En el video anterior...

$H_0: \theta = \theta_1$ Vs $H_1: \theta = \theta_2$

Hipótesis simples

$H_0: \theta \leq \theta_1$ Vs $H_1: \theta > \theta_1$

Hipótesis unilaterales

$\delta(\underline{x}) \rightarrow$ Regla de decisión
Función de la m.a

Propiedad

Sea $\underline{X} = (X_1, \dots X_n)$ una m.a. con distribución perteneciente a una familia exponencial, luego

1. Si $C(\theta)$ es creciente, el test para

$H_0: \theta \leq \theta_1$ Vs $H_1: \theta > \theta_1$

será

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T > k_\alpha \\ 0 & \text{si } T \leq k_\alpha \end{cases}$$

Que para un nivel α dado se tendrá

$$\alpha = P_{\theta_1}(\delta(\underline{x}) = 1)$$

Recordá que

$$\underbrace{T = r(\underline{X})}_{\text{Estadístico suficiente}}$$

2. Si $c(\theta)$ es decreciente, el test para

$$H_0: \theta \underset{\geqslant}{\leq} \theta_1 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \underset{<}{>} \theta_1$$

será

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T \overset{\leq}{>} k_\alpha \\ 0 & \text{si } -T \underset{\geqslant}{\leq} k_\alpha \end{cases}$$

Que para un nivel α dado, se tendrá

$$\alpha = P_{\theta_1}(\delta(\underline{x}) = 1)$$

<u>Observación:</u> (Desigualdades)

(lo mismo en el caso I)

Ejemplo: Sea $X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ donde μ es una constante conocida. Encontrar el test de hipótesis para

$$H_0: \sigma^2 \leq s \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma^2 > s.$$

Como estamos frente a una flia exponencial,

$$f_{\sigma^2}(x) = \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-n/2}}_{A(\sigma^2)} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \, \underbrace{\cdot 1}_{h(\underline{x})}$$

$$C(\sigma^2) = \frac{-1}{2\sigma^2}$$

$$r(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$\rightarrow T = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ y $c(\sigma^2)$ es creciente en σ^2

entonces el test será de la forma

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 > k_\alpha \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

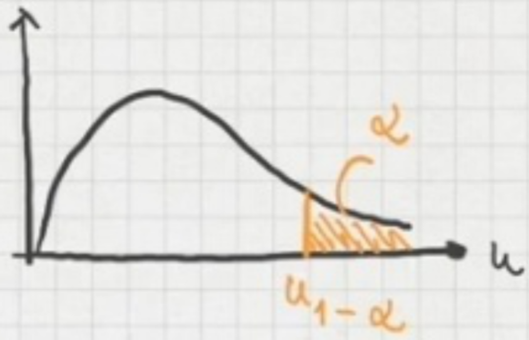
Me falta encontrar el estadístico del test y el cuantil que delimita mi zona de rechazo

$$\alpha = P_{\sigma^2 = s} \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 > k_\alpha \right)$$

Del teo. del capitulo 9 sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

$$\alpha = P_{\sigma^2 = s} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{s}}_{U \sim \chi^2_n \text{ si } \sigma^2 = s \text{ (bajo } H_0)} > \frac{k_\alpha}{s} \right) \quad u_{1-\alpha}$$



Resultando

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{s} > u_{1-\alpha} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Le agregamos   enunciado?

Para medir la concentración de una sustancia en una solución se conoce un método cuyo error es una V.A. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Se propone un nuevo método cuyo error también es normal con media 0 pero varianza desconocida.

Se adoptará este nuevo método si es más preciso que el anterior. Se tomaron 21 mediciones y se obtuvo que $\sum_{i=1}^{21} x_i = 12,6$

1. Si se quiere que la prob. de cambiar el método si el nuevo en realidad es menos preciso sea a lo sumo 0.01, ¿Qué decisión toma?
2. calcular el p-valor
3. Calcular la prob. de no cambiar el método si la var. del nuevo es en verdad 0.8

X_i: "error en la i-ésima medición" $\sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

$X_1, \dots, X_{21}$ i.i.d.

