Guía 1

1.1 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(**a**) Hallar la menor álgebra de subconjuntos de Ω tal que el subconjunto $\{1, 2, 3\}$ pertenezca a ella.

(**b**) Hallar la menor álgebra de subconjuntos de Ω tal que los subconjuntos $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ pertenezcan a ella.

1.2 [*DeGroot, pp. 38-42*] En un grupo de 200 estudiantes de Ingeniería Industrial, 137 cursan Álgebra II, 60 Probabilidad y 124 Materiales Industriales. Además, 33 cursan Álgebra II y Probabilidad; 29 Probabilidad y Materiales Industriales; y 92 Álgebra II y Materiales industriales. Finalmente, 18 cursan las tres materias. Se elige un estudiante al azar en ese grupo. Calcular la probabilidad de que

(**a**) curse Álgebra II o Probabilidad.

(**b**) no curse ni Álgebra II ni Probabilidad.

(**c**) curse alguna de las tres materias.

(**d**) curse solo una de las tres materias.

(**e**) no curse ninguna de las tres materias.
Para cada caso representar los eventos en un diagrama de Venn.

1.3 Sea $\Omega = \{a, b, c\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, donde $p(a) = \frac{1}{2}, p(b) = \frac{1}{3}, p(c) = \frac{1}{6}$. Calcular las probabilidades de los 8 subconjuntos de Ω.

1.4 Un dado equilibrado se arroja dos veces. Hallar la probabilidad de que

(**a**) la suma de los resultados sea 7.

(**b**) el primer resultado sea mayor que el segundo.

(**c**) los dos resultados sean distintos y su suma no supere 7.

(**d**) el módulo de la diferencia de los resultados sea mayor que 1.

1.5 Se tienen dos urnas a y b. En a hay 5 bolas rojas y 3 blancas, y en b hay 2 rojas y 3 blancas. Si se extraen al azar una bola de cada urna, hallar la probabilidad de que

(**a**) ambas sean rojas.

(**b**) ambas sean del mismo color.

(**c**) sean de distinto color.

(**d**) la bola extraída de la urna b sea blanca.

1.6 Cada noche, después de cenar, el matrimonio Galíndez tira 4 dados. Si no sale ningún 1, le toca al Sr. Galíndez lavar los platos. En caso contrario, a su esposo. En promedio, ¿quién lava los platos más seguido?

1.7 Se realiza el experimento de tirar un dado hasta que sale el primer 6, anotando el número N de tiradas necesarias.

(**a**) Describir un posible espacio muestral para este experimento.

(**b**) Sea A_n el evento descrito por $N = n$. Hallar $\mathbf{P}(A_1), \mathbf{P}(A_8), \mathbf{P}(A_{2016})$.

(**c**) Sea B_n el evento descrito por $N > n$. Hallar $\mathbf{P}(B_1), \mathbf{P}(B_8)$. ¿Cómo se describiría en términos de lo que pasa con el dado el evento B_{2016}?

(**d**) Mostrar que para cualquier n, $B_{n+1} \subset B_n$.

(**e**) Sea $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. ¿Cómo se describiría en términos de lo que pasa con el dado el evento B? Hallar $\mathbf{P}(B)$.

1.8 Sea $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{n \in A} p(n)$, donde $p(n) = c/n!$. Hallar el valor de c y calcular $\mathbf{P}(\{0, 2, 4, 6, \dots\})$.

1.9 [*Feller, pág. 18 y 24*] Juan, Pedro y María juegan al ping-pong. El que gana un partido sigue jugando, mientras que el que lo pierde es reemplazado por el que no jugaba. Se gana una cerveza el primero que gana dos partidos seguidos, completando así un juego. El primer partido es entre Juan y Pedro. La probabilidad de que Juan gane el primer partido es 5/9.

Para cada k, asignamos a cada juego posible que dura exactamente k partidos, la probabilidad $\frac{1}{3 \cdot 2^{k-1}}$. Si describimos un juego indicando la secuencia de ganadores mediante la de sus iniciales, el juego $JMPP$ tendrá probabilidad 1/24, el juego $(PMJ)^6PMM$ (dejamos a cargo del lector la interpretación de la notación) probabilidad $\frac{1}{3 \cdot 2^{20}}$.

