PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

1 PARCIAL : SABADO 2/11 DE 9 A 13 - 8 GUIAS

MARATONES - VIERNES DE 11 A 21 hs

EXPERIMENTO ALEATORIO: CUANDO NO SE CONOCE 'A PRIORI' EL RESULTADO, YA SEA POR INCERTIDUMBRE O PORQUE INTERVIENE EL AZAR.

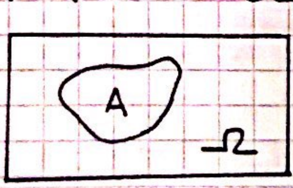
ESPACIO MUESTRAL (Ω): AL CONJUNTO DE TODOS LOS RESULTADOS POSIBLES DEL E.A.

EJEMPLOS DE E. ALEATORIOS:

- ARROJAR UN DADO $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ARROJAR UN DADO HASTA EL 1 AS, QUIERO CONTAR LA CANTIDAD DE LANZAMIENTOS REALIZADOS $\Omega = \{\mathbb{N}\}$
- ELEGIR AL AZAR UN NUMERO REAL X ENTRE 0 Y 1
  $\Omega = [0, 1]$
- TIRAR UNA MONEDA DOS VECES $\left(\begin{array}{l} \text{CARA} \rightarrow 1 \\ \text{SECA} \rightarrow 0 \end{array}\right)$
  $\Omega = \{(11)(10)(01)(00)\}$

ENTONCES Ω : FINITO, INFINITO NUMERABLE } DISCRETO
INFINITO NO NUMERABLE } CONTINUO

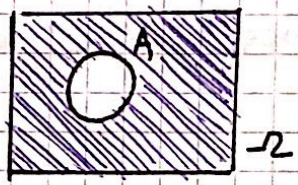
SI $A \subseteq \Omega$ SE LLAMA EVENTO O SUCESO



NOTA

- $A = \{w\}$ EVENTO ELEMENTAL
- $A = \Omega$ EVENTO CIERTO
- $A^c = \bar{A} = A'$ COMPLEMENTO DE A

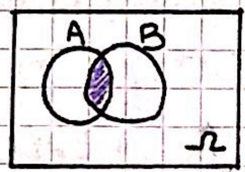
  $\bar{A} = \{w \in \Omega \,/\, w \notin A\}$



$A, B \subset \Omega$

- $A \cap B = \{w \in \Omega \,/\, w \in A,\ w \in B\}$

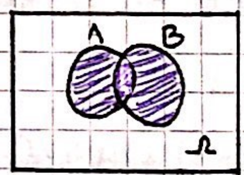
"OCURRIO A y B", OCURRIERON SIMULTANEAMENTE.



- $A \cup B = \{w \in \Omega \,/\, w \in A$ ó $w \in B\}$

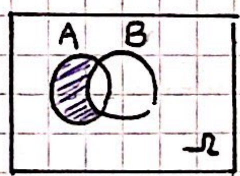
"OCURRE A ó B"

SALE AL MENOS UNO DE LOS DOS



- $A \setminus B = A - B = A \cap B^c$

  $= \{w \,/\, w \in A,\ w \notin B\}$



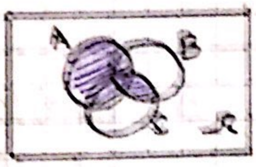
- Si $A \cap B = \emptyset$, A y B SE DICEN DISJUNTOS ó MUTUAMENTE EXCLUYENTES

PROPIEDADES

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\left.\begin{array}{l} (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \end{array}\right\}$ LEYES DE DE MORGAN



MODELO PROBABILISTICO $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$\mathcal{a}$ UNA COLECCIÓN DE EVENTOS DE Ω, SE LLAMA UN ALGEBRA DE SUBCONJUNTOS SII:

(1) $\Omega \in \mathcal{a}$ $\quad (\mathcal{a} \neq \emptyset)$

(2) SI $A \in \mathcal{a}$, $B \in \mathcal{a} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{a}$

