PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Evaluación Integradora — Segundo cuatrimestre – 2017

Duración: 4 horas. — 22/II/18 – 14:00 hs.

---

1. Sean P_1, P_2, P_3, tres puntos aleatorios independientes, cada uno con distribución uniforme sobre el rectángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(\pi,9)$, $(0,9)$. Calcular la probabilidad de que exactamente dos de esos tres puntos estén a distancia mayor que $3/2$ de los vértices del rectángulo.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.3** y **Ejercicio 2.22**] Sea $\mathcal{R}$ el rectángulo de vértices $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (\pi,0)$, $v_3 = (\pi,9)$, $v_4 = (0,9)$, y sea Λ el conjunto de todos los puntos P del rectángulo $\mathcal{R}$ que están a distancia mayor que $3/2$ de los vértices del rectángulo:

$$\Lambda = \left\{P \in \mathcal{R} : \min_{1\leq i\leq 4} \mathrm{d}(P, v_i) > \frac{3}{2}\right\} = \mathcal{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{4} \left(\bar{B}(v_i; 3/2) \cap \mathcal{R}\right),$$

donde $\mathrm{d}((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ y $\bar{B}((x_0,y_0); r)$ es el círculo de centro (x_0, y_0) y radio r. Sea N la cantidad de puntos P_j, $j = 1,2,3$, a distancia mayor que $3/2$ de los vértices del rectángulo $\mathcal{R}$. Tenemos

$$\mathbf{P}(N = 2) = \binom{3}{2} p^2(1-p) = 3p^2(1-p),$$

donde

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(P_j \in \Lambda) = \frac{\text{área}(\Lambda)}{\text{área}(\mathcal{R})} = \frac{\text{área}(\mathcal{R}) - \sum_{i=1}^{4} \text{área}(\bar{B}(v_i; 3/2) \cap \mathcal{R})}{\text{área}(\mathcal{R})} \\ &= 1 - \frac{\text{área}(\bar{B}(\mathbf{0}; 3/2))}{\text{área}(\mathcal{R})} = 1 - \frac{\pi(3/2)^2}{9\pi} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(N = 2) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64} \approx 0.42.$$

□

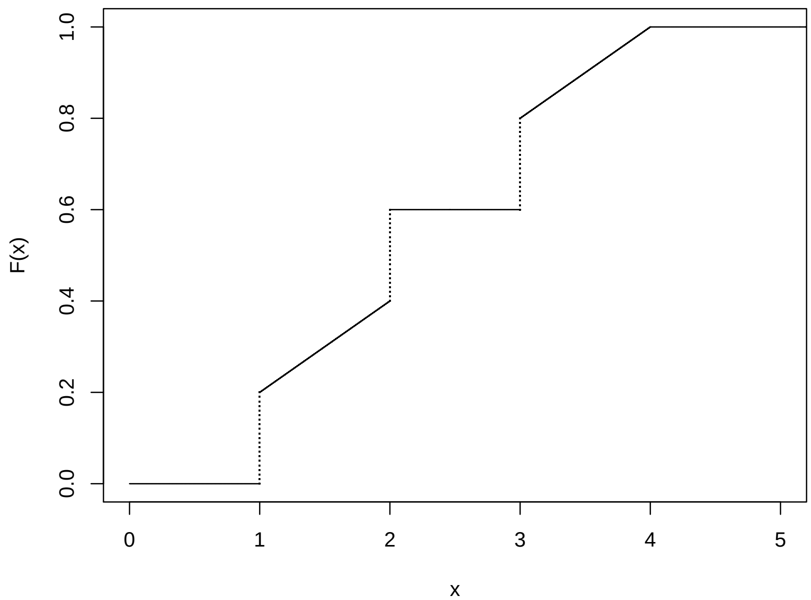
---

2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \frac{x}{5}\mathbf{1}\{1 \leq x < 2\} + \frac{3}{5}\mathbf{1}\{2 \leq x < 3\} + \frac{x+1}{5}\mathbf{1}\{3 \leq x < 4\} + \mathbf{1}\{4 \leq x\}.$$

Calcular $\mathbf{E}[X|X > 2]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 3.1**] Graficamos la función de distribución de la variable aleatoria X para determinar a qué clase pertenece:



Observamos que se trata de una función de distribución discontinua con saltos de longitud $\frac{1}{5}$ en los puntos del conjunto $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$, y tal que su derivada en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ es