(**a**) Describir un espacio muestral para los resultados del juego. (*sugerencia*: analizar las secuencias posibles usando la notación ya introducida.)

(**b**) Hallar las probabilidades de que cada uno de los jugadores Juan, Pedro o María se tome la cerveza.

(**c**) Hallar la probabilidad de que Juan gane el primer partido y el juego dure para siempre sin que nadie se gane la cerveza.

(**d**) Hallar la probabilidad de que el juego dure para siempre sin que nadie se gane la cerveza.

1.10 Se sortea un número al azar dentro del intervalo $[0, 1]$.

(**a**) Hallar la probabilidad de que los primeros tres dígitos sean 3, 1, 4 (es decir, $0.314\ldots$).

(**b**) Hallar la probabilidad de que el 0 no esté entre los primeros 4 dígitos.

(**c**) Hallar la probabilidad de que el 0 no sea uno de sus dígitos.

1.11 *Simulación de experimentos aleatorios.* Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ el espacio muestral correspondiente a un experimento aleatorio. Cada punto $\omega_k \in \Omega$ tiene asignada la probabilidad p_k. Definimos el siguiente mecanismo para *simular el experimento.*

- Sean $a_0 = 0$, $a_i = \sum_{k=1}^{i} p_k$. Subdividimos el intervalo $(0,1]$ en los n intervalos $I_i = (a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \dots, n$. Notar que $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = (0,1]$, y que la longitud de I_i es p_i.
- Dado un número aleatorio $U \in (0,1]$, determinamos a cuál de los intervalos I_i pertenece, y consideramos que el resultado simulado de la realización del experimento ha sido ω_i.

Si queremos simular m realizaciones del experimento, usaremos m veces el mecanismo anterior, cada vez con un nuevo número aleatorio U.

(**a**) Dados los números aleatorios $0.2, 0.7, 0.9, 0.1$, simular el resultado de 4 tiradas sucesivas de un dado equilibrado.

(**b**) Mediante diez mil simulaciones estimar la probabilidad de que al arrojar 2 dados equilibrados la suma de los resultados sea menor que 11. Comparar la estimación obtenida con el valor verdadero de la probabilidad.

1.12 Mediante 20 simulaciones estimar las siguientes probabilidades

(**a**) Obtener al menos un as en seis tiros de un dado.

(**b**) Obtener al menos dos ases en doce tiros de un dado.

(**c**) De acuerdo con los resultados, si se quiere apostar a uno de los resultados, ¿cuál de las dos apuestas es más conveniente?

(**d**) Repetir los incisos anteriores mediante 10000 simulaciones.

1.13 Una urna contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9.

(**a**) Se extraen al azar *con reposición* cinco bolas. Calcular la probabilidad de que

1. las cinco sean iguales.
2. según el orden de extracción se observen los números 1,3,5,7,9.
3. se observen los cinco números impares.
4. las cinco sean distintas.

(**b**) Calcular las probabilidades del inciso anterior, suponiendo que las extracciones se hacen *sin reposición.*

1.14 [*Feller, pág. 56*] La encargada del edificio donde viven otras 29 personas echa a rodar un rumor. A la mañana temprano se lo dice a una vecina, quien a su vez lo repite a una tercera, etcétera. En cada paso el emisor del rumor elige al azar al receptor entre los restantes 29 habitantes del edificio.

(**a**) Hallar la probabilidad de que el rumor se transmita 12 veces sin retornar a la encargada que lo originó.

(**b**) Hallar la probabilidad de que el rumor se transmita 12 veces sin que ninguna persona lo reciba más de una vez.

1.15 Una fragata parte de Jamaica con 13 piratas para atacar 3 puertos. Cada pirata elige al azar el puerto en que desembarcará.

(**a**) Calcular la probabilidad de que cuatro piratas desembarquen en Portobelo, cuatro en Maracaibo y cinco en Gibraltar.

(**b**) Calcular la probabilidad de que exactamente 6 piratas desembarquen en Portobelo y seis o más desembarquen en Maracaibo.

