2.2.2 熱平衡

気体の体積内にある分子は衝突によってエネルギーを交換し、熱平衡に至る。分子速度がMaxwell-Boltzmannの法則に従って分布している時、

$$N(v)dv = 4\pi N_T\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

ここで、$N(v)dv$ は速度が v と $v+dv$ の間であるような分子の数であり、N_T は分子の総数であり、m は分子の質量、T は絶対温度、k はBoltsmann定数である。速度分布は Fig 2.1.に示されている。
Maxwell-Boltsmann分布では、平均速度($\bar{v}$)、根二乗平均速度($v_{r.m.s}$)、最確速度($v_{m.p.}$)はそれぞれ以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathrm{v_{m.p.}} &= (\mathrm{2kT/m})^{\frac{1}{2}}, \\ \mathrm{\bar{v}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mathrm{2kT}}{\mathrm{m}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.128\mathrm{v_{m.p.}}, \\ \mathrm{v_{r.m.s.}} &= \left(\frac{\mathrm{3kT}}{\mathrm{m}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.225\mathrm{v_{m.p.}}. \end{aligned}$$

したがって、気体粒子の平均運動エネルギーと絶対温度は以下の関係にある。

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2}_{\mathrm{r.m.s.}} = \frac{3}{2}kT \tag{2.12}$$

熱平衡において、エネルギーは混合気体のさまざまな成分の間でも共有される。

もし二種の気体が混合されていて、分子質量がそれぞれ m_1, m_2 であるならば、平均二乗速度 $\overline{v_1^2}, \overline{v_2^2}$ は以下のように関係している。

$$m_1\overline{v_1^2} = m_2\overline{v_2^2}$$

これは2つの成分が両方とも同じ温度(式2.12)に達することを意味する。より軽い分子はより速い分子速度を持つ:

$$\overline{v_2^2}/\overline{v_1^2} = m_1/m_2$$

2.2.3 連続性

ランダムな熱的運動の重ね合わせを考えると、そこにはガス全体としての大規模な運動があるかもしれない。連続性は、すべての分子が考慮されていることを要請し、かつもし何らかの理由でドリフト速度が場所によって異なっている場合には分子がある場所に蓄積して他の場所では枯渇することを要請する。
Figure 2.2に示すような、3辺の長さがx、y、zであるような側面を持つ開いた箱を考える。気体粒子はx方向にのみドリフトしている (`drift: すべる、漂流する`)とする。もし粒子の **密度** (? ~~speed~~) と速度が、面1で n_1, v_1, 面2で n_2, v_2 であったとすると、単位時間あたりにこの箱に流入する粒子数は $n_1 v_1 yz$ で、流出する粒子数は $n_2 v_2 yz$ である。したがって粒子が累積していく速さは $(n_1 v_1 - n_2 v_2)yz$ であり、箱の内部の粒子密度の変化率は、箱が無限に小さいとして、 $(n_1 v_1 - n_2 v_2)/x \to \partial(nv)/\partial x$ である。したがって、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial(nv)}{\partial x} \tag{2.14}$$

3次元の一般的な運動の場合には、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathrm{div}(n\vec{v})$$

2.2.4 衝突

中性気体では、粒子は衝突によって互いに影響し合う。衝突のない気体は熱的平衡に達することはなく、その物理的挙動は圧縮性流体という用語で説明することはできない。衝突の多い気体では、ランダムな運動とバルクな運動の両方が粒子間で効果的に伝達され、気体全体が速やかに平衡に達し、多くの目的のために単一の存在として扱われることがある。
衝突頻度（ν）の最も単純な定義は、1つの粒子が1秒間に他の粒子と衝突する回数である。

