GUÍA 6

6.1

DISCOS DEFECTUOSOS → $P = 0{,}01$

PAQUETE = 10 DISCOS

GARANTIA = $\frac{1}{10}$ DEFECTUOSO → CASO CONTRARIO DEVUELVE EL $

X: '# DEFECTUOSOS EN N ENSAYOS'

$X \sim Bin(10, 0{,}01)$

A-

NO SATISFACE LA GARANTÍA CUANDO $X \geq 2$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - P_X(0) - P_X(1)$$
$$= 1 - 0{,}904 - 0{,}09$$
$$= 0{,}01$$

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

B-

LUCAS COMPRO 3 PAQUETES

UN PAQUETE DEFECTUOSO

$Y \sim Bin(3, 0{,}01)$ Y: "# PAQUETES NO ACEPTABLES"

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \binom{3}{1} 0{,}01^1 \cdot (1 - 0{,}01)^2$$
$$= 0{,}029$$

6.2

TIRADOR → P BLANCO

GANAR PREMIO → HACER 3 DISPAROS
CON POR LO MENOS 2 BLANCOS

HACER 5 DISPAROS
CON POR LO MENOS 3 BLANCOS

$A \sim Bi(3, P)$

$B \sim Bi(5, P)$

$$\mathbb{P}(A \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(A=0) - \mathbb{P}(A=1)$$
$$= 1 - P_x(0) - P_x(1)$$

$$P_{x_A}(x) = \binom{3}{x} P^x (1-P)^{3-x}$$

$$\mathbb{P}(B \geq 3) = 1 - P_x(0) - P_x(1) - P_x(2)$$

$$P_{x_B}(x) = \binom{5}{x} P^x (1-P)^{5-x}$$

QUIERO QUE SE CUMPLA $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$

$$\cancel{1} - (1-P)^3 - 3P \cdot (1-P)^2 > \cancel{1} - (1-P)^5 - 5P(1-P)^4$$

$P = 1/2$ ó $P = 1$

↳ $0 < P < 1/2$ MAS FAVORABLE

NOTA

HOJA N° 2

FECHA

6.3

MONEDA EQUILIBRADA 18 VECES

$X \sim Bi(18, 1/2)$ X "= # CARAS OBSERVADAS"

A-

$$\mathbb{P}(X=13) = P_X(13) = \binom{18}{13} p^{13}(1-p)^5$$
$$= 0{,}033$$

B-

N° + PROBABLE DE CARAS

$$\mathbb{E}[X] = np = 9$$

$$\mathbb{P}(X=9) = P_X(9) = \binom{18}{9} \frac{1}{2}^9 \left(1-\frac{1}{2}\right)^9$$
$$= 0{,}185$$

NOTA

6.4

PASAJERO RESERVA <u>NO</u> SE PRESENTE → 0,04

SE VENDEN 10 RESERVAS

X "# PASAJEROS QUE SE PRESENTAN"

$X \sim Bi(100, 0{,}96)$

$\mathbb{P}(X > 98) = P_X(99) + P_X(100)$

$$= \binom{100}{99} 0{,}96^{99} (1-0{,}96)^{1} + \binom{100}{100} p^{100} (1-p)^{0}$$

↓
NO TENGAN ASIENTO

$$= 0{,}07 + 0{,}016$$

$$= 0{,}086$$

QUE TODOS SUBAN → $1 - 0{,}086 = 0{,}914$ ✓

6.6

DADO EQUILIBRADO SUCESIVAS VECES

X = "# TIROS HASTA EL PRIMER 2"

$X \sim GEO(1/6)$

$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$

$$= 1 - \mathbb{P}(X=2) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=3)$$

$P_X(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$

$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \frac{5}{36} - \frac{1}{6} - \frac{25}{216}$

$\mathbb{P}(X > 3) = 0{,}578$

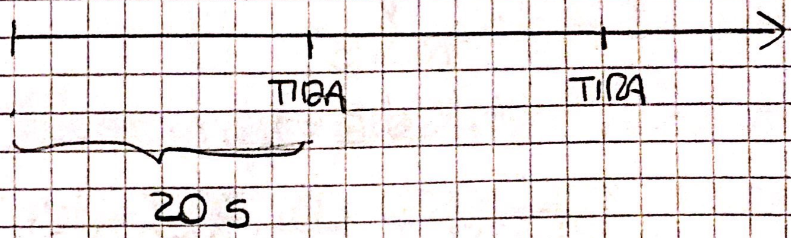
FALTA DE MEMORIA
↑

NOTA $\mathbb{P}(X > 6 \mid X > 3) = \frac{\mathbb{P}(X > 6 \cap X > 3)}{\mathbb{P}(X > 3)} = \frac{\mathbb{P}(X > 6)}{\mathbb{P}(X > 3)}$

