GUÍA: 6

PROCESOS DE BERNOULLI - (GUÍA 6)

ES UNA SUCESIÓN $\{X_n\}_{n\geq 1}$ DE V.A.i.i

$X_n \sim BER(P)$ $\qquad X_n \begin{cases} 1 \text{ 'EXITO' } & P \\ 0 \text{ 'FRACASO' } & (1-P) \end{cases}$

MUCHAS BERNOULLI

VARIABLES ALEATORIAS ASOCIADAS

1) X: # EXITOS EN N ENSAYOS $\quad X \sim Bi(N,P)$

BINOMIAL

- $R_X = \{\underbrace{0, 1, \dots, N}_{K}\}$
- $\mathbb{P}(X=K) = P_X^K = \binom{N}{K} P^K (1-P)^{N-K}$

PROPIEDAD Si $X_1 \dots X_N \sim$ VAii $BER(P)$

ENTONCES $X = X_1 + \dots + X_N \sim Bi(N,P)$

VALE LA VUELTA.

TABLA

- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_P] = NP$
- $VAR(X) = VAR(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) = NP(1-P)$

OBS!
- Si $N=1 \rightarrow Bi(1,P) \sim BER(P)$
- $Bi(N,P) + Bi(M,P) \sim Bi(N+M,P)$

2) X: # ENSAYOS HASTA EL PRIMER EXITO

$$X \sim G(P)$$

- $R_X = \{\overbrace{1, \dots}^{\mathbb{N}}\} = \mathbb{N}$
- $\mathbb{P}(X = N) = P_X(N) = (1-P)^{N-1} \cdot P$

PROPIEDAD: $\{X > N\}$ "FRACASE LOS 1^{ROS} N ENSAYOS" → MI EXITO DESP DE N ENSAYOS

$$\mathbb{P}(X > N) = (1-P)^N$$

$$\mathbb{P}(X > N+M \mid X > N) = \frac{\mathbb{P}(X > N+M \,;\, X > N)}{\mathbb{P}(X > N)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > M+N)}{\mathbb{P}(X > N)} = (1-P)^M = \mathbb{P}(X > M)$$

↓

PROPIEDAD DE FALTA DE MEMORIA

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{P}$
- $VAR(X) = \frac{1-P}{P^2}$ → TABLA

3) X: # ENSAYOS HASTA EL K-ESIMO EXITO.

$$X \sim PAS(K, P)$$

- $R_X = \{\underbrace{K, K+1, \dots}_{N}\} = \mathbb{N}_{>K}$
- $\mathbb{P}(X = N) = P_X(N) = \binom{N-1}{K-1} P^K (1-P)^{N-K}$

PROPIEDAD SI $G_1 \dots G_K \sim$ V.A.I.I $G(P)$ ENTONCES

$$X = G_1 + \dots + G_K \sim PAS(K, P)$$

- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{K} G_i\right] = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{E}[G_i] = \frac{K}{P}$
- $VAR(X) = VAR\left(\sum_{i=1}^{K} G_i\right) \underset{G_i \text{ INDEP}}{=} \sum_{i=1}^{K} VAR(G_i) = \frac{K(1-P)}{P^2}$

TABLA

NOTA

OBS! Si $K=1 \Rightarrow PAS(1,P) \sim G(P)$

RELACIÓN ENTRE LA BINOMIAL Y LA PASCAL

$X \sim Bi(N,P)$ — EXITOS OBTENIDOS EN N ENSAYOS

$Y \sim PAS(K,P)$ — CANT DE ENSAYOS HASTA K EXITOS

$X \geq K \qquad Y \leq N$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq K) = \mathbb{P}(Y \leq N)}$$

DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL (VECTORIAL)

ENSAYOS INDEPENDIENTES PERO EN CADA ENSAYO TENGO R RESULTADOS POSIBLES CON $\mathbb{P}$ P_i $i=1,\dots,$ REALIZO N ENSAYOS. $\sum_{i=1}^{R} P_i = 1$

NO ES BER SINO Q MAS RESUL → DADO

SEA X_i : # VECES QUE APARECIÓ R I-ÉSIMO.

$X_i \sim Bi(N, P_i) \quad (X_1 + X_2 + \dots + X_i = N)$ ADELGACAMIENTO

$(X_1, \dots, X_R) \sim \mathcal{M}(N, P_1, \dots, P_R)$

$\mathbb{P}(X_1 = N_1, X_2 = N_2, \dots, X_R = N_R) = P_{X_1 \dots X_R}^{(N_1 \dots X_R)} = (N_1 + \dots + N)$

$$\frac{N!}{N_1! \cdots N_R!} = C^N_{N_1 \dots N_R} = \binom{N}{N_1}\binom{N-M}{N_2} \cdots$$

$$\frac{N!}{N_1! \cdots N_R!} (P_1)^{\circ} (P_2)^{\circ} \cdots$$

EJEMPLO

$1R + 2A + 3V$ CON REPOSICIÓN 7 EXTRACCIONES

$\mathbb{P}(3R, 1A, 3V) \rightarrow$ CALCULAR

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \#\text{ROJAS} \sim Bi(7, 1/6) \\ X_2 = \#\text{AZULES} \sim Bi(7, 2/6) \\ X_3 = \#\text{VERDES} \sim Bi(7, 3/6) \end{array}\right\} (X_1 X_2 X_3) \sim \mathcal{M}\left(7, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 3) = \frac{7!}{3!\,1!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{3}{6}\right)^3$$

MULTINOMIAL TRUNCADA

7-2 QUE SE QUE FUERON 2 X_1

$\mathbb{P}$(VISTO A ó V)

$$\overset{1/6}{(X_1}, \overset{1/3}{X_2}, \overset{1/2}{X_3} \mid X_1 = 2) \sim \mathcal{M}\left(5, \frac{1/3}{1/3 + 1/2}, \frac{1/2}{1/3+1/2}\right)$$

ACOMADANDO POR HABER SACADO X_1

EN GENERAL

$$(X_1 \dots X_R) \sim \mathcal{M}(N, P_1, \dots, P_R)$$

$$(X_1 \dots X_2 \mid X_j = N_j) \sim \mathcal{M}\left(N - N_j, \underbrace{\frac{P_1}{1-P_j}}_{X_j}, \frac{P_2}{1-P_j}, \dots, \frac{P_R}{1-\cancel{R}_j}\right)$$

21/10

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMETRICA

MODELOS DE EXTRACCIÓN SIN REPOSICIÓN

EJEMPLO

3R
7B

EXTRAIGO 4 SIN REPOSICIÓN

X: # ROJAS OBSERVADAS

$R_X = \{\underbrace{0, 1, 2, 3}_{k}\}$ 3R OBSERVO K

$N = 10$ TOTAL

$k = 3$ CANT DE ROJAS

$m = 4$ EXTRACCIONES

$$\mathbb{P}(X = k) = p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$$

LO QUE QUEDA

EN GENERAL UNA POBLACIÓN DE N OBJETOS CON K DE ELLOS DISTINGUIDOS Y EXTRAIGO m DE LOS OBJETOS SIN REPOSICIÓN.

K
N-K

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) \quad \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{m-k}}{\binom{N}{m}}}$$

NOTA

- $X \sim HIP(N, K, m)$
- $R_X = \left[\text{MÁX}\{0;\ m+K-N\};\ \text{MÍN}\{K, m\} \right]$

$$E[X] = \frac{mK}{N}$$

$$VAR(X) = \frac{N-m}{N-1} \cdot \frac{mK}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)$$