Guía 2

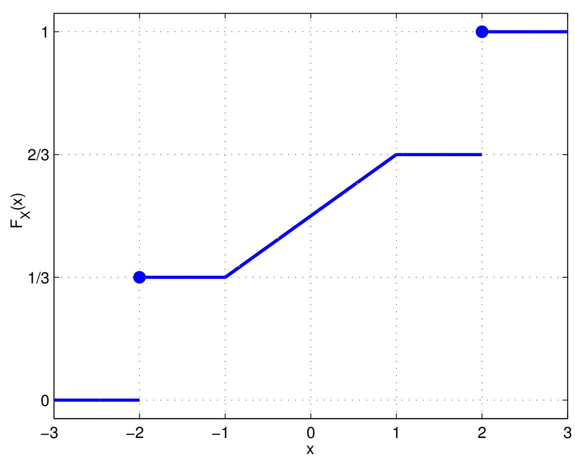
2.1 STOP Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad en el que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$. Determinar cuáles de las siguientes funciones $X : \Omega \to \mathbb{R}$ son variables aleatorias:

(**a**) $X(\omega) = \omega$.

(**b**) $X(\omega) = \mathbf{1}\{\omega \text{ es par}\}$.

(**c**) $X(\omega) = \mathbf{1}\{\omega \in \{1, 4\}\}$.

2.2 STOP Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ tiene gráfico de forma



(**a**) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ la variable X concentra masa positiva?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(-2 < X \leqslant 2)$, $\mathbf{P}(-2 \leqslant X \leqslant 2)$, $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 2)$ y $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(X \in (-2, -1))$, $\mathbf{P}(|X| \leqslant 1)$ y $\mathbf{P}(X \in (1, 2))$.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(X \leqslant 1.5 | X < 2)$ y $\mathbf{P}(X \leqslant 1.5 | X \leqslant 2)$.

(**e**) Calcular $\mathbf{P}(X = -2 | \, |X| = 2)$.

2.3 En una urna hay 3 bolas verdes y 5 bolas rojas.

(**a**) Se realizan 4 extracciones con reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

(**b**) Se realizan 4 extracciones sin reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

2.4 Se tiene una moneda cargada con probabilidad $p = 5/8$ de salir "cara".

(**a**) Hallar, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función de probabilidad de la cantidad N_k de lanzamientos necesarios de dicha moneda hasta observar k-ésima cara.

(**b**) Calcular la probabilidad de que N_1 sea par.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(N_1 = 3)$ y $\mathbf{P}(N_2 = 5 | N_1 = 2)$.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(N_1 > 3)$ y $\mathbf{P}(N_1 > 5 | N_1 > 2)$.

(**e**) Calcular $\mathbf{P}(N_2 > 3)$ y $\mathbf{P}(N_2 > 5 | N_2 > 2)$.

2.5 La cantidad N de partículas alfa emitidas (por segundo) por una fuente de polonio es una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro $1/2$. Calcular la probabilidad de que la fuente

(**a**) Emita más de tres partículas alfa en un segundo.

(**b**) Emita una cantidad impar de partículas en un segundo.

2.6 Se quiebra una vara en un punto al azar. Calcular la probabilidad de que la longitud de la pieza más larga sea mayor que el triple de la longitud de la pieza más corta.

2.7 Sea X una variable aleatoria con función densidad

$$f_X(x) = 2x\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

. Sabiendo que la suma de los primeros dos dígitos decimales de X es 3, calcular la probabilidad de que el primer dígito de X sea 2.

2.8 [*ver* **Ejercicio 2.4**] El tiempo en segundos que tarda una fuente de polonio en emitir k partículas alfa es una variable aleatoria T_k con función densidad

$$f_{T_k}(t) = \frac{(1/2)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-t/2}\,\mathbf{1}\{t > 0\}.$$

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(T_1 > 3)$ y $\mathbf{P}(T_1 > 5 | T_1 > 2)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(T_3 > 3)$ y $\mathbf{P}(T_3 > 5 | T_3 > 2)$.

2.9 Mostrar que existe una variable aleatoria Z tal que su función de distribución es de la forma

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Usando una tabla (o un software adecuado):

(**a**) calcular los valores de $\Phi(z)$ para $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(**b**) para cada $\alpha \in \{0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.99, 0.995, 0.999\}$ hallar todos los valores $z_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.

(**c**) calcular $\mathbf{P}(-0.43 < Z < 1.32)$, $\mathbf{P}(1.28 < Z < 1.64)$ y $\mathbf{P}(|Z| < 1.64)$.

(**d**) hallar las constantes que satisfacen las siguientes ecuaciones $\mathbf{P}(Z < a) = 0.05$, $\mathbf{P}(Z > b) = 0.1$, $\mathbf{P}(|Z| < c) = 0.95$.

