10.16 Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant \theta\}, \qquad \theta > 0.$$

Diseñar un test de hipótesis de nivel 0.1 para testear la hipótesis de que la media de X es mayor que 1.2 basado en una muestra de X de tamaño 1. Graficar la función de potencia del test.

$$E[X] = \int_0^\theta x\,\frac{3x^2}{\theta^3}\,dx = \frac{3}{\theta^3}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^\theta = \frac{3}{4}\theta$$

$$H_0: \frac{3}{4}\theta \leq \frac{12}{10} \longrightarrow H_0: \theta \leq \frac{8}{5}$$

$$H_0: \theta \leq \frac{8}{5} \qquad H_1: \theta > \frac{8}{5}$$

θ_0 θ_1

$0 < x < \theta$

$\Downarrow$

$0 < \frac{x}{\theta} < 1$

$\Rightarrow Y = \frac{x}{\theta}$ jacobiano de una VA $f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right]_{x=\theta y}$

$$g(x) = \frac{x}{\theta} \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{\theta}$$

$$f_Y(y) = \frac{\frac{2\cdot\theta y}{\theta^2}}{\frac{1}{\theta}} \mathbb{1}\{0<y<1\} = 2y\,\mathbb{1}\{0<y<1\}$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y<0 \\ \int_0^y 2y\,dy = y^2 \text{ si } 0 \le y < 1 \\ 1 \text{ si } y \ge 1 \end{cases}$$

Como tengo una muestra $\sum Y_i \longrightarrow$ hay que sacar su distribución

Ahora $M = \max\{Y_i\} = \frac{\max\{X_i\}}{\theta}$

$$F_M(m) = \mathbb{P}(M \le m) = \mathbb{P}(\max\{Y_i\} \le m)$$

$$= \mathbb{P}(Y_1 \le m, Y_2 \le m, \dots) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \le m)$$

$$= \left[\mathbb{P}(Y \le m)\right]^n = (m^2)^n = m^{2n}$$

$\downarrow$

$m \in (0,1)$