PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Primer parcial — Segundo cuatrimestre – 2017

Duración: 4 horas. — 28/X/17 – 9:00 hs.

---

1. Se extraen dos bolas sin reposición de una urna que contiene 3 bolas rojas y 2 azules. Si las dos bolas extraídas son rojas se destruyen, en caso contrario se las repone en la urna. Se vuelve a extraer una bola de la urna que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que las primeras dos bolas extraídas hayan sido rojas?

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.14** y **Ejercicio 1.27**] Designar mediante R_{12} al evento de que las primeras dos bolas extraídas son rojas, y mediante R_3 al evento de que la tercera bola extraída es roja. Se quiere calcular la probabilidad condicional $\mathbf{P}(R_{12}|R_3)$. Usando la *regla de Bayes* se obtiene que

$$\mathbf{P}(R_{12}|R_3) = \frac{\mathbf{P}(R_{12}\cap R_3)}{\mathbf{P}(R_3)} = \frac{\mathbf{P}(R_3|R_{12})\mathbf{P}(R_{12})}{\mathbf{P}(R_3|R_{12})\mathbf{P}(R_{12}) + \mathbf{P}(R_3|R_{12}^c)\mathbf{P}(R_{12}^c)}.$$

Combinatoria de por medio, se obtiene que $\mathbf{P}(R_{12}) = \binom{3}{2}\binom{2}{0}/\binom{5}{2} = 3/10$. Por otra parte, $\mathbf{P}(R_3|R_{12}) = 1/3$ y $\mathbf{P}(R_3|R_{12}^c) = 3/5$. Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(R_{12}|R_3) = \frac{(1/3)(3/10)}{(1/3)(3/10) + (3/5)(7/10)} = \frac{5}{26} \approx 0.1923.$$

□

---

2. El tiempo en años hasta que ocurre la primera falla en una heladera es una variable aleatoria con función intensidad de fallas

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{18}\sqrt{t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Usando los números aleatorios 0.54, 0.94, 0.11 simular tres valores del tiempo de funcionamiento de dicha heladera hasta que ocurre la primera falla.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.17** y **Ejercicio 2.13**] Sea T el tiempo en años hasta que ocurre la primera falla en la heladera. De acuerdo con el **Ejercicio 2.13**, la simulación de T se obtiene haciendo lo siguiente: $\hat{T}(U) = F_T^{-1}(U)$, donde $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ y, en principio, $F_T^{-1}(u)$ es la inversa generalizada de la función de distribución de T, $F_T(t) = \mathbf{P}(T \leq t)$. Como T es una variable aleatoria continua con función de distribución estrictamente creciente, la inversa generalizada es simplemente la función inversa.

De acuerdo con el **Ejercicio 2.17** se sabe que

$$\mathbf{P}(T > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\sqrt{s}}{18}ds\right) = \exp\left(-\frac{t^{3/2}}{27}\right).$$

Observando que $F_T(t) = u \iff \exp\left(-\frac{t^{3/2}}{27}\right) = 1 - u \iff t = (-27\log(1-u))^{2/3}$ se obtiene que $F_T^{-1}(u) = (-27\log(1-u))^{2/3}$. Por lo tanto, los tres valores que se piden son:

u	0.54	0.94	0.11
$F_T^{-1}(u)$	7.60	17.94	2.15

□

---

3. La duración en horas de un corte de luz en un edificio es una variable aleatoria de media 5. ¿Cómo deben ser las duraciones t de una lámpara de emergencia para tener una seguridad del 50 % de que la lámpara funcione durante todo un corte de luz?

R. [*Referencia*: **Ejercicio 3.23**] Sea T la duración en horas de un corte de luz en un edificio. Sabemos que T es una variable aleatoria positiva de media $\mathbf{E}[T] = 5$. Se quieren hallar valores de t tales que $\mathbf{P}(T > t) < 0.5$. Visto que solo disponemos de información sobre el valor de $\mathbf{E}[T]$ usamos *la desigualdad de Markov* para obtener

$$\mathbf{P}(T > t) \leq \frac{\mathbf{E}[T]}{t} = \frac{5}{t},$$

y como $\frac{5}{t} \leq 0.5 \iff t > 10$. Resulta que las duraciones de la lámpara de emergencia tienen que ser mayores que 10 horas. □

