PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Segundo recuperatorio — Segundo cuatrimestre – 2017
Duración: 4 horas. — 7/XII/17 – 14:00 hs.

---

1. Un servidor de mail posee un detector de spam. La probabilidad de que un mail sea spam es 0.15. Si el mail recibido es spam, la probabilidad de que sea detectado como spam es 0.8. Si el mail recibido no es spam, la probabilidad de que sea detectado como spam es 0.1. Calcular la probabilidad de que un mail no sea spam sabiendo que fue detectado como spam.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.26 (b)**] Designar mediante R al evento de que el mail recibido no sea spam, y mediante S al evento de que el mail recibido sea detectado como spam. Utilizando esa nomenclatura los datos del problema adoptan la siguiente forma

$$\mathbf{P}(R^c) = 0.15, \quad \mathbf{P}(S|R^c) = 0.8, \quad \mathbf{P}(S|R) = 0.1,$$

y lo que se quiere calcular es la probabilidad condicional $\mathbf{P}(R|S)$. Usando la *regla de Bayes* se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R|S) &= \frac{\mathbf{P}(S|R)\mathbf{P}(R)}{\mathbf{P}(S|R)\mathbf{P}(R) + \mathbf{P}(S|R^c)\mathbf{P}(R^c)} = \frac{(0.1)\cdot(0.85)}{(0.1)\cdot(0.85) + (0.8)\cdot(0.15)} \\ &= \frac{0.085}{0.085+0.12} = \frac{0.085}{0.205} = \frac{85}{205} = \frac{17}{41}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un mail no sea spam sabiendo que fue detectado como spam es $\frac{17}{41} = 0.4146$. □

---

2. Se ensayan 10 barras de acero nervuradas a tracción y se obtienen los siguientes resultados de resistencia (en MPa)

$$423.5,\ 411.0,\ 430.9,\ 424.1,\ 412.1,\ 423.8,\ 434.3,\ 421.3,\ 421.0,\ 437.9.$$

Usando los intervalos con extremos $405, 415, 425, 440$, hallar la función histograma basada en la muestra y utilizándola estimar la probabilidad de que una barra resista menos de 420 MPa.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.11 (b)**]. La función histograma será una función escalón sobre los intervalos $I_1 = (405, 415]$, $I_2 = (415, 425]$, $I_3 = (425, 440]$: $h(x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{p_j}{L_j}\mathbf{1}\{x \in I_j\}$, donde p_j es la frecuencia relativa de la muestra sobre el intervalo I_j y L_j es la longitud del intervalo I_j. Basados en los datos, y en los intervalos utilizados para clasificarlos, obtenemos que

$$\frac{p_1}{L_1} = \frac{2/10}{10} = \frac{2}{100}, \quad \frac{p_2}{L_2} = \frac{5/10}{10} = \frac{5}{100}, \quad \frac{p_3}{L_3} = \frac{3/10}{15} = \frac{3}{150}.$$

Por lo tanto, la función histograma es

$$h(x) = \frac{2}{100}\mathbf{1}\{405 < x \leq 415\} + \frac{5}{100}\mathbf{1}\{415 < x \leq 425\} + \frac{3}{150}\mathbf{1}\{425 < x \leq 440\}.$$

Si X es la variable aleatoria que representa la resistencia de una barra de acero. Vale que

$$\mathbf{P}(X < 420) \approx \int_{405}^{420} h(x)dx = 10 \cdot \frac{2}{100} + 5 \cdot \frac{5}{100} = 0.45.$$

