ЗМІСТ

1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Площа криволінійної трапеції

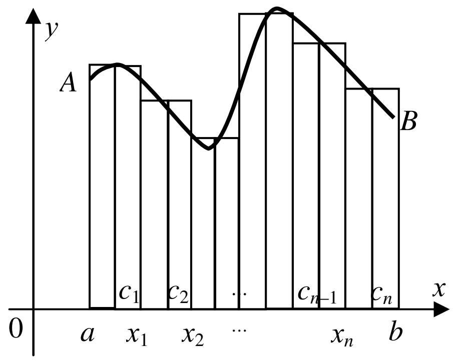

Рисунок 1.1

Нехай на сегменті [$a;b$] задана неперервна невід'ємна функція $y=f(x)$. Криволінійною трапецією називається фігура, яка утворена відрізком [$a;b$] осі OX, прямими, що задані рівняннями $x = a$ та $x = b$ і графіком функції $y=f(x)$ (рис. 1.1).

Знайдемо площу криволінійної трапеції ***aABв***. Площа такої фігури не може бути знайдена за допомогою відомих з елементарної геометрії.

Отже, будемо шукати інший спосіб.

Відрізок [$a;b$] розіб'ємо на $\boldsymbol{n}$ часткових сегментів за допомогою точок розподілу: $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b}$. Довжини часткових сегментів будемо позначати так: $\boldsymbol{\Delta x_1 = x_1 - x_0;\ \Delta x_2 = x_2 - x_1;\ \ldots;\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}}$. Через точки розподілу проведемо вертикальні прямі, внаслідок чого уся криволінійна трапеція розбивається на $\boldsymbol{n}$ часткових криволінійних трапецій. У кожному частковому сегменті довільним чином виберемо проміжні точки $\boldsymbol{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n}$. Через них також проведемо вертикальні прямі. На кожному частковому сегменті побудуємо прямокутники, основою яких є часткові сегменти, а висоти дорівнюють значенню функції у проміжних точках. Площа $\boldsymbol{k}$-го прямокутника знаходиться за формулою $\boldsymbol{f(c_k)\Delta x_k}$, де $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, \ldots, n}$. Внаслідок такої побудови дістанемо ступінчасту фігуру, площа якої $\boldsymbol{S_n}$ знаходиться як сума площ усіх прямокутників.

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n$$

або

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Площа S_n цієї ступінчастої фігури наближено дорівнює площі S криволінійної трапеції.

Будемо тепер збільшувати кількість часткових сегментів, припускаючи, що $n \to \infty$. Позначимо через $\boldsymbol{\lambda}$ довжину найбільшого часткового сегмента.

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k .$$

Якщо $\lambda \to 0$, то кількість часткових сегментів буде необмежено збільшуватись, а довжини усіх часткових сегментів будуть наближатися до нуля. Коли існує скінченна границя S площі ступінчастої фігури за умови, що $\lambda \to 0$, то ця границя вважається площею криволінійної трапеції.

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right) \Delta x_k .$$

Ця границя не повинна залежати від способу розбиття відрізка на часткові та від способу вибору проміжних точок.

Слід зауважити, що таким самим способом може бути розв'язано безліч задач геометричних, фізичних, хімічних тощо. У зв'язку з цим, розглянутий спосіб розв'язування задач виділений як математичне поняття, вже незалежне від певного геометричного чи фізичного змісту.

1.2. Поняття визначеного інтеграла

Нехай функція *f(x)* неперервна на сегменті [*a;b*].

1. Розіб'ємо сегмент [*a;b*] на $\boldsymbol{n}$ часткових сегментів точками розподілу $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b}$.
2. Довжини часткових сегментів будемо позначати через $\boldsymbol{\Delta x_k}$, де $\boldsymbol{k = 1; 2; \ldots; n}$.
3. Довільним чином у кожному частковому сегменті вибираємо проміжні точки $\boldsymbol{c_1, c_2, c_3, ..., c_n}$.
4. Складаємо суму S_n, яка називається ***n*-ю інтегральною сумою**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k .$$

Припустимо, що $n \to \infty$ і при цьому $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$.

5. Розбиття сегмента [*a; b*] на часткові, а також вибір проміжних точок може відбуватись тим чи іншим чином.

Якщо для кожної інтегральної суми S_n існує скінченна границя S за умови, що довжина λ найбільшого часткового сегменті наближається до нуля, то така границя називається **визначеним інтегралом Рімана** від функції *f(x)* на сегменті [*a; b*]:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx . \qquad (1.1)$$

Числа ***a*** та ***в*** називаються відповідно нижньою та верхньою границями або межами інтеграла.

Примітка*:* Якщо $\boldsymbol{f(x) = 1}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$$

1.3. Умови інтегровності функції

Визначення. Функція ***f(x),*** визначена на сегменті [*a;b*], називається **інтегровною на сегменті [*a;b*],** якщо існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Теорема 1. Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$, то вона інтегровна на сегменті $[a;\ b]$.

Зауваження. Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ інтегровна на сегменті $[a;b]$, то вона не обов'язково неперервна на сегменті $[a;b]$.

Теорема 2. Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ визначена та монотонна на сегменті $[a;b]$, то вона інтегровна на сегменті $[a;b]$.

Теорема 3. Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ обмежена на сегменті $[a;b]$ та має на ньому скінчену кількість точок розриву, то вона інтегровна на сегменті $[a;b]$.