6.9

$X \sim EXP(1/3) \rightarrow$ LAMPARA EN HS

SE TIRA UN DADO EQUILIBRADO CADA VEINTE



HALLAR LOS 3 QUE SE OBSERVARON HASTA QUE SE APAGO LA LAMPARA

N: $\underbrace{\text{CANTIDAD DE INTERVALOS}}_{\text{N ENSAYOS}}$ HASTA QUE $\underbrace{\text{SE APAGUE}}_{\text{1 EXITO}}$

COMO $X \sim EXP$ TIENE PERDIDA DE MEMORIA

$(0-20) = (20-40) = (40-60)$

$$\underbrace{\mathbb{P}(0 < x < 20)}_{\text{ESTE PRENDIDA}} = \int_0^{20} \frac{1}{3} e^{-1/3 x} \, dx = \underbrace{1 - e^{-\frac{20}{3}}}_{= 0{,}998}$$

$N \sim GEO(m, 0.998)$

Y: CANTIDAD DE VECES QUE SALIO EL 3

$Y | N = m \sim Bi(m, 1/6)$

$$\mathbb{E}[Y \mid N=n] = \frac{n}{6} \rightarrow \mathbb{E}[Y \mid N] = \frac{N}{6}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid N]] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{6} N\right] = \frac{1}{6}\mathbb{E}[N]$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{6}\mathbb{E}[N] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{0{,}998} = 0{,}1669$$

$\downarrow$

$N \sim G$

$\downarrow E = 1/p$

$$\mathbb{E}[Y] \cong 0{,}1669$$

6.10

CARA

$$X_L \sim \text{BER}(1/2) \quad \begin{cases} 1 & \text{SALE CARA} \\ 0 & \text{SALE CECA} \end{cases}$$

$$X_M \sim \text{BER}(1/3)$$

CUANDO GANA MONK $\rightarrow$ $X_M = 0$, $X_L = 0$ } SALEN DOS CECAS

$\downarrow$

$$\bullet\ \mathbb{P}(X_L = 0 \cap X_M = 0) = \mathbb{P}(X_L = 0) \cdot \mathbb{P}(X_M = 0) \rightarrow \text{SON INDEP}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

JUEGO
- $\frac{1}{3}$ MONK
- $1/6$ LUCAS
- $1/2$ EMPATE

$$\bullet\ \mathbb{P}(X_L = 1 \cap X_M = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_L = 1)\,\mathbb{P}(X_M = 1)$$

$$\rightarrow 1/2 \cdot 1/3 = \frac{1}{6}$$

NOTA

$X_1 \sim BER(1/3)$ GANA MONK

$X_2 \sim BER(1/6)$ GANA LUCAS

$X_3 \sim BER(1/2)$ EMPATE

DESCARTO EL ESTADO DE EMPATE YA QUE NO AFECTA A NINGUNO DE LOS OTROS DOS CASOS

TRUNCADA

$\mathbb{P}(\text{GANE MONK}) = \mathbb{P}(2 \text{ SECAS} \mid \text{UN GANADOR})$

$$= \frac{2 \text{ SECAS} \cap \text{HAY GANADOR}}{\text{HAY GANADOR}}$$

$$= \frac{1/3}{1/3 + 1/6} = \frac{2}{3}$$

6.11

N CANTIDAD DE CHOCOLATINES QUE LUCAS DEBE COMPRAR HASTA COMPLETAR LA COLECCIÓN.

$$N = 1 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4$$

PORQUE YA SALIO 1 PERSONAJE SI O SI (PANDA)

CANTIDAD DE COMPRAS HASTA EL SEGUNDO PERSONAJE

$\mathbb{P}(N_1) = 1 - \mathbb{P}(\text{PANDA})$

$= 1 - \frac{1}{5} = 4/5$

$N_1 \sim GEO(4/5)$ $N_3 \sim GEO(2/5)$

$N_2 \sim GEO(3/5)$ $N_4 \sim GEO(1/5)$

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[1] + \mathbb{E}[N_1] + \mathbb{E}[N_2] + \mathbb{E}[N_3] + \mathbb{E}[N_4]$$
$$= 1 + \frac{1}{4/5} + \frac{1}{3/5} + \frac{1}{2/5} + \frac{1}{1/5}$$

$\mathbb{E}[N] = 11,42$

$VAR(N) = 25,17$

6.12

DADO EQUILIBRADO → 6 CARAS − 1 R
2 A
3 V

X: # CANTIDAD DE LANZAMIENTOS HASTA LOS 3 COLORES.