(3) SI $A \in \mathcal{a} \rightarrow A^c \in \mathcal{a}$

EJ -

$\mathcal{a} = \{\Omega; \emptyset\}$; $\quad \mathcal{a} = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$

CARDINAL = CANTIDAD DE ELEMENTOS

ALGEBRA GENERADA POR A

$\mathcal{a} = \mathcal{P}(\Omega)$ 'PARTES DE Ω'

$\mathcal{P}(\Omega) = \{A / A \subseteq \Omega\}$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset; \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_3\}, \{w_1 w_2\}, \{w_1 w_3\}, \dots\}$

$\mathcal{P}$ = PARTES DE Ω

COROLARIO:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(2) $A, B \in \mathcal{A} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

UNA FUNCIÓN $\mathbb{P}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ SE DICE QUE ES UNA MEDIDA DE PROBABILIDAD SII:

(1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(3) SI $A, B \in \mathcal{A}$; $A \cap B = \emptyset$

ENTONCES $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

(IDEA DE QUE $\mathbb{P}$ ES UN PESO O UNA PROPOSICION)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ EN $\mathcal{A}$ UN ALGEBRA DE SUBCONJUNTO DE Ω y $\mathbb{P}$ UNA MEDIDA DE PROBABILIDAD QUE SATISFACE (1) (2) (3) SE LLAMA UN ESPACIO DE PROBABILIDAD ELEMENTAL

EJEMPLOS DE MODELOS PROBABILISTICOS.

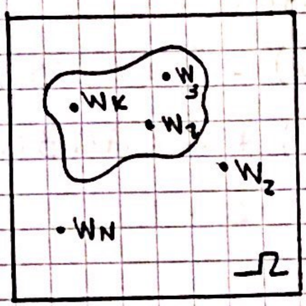
(1)

Ω FINITO, $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{w_1\}, \{w_2\} \dots \{w_N\}; \{w_1, w_2\} \dots\}$

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

$A \to \mathbb{P}(A)$



BASTA CON DEFINIR

$\mathbb{P}(\{w_1\}) = p_1$

$\mathbb{P}(\{w_2\}) = p_2$

$\vdots$

$\mathbb{P}(\{w_N\}) = p_N$

$\sum^{N} p_i = 1$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum \mathbb{P}(\{w_j\}) = \sum p_j}$$

CASO PARTICULAR: EQUIPROBABILIDAD → MISMA PROBABILIDAD PARA TODOS

$p_j = \frac{1}{N} = \frac{1}{\#\Omega}$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

FORMULA DE LAPLACE

$\dfrac{\text{"CASOS FAVORABLES"}}{\text{"CASOS POSIBLES"}}$

EJ - E.A = TIRO UN DADO EQUILIBRADO

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A = 'SOLO DIVISIBLES POR 5' $= \{1, 5\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

NOTA

PROPIEDADES DE $\mathbb{P}$

(1) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

DEMOSTRACIÓN: $\Omega = A \cup A^c$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c)$$

$$1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

(2) $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$

(3) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(4) $A \subset B \rightarrow \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$

EJEMPLO

E: A "TIRO UNA MONEDA JUSTO 2 VECES"

A = 'NO SALE CARA'

B = 'SALIO EXACTAMENTE 1 CARA'

C = 'SALIO AL MENOS 1 CARA'

D = 'SALIO EXACTAMENTE 2 CARAS'

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{0,0\}) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{(1\,0)(0\,1)\}) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{(1\,0)(0\,1)(1\,1)\}) = \frac{3}{4}$

$\mathbb{P}(D) = (\{(1,1)\}) = \frac{1}{4}$

NOTA

EJEMPLO

E.A "TIRO UNA MONEDA N VECES"

CALCULAR LAS MISMAS $\mathbb{P}$.

