PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Evaluación Parcial — Segundo cuatrimestre – 2018

Duración: 4 horas. — 3/11/18 – 9:00 hs.

Curso:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Se tiene una moneda cargada con probabilidad 3/5 de salir cara. El experimento consiste en arrojar la moneda hasta obtener por primera vez dos caras consecutivas. Si en los primeros dos tiros no se observaron caras, calcular la probabilidad de que tengan que realizarse más de 5 tiros para que finalice el experimento.

Solución:

Definimos los siguientes eventos:

A: "Se necesitan más de 5 tiros hasta obtener dos caras consecutivas"
B: "No sale cara en los dos primeros tiros de la moneda"
C_i: "Sale cara en el tiro i"

El enunciado nos da como dato que $\mathbf{P}(C_i) = \frac{3}{5}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Se pide calcular $\mathbf{P}(A|B)$. Entonces:

$$\mathbf{P}(A|B) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}|B) = 1 - \frac{\mathbf{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

$$\mathbf{P}(B) = P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = P(\bar{C}_1)\mathbf{P}(\bar{C}_2) = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

Ya que los eventos C_1 y C_2 son independientes

$\bar{A} \cap B$: "Se necesitan 5 tiros o menos para terminar el experimento y no salen caras en los dos primeros tiros".

Entonces:

$$\mathbf{P}(\bar{A} \cap B) = P(\{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3 \cap C_4\} \cup \{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 \cap C_4 \cap C_5\}) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Finalmente:

$$\mathbf{P}(A|B) = 1 - \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2 \right) = 0.496$$

---

2. Juana y Pedro salieron a tomar cerveza. Sean X e Y las cantidades de litros de cerveza que tomaron Juana y Pedro respectivamente. La densidad conjunta de X e Y es:

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \mathbf{1}\{0 < x < y < 1\}$$

Calcular la probabilidad de que entre ambos hayan tomado más de 1 litro de cerveza y Pedro haya tomado menos de 0.75 litros.

Solución:

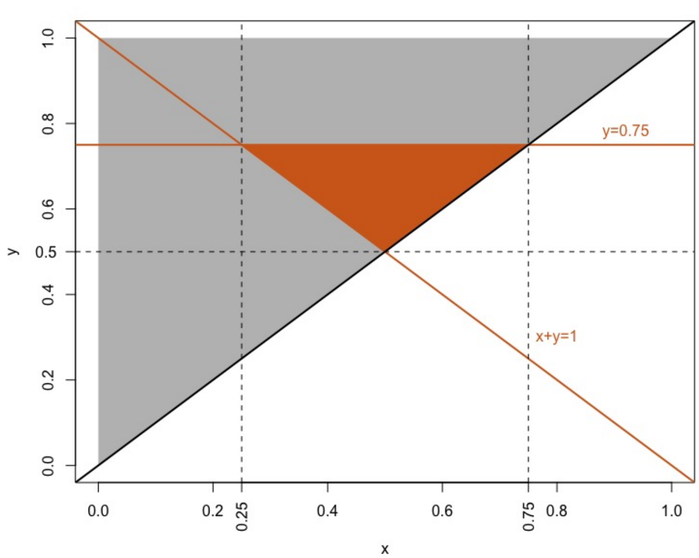
Definimos las variables:
X: "Litros de cerveza que toma Juana"
Y: "Litros de cerveza que toma Pedro"

Donde:

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \mathbf{1}\{0 < x < y < 1\}$$

Debemos calcular $\mathbf{P}(X + Y > 1, Y < 0.75)$

Graficando el soporte de la densidad conjunta, sombreamos (en naranja) la región correspondiente a la probabilidad pedida:



Como la densidad es uniforme en el soporte, podemos calcular la probabilidad pedida calculando el area sombreada y multiplicando por la función de densidad conjunta:

$$\mathbf{P}(X+Y>1, Y<0.75) = 2 \cdot \frac{0.5 \cdot 0.25}{2} = \frac{1}{8}$$

---

3. La cantidad de partículas alfa emitidas (por segundo) por una fuente radiactiva es una variable aleatoria con distribución de Poisson de media 2. Calcular la esperanza de la cantidad de partículas alfa emitidas en un segundo, si se sabe que se emitieron más de 2.

