VARIABLES ALEATORIAS CONDICIONALES (GUIÁ 5)

CASO DISCRETO

X, Y V.A EN $P_{XY}(x,y)$, $P_X(x)$ $P_Y(y)$ LAS MARGINALES
SEA $x_0 \in R_X$, $P_X(x_0) > 0$. ENTONCES $Y|X = x_0$ ES UNA
V.A DISCRETA CON $P_{Y|X=x_0}$

$$\boxed{P_{Y|X=x_0}(y) = \frac{P_{XY}(x_0, y)}{P_X(x_0)}} \quad \forall y \in R_Y$$

CASO CONTINUO

SI ANALOGAMENTE, SI $y_0 \in \mathbb{R}$ Y $P_Y(y_0) > 0$ ENTONCES
$X|Y = y_0$ ES UNA V.A CONTINUA

$$\boxed{P_{X|Y=y_0}(x) = \frac{P_{XY}(x, y_0)}{P_Y(y_0)}} \quad \forall x \in R_X$$

EJEMPLO

3R, 2A, 1V SE EXTRAEN 2 SIN REPOSICION

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}$$

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}$$

X: # ROJAS OBS.

Y: # AMARILLAS OBS.

Y \ X	0	1	2	$P_Y(y)$
0	0	3/15	3/15	6/15
1	2/15	6/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
$P_X(x)$	3/15	9/15	3/15	1

Y/X

$$\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\right)$$

↓ SIN REPO

$\underline{X|Y=1}$: # ROJAS SABIENDO QUE OBSERVE UNA AMARILLA

$R_{X|Y=1} = \{0,1\}$ $\quad X|Y=1 \sim \underbrace{BER(P)}_{\in}$

$$P = \mathbb{P}(X|Y=1) = \mathbb{P}(X=1 \mid Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)}$$

$$\mathbb{P}(X|Y=1) = \frac{6/15}{8/15} = \frac{3}{4} \quad \therefore \quad X|Y=1 \sim BER(3/4)$$

$\underline{Y|X=1}$ # AMARILLAS SABIENDO QUE VI ROJAS

$$\mathbb{P}(Y|X=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{6/15}{9/15} = 2/3$$

$Y|X=1 \sim BER(2/3)$

$\underline{Y|X=0}$, $R_{Y|X} = \{1,2\}$

$$P_{Y|X}(1) = \frac{P_{XY}(0,1)}{P_X(0)} = \frac{2/15}{3/15} = 2/3$$

$$P_{Y|X}(2) = \frac{P_{XY}(0,2)}{P_X(0)} = \frac{1/15}{3/15} = 1/3$$

$Y|X=0 \sim BER+1$

$B \sim BER(1/3)$

$\mathbb{P}(B=0) = 2/3$

$\mathbb{P}(B=1) = 1/3$

NOTA

$Y|X=2 = 0$

- $\mathbb{E}[Y|X=x_0] = \sum_{y \in R_Y} y \cdot P_{Y|X=x_0}(y)$

- $VA(Y|X=x_0) = \mathbb{E}[(Y|X=x_0 - \mathbb{E}[Y|X=x_0]^2)]$

$= \mathbb{E}[(Y|X=x_0)^2] - \mathbb{E}[Y|X=x_0]^2$

MEZCLAS

EJEMPLO 1 (CASO DISCRETO)

TENGO 3 MONEDAS $X_1 \sim B(1/2)$

$X_2 \sim B(1/3)$

$X_3 \sim B(3/5)$

CARA, CRUZ

E:A: ELIJO AL AZAR Y TIRO UNA VEZ.

