las func. distr. de las siguientes va.

a) $T = G(X)$ $\quad G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f. continua, estrict creciente.

$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(G(x) \leq t) \quad t \in \mathbb{R}$



$Ym(G) = G(\mathbb{R}) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : y = G(x) \}$

$s = \sup Ym(G)$

$i = \inf Ym(G)$ $\quad s = \infty \quad i = -\infty$

como G es estrictamente creciente y continua $\rightarrow \exists\ G^{-1} : Ym(G) \to \mathbb{R}$.

$= P(\{ x \in \mathbb{R} / G(x) \leq t) = \{ X \leq x_0)$.

$P(X \leq x_0) = F_X(x_0)$.

⋮ carpeta

Teorema (1)

$$\boxed{F_T(t)} = P(T \leq t) = P(G(x) \leq t) = P(X \leq G^{-1}(t)) =$$

$$= \boxed{F_X(G^{-1}(t))}$$

Teorema 2

b) $\boxed{U = F_X(X) \Rightarrow U \sim U(0,1)}$

$$F_U(u) = u \, \mathbb{1}\{0 < u < 1\} + \mathbb{1}\{u \geq 1\}$$

c) $V = G^{-1}(F_X(X))$ con $G: \mathbb{R} \to [0,1]$ es continua y estrictamente creciente.

TEO 3

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(G^{-1}(F_X(X)) \leq v) = P(F_X(X) \leq G(v)) =$$

$$= P(X \leq F_X^{-1}(G(v))) = F_X(F_X^{-1} G(v)) = G(v)$$

Simulación de V.A

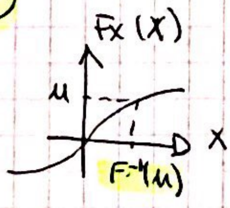
Teorema 1: $\boxed{X = F^{-1}(U)}$ con F^{-1} inversa generalizada

si $U \sim U(0,1)$

y F distri

$$\boxed{F^{-1}(u) = \min \{x \in \mathbb{R} \mid u \leq F(x)\}.}$$

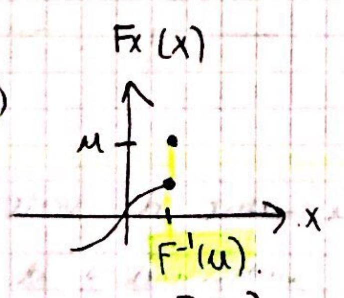
1 Si u cae en un tramo creciente invertible.



↓

La inversa generalizada es la inversa ordinaria.

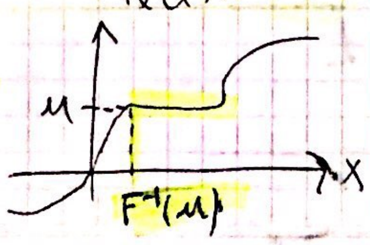
2



Si u cae en una discontinuidad.

$F^{-1}(u)$ = es el lugar del salto.

3



Si u cae en un tramo cte.

$F^{-1}(u)$ es el punto donde comienza el tramo.

Simulación

2.14 V.A con distribución uniforme sobre [0,1]

uso la exponencial

RADIOISÓTOPO → emite α cada tiempos exponenciales de intensidad 2 por hora.

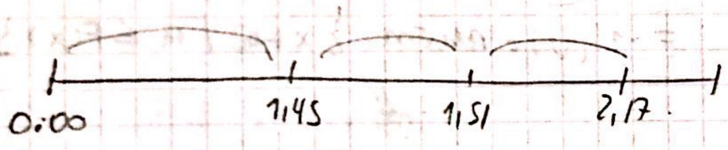
¿Cómo deben transformarse los tiempos ~~exponenciales~~ entre emisiones de partículas α para generar las muestras deseadas?

$\mathcal{U}(0,1)$ $\lambda = 2$. T: tiempo entre emisión

$$T \sim Exp\left(\lambda = \frac{2\,PART}{h} = \frac{2\,PART}{60\,min} = \frac{1\,PART}{30\,min}\right)$$

Hay 3 muestras: $X_1 = 60 + 45\ min = 105\ min =$

$X_2 = 6\ min$ $X_3 = 26\ min$.



$$F_T = \left(1 - e^{-\frac{1}{30}t}\right)$$

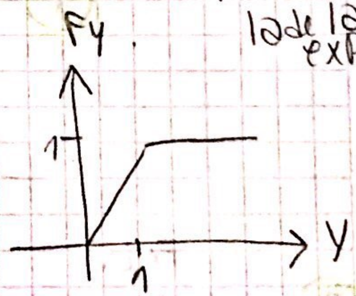
$\frac{1}{30} \to \lambda$.