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{5}\mathbf{1}\{1 < x < 2\} + \frac{1}{5}\mathbf{1}\{3 < x < 4\}.$$

Para calcular $\mathbf{E}[X|X > 2]$ usamos la identidad

$$\mathbf{E}[X|X > 2] = \frac{\mathbf{E}[X\mathbf{1}\{X > 2\}]}{\mathbf{P}(X > 2)},$$

y la expresión general de la esperanza de funciones de X:

$$\mathbf{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}} g(x) \cdot \frac{dF_X(x)}{dx}\, dx + \sum_{x\in\mathbb{A}} g(x) \cdot \mathbf{P}(X = x).$$

Como $\mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{5}$, para $x \in \mathbb{A}$, y $\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{5}\mathbf{1}\{1 < x < 2\} + \frac{1}{5}\mathbf{1}\{3 < x < 4\}$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, se obtiene

$$\mathbf{E}[g(X)] = \frac{1}{5}\left(\int_1^2 g(x)dx + \int_3^4 g(x)dx + \sum_{x\in\mathbb{A}} g(x)\right),$$

y evaluando esa expresión particular en $g(x) = x\mathbf{1}\{x > 2\}$, resulta

$$\mathbf{E}[X\mathbf{1}\{X > 2\}] = \frac{1}{5}\left(\int_3^4 x dx + 3\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{4^2 - 3^2}{2} + 3\right) = \frac{13}{10}.$$

Como, por otra parte, $\mathbf{P}(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, se concluye que

$$\mathbf{E}[X|X > 2] = \frac{13/10}{2/5} = \frac{13}{4} = 3.25.$$

$\square$

---

3. Cada vez que se enfrenta a un oponente, el campeón mundial de piedra, papel o tijera, juega piedra con probabilidad 0.4, papel con probabilidad 0.25, o tijera con probabilidad 0.35. En su próximo torneo se enfrentará a 250 oponentes. Calcular la covarianza entre la cantidad de veces que jugará piedra y la cantidad de veces que jugará tijera.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 6.18**] Sean X_1, X_2, X_3 las cantidades de piedras, papeles, y tijeras que jugará el campeón mundial en los 250 enfrentamientos, respectivamente. Queremos calcular $\mathbf{cov}(X_1, X_3)$.

Teniendo en cuenta que $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{Mul}(250, 0.4, 0.25, 0.35)$, y recordando que para $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{Mul}(n, p_1, p_2, p_2)$ se tiene $\mathbf{cov}(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j$, obtenemos

$$\mathbf{cov}(X_1, X_3) = -250 \cdot 0.4 \cdot 0.35 = -35$$

$\square$

---

4. Los equipos β y μ juegan un partido de fútbol. Los goles que hacen los equipos obedecen a dos procesos de Poisson independientes: de intensidad 3 cada 90 minutos para el equipo β, y de intensidad 1/2 cada 90 minutos para el equipo μ. Sabiendo que durante el partido se hicieron exactamente 2 goles, calcular la probabilidad de que el equipo β haya hecho exactamente un gol en los primeros 30 minutos y el partido haya terminado 2 a 0.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 7.1** y **Ejercicio 7.7**] Ponemos el 0 al comienzo del partido y la unidad de escala representa 90 minutos. Sean Π_β y Π_μ los procesos de Poisson de los goles que hacen durante el partido los equipos β y μ, respectivamente, y sean $N_\beta(t)$ y $N_\mu(t)$ sus respectivas funciones de conteo. La función de conteo del proceso de goles que se hacen durante el partido es $N(t) = N_\beta(t) + N_\mu(t)$. Queremos calcular la probabilidad condicional

$$\begin{aligned} p &:= \mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2, N_\mu(1) = 0 | N(1) = 2) \\ &= \frac{\mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2, N_\mu(1) = 0)}{\mathbf{P}(N(1) = 2)}. \end{aligned}$$

Como los procesos Π_β y Π_μ son independientes resulta

$$\mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2, N_\mu(1) = 0) = \mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2) \cdot \mathbf{P}(N_\mu(1) = 0).$$

Descomponiendo el evento que aparece en el primer factor del lado derecho de la igualdad en la forma $\{N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1/3, 1) = 1\}$, y teniendo en cuenta que para el proceso Π_β los incrementos $N_\beta(s, t) := N_\beta(t) - N_\beta(s)$, $s < t$, son independientes con distribución