$\Omega = \{ (x_1 \cdots x_N) / x_i \in (0,1) \}$ $\# \Omega = 2^N$

$A = \{ (0, \cdots, 0) \} = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2^N}$

$B = \{ (1,0 \ldots 0)(0 1 \ldots 0)(0 0 \ldots 1) \} = \mathbb{P}(B) = \frac{N}{2^N}$

BASE CANONICA $\mathbb{R}^N$

$C = \mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2^N} = \frac{2^N - 1}{2^N}$

$D = \{ (x_1 \ldots x_N) / \sum_{i=1}^{N} x_i = 2 \}$

$\# D = (N-1) + (N-2) + (N-3) \ldots + 2 + 1 = \sum \frac{N(N+1)}{2}$

$\mathbb{P}(D) = \frac{N(N+1)}{2^{N+1}}$

E = 'SALIERON ALMENOS 3 CARAS'

$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup D) = 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D))$

$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{1}{2^N} - \frac{N}{2^N} - \frac{N(N-1)}{2^{N+1}}$

SERIE GEOMETRICA

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i , \quad \gamma > 0$$

$$= \gamma^1 + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \ldots$$

$$S_N = \sum_{i=0}^{N} \gamma^i = 1 + \gamma + \ldots + \gamma^N$$

$$S = \lim_{N \to \infty} = S_N = \lim_{N \to \infty} 1 + \gamma + \ldots + \gamma^N = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - \gamma^{N+1}}{1 - \gamma}$$

LUEGO, $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i = \frac{1}{1-\gamma}$ si $0 < \gamma < 1$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i = \frac{1}{1-\gamma} - 1 = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ $\quad \gamma =$ RAZÓN $\to \gamma = R$

NOTA

HOJA N° 5

FECHA

(2)

E.A: EXTRAIGO UN N° REAL 'AL AZAR' ENTRE EL 0 Y 1

$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} \text{TODOS LOS } A \subseteq \Omega \text{ A LOS QUE SE} \\ \text{LES PUEDE CALCULAR LA LONGITUD} \end{array} \right\}$

$\mathbb{P}(A) = \text{LONG}(A)$

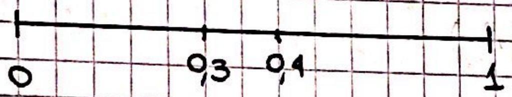
VER QUE $\mathbb{P}$ ES UNA MEDIDA DE PROBABILIDAD.

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = \text{LONG}(\Omega) = \text{LONG}([0,1]) = 1$

(2) $0 \leq \text{LONG}(A) \leq 1$

(3) $A \cap B = \emptyset \rightarrow \text{LONG}(A \cup B) = \text{LONG}(A) + \text{LONG}(B)$

A = 'EL 1^{ER} DIGITO DE X ES 3'



$A = [0,3 \,;\, 0,4]$

$\mathbb{P}(A) = \text{LONG}(A) = 0,1$

$B = \{0,5\}$ $\mathbb{P}(B) = 0$

$C = \{0\}$ $\mathbb{P}(C) = 0$

(3)

E.A = 'TIRO UNA MONEDA JUSTA HASTA LA 1° CARA. CONTAR LA CANTIDAD DE LANZAMIENTOS REALIZADOS'

$\Omega = \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$ $\quad \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4}$ $\quad \mathbb{P}(\{N\}) = \frac{1}{2^N}$

VER QUE $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} N\right) = \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(N) = \sum_{N=1}^{\infty} (1/2)^N = 1$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{N \in A} \mathbb{P}(N)$

NOTA

A = 'EL RESULTADO ES UN N° PAR'

$\Omega = \{1, 2, 3 \dots\}$ $\quad A = \{2, 4, 6, 8 \dots\} = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{P}(A) = \sum \mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) + \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(2k) = \sum \frac{1}{2^{2k}} = \sum \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}$$

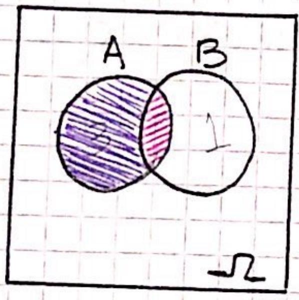
PROBABILIDAD CONDICIONAL

SEA $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ UN ESPACIO DE PROBABILIDAD

SEA $A \in \mathcal{A} / \mathbb{P}(A) > 0$ SE DEFINE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE QUE OCURRIO EL EVENTO A, A LA FUNCIÓN.