2.10 Sea Z una variable normal estándar y sea $X = Z^2$.

(**a**) Expresar la función de distribución de X usando la función Φ.

(**b**) Hallar la función densidad de X.

(**c**) Calcular $\Gamma(1/2) := \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx$.

2.11 Para estimar el precio (en dólares) del kilo de asado se examinaron los precios en las pizarras de 24 carnicerías elegidas al azar. Se obtuvieron los siguentes resultados:

8.59	8.77	8.29	7.50	9.18	8.53	10.03	8.97	8.47	9.98	9.00	9.44
8.02	10.35	7.15	9.00	9.15	9.11	7.63	9.66	10.20	9.01	8.73	10.54.

(**a**) Graficar la función de distribución empírica basada en esa muestra y estimar, usándola, la probabilidad de que el precio de un kilo de asado supere los 9.5 dólares.

(**b**) Usando los intervalos con extremos 7.1, 7.85, 8.35, 9.65, 10.15, 10.90 hallar la función histograma basada en la muestra observada y estimar, usándola, la probabilidad de que el precio de un kilo de asado supere los 9.5 dólares.

2.12 Sea T la duración en años del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema electrónico cuya función de distribución es $F_T(t) = (1 - e^{-t})\, \mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**a**) Hallar y graficar la función de distribución de $T^* = \text{mín}(T, 1)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(T^* = 1)$.

2.13 Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ estrictamente creciente en el soporte de X. Hallar expresiones para las funciones de distribución de las siguientes variables aleatorias:

(**a**) $T = G(X)$, donde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua estrictamente creciente;

(**b**) $U = F_X(X)$;

(**c**) $V = G^{-1}(F_X(X))$, donde $G : \mathbb{R} \to (0, 1)$ es una función continua estrictamente creciente.

2.14 Se desea generar muestras de una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$. Para ello se dispone de un radioisótopo que emite partículas alfa cada tiempos exponenciales de intensidad 2 por hora. ¿Cómo deben transformarse los tiempos entre emisiones de partículas alfa para generar las muestras deseadas? Generar una muestra de tamaño 3 usando que a partir de las 0:00 el radioisótopo emitió partículas alfa a las 1:45, 1:51, y 2:17.

2.15 Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$. Hallar una función h tal que la variable aleatoria $h(U)$ tenga la función de distribución dada en **Ejercicio 2.2**. Simular una muestra de 10.000 valores de dicha variable aleatoria, graficar la función de distribución empírica y comparar con la original.

2.16 Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de intensidad $1/2$. Hallar una función h tal que la variable aleatoria $h(X)$ tenga la función de distribución de la variable aleatoria T^* definida en el **Ejercicio 2.12**.

2.17 Sea T el tiempo hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \mathbf{1}\{t > 0\},$$

donde $\alpha, \beta > 0$.

(**a**) Hallar la función de distribución y la función densidad de T.

(**b**) Si $\beta < 1$ se dice que el producto tiene *fallas tempranas*, si $\beta = 1$ se dice que tiene *fallas casuales o con falta de memoria*, y si $\beta > 1$ se dice que tiene *fallas por desgaste*. Indicar en cuál de estas tres categorías clasificaría usted a los siguientes productos según su modo de falla

- Producto: un neumático; T: tiempo hasta una pinchadura causada por objetos punzantes en las calles.
- Producto: un neumático; T: tiempo hasta que se desgasta el surco y pierde agarre.
- Producto: un neumático; T: tiempo hasta que revienta como consecuencia de una falla de fábrica.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que el usuario se da cuenta que salió fallada de fábrica.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que falla el sistema de enfriamiento.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que el motor se quema por un brusco cambio de tensión.

(**c**) Comparar e interpretar probabilísticamente los gráficos de las densidades que se obtienen cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0.5, 1, 1.5$.

(**d**) Para cada caso del **Inciso** (**c**), calcular $\mathbf{P}(T > 1)$ y $\mathbf{P}(T > 4|T > 3)$.

2.18 La función de distribución del tiempo T (en días) hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial es

$$F_T(t) = \left(1 - e^{-\sqrt{t/60}}\right) \mathbf{1}\{t > 0\}.$$

El producto tiene una garantía de 30 días. Debido a la gran cantidad de reclamos se decidió someter todos los productos a una prueba de 30 días y descartar los que fallan. Hallar la probabilidad de que un producto no descartado falle antes de los siguientes 30 días.

2.19 El diámetro X (en mm.) de las arandelas fabricadas por una máquina tiene como función de densidad a

$$f_X(x) = \frac{2x}{225}\mathbf{1}\{0 < x < 15\}.$$

Un sistema de control descarta las arandelas cuyo diámetro es inferior a 3 o superior a 12.

