

# 12月05日 中間報告

これまでの課題とこれからの実習課題

0500-32-7354, 佐藤 匠

# 目次

---

- これまでの課題1~3について
  - [課題1] SIS法, SIR法の実装
  - [課題2] Lanczos 法による SV の計算
  - [課題3] LV, BV の計算
- これからの実習課題4~5について
  - [課題4] 実習課題の概要
  - [課題4] 機械学習におけるパラメータ推定
  - [課題4] 先行研究と計画

## これまでの課題 1~3

---

[課題1] SIS法, SIR法の実装

# [課題1] SIS法, SIR法の実装 | SIS, SIR のアイデア

**Squential Importance Resampling (SIR)**

The diagram illustrates the SIR process. It shows two columns of nodes representing time steps  $t-1$  and  $t$ . In the  $t-1$  column, blue circles represent particles ( $\chi_{t-1|t-1}$ ), yellow circles represent likelihood ( $\chi_{t|t-1}$ ), and an orange circle represents an observation ( $y_t$ ). Arrows show the flow from particles to likelihood, and likelihood to the observation. In the  $t$  column, the particles ( $\chi_{t|t}$ ) are shown as a cluster of blue circles, indicating they have been resampled.

- Particles
- Likelihood
- Observation

Forecast → Calculating likelihood → Resample

$$\mathbf{x}_{i+1}^{f(k)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}_i^{f(k)}) \quad (\text{時間発展})$$

$$\hat{w}_{i+1}^{(k)} = w_i^{(k)} \cdot l_i^{(k)} \quad (\text{重みの更新})$$

$$l_i^{(k)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-40}}{\sqrt{|R|}} \exp \left( \frac{-2}{-2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^{f(k)})^2 \right).$$

$$\hat{w}_{i+1}^{(k)} = \hat{w}_i^{(k)} / \sum_j \hat{w}_i^{(j)}. \quad (\text{正規化})$$

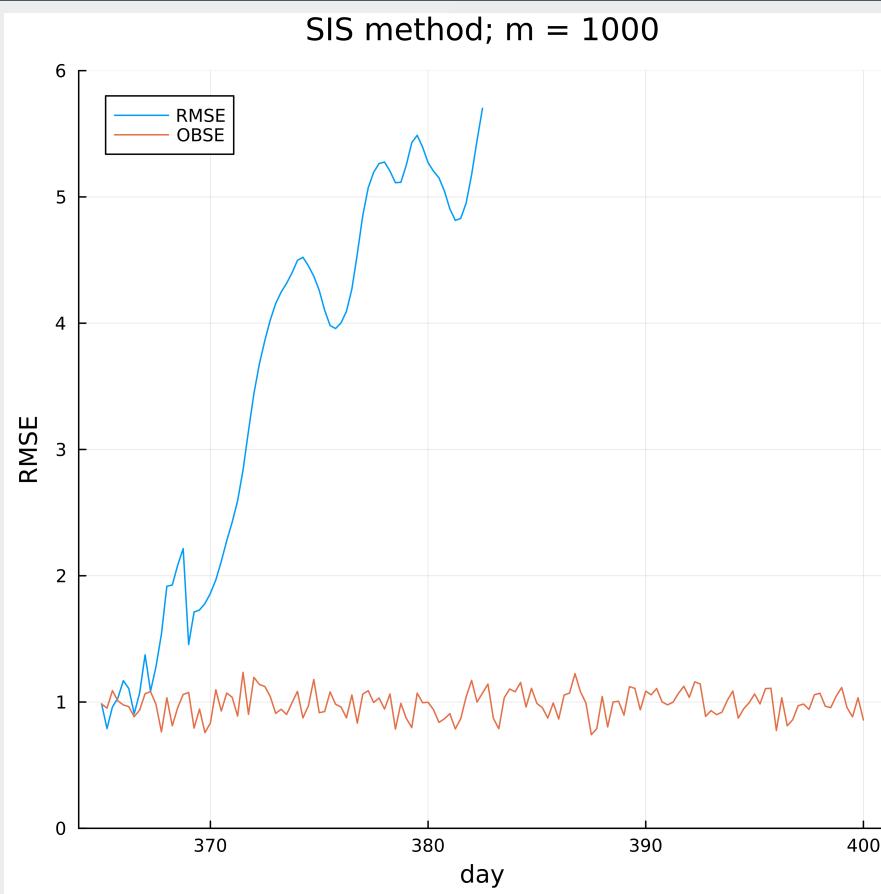
Resampling (サイコロ  $m$  回)  
重み  $w_k = 1/m$

Arakida et al.(2016).  
doi: 10.5194/npg-2016-30.

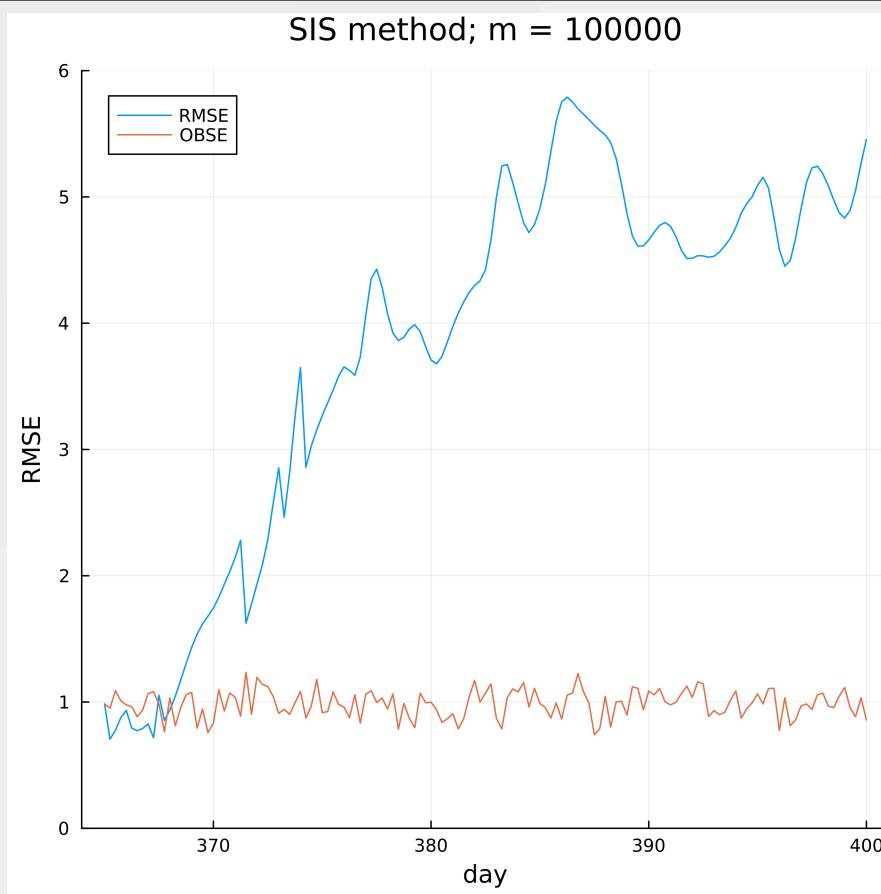
4

# [課題1] SIS法, SIR法の実装 | SIS法 結果(RMSE)

$$m = 10^3$$



$$m = 10^5$$



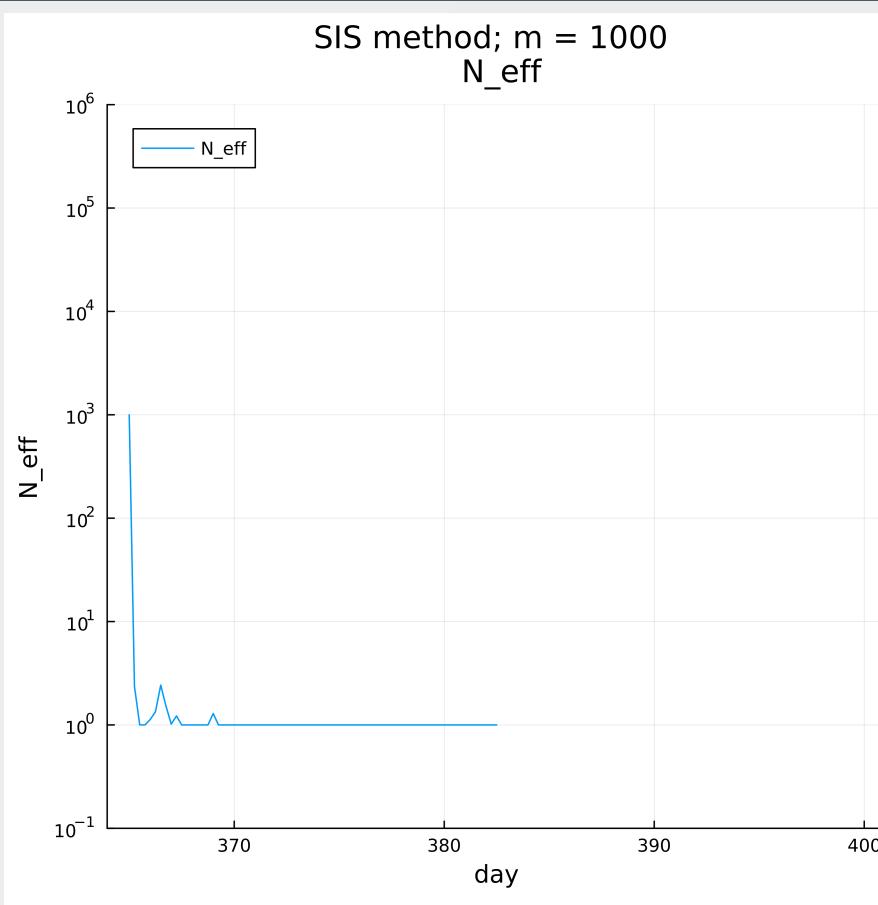
$$\bar{x}_i^a = \sum_k w_i^{(k)} \cdot x_i^{f(k)}.$$