Теорема 4. Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ інтегровна на сегменті $[a;b]$, то вона обмежена на сегменті $[a;b]$.

1.4. Найпростіші властивості визначеного інтеграла

Теорема 1. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох інтегровних функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Доведення

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (f_1(c_k) \pm f_2(c_k))\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f_1(c_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f_2(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Теорема 2. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Доведення

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} kf(c_k)\Delta x_k = k \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 3. Визначений інтеграл залежить від виду підінтегральної функції та меж інтегрування, а від того, якою буквою позначена змінна інтегрування, визначений інтеграл не залежить, тобто,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz. \tag{1.4}$$

Доведення

За визначенням визначений інтеграл – це число, значить, він не залежить від позначення змінної інтегрування.

Теорема 4. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то знак інтеграла зміниться на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Доведення

У процесі побудови інтегральної суми S_n ми виходили з умови, що $a < b$. Якщо ж припустити, що $a > b$, то це означає, що часткові сегменти у цьому випадку будуть визначатись за формулою:

$$\Delta x_k = x_{k-1} - x_k = -(x_k - x_{k-1}).$$

Отже, інтегральна сума у цьому випадку протилежна за знаком побудованій раніше інтегральній сумі, коли $a<b$.

Значить,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Теорема 5. Інтеграл, межі інтегрування у якому збігаються, дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Доведення

В інтегралі $\int_a^a f(x)\,dx$ межі інтегрування збігаються. Отже, при побудуванні інтегральної суми маємо:

$a - a = 0;$ $\Delta x_k = \dfrac{0}{n} = 0$, $S_n = f(c_k)0 = 0$, а значить, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Теорема 6. Для будь-яких чисел ***a, b, c*** є справедливою рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.7}$$

Доведення

1) Припустимо, що $a < c < b$ (рис. 1.2)

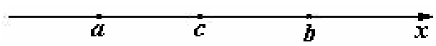

Рисунок 1.2

При побудові інтегральної суми вважалось, що границя інтегральної суми не залежить від того, яким чином сегмент $[a; b]$ розбивається на часткові сегменти. Отже, можна побудувати інтегральну суму так, щоб точка c увійшла до складу точок розподілу:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_i = c < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Тоді

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{i} f(c_k)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = S_n^{*} + S_n^{**}.$$

Інтегральна сума S_n побудована на сегменті $[a;b]$; S_n^{*} – на сегменті $[a;c]$; S_n^{**} – на сегменті $[c;b]$. Зробивши граничний перехід, дістанемо таку рівність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2) Припустимо, що $c < a < b$ (рис. 1.3).

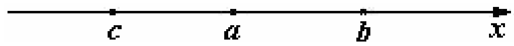

Рисунок 1.3

У відповідності з попереднім випадком виходить:

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx.$$

Звідси

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx.$$

Поміняввши місцями межі інтегрування в останньому інтегралі, дістанемо рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість теореми для випадка, коли $a < b < c$.

1.5. Теореми про оцінку визначеного інтеграла

Теорема 1. Якщо інтегровна на сегменті $[a;b]$ функція $\boldsymbol{f(x)}$ є знакосталою на цьому сегменті, то $\int_a^b f(x)dx$ є число того самого знаку, що і $f(x)$.

Доведення

Нехай $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ на $[a;b]$.Тоді

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \geq 0,$$

як сума невід’ємних чисел. Користуючись правилами граничного переходу в нерівностях, дістанемо шуканий результат:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \geq 0.$$

Теорема 2. Якщо інтегровні на сегменті $[a;b]$ функції $\boldsymbol{f(x)}$ та $\boldsymbol{\varphi(x)}$ задовільняють умову

$$0 \le \varphi(x) \le f(x),$$

то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx,$$

тобто нерівність можна почленно інтегрувати.

Доведення

Розглянемо допоміжну функцію $\boldsymbol{\psi(x) = f(x) - \varphi(x) \ge 0}$. З теореми 1 випливає, що

$$\int_a^b \psi(x)dx \ge 0$$

або

$$\int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)dx \ge 0.$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \ge 0,$$

звідки

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорема 3. Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ інтегровна на сегменті $[a;b]$, то її модуль є також інтегровною функцією і при цьому є справедливою нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1.8}$$

Доведення

Із властивості модуля виходить:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|.$$

Нерівності, як відомо, можна почленно інтегрувати.

Тому
$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Це нерівність типу $-\ell \le m \le \ell$, вона еквівалентна нерівності $|m| \le \ell$. Стосовно нашого випадку виходить, що

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Теорема 4. Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а $\boldsymbol{m}$ та $\boldsymbol{M}$ **–** відповідно її найменше та найбільше значення на сегменті $[a;b]$, то є справедливою нерівність

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{1.9}$$

Доведення

За умовою $\boldsymbol{m} \le \boldsymbol{f(x)} \le \boldsymbol{M}$ на сегменті $[a;b]$. Відповідно до теореми 2 п. 1.4 та теореми 2 п. 1.5 маємо:

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\int_a^b dx\,.$$

Зважаючи на те, що $\int_a^b dx = b-a$, маємо таку оцінку інтеграла:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Ця теорема називається **першою теоремою про середнє значення визначеного інтеграла**.

Теорема 5. Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$, то на цьому сегменті існує хоч одна така точка $\boldsymbol{x = c,}$ що

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c). \tag{1.10}$$

Доведення

З теореми 4 виходить, що

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Усі частини цієї нерівності поділимо на $b-a>0.$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M\,.$$

Позначимо $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$, де $m \le \mu \le M$.

