

SoSe 2016

Beschreibungslogik

Mitschriften / Zusammenfassung

Dozent: Prof. Dr. Thomas Schneider
Autoren: Sascha Jongebloed, Robin Nolte

7. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
1.1 Wissensrepräsentation	3
1.1.1 Definition	3
1.1.2 Wohldefinierte Syntax und Semantik	3
1.1.3 In Beschreibungslogik	3
2 Grundlagen	4
2.1 Attributive Language with Complement (\mathcal{ALC})	4
2.1.1 Konzept- und Rollennamen	4
2.1.2 \mathcal{ALC} : Syntax	4
2.1.3 \mathcal{ALC} : Semantik	5
2.1.4 Extension/Modell	5
2.1.5 Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz	6
2.2 TBoxen	6
2.2.1 TBox-Syntax	6
2.2.2 TBox-Semantik	6
2.2.3 Modellierung	7
2.2.4 Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz	7
2.2.5 Monotonie	7
2.3 Schlussfolgerungsprobleme	8
2.3.1 Subsumtion als Ordnungsrelation	8
2.3.2 Klassifikation	9
2.3.3 Reduktion	9
2.4 Erweiterungen von \mathcal{ALC}	9
2.4.1 Inverse Rollen (\mathcal{ALCI})	9
2.4.2 Zahlenrestriktion (\mathcal{ALCQ})	10
3 Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen	11
3.1 Bisimulation	11
3.2 Ausdrucksstärke	12
3.2.1 Anwendungen von Bisimulation I	12
3.2.2 Anwendungen von Bisimulation II	13
3.2.3 Unravelling	14
3.2.4 Bisimulation versus Ausdrucksstärke	15
3.2.5 Bisimulation für Erweiterungen von \mathcal{ALCI}	15
3.3 Ausdrucksstärke und Modellkonstruktion	16
3.3.1 Größe von Konzepten und TBoxen	16
3.3.2 Endliche/beschränkte Modelleigenschaft	16
3.3.3 Typ	16
3.3.4 Typ	17
3.3.5 Filtration	18
3.3.6 Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft	20
3.3.7 Entscheidbarkeit	20
4 Tableau-Algorithmen	22
4.1 Ziel	22

4.2	ALC ohne TBoxen	22
4.2.1	Negationsnormalform	22
4.2.2	I-Baum	22
4.2.3	Tableau-Algorithmus	23
4.2.4	Definition Rollentiefe	24
4.2.5	Multimengen	24
4.2.6	Terminierung	25
4.2.7	Proposition 4.7 (Korrektheit)	26
4.2.8	Realisierbarkeit	27
4.2.9	Proposition 4.9 (Vollständigkeit)	27
4.2.10	Praktikabilität	28
4.3	ALC mit generellen TBoxen	28
4.3.1	TBox-Regel	28
4.3.2	Blockieren	28
4.3.3	Neue \exists -Regel (\exists' -Regel)	28
4.3.4	Vollständigkeit	28
4.3.5	Korrektheit	28
4.3.6	Terminierung	29
5	Komplexität	30
5.1	Komplexität mit TBoxen, obere Schranke	30
5.1.1	Theorem 5.1	30
5.1.2	Definition 5.2 (Typ)	30
5.1.3	Typelimination	30
5.1.4	Schlechter Typ	30
	Proposition 5.4 (Terminierung)	30
	Proposition 5.5	30
5.1.5	Theorem 5.6	31
5.2	Komplexität mit TBoxen, untere Schranke	32
5.2.1	ExpTime-Spiele	32
5.2.2	Definition 5.7	32
5.2.3	Definition 5.8 (Gewinnstrategie)	32
5.2.4	Definition 5.9	32
5.2.5	Theorem 5.10	33
5.2.6	Reduktion	33
5.2.7	Theorem 5.12	33
5.3	Komplexität ohne TBoxen obere Schranke	33
5.3.1	Theorem 5.13	33
5.3.2	ALC-Worlds	33
	Theorem 5.14	33
	Definition 5.15 (i-Konzepte)	33
	Definition 6.16 (i-Typ)	33
	ALC-Worlds	34
	Proposition 5.17	34
5.3.3	Proposition 5.18	34
5.3.4	Theorem 5.19	34
5.4	Komplexität ohne TBoxen untere Schranke	34
5.4.1	Definition 5.20	34

5.4.2	Definition 5.21	35
5.4.3	Theorem 5.25	35
5.5	Unentscheidbare Erweiterungen	35
5.6	Konkrete Bereiche	35
5.6.1	Definition 5.27 (ALCB Syntax)	35
5.6.2	Definition 5.28 (ALCB Semantik)	35
5.6.3	2-Registermaschinen	36
5.6.4	Definition 5.30	36
5.6.5	Definition 5.31	36
5.6.6	Theorem 5.29	36
6	Effiziente Beschreibungslogiken	37
6.1	EL	37
6.2	Simulation	37
6.2.1	Lemma 6.3	37
6.2.2	Lemma 6.4	37
6.2.3	Lemma 6.6	38
6.3	Subsumption ohne TBox	38
6.3.1	Definition kanonisches Modell	38
6.3.2	Lemma 6.8	38
6.3.3	Lemma 6.9	38
6.3.4	Lemma 6.10	38
6.3.5	Theorem 6.11	39
6.4	Subsumption mit TBox	39
6.4.1	Lemma 6.12	39
6.4.2	Normalform	39
6.4.3	Lemma 6.14	39
6.4.4	Lemma 6.14	39
6.4.5	Algorithmus	40
6.4.6	Theorem 6.16	40
Terminierung	40	
Korrektheit	40	
Vollständigkeit	40	
6.5	Erweiterungen von EL	41
6.5.1	EL mit Disjunktion und Bottom	41
6.5.2	ELU (mit Disjunktion)	41
7	ABoxen und Anfragebeantwortung	42
8	Übersichten	43

1 Einleitung

1.1 Wissensrepräsentation

1.1.1 Definition

Entwicklung von Formalismen, mittels derer Wissen über die Welt in abstrakter Weise beschrieben werden kann und die effektiv verwendet werden können, um intelligente Anwendungen zu realisieren.

1.1.2 Wohldefinierte Syntax und Semantik

- Syntax: die Sprache, in der Wissen repräsentiert wird und hier stets symbolisch und logikbasiert
- Semantik: fixiert die Bedeutung des repräsentierten Wissens in exakter, eindeutiger Weise
 - Deklarative Semantik ist unabhängig von verarbeitender Software

1.1.3 In Beschreibungslogik

- Beschränkung auf konzeptuelles Wissen -> Abstraktion
- Schlussfolgern (explizit nach implizit) ist Mehrwert gegenüber Datenbanken
 - Entscheidbarkeit und geringe Komplexität erwünscht
- Beschreibungslogiken sind Logikfamilie

2 Grundlagen

2.1 Attributive Language with Complement (\mathcal{ALC})

2.1.1 Konzept- und Rollennamen

Konzept- und Rollennamen sind abzählbar unendliche und disjunkte (durch Groß- und Kleinschreibung) Mengen.

2.1.2 \mathcal{ALC} : Syntax

Definition 2.1. \mathcal{ALC} -Konzepte

Die Menge der \mathcal{ALC} -Konzepte ist induktiv definiert:

- Jeder Konzeptname ist \mathcal{ALC} -Konzept
- Wenn C, D \mathcal{ALC} -Konzepte, so auch
 - $\neg C$ (Negation)
 - $C \sqcap D$ (Konjunktion)
 - $C \sqcup D$ (Disjunktion)
- Wenn C \mathcal{ALC} -Konzept und r Rollename, so sind
 - $\exists r.C$ (Existenzrestriktion)
 - $\forall r.C$ (Werterestriktion)

\mathcal{ALC} -Konzepte

T2.1 Beispiel

Hier einige Beispiel für diese Syntax:

$$\begin{aligned} & Student \sqcap \exists studiert. Naturwissenschaft \\ & Professor \sqcap Emeritus \sqcap \forall haelt. \neg PlichtVL \\ & VL \sqcap \neg PlichtVL \sqcap \forall hatUebungsaufgabe(Einfach \sqcup Interessant) \\ & A \sqcap \exists r.(\neg B \sqcup \forall r.A) \end{aligned}$$

Weiteres zur Syntax

Dabei verwenden wir folgende Symbole:

- A, B für Konzeptnamen
- C, D für zusammengesetzte Konzepte
- r, s für Rollennamen

Zudem benutzen zudem folgende Abkürzungen: wir schreiben

- \top für $A \sqcup \neg A$
- \perp für $A \sqcap \neg A$

Präzedenzregel

- \neg, \exists, \forall binden stärker als \sqcap und \sqcup

Also zum Beispiel steht $\forall r.(\exists r.A \sqcap B)$ für $\forall r.((\exists r.A) \sqcap B)$ und nicht für $\forall r.(\exists r.(A \sqcap B))$.

Des Weiteren ist keine Präzedenz zwischen \sqcap und \sqcup definiert worden: Daher müssen Klammern verwendet werden!

2.1.3 ALC: Semantik

Definition 2.2. ALC Semantik

Eine Interpretation \mathcal{I} ist Paar $(\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ mit

- $\Delta^{\mathcal{I}}$ nicht leere Menge (Domäne)
- $\cdot^{\mathcal{I}}$ Interpretationsfunktion bildet ab:
 - jeden Konzeptnamen A auf Menge $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
 - jeden Rollennamen r auf Relation $r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

Abbildung $\cdot^{\mathcal{I}}$ wird induktiv auf zusammengesetzte Konzepte erweitert:

- $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
- $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
- $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
- $(\exists r.C)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \text{es gibt } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ mit } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ und } e \in C^{\mathcal{I}}\}$
- $(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \text{für alle } e \in \Delta^{\mathcal{I}}, (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ impliziert } e \in C^{\mathcal{I}}\}$

Verwendete Symbole:

- \mathcal{I}, \mathcal{J} für Interpretationen
- d, e für Elemente der Domäne

Für Interpretationen verwenden wir übliche Terminologie für Graphen:

- e für r -Nachfolger von d (in \mathcal{I}) wenn $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$
- e für r -Vorgänger von d (in \mathcal{I}) wenn $(e, d) \in r^{\mathcal{I}}$
- wenn r unwichtig, sprechen wir nun von Nachfolgern / Vorgängern
- \mathcal{I} ist endlich gdw. $\Delta^{\mathcal{I}}$ endlich ist.

2.1.4 Extension/Modell

Wir nennen

- $C^{\mathcal{I}}$ ist Extension des Konzeptes oder der Rolle C
- jedes $d \in C^{\mathcal{I}}$ ist eine Instanz des Konzeptes C
- r -Nachfolger, r -Vorgänger

Beachte, das $\top^{\mathcal{I}}$ für jede Interpretation \mathcal{I} identisch mit $\Delta^{\mathcal{I}}$ ist. Intuitiv entspricht \top die Menge alle Elemente.

$\perp^{\mathcal{I}}$ ist für jede Interpretation \mathcal{I} leer, repräsentiert also intuitiv, dass etwas unmöglich ist. Z.B.:

Mensch $\sqcap \forall \text{hatKind}.\perp$ Menschen, die keine Kinder haben

2.1.5 Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz

Definition 2.3. Erfüllbar, susumiert, äquivalent

Seien C und D \mathcal{ALC} -Konzepte. Dann

- ist C *erfüllbar*, wenn es eine Interpretation I gibt mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. \mathcal{I} ist dann ein *Modell* von C .
- wird C von D *subsumiert*, wenn $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ in allen Interpretationen \mathcal{I} (Notation $C \sqsubseteq D$)
- sind C und D *äquivalent*, wenn $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ in allen Interpretationen \mathcal{I} (Notation $C \equiv D$)

Es gelten die üblichen aussagenlogischen Äquivalenten, wie z.B. de Morgan.

2.2 TBoxen

TBoxen definieren Konzepte und setzten diese zueinander in Beziehung.

2.2.1 TBox-Syntax

Definition 2.4. TBox-Syntax

Konzeptinklusion ist Ausdruck $C \sqsubseteq D$ mit C, D Konzepten.

TBox ist endliche Menge von Konzeptinklusionen.

Wir verwenden $C \equiv D$ als Abkürzung für $C \sqsubseteq D, D \sqsubseteq C$.

Wir lesen $C \equiv D$ als “ C impliziert D ”.

2.2.2 TBox-Semantik

Definition 2.5. TBox-Semantik

Eine Interpretation I

- erfüllt Konzeptinklusion $C \sqsubseteq D$ gdw. $C^I \subseteq D^I$
- ist Modell von TBox T gdw. I alle Konzeptinklusionen in T erfüllt

Intuitiv entsprechen Interpretation mögliche Welten, TBoxen hingegen schließen Welten aus, die wir für nicht möglich halten.