とした。

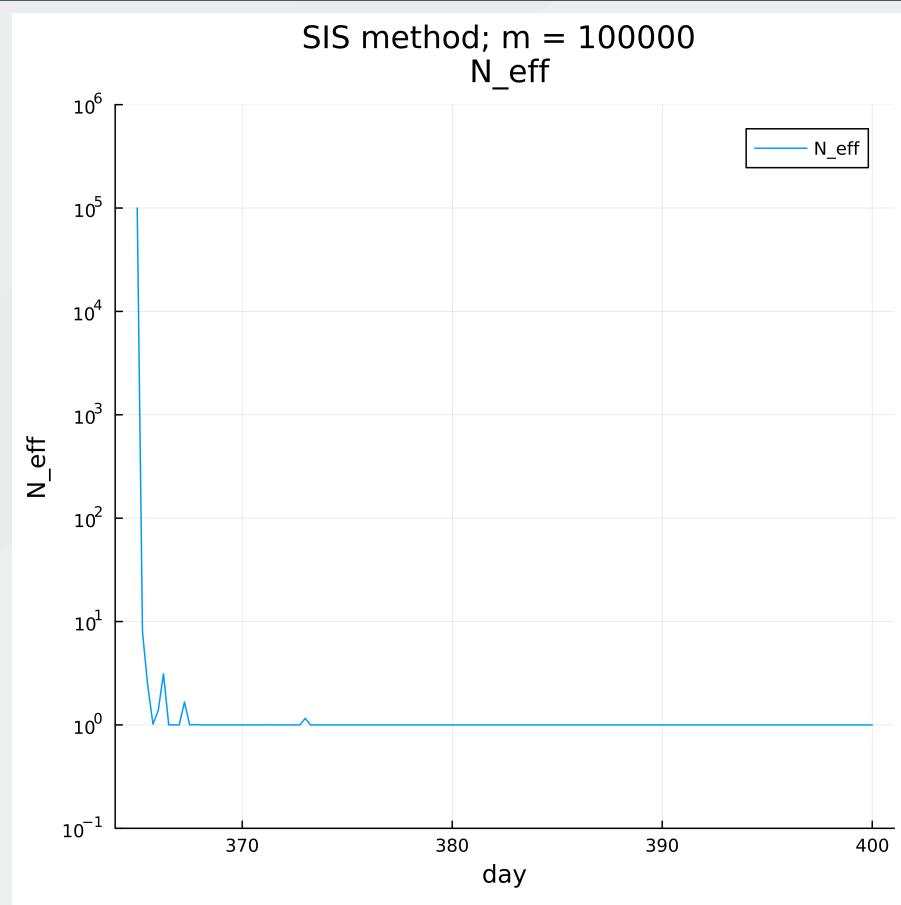
初期メンバーは  
 $y^0(t = 0)$  の周り  
 に分散  $\sigma = 1$  の  
 正規分布でサンプ  
 リングした。