□

3. En una estación del subte hay una máquina expendedora de café. En la posición 1, la máquina sirve un café de volumen aleatorio (en cm^3) con distribución uniforme entre 180 y 210, y en la posición 2 con distribución uniforme entre 190 y 220. La probabilidad de que la máquina esté en la posición 1 es 0.7 y la probabilidad de que esté en la posición 2 es 0.3. Si se sabe que la máquina sirvió un café de más de 200 cm^3, calcular la esperanza del volumen de dicho café.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 3.7 (c)**] El volumen V en cm^3 de café que sirve la máquina depende de la posición Π en que se encuentra la máquina: $\Pi = 1$ indica que la máquina está en la posición 1, y $\Pi = 2$ indica que la máquina está en la posición 2. Se sabe que $V|\Pi = i \sim V_i$, $i = 1, 2$, donde $V_1 \sim \mathcal{U}[180, 210]$ y $V_2 \sim \mathcal{U}[190, 220]$. También se sabe que $\mathbf{P}(\Pi = 1) = 0.7$ y que $\mathbf{P}(\Pi = 2) = 0.3$. Se quiere calcular $\mathbf{E}[V|V > 200]$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[V|V > 200] &= \frac{\mathbf{E}[V\mathbf{1}\{V > 200\}]}{\mathbf{P}(V > 200)} \\
&= \frac{\mathbf{E}[V_1\mathbf{1}\{V_1 > 200\}]\mathbf{P}(\Pi = 1) + \mathbf{E}[V_2\mathbf{1}\{V_2 > 200\}]\mathbf{P}(\Pi = 2)}{\mathbf{P}(V_1 > 200)\mathbf{P}(\Pi = 1) + \mathbf{P}(V_2 > 200)\mathbf{P}(\Pi = 2)} \\
&= \frac{\mathbf{E}[V_1\mathbf{1}\{V_1 > 200\}](0.7) + \mathbf{E}[V_2\mathbf{1}\{V_2 > 200\}](0.3)}{\left(\frac{1}{3}\right)(0.7) + \left(\frac{2}{3}\right)(0.3)} \\
&= \frac{30}{13}\left((0.7)\mathbf{E}[V_1\mathbf{1}\{V_1 > 200\}] + (0.3)\mathbf{E}[V_2\mathbf{1}\{V_2 > 200\}]\right) \\
&= \frac{21\mathbf{E}[V_1|V_1 > 200]\mathbf{P}(V_1 > 200) + 9\mathbf{E}[V_2|V_2 > 200]P(V_2 > 200)}{13} \\
&= \frac{21\,(205)\left(\frac{1}{3}\right) + 9\,(210)\left(\frac{2}{3}\right)}{13} = \frac{2695}{13} \approx 207.31.
\end{aligned}
$$

Para obtener la segunda igualdad se utilizó la *fórmula de probabilidades totales*. En la sexta igualdad se utilizó que $V_1|V_1 > 200 \sim \mathcal{U}(200, 210)$ y que $V_2|V_2 > 200 \sim \mathcal{U}(200, 220)$. $\square$

---

4. Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$
f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2(x^2 - xy + y^2)}{3}\right).
$$

Hallar la densidad conjunta de $U = X + Y$, $V = X - Y$. ¿U y V son independientes?

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.10 (a)** y **Ejercicio 4.11**] Observar que $(U, V)^t = A(X, Y)^t$, donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es la matriz

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},
$$

cuyo determinante es -2 y su inversa es la matriz

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.
$$

En esta situación se puede usar el *método del Jacobiano* para hallar la densidad conjunta de U y V:

$$
\begin{aligned}
f_{U,V}(u, v) &= |\det\left(A^{-1}\right)| \cdot f_{X,Y}\left(\left(A^{-1}(u, v)^t\right)^t\right) = \frac{1}{2} \cdot f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u-v}{2}\right) + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{u^2}{6} - \frac{v^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Y como $f_{U,V}(u,v)$ se puede factorizar en la forma

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{u^2}{6}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right),$$

Resulta que U y V son variables aleatorias independientes con distribuciones normales. A saber, $U \sim \mathcal{N}(0,3)$ y $V \sim \mathcal{N}(0,1)$. $\square$

Otro modo. A primera vista se observa que

$$(X,Y) \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{X,Y}\right),$$

donde $\mu_X = \mu_Y = 0$, y $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, $\rho_{X,Y}$ satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}} &= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \iff \sigma_X^2\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_X^2} &= \frac{2}{3} \iff (1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_X^2 = \frac{3}{4}\\
\frac{2\rho_{X,Y}}{2(1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_X\sigma_Y} &= \frac{2}{3} \iff \rho_{X,Y} = \frac{2}{3}(1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_X^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_Y^2} &= \frac{2}{3} \iff (1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_Y^2 = \frac{3}{4} \iff \sigma_X^2 = 1
\end{aligned}$$

Una vez que se comprueba que $(\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{X,Y}) = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ es la única solución del sistema de ecuaciones, se concluye que (X,Y) tiene la distribución normal bivariada $\mathcal{N}\left(0,0,1,1,\frac{1}{2}\right)$.

