Guía 10

10.1 Las políticas de fomento del empleo están determinadas por la tasa de desocupación y tienen por objetivo mantenerla por debajo de un nivel que se considera aceptable, por ejemplo un 4 %. Si se quiere diseñar un test acorde con esa situación,

(**a**) ¿cuál debe ser la hipótesis nula y cuál la alternativa?;

(**b**) ¿qué significan los errores de tipo I y los errores de tipo II?;

(**c**) ¿qué valores considera apropiados para el nivel de significación del test?

10.2 Una urna contiene cuatro bolas: θ rojas y $4-\theta$ verdes. Para testear $H_0 : \theta = 2$ contra $H_1 : \theta \neq 2$ se realizarán dos extracciones de una bola con reposición y se rechazará H_0 si las dos bolas son del mismo color, de lo contrario no se la rechazará,

(**a**) Calcular el nivel de significación del test.

(**b**) Calcular la probabilidad de cometer errores de tipo II para todas las situaciones posibles. ¿Cuál es la máxima probabilidad de cometer un error de tipo II?

(**c**) Tabular y graficar la función de potencia del test.

(**d**) Repetir los incisos anteriores en el caso de que las dos bolas se hubiesen extraído sin reposición.

10.3 Se observará un único valor de una variable aleatoria X cuya función de probabilidad $p(x)$ puede ser $p_0(x)$ o $p_1(x)$, donde $p_0(x)$ y $p_1(x)$ están definidas en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5
$p_0(x)$	0.02	0.03	0.05	0.05	0.35	0.50
$p_1(x)$	0.04	0.05	0.08	0.12	0.41	0.30

(**a**) Hallar todos los test de nivel $\alpha = 0.05$ de la hipótesis $H_0 : p(x) = p_0(x)$ contra $H_1 : p(x) = p_1(x)$.

(**b**) Calcular β para cada uno de los test hallados en (**a**). ¿Cuál es el mejor test de todos?

10.4 *La porota* vende dos variedades de soja. El rinde (en toneladas) por hectárea de la variedad 1 es una variable aleatoria con distribución normal de media 6.2 y desvío 0.45, y el de la variedad 2 es una variable aleatoria con distribución normal de media 7 y desvío 0.45. Vivaldo compró semillas de la variedad 2 y antes de seguir comprando, quiere asegurarse de que las semillas que le enviaron son de la variedad 2.

(**a**) Diseñar un test de hipótesis que le garantice a Vivaldo que la probabilidad de seguir comprando semillas a *La porota* cuando le hayan enviado de la variedad 1 sea 0.05.

(**b**) Calcular β.

(**c**) ¿Cuántas hectáreas deben cultivarse para que $\beta \leqslant 0.1$?

(**d**) Vivaldo cultivó 10 hectáreas con la semillas que le enviaron y obtuvo los siguientes rindes:

$$7.36,\ 7.62,\ 7.02,\ 6.99,\ 6.66,\ 6.74,\ 6.25,\ 6.41,\ 6.91,\ 7.11.$$

Basándose en esa información: calcular el p-valor del test, y determinar qué debe hacerse.

10.5 Un productor afirma que la media del voltaje de ruptura de ciertos capacitores es mayor que 200. El voltaje de ruptura de dichos capacitores obedece a una distribución normal de varianza 25. Usando una muestra aleatoria de tamaño 10 diseñar un test de hipótesis de nivel de significación $\alpha = 0.05$ para decidir si la afirmación del productor es verdadera y calcular la probabilidad de decidir erróneamente cuando el verdadero valor de la media del voltaje de ruptura es 210.

10.6 Una máquina produce varillas cuya longitud (en cm) es una variable aleatoria con distribución normal de varianza 25. Se examina una muestra aleatoria de 36 varillas producidas por esa máquina y se registra una longitud promedio de 51.74 cm. Con un nivel de significación de 0.05, ¿se puede garantizar que la longitud media de las varillas producidas por esa máquina supera los 50 cm? Hallar el p-valor.

10.7 En 1761 James Short midió 53 veces la paralaje solar. El promedio de las mediciones resultó ser 8.616 segundos de grado. Suponiendo que la distribución de las mediciones es una normal de media μ y desvío $\sigma = 0.75$, decidir a un nivel de significación $\alpha = 0.05$ si hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis $\mu = 8.789$. Hallar el p-valor.

10.8 Para ir de su casa al trabajo, Aparicio va por un camino por el que tarda, en media, 40 minutos en llegar. Juan le sugiere otro camino para reducir ese tiempo. Aparicio lo probó 10 veces y tardó en llegar los siguientes tiempos:

$$41.1,\ 42.2,\ 40.5,\ 39.9,\ 40.3,\ 36.6,\ 39.3,\ 42.5,\ 37.8,\ 40.5.$$

Suponiendo que los tiempos de viaje obedecen a una distribución normal, ¿se puede asegurar, con un nivel de significación de 0.1, que el camino sugerido por Juan es más rápido?

10.9 En la *Burbuja feliz* se acaba de instalar una máquina para llenar sifones de soda. La máquina es eficaz cuando el desvío estándar de la cantidad de soda en los sifones no supera 25 mililitros. En una muestra de 10 sifones se observaron las siguientes cantidades (en litros) de soda:

$$1.029, 0.943, 1.071, 0.986, 0.962, 0.995, 0.991, 1.002, 1.003, 0.978.$$

Suponiendo que la cantidad de soda en los sifones obedece a una distribución normal. ¿se puede asegurar, con un nivel de significación de 0.05, que la máquina no es eficaz?