2.2.3 Modellierung

In der Praxis bestehen TBoxen zu einem großen Teil aus:

- Konzeptinklusion $A \sqsubseteq C$, mit A ein Konzeptname: C ist notwendige Bedingung dafür, eine Instanz von A zu sein
- Konzeptdefinition $A \equiv C$, mit A ein Konzeptname: C ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, eine Instanz von A zu sein.
- Disjunktionsconstraints $C \sqcap D \sqsubseteq \perp$: Kein Objekt kann gleichzeitig zu C und D gehören
- Komplexe Zusammenhänge zwischen mehreren Konzepten. Zum Beispiel:

$$\textit{Professor} \sqcap \exists \textit{hat.Lehrdeputat} \sqsubseteq \exists \textit{haelt.Vorlesung}$$

2.2.4 Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz

Definition 2.6. Erfüllbar, subsumiert, äquivalent bezüglich einer TBOX
Seine C, D , \mathcal{ALC} -Konzepte und \mathcal{T} TBox. Dann

- ist C erfüllbar bzgl. \mathcal{T} gdw. \mathcal{T} Modell \mathcal{I} hat mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- wird C von D subsumiert bzgl. \mathcal{T} , wenn $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ in allen Modellen \mathcal{I} von \mathcal{T} (Notation $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$)
- sind C und D äquivalent bzgl. \mathcal{T} , gdw. $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ in allen Modellen \mathcal{I} von \mathcal{T} (Notation $\mathcal{T} \models C \equiv D$)

Intuitiv gesprochen ist diese Definition wie in 2.1.5, nur ist I jeweils Modell von einer TBox T .

- Erfüllbarkeit zeigen: Modell angeben
- Unerfüllbarkeit / Subsumption zeigen: semantisch Argumentieren
- Nicht-Subsumption zeigen: Gegenmodell angeben

2.2.5 Monotonie

Lemma 2.7. Seien \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 TBoxen mit $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Dann gilt:

1. Wenn C erfüllbar bzgl. \mathcal{T}_2 , dann ist C erfüllbar bzgl. \mathcal{T}_1 .
2. Wenn $\mathcal{T}_1 \models C \sqsubseteq D$, dann $\mathcal{T}_2 \models C \sqsubseteq D$.

T2.8. Beweisskizze.

1. *Beweis.* Sei C erfüllbar bzgl. \mathcal{T}_2 . Dann gibt es Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_2 mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Also erfüllt \mathcal{I} alle Konzeptinklusionen in \mathcal{T}_2 und wegen $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ auch alle Konzeptinklusionen in \mathcal{T}_1 . Also ist \mathcal{I} Modell von \mathcal{T}_1 mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Also ist C erfüllbar bzgl. \mathcal{T}_1 . \square

2. *Beweis.* Kontraposition: Wenn $\mathcal{T}_2 \not\models C \sqsubseteq D$ dann $\mathcal{T}_1 \not\models C \sqsubseteq D$.

Es gelte $\mathcal{T}_2 \not\models C \sqsubseteq D$. D.h. es gibt Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_2 mit $C^{\mathcal{I}} \not\subseteq D^{\mathcal{I}}$. Wie im 1. Falls ist \mathcal{I} auch Modell von $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Also $\mathcal{T}_1 \not\models C \sqsubseteq D$ \square

Die umgekehrten Aussagen sind im Allgemeinen nicht richtig. Beispiel:

$$\mathcal{T}_1 = \emptyset, \mathcal{T}_2 = \{A \sqsubseteq B\}$$

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$$

$$\mathcal{T}_2 \models A \sqsubseteq B$$

$$\mathcal{T}_1 \models A \sqsubseteq B$$

Eine Logik, die diese Eigenschaften erfüllt, nennt man *monoton* (das Hinzunehmen von Formeln kann nur zu *zusätzlichen* Konsequenzen, führen, aber nicht dazu, dass Konsequenzen ungültig werden)

2.3 Schlussfolgerungsprobleme

Schlussfolgern dient dazu aus explizit gegebenes Wissen neues Wissen abzuleiten, dass vorher nur implizit vorhanden war. Beschreibungslogiken sind so designt, dass sie so viel Ausdruckstärke wie nötig, aber nicht mehr, besitzen, um möglichst effizientes Schlussfolgern zu Erlauben.

Die von uns betrachteten Schlussfolgerungsprobleme sind:

- **Erfüllbarkeitsproblem:** Gegeben C und \mathcal{T} , entscheide ob C erfüllbar bzgl. \mathcal{T} .
- **Subsumtionsproblem:** Gegeben C, D und \mathcal{T} , entscheide ob $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$
- **Äquivalenzproblem:** Gegeben C, D und \mathcal{T} , entscheide ob $\mathcal{T} \models C \equiv D$

Diese Entscheidungsprobleme können auch mit leerer TBox $\mathcal{T} = \emptyset$ betrachtet werden.

Die Schlussfolgerungsprobleme werden dazu genutzt Modellierungsfehler in Ontologien zu finden, die Struktur der TBox explizit zu machen und um Redundanzen zu finden.

2.3.1 Subsumtion als Ordnungsrelation

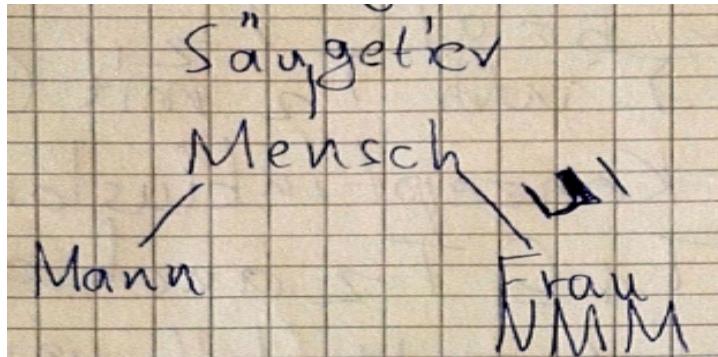
Lemma 2.8. Für jede TBox \mathcal{T} ist die Relation “ \sqsubseteq bzgl. \mathcal{T} ”

- reflexiv ($\mathcal{T} \models C \sqsubseteq C$) und
- transitiv ($\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ und $\mathcal{T} \models D \sqsubseteq E$ impliziert $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq E$)

Bis auf die fehlende Antisymmetrie () ist \sqsubseteq also partielle Ordnung.

Man kann \sqsubseteq als Hasse-Diagramm darstellen, dessen Knoten mit Mengen von Konzepten beschriftet sind.

2.9



2.3.2 Klassifikation

Ein weiteres Schlussfolgerungsproblem:

- **Klassifikation:** Gegeben \mathcal{T} , berechne das Hasse Diagramm für \sqsubseteq bzgl. \mathcal{T} , eingeschränkt auf Konzeptnamen in \mathcal{T} .

Dies ist ein Berechnungsproblem (kein Entscheidungsproblem), das in der Praxis durch n^2 Subsumtionsberechnungen berechenbar ist und für das zahlreiche Optimierungen verfügbar sind.

2.3.3 Reduktion

Die Entscheidungsprobleme sind wechselseitig polynomiell aufeinander reduzierbar:

Lemma 2.9. 1. Erfüllbarkeit auf Nicht-Äquivalenz

C erfüllbar bzgl. T gdw. $T \not\models C \equiv \perp$

2. Subsumtion auf Unerfüllbarkeit

$T \models C \sqsubseteq D$ gdw. $C \sqcap \neg D$ unerfüllbar bzgl. T

3. Äquivalenz auf Subsumtion

$T \models C \equiv D$ gdw. $T \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$

Dies heißt für uns, dass ein Algorithmus für eines der Probleme auch für die anderen beiden verwendet werden können. Alle drei Probleme haben dieselbe Komplexität (in \mathcal{ALC}). Daher werden wir uns im Folgenden hauptsächlich auch Erfüllbarkeit konzentrieren.

2.4 Erweiterungen von \mathcal{ALC}

Wir betrachten exemplarisch die beiden Erweiterungen \mathcal{ALCI} und \mathcal{ALCQ} von \mathcal{ALC} . Es existieren viel mehr Erweiterungen (z.B.: um spezielle Rolleninterpretationen, temporale Operatoren etc.). Diese können auch kombiniert werden, z.B.: \mathcal{ALCQI} .

2.4.1 Inverse Rollen (\mathcal{ALCI})

Zunächst betrachten wir \mathcal{ALCI} , das \mathcal{ALC} um die Möglichkeit inverse Rollen in Existenz- und Werterestriktionen zu benutzen erweitert.

Definition 2.10. Inverse Rollen Für jeden Rollennamen r ist r^- die *inverse Rolle* zu r .

Wir definieren

$$(r^-)^I = \{(e, d) \mid (d, e) \in r^I\}$$

2.4.2 Zahlenrestriktion (\mathcal{ALCQ})

Definition 2.11. Zahlenrestriktion Für jede natürliche Zahl n , jeden Rollennamen r und jedes Konzept C :

- $(\leq n r C)$ (Höchstens-Restriktion)
- $(\geq n r C)$ (Mindestens-Restriktion)

Die Semantik ist

- Höchstens-Restriktion: $(\leq n r C)^I = \{d \in \Delta^I \mid \#\{e \mid (d, e) \in r^I \wedge e \in C^I\} \leq n\}$
- Mindestens-Restriktion $(\geq n r C) = \{d \in \Delta^I \mid \#\{e \mid (d, e) \in r^I \wedge e \in C^I\} \geq n\}$

Beachte:

- $\exists r.C$ ist äquivalent zu $(\geq 1 r C)$
- $\forall r.C$ ist äquivalent zu $(\leq 0 r \neg C)$

3 Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Die wichtigsten Eigenschaften einer Beschreibungslogik sind *Ausdrucksstärke* und *Komplexität*. Ausdruckstärke kann man nicht linear quantifizieren, sondern nur beschreiben und charakterisieren.

3.1 Bisimulation

Bisimulation ist ein graphentheoretische Begriff, die “Ähnlichkeit” von Graphen beschreibt und eng mit der Ausdruckstärke von \mathcal{ALC} zusammenhängt.

Definition 3.1. Bisimulation

Seien I_1 und I_2 Interpretationen. Relation $\rho \subseteq \Delta^{I_1} \times \Delta^{I_2}$ ist Bisimulation zwischen I_1 und I_2 , wenn gilt:

1. Wenn $d_1 \rho d_2$, dann gilt für alle Konzeptnamen A : $d_1 \in A^{I_1}$ gdw. $d_2 \in A^{I_2}$.
2. Wenn $d_1 \rho d_2$ und $(d_1, d'_1) \in r^{I_1}$ für beliebigen Rollennamen r , dann gibt es ein $d'_2 \in \Delta^{I_2}$ mit $d'_1 \rho d'_2$ und $(d_2, d'_2) \in r^{I_2}$.
3. Wenn $d_1 \rho d_2$ und $(d_2, d'_2) \in r^{I_2}$ für beliebigen Rollennamen r , dann gibt es ein $d'_1 \in \Delta^{I_1}$ mit $d'_1 \rho d'_2$ und $(d_1, d'_1) \in r^{I_1}$.

Seien I_1 und I_2 Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{I_1}$, $d_2 \in \Delta^{I_2}$:

$(I_1, d_1) \sim (I_2, d_2)$: Es gibt Bisimulation ρ zwischen I_1 und I_2 mit $d_1 \rho d_2$. Die leere Relation ist immer Bisimulation.

Theorem 3.2. Seien I_1 , I_2 Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{I_1}$ und $d_2 \in \Delta^{I_2}$. Wenn $(I_1, d_1) \sim (I_2, d_2)$, dann gilt für alle ALC-Konzepte C :

$$d_1 \in C^{I_1} \text{ gdw. } d_2 \in C^{I_2}$$

T3.2.

Beweis. Beweisskizze per Induktion über die Struktur von C . Sei ρ eine Bisimulation zwischen I_1 und I_2 mit $d_1 \rho d_2$.

