Guía 8

8.1 Para modelar el precio del kilo de asado se propone una variable aleatoria con distribución normal de media 3 dólares y varianza 4. A la luz de que los precios suelen ser positivos: ¿qué puede decirse de semejante modelo?; ¿y si la media fuese 8 dólares?; ¿y si la media fuese 14 dólares?

8.2 Un receptor recibe una señal de amplitud aleatoria $X = S + N$, donde S es una variable Bernoulli de parámetro $3/4$ y N es un ruido con distribución normal de media 0 y desvío estándar $1/2$ independiente de S. Cuando S vale 1 la señal contiene información útil y cuando vale 0 no. El detector deja pasar la señal si $X > c$ y no la deja pasar si $X \leqslant c$. Se incurre en error cuando no se deja pasar una señal con información útil o cuando se deja pasar una señal sin información. Determinar el valor de c que garantice la probabilidad mínima de error.

8.3 La duración de cierto tipo de lámparas tiene distribución normal de media 100 horas. Si un comprador exige que por lo menos el 90 % de ellas tenga una duración superior a las 80 horas, ¿cuál es el valor máximo que puede tomar la varianza manteniendo siempre satisfecho al cliente?

8.4 En un establecimiento agropecuario, el 10 % de los novillos que salen a venta pesan más de 500 kg. y el 7 % pesa menos de 410 kg. Si la distribución es normal, hallar

(**a**) a y b tales que $\mathbf{P}(a < X < b) = 0.95$.

(**b**) la probabilidad de que en un potrero de 25 novillos haya alguno con un peso inferior a 400 kg.

8.5 Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con distribución normal de medias 1,2 y 3, respectivamente, y varianzas $1/9$, $1/3$ y $1/2$, respectivamente. Calcular $\mathbf{P}\left(X_1 - \frac{1}{2}X_2 > 2 - \frac{1}{3}X_3\right)$.

8.6 Se construye una varilla conectando tres secciones A, B y C cada una de las cuales se fabrica en una máquina diferente. La longitud de la sección A, en cm., tiene distribución normal de media 50 y varianza 0.25. La longitud de la sección B tiene distribución normal de media 30 y varianza 0.0625. La longitud de la sección C tiene distribución normal de media 65 y varianza 0.25. Las tres secciones se conectan de modo tal que hay una superposición de 5 cm. en cada conexión. Calcular la probabilidad de que la longitud de la varilla se encuentre entre 139 y 141 cm.

8.7 Los pesos de ciertos paquetes de café son variables aleatorias independientes con distribución normal de media 500 gr. y desvío estándar σ. ¿Cómo deben ser los valores de σ para tener una seguridad del 99 % de que el peso promedio de 12 paquetes no se desviará en más de 10 gr. de 500 gr.?

8.8 Sea S_n una variable aleatoria con distribución Binomial(n, p). Calcular $\mathbf{P}(S_n = k)$, $k = 1, 2, \ldots, 25$ con la fórmula exacta y con las siguientes aproximaciones:

1. *Aproximación por la densidad normal:*

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\,\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

2. *Corrección por continuidad:*

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}\left(k - \frac{1}{2} < S_n < k + \frac{1}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{k-np+1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np-1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

en los siguientes casos $n = 5, 8, 10, 15, 20, 25, 50, 100, 200$ y $p = (0.05)m$, $m = 1, 2, \ldots, 10$. Comparar (por gráficos) cuán buenas son las aproximaciones y cuán necesaria es la corrección por continuidad de acuerdo con los valores de n y p.

8.9 [*Experimento de Galton*] Una bola roja realiza una caminata aleatoria de la siguiente manera: cada 10 segundos se desplaza 3 cm. hacia la derecha o hacia la izquierda, con igual probabilidad, las sucesivas direcciones de la caminata son independientes. Si al cabo de dos minutos se ha desplazado ℓ veces hacia la izquierda va a parar a la urna ℓ, $\ell = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Usar la *aproximación por la densidad normal* para estimar la probabilidad de que la bola roja vaya a parar a la urna 4. ¿A qué caja es más probable que vaya a parar la bola roja?