(**c**) Calcular la probabilidad de que en algún puerto desembarquen exactamente cinco piratas y en algún otro exactamente cuatro.

(**d**) Calcular la probabilidad de que Morgan se encuentre entre los 13 piratas.

1.16 Se colocarán 7 gatos en 5 cajas. Suponiendo que los gatos son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables.

(**a**) Calcular la probabilidad de que la primera caja contenga exactamente dos gatos y la última caja quede vacía.

(**b**) Calcular la probabilidad de que la cuarta caja contenga más de 3 gatos.

1.17 Una planta de ensamblaje recibe una partida de 25 piezas de precisión que incluye exactamente k defectuosas. La división de control de calidad elige 5 piezas al azar para controlarlas y rechaza la partida si encuentra al menos 1 defectuosa.

(**a**) Si $k = 3$, ¿cuál es la probabilidad de que la partida pase la inspección?

(**b**) ¿Cómo se comporta la probabilidad $p(k)$ de que la partida pase la inspección?

(**c**) ¿Cuál es la máxima probabilidad de aceptar una partida que contenga más de 5 piezas defectuosas?

1.18 Se elige al azar una permutación de las letras A, T, C, G. Mostrar que

(**a**) Los eventos "A precede a T" y "C precede a G" son independientes.

(**b**) Los eventos "A precede *inmediatamente* a T" y "C precede *inmediatamente* a G" *no* son independientes.

1.19 Se elige un número al azar en el intervalo $(0, 1)$

(**a**) Probar que los eventos "el primer dígito es 0" y "el segundo dígito es 1" son independientes.

(**b**) Probar que los eventos "el primer dígito es 0" y "el segundo dígito no es 1" son independientes.

1.20 Un dado equilibrado se arroja dos veces.

(**a**) Sea A el evento "el primer resultado es par", B el evento "el segundo resultado es par" y C el evento "la suma de los resultados es par". Mostrar que los eventos A, B, C son dos a dos independientes, pero los eventos A, B, C no son independientes.

(**b**) Sea A el evento "el primer resultado es 1,2 o 3", B el evento "el primer resultado es 3,4 o 5" y C el evento "la suma de los resultados es 9". Mostrar que aunque $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, los eventos A, B, C no son independientes.

1.21 El motor de un automóvil consta de 300 componentes individuales. Cada uno de estos es entregado independientemente por un proveedor diferente. Los 300 proveedores garantizan que la probabilidad de entregar un componente defectuoso es 0.01 o menor. Se considera aceptable el motor sólo cuando ninguno de sus componentes es defectuoso.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el motor sea aceptable.

(**b**) ¿Qué nivel de calidad debe exigirse a cada proveedor (es decir, qué probabilidad de componente defectuoso) si se desea que al menos el 98 % de los motores armados sea aceptable?

1.22 Se tienen 3 urnas a, b, c. En a hay dos bolas rojas y una blanca, en b tres rojas y dos blancas, en c cinco rojas y tres blancas. Se extrae una bola de a: si es roja, se extrae una bola de b, en caso contrario se extrae una bola de c. Indiquemos $R_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción i fue roja, y $B_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción i fue blanca.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(B_1)$.

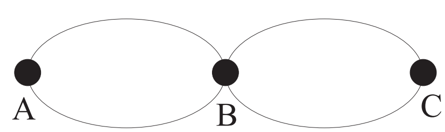
(**b**) Calcular $\mathbf{P}(B_2)$.

(**c**) Describir mediante la notación detallada antes y calcular la probabilidad de que la primer bola extraída haya sido blanca sabiendo que la segunda fue roja.

(**d**) Calcular la probabilidad de que alguna de las bolas extraídas sea roja.

(**e**) Suponiendo ahora que en a hay 200 bolas rojas y 100 blancas, en b 150 rojas y 100 blancas, y en c 125 rojas y 75 blancas, resolver en estas nuevas condiciones los incisos anteriores. Si se obtienen los mismos resultados, explicar por qué.