衝突の間に粒子が移動する平均距離が *平均自由行程* である。根二乗平均速度を v ［$=\sqrt{(3kT/m)}$］とすると、平均自由行程は

$$l_f = (3kT/m)^{\frac{1}{2}}/\nu$$

l_f は気体の分子間距離とほぼ同じなので、ν は数密度に正比例し、$T^{\frac{1}{2}}$ に比例すると予想される。しかし、荷電粒子が関与する場合、衝突断面積は温度に依存し、発生する異なった相互作用の結果として、ν は電子と中性粒子との衝突では T に応じて、イオンと中性粒子との衝突では T^0 に応じて（T とは無関係に）、また電子とイオンとの衝突では $T^{-\frac{3}{2}}$ に応じて変化する。大気圏の遠いところでは、平均自由行程は非常に長くなる。もし平均自由行程が「箱」の大きさ、例えばその領域自体の大きさを超えるようであれば、それはその領域が熱平衡を仮定したり気体の法則を使うことができない領域であることを示す良い目安となる。
衝突頻度を衝突の回数と考えるのは便利ですが、運動量の伝達という点で、より厳密(`rigorous`)な定義があります。質量 m_1 と m_2 の2つの成分を含む気体があり、それぞれの速度 v_1 と v_2 は簡単のため同じ方向であると仮定することにする。第一の成分の粒子が第二の成分の粒子と正面衝突し、その衝突が弾性的である場合、運動量保存に従って、第一の粒子は以下の運動量を得る。

$$2\ \mathrm{m}_1\ \mathrm{m}_2\ (\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1)\ /\ (\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)$$

そして第二の成分の粒子は同じ量の運動量を失う。このような衝突が単位時間あたり ν_{12} 回あり、単位体積あたりの第一成分の粒子が n_1 個あるとすると、第二成分との衝突によって第一成分にかかる力の総和（運動量の変化率の総和）は、

$$\mathrm{F}_{12} = \mathrm{n}_1 v_{12} \frac{2\ \mathrm{m}_1\ \mathrm{m}_2\ (\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1)}{(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)} \tag{2.17}$$

これは衝突頻度を力で定義するもので、衝突のたびに何が起こるか詳しく知る必要がないという利点がある。このように定義すると、ν は *運動量輸送が起こる衝突の頻度* である。
2つの成分（第一と第二）にかかる力の大きさ等しく、向きは反対でなければならないので、$F_{12} = -F_{21}$ であり、

$$\nu_{21}/\nu_{12} = n_1/n_2$$

同じ原理を応用して、空気中を移動する固体の抗力を求めることができる（3.4.1節）。

2.2.5 拡散

気体内に圧力勾配がある場合、分子は圧力が等しくなるまで圧力勾配を下るように移動します。どの瞬間でも、正味の速度（もちろん、ランダムな熱運動が重なっている）は勾配に比例する。このとき、ドリフト速度は次のように書ける、

$$v = -\frac{D}{n}\frac{\partial n}{\partial x} \tag{2.19}$$

ここで、n は粒子密度、D は拡散係数である。簡単のため、狭い柱に沿った一方向のみの拡散を仮定している。(3次元では、$v = -(D/n)\ \mathrm{grad}\ n$となる)。

与えられた点での粒子密度の変化率は式2.14で求められる。

$$\frac{\partial \mathrm{n}}{\partial t}=\frac{\partial (vn)}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\mathbf{D}\frac{\partial \mathrm{n}}{\partial x}\right)=+D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

3次元の場合には

$$\frac{\partial \mathrm{n}}{\partial t}=D\cdot\nabla^2 n$$

なお、拡散係数Dは、$(\text{長さ})^2/\text{時間}$の次元を持つ。
温度一定での気体の拡散係数の式を導くには、圧力勾配

$$\frac{\partial p}{\partial x}\left(=kT\frac{\partial n}{\partial x}\right)$$

を、衝突による抗力、$n\nu mv$ に等しいとして得られる

$$kT\frac{\partial n}{\partial x}=-n\nu mv$$

を、式2.19と比較して、

$$D=kT/m\nu$$

単純だが非常に有用な公式である。

もし $\nu\propto nT^{\frac{1}{2}}$ (2.2.4節) ならば $D\propto T^{\frac{1}{2}}n^{-1}$ である。気体内部の分子拡散はより高い温度において、またより低い圧力において、より速く進行する。
拡散の数学的理論は、気体中の分子拡散以外にも多くの応用があり、熱伝導は最も身近なものであろう。その他、宇宙空間に関連するものとして、地磁気に捕らわれた粒子のピッチ角の拡散（9.4.5項）、磁場を通過するプラズマの運動（2.3.6項）などが挙げられる(3回生前期:電離気体電磁気学の内容)。大気中の気体は、分子拡散と同様に乱流によって混合することができるが、その違いは、個々の分子ではなく気塊(`bubbles`)の運動を扱わなければならないことである。乱流による混合も拡散理論で扱うことができ、*渦拡散係数*(`eddy diffusion coefficient`)を定義することができる。分子拡散係数とは異なり、単純に第一原理から導き出すことはできないが、測定から値を求めることができる。大気の乱れは垂直方向の温度勾配に依存し、この2つのプロセスの相対的な重要性は高度によって変化することが明らかである。(いくつかの結果については4.1.1節と4.1.5節を参照)。