↓

Puedo usar la de la exponencial.

Quiero simular $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$



T	U
105	0,969
6	0,181
26	0,579

$\boxed{F_X \text{ me da valores simulados de } \mathcal{U}(0,1)}$

Scanned with CamScanner

(2.15) U. v.a con $\mathcal{U} \sim [0,1]$.

Halle $h \rightarrow$ v.a $h(U)$ tenga F del 2.2.

Simule una muestra de 10.000 valores de esa v.a.

↓

gráfica la empírica.

$$F_X(x) = \frac{1}{3}\,\mathbb{1}\{-2 \le x < -1\} + \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)\mathbb{1}\{-1 \le x < 1\} + \frac{2}{3}\,\mathbb{1}\{1 \le x < 2\} + \mathbb{1}\{x \ge 2\}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_h(u) &= F_X(x) \\ h(u) &= F_X^{-1}(x) \end{aligned}}$$

de -2 a 1 es constante

$h(u) =$

2.18

T: tiempo (en días) hasta 1ra falla.

$$F_T(t) = (1 - e^{-\sqrt{t/60}})\,\mathbb{1}\{t>0\}.$$

Ej: si $F_T(2) = 4/8$.
$Prob(T \leq 2)$
↓
Prob de que en menos de 2 días falle

garantía 30 días.

En 30 días → fallan
↓ no fallan

sabiendo que $T \geq 30$ (en 30 no falló)
Calcular la prob de que falle en 60.

$$P(T<60 \mid T>30) = \frac{P(30 < T < 60)}{P(T>30)}.$$

si $T>30$.
y $T<60$.

$$= \frac{F_T(60) - F_T(30) + - P(X=60)}{1 - P(T \leq 30)}$$

$\nearrow 0 \rightarrow$ pq es continua la V.A.

$$P(T<60 \mid T>30) = \frac{F_T(60) - F_T(30) - P(X=60)}{1 - F(30)}$$

$F_T(60) = 0{,}632$

$F_T(30) = 0{,}507$

$$P(T<60 \mid T>30) = \frac{0{,}632 - 0{,}507}{1 - 0{,}507}$$

$$\boxed{P(T<60 \mid T>30) = 0{,}254.}$$

si F es continua (distrib.)
↓
la V.A es continua
↓
chequeo valores dados

Evalúo a F_T a ver si es continua.
en $T=0$ → me da cero → continua.
↓
si me daba 1/2 → habría salto no era continua.

Scanned with CamScanner

2.19 X (en mm) de arandelas fabricados

$$f_X(x) = \frac{2x}{225}\, \mathbb{1}\{0 < x < 15\}$$

como tiene función densidad se q' es continua

se descarta si $3 < X < 12$

a) Hallar densidad del diámetro de los no descartados.

$3 < X < 12 \to$ a

al truncar cambio el intervalo y consigo nueva función distrib.

$$\left[f_{X|X\in A}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X\in A)}\, \mathbb{1}\{X \in A\} \right] \to \text{def de variable truncada continua.}$$

$$f_{X|X\in A}(x) = \frac{\frac{2x}{225}\, \mathbb{1}\{3 < x < 12\}}{P(3 < X < 12)} = \frac{2x}{135}\, \mathbb{1}\{3 < x < 12\}$$

función del diámetro — diámetro entre 3 y 12.

$$P(3 < X < 12) = \int_3^{12} f_X(x)\, dx.$$

$$= \frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_3^{12} \left(\frac{\cancel{2}}{225}\right) = 0{,}6$$

b) Hallar densidad del descartado

$0 < X < 3 \qquad 12 < X < 15$

$B = (0 < x < 3) \cup (12 < x < 15)$

$$\int_0^3 \frac{2}{225}\, x\, dx = \frac{1}{25}.$$

$$\int_{12}^{15} \frac{x}{225} \cdot 2\, dx = \frac{9}{25}$$

$$f_{X|X\in B}(x) = \frac{\frac{2x}{225}\, \mathbb{1}\{x \in B\}}{P(0 < x < 3) + P(12 < x < 15)}$$

ojo → mantener el intervalo del original

$$\boxed{f_{X|X\in B}(x) = \frac{x}{45}\, \mathbb{1}\{x \in B\}}$$

(2.20) X, va continua. X: distancia en dm del pto de impacto al centro.