I.A. $C = A$ ist Konzeptname. Nach Bedingung 1. der Bisimulation gilt

$$d_1 \in A^{I_1} \text{ gdw. } d_2 \in A^{I_2}$$

I.S. Unterscheide Fälle gemäß des äußersten Konstruktes von C . Es genügen $\neg, \sqcap, \exists r.C$:

1. $C = \neg D$

$$\begin{aligned} d_1 \in C^{I_1} &\stackrel{\text{Sem.}}{\text{gdw.}} d_1 \notin D^{I_1} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{\text{gdw.}} d_2 \notin D^{I_2} \\ &\stackrel{\text{Sem.}}{\text{gdw.}} d_2 \in C^{I_2} \end{aligned} \tag{1}$$

1. $C = D_1 \sqcap D_2$

$$\begin{aligned}
 d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} &\stackrel{\text{Sem.}}{gdw.} d_1 \in D_1^{\mathcal{I}_1} \text{ und } d_1 \in D_2^{\mathcal{I}_1} \\
 &\stackrel{\text{I.V.}}{gdw.} d_2 \in D_1^{\mathcal{I}_2} \text{ und } d_2 \in D_2^{\mathcal{I}_2} \\
 &\stackrel{\text{Sem.}}{gdw.} d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

1. $C = \exists r.D$

$$\begin{aligned}
 d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} &\stackrel{\text{Sem.}}{\Rightarrow} \exists e_1 : (d_1, e_1) \in r^{\mathcal{I}_1} \text{ und } e \in D^{\mathcal{I}_1} \\
 &\stackrel{\text{2.Bed.}}{\Rightarrow} \exists e_2 \in \Delta_2^{\mathcal{I}_2} : (d_2, e_e) \in r^{\mathcal{I}_2} \text{ und } (e_1 \rho e_2) \\
 &\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow} e_2 \in D^{\mathcal{I}_2} \\
 &\stackrel{\text{Sem.}}{\Rightarrow} d_2 \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}_2} \\
 &\stackrel{\text{Sem.}}{gdw.} d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Rückrichtung analog, nur mit der 3. Bedingung.

□

3.2 Ausdrucksstärke

Definition 3.3. Eigenschaft, Ausdrückbarkeit

Eine *Eigenschaft* E ist eine Menge von Paaren (\mathcal{I}, d) , wobei \mathcal{I} eine Interpretation und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ein Element in \mathcal{I} ist.

E ist *ausdrückbar in \mathcal{ALC}* , wenn es ein \mathcal{ALC} -Konzept C gibt, so dass für alle \mathcal{I} und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$(\mathcal{I}, d) \in E \text{ gdw. } d \in C^{\mathcal{I}}$$

3.2.1 Anwendungen von Bisimulation I

Theorem 3.4. In \mathcal{ALC} ist nicht ausdrückbar:

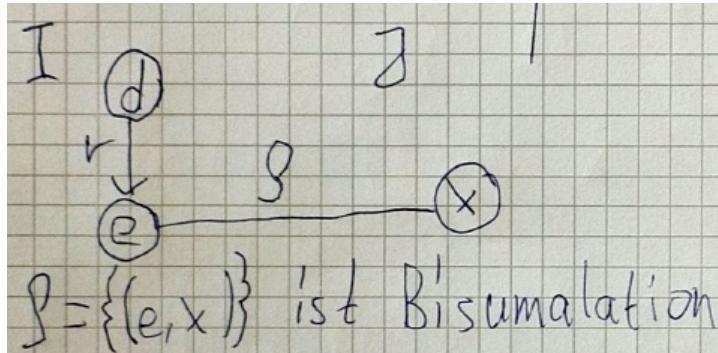
- das \mathcal{ALCI} -Konzept $\exists r^-. \top$
- die \mathcal{ALCQ} -Konzepte
 - $(\leq n r \top)$ für alle $n > 0$ und
 - $(\geq n r \top)$ für alle $n > 1$

T.3.3.

Beweisskizze. Finde Bisimulation für die dies nicht gilt.

Beweis. $\exists r. \top$

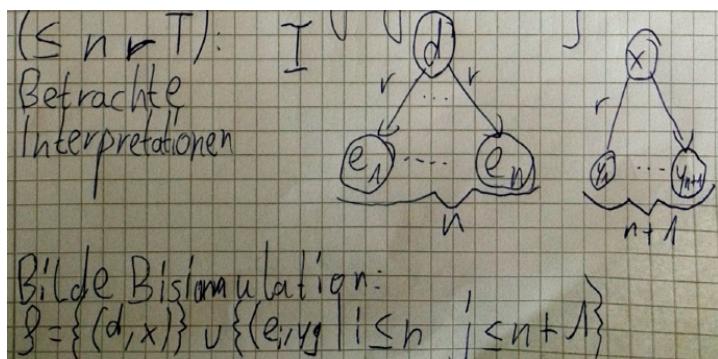
Betrachte 2 Interpretationen \mathcal{I} und \mathcal{J}



Angenommen, es gäbe ein \mathcal{ALC} -Konzept C mit $C \equiv \exists r^-. \top$. Dann gilt $e \in C^\mathcal{I}$. Mit Theorem 3.2 folgt $x \in C^\mathcal{J}$, also hat x auch einen r -Vorgänger in \mathcal{J} . ∇ \square

Beweis. $\leq n r \top$

Betrachte 2 Interpretationen \mathcal{I} und \mathcal{J}



Angenommen, es gäbe ein \mathcal{ALC} -Konzept C mit $C \equiv (\leq n r \top)$. Dann gilt $d \in C^\mathcal{I}$. Mit Theorem 3.2 folgt $x \in C^\mathcal{J}$, also $x \in (\leq n r \top)$. ∇ \square

Man sieht, dass die Argumentation zum Beweis der Nicht-Ausdrückbarkeit immer auf dasselbe hinausläuft:

Theorem 3.5. Sei E eine Eigenschaft. Wenn es Interpretation I_1, I_2 und Elemente $d_1 \in \Delta^{I_1}$ und $d_2 \in \Delta^{I_2}$ gibt, so dass

- $(I_1, d_1) \in E$ und $(I_2, d_2) \in E$ sowie
- $(I_1, d_1) \sim (I_2, d_2)$

dann ist E nicht in \mathcal{ALC} ausdrückbar.

3.2.2 Anwendungen von Bisimulation II

Interpretation ist *Baum* gdw. $(\Delta^\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I})$ Baum (endl. oder unendl.). \mathcal{ALC} hat die *Baummodelleigenschaft*

Theorem 3.6. Wenn ein ALC-Konzept C bzgl. einer ALC-TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Baummodell \mathcal{I} . (mit \mathcal{I} Baum, Wurzel in $C^\mathcal{I}$.)

3.2.3 Unravelling

Sei \mathcal{I} eine Interpretation und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$.

d -Pfad in \mathcal{I} : Sequenz $d_0 d_1 \dots d_{n-1}$, $n > 0$ mit

- $d_0 = d$
- für alle $i < n$: es gibt Rollenname r mit $(d_i, d_{i+1}) \in r^{\mathcal{I}}$.

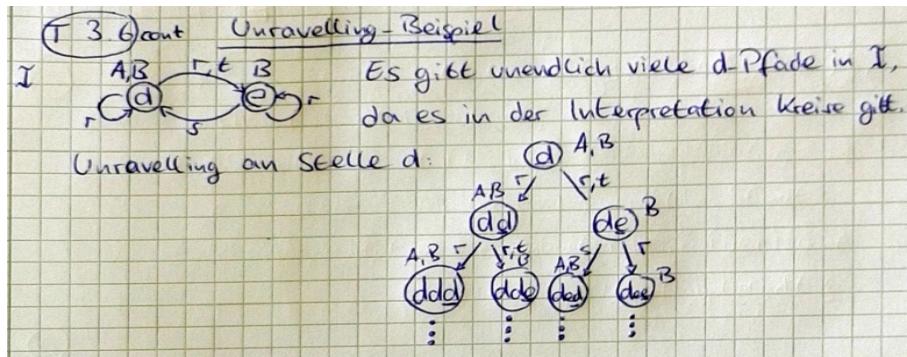
Wir setzen $\text{end}(d_0 \dots d_{n-1}) = d_{n-1}$.

Definition 3.7. Unravelling

Unravelling von \mathcal{I} an Stelle d ist folgende Interpretation \mathcal{J} :

- $\Delta^{\mathcal{J}} = \text{Menge aller } d\text{-Pfade in } \mathcal{I}$
- $A^{\mathcal{J}} = \{p \in \Delta^{\mathcal{J}} \mid \text{end}(p) \in A^{\mathcal{I}}\}$
- $r^{\mathcal{J}} = \{(p, p') \in \Delta^{\mathcal{J}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid \exists e : p' = p \cdot e \text{ und } (\text{end}(p), e) \in r^{\mathcal{I}}\}$

für alle Konzeptnamen A und Rollennamne r



Erklärung: Erzeuge Knoten, die den Folgen entsprechen, füge sie den Konzepten hinzu, die als letztes Element in der Folge vorkommen und erzeuge Kanten die den weiterführenden Rollen entsprechen.

Lemma 3.8. Sei \mathcal{J} Unravelling von \mathcal{I} an Stelle d . Für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C und alle $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt:

$$\text{end}(p) \in C^{\mathcal{I}} \text{ gdw. } p \in C^{\mathcal{J}}$$

T3.7

Beweis. Mit Theorem genügt es folgende Bisimulation zu zeigen:

$$(I, \text{end}(p)) \sim (J, p)$$

Definiere Relation:

$$\rho = \{(\text{end}(p), p) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid p \text{ ist } d\text{-Pfad}\}$$

(Bilde alle Knoten in \mathcal{J} auf ihr Ende ab).

Zur Bisimulation:

1. gilt per Definition von \mathcal{J} .
2. Angenommen $e \rho p$ und $(e, e') \in r^{\mathcal{I}}$. Dann $e = \text{end}(p)$ per Konstruktion von \mathcal{J} . Wegen $(e, e') \in r^{\mathcal{I}}$ ist pe' Pfad. Nach Konstruktion von \mathcal{J} gilt $(p, pe') \in r^{\mathcal{J}}$.

□

Nun folgt Theorem 3.6.:

Theorem 3.6 Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Baummodell \mathcal{I} .

T3.8

Beweis. Sei C erfüllbar bezüglich \mathcal{T} . Dann gibt es Modell \mathcal{I} von C und \mathcal{T} . Sei \mathcal{J} das Unravelling von \mathcal{I} an der Stelle $d_0 \in C^{\mathcal{I}}$.

Mit Lemma 3.8 ist die Wurzel d_0 von \mathcal{J} in $C^{\mathcal{J}}$. Noch zu zeigen: \mathcal{J} ist Modell von \mathcal{T} .

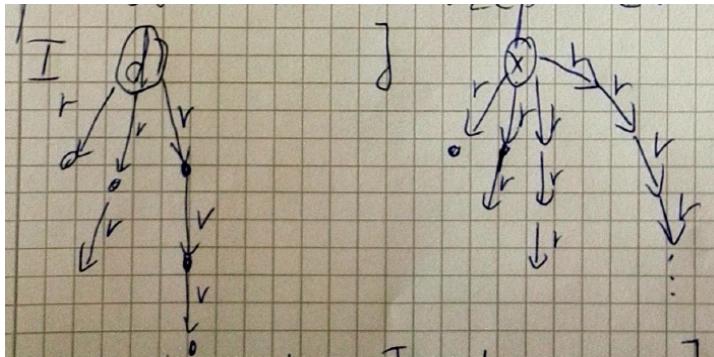
Sei $D \sqsubseteq E$ in \mathcal{T} und $p \in D^{\mathcal{J}}$. Nach Lemma 3.8 ist dann $\text{end}(p) \in D^{\mathcal{I}}$ und weil \mathcal{I} Modell von \mathcal{T} folgt $\text{end}(p) \in E^{\mathcal{I}}$. Mit Lemma 3.8 folgt $p \in E^{\mathcal{J}} \Rightarrow J \models D \sqsubseteq E$. □

3.2.4 Bisimulation versus Ausdrucksstärke

Bisimulation entspricht nicht der Ausdrucksstärke von \mathcal{ALC} , denn die Gegenrichtung von Theorem 3.2 gilt nicht:

Es gibt Interpretationen \mathcal{I} und \mathcal{J} und $d \in \mathcal{I}$, $x \in \mathcal{J}$, so dass $d \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $x \in C^{\mathcal{J}}$ für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C , aber $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, x)$.

Beispiel:



Es gilt:

- $d \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $x \in C^{\mathcal{J}}$, falls ALC-Konzept C
- $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, x)$: für y in \mathcal{J} gibt es kein adäquates Element $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $e \rho y$

Sie gilt allerdings für verschiedene Klassen von Interpretationen, wie die Klasse aller endlichen Interpretationen oder die Klasse aller Interpretationen mit endlicher Verweigungszahl.

3.2.5 Bisimulation für Erweiterungen von \mathcal{ALCI}

Für \mathcal{ALCI} , \mathcal{ALCQ} und \mathcal{ALQI} gibt es ebenfalls Bisimulationsbegriffe.

Fpr \mathcal{ALCI} füge 2 Regeln hinzu, sodass Vorgänger auch simuliert sein müssen.

So kann man zudem zeigen, dass \mathcal{ALCI} , \mathcal{ALCQ} und \mathcal{ALQI} die Baummodelleigenschaft haben.

3.3 Ausdrucksstärke und Modellkonstruktion

In diesem Kapitel wird die endliche Modelleigenschaft und Filtration eingeführt.