Poisson de media $3(t-s)$, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_\beta(1/3)=1, N_\beta(1)=2) &= \mathbf{P}(N_\beta(1/3)=1, N_\beta(1/3,1)=1) \\
&= \mathbf{P}(N_\beta(1/3)=1)\cdot\mathbf{P}(N_\beta(1/3,1)=1)\cdot \\
&= \left(e^{-3(1/3)}\cdot 3(1/3)\right)\cdot\left(e^{-3(2/3)}\cdot 3(2/3)\right) \\
&= 2\cdot e^{-3}.
\end{aligned}$$

Utilizando que la función de conteo $N_\mu(t)$ tiene la distribución Poisson de media $(1/2)\cdot t$ tenemos

$$\mathbf{P}(N_\mu(1)=0)=e^{-1/2}.$$

Combinando ambos resultados tenemos

$$\mathbf{P}(N_\beta(1/3)=1, N_\beta(1)=2)\cdot\mathbf{P}(N_\mu(1)=0)=\left(2\cdot e^{-3}\right)\cdot\left(e^{-1/2}\right)=2\cdot e^{-7/2}.$$

Por el *Teorema de superposición para procesos de Poisson independientes* tenemos que la variable $N(t)$ tiene la distribución Poisson de media $(3+(1/2))\cdot t=(7/2)\cdot t$, y en consecuencia

$$\mathbf{P}(N(1)=2)=e^{-7/2}\cdot\frac{(7/2)^2}{2}=(49/8)\cdot e^{-7/2}.$$

Por lo tanto,

$$p=\frac{2\cdot e^{-7/2}}{(49/8)\cdot e^{-7/2}}=\frac{16}{49}.$$

$\square$

Otro modo. Por el *Teorema de superposición y competencia para procesos de Poisson independientes* tenemos que: (a) los tiempos entre goles (medidos en minutos) son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de intensidad $\frac{3}{90}+\frac{(1/2)}{90}=\frac{(7/2)}{90}=\frac{7}{180}$; (b) cada gol puede ser del equipo β con probabilidad $\frac{3/90}{7/180}=\frac{6}{7}$ o del equipo μ con probabilidad $\frac{1}{7}$; y (c) los tiempos entre goles y la naturaleza de los mismos son independientes.

Como sabemos que se hicieron exactamente dos goles durante el partido, podemos utilizar el *Teorema de la distribución condicional de los tiempos de llegada* y considerar que los instantes en que ocurren esos goles son dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $[0,90]$, lo que nos permite deducir que la probabilidad de que se haga exactamente un gol durante los primeros 30 minutos del partido es $p_1=2\cdot\frac{30}{90}\cdot\frac{60}{90}=\frac{4}{9}$. Por otra parte, la probabilidad de que el equipo β haya hecho los dos goles es $p_2=\left(\frac{6}{7}\right)^2$. Por lo tanto,

$$p=p_1\cdot p_2=\frac{4}{9}\cdot\frac{36}{49}=\frac{16}{49}.$$

$\square$

---

5. El costo por transportar 100 barriles de whisky desde Canadá hasta EE.UU. es 100000 dólares. Los volúmenes de los barriles de whisky (en litros) son variables aleatorias independientes con distribución normal de media 160 y varianza 1. ¿Qué precio debe tener como mínimo el litro de whisky transportado para que la probabilidad de que el transportista tenga una ganancia superior a 10000 dólares sea por lo menos 0.95?

R. [*Referencia*: **Ejercicio 8.6**] Sea d el precio por litro de whisky transportado, y sea W_i el volumen en litros del i-ésimo barril transportado, $i = 1, \ldots, 100$. El precio total por transportar los 100 barriles es $d \cdot \sum_{i=1}^{100} W_i$ y la ganancia del transportista será $G(d) = d \cdot \sum_{i=1}^{100} W_i - 100000$. Se quiere hallar los valores de d tales que $\mathbf{P}(G(d) > 10000) \geq 0.95$.