$$f_X(x) = \frac{2}{7}\mathbb{1}\{0 \le x < 2\} + \frac{10-2x}{21}\mathbb{1}\{2 \le x < 5\}.$$

a) menores que 30 cm → como en la función que tengo no está ese intervalo, la tengo que truncar.
↓ 3 dm

$B: \{X < 3\ dm\}$

$$f_{X|X\in B} = \frac{f_X(x)}{P(X<3)}\mathbb{1}\{x<3\} =$$

$$P(X<3) = \int_{-\infty}^{3} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{2}{7}\,dx + \int_2^3 \frac{10-2x}{21}\,dx =$$

$$= \frac{2}{7}x\Big|_0^2 + \frac{10}{21}x - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\cdot 21}\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{4}{7} + \left(\frac{30}{21} - \frac{9}{21}\right) - \left(\frac{20}{21} - \frac{4}{21}\right) = \frac{17}{21}$$

TRUNCAR continua

$$f_{X|X\in B} = \frac{f_X(x)\mathbb{1}\{x\in B\}}{P(X\in B)}.$$

$$P(X\in B) = \int_{x\in B} f_X(x)\,dx$$

$$f_{X|X\in B} = \frac{2}{7}\cdot\frac{21}{17}\mathbb{1}\{0 \le x < 2\} + \frac{10-2x}{\cancel{21}}\cdot\frac{\cancel{21}}{17}\mathbb{1}\{2 \le x < 3\}$$

$$\boxed{f_{X|X\in B} = \frac{6}{17}\mathbb{1}\{0 \le x < 2\} + \frac{10-2x}{17}\mathbb{1}\{2 \le x < 3\}}$$

b) $d > 3$ dm

$B \in \{x > 3 \text{dm}\}$

$$P(x>3) = \int_3^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_3^5 \frac{10-2x}{21}\,dx =$$

$$= \frac{10}{21}x - \frac{x^2}{21}\Big|_3^5 = 4/21$$

$$f_{X|x\in B} = \underbrace{\left(\frac{10-2x}{21}\right)\left(\frac{21}{4}\right)}_{\text{OBS}} \mathbb{1}\{3<x<5\} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x\right)\mathbb{1}\{3<x<5\}$$

OBS → la PROB pasa dividiendo, no dividir q' si la multiplico da la vuelta.

2.21

3 VER.
2 AMAR
3 ROJAS

a) 4 al azar sin repo.

X: cant de verdes observados

Y: " " amarillos observados

Hallar func. de prob conjunta y las f. de prob marginales

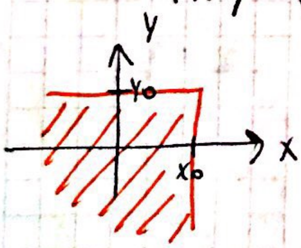
¿Cuál es la prob que la cant de verdes o amarillos no supere 2?.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_m) = P(X \leq x_1, X_2 \leq 2, \ldots, X_m \leq x_m)$$

$F_X : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ $g: m = 2$

$$F_{XY}(x_0, y_0) = P(X \leq x_0, Y \leq y_0)$$



CASO DISCRETO

(X,Y) VA DISCRETA

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / P(X=x, Y=y) > 0\} = R(X,Y)$

$$\sum P(X=x, Y=y) = 1$$

$$P_{XY}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

PROBABILIDADES MARGINALES (discretas)

$$p_X(x_0) = P(X=x_0) = \sum_y p_{XY}(x_0, y)$$

$$p_Y(y_0) = P(Y=y_0) = \sum_x p_{XY}(x, y_0)$$

SIN REPOSICIÓN

X: verde → {0,1,2,3}
Y: amarilla → {0,1,2}

Se sacan 4 al azar sin repo.