8.10 [*ver* **Ejercicio 2.38**] Usar la *corrección por continuidad* para calcular aproximadamente la probabilidad de que entre los primeros 10.000 dígitos decimales de un número escogido al azar del intervalo $(0, 1)$ el 7 aparezca no más que 968 veces.

8.11 Ciertas partículas llegan a un contador según un proceso de Poisson de intensidad 3000 por hora. Sabiendo que entre las 9:00 y las 9:30 llegaron 1500 partículas, estimar la probabilidad de que más de 450 hayan llegado entre las 9:00 y las 9:10.

8.12 Una excursión dispone de 100 plazas. La experiencia indica que cada reserva tiene una probabilidad 0.1 de ser cancelada a último momento. No hay lista de espera. Se supone que los pasajeros hacen sus reservas individualmente, en forma independiente. Se desea que la probabilidad de que queden clientes indignados por haber hecho su reserva y no poder viajar sea $\leqslant 0.01$. Calcular el número máximo de reservas que se pueden aceptar.

8.13 [*ver* **Ejercicio 3.26**] Se quiere saber la proporción de fumadores en una población. Para ello se eligen n individuos al azar y se halla la proporción de los que fuman. ¿Qué valor debe tener n para que esta proporción no difiera de la real en más de 0.01, con probabilidad mayor o igual que 0.95?

8.14 Usando el Teorema Central del Límite demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

(*sugerencia:* considere una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de media 1.)

8.15 La longitud de ciertas varillas es una variable aleatoria de media 30 cm. y desvío estándar 2. El precio de venta en \$ de cada varilla es igual a su longitud medida en cm. El costo de producción de cada varilla es constante e igual a \$20. Calcular aproximadamente la probabilidad de que la ganancia total por vender 50 varillas sea mayor que \$460.

8.16 La duración (en minutos) de cada llamada telefónica efectuada por Alucard es una variable aleatoria de media μ y desvío estándar 0.2. Le facturan \$2 por minuto. ¿Cómo debe ser μ para que el costo de 100 llamadas de Alucard sea inferior a los \$190 con probabilidad mayor o igual que 0.99?

8.17 En un taller de manufactura, la fracción de unidades defectuosas varía diariamente en forma aleatoria con media 0.1 y desvío estándar 0.03. La producción diaria es variable con media 500 unidades y desvío 120 unidades. Todas las variables son independientes. El costo total diario tiene una parte fija de \$50 por unidad producida (buena o defectuosa) más \$100 por unidad defectuosa. Estimar el costo total para 90 días superado con 0.95 % de probabilidad.

8.18 El peso W (en toneladas) que puede resistir un puente sin sufrir daños estructurales es una variable aleatoria con distribución normal de media 1.400 y desvío 100. El peso (en toneladas) de cada camión de arena es una variable aleatoria de media 20 y desvío 0.25. ¿Cuántos camiones de arena debe haber, como mínimo, sobre el tablero del puente para que la probabilidad de que ocurran daños estructurales supere 0.1?

8.19 En un sistema electrónico se producen fallas de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 2.5 por mes. Por motivos de seguridad se ha decidido cambiarlo cuando ocurran 196 fallas. Calcular (aproximadamente) la probabilidad de que el sistema sea cambiado antes de los 67.2 meses.

8.20 Una máquina selecciona ciruelas y las separa de acuerdo con el diámetro x (medido en cm.) de cada una. Las de diámetro superior a 4 cm. se consideran de clase A y las otras de clase B. El diámetro de cada ciruela es una variable aleatoria uniforme entre 3 y 5 cm. El peso (medido en gramos) de cada ciruela depende de su diámetro y es x^3. Si las cajas vacías pesan 100 gramos, hallar en forma aproximada la probabilidad de que una caja con 100 ciruelas de tipo A pese más de 9.6 kilos.

8.21 [*ver* **Ejercicio 7.8**] A una estación de tren arriban pasajeros de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 50 por minuto. Los trenes parten de la estación cada 15 minutos a partir de las 4:00. Calcular aproximadamente la probabilidad de que la cantidad total de tiempo que esperaron todos los que viajaron desde la estación y arribaron a la misma entre las 4:00 y las 22:00 haya superado 6.400 horas.