3.3.1 Größe von Konzepten und TBoxen

Definition 3.9. Größe $|C|$ eines ALC-Konzeptes C ist induktiv definiert:

- $|A| = 1$
- $|\neg C| = |C| + 1$
- $|C \sqcap D| = |C \sqcup D| = |C| + |D| + 1$
- $|\exists r.C| = |\forall r.C| = |C| + 3$

Größe $|C|$ einer TBox \mathcal{T} ist

- $\sum_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} |C| + |D| + 1$

Intuitiv entspricht dies der Anzahl von Symbolen in C bzw. \mathcal{T} .

3.3.2 Endliche/beschränkte Modelleigenschaft

\mathcal{ALC} hat *endliche Modelleigenschaft*:

Theorem 3.10. Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames *endliches* Modell.

\mathcal{ALC} hat sogar *beschränkte Modelleigenschaft*:

Theorem 3.11. Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Modell der Kardinalität $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$

3.3.3 Typ

Im Folgenden sei C \mathcal{ALC} -Konzept und \mathcal{T} TBox, so dass C erfüllbar bzgl. \mathcal{T} .

Wir definieren den Begriff eines Typs:

- ist Menge von Konzepten
- beschreibt einen Punkt $d \in \Delta^{\mathcal{T}}$ in einer Interpretation \mathcal{I}
- Einschränkung auf Teilkonzepte von C und \mathcal{T} (um Endlichkeit zu erreichen)

3.3.4 Typ

Definition 3.12. Teilkonzepte

- $\text{sub}(C)$ ist Menge der Teilkonzepte von C (einschließlich C)
- $\text{sub}(\mathcal{T}) := \bigcup_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \text{sub}(C) \cup \text{sub}(D)$
- $\text{sub}(C, \mathcal{T}) := \text{sub}(C) \cup \text{sub}(\mathcal{T})$

T3.10

Beispiele:

$$\text{sub}(\forall r. \exists r. (A \sqcap B)) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r. (A \sqcap B), \forall r. \exists r. (A \sqcap B)\}$$

$$\text{sub}(\{A \sqsubseteq r. B, \forall r. B \sqsubseteq A\}) = \{A, B, \exists r. B, \forall r. B\}$$

Lemma 3.13. $|\text{sub}(C, T)| \leq |C| + |T|$

Definition 3.14. Typ von d

Sei \mathcal{I} eine Interpretation, $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Der Typ $t_{\mathcal{I}}(d)$ von d in \mathcal{I} ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{D \in \text{sub}(C, T) \mid d \in D^{\mathcal{I}}\}$$

Erklärung: Alle Teilkonzepte von \mathcal{T} und C , die ein Objekt d erfüllt.

T3.11

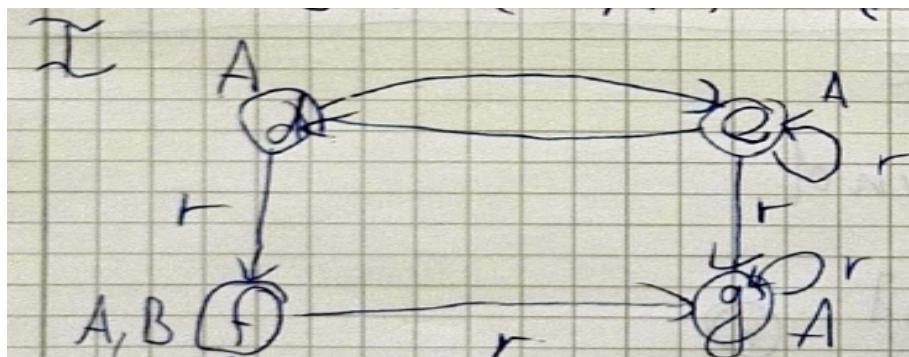
Beispiel:

Sei

$$\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r. A\}$$

$$C = A \sqcap B$$

$$\text{sub}(C, \mathcal{T}) = \{A, \exists r. A, B, A \sqcap B\}$$



$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{A, \exists r. A\}$$

$$t_{\mathcal{I}}(e) = \{A, \exists r. A\}$$

$$t_{\mathcal{I}}(f) = \{A, \exists r. A, A \sqcap B, B\}$$

$$t_{\mathcal{I}}(g) = \{A, \exists r. A\}$$

Lemma 3.15. Für jede Interpretation \mathcal{I} gilt: $\#\{t_{\mathcal{I}}(d) \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$

3.3.5 Filtration

Idee:

- Gegeben Interpretation \mathcal{I} , identifiziere alle Elemente gleichen Typs
- Danach kommt also jeder Typ nur einmal vor
- Nach Lemma 3.15 gibt es nur $2^{|C|+|\mathcal{T}|}$ viele Typen
- Wenn \mathcal{I} Modell von C und \mathcal{T} , so auch das Resultat.

Definition 3.16. Filtration

Sei \mathcal{I} Interpretation. Definiere Äquivalenzrelation \sim auf $\Delta^{\mathcal{I}}$:

$$d \sim e \text{ gdw. } t_{\mathcal{I}}(d) = t_{\mathcal{I}}(e)$$

Wir bezeichnen diese Äquivalenzklasse von $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ bzgl. \sim mit $[d]$.

Die Filtration von \mathcal{I} bzgl. C und \mathcal{T} ist folgende Interpretation \mathcal{J} :

- $\Delta^{\mathcal{J}} = \{[d] \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$
- $A^{\mathcal{J}} = \{[d] \mid d \in A^{\mathcal{I}}\}$ für alle $A \in \text{sub}(C, \mathcal{T})$
- $r^{\mathcal{J}} = \{([d], [e]) \mid \exists d' \in [d], e' \in [e] : (d', e') \in r^{\mathcal{I}}\}$ für alle Rollennamen r

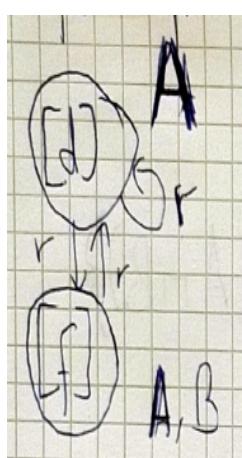
Beachte: $A^{\mathcal{J}}$ ist wohldefiniert (Repräsentantenunabhängigkeit)

T3.11cont

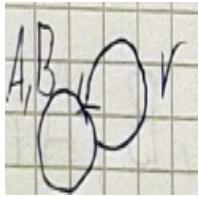
Wenden wir diese Definition auf das Beispiel T3.11 an.

$$\begin{aligned}[d] &= \{d, e, g\} \\ [f] &= \{f\}\end{aligned}$$

Die Interpretation \mathcal{J} sieht wie folgt aus:



Offensichtlich bringt Filtration aber nicht immer das minimalste Modell, denn folgende Interpretation wäre auch ein Modell:



Theorem 3.17. Wenn \mathcal{I} Modell von C und \mathcal{T} , so auch \mathcal{J} , bzw. für alle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und $D \in sub(C, \mathcal{T})$ gilt: $d \in D^{\mathcal{I}}$ gdw. $[d] \in D^{\mathcal{J}}$.

T3.12

Beweis. Beh.: Für alle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und $D \in sub(C, \mathcal{T})$ gilt:

$$d \in D^{\mathcal{I}} \text{ gdw. } [d] \in D^{\mathcal{J}}$$

Beweis per Induktion über die Struktur von D .

I.A. $C = A^*$ folgt aus Definition $A^{\mathcal{J}}$.

I.S.

1. \neg, \sqcap einfach mittels Semantik und I.A.

2. $D = \exists r.E$

a. Hinrichtung

$$\begin{aligned} d &\in (\exists r.E)^{\mathcal{I}} \\ \Leftrightarrow &(\text{Semantik}) \text{ es gibt } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ mit } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ und } e \in E^{\mathcal{I}} \\ \Rightarrow &(\text{Definition } r^{\mathcal{J}} \text{ und I.V.}) \text{ es gibt } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ mit } ([d], [e]) \in r^{\mathcal{J}} \text{ und} \\ &[e] \in E^{\mathcal{J}} \\ \Leftrightarrow &(\text{Semantik } \exists) [d] \in (\exists r.E)^{\mathcal{J}} \end{aligned}$$

b. Rückrichtung

$$\begin{aligned} [d] &\in (\exists r.E)^{\mathcal{J}} \\ \Leftrightarrow &(\text{Semantik } \exists) \text{ es gibt } [e] \in \Delta^{\mathcal{J}} \text{ mit } ([d], [e]) \in r^{\mathcal{J}} \text{ und } [e] \in E^{\mathcal{J}} \\ \Leftrightarrow &(\text{Definition } r^{\mathcal{J}} \text{ und I.V.}) \text{ es gibt } [e] \in \Delta^{\mathcal{J}}, \text{ es gibt } d' \in [d], e' \in [e], \\ &(d', e') \in r^{\mathcal{J}} \text{ und } e' \in E^{\mathcal{J}} \\ \Rightarrow &(\text{Semantik } \exists) d' \in (\exists r.E)^{\mathcal{I}} \\ \Rightarrow &(d \sim d') d \in (\exists r.E)^{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

□

Sei $d \in C^{\mathcal{I}}$. Nach Behauptung gilt $[d] \in C^{\mathcal{J}}$, also ist \mathcal{J} Modell von C .

\mathcal{J} ist ebenfalls Modell von \mathcal{T} :

Sei $C \sqsubseteq D$ in \mathcal{T} , $[d] \in C^{\mathcal{J}}$

Nach Beh. gilt $d \in C^{\mathcal{I}}$

Weil \mathcal{I} Modell von $C \sqsubseteq D$, gilt $d \in D^{\mathcal{I}}$

Nach Beh. gilt $[d] \in D^{\mathcal{J}}$

3.3.6 Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft

Theorem 3.11

Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Modell der Kardinalität $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Beweis. Folgt aus Theorem 3.17 und Lemma 3.15.

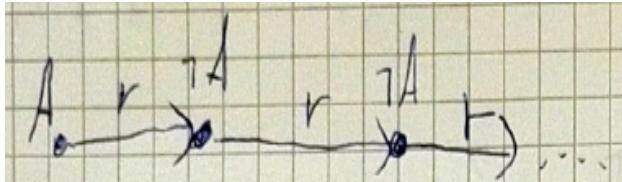
Ähnliches (mit der selben Schranke) lässt sich für \mathcal{ALCI} und \mathcal{ALCQ} beweisen. (mit derselben Schranke)

Theorem 3.18. \mathcal{ALQT} hat nicht die endliche Modelleigenschaft.

Beweis: A hat nur unendliche Modelle bzgl. folgender TBox:

- $\top \sqsubseteq \exists r. \neg A$
- $T \sqsubseteq (\leq 1 \ r^- \ \top)$

T3.13



Erklärung: Diese Interpretation müsste unendlich erweitert werden, damit es die TBox erfüllt.

3.3.7 Entscheidbarkeit

Theorem 3.11:

Wenn C erfüllbar bzgl. \mathcal{T} , dann haben C und \mathcal{T} Modell der Größe $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Erfüllbarkeit ist also entscheidbar:

Gegeben C und \mathcal{T} , so dass $|C| + |\mathcal{T}| = n$,

- erzeuge alle Interpretationen \mathcal{I} mit $|\Delta|^{\mathcal{I}} \leq 2^n$ (es gibt höchstens $2^{2^{5n}}$ viele davon)
- und überprüfe, ob \mathcal{I} Modell von C und \mathcal{T} ist. (in Zeit polynomiell in \mathcal{I} , C , und \mathcal{T})

Lemma 3.19. Gegeben sei ein \mathcal{ALC} -Konzept C und endliche Interpretation \mathcal{I} . Man kann in polynomieller Zeit – genauer in Zeit $O(|C| \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$ – die Extension $C^{\mathcal{I}}$ berechnen.

Beweisskizze zu Lemma 3.19: Rekursiver Algorithmus über die Definition der Konzeptsemantik. Dessen Zeitaufwand ist $O(|C| \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$:

- Anzahl der (rekursiven Aufruf = $|sub(C)| \leq |C|$)
- pro Aufruf Zeitaufwand $O(|\Delta^{\mathcal{I}}|)$:
simple Operationen auf ≤ 2 Teilmengen von $\Delta^{\mathcal{I}}$

Korollar 3.20. Gegeben seien C , \mathcal{T} in \mathcal{ALC} und endliche Interpretation \mathcal{I} . Man kann in polynomieller Zeit – genauer: in Zeit $O((|\mathcal{T}| + |C|) \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$ – entscheiden, ob \mathcal{I} ein Modell von C und \mathcal{T} ist.

Theorem 3.21. In \mathcal{ALC} ist Erfüllbarkeit bzgl. TBoxen entscheidbar.

Die Komplexität liegt aber bei 2-ExpTime: 2-exponentiell viele Interpretationen müssen geprüft werden, jede Prüfung braucht polynomielle Zeit.