З властивості функцій, неперервних на сегменті, виходить, що на сегменті $[a;b]$ існує хоч одна така точка $c=x$, що $\boldsymbol{f(c) = \mu}$**.** Значить,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c). \tag{1.11}$$

Помножимо обидві частини рівності на $b-a$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Ця теорема називається **другою теоремою про середнє значення визначеного інтеграла**.

Число $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ називається **середнім значенням функції на сегменті [*a; b*].**

1.6. Визначений інтеграл зі змінною верхньою границею

Теорема 1 (про похідну від інтеграла зі змінною верхньою границею). Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті [*a;b*], тоді функція $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ диференційовна у будь-якій точці сегмента [*a;b*], до того ж є справедливою рівність

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Доведення

Належить довести рівність $\Phi'(x)=f(x)$.

Використовуючи означення похідної та теорему 6 п. 1.4, маємо

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int\limits_a^{x} f(t)\,dt\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_a^{x} f(t)\,dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int\limits_a^{x} f(t)\,dt\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Далі,

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right).$$

До інтеграла застосуємо теорему 5 п. 1.6**,** тобто теорему 2 про середнє значення (рис. 1.4).

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c),\ \text{де } \boldsymbol{c}\in(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x}+\Delta x)$$

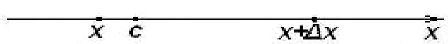

Рисунок 1.4

Коли $\boldsymbol{\Delta x\to 0}$, то $(\boldsymbol{x}+\Delta x)\to\boldsymbol{x}$, а також $\boldsymbol{c\to x}$. Тоді виходить, що $\Phi'(x)=f(x)$, $\boldsymbol{x}$ ***є*** [*a;*b].

Отриманий результат, до речі, говорить про те, що функція $\boldsymbol{\Phi(x)}$ по відношенню до функції $\boldsymbol{f(x)}$ є первісною. Отже, інтеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ зі змінною верхньою границею $\boldsymbol{x}$ ***є*** [*a*;b] є первісною для функції $\boldsymbol{f(x)}$ на сегменті [*a;b*].

1.7. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема. Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а $\boldsymbol{F(x)}$ – одна з первісних функції $\boldsymbol{f(x)}$, то є справедливою рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (1.12)$$

Доведення

За умовою $\boldsymbol{F(x)}$ – одна з первісних функції $\boldsymbol{f(x)}$, а з теореми 1 виходить, що $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ також первісною функції $\boldsymbol{f(x)}$. Оскільки будь-які дві первісні однієї функції відрізняються лише на сталу, то, виходить, що

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

або

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c, \quad \text{де } x \in [a;b].$$

Така рівність є справедливою коли $\boldsymbol{x = a}$.

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c,$$

звідки

$$F(a) + c = 0 \text{ та } c = -F(a).$$

Тепер маємо рівність

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad \text{де } x \in [a;b].$$

Нехай $x = b$, тоді

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Змінимо для зручності $\boldsymbol{t}$ на $\boldsymbol{x}$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Маємо формулу, яка називається **формулою Ньютона-Лейбніца**.

1.8. Методи обчислення визначеного інтеграла

1.8.1. Заміна змінної інтегрування у визначеному інтегралі

Теорема 3. Нехай функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$. Якщо в інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ покласти, що $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$, де $\boldsymbol{\varphi(t)}$ задовольняє такі умови:

1) $\boldsymbol{\varphi(t)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$;

2) коли $\boldsymbol{t}$ змінюється від $\boldsymbol{\alpha}$ до $\boldsymbol{\beta}$, то $\boldsymbol{\varphi(t)}$ змінюється від $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$ таким чином, що $\boldsymbol{\varphi(\alpha) = a}$, $\boldsymbol{\varphi(\beta) = b}$;
3) $\boldsymbol{\varphi(t)}$ диференційовна, а її похідна $\varphi'(t)$ неперервна на сегменті $[\alpha;\beta]$.

Тоді є справедливою формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,. \tag{1.13}$$

Доведення

Нехай $\boldsymbol{F(x)}$ – одна з первісних функції $\boldsymbol{f(x)}$ на $[a;b]$.
Тоді

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{*}$$

Тепер розглянемо допоміжну функцію

$$\Phi(t) = F(\varphi(t)),\text{ де } t \in [\alpha;\beta].$$

Знайдемо $\Phi'(t)$, користуючись теоремою про похідну складної функції.

$$\Phi'(t) = \left(F(\varphi(t))\right)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Оскільки $F'(x) = f(x)$, то $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$.
Тоді

$$\Phi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

Остання рівність означає, що функція $\boldsymbol{\Phi(t)}$ на сегменті $[\alpha;\beta]$ є первісною для функції $\left(f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\right)$. З цього виходить, що

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha);$$

$$\Phi(\beta) = F(\varphi(\beta)) = F(b);\ \Phi(\alpha) = F(\varphi(\alpha)) = F(a).$$

Значить,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{**}$$

Отже, порівнюючи рівності (*) та (**), впевнюємось у справедливості рівності

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Отримана формула називається формулою **заміни змінної інтегрування у визначеному інтегралі.**

Теорема 4. Якщо парна функція $\boldsymbol{f(x)}$ інтегровна на симетричному відносно початку координат проміжку $[-a;a]$, то є справедливим таке твердження

