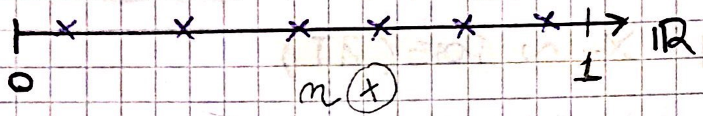
PROCESOS DE POISSON - (GUÍA 7)

DISTRIBUCIÓN POISSON (DISCRETA)

PENSAR EN UN PROCESO ALEATORIO DE 'MARCAS' EN LA SEMIRECTA REAL POSITIVA (LLAMADAS A UNA CENTRAL TELEFONICA, ARRIBOS A UN LUGAR..)



Y QUE EL PROCESO TIENE UNA TASA λ, $\lambda = \frac{\# \text{MARCAS}}{\text{UNIDAD } ([0,1])} = \text{CTE}$

PARTICIÓN DE $(0,1]$ EN n PARTES

CON $n >> \lambda$ DE TAL MANERA QUE APARECE O NO UNA MARCA CON PROBABILIDAD $P \approx \frac{\lambda}{n}$ (n FIJO)

SEA X_n: # MARCAS EN EL $(0,1] \Rightarrow X_n \approx Bi\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} \ ?$$

$$p_{X_n}(k) = \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

SEA X: # MARCAS EN $(0,1]$ DE UN PROCESO CON TASA $\lambda = \frac{\# \text{MARCAS}}{\text{UNIDAD}} = \text{CTE}$. X TIENE DISTRIBUCIÓN POISSON DE PARAMETRO λ, $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

GUÍA: 7

OBS! EL LIMITE ANTERIOR MUESTRA QUE $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} X \sim Poi$

- $R_X = \{0, 1 \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $VAR(X) = \lambda$ → TABLA
- TASA REESCALADA:
  - $\lambda \rightarrow (0, 1]$
  - $\lambda T \rightarrow (0, T]$

X_T : # MARCA DEL PROCESO DE TASA λ, EN EL INTERVALO $(0, T]$ $X_T \sim POIS(\lambda T)$

EJEMPLO 1

EL NUMERO DE MSJ RECHAZADOS POR SEGUNDO EN UN SERVIDOR = (#X)

$\lambda = 5 \text{ MSJ}/S$ → 32 [illegible]

(i) $\mathbb{P}$(2 MSJ EN 1 SEG)

(ii) $\mathbb{P}$(2 MSJ EN 3 SEG)

(i) $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{5^2}{2!} e^{-5}$ ee $X \sim POIS(5)$

(ii) $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{(3 \times 5)^2}{2!} e^{-3 \times 5}$ $X_3 \sim POIS(\overset{t}{3} \times \overset{\lambda}{5})$

EJEMPLO 2

$\lambda = \frac{270 \text{ LLAMADAS}}{3 \text{ hs}} = \frac{3 \text{ LLAMADAS}}{2 \text{ MIN.}}$

esto importante

$\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{(\overbrace{1{,}5}^{\lambda} \times 3)^4}{4!} e^{-1{,}5 \times 3}$

NOTA

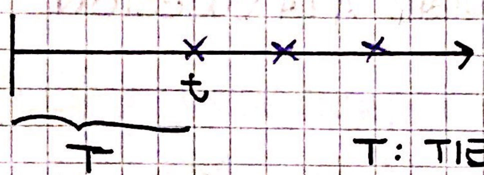
PROPIEDADES

1) $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$, $X_2 \sim Poi(\lambda_2)$ $\Big\}$ SI SON INDEPENDIENTES $X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$

2) EN GENERAL : $X_i \sim$ V.A.i , $X_i \sim Poi(\lambda_i)$

ENTONCES : $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Poi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

RELACIÓN CON LA EXPONENCIAL



$X_T \sim Poi(\lambda T)$

T: TIEMPO HASTA LA 1° MARCA DE X_T.