10.10 Las cajas de leche en polvo de la marca *Spiky Milk* anuncian un peso neto de un kilo. El peso neto de las cajas (en kilos) W es una variable aleatoria con distribución normal. En una muestra aleatoria de 75 cajas se observó que $\sum_{i=1}^{75} w_i = 74.4$ y $\sum_{i=1}^{75} w_i^2 = 73.81$. Testear:

(**a**) $H_0 : \mu = 1$ contra $H_1 : \mu < 1$.

(**b**) $H_0 : \sigma = 0.14$ contra $H_1 : \sigma < 0.14$.

10.11 Se observará una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una población cuya densidad $f(x)$ puede ser

$$f_0(x) = \frac{1}{50}\mathbf{1}\{0 < x < 50\} \quad \text{o} \quad f_1(x) = \frac{x}{1250}\mathbf{1}\{0 < x < 50\}.$$

(**a**) Hallar un test para $H_0 : f(x) = f_0(x)$ contra $H_1 : f(x) = f_1(x)$. :*considerar la distribución de* $Y = -\log(X/50)$.

(**b**) Hallar la expresión de α y β en función de n.

10.12 Los siguientes datos son las duraciones (en horas) de una muestra de 6 lámparas: 61, 1905, 1076, 623, 33, 167. Suponiendo que los datos obedecen a una distribución exponencial de intensidad λ determinar si ellos permiten con un nivel de significación $\alpha = 0.05$ refutar la hipótesis de que $\lambda \leqslant 0.0005$. Hallar el *p-valor*.

10.13 La duración (en horas) de cada lámpara en un lote es una variable aleatoria con distribución exponencial. Se pusieron a prueba 10 lámparas y todas superaron las 50 horas de duración. Al 5 % de significación, ¿se puede afirmar que la duración media de cada lámpara del lote es mayor que 55 horas? Tomar la decisión basándose en el *p-valor*.

10.14 Basándose en una muestra aleatoria de una población con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, \theta]$, $\theta > 0$, diseñar un test de hipótesis para $H_0 : \theta \leqslant 1$ cuyo nivel de significación sea $\alpha = 0.05$ y tal que el valor de la función de potencia en $\theta = 1.1$ sea 0.9.

10.15 La longitud en metros de cada rollo de alambre en un lote es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[15, 15 + \theta]$. Se examinaron 4 rollos y la máxima longitud observada resulto ser 25 metros. En base a la información muestral, y con nivel de significación de 0.01 ¿se puede afirmar, que la longitud media de los rollos del lote es menor que 20 metros?

10.16 Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant \theta\}, \qquad \theta > 0.$$

Diseñar un test de hipótesis de nivel 0.1 para testear la hipótesis de que la media de X es mayor que 1.2 basado en una muestra de X de tamaño 1. Graficar la función de potencia del test.

10.17 En una elección se presentarán dos candidatos: el amarillo y el azul. Basándose en los resultados de una encuesta que se realizará sobre un conjunto de 100 ciudadanos a los que se les preguntará a cuál de los dos votará, diseñar un test de hipótesis para verificar si la intención de votos por el candidato azul supera el 35 %, con un nivel de significación asintótico del 5 %.

10.18 [Maronna pp. 143-144] Una de las más celebres "Leyes de Murphy" establece que *"si se deja caer al suelo una tostada untada con dulce, la probabilidad de que caiga del lado del dulce es mayor que la de que caiga del lado del pan"*.

(**a**) Para verificarla, se realizó un experimento en la University of Southwestern Louisana, en el que se dejaron caer 1000 tostadas untadas con mermelada de grosellas, de las cuales cayeron 540 del lado del dulce. ¿Qué conclusión puede sacar?

(**b**) El comité de investigaciones de la University of Southwestern Louisana decreta que, para que el experimento sea considerado concluyente, deberá cumplir con (i) si la Ley de Murphy es falsa, la probabilidad de que el test la confirme debe ser $\leqslant 0.01$; (ii) si la Ley es cierta, y la probabilidad de caer del lado del dulce es > 0.6, entonces la probabilidad de confirmarla debe ser $\geqslant 0.95$. ¿Cuántas tostadas hay que arrojar para que se cumplan estas condiciones?

10.19 Un fabricante asegura que produce con una calidad del 5 % de artículos defectuosos. Un comprador de grandes cantidades de esos artículos observa una muestra de 100 artículos y descubre 10 defectuosos. Realizar un test de hipótesis para determinar con un nivel de significación asintótico de 0.05 si existen motivos para dudar de la afirmación del fabricante.

10.20 En una urna hay n bolas negras. Eusebio afirma que $n \geqslant 24$. Se agregan 10 bolas rojas. Luego se realizan 100 extracciones de una bola con reposición y se observan 28 rojas. Se puede rechazar la afirmación de Eusebio con nivel de significación asintótico $\alpha = 0.1$?

10.21 Una fuente radiactiva emite partículas alfa de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad λ por segundo. Se la observó durante 3 horas y se registraron 5029 emisiones. ¿Al 0.01 de significación asintótica, se puede rechazar la hipótesis $\lambda = 0.5$? Hallar el *p-valor* aproximado.

10.22 La cantidad de accidentes de tránsito por semana en la intersección de Paseo Colón y Estados Unidos obedece a una distribución de Poisson. En una muestra de 80 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4
Frecuencia	28	25	20	5	2

Al 5 % de significación asintótica, ¿se puede afirmar que la media de la cantidad de accidentes por semana en la intersección de Paseo Colón y Estados Unidos es menor que 2? Hallar el *p-valor* aproximado.