1. Lucas tiene tres dados de seis caras; dos equilibrados y uno cargado de manera tal que la probabilidad de obtener un 1 es 1/3 y los restantes resultados son equiprobables. Lucas elige un dado al azar, lo arroja y obtiene un 4. ¿Cuál es la probabilidad de que haya elegido un dado equilibrado?

2. El tiempo (en horas) que Tomás pasa mirando su serie favorita y escuchando música durante el fin de semana son variables aleatorias X e Y respectivamente, con función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0.5e^{-0.5(x+y)}\mathbf{1}\{0 < x < y\}.$$

Sabiendo que un fin de semana Tomás pasó más de dos horas mirando su serie favorita, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado menos de seis horas en total mirando la serie y escuchando música?

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$. Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{E}(Y|X) > 1.2)$.

4. A una tienda de ropa entran clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. La cantidad de prendas que compra cada cliente es independiente, y puede ser 0, 1 ó más de 1 con probabilidades respectivas 0.4, 0.35, 0.25. Sabiendo que en las dos primeras horas entraron exactamente 2 clientes, calcular la probabilidad de que 1 cliente no compre nada y 1 cliente compre una sola prenda.

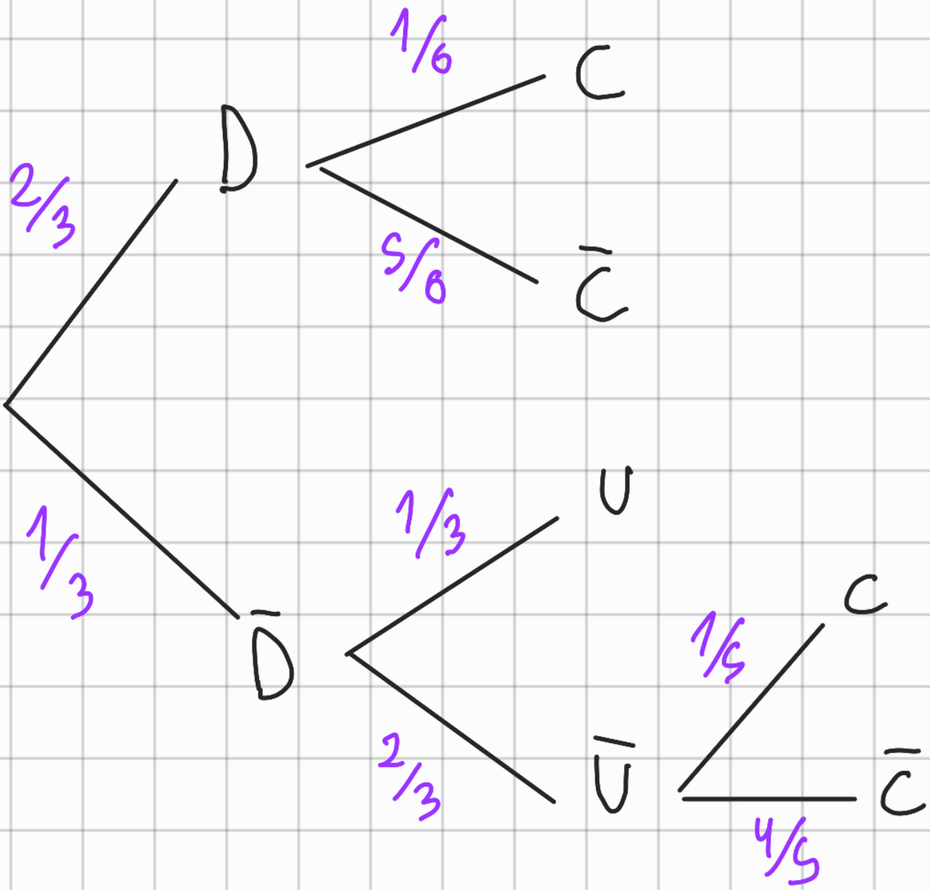
5. La urna a contiene 4 bolas blancas y 3 rojas. La urna b contiene 7 bolas blancas y 7 rojas. El experimento consiste en elegir una urna al azar, extraer una bola y reponerla en la misma urna. Si se realiza el experimento 200 veces, calcular aproximadamente la probabilidad de observar más de 90 bolas rojas.

