1. (*Entregar script: archivo .R*) Lucas y Monk están discutiendo en el comedor del CEI. Lucas sostiene que "*obtener al menos un 6 al lanzar un solo dado 4 veces*" es más probable que lo que afirma Monk, "*Obtener al menos un par de 6s cuando se lanzan dos dados 24 veces*". Escribir un programa en lenguaje R para determinar quien tiene razón.

2. (*Entregar ejercicio escrito a mano*). La duración (en meses) de cierto tipo de dispositivos es una variable aleatoria X. Se midió la duración de 5 dispositivos, obteniendo los siguientes resultados
$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8$$
Estimar la densidad de esta muestra en el punto $x = 4$ utilizando el método de estimación de densidad por núcleos usando una ventana $h = 0.5$ y un núcleo Gaussiano.

2. No industriales

1. El tiempo en minutos de funcionamiento de una máquina es una variable aleatoria con función de densidad
$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} \mathbf{1}\{x > 0\},$$
con $\theta > 0$. Hallar el estimador máxima verosímilitud de θ para una muestra aleatoria de tamaño n.

2. La duración, en horas, de un motor es una variable aleatoria con distribución normal de varianza 25. Se toma una muestra aleatoria de 20 motores, la cual resulta tener una duración promedio de 1060 horas. Con un nivel de significación de α =0.05, determine si existe evidencia para garantizar que la duración media del motor es mayor que 1000 horas.

Santiago Jorda
parcialitos

(1) $f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}\{x>0\}$, $\theta>0$

se parece a una gamma.

$$\theta \sim \Gamma\left(2, \frac{1}{\theta}\right)$$

$x^{\nu-1} = x$

$\Rightarrow \boxed{\nu=2}$

$\lambda^\nu = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2$

$\boxed{\lambda = \frac{1}{\theta}}$

$\Rightarrow \Gamma(\nu) = (\nu-1)! = 1! = 1$

* como es una gama, esta es familia regular
puedo usar ~~la~~ log para calcular el maximo

- no depende el soporte de θ desconocido
- tiene $\theta>0$ es un conjunto abierto

$$L_\theta(\underline{x}) = \frac{\prod^n x_i e^{-\frac{x_i}{\theta}}}{\theta^2} \mathbb{1}\{x_i>0\}$$

$$= \frac{\prod^n (x_i)\, e^{-\frac{\sum^n x_i}{\theta}}}{\theta^{2n}} \mathbb{1}\{\min(\underline{X})>0\}$$

$$\ln(L_\theta(\underline{x})) = \ln\left(\prod^n x_i\right) - \frac{\sum^n x_i}{\theta} \ln(e) + \ln(\min(\underline{X})>0) - \ln(\theta)2n$$

$$\cancel{\frac{\partial \ln(L_\theta(\underline{x}))}{\partial\theta} = 0 + \frac{\sum^n x_i}{\theta^2} + 0 - 2n}$$

~~busco el maximo θ igualando a 0. la ultima expresion.~~

$$\cancel{\frac{\sum x_i}{\theta^2} - 2n = 0.}$$

$$\cancel{\sum^n x_i = 2n\,\theta^2}$$

$$\cancel{\pm\sqrt{\frac{\sum x_i}{2n}} = \theta} \rightarrow \text{~~como $\theta>0$.~~}$$

$$\cancel{\boxed{\hat\theta_{EMV} = \sqrt{\frac{\sum x_i}{2n}}}}$$

tuve un error

$\frac{\partial \ln(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta}$

$$\frac{\partial \ln(L_\theta(\underline{x}))}{\partial\theta} = \frac{\sum^n x_i}{\theta^2} - \frac{2n}{\theta}$$

~~busco~~ como es familia regular, para buscar su maximo$_\theta$ igualo la expresión anterior a 0.

$$\frac{\sum x_i}{\theta^2} - \frac{2n}{\theta} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{\theta^2} = \frac{2n}{\theta} \longrightarrow \boxed{\frac{\sum x_i}{2n} = \hat{\theta}_{EMV}}$$

$$\frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$$ Promedio muestral

Jorda Santiago
Parcialito s

(2) X_i = "duración en horas de un motor"

$X_i \sim N(\mu, 25)$

Promedio muestra aleatoria $\rightarrow$ $\bar{X} = \dfrac{\sum^{20} X_i}{20} = 1060$

$n = 20$

$\alpha = 0{,}05$

¿Existe evidencia para garantizar que la duración media del motor es mayor que 1000 horas?

conozco la varianza pero no la esperanza.

defino $\theta_0 = 1000$

$H_0: \mu \leq 1000 = \theta_0 \qquad H_1: \mu > 1000 = \theta_0$

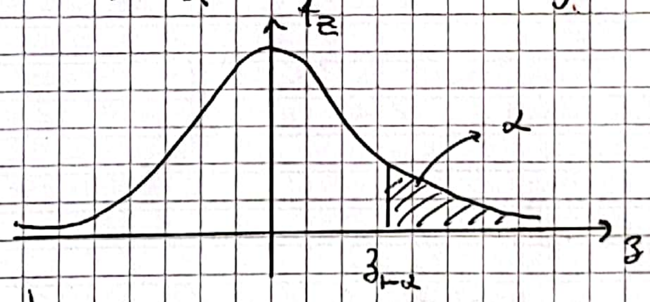
planteo la regla de desición $\quad \delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sum^n X_i - n.\theta_0}{\sqrt{n.\sigma^2}} > z_{1-\alpha} \\ 0 \end{cases}$

$\alpha = \mathbb{P}_{\mu=\theta_0}\left(\delta(\underline{X}) = 1\right) = \mathbb{P}_{\mu=\theta_0}\left(\underbrace{\dfrac{\sum X_i - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}}} > z_{1-\alpha}\right) = 0{,}05 =$

defino $Z \sim N(0,1)$

$= \alpha = \mathbb{P}_{\mu=\theta_0}(\text{"cometer error tipo I"}) = 0{,}05 = 1 - \phi(z_{1-\alpha})$

$\downarrow$ busco



$z_{1-\alpha} = z_{0{,}95}$

por tabla $z_{0{,}95} \cong 1{,}64$

resuelvo y busco $z_{1-\alpha}$

$\mathbb{P}_{\mu=\theta_0}\left(\dfrac{\sum X_i - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} > 1{,}64\right) = \mathbb{P}_{\mu=\theta_0}\left(\sum X_i > 1{,}64.\sqrt{n\sigma^2} + n.\theta_0\right)$

$= \mathbb{P}_{\mu=\theta}\left(\sum X_i > (1{,}64)(22{,}3) + 20000\right) \cong \mathbb{P}_{\mu=\theta}\left(\sum X_i > 20036\right)$

$$\mathbb{P}_{\mu_0=\theta_0}\left(\sum X_i > 20036\right)$$ como conozco el promedio divido ambos lados por n. $\bar{X}=1060$.

$$\mathbb{P}_{\mu_0=\theta}\left(\frac{\sum X_i}{n} > \frac{20036}{n}\right) = \mathbb{P}_{\mu_0=\theta}\left(\bar{X} > 1001{,}8\right)$$

como $1060 > 1001{,}8$.

como se cumple que $\bar{X} > 1001{,}8$ tengo suficiente información para rechazar H_0

$\boxed{\text{La media duración del motor es mayor a 1000.}}$