10 (diez)

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (81.16 - 61.09 - 81.04)

Evaluación Parcial
Duración: 4 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
27/5/22 – 9:00 hs.

Curso: 22 - Bello — Corrector/a:

Apellid[redacted]

Padrón[redacted]

B

1. La empresa *Ticket Online* vende entradas para espectáculos deportivos y musicales. Se sabe que la probabilidad de que un cliente adquiera entradas para un espectáculo deportivo es 0.8, la probabilidad de que adquiera entradas para espectáculos deportivos o musicales es 0.9, y si un cliente adquiere entradas para un espectáculo deportivo, la probabilidad de que no adquiera entradas para un espectáculo musical es 0.375. Sean los eventos: D: "el cliente compra entradas para un espectáculo deportivo" y M: "el cliente compra entradas para un espectáculo musical", ¿son D y M independientes?

B
confuso

2. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad en el que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$, $\mathbf{P}(\{1\}) = \frac{1}{3}$ y $\mathbf{P}(\{2\}) = \frac{1}{2}$. Definir una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\{-2, 0\} \subset X(\Omega)$, $\mathbf{E}[X] = 0$ y $\operatorname{var}(X) = 1$.

B

3. La potencia W (en watts) en un componente eléctrico está dada por $W = rI^2$, donde r es una constante (en ohms) de valor 0.2 e I (en amperes) es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(5, 25)$. Hallar y graficar la función de distribución de W.

B

4. Los clientes que arriban a la taberna *El Pony Pisador* pueden ser *Orcos*, *Enanos* o *Hobbits* con probabilidades 0.1, 0.4 y 0.5 respectivamente. Una noche dejan entrar clientes a la taberna hasta que llega el quinto *Orco* y luego cierran las puertas. Sabiendo que entraron exactamente 12 clientes, calcular la probabilidad de que haya más *Enanos* que *Hobbits*.

B
camino
largo

5. La resistencia (en kgf) de un cable que sostiene un ascensor es una variable aleatoria con distribución normal de media 1200 y varianza 120^2. La demanda sobre ese cable está dada por el peso de la cabina, de 400 kgf, y el peso de las personas que suban. Los pesos (en kgf) de las personas son variables aleatorias independientes con distribución normal de media 80 y varianza 16^2. Si se suben 6 personas al ascensor, calcular la probabilidad de que el peso total del mismo supere la resistencia del cable.

[redacted]

CS CamScanner

Ejercicio #1,5 [redacted]

HOJA N° 1/3
(土)27日5月23年

1)
- $P(D) = 0{,}8$
- $P(D \cup M) = 0{,}9$
- $P(\overline{M} | D) = 0{,}375$

datos

$* P(\overline{M} | D) = 1 - P(M|D) = 1 - \dfrac{P(M \cap D)}{P(D)}$

$\rightsquigarrow P(M \cap D) = (1 - P(\overline{M}|D))P(D) =$

$= (1 - 0{,}375) \cdot 0{,}8 = \underline{0{,}5}$ | $P(M \cap D)$

$* P(D \cup M) = P(D) + P(M) - P(D \cap M)$ (por teorema)

$\rightsquigarrow P(M) = P(D \cup M) - P(D) + P(D \cap M) =$

$= 0{,}9 - 0{,}8 + 0{,}5 = \underline{0{,}6}$ | $P(M)$

* Verificamos independencia por definición:

$P(M \cap D) = P(M) P(D)$?

$\rightsquigarrow 0{,}5 = 0{,}8 \cdot 0{,}6$

$\rightsquigarrow 0{,}5 = 0{,}48$ absurdo /

$\therefore$ Los eventos M y D no son independientes //

*Ejercicio #5:

- R: resistencia del cable $\to R \sim N(1200, 120^2)$
- W_i: peso de la persona $i \to W_i \sim N(80, 16^2)$
- W: peso total de las 6 personas $\to$ Por aditividad de la normal $W \sim N(6 \cdot 80, 6 \cdot 16^2)$
- $P(W + 400 > R)$?