1.23 Existen dos caminos de A hasta B y dos caminos de B hasta C.



Cada uno de estos caminos está bloqueado con probabilidad 0.25 independientemente de los demás. Hallar la probabilidad de que exista un camino abierto desde B hasta C sabiendo que no hay ninguna trayectoria abierta desde A hasta C.

1.24 Un canal de comunicación binario simple transporta mensajes usando sólo dos señales (bits): 0 y 1. Supongamos que en un canal de comunicación binario dado el 55 % de las señales emitidas son 1, que si se emitió un 0 la probabilidad de que se reciba un 0 es 0.95, y que si se emitió un 1 la probabilidad de que se reciba un 1 es 0.99. Calcular

(**a**) la probabilidad de que una señal recibida sea 1.

(**b**) dado que se recibió un 1, la probabilidad de que la señal correspondiente emitida haya sido un 1.

1.25 El 5 % de los bits transmitidos por un canal de comunicación binario es 0. El programa receptor indica que hay un 0 en el mensaje cuando efectivamente el 0 ha sido emitido, con probabilidad 0.9. ¿Cuál debe ser la probabilidad de que el receptor indique que hay un 1 cuando efectivamente el 1 ha sido emitido, para que la probabilidad de que haya sido emitido un 0 cuando el receptor indica que hay un 0 sea 0.99?

1.26 Harvey "*dos caras*" tiene una moneda de dos caras y dos monedas con cara y ceca equilibradas.

(**a**) Elige una moneda al azar y la arroja al aire dos veces consecutivas. Si el primer resultado fue cara, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también sea cara?

(**b**) Elige una moneda al azar, la arroja al aire y sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

(**c**) Harvey arroja la misma moneda por segunda vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

(**d**) Harvey arroja la misma moneda por tercera vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

1.27 La urna a contiene 3 bolas blancas y 7 rojas. La urna b contiene 12 blancas y 8 rojas. Se elige una urna al azar y se extrae una bola; esta bola se reintegra a la misma urna y se vuelve a extraer una bola de ella.

(**a**) Si la primer bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo sea?

(**b**) ¿Son independientes los sucesos "primera bola es blanca" y "segunda bola es blanca"?

1.28

(**a**) Se tienen dos monedas, a y b, de probabilidades 1/2 y 1/3 de cara, respectivamente. Se elige una moneda al azar y se la tira dos veces. Considere los eventos $A_i =$"salió cara en el i-ésimo tiro", $i = 1, 2$, y $B =$ "se eligió la moneda a". ¿Dado B, A_1 y A_2 son independientes? ¿A_1 y A_2 son independientes?

(**b**) Se tira una moneda equilibrada dos veces. Considere los eventos $A_i =$ "salió cara en el i-ésimo tiro", $i = 1, 2$, y $B =$ "salió al menos una ceca". ¿A_1 y A_2 son independientes? ¿Dado B, A_1 y A_2 son independientes?

Ejercicios Complementarios

1.29 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i$, donde $p_1 = 0.2, p_2 = 0.1, p_3 = 0.35, p_4 = 0.05, p_5 = 0.3$. Sea $A = \{2, 3\}$.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(A)$.

(**b**) Hallar, si existe, un evento $B \subset \Omega$ tal que $A \subset B$ y $\mathbf{P}(B) = 0.65$.

(**c**) Hallar todos los eventos C tales que $\mathbf{P}(A \cap C) = 0$ y $\mathbf{P}(C) = 0.3$.

(**d**) Hallar todos los eventos D tales que $A \cap D = \varnothing$ y $\mathbf{P}(A \cup D) \geqslant 0.6$.

(**e**) Repetir los incisos anteriores si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, con $p_6 = 0$, y $A = \{2, 3, 6\}$.

1.30 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad tal que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ es la menor álgebra tal que $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ pertenecen a ella, y $\mathbf{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(\{2\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{12}$. Calcular las probabilidades de todos los eventos aleatorios.

1.31 [*Abramson*] Dado un experimento aleatorio $\mathcal{E}$ con $r_1, r_2, \ldots, r_n$ resultados posibles, que tienen probabilidades respectivas $p_1, p_2, \ldots, p_n$, se llama *entropía* del experimento $\mathcal{E}$ al valor

$$H(\mathcal{E}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i).$$

Demostrar que la entropía es máxima cuando los resultados son equiprobables.

