PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.16 - 61.09 - 81.04)

Primer parcial (Parte 2) - Tema 2 — Segundo cuatrimestre – 2021

Duración: 2.5 horas. — 13/11/2021 – 10:00 hs.

Escribir claramente en la hoja: apellido y nombres, padrón y curso

---

De los 3 ejercicios, al menos 2 deben estar correctamente desarrollados y resueltos para aprobar el examen. Los ejercicios debe resolverse a mano. Una vez terminado el examen, debe entregarse vía campus, sección Parciales y Autoevaluaciones, en el enlace con el nombre correspondiente a la sala en la que rindió el examen. En caso de caída del campus debe enviarse foto o escaneado del mismo a jmgarcia@fi.uba.ar. La cámara debe estar prendida durante toda la duración del examen para constatar su presencia.

---

1. Sea (X, Y) una variable aleatoria con función de probabilidad

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{2^y y^x e^{-(2+y/2)}}{2^x y! x!} \mathbf{1}\{x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0\}$$

Hallar $\mathbf{P}(\mathbf{var}(X|Y) > 2)$

---

2. Una empresa produce rollos de tela. La probabilidad de que un rollo tenga fallas de hilado es 0.16, que tenga fallas de teñido es 0.08 y que tenga ambas fallas es 0.06, de forma independiente para cada uno de los rollos producidos. Si se extraen al azar 30 rollos de tela de la producción y exactamente 1 tiene ambas fallas, calcular la probabilidad de que más de 27 no tengan fallas.

---

3. El peso (en gramos) de las manzanas cosechadas en un campo es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[180, 220]$. Las manzanas *premium* se separan del resto y se venden en cajones de 48 unidades. Si una manzana se considera *premium* cuando supera cierto umbral ¿Cuál debe ser el mínimo valor del umbral, para que el peso de un cajón de manzanas *premium* sea mayor a 10 kilos con probabilidad mayor o igual a 0.95?

(1)

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{2^y y^x e^{-\left(2+\frac{y}{2}\right)}}{2^x y!\, x!} \mathbb{1}\{x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0\}$$

$$= \frac{2^y y^x e^{-2} e^{-\frac{y}{2}}}{2^x y!\, x!} \mathbb{1}\{x \in \mathbb{N}_0\} \mathbb{1}\{y \in \mathbb{N}_0\}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-\frac{y}{2}} \left(\frac{y}{2}\right)^x}{x!} \mathbb{1}\{x \in \mathbb{N}_0\}}_{X|Y=y \sim Poi\left(\frac{y}{2}\right)} \underbrace{\frac{2^y e^{-2}}{y!} \mathbb{1}\{y \in \mathbb{N}_0\}}_{Y \sim Poi(2)}$$

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{e^{-\frac{y}{2}} (y/2)^x}{x!} \mathbb{1}\{x \in \mathbb{N}_0\}$$

de tablue

$$Var(X|Y=y) = \frac{y}{2} \Rightarrow Var(X|Y) = \frac{Y}{2}$$

$$\mathbb{P}(Var(X|Y) > 2) = \mathbb{P}\left(\frac{Y}{2} > 2\right) = \mathbb{P}(Y > 4) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 4)$$

$$= 1 - [\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{P}(Y=3) + \mathbb{P}(Y=4)]$$

$$= 1 - \left[e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right)\right]$$

$$= 1 - 7e^{-2} = 0,052653$$

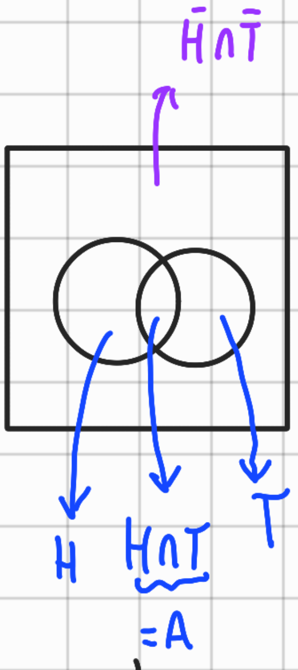
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(Var(X|Y) > 2) = 0,052653}$$

(2)

H: El rollo tiene falla de hilado. $\mathbb{P}(H) = 0{,}16$

T: " " " " " teñido. $\mathbb{P}(T) = 0{,}08$

$H \cap T$: El rollo tiene ambas fallas. $\mathbb{P}(H \cap T) = 0{,}06$



$\mathbb{P}(\text{El rollo no tiene ninguna falla}) = \mathbb{P}(\bar{H} \cap \bar{T})$

$= 1 - \mathbb{P}(H \cup T)$

$= 1 - (\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(H \cap T))$

$= 1 - (0{,}16 + 0{,}08 - 0{,}06) = 0{,}82$

$$\mathbb{P}(\bar{H} \cap \bar{T} \mid \underbrace{\overline{H \cap T}}_{= \bar{A}}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{H} \cap \bar{T} \cap \bar{A})}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbb{P}(\bar{H} \cap \bar{T})}{1 - 0{,}06} = \frac{0{,}82}{1 - 0{,}06} = \frac{41}{47}$$

X: Cantidad de rollos sin ninguna falla en 29 producidos

$X \sim Bi(29, 41/47)$

$$\mathbb{P}(X > 27) = \binom{29}{28} \left(\frac{41}{47}\right)^{28} \left(1 - \frac{41}{47}\right)^{1} + \left(\frac{41}{47}\right)^{29} \left(1 - \frac{41}{47}\right)^{0}$$

$= 0{,}099896$

(3)

W: Peso (en gr) de las manzanas cosechadas $\quad W \sim U(180, 220)$

C: Peso del cajón

$$W_i \mid W_i > u \sim U(u, 220)$$

$$C = \sum_{i=1}^{48} W_i \mid W_i > u \qquad \frac{\frac{1}{40} \mathbb{1}\{W_i > u\}}{\frac{1}{40}(220-u)} = \frac{1}{220-u} \mathbb{1}\{u < W_i < 220\}$$

$\Rightarrow u \,/\, \mathbb{P}(C > 10000) \geq 0{,}95$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{48} W_i \mid W_i > u \quad > 10000\right) \geq 0{,}95$$

TCL $\longleftarrow$ no queda otra

$$E[W_i \mid W_i > u] = \frac{220+u}{2} \qquad Var[W_i \mid W_i > u] = \frac{(220-u)^2}{12}$$

$$E[C] = 48\left(\frac{220+u}{2}\right) = 5280 + 24u$$

$$Var[C] = 48\,\frac{(220-u)^2}{12} = 4(220-u)^2$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{C - E[C]}{\sqrt{Var(C)}} > \frac{10000 - E[C]}{\sqrt{Var(C)}}\right) \geq 0{,}95$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{C - E[C]}{\sqrt{Var(C)}} \leq \frac{10000 - E[C]}{\sqrt{Var(C)}}\right) \leq 0{,}05 \longrightarrow \approx \Phi\left(\frac{1000 - E[C]}{\sqrt{Var(C)}}\right)$$

TCL $\rightarrow$ suma de VA indep, con varianza y esperanza finitas

$$\frac{10000-(5280+24u)}{440-2u} \leq -1,6448$$

$$4720-24u \leq -723,712 + 3,2896u$$

$$199,6 \leq u$$

$$\Rightarrow \boxed{u \geq 199,6g}$$