Dieser Ansatz ist kaum tauglich für die Praxis.

4 Tableau-Algorithmen

4.1 Ziel

Automatisches Schlussfolgern spielt eine zentrale Rolle für BLen. Insbesondere ist die Ausdruckstärke von BLen stark darauf zugeschnitten.

Dabei ist aber wichtig, dass die relevanten Schlussfolgerungsprobleme entscheidbar sind, sie eine möglichst geringe Komplexität haben und/oder Algorithmen existieren, die sich in der Praxis performant verhalten.

Von uns wird hauptsächlich das Problem der Erfüllbarkeit betrachtet.

In der Praxis haben sich hauptsächlich Tableau-Algorithmen und Resolutionsverfahren als effizient herausgestellt.

4.2 ALC ohne TBoxen

4.2.1 Negationsnormalform

Definition 4.1. Negationsnormalform

Konzept ist in *Negationsnormalform* (NNF) gdw. Negation nur auf Konzeptnamen angewendet wird.

Lemma 4.2. Jedes Konzept kann in Linearzeit in ein äquivalentes Konzept in NNF umgewandelt werden.

T4.1

Beweisskizze. Wende Gesetze der doppelten Negation, de Morgan und Dualität von \exists, \forall an.

4.2.2 I-Baum

Definition 4.3. I-Baum

I-Baum für C_0 (in NNF) ist knoten- und kantenbeschrifteter Baum (V, E, L) mit

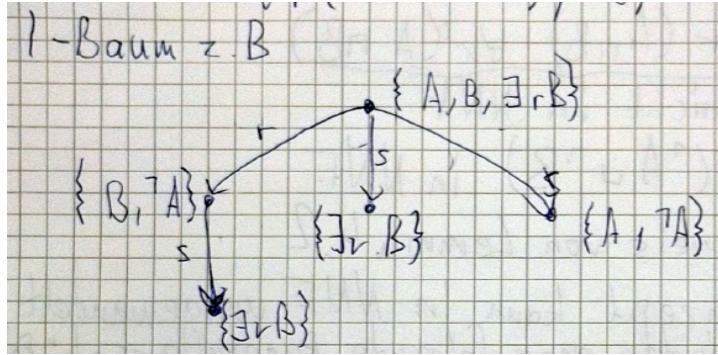
- V Knotenmenge
- E ist Menge beschrifteter Kanten (v, r, v') mit $v, v' \in V$, r Rollenname
- $L: V \rightarrow 2^{sub(C_0)}$

T4.2

Bsp.

$$C_0 = A \sqcap \forall r. (\neg A \sqcap \exists r. B)$$

$$sub(C_0) = \{A, \neg A, B, \exists r. B, \neg A \sqcap \exists r. B, \forall r. (\neg A \sqcap \exists r. B)\}$$



4.2.3 Tableau-Algorithmus

Berechnet Folge

$$M_0, M_1, \dots$$

von Mengen von I-Bäumen:

$$M_0 = \{B_{\text{ini}}\} \text{ mit } B_{\text{ini}} \text{ initialer I-Baum fuer } C_0 :$$

- $V := \{v_{\text{ini}}\}$
- $E := \emptyset$
- $L := (v_{\text{ini}}) \{C_0\}$

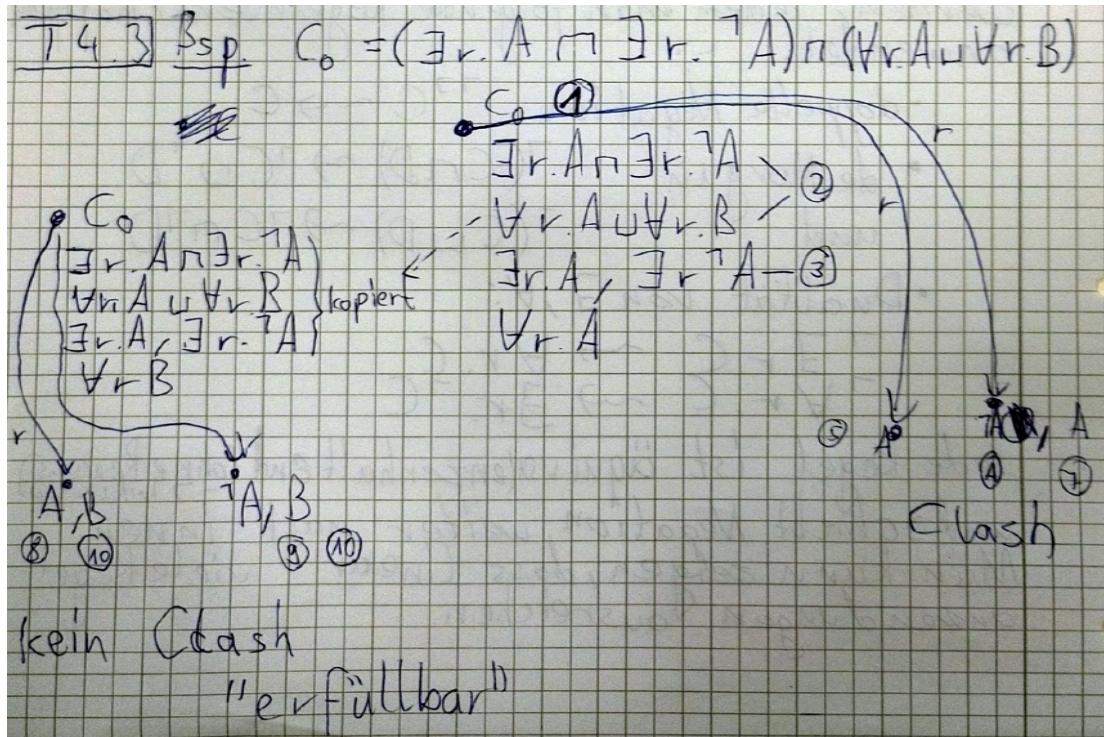
M_{i+1} entsteht aus M_i durch Anwendung der Tableau-Regeln auf irgendeinen I-Baum in M_i und anschließendes Austauschen des verwendeten Baumes durch den neu erzeugten (Sei (V, E, L) I-Baum):

- \Box -Regel
 - Wähle $v \in V$ und $C \Box D \in L(v)$ so dass *nicht* $\{C, D\} \subseteq L(v)$
 - erweitere $L(v)$ um C und D
- \sqcup -Regel
 - Wähle $v \in V$ und $C \sqcup D \in L(v)$ so dass $\{C, D\} \cap L(v) = \emptyset$
 - erweitere $L(v)$ um C oder D (ergibt zwei I-Bäume)
- \exists -Regel
 - Wähle $v \in V$ und $\exists r.C \in L(v)$ so dass es kein $v' \in V$ gibt mit $(v, r, v') \in E$ und $C \in L(v')$
 - erweitere V um neuen Konten v' und E um (v, r, v') ; setze $L(v') = \{C\}$
- \forall -Regel
 - Wähle $v, v' \in V$ und $\forall r.C \in L(v)$ so dass $(v, r, v') \in E$ und $C \notin L(v)$
 - erweitere $L(v')$ um C

Stoppe, wenn alle Regeln erschöpfend angewandt wurden. Gib „erfüllbar“ zurück, falls es einen I-Baum ohne offensichtlichen Widerspruch ($\{A, \neg A\} \subseteq L(v)$) gibt; „unerfüllbar“ sonst.

T4.3

Beispiel:



4.2.4 Definition Rollentiefe

Rollentiefe $rd(C)$ von Konzepten $C \in sub(C_0)$ ist induktiv definiert:

- $rd(A) = rd(\neg A) = 0$
- $rd(C \sqcap D) = rd(C \sqcup D) = \max(rd(C), rd(D))$
- $rd(\exists r.C) = rd(\forall r.C) = 1 + rd(C)$

Lemma 4.4. Für alle $C \in sub(C_0)$ gilt $rd(C) \leq |C|$.

4.2.5 Multimengen

Multimengen sind Mengen, in denen Elemente mehrfach vorkommen dürfen, z.B.:

$$\{1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6\}$$

Formal: Multimengen über die Menge S ist Abbildung

$$M : S \rightarrow \mathbb{N}$$

, welche jedes Element auf die Anzahl seines Vorkommens abbildet.

Die meisten Begriffe übertragen sich von Mengen auf Multimengen:

- Leere Menge $\emptyset : s \mapsto 0$ für alle $s \in S$
- Vereinigung $(M_1 \cup M_2)(s) := M_1(s) + M_2(s)$

- Element: $s \in M$ gdw. $M(s) > 0$
- Differenz: $(M_1 \setminus M_2)(s) = X(m, n) = \begin{cases} M_1(s) - M_2(s) & , \text{ wenn } M_1(s) \geq M_2(s) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$MM(S)$ ist die Menge aller Multimengen über der Menge S .

Gegeben strikte partielle Ordnung $(S, <)$, ist die *Multimengenerweiterung* $(MM(S), <_{\text{mul}})$ definiert als:

$M_2 <_{\text{mul}} M_1$ gdw. $\exists X, Y \in MM(S)$, so dass

- $\emptyset \neq X \subseteq M_1$
- $M_2 = (M_1 \setminus X) \cup Y$
- $\forall y \in Y \exists x \in X : x > y$

Also erhält man M_2 aus M_1 , indem man einige Elemente entfernt und durch endlich viele *kleinere* ersetzt.

Beispiel:

$$\{3, 1\} >_{\text{mul}} \{2, 2, 2\} >_{\text{mul}} \{2, 2\} >_{\text{mul}} \{2, 1, 1, 1\}$$

Es ist leicht zu zeigen das diese Ordnung eine strikte partielle Ordnung ist. Zudem ist sie wohlfundiert, wenn $(S, <)$ wohldefiniert ist: Es gibt keine unendlich $<$ absteigenden Ketten.

Theorem 4.6. Wenn $(S, <)$ wohlfundiert (hat keine unendlichen absteigenden Ketten) ist, dann ist auch $(MM(S), <_{\text{mul}})$ wohlfundiert.

4.2.6 Terminierung

Proposition 4.5. Der Tableau-Algorithmus stoppt nach endlicher Zeit.

Beweis in 4 Schritten:

1. Es werden nur I-Bäume mit einem Verzweigungsgrad $\leq |C_0|$ generiert.

T4.5a

Beweisskizze. Nur die \exists -Regel generiert Nachfolger, aber höchstens einen für jedes Konzept $\exists r.C \in \text{sub}(C_0)$. Nach Lemma 3.13 enthält $\text{sub}(C_o)$ höchstens $|C_0|$ viele Konzepte.

2. Es werden nur I-Bäume mit einer Tiefe $\leq |C_0|$ generiert.

T4.5b

Beweis. Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen. Zu zeigen: Wenn v Knoten mit Tiefe i ist, dann gilt $\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i$ für alle $C \in L(v)$.

I.A. Es gibt nur Knoten v_{ini} mit $L(v_{\text{ini}}) = \{C_0\}$. I.V. gilt, da $i = 0$.

I.S. Fallunterscheidung nach angewandter Regel (exemplarisch \square, \exists):

a) \Box -Regel

$C \Box D \in L(v)$ und $L(v)$ wird durch C, D erweitert. Nach I.V. gilt:
 $rd(C \Box D) \leq rd(C_0) - i$, also auch $rd(C) \leq rd(C_0) - i$, weil $rd(C) \leq rd(C \Box D)$. Analog für D .

b) \exists -Regel

Dann $\exists r.C \in L(v)$ und es wird neues v' auf Tiefe $i + 1$ generiert mit
 $L(v') = \{C\}$. Es gilt $rd(C) = rd(\exists r.C) - 1 \leq rd(C_0) - i - 1 = rd(C_0) - (i + 1)$

□

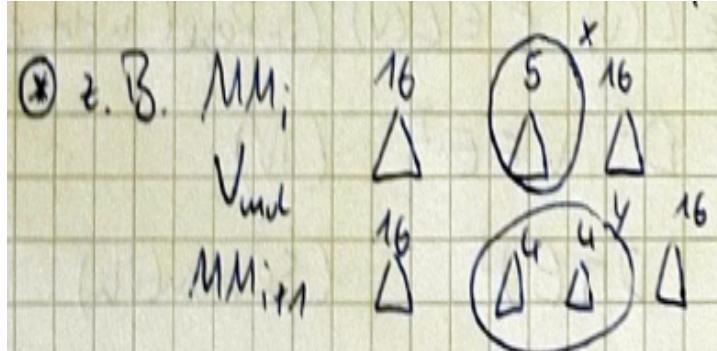
3. Sei M_0, M_1, \dots die erzeugte Folge und $B \in M_i$ für ein $i \geq 0$. Dann ist B durch die Anwendung von maximal $|C_0|^{|C_0|} \cdot |C_0| \leq 2^{2|C_0|^2} = n$ Regeln entstanden (Knoten im Baum mal Größe Knotenbeschriftung).