# [課題1] SIS法, SIR法の実装 | SIS法 結果( $N_{\text{eff}}$ )

$$m = 10^3$$



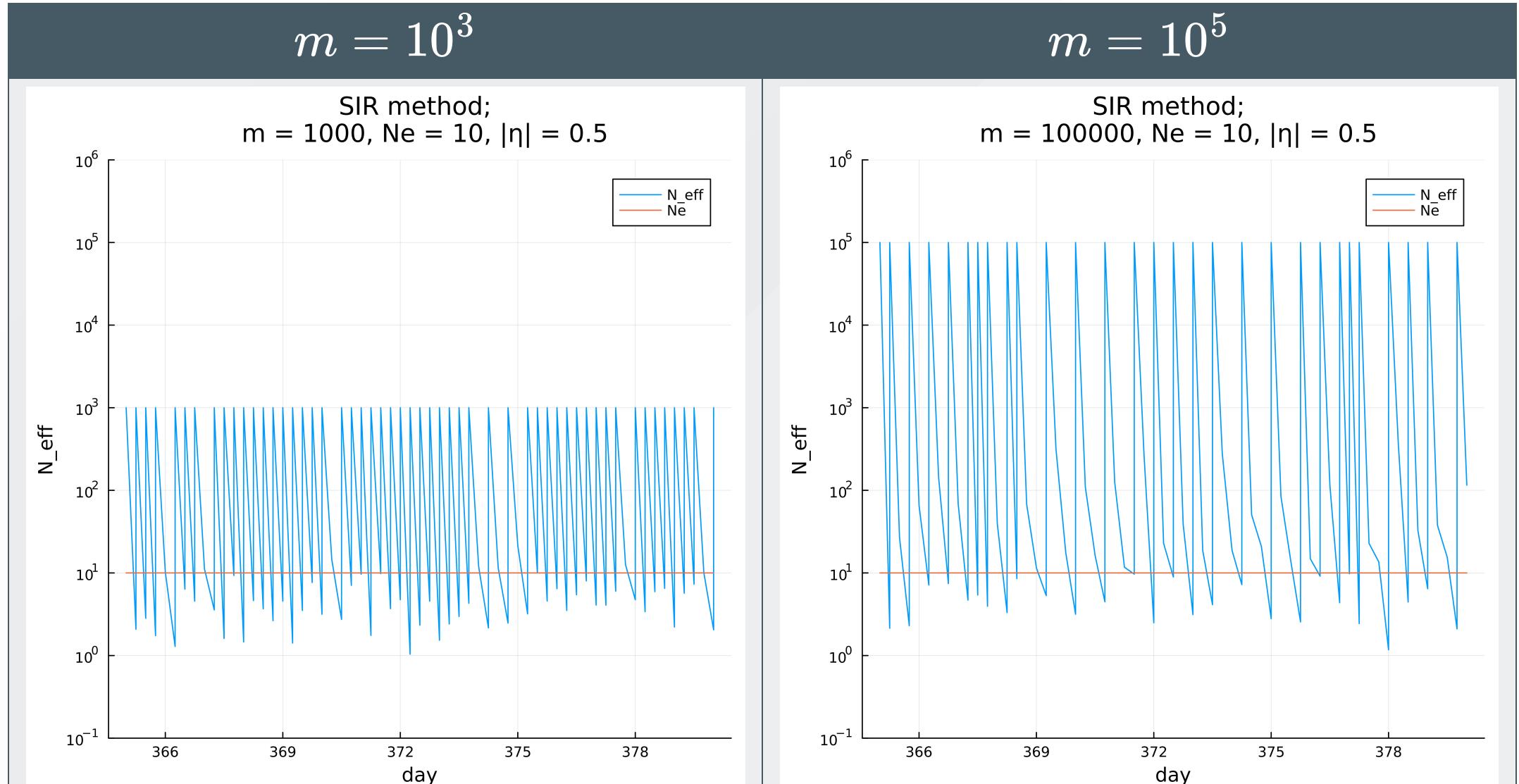
$$m = 10^5$$



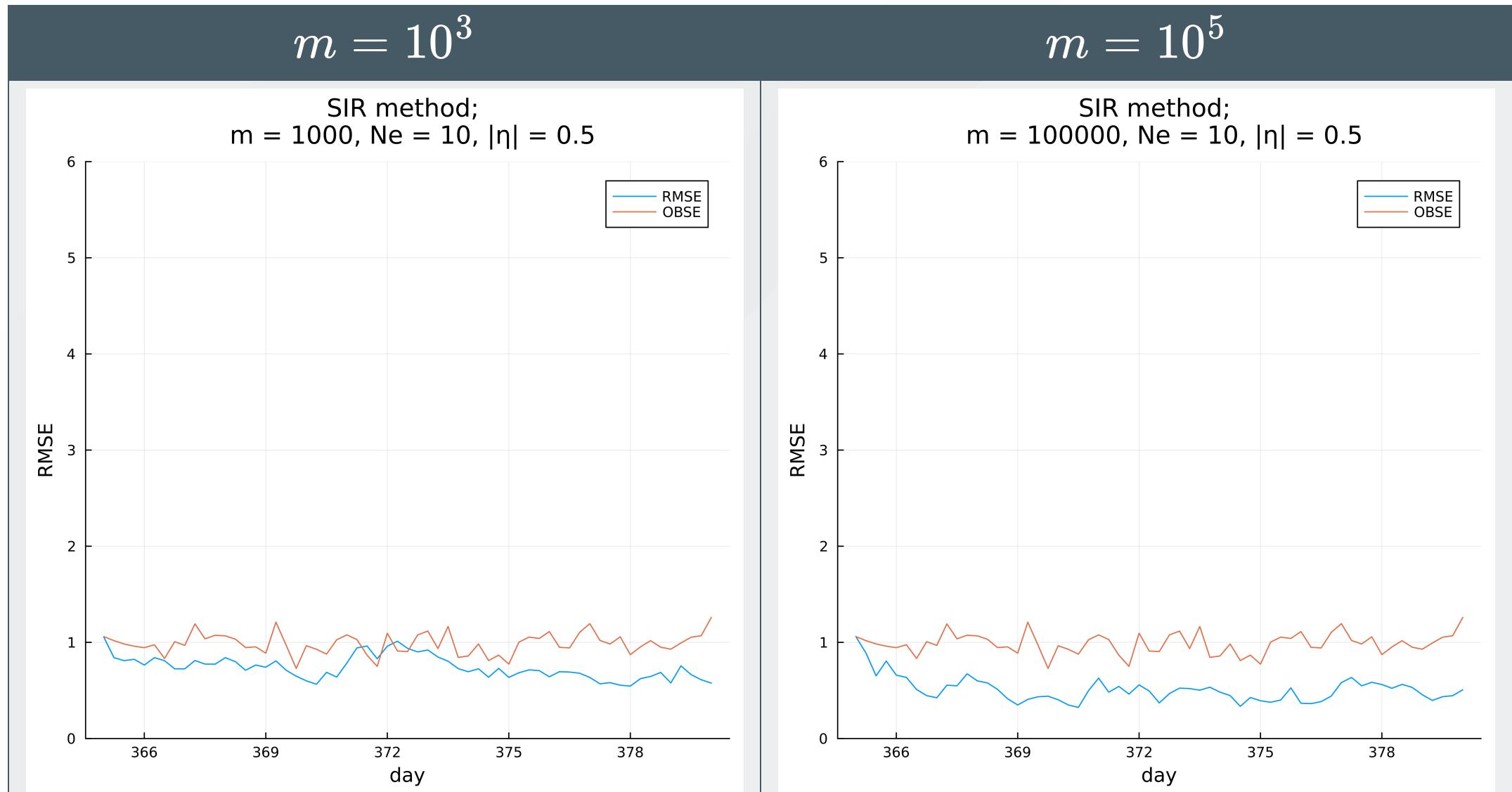
$$N_{\text{eff}}(t_i) = \sum_k 1/(w_i^{(k)})^2$$

$w_i$  が一つだけ  
生き残る

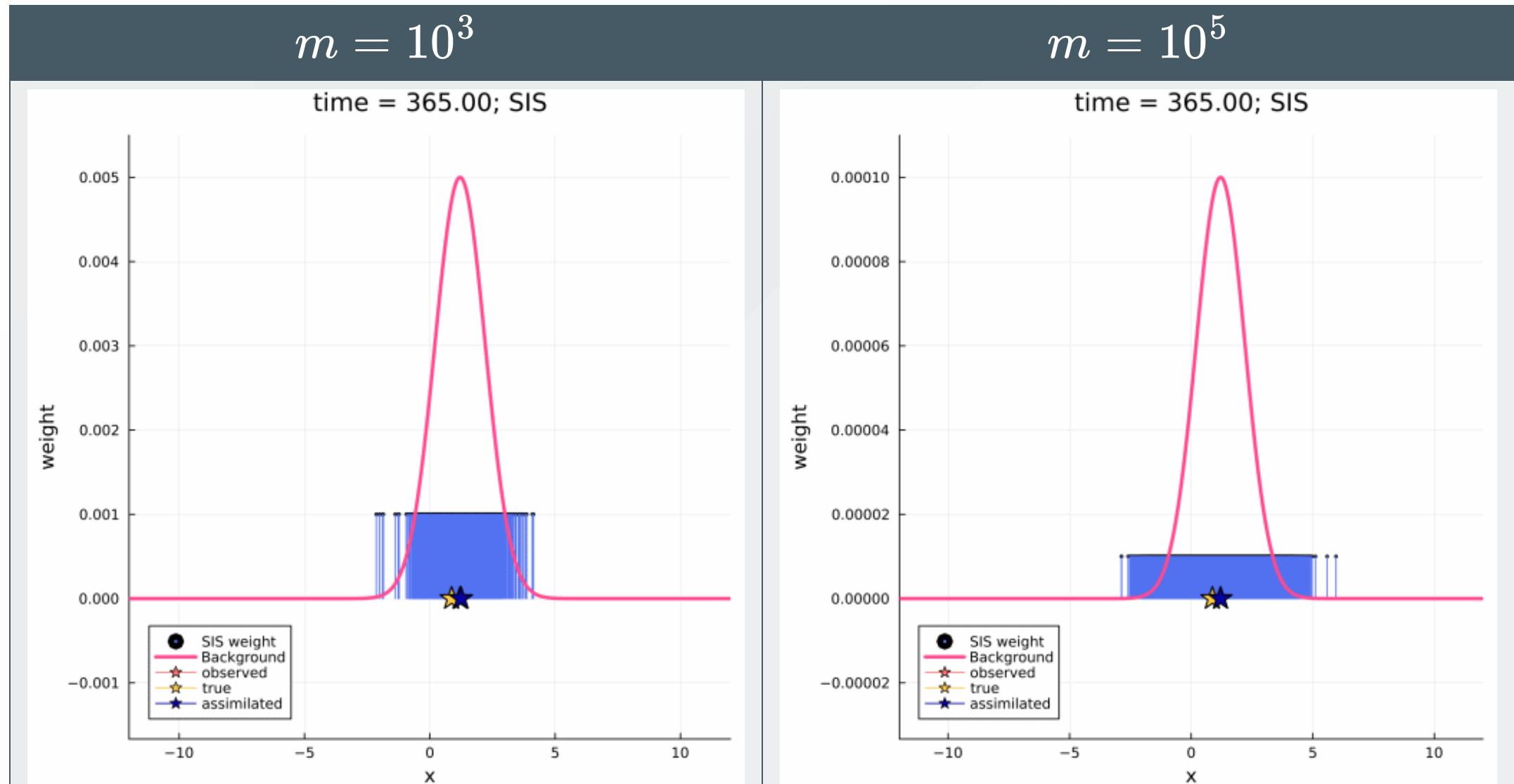
# [課題1] SIS法, SIR法の実装 | SIR法 結果( $N_{\text{eff}}$ )



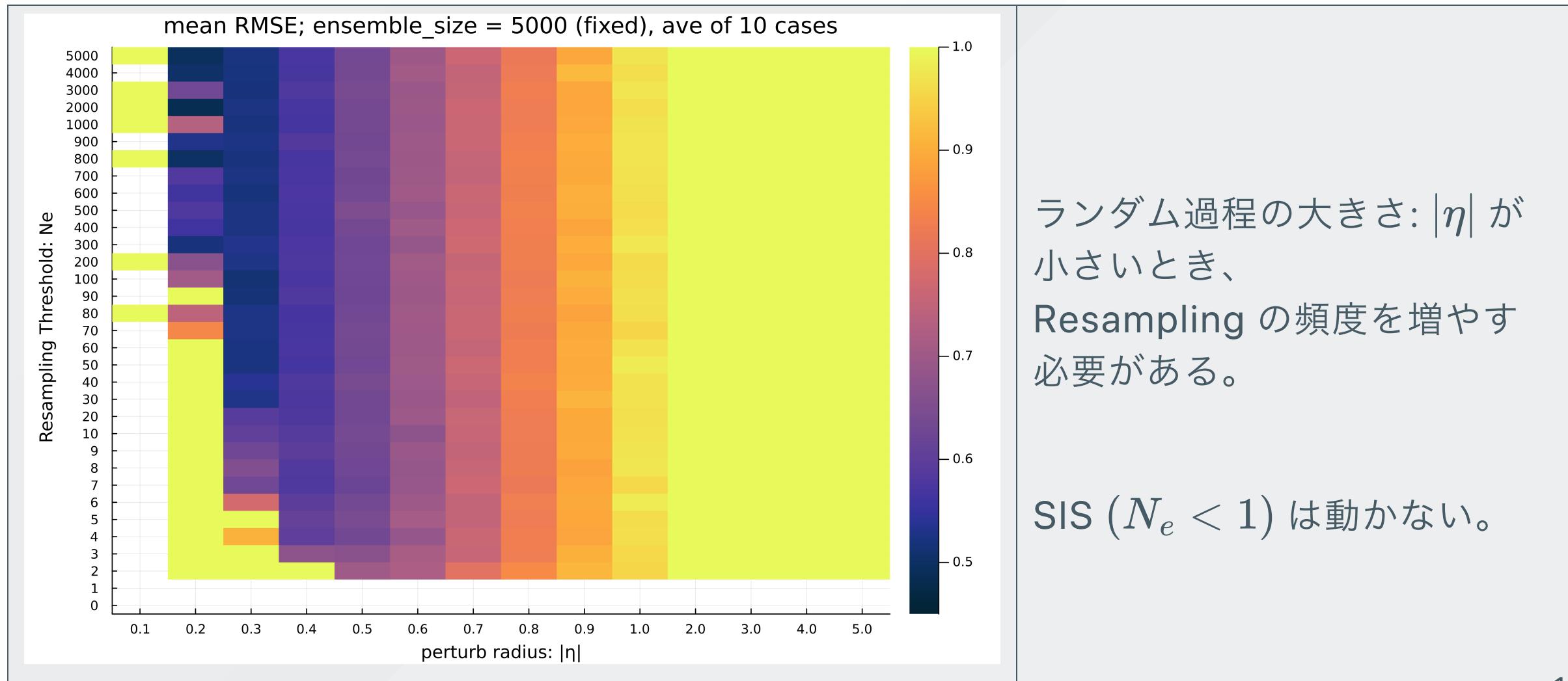
# [課題1] SIS法, SIR法の実装 | SIR法 結果(RMSE)



