Métodos para construir un Test
- Cociente de Verosimilitud
- Ej: prueba de media de $N(\mu, \sigma_0^2)$
- " " λ de $Exp(\lambda)$

$\underbrace{\hspace{6cm}}$ simple o unilateral

ahora veremos test p/familias de Cociente de verosimilitud monotono (CVM)

Def: $X \sim f_\theta(x)$ es flia de CVM en $T = T(\underline{x})$ si $\theta_1 < \theta_2$ entonces

$$\frac{f_{\theta_2}(\underline{x})}{f_{\theta_1}(\underline{x})} \text{ es creciente en } T = T(\underline{x})$$

Casos importantes

1) Si X corresponde a familia exponencial a un parametro θ si:

- Si $C(\theta)$ es creciente $\Rightarrow$ la flia es CVM en $T = \sum_{i=1}^{n} r(X_i)$
- Si $C(\theta)$ es decreciente $\Rightarrow$ " " " " $T = -\sum_{i=1}^{n} r(x_i)$

2) Si $X \sim U(0,\theta) \Rightarrow$ la familia es CVM en $T = \max\{X_i\}$

Teorema

si $H_0: \theta \leq \theta_0$ vale lo mismo

Si X corresponde a flia CVM en T (ojo! un parametro θ)

1) Para $\boxed{H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta > \theta_0}$ el test $\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{T(\underline{x}) > K\}$

es un test "bueno" (Uniformemente + potente) y $\pi(\theta)$ es creciente

Hipotesis unilaterales

2) Para $\boxed{H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta < \theta_0}$ el test $\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{T(\underline{X}) < K\}$ es

uniformemente + potente y $\pi(\theta)$ es decreciente

En cualquier caso $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(\delta(\underline{X}) = 1)$

1. Cada vez que Alicia sigue al Conejo Blanco, consigue salir de Wonderland luego de un tiempo (en horas) exponencial de parámetro λ. Si en 10 experiencias de escape Alicia obtuvo un tiempo total de 8.5 horas, decidir con un nivel de significación de 0.05 si se puede afirmar que el $\underbrace{\text{tiempo medio}}_{E(X)}$ que demora en salir es menor a 1 hora.

X: Tiempo que demora en salir $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

Dato: en m.a. $n=10$, $\sum_{i=1}^{10} x_i = 8{,}5$ (hs)

Quiero construir un test con $\alpha = 0{,}05$, $n=10$

para $H_0: \lambda = 1$ $\quad H_1: E(X) = \underbrace{\frac{1}{\lambda} < 1}_{\lambda > 1}$ ← Hipótesis unilateral

- flia a 1 parámetro
- $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Longrightarrow$ flia exponencial a 1 parámetro vimos que:

$$c(\lambda) = -\lambda$$
$$r(x) = x$$

Como $c(\lambda)$ es decreciente $\Rightarrow$ la flia es CVM a $T = -\sum_{i=1}^{10} r(X_i)$

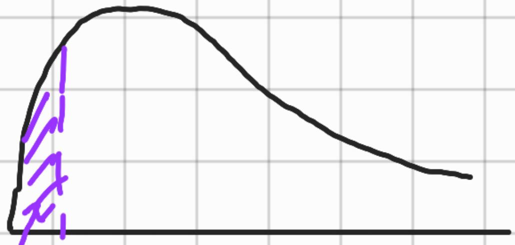
$$= -\sum_{i=1}^{10} X_i$$

$\Rightarrow$ El test será $\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{T > K\} = \mathbb{1}\{-\sum_1^{10} X_i > K\}$

$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{\sum_{i=1}^{10} X_i < \underbrace{-K}_{K'}\}$ ¿Cómo saco K'?

Como $\alpha = \sup_{\lambda \in \Theta_0} \pi(\lambda) = \pi(\lambda_0) = \mathbb{P}_{\lambda=\lambda_0=1}\left(\delta(\underline{X}) = 1\right)$

$$\mathbb{P}_{\lambda=1}\left(\underbrace{\sum_{1}^{10}}\, X_i < k'\right) = 0,05$$



si $\lambda = 1 \Rightarrow \sum X_i \sim \Gamma(10,1)$

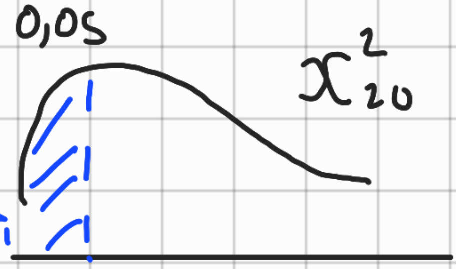
$\Rightarrow k' =$ cuantil $0,05$

$= 5,425$

Otra forma:

$$X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \to 2\lambda X \sim \mathcal{E}xp(1/2) \longrightarrow 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, 1/2) \equiv \chi^2_{2n}$$

$$\mathbb{P}_{\lambda=1}\left(\underbrace{2 \cdot 1 \sum X_i}_{\sim \chi^2_{20}} < k' \cdot 2 \cdot 1\right) = 0,05$$