(1)

1. Lucas tiene tres dados de seis caras; dos equilibrados y uno cargado de manera tal que la probabilidad de obtener un 1 es 1/3 y los restantes resultados son equiprobables. Lucas elige un dado al azar, lo arroja y obtiene un 4. ¿Cuál es la probabilidad de que haya elegido un dado equilibrado?

D: Lucas elige un dado equilibrado

C: Lucas obtiene un 4 U: Lucas saca un 1



$\mathbb{P}(D) = \frac{2}{3}$ $\mathbb{P}(\bar{D}) = \frac{1}{3}$ $\mathbb{P}(C|D) = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(\bar{U}|\bar{D}) = \frac{2}{3}$ $\mathbb{P}(C|\bar{U} \cap \bar{D}) = \frac{1}{\binom{5}{1}} = \frac{1}{5}$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \mid D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(C \mid \bar{U} \cap \bar{D})\,\mathbb{P}(\bar{U} \mid \bar{D})\,\mathbb{P}(\bar{D})$$

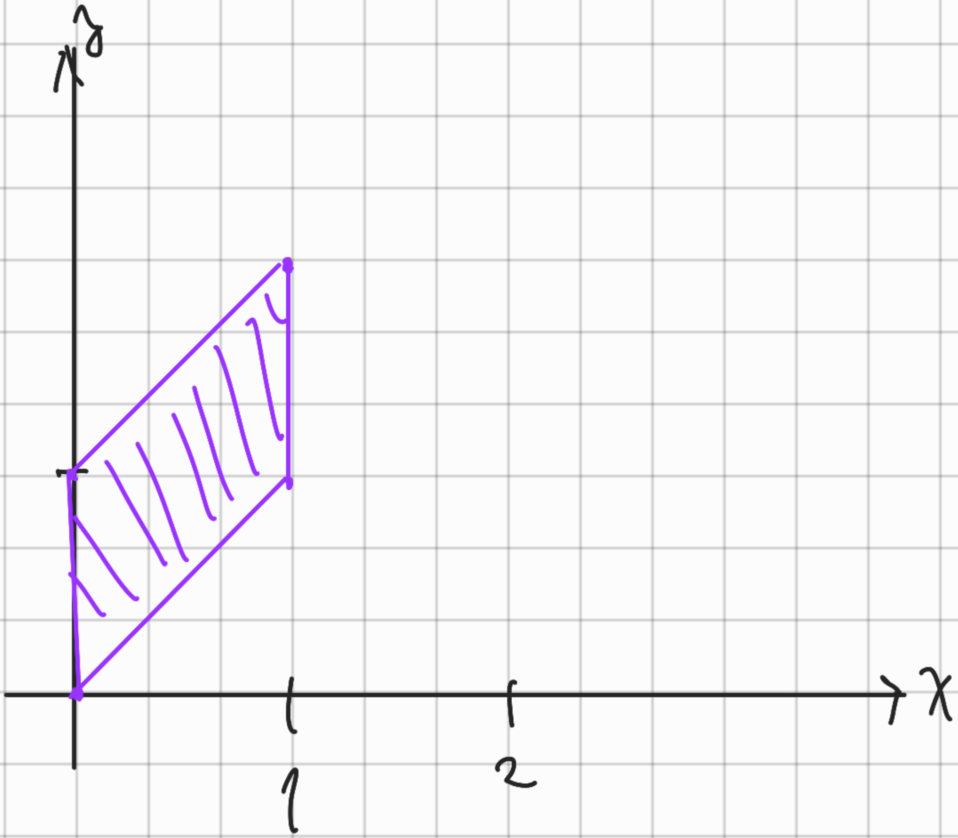
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$$

$$\mathbb{P}(D \mid C) = \frac{P(D \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(C \mid D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{7}{45}} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(D \mid C) = \frac{5}{7}}$$

(3)

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$. Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{E}(Y|X) > 1.2)$.



