Guia 9

Guía 9

9.1 Sea X_1, X_2, X_3 una muestra aleatoria de la distribución Bernoulli(p).

(a) Verificar que $T = X_1 + X_2 + X_3$ es un estadístico suficiente para p.

(b) ¿$T = X_1 + 2X_2 + X_3$ es un estadístico suficiente para p?. *:no es difícil analizar los 8 casos.*

$X_1, X_2, X_3 \sim Ber(p)$

a) $T = X_1 + X_2 + X_3$

Estadísticos Suficientes

Def: Sea $\underline{X} = (X_1, .. X_n)$ un vector aleatorio de dimensión n cuya distribución es $F_\theta(\underline{x})$, $\theta \in \Theta$ se dice que un estadístico $T = r(\underline{X})$ es suficiente para θ si la distribución de $\underline{X}$ condicionada a que $T = t$ es independiente de θ, para todo t

Esto significa que si conozco a T y a la distribución de $\underline{X}|T=t$, entonces puedo reconstruir una muestra con la misma distribución que la muestra original.

$(X_1, X_2, X_3) \,|\, T = t$ debe ser ind de p

$$f_{\underline{X}|T=t}(\underline{x}) = \frac{\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x}, T = t)}{\mathbb{P}(T = t)}$$ con $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$

Son ind (MA)

$$\overset{?}{=} \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1 | T = t)\,\mathbb{P}(X_2 = x_2 | T = t)\,\mathbb{P}(X_3 = x_3 | T = t)}{\mathbb{P}(T = t)}$$

$\mathbb{P}(T = t) \to$ Suma de Bernoulli

$\hookrightarrow Bin(3, p)$

si x_1 es 0, o 1 etc.

$$= \frac{p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\; p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}\; p^{x_3}(1-p)^{1-x_3}}{\binom{3}{t} p^{t}(1-p)^{3-t}} \quad \mathbb{1}\{x_1+x_2+x_3=t\}$$

$$= \frac{p^{\overbrace{\sum_{i=1}^{3} x_i}^{t}}(1-p)^{3-\underbrace{\sum_{i=1}^{3} x_i}_{t}}}{\binom{3}{t} p^{t}(1-p)^{3-t}} = \frac{1}{\binom{3}{t}} \Rightarrow$$

No depende de p → es estadístico suficiente ✓

(b) ¿$T = X_1 + 2X_2 + X_3$ es un estadístico suficiente para p?. ☞:*no es difícil analizar los 8 casos.*

$$f_{\underline{X}|T=t}(\underline{x}) = \frac{\mathbb{P}(\underline{X}=\underline{x} \cap T=t)}{\mathbb{P}(T=t)} = \frac{\overset{2X_2}{\uparrow}\; 2\prod p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}}{\mathbb{P}(T=t)} \quad \mathbb{1}\{x_1+2x_2+x_3=t\}$$

$$\mathbb{P}(T=t) = \mathbb{P}(X_1+2X_2+X_3=t)$$

$$\mathbb{P}(T=\underline{x}) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} + 2\left(p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}\right) + p^{x_3}(1-p)^{1-x_3}$$

⇒ si $X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$

$$\mathbb{P}(T=2) = 2p + 2(1-p) \quad \Bigg| \quad 2\prod p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = 2p^2(1-p)$$

$$\frac{2p^2(1-p)}{2p+2-2p} = 2p^2(1-p) \Rightarrow \text{depende de } p!$$

→ No es suf

9.2 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución con densidad

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbf{1}\{x > \theta\}.$$

Verificar que $T = \min(X_1, \ldots, X_n)$ es un estadístico suficiente para θ.

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}\{x > \theta\} \qquad T = \min(X_1, \ldots, X_n)$$

$$f_\theta\Big|_{T=t}(\underline{x}) = \frac{\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x} \mid T = t)}{\mathbb{P}(T = t)} \overset{\text{ind}}{=} \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i - \theta)} \mathbb{1}\{\min\{x_1, \ldots x_n\} = t\}}{\mathbb{P}(\min(x_1, \ldots x_n) = t)}$$

$\to e^{-n\theta} e^{-n x_i} \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) = t\} \to$ No, no va por ahí

$\to$ es $f_\theta(\underline{x}) = e^{-(\sum x_i - \theta)} \mathbb{1}\{x > 0\}$ familia exp?

$\to$ Primero condiciones

$$f_\theta\Big|_{T=x}(\underline{x}) = e^{-\theta} e^{-\sum x_i} \mathbb{1}\{\underbrace{\min(\underline{x})}_{\underline{x} = t} > \theta\}$$

NO

$$f_\theta(x_i) = e^{-(x_i - \theta)}$$

$$f_\theta(\underline{x}) \overset{\text{ind}}{=} \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i + \theta} = e^{n\theta} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} \mathbb{1}\{\underline{x} > \theta\}$$

porque después siempre es 1

Bueno esta indicadora es lo mismo que el mínimo $> \theta$

$$f_\theta(\underline{x}) = e^{n\theta} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} \mathbb{1}\{\underbrace{\min(\underline{x})}_{T(\underline{x})} > \theta\}$$

$$\to g(T(\underline{x}), \theta) \; h(\underline{x})$$

Teorema de factorización

Sea $\underline{X}$ un vector aleatorio con función de densidad (o probabilidad) conjunta $f_\theta(\underline{x})$, $\theta \in \Theta$, entonces el estadístico $T = r(\underline{X})$ es suficiente para θ si y solo si existen dos funciones h y g tales que:

$$f_\theta(x) = g(r(\underline{x}), \theta) \cdot h(\underline{x})$$

$\Rightarrow$ $T(\underline{X}) = \min(X_1, \dots, X_n)$ es estadístico suficiente.

9.3 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución Poisson(λ) y sea $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Hallar la distribución de $\mathbf{X}_n | T = t$ y deducir que T es un estadístico suficiente para λ.

$X_i \sim Poi(\lambda)$ $\quad T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\quad \underline{X} | T = \tau = ?$

¿T es est suf?

$$\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x}) = ? = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \prod \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1}\{x \in \mathbb{N}_0\}$$

(Teorema de fact, esta mejor hecho en el cuaderno con otro mod.)

$$= \underbrace{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_1^n x_i}}_{g(\sum x_i, \lambda)} \underbrace{\prod^n \frac{1}{x_i}}_{h(\underline{x})} \mathbb{1}\{\underline{x} \in \mathbb{N}_0\}$$

$g(\sum x_i, \lambda) \cdot h(\underline{x})$

$\sum x_i \to T(\underline{X}) \Rightarrow T$ es estadístico suficiente.

9.4 Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son familias exponenciales a 1 parámetro: **(a)** Bernoulli(p); **(b)** Pascal$(4, p)$; **(c)** Poisson(λ); **(d)** Exponencial(λ).