X/Y	0	1	2	3	Px
0	0	3/70	9/70	3/70	15/70
1	2/70	18/70	18/70	2/70	40/70
2	3/70	9/70	3/70	0	15/70
Py	5/70	30/70	30/70	5/70	1

imp, si o sí

X: cant q' saco verde
Y: " " " amar.

$$p_{XY}(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{4-x-y}}{\binom{\text{total}}{\text{cant extra}}}$$

$0 \le y \le 2$
$0 \le x \le 3$

$$p_X(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{5}{4-x}}{\binom{8}{4}}$$

$$p_Y(y) = \frac{\binom{2}{y}\binom{6}{4-y}}{\binom{8}{4}}$$

$\binom{8}{4} = 70$

$$p_{XY}(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{4-x-y}}{\binom{8}{4}}$$

↑ conjunta

$p_{XY}(0,0) = 0$ → no tengo 4 rojas p/ sacar.

$p_{XY}(0,1) = 2/70$ $\quad p(1,1) = 18/70$

$p_{XY}(1,0) = 3/70$

Prob marginales → Hipergeométricas (sin rep)

$$P_X(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{5}{4-x}}{\binom{8}{4}} \qquad P_Y(y) = \frac{\binom{2}{y}\binom{6}{4-y}}{\binom{8}{4}}$$

$$P(X+Y \le 2) = 0 + 3/70 + 9/70 + 2/70 + 3/70 + 18/70 = 1/2$$

↓ como son dis juntas las puedo sumar

b) con REPO

$$P_{xy} = \left(\frac{3}{8}\right)^x \left(\frac{2}{8}\right)^y \left(\frac{3}{8}\right)^{4-x-y} \overbrace{\binom{4}{x}\binom{4-x}{y}}^{\text{PERMUTACIONES}}$$

$$P_x = \left(\frac{3}{8}\right)^x \left(\frac{5}{8}\right)^{4-x} \binom{4}{x}$$

$$P_y = \left(\frac{2}{8}\right)^y \left(\frac{6}{8}\right)^{4-y} \binom{4}{y}$$

permut

Marginales Binomiales (con repo)

$$P(X+Y \leq 2) = p(0,0) + p(1,0) + p(0,1) + p(1,1) + p(2,0) + p(0,2) =$$

$$= \frac{81}{4096} + \frac{81}{1024} + \frac{27}{512} + \frac{81}{512} + \frac{243}{2048} + \frac{27}{512}$$

$$\boxed{P(X+Y \leq 2) = 0{,}48}$$

2.22 (X,Y) pto con distribución uniforme sobre el semicírculo $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$.

a) $P(|Y| < X)$

CASO CONTINUO

(X,Y) vector aleatorio abs continuo si $\exists$ fdp $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ /

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}$$

$$P(X \in \overline{A}) = \iint_A f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$A \in \mathbb{R}^2$ "decente"

Densidades marginales.

para ver en donde integro

$$f_X(x) = \int_{-\infty = -y}^{+\infty = y} f_{XY}(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty = -x}^{+\infty = x} f_{XY}(x,y)\, dx$$

→ para poner el soporte ver gráfico

despejo $x \to f_Y$

despejo $y \to f_X$

$$f_{XY} = \begin{cases} 1/\text{area } A & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A \end{cases}$$

uniforme (teo)

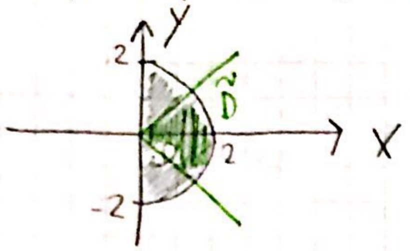
$Sop(f_X)$, $Sop(f_Y)$ } donde puedo integrar.

↳ todo lo q' recorre X o Y

al deformar

a) $x^2+y^2 \leq 4$, $x \geq 0$

$(x,y) \sim U(D)$



$$P(|y| < x) = \iint_{\substack{\text{el espacio} \\ \text{q' } |y|<x}} \frac{1}{\text{área todo } D} \, dx \, dy$$

área $D = \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/\text{área } D & \{(x,y) \in D\} \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

$-y < x < y : \tilde{D}$ área $\tilde{D} = \pi$

$$P(|y| < x) = \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{2\pi} \, dx\,dy = \frac{1}{2\pi} \overbrace{\iint_{\tilde{D}} dx\,dy}^{\text{área } \tilde{D} = \pi}$$

$$\boxed{P(|y| < x) = \frac{1}{2}}$$

b) Hallar densidades marginales $\rightarrow$ integro con la superficie ORIGINAL

$$f_x(x) = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2\pi} \, dy$$

$|y| \leq \sqrt{4-x^2}$ } como varían para integrar.