1.32 Sea $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$. Supongamos que $\mathbf{P}$ es una probabilidad definida en una familia de subconjuntos de Ω que incluye todos los rectángulos R, y satisface que si R es un rectángulo:

$$\mathbf{P}(R) = \begin{cases} |R| \cdot \frac{6}{300} & \text{si } R \subset [0,5] \times [0,5] \\ |R| \cdot \frac{1}{300} & \text{si } R \subset [0,5] \times [5,10] \\ |R| \cdot \frac{5}{300} & \text{si } R \subset [5,10] \times [0,5] \\ 0 & \text{si } R \subset [5,10] \times [5,10] \end{cases}$$

(**a**) Calcular $\mathbf{P}\left([3, 6] \times ([1, 4] \cup [6, 7])\right)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : x + y \leqslant 2\})$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : 2 \leqslant x + y \leqslant 13\})$.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : (x - 5)^2 + (y - 5)^2 < 10\})$.

1.33 Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ el cuadrado unitario. Consideraremos eventos a los subconjuntos $\Lambda \subset \Omega$ que admiten área $|\Lambda|$, y definimos $\mathbf{P}(\Lambda) = |\Lambda|$.

(**a**) Sea $A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Hallar $\mathbf{P}(A)$.

(**b**) Sean, para $k = 1, 2, \ldots$, $B_k = \{(x, y) \in \Omega : x + y \leqslant 1/2 + 1/k\}$. Hallar $\mathbf{P}(B_k)$ y $\mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k)$.

(**c**) Sean, para $k = 1, 2, \ldots$, $C_k = \{(x, y) \in \Omega : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leqslant 1/k^2\}$ y $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Hallar $\mathbf{P}(C_k)$ y $\mathbf{P}(C)$.

(**d**) Suponer que Ω modela un blanco cuadrado al que se dispara un dardo, y $\mathbf{P}(\Lambda)$ es la probabilidad de que el dardo se clave en la zona del blanco descrita por Λ. ¿Cómo se describirían en términos de lo que pasa con el dardo los eventos C_k y C del inciso anterior?

1.34 *Método de Monte Carlo.* Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función continua y sea $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

(**a**) Se elige un punto de coordenadas (X, Y) al azar en el rectángulo $[a, b] \times [0, M]$. Relacionar la probabilidad del evento $A = \{Y \leqslant f(X)\}$ con el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$.

(**b**) Obtener un método para estimar el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ basado en los resultados de n simulaciones del experimento descrito en el inciso anterior.

(**c**) Utilizar el método obtenido en el inciso anterior para estimar el valor de la integral $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ basándose en los resultados de 10.000 simulaciones.

1.35 Se elige un número al azar en el intervalo $(0, 1)$.

(**a**) Probar que los eventos “el primer dígito es 2”, “el segundo dígito es 3”, el “tercer dígito es 5” y el “cuarto dígito es 8 y el 1 aparece alguna vez después del décimo dígito” son independientes.

(**b**) Analizar la independencia de los eventos: “el primer dígito no es 2”, “el segundo dígito es 3 y el tercero es 5”.

(**c**) Analizar la independencia de los eventos: “el primer dígito es 1 o el tercero no es 5”, “el segundo dígito es 3 y el cuarto es 8 y el 1 aparece alguna vez después del décimo dígito”.

1.36 Una materia se aprueba con un examen *multiple choice* de 5 preguntas, con 3 opciones de respuesta en cada pregunta. Se asume que los eventos $A_i =$“el alumno contesta correctamente la pregunta i” son independientes y tienen todos la misma probabilidad p.

(**a**) ¿Cómo debería establecerse un criterio de aprobación (cantidad de respuestas correctas) para asegurar que sean reprobados al menos el 95 % los alumnos que no saben nada de la materia y responden totalmente al azar?

(**b**) Fijado el criterio anterior, si un alumno estudió lo suficiente como para que la probabilidad de responder bien cada una de las preguntas sea $p = 0.8$, ¿con qué probabilidad aprobará el examen?