Teo: Una familia exponencial a k parámetros tiene como estadístico suficiente para $\theta \in \mathbb{R}^k$ al vector $T = (r_1(\underline{X}), \dots, r_k(\underline{X}))$

Familias exponenciales

Se dice que una familia de distribuciones (continuas o discretas) en $\mathbb{R}^q$ con distribución $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ es una familia exponencial a k parámetros, si su función de densidad (o probabilidad) se puede escribir como

$$f_\theta(x) = A(\theta) \cdot e^{\sum_{i=1}^{k} c_i(\theta) r_i(x)} \cdot h(x)$$

a) Bernoulli $\quad X_i \sim Ber(p)$

$$\Rightarrow f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$= p^{\sum x_i} (1-p)^{\sum_i (1-x_i)} \quad \mathbb{1}\{x_i \in \{0,1\}\}$$

$$= e^{\ln(p^{\sum x_i})} e^{\ln((1-p)^{\sum(1-x_i)})}$$

$$= e^{\sum x_i \ln(p)} e^{\sum_i (1-x_i) \ln(1-p)} \quad \underbrace{\mathbb{1}\{x_i \in \{0,1\}\}}_{h(x)}$$

$$= e^{\sum_i x_i \ln(p)} e^{(n-\sum_i x_i)\ln(1-p)}$$

$$= e^{\sum x_i \ln(p)} e^{n \ln(1-p) - \sum_i x_i \ln(1-p)}$$

$$= e^{\sum_i x_i \ln(p) - \sum_i x_i \ln(1-p)} e^{n \ln(1-p)}$$

$$= \underbrace{e^{n \ln(1-p)}}_{A(p)} \underbrace{e^{\sum_i x_i (\ln(p) - \ln(1-p))}} \underbrace{\mathbb{1}\{x_i \in \{1,0\}\}}_{h(\underline{x})}$$

$$c_1(\underline{x}) = \sum_i x_i$$

$$r_1(p) = \ln(p) - \ln(1-p)$$

$\Rightarrow$ Es familia exp

Probablemente esté mal, la forma de hacerlo es así

$\rightarrow \quad f_p(x) = p^x (1-p)^{1-x}$ $\Big] \rightarrow$ una de las Bernoulli

$\rightarrow f_p(x) = p^x (1-p)^{-x} \cdot (1-p)^1$

$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (1-p) \ \mathbb{1}\{x \in \{1,0\}\}$

$f_p(x) = e^{\ln\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^x\right)} (1-p) \ \mathbb{1}\{x \in \{1,0\}\}$

$$f_p(x) = e^{\underset{r(x)}{x} \, \underset{c(p)}{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}} \underbrace{(1-p)}_{A(p)} \underbrace{\mathbb{1}\{x \in \{1, 0\}\}}_{h(x)}$$

$\rightarrow$ ¡Es fam exp!

b) $X_i \sim Pas(4, p)$

Pascal	$Pas(k,p)$	$\binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$	$\mathbb{Z}_k$

$f_p(x) = \binom{x-1}{3} (1-p)^{x-4} p^4 \quad \mathbb{1}\{x \in \mathbb{Z}\}$

$p \in (0,1)$

$f_p(x) = \frac{(x-1)!}{(x-1-3)! \ 3!} \frac{(1-p)^x}{(1-p)^4} p^4$

$$f_p(x) = \underbrace{\frac{p^4}{(1-p)^4}}_{A(p)} \underbrace{e^{x\ln(1-p)}}_{e^{r(x)c(p)}} \underbrace{\binom{x-1}{3} \mathbb{1}\{\}}_{h(x)}$$

$r(x) = x$

$c(p) = \ln(1-p)$

c) Poisson(μ) $\Rightarrow$ $p_X(x) = \dfrac{(\mu)^x e^{-\mu}}{x!} \mathbb{1}\{x \in \mathbb{Z}_0\}$

$\Rightarrow p_\mu(x) = e^{-\mu} \, e^{\ln(\mu^x)} \underbrace{\dfrac{\mathbb{1}\{\}}{x!}}_{h(x)}$

$p_\mu(x) = \underbrace{e^{-\mu}}_{A(\mu)} \, e^{x \ln(\mu)} \underbrace{\dfrac{\mathbb{1}\{\}}{x!}}_{h(x)}$

$r(x) = x$

$c(x) = \ln(x)$

d) Exp(λ)

$f_\lambda(x) = \underbrace{\lambda}_{A(\lambda)} e^{-\lambda x} \underbrace{\mathbb{1}\{x > 0\}}_{h(x)}, \quad \lambda > 0$

$c(\lambda) = -\lambda$

$r(x) = x$

9.5 Una moneda tiene una probabilidad de cara p, $p \in \{2/5, 4/5\}$. En 10 lanzamientos de la moneda se observaron exactamente 3 caras. Estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que en otros tres lanzamientos se observe exactamente una cara.

$p \in \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$ $\Rightarrow$ 10 tiradas, 3 caras

$\Rightarrow$ Primero tengo que encontrar el estimador de Máxima Verosimilitud $\Rightarrow$ y me dan solo dos posibles p, vemos cual se ajusta (fit) mejor a los datos

$\hookrightarrow$ según cual me da una proba mas alta

X : "Sale cara" Ber(p)

Y : "10 tiradas" Bin(10, p)

Saco la Verosimilitud de X $\Rightarrow L(x, p) = \prod_{i=1}^{10} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

(¿ mi función de perdida ?)

$$L(p) = p^3 (1-p)^7 \xrightarrow{p=\frac{2}{5}} \boxed{1.79 \cdot 10^{-3}}$$

$$p = \frac{4}{5} \longrightarrow 6.55 \cdot 10^{-6}$$

$$\rightarrow \hat{p}_{MV} = \frac{2}{5}$$

y ahora calculo la proba (o predigo ?!)

$$\boxed{\rightarrow \mathrm{Bin}(10, \hat{p}_{MV}) \overset{y=3}{=} \binom{10}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(1-\frac{2}{5}\right)^7 = 0.215}$$

9.6 La cantidad de accidentes de tránsito por semana en la intersección de Paseo Colón y Estados Unidos tiene una distribución de Poisson de media λ.

(a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de λ basado en una muestra aleatoria de la cantidad de accidentes durante n semanas. Mostrar que se trata de un estimador insesgado para λ y hallar la expresión de su error cuadrático medio.

(b) En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

En virtud de la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ y estimar la probabilidad de que en la semana del 24 de diciembre de 2017 no ocurra ningún accidente en la mencionada esquina.

X : "Cantidad de accidentes en una semana"

$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \lambda > 0 \qquad f_{\hat{\lambda}_{MV}}(x) = ?$$

$$\rightarrow \hat{\lambda}_{MV} = ?$$

$$\rightarrow L(\lambda, \underline{x}) = \prod_{x=1}^{\overset{\text{semanas}}{n}} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda} \prod_{x=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{1}\{\underline{x} > 0\}$$

Def: Diremos que $\hat{\theta}(\underline{X})$ es un estimador de máxima verosimilitud de θ si se cumple que

$$f_{\hat{\theta}}(\underline{X}) = \max_{\theta} f_\theta(\underline{x})$$

Es decir, buscamos el valor de θ que maximiza la función de verosimilitud

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta)$$

$\Rightarrow$ maximizar esa función es encontrar un λ tal que L sea máximo, pero como $\lambda > 0$, se puede aplicar $\ln(L(\lambda, \underline{x}))$ y el punto crítico ahí, pues es una función creciente y monótona para $\lambda > 0$

$$\Rightarrow \ln(L(\lambda, \underline{x})) = \ln\left(\lambda^{\sum_i x_i} e^{-n\lambda} \prod_{x_i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{1}\{\underline{x} > 0\}\right)$$

$$\ln(L(\lambda, \underline{x})) = \sum_i x_i \ln(\lambda) - n\lambda + \underbrace{\ln\left(\prod \cdots\right)}_{\text{Solo depende de } x_i}$$

$\Rightarrow$ derivo

$$\frac{\partial \ln(L(\lambda, \underline{x}))}{\partial \lambda} = \frac{\sum_i x_i}{\lambda} - n + 0$$

$\rightarrow$ igualo a 0 para hallar el punto crítico

$$\frac{\sum_i x_i}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \lambda n = \sum x_i$$

$$\lambda = \frac{\sum x_i}{n} \rightarrow \text{Promedio} \rightarrow \bar{x}$$

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{\sum X_i}{n}$$

mayúscula

Variable aleatoria

¿Es insesgado?