---

4. Lucas y Monk participan en un foro virtual. Los tiempos (en minutos) que Lucas y Monk demoran en contestar cada mensaje de Nicéforo son variables aleatorias independientes y exponenciales de media 30 y 45, respectivamente. Si a las 9:00 llegó un mensaje de Nicéforo y Lucas respondió después de las 9:05 calcular la probabilidad de que Lucas haya respondido antes que Monk.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.14**] Sean L y M los tiempos (en minutos) que Lucas y Monk demoran en contestar cada mensaje de Nicéforo, respectivamente. Se sabe que $L \sim \mathcal{E}(1/30)$, que $M \sim \mathcal{E}(1/45)$, y que L y M son independientes. Poniendo el 0 a las 9:00, que es el instante en que llegó un mensaje de Nicéforo, se sabe que $L > 5$ y se quiere calcular la probabilidad (condicional) de que $L < M$. En otras palabras se quiere calcular $\mathbf{P}(L < M|L > 5)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(L < M|L > 5) &= \frac{\mathbf{P}(L < M,\, L > 5)}{\mathbf{P}(L > 5)} = \frac{\mathbf{P}(L > 5|L < M)\mathbf{P}(L < M)}{\mathbf{P}(L > 5)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(L > 5|\operatorname{mín}(L, M) = L)\mathbf{P}(\operatorname{mín}(L, M) = L)}{\mathbf{P}(L > 5)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(\operatorname{mín}(L, M) > 5|\operatorname{mín}(L, M) = L)\mathbf{P}(\operatorname{mín}(L, M) = L)}{\mathbf{P}(L > 5)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(\operatorname{mín}(L, M) > 5)\mathbf{P}(\operatorname{mín}(L, M) = L)}{\mathbf{P}(L > 5)} \\
&= \frac{e^{-(1/30+1/45)\,5}\,\frac{1/30}{1/30+1/45}}{e^{-5(1/30)}} = \frac{3}{5}e^{-1/9} \approx 0.5369.
\end{aligned}$$

Para obtener la quinta igualdad se usó que los eventos $\operatorname{mín}(L, M) = L$ y $\operatorname{mín}(L, M) > 5$ son independientes, y para obtener la sexta se usó que $\operatorname{mín}(L, M) \sim \mathcal{E}(1/30 + 1/45)$. □

Otro modo. Notar que la probabilidad que aparece en el numerador de la primera igualdad también se puede calcular utilizando técnicas de integración:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(L < M, L > 5) &= \int_5^\infty \left(\int_\ell^\infty f_{L,M}(\ell, m)dm\right) d\ell \\
&= \int_5^\infty \left(\frac{1}{30}e^{-(1/30)\ell}\right)\left(\int_\ell^\infty \frac{1}{45}e^{-(1/45)m}dm\right) d\ell \\
&= \int_5^\infty \frac{1}{30}e^{-(1/30+1/45)\ell}d\ell = \frac{1/30}{1/30 + 1/45}e^{-(1/30+1/45)\,5} \\
&= \frac{3}{5}e^{-5/18}.
\end{aligned}$$

Y como $\mathbf{P}(L > 5) = e^{-1/6}$, resulta que $\mathbf{P}(L < M|L > 5) = \frac{3}{5}e^{-1/9}$. □

---

5. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ y, para cada $x \in (-1, 1)$, $Y|X = x$ tiene distribución normal de media x y varianza x^2. Calcular $\mathbf{E}[Y^2]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.16**] Notar que $\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{var}(Y) + \mathbf{E}[Y]^2$.

Para calcular $\mathbf{E}[Y]$ se puede usar *la fórmula de probabilidades totales*, $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]]$, y para calcular $\mathbf{var}(Y)$ se puede usar *el Teorema de Pitágoras*, $\mathbf{var}(Y) = \mathbf{var}(\mathbf{E}[Y|X]) + \mathbf{E}(\mathbf{var}(Y|X))$.

De la relación $Y|X = x \sim \mathcal{N}(x, x^2)$, se deduce que $\mathbf{E}[Y|X] = X$ y $\mathbf{var}(Y|X) = X^2$.

