Propiedades de un estimador

$\begin{cases} \to \text{Sesgo?} \\ \to \text{ECM?} \end{cases}$

Def: Un estimador es debilmente consistente si

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\hat{\theta}_n$: estimador basado en m.a de tamaño n.

Def: $\hat{\theta}$ converge a θ en ECM si $ECM(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$ECM(\hat{\theta}_n) = B(\hat{\theta}_n)^2 + Var(\hat{\theta}_n)$$

Obs si $ECM(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(\hat{\theta}_n) \to 0 \\ Var(\hat{\theta}_n) \to 0 \\ n\to\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ es consistente}$$

Ejemplo:

Si $X \sim f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{1}\{0<x<1\}$ o sea $X \sim Beta(\theta, 1)$

$\theta > 0$

a) Hallar $\hat{\theta}_{MV}$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{0<x_i<1\}$$

→ Se ve que es familia regular y familia exponencial

$$\log L(\theta) = n \log \theta + (\theta-1) \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) + \log \underbrace{\prod \mathbb{1}\{0<x_i<1\}}_{=1}$$

porque estoy evaluando en una muestra que sí o sí está en el soporte

$$\frac{d \log L}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$$

$$\frac{d^2 \log L}{d\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0 \implies \text{Es máximo}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i}}$$

b) Hallar $ECM(\hat{\theta}_{MV})$

$$\begin{gathered} \| \\ B(\hat{\theta})^2 + Var(\hat{\theta}) \end{gathered}$$

Es decir, necesito

$$E(\hat{\theta}) = E\left[\underbrace{\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i}}\right]$$

Es función de $X_1, X_2, \dots X_n$

¿Cómo hago la esperanza?

Estrategia: ver si en $\hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i}$ reconocemos una VA con distribución linda

$Y = \log X$ ¿Cómo se distribuye? Guía 4 $\Rightarrow$ Uso el Jacobiano de una variable

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right]_{x=g^{-1}(y)}$$

Un problema es que el logaritmo entre 0 y 1 es negativo. Entonces, redefino: $Y := -\log X \longrightarrow e^{-Y} = X$

$$f_Y(y) = \frac{\theta\,(e^{-y})^{\theta-1}\,\mathbb{1}\{y>0\}}{\left(\frac{1}{e^{-y}}\right)} = \theta\, e^{-y\theta}\,\mathbb{1}\{y>0\}$$

$$\Rightarrow Y \sim \mathcal{E}xp(\theta) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} -\log X_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} Y_i}_{=S} \sim \Gamma(n,\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{n}{S}} \text{ con } S \sim \Gamma(n,\theta)$$

Densidad de S

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{n}{S}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{n}{s}\,\frac{\theta^n}{(n-1)!}\, s^{n-1}\, e^{-\theta s}\, ds =$$

$$= \frac{\theta\, n}{n-1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \theta^{n-1}\, \frac{s^{n-2}}{(n-2)!}\, e^{-\theta s}\, ds}_{=1} = \frac{\theta n}{n-1}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n-1}\theta \neq \theta}_{\hat{\theta} \text{ no es insesgado}} \Longrightarrow B(\hat{\theta}) = \frac{n}{n-1}\theta - \theta = \frac{1}{n-1}\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow$ $\hat{\theta}$ es asintóticamente insesgado

$$E(\hat{\theta}^2) = E\left(\frac{n^2}{S^2}\right) = \int \frac{n^2}{s^2} \frac{\theta^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\theta s} ds$$

$$= \cdots\cdots = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - E(\theta)^2 = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2} = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$ECM(\hat{\theta}) = \underbrace{\frac{\theta^2}{(n-1)^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ El estimador MV de θ, $\hat{\theta}$ converge a θ en ECM

o sea también es estimador consistente (débil)

c) Hallar la distribución asintótica del EMV $\hat{\theta}$

Teo: los EMV son (bajo condiciones generales) asintóticamente normales

o sea: $$(\hat{\theta}-\theta)\sqrt{n\,I(\theta)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$$

Otra notación $\longrightarrow$ $$(\hat{\theta}-\theta)\sqrt{n\,I(\theta)} \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Distribuye asintóticamente

Obs: esto dice que asintóticamente la var del $\hat{\theta}$ es $\dfrac{1}{\left(\sqrt{n\,I(\theta)}\right)^2}$

mientras mas información menor varianza

Información de Fisher: $I(\theta) = -E\left[\dfrac{d^2}{d\theta^2}\log(f_\theta(X))\right]$

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}\,\mathbb{1}\{0<x<1\}$$

$$\log f_\theta(x) = \log\theta + (\theta-1)\log x + \log \mathbb{1}\{0<x<1\}$$

$$\frac{d}{d\theta}\log f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} + \log x$$

Evalúo en "X"

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\cdots = -\frac{1}{\theta^2} \quad\Rightarrow\quad I(\theta) = -E\left[-\frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2}$$

$\Rightarrow$ Podemos decir la distribución asintótica de $\hat{\theta} = \hat{\theta}_n$

$$\sqrt{n \frac{1}{\theta^2}} \left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

ó $$\frac{\sqrt{n}}{\theta} \left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

ó $$\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{n}\right)$$

Lo vamos a usar para construir test de hipótesis y también intervalos de confianza

Prop: Si $\hat{\theta}_n$ es consistente

$$\Rightarrow \left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \sqrt{n I(\hat{\theta})} \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Propiedades de EMV

son asintóticamente normales

A veces son insesgados pero siempre asintóticamente insesgados

"Casi siempre" son consistentes

Tiene la propiedad de invarianza

¿Qué vimos?

$X \sim f_\theta(x)$

Antes saltamos el θ

Ahora buscamos conocer θ

Guía 9: Hallar estimador puntual

Guía 10: ¿puedo decir que $\theta > 18$?
¿ " $\theta = 10$?

Guía 11: daremos un intervalo de valores que sea "confiable" para θ