Experimento ⟶ ¿Qué puede pasar?

θ conocido ⟶ calculo $P(X = x)$

Ahora: Conozco lo que pasó...

¿θ?

Ejemplos:

Ⓓ Ⓓ ⟶ Elijo al azar

$p = 3/4$ $p = 1/2$

¿Cuál elegí?

Comienzo a tirar...

(Busco estimar la probabilidad de que salga cara para saber que moneda elegí)

p vale $\frac{3}{4}$ o $\frac{1}{2}$

En 2 tiros sale cara.

$X_i = 1\{\text{sale cara en el tiro } i\}$

$x_1 = 1, \quad x_2 = 1$

Función de Verosimilitud

$$L(\underline{x}, \theta) = P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Moneda equilibrada ⟶ $L(\underline{x}, 1/2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Moneda cargada ⟶ $L(\underline{x}, 3/4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ ⟵

Mi estimación para p es $3/4$

Lo que observé en mis 2 tiros era más probable que ocurra con la moneda cargada ⇒ Elijo el parámetro que maximiza la proba de los valores observados ⟵ Método de máxima verosimilitud

Función de Verosimilitud: me dice la probabilidad de observar la muestra en función del parámetro desconocido

Otro ejemplo:

X_i: "Longitud de la varilla i"

$X_1 \sim \mathcal{N}(45, 3)$

$X_2 \sim \mathcal{N}(40, 2.9)$

Muestra: $(x_1, x_2, x_3) = (44.2, 45.3, 48.9)$

Con la máquina 1:

$$L(\underline{x}, 45, 3) = \prod_{i=1}^{3} f(x_i)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 3}}\right)^3 e^{-\frac{1}{6}(44.2-45)^2} \cdot e^{-\frac{1}{6}(45.3-45)^2} \cdot e^{-\frac{1}{6}(48.9-45)^2}$$

$$L(\underline{x}, 40, 2.9) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 2.9}}\right)^3 e^{-\frac{1}{5.8}(44.2-40)^2} e^{-\frac{1}{5.8}(45.3-40)^2} \cdot e^{-\frac{1}{5.8}(48.9-40)^2}$$

La verosimilitud es máxima con los parámetros de la máquina 1!

Método de Máxima Verosimilitud

Es un método para construir estimadores puntuales. Se basa en que, en los experimentos aleatorios, los resultados observados deben tener alta probabilidad de ocurrir.

Def: Diremos que $\hat{\theta}(\underline{X})$ es un estimador de máxima verosimilitud de θ si se cumple que

$$f_{\hat{\theta}}(\underline{X}) = \max_{\theta} f_{\theta}(\underline{x})$$

Es decir, buscamos el valor de θ que maximiza la función de verosimilitud

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta)$$

Como un estimador es una función de la muestra aleatoria, será una variable aleatoria.

Método: A partir de la función de verosimilitud $L(\theta)$, busco el valor de θ que maximiza dicha función, luego $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\underline{X})$.

Si Θ es un subconjunto abierto tal que el soporte de $f_\theta(\underline{x})$ no depende de θ, como la función logaritmo es monótona creciente, maximizar $L(\theta)$ es lo mismo que maximizar $\log(L(\theta))$. Luego, el EMV verificará $\frac{d}{d\theta}\ln(L(\theta)) = 0$

Estimador de máxima verosimilitud

Ejemplos:

1. Hallar el EMV del parámetro p de una población con distribución de Bernoulli basado en una m.a de tamaño n (es nuestro ejemplo del dado!!)

F conjunta

$X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} Ber(p)$, $f_p(x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$, $p \in (0,1)$, $x_i \in \{0,1\}$

$$f_p(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \, 1_{\{x_i \in \{0,1\}\}}$$

$$\longrightarrow L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}, \quad p \in (0,1)$$

Debo buscar p / $L(p)$ sea máximo.

La función de verosimilitud contempla que los X_i ya son números

$L(p)$ es solo una función de p

Es mas facil en este caso si aplico $\ln$

$$\ln(L(p)) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln(L(p)) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$$

Ahora despejamos p resultando

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Si derivamos nuevamente verificamos que en p ocurre el máximo, por lo tanto

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$ es el EMV para p

(es una V.A.)