Como las combinaciones lineales, $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot W_i$, de variables aleatorias independientes con distribuciones normales de media μ_i y varianza σ_i^2 tienen distribución normal de media $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu_i$ y varianza $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \cdot \sigma_i^2$, si ponemos $n = 100$, $c_i = 1$, $\mu_i = 160$ y $\sigma_i^2 = 1$ se obtiene $\sum_{i=1}^{100} W_i \sim \mathcal{N}(16000, 100)$, y en consecuencia $Z := \frac{\sum_{i=1}^{100} W_i - 16000}{10} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(G(d) > 10000) &= \mathbf{P}\left(d \cdot \sum_{i=1}^{100} W_i - 100000 > 10000\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{100} W_i > \frac{110000}{d}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(Z > \frac{\frac{110000}{d} - 16000}{10}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{11000 - 1600 \cdot d}{d}\right).
\end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(G(d) > 10000) \geq 0.95 \quad &\iff \quad \frac{11000 - 1600 \cdot d}{d} \leq z_{0.05} \\
&\iff \quad 11000 \leq d\,(1600 + z_{0.05}) \\
&\iff \quad d \geq \frac{11000}{1600 + z_{0.05}} = \frac{11000}{1598.4} \approx 6.88.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio por litro de whisky transportado debe ser como mínimo 6.88 dólares. $\square$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Evaluación Integradora — Segundo cuatrimestre – 2017
Duración: 4 horas. — 22/II/18 – 14:00 hs.

---

1. Sean P_1, P_2, P_3, tres puntos aleatorios independientes, cada uno con distribución uniforme sobre el rectángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(\pi,9)$, $(0,9)$. Calcular la probabilidad de que exactamente dos de esos tres puntos estén a distancia mayor que $3/2$ de los vértices del rectángulo.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.3** y **Ejercicio 2.22**] Sea $\mathcal{R}$ el rectángulo de vértices $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (\pi,0)$, $v_3 = (\pi,9)$, $v_4 = (0,9)$, y sea Λ el conjunto de todos los puntos P del rectángulo $\mathcal{R}$ que están a distancia mayor que $3/2$ de los vértices del rectángulo:

$$\Lambda = \left\{P \in \mathcal{R} : \min_{1\leq i\leq 4} \mathrm{d}(P, v_i) > \frac{3}{2}\right\} = \mathcal{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{4} \left(\bar{B}(v_i; 3/2) \cap \mathcal{R}\right),$$

donde $\mathrm{d}((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ y $\bar{B}((x_0,y_0); r)$ es el círculo de centro (x_0, y_0) y radio r. Sea N la cantidad de puntos P_j, $j = 1,2,3$, a distancia mayor que $3/2$ de los vértices del rectángulo $\mathcal{R}$. Tenemos

$$\mathbf{P}(N = 2) = \binom{3}{2} p^2(1-p) = 3p^2(1-p),$$

donde

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(P_j \in \Lambda) = \frac{\text{área}(\Lambda)}{\text{área}(\mathcal{R})} = \frac{\text{área}(\mathcal{R}) - \sum_{i=1}^{4} \text{área}(\bar{B}(v_i; 3/2) \cap \mathcal{R})}{\text{área}(\mathcal{R})} \\ &= 1 - \frac{\text{área}(\bar{B}(\mathbf{0}; 3/2))}{\text{área}(\mathcal{R})} = 1 - \frac{\pi(3/2)^2}{9\pi} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(N = 2) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64} \approx 0.42.$$

□

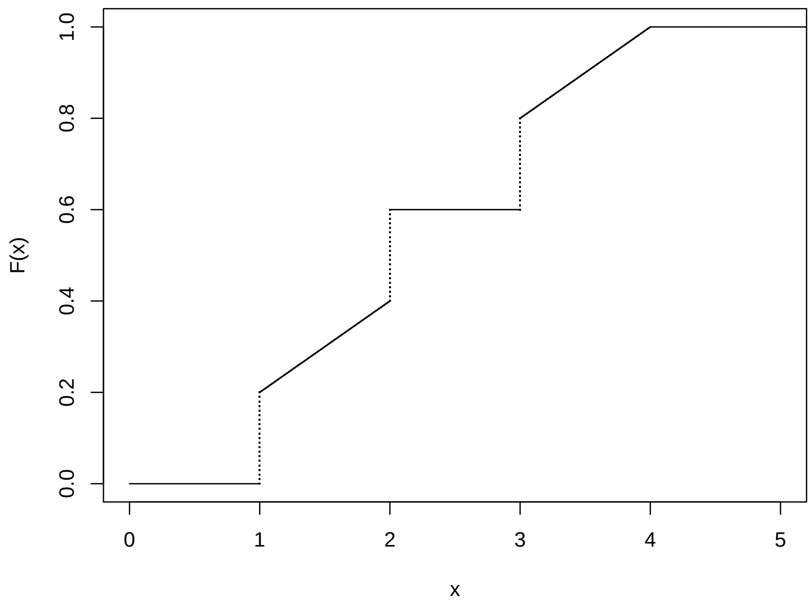
---

2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \frac{x}{5}\mathbf{1}\{1 \leq x < 2\} + \frac{3}{5}\mathbf{1}\{2 \leq x < 3\} + \frac{x+1}{5}\mathbf{1}\{3 \leq x < 4\} + \mathbf{1}\{4 \leq x\}.$$