Combinando todo lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y^2] &= \mathbf{var}(Y) + \mathbf{E}[Y]^2 \\
&= \mathbf{var}(\mathbf{E}[Y|X]) + \mathbf{E}(\mathbf{var}(Y|X)) + \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]]^2 \\
&= \mathbf{var}(X) + \mathbf{E}[X^2] + \mathbf{E}[X]^2 \\
&= 2\mathbf{E}[X^2],
\end{aligned}$$

y como $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$, resulta que $\mathbf{E}[X^2] = 1/3$. En conclusión, $\mathbf{E}[Y^2] = 2/3$. □

Otro modo. Observar que $\mathbf{E}[Y^2|X = x] = \mathbf{var}(Y|X = x) + \mathbf{E}[Y|X = x]^2 = 2x^2$ y usar la *fórmula de probabilidades totales* para obtener que $\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y^2|X]] = \mathbf{E}[2X^2] = 2/3$. □

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Primer parcial — Segundo cuatrimestre – 2017

Duración: 4 horas. — 28/X/17 – 9:00 hs.

---

1. El tiempo en años hasta que ocurre la primera falla en una heladera es una variable aleatoria con función intensidad de fallas

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{18}\sqrt{t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Usando los números aleatorios 0.54, 0.94, 0.11 simular tres valores del tiempo de funcionamiento de dicha heladera hasta que ocurre la primera falla.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.17** y **Ejercicio 2.13**] Sea T el tiempo en años hasta que ocurre la primera falla en la heladera. De acuerdo con el **Ejercicio 2.13**, la simulación de T se obtiene haciendo lo siguiente: $\hat{T}(U) = F_T^{-1}(U)$, donde $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ y, en principio, $F_T^{-1}(u)$ es la inversa generalizada de la función de distribución de T, $F_T(t) = \mathbf{P}(T \leq t)$. Como T es una variable aleatoria continua con función de distribución estrictamente creciente, la inversa generalizada es simplemente la función inversa.

De acuerdo con el **Ejercicio 2.17** se sabe que

$$\mathbf{P}(T > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\sqrt{s}}{18}ds\right) = \exp\left(-\frac{t^{3/2}}{27}\right).$$

Observando que $F_T(t) = u \iff \exp\left(-\frac{t^{3/2}}{27}\right) = 1 - u \iff t = (-27\log(1-u))^{2/3}$ se obtiene que $F_T^{-1}(u) = (-27\log(1-u))^{2/3}$. Por lo tanto, los tres valores que se piden son:

u	0.54	0.94	0.11
$F_T^{-1}(u)$	7.60	17.94	2.15

□

---

2. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$ y, para cada $x \in (-1,1)$, $Y|X = x$ tiene distribución normal de media x y varianza x^2. Calcular $\mathbf{E}[Y^2]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.16**] Notar que $\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{var}(Y) + \mathbf{E}[Y]^2$.

Para calcular $\mathbf{E}[Y]$ se puede usar *la fórmula de probabilidades totales*, $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]]$, y para calcular $\mathbf{var}(Y)$ se puede usar *el Teorema de Pitágoras*, $\mathbf{var}(Y) = \mathbf{var}(\mathbf{E}[Y|X]) + \mathbf{E}(\mathbf{var}(Y|X))$.

De la relación $Y|X = x \sim \mathcal{N}(x, x^2)$, se deduce que $\mathbf{E}[Y|X] = X$ y $\mathbf{var}(Y|X) = X^2$.

Combinando todo lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y^2] &= \mathbf{var}(Y) + \mathbf{E}[Y]^2 \\ &= \mathbf{var}(\mathbf{E}[Y|X]) + \mathbf{E}(\mathbf{var}(Y|X)) + \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|X]]^2 \\ &= \mathbf{var}(X) + \mathbf{E}[X^2] + \mathbf{E}[X]^2 \\ &= 2\mathbf{E}[X^2], \end{aligned}$$

y como $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$, resulta que $\mathbf{E}[X^2] = 1/3$. En conclusión, $\mathbf{E}[Y^2] = 2/3$. □

Otro modo. Observar que $\mathbf{E}[Y^2|X = x] = \mathbf{var}(Y|X = x) + \mathbf{E}[Y|X = x]^2 = 2x^2$ y usar la *fórmula de probabilidades totales* para obtener que $\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y^2|X]] = \mathbf{E}[2X^2] = 2/3$. □