Se dice que un estimador es insesgado para θ si

$$E_{\theta}(\hat{\theta}) = \theta, \quad \forall \theta \in \Theta$$

En caso contrario, diremos que el estimador es sesgado, y definimos su sesgo como

$$B(\hat{\theta}) = E_{\theta}(\hat{\theta}) - \theta$$

$$E_{\hat{\lambda}_{MV}}(\hat{\lambda}_{MV}) = E_{\hat{\lambda}_{MV}}\left(\frac{\sum_i X_i}{m}\right) \underset{\text{Lineal}}{=} \frac{1}{m}\sum_i E[X_i]$$

$E[X_i]$ → identicamente distribuidos → $\lambda = E[X_i] = E[X]$

$$E_\lambda(\hat{\lambda}_{MV}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E[X] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda$$

$$\boxed{E_\lambda(\hat{\lambda}_{MV}) = \frac{1}{m} m\lambda = \lambda}$$ → es insesgado!

$B_\lambda(\hat{\lambda}_{MV}) = E_\lambda(\hat{\lambda}_{MV}) - \lambda = \lambda - \lambda = 0$

$0^2 = 0$

$$ECM(\hat{\lambda}_{MV}) = ? = E((\hat{\lambda}_{MV} - \lambda)^2) = \dots = Var_\lambda(\hat{\lambda}_{MV}) + B_\lambda^2(\hat{\lambda}_{MV})$$

$$Var_\lambda\left(\frac{\sum_i X_i}{m}\right) \underset{\text{Prop var}}{=} \frac{1}{m^2} Var\left(\sum_i X_i\right) = \frac{1}{m^2}\sum_i Var(X_i)$$

iid

x_i son ind, los cov son 0

$$Var_\lambda(\hat{\lambda}_{MV}) = \frac{1}{m^2}\sum_i \underbrace{Var(X)}_{\lambda} = \sum_{i=1}^{m}\lambda \frac{1}{m^2}$$

$$\boxed{Var_\lambda(\hat{\lambda}_{MV}) = \frac{m}{m^2}\lambda = \frac{\lambda}{m}}$$ → si $m \to \infty$ ECM es 0

osea que $\hat{\lambda}_{MV}$ es débilmente consistente.

(b) En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

En virtud de la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ y estimar la probabilidad de que en la semana del 24 de diciembre de 2017 no ocurra ningún accidente en la mencionada esquina.

→ en 10 semanas, se vieron 0 accidentes (en cada una),

en 29, ... 1 ....

osea, como para mi x_i es la cantidad de accidentes por semana, $x_0 = 0 \cdot 10$

0 accidentes — en 10 semanas

$x_1 = 1 \cdot 29 = 29$

un accidente por semana — 29 semanas

sin el sombrerito, es el parámetro ¿?

$$\to \lambda_{MV} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{106}\left(0\times 10 + 1\times 29 + 2\times 25 + 3\times 17 + 4\times 13 + 5\times 6\right)$$

en clase tiene sombrero

$$\hat{\lambda}_{MV} = 2.12$$

estimación puntual

$$P(X=0) = ¿? = \frac{(\hat{\lambda}_{MV})^0 e^{-\hat{\lambda}_{MV}}}{0!} = e^{-2.12}$$

0.12

9.7 Sea $\mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución uniforme sobre el intervalo $[0, \theta]$.

(**a**) Hallar un estadístico suficiente para θ basado en $\mathbf{X}_n$.

(**b**) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en $\mathbf{X}_n$.

(**c**) Sea $\hat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ hallado en el inciso anterior. Mostrar que $\mathbf{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \frac{n}{n+1}\theta$ y $\mathbf{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ para concluir que $\hat{\theta}_n$ converge en media cuadrática a θ cuando $n \to \infty$.

$X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$

a) hallar un estadístico suficiente

$$f_\theta(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{0 < \underline{x} < \theta\}$$

$f_\theta(\underline{x}) \to L(\theta, \underline{x})$

independientes

No sirve la factorización, hay que hacer Neyman fisher

$T = \mu(\underline{X})$ es est suf

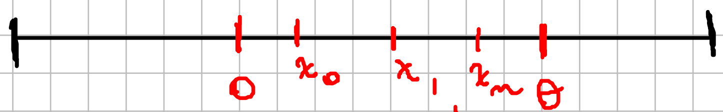
si podes hacer $f_\theta(\underline{x}) = g(\theta, \mu(\underline{x}))\, h(\underline{x})$

$f_\theta \to L(\theta, \underline{x})$

con los vectores!

$\to L(\theta, \underline{x})$

Bueno, $f_\theta(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{0 < \underline{x} < \theta\}$



Solo vale 1 acá adentro

osea el mínimo de los x_i debe ser mayor a 0 y el máximo menor a θ

$$\to \quad f_\theta(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{e.o.c} \\ \left(\frac{1}{\theta}\right)^n & \text{si } \min(\underline{x}) > 0,\ \max(\underline{x}) < \theta \end{cases}$$

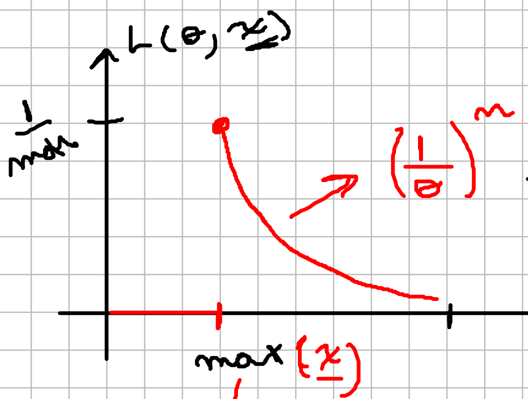
osea que $$f_\theta(\underline{x}) = \underbrace{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{\max(\underline{x}) < \theta\}}_{g(\theta,\, \mu(\underline{x}))} \underbrace{\mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 0\}}_{h(\underline{x})}$$

con $\mu(\underline{x}) = \min(\underline{x})$

b) $\hat{\theta}_{MV} = ?$

↳ es el θ que maximiza mi $L(\theta, x)$
↓
verosimilitud

pero no la puedo derivar (no es cont) $\to$ gráfico



, sin importar la forma, seguro que es decreciente,

osea vas aumentando θ hasta que al menos 1 sea mas grande que el max, por que si no ese se sale de la indicadora y da 0 $\Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \max(\underline{X})$

$\underline{X} \downarrow$ Variable aleatoria

(c) Sea $\hat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ hallado en el inciso anterior. Mostrar que $\mathbf{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \frac{n}{n+1}\theta$ y $\mathbf{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ para concluir que $\hat{\theta}_n$ converge en media cuadrática a θ cuando $n \to \infty$.

$$E_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = E[\max(\underline{X})]$$