Como la familia de distribuciones normales bivariadas es cerrada por transformaciones lineales y (U,V) es una transformación lineal de (X,Y), resulta que (U,V) también se distribuye como una normal bivariada. En este caso, decir que U y V son independientes equivale a decir que $\mathbf{cov}(U,V) = 0$. Usando las propiedades de la covarianza se puede ver que

$$\mathbf{cov}(U,V) = \mathbf{cov}(X+Y, X-Y) = \mathbf{var}(X) - \mathbf{var}(Y) = 0.$$

Por lo tanto, U y V son independientes. Usando la linealidad de la esperanza se puede ver que $\mu_U = \mu_V = 0$. Usando las propiedades de la varianza se puede ver que $\sigma_U^2 = 3$ y $\sigma_V^2 = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sigma_U^2 &= \mathbf{var}(X+Y) = \mathbf{var}(X) + \mathbf{var}(Y) + 2\mathbf{cov}(X,Y) = 1+1+1 = 3,\\
\sigma_V^2 &= \mathbf{var}(X-Y) = \mathbf{var}(X) + \mathbf{var}(Y) - 2\mathbf{cov}(X,Y) = 1+1-1 = 1.
\end{aligned}$$

Usando que las distribuciones marginales de la distribución normal bivariada son normales se concluye que:

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_U}\exp\left(-\frac{(u-\mu_U)^2}{2\sigma_U^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_V}\exp\left(-\frac{(v-\mu_V)^2}{2\sigma_V^2}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{u^2}{6} - \frac{v^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

---

5. Sean X e Y variables aleatorias tales que X se distribuye uniformemente sobre el intervalo $(-1,1)$ y para cada $x \in (-1,1)$, $Y|X = x$ tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(-x,1)$. Calcular $\mathbf{E}[XY]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.15**] Usando que $Y|X = x \sim \mathcal{U}(-x,1)$, resulta que $\mathbf{E}[Y|X] = \frac{1}{2}(1-X)$. Usando la definición de la esperanza condicional $\mathbf{E}[Y|X]$ resulta inmediatamente que

$$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X\mathbf{E}[Y|X]] = \mathbf{E}\left[\frac{X(1-X)}{2}\right] = \int_{-1}^{1}\frac{x(1-x)}{4}dx = -\frac{x^3}{12}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}.$$

$\square$

Otro modo. Notar que

$$\mathbf{E}[XY] \quad = \quad \mathbf{E}[X\mathbf{E}[Y|X]] = \mathbf{E}\left[\frac{X(1-X)}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X^2]\right),$$

y usar que $\mathbf{E}[X] = 0$ y $\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{var}(X) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ para obtener que $\mathbf{E}[XY] = -\frac{1}{6}$. $\square$

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Segundo recuperatorio | Segundo cuatrimestre – 2017
Duración: 4 horas. | 7/XII/17 – 14:00 hs.

---

1. Un servidor de mail posee un detector de spam. La probabilidad de que un mail sea spam es 0.15. Si el mail recibido es spam, la probabilidad de que sea detectado como spam es 0.8. Si el mail recibido no es spam, la probabilidad de que sea detectado como spam es 0.1. Calcular la probabilidad de que un mail no sea spam sabiendo que fue detectado como spam.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.26 (b)**] Designar mediante R al evento de que el mail recibido no sea spam, y mediante S al evento de que el mail recibido sea detectado como spam. Utilizando esa nomenclatura los datos del problema adoptan la siguiente forma

$$\mathbf{P}(R^c) = 0.15, \quad \mathbf{P}(S|R^c) = 0.8, \quad \mathbf{P}(S|R) = 0.1,$$

y lo que se quiere calcular es la probabilidad condicional $\mathbf{P}(R|S)$. Usando la *regla de Bayes* se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R|S) &= \frac{\mathbf{P}(S|R)\mathbf{P}(R)}{\mathbf{P}(S|R)\mathbf{P}(R) + \mathbf{P}(S|R^c)\mathbf{P}(R^c)} = \frac{(0.1)\cdot(0.85)}{(0.1)\cdot(0.85) + (0.8)\cdot(0.15)}\\ &= \frac{0.085}{0.085 + 0.12} = \frac{0.085}{0.205} = \frac{85}{205} = \frac{17}{41}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un mail no sea spam sabiendo que fue detectado como spam es $\frac{17}{41} = 0.4146$. □