$X = 1 + X_1 + X_2$

PORQUE TIRO Y SALE ROJO

$X_1 \sim GEO$ PERO SU PROBABILIDAD DEL PRIMER COLOR

$X_1 | R = \mathbb{P}(X_1 | R_1) = 1 - \mathbb{P}(ROJO)$
$1 - 1/6 = 5/6$

$X_1 | R \sim GEO(5/6)$

NOTA

HOJA N° 5

FECHA

$X_1 | V$

$\mathbb{P}(X_1|V) = 1 - \mathbb{P}(V)$

$= 1 - 1/2 = 1/2$

$X_1 | V_1 \sim GEO(1/2)$ $\quad$ $X_1 | R_1 \sim GEO(5/6)$

$X_1 | A_1 \sim GEO(2/3)$

$1 + GEO(5/6) + \dots$

$+ GEO(1/2)$

$+ GEO(2/3)$

$R \begin{cases} X_2 | V_1, A_2 \\ X_2 | A_1, V_2 \end{cases}$ $\quad$ $A \begin{cases} X_2 | R_1, V_2 \\ X_2 | V_2, R_2 \end{cases}$ $\quad$ $V \begin{cases} X_2 | R_1, A_2 \\ X_2 | A_1, R_2 \end{cases}$

SON 6 GEOMETRICAS

$X_2 | V_1 A_2$ $\quad$ $\mathbb{P}(X_2 | V_1 A_2)$

- $X_2 | V_1 A_2 \sim GEO(1/6) \times 2$

$X_2 | R_1 V_2 \sim GEO(1/2) \times 2$

$GEO(1/3) \times 2$

$\mathbb{E}[X_2] =$

$\mathbb{E}[GEO(1/6)] \cdot \mathbb{P}(V_1 A_2)$

$\times 2$

$\mathbb{E}[GEO(1/2)] \cdot \mathbb{P}(R_1 V_2)$

$\times 2$

$\mathbb{E}[GEO(1/3)] \; \mathbb{P}(R_1 A_2)$

$\mathbb{E}[X_1] =$

$\mathbb{E}[GEO(1/2)] \cdot \mathbb{P}(V) +$

$\mathbb{E}[GEO(2/3)] \cdot \mathbb{P}(A) +$

$\mathbb{E}[GEO(5/6)] \cdot \mathbb{P}(R)$

$2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{6} = 1{,}7$

$X_1 + X_2 \to \mathbb{E}[X_2] \to$ CONDICIONALES

$\mathbb{E}[X_1] \to$ CONDICIONAL!

$\mathbb{E}[X_1|V_1] \cdot \mathbb{P}(V_1) + \mathbb{E}[X_1|A_1] \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[X_1|R] \, \mathbb{E}[R]$

6.13

ESTACIONAMIENTO $\rightarrow$ CAPACIDAD 3

POR MINUTO PASA 1 AUTO

$\mathbb{P}(\text{ESTACIONAR}) = 0{,}8$

$X \sim Bi(N, P)$ $\qquad$ $Y \sim PAS(K, P)$

$$\mathbb{P}(X \geq K) = \mathbb{P}(Y \leq N)$$

$X \sim Bi(10, 0.8)$ EXITOS OBTENIDOS EN 10 MÍN

$Y \sim PAS(3, 0.8)$ ENSAYOS NECESARIOS PARA 3 EXITOS

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = \mathbb{P}(Y \leq 10)$$

$$\mathbb{P}(Y \leq 10) = \mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3)$$

$$= 1 - \binom{10}{2} 0{,}8^2 (0{,}2)^8 - \binom{10}{1} 0{,}8 (0{,}2)$$

$$= 1 - 7{,}37 \times 10^{-5} - 4{,}096^{-6}$$

$$= 0{,}99$$

6.15 FABRICA

A 40% $\qquad$ C 20%

B 30% $\qquad$ D 10%

A

ELIGEN 14

$\mathbb{P}(5A, 4B, 3C, 2D)$

$X_1 = \#A \sim Bi(14, \frac{2}{5})$

$X_2 = \#B \sim Bi(14, \frac{3}{10})$

$X_3 = \#C \sim Bi(14, \frac{1}{5})$

$X_4 = \#D \sim Bi(14, 1/10)$

NOTA

HOJA Nº 6

FECHA

$(X_1\ X_2\ X_3\ X_4) \sim \mathcal{M}\left(14, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$

$\mathbb{P}(X_1 = 5, X_2 = 4, X_3 = 3\ X_4 = 2) =$

$$\mathbb{P}(X) = \frac{14!}{5!\,4!\,3!\,2!}\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{10}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$\mathbb{P}(X) = 0{,}0167$

B.