Solución:

Definimos la variable X como: "Cantidad de partículas alfa emitidas en un segundo"

Entonces el ejercicio pide calcular: $\mathbf{E}[X|X>2]$

Podemos escribir a la esperanza de X como:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X|X>2]\mathbf{P}(X>2) + \mathbf{E}[X|X\leq 2]\mathbf{P}(X\leq 2)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X|X\leq 2]\mathbf{P}(X\leq 2) &= \mathbf{E}[X \cdot \mathbf{1}\{X\leq 2\}] \\ &= 0\cdot\mathbf{P}(X=0) + 1\cdot\mathbf{P}(X=1) + 2\cdot\mathbf{P}(X=2) \\ &= 2e^{-2} + 2\cdot\frac{2^2}{2!}e^{-2} = 6e^{-2}\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{P}(X>2) = 1-\mathbf{P}(X\leq 2) = 1-(e^{-2}+2e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}) = 1-5e^{-2}$$

Según el enunciado, $\mathbf{E}[X]=2$, por lo tanto despejando resulta:

$$\mathbf{E}[X|X>2] = \frac{2-6e^{-2}}{1-5e^{-2}} = 3.6743$$

---

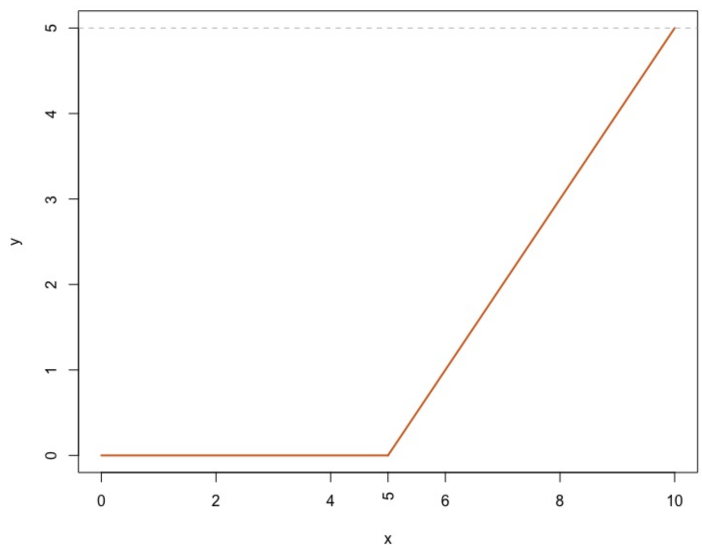
4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \left(\frac{10-x}{50}\right)\cdot\mathbf{1}\{0\leq x\leq 10\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $Y=(X-5)\mathbf{1}\{X>5\}$.

Solución:

Sea $Y = (X-5)\mathbf{1}\{X > 5\}$, queremos hallar $F_Y(y)$ y graficarla. En primer lugar graficamos la función de cambio de variable:

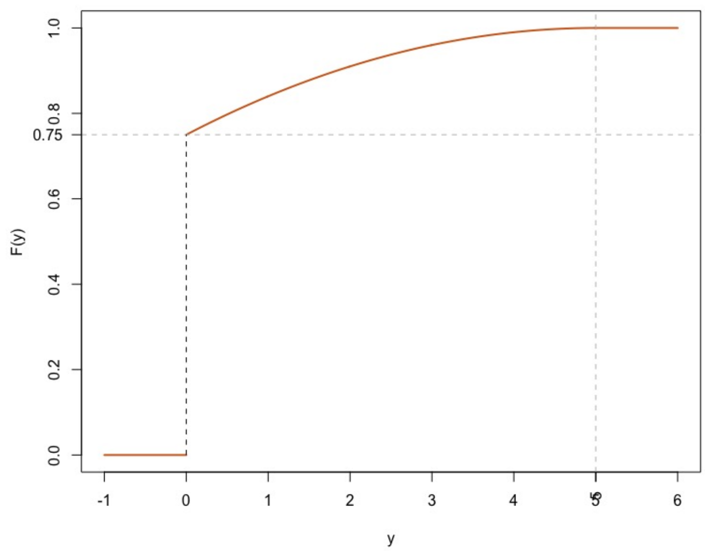


A partir del gráfico observamos que el soporte de la variable aleatoria Y es el intervalo $(0,5)$, y que la variable aleatoria Y es mixta. Hallamos la función de distribución:

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \{y < 0\} \\ \mathbf{P}(X - 5 \leq y) & \text{si} \quad \{0 \leq y < 5\} \\ 1 & \text{si} \quad \{5 \leq y\} \end{cases}$$

Si $0 \leq y < 5$, entonces $\mathbf{P}(X-5 \leq y) = \mathbf{P}(X \leq y+5) = F_X(y+5)$. Por lo tanto, la función pedida resulta:

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \{y < 0\} \\ 1 - \frac{(5-y)^2}{100} & \text{si} \quad \{0 \leq y < 5\} \\ 1 & \text{si} \quad \{5 \leq y\} \end{cases}$$



---

5. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de media 1 y sea Y una variable aleatoria tal que $Y|X = x$ tiene distribución uniforme en $(0, x)$. Hallar la covarianza entre $X + Y$ y $X - Y$.

Solución:

Según el enunciado, $X \sim \mathcal{E}(1)$ e $Y|X = x \sim \mathcal{U}(0, x)$.

Se pide hallar $\mathbf{cov}(X + Y, X - Y)$

Utilizando las propiedades de la covarianza se tiene que:

$$\mathbf{cov}(X+Y, X-Y) = \mathbf{cov}(X, X) - \mathbf{cov}(X, Y) + \mathbf{cov}(Y, X) - \mathbf{cov}(Y, Y) = \mathbf{var}(X) - \mathbf{var}(Y)$$

Como X tiene distribución exponencial de parámetro 1, entonces $\mathbf{var}(X) = 1$.

Para hallar la varianza de Y usamos el teorema de Pitágoras:

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{E}[\mathbf{var}(Y|X)] + \mathbf{var}(\mathbf{E}[Y|X])$$

Sabemos que $Y|X = x \sim \mathcal{U}(0, x)$, por lo tanto, $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x] = \frac{x}{2}$ y $\psi(x) = \mathbf{var}[Y|X = x] = \frac{x^2}{12}$

Podemos decir, por definición de esperanza condidional, que:

$$\mathbf{E}[Y|X] = \varphi(X) = \tfrac{X}{2}$$
$$\mathbf{var}[Y|X] = \psi(X) = \tfrac{X^2}{12}$$

Reemplazando:

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{E}\left[\frac{X^2}{12}\right] + \mathbf{var}\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{2}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto la covarianza pedida vale:

$$\mathbf{cov}(X+Y, X-Y) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Evaluación Parcial	Segundo cuatrimestre – 2018
Duración: 4 horas.	3/11/18 – 9:00 hs.

Curso:

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Se tiene una moneda cargada con probabilidad 3/5 de salir cara. El experimento consiste en arrojar la moneda hasta obtener por primera vez dos caras consecutivas. Si en los primeros dos tiros no se observaron caras, calcular la probabilidad de que tengan que realizarse más de 5 tiros para que finalice el experimento.

Solución:

Definimos los siguientes eventos:

A: "Se necesitan más de 5 tiros hasta obtener dos caras consecutivas"
B: "No sale cara en los dos primeros tiros de la moneda"
C_i: "Sale cara en el tiro i"

El enunciado nos da como dato que $\mathbf{P}(C_i) = \frac{3}{5}$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Se pide calcular $\mathbf{P}(A|B)$. Entonces:

$$\mathbf{P}(A|B) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}|B) = 1 - \frac{\mathbf{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

$$\mathbf{P}(B) = P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = P(\bar{C}_1)\mathbf{P}(\bar{C}_2) = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

Ya que los eventos C_1 y C_2 son independientes

$\bar{A} \cap B$: "Se necesitan 5 tiros o menos para terminar el experimento y no salen caras en los dos primeros tiros".

