PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.16 - 61.09 - 81.04)

Primer parcial (Parte 1) - Tema 1 | Segundo cuatrimestre – 2021
Duración: 2.5 horas. | 16/10/2021 – 10:00 hs.

Escribir claramente en la hoja: apellido y nombres, padrón y curso

---

De los 3 ejercicios, al menos 2 deben estar correctamente desarrollados y resueltos para aprobar el examen. Los ejercicios debe resolverse a mano. Una vez terminado el examen, debe entregarse vía campus, sección Parciales y Autoevaluaciones, en el enlace con el nombre correspondiente a la sala en la que rindió el examen. En caso de caída del campus debe enviarse foto o escaneado del mismo a jmgarcia@fi.uba.ar. La cámara debe estar prendida durante toda la duración del examen para constatar su presencia.

---

1. Akira se presenta a tomar un examen presencial a sus estudiantes con 48 medialunas y 36 churros. De las medialunas 20 están rellenas con crema pastelera, 20 con dulce de leche y el resto no tiene relleno. De los churros, la mitad son rellenos de dulce de leche y el resto no tiene relleno. Todas las facturas se mezclan en la mesa del aula y Akira elige 3 al azar para colocar en un plato y repartir en la primera fila. Si en el plato había exactamente una medialuna con dulce de leche, calcular la probabilidad de que todas las facturas en ese plato fueran rellenas.

---

2. Xena y Zeus planean encontrarse en el Monte Olimpo para un festín a la medianoche. Los tiempos de llegada (en horas después de la medianoche) de Xena y Zeus son variables aleatorias X y Z respectivamente, con densidad conjunta

$$f_{X,Z}(x,z) = \frac{xz}{8}\mathbf{1}\{0 < x < 2, 0 < z < 2x\}.$$

Para predecir el horario en el que llegará Xena, el Oráculo selecciona un número al azar sobre el intervalo $(0, 1)$, revelando el número $0,4096$. A partir del valor revelado por el Oráculo, simular un valor de x para predecir la hora de llegada de Xena.

---

3. Para ir al trabajo Marilina hace un tramo en tren, seguido por otro tramo en bicicleta. El tiempo (en minutos) que debe esperar el tren es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 15. Una vez que sube al tren, el viaje tiene una duración fija de 10 minutos. Luego de bajar del tren, el tiempo que tarda en hacer el tramo en bicicleta (en minutos) es una variable aleatoria independiente de todo lo demás, con distribución uniforme sobre el intervalo $(10, 15)$. Hallar la esperanza del tiempo total de viaje si se sabe que tuvo que esperar más de 5 minutos a que llegue el tren.

(1)

Rellenos = 58

48 medialunas → 20 Pastelera, → 20 Dulce de leche, → 8 no rellenos

36 churros → 18 dulce de leche, → 18 no rellenos

$\#\Omega = \binom{84}{3}$

A: 3 facturas son rellenas

B: 1 medialuna tiene dulce de leche

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\dfrac{\binom{20}{1}\binom{38}{2}}{\binom{84}{3}}}{\dfrac{\binom{20}{1}\binom{64}{2}}{\binom{84}{3}}} = \frac{\binom{38}{2}}{\binom{64}{2}} = 0{,}3487103$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A|B) = 0{,}3487103}$$