# [課題1] SIS法, SIR法の実装 | SIRアニメーション



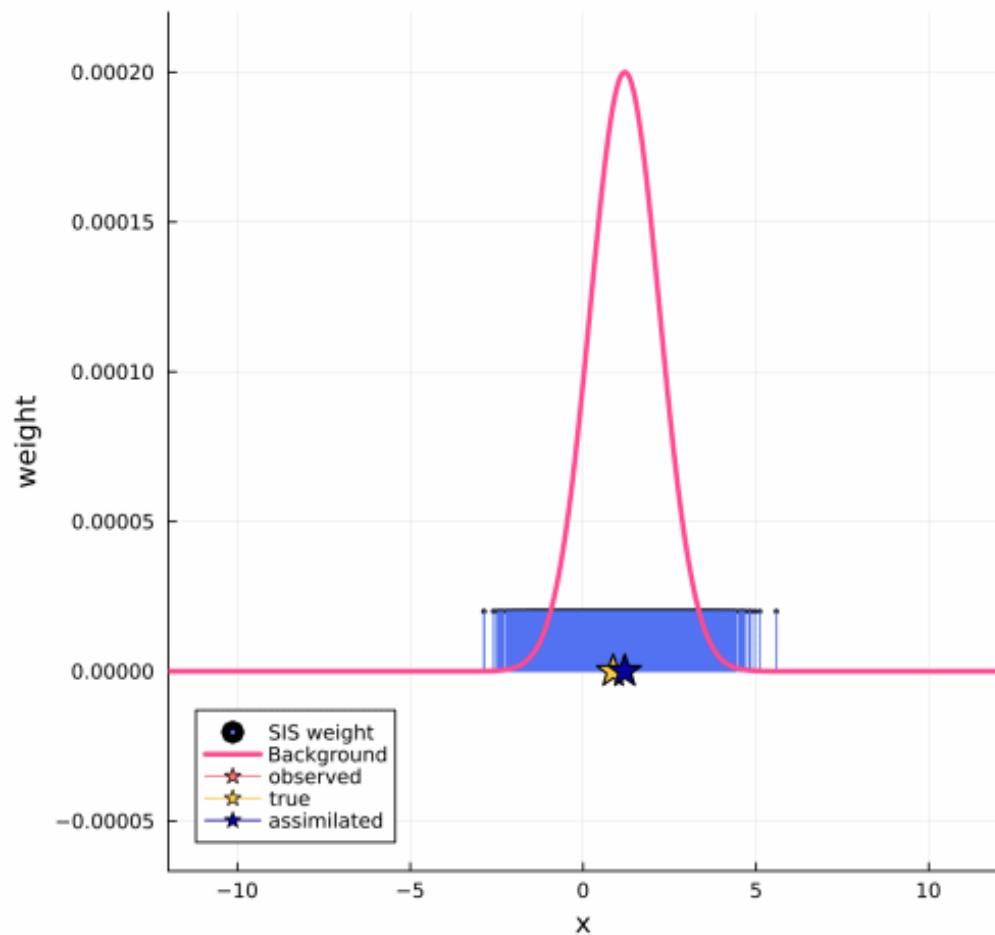
# [課題1] SIS法, SIR法の実装 | 閾値 $N_e$ と擾乱 $|\eta|$



# [課題1] SIS法, SIR法の実装 | ランダム過程の大きさ

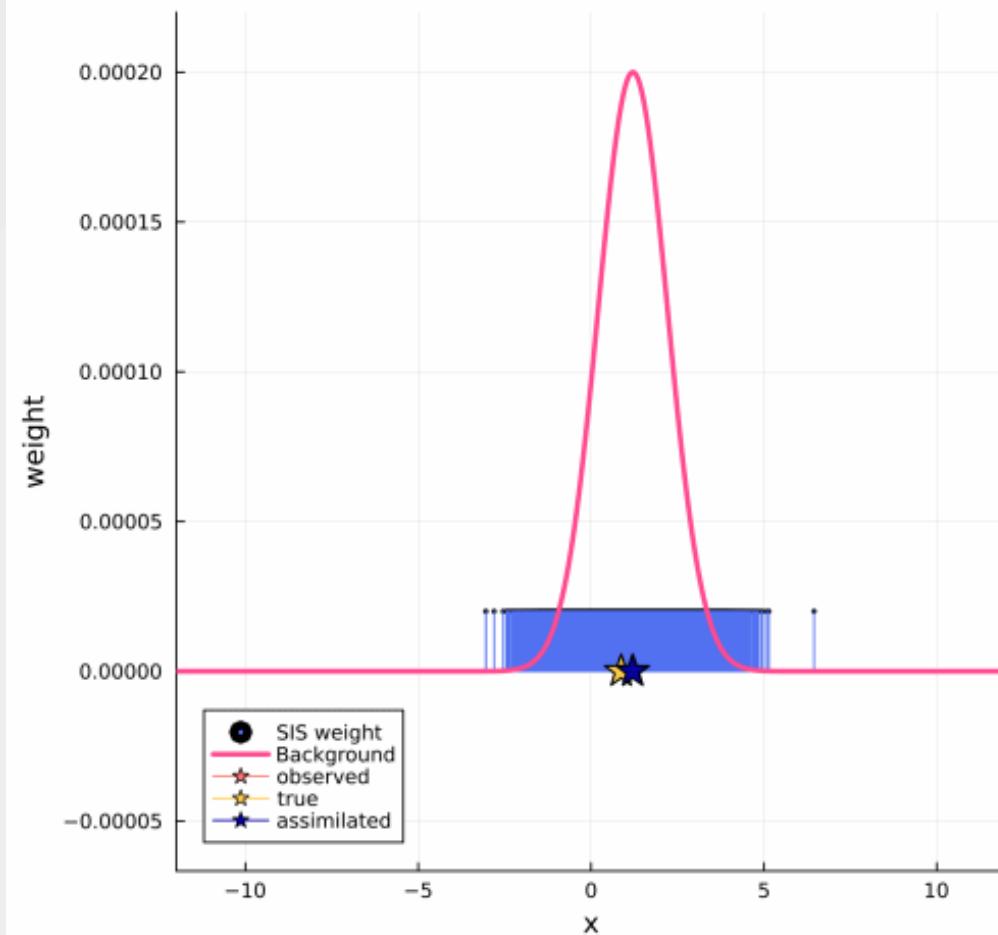
小さすぎ ( $\eta = 0.05$ )

time = 365.00; SIS



大きすぎ ( $\eta = 5.0$ )