Ayuda: Si X es VA no negativa, una forma de calcular su esperanza es

$$E[X^k] = \int_0^{+\infty} k\, y^{k-1}\, \mathbb{P}(X \geq y)\, dy$$

en nuestro caso, como las X_i van de 0 a θ, osea, son definidas positivas

osea que $E[\hat{\theta}_{MV}] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot y^{1-0}\, \mathbb{P}(\hat{\theta}_{MV} \geq y)\, dy$ $\quad (\rightarrow k=1)$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\max(\underline{X}) \geq y)}\, dy$$

$$1 - \mathbb{P}(\max(\underline{X}) \leq y) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y)$$

$$\underset{\text{ind}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq y) \quad \text{con } X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta)$$

$$\hookrightarrow \int_0^y \frac{1}{\theta}\, dy = \frac{1}{\theta} y$$

pero con un detalle, si $y > \theta$,

$\mathbb{P}(\max(\underline{x}) \geq y)$ es 0, pues

$\max(\underline{x}) < \theta$ (condición de $\underset{\downarrow\, f_\theta(\underline{x})}{L(\theta, \underline{x})}$)

si no da 0

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \left(1 - \mathbb{P}(\max(X_i) \leq y)\right) \mathbb{1}\{y < \theta\}\, dy$$

$$\int_0^{\theta} 1-\left(\frac{y}{\theta}\right)^n dy = (\theta - 0) - \frac{1}{(n+1)\theta^n}\,\theta^{(n+1)}$$

$$\boxed{E_\theta[\hat\theta_{MV}] = \theta - \frac{\theta}{n+1} = \frac{(n+1)\theta - \theta}{n+1} = \frac{n\,\theta}{n+1}}$$

$$Var_\theta(\hat\theta_{MV}) = ?$$

def

$$Var_\theta(\hat\theta_{MV}) = E_\theta(\hat\theta_{MV}^2) - \overbrace{E_\theta^2(\hat\theta_{MV})}^{\text{Ya lo Tengo}}$$

Vamos al dificil

otra vez con $\mathbb{1}\{y<\theta\}$

$$E_\theta(\hat\theta_{MV}^2) \underset{\substack{\text{definida}\\ \text{positiva}}}{=} \int_0^{+\infty} 2y\, \underbrace{\mathbb{P}(\hat\theta_{MV}^2 \geq y)}_{\mathbb{P}(\max^2(\underline{X}) \geq y)}\, dy$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\max^2(\underline{X}) \geq y) = 1 - \mathbb{P}(\max^2(\underline{X}) \leq y)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1^2 \leq y,\ X_2^2 \leq y,\ \dots,\ X_n^2 \leq y)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1^2 \leq y)\,\mathbb{P}(X_2^2 \leq y)\ \dots\ \mathbb{P}(X_n^2 \leq y)$$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq \underset{\substack{\downarrow\\ X_1 > 0}}{\sqrt{y}}) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\theta}\, dy = \frac{\sqrt{y}}{\theta}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{y^{1/2}}{\theta} = 1 - \left(\frac{\sqrt{y}}{\theta}\right)^n$$

$$E_\theta[\hat\theta_{MV}^2] = \int_0^{+\infty} 2y\left(1 - \left(\frac{\sqrt{y}}{\theta}\right)^n\right) \mathbb{1}\{y < \theta^2\}\, dy$$

$$= \int_0^{\theta} 2y - \frac{2y\, y^{\frac{n}{2}}}{\theta^n}\, dy \qquad 1 + \frac{n}{2} = \frac{2+n}{2}$$

$$y^2\Big|_0^{\theta} - \frac{2}{\theta^n} \cdot \frac{y^{\left(\frac{2+n}{2}+1\right)}}{\left(\frac{2+n}{2}+1\right)}\Bigg|_0^{\theta}$$

$$\frac{2+n+2}{2}$$

$$\frac{4+n}{2}$$

$$= \theta^2 - \frac{2\,\theta^2\,\theta^{\frac{n}{2}}}{\theta^n\left(2+\frac{n}{2}\right)} = \theta^2 - \frac{4\,\theta^{2-\frac{n}{2}}}{4+n}$$

$$\frac{\theta^{\frac{4+n}{2}}}{\theta^n} = \frac{\theta^2\,\theta^{n/2}}{\theta^n}$$

$$\theta^{\frac{n}{2}-n+2}$$

$$\theta^{2-\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{(4+n)\,\theta^2 - 4\,\theta^{2-\frac{n}{2}}}{4+n}$$

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{4\theta^2 - 4\theta + n\theta^2}{4+n^2} - \left(\frac{n\,\theta}{(n+1)}\right)^2$$

$$= \frac{4\theta^2(n+1)^2 - 4\theta(n+1)^2 + n(n+1)^2 - (4+n^2)\,n^2\theta^2}{(n+1)^2\,(4+n^2)}$$

$$\mathrm{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

me comí esto

$$x = u^2$$

$$U \sim U[0,2] \Rightarrow f_U(u) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(U \leq \sqrt{x}) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{2}\,du = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad \mathbb{1}\{0 < x < 4\}$$

$$y^2\Big|_0^{\theta^2} - \frac{2}{\theta^n} \cdot \frac{y^{\left(\frac{2+n}{2}+1\right)}}{\left(\frac{2+n}{2}+1\right)}\Bigg|_0^{\theta^2} = \theta^4 - \frac{2\,\theta^{(4+n)}}{\theta^n\left(2+\frac{n}{2}\right)}$$

$$\theta^4 - \frac{4\theta^4 \cancel{\theta^n}}{\cancel{\theta^n}(2+n)} = \frac{(2+n)\theta^4 - 4\theta^n}{(2+n)} = \frac{-2\theta^4 + n\theta^4}{(2+n)}$$

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{-2\theta^4 + n\theta^4}{(2+n)} - \left(\frac{n\theta}{(n+1)}\right)^2$$

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{(n^2+2n+1)(-2\theta^4) + (n^2+2n+1)n\theta^4 - n^2\theta^2}{(n+1)^2(2+n)}$$

$$= \frac{-2n^2\theta^4 - 4n\theta^4 - 2\theta^4 + n^3\theta^4 + 2n^2\theta^4 + n\theta^4 - n^2\theta^2}{(n+1)^2(2+n)}$$

$$= \frac{-n\theta^4 - 2\theta^4 + n^3\theta^4 + n\theta^4 - n^2\theta^2}{(n+1)^2(2+n)}$$

$$= \left[\frac{n^3\theta^4 - \theta^2(n^2+2)}{(n+1)^2(2+n)}\right] \rightarrow \text{Algun error de cuenta}$$

Mostrar el lunes

9.8 El tamaño, X (en GB), de ciertos archivos es una variable aleatoria cuya densidad es

$$f_\theta(x) = 3\theta^3 x^{-4}\mathbf{1}\{x \geqslant \theta\}, \qquad \theta > 0.$$

(a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de los tamaños de n archivos.

(b) Hallar expresiones para la esperanza y la varianza del estimador de máxima verosimilitud de θ.