Cuantil de χ^2_{20} es $10,85$

Entonces: $\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i < 5,425\right\}$ ← usando cuantil $\Gamma(10,1)$

ó $= \mathbb{1}\left\{2 \sum_{i=1}^{10} X_i < 10,85\right\}$ ← usando cuantil de χ^2_{20}

El ej pide decidir con dato $\sum_{1}^{10} x_i = 8,5$

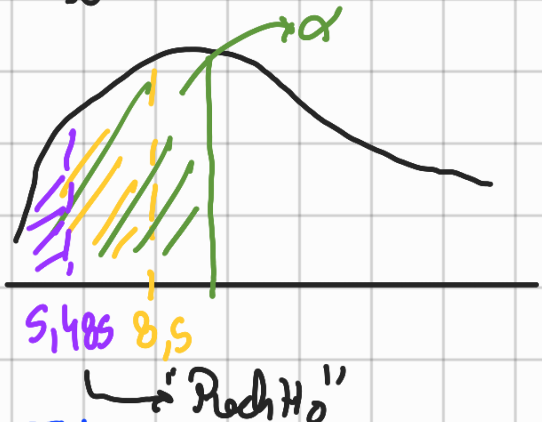
$$\Rightarrow \delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \sum_{1}^{10} x_i < 5,425 \right\} = \mathbb{1}\{8,5 < 5,425\} = 0$$

"Chico" porque está evaluado en el dato

$\Rightarrow$ Decimos q' no hay evidencia para (Rech H_0) decir que el tiempo medio es menor a 1 hora.

¿Cuanto es el p-valor para este caso?

p-valor = menor nivel de significación que me lleva a Rech H_0 para el dato observado



$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \underbrace{\sum_{1}^{10} X_i}_{} < 5,425 \right\}$$

Estadístico de prueba $\underset{\text{bajo } H_0}{\sim} \Gamma(10,1)$

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}(G < 8{,}5) = 0{,}34$$

$$G \sim \Gamma(10,1)$$

Por ejemplo: si el dato fuese $\sum_{1}^{10} x_i = 4 \Longrightarrow p\text{-valor} = \mathbb{P}(G<4)$

$\approx 0{,}008$

Obs

p-valor:

0 ——————————— 1

← p-valor chico: apunta a rech H_0

p-valor grande →: apunta a no rechazar H_0

Si quiero trabajar con un α dado:

p-valor $< \alpha$ indica que hay evidencia p/ rechazar H_0

p-valor $> \alpha$ " que no hay evidencia p/ rechazar H_0

Ej: si p-valor = 0,08

puedo decidir que con $\alpha = 0{,}05 \longrightarrow$ no rech H_0

con $\alpha = 0{,}1 \longrightarrow$ Rech H_0

10.15 La longitud en metros de cada rollo de alambre en un lote es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[15, 15+\theta]$. Se examinaron 4 rollos y la máxima longitud observada resulto ser 25 metros. En base a la información muestral, y con nivel de significación de 0.01 ¿se puede afirmar, que la longitud media de los rollos del lote es menor que 20 metros?

X: Longitud Rollo $\sim U(15, 15+\theta)$, $\alpha = 0{,}01$, $n = 4$

Dato: $n = 4$, $\max\limits_{i=1,\dots 4} \{x_i\} = 25\,m$

$$H_1: E(X) < 20 \Rightarrow \frac{15+15+\theta}{2} = 15 + \frac{\theta}{2} < 20$$

$H_0: \theta \overset{\geq}{=} 10$ $\qquad$ $H_1: \theta < 10$

Si $X_1, \dots X_n$ ma de $U(15, 15+\theta)$

$Y = X - 15 \Rightarrow$ Tendre $Y_1 \dots Y_n$ de $U(0, \theta)$

puedo hacerlo porque θ es tamb parametro de la Y

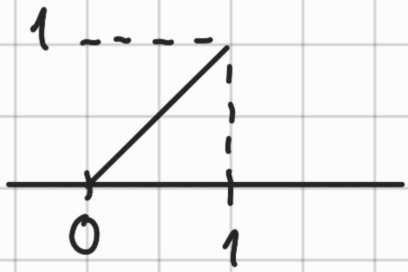
Sabemos que $\mathcal{U}(0,\theta)$ es flia CVM en $T = \max\{Y_i\}$