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,. \tag{1.14}$$

Доведення

Згідно з формулою (1.6)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Розглянемо окремо $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ та зробимо заміну змінної інтегрування.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c|c} x=-t & x & t \\ & 0 & 0 \\ dx=-dt & -a & a \end{array}\right] = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt\,.$$

За умовою *f*(***-t***) ***= f***(***t***)***,*** оскільки функція парна. Згідно з властивістю *4* у отриманому інтегралі поміняємо межі інтегрування. Звідси виходить, що

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

або

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Тоді

$$\int_{a}^{-a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Теорема 5. Якщо непарна функція ***f***(***x***) інтегровна на симетричному відносно початку координат проміжку [*-a;a*], то є справедливим таке твердження

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{1.15}$$

Доведення

Згідно з властивістю *6*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Розглянемо окремо $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ та зробимо заміну змінної інтегрування.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c|c} x=-t & x & t \\ & 0 & 0 \\ dx=-dt & -a & a \end{array}\right] = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt\,.$$

За умовою ***f***(***-t***) ***= -f***(***t***)***,*** тому що функція *f*(*t*) непарна.

Тоді $$-\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt = -\int_0^a f(x)\,dx.$$

Остаточно маємо
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$
або
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

1.8.2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 6. Якщо функції $U = U(x)$ та $V = V(x)$
1) визначені та неперервні на сегменті $[a;b]$;
2) диференційовні на сегменті $[a;b]$, а їх похідні $U' = U'(x)$ та $V' = V'(x)$ є неперервними функціями на сегменті $[a;b]$, то є справедливою рівність
$$\int_a^b U(x)\,dV = U(x)\,V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\,dU. \qquad (1.16)$$

Доведення

У відповідності з умовою функції $U(x)$ та $V(x)$ диференційовні, отже,
$$\big(U(x)V(x)\big)' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x). \qquad (*)$$

Обидві частини рівності (*) проінтегруємо на проміжку $[a;b]$ по змінній $\boldsymbol{x}$
$$\int_a^b \big(U(x)V(x)\big)'\,dx = \int_a^b U'(x)V(x)\,dx + \int_a^b U(x)V'(x)dx.$$

Первісною функції $\big(U(x)V(x)\big)'$ є функція $U(x)V(x)$, отже,
$$\int_a^b \big(U(x)V(x)\big)'\,dx = U(x)V(x)\Big|_a^b = U(b)V(b) - U(a)V(a).$$

Зважаючи на те, що $U'(x)dx = dU$, $V'(x)dx = dV$, дістанемо таку рівність:
$$U(x)V(x)\Big|_a^b = \int_a^b V(x)\,dU + \int_a^b U(x)\,dV$$
або
$$\int_a^b U(x)dV = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\,dU.$$

Ця формула називається **формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі.**

1.8.3. Приклади

Приклад 1.1. На сегменті [0;1] задано функцію $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 8}$. Скласти інтегральну суму S_n для $\boldsymbol{f(x)}$ на сегменті [0;1], коли $\boldsymbol{n = 5}$ та $\boldsymbol{n = 10}$. Обчислити інтеграл за допомогою формули Ньютона-Лейбніца. Результати порівняти.

Розв'язання

1) Нехай $\boldsymbol{n = 5}$. Тоді $\Delta x_k = \dfrac{1-0}{5} = 0{,}2$. Зручно скласти таблицю. Домовимось проміжні точки вибирати посередині часткових сегментів.

i	x_k	c_k	c_k^2	$3c_k^2 + 8$	$f(c_k)\ \Delta x_k$
0	0				
1	0,2	0,1	0,01	8,03	1,606
2	0,4	0,3	0,09	8,28	1,654
3	0,6	0,5	0,25	8,75	1,75
4	0,8	0,7	0,49	9,47	1,894
5	1	0,9	0,81	10,43	2,086

$$S_5 = \sum_{k=1}^{5} f(c_k)\Delta x_k = 8{,}986.$$

2) Тепер $\boldsymbol{n = 10}$. Тоді $\Delta x_k = \dfrac{1-0}{10} = 0{,}1$. Знов складемо таблицю.

i	x_k	c_k	c_k^2	$3c_k^2+8$	$f(c_k)\ \Delta x_k$
0	0				
1	0,1	0,05	0,0025	8,0075	0,80075
2	0,2	0,15	0,0225	8,0675	0,80675
3	0,3	0,25	0,0625	8,1875	0,81875
4	0,4	0,35	0,1225	8,3675	0,83675
5	0,5	0,45	0,2025	8,6075	0,86075
6	0,6	0,55	0,3025	8,9075	0,89075
7	0,7	0,65	0,4225	9,2675	0,92675
8	0,8	0,75	0,5627	9,6875	0,96875
9	0,9	0,85	0,7225	10,1675	1,01675
10	10	0,95	0,9025	10,7075	1,07075

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} f(c_k)\Delta x_k = 8{,}9975.$$

3) Безпосередньо обчислимо інтеграл, користуючись формулою **Ньютона-Лейбніца.**

$$\int_0^1 \left(3x^2+8\right)dx = \int_0^1 \left(3x^2\right)dx + \int_0^1 8\,dx = 3\int_0^1 x^2dx + 8\int_0^1 dx =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + 8\cdot x\Big|_0^1 = \left(1^3-0^3\right) + 8\left(1-0\right) = 1+8 = 9$$

Ми бачимо, що $S_5 \approx \int_0^1 \left(3x^2+8\right)dx$. Похибка $\Delta = 0{,}014$. $S_{10} \approx \int_0^1 \left(3x^2+8\right)dx$.