T4.5d

Wir ordnen jedem M_i eine Multimenge MM_i zu. Für jedes $B \in M_i$ enthält MM_i die Zahl der "n-Anzahl der Regelanwendungen, mittels derer B generiert wurde."

Weil $<$ auf \mathcal{N} wohldefiniert ist, ist $<_{mul}$ auf $MM(\{0, \dots, n\})$ wohldefiniert.

Offenbar gilt $MM_{i+1} <_{mul} MM_i$ für alle $i \geq 0$ *. Also werden nur endlich oft Regeln angewendet.



4.2.7 Proposition 4.7 (Korrektheit)

Wenn der Tableau-Algorithmus „erfüllbar“ zurückgibt, so ist C_0 erfüllbar.

Beweisskizze per Induktion über die Struktur von C . „erfüllbar“-Ausgabe bedeutet widerspruchsfreier, vollständiger I-Baum $B = (V, E, L)$ gefunden. Konstruiere Interpretation I :

- $\Delta^I = V$
- $r^I = \{(v, v') \mid (v, r, v') \in E\}$ für alle Rollennamen r
- $A^I = \{v \mid A \in L(v)\}$ für alle Konzeptnamen A

Behauptung: Für alle Konzepte C und $v \in V$ gilt $C \in L(v)$ impliziert $v \in C^I$. Da $C_0 \in L(v_{ini})$ in B_{ini} gilt auch $C_0 \in L(v_{ini})$ in B . Also $v_{ini} \in C_0^I$ nach Behauptung,

weswegen dann C_0 erfüllbar.

I.A. $C = A$ (Konzeptname) I.B. gilt nach Definition von I .

I.S. An den Beispielen \neg , \Box

- $C = \neg A$

A Konzeptname. Da B keinen offensichtlichen Widerspruch hat, folgt das $A \notin L(v)$. Nach Definition von I gilt $v \notin A^I$. Also $v \in (\neg A)^I$.

- $C = D \Box E$

$C \in L(v) \Rightarrow (\Box\text{-Regel nicht anwendbar}) D \in L(v), E \in L(v) \Rightarrow (\text{I.V.}) v \in D^I, v \in E^I \Rightarrow (\text{Semantik}) v \in (D \Box E)^I$

4.2.8 Realisierbarkeit

Sei $B = (V, E, L)$ ein I-Baum. Interpretation I realisiert B gdw. es gibt eine Funktion $\pi : V \rightarrow \Delta^I$ so dass

- $(v, r, v') \in E$ impliziert $(\pi(v), \pi(v')) \in r^I$
- $C \in L(v)$ impliziert $\pi(v) \in C^I$

B ist realisierbar, wenn es Interpretation I gibt, die B realisiert. Menge M von I-Bäumen ist realisierbar gdw. ein $B \in M$ realisierbar.

4.2.9 Proposition 4.9 (Vollständigkeit)

Wenn C_0 erfüllbar, so gibt der Tableau-Algorithmus „erfüllbar“ zurück.

Beweisskizze per Induktion über i . Sei C_0 erfüllbar. Nach Proposition 4.5 berechnet der Algorithmus endlich Folge M_0, \dots, M_n . Wir zeigen: M_i ist realisierbar für alle $0 \leq i \leq n$. Daraus folgt: Es gibt realisierbaren Baum $B \in M_n$ und damit enthält B keinen offensichtlichen Widerspruch. Also gibt der Algorithmus „erfüllbar“ zurück.

I.A. $i = 0$. $M_0 = \{B_{\text{ini}}\}$. B_{ini} ist realisierbar, weil C_0 erfüllbar.

I.S. Fallunterscheidung gemäß der Regel, mit der M_{i+1} aus M_i erzeugt wurde. Sei B realisierbarer Baum aus M_i , auf welchen Regel angewandt wird. Beispielhaft \sqcup -Regel:

1. \sqcup -Regel

Dann wird $B = (V, E, L)$ ersetzt durch $B' = (V, E, L') \in M_{i+1}$ und $B'' = (V, E, L'') \in M_{i+1}$ und es gibt $v \in V$ mit

- $(C \sqcup D) \in L(v)$
- $L'(v) = L(v) \cup \{C\}, L''(v) = L(v) \cup \{D\}$
- $L'(u) = L''(u) = L(u)$ für alle $u \neq v$

Es genügt zu zeigen, dass wenn B realisierbar, dann B' oder B'' realisierbar. Sei I Interpretation, die B realisiert und $\pi : V \rightarrow \Delta^I$ Abbildung wie in Definition 4.8. Dann gilt $\pi(v) \in (C \sqcup D)^I$. Nach Semantik: $\pi(v) \in C^I$ oder $\pi(v) \in D^I$. Also realisiert I den Baum B' oder B'' .

4.2.10 Praktikabilität

I-Bäume können höchstens exponentiell groß werden.

4.3 ALC mit generellen TBoxen

Jede TBox T ist äquivalent zu einer TBox der Form $\{\top \sqcap C_T\}$. Setzte $C_T \prod_{C \sqsubseteq D \in T} \neg C \sqcup D$.

4.3.1 TBox-Regel

Wähle $v \in V$ so dass $C_T \notin L(v)$ und erweitere $L(v)$ um C_T .

Problem: Terminiert nicht.

4.3.2 Blockieren

Sei (V, E, L) ein I-Baum und $u, v \in V$. Dann ist v direkt blockiert durch u , wenn

1. u Vorgänger von v in B ist und
2. $L(v) \subseteq L(u)$

v ist blockiert, wenn v direkt blockiert ist oder einen direkt blockierten Vorgänger hat.

4.3.3 Neue \exists -Regel (\exists' -Regel)

- Wähle $v \in V$ und $\exists r.C \in L(v)$ so dass v nicht blockiert ist und es kein $v' \in V$ gibt mit $(v, r, v') \in E$ und $C \in L(v')$
- erweitere V um neuen Konten v' und E um (v, r, v') ; setze $L(v') = \{C\}$

4.3.4 Vollständigkeit

Beweis wie ohne TBoxen: Alle M_0, \dots, M_n sind realisierbar bzgl. I (Induktion), also enthält M_n einen Baum ohne offensichtlichen Widerspruch (Nur neue Fallunterscheidung für TBox-Regel und Realisierbarkeitsbegriff auf TBoxen erweitert).

4.3.5 Korrektheit

Beweisskizze per Induktion über die Struktur von C . Definiere Interpretation I :

- $\Delta^I = \{v \in V \mid v \text{ nicht blockiert}\}$
- $r^I = \{(v, v') \mid (v, r, v') \in E\} \cup \{(v, u) \mid \exists (v, r, v') \in E \text{ und } v' \text{ direkt blockiert durch } u\}$
- $A^I = \{v \mid A \in L(v)\}$

Behauptung: Für alle ALC-Konzepte C und $v \in \Delta^I$ gilt: $C \in L(v) \Rightarrow v \in C^I$. Die Behauptung impliziert wie gewünscht, dass

- I Modell von T ist.

Da die TBox-Regel nicht anwendbar ist, gilt $C_T \in L(v)$ für alle $v \in V$. Also $v \in C_T^I$ für alle $v \in \Delta^I$.

- I Modell von C_0 ist.

Da $C_0 \in L(v_{\text{ini}})$ gilt nach Behauptung $v_{\text{ini}} \in C_0^I$.

I.A. Siehe Beweis zu Proposition 4.7.

I.S. Schritte wie in Beweis zu Proposition 4.7, außer:

- $C = \exists r.D$

Sei $\exists r.D \in L(v)$. Da die \exists' -Regel nicht anwendbar ist, gibt es $v' \in V$ mit $(v, r, v') \in E$ und $D \in L(v)$. Fallunterscheidung:

1. v' unblockiert. Dann $(v, v') \in r^I$ (Definition I), $v' \in D^I$ (**I.V.**) $\Rightarrow v \in (\exists r.D)^I$
2. v' blockiert. Da der direkte Vorgänger v von v' unblockiert ist, ist v' direkt blockiert von unblockiertem Vorgänger u . Es gilt:

- $(v, u) \in r^I$ nach Definition r^I
- $D \in L(v) \subseteq L(u)$ (Blockierungsbedingung)
- $\Rightarrow u \in D^I$ (**I.V.**)

Also $v \in (\exists r.D)^I$.

- $C = \forall r.D$

Ähnlich zu oberem Fall.

4.3.6 Terminierung

Beweis analog, aber mit Einbezug der TBox.

5 Komplexität

5.1 Komplexität mit TBoxen, obere Schranke

5.1.1 Theorem 5.1

In ALC ist die Erfüllbarkeit von Konzepten bzgl. TBoxen ExpTime-Vollständig.

5.1.2 Definition 5.2 (Typ)

Ein Typ für C_0 und T ist Teilmenge $t \subseteq \text{sub}(C_0, T)$, so dass

1. $A \in t$ gdw. $\neg A \notin t$ für alle $\neg A \notin \text{sub}(C_0, T)$
2. $C \sqcap D \in t$ gdw. $C \in t$ und $D \in t$ für alle $C \sqcap D \in \text{sub}(C_0, T)$
3. $C \sqcup D \in t$ gdw. $C \in t$ oder $D \in t$ für alle $C \sqcup D \in \text{sub}(C_0, T)$
4. $C_T \in t$

5.1.3 Typelimination

1. Generiere alle Typen für C_0 und T (exponentiell viele)
2. Eliminiere wiederholt Typen, die in keinem Modell von T vorkommen können
3. Überprüfe, ob ein Typ überlebt hat, der C_0 enthält
4. Wenn ja, antworte „erfüllbar“, sonst „unerfüllbar“

5.1.4 Schlechter Typ

Sei Γ Typenmenge und $t \in \Gamma$. Dann ist t schlecht in Γ , wenn für ein $\exists r.C \in t$ gilt: Es gibt kein $t' \in \Gamma$ mit $\{C\} \cup \{D \mid \forall r.D \in t\} \subseteq t'$.

Erklärung: t braucht einen Nachfolger, es gibt aber keinen geeigneten.

Proposition 5.4 (Terminierung) Beweisskizze. Sei $n = |C_0| + |T|$. Proposition folgt aus:

1. Es gibt nur 2^n Typen mit $n |C_0| + |T|$ (Lemma 3.15)
2. In jedem Schritt, der repeat-Schleife wird mindestens ein Typ eliminiert; die Schleife terminiert spätestens nach 2^n Durchläufen.
3. Die restlichen Operationen (prüfen, ob ein Typ schlecht ist usw.) können leicht in Zeit $2^{O(n)}$ implementiert werden.

Proposition 5.5 Korrektheit. Beweisskizze per Induktion über Struktur von C .

Antworte ALC-Elim(C_0, T) „erfüllbar“ und sei Γ_i die resultierende Typmenge. Dann gibt es $t_0 \in \Gamma_i$ mit $C_0 \in t_0$. Definiere Interpretation I :

- $\Delta^I = \Gamma_i$
- $A^I = \{t \in \Gamma_i \mid A \in t\}$
- $r^i = \{(t, t') \mid \forall r.C \in t \text{ und } C \in t'\}$

Zu zeigen: I ist Modell von C_0 und T .

Behauptung: Für alle $C \in \text{sub}(C_0, T)$ und alle $t \in \Gamma_i$ gilt $C \in t \Rightarrow t \in C^I$. Daraus folgt:

1. Wegen $C_0 \in t_0$ ist $t_0 \in C_0^I$
2. Wegen $C_T \in t$ für alle $t \in \Gamma_i$ folgt $t \in C_T^I$.

Also ist I Modell von T .

I.A. $C = A$. Folgt direkt aus Definition I .

$C = \neg A$. Nach Definition „Typ“ gilt $A \notin t$. Nach Definition I ist $t \notin A^I$.

I.S. Fallunterscheidung:

- $C = D \sqcap D'$

Nach Definition „Typ“ ist $D \in t$ und $D' \in t$. Nach **I.V.**: $t \in D^I$ und $t \in (D')^I$. Nach Semantik: $t \in (D \sqcap D')^I$.

- $C = D \sqcup D'$

Analog.

- $C = \forall r.D$

Sei $\forall r.D \in t$ und $(t, t') \in r^I$. Nach Definition r^I muss $D \in t'$ gelten. Nach **I.V.**: $t' \in D^I$, also $t \in (\forall r.D)^I$

- $C = \exists r.D$

Sei $\exists r.D \in t$. Da $t \in \Gamma_i$ (also nicht schlecht), gibt es $t' \in \Gamma_i$ mit $D \in t'$ und $E \in t'$ für alle $\forall r.E \in t$. Nach **I.V.** gilt $t' \in D^I$ und nach Definition von r^I gilt $(t, t') \in r^I$. Also $t \in (\exists r.D)^I$

Vollständigkeit. Beweisskizze per Induktion über i .

