10.6 Una máquina produce varillas cuya longitud (en cm) es una variable aleatoria con distribución normal de varianza 25. Se examina una muestra aleatoria de 36 varillas producidas por esa máquina y se registra una longitud promedio de 51.74 cm. Con un nivel de significación de 0.05, ¿se puede garantizar que la longitud media de las varillas producidas por esa máquina supera los 50 cm? Hallar el p-valor.

$$H_0 : \underbrace{\mu \leq \overbrace{50}^{\mu_0}}_{\mu \in \Theta_0} \qquad H_1 : \underbrace{\mu > 50}_{\mu \in \Theta_1}$$

$$\Theta_0 = \mathbb{R}_{\leq 50} \qquad \Theta_1 = \mathbb{R}_{>50}$$

Mediante el cociente de verosimilitud se demuestra que un test óptimo es:

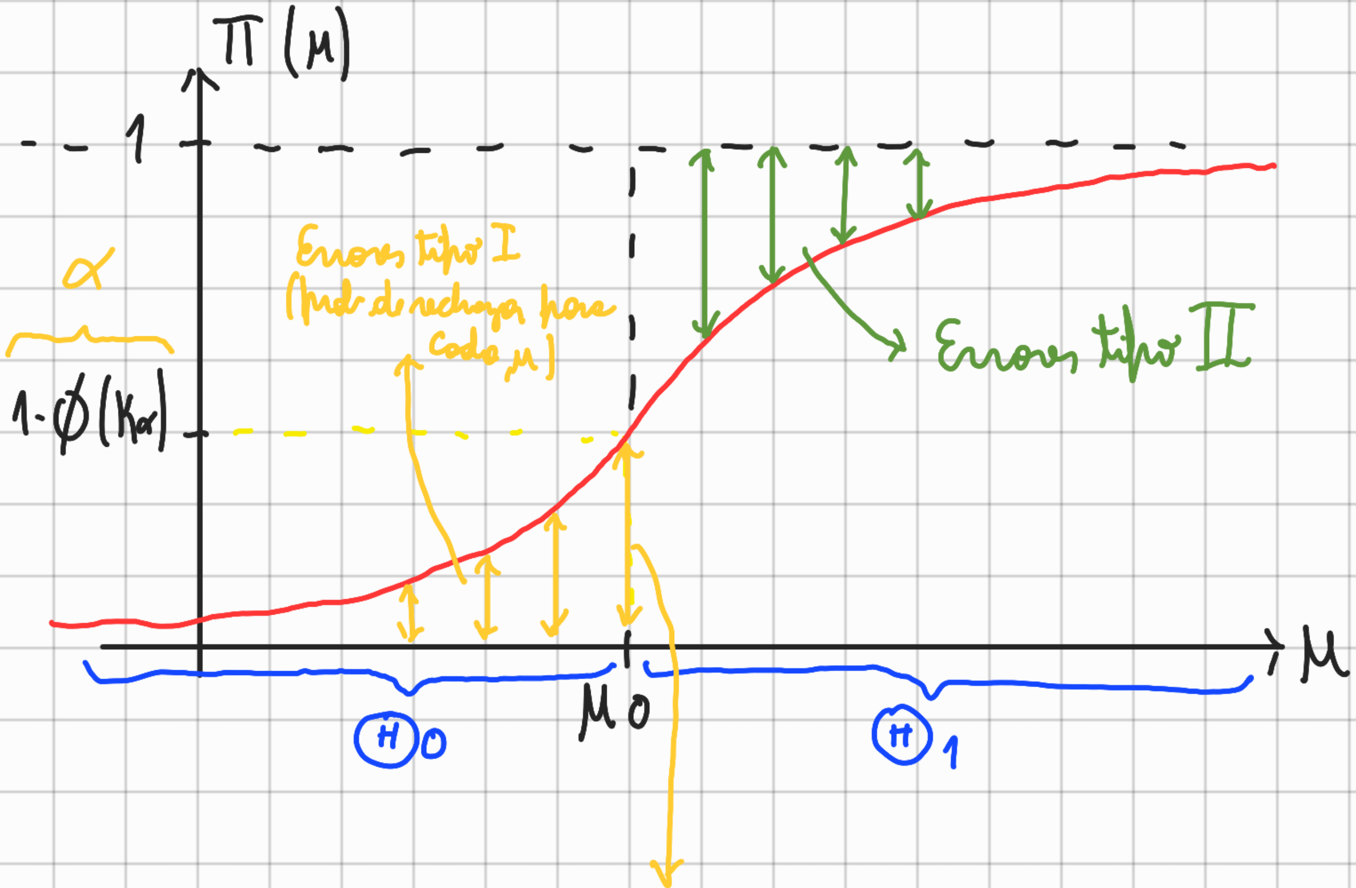
$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} > K_\alpha \right\}$$

$$\pi(\mu) = \mathbb{P}(\text{Rechazar } H_0) = \mathbb{P}(\delta(\underline{X}) = 1)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sum X_i - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} > K_\alpha \right), \ \mu \in \mathbb{R} = \Theta$$

aplicando teorica de conti

$$= 1 - \Phi\left(K_\alpha + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) \right), \ \mu \in \mathbb{R}$$



$$\alpha = \sup_{\mu \in \Theta_0} \mathbb{P}_\mu(\text{Rechazar } H_0) = \sup_{\mu \in \Theta} \mathbb{P}_\mu(\text{Error tipo I})$$

$$0{,}05 = \alpha = \sup_{\mu \in \Theta_0} \pi(\mu) = 1 - \phi(K_\alpha)$$

$$\phi(K_\alpha) = 0{,}95$$

$$K_\alpha = Z_{0{,}95} \simeq 1{,}645$$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 36 \cdot 50}{\sqrt{36 \cdot 25}} > 1{,}645 \right.$$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^{36} X_i > 1849,35\right\}$$

Tengo una muestra tal que $\dfrac{\sum_{i=1}^{36} x_i}{36} = 51,74$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{36} x_i = 1862,64 > 1849,35$$

$\Longrightarrow$ Se rechaza H_0, se garantiza que la longitud media de los ovillos supera los 50 cm

para hallar el p-valor:

$$z_\alpha \sqrt{36.25} + 36.50 = 1862,64$$

$$\Rightarrow z_\alpha = 2,088$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 - \Phi(z_\alpha) = 1 - \Phi(2,088) = 0,0184$$

$$\Longrightarrow \boxed{p\text{-}v = 0,0184}$$