SEA X_M, RESULTADO OBSERVADO, $R_{X_M} = \{0,1\}$

$X_M \sim B(p) \qquad p = \mathbb{P}(X=1)$

$\mathbb{P}(X_M=1) = \mathbb{P}(X_M=1 \mid \text{ELEGÍ MONEDA } 1) \cdot \mathbb{P}(\text{ELEGIR } X_1) +$

$\mathbb{P}(X_M=1 \mid \text{" " } 2)\,\mathbb{P}(\text{" } X_2) +$

$\mathbb{P}(X_M=1 \mid \text{" " } 3)\,\mathbb{P}(\text{" } X_3)$

(PROB TOTAL GUIA 1)

SEA $M \{1,2,3\}$ $\mathbb{P}(M=1) = \mathbb{P}(M=2) = \mathbb{P}(M=3) = 1/3$

ENTONCES

$\mathbb{P}(X_M=1) = \mathbb{P}(X_1=1)\,\mathbb{P}(M=1) + \mathbb{P}(X_2=1)\,\mathbb{P}(M=2) + \mathbb{P}(X_3)\,\mathbb{P}(\ldots$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 43/90$

NOTA

OBS! $X_M | M = i \sim X_i \quad i = 1,2,3$

SABIENDO QUE EL RESULTADO FUE CARA CUAL ES LA $\mathbb{P}$ DE QUE LA MONEDA HAYA SIDO X_2?

$$\underbrace{\mathbb{P}(M=2 \mid X_M = 1)}_{\text{BAYES}} = \frac{\mathbb{P}(X_M = 1 \mid M=2)\,\mathbb{P}(M=2)}{\mathbb{P}(X_M = 1)}$$

$\mathbb{P}(X_M = 1) \rightarrow$ LO QUE CALCULE ATRAS

$$= \frac{\mathbb{P}(X_M = 1 \mid M=2)\,\mathbb{P}(M=2)}{\sum \mathbb{P}(X_M = 1 \mid M=i)\,\mathbb{P}(M=i)} = \frac{10}{43}$$

EJEMPLO 2 (CASO CONTINUO)

FABRICA DE TORNILLOS $60\% \rightarrow$ FAB A

$40\% \rightarrow$ FAB B

X_1: DIAM DE TORNILLOS DE A

X_2: " " " " B

$X_1 \sim \mathcal{U}(1,4)$ (mm) $\rightarrow F_{X_1} = \frac{1}{3}(x-1)$

$X_2 \rightarrow F_{X_2}(x) = \frac{2}{4}(x-1)(4-x)\,\mathbb{1}\{1<x<4\}$

SEA X_M: DIAM DE TORNILLOS MEZCLADOS.

i) HALLAR $F_{X_M}(x)$ $\quad F_{X_M}(x)$ $\quad$ SEA $M = \begin{cases} 1 \rightarrow A & \mathbb{P}(M=1) = 0{,}6 \\ 2 \rightarrow B & \mathbb{P}(M=2) = 0{,}4 \end{cases}$

$$F_{X_M}(x) = \mathbb{P}(X_M \leq x) = \mathbb{P}(X_M \leq x \mid M=1)\,\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(X_M \leq x \mid M=2)\cdot\mathbb{P}(M_2)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq x)\,\mathbb{P}(M=1) + \mathbb{P}(X_2 \leq x)\,\mathbb{P}(M=2)$$

NOTA

Escaneado con CamScanner

$$F_{X_M}(x) = F_{X_1}(x)\cdot 0{,}6 + F_{X_2}(x)\cdot 0{,}4$$

$$f_{X_M}(x) = F_{X_1}'(x)\cdot 0{,}6 + F_{X_2}'(x)\cdot 0{,}4$$

ENTONCES

$$f_{X_M}(x) = \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{3}\,\mathbb{1}\{1<x<4\} + \frac{4}{10}\cdot\frac{2}{9}(x-1)(4-x)\,\mathbb{1}\{1<x<4\}$$

$$f_{X_M}(x) = \frac{1}{5} + \frac{4}{45}(x-1)(4-x)\,\mathbb{1}\{1<x<4\}$$

EN GENERAL: $X_1 \dots X_n$ V.A, SE LLAMA V.A MEZCLADA DE $X_1 \dots X_n$ MEDIANTE LA V.A MEZCLADORA, M ($R_M = \{1 \dots n\}$ A LA VA X_M CON DISTRIBUCIÓN

$$\boxed{F_{X_M}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)\cdot \mathbb{P}(M=i)}$$

$$\boxed{f_{X_m}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X_M}(x)\cdot \mathbb{P}(M=i)}$$ CONTINUAS

$$\boxed{p_{X_M}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{X_M}(x)\cdot \mathbb{P}(M=i)}$$ DISCRETAS