2.3 電磁プラズマ

上層大気の多くは電離しており、電離(`ionized`)したガスは地磁気によって透過される。磁場と電離したガスの組み合わせが磁気プラズマであり、そのユニークな性質が、地球宇宙領域で観測される多くの振る舞いを支えている。ここでは、電磁プラズマの基本的な性質について概説する。

2.3.1 電気・磁気エネルギー

電磁プラズマのエネルギーは、主に粒子のエネルギーと磁場のエネルギー — それに加えて、電場や波動も寄与している — であり、媒質の振る舞いは、これらの成分のうちどれが最大であるかに大きく依存する。

2.12式から、粒子が温度 T で、単位体積あたり n 個あるとすると、その運動エネルギー密度はちょうど $3nkT/2$ になる。磁気エネルギー密度と電気エネルギー密度の公式は、容易に証明できる。
電荷 Q と電位 V を持つ平行板コンデンサ C を考える。コンデンサの充電にかかる仕事は、

$$\mathbf{W}=\int \mathrm{V dq}=\int_0^Q \mathrm{(q/C)dq}=\mathrm{Q^2/2C}$$

この仕事は、板と板の間の空間のエネルギーに起因すると考えられる。面積を A、間隔を d とすると、電気エネルギー密度は、

$$\mathrm{w}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Ad}}=\frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{2CAd}}=\frac{\varepsilon \mathrm{V}^2}{\mathrm{2d}^2}=\frac{\varepsilon \mathrm{E}^2}{2}$$

ここで、$C=\varepsilon A/d$ と $V=Ed$ を用いた。真空中(または空気中)では、$\varepsilon=\varepsilon_0$ で、$w=\varepsilon_0 E^2/2$ である。(c.g.s (e.s.u)単位系では、$w=\varepsilon E^2/8\pi$である。ここで、空気中では$\varepsilon=1$ である。)
磁気エネルギー密度の式も同様に導かれるが、今度はソレノイドに置き換えて考える。長さl、面積 A のソレノイドに電流 i を流すと、全磁気エネルギーは $Li^2/2$、ここでインダクタンスは $L=\mu N^2 A/l$である。したがってソレノイド内のエネルギー密度は、

$$\mathrm{w}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Al}}=\frac{\mathrm{Li}^2}{\mathrm{2Al}}=\frac{\mu \mathrm{N}^2\mathrm{i}^2}{2\mathrm{l}^2}=\frac{\mu \mathrm{H}^2}{2}=\frac{\mathrm{B}^2}{2\mu}$$

となるので、ソレノイド内部の磁場の強さは $H=Ni/l$ であり、磁束密度(`magnetic flux density`)は $B=\mu H$である。非磁性体内では $\mu=\mu_0$ である。(c.g.s (e.s.u)単位系では、$w=\mu H^2/8\pi$である。ここで、非磁性体内では$\mu=1$ である。)

2.3.2 ジャイロ周波数

磁場中では荷電粒子は円運動をする傾向があり、ジャイロ周波数はこの円運動の速度に過ぎない。磁束密度を $\vec{B}$、粒子の電荷を e、その速度を $\vec{v}$ とすると、粒子にかかるローレンツ力は、

$$\vec{F}=e\cdot\vec{v}\times\vec{B}$$

は、$\vec{v}$ と $\vec{B}$ の両方に法線方向に作用します（Figure 2.3）。粒子は曲がった経路を移動するよう拘束され、$\vec{B}$ に沿った速度成分がない場合、経路は円になる。ローレンツ力は求心加速度 v^2/r_B を与える。ここで r_B は円運動の半径である。m を粒子の質量とすると、ジャイロ半径は、