Calcular $\mathbf{E}[X|X > 2]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 3.1**] Graficamos la función de distribución de la variable aleatoria X para determinar a qué clase pertenece:



Observamos que se trata de una función de distribución discontinua con saltos de longitud $\frac{1}{5}$ en los puntos del conjunto $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$, y tal que su derivada en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ es

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{5}\mathbf{1}\{1 < x < 2\} + \frac{1}{5}\mathbf{1}\{3 < x < 4\}.$$

Para calcular $\mathbf{E}[X|X > 2]$ usamos la identidad

$$\mathbf{E}[X|X > 2] = \frac{\mathbf{E}[X\mathbf{1}\{X > 2\}]}{\mathbf{P}(X > 2)},$$

y la expresión general de la esperanza de funciones de X:

$$\mathbf{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}} g(x) \cdot \frac{dF_X(x)}{dx}\, dx + \sum_{x\in\mathbb{A}} g(x) \cdot \mathbf{P}(X = x).$$

Como $\mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{5}$, para $x \in \mathbb{A}$, y $\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{5}\mathbf{1}\{1 < x < 2\} + \frac{1}{5}\mathbf{1}\{3 < x < 4\}$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, se obtiene

$$\mathbf{E}[g(X)] = \frac{1}{5}\left(\int_1^2 g(x)dx + \int_3^4 g(x)dx + \sum_{x\in\mathbb{A}} g(x)\right),$$

y evaluando esa expresión particular en $g(x) = x\mathbf{1}\{x > 2\}$, resulta

$$\mathbf{E}[X\mathbf{1}\{X > 2\}] = \frac{1}{5}\left(\int_3^4 xdx + 3\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{4^2 - 3^2}{2} + 3\right) = \frac{13}{10}.$$

Como, por otra parte, $\mathbf{P}(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, se concluye que

$$\mathbf{E}[X|X > 2] = \frac{13/10}{2/5} = \frac{13}{4} = 3.25.$$

$\square$

---

3. Los equipos β y μ juegan un partido de fútbol. Los goles que hacen los equipos obedecen a dos procesos de Poisson independientes: de intensidad 3 cada 90 minutos para el equipo β, y de intensidad 1/2 cada 90 minutos para el equipo μ. Sabiendo que durante el partido se hicieron exactamente 2 goles, calcular la probabilidad de que el equipo β haya hecho exactamente un gol en los primeros 30 minutos y el partido haya terminado 2 a 0.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 7.1** y **Ejercicio 7.7**] Ponemos el 0 al comienzo del partido y la unidad de escala representa 90 minutos. Sean Π_β y Π_μ los procesos de Poisson de los goles que hacen durante el partido los equipos β y μ, respectivamente, y sean $N_\beta(t)$ y $N_\mu(t)$ sus respectivas funciones de conteo. La función de conteo del proceso de goles que se hacen durante el partido es $N(t) = N_\beta(t) + N_\mu(t)$. Queremos calcular la probabilidad condicional

$$\begin{aligned} p &:= \mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2, N_\mu(1) = 0 | N(1) = 2) \\ &= \frac{\mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2, N_\mu(1) = 0)}{\mathbf{P}(N(1) = 2)}. \end{aligned}$$

Como los procesos Π_β y Π_μ son independientes resulta

$$\mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2, N_\mu(1) = 0) = \mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2) \cdot \mathbf{P}(N_\mu(1) = 0).$$