OBS! $X_M \mid M=i \sim X_i$

NOTA

Escaneado con CamScanner

ii) SABIENDO QUE EL DIAM ES DE 3mm ¿CUAL ES LA $\mathbb{P}$ QUE SEA DE B?

$$\mathbb{P}(M=2 \mid X_M=3) = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(X_M=3 \mid M=2)\,\mathbb{P}(M=2)}^{\to 0}}{\underbrace{\mathbb{P}(X_M=3)}_{\to 0}} = \frac{"0"}{"0"}$$

LA PUEDO SALVAR A ESTA INDETERMINACIÓN

$$\frac{\mathbb{P}(X_2=3)\,\mathbb{P}(M=2)}{\mathbb{P}(X_2=3)} = \frac{f_{X_2}(3)\cdot\mathbb{P}(M=2)}{\underbrace{f_{X_M}(3)}_{f_{X_1}(3)\mathbb{P}(M=1)+f_{X_2}(3)\mathbb{P}(M=2)}}$$

$$= \frac{4/9\cdot 4/10}{1/3\cdot 6/10 + 4/9\cdot 4/10} = 8/17$$

MEZCLADORA DISCRETA

f_{X_i} ← EN ESE PUNTO

$$\boxed{\mathbb{P}(M=i \mid X_M=x) = \frac{f_{X_i}(x)\,\mathbb{P}(M=i)}{f_{X_M}(x)}}$$

BAYES PARA MEZCLA DE CONTINUAS

X CONTINUA MEZCLA

$$f_{X_M}(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{X_j}(x)\cdot\mathbb{P}(M=j)$$

VARIABLES ALEATORIAS CONDICIONALES

CASO CONTINUO:

X, Y V.A CON $f_{XY}(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ LAS MARGINALES $x_0 \in R_X$, $f_X(x_0) > 0$ ENTONCES $Y | X = x_0$ ES UNA V.A CONTINUA.

$$\boxed{f_{Y|X=x_0}(y) = \frac{f_{XY}(x_0, y)}{f_X(x_0)}} \quad \forall y \in R_Y$$

ANALOGO PARA $X | Y = y_0$

$$\boxed{f_{X|Y=y_0}(x) = \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}}$$

PROPIEDADES

(1) $F_{Y|X=x_0} = \mathbb{P}(Y|X=x_0 \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq y \mid X=x_0)$

$$= \frac{1}{f_X(x_0)} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x_0, T)\, dT$$

(2) $F'_{Y|X=x_0} = f_{Y|X=x_0}$

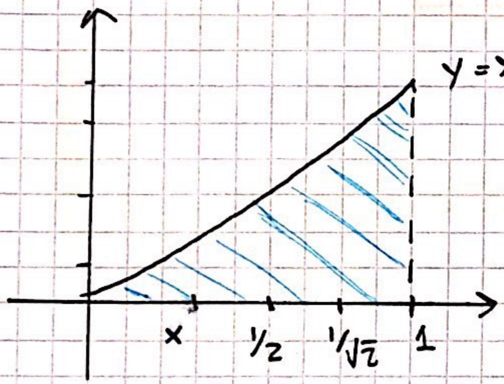
(3) $\mathbb{E}[Y \mid X=x_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y|X=x_0}\, dy$

EJEMPLO

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(\Lambda)$, $\Lambda = \{0 < y < x^2 < 1\}$

HALLAR $F_{Y|X=1/2}$ $\quad F_{X|Y=1/2}$ $\quad f_{XY} = 3$

$\mathbb{E}[Y|X=x]$ $\quad \mathbb{E}[X|Y=y]$



$Y|X=1/2 \to R_{Y|X=1/2} = [0; 1/4]$

$Y|X=1/2 \sim \mathcal{U}(0; 1/4)$

$X|Y=1/2 \sim \mathcal{U}(1/\sqrt{2}, 1)$

$Y|X=x \sim \mathcal{U}(0, x^2) \to \mathbb{E}[Y|X=x] = \frac{x^2}{2}$

$X|Y=y \sim \mathcal{U}(\sqrt{y}; 1) \to \mathbb{E}[X|Y=y] = \frac{1+\sqrt{y}}{2}$

NOTA

PROPIEDADES

LAS CONDICIONALES SON UNIFORMES (CON UN VECTOR) TENGO QUE VER DONDE.