<u>Dato:</u> $\underbrace{P(\text{"cambiar el método si el nuevo es menos preciso"})}_{EI} \leq \underset{\alpha}{0.01}$

. $H_0: \sigma^2 \geq 1$ vs $H_1: \sigma^2 < 1$

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underbrace{\sum_{i=1}^{21}(X_i - 0)^2}_{T=r(\underline{X})} < k_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

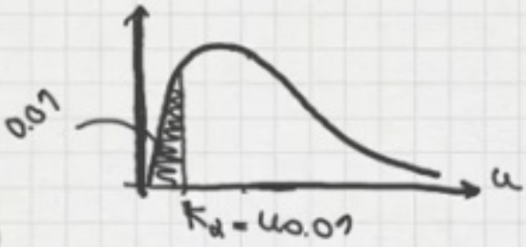
Por ser flia exponencial con $c(\theta)$ <u>creciente</u>

con $0.01 = P_{\sigma^2=1}(\delta(\underline{X}) = 1)$

$$0.01 = P_{\sigma^2=1}\left(\sum_{i=1}^{21} X_i^2 < k_\alpha\right)$$

por teo del cap. 9

si $\sigma^2 = 1 \to X_i \sim \mathcal{N}(0,1) \to \underbrace{\sum_{i=1}^{21} X_i^2}_{U} \sim \chi^2_n$



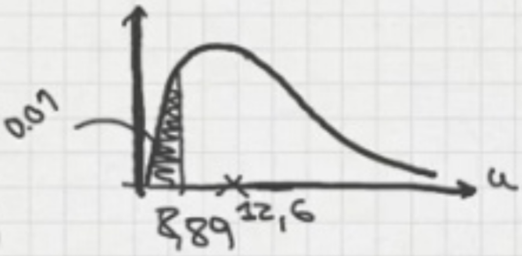
$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} X_i^2 < \underbrace{\chi^2_{21,\,0{,}01}}_{\substack{\downarrow \\ \text{tabla o compu:} \\ 8{,}89}} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Muestra: $\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 12{,}6$

$$0.01 = P_{\sigma^2=1}\left(\sum_{i=1}^{21} X_i^2 < k_\alpha\right)$$

por teo del cap. 9

si $\sigma^2 = 1 \to X_i \sim \mathcal{N}(0,1) \to \underbrace{\sum_{i=1}^{21} X_i^2}_{U} \sim \chi^2_{21}$



$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} X_i^2 < \underbrace{\chi^2_{21,\,0{,}01}}_{\substack{\downarrow \\ \text{tabla o compu:} \\ 8{,}89}} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Muestra: $\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 12{,}6$

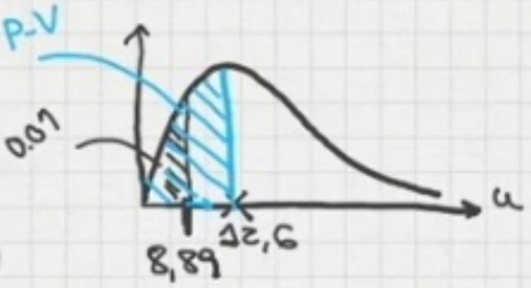
$\to$ como $12{,}6 > 8{,}89$, No Rechazo H_0

y no tengo evidencia de que el nuevo método es mejor $\longrightarrow$ No cambio

$$0.01 = P_{\sigma^2=1}\left(\sum_{i=1}^{21} X_i^2 < k_\alpha\right)$$

por teo del cap. 9

si $\sigma^2 = 1 \to X_i \sim \mathcal{N}(0,1) \to \underbrace{\sum_{i=1}^{21} X_i^2}_{U} \sim \chi^2_n$



$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} X_i^2 < \underbrace{\chi^2_{21,\,0,01}}_{\text{tabla o compu: } 8,89} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

¿P-Valor?