Descomponiendo el evento que aparece en el primer factor del lado derecho de la igualdad en la forma $\{N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1/3, 1) = 1\}$, y teniendo en cuenta que para el proceso Π_β los incrementos $N_\beta(s,t) := N_\beta(t) - N_\beta(s)$, $s < t$, son independientes con distribución Poisson de media $3(t - s)$, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2) &= \mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1/3, 1) = 1) \\ &= \mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1) \cdot \mathbf{P}(N_\beta(1/3, 1) = 1) \cdot \\ &= \left(e^{-3(1/3)} \cdot 3(1/3)\right) \cdot \left(e^{-3(2/3)} \cdot 3(2/3)\right) \\ &= 2 \cdot e^{-3}. \end{aligned}$$

Utilizando que la función de conteo $N_\mu(t)$ tiene la distribución Poisson de media $(1/2) \cdot t$ tenemos

$$\mathbf{P}(N_\mu(1) = 0) = e^{-1/2}.$$

Combinando ambos resultados tenemos

$$\mathbf{P}(N_\beta(1/3) = 1, N_\beta(1) = 2) \cdot \mathbf{P}(N_\mu(1) = 0) = \left(2 \cdot e^{-3}\right) \cdot \left(e^{-1/2}\right) = 2 \cdot e^{-7/2}.$$

Por el *Teorema de superposición para procesos de Poisson independientes* tenemos que la variable $N(t)$ tiene la distribución Poisson de media $(3 + (1/2)) \cdot t = (7/2) \cdot t$, y en consecuencia

$$\mathbf{P}(N(1) = 2) = e^{-7/2} \cdot \frac{(7/2)^2}{2} = (49/8) \cdot e^{-7/2}.$$

Por lo tanto,

$$p = \frac{2 \cdot e^{-7/2}}{(49/8) \cdot e^{-7/2}} = \frac{16}{49}.$$

□

Otro modo. Por el *Teorema de superposición y competencia para procesos de Poisson independientes* tenemos que: (a) los tiempos entre goles (medidos en minutos) son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de intensidad $\frac{3}{90}+\frac{(1/2)}{90} = \frac{(7/2)}{90} = \frac{7}{180}$; (b) cada gol puede ser del equipo β con probabilidad $\frac{3/90}{7/180} = \frac{6}{7}$ o del equipo μ con probabilidad $\frac{1}{7}$; y (c) los tiempos entre goles y la naturaleza de los mismos son independientes.

Como sabemos que se hicieron exactamente dos goles durante el partido, podemos utilizar el *Teorema de la distribución condicional de los tiempos de llegada* y considerar que los instantes en que ocurren esos goles son dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 90]$, lo que nos permite deducir que la probabilidad de que se haga exactamente un gol durante los primeros 30 minutos del partido es $p_1 = 2 \cdot \frac{30}{90} \cdot \frac{60}{90} = \frac{4}{9}$. Por otra parte, la probabilidad de que el equipo β haya hecho los dos goles es $p_2 = \left(\frac{6}{7}\right)^2$. Por lo tanto,

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{36}{49} = \frac{16}{49}.$$

□

---

4. El punto de ebullición del agua (en grados Fahrenheit) puede considerarse una variable aleatoria X con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. En un laboratorio se realizan 16 experimentos independientes y se registran los valores del punto de ebullición del agua x_i. El laboratorio procesa los datos e informa que $\bar{x} = 202.38$ y $s_X^2 = 439.75$. En base a esa información muestral construir un intervalo de confianza de nivel 0.95 para μ.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 11.3**] Queremos construir un intervalo de confianza de nivel de confianza 0.95 para μ basados en el valor observado del estadístico

$$(\bar{X}, S_X^2) = \left(\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i, \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2 \right)$$

de una muestra aleatoria de tamaño 16, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{16})$, de la variable X.

Por el *Teorema de Fischer* sobre la distribución de $(\bar{X}, S_X^2)$ se sabe que

$$\frac{\sqrt{16}(\bar{X} - \mu)}{S_X} = \frac{4(\bar{X} - \mu)}{S_X} \sim t_{15}.$$