$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\underbrace{\text{área}}_{=1}} \mathbb{1}\{\quad\}$$

$$f_X(x) = \int_x^{x+1} 1\, dx = 1\ \mathbb{1}\{0<x<1\}$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = 1\ \mathbb{1}\{x<y<x+1\}$$

$$E[Y|X=x] = \int_x^{x+1} y \, dy = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$E[Y|X] = \frac{X^2}{2} + \frac{2X}{2} + \frac{1}{2} - \frac{X^2}{2} = X + \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}\left(X + \frac{1}{2} > 1{,}2\right) = \mathbb{P}(X > 0{,}7) = 0{,}3$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(E[Y|X] \geq 1{,}2) = 0{,}3}$$

2. El tiempo (en horas) que Tomás pasa mirando su serie favorita y escuchando música durante el fin de semana son variables aleatorias X e Y respectivamente, con función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0.5e^{-0.5(x+y)}\mathbb{1}\{0 < x < y\}.$$

Sabiendo que un fin de semana Tomás pasó más de dos horas mirando su serie favorita, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado menos de seis horas en total mirando la serie y escuchando música?

X: Tiempo mirando una serie

Y: Tiempo escuchando musica

$$\mathbb{P}(Y+X = 6 \mid X \geq 2)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(x+y)} \mathbb{1}\{0<x<y\}$$

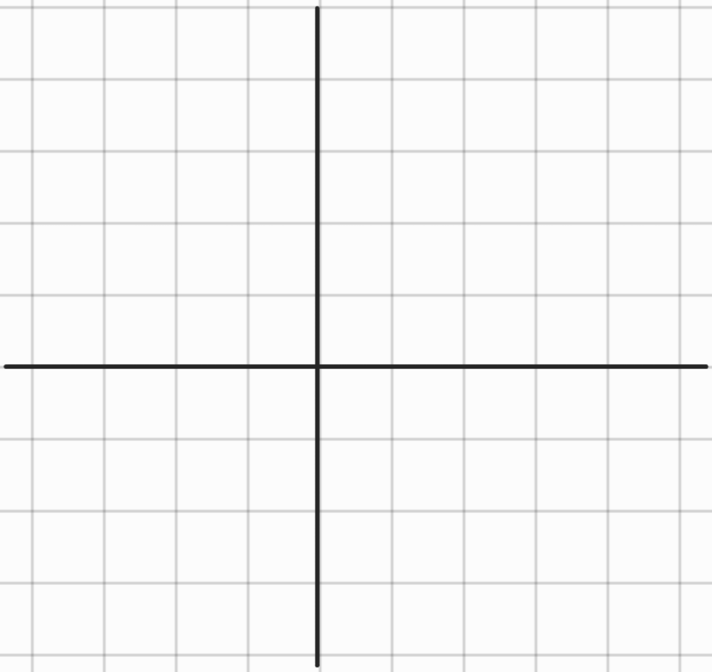
$$f_X(x) = \int_x^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y} e^{-\frac{1}{2}x} dy = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}y} dy$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \left.\frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{-\frac{1}{2}}\right|_x^\infty = -e^{-\frac{1}{2}x} e^{-\frac{1}{2}x}$$