(**a**) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas no descartadas.

(**b**) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas descartadas.

2.20 Sea X, la distancia (en decímetros) del punto de impacto al centro de un blanco circular, una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{2}{7}\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x < 2\} + \frac{10-2x}{21}\,\mathbf{1}\{2 \leqslant x < 5\}.$$

(**a**) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto menores que 30 cm.

(**b**) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto mayores que 30 cm.

2.21 Una urna contiene 3 bolas verdes, 2 amarillas y 3 rojas.

(**a**) Se seleccionan 4 bolas al azar (sin reposición). Sean X la cantidad de bolas verdes observadas e Y la cantidad de bolas amarillas observadas. Hallar la función de probabilidad conjunta y las funciones de probabilidad marginales. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total de bolas verdes o amarillas observadas no supere a 2?

(**b**) Repetir el inciso anterior para extracciones con reposición.

2.22 Sea (X,Y) un punto con distribución uniforme sobre el semicírculo $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}$.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(|Y| < X)$.

(**b**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**c**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.23 Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}.$$

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(X+1 > 2Y)$.

(**b**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**c**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.24 Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left(x^2-xy+y^2\right)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(**a**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**b**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.25 Una fábrica textil produce rollos de tela con dos tipos de fallas: de tejido y de teñido. En cada rollo, la cantidad de fallas de tejido tiene distribución Poisson de parámetro 2 y la cantidad de fallas de teñido tiene distribución Poisson de parámetro 4. Ambas cantidades son independientes.

(**a**) Calcular la probabilidad de que un rollo de tela no tenga fallas.

(**b**) Calcular la probabilidad de que un rollo de tela tenga exactamente una falla.

(**c**) Dado que un rollo de tela tiene exactamente una falla, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea una falla de tejido?

2.26 Lucas y Monk quedaron en encontrarse en el bar del CEI a las 18:00. El horario de llegada de Lucas, L, es uniforme entre las 18:00 y las 18:15. Lucas espera 15 min. a Monk y si no llega se va. El horario de llegada de Monk, M, es independiente del de Lucas y se distribuye uniformemente entre las 18:05 y 18:20. Monk es más impaciente que Lucas y espera como máximo 5 min. antes de irse. Calcular la probabilidad de que Lucas y Monk se encuentren.

Ejercicios Complementarios

2.27 [*Maronna, pág. 56 y 57*] Para la variable aleatoria X con función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ dada en el **Ejercicio 2.2** hacer lo siguiente:

(**a**) Para cada $\alpha \in \{1/5, 1/3, 3/5, 2/3\}$ hallar todos los valores $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{P}(X < x_\alpha) \leqslant \alpha \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P}(X \leqslant x_\alpha) \geqslant \alpha.$$

(**b**) Para cada $\alpha \in (0, 1)$ hallar todos los valores $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$F(x_\alpha) = \alpha.$$

(**c**) Calcular el primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil.

2.28 Sea X una variable aleatoria con la función de distribución del **Ejercicio 2.2**. Hallar las expresiones de las funciones de distribución de

$$X^+ = \text{máx}(0, X), \qquad X^- = -\text{mín}(0, X), \qquad |X| = X^+ + X^-, \qquad -X,$$

en términos de la función de distribución de X.

2.29 La demanda de aceite pesado en cientos de litros durante una temporada tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{3}(4x + 1)\, \mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

(**a**) Hallar la función de distribución de X.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}\left(\frac{1}{3} < X \leqslant \frac{2}{3}\right)$ y $\mathbf{P}\left(\frac{1}{3} < X \leqslant \frac{2}{3} | X < \frac{1}{2}\right)$.

(**c**) Hallar el valor de k tal que $\mathbf{P}(X \leqslant k) = 0.04$.

(**d**) Simular 1000 valores de la variable aleatoria X. Graficar la función de distribución empírica y construir un histograma.

2.30 [*ver* **Ejercicio 2.17**] Sea T la duración en horas del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema con función intensidad de fallas $\lambda(t)$. Calcular $\mathbf{P}(T > 4)$ y $\mathbf{P}(T > 12 | T > 8)$, cuando $\lambda(t)$ está descrita por

(**a**) $\lambda(t) = \frac{1}{8}\, \mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**b**) $\lambda(t) = \frac{t}{8}\, \mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**c**) En cada caso, determinar si hay *pérdida de memoria*.