$\mathbb{P}(\ /A) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ TAL QUE

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$



E.A = 'TIRO UN DADO EQUILIBRADO'

$\Omega = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$

A = 'EL RESULTADO ES PAR'

B = 'SALIO 4'

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{4\})}{1/2} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

VER QUE ES UNA MEDIDA DE PROBABILIDAD

(1) $P(\Omega | A) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$

(2) $0 \le \mathbb{P}(\Omega | A) \le 1 \qquad A \cap B \subseteq A \to \mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(A)$

(3) $\mathbb{P}((B \cup C) | A) = \frac{\mathbb{P}((B \cup C) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$

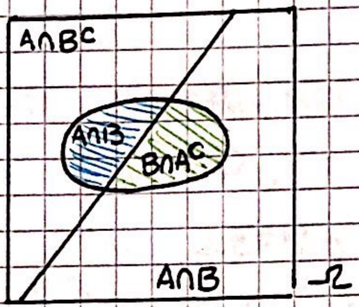
$= \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A)$

REGLA DEL PRODUCTO

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$

LUEGO, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A/B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$



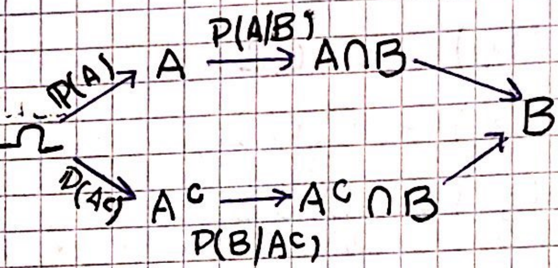


DIAGRAMA DE ARBOL:

$B = (B \cap A) \dot{\cup} (B \cap A^c)$

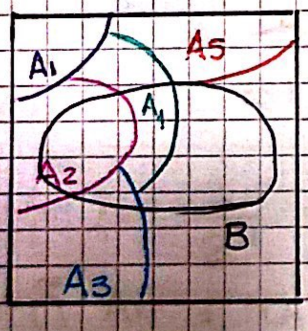
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)$

PROBABILIDAD TOTAL

$\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} A_i$ $\quad (\{A_i\} = \text{PARTICIÓN DE } \Omega)$

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_N)$



$$B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} (B \cap A_i)$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(B/A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

NOTA

EJEMPLO

PRODUCCIÓN DE UN PRODUCTO

M_1	M_2	M_3
30%	45%	25%
2%	3%	2%

D = 'EL PRODUCTO RESULTO DEFECTUOSO'

$\mathbb{P}(D/M_1) = 0{,}02$

$\mathbb{P}(D/M_2) = 0{,}03$

$\mathbb{P}(D/M_3) = 0{,}02$

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D/M_1) \cdot \overbrace{\mathbb{P}(M_1)}^{0{,}3} + \mathbb{P}(D/M_2) \cdot \overbrace{\mathbb{P}(M_2)}^{0{,}45} + \mathbb{P}(D/M_3) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(M_3)}_{0{,}25}$$

$\mathbb{P}(D) = 0{,}0245$

SABIENDO QUE EL PRODUCTO ES DEFECTUOSO, CUAL ES LA PROBABILIDAD DE HABER PRODUCIDO POR M_2?

$$\mathbb{P}(M_2/D) = \frac{\mathbb{P}(D/M_2) \cdot \mathbb{P}(M_2)}{\mathbb{P}(D)} = 0{,}55$$