$$\Longrightarrow \delta(\underline{Y}) = \mathbb{1}\{\max\{Y_i\} < K\}$$

C. Aux

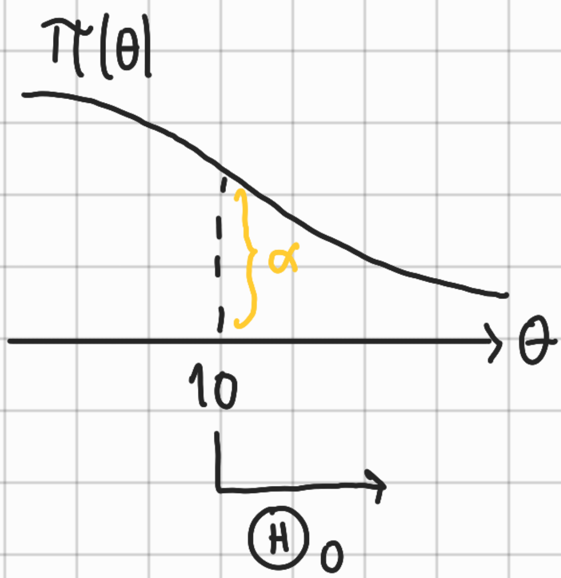
$$\max\{Y_i\} \leq y \longleftrightarrow Y_1 \leq y,\ Y_2 \leq y, \dots, Y_n \leq y$$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(\frac{Y}{\theta} \leq \frac{y}{\theta}\right) = \frac{y}{\theta}$$



$$Y \sim \mathcal{U}(0,\theta) \Longrightarrow \frac{Y}{\theta} \sim \mathcal{U}(0,1)$$

$$\alpha = \sup_{\theta \geq 10} \pi(\theta) = \sup_{\theta \geq 10} \mathbb{P}_\theta(\delta(\underline{X}) = 1) = \sup_{\theta \geq 10} \mathbb{P}_\theta(\max Y_i \leq K)$$



$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta=10}(\max Y_i \leq K)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=10}\left(\max\left(\frac{Y_i}{\theta}\right) \leq \frac{K}{\theta}\right)$$

$$\mathbb{P}_\theta(\max Y_i \leq y) = \mathbb{P}_\theta(Y_1 \leq y, Y_2 \leq y, \dots) \underset{\text{ind}}{=} [\mathbb{P}(Y \leq y)]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n$$

$$\mathbb{1}\{0 < y \leq \theta\}$$

$$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{K}{10}\right)^n \text{ con } \begin{matrix}\alpha = 0,01 \\ n = 4\end{matrix} \Rightarrow K = 3,1623$$

$$\delta(\underline{Y}) = \mathbb{1}\{\max Y_i \leq 3,1623\} = \mathbb{1}\left\{\max\left(\frac{Y_i}{10}\right) \leq 0,31623\right\}$$

Como es continua puedo usar $\leq$ o $<$

podría dejarlo así

Pero en general el estadístico de prueba tiene que ser función solo de VA muestra y "tener distribución linda"

Estadístico de prueba: $\max\left(\frac{Y_i}{10}\right) \underset{\substack{\text{"Bajo } H_0\text{"} \\ \theta = 10}}{\sim} (F_U)^n$ con $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

Dato: $\max\{x_i\} = 25$

$$\max\{y_i + 15\} = \max\{y_i\} + 15 = 25 \Rightarrow \max\{y_i\} = 10$$

$$\delta(\underline{y}) = \mathbb{1}\left\{ \underbrace{\frac{\max\{y_i\}}{10}}_{\frac{10}{10}=1} \le 0,316 \right\} = 0$$

$\Rightarrow$ no rechazo H_0

Hallar y graficar la función de potencia

$$\pi(\theta) = \mathbb{P}_\theta\left(\max\left(\frac{Y_i}{10}\right) < 0,316\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\max(Y_i) \le 3,16\right)$$

$$= \mathbb{P}_\theta\left(\max\left(\frac{Y_i}{\theta}\right) \le \frac{3,16}{\theta}\right)$$

$W = \max Y_i$; $F_W(w) = F_U\left(\frac{w}{\theta}\right) = \frac{w}{\theta}\mathbb{1}\{0 < w < \theta\} + \mathbb{1}\{w \ge \theta\}$

$$= \begin{cases} \left(\frac{3,16}{\theta}\right)^n & \text{si } 3,16 \le \theta \\ 1 & \text{si } \theta < 0,316 \end{cases}$$


π(θ)
θ