Похибка $\Delta = 0{,}0025$.

Отже, чим більше ***n,*** тим точніше інтегральна сума визначає інтеграл.

Відповідь: 1) $S_5 \approx 8{,}986$; 2) $S_{10} \approx 8{,}9975$; 3) 9.

Приклад 1.2. Не обчислюючи інтеграл, визначити, яку з нерівностей він задовольняє: $I \ge 0$ чи $I < 0$?

$$I = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left(998\sin^{27}x + 11^{52}\cos^{129}x - 18\right)dx.$$

Розв'язання

Оскільки інтеграл побудований на сегменті $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$, а на цьому сегменті функції ***sin x*** та ***cos x*** набувають лише від'ємних значень і у не парних степенях ці значення залишаються від'ємними, то $998\sin^{27}x + 11^{52}\cos^{129}x - 18 < 0$, а значить, $I < 0$ (п. 1.5; теорема 1).

Відповідь: $I < 0$

Приклад 1.3. Не обчислюючи інтеграли $\boldsymbol{I_1}$ та $\boldsymbol{I_2}$, порівняти їх.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{129} x dx \;,\; I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{29} x dx.$$

Розв'язання

На сегменті $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ є справедливою нерівність $0 \le \sin x \le \frac{1}{2}$.

Отже,

$$\sin^{129}x \le \sin^{29}x.$$

Тоді $I_1 \le I_2$ (п. 1.5; теорема **2**).

Відповідь: $I_1 \le I_2$.

Приклад 1.4. Оцінити інтеграл I.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x^2 + 2\sin x\right)dx.$$

Розв'язання

Підінтегральна функція має вигляд $f(x) = 4x^2 + 2\sin x$.

Це неперервна та зростаюча функція на сегменті $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Отже, вона обмежена на цьому сегменті.

$$m=0;\ M=\pi^2+2;\ b-a=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Спираючись на теорему *4* з п.1.5, можна стверджувати, що

$$0\le I\le\left(\pi^2+2\right)\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $0\le I\le\left(\pi^2+2\right)\cdot\frac{\pi}{2}$.

Приклад 1.5. Обчислити інтеграл:

$$I=\int_2^3\left(5x^2-4x+11\right)dx.$$

Розв'язання

$$I=\int_2^3\left(5x^2-4x+11\right)dx=5\int_2^3 x^2dx-4\int_2^3 xdx+11\int_2^3 dx=$$

$$=\left(5\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+11x\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{5}{3}\left(3^3-2^3\right)-2\left(3^2-2^2\right)+11(3-2)=\frac{5}{3}\cdot19-2\cdot5+11\cdot1=\frac{98}{3}=32,(6).$$

Відповідь: $I=32{,}6$.

Приклад 1.6. Обчислити інтеграл:

$$\int_{-2}^{2}\left(9x^5-3x^3+8x\right)dx.$$

Розв'язання

Під знаком інтеграла знаходиться непарна функція, а межі інтегрування симетричні відносно початку координат, отже,

$$I=\int_{-2}^{2}\left(9x^5-3x^3+8x\right)dx=0.$$

Відповідь: $I=0$.

Приклад 1.7. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^1(3x+1)^7dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)dx$; 3) $\int_1^3\frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin\frac{x}{4}}dx$.

Розв'язання

При обчислені цих інтегралів зручно користуватись такою властивістю невизначених інтегралів:

$$\int f(x)dx=F(x)+c\Rightarrow\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c,$$

де *a, b,c* – дійсні числа.

1) $\int\limits_0^1 (3x+1)^7 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^8}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}\left((3\cdot1+1)^8-(3\cdot0+1)^8\right)=\frac{1}{24}\left(4^8-1^8\right)=\frac{65535}{24}=$
$= 2730{,}625.$

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)dx = \frac{-1}{5}\cdot\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-0\right)\right)=$

$$=\frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{5}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

3) $\int\limits_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}dx = \int\limits_1^3 (2x-1)^{-\frac{4}{5}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}\Bigg|_1^3 = \frac{5}{2}\left((2\cdot3-1)^{\frac{1}{5}}-(2\cdot1-1)^{\frac{1}{5}}\right)=\frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{5}-1\right).$

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin\frac{x}{4}}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right|dx.$

У процесі перетворення були використані формули зведення та формули зниження степеня:

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \qquad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Отже,

$$I=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right|dx.$$

Кут $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)$ належить до I чверті і, значить, синус набуває лише додатних значень, отже,

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right|=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right).$$

$$I=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)dx=-\sqrt{2}\cdot(-8)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{32}\right)-\cos\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{32}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{32}-8.$$

Відповідь: 1) $I = 2730{,}625$; 2) $I=\frac{\sqrt{2}}{10}$; 3) $I=\frac{5}{2}(\sqrt[5]{5}-1)$;

4) $I=8\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{32}-8$

Приклад 1.8. Обчислити інтеграли:

1) $I = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{\ln^8 x}{x} dx$; 2) $I = \int\limits_{2}^{\sqrt{23}} x\sqrt[3]{x^2+4}dx$;

3) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{x + \operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx$; 4) $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x \cos x dx$.

