格子ゲージ理論の面積則の演習問題

山口 哲（大阪大学）

2024 年 4 月 05 日

概要

ここでは、簡単な格子ゲージ理論で強結合展開を考え、Wilson ループが面積則を示すことを見ることを確かめる。このことから、格子ゲージ理論では強結合で閉じ込め相にあることが分かる。

1 問題

1.1 考える系

講義の最後の方に扱った$\mathbb{Z}_2$ゲージ理論のについて考えよう。この理論は４次元の超立方格子の各リンクℓに$a_\ell = 0, 1$の自由度をおいたもので、その作用はKを定数として

$$S(a) = -K \sum_{p\,:\,\text{plaquettes}} (-1)^{\sum_{\ell \in p} a_\ell} \tag{1}$$

である。ただし、$\sum_{\ell \in p}$は plaquette pを構成する４つのリンクについての和を表している。この理論の分配関数は

$$Z = \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} e^{-S(a)} \quad \left(V \text{ は頂点の数}\right) \tag{2}$$

である。

1.2 Wilson ループ

この理論の Wilson ループを考えよう。リンクを繋いでいってできるループCに対して Wilson ループ$W(C)$が定義され、その期待値は

$$\langle W(C) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} e^{-S(a)} (-1)^{\sum_{\ell \in C} a_\ell} \tag{3}$$

と表される。

$K \ll 1$の場合、この Wilson ループの期待値が「面積則」になることを次のようにして示せ。簡単のため、ループCを 12 平面上で辺の長さが L_1, L_2 の長方形に取る。長さの単位は格子間隔が 1 となるようにとることにする。$\langle W(C) \rangle$をKでべき展開し、0 にならない最低次を見ることにより、L_1, L_2依存性が

$$\langle W(C) \rangle \sim \exp(-T L_1 L_2) \tag{4}$$

となることを示せ。また定数 T を求めよ。

1.3 ヒント

書籍 [1], [2], [3] や他の文献で、ゲージ群が SU(N) (SU(3))の場合の解説がある。これらの文献では群の積分の公式を導いて用いている。今回考えたモデルのように、ゲージ群が $\mathbb{Z}_2$ の場合には、代わりに必要な公式は $b = 0, 1$ として $\sum_{a=0,1}(-1)^{ab}$ がどうなるかというものである。

A 解説

A.1 分配関数

$$S(a) = -K \sum_{p\,:\,\text{plaquettes}} (-1)^{\sum_{\ell\in p} a_\ell} \tag{5}$$

として、分配関数は

$$Z = \frac{1}{2^V}\sum_{\{a\}} e^{-S(a)}, \tag{6}$$

Wilson ループの期待値は

$$\langle W(C)\rangle = \frac{1}{Z}\frac{1}{2^V}\sum_{\{a\}} e^{-S(a)}(-1)^{\sum_{\ell\in C} a_\ell} \tag{7}$$

と表される。これらを$K \ll 1$の場合にKでべき展開し、その最低次を考える。

まず、分配関数は

$$Z = \frac{1}{2^V}\sum_{\{a\}}(1 + O(K)) = 2^{E-V} + O(K) \tag{8}$$

となる。ここでEはリンクの数である。

A.2 Wilson ループ

次に Wilson ループの期待値 (7) の和について考える。$e^{-S(a)}$を展開すると各項は$(-1)^{a_\ell}$の単項式になる。このとき、あるリンクℓに対して$(-1)^{a_\ell}$を非自明に因子に持つ項があったとすると、$\sum_{a_\ell=0,1}(-1)^{a_\ell} = 0$となるために、その項からの寄与は0になってしまう。したがって、残る項はすべてのリンクに対して$(-1)^{a_\ell}$が偶数回入っているものである。その中でKの最低次の項は、図 1 のように作用から来る plaquettes が Wilson ループを端に持つ最小面積の面を埋め尽くすものである。これは$A \coloneqq L_1 L_2$個の plaquettes が入っているので、K^Aに比例する項である。

ここまでで(7) の0でない最低次の項はK^Aであることが分かったので、その項を計算していく。

$$
\begin{aligned}
\langle W(C)\rangle &= \frac{1}{Z}\frac{1}{2^V}\sum_{\{a\}}\frac{K^A}{A!}\left(\sum_p (-1)^{\sum_{m\in p} a_m}\right)^A (-1)^{\sum(\ell\in C)a_\ell} + O\left(K^{A+1}\right) \\
&= \frac{1}{Z}\frac{1}{2^V}\sum_{\{a\}} K^A + O\left(K^{A+1}\right) \\
&= K^A + O\left(K^{A+1}\right) \sim \exp(-(-\log K)A).
\end{aligned} \tag{9}
$$

ただし、一行目から二行目へは$(\cdots)^A$の展開で、面をきっちり埋め尽くすような項が$A!$項あり、それぞれがWilsonループからの寄与を合わせて1であることを用いた。また二行目から三行目へは分配関数の結果 (6) を用いた。

(9) は面積則を示していて、$T = -\log K$である。

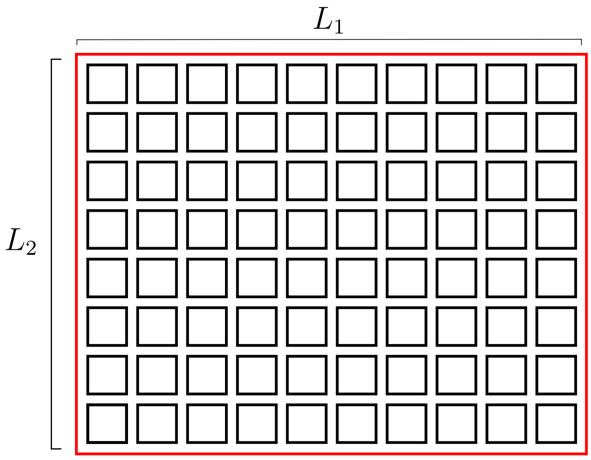

図 1: Wilson ループの期待値への0でないKの最低次の寄与。赤線、黒線はともにリンク変数の$(-1)^{a_\ell}$寄与があることを表す。赤線は Wilson ループの挿入から、黒線は作用からの寄与を表す。すべてのリンクに関して線は偶数個（0 または 2）になっているので$(-1)^{a_\ell}$の寄与はキャンセルしている。作用からの plaquettes は$A := L_1 L_2$個ある。

参考文献

[1] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices* (Oxford University Press, 1983)

[2] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories : An Introduction (Fourth Edition)*, Vol. 43 (World Scientific Publishing Company, 2012)

[3] 青木慎也, 格子上の場の理論 (丸善出版, 2005)