8.22 Lucas y Monk palean arena cargando un volquete. La probabilidad de que una palada sea de Monk es 0.7 y la probabilidad de que sea de Lucas es 0.3. El volumen en decímetros cúbicos de la palada de Lucas es una variable aleatoria uniforme entre 2 y 4, y el de la palada de Monk es una variable aleatoria uniforme entre 1 y 3. ¿Cuántas paladas son necesarias para que la probabilidad de que el volquete tenga más de 4 metros cúbicos de arena supere 0.95?

Ejercicios Complementarios

8.23 Una conserva se venderá envasada en latas. Las distribuciones de los pesos (en gr.) y sus costos (en \$ por gr.) son los siguientes:

Peso neto	X es normal de media 49.8 y desvío 1.2.
Peso del envase	Y es normal de media 8.2 y desvío 0.6.
Costo de la conserva	$C_C = 0.06$.
Costo del envase	$C_E = 0.008$.

(**a**) Calcular la probabilidad de que una unidad terminada tenga un costo inferior a \$3.

(**b**) Hallar la probabilidad de que el costo del producto terminado supere en más del 2 % al costo del peso neto.

8.24 [*Capacidad de procesos*] La calidad de un proceso industrial suele caracterizarse por alguna variable aleatoria X, medible sobre dicho proceso o sobre el producto fabricado por él (por ejemplo, X puede ser el diámetro de piezas torneadas, la corriente eléctrica en un proceso de soldadura, el volumen de llenado de botellas, la dureza de comprimidos farmacéuticos o su concentración de principio activo, etc). Se suelen definir límites superior e inferior de especificación (LSE y LIE) como aquellos valores a partir de los cuales el producto resulta no conforme o defectuoso. Cuando X pertenece al intervalo $[LIE, LSE]$, el producto se considera aceptable. Los sucesivos productos son obtenidos con variaciones aleatorias en X, que se suponen normales. Cuando el proceso es *centrado* (el intervalo se encuentra centrado en μ_X), la capacidad del proceso de elaboración se define como la aptitud para generar productos dentro de los límites, y se cuantifica a través del índice de capacidad

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma_X}.$$

(**a**) Interpretar el significado de C_p.

(**b**) De un proceso centrado con límites $LIE = 10.90$ mm. y $LSE = 11.10$ mm. se midieron $n = 15$ piezas, obteniendo (en mm.): 10.98, 10.92, 11.01, 11.08, 11.07, 11.10, 10.87, 10.99, 11.07, 10.93, 10.96, 10.90, 10.89, 10.94, 10.95. Estimar con esta muestra σ_X como $\sqrt{S^2}$ (ver **Ejercicio 3.32**). Luego, estimar C_p y el porcentaje de productos defectuosos.

(**c**) Calcular el porcentaje de piezas no conformes para procesos centrados con C_p iguales a 2/3, 1 y 4/3.

(**d**) Un proceso centrado trabaja con un 0.5 % de piezas no conformes. ¿Cuánto vale su C_p?

8.25 Lucas usa su radio portátil un tiempo variable, día a día, de media 2.4 hrs. y desvío estándar 0.8 hrs. La radio usa una pila especial cuya duración también es variable de media 8 hrs. y desvío estándar 1.2 hrs. Lucas efectuará un viaje de 30 días y si se le agotan las pilas no está seguro de conseguirlas. Calcular cuántas pilas debe llevar para que la probabilidad de dicho evento valga 0.05.

8.26 Un buen día Monk decide resolver toda la Guía 1 de Probabilidad y Estadística (incluídos los Ejercicios Complementarios). El tiempo, en horas, que demora en resolver el ejercicio $1.i$ ($i = 1, 2, \dots, 43$) es una variable aleatoria T_i. La variables T_i son independientes y exponenciales de intensidad 4. Cuando termina de resolver el ejercicio $1.i$ Monk descansa $2e^{T_i}$ minutos. Calcular aproximadamente la probabilidad de que Monk haya descansado más de dos horas mientras resolvía todos los problemas de la Guía 1.