Valor observado

$$p\text{-}v = P(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{estadístico bajo Ho}}}{U} < 12,6) = 0,078$$

en R porque no hay tabla

0,078 sigue siendo mayor que el riesgo máximo que el riesgo máximo que yo quería poder llegar a tener. Por lo tanto, siempre que el p-valor > α no voy a rechazar mi hipótesis nula.

Voy a rechazar mi hipótesis nula si el p-valor < α

3. $P($"No cambiar si en realidad $\sigma^2 = 0{,}8$"$)$
↳ error

$$\rightarrow P_{\sigma^2=0,8}(\delta(\underline{X})=0) = P_{\sigma^2=0,8}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > 8{,}89\right)$$

$$= P_{\sigma^2=0,8}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{0{,}8} > \frac{8{,}89}{0{,}8}\right)$$

Si $\sigma^2 = 0{,}8 \rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{21} X_i^2}{0{,}8} \sim \chi^2_{21}$

$$\rightarrow P_{\sigma^2=0,8}\left(\frac{\sum^{21} X_i^2}{0{,}8} > 11{,}1125\right) = 0{,}961$$

↑ computadora

¿Como mejoro? Aumento n

¿Hacemos otro?

$X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,\theta)$. Encontrar un test de hipótesis de nivel α para

$H_0: \theta \leq 4$ vs $H_1: \theta > 4$

Recordemos que para este caso,
$T = \max(X_1, \dots, X_n)$ es un est. suf.

Entonces:

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T > k_\alpha \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

(Se comporta como el caso 1 de esas flias exponenciales)

con $\alpha = P_{\theta=4}(\delta(\underline{X}) = 1)$

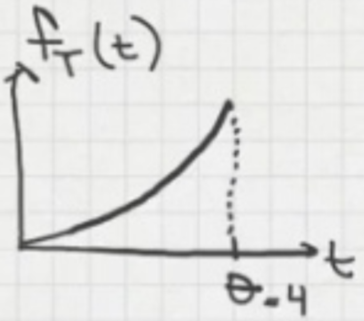
Para seguir necesitamos por lo menos la dist. de T

↳ Uso este test porque si hago el cociente de verosimilitud, demuestro que la uniforme se comporta como el caso 1 de las familias exponenciales

$$T = \max(X_1, \dots X_n)$$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X_1 \leq t, \dots, X_n < t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{id.}}}{=} \left[F_X(t)\right]^n$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq t < \theta \\ 1 & \text{si} \quad t > \theta \end{cases}$$

$$\alpha = P_{\theta=4}(T > k_\alpha) = 1 - P_{\theta=4}(T \leq k_\alpha)$$

$$\alpha = 1 - \left(\frac{k_\alpha}{4}\right)^n$$

Despejo $k_\alpha \rightarrow \quad k_\alpha = 4 \cdot \sqrt[n]{(1-\alpha)}$

Por lo tanto,

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \dfrac{\max(X_1, \dots X_n)}{4} > \sqrt[n]{(1-\alpha)} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

es un test de nivel α

(No le ponemos números así practicás con eso de la guía)

Analicemos:

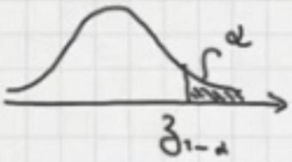
$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocido

$H_0: \mu \leq a$ Vs. $H_1: \mu > a$

Estadístico

Nos quedó que

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overbrace{\dfrac{\sum_1^n X_i - n \cdot a}{\sqrt{n\sigma^2}}}^{T} > z_{1-\alpha} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



es un test de nivel α, con $\alpha = P_{\mu = a}(\delta(\underline{x}) = 1)$

Para probar que $\mu > a$ ("Grande") lo lográbamos encontrando valores muy grandes de T.