(1) $\mathbb{P}(Y \in A \mid X = x) = \mathbb{P}(Y \mid X = x \in A)$

$$= \int_A f_{Y|X=x}(y)\,dy = \frac{1}{f_X(x)} \int_A f_{XY}($$

(2) "PROB TOTAL"

$$\mathbb{P}(Y \in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \leq A \mid X = x)\, f_X(x)\,dx$$

MARGINAL DE Y

$$\mathbb{P}(Y \in A) = \int_A f_Y(y)\,dy = \int_A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_A \left(\int f_{Y|X=x}(y)\, f_X(x)\,dx \right) dy$$

LAS INTEGRALES SE PUEDEN INVERTIR

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \underbrace{\left(\int_A f_{Y|X=x}(y)\,dy \right)}_{\mathbb{P}(Y \in A \mid X = x)} dx$$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_{Y|X=x}(y)\, f_X(x)}$$

EJEMPLOS

1) $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{x} e^{-x} \mathbb{1}\{0<y<x\}$

$$= \underbrace{\frac{1}{x}\mathbb{1}\{0<y<x\}}_{Y_{X|X} \sim \mathcal{U}(0,x)} \underbrace{e^{-x}\mathbb{1}\{x>0\}}_{X \sim \mathrm{EXP}(1)}$$

2) $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2} y e^{-xy} \mathbb{1}\{0<y<2, x>0\}$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\mathbb{1}\{0<y<2\}}_{Y \sim \mathcal{U}(0,2)} \underbrace{y e^{-xy}\mathbb{1}\{x>0\}}_{X|Y=y \sim \mathrm{EXP}(y)}$$

PROPIEDADES

X e Y SON **INDEPENDIENTES**:

$$\boxed{P_{Y|X=x}(y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} = \frac{P_X(x)\,P_Y(y)}{P_X(x)} = P_Y(y)}$$

ANALOGO PARA $X|Y=y$ Y PARA $f_{X|Y=y}(x)$, $f_{Y|X=x}(y)$

PARA CADA $x \in R_X$, TENGO UNA V.A CONDICIONAL $Y|X=x$, LUEGO $x \xrightarrow{\varphi} \mathbb{E}[Y|X=x]$

φ ES UNA FUNCIÓN $\varphi: R_X \to \mathbb{R}$ SE LLAMA **FUNCIÓN DE REGRESION** DE Y SOBRE X, Y SU GRAFICA SE LLAMA **CURVA DE REGRESIÓN DE Y SOBRE X**.

ES DECIR, $\boxed{\varphi(x) = \mathbb{E}[Y|X=x]}$ $\forall x \in R_X$

NOTA

TAMBIEN $X \xrightarrow{\psi} VAR(Y | X=x)$

ES DECIR $\psi(x) = VAR(Y|X=x)$

$$= \mathbb{E}[Y^2 | X=x] - \mathbb{E}[Y|X=x]^2$$

$$= \mathbb{E}[Y^2 | X=x) - \varphi^2(x)$$

$$\boxed{\psi(x) = \mathbb{E}[Y^2 | X=x] - \varphi^2(x)}$$

EJEMPLOS

1) $(X,Y) \sim \mathcal{U}(\frown)$

$Y|X=x \sim \mathcal{U}(0, x^2)$

$\varphi(x) = \mathbb{E}[Y|X=x] = \frac{x^2}{2}$

$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} \mathbb{1}\{0<x<1\}$

$\psi(x) = \frac{(x^2-0)^2}{12} = \frac{x^4}{12}$

HAY QUE PONER LA INDICADORA

$\psi(x) = \frac{x^4}{12} \mathbb{1}\{0<x<1\}$

2)

3R
2A
1V

SACO 2 SIN REPO.