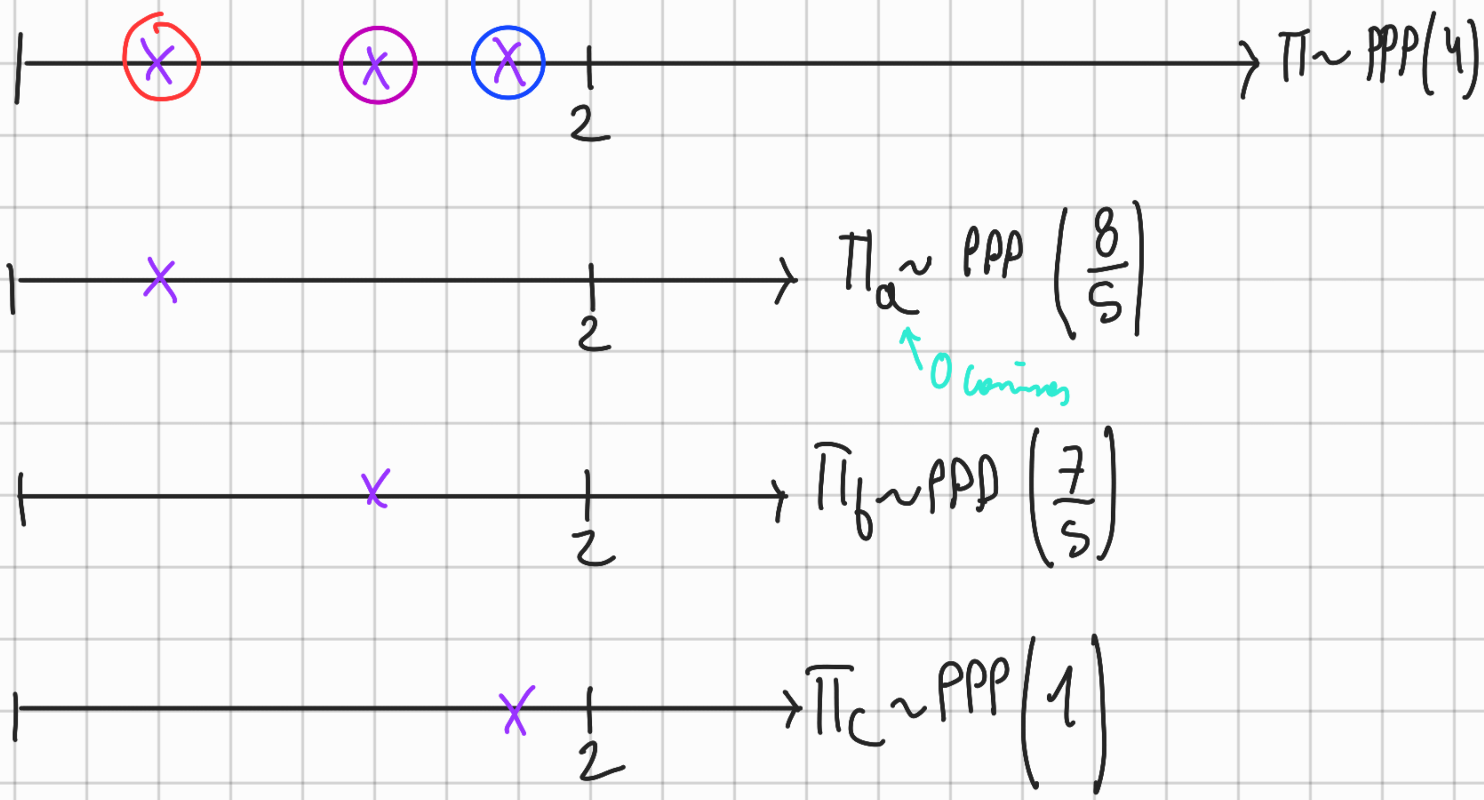
$$= -e^{-x}$$

$$\mathbb{1}\{0<x\}$$

$$\mathbb{P}(Y+X=6 \mid X\geq 2)=\frac{\mathbb{P}(X+Y=6,\, X\geq 2)}{\mathbb{P}(X\geq 2)}$$



4. A una tienda de ropa entran clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. La cantidad de prendas que compra cada cliente es independiente, y puede ser 0, 1 ó más de 1 con probabilidades respectivas 0.4, 0.35, 0.25. Sabiendo que en las dos primeras horas entraron exactamente 2 clientes, calcular la probabilidad de que 1 cliente no compre nada y 1 cliente compre una sola prenda.