---

2. Sean X e Y variables aleatorias tales que X se distribuye uniformemente sobre el intervalo $(-1, 1)$ y para cada $x \in (-1, 1)$, $Y|X = x$ tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(-x, 1)$. Calcular $\mathbf{E}[XY]$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.15**] Usando que $Y|X = x \sim \mathcal{U}(-x, 1)$, resulta que $\mathbf{E}[Y|X] = \frac{1}{2}(1-X)$. Usando la definición de la esperanza condicional $\mathbf{E}[Y|X]$ resulta inmediatamente que

$$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X\mathbf{E}[Y|X]] = \mathbf{E}\left[\frac{X(1-X)}{2}\right] = \int_{-1}^{1} \frac{x(1-x)}{4}dx = -\frac{x^3}{12}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}.$$

□

Otro modo. Notar que

$$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X\mathbf{E}[Y|X]] = \mathbf{E}\left[\frac{X(1-X)}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X^2]\right),$$

y usar que $\mathbf{E}[X] = 0$ y $\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{var}(X) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ para obtener que $\mathbf{E}[XY] = -\frac{1}{6}$. □

---

3. Un dado equilibrado tiene pintadas sus seis caras de la siguiente manera: rojo, amarillo, amarillo, verde, verde, verde. Se arrojará el dado 5 veces. Calcular la probabilidad de que se obtenga una mayoría de caras verdes y al menos una cara amarilla.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 6.15**] Sean X_r, X_a y X_v las cantidades de caras rojas, amarillas y verdes obtenidas en los 5 tiros del dado.

El evento de que que se obtenga una mayoría de caras verdes en 5 tiros se describe mediante $X_v \geq 3$, y el evento de que se obtenga al menos una cara amarilla se describe mediante $X_a \geq 1$. Se quiere calcular $\mathbf{P}(X_v \geq 3, X_a \geq 1)$. Para calcular esa probabilidad descomponemos el evento $\{X_v \geq 3, X_a \geq 1\}$ en eventos disjuntos

$$\{X_r = 1, X_a = 1, X_v = 3\} \cup \{X_r = 0, X_a = 2, X_v = 3\} \cup \{X_r = 0, X_a = 1, X_v = 4\}$$

De acuerdo con los datos del problema tenemos que $(X_r, X_a, X_v) \sim$Mul$(5, p_r, p_a, p_v)$, donde $p_r = \frac{1}{6}$, $p_a = \frac{2}{6}$ y $p_v = \frac{3}{6}$:

$$\mathbf{P}(X_r = x_r, X_a = x_a, X_v = x_v) = \frac{5!}{x_r! x_a! x_v!} \left(\frac{1}{6}\right)^{x_r} \left(\frac{2}{6}\right)^{x_a} \left(\frac{3}{6}\right)^{x_v}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_r = 1, X_a = 1, X_v = 3) &= \frac{5!}{1!1!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \left(\frac{2}{6}\right)^{1} \left(\frac{3}{6}\right)^{3} = \frac{5}{36}, \\
\mathbf{P}(X_r = 0, X_a = 2, X_v = 3) &= \frac{5!}{0!2!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^{0} \left(\frac{2}{6}\right)^{2} \left(\frac{3}{6}\right)^{3} = \frac{5}{36}, \\
\mathbf{P}(X_r = 0, X_a = 1, X_v = 4) &= \frac{5!}{0!1!4!} \left(\frac{1}{6}\right)^{0} \left(\frac{2}{6}\right)^{1} \left(\frac{3}{6}\right)^{4} = \frac{5}{48}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(X_v \geq 3, X_a \geq 1) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{48} = \frac{55}{144} = 0.3819.$$