$\varphi : \{0,1,2\} \to \mathbb{R}$

$\varphi(0) = \mathbb{E}[Y|X=0] = \mathbb{E}[BER(1/3)+1] = \frac{4}{3}$

$Y|X=0 \sim BER(1/3)+1$

$\varphi(1) = \mathbb{E}[Y|X=1] = 2/3$ $\quad$ $\varphi(2) = \mathbb{E}[Y|X=2] = \mathbb{E}[0] = 0$

$Y|X=1 \sim BER(2/3)$ $\quad$ $Y|X=2 = 0$

$$\therefore \varphi(x) = \frac{4}{3}\mathbb{1}\{x=0\} + \frac{2}{3}\mathbb{1}\{x=1\} + 0\,\mathbb{1}\{x=2\}$$

$\psi(0) = VAR(Y|X=0) = VAR(BER(1/3)+1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$\psi(1) = VAR(Y|X=1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$\psi(2) = VAR(Y|X=2) = 0$

$$\psi(x) = \frac{2}{9}\mathbb{1}\{x=0, x=1\} + 0\,\mathbb{1}\{x=2\}$$

PREDICCIÓN Y ESPERANZA CONDICIONAL

HALLAR UNA FUNCION DE $\underbrace{X}_{\text{CONOCIDA}}$, QUE SEA "LA MAS PARECIDA A $\underbrace{Y}_{\text{DESCONOCIDA}}$" EN ALGUN SENTIDO.

SEA $\mathbb{V} = \{ Y \text{ V.A DEFINIDA } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \}$

$\mathbb{V}$ ES $\mathbb{R}$ - E. VECTORIAL (DIM $= \infty$)

- $\langle V, W \rangle = \mathbb{E}[V.W]$ ES UN PRODUCTO INTERNO
- $\|V\|^2 = \langle V, V \rangle = \mathbb{E}[V^2]$ NORMA
- $\|V-W\|^2 = \langle V-W, V-W \rangle = \mathbb{E}[(V-W)^2]$ DISTANCIA

ERROR CUADRATICO MEDIO (ECM)

NOTA

- $\mathbb{H}(x) = \{ h(x) ; h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ FUNCIÓN 'RAZONABLE' $\}$

$\mathbb{H}(x) \leq \mathbb{V}$ SUBESPACIO

- $\hat{y} \in \mathbb{H}(x)$
- $\| y - \hat{y} \| \leq \| y - h(x) \|^2$ MINIMIZA EL ECM
- $y - \hat{y} \perp h(x)$
- $\langle y - \hat{y}, h(x) \rangle = 0$ PRINCIPIO DE ORTOGONALIDAD
- $\langle y, h(x) \rangle = \langle \hat{y}, h(x) \rangle$ $\forall h(x) \in \mathbb{H}(x)$
- $\hat{y}$ ES EL UNICO(!) QUE VERIFICA EL PPO.

SE LLAMA V.A ESPERANZA CONDICIONAL DE Y DADO X Y ESCRIBIMOS $\mathbb{E}[Y|X]$ A LA V.A QUE VERIFICA

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbb{E}[Y\, h(x)] = \mathbb{E}[(Y|X)\, h(x)] \\ \langle Y, h(x) \rangle = \langle \mathbb{E}[(Y|X)\, h(x)] \end{gathered}}$$

MORALEJA $\boxed{\mathbb{E}[Y|X] = \text{PROY}_{\mathbb{H}(x)}(Y)}$

COMO $\mathbb{E}[Y|X] \in \mathbb{H}(x) \Rightarrow \mathbb{E}[Y|X] = \hat{h}(x)$

PARA ALGUNA $\hat{h}$ PARTICULAR.