Nico

$4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 4!$

NOTA

Escaneado con CamScanner

EN GENERAL

$$\boxed{\mathbb{P}(A_j / B) = \frac{\mathbb{P}(B / A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1} \mathbb{P}(B / A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}}$$

TEOREMA DE BAYES

LEMA DE CONTINUIDAD

SEA $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ UN ESPACIO DE PROBABILIDAD ELEMENTAL. SEAN $\{A_N\}; N \geq 1$, UNA SUCESIÓN DE ELEMENTOS DE $\mathcal{A}$, ENCAJADOS ASÍ:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots \supset A_{N-1} \supset A_N \cdots$$

$$A = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} A_N\right) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(A_N)$$

EJEMPLO (TIPO 1.7)

E.A = 'TIRO UNA MONEDA JUSTO HASTA LA PRIMERA CARA'

X = # LANZAMIENTOS RECHAZADOS

$\Omega = \mathbb{N}$ EVENTO: $\{X = N\}$ = 'LA 1° CARA APARECIO EN EL LANZAMIENTO N'

$\underbrace{\{X > N\}}_{A_N}$ = 'LA CARA NO EN LOS N PRIMEROS LANZAMIENTOS'

$$\mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{2^N} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \qquad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots \supset A_N$$

$A = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$ = 'LA CARA NO SALE NUNCA'

NOTA

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 0$$

COROLARIO: Si $\{B_N\}: N \geq 1$, ES UNA SUCESIÓN DE EVENTOS DE $\mathcal{A}$, TAL QUE:

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots \subset B_N \ldots \quad B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_N)$$

COROLARIO: Si $\{A_N\}$, $N \geq 1$ ES UNA SUCESION DE ELEMENTOS DE $\mathcal{A}$ DISJUNTOS 2 A 2 $(A_i \cap A_j \neq \emptyset)$ TAL QUE $\overset{D}{\bigcup}_{N=1}^{\infty} A_N \in \mathcal{A}$

ENTONCES

$$\mathbb{P}\left(\overset{D}{\bigcup}_{N=1}^{\infty} A_N\right) = \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_N)$$

AXIOMA IV DE KOLMOGROV

INDEPENDENCIA 28/08

$A, B \in \mathcal{A}$, SE DICEN INDEPENDIENTES ENTRE SÍ, SII:

(1) $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$ B NO CONDICIONA A A.

(2) $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$ A NO CONDICIONA A B.

COROLARIO: Si A y B SON INDEPENDIENTES, COMO VALE QUE

$$\mathbb{P}(A\cap B) \to \underbrace{\mathbb{P}(A/B)}_{\mathbb{P}(A)} . \mathbb{P}(B)$$
$$\to \underbrace{\mathbb{P}(B/A)}_{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}(A)$$

ENTONCES $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B)$

¡OJO! UNA COSA ES SER INDEPENDIENTE Y OTRO ES SER EXCLUYENTES. $(A\cap B = \emptyset)$

NOTA

EJEMPLO

E.A: 'TIRO UN DADO EQUILIBRADO 2 VECES.

$A =$ 'SALIERON DOS 6' $= \{(6,6)\}$ $\#A = 1$

$\Omega = \{(x,y) / x,y \in \{1, 2, \ldots 6\}\}$ $\#\Omega = 36$

$\therefore \mathbb{P}(A) = \frac{1}{36}$

$A_1 =$ 'SALE LA PRIMERA VEZ' $= \{(6,*)\}$ $\#A_1 = 6$

$A_2 =$ 'SALE LA SEGUNDA VEZ' $= \{(*,6)\}$ $\#A_2 = 6$

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\quad \mathbb{P}(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A_1 \cap A_2 = A = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) . \mathbb{P}(A_2)$ $\quad \therefore$ A_1 y A_2 SON INDEPENDIENTES

PROPIEDADES

Si A y B SON INDEP. ENTONCES VALE QUE:

(1) A y B^c SON I.

(2) A^c y B SON I.

(3) A^c y B^c SON I.