time = 365.00; SIS



## これまでの課題 1~3

---

**[課題2] Lanczos 法による SV の計算**

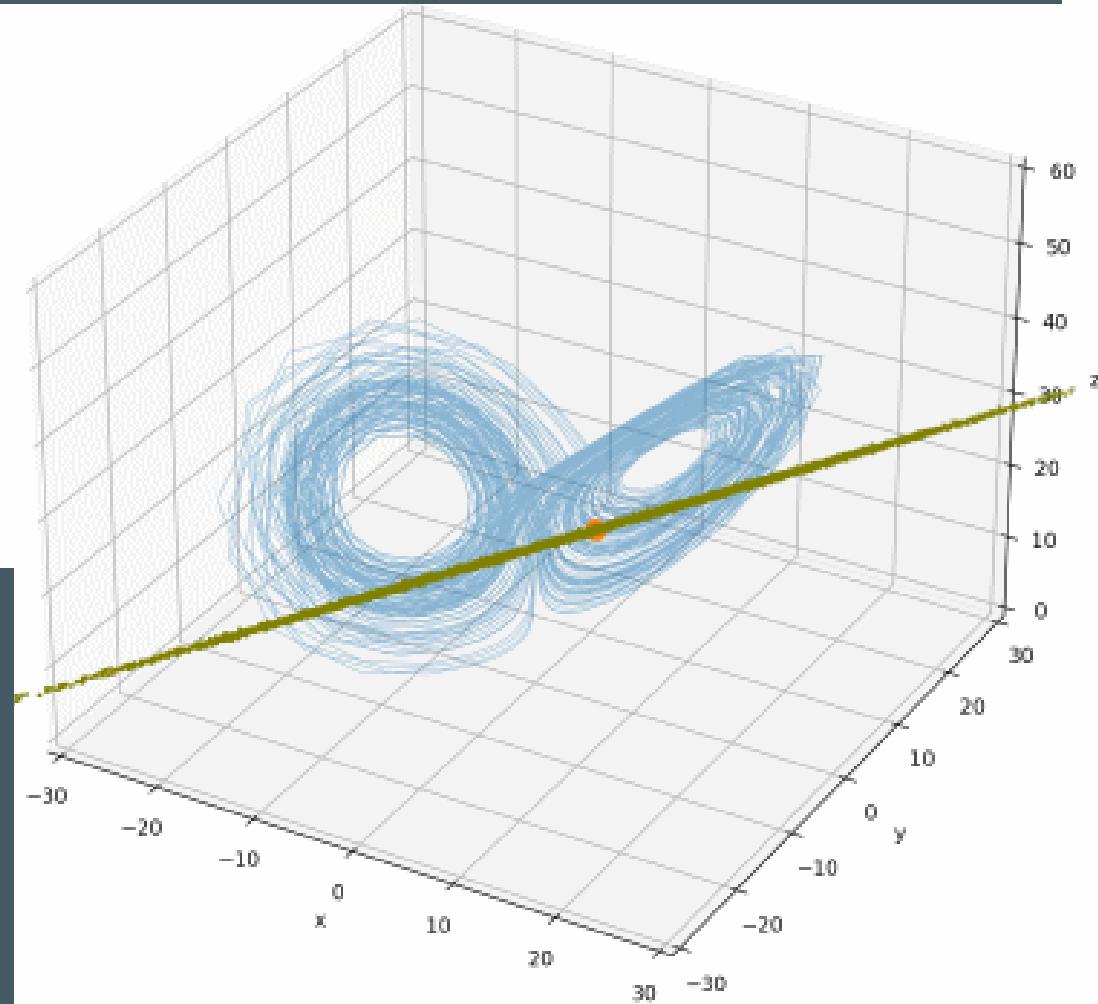
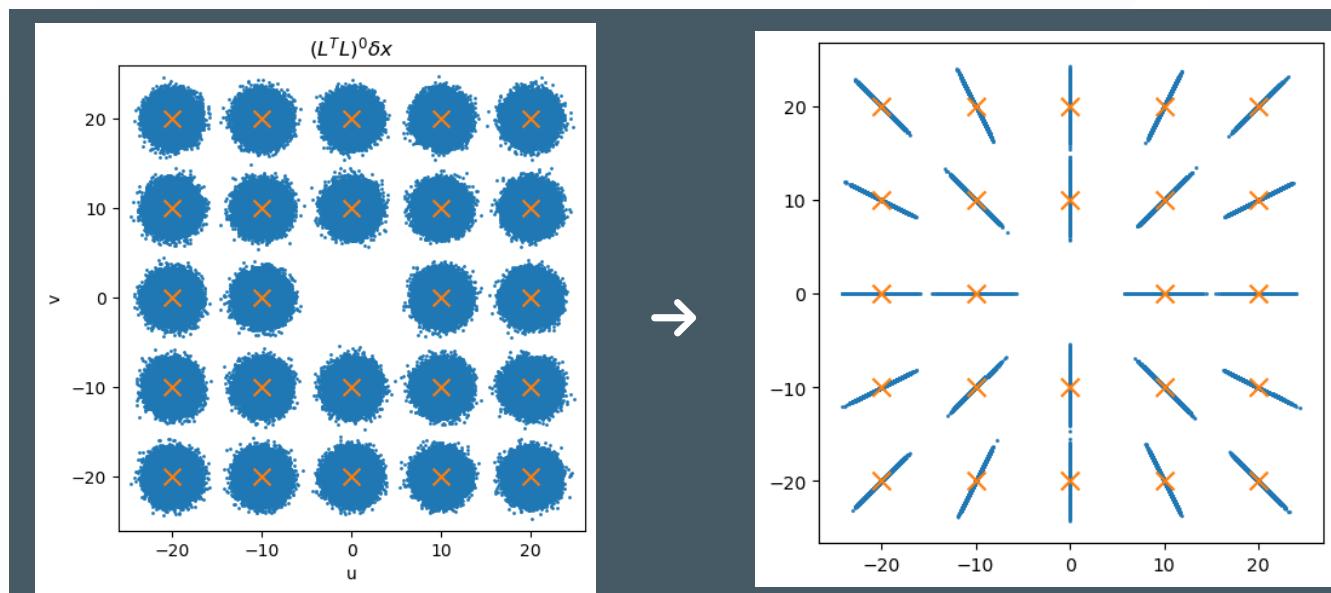
# [課題2] SV の計算 | Lanczos法

TLM と ADJ に対して

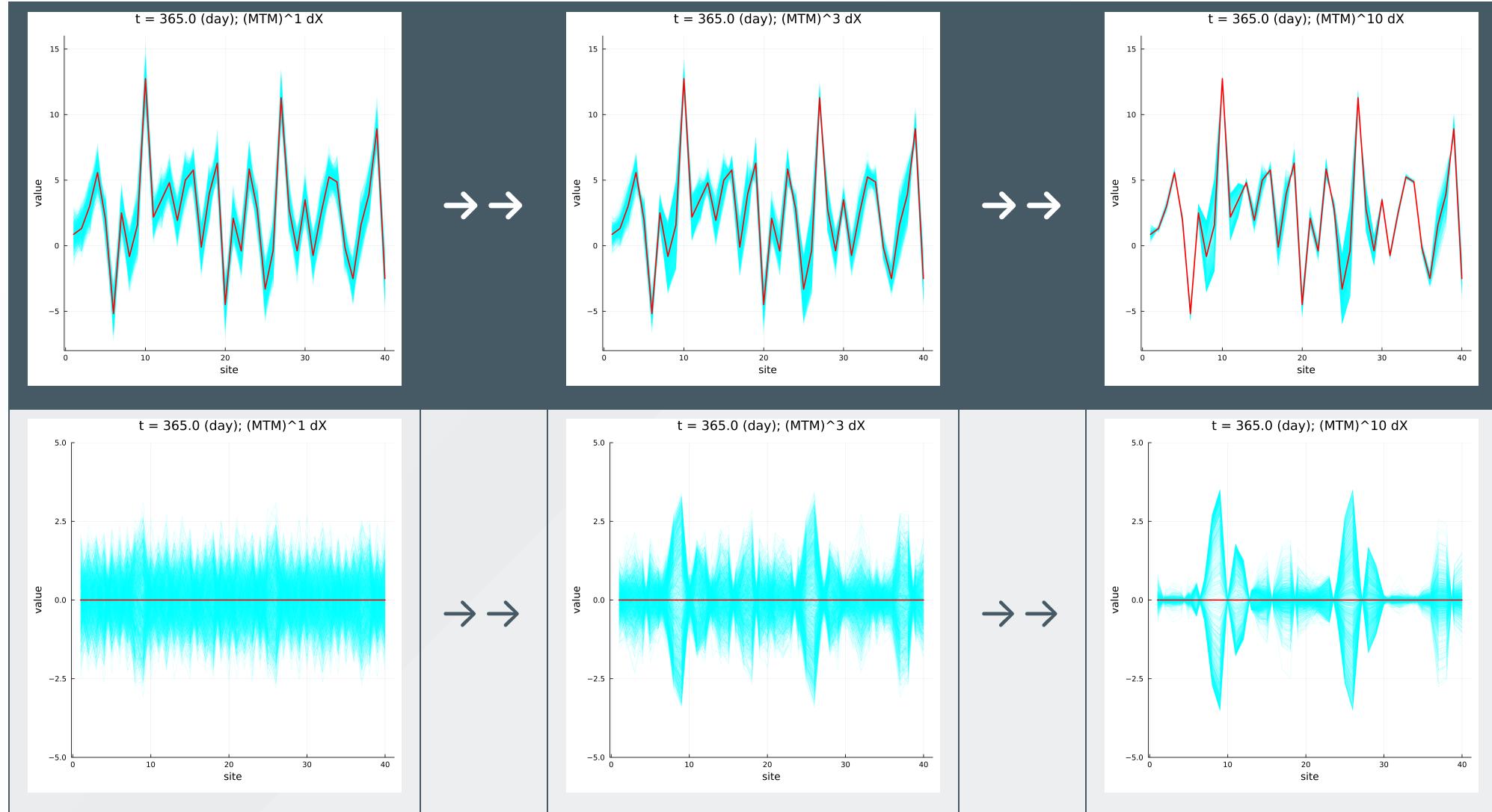
*leading Singular Vector:  $\vec{v}_1$  と  $\sigma_1$  が存在して、*

$$(\mathbf{L}^T \mathbf{L}) \vec{v}_1 = \sigma_1^2 \vec{v}_1$$

を満たす。 $v_i, \sigma_i$  は SVD( $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ ) である。