Розв'язання

При розв'язанні цих прикладів будемо користуватись методом заміни змінної інтегрування. Необхідно звернути увагу на певну особливість цього методу стосовно визначеного інтеграла. Зробивши заміну змінної інтегрування, обов'язково слід знайти межі інтегрування по новій змінній.

1) $$I = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = t; \\ \frac{1}{x}dx = dt; \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline e^2 & 2 \\ \hline e & 1 \\ \hline \end{array} \right] = \int\limits_{1}^{2} t^8 dt = \left.\frac{t^9}{9}\right|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(2^9 - 1\right) = \frac{511}{9} = 56,(8)$$

2) $$I = \int\limits_{2}^{\sqrt{23}} x\sqrt[3]{x^2+4}dx = \left[\begin{array}{l} x^2+4 = t^3; \\ 2xdx = 3t^2dt; \\ xdx = \frac{3}{2}t^2dt; \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline \sqrt{23} & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \right] = \frac{3}{2}\int\limits_{2}^{3} t \cdot t^2 dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_{2}^{2} t^3 dt = \frac{3}{2} \cdot \left.\frac{t^4}{4}\right|_2^3 = \frac{3}{8}(3^4 - 2^4) = \frac{3}{8}(81 - 16) = \frac{195}{8} = 24{,}375.$$

3) $$I = \int\limits_{0}^{1} \frac{x + \operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx.$$

Розглянемо окремо кожний з інтегралів.

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 2;$$

Була використана формула:

$$\int \frac{U'(x)}{U(x)} dx = \ln\left|U(x)\right|.$$

$$I=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}dx=\left[\begin{array}{l|c|c} \operatorname{arctgx}=t; & x & t \\ & 1 & \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{1+x^2}dx=dt; & 0 & 0 \end{array}\right]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^7 dt=\frac{t^8}{8}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^8}{65536}-0\right)=\frac{1}{524288}\pi^8=0,0000019\pi^8.$$

Остаточно, I= $\frac{1}{2}\ln 2+0,0000019\cdot\pi^8$.

4) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x\cos x dx=\left[\begin{array}{l|c|c} \sin x=t; & x & t \\ & \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2} \\ \cos x dx=dt; & 0 & 0 \end{array}\right]=\int_0^{\frac{1}{2}} t^5 dt=$$

$$=\frac{t^6}{6}=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^6-0\right)=\frac{1}{384}=0,00026.$$

Відповідь: 1) I = 56,8; 2) I = 24,375; 3) $I=\frac{1}{2}\ln 2+0,0000019\pi^8$;

4) I = 0,00026.

Приклад 1.9. Обчислити інтеграли:

1) $I=\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx;$ 2) $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{8}\sin^4\frac{x}{8}dx$;

3) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos^2 x+25\sin x\cos x+1}dx$; 4) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4+5\cos x}dx$.

Розв'язання

1) $$I=\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx=\left[\begin{array}{l|c|c} \frac{1}{x}=t; & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{t} \\ & \frac{3}{\pi} & \frac{\pi}{3} \\ -\frac{1}{x^2}dx=dt; & \frac{2}{\pi} & \frac{\pi}{2} \end{array}\right]=$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t dt=-\sin t\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}=-(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2})=-(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $$I=\int_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{8}\sin^4\frac{x}{8}dx=\int_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{8}\left(\sin^2\frac{x}{8}\right)^2dx.$$

Використовуємо формули зниження степеня:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

$$I=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\left(1+\cos\frac{x}{4}\right)\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)^2dx=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{x}{4}\right)\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)dx.$$

Використовуємо формулу:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha.$$

Тоді

$$I=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)dx=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx-\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}dx\ .$$

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi-\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}dx=\left[\begin{array}{l|c|c} \sin\frac{x}{4}=t; & x & t \\ & \pi & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}dx=dt; & 0 & 0 \end{array}\right]=$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}t^2dt=\frac{4t^3}{3}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Остаточно маємо:

$$I=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3+\sqrt{2}}{3}\right).$$

3) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos^2x+25\sin x\cos x+1}dx\,.$$

Підінтегральна функція це дріб, до складу якого входять тригонометричні функції, до того ж сума показників степеня при синусах та косинусах у кожному з доданків одна й та сама:

$$\cos^2x=\cos^2x\cdot\sin^0x;\qquad \sin x\cos x=\sin^1x\cos^1x;$$

$$(2+0=2);\qquad (1+1=2).$$

У таких випадках добре діє заміна $\mathrm{tg}x = t$. Для того, щоб її було зручно зробити, спочатку зробимо перетворення підінтегральної функції, виділяючи у знаменнику множник $\cos^2 x$.

$$\frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{25\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{4 + 25\,\mathrm{tg}\,x + 1 + tg^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{tg^2 x + 25tgx + 5};$$

Була використана формула $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{tg^2 x + 25tgx + 5} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l|c|c|} tgx = t; & x & t \\ \hline & \frac{\pi}{4} & 1 \\ \hline \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt; & 0 & 0 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 25t + 5} dt.$$