Entonces:

$$\mathbf{P}(\bar{A} \cap B) = P(\{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3 \cap C_4\} \cup \{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 \cap C_4 \cap C_5\}) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Finalmente:

$$\mathbf{P}(A|B) = 1 - \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3 \right) = 0.496$$

---

2. Juana y Pedro salieron a tomar cerveza. Sean X e Y las cantidades de litros de cerveza que tomaron Juana y Pedro respectivamente. La densidad conjunta de X e Y es:

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \mathbf{1}\{0 < x < y < 1\}$$

Calcular la probabilidad de que entre ambos hayan tomado más de 1 litro de cerveza y Pedro haya tomado menos de 0.75 litros.

Solución:

Definimos las variables:

X: "Litros de cerveza que toma Juana"

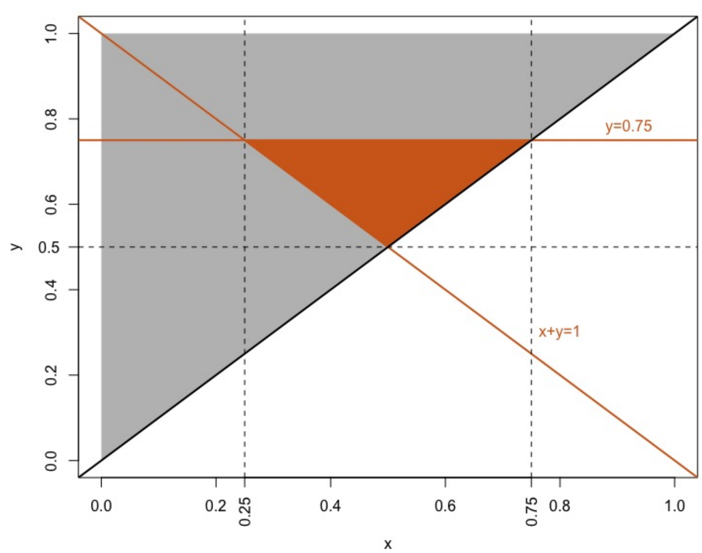
Y: "Litros de cerveza que toma Pedro"

Donde:

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \mathbf{1}\{0 < x < y < 1\}$$

Debemos calcular $\mathbf{P}(X + Y > 1, Y < 0.75)$

Graficando el soporte de la densidad conjunta, sombreamos (en naranja) la región correspondiente a la probabilidad pedida:



Como la densidad es uniforme en el soporte, podemos calcular la probabilidad pedida calculando el area sombreada y multiplicando por la función de densidad conjunta:

$$\mathbf{P}(X+Y>1, Y<0.75) = 2 \cdot \frac{0.5 \cdot 0.25}{2} = \frac{1}{8}$$

---

3. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de media 1 y sea Y una variable aleatoria tal que $Y|X=x$ tiene distribución uniforme en $(0,x)$. Hallar la covarianza entre $X+Y$ y $X-Y$.

Solución:

Según el enunciado, $X \sim \mathcal{E}(1)$ e $Y|X=x \sim \mathcal{U}(0,x)$.

Se pide hallar $\mathbf{cov}(X+Y, X-Y)$

Utilizando las propiedades de la covarianza se tiene que:

$$\mathbf{cov}(X+Y, X-Y) = \mathbf{cov}(X,X) - \mathbf{cov}(X,Y) + \mathbf{cov}(Y,X) - \mathbf{cov}(Y,Y) = \mathbf{var}(X) - \mathbf{var}(Y)$$

Como X tiene distribución exponencial de parámetro 1, entonces $\mathbf{var}(X) = 1$.

Para hallar la varianza de Y usamos el teorema de Pitágoras:

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{E}[\mathbf{var}(Y|X)] + \mathbf{var}(\mathbf{E}[Y|X])$$

Sabemos que $Y|X=x \sim \mathcal{U}(0,x)$, por lo tanto, $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X=x] = \frac{x}{2}$ y $\psi(x) = \mathbf{var}[Y|X=x] = \frac{x^2}{12}$

Podemos decir, por definición de esperanza condidional, que:

$$\mathbf{E}[Y|X] = \varphi(X) = \tfrac{X}{2}$$
$$\mathbf{var}[Y|X] = \psi(X) = \tfrac{X^2}{12}$$

Reemplazando:

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{E}\left[\frac{X^2}{12}\right] + \mathbf{var}\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{2}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto la covarianza pedida vale:

$$\mathbf{cov}(X+Y, X-Y) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

---

4. Los colectivos de la línea 8104 llegan a la parada de Paseo Colón 850 de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 12 por hora. Kira llega a la parada a las 8:00 y se sube al tercer colectivo que llega a la parada después de las 8:00. Si Kira subió al colectivo a las 8:30, calcular la probabilidad de que entre las 8:00 y las 8:10 haya llegado exactamente 1 colectivo.