(c) Mostrar que el estimador de máxima verosimilitud de θ converge en media cuadrática al verdadero valor de θ.

no es un 3θ, es $3.\theta^3$

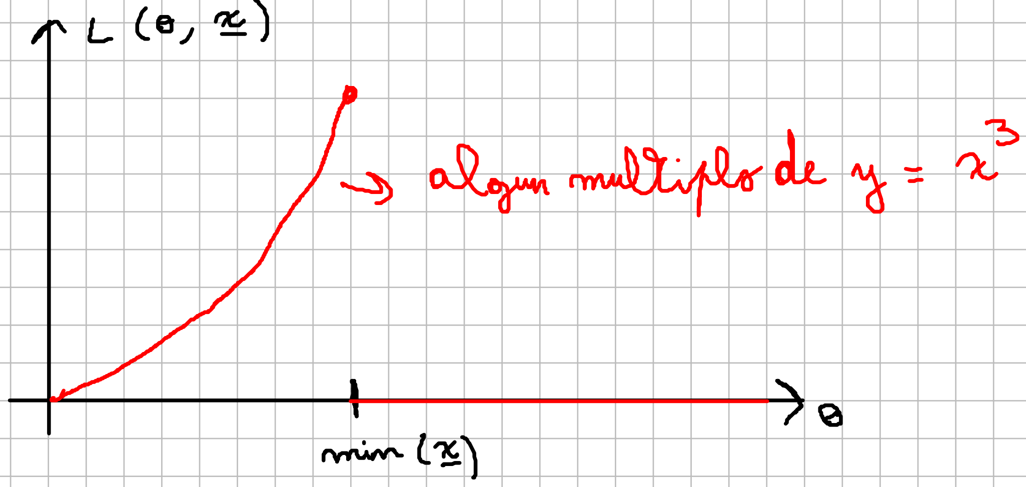
$$f_\theta(x) = 3\theta^3 x^{-4} \mathbb{1}\{x \geq \theta\}, \quad \theta > 0$$

$\hat{\theta}_{MV} = ?$

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} 3\theta^3 x_i^{-4} \mathbb{1}\{\underline{x} \geq \theta\}$$

si no es 0

$$L(\theta, \underline{x}) = 3^n \theta^{3n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-4} \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) \geq \theta\}$$



↳ a partir de que θ se hace más grande que el mas chiquito, la indicadora es 0 y muere la likelihood

$\rightarrow \quad \hat{\theta}_{MV} = \min(\underline{X})$

b) $E_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = E_\theta[\min(\underline{X})]$

↳ el minimo de $\underline{X}$ es una VA definida positiva, pues $x > \theta$ y $\theta > 0$, entonces se puede usar el truquito de la esperanza

definida positiva

$$E[\hat{\theta}_{MV}] = \int_0^{+\infty} k\, y^{k-1}\, \mathbb{P}(\hat{\theta}_{MV} \geq y)\, dy \quad , \; k = 1$$

si no, es 0

$$E_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\min(\underline{X}) \geq y)\, \mathbb{1}\{y > \theta\}\, dy$$

$$= \int_\theta^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 \geq y, X_2 \geq y, \ldots, X_n \geq y)\, dy$$

independientes

$$= \int_\theta^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 \geq y)\, \mathbb{P}(X_2 \geq y) \ldots \mathbb{P}(X_n \geq y)\, dy$$

$\mathbb{P}(X_1 \geq y) = ?$ $\quad \rightarrow \quad f_\theta(x) = \dfrac{3 \quad \theta^3}{x^4}$

Par (θ, 3)

Pareto	$\mathrm{Par}(m,\alpha)$	$\frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$[m,+\infty)$

función de supervivencia

$T = y$ $\quad y > \theta$ ✓

- si $T \sim \mathrm{Par}(m,\alpha)$ entonces $S(t) = (m/t)^\alpha$ para $t \geq m$.

$$E_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = \int_\theta^{+\infty} \left(\frac{\theta}{y}\right)^{3n} dy = \theta^{3n} \int_\theta^{+\infty} y^{-3n}\, dy$$

porque son las n probas i i d

$n \neq 2/3$

$$E_\theta[\hat{\theta}_{MV}] \overset{\uparrow}{=} \theta^{3n} \left. \frac{y^{(-3n+1)}}{-3n+1} \right|_\theta^{+\infty} = \frac{\theta^{3n}}{-3n+1} \left[\frac{1}{y^{3n-1}} \right] \Bigg|_\theta^{+\infty}$$

si $n > 0$

$y_{+\infty}$ es 0

$$E_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = \left(\frac{\theta^{3n}}{-3n+1}\right)\left(-\frac{1}{\theta^{3n-1}}\right) = \frac{1}{\theta^{-1}(3n-1)} \quad \frac{\theta^{3n}}{\theta^{3n}}$$

lo meto ahí

$$E_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = \frac{\theta}{3n-1}$$

$$\mathrm{Var}_\theta[\hat{\theta}_M] = \,?\, = E_\theta[\theta_{MV}^2] - E_\theta^2[\theta_{MV}]$$

$$E_\theta[\theta_{MV}^2] = \int_0^{+\infty} 2y\, \mathbb{P}(\min(\underline{x}) \geq y)\, \mathbb{1}\{y > \theta\}\, dy$$

$$= \int_\theta^{+\infty} 2y \left(\frac{\theta}{y}\right)^{3n} dy$$

$$= \theta^{3n} \int_\theta^{+\infty} 2y\, y^{-3n}\, dy = \theta^{3n} \int_\theta^{+\infty} 2 y^{-3n+1}\, dy$$

$$= \theta^{3n} \cdot 2 \left. \frac{y^{-3n+2}}{-3n+2} \right|_{\theta}^{+\infty} = \frac{2\theta^{3n}}{-3n+2}\left(\underbrace{\frac{1}{\infty^{3n-2}}}_{0 \ \forall n > \frac{2}{3}} - \theta^{-3n+2}\right)$$

$$= \frac{2\theta^{3n}\,\theta^{-3n+2}}{(3n-2)} = \frac{2\theta^2}{(3n-2)}$$

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{2\theta^2}{(3n-2)} - \frac{\theta^2}{(3n-1)^2}$$

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{(9n^2-6n+1)\,2\theta^2 - 3n\theta^2 - 2\theta^2}{(3n-2)(3n-1)^2}$$

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{18n^2\theta^2 - 12n\theta^2 + 2\theta^2 - 3n\theta^2 - 2\theta^2}{(3n-2)(3n-1)^2}$$

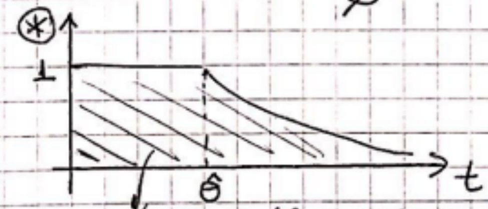
$$\boxed{\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{18n^2\theta^2 - 15n\theta^2}{(3n-2)(3n-1)^2}}$$

Nunca sabremos si esta bien

$$P(X_1>t) = \int_t f_\theta(x)\,dx = 1\{t<\theta\} + 1\{t>\theta\}\, 3\theta^3 \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_t^{\infty}$$

$$P(X_1>t) = 1\{t<\theta\} + 1\{t>\theta\}\, \cancel{3}\theta^3 \frac{t^{-3}}{\cancel{3}}$$

$$\Rightarrow (*) = \boxed{\begin{cases} \left(\dfrac{\theta}{t}\right)^{3n} & \text{si } t>\theta \\ 1 & \text{si } t<\theta \end{cases}}$$



esa area es la esperanza (A).