2.31 [*ver* **Ejercicio 2.17**] Sea $t_0 > 0$. Mostrar que si $\lambda(t)$ es la función de intensidad de fallas de la variable aleatoria positiva T, la variable aleatoria $\tilde{T} = (T|T > t_0) - t_0$ tendrá una función de intensidad de fallas $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t + t_0)$, para $t > 0$.

2.32 Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$. Una vara de longitud 1 se quiebra en dos puntos cuyas distancias a una de sus puntas son X e Y. Calcular la probabilidad que las tres piezas puedan usarse para construir un triángulo.

2.33 Para ir todos los días al trabajo, Dana se dirige en auto hasta la estación de tren y luego sigue su camino en tren. Dana sale de su casa en un intervalo distribuido uniformemente entre las 7:30 y las 7:50. El tiempo de viaje hasta la estación es también uniforme entre 20 y 40 minutos. Hay un tren que sale a las 8:12 y otro que sale a las 8:26.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que Dana pierda ambos trenes?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 8 minutos en la estación hasta que sale el tren?

(**c**) Si se sabe que salió de su casa después de las 7:38 y que no llegó a tomar el tren de las 8:12, ¿cuál es la probabilidad de que haya llegado al otro tren?

(**d**) Si se sabe que salió de su casa después de las 7:38 y que logró tomar el tren de las 8:26, hallar y graficar la función densidad del tiempo de viaje hasta la estación.

2.34 [*ver* **Ejercicio 1.19**] Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con distribución Bernoulli. Para $i = 1, 2$ sea $A_i = \{X_i = 1\}$. Mostrar que si los eventos A_1 y A_2 son independientes, entonces la variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes.

2.35 Se arrojan dos dados piramidales equilibrados con los números $1, 2, 3, 4$ en sus caras. Sea X el mayor de los resultados observados e Y la suma. Hallar la distribución conjunta de X e Y y sus distribuciones marginales. ¿X e Y son independientes?

2.36 Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = kx(x - y)\,\mathbf{1}\{0 < x < 2, |y| < x\}.$$

(**a**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**b**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.37 En una urna hay 3 bolas de distinto color. El experimento aleatorio consiste en lo siguiente: se extrae una bola, se registra el color observado y se repone la bola en la urna. Se realizan 3 experimentos. Sean X_i, $i = 1, 2, 3$ las variables aleatorias definidas por

$$X_i = \mathbf{1}\{\text{ si el color } i \text{ está en la muestra observada}\}.$$

(**a**) Hallar la función de probabilidad conjunta de las variables X_1 y X_2 y las funciones de probabilidad marginales.

(**b**) ¿X_1 y X_2 son independientes?

(**c**) ¿Cuál es el significado de la variable $N = X_1 + X_2 + X_3$?

(**d**) Hallar la función de probabilidad conjunta de las variables X_1 y N.

(**e**) ¿X_1 y N son independientes?

2.38 Sea $U = 0.X_1X_2X_3\dots$ el desarrollo decimal de un número al azar sobre el intervalo $(0, 1]$.

(**a**) Para cada $i = 1, 2, \dots,$ hallar la distribución del i-ésimo dígito de U.

(**b**) Mostrar que los dígitos de U son independientes entre sí.

2.39 Se realiza repetidas veces un experimento, en forma independiente una de la otra. Cada vez que se realiza cierto evento B puede suceder, con probabilidad p, o no, con probabilidad $1 - p$. Notaremos B_n al evento "sucedió B en la n-ésima realización del experimento".

Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de realizaciones del experimento hasta que por primera vez B sucede en dos realizaciones consecutivas".

(**a**) Mostrar que $\mathbf{P}(N = 1) = 0, \mathbf{P}(N = 2) = p^2, \mathbf{P}(N = 3) = (1 - p)p^2$.

(**b**) Sean los eventos $A_1 = \bar{B}_1$, $A_2 = B_1 \cap \bar{B}_2$, $A_3 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$. Mostrar que forman una partición, y por aplicación del teorema de probabilidades totales deducir que:

$$\mathbf{P}(N = n + 2) = \mathbf{P}(N = n + 1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}(A_2) \text{ para } n \geqslant 1$$

y que $\mathbf{P}(N = 2|A_3) = 1$.

(**c**) Notando $p_n = \mathbf{P}(N = n), n \geqslant 1$ tenemos entonces: $p_1 = 0$, $p_2 = p^2$, $p_{n+2} = (1 - p)p_{n+1} + (1 - p)pp_n, n \geqslant 1$. Resolviendo la ecuación en diferencias, hallar la expresión general de p_n.

2.40 Se arroja repetidas veces una moneda equilibrada. Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de tiradas hasta que por primera se obtiene cara en dos tiradas consecutivas". Hallar la función de probabilidad de N. ¿Cuál es la relación de estas probabilidades con los números de Fibonacci?