TEOREMA: $\hat{h}(x) : \varphi(x)$

LUEGO $\boxed{\mathbb{E}[Y|X] = \varphi(x)}$

PROPIEDADES

(1) EN PARTICULAR, PARA $h(X) = 1$, EL PPO DE ORT QUEDA $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$

(2) MUY IMPORTANTE ¡!

$$\boxed{\mathbb{E}[\odot] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\cdot\,|X]]}$$

CUALQUIER COSA (Y, Y^2)

SI ME PIDEN $\mathbb{E}[Y^2]$ ↓ PUEDO SACARLO DE LA VAR(Y)

(3) $\mathbb{E}[g(X)\,Y|X] = g(X)\,\mathbb{E}[Y|X]$

(4) SI X e Y SON INDEPENDIENTES

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$$

SE LLAMA VARIANZA CONDICIONAL DE Y DADO X, A LA V.A DEFINIDA POR:

$$\boxed{\begin{aligned} VAR(Y|X) &= \varphi(X) \quad \text{DONDE } \varphi(x) = VAR(Y|X=x) \\ &= \mathbb{E}[Y^2|X] - \mathbb{E}[Y|X]^2 \end{aligned}}$$

$$\|Y - \mathbb{E}[Y]\|^2 = \|Y - \mathbb{E}[Y|X]\|^2 + \|\mathbb{E}[Y|X] - \mathbb{E}[Y]\|^2$$

$$\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]] = \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y|X]^2] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X] - \mathbb{E}[Y]^2]$$

$$\boxed{\begin{aligned} VAR(Y) &= \mathbb{E}[VAR(Y|X)] + VAR(\mathbb{E}[Y|X]) \\ VAR(Y) &= \mathbb{E}[\varphi(X)] + VAR(\varphi(X)) \end{aligned}}$$

NOTA

SEA $(X_m)_{m\geq 1}$ SUCESIÓN DE V.A.i.i, $\mu_X = \mathbb{E}[X_M]$ Y $VAR(X_M) = \sigma_X^2$. SEA N. V.A DISCRETA, $R_N = \mathbb{N}$, INDEP DE LA X_M. SE LLAMA V.A COMPUESTA A:

$$\boxed{S_N = \sum_{i}^{N} X_M \quad (\mu_N = \mathbb{E}[N],\ \sigma_N^2 = VAR(N))}$$

PROPIEDADES

- $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[X_N] \cdot \mathbb{E}[N]$
- $VAR(S_N) = \mathbb{E}[X_N]^2 VAR(N) + VAR(X_N) \cdot \mathbb{E}[N]$

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[\Sigma X_M] = \mathbb{E}[\overbrace{\mathbb{E}[\sum^{k} X_M | N]}^{V.A}] = \mathbb{E}[\varphi(N)]$$

DONDE $\varphi(k)$ ES:

$$\varphi(k) = \mathbb{E}[\sum_{N=1}^{\infty} X_m | N = k] = \mathbb{E}[X_m]\Sigma = k\mu_X$$

↓ COMO N Y X_m SON INDEPENDIEN.

$\varphi(k) = k\mu_X$

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[\varphi(N)] = \mathbb{E}[\mu_X X] = \mu_X \mathbb{E}[N] = \mu_X \mu_N.$$

$$VAR(S_m) = VAR(\mathbb{E}[S_m|m] + \mathbb{E}[VAR(S_m|N)]$$
$$= VAR(\varphi(N)) + \mathbb{E}(\psi(N))$$
$$= VAR(\mu m) + \mathbb{E}[\sigma_X^2 N]$$
$$\mu_X^2 VAR(N) + \sigma_X^2 \mathbb{E}[N]$$

NOTA

$$\psi(k) = VAR(S_n \mid N = k) = VAR(\Sigma X_n \mid N=k) = VAR(\Sigma X_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{k} VAR(X_n) = \sigma^2 \times k.$$

↳ X_n SON INDEP.

EJEMPLO LONG d DE ROLLOS DE TELA PRODUCIDOS POR UNA MAQUINA / $L \sim \mathcal{U}(20,30)$. CLIENTE QUIERE UN ROLLO DE AL MENOS 28 m, DE LOS QUE NO HAY NINGUNO EN STOCK.

A) CANT MEDIA DE ROLLOS QUE HAY QUE PRODUCIR PARA SATISFACER EL CLIENTE.

$N \sim$ [illegible] (P)

$$\mathbb{E}[\ (1/5)\ ] = \mathbb{E}[N] = 5$$

B) LONG MEDIA DE LA TELA PRODUCIDA.