(Nota: se asume R, W indep. entre sí)

NOTA

cont. ↓

Sea el vec. aleat. $\underline{X} = (W, R)$ con soporte en $\mathbb{R}^2$ y func. de densidad conjunta

$f_{WR}(w,r) = f_W(w)\, f_R(r)$ (se verifica que $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{WR}(w,r)\,dw\,dr = 1$)

$$P(W+400>R) = \iint_A f_{WR}(w,r)\,dw\,dr =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{w+400} f_W(w)\, f_R(r)\,dr\,dw}_{\mathrm{I}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_W(w) \int_{-\infty}^{w+400} f_R(r)\,dr\,dw =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_W(w)\, \Phi\left(\frac{w+400-1200}{120}\right) dw =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{6}\cdot 16}\cdot \exp\left(-\frac{(w-480)^2}{2\cdot 6\cdot 16^2}\right)\cdot \Phi\left(\frac{w-800}{120}\right) dw = 0{,}0056$$ ans.

según Wolfram Alpha (le pasé la integral I escrita entera)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{w+400} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{6}\,16}\cdot \exp\left(-\frac{(w-480)^2}{2\cdot 6\cdot 16^2}\right)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 120}\cdot \exp\left(-\frac{(r-1200)^2}{2\cdot 120^2}\right) dr\,dw$$

(tiene sentido la probabilidad baja, $\left[\begin{array}{l} \overbrace{(6\cdot 80)}^{\mu_W} + \overbrace{\sqrt{6}\cdot 16}^{\sigma_W} + 400 \cong 919 \\ \underbrace{1200}_{\mu_R} - \underbrace{120}_{\sigma_R} = 1080 \end{array}\right]$, tiene sentido que $W+400>R$ sea poco probable)

Podía usar propiedades

Nota: esta es una forma muy mala de resolver este ejercicio. Sale mucho más fácil usando la propiedad de que la suma de normales es normal (Terminas calculando P(R - W < 400) y R - W es una normal)

Ejercicio #2 [redacted]

HOJA N° 2/3

(土) 27日 5月 23年

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,4,5,6\}, \{1,2\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}$

$P(\{1\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{2\}) = \frac{1}{2}$ (¡Recordar: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$)

$P(\{1,2\}) = P(\{1\} \cup \{2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) - P(\{1\} \cap \{2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \underbrace{\cancel{P(\{\emptyset\})}}_{=0} = \frac{5}{6}$

$P(\Omega) = P(\{1,2\}) + P(\{3,4,5,6\}) = 1 \rightsquigarrow P(\{3,4,5,6\}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

$P(\{1,3,4,5,6\}) = P(\{1\}) + P(\{3,4,5,6\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\{2,3,4,5,6\}) = P(\{2\}) + P(\{3,4,5,6\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

quiero: $E[X] = 0$, $Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = E[X^2] = 1$

A	P(A)
$\{1\}$	$1/3$
$\{2\}$	$1/2$
$\{1,2\}$	$5/6$
$\{3,4,5,6\}$	$1/6$
$\{1,3,4,5,6\}$	$1/2$
$\{2,3,4,5,6\}$	$2/3$

sea $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una V.A. sobre Ω t.q.

$X(\{1\}) = 1$; $X(\{3,4,5,6\}) = -2$; $Rg(X) = \{-2; 0; 1\}$

$X(A) = 0$, $A \in \mathcal{A} - \{\{1\}, \{3,4,5,6\}\}$, v.q.:

¿2?

$E[X] = \sum_{Rg(X)} x\, p_X(x) = 1 \cdot p_X(1) + (-2) p_X(-2) + \cancel{0 \cdot p_X(0)}$

$= 1 \cdot P(\{1\}) + (-2) P(\{3,4,5,6\}) = 1 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = 0 = E[X]$

$Var(X) = E[X^2] - \underbrace{\cancel{E^2[X]}}_{=0} = E[X^2] =$

$= \sum_{Rg(X)} x^2 p_X(x) = (1)^2 p_X(1) + (-2)^2 p_X(2) + \underbrace{\cancel{(0)^2 p_X(0)}}_{=0} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 1 = Var(X)$