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} 2\sqrt{4-x^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\pi} \mathbb{1}\{0 < x < 2\}$$

$Sop(f_x) = [0, 2]$

$Sop(f_y) = [-2, 2]$.

$$f_y(y) = \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{2\pi} \, dx = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi} \mathbb{1}\{-2 < y < 2\}$$

$0 < x < \sqrt{4-y^2}$

c) ¿X e Y ind?

$f_{XY}(x,y) = f_x(x) \, f_y(y)$

$\downarrow$

además soporte no rectangular.

$$\frac{1}{2\pi} \neq \frac{\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-y^2}}{2\pi^2}$$

$\downarrow$

NO son ind.

INDEPENDENCIA en V.A.

X e Y son ind si

$$P(X \in A_1, Y \in A_2) = P(X \in A_1)\,P(Y \in A_2)$$

en particular

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$$

Caso continuo

$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \Leftrightarrow$ X e Y ind

Caso discreto

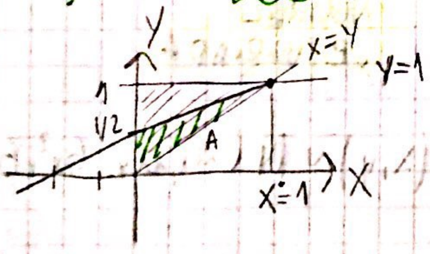
$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y) \Leftrightarrow$ son ind.

OBS: X, Y ind $\Rightarrow$ soporte de f_{XY} es rectangular (puede ser NO ACOTADO)

(no vale vuelta) → sop □ no implica ind.

2.23 $f_{XY}(x,y) = 8xy\,\mathbb{1}\{0 \le x \le y \le 1\}$ ← densidad conjunta

a) $P(X+1 > 2Y) = \iint_A 8xy\,dx\,dy =$



$$\left.\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x < y < \frac{x+1}{2} \end{array}\right\} A$$

$x > 2y - 1$

x	y
-1	0
1	1
3	2
0	1/2

$$\int_0^1 \int_2^{\frac{x+1}{2}} 8xy\,dy\,dx = 8\int_0^1 \left.\frac{xy^2}{2}\right|_2^{\frac{x+1}{2}} dx =$$

$$= 8\int_0^1 x\left[\frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}{2} - 2\right] dx = \frac{5}{12}$$

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

b)

sop X = [0,1]

sop Y = [0,1]

$$f_x = \int_x^1 8xy\, dy = 8x \frac{y^2}{2}\Big|_x^1 = 8x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$f_x = (4x - 4x^3)\, \mathbb{1}\{0 \le x \le 1\}$$

$$f_y = \int_0^y 8xy\, d\cancel{x} = y\, 8\frac{x^2}{2}\Big|_0^y = 4y^3\, \mathbb{1}\{0 \le y \le 1\}$$

c) $f_x f_y = 8x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \cdot 4y^3$

$f_{xy} = 8xy$ $\neq$ NO SON IND

2.24 X e Y V.A $\quad f_{xy}(xy) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\, e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)}$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

a) $\mu_x = 0$ $\mu_y = 0$ $\sigma_x = 1$ $\sigma_y = 1$

$2\cancel{\pi}\sqrt{1-\rho^2} = \cancel{\pi}\sqrt{3}$

$1 - \rho^2 = \frac{3}{4}$

$\boxed{\rho = 1/2}$

(μ_x, σ^2)

$X \sim N \to (0,1)$

$Y \sim N \to (0,1)$

$\uparrow (\mu_y, \sigma^2)$

NORMAL BIVARIADA

coef de correlación

$$(X,Y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[*]}$$

$$* \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - \frac{2(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]$$

$\mathbb{1}\{(x,y) \in \mathbb{R}\}$.

Si (x,y) tiene esa dist $\to$ los marginales son normales!

iMP

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_y(x) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$$

b) no $f_{xy} \neq f_x f_y$.

