Guía 6

6.1 Una empresa produce discos que son defectuosos con probabilidad 0.01 y los vende en paquetes de 10. Ofrece una garantía de que como máximo 1 de los 10 discos del paquete es defectuoso, en caso contrario devolverá el dinero de la compra. ¿Qué proporción de los paquetes no satisface la garantía? Si Lucas compra tres paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que le devuelvan el dinero de la compra de exactamente uno de ellos?

6.2 Un tirador tiene probabilidad p de dar en el blanco. Se le ofrecen dos alternativas para ganar un premio: a) hacer 3 disparos con la condición de dar por lo menos 2 veces en el blanco; b) hacer 5 disparos con la condición de dar por lo menos 3 veces en el blanco. ¿Para qué valores de p es más favorable la primera alternativa?

6.3 Se arroja una moneda equilibrada 18 veces.

(**a**) Calcular la probabilidad de obtener exactamente 13 caras.

(**b**) Hallar el número más probable de caras y calcular la probabilidad de que se obtenga ese número.

6.4 La probabilidad de que un pasajero que reserva un asiento no se presente al vuelo es 0.04, de manera independiente unos de otros. En consecuencia, la política de una empresa es vender 100 reservas en un avión que tiene solo 98 asientos. Estimar la probabilidad de que todas las personas que se presentan para un vuelo en particular encuentren asientos disponibles.

6.5 ¿Cuántas veces hay que lanzar un dado equilibrado para que, con probabilidad mayor o igual que 0.95, la frecuencia relativa con que salga el 5 difiera de 1/6 en no más de 0.01?

6.6 Se lanza un dado equilibrado sucesivas veces.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del tercer lanzamiento.

(**b**) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del sexto lanzamiento, dado que no ocurrió en los primeros 3 lanzamientos.

6.7 ¿Cuán larga debe ser una sucesión de dígitos decimales equiprobables para que la probabilidad de que aparezca el dígito 6 sea por lo menos 0.99?

6.8 [*ver* **Ejercicio 4.7**] Una lámpara se mantendrá encendida durante un tiempo exponencial de media 3 horas. Lucas enciende la lámpara y, mientras la lámpara está encendida, lanza un dado equilibrado de veinte en veinte segundos (el primero cuando enciende la lámpara). Hallar el número esperado de 3's observados hasta que se apague la lámpara.

6.9 Lucas y Monk lanzan monedas simultáneamente hasta obtener en un lanzamiento dos resultados iguales. Si los dos obtienen cara gana Lucas; si ambos obtienen ceca gana Monk. La moneda de Lucas es equilibrada, pero la moneda de

Monk tiene probabilidad 1/3 de cara. Calcular la probabilidad de que Monk gane el juego.

6.10 Chocolatines Jack lanza una colección de muñequitos con las figuras de los personajes de *Kung Fu Panda*: Panda, Tigre, Mono, Grulla y Mantis. Cada vez que Lucas compra un chocolatín es igualmente probable que obtenga alguno de los personajes. Sea N la cantidad de chocolatines que Lucas debe comprar hasta completar la colección, hallar $\mathbf{E}[N]$ y $\mathbf{var}(N)$. Interpretar los resultados.

6.11 Un dado equilibrado tiene pintadas sus seis caras de la siguiente forma: rojo, amarillo, amarillo, verde, verde, verde. Calcular la esperanza de la cantidad de lanzamientos del dado que deberán realizarse para observar sus tres colores.

6.12 Un estacionamiento, al abrir, tiene capacidad para tres coches. Cada minuto pasa un coche por allí y la probabilidad de que quiera estacionarse es 0.8. Calcular la probabilidad de que se llene en exactamente 10 minutos.

6.13 [*ver* **Ejercicio 5.6**] Se consideran dos variables N_1 y N_2 geométricas e independientes tales que $\mathbf{P}(N_i = 1) = p$. Sean $S_1 = N_1$ y $S_2 = N_1 + N_2$. Hallar

(**a**) la función de probabilidad conjunta de S_1 y S_2.

(**b**) la distribución de $S_1|S_2 = m$ y calcular $\mathbf{P}(3 \leqslant S_1 \leqslant 5|S_2 = 8)$.

6.14 En una fábrica hay cuatro máquinas A, B, C y D que producen el 40 %, 30 %, 20 % y 10 % de la producción total, respectivamente.

(**a**) Se eligen al azar 14 artículos de la producción. Calcular la probabilidad de que exactamente 5 provengan de la máquina A, 4 de la máquina B, 3 de la máquina C y 2 de la máquina D.

(**b**) Si se sabe que en 14 artículos tomados al azar de la producción, exactamente 5 provienen de la máquina A, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres provenientes de la máquina C?

6.15 Un proceso de producción produce piezas con dos tipos de defectos independientes: por rotura con probabilidad 0.1 y por abolladura con probabilidad 0.2. Calcular la probabilidad de que al elegir 8 piezas,

(**a**) 1 tenga ambos defectos, 2 estén abolladas solamente, 3 estén rotas solamente, y el resto sean buenas.