[2] $f_{XZ}(x,z) = \frac{xz}{8} \, \mathbb{1}\{0<x<2,\ 0<z<2x\}$

※ Random $= 0{,}4096$ → Realización de una va $\sim U(0,1)$

Obtener una simulación de X a partir de $0{,}4096$

$X = F_X^{-1}(F_Y(Y))$ si $0 < F_Y(Y) < 1$

$x_i = F_X^{-1}(F_Y(y_i))$ → muestra de X, a partir de las muestras de Y: y_i

Caso Particular: $Y = U \sim U(0,1)$

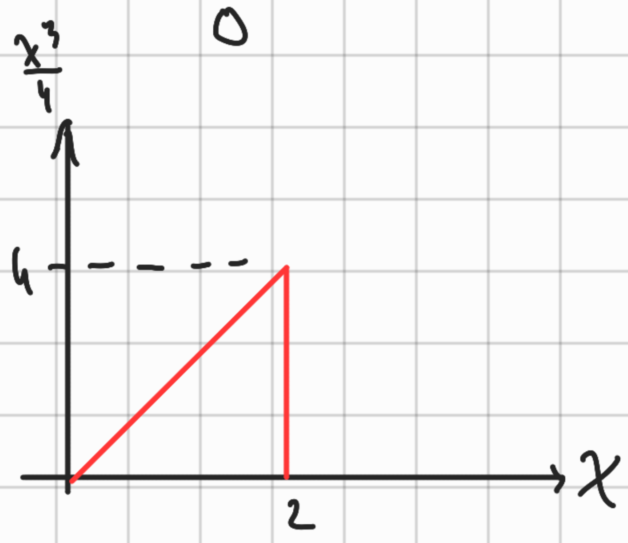
$X = F_X^{-1}(U)$

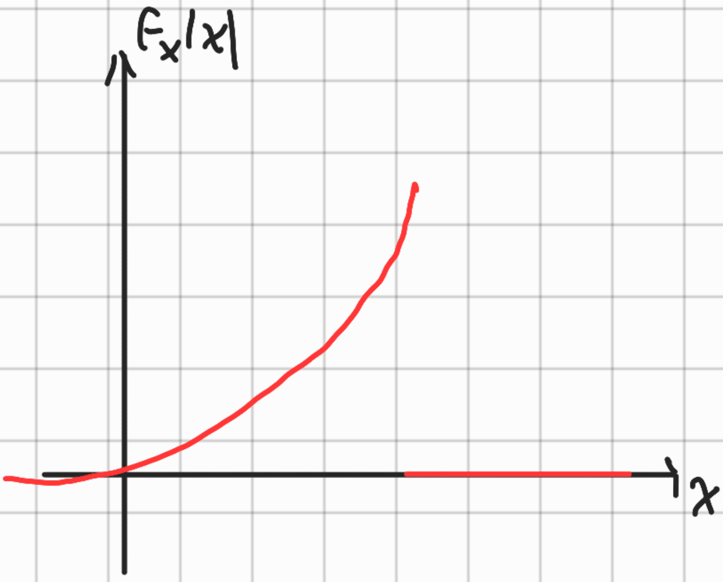
$x_i = F_X^{-1}(u_i)$

→ me piden $x_1 = F_X^{-1}(\overbrace{0{,}4096}^{u_1})$

$$F_X(x) = \int_0^{2x} \frac{xz}{8}\, dz \ \mathbb{1}\{0<x<2\} = \frac{x}{8}\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^{2x} \mathbb{1}\{0<x<2\}$$

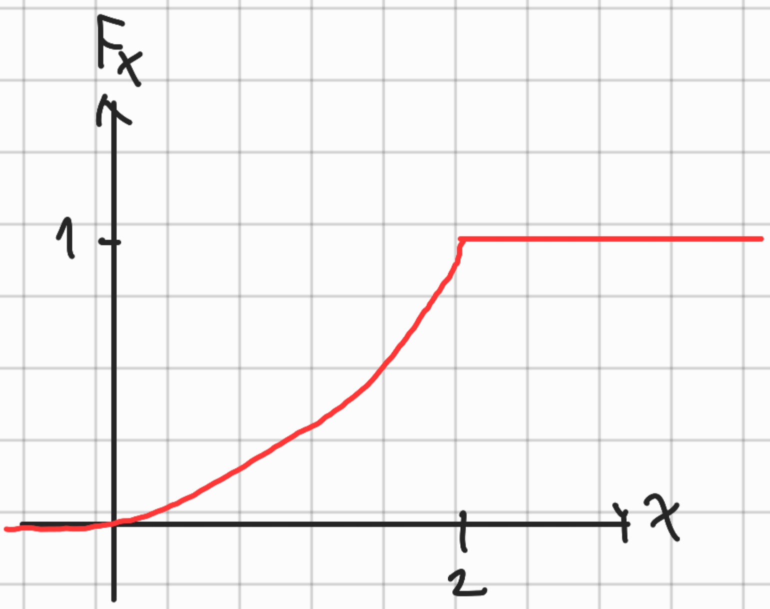
$$= \frac{x^3}{4}\,\mathbb{1}\{0<x<2\}$$





$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{x^3}{4}\,dx, \text{ si } 0 < x < 2 \\ 1 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \frac{x^4}{16}\,\mathbb{1}\{0 < x < 2\} + \mathbb{1}\{2 \leq x\}$$



$$F_X^{-1}(u) = (16u)^{1/4}, \quad 0 < u < 1$$

$$x_1 = F_X^{-1}(u_1)$$
$$= \sqrt[4]{16 \cdot 0{,}4016} = 8{,}5$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 8{,}5}$$

(3)

X: Tiempo que espera el tren $X \sim Exp(1/15)$

B: Tiempo que tarda en hacer el tramo en bici $\sim U(10,15)$

T: Tiempo que tarda en llegar al trabajo si espero 5 min el tren

$T = X|X>5 + 10 + B \Rightarrow E[T]$

$E[T] = E[X|X>5 + 10 + B]$

$= E[\underbrace{X|X>5}_{\text{Falta de memoria}}] + 10 + E[B] = 5 + 15 + 10 + \frac{10+15}{2} = 42{,}5$

$= 5 + X', X' \sim Exp(1/15)$

$\Rightarrow \boxed{E[T] = 42{,}5}$