У знаменнику квадратний тричлен, де a = 1, b = 25. Робимо відповідну для цього випадку заміну: $t + \frac{b}{2a} = z$.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 25t + 5} dt = \left[\begin{array}{l|c|c|} t + \frac{25}{2} = z; & t & z \\ \hline t = z - \frac{25}{2}; & 1 & \frac{27}{2} \\ \hline dt = dz; & 0 & \frac{25}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}} \frac{1}{z^2 - 25z + \frac{625}{4} + 25z - \frac{625}{2} + 5} dz = \int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}} \frac{1}{z^2 - \frac{605}{4}} dz =$$

$$= \int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}} \frac{1}{z^2 - \left(\sqrt{\frac{605}{4}}\right)^2} dz = \left(\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{605}} \ln\left| \frac{z - \frac{\sqrt{605}}{2}}{z + \frac{\sqrt{605}}{2}} \right| \right) \Bigg|_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}} = \frac{1}{\sqrt{605}} \left(\ln\left| \frac{\frac{27 - \sqrt{605}}{2}}{\frac{27 + \sqrt{605}}{2}} \right| - \right.$$

$$-\ln\left|\frac{\frac{25-\sqrt{605}}{2}}{\frac{25+\sqrt{605}}{2}}\right|\Bigg) == \frac{1}{605}\ln\left|\frac{27-\sqrt{605}}{27+\sqrt{605}}\cdot\frac{25+\sqrt{605}}{25-\sqrt{605}}\right| = \frac{1}{605}\ln\frac{183+7\sqrt{605}}{62}\approx$$

$$\approx 0,002\ln 5,73 = 0,0029.$$

4) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4+5\cos x}dx.$$

Під інтегралом знову дріб, до складу якого входять тригонометричні функції. Зробимо універсальну тригонометричну підстановку.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4+5\cos x}dx=\left[\begin{array}{l|c|c} tg\frac{x}{2}=t; & x & t \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt; & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 & 0 \end{array}\right]=\int_0^1\frac{1}{4+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{4+4t^2+5-5t^2}dt=2\int_0^1\frac{1}{9-t^2}dt=2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{3}\ln 2.$$

Відповідь: 1) $I=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $I=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $I=0,0029$;

4) $I=\frac{1}{3}\ln 2$.

Приклад 1.10. Обчислити інтеграли:

1) $I=\int_0^4 x\sqrt{16-x^2}dx;$ 2) $I=\int_{\sqrt{7}}^4\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}dx;$

3) $I=\int_2^4\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx,$ 4) $I=\int_{\frac{4}{\sqrt{3}}}^4\frac{\sqrt{16+x^2}}{x^2}dx.$

Розв'язання

1) $$I=\int_0^4 x\sqrt{16-x^2}dx=\left[\begin{array}{l|c|c} 16-x^2=t^2; & x & y \\ -2xdx=2tdt; & 4 & 0 \\ & 0 & 4 \end{array}\right]=$$

$$=-\int_4^0 t^2dt=-\frac{1}{3}t^3\Big|_4^0=-\frac{1}{3}(0-64)=64.$$

2) $$I=\int_{\sqrt7}^{4}\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}dx=\int_{\sqrt7}^{4}\frac{x\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx\left[\begin{array}{ll}16-x^2=t^2; & \begin{array}{|c|c|}\hline x & y\\ \hline 4 & 0\\ \hline \sqrt7 & 3\\ \hline\end{array}\\ -2xdx=2tdt; & \end{array}\right]=$$

$$=-\int_3^0\frac{t^2}{16-t^2}dt=\int_3^0\frac{-t^2}{16-t^2}dt=\int_3^0\frac{16-t^2-16}{16-t^2}dt=\int_3^0\frac{16-t^2}{16-t^2}dt-16\int_3^0\frac{1}{16-t^2}dt=$$

$$=\int_3^0 dt-\left(16\cdot\frac{1}{2\cdot4}\ln\left|\frac{4-t}{4+t}\right|\right)\Bigg|_3^0=t\big|_3^0-2\ln\left(\ln1-\ln\frac{1}{7}\right)=-3-2\ln7.$$

3) $$I=\int_2^4\frac{x\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx\left[\begin{array}{ll}x=4\sin t; & \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline 4 & \frac{\pi}{2}\\ \hline 2 & \frac{\pi}{6}\\ \hline\end{array}\\ dx=4\cos tdt; & \end{array}\right]=$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{16(1-\sin^2t)}}{16\sin^2t}\cdot4\cos tdt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2t}{\sin^2t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2t}{\sin^2t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2t}dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dt=$$

$$=(-\operatorname{ctg}t-t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(0+\sqrt3-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt3-\frac{\pi}{3}.$$

4) $$I=\int_0^4\frac{\sqrt{16+x^2}}{x^2}dx=\left[\begin{array}{ll}x=4tgt; & \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline 4 & \frac{\pi}{4}\\ \hline \frac{4}{\sqrt3} & \frac{\pi}{6}\\ \hline\end{array}\\ dx=\frac{4}{\cos^2t}dt; & \end{array}\right]=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{16+16tg^2t}}{16tg^2t}\times$$

$$\times\frac{4}{\cos^2t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+tg^2t}}{tg^2t\cdot\cos^2t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1\cdot\cos^2t}{\cos t\cdot\sin^2t\cdot\cos^2t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin^2t\cdot\cos^2t}dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin^2 t\cdot(1-\sin^2 t)}dt=\left[\begin{array}{l|c|c|}\sin t=z; & t & z\\ & \frac{\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos t dt=dz; & \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2(1-z^2)}dz=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2(1-z)(1+z)}dz.$$

Під знаком інтеграла вийшов раціональний дріб, його слід розкласти на найпростіші.