$$r_B=mv/Be$$

回転周期は $P=2\pi r_B/v=2\pi m$ / Be、角周波数は、

$$\omega_B=2\pi/P=Be/m \ \ \mathrm{rad/s} \tag{2.27}$$

そして

$$f_B=Be/2\pi m \ \ \mathrm{Hz}$$

ただし、r_B と ω_B は磁場と粒子の質量に依存し、ジャイロ周波数は速度に依存しない。運動エネルギー E については、

$$v=(2E/m)^{1/2} \quad \text{and} \quad r_B=(2mE)^{1/2}/Be$$

イオンと電子に添え字のiとeを使い、エネルギーは同じであることから、次のようになる。

$$\omega_i/\omega_e = m_e/m_i$$

と

$$r_i/r_e = (m_i/m_e)^{1/2}$$

典型的な大きさを示す例として、磁場を $0.5G(= 0.5 \times 10^{-4} Wb/m^2),\ e = 1.6 \times 10^{-19} C,\ m_e = 9.1 \times 10^{-31} kg$ とする。すると、$\omega_e = 8.8 \times 10^6\ rad/s = 1.4 MHz$となる。酸素イオン(O+)の場合、$\omega_i$ は 29 380分の1になり、ジャイロ周波数はたった48Hzである。$E = 10\ \mathrm{keV} = 1.6 \times 10^{-15} J$ とすると、$r_e = 6.7\ \mathrm{m}, r_i(\mathrm{O}^+) = 1.2\ \mathrm{km}$である。

2.3.3 ベータトロン加速

磁束密度を徐々に上げていくと、それに比例してジャイロ周波数も上昇する（式2.27）。しかし、角運動量 mvr_B = mv^2/ω_B は保存されるため、運動エネルギーは増加する:

$$E = mv^2/2 \propto \omega_B \propto B$$

この機構は、磁場変動に比例して粒子にエネルギーを与え、磁気圏内の粒子の加速機構となる。

2.3.4 プラズマ周波数

プラズマ周波数 は、電離した媒質の基本的なパラメータの一つであり、電波伝搬の理論で頻繁に遭遇するものである。その意義は、次のようなモデルで理解することができる。
面積 A において正負の電荷が距離 y だけ離れていると考える（Figure 2.4）。媒質の単位体積あたり N 個の電子があり、イオンの密度も同様であれば、こうしてできた平行板コンデンサは全電荷 $Q = NAye$ を持ち、その静電容量は $\varepsilon_0 A/y$（SI単位）である。プレート間の電位差は Ney^2/ε_0 であり、ギャップ内の電界は Ney/ε_0 であり、したがって1個の電子にかかる力は Ne^2y/ε_0 となる。したがって、復元加速度は $Ne^2y/\varepsilon_0 m$ となる。復元加速度は分離度に比例する(`a = -(k/m)y の形になっている`)ので、荷電粒子が自由に動くと角周波数を持つ単純調和運動をすることがわかる:

$$\omega_N = \left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2} \quad \text{S.I.系} \tag{2.32}$$

または、

$$\omega_N = \left(\frac{4\pi Ne^2}{m}\right)^{1/2} \quad \text{c.g.s.系}$$

したがって、ω_N はプラズマ内の静電擾乱(`perturbations:摂動、擾乱、外乱`)に対する固有振動数である。計算の上では、ヘルツ単位の周波数として表現されることが多い: $f_N = \omega_N / 2\pi$
粒子の質量は式2.32の分母に現れるので、イオン種ごとに異なるプラズマ周波数が存在し、重い粒子ほど周波数が低くなる。ω_N と f_N は通常、電子のプラズマ周波数に使われ、代わりにイオンには Ω_N と F_N のような記号が選ばれる。プラズマ周波数は、プラズマ密度の平方根に比例する。電子プラズマ周波数の便利な近似式は次の通りである。

$$f_N = (80.5N)^{\frac{1}{2}}$$

ここで、N の単位は m^{-3} であり、f_N の単位は Hz である。

2.3.5 デバイ長

プラズマ周波数がプラズマの特性周波数を表すならば、 *デバイ長* は特性距離にあたる。粒子の熱速度（電子の速度はイオンの速度よりはるかに大きい）により、電子とイオンはプラズマ内で静電引力によって制限される範囲内で分離する。電子が周波数 ω_N で振幅 l で振動する場合、その最大速度は $v = \omega_N l$である。さて、この速度を根二乗平均熱速度とすると、$v = (kT/m)^{\frac{1}{2}}$ であり、したがって、$l = (1/\omega_N)(kT/m)^{\frac{1}{2}}$ となる。この振動の振幅はデバイ長に等しく、通常 λ_D と書かれる。式2.32から ω_N を代入すると、