Sei C_0 erfüllbar bzgl. T und sei I Modell von T mit $d_0 \in C_0^I$. Sei $\Gamma = \{t_I(d) \mid d \in \Delta^I\}$. Sei $\Gamma_0, \dots, \Gamma_k$ die von ALC-Elim(C_0, T) erzeugte Sequenz. Behauptung: $\Gamma \subseteq \Gamma_i$ für alle $i \geq 0$. Daraus folgt wegen $d_0 \in C_0^I$, dass $C_0 \in t_i(d_0) \in \Gamma \subseteq \Gamma_k$. Also gibt ALC-Elim(C_0, T) „erfüllbar“ zurück.

I.A. $i = 0$. Einfach jedes Element von Γ (semantisch Typ) ist auch ein syntaktischer Schritt. ???

I.S. Gelte $\Gamma \subseteq \Gamma_i$ (I.V.). Zu zeigen: $\Gamma \subseteq \Gamma_{i+1}$. Sei $t \in \Gamma$. Es genügt zu zeigen: t ist nicht schlecht in Γ_i . Sei $\exists r.C \in t$ und $S = \{C\} \cup \{D \mid \forall r.D \in T\}$. Da $t \in \Gamma$, gibt es $d \in \Delta^I$ mit $t_i(d) = t_0$. Also gibt es nach Semantik $e \in \Delta^I$, $(d, e) \in r^I$, $e \in D^I$ für alle $D \in S$. t 's gilt also $S \subseteq t_I(e)$ und $t_I(e) \in \Gamma \subseteq \Gamma_i$. Es folgt: t nicht schlecht

5.1.5 Theorem 5.6

In ALC ist die Erfüllbarkeit von Konzepten bzgl. TBoxen entscheidbar in ExpTime.

5.2 Komplexität mit TBoxen, untere Schranke

5.2.1 ExpTime-Spiele

- Zwei Spieler spielen auf gegebener aussagenlogischer Formel φ
- Jede Variable in φ gehört entweder Spieler 1 oder Spieler 2
- Das Spiel beginnt auf einer gegebenen Anfangsbelegung π_0 der Variablen
- Spieler 1 beginnt, die Spieler wechseln sich ab
- In jedem Zug ändert Spieler Wahrheitswert einer seiner Variablen; es ist erlaubt, zu passen
- Spieler 1 gewinnt, wenn φ jemals wahr wird (egal, welcher Spieler gezogen hat)
- Spieler 2 gewinnt, wenn das Spiel unendlich weitergeht ohne dass φ wahr wird

5.2.2 Definition 5.7

- *Spiel*: Tupel $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \pi_0)$ mit Γ_1, Γ_2 Partitionierung der Variablen in φ_1 und φ_2 Anfangsbelegung
- *Konfiguration*: Paar (i, π) mit $i \in \{1, 2\}$ aktiver Spieler und π Belegung
- π ist j -Variation von π' ($j \in \{1, 2\}$) wenn $\pi = \pi'$ oder π und π' unterscheiden sich nur in einer Variablen $p \in \Gamma_j$

„ π ist j -Variation von π' “ bedeutet: Spieler j kann π in π' transformieren (oder umgekehrt).

5.2.3 Definition 5.8 (Gewinnstrategie)

Gewinnstrategie für Spieler 2 in Spiel $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \pi_0)$ ist unendlicher knotenbeschrifteter Baum (V, E, l) , wobei l jedem Knoten $v \in V$ Konfiguration $l(v)$ zuweist so, dass

- a) Wurzel beschriftet mit $(1, \pi_0)$
- b) wenn $l(v) = (2, \pi)$, dann hat v Nachfolger v' mit $l(v') = (1, \pi')$, wobei π' 2-Variation von π
- c) wenn $l(v) = (1, \pi)$, dann hat v Nachfolger $v_0, \dots, v_{|\Gamma_1|}$ mit $l(v_i) = (2, \pi_i)$ wobei $\pi_0, \dots, \pi_{|\Gamma_1|}$ alle existierenden 1-Variationen von π
- d) wenn $l(v) = (i, \pi)$, dann nicht $\pi \models \varphi$

5.2.4 Definition 5.9

Spiel₁ ist das folgende Problem: Gegeben Spiel $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \pi_1)$, entscheide ob Spieler 2 eine Gewinnstrategie hat.

5.2.5 Theorem 5.10

Spiel_1 ist ExpTime-Vollständig

5.2.6 Reduktion

Reduziere Spiel_1 : Gegeben Spiel $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \pi_0)$, konstruiere in Polynomialzeit Konzept C_S und TBox T_S so, dass: Spieler 2 hat Gewinnstrategie in S gdw. C_S erfüllbar bzgl. T_S .

Beweisskizze.

- Hinrichtung: Erzeuge aus der Gewinnstrategie Interpretation und zeige, dass diese Modell ist. **Hinrichtung Sascha**
- Rückrichtung: Nimm an es gibt Baummodell und erzeuge daraus Gewinnstrategie.

5.2.7 Theorem 5.12

In ALC ist die Erfüllbarkeit von TBoxen ExpTime-hart.

Daraus ergibt sich zusammen mit Theorem 5.6 ExpTime-Vollständigkeit.

5.3 Komplexität ohne TBoxen obere Schranke

5.3.1 Theorem 5.13

In ALC ist die Erfüllbarkeit von Konzepten (ohne TBoxen) PSpace-Vollständig.

5.3.2 ALC-Worlds

Wenn C erfüllbar, dann hat C ein Baummodell. Ohne TBox ist dessen Tiefe mit $|C|$ beschränkt. In PSpace:

- Ein linear Tiefer Baum ist exponentiell groß
- Gesamtes Modell im Speicher: nicht PSpace
- Stattdessen Prüfe Existenz des Baumes mittels Tiefensuche; halte zu jeder Zeit nur einen Pfad des Baumes im Speicher

Theorem 5.14 PSpace = NPSPACE

Definition 5.15 (i-Konzepte) Für $i \geq 0$ ist die Menge der i -Konzepte definiert als: $\text{sub}_i(C_0) \{C \in \text{sub}(C_0) \mid \text{rd}(C) \leq i\}$.

Definition 6.16 (i-Typ) Sei $i \geq 0$. i -Typ für C_0 ist Teilmenge $t \subseteq \text{sub}_i(C_0)$ so, dass

1. $A \in t$ gdw. $\neg A \notin t$ für alle $\neg A \in \text{sub}_i(C_0)$

2. $C \sqcap D \in t$ gdw. $C \in t$ und $D \in t$ für alle $C \sqcap D \in sub_i(C_0)$
3. $C \sqcup D \in t$ gdw. $C \in t$ oder $D \in t$ für alle $C \sqcup D \in sub_i(C_0)$

ALC-Worlds Rekursion über i -Typen.

Proposition 5.17 ALC-Worlds(C_0) terminiert und benötigt polynomiellen Platz.

Beweisskizze. Stelle als Rekursionsbaum dar. Verzweigungsgrad beschränkt durch Anzahl der \exists . Tiefe Beschränkt durch $rd(C_0)$. Der Rekursionsstack hat höchstens Tiefe $|C_0|$ und der Platzbedarf pro Aufruf ist polynomiell.

5.3.3 Proposition 5.18

Korrekteitsbeweis per Induktion über C_0 :

I.A. $C = A$. Folgt direkt aus Definition I .

$C = \neg A$. Da der Lauf erfolgreich ist, ist $p_1(v)$ Typ für C_0 . Nach Definition „Typ“ gilt $A \notin p_1(v)$. Nach Definition I ist $v \notin A^I$.

I.S. Fallunterscheidung:

- $C = D \sqcap D'$

Nach Definition „Typ“ ist $D \in p_1(v)$ und $D' \in p_1(v)$. Nach **I.V.**: $v \in D^I$ und $v \in (D')^I$. Nach Semantik: $v \in (D \sqcap D')^I$.

- $C = D \sqcup D'$

Analog.

- $C = \forall r.D$

Sei $(v, v') \in r^I$. Dann ist $(v, v') \in E$ und $\sigma(v') = r$. Wegen $\forall r.D \in p_1(v)$ ist auch $D \in p_1(v')$. Nach I.V. gilt $v' \in D$. Also $v \in (\forall r.D)^I$

- $C = \exists r.D$

Ähnlich

Vollständigkeitsbeweis Sascha

5.3.4 Theorem 5.19

In ALC ist die Erfüllbarkeit von Konzepten in PSpace.

5.4 Komplexität ohne TBoxen untere Schranke

5.4.1 Definition 5.20

- *Spiel*: Aussagenlogische Formel φ mit Variablen p_1, \dots, p_n , n gradzahlig
- *Konfiguration*: Wort $\pi \in \{0, 1\}^*$

5.4.2 Definition 5.21

Gewinnstrategie für Spieler 1 in Spiel φ ist endlicher knotenbeschrifteter Baum (V, E, L) , wobei l jedem Knoten $v \in V$ Konfiguration $l(v)$ zuweist, sodass

- a) Wurzel beschriftet mit ε (leere Konfiguration)
- b) wenn $l(v) = w$ mit $|w|$ gerade und $|w| < n$ (Also Spieler 1 am Zug), dann hat v Nachfolger v' mit $l(v') \in \{w0, w1\}$
- c) wenn $l(v) = w$ mit $|w|$ ungerade (also Spieler 2 am Zug), dann hat v Nachfolger v' und v'' mit $l(v') = w0$ und $l(v'') = w1$
- d) wenn $l(v) = w$ mit $|w| = n$, dann $w \models \varphi$

5.4.3 Theorem 5.25

In ALC ist die Erfüllbarkeit von Konzepten bzgl. leerer TBoxen PSpace-Hart.

Beweisskizze. Konstruiere Konzept C_φ , so dass Spieler 1 hat Gewinnstrategie in φ gdw. C_φ erfüllbar.

5.5 Unentscheidbare Erweiterungen

5.6 Konkrete Bereiche

Ein *Konkreter Bereich* ist ein Paar $B = (\Delta^B, \Phi^B)$ wobei

- Δ^B eine Menge von *Werten* ist und
- Φ^B eine Menge von *Prädikaten*

sodass jedes $P \in \Phi^B$ mit einer Stelligkeit $n \geq 0$ ausgestattet ist und mit einer Extension $P^B \subseteq (\Delta^B)^n$.

5.6.1 Definition 5.27 (ALCB Syntax)

Sei B ein konkreter Bereich. Mit $ALC(B)$ bezeichnen wir die Erweiterung von ALC um B , d.h. um

- *Featurenamen* (eine zusätzliche Art von Rolle) und
- die Konstruktoren $\exists R_1, \dots, R_n.P$ und $\forall R_1, \dots, R_n.P$

wobei $P \in \Phi^B$ n -Stellig ist und die R_i Rollenkomposition der Form $r_1; \dots; r_k; f$ sind mit r_j Rollenname und f Featurename.

5.6.2 Definition 5.28 (ALCB Semantik)

Eine Interpretation I ordnet nun zusätzlich zu jedem Featurenamen f eine Funktion $f^I : \Delta^I \rightarrow \Delta^B$ zu. Für jede Rollenkomposition $r = r_1; \dots; r_k; f$ bezeichnet R^I die Komposition der Interpretationen: $R^I = r_1^I \circ \dots \circ r_k^I \circ f$

Die Semantik der zusätzlichen Konstruktoren ist nun:

$$(\exists R_1, \dots, R_k.P)^I = \{d \in \Delta^I \mid \exists d_1, \dots, d_k : (d, d_i) \in R_i^I \text{ fur } 1 \leq i \leq k \text{ und } (d_1, \dots, d_k) \in P^B\}$$

$$(\forall R_1, \dots, R_k.P)^I = \{d \in \Delta^I \mid \forall d_1, \dots, d_k : (d, d_i) \in R_i^I \text{ fur } 1 \leq i \leq k \text{ impliziert } (d_1, \dots, d_k) \in P^B\}$$

5.6.3 2-Registermaschinen

- Endlich viele Zustände
- Zwei Register mit Werten aus \mathbb{N}
- Instruktionen um
 - Register zu inkrementieren
 - Register auf null zu testen und bei Wert $\neq 0$ zu dekrementieren. Der Folgezustand hängt davon ab, ob das Register 0 war.

5.6.4 Definition 5.30

(Deterministische) 2-Registermaschine (2RM) ist Paar $M = (Q, P)$ mit $Q = \{q_0, \dots, q_l\}$ Menge von Zuständen und $P = I_0, \dots, I_{l-1}$ Instruktionsfolge. Per Definition ist q_0 Startzustand, q_l Stopzustand. Jede Instruktion ist I_i hat eine der folgenden Formen:

- $I_i = +(p, q_j)$ mit $p \in \{1, 2\}$ Register und q_j Folgezustand: Inkrementierungsanweisung
- $I_i = -(p, q_j, q_k)$ mit $p \in \{1, 2\}$ Register und q_j, q_k Folgezustände: Dekrementierungsanweisung mit Folgezustand q_j , wenn Register p den Wert 0 enthält und q_k sonst.

