9.15 Al finalizar el primer semestre de gobierno se realizó una encuesta entre 1200 ciudadanos, 414 de los cuales declararon ser oficialistas, 196 declararon no ser ni oficialistas ni opositores y el resto declaró ser opositor. En base a esa información muestral estimar por máxima verosimilitud (p_1, p_2), donde p_1 es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar sea oficialista y p_2 la de que sea opositor.

X_1 : Cant de ciudadanos oficialistas entre 1200

X_2 : Cant de ciudadanos opositores entre 1200

X_3 : Cant de ciudadanos ni oficialista ni opositor entre 1200

$\theta = [p_1, p_2]$

$$P(\text{"}\bar{O}_P \cap \bar{O}_F\text{"}) = 1 - \mathbb{P}(O_P \cup O_F) = 1 - p_1 - p_2$$

$$\underbrace{(X_1, X_2, X_3)}_{\underline{X}} \sim \mathcal{M}(1200, p_1, p_2, 1-p_1-p_2)$$

$$L(\theta) = f_\theta(\underline{x}) = \frac{1200}{x_1!\, x_2!\, x_3!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, (1-p_1-p_2)^{x_3}$$

Del 9.14

$$= e^{x_3 \ln(1-p_1-p_2)}\, e^{x_1 \ln(p_1)}\, e^{x_2 \ln(p_2)} \overbrace{\frac{1200!\, \mathbb{1}\{x_1+x_2+x_3=1200\}}{x_1!\, x_2!\, x_3}}^{\ln(c)}$$

$$\ln L(\theta) = x_3 \ln(1-p_1-p_2) + x_1 \ln(p_1) + x_2 \ln(p_2) + \ln(c)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial p_1} = \dfrac{-x_3}{1-p_1-p_2} + \dfrac{x_1}{p_1} = 0 \quad (1) \\[2ex] \dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial p_2} = \dfrac{-x_3}{1-p_1-p_2} + \dfrac{x_2}{p_2} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Wolfram: $p_1 = \dfrac{x_1}{x_1+x_2+x_3}$; $p_2 = \dfrac{x_2}{x_1+x_2+x_3}$

Con $x_3 = 1200 - x_1 - x_2 \Longrightarrow p_1 = \dfrac{x_1}{1200}$; $p_2 = \dfrac{x_2}{1200}$

Para confirmar que son máximos: Derivadas segundas y matriz Hessiana

$\Longrightarrow$ Elijo creer!

En nuestra ma $(x_1, x_2, x_3) = (414, 590, 196)$

$$\Longrightarrow \boxed{p_1 = 0,345 \; ; \; p_2 = 0,4917}$$