2 Hallar el EMV del parámetro θ de una Población con distribución $\mathcal{U}(0,\theta)$ basado en una m.a de tamaño n.

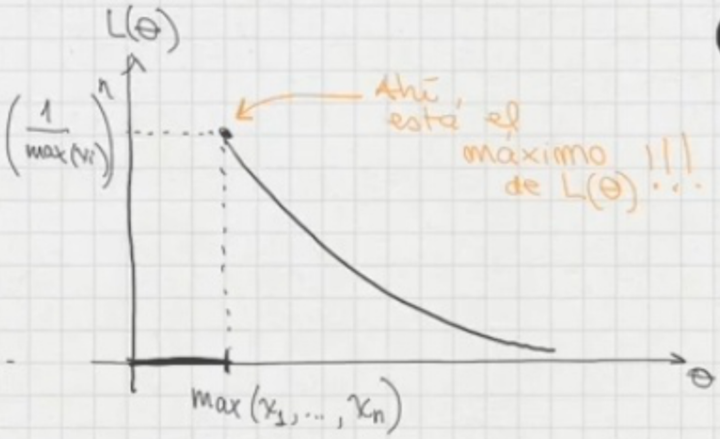
$X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,\theta)$, $f_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\}$

$$\rightarrow f_\theta(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\}}_{\text{Vimos que es equivalente a poner } \mathbb{1}\{\max(x_1,..x_n) < \theta\} \cdot \mathbb{1}\{\min(x_1,..x_n) > 0\}}, \quad \theta > 0$$

$$\rightarrow L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{\max(x_1, \dots, x_n) < \theta\}, \quad \theta > 0$$

No puedo aplicar $\ln$ (La indicadora vale 1 ó 0)

$\rightarrow$ grafico



$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{\max(x_1, \dots, x_n) < \theta\}$$

$\longrightarrow$ $\hat{\theta} = \max(X_1, \dots, X_n)$ es el EMV para θ

(es una V.A.

Uno mas (siempre los mismos 3...)

3. Hallar el EMV del parámetro θ de una población con distribución $Par(2, \theta)$ basado en una m.a. de tamaño n

$$X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} Par(2, \theta) \rightarrow f_\theta(x_i) = \frac{\theta 2^\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}\{x_i > 2\}, \theta > 2$$

$$\rightarrow f_\theta(\underline{x}) = \theta^n 2^{n\theta} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta+1} \prod_{i=1}^n \{x_i > 2\}$$

$$L(\theta) = \theta^n 2^{n\theta} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta+1}, \theta > 2$$

Más fácil si primero aplico Ln ...

$$\ln(L(\theta)) = n\ln(\theta) + n\theta\ln(2) + (\theta+1)\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

Ahora derivo

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + n\ln(2) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\theta} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \ln(2)}_{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{2}\right)}$$

$$\rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{2}\right)}$$ es el EMV para θ (es una V.A.)

Método de MV $\longrightarrow$ $\hat{\theta}(\underline{X})$: Estimador de θ (V.A.)

Dados $x_1, \dots x_n$ (valores observados) $\longrightarrow$ $\hat{\theta}(\underline{x})$ $\rightarrow$ Estimación puntual de θ $\downarrow$ número

¿Y si quiero un estimador para $q(\theta)$?

función del parametro desconocido

Principio de invariancia

Supongamos que $\lambda = q(\theta)$ es una función biunívoca de θ. Si $\hat{\theta}$ es el EMV de θ entonces $\hat{\lambda} = q(\hat{\theta})$ será el EMV de λ

Ejemplo: Sea $X \sim Par(2, \theta)$ Hallar el EMV de $\lambda = P(X > 3)$ basado en una m.a. de tamaño n de una población con la misma distribución de X.

Sabemos que $P(X>3) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\theta}$ (Tabla supervivencia o la cuenta).