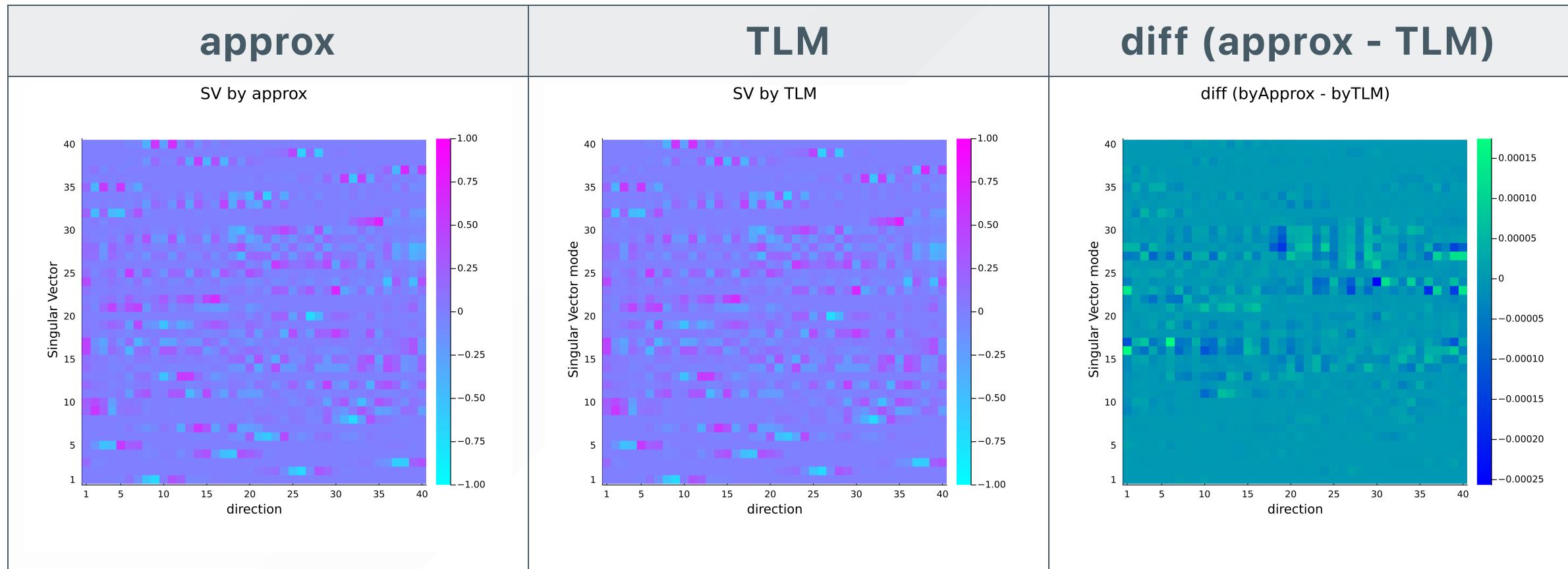


# [課題2] SV の計算 | Lorenz-96 モデルの SV



# Lanczos 法 | 各モードの SV の成分 (特異ベクトル)

approx の  $\Delta t = 0.05$ ,  $\delta = 10^{-3}$  とすると、各成分の誤差は (10th~30thで)  $10^{-4}$  程度