(**c**) Graficar la probabilidad de aprobar en función de p. ¿Para qué valor de p se aprueba el examen con probabilidad mayor a 0.95?

1.37 Una empresa compra una gran de cantidad de bulones a un mismo proveedor. Cada vez que se recibe un envío, se realiza un control de calidad por muestreo: se prueban 80 bulones seleccionados al azar del total; si se encuentra más de un bulón defectuoso se rechaza el envío. En caso contrario, se lo acepta. Sea p la probabilidad de producir un bulón defectuoso en el proceso de fabricación. De acuerdo a los estándares de calidad, se desea satisfacer la condición $p < 0.005$. Los defectos de los bulones son independientes entre sí.

(**a**) Hallar la probabilidad de rechazar un lote fabricado bajo la condición $p = 0.004$.

(**b**) Hallar la probabilidad de aceptar un lote fabricado bajo la condición $p = 0.05$.

(**c**) Graficar la probabilidad de aceptar un envío en función de p (*Curva característica del plan de muestreo*).

(**d**) Si se sabe que el lote cumple los estándares de calidad, ¿cuál es la máxima probabilidad de tomar una decisión errónea sobre el mismo?

1.38 Se tienen dos bolas. Cada una se pinta de rojo o de verde, independientemente y con probabilidad 1/2 para cada color. Luego ambas son colocadas en una urna.

(**a**) Si se extrae una bola de la urna y es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra bola sea roja?

(**b**) Si se sabe que en la urna hay una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra sea roja?

1.39 En el contexto del **Ejercicio 1.9**:

(**a**) Hallar la probabilidad de que Juan gane la primera partida.

(**b**) Hallar la probabilidad de que María gane la segunda partida.

(**c**) Hallar la probabilidad de que María gane la duodécima partida.

(**d**) Hallar la probabilidad de que Pedro haya ganado la primera partida sabiendo que ganó la cerveza.

(**e**) Hallar la probabilidad de que Juan haya ganado la cerveza sabiendo que el juego duró 25 partidos.

1.40 Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unitario. Consideraremos eventos a los subconjuntos $\Lambda \subset \Omega$ que admiten área $|\Lambda|$, y definimos $\mathbf{P}(\Lambda) = |\Lambda|$.

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \Omega : |x - 1/2| + |y - 1/2| \leqslant 1/3\}, \\
B &= \{(x,y) \in \Omega : \text{máx}\{|x - 1/2|, |y - 1/2|\} \leqslant 1/3\}, \\
C &= \{(x,y) \in \Omega : x \leqslant 2/3\}, \\
D &= \{(x,y) \in \Omega : y \geqslant 2/3\}.
\end{aligned}$$

(**a**) Dado A, ¿son C y D independientes?

(**b**) Dado B, ¿son C y D independientes?

1.41 Juan y María juegan a cara o ceca con una moneda equilibrada. Inicialmente Juan tiene cinco monedas y María tres. Cuando sale cara Juan le da una moneda a María, cuando sale ceca María le da una moneda a Juan. Arrojan sucesivamente la moneda hasta que alguno se queda sin monedas. Hallar la probabilidad de que Juan sea el primero en quedarse sin monedas. (*sugerencia*: si entre los dos tienen 8 monedas, sea p_n la probabilidad de que Juan sea el primero en quedarse sin monedas *si inicialmente tiene* n, con $n = 0, \ldots, 8$. Hallar p_0 y p_8. Mostrar que $p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1}$ y resolver ecuaciones. Aplicar al caso $n = 5$).

1.42 Pedro vive en Corrientes al 3400. Una noche de sábado, después de tomar una copa de más con Juan en "La Giralda" (Corrientes 1453), trata de volver caminando por Corrientes a su casa, pero elige la dirección al azar, y como sabe que está borracho, en cada esquina vacila y vuelve a elegir la dirección al azar. En un rapto de lucidez, decide que si llega antes a Alem que al Abasto, se echará a dormir en La Recova. Hallar la probabilidad de que Pedro duerma en su cama. (*sugerencia*: comparar con **Ejercicio 1.41**)