---

3. Se emiten 3 bits por un canal de comunicación binario. Cada bit emitido es 1 con probabilidad 0.7. El receptor indica que hay un 1 cuando efectivamente el 1 ha sido emitido con probabilidad 0.6 e indica que hay un 0 cuando efectivamente el 0 ha sido emitido con probabilidad 0.95. Calcular la probabilidad de que exactamente 1 de los 3 bits emitidos se reciba correctamente.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 6.1** y **Ejercicio 1.26**] Sea N la cantidad de bits que se reciben correctamente. Se sabe que $N \sim \mathcal{B}(3, p)$, donde p es la probabilidad de que "un bit se reciba correctamente". Se quiere calcular $\mathbf{P}(N = 1) = 3p(1-p)^2$. Para obtener p se puede hacer lo siguiente: mediante $E = x$ se designa al evento "se envió un x", y mediante $R = y$ se designa al evento "se recibió un y". Con esa nomenclatura el evento "se recibió un bit correctamente" se describe mediante $\{E = 1, R = 1\} \cup \{E = 0, R = 0\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(E = 1, R = 1) + \mathbf{P}(E = 0, R = 0) \\ &= \mathbf{P}(R = 1|E = 1)\mathbf{P}(E = 1) + \mathbf{P}(R = 0|E = 0)\mathbf{P}(E = 0) \\ &= (0.6)(0.7) + (0.95)(0.3) = 0.705. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{P}(N = 1) = 3(0.705)(0.295)^2 = 0.18406$. □

---

4. A partir de las 9:00 se realizará un experimento con un radioisótopo que emite partículas alpha de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. Se instala una alarma que suena cuando el tiempo entre dos emisiones consecutivas no supera 5 minutos. Calcular la probabilidad de que entre las 9:00 y las 9:30 el radioisótopo haya emitido exactamente 2 partículas y haya sonado la alarma.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 7.1** y **Ejercicio 7.7**] Sean N la cantidad de partículas alpha emitidas por el radioisótopo entre las 9:00 y las 9:30, y A el evento: "suena la alarma". Se quiere calcular $\mathbf{P}(N = 2, A)$. Usando *el principio de multiplicación* se obtiene:

$$\mathbf{P}(N = 2, A) = \mathbf{P}(A|N = 2)\mathbf{P}(N = 2).$$

Se sabe que $N \sim \text{Poi}\left(4\frac{1}{2}\right)$, de donde se obtiene que $\mathbf{P}(N = 2) = e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 2e^{-2}$. Por otra parte, usando el *Teorema de la distribución condicional de los tiempos de llegada* se obtiene que

$$\mathbf{P}(A|N = 2) = \mathbf{P}\left(\text{máx}(U_1, U_2) - \text{mín}(U_1, U_2) < 5/60\right) = \mathbf{P}\left(|U_1 - U_2| < 1/12\right),$$

donde U_1 y U_2 son v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{U}(0, 1/2)$. De allí que

$$\mathbf{P}(|U_1 - U_2| < 1/12) = 1 - \frac{2\frac{1}{2}\left(1/2 - 1/12\right)^2}{(1/2)^2} = \frac{11}{36}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{P}(N = 1, A) = \left(\frac{11}{36}\right) 2e^{-2} = \frac{11}{18}e^{-2} \approx 0.0827$. □

---

5. Los tiempos (en milisegundos) de transmisión de paquetes en un enlace de Internet son variables aleatorias independientes con función densidad de la forma

$$f(t) = 0.04\, e^{-0.04\,(t-10)}\mathbf{1}\{t > 10\}$$

Calcular aproximadamente la probabilidad de que el tiempo de transmisión total de 3600 paquetes exceda 2 minutos y 7 segundos.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 8.20**] Sea T_i el tiempo (en milisegundos) de transmisión del i-ésimo paquete. Como 2 minutos y 7 segundos son $2 \times 60 \times 1000 + 7 \times 1000 = 127000$ milisegundos, se quiere calcular $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{3600} T_i > 127000\right)$. De acuerdo con el *Teorema central del límite* se tiene que $\sum_{i=1}^{3600} T_i \approx \mathcal{N}(3600 \cdot \mathbf{E}[T_1], 3600 \cdot \mathbf{var}(T_1))$. Observando que $T_i \sim T + 10$, donde $T \sim \mathcal{E}(1/25)$, se obtiene que $\mathbf{E}[T_i] = \mathbf{E}[T + 10] = 25 + 10 = 35$ y $\mathbf{var}(T_i) = \mathbf{var}(T + 10) = \mathbf{var}(T) = 25^2$; en consecuencia, $\sum_{i=1}^{3600} T_i \approx \mathcal{N}(126000, (1500)^2)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{3600} T_i > 127000\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{3600} T_i - 126000}{1500} > \frac{127000 - 126000}{1500}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(2/3) = 1 - 0.74751 = 0.25249. \end{aligned}$$

□