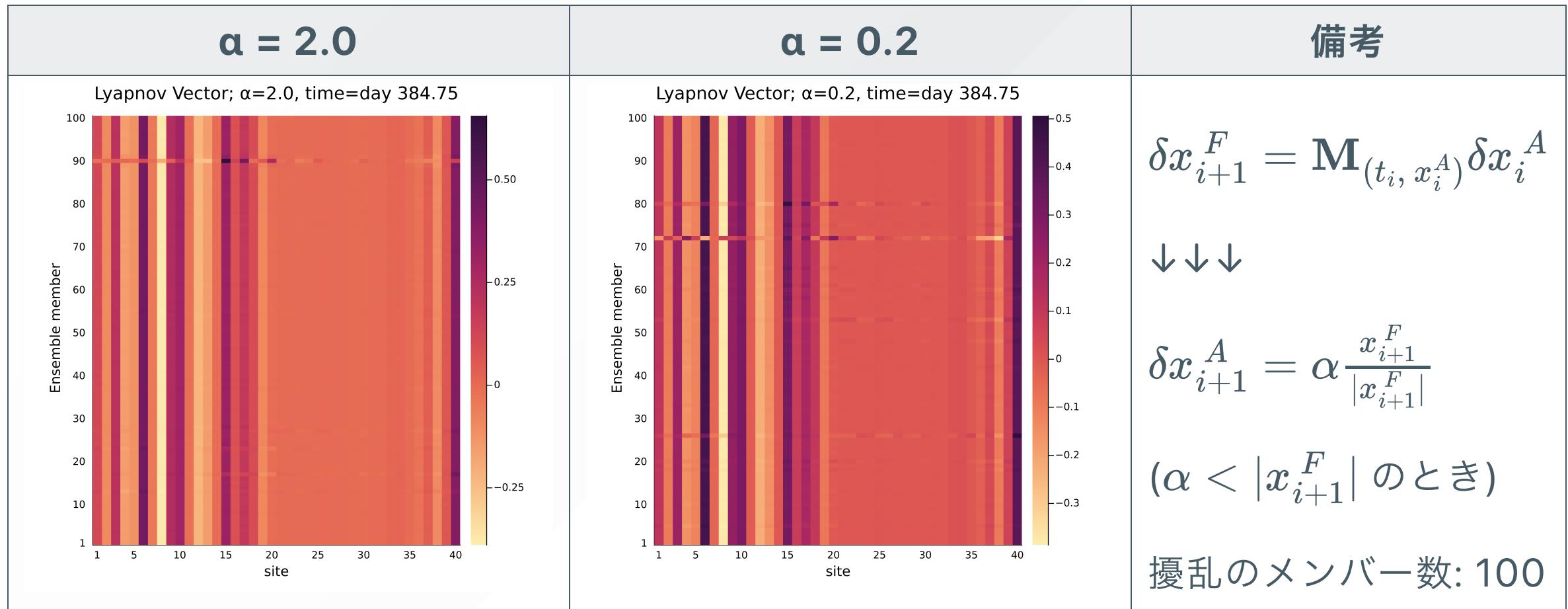


## これまでの課題 1~3

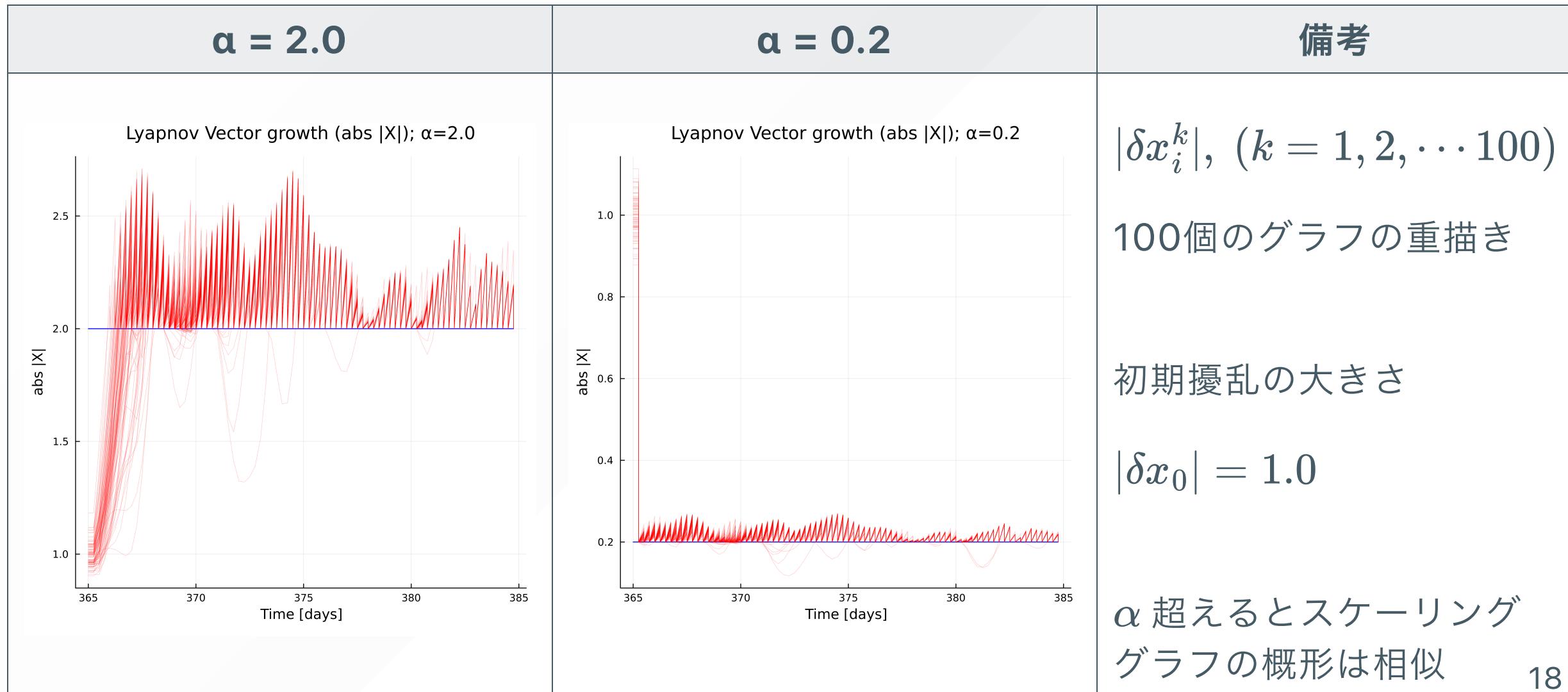
---

### [課題3] LV, BV の計算

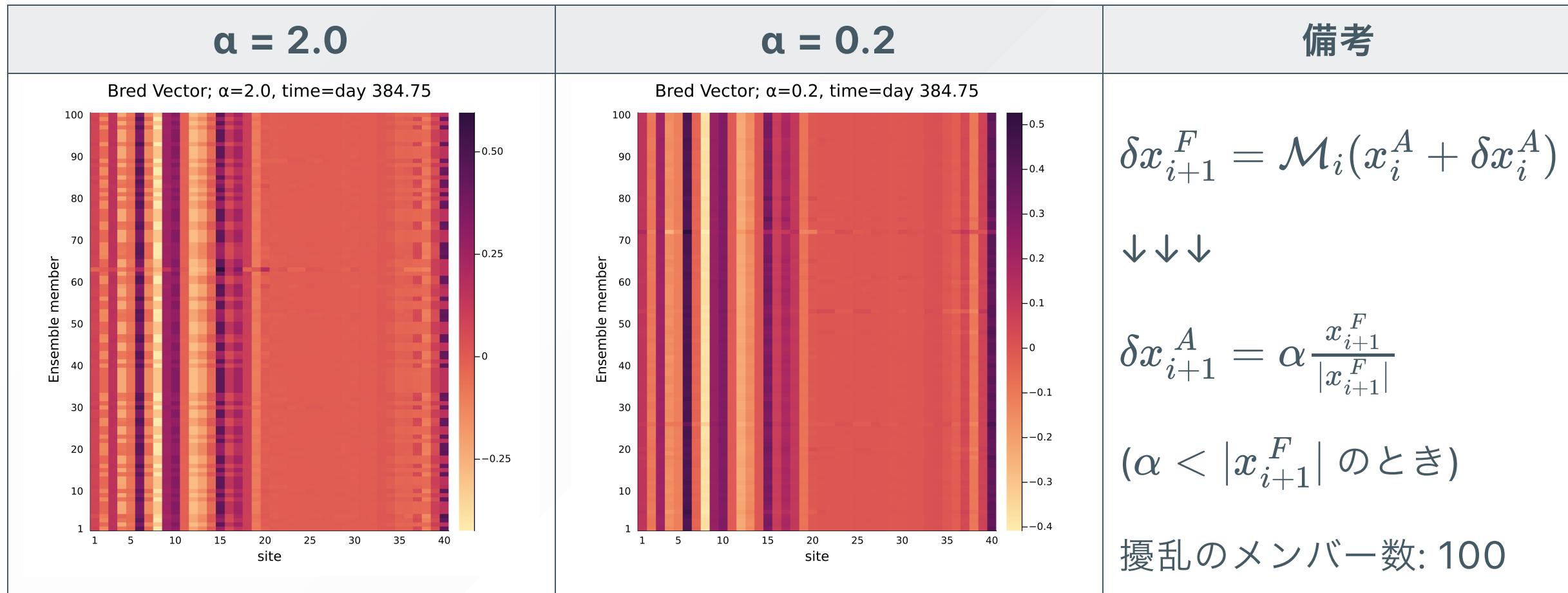
# [課題3] LV, BV の計算 | Lyapnov Vector

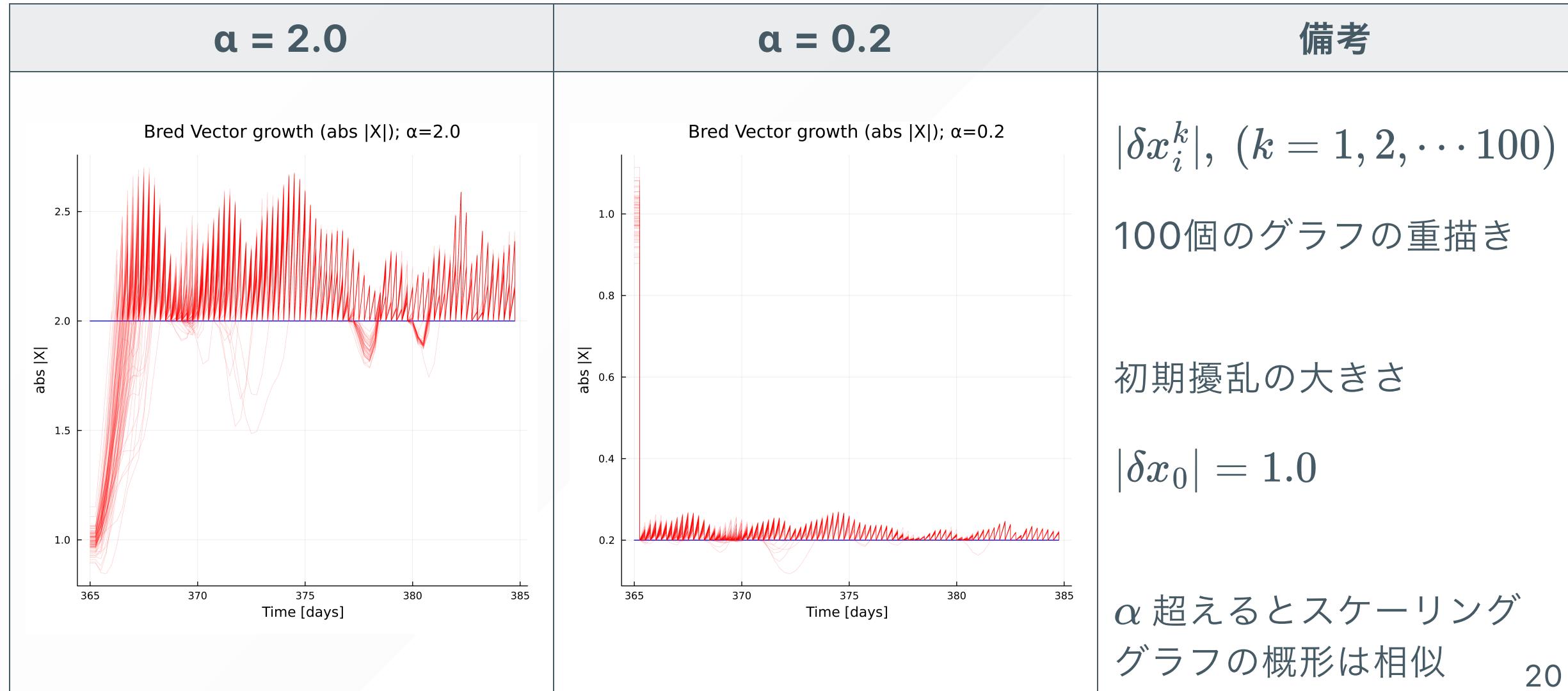


# [課題3] LV, BV の計算 | LV の $|\delta x^k|$ の推移



# [課題3] LV, BV の計算 | Bred Vector



# [課題3] LV, BV の計算 | BV の  $|\delta x^k|$  の推移

## これからの実習課題4~5について

---

## [課題4] 実習課題の概要

テーマ: パラメータ推定

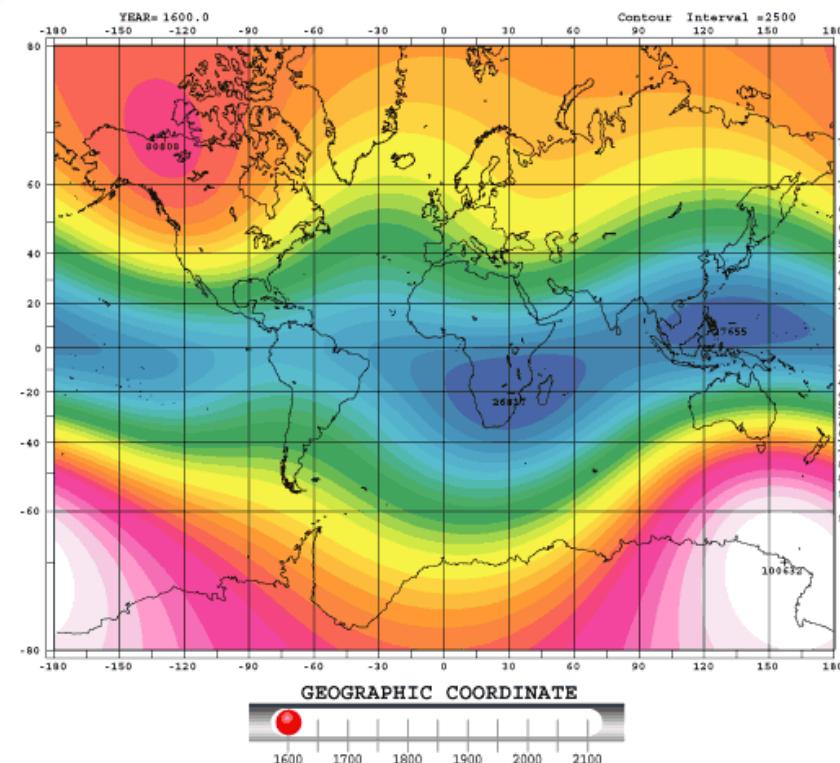
時系列予測に用いられる機械学習モデル (AR, RNN) と  
データ同化の融合

研究の背景

- 地球の磁場は **非線形** に変動している → 予測したい
- そのメカニズムはよくわかっていない → 予測しづらい
- 観測データはたくさんある → 機械学習が有効？

よくある「学習」 = **RMSE** の逆伝搬

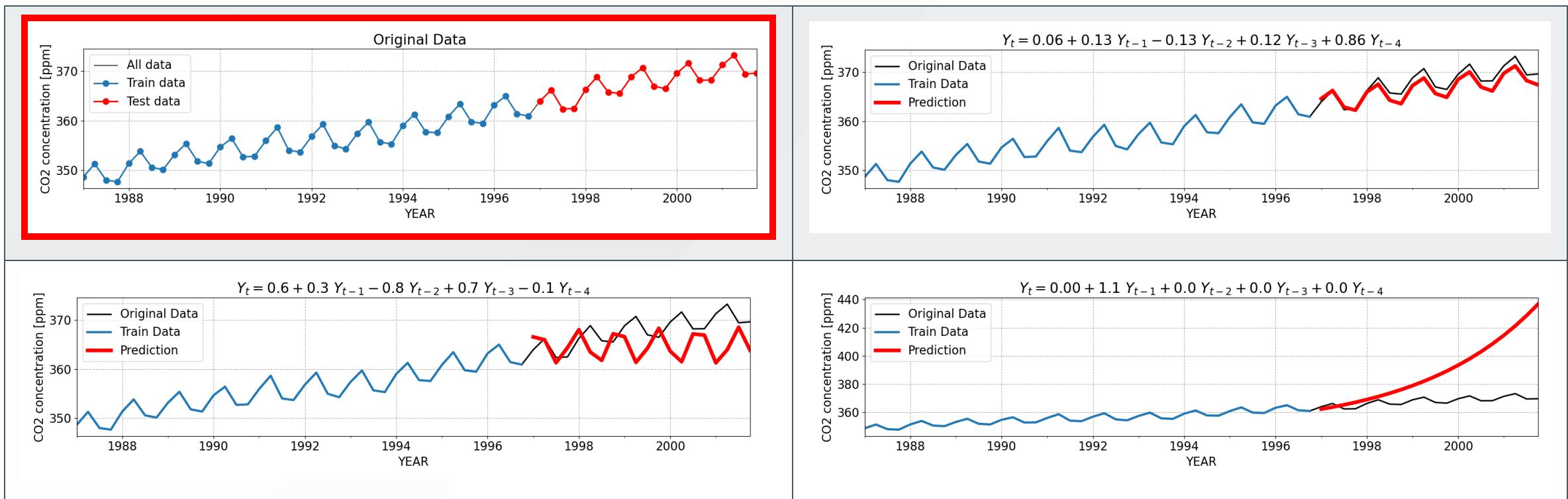
→ 『どの程度外れそうか』の予報 (UQ) が難しい → 尤度に基づいた学習の実装