Aparentemente calcule mal la proba

θ

$$\mathbb{E}[\min\{X_i\}^2] = \int_0^\infty 2t\, \mathbb{P}(\min\{X_i\} \geq t) = \int_0^\theta 2t\,dt + \int_\theta^\infty 2t \frac{\theta^{3n}}{t^{3n}}\,dt.$$

c) $ECM_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = E[(\theta - \hat{\theta}_{MV})^2]$

$$ECM(\hat{\theta}_{MV}) = ? = E((\hat{\theta}_{MV} - \theta)^2)$$

$$\overset{\text{Prop var}}{=} Var_\theta(\hat{\theta}_{MV}) + B_\theta^2(\hat{\theta}_{MV})$$

$$B_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = E_\theta(\hat{\theta}_{MV}) - \theta = \frac{\theta}{3n-1} - \theta$$

$$B_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{3n\theta - \theta + \theta}{3n-1} = \frac{3n\theta}{3n-1}$$

$ECM(\hat{\theta}_{MV}) =$ Algo : | (que debería tender a 0)

9.9 La duración, X, en años de ciertos discos rígidos tiene la distribución Pareto con densidad

$$f_\theta(x) = \theta x^{-(\theta+1)} \mathbf{1}\{x > 1\}, \qquad \theta > 1.$$

(a) Usar el *criterio de factorización de Neyman-Fisher* para hallar un estadístico suficiente para θ, basado en una muestra aleatoria de la duración de n discos.

(b) Mostrar que las distribuciones f_θ, $\theta > 1$, pertenecen a una familia exponencial y usar esa propiedad para hallar un estadístico suficiente para θ. ¿Cuál es su distribución? ☞:*notar que* $\log X \sim$Exponencial(θ).

(c) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n discos rígidos. Mostrar que se trata de un estimador asintóticamente insesgado y cuya varianza tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

(d) Hallar la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud de θ. ☞: *es fácil ver que* $I(\theta) = \theta^{-2}$.

$$f_\theta(x) = \theta x^{-(\theta+1)} \mathbb{1}\{x>1\}, \quad \theta > 0$$

y abierto

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{-(\theta+1)} \mathbb{1}\{x>1\}$$

$$L(\theta, \underline{x}) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} e^{\ln(x_i^{(-\theta-1)})} \mathbb{1}\{x>1\}$$

$$= \theta^n \prod^n e^{-\theta} e^{-1} e^{\ln(x_i)} \mathbb{1}\{x>1\}$$

$$= \underbrace{e^{-n}\, \theta^n\, e^{-n\theta \cdot \sum \ln(x_i)}}_{g(\sum_i \ln(x_i),\, \theta)} \; \underbrace{\mathbb{1}\{\min(\underline{x})>1\}}_{h(\underline{x})}$$

$\Rightarrow T(\underline{x}) = \sum \ln(x_i)$ es estadístico suficiente

b) $f_\theta(x) = \theta\, x^{-(\theta+1)} \quad \mathbb{1}\{x>1\}$

$$f_\theta(x) = e^{\ln\theta}\; e^{-(\theta+1)\ln(x)} \quad \mathbb{1}\{x>1\}$$

$$f_\theta(x) = \underbrace{\mathbb{1}\{x>1\}}_{h(x)} \; e^{\underbrace{-(\theta+1)\ln(x)}_{T(x)\,\mu(\theta)} - \underbrace{(-\ln(\theta))}_{\xi(\theta)}}$$

$\Rightarrow T(x) = \ln(x) \Rightarrow \sum_i T(x) = \sum_i \ln(x_i) = r(\underline{x})$

es estadístico suficiente

y su distribución es gama? (suma de exp)

: *notar que* $\log X \sim$ Exponencial(θ).

(c) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n discos rígidos. Mostrar que se trata de un estimador asintóticamente insesgado y cuya varianza tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

$\hat{\theta}_{MV} = ?$

$$L(\theta, \underline{x}) = e^{-n}\, \theta^n\, e^{-n\theta \cdot \sum_i \ln(x_i)} \; \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 1\}$$

$\theta > 1$, aplico ln

$$\ln(L(\theta, \underline{x})) = -n \ln(\theta^n) \left(-n\theta \sum_i \ln(x_i)\right) \ln(\mathbb{1})$$

derivo:

$$\frac{\partial \ln(L(\theta, \underline{x}))}{\partial \theta} = -n \frac{1}{\theta^n} (n-1)\,\theta^{(n-1)} \ldots \; f'g + fg' \ldots$$

a ver

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta^n x_i^{-(\theta+1)} \quad \mathbb{1}\{x_i > 1\} \qquad \theta > 1$$

$$\ln(L(\theta, \underline{x})) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \theta^n x_i^{-(\theta+1)} \; \mathbb{1}\{x_i > 1\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\theta^n\right) + (-\theta-1)\ln(x_i) + \ln(\mathbb{1})\right)$$

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta^n} (n-1)\,\theta^{(n-1)} - \ln(x_i) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\cancel{\theta^n}}{\cancel{\theta^n}} \theta^{-1} (n-1) - \ln(x_i) \right)$$

$$= \frac{n^2 - n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \underset{\downarrow}{=} 0$$

busco θ_{MV}

$$n^2 - n = \theta \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$$\theta_{MV} = \frac{n^2 - n}{\ln(x_i)} \rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \frac{n^2 - n}{\ln(X_i)}$$

Sesgo y Varianza? $\rightarrow$

$\rightarrow E[\hat{\theta}_{MV}] =$ $\rightarrow$ definido positivo, pero seguro tengo mal la cuenta, asique paso

9.10 La duración en años de cierto tipo de dispositivos es una variable aleatoria X con función intensidad $\lambda(x) = 3\theta^{-3}x^2\mathbf{1}\{x > 0\}$.

(a) Hallar un estadístico suficiente para θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n dispositivos.

(b) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ basado en una muestra aleatoria de la duración de n dispositivos.

(c) Usando los números aleatorios

$$0.186,\ 0.178,\ 0.488,\ 0.255,\ 0.392,\ 0.234,\ 0.597,\ 0.205,\ 0.611,\ 0.651.$$

simular 10 valores de X cuando $\theta = 1$ y en base a esa información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(d) Se pusieron a prueba 10 de esas máquinas y se obtuvieron los siguientes tiempos:

$$2.00,\ 5.48,\ 2.43,\ 1.90,\ 5.85,\ 1.58,\ 2.30,\ 2.87,\ 3.62,\ 2.71.$$

Basándose en la información muestral calcular el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que una máquina del mismo tipo funcione sin fallas más de dos años y medio.

No, es una función de intensidad

$$f_\theta(x) = \frac{3}{\theta^3} x^2 \mathbb{1}\{x>0\}$$

$$\to F_\theta(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)\,dt}$$

Todo mal

a) Estadístico suficiente? → planteo función de Verosimilitud para usar Neyman-Fisher

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} 3\theta^{-3} x^2 \mathbb{1}\{x_i > 0\}$$

$$L(\theta, \underline{x}) = 3\theta^{-3n} \prod_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 0\}$$

$$L(\theta, \underline{x}) = 3\theta^{-3n} \prod_{i=1}^{n} e^{\ln(x_i^2)} \mathbb{1}\{\ \}$$

$$L(\theta, \underline{x}) = \underbrace{3\theta^{-3n} e^{2\sum \ln(x_i)}}_{g\left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i),\ \theta\right)} \underbrace{\mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 0\}}_{h(\underline{x})}$$

$T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$ es estadístico suficiente para f_θ

b) $\hat{\theta}_{MV} = ?$ dado n muestras, como $\theta > 0$, aplico ln para hallar el maximo

↳ (familia regular)

- Θ abierto $(0, +\infty)$
- diferenciable
- Soporte no depende de θ

$$\ln(L(\theta, \underline{x})) = \ln\left(3\theta^{3n} e^{2\sum_i \ln(x_i)} \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 0\}\right)$$

$$\ln(L(\theta, \underline{x})) = \ln(3) + 3n\ln(\theta) + 2\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + \ln(\mathbb{1})$$

$$\frac{\partial \ln(L(\theta, \underline{x}))}{\partial \theta} \doteq \frac{3n}{\theta}$$