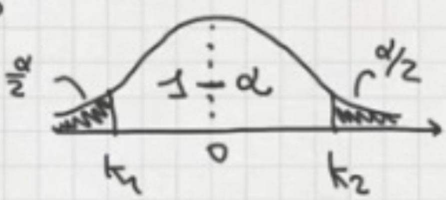
¿Qué podemos hacer si...

$H_0: \mu = a$ Vs $H_1: \mu \neq a$

Tiene sentido pensar que

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < k_1 \text{ o } T > k_2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\alpha = P_{\mu = a}(\delta(\underline{x}) = 1)$$



$\rightarrow k_1 = z_{\alpha/2}$ y $k_2 = z_{1-\alpha/2}$

con $T = \dfrac{\sum_1^n X_i - na}{\sqrt{n\sigma^2}}$ ya que bajo H_0, $T \sim \mathcal{N}(0,1)$

(es clave conocer su distribución)

¿La complicamos? (Un golpe de realidad)

En gral, σ^2 no es conocido, entonces el T planteado en la situación anterior no sirve ya que no voy a poder calcularlo. Necesito proponer OTRO estadístico.

Vimos en el teo del cap. 9 que si $X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

Entonces $T = \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$

→ si n y μ son dato, T es un estadístico

Entonces si $X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ No conozco nada...

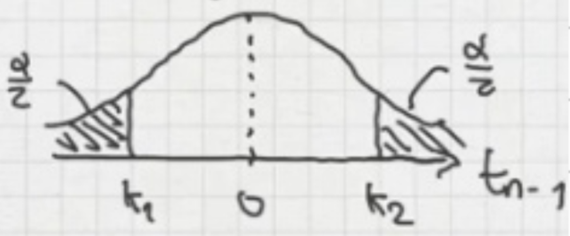
Un test para

$$H_0: \mu = a \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq a$$

Será $$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < k_1 \text{ o } T > k_2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Con $T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - a}{S}$ ya que bajo Ho (Ho Verdadera) $T \sim t_{n-1}$

$$\alpha = P_{\mu = a}(T < k_1 \text{ o } T > k_2)$$



$\therefore k_1 = t_{n-1, \alpha/2}$ y

$k_2 = \underbrace{t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{Cuantil}}$

Test con nivel de significación asintótico

Definición: Sea $\underline{X} = (X_1, \dots X_n)$ una m.a. de una población con distribución $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$

Se quiere testear

$$H_0: \theta \in \Theta_1 \quad vs \quad H_1: \theta \in \Theta_2$$

Se dirá que una sucesión de tests $\delta_n(\underline{X})$ tiene nivel de significación asintótico α si:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\theta \in \Theta_1} \pi_{\delta_n}(\theta) = \alpha$$

Ya mismo al ejemplo!

Supongamos que

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Ber(p)$. Quiero encontrar un test para

$$H_0: p \leq p_0 \quad vs \quad H_1: p > p_0$$

Sabemos que la Bernoulli pertenece a una familia exponencial con $C(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ la cual es una función creciente con $0 < p < 1$.

Además $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente para p

entonces...

Un test será

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} X_i > k_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pero T es una V.A.D. entonces no vamos a poder encontrar un test de nivel exacto α. Podemos encontrar un test de nivel asintótico α de manera que

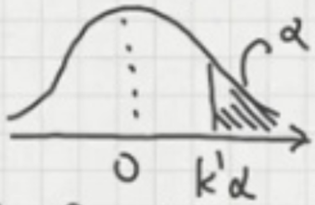
Var y E finitos

$$P_{p=p_0}(\delta(\underline{X}) = 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

En este caso usaré TCL

$$P_{p=p_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > k_\alpha\right) = P_{p=p_0}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > k'_\alpha\right) \simeq 1-\phi(k'$$

$$P_{p=p_0}\left(\frac{\sum^{n} X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > \underset{\downarrow \atop z_{1-\alpha}}{k_\alpha}\right) \underset{\underset{TCL}{\uparrow}}{\simeq} 1-\phi(k'_\alpha) = \alpha$$



El test de nivel aproximado α resulta

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > z_{1-\alpha} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

¿Agregamos enunciado?