- $F_T(T) = \mathbb{P}(T \leq T) = 1 - e^{-\lambda T} \Rightarrow T \sim EXP(\lambda)$
- $S(T) = \mathbb{P}(T > T) = \mathbb{P}(X_T = 0) = e^{-\lambda T}$

ENTONCES EL TIEMPO ENTRE MARCAS, TAMBIEN ES EXP (λ)

3) $X_n \sim$ V.A.i.i $\sim BER(p)$, $N \sim Poi(\lambda)$ INDEPENDIENT. DE LA X_i :

$$\boxed{S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n \sim Poi(p\lambda)}$$

DISTRIBUCIÓN GAMMA

S_n TIEMPO DE ESPERA HASTA LA N-ESIMA MARCA DE POISSON. $S_n \sim \gamma(\overset{\downarrow \text{MARCAS}}{n}, \lambda)$

- $f_{S_n}(T) = \dfrac{(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda T} \, \mathbb{1}\{T > 0\}$
- $F_{S_n}(T) = 1 - S(T) = \left[1 - e^{-\lambda T} \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda T)^i}{i!}\right] \mathbb{1}\{T > 0\}$

NOTA

PROPIEDADES

- Si $T_1 \dots T_n$ V.A.i.i $\sim Exp(\lambda)$ si $S_n = \sum T_i \sim \Gamma(n, \lambda)$
- $\mathbb{E}[S_n] = \frac{n}{\lambda}$; $VAR(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$
- $\left.\begin{array}{l} S_n \sim \Gamma(n,\lambda) \\ S_m \sim \Gamma(m,\lambda) \end{array}\right\}$ INDEPENDIENTES ENTONCES $S_n + S_m \sim \Gamma(n+m, \lambda)$

PROCESOS DE POISSON

- **PROCESO PUNTUAL ALEATORIO.**

SE LLAMA PROCESO PUNTUAL ALEATORIO A LA SUCESIÓN $(S_n)_{n \geq 1}$ DE V.A TAL QUE :

$n = 10$ TIEMPO HASTA LAS 10 MARCAS

S_n: TIEMPO HASTA LA MARCA n-ESIMA, QUE TIENE QUE VERIFICAR:

(i) $0 < S_1 < S_2 < S_3 \dots < S_n$

(ii) $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ → NO PUEDE ACUMULARSE 'NO HAY EXPLOSION DE ARRIBOS'

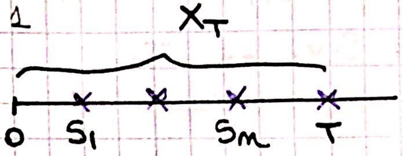
- $T_n = S_n - S_{n-1}$ 'TIEMPO ENTRE ARRIBOS'
- X_T : # MARCAS EN EL INTERVALO $(0, T]$

  $X_T = MÁX \{ S_n \leq T \}$ (DISCRETAS)

NOTA

MARCAS EN EL INTERVALO

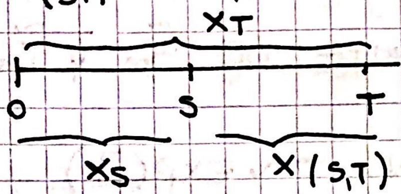
RELACIÓN ENTRE X_T Y S_m → $S_m = \sum_{1}^{m} X_T$



$$\boxed{\mathbb{P}(S_m \leq T) = \mathbb{P}(X_T \geq m)}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_m \leq T \\ S_{m+1} > T \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{X_T = m}$$

- **INCREMENTO** $X_{(S,T]} = X_T - X_S$



SE LLAMA **PROCESO PUNTUAL DE POISSON** DE INTENSIDAD λ (CON $\lambda > 0$), A UN PROCESO PUNTUAL ALEATORIO $(S_m)_{m \geq 1}$ TAL QUE: $(pp\,P(\lambda))$

1) $S_m \sim \gamma(m, \lambda)$
2) $T_m \sim \text{EXP}(\lambda)$
3) $X_T \sim \text{POIS}(\lambda T)$

PROPIEDADES IMPORTANTES

(i) $X_{[A,B]}$ Y $X_{[C,D]}$ SON INDEPENDIENTES ($B < C$)