Por principio de invarianza:

$$\lambda = P(X>3) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\theta}$$

$$\longrightarrow \quad \hat{\lambda} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\hat{\theta}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n / \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{2}\right)}$$ será el EMV de λ

Ahora sólo falta que me den las observaciones x_i para encontrar estimación para λ.

Bondad de los estimadores

Dada $X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$ una m.a.
Estimamos θ por $\hat{\theta}$. El Riesgo de estimar a θ con $\hat{\theta}$ se mide con el error cuadrático medio

$$R(\theta, \hat{\theta}) = ECM(\hat{\theta}) = E\left[(\theta - \hat{\theta})^2\right]$$

Diremos que un estimador óptimo para θ será $\hat{\theta}^*$ tal que

$$ECM(\hat{\theta}^*) \leq ECM(\hat{\theta}), \ \forall \hat{\theta}$$

Se dice que un estimador es insesgado para θ si

$$E_\theta(\hat{\theta}) = \theta, \ \forall \theta \in \Theta$$

En caso contrario, diremos que el estimador es sesgado, y definimos su sesgo como

$$B(\hat{\theta}) = E_\theta(\hat{\theta}) - \theta$$

Propiedad. Dado un estimador de θ, se tiene que

$$ECM(\hat{\theta}) = Var_\theta(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$$

Obs. Si $B = 0$ entonces $ECM(\hat{\theta}) = Var_\theta(\hat{\theta})$

Analicemos que pasa en nuestros 3 ejemplos.

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Ber(p)$, $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

¿Es $\hat{p}$ un estimador insesgado para p?

$$E_p(\hat{p}) = E_p\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\text{Linealidad}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_p(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\, p = p$$

$\forall\, p \in (0,1)$

$\rightarrow$ es insesgado!!

(Y si se te ocurre otro, podes verificar cual es mejor calculando el ECM)

2. $X_1, \ldots X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0, \theta)$, $\hat{\theta} = \max(X_1, \ldots, X_n)$

Para analizar si $\hat{\theta}$ es insesgado para θ, necesitamos la distribución de $\hat{\theta}$ (capítulo 4! lo vamos a usar TODO el tiempo)

$\hat{\theta} = \max(X_1, \ldots X_n)$

$$F_{\hat{\theta}}(t) = P(\hat{\theta} \le t) = P(X_1 \le t, X_2 \le t, \ldots, X_n \le t)$$

$$\underset{\text{m.a.}}{=} P(X_1 \le t) \cdot \ldots \cdot P(X_n \le t)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \le t < \theta \\ 1 & \text{si } t \ge \theta \end{cases}$$

$\to \quad f_{\hat{\theta}}(t) = \frac{d}{dt} F_{\hat{\theta}}(t) = n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \, \mathbb{1}\{0<t<\theta\}$

Ahora sí,

$$E(\hat{\theta}) = \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \, dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n \, dt$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right)\Big|_0^\theta = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1}$$

$$\to E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+1} \cdot \theta$$

No es insesgado. Pero

Observemos que $\frac{n}{n+1}\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

$\to \quad f_{\hat{\theta}}(t) = \frac{d}{dt} F_{\hat{\theta}}(t) = n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \, \mathbb{1}\{0<t<\theta\}$

Ahora sí,

$$E(\hat{\theta}) = \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \, dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n \, dt$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right)\Big|_0^\theta = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1}$$

$$\to E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+1} \cdot \theta$$

$\to$ $\hat{\theta}$ es asintóticamente insesgado para θ

Observemos que $\frac{n}{n+1}\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

Diremos que un estimador es asintóticamente insesgado si $\lim_{n\to\infty} E_\theta(\hat{\theta}) = \theta \quad \forall \theta \in \Theta$

3. $X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} Par(2, \theta)$, $\hat{\theta} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{2}\right)}$

Para ver si es insesgado debemos calcular $E(\hat{\theta})$, pero es muy difícil sin desarrollar un poco antes.

no refine el estadístico

$T_i = \ln\left(\frac{X_i}{2}\right)$, $f_X(x) = 2\theta^2 x^{-(\theta-1)} \mathbb{1}\{x > 2\}$