# [課題4] 機械学習におけるパラメータ推定と予測

例：AR(4) モデルによる学習と予測

$$Y_t = \varepsilon_t + c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \phi_4 Y_{t-4}, \quad (c, \phi_i \text{ がパラメータ})$$



## [課題4] 先行研究と今後の計画

### ***AR(p)* モデル (Box and Jenkins(1970) など) :**

確率過程をもとにしたモデル。歴史が古く、数学的によく調べられている。

状態空間表現が可能で、KFを用いた応用例多数 (星谷、丸山 (1990)<sup>\*1</sup>)。

### ***Recurrent Neural Network* (Werbos(1990)<sup>\*2</sup> など) :**

再帰的な構造を取り入れることで時系列データに対応した深層学習モデル。

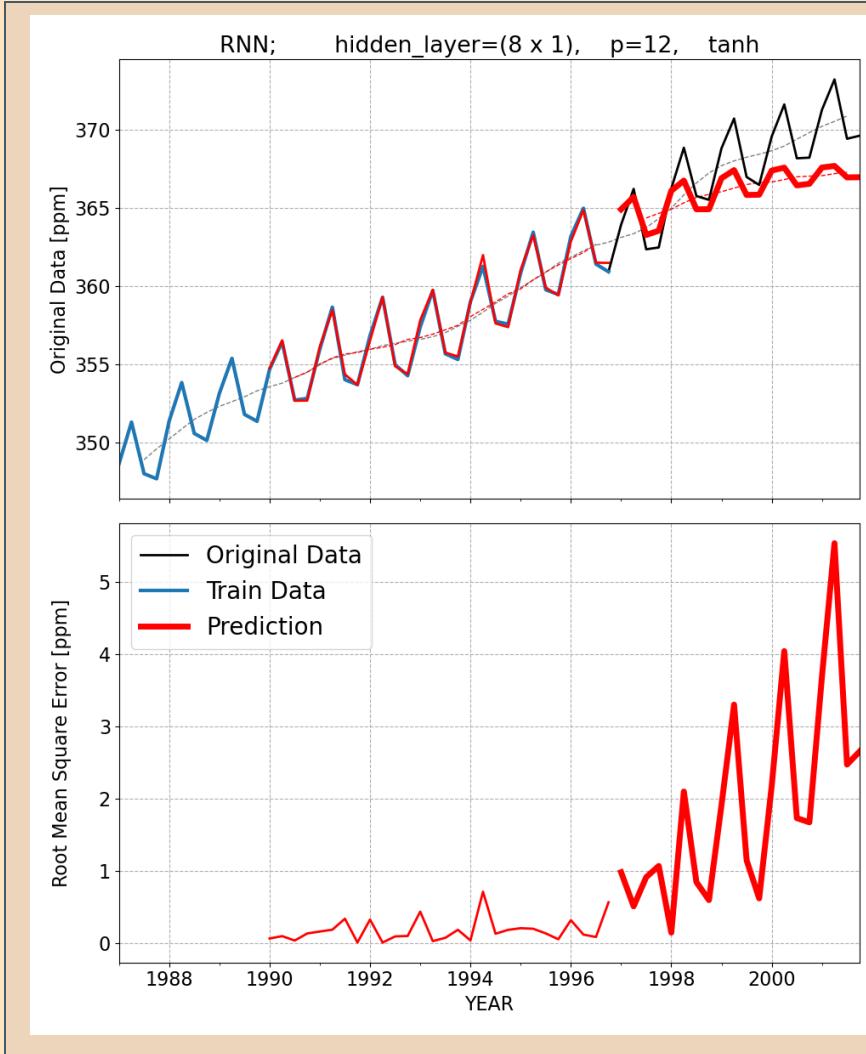
RNN自体を 拡張KF とみなす学習法が研究されている (金城ら (1997)<sup>\*3</sup>)。

### 今後の計画

- 🔥 先行研究・具体的な実装法のサーベイ (12/12まで)
- □ AR(p) の実装 (12月中)
- □ RNN の実装 (1月中)

12/05(火) データ同化B 中間報告 佐藤 匠

# 機械学習のデモ | Recurrent Neural Network



再帰的な構造で時系列データに対応したNNモデル