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \left(\frac{\varepsilon_0 \mathrm{kT}}{\mathrm{Ne}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

c.g.s.単位系では、

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \left(\frac{\mathrm{kT}}{4\pi \mathrm{Ne}^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

計算の上では、

$$\lambda_D = 69(T/N)^{\frac{1}{2}} \mathrm{m}$$

ここで、T の単位は K、N の単位は m^{-3} である。

c.g.s.単位系では、

$$\lambda_D = 6.9(T/N)^{\frac{1}{2}} \mathrm{cm}$$

デバイ長は、個々の粒子の「影響圏」として最もよく可視化される。λ_D を超えると、1つの粒子の効果は反対符号の粒子の集団効果によって打ち消されるため、デバイ長は *デバイ遮蔽距離* とも呼ばれる。他の電荷がない場合、電荷 e から距離 r の電位は $e/4\pi\varepsilon_0 r$ である。プラズマ中では、次のように弱められる。

$$\frac{\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{r}} \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{r}}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right)$$

距離 λ_D 以内では粒子を個別に考慮しなければならないが、距離が離れると個々の粒子は見えなくなり、プラズマは流体として扱われることがある(``)。媒質の動力学において、デバイ遮蔽距離は、小さなスケールでの粒子衝突と大きなスケールでの集団効果との間の自然な分割を示す。プラズマの概念では、半径 λ_D の球の中に少なくとも1つの粒子が存在することが必要である。これが *デバイ球* である。

2.3.6 凍結する磁場

図2.5の単純なダイナモでは、幅 l の薄い導電性環状体が、磁束密度 B の横磁場中で単位長の摩擦のない接点間で回転している。ファラデーの電磁誘導の法則により、接点間に生じる電位差は磁束の変化率であり、$V = Bvl$ である。ここで、回路が外部抵抗 R によって完成され、接点間の環状部の抵抗が r であるとすると、電流、

$$i = V/(R+r) = Bvl/(R+r)$$

が回路を流れる。消費される電力は、

$$P = Vi = B^2v^2l^2/(R+r) \tag{2.38}$$

電流は磁界を横切って流れているので、ディスクの回転に逆らう力 $F = Bil$（ローレンツ力）が作用する。したがって、力学的な仕事は、$Fv = Bilv = B^2v^2l^2/(R+r)$ の割合で行われ、これは当然のことながら電気的な散逸率(消費電力P)と等しくなる。
ここで、外部回路の抵抗がゼロ（$R=0$）、ディスク材料の導電率が σ であるとすると、式（2.38）から、

$$v^2 = rP/B^2l^2 = P/B\sigma l$$

$\sigma \to 0$ ならば、$r \to 0$ である。この場合、v が有限のままであると仮定すると $i \to \infty$ となり(`∵ v² ~ rP ~ rVi`)、その結果として減速力(ローレンツ力) $\to \infty$ となり(`∵ F = Bil`)、これは明らかに不可能である。電力損失(P)が有限のままで導電率を非常に大きくした結果、速度 (v) が非常に小さくなるに違いない。
導電率(σ)が無限の極限では、速度はゼロであるという結論しか得られない。
このシンプルなモデルは、地球空間の大部分に適用される磁気プラズマの重要な特性を示している: すなわち、プラズマの電気伝導率が非常に大きい場合、プラズマと磁場の相対運動が事実上不可能になる。

この時、磁場は *凍り付いた* (`frozen in`) と呼ばれる。同様に、磁場はすでに高導電性プラズマが占める領域に入ることができず、そのとき磁場は *凍り出される* (? `frozen out: "freeze someone out"` で「(人を)のけものにする」という意味)。凍結磁場の概念は、1942年にH.Alfvenによって発表されました。

磁場の凍結はMaxwellの方程式から厳密に証明され、電磁気学のテキストで扱われている。ここでは、その簡略版を示す。電流密度 J, 電界 E, 磁気誘導 B に対して、変位電流を無視したMaxwellの2つの方程式は、次のようになる（SI形式）。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \, \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