□

---

4. En un bosque de pinos las piñas caen de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad una por hora. Independientemente del proceso de caídas, cada una de las piñas romperá una teja del techo de la casa de María con probabilidad 0.25. Calcular la covarianza entre la cantidad de piñas que caerán de los pinos entre las 10:00 y las 13:00, y la cantidad de piñas que romperán las tejas de la casa de María entre las 11:00 y las 15:00.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 7.10**] Ponemos el 0 a las 10:00 y la unidad de la escala representa una hora. Sea Π el proceso de Poisson que gobierna la caída de las piñas de los pinos. Cada punto del proceso Π se pinta de acuerdo con la siguiente regla: de rojo si la piña rompe una teja de la casa de María o de verde en caso contrario. Indicamos mediante Π_r y Π_v los conjuntos de puntos de Π pintados de rojo y de verde, respectivamente. De acuerdo con el *Teorema de coloración y adelgazamiento*, Π_r y Π_v son dos procesos de Poisson independientes de intensidades 0.25 y 0.75 por hora, respectivamente. Indicamos mediante $N(t)$, $N_r(t)$ y $N_v(t)$ las funciones de conteo de los procesos Π, Π_r y Π_v, respectivamente. Se quiere calcular $\mathbf{cov}(N(0,3), N_r(1,5))$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}(N(0,3), N_r(1,5)) &= \mathbf{cov}(N_r(0,1) + N_r(1,3) + N_v(0,1) + N_v(1,3), N_r(1,3) + N_r(3,5)) \\
&= \mathbf{cov}(N_r(1,3), N_r(1,3)) \\
&= \mathbf{var}(N_r(1,3)) = (0.25) \cdot 2 = 0.5.
\end{aligned}$$

Para obtener la primera igualdad usamos que $N(a,b) = N_r(a,b) + N_v(a,b)$ para todo $0 < a < b$, para obtener la segunda usamos que los incrementos de Π_r y Π_v son independientes y la propiedad de independencia de los incrementos sobre intervalos disjuntos. □

---

5. En la pizzería *Pun-Pin* la cantidad de mozzarella que lleva cada pizza es una variable aleatoria con distribución uniforme entre 250 y 350 gramos. El maestro pizzero dispone de 50 kilos mozzarella, hallar aproximadamente la máxima cantidad de pizzas que podrá cocinar con una probabilidad superior a 0.95.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 8.13**] Indicamos mediante W_i, $i = 1, \ldots, n$ el peso en gramos de la cantidad de mozzarella de la i-ésima pizza. Se quiere hallar el máximo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i \leq 50000\right) \geq 0.95.$$

Se observa que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} W_i\right] = n\mathbf{E}[W_1] = 300n$ y que $\mathbf{var}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) = n\mathbf{var}(W_1) = \frac{100^2}{12}n$. De acuerdo con el *Teorema central del límite* tenemos que

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i - 300n}{\sqrt{\frac{100^2}{12}n}} \leq z\right) \approx \Phi(z).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i \leq 50000\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i - 300n}{\sqrt{\frac{100^2}{12}n}} \leq \frac{50000 - 300n}{\sqrt{\frac{100^2}{12}n}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{50000 - 300n}{\sqrt{\frac{100^2}{12}n}}\right) = \Phi\left(\frac{1000\sqrt{3} - 6\sqrt{3}n}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Para hallar el valor de n, ponemos $x = \sqrt{n}$ y observamos que

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{1000\sqrt{3} - 6\sqrt{3}n}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \quad &\iff \quad \frac{1000\sqrt{3} - 6\sqrt{3}n}{\sqrt{n}} \geq z_{0.95} \iff 1000\sqrt{3} - 6\sqrt{3}n \geq \sqrt{n}z_{0.95} \\
&\iff \quad 6\sqrt{3}x^2 + z_{0.95}x - 1000\sqrt{3} \leq 0.
\end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\sqrt{n} \leq \frac{-z_{0.95} + \sqrt{z_{0.95}^2 + 72000}}{12\sqrt{3}} = 12.831 \iff n \leq 164.64.$$

Por lo tanto, el maestro pizzero podrá cocinar un máximo de 164 pizzas. $\square$