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} L_i$$

$$\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[\ \Sigma L_i \mid L_i < 28\ ] + \mathbb{E}[\ L \mid L_i \geq 28\ ]$$
$$= 96 + 29 = 125$$

NOTA

ESPERANZA CONDICIONAL

$\mathbb{E}[Y|X]$ ES UNA V.A ES LA 'MEJOR PREDICTORA' DE Y BASADA EN X.

$\mathbb{E}[Y|X] = \varphi(X)$, DONDE $\varphi(X)$ ES LA FUNCIÓN DE REGRESIÓN DE Y BASADA EN X.

$\varphi(x) = \mathbb{E}[Y|X=x] \quad \forall x \in R_X$

VARIANZA CONDICIONAL

$V(Y|X)$ ES UNA V.A $V(Y|X) = \psi(X)$ DONDE

$\boxed{\psi(x) = V(Y|X=x) \quad \forall x \in R_Y}$

- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[Y]$
- $VAR(Y) = \mathbb{E}[VAR(Y|X)] + VAR(\mathbb{E}[Y|X])$

↓ PITAGORAS

OTRA APLICACIÓN

$X_1, \dots X_n$ V.A, M V.A DISCRETA, $R_M = \{\overbrace{1, \dots, n}^{i}\}$ INDEPENDIENTE DE LA X_i. X_M V.A MEZCLA DE LAS X_i, MEDIANTE M.

- $\mathbb{E}[X_M] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_M|M]] = \mathbb{E}[\varphi(M)] =$

$\mathbb{E}[\mu_{X_1} \mathbb{1}\{M=1\} + \dots + \mu_{X_n} \mathbb{1}\{M=N\}] = \mathbb{E}[\varphi(i)]$

$\sum_{i=1}^{n} \mu_{X_i} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{M=i\}] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{X_i} \mathbb{P}(M=i)$

NOTA

$$\therefore \boxed{\mathbb{E}[X_M] = \sum \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{P}(M=i)}$$

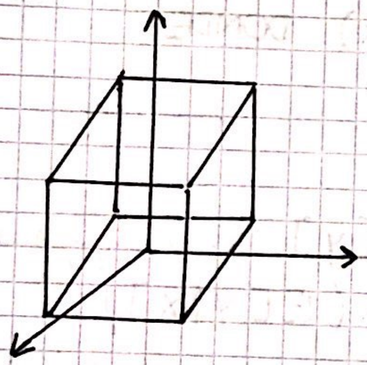
$\varphi(i) = \mathbb{E}[X_M \mid M_i]$ $\quad X_M \mid M=i \sim X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X_M \mid M_i] = \mathbb{E}[X_i]$

$$\therefore \boxed{V\ VAR(X_M) = \sum_{i=1}^{m} \left[VAR(X_i) + \left(\mathbb{E}[X_i] - \mathbb{E}[X_M]\right)^2 \right] \mathbb{P}(M=i)}$$

PERO POR LO GENERAL SE USA CON $N=2$: (X_1 y X_2)

$$\boxed{VAR(X_M) = P_1 VAR(X_1) + P_2 VAR(X_2) + P_1 P_2 \left(\mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_2] \right)^2}$$

PREDICCIÓN LINEAL



$S(x) = \{\alpha X + \beta\}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$S(x) \subset \mathbb{H}(x)$

$DIM(S(x)) = 2$

$$\tilde{Y} = \frac{COV(X,Y)}{VAR(X)} \left(X - \mathbb{E}[X] \right) + \mathbb{E}[Y]$$

$\tilde{Y} = P_S(Y) = \tilde{Y} = \tilde{a} X + \tilde{b}$ $\rightarrow$ MINIMIZA LA DISTANCIA

CON $\tilde{a} = \dfrac{COV(X,Y)}{VAR(X)}$; $\tilde{b} = \mathbb{E}[Y] - \dfrac{\mathbb{E}[X]\, COV(X,Y)}{VAR(X)}$

- $\boxed{\mathbb{E}[\tilde{Y}] = \mathbb{E}[Y]}$ MEJOR PREDICTORA LINEAL ($\tilde{Y}$) BASADA EN X

$$\boxed{\tilde{Y} = \tilde{H}(X) = \frac{COV(X,Y)}{VAR(X)} \left(X - \mathbb{E}[X] \right) + \mathbb{E}[Y]}$$