Para curar cierta enfermedad se emplea actualmente un tratamiento que tiene un 40% de éxito. Un nuevo tratamiento es probado en 100 pacientes elegidos al azar y 83 de ellos se curaron.

1. Si se quiere que la prob. de adoptar el nuevo tratamiento cuando no es mejor que el actual sea como máximo 0.05, ¿Que decisión toma?. Calcular el p-valor aproximado
2. Calcular (aproximadamente) la prob. de no cambiar de tratamiento si el nuevo en realidad tiene una prob. de éxito de 0.45.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el i-ésimo paciente se cura con el nuevo tratamiento} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$X_1, \dots X_{100} \overset{iid}{\sim} Ber(p)$

Muestra:

$n = 100$

$\sum_{i=1}^{100} x_i = 83$

$$P(\underbrace{\text{"Cambian de método cuando no es mejor"}}_{EI}) \leq \underset{\alpha}{0.05}$$

$H_0: p \leq 0.4$ Vs. $H_1: p > 0.4$

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{100} X_i > k_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

← Como tengo una flia exp. con $c(\theta)$ creciente

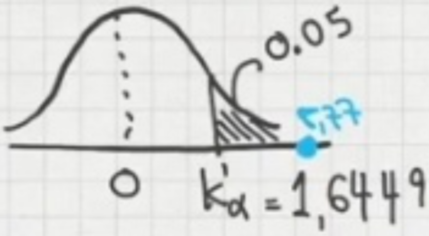
Buscaremos k_α tal que

$P_{p=0.4}(\delta(\underline{X})=1) \simeq 0.05$

Usando TCL

$$P_{p=0.4}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > k_\alpha\right) = P_{p=0.4}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 40}{\sqrt{40 \cdot 0{,}6}} > k'_\alpha\right)$$

Si $p = 0.4$ uso aprox. por TCL $\to$ $\cong 1 - \phi(k'_\alpha) = 0.05$



$$\to \delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sum^{100} X_i - 40}{\sqrt{24}} > 1{,}6449 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

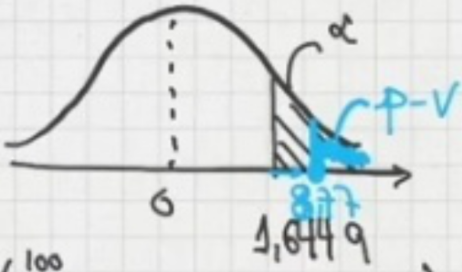
es un test de nivel asintótico 0.05.

Muestra: $\sum^{100} x_i = 83 \to t = \dfrac{83-40}{\sqrt{24}} = 8{,}77 > 1{,}6449$

$\to$ Rech Ho y cambio al nuevo tratamiento (NS = 0.05)

Aclaro que tomo la decisión de cambiar entonces a un Test con nivel de significación 0,05

$$p\text{-}V \cong 1 - \phi(8{,}77) \cong 0$$



$$2.\ P_{p=0.45}(\delta(\underline{x})=0) = P_{p=0.45}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 40}{\sqrt{24}} > 1.6449\right)$$

$$= P_{p=0.45}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 1.6449 \cdot \sqrt{24} + 40\right)$$

$$= P_{p=0.45}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 45}{\sqrt{100 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55}} > 0{,}6147\right)$$

Si $p=0{,}45$ Aproximo por TCL

$$\cong 1 - \phi(0{,}6147) = 0{,}2694$$

En algunos ejercicios, el enunciado te dice directamente lo que quieres probar con respecto al parámetro, eso siempre se va en mi hipótesis H1 ya que lo que ponga en H0 nunca lo voy a poder probar