$\mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_1 = 5)$ MULTINOMIAL TRUNCADA

$$X_3 \sim \mathcal{M}\left(9, \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{X_2}, \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{X_3}, \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{X_4}\right)$$

$X_3 \sim Bi(9, 1/3)$

$\mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_1 = 5)$

$$P_X(3) = \binom{9}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^6$$

$= 0{,}27$

6.16

PIEZAS → 2 DEFECTOS (INDEP)

ROTURA $P = 0{,}1$

ABOLLADURA $P = 0{,}2$

SIN DEFECTO $P = 0{,}7$

SE ELIJEN 8 PIEZAS

A- 1 = AMBOS DEFECTOS, 2 SOLO ABO, 3 ROTAS, 2 BUENAS

X_1 = AMBOS DEFECTOS $\quad P_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$

X_2 = SOLO ABOLLADURA $= P_2 = P_{AB} \cdot \overline{P_R}$

$= 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$

X_3 = SOLO ROTURA

$P_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}8 =$

X_4 = BUENAS

$P_4 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 =$

$(X_1\, X_2\, X_3\, X_4) \sim \mathcal{M}(8, 0.02, 0{,}18, 0.08, 0.72)$

$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 2) = \mathbb{P}(X)$

$$\mathbb{P}(X) = \frac{8!}{1!\,2!\,3!\,2!}(0{,}02)(0{,}18)^2(0{,}08)^3(0{,}72)^2$$

$= 2{,}89 \times 10^{-4} = 0.000289.$

B-

$\mathbb{P}(X_1 \geq 1) \rightarrow X_1 \sim Bi(8, 0.02)$

$\mathbb{P}(X_1 \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - 0{,}85 = 0{,}150$

$P_x(0) = \binom{8}{0} 0{,}2^0 (1 - 0{,}02)^8 = 0{,}85$

C.-

$\mathbb{P}(X<5) \rightarrow X \sim Bi(8,$ ALGUN DEFECTO $)$

↓

O 1 - SOLO BUENAS

$\underbrace{0{,}02}_{P_1} \cup 0{,}18 \cup 0{,}08$

$P_1 \cup P_2 \cup P_3 =$

$= (P_1 + P_2 - P_1 \cap P_2) + P_2 - P_1 \cap$

D.- $\mathbb{P}(X_4 \geq 3)$

$X_4 \sim Bi(8, 0.72)$

$\mathbb{P}(X_4 \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X_4 \leq 3)$

$= 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2)$

$= 0{,}992$

6.17 SIN DEFECTOS 1/2

PIEZAS DEFECTO I 1/3

DEFECTO II 1/4

AMBOS DEFECTOS 1/12

$(X_1\ X_2\ X_3\ X_4) \sim \mathcal{M}(12, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2})$

$\mathbb{E}[X_4] \rightarrow X_4 \sim Bi(12, \frac{1}{2})$

$\mathbb{E}[X_4] = 6$

NOTA

6.20

P(ROJO) = 0,45

P(AMARILLO) = 0,05

P(VERDE) = 0,5

MOTOQUERO SOLO SE DETIENE EN ROJO → # semáforos h/rojo X

N : CANTIDAD DE $\underbrace{\text{VERDES}}_{\text{N ENSAYOS}}$ HASTA $\overbrace{\text{DETENERSE}}^{}$ 1^{ER} ROJO

↓

EL PROBLEMA
ES QUE EN ESTOS ENSAYOS
HAY VERDES Y AMARILLOS

$$X_1 X_2 |_{X_3 = m} \sim M(n - Am, \; p_1^*, p_2^*)$$

$$N|_{X=x} \sim Bin\left(x-1, \frac{p_V}{p_V + p_A}\right)$$

$$P_N(n) = \sum_{x=1}^{\infty} P_{N|_{X=x}}(n) \, P(X=x)$$

$$P_X(x)$$

$$\boxed{N = N'}$$

V A V A A V V A R → ~~X~~

V V V V R → $X' \sim Geom\left(\frac{p_R}{p_R + p_V}\right)$

$$P_N(n) = P_{N'}(n')$$

$$N' = X' - 1$$

$N = \cancel{X}$

$N = X' - 1$