NOTA

- SI LA $\mathbb{E}[Y|X] = \varphi(X)$ ES LINEAL ENTONCES $\tilde{Y} = \varphi(X)$

EJEMPLO [5.13]

T: TIEMPO EN QUE LA RATA SALE DEL LAB → MEZCLA TIEMPOS

CALCULAR $\mathbb{E}[T]$ $\quad D = \{1, 2, 3\}$ PUERTA QUE ELIGE

$$\mathbb{P}(D = i) = \frac{1}{3}$$

$T_1 = T | D_1$ $\quad T_2 = T | D_2$ $\quad T_3 = T | D_3 = 9$ MIN

$\sim T + 12$ $\quad \sim T + 14$ $\quad$ (V.A CTE)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T|D_1]\,\mathbb{P}(D=1) + \mathbb{E}[T|D_2]\,\mathbb{P}(D=2) + \mathbb{E}[T|D_3]\,\mathbb{P}$$

$$= \mathbb{E}[T_1]\,\frac{1}{3} + \mathbb{E}[T_2]\,\frac{1}{3} + \mathbb{E}[T_3]\,\frac{1}{3}$$

↓ COMBINACION LINEAL DE LA MEZCLA

$$= \mathbb{E}[T+12] \cdot \frac{1}{3} + \mathbb{E}[T+14] \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{3}\left[(\mathbb{E}[T] + 12) + (\mathbb{E}[T] + 14) + 9 \right]$$

$$3\mathbb{E}[T] - 2\mathbb{E}[T] = 12 + 14 + 9$$

$$\mathbb{E}[T] = 35 \text{ MÍN}$$

TIPS PARA MAXIMOS Y MINIMOS

$$U = \text{MÍN}\{X,Y\} = \begin{cases} X & X \leq Y \\ Y & X > Y \end{cases} = X\,\mathbb{1}\{X \leq Y\} + Y\,\mathbb{1}\{X>Y\}$$

$$V = \text{MAX}\{X,Y\} = \begin{cases} Y & X \leq Y \\ X & X > Y \end{cases} = Y\,\mathbb{1}\{X \leq Y\} + X\,\mathbb{1}\{X>Y\}$$

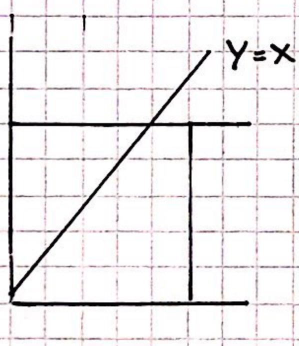
- $U+V = X+Y$
- $V-U = |Y-X| = |X-Y|$
- $\mathbb{P}(g(U) \in A) = \mathbb{P}(g(V) \in A \mid X \geqslant Y)\,\mathbb{P}(X \geqslant Y) + \mathbb{P}(g(U) \in A \mid X<Y)\,\mathbb{P}(X<$

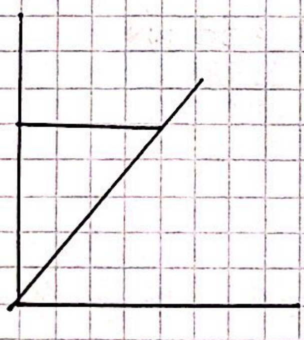
PARTICIONO PARA CONTROLAR CUAL ES EL MAX Y MIÑ $= \mathbb{P}(g(Y) \in A \wedge X \geqslant Y) + \mathbb{P}(g(X) \in A \wedge X<Y)$

ANALOGO PARA $g(V)$

- $g(X,Y) = (U,V)$ $\qquad (X,Y) \sim \mathcal{U}([0,1] \times [0,1])$

$$g = \begin{cases} U = \text{MIN}(X,Y) \\ V = \text{MAX}(X,Y) \end{cases} \qquad (X,Y) \rightarrow (U,V)$$





HALLAR $F_{U,V}(U,V)$ $\qquad F_{U,V} = \dfrac{1}{\text{AREA}(\triangledown)}\,\mathbb{1}\{0<U<V<1\}$