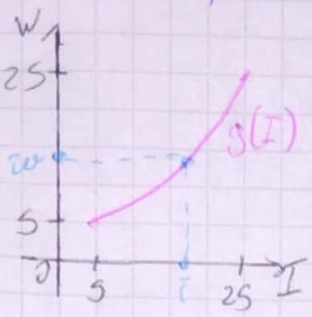
[redacted]

NOTA

Ejercicio # 3, 4 [redacted]

(土)27日5月23年

3.1) $W = rI^2$, $I \sim \mathcal{U}[5, 25]$ $\quad W = g(I)$



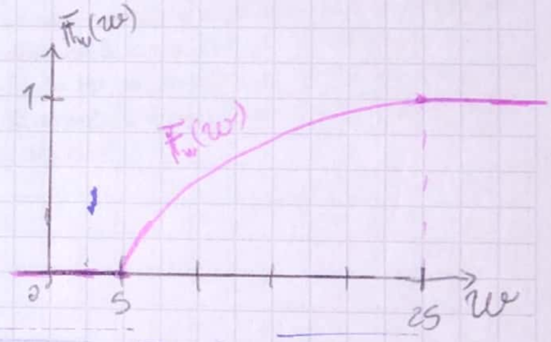
$$F_I(i) = \int_{-\infty}^{i} f_I(t)\,dt = \int_{-\infty}^{i} \frac{1}{20} 1\!\!1\{5 \le t \le 25\}\,dt =$$

$$= \int_{5}^{i} \frac{1}{20} 1\!\!1\{5 \le t \le 25\}\,dt = \begin{cases} 0, & i < 5 \\ \frac{i-5}{20}, & 5 \le i < 25 \\ 1, & i \geq 25 \end{cases}$$

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \le w) = \mathbb{P}(rI^2 \le w) = \mathbb{P}\left(I \le \sqrt{\frac{w}{r}}\right) = F_I\left(\sqrt{\frac{w}{r}}\right)$$

$$= F_I(\sqrt{5w}) = \begin{cases} 0, & \sqrt{5w} < 5 \rightsquigarrow w < 5 \\ \frac{\sqrt{5w}-5}{20}, & 5 \le \sqrt{5w} < 25 \rightsquigarrow 5 \le w < 125 \\ 1, & \sqrt{5w} \geq 25 \rightsquigarrow w \geq 125 \end{cases}$$

$$\therefore F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 5 \\ \frac{\sqrt{5w}-5}{20}, & 5 \le w < 125 \\ 1, & w \geq 125 \end{cases}$$



Ejercicio # 4: sea B un P.B.G. con $p_o = 0{,}1$, $p_e = 0{,}4$, $p_h = 0{,}5$

- C: vector aleatorio de los clientes ~~que entraron~~, N: cant. de clientes q. entraron

- $C|_{N=n} \sim \mathcal{M}(n, p_o = 0{,}1, p_e = 0{,}4, p_h = 0{,}5)$ $\quad C = (O, E, H)$, como entraron 5 orcos, v.q:

- $C|_{\substack{O=5 \\ N=n}} \sim \mathcal{M}\left(n-5, \underbrace{p_e = \frac{0{,}4}{0{,}9}}_{=0{,}44}, \underbrace{p_h = \frac{0{,}5}{0{,}9}}_{=0{,}56}\right)$, $C|_{O=5} = (E, H)$; como también sabemos la cant. de clientes que entraron, v.q.:

$$\mathbb{P}\left(E > H \,\middle|\, \substack{O=5 \\ N=12}\right) = \mathbb{P}\left(C|_{\substack{O=5 \\ N=12}} \in \{(7,0); (6,1); (5,2); (4,3)\}\right)$$

cont.

$$P_{C|_{\theta=5,\,N=12}}(e,h) = \binom{7}{e\,h} p_e^{e}\, p_h^{h} = \frac{7!}{e!\,h!} \cdot 0{,}44^{e} \cdot 0{,}56^{h}$$

$$\sum_{i=0}^{3} P_{C|_{\theta=5,\,N=12}}(7-i,\, i) = 0{,}371$$

× calculadora

$$P(E>H|_{\theta=5,\,N=12}) = 0{,}371$$

[redacted]