Solución:

Los colectivos llegan a la parada según un proceso de poisson de intensidad 12 por hora. Kira llega a la parada a las 8:00, por lo tanto definimos las siguientes variables aleatorias:

N(t): "Cantidad de colectivos que llegan entre las 8:00 y las 8:00 + t minutos "
T: "Tiempo (en minutos) hasta que llega el tercer colectivo después de las 8:00"

Por lo tanto, $N(t) \sim Poi(\frac{12}{60}t)$ y $T \sim \Gamma(3, \frac{12}{60})$

Se pide calcular $\mathbf{P}(N(10) = 1|T = 30) = \mathbf{P}(N(10) = 1|N(30) = 2)$

Esto se debe a que decir que 8:30 llegó el tercer colectivo es equivalente a decir que en el intervalo (8:00,8:30) llegaron *exactamente* 2 colectivos.

Tenemos dos formas de resolver este ejercicio:

1. Desarrollando la probabilidad condicional:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N(10) = 1|N(30) = 2) &= \frac{\mathbf{P}(N(10) = 1, N(30) = 2)}{\mathbf{P}(N(30) = 2)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(N(10) = 1, N(10; 30) = 1)}{\mathbf{P}(N(30) = 2)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(N(10) = 1)\mathbf{P}(N(10; 30) = 1)}{\mathbf{P}(N(30) = 2)} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

2. Si definimos $Y = N(10)|N(30) = 2$, entonces $Y \sim \mathcal{B}(2, 1/3)$ y por lo tanto:

$$\mathbf{P}(N(10) = 1|N(30) = 2) = \mathbf{P}(Y = 1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

---

5. El peso (en kg.) de la trucha arcoiris es una variable aleatoria con distribución uniforme entre 1 y 5. En una campaña de pesca en el *Lago Hermoso*, las truchas que pesan menos de 3 kg son devueltas al lago y las que no, se conservan. Si al finalizar la campaña se conservaron 50 truchas, calcular (aproximadamente) la probabilidad de que el peso total de las truchas conservadas sea mayor que 202.8 kg.

Solución:

Definimos las variables aleatorias:

$$X_i\text{: “Peso de la trucha i”, } X_i \sim \mathcal{U}(1,5)\ ,\ i = 1,2,3,\dots$$
$$\text{T: “Peso total de las truchas conservadas”}$$

Las truchas arcoiris que pesan menos de 3 kilos son devueltas al lago, por lo tanto las 50 truchas que se conservaron pesaban más de 3 kg. Por esta razón resulta:

$$T = \sum_{i=1}^{50} X_i | X_i > 3$$

Donde $X_i | X_i > 3 \sim \mathcal{U}(3,5), i = 1, 2 \dots, 50$

Se pide calcular $\mathbf{P}(T > 202.8)$

Como T es una suma de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas, con esperanza y varianza finita, entonces por el Teorema Central del Límite podemos decir que:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{50}(X_i|X_i > 3) - 50 \cdot \mathbf{E}[X_1|X_1 > 3]}{\sqrt{50 \cdot \mathbf{var}(X_1|X_1 > 3)}} < z\right) \simeq \phi(z)$$

Con $\mathbf{E}[X_1|X_1 > 3] = 4$ y $\mathbf{var}(X_1|X_1 > 3) = 1/3$

Entonces:

$$\mathbf{P}(T > 202.8) = \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{50}(X_i|X_i > 3) - 50 \cdot 4}{\sqrt{50/3}} > \frac{202.8 - 50 \cdot 4}{\sqrt{50/3}}\right) \simeq 1-\phi(0.6858) = 0.2464$$