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)\,dt} = 1 - e^{-\int_0^x 3\theta^{-3}\tau^2\,d\tau}$$

$$\int_0^x 3\theta^{-3}\tau^2\,d\tau = 3\theta^{-3}\left.\frac{\tau^3}{3}\right|_0^x = \left(\frac{x}{\theta}\right)^3$$

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^3} \rightarrow f_\theta(x) = 3\frac{x^2}{\theta^3} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^3} \mathbb{1}\{x > 0\}$$

$$\rightarrow L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} 3\frac{x_i^2}{\theta^3} e^{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^3} \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) \geq 0\}$$

$$L(\theta, \underline{x}) = \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} e^{2\ln(x_i)} e^{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^3}$$

$$L(\theta, \underline{x}) = (3\theta^{-3})^n e^{-n\theta^{-3}} \prod_{i=1}^{n} e^{2\ln(x_i) + x_i^3}$$

$$L(\theta, \underline{x}) = \underbrace{(3\theta^{-3})^n e^{-n\theta^3 + \sum x_i^3}}_{g(\sum_i x_i^3, \theta)} \cdot \underbrace{e^{\sum_i 2\ln(x_i)} \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 0\}}_{h(\underline{x})}$$

$T(\underline{X}) = \sum_i X_i^3$ es estadistico suficiente.

b $\hat{\theta}_{MV} = ?$

$$L(\theta, \underline{x}) = (3\theta^{-3})^n \cdot e^{-n\theta + \sum_i x_i^3} \quad e^{\sum_i 2\ln(x_i)} \quad \mathbb{1}\{\min(x) > 0\}$$

$$\ln(L(\theta, \underline{x})) = \ln((3\theta^{-3})^n) - n\theta + \sum_i x_i^3 + 2\sum \ln(x_i) + \ln(\mathbb{1})$$

$$\frac{\partial \ln(L(\theta, \underline{x}))}{\partial \theta} = \frac{n}{3\theta^{-3}} \, 3 \cdot -4\,\theta^{-4} - n = 0$$

se me fue x....

$$-4n\theta^{-1} = n$$

... Sigo con la guia

9.11 En una mesa electoral votaron 129 ciudadanos. Se extrajeron (sin reposición) 7 sobres al azar de la urna, se examinaron y resultó que el candidato verde obtuvo exactamente 3 votos. Estimar por máxima verosimilitud la cantidad de votos por el candidato verde que había en la urna.

$\boxed{\text{129 Ciudadanos}} \rightarrow$ 7 Sobres $\rightarrow$ 3 votos

- ¿que pinta tiene la variable aleatoria?

$\rightarrow$ Es una hiper geométrica, $N \rightarrow 129$

$n \rightarrow 7$

$x_i \rightarrow 3$ Votos

- Hipergeométrica modela la cantidad de *éxitos* en n extracciones sin reposición de una población de tamaño total N, de los cuales d individuos son *éxito* y $N-d$ individuos no lo son.

$\rightarrow$ ahora nosotros queremos aproximar d, por lo tanto:

Planteamos la verosimilitud

hipergeométrica $p_X(x) = \dfrac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

mínimo sabemos que tiene 3

$d \in [3, 129-3]$

$$L(d, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\binom{d}{x_i}\binom{129-d}{7-x_i}}{\binom{129}{7}}$$

$\rightarrow$ Pero yo solo tengo un dato

$x_i = 3$

$$L(d, \underline{x}) = \frac{\binom{d}{3}\binom{129-d}{7-3}}{\binom{129}{7}}$$

¿y cómo se que d hace la mejor Verosimilitud?

$\rightarrow$ No voy a probar los 123 valores

$\rightarrow$ Planteamos $L(d, 3) > L(d-1, 3)$

osea, el d tal que sea mayor al anterior y maximizamos eso.

$$\frac{L(d,3)}{L(d-1,3)} > 1 \rightarrow \frac{\binom{d}{3}\binom{129-d}{7-3}}{\binom{d-1}{3}\binom{129-d-1}{7-3}} > 1$$

(los demás se van por ser iguales)

$- (d-1)$

Todo mal

$$\frac{\dfrac{\cancel{d!}}{\cancel{3!}\,(d-3)!}\cdot\dfrac{\cancel{(129-d)!}}{(\cancel{4})!\;(129-d-4)!}}{\dfrac{\cancel{(d-1)!}}{\cancel{3!}\,(d-1-3)!}\;\;\dfrac{\cancel{(129-d-1)!}}{\cancel{4}!\,(129-d-1-4)!}}$$

$d \qquad 129-d$

$$\frac{d!}{(d-1)!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\ldots\cdot(d-1)\cdot d}{4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot d-1} \text{ y } d$$

$$\underbrace{\frac{(d-4)!}{(d-3)!}}\cdot d\cdot(129-d)\cdot\frac{(129-d-5)!}{(129-d-4)!}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(d-4)}{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(d-4)\,(d-3)} = \frac{1}{d-3}$$

$$\frac{d\,(129-d)}{(d-3)\,(129-d-4)} > 1$$

$$129d - d^2 > 129d - d^2 - 4d - 387 + 3d + 12$$

$$0 > -d - 375 \Rightarrow d_{MV} > 375$$

Para hallar el máximo $\mathcal{L}(\theta) > \mathcal{L}(\theta-1)$

$$\frac{\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{L}(\theta-1)} > 1 \quad \to \quad \frac{\binom{\theta}{3}\binom{129-\theta}{4}}{\binom{\theta-1}{3}\binom{129-(\theta-1)}{4}}$$

dada muestra muestra es mas "verosimil" que queden 55

$\hookrightarrow \theta < 55.7 \to \hat{\theta}_{MV} = 55$ votos verdes

9.12 Mostrar que la familia de distribuciones $\Gamma(\nu,\lambda)$ es una familia exponencial a 2 parámetros. Hallar un estadístico suficiente para (ν,λ) basado en una muestra aleatoria de tamaño n

$$X \sim \Gamma(\nu,\lambda) \quad f_X(x) = \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\lambda x}$$

Para que sea familia exp de 2 parametros

Familias exponenciales

Se dice que una familia de distribuciones (continuas o discretas) en $\mathbb{R}^q$ con distribución $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ es una familia exponencial a k parámetros, si su función de densidad (o probabilidad) se puede escribir como

$$f_\theta(x) = A(\theta) \cdot e^{\sum_{i=1}^{k} c_i(\theta) r_i(x)} \cdot h(x)$$

$$e^{\ln(x^{(\nu-1)})}$$

$$f_{(\lambda,\nu)}(x) = \underbrace{\frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)}}_{A(\theta)} \cdot e^{-\lambda x + (\nu-1)\ln(x)} \quad \underbrace{\mathbb{1}\{x>0\}}_{h(x)}$$

$\theta = (\lambda,\nu)$

$c_1(\lambda) = -\lambda \qquad c_2(\nu) = \nu - 1$

$r_1(x) = x \qquad r_2(x) = \ln(x)$

$\Rightarrow$ La distribucion $\Gamma(\lambda,\nu)$ es familia exp de 2 parametros.

¿Estadístico suficiente?

¿Te acordás que hablamos de flias exponenciales?