(ii) $X_{[S,T]} \sim \text{POIS}(\lambda(T-S)) \quad \forall S < T$

$$\mathbb{P}(X_{[S,T]} = K) = \frac{(\lambda(T-S))^K}{K!} e^{-\lambda(T-S)}$$

$X_{[S,T]} \sim X_{T-S}$

COROLARIO. EL PROCESO NO TIENE MEMORIA

$\tilde{S}_1 = S_{X_{T_0}+1} - T_0 = \tilde{T}_1$

$\tilde{S}_2 = S_{X_{T_0}+2} - T_0$

- $\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}$
- $\tilde{T}_1 : S_{X_{T_0}} - T_0$
- $\tilde{T}_n : \tilde{S}_n - S_{n-1}$

ES DECIR QUE

$\tilde{S}_n \sim \Gamma_M(\lambda)$

$\tilde{T}_n \sim EXP(\lambda)$

X_{T_0} ES INDEPENDIENTE DE $\tilde{S}_n$ y $\tilde{T}_n$

$Y_i \sim T \mid T \leq T_0$ CON $T \sim EXP(\lambda)$

$\Pi = \{$ CONJUNTO DE PUNTOS O MARCAS DEL $ppP(\lambda)$ $\}$

- **COLORACIÓN Ó ADELGAZAMIENTO DE UN $ppP(\lambda)$**

SUPONER QUE CADA MARCA SE PINTA DE ROJO CON $\mathbb{P} = p$ Y LOS NEGROS CON $\mathbb{P} = 1-p$ (BER).

SEA $\Pi_1 = \{$ MARCAS ROJAS $\}$ $\Pi_2 = \{$ MARCAS NEGRAS $\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1 \sim ppP(p\lambda) \\ \Pi_2 \sim ppP((1-p)\lambda) \end{array}\right\} \text{INDEPENDIENTES}$$

- **SUPERPOSICIÓN DE $pp\,P(\lambda)$ INDEP (COMPETENCIA)**

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1 \sim ppP(\lambda_1) \\ \Pi_2 \sim ppP(\lambda_2) \end{array}\right\} \text{INDEP} \Rightarrow \Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \sim ppP(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$T_1^{(\Pi_1)} \sim EXP(\lambda_1)$

$T_1^{(\Pi_2)} \sim EXP(\lambda_2)$

- $\mathbb{P}(\text{LA } 1° \text{ MARCA SEA DE } \Pi_1) = \mathbb{P}(T_1^{(\Pi_1)} < T_1^{(\Pi_2)}) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$
- $\mathbb{P}(\text{" " " " " } \Pi_2) = \mathbb{P}(T_1^{(\Pi_2)} < T_1^{(\Pi_1)}) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

NOTA

• PROCESO DE POISSON COMPUESTO

Y_T: # MARCAS EN $(0,T]$

UN PROCESO $(S_n)_{n\geq 1}$ SE CONSIDERA COMPUESTA SI A Y_T LA PUEDO ESCRIBIR COMO V.A COMPUESTA DE LA FORMA:

$$Y_T = \sum_{i=1}^{X_T} X_i \,, \quad \text{DONDE} \quad X_T \sim Poi(\lambda T)$$

$\{X_i\}$ V.A.i.i INDEPENDIENTE DE X_T.

EJEMPLO 1 (NO LO COPIE)

	PROCESO BERNOULLI	PROCESO POISSON
X	$Bi(n,p)$	$Poi(\lambda)$
	$G(p)$	$EXP(\lambda)$
Y	$PAS(k,p)$	$\Gamma(k,\lambda)$

X_T

S_k

$\{X \geq k\} \Leftrightarrow \{Y \leq n\}$ $\quad \{X_T \geq k\} \Leftrightarrow \{S_k \leq T\}$

VARIABLES CONDICIONALES ASOCIADAS A LA PPP(λ)

SEA $\Pi \sim PPP(\lambda)$

1) SUPONGO QUE EN $(0,T]$ OCURRIÓ UNA MARCA DE POIS

$$S_1 \big|_{X_T = 1} \sim \mathcal{U}(0,T)$$

DEMOSTRACIÓN $\mathbb{P}(S_1|_{X_T=1} \leq s) = \mathbb{P}(S_1 \leq s \mid X_T = 1)$

$$= \frac{\mathbb{P}(S_1 \leq s,\ X_T = 1)}{\mathbb{P}(X_T = 1)}$$

SUPER CLAVE.

