**10.13** La duración (en horas) de cada lámpara en un lote es una variable aleatoria con distribución exponencial. Se pusieron a prueba 10 lámparas y todas superaron las 50 horas de duración. Al 5 % de significación, ¿se puede afirmar que la duración media de cada lámpara del lote es mayor que 55 horas? Tomar la decisión basándose en el *p-valor*.

$X_i$: Duración (en horas) de cada lampara $\quad X_i \sim Exp(\lambda)$

$$H_0: \frac{1}{\lambda} \leq \underbrace{55}_{\lambda_0} \longrightarrow H_0: \lambda \leq \frac{1}{55}$$

$$\Rightarrow \; H_0: \lambda \leq \frac{1}{55} \qquad H_1: \lambda > \frac{1}{55}$$

Dato: $n = 10$, $\underbrace{\min(X_i)}$ $= 50$

Por 4.14 $\Rightarrow \min(X_i) = Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

$$\underbrace{\min(X_1, \dots, X_{10})}_{M} \sim \underbrace{Exp(10\lambda)}_{\text{familia exponencial}} \sim \Gamma(1, 10\lambda)$$

Por prop de la exp $\rightarrow 10 \min(\underline{X}) \sim Exp(\lambda)$

Estadístico suficiente de $M$: $T = \frac{1}{10} \min(\underline{X})$, $\underbrace{c(\theta) = -\lambda}_{\text{Decreciente}}$

(estadístico suficiente para una va $Exp(10\lambda)$ $T = M$)

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } -10\min(\underline{X}) > K_\alpha \\ 0 & \text{si } -10\min(\underline{X}) \leq K_\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ si } \min(\underline{X}) < K'_\alpha \\ 0 \text{ si } \min(\underline{X}) \geq K'_\alpha \end{cases}$$

$$\alpha = 0{,}05 = \mathbb{P}_{\lambda_0}(\delta(\underline{X}) = 1)$$
$$= \mathbb{P}_{\lambda_0}(\min(\underline{X}) < K'_\alpha)$$

$$\Rightarrow K'_\alpha = \underbrace{z_{0,05}}_{\text{Quantil } 0{,}05 \text{ de } \mathrm{Exp}\left(10 \cdot \frac{1}{55}\right)}$$

$$K'_\alpha = 0{,}2821$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{\min(\underline{X}) < 0{,}2821\}}$$

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\min(\underline{X}) < 50\right) = 1 - e^{-\frac{10}{55}\cdot 50} = 0{,}9998$$

$$\boxed{\text{Como mi } p\text{-valor} >> \alpha \text{, no puedo rechazar } H_0}$$