Teo: Una familia exponencial a k parámetros tiene como estadístico suficiente para $\theta \in \mathbb{R}^k$ al vector $T = (r_1(\underline{X}), \dots, r_k(\underline{X}))$

Ahora, si $X_1, \dots X_n$ es una m.a. de una distribución perteneciente a una flia exponencial a k parámetros, entonces el vector aleatorio $\underline{X}$ también tiene una distribución perteneciente a una flia exponencial a k parámetros, y el estadístico suficiente para θ basado en la m.a. será

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n} r_1(X_i), \dots, \sum_{i=1}^{n} r_k(X_i) \right)$$

$T = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i , \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \right)$ Es estadístico suficiente para la muestra de n parámetros.

9.13

(a) Mostrar que la familia de distribuciones $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ puede expresarse en la forma

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2\right),$$

donde $\theta = (\mu, \sigma^2)$. $\Rightarrow$ supongo que quiere que encuentre la forma exp

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_{\theta=(\mu,\sigma^2)}(x) = (\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2)}$$

$$f_\theta(x) = (\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{\sigma^2}}$$

$$f_\theta(x) = \underbrace{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}}}_{A(\theta)} e^{\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2}} \cdot \underbrace{1}_{h(x)}$$

$c_1(\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \qquad c_2(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2}$

$r_1(x) = x^2 \qquad r_2(x) = x$

(**b**) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Hallar la expresión de la densidad conjunta y mostrar que $T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ es un estadístico suficiente para θ.

done, porque es familia exp de 2 parametros

¿densidad conjunta? independientes

↳ Las muestras son iid entre si, osea que su densidad es la verosimilitud

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}}}_{A(\theta)} e^{\frac{x_i^2}{\sigma^2} + \frac{\mu x_i}{\sigma^2}}$$

$$L(\theta, \underline{x}) = A^n(\theta) \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{x_i^2}{\sigma^2} + \frac{\mu x_i}{\sigma^2}}$$ → No sé

(**c**) Sea $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Mostrar que $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$ y deducir que $T' = (\bar{X}, S^2)$, donde

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

es un estadístico suficiente para θ.

$\sum_i \bar{X} = n\bar{X}$

$\sum_i X_i = n\bar{X}$

$$\sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \sum_i (X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)$$

$$= \sum_i X_i^2 - 2\bar{X} \cdot (\sum_i x_i) + (\tfrac{1}{n}\sum_i x_i)^2$$

$$= \sum_i x_i^2 - 2\bar{X}\, n\bar{X} + \bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\bar{X}^2 - n\bar{X}^2$$

$$= \sum_i X_i^2 - n\bar{X}^2$$

d $\hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n}(x_i - \bar{X}) = \frac{n-1}{n} S^2$

9.14 Se arroja un dado piramidal n veces. El dado tiene las caras numeradas $1, 2, 3, 4$ y están cargadas con probabilidades p_1, p_2, p_3, p_4, respectivamente. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 la cantidad de lanzamientos en los que el dado cae en la cara $1, 2, 3, 4$, respectivamente. Mostrar que la distribución de (X_1, X_2, X_3, X_4) pertenece a una familia exponencial a 3 parámetros.

Este era el horrible de despejar y poner uno en función de los otros ya que se sabe que $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = n$

→ Está en la clase de 9-11-22, pág 13.

9.15 Al finalizar el primer semestre de gobierno se realizó una encuesta entre 1200 ciudadanos, 414 de los cuales declararon ser oficialistas, 196 declararon no ser ni oficialistas ni opositores y el resto declaró ser opositor. En base a esa información muestral estimar por máxima verosimilitud (p_1, p_2), donde p_1 es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar sea oficialista y p_2 la de que sea opositor.

$n = 1200$ $\qquad OP = 1200 - 196 - 414 = \#_2$

$OF = 414 = \#_1$

$\hat{\theta}_{MV} / \ \theta = (p_1, p_2)$

$X =$ "El ciudadano es oficialista"

$Y =$ "El ciudadano es opositor"

$X \sim Ber(p_1)$ $\qquad$ (p_1 y p_2 es lo que no sé)

$Y \sim Ber(p_2)$

Dado que hay 3, puedo plantear una multinomial, con la p_3 que depende de p_1 y p_2

$Z \sim Multinomial(p_1, p_2, 1-p_1-p_2, n)$

$$f_\theta(x) = \underbrace{\frac{n}{x!\,y!\,(n-x-y)!}} \; p_1^{x} \, p_2^{y} \, (1-p_1-p_2)^{n-x-y}$$

$$f_\theta(\underbrace{x,y}_{z}) = M\, e^{\ln(p_1^x)}\, e^{\ln(p_2^y)}\, e^{n-x-y\ln(1-p_1-p_2)}$$

$$f_\theta(z) = M\, e^{x\ln(p_1)+y\ln(p_2)+(n-x-y)\ln(1-p_1-p_2)}$$

$$f_\theta(z) = M\, e^{x\ln(p_1)+y\ln(p_2)+n\ln(k)-x\ln(k)-y\ln(k}$$

$$f_\theta(z) = \underbrace{e^{n\ln(1-p_1-p_2)}}_{A(\theta)}\; e^{x\ln\left(\frac{p_1}{1-p_1-p_2}\right)+y\ln\left(\frac{p_2}{1-p_1-p_2}\right)}\; \underbrace{M}_{h(z)}$$

$$x(\ln(p_1)-\ln(1-p_1-p_2))$$

$$c_1(\theta) = \ln\left(\frac{p_1}{1-p_1-p_2}\right) \qquad c_2(\theta) = \ln\left(\frac{p_2}{1-p_1-p_2}\right)$$

$$r_1(z) = x \qquad r_2(z) = y$$

$\Rightarrow$ $f_\theta(z)$ es familia exponencial $\rightarrow$ No me pedían eso

$\Rightarrow$ pero ya que lo calculé al pedo lo uso

$\rightarrow$ Puedo maximizar el exponente para hallar el máximo

$\Rightarrow$ mejor verosimilitud $\quad x = 414 \quad y = 590 \quad n-x-y = 196$

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} e^{n\ln(1-p_1-p_2)+x\ln\left(\frac{p_1}{1-p_1-p_2}\right)+y\ln\left(\frac{p_2}{1-p_1-p_2}\right)} h(z)$$

$$L(\theta) = h(414,590)\, e^{1200\ln(1-p_1-p_2)+414\ln\left(\frac{p_1}{1-p_1-p_2}\right)+590\ln\left(\frac{p_2}{1-p_1-p_2}\right)}$$

un reguilombo

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial p_1} = h(414, 590)\, e^{\cdots} \cdot \frac{1200}{1-p_1-p_2}(-1) + \cdots$$

doubt pero:

$$L(\theta|X) = \frac{1200!}{414!\,196!\,590!} p_1^{414} p_2^{590} (1-p_1-p_2)^{196}.$$

$$= \frac{1200!}{414!\,196!\,590!} e^{\underbrace{414\ln p_1 + 590 \ln p_2 + 196 \ln(1-p_1-p_2)}_{(*)}}$$

es flia exponencial

puedo maximar $(*)$.

$\frac{\partial}{\partial p_1}$ $\frac{414}{\hat{p}_1} - \frac{196}{1-\hat{p}_1-\hat{p}_2} = 0.$

$\frac{\partial}{\partial p_2}$ $\frac{590}{\hat{p}_2} - \frac{196}{1-\hat{p}_1-\hat{p}_2} = 0.$

Propongo: $\boxed{\hat{p}_1 = \frac{414}{1200}}$ $\boxed{\hat{p}_2 = \frac{590}{1200}}$.

$1200 - 1200 = 0$ ✓

$1200 - 1200 = 0$ ✓