$A, B, C \in \mathcal{A}$ SON INDEPENDIENTES ENTRE SÍ, SII:

(1) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

(2) $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$

(3) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

(4) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

ANALISIS COMBINATORIOS

→ ESPACIOS MOSTRALES FINITOS.

- N OBJETOS DISTINTOS (DISTINGUIBLES)

(1) PERMUTACIONES DE LOS N OBJETOS:

$P_n = N(N-1)(N-2) \cdots 1 = N!$ (FACTORIAL)

CONVENCION = $0! = 1$

(2) VARIACIONES DE N OBJETOS TOMADOS DE A R

$(R \leq N)$

EJ - DE CUANTAS MANERAS PUEDO ORDENAR 5 VOCALES

$5! = 120$

EN GRAL: $V_{n,R} = \dfrac{N!}{(N-R)!}$

R SOBRES DISTINTOS Y N CASILLEROS Y ~~MEDIR~~ PUEDE IR 1 SOLO SOBRE A C/CASILLERO

(3) COMBINACIONES DE N OBJETOS TOMADOS DE A R

NO ME IMPORTA EL ORDEN $(R \leq n)$

$$C_{N,R} = \frac{V_{N,R}}{R!} = \frac{N!}{(N-R)!\,R!} = \binom{N}{R}$$ COMBINATORIO.

HOJA N° 9

FECHA

EJEMPLO: CUANTOS TRIANGULOS PUEDO DIAGRAMAR CON 8 PUNTOS (NO ALINEADOS) EN EL PLANO.

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

DONDE ($A\hat{B}C = B\hat{C}A = C\hat{A}B$) SON TODOS IGUALES

PROPIEDADES DEL COMBINATORIO

(1) $\binom{N}{0} = \frac{N!}{(N-0)!\,0!} = 1$

(2) $\binom{N}{N} = \frac{N!}{N!\,0!}$

(3) $\binom{N}{1} = N$

$\binom{N}{N-1} = N$

ENTONCES

$$\binom{N}{R} = \binom{N}{N-R} = \frac{N!}{(N-R)!\,R!} = C$$

PROBLEMA:

20 MEDIALUNAS DE LAS CUALES 8 SON DEFECTUOSAS SE ELIJEN 6 AL AZAR. CALCULAR LA PROB QUE 2 SEAN DEFECTUOSAS.

$$P = \frac{\#\ FAV}{\#\ POSIBLES} = \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{4}}{\binom{20}{6}} = \frac{8!}{6!\,2!} \cdot \frac{12!}{4!\,8!} \cdot \frac{6!\,14!}{20!}$$

$$= 0{,}357$$

(4) PERMUTACIONES REPETIDAS

EJ. CUANTOS NUMEROS DE 4 CIFRAS PUEDO ARMAR CON LAS CIFRAS 1112

$$\frac{4!}{3!} = \frac{4\,3!}{3!} = 4$$

EJ CUANTAS PALABRAS SE PUEDEN OBTENER UN ANAGRAMA DE 'BANANA'?

$$\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$$

$$P^{*}_{N,\,N_1,\,N_2} = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\cdots N!}$$

- CASO PARTICULAR: SI TENGO 2 SIMBOLOS

ANAGRAMA DE ANANA

$$\frac{5!}{3!\,2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

(5) VARIACIÓN CON REPETICIÓN

MUESTRA DE TAMAÑO R DE LOS N OBJETOS

AHORA TENGO R SOBRES, N CASILLEROS Y PUEDO REPETIR.

$$N^{R} = V^{*}_{N,R}$$

EJEMPLO INTERESANTE: CUMPLEAÑOS

EN UN GRUPO DE R PERSONAS, CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE AL MENOS 2 PERSONAS CUMPLAN EL MISMO DIA.