$$\frac{1}{z^2(1-z)(1+z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{1-z}+\frac{D}{1+z}=\frac{Az(1-z^2)+B(1-z^2)+Cz^2(1+z)+Dz^2(1-z)}{z^2(1-z)(1+z)}.$$

Порівняємо чисельники.

$$1=Az(1-z^2)+B(1-z^2)+Cz^2(1+z)+Dz^2(1-z).$$

Невизначені коефіцієнти будемо шукати методом частинних значень

$$z=0\Rightarrow 1=B\Rightarrow B=1;$$

$$z=1\Rightarrow 1=2C\Rightarrow C=\frac{1}{2};$$

$$z=-1\Rightarrow 1=2D\Rightarrow D=\frac{1}{2};$$

$$z=2\Rightarrow 1=-6A-3B+12C-4D\Rightarrow 1=-6A-3+6-2\Rightarrow A=0.$$

Коефіцієнти знайдені, переходимо до інтегрування.

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-z}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1+z}dz=\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\ln|1-z|+\frac{1}{2}\ln|1+z|\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-2\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-\ln\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left|1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-\ln\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\left(2-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}\right|=$$

$$=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})}\cdot\frac{2}{3}\right).$$

Відповідь. 1) $I=64$; 2) $I=-3-2\ln 7$; 3) $I=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$;

4) $I=2-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{3}\right)$.

Приклад 1.11. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 dx;$ 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx;$

3) $\int\limits_0^1 (2x+5)e^{x^2+5x+6}dx;$ 4) $\int\limits_1^2 (2x+5)e^{5x+6}dx.$

Розв'язання

1) $$I=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 dx=\left[\begin{matrix} x^2=t; \\ \\ 2xdx=dt; \end{matrix}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \frac{\pi}{2} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt=-\frac{1}{2}\cos t\left.\vphantom{\int\limits_0^1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{1}{2}.$$

2) $$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$$

Інтеграли типу

$$\int P_n(x)\sin(ax+b)dx; \quad \int P_n(x)\cos(ax+b)dx; \quad \int P_n(x)\cdot k^{ax+b}dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, можуть бути розв'язані методом інтегрування частинами. При цьому через u слід позначати многочлен $P_n(x)$. Отже,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=\begin{bmatrix} u=x; & du=dx; \\ \sin x dx=dv; & v=-\cos x. \end{bmatrix}=-x\cos x\left.\vphantom{\int\limits_0^1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-0\cos 0\right)+\sin x\left.\vphantom{\int\limits_0^1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

3) $$\int\limits_0^1 (2x+5)e^{x^2+5x+6}dx=\left[\begin{matrix} x^2+5x+6=t; \\ \\ (2x+5)dx=dt; \end{matrix}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline 1 & 12 \\ \hline 0 & 6 \\ \hline \end{array}\right]=\int\limits_6^{12} e^t dt=e^t\left.\vphantom{\int\limits_0^1}\right|_6^{12}=e^{12}-e^6.$$

4) $$\int_1^2 (2x+5)e^{5x+6}dx \left[\begin{array}{l} 2x+5=U; \quad dU=2dx \\ \\ e^{5x+6}dx=dV; \;\; V=\frac{1}{5}e^{5x+6} \end{array}\right] = \frac{1}{5}(2x+5)e^{5x+6}\Bigg|_1^2 -$$

$$-\frac{2}{5}\int_1^2 e^{5x+6}dx = \frac{1}{5}\left(9e^{16}-7e^{11}\right)-\frac{2}{25}e^{5x+6}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{5}\left(9e^{16}-7e^{11}\right)-\frac{2}{25}\left(e^{16}-e^{11}\right).$$

Відповідь. 1) $I=\frac{1}{2}$; 2) $I=1$; 3) $I=e^{12}-e^{6}$;

4) $I=\frac{1}{5}(9e^{16}-7e^{11})-\frac{2}{25}(e^{16}-e^{11})$.

Зауваження. Проаналізуйте методи розв'язання прикладів. Порівняйте умови прикладів 1) та 2), а також прикладів 3) та 4).

На перший погляд вони здаються схожими, але насправді ці приклади принципово відрізняються. Інтегрування частинами у випадках 1) та 3) на відміну від випадків 2) та 4) неможливе, тому, що коли $dv=\sin x^2 dx$ або $dv=e^{x^2+5x+6}dx$, ми не зможемо знайти v.

Приклад 1.12. Обчислити інтеграли:

1) $I=\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(arctg\,3x)^8}{9+x^2}dx$; 2) $I=\int_0^{\frac{1}{3}} x\,\mathrm{arctg}\,3x\,dx$;

3) $I=\int_1^{e} \frac{1}{x}\ln x^{10}dx$; 4) $I=\int_1^{e}(5x^3-4x^2+8x)\ln x^{10}dx$.

Розв'язання

1) $$I=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{(\mathrm{arctg}3x)^8}{9+x^2}dx = \left[\begin{array}{l|c|c} & x & t \\ \mathrm{arctg}\,3x=t; & \frac{1}{3} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{3}{1+9x^2}dx=dt; & 0 & 0 \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^8 dt =$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^9}{9}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{27}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^9.$$

2) $I=\int\limits_0^{\frac{1}{3}} x\operatorname{arctg}3x dx.$

Слід нагадати, що методом інтегрування частинами можуть бути знайдені такі інтеграли:

1) $\int P_n(x)\arcsin(ax)dx;$ 3) $\int P_n(x)\operatorname{arctg}(ax)dx;$ 5) $\int P_n(x)