2.25

2 tipos de falla $\begin{cases} \text{tejido} \to \text{Poisson (media 2)} \\ \text{teñido} \to \text{Poisson (media 4)} \end{cases}$

$$Poi(2) = \frac{(2^x e^{-2})}{x!} = F_{x_1}(x_1)$$

$$Poi(4) = \left(\frac{4^x e^{-4}}{x!}\right) = F_{x_2}(x_1)$$

INTENSIDAD DE FALLAS

si T es v.a que mira tiempo hasta la falla: $\lambda(t)$ es su función intensidad de fallos

$$\left[F_T(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(\tau)d\tau}\right] \quad x>0$$

$$\left[f_T(x) = \lambda(x)\, e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}\right] \quad x>0$$

$$\boxed{P(T \leq x) = F_T(x)}$$

$$P(T \geq x) = 1 - F_T(x)$$

a)

X_1= fallas x tejido X_2= fallas x teñido

$$P(T_1 + T_2 = 0) = \underbrace{P(T_1=0) \cap P(T_2=0)}_{\text{por ser indep.}}$$

$$P(T_1 + T_2 = 0) = P(T_1=0) \cdot P(T_2=0) =$$ → si fuera unión lo sumaría.

$$F_X(x_1) = P_{T_1}(0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = e^{-2}$$

$$= e^{-2} \cdot e^{-4} = \boxed{e^{-6}}$$

b)

$$P(T_1 + T_2 = 1) \Rightarrow T_1 = 0 \cap T_2 = 1$$
ó → UNIÓN
$$T_1 = 1 \cap T_2 = 0$$

I $$P(T_1 + T_2 = 1) = P(T_1=0) \cdot P(T_2=1) + P(T_1=1)\, P(T_2=0)$$
$$= 4e^{-6} + 2e^{-6} = \boxed{6e^{-6}}$$

c)

$$P(T_1 = 1 \mid T_1 + T_2 = 1) = \frac{P(T_1=1 \cap T_1+T_2=1)}{P(T_1+T_2=1)}$$

$$P(T_1=1 \cap T_1+T_2=1) = (T_1=1 \cap T_2=0) = 2e^{-2} \cdot e^{-4}$$ ↳ $6e^{-6}$

$$P(T_1 = 1 \cap T_1+T_2 = 1) = \frac{2e^{-6}}{6e^{-6}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

MÓDULO DE a

- $|x| < a$

  $-a < x < a$

- $|x| > a$

  $x > a$ ó $x < -a$

2.26 Lucas y Monk → cei 18:00

$L \sim U(0,15)$ $M \sim U(5,20)$

indep.

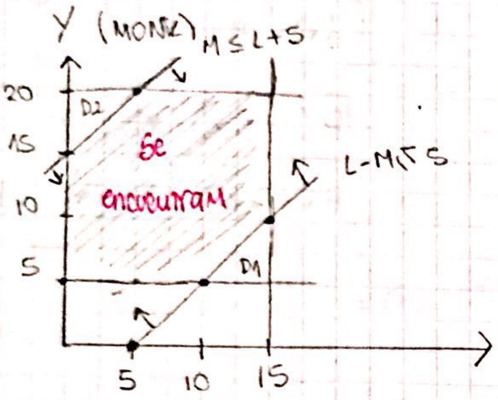
Lucas espera 15 min
Monk espera 5 min

¿Prob que se encuentren?

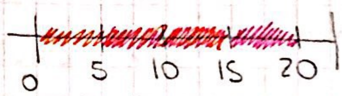
$f_x(x) = \frac{1}{15} \mathbb{1}\{0 < x < 15\}$

$f_{xy} = f_x \cdot f_y$

$f_x(x) = \frac{1}{15} \mathbb{1}\{5 < x < 20\}$



$f_{xy} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \mathbb{1}\{0 < l < 15, 5 < M < 20\}$



$M \leq L+15$ $M > L$

1°

$\mathbb{P}(\text{encuentren}) = \frac{\text{área total} - 2\Delta}{\text{área total}}$

1° llega lucas → $M - L \leq 15$

1° llega M → $L - M \leq 5$ $L > M$.

2°

$\mathbb{P}(\text{encuentran}) = 1 - P(\text{no se encuentran}) = 1 - \iint_{D1+D2} \frac{1}{225}\, dm\, dl =$

$= 1 - \int_0^5 \int_{L+15}^{20} du\, dl = 1 - 1/9 = \underline{0{,}88}$