$\theta > 2$

$F_T(t) = P(T \leq t) = P\left(\ln\left(\frac{X}{2}\right) \leq t\right)$

si $x > 2$
$\rightarrow t > 0$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ P(X \leq 2e^t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow P(X \leq 2e^t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pareto}}}{=} 1 - \left(\dfrac{2}{2e^t}\right)^\theta \Rightarrow F_T(t) = (1 - e^{-\theta t}) \mathbb{1}\{t \geq 0\}$

$\rightarrow T \sim \mathcal{E}(\theta)$

$Y = \sum_{i=1}^{n} T_i \longrightarrow Y \sim \Gamma(n, \theta)$

$\longrightarrow \hat{\theta} = \dfrac{n}{Y}$, Ahora sí calculamos la esperanza

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{n}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{y} f_Y(y)\, dy$$

$$= n \int_0^\infty \frac{1}{y} \frac{\theta^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\theta y}\, dy$$

$$= \frac{n}{n-1}\theta \underbrace{\int_0^\infty \frac{\theta^{n-1}}{(n-2)!} y^{n-2} e^{-\theta y}\, dy}_{1}$$

$\longrightarrow E(\hat{\theta}) = \dfrac{n}{n-1}\theta$ No es insesgado, pero...

$$Y = \sum_{i=1}^{n} T_i \longrightarrow Y \sim \Gamma(n, \theta)$$

$\longrightarrow \hat{\theta} = \dfrac{n}{Y}$, Ahora sí calculamos la esperanza

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{n}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{y} f_Y(y)\, dy$$

$$= n \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \frac{\theta^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\theta y}\, dy$$

$$= \frac{n\,\theta}{n-1} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\theta^{n-1}}{(n-2)!} y^{n-2} e^{-\theta y}\, dy}_{1}$$

$\longrightarrow E(\hat{\theta}) = \dfrac{n}{n-1}\theta \xrightarrow{n \to \infty} \theta$ es asintóticamente insesgado.

Def: Dada una sucesión de estimadores $\hat{\theta}_n$ de θ, decimos que $T = \hat{\theta}$ es (debilmente) consistente si $\forall \varepsilon > 0$

$$P_\theta(|T - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

a medida que el tamaño de la muestra crece, el estimador se acerca al tamaño del parametro

Teorema: Sea una sucesión de estimadores $\hat{\theta}_n$ de θ. Si $Var_\theta(\hat{\theta}) \longrightarrow 0$ y $E_\theta(\hat{\theta}) \longrightarrow \theta$ entonces $\hat{\theta}_n$ es débilmente consistente

Lo demostramos usando Markov:

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E[h(X)]}{h(t)}$$

Si tomamos $h(y)=y^2$ y $X=\hat{\theta}-\theta$ y $\varepsilon=t$

$$P_\theta\left(|\hat{\theta}-\theta|>\varepsilon\right)\leq\frac{E_\theta[(\hat{\theta}-\theta)^2]}{\varepsilon^2}=\frac{Var_\theta(\hat{\theta})+(E_\theta(\hat{\theta})-\theta)^2}{\varepsilon^2}\to 0$$

Consistencia en media cuadrática

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\theta})=0,\ \forall\theta\in\Theta$$

Estimadores asintóticamente normales

Se dice que $\hat{\theta}_n$ es una sucesión de estimadores asintóticamente normales si $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-q(\theta))$ converge en distribución a una normal con media cero y varianza $q'(\theta)^2/I(\theta)$

$I(\theta)$ se llama Número de información de Fisher y se calcula como

$$I(\theta)=E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\ln(f_\theta(X))\right)^2\right]=-E\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln(f_\theta(X))\right]$$

(Vale solo para familias regulares

Converge en distribución $\Rightarrow$ Calculamos la F de distribución de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-q(\theta))$, hacemos tender n a ∞ y la distribución resultante es una normal

Teorema: Bajo ciertas condiciones muy generales, sea $\hat{\theta}_n(\underline{X})$ un EMV de θ <u>consistente</u> y sea $g(\theta)$ derivable con $g'(\theta) \neq 0 \ \forall \theta$, entonces $g(\hat{\theta}_n)$ es asintoticamente normal para estimar a $g(\theta)$

aprox

Si $\sqrt{n}\sqrt{I(\theta)}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ y $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente para θ (todo esto ocurrirá con los EMV), entonces vale que

$$\sqrt{n}\sqrt{I(\hat{\theta}_n)}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Para practicar, busquemos la distribución asintótica del EMV del parámetro p de una población con distribución $Ber(p)$, basado en una m.a. de tamaño n.