(**b**) a lo sumo 1 tenga ambos defectos.

(**c**) menos de 5 tengan algún defecto.

(**d**) por lo menos 3 no tengan defectos.

6.16 Una máquina produce piezas con dos tipos de defectos independientes: de tipo I con probabilidad $1/3$ y de tipo II con probabilidad $1/4$. La máquina produce piezas hasta obtener una con los dos defectos. Sabiendo que se produjeron exactamente 12 piezas, calcular la esperanza de la cantidad de piezas producidas sin defectos.

6.17 Se arroja un dado piramidal 144 veces. El dado tiene las caras numeradas $1, 2, 3, 4$ y están cargadas con probabilidades $0.4, 0.3, 0.2, 0.1$, respectivamente. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 la cantidad de lanzamientos en los que el dado cae en la cara $1, 2, 3, 4$, respectivamente. Hallar la matriz de covarianzas $(\mathbf{cov}(X_i, X_j))_{1\leqslant i\leqslant 4, 1\leqslant j\leqslant 4}$.

6.18 Se tirará un dado equilibrado hasta que salga el dos. Sea N la cantidad de tiradas necesarias y sea M la cantidad de cuatros obtenidos.

(**a**) Hallar la ecuación de la recta de regresión de M dada N.

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[M]$, $\mathbf{cov}(M, N)$ y $\mathbf{var}(M)$.

6.19 Un motoquero transita por una avenida. Las probabilidades de que al momento de llegar a un semáforo este se encuentre en rojo, amarillo o verde son 0.45, 0.05 y 0.5 respectivamente. Los estados de los semáforos son independientes y el motoquero sólo se detiene al encontrar un semáforo en rojo. Sea N la cantidad de luces verdes que atravesó hasta detenerse.

(**a**) Hallar la función de probabilidad de N.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(N > 2)$.

Ejercicios Complementarios

6.20 Se trata de que un proceso de fabricación no produzca más del 5 % de artículos defectuosos. A tal efecto se lo controla periódicamente examinando n artículos y si alguno de ellos es defectuoso, se detiene el proceso para revisarlo.

(**a**) Si el proceso de fabricación realmente está trabajando al 5 % de artículos defectuosos y se examinan $n = 20$ artículos, ¿cuál es la probabilidad de detener el proceso innecesariamente?

(**b**) Hallar la cantidad mínima de artículos que deberán examinarse si se desea que la probabilidad de detener el proceso cuando realmente está trabajando al 6 % de defectuosos sea por lo menos 0.99. Con ese tamaño de muestra, ¿cuál es la probabilidad de detener el proceso innecesariamente?

6.21 En un proceso de producción en serie las piezas tienen dos tipos de defectos: de forma o de color. La probabilidad de que una pieza tenga un defecto de forma es 0.1; la probabilidad de que tenga un defecto de color es de 0.72 si tiene defecto de forma, y de 0.08 cuando no tiene defecto de forma. Cuando se detecta una pieza con ambos defectos se suspende la producción formando un lote con las piezas producidas hasta ese momento, incluyendo la pieza con ambos defectos. ¿Cuál es la cantidad media de piezas defectuosas por lote?

6.22 ☣ Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias, todas de media 2, y N una variable geométrica($p = 2/3$), independiente de las X_i. Calcular $\mathbf{E}[X_1 + \cdots + X_N | N \geqslant 2]$.

6.23 De los 25 jugadores de fútbol de un club se elige al azar un equipo de 11. Si 8 de los jugadores del club son federados, hallar la probabilidad de encontrar

(**a**) ningún jugador federado en el equipo.

(**b**) exactamente 2 jugadores federados en el equipo.

(**c**) al menos 4 jugadores federados en el equipo.

6.24 🛑 En una urna hay k bolas blancas y 5 bolas negras, donde $0 \leqslant k \leqslant 6$. El resultado de la extracción de 2 bolas al azar sin reposición fue de 1 blanca y 1 negra. Para cada k hallar la probabilidad de haber observado el mencionado resultado de las 2 extracciones. ¿Qué valor de k da lugar a la mayor probabilidad?

6.25 Una cadena de supermercados compra un lote de 50000 bombitas eléctricas. Un lote se considera bueno cuando a lo sumo 500 bombitas están quemadas, y se considera malo cuando al menos 1500 bombitas lo están. Se elige una muestra de n bombitas para ensayar. Si c o menos de ellas están quemadas, se acepta el lote. En caso contrario, se lo devuelve al proveedor. Se proponen tres planes de muestreo:

1. $n = 200$; $c = 4$.
2. $n = 100$; $c = 2$.
3. $n = 100$; $c = 1$.

(**a**) Expresar en palabras los riesgos del proveedor y del comprador.

(**b**) Graficar las curvas características (ver **Ejercicio 1.37**) de los tres planes de muestreo (utilizar la aproximación binomial de la hipergeométrica).

(**c**) ¿El plan 2 protege similarmente al proveedor que el plan 1? ¿Y al comprador? Justificar.

(**d**) ¿El plan 3 protege más al comprador que el plan 1? ¿Y al proveedor? Justificar.