オームの法則により、

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$v = 0$ として、J と E を消去すると、以下を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\nabla^2 \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma} = \varepsilon_0 c^2 \frac{\nabla^2 \mathbf{B}}{\sigma},$$

c は光速である。これは拡散係数が $1/\mu_0 \sigma$ （次元は (長さ)²/(時間) ）であるような拡散方程式である(2.2.5節)。導体が長さ L で特徴付けられる空間を占める場合、磁場がそこに出入りするのにかかる時間はおよそ $\tau = (\mu_0 \sigma) L^2$ である。τ より小さい時間では、磁場とプラズマは一緒に動くと考えることができる。τ より大きい時間では、それらは独立して動くと考えることができる。τ の代表的な値は、1cmの銅球で1秒、地球のコアで10^4年、太陽で10^{10}年である。

2.3.7 $E \times B$ ドリフト

磁場（磁束密度 $\vec{B}$）に対して直角に電場（$\vec{E}$）を印加すると、プラズマ粒子は次の式で与えられる速度 $\vec{v}$でドリフトする。

$$\vec{v} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$$

ベクトル v は E と B の両方に垂直であり、その大きさは E/B である。この重要な結果は、簡単なモーターに例えて理解することができる。Figure 2.6では、磁石の磁極間の磁束を横切って電線が電流 $\vec{I}$ を流している。この電流は電場 $\vec{E}$ と関係していると仮定する。

結果として生じるワイヤにかかる下向きの力は単位長さあたり $F = IB$ となり、速度 v で動くと仮定する。したがって、単位長さあたりの動力（単位時間あたりの仕事）は Fv であり、これは電力 EI と等しくなければならない。したがって、

$$Fv = EI, \text{ and } \quad v = EI/F = EI/IB = E/B$$

より正式な議論として、電場と磁場の中を速度 v で移動する電荷 e を持つ粒子にかかる力の総和を次のように考える。

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

ここで、F をゼロにするような v について考えてみる。というのも、もし粒子が力を受けなければ、同じ等速で動き続けるからである。$\vec{v} = \vec{E} \times \vec{B}/|\vec{B}|^2$ のとき $F = 0$ となることは、（簡単なベクトル図を使って）容易に検証できる。なぜならば、$v \times \vec{B} = (\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}/|\vec{B}|^2$ (`= {(E•B)B − (B•B)E}/|B|² = {0 − |B|²E}/|B|² = −E`) だからである。
$E \times B$ ドリフトは磁気圏や電離層の物理の基礎の一つであり、プラズマ中の電流とドリフトの特殊なケースとして6.5節で再び出会うことになる。

2.3.8 フェルミ加速

ベータトロン過程（2.3.3節）では、磁場に対して直角に動く荷電粒子を加速することができる。磁場に沿って移動する荷電粒子では、主な加速過程は *フェルミ加速* である。近づいていく2つの「鏡」の間を行き来する粒子を考える。粒子の速度を v とし、経路の長さを l とすると、l/v ごとに1回の反射がある。経路が dl/dt で短縮されると、粒子の速度は反射のたびに dl/dt だけ増加し、したがって速度は、

$$dv/dt = (dl/dt)(v/l)$$

したがって、

$$dv/v = dl/l$$

そして、粒子の質量を m とすると、そのエネルギーの増加率は、

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{mv}^2}{2}\right) = \mathrm{mv} \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{l}}\frac{\mathrm{dl}}{\mathrm{dt}}$$

また、l の増加に対しては、

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dl}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dl}}\left(\frac{\mathrm{mv}^2}{2}\right) = \mathrm{mv} \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dl}} = \frac{\mathrm{mv}^2}{\mathrm{l}} = \frac{2\mathrm{E}}{\mathrm{l}}$$

したがって、経路短縮の相対増分（$\delta l/l$）によるエネルギーの相対増分（$\delta E/E$）は、単に

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{2\delta l}{l}$$

つまり、経路が5%短くなれば、エネルギーは10%増加する。このメカニズムは、磁力線が収縮すれば、地磁気的に捕捉された粒子（5.7.2節）にエネルギーを与えることができる。