5.6.5 Definition 5.31

Konfiguration und Konfigurationsübergänge $(q, m, n) \vdash_M (q', m', n')$. Berechnung als eindeutige längste Konfigurationsfolge.

5.6.6 Theorem 5.29

Das Erfüllbarkeitsproblem in $ALC(B_1)$ ist unentscheidbar.

- $\Delta^{B_1} = \mathbb{N}$
- $\Phi^{B_1} = \{=_0, =, +_1\}$, wobei $=_0$ einstellig, die anderen Zweistellig.

Beweisskizze. Gegeben 2RM M , konstuiere $ALC(B_1)$ -TBox T_M und wähle einen Konzeptnamen J sodass: M hält auf $(0, 0)$ gdw. J unerfüllbar bzgl. T_M . Zeige dies jeweils für Hinrichtung und Rückrichtung per Kontraposition. **Wo kommen i und j her?**

6 Effiziente Beschreibungslogiken

6.1 EL

Ein EL-Konzept ist ein ALC-Konzept, in dem nur die Konstruktoren \top , \sqcap und $\exists r.C$ verwendet werden.

6.2 Simulation

Simulation ist gerichtete Bisimulation. $(I_1, d_1) \precsim (I_2, d_2)$: es gibt Simulation p von I_1 nach I_2 mit $d_1 p d_2$.

6.2.1 Lemma 6.3

Seien I_1, I_2 Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{I_1}$ und $d_2 \in \Delta^{I_2}$. Wenn $(I_1, d_1) \precsim (I_2, d_2)$, dann gilt für alle EL-Konzepte C : $d_1 \in C^{I_1}$ impliziert $d_2 \in C^{I_2}$.

Beweisskizze per Induktion über die Struktur von C . Sei ρ eine Simulation zwischen I_1 und I_2 mit $d_1 \rho d_2$.

I.A. $C = A$ ist Konzeptname. Nach Bedingung 1. der Bisimulation gilt $d_1 \in A^{I_1}$ impliziert $d_2 \in A^{I_2}$.

I.S. Unterscheide Fälle gemäß dem äußersten Konstrukt von C .

1. $C = D_1 \sqcap D_2$

$d_1 \in C^{I_1}$ gdw. $d_1 \in D_1^{I_1}$ und $d_1 \in D_2^{I_1}$ (Semantik) impliziert. $d_2 \in D_1^{I_2}$ und $d_2 \in D_2^{I_2}$ (I.V.) gdw. $d_2 \in C^{I_2}$ (Semantik)

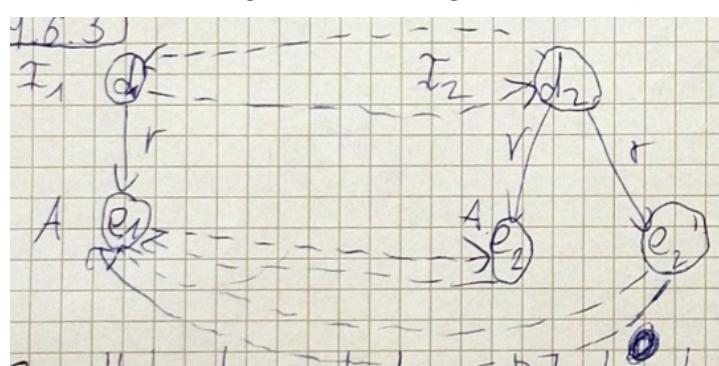
1. $C = \exists r.D$

Hinrichtung und Rückrichtung analog über Semantik, 2. Bedingung der Simulation, I.V., Semantik.

6.2.2 Lemma 6.4

Bisimulation und wechselseitige Simulation sind nicht dasselbe.

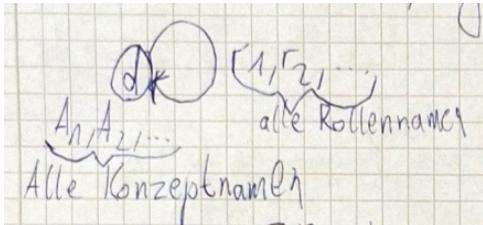
Beweisskizze: Zeige Wechselseitige Simulation, die keine Biosimulation ist:



6.2.3 Lemma 6.6

Jedes EL-Konzept ist erfüllbar bzgl. jeder TBox.

Beweisskizze per Induktion über die Struktur von C :



6.3 Subsumption ohne TBox

Eine Subsumption $C \sqsubseteq D$ gilt in EL im Prinzip gdw man D syntaktisch in C „wiederfindet“. Werden Konzepte als Baummodell dargestellt entspricht „Wiederfinden“ Simulation von D -Baum in C -Baum (also Teilgraphenproblem).

6.3.1 Definition kanonisches Modell

Baue aus dem gegebenen Konzept C intuitiv Baummodell.

6.3.2 Lemma 6.8

Für alle EL-Konzepte C gilt: Die Interpretation I_C ist Modell von C mit $d_w \in C^{I_C}$.

Beweisskizze per Induktion über die Struktur von C .

6.3.3 Lemma 6.9

Für alle EL-Konzepte C , Interpretation I und $e \in \Delta^I$ gilt: $e \in C^I$ gdw. $(I_C, d_w) \precsim (I, e)$.

Beweisskizze.

- Hinrichtung per Induktion über C . Schau jeweils Simulation nach I.V. an und ergänze diese.
- Rückrichtung. Angenommen $(I_C, d_w) \precsim (I, e)$. Lemma 6.8 liefert $d_w \in C^{I_C}$. Nach Theorem 6.3 ist $e \in C^I$.

6.3.4 Lemma 6.10

Für alle EL-Konzepte C, D gilt: $C \sqsubseteq D$ gdw. $(I_D, d_w) \precsim (I_C, d_w)$

Beweisskizze.

- Hinrichtung: Betrachte kanonisches Modell I_C von C . Wegen Lemma 6.8 gibt es $d_w \in C^{I_C}$. Mit $C \sqsubseteq D$ folgt $d_w \in D^{I_C}$. Mit Lemma 6.9 folgt für D , I_C, d dass $d_w \in D^{I_C}$ gdw. $(I_D, d_w) \precsim (I_C, d_w)$.

- Rückrichtung. Angenommen $(I_D, d_w) \precsim (I_C, d_w)$. Betrachte beliebige Interpretation I und $d \in C^I$. Zu zeigen: $d \in D^I$. Wegen $d \in C^I$ und Lemma 6.9 gilt $(I_C, d_w) \precsim (I, d)$. Verkette die Simulationen so dass $(I_D, d_w) \precsim (I, d)$. Mit Lemma 6.9 folgt $d_w \in D^{I_C}$.

6.3.5 Theorem 6.11

Subsumtion in EL kann in polynomieller Zeit entschieden werden:

- Konstruiere I_C und I_D in polynomieller Zeit.
- Überprüfe in polynomieller Zeit, ob $(I_D, d_w) \precsim (I_C, d_w)$
 - Berechne maximale Simulation ς
 - Teste ob $(d_w, d_W) \in \varsigma$
 - Sascha

6.4 Subsumption mit TBox

6.4.1 Lemma 6.12

Seien C, D zwei beliebige EL-Konzepte und T eine EL-TBox. Sei weiterhin $T' = T \cup \{A_C \sqsubseteq C, D \sqsubseteq A_D\}$, mit Konzeptnamen A_C, A_D , die nicht in C, D, T vorkommen. Dann gilt; $T \models C \sqsubseteq D$ gdw $T' \models A_C \sqsubseteq A_D$.

6.4.2 Normalform

Eine TBox ist in *Normalform*, wenn sie nur Inklusionen folgender Form enthält:

$$A_1 \sqcap \dots \sqcap A_n \sqsubseteq A \quad A \sqsubseteq \exists r.A_1 \quad \exists r.A \sqsubseteq A_1$$

6.4.3 Lemma 6.14

Jede EL-TBox T kann in polynomieller Zeit in eine TBox T' in Normalform gewandelt werden, so dass für alle Konzeptnamen A, B in T gilt: $T \models A \sqsubseteq B$ gdw $T' \models A \sqsubseteq B$. Dann ist T' *konservative Erweiterung* von T .

6.4.4 Lemma 6.14

Jede EL-TBox T kann durch linear viele Regelanwendungen in TBox in Normalform transformiert werden, die konservative Erweiterung von T ist.

Die Regeln fügen jeweils Zwischenkonzepte ein.

Beweisskizze: Grad der Abnormalität definieren und zeigen, dass

1. Der Grad ist beschränkt durch $|T|$
2. Jede Regelanwendung verringert den Grad

3. TBoxen vom Grad 0 sind in Normalform

6.4.5 Algorithmus

Wende Regeln erschöpfend an um alle Subsumptionen zu berechnen:

$$\frac{A \sqsubseteq A}{A \sqsubseteq A} \text{ (Wenn } A \text{ in } T \text{ vorkommt)} \quad \frac{A \sqsubseteq \top}{A \sqsubseteq \top} \text{ (Wenn } A \text{ in } T \text{ vorkommt)}$$

$$\frac{A \sqsubseteq A_1, \dots, A \sqsubseteq A_n, A_1 \sqcap \dots \sqcap A_n \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B} \quad \frac{A \sqsubseteq \exists r. A_1, A_1 \sqsubseteq B_1, \exists r. B_1 \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$$

Wo gehört das x hin Vorlesung 17?

Für eine EL-TBox T sei T^* das Ergebnis erschöpfender Regelanwendungen, die *Saturierung*.

6.4.6 Theorem 6.16

Für alle Konzeptnamen A, B in T gilt: $T \models A \sqsubseteq B$ gdw $A \sqsubseteq B \in T^*$

Terminierung Beweisskizze. Jede Regelanwendung erzeugt eine neue Konzeptinklusion $A \sqsubseteq B$, wobei A, B Konzeptnamen aus T . Es gibt nur endlich viele solcher Inklusionen.

Korrektheit Beweisskizze. Sei $T = T_0, \dots, (T_n = T^*)$ die durch Regelanwendungen erzeugte Folge von TBoxen. Es genügt zu zeigen: $T_i \models T_{i+1}$. Zeige dies durch Vorbedingung der Regelanwendung und der Semantik.

Vollständigkeit

Kanonische Interpretation Die Kanonische Interpretation I ist:

- $\Delta^I = \{d_A \mid A \text{ Konzeptname in } T^*\} \cup \{d_\top\}$
- $A^I = \{d_B \mid B \sqsubseteq A \in T^*\}$
- $r^I = \{(d_A, d_B) \mid A \sqsubseteq A' \in T^* \text{ und } A' \sqsubseteq \exists r. B \in T^*, A' \text{ Konzeptname}\}$

Erklärung: Konstruiere Intuitiv Modell aus allen Konzeptnamen.

Lemma 6.18 Die kanonische Interpretation ist ein Modell von T^* .

Beweis: Zeige, dass alle Inklusionen in T^* von I erfüllt werden. Verwende die Inklusionen in Normalform. Überlege dazu, was aus den Inklusionen mithilfe der Definition gefolgert werden kann.

Vollständigkeit Angenommen $A \sqsubseteq B \notin T^*$. Betrachte Element d_A der kanonischen Interpretation I . Wegen R1: $A \sqsubseteq A \in T^*$, also nach Def. I : $d_A \in A^I$. Def. von I und $A \sqsubseteq B \notin T^*$ liefern $d_A \notin B$. Da I Modell von T^* (Lemma 6.18), und damit von T , folgt nicht $T \models A \sqsubseteq B$.

6.5 Erweiterungen von EL

6.5.1 EL mit Disjunktion und Bottom

Erfüllbarkeit in ELU_\perp (mit Disjunktion) ist ExpTime-Vollständig.

Beweisskizze per Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptname A bzgl. ALC-TBox T :

1. Ersetze Werterestriktion in T durch Existenzrestriktion.
2. Bringe T in Negationsnormalform.
3. Ersetze $\neg X$ durch X mit $\top \sqsubseteq X \sqcup X$ und $X \sqcap X \sqsubseteq \perp$

6.5.2 ELU (mit Disjunktion)

Erfüllbarkeit in ELU ist ExpTime-Vollständig.

Beweisskizze per Reduktion von 6.5.1. Ersetzte \perp durch L mit $\exists r.L \sqsubseteq L$ für alle Rollennamen r in T .

7 ABoxen und Anfragebeantwortung

8 Übersichten

Literatur

Schneider, T. (2016). Vorlesung Beschreibungslogik. <http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ss16/b1/>. Last accessed on 2016-12-04.