$X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} Ber(p) \rightarrow f_p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$

$p \in (0,1)$

el EMV de $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$E_p(\hat{p}) = p \quad , \forall \ p \in (0,1)$

$Var_p(\hat{p}) = Var_p\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{p(1-p)}{n} \quad , \forall \ p \in (0,1)$

$\therefore \ \hat{p}$ es insesgado y consistente.

Busquemos $I(p)$

$$I(p) = -E\left[\frac{d^2}{dp^2}\ln\left(f_p(x)\right)\right]$$

$$f_p(x) = p^x (1-p)^{1-x} \rightarrow \ln\left(f_p(x)\right) = x\ln p + (1-x)\ln(1-p)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dp}\ln f_p(x) = \frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p}$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dp^2}\ln f_p(x) = -\frac{x}{p^2} - \frac{(1-x)}{(1-p)^2} = \frac{-x(1-p)^2-(1-x)p^2}{p^2(1-p)^2}$$

$$\rightarrow I(p) = -E\left[\frac{-X(1-p)^2-(1-X)p^2}{p^2(1-p)^2}\right]$$

$X \sim Ber(p)$

$$= \frac{p(1-p)^{\cancel{2}} + \cancel{(1-p)}\,p^{\cancel{2}}}{p^{\cancel{2}}(1-p)^{\cancel{2}}} = \frac{1-p+p}{p(1-p)} = \frac{1}{p(1-p)}$$

si $g(p) = p$, $g'(p) = 1$, reemplazo y listo

Tenemos que

$$\sqrt{n}\,(\hat{p}-p) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}\left(0,\ p(1-p)\right)$$

o de forma equivalente

$$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

que es el mismo resultado al que llegamos si aplicamos TCL

Algunas distribuciones importantes

Distribución Chi-Cuadrado (χ^2)

La V.A. X tiene distribución χ^2 de parámetro ν (grados de libertad) si su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu/2} \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-x/2} \mathbb{1}\{x>0\}$$

Se puede observar que coincide con una variable con distribución $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$. De ahí deducimos fácilmente que $E(X) = \nu$ y $Var(X) = 2\nu$

En el ejercicio 2.10 probamos que si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces $X = Z^2 \sim \chi^2_1$

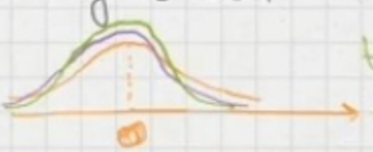
Teo: Si $X_1, \dots X_n$ son independientes con $X_i \sim \chi^2_{\nu_i}$, $i = 1, \dots n$, entonces $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ tendrá distribución χ^2_ν, con $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i$

(se deduce fácilmente usando propiedades de la Gamma)

Corolario: Se llama distribución χ^2 con n grados de libertad a la distribución de $U = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ donde $Z_1, \dots Z_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

Distribución t de Student

Sean $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $U \sim \chi^2_n$, entonces si Z y U son independientes, $T = \dfrac{Z}{\sqrt{U/n}} \sim t_n$



$t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z$

¿Y eso que pinta tiene?

Distribución F de Fisher-Snedecor

Sean U y V dos variables aleatorias indep. con distribución χ^2 de n_1 y n_2 g.l. respectivamente.

Entonces $F = \dfrac{U/n_1}{V/n_2} \sim \mathcal{F}_{n_1, n_2}$

TEOREMA Sean $X_1, \dots X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. $Z = \sqrt{n}\,\dfrac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
2. $W = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
3. W y Z son independientes
4. Si $S^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$, entonces $T = \sqrt{n}\,\dfrac{(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$

$\bar{X} \rightarrow$ Promedio de los X