$$\mathbb{P}\left(N_a(0,2]=1,\ N_b(0,2]=1,\ N_c(0,2]=0 \mid N(0,2]=2\right)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_a(0,2]=1)\,\mathbb{P}(N_b(0,2]=1)\,\mathbb{P}(N_c(0,2]=0)}{\mathbb{P}(N(0,2]=2)}$$

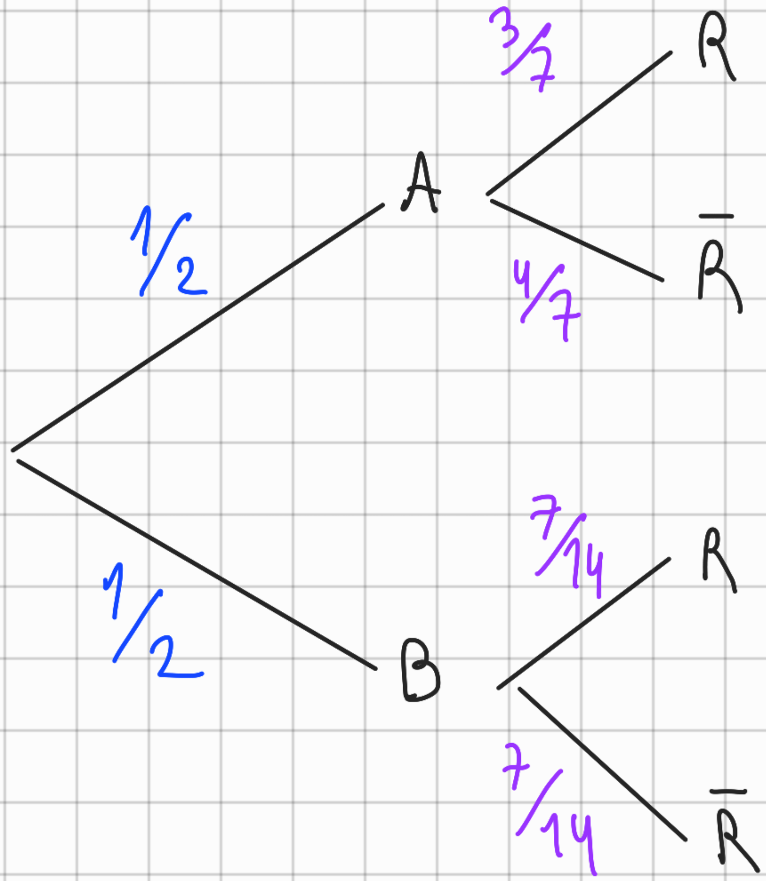
$$= \frac{\frac{16}{5}e^{-\frac{16}{5}}\ \frac{14}{5}e^{-\frac{14}{5}}\ e^{-2}}{\frac{8^2 e^{-8}}{2}} = 0,28$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Rta} = 0,28}$

5. La urna a contiene 4 bolas blancas y 3 rojas. La urna b contiene 7 bolas blancas y 7 rojas. El experimento consiste en elegir una urna al azar, extraer una bola y reponerla en la misma urna. Si se realiza el experimento 200 veces, calcular aproximadamente la probabilidad de observar más de 90 bolas rojas.

4B 3R

7B 7R



$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R|B)\,\mathbb{P}(B)$$

$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{7}{14}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{28}$$

X: Cant de Rojos observados en 200 extracciones

$$X \sim Bi\left(200, \frac{13}{28}\right)$$

$$\mathbb{P}(X \geq 90) = 1 - \mathbb{P}(X < 90) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 89)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\underbrace{\frac{89 + 1/2 - 200 \cdot \frac{13}{28}}{\sqrt{200 \, \frac{13}{28}\left(1 - \frac{13}{28}\right)}}}_{-0{,}475987}\right) = 1 - 0{,}317042$$

$$= 0{,}682958$$