Si $R = 366$ $\quad \mathbb{P}(R) = 1$

Si $R = 1$ $\quad \mathbb{P}(R) = 0$

A = 'AL MENOS SE REPITE 1 CUMPLE'

A^c = NO SE REPITE NINGUNA FECHA.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{365 . 364 \dots}{365^R} = 1 - \frac{V_{365,R}}{V^*_{365,R}}$$

$R = 23 \quad \mathbb{P}(R) > 1/2$

$R = 29 \quad \mathbb{P}(R) > 2/3$

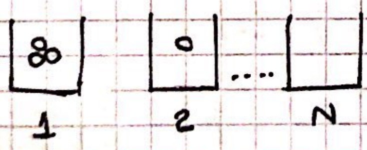
$R = 34 \quad \mathbb{P}(R) > 3/4$

(5) COMBINACIONES CON REPETICIÓN (MODELO DE BOSSE - EINSTEIN)

R OBJETOS INDISTINGUIBLES (R PUEDE SER $\geq$ N)
N CASILLEROS

(TODOS LOS OBJETOS SON DISTINGUIBLES, SALVO QUE INDIQUE LO CONTRARIO)

CONTAR CUANTAS MANERAS PUEDO UBICAR LOS R OBJETOS EN LOS N LUGARES



$$C^*_{R,N} = \frac{(R+N-1)}{R!\,(N-1)!} = \binom{R+N-1}{R}$$

BINOMIO DE NEWTON

$A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^0 = 1$$

$$(A+B)^1 = A+B$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$$

TRIANGULO DE TARTAGLIA

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

⋮

$$(A+B)^N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} A^{N-j} B^{j}$$

APLICACIÓN

$\# \Omega = N \quad \Omega = \{w_1 \dots w_N\} \quad P(R) = \{ \emptyset, \{w_1\}, \{w_2\} \dots \}$

$$= \binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \binom{N}{2} + \dots \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} 1^{j} 1^{N-j} = (1+1)^N = 2^N$$

NOTA

PROBLEMA TIPO EXAMEN

6 BOLAS INDISTINGUIBLES - 6 URNAS

(i) PROB. 1^{ER} URNA ESTA VACIA

$R = 6$ $\quad \dfrac{\# FAV}{\# POSIBLES}$

$N = 6$

$$\left.\begin{array}{l} POSIBLE = \binom{6+6-1}{6} = \binom{11}{6} \\ FAVORABLE = \binom{6+5-1}{6} = \binom{10}{6} \end{array}\right\} \frac{\binom{10}{6}}{\binom{11}{6}}$$

(ii) PROB. SOLO 1^{ER} URNA ESTE VACIA

$$P = \frac{5}{\binom{11}{6}} \rightarrow \text{CONFIG FAVORABLE.}$$

(iii) PROB. EXACTAMENTE UNA VACIA. $\rightarrow$ DISJUNTAS ENTRE SI

$$\# POSIBLES = \binom{11}{6}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(1^{a} \text{ ESTE VACIA}) + \mathbb{P}(2^{DA} \text{ VACIA}) + \dots$$

$$= \frac{5}{\binom{11}{6}} + \dots + \frac{5}{\binom{11}{6}} = 6 \cdot \frac{5}{\binom{11}{6}}$$

(iv) PROB DE QUE AL MENOS UNA ESTE VACIA.

$$\mathbb{P}(iv) = 1 - \mathbb{P}(iv)^{C} = 1 - \frac{1}{\binom{11}{6}}$$

NOTA

6 BOLAS NUMERADAS

(i)

$\#$POSIBLES $= 6^6$

$\#$FAVORABLES $= 5^6$

$$P = \frac{5^6}{6^6} = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

(ii)

$\#$FAV $\binom{6}{2}$ → ELIJO LAS QUE VAN JUNTAS } OCUPAN 1 CAS.

$5!$

$$P = \frac{\binom{6}{2} \cdot 5!}{6^6}$$

(iii)

POSIBILIDADES DISJUNTAS.

$$P = \frac{6 \binom{6}{2} 5!}{6^6}$$

SUMO 6 PROB =

(iv) $P(A) = 1 - P(A)^c$