En consecuencia, indicando mediante $t_{15,p}$ al cuantil de orden p de la distribución t de Student con 15 grados de libertad, se tiene

$$\mathbf{P}_\mu\left(t_{15,0.025} \leq \frac{4(\bar{X}-\mu)}{S_X} \leq t_{15,0.975}\right) = 0.975 - 0.025 = 0.95$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que $t_{15,0.025} = -t_{15,0.975} = -2.1314$ y observando que $-2.1314 \leq \frac{4(\bar{X}-\mu)}{S_X} \leq 2.1314 \iff \bar{X} - \frac{2.1314\cdot S_X}{4} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{2.1314\cdot S_X}{4}$, se concluye que

$$\mathbf{P}_\mu\left(\mu \in \left[\bar{X} - \frac{2.1314\cdot S_X}{4}, \bar{X} + \frac{2.1314\cdot S_X}{4}\right]\right) = 0.95$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$I_\mu(\bar{X}, S_X^2) := \left[\bar{X} - \frac{2.1314\cdot\sqrt{S_X^2}}{4}, \bar{X} + \frac{2.1314\cdot\sqrt{S_X^2}}{4}\right]$$

define un intervalo de confianza de nivel 0.95 para μ basado en $(\bar{X}, S_X^2)$. Utilizando la información muestral se construye el siguiente intervalo

$$\begin{aligned} I_\mu(202.38, 439.75) &= \left[202.38 - \frac{2.1314\cdot\sqrt{439.75}}{4}, 202.38 + \frac{2.1314\cdot\sqrt{439.75}}{4}\right] \\ &= [191.21,\ 213.55]. \end{aligned}$$

$\square$

---

5. La probabilidad de que al tirar un doblón se obtenga cara es p. *A priori*, p es una variable aleatoria con distribución $\beta(4,3)$. En 5 tiros del doblón se observaron exactamente 3 caras. En base a esa información muestral calcular la probabilidad de que en un nuevo tiro del doblón se obtenga cara.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 12.6**] Para representar el resultado del i-ésimo tiro del doblón utilizamos una variable aleatoria X_i a valores en el conjunto $\{0,1\}$: $X_i = 1$ significa que en el i-ésimo tiro se obtuvo cara y $X_i = 0$ significa que se obtuvo cruz. La cantidad de caras obtenidas en 5 tiros del doblón es $N = \sum_{i=1}^5 X_i$. Queremos calcular $\mathbf{P}(X_6 = 1|N = 3)$.

A priori, la densidad de p es

$$f_p(q) = \frac{6!}{3!\cdot 2!}\, q^3(1-q)^2\mathbf{1}\{0 < q < 1\}.$$

Como para cada $q \in (0,1)$, $X_1|p = q, \dots, X_5|p = 6, X_6|p = q$ son variables aleatorias independientes, cada una con distribución Bernoulli(q), y observando que $N = \sum_{i=1}^5 X_i$ es una función de $X_1, \dots, X_5$, se tiene que $N|p = q$ y $X_6|p = q$ son independientes, siendo $N|p = q \sim$ Binomial$(5, q)$.

Utilizando la versión proporcional de la *fórmula de Bayes* para la distribución *a posteriori* de p, basada en la observación $N = 3$, tenemos

$$\begin{aligned} f_{p|N=3}(q) &\propto \mathbf{P}(N=3|p=q)\cdot f_p(q) \propto \big(q^3(1-q)^2\big)\cdot\big(q^3(1-q)^2\mathbf{1}\{0<q<1\}\big) \\ &= q^6(1-q)^4\mathbf{1}\{0<q<1\}, \end{aligned}$$

y en consecuencia, como $p|N=3 \sim \beta(7,5)$, se tiene

$$f_{p|N=3}(q) = \frac{\mathbf{P}(N=3|p=q)\cdot f_p(q)}{\mathbf{P}(N=3)} = \frac{11!}{6!\cdot 4!}\, q^6(1-q)^4\mathbf{1}\{0<q<1\}.$$

Utilizando la *fórmula de probabilidades totales*, y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{P}(X_6=1, N=3|p=q) = \mathbf{P}(X_6=1|p=q)\cdot\mathbf{P}(N=3|p=q) = q\cdot\mathbf{P}(N=3|p=3),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_6=1|N=3) &= \frac{\mathbf{P}(X_6=1, N=3)}{\mathbf{P}(N=3)} = \frac{\int \mathbf{P}(X_6=1, N=3|p=q)\cdot f_p(q)\,dq}{\mathbf{P}(N=3)} \\ &= \int q\cdot\left(\frac{\mathbf{P}(N=3|p=q)\cdot f_p(q)}{\mathbf{P}(N=3)}\right)dq \\ &= \frac{11!}{6!\cdot 4!}\int_0^1 q^7(1-q)^4\,dq = \frac{11!}{6!\cdot 4!}\cdot\frac{7!\cdot 4!}{12!} = \frac{7}{12} \approx 0.5833. \end{aligned}$$

$\square$