$\{S_1 \leq s\}$ ES EQUIVALENTE A $\{X_s \geq 1\}$

$$\frac{\mathbb{P}(X_s \geq 1,\ X_T = 1)}{\mathbb{P}(X_T = 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_s = 1,\ X_T = 1)}{\mathbb{P}(X_T = 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_s = 1,\ X_{[s,T]} = 0)}{\mathbb{P}(X_T = 1)}$$

AHORA SON INDEP $= \dfrac{\mathbb{P}(X_s = 1)\,\mathbb{P}(X_{[s,T]} = 1)}{\mathbb{P}(X_T = 1)}$

$$= \frac{\dfrac{(\lambda s)^1}{1!} \cancel{e^{-\lambda s}} \cdot \dfrac{(\lambda(T-s))^0}{0!} \cancel{e^{-\lambda(T-s)}}}{\dfrac{(\lambda T)^1}{1!} \cancel{e^{-\lambda T}}}$$

$$= \boxed{\frac{s}{T}}$$

OH! NO DEPENDE DE λ

EJEMPLO 2

EN 1 hs → 7 COLECTIVOS

SE SABE QUE ENTRE 16:00 Y 17:00 PASO UNO,

$\mathbb{P}(4:10)? = \frac{1}{6}$ $\quad \mathbb{P}(4:50 - 17:00) = 1/6$

SI AHORA S ES FIJO:

$X_s |_{X_T=1} \sim BER\left(\frac{s}{T}\right)$ (MISMA DEMO QUE ARRIBA)

EN GENERAL SUPONGO QUE EN $(0,T]$ SUCEDIERON m MARCAS DE POISSON. $\{A_i\}_{1 \leq i \leq m}$ PARTICIÓN DEL $(0,T]$

X_{A_i}: # MARCAS EN A_i SON INDEPENDIENTES

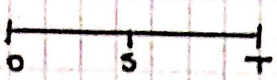
$$(X_{A_1}, \ldots X_{A_m}) \Big|_{X_T = m} \sim \mathcal{M}\left(m, \frac{|A_1|}{T}, \ldots, \frac{|A_m|}{T}\right)$$

NOTA

CASO PARTICULAR

$A_1 = [0,S]$

$A_2 = [S,T]$



$X_T = m$

$$\boxed{X_S \mid X_T = m \sim Bi\left(m, \frac{S}{T}\right)}$$

$$X_{[S,T]} \mid X_T = m \sim Bi\left(m, \frac{T-S}{T}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_S = k \mid X_T = m) = \binom{m}{k}\left(\frac{S}{T}\right)^k \left(1 - \frac{S}{T}\right)^{m-k}$$

EJEMPLO 3

UN FLUJO DE IMIGRACION $\sim PPP(2p/x\text{ DÍA})$

SI SE SABE QUE ENTRE $5^{TO}-10^{MO}$ DIAS ARRIBARON 8p

$\mathbb{P}$(3p ENTRE 8-10 DIA) $\qquad X_T \sim Poi(\lambda T)$

$X_{8,10}$: # PERSONAS EN $(8,10] \sim Poi(\lambda(T-S)) = (2(10-8))$

$$\mathbb{P}(X_{8\,10]} = 3 \mid X_{5\text{-}10} = 8) = \frac{\mathbb{P}(X_{8\,10} = 3, X_{[5\,10]} = 8)}{\mathbb{P}(X_{5\,10]} = 8)} =$$

$$\frac{\mathbb{P}(X_{8\,10]} = 3,\ X_{5\,8]} = 5)}{\mathbb{P}(X_{5\,8]} = 8)} = \frac{\mathbb{P}(X_{8\,10]} = 3)\,\mathbb{P}(X_{5\,8} = 5)}{\mathbb{P}(X_5 = 8)}$$

$$\frac{\mathbb{P}(X_2 = 3)\,\mathbb{P}(X_3 = 5)}{\mathbb{P}(X_5 = 8)} = \frac{\frac{(2.2)^3}{3!} e^{-2.2} \cdot \frac{(6)^5}{5!} e^{-6}}{\frac{(10)^8}{8!} \cdot e^{-10}}$$

$$= \frac{8!}{3!\,5!}\left(\frac{4}{10}\right)^3\left(\frac{6}{10}\right)^5 = \binom{8}{3}\left(\frac{4}{10}\right)^3\left(\frac{6}{5}\right)^5$$

$$X_{8,10]} \mid X_{5,10} = 8 \sim Bi\left(8, \frac{4}{10}\right)$$

NOTA

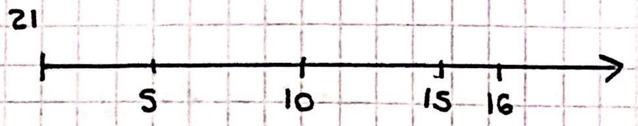
PROBLEMA COLOQUIO.

INVITADOS A UNA FIESTA LLEGAN $\lambda = 12/hs$

$21{:}00 - 21{:}15 = 3$. CALCULAR $\mathbb{P}($ 1 - 21:00 - 21:05

1 - 21:05 - 21:10

1 - 21:10 - 21:16 $)$



$$\mathbb{P}(X_5 = 1,\ X_{5,10]} = 1,\ X_{(10,16]} = 1 \mid X_{15} = 3)$$

$$\frac{\mathbb{P}(X_5 = 1,\ X_{(5,10]} = 1,\ X_{(10,16]} = 1,\ X_{15} = 3)}{\mathbb{P}(X_{15} = 3)}$$

CLAVE

$$\frac{\mathbb{P}(X_5 = 1,\ X_{5,10} = 1,\ X_{(10,15} = 1,\ X_{15,16} = 0)}{\mathbb{P}(X_{15} = 3)}$$

LONG INTERVALO

AHORA SON INDEP. $\dfrac{\mathbb{P}(X_5 = 1)\,\mathbb{P}(X_5 = 1)\,\mathbb{P}(X_5 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 0)}{\mathbb{P}(X_{15} = 3)}$

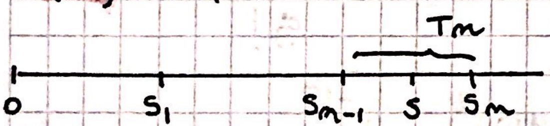
$$= \frac{3!}{1!\,1!\,1!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\ \frac{(1/5)^0}{0!}\,e^{-1/5}$$

EJ 7.6

EL DESO BOLSAS NARANJ

$\sim$ EXP(3 kg) SE AGREGAN HASTA SUPERAR 5 kg

(A) $\mathbb{P}($ PESO FINAL > 7 kg $)$



$T_m \sim \text{Exp}(1/3)$

$\mathbb{E}[T_m] = 3$

$S_m > 5$

$$\mathbb{P}(S_m \geq 7 \mid S_m \geq 5) = \mathbb{P}(\underbrace{S_m - 5}_{Y} \geq 2)$$

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) = e^{-2/3}$$

NOTA

HOJA Nº 62

FECHA

(B) $\mathbb{E}[\text{ULT BOLSA}]$

$$\mathbb{E}[W+Y] = \mathbb{E}[W] + \overbrace{\mathbb{E}[Y]}^{3}$$

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[T \mid T \leq S] = \frac{\mathbb{E}[T\,\mathbb{1}\{T \leq S\}]}{\mathbb{P}(T \leq S)} = \frac{\int_0^S T\, 1/3\, e^{-\lambda T}\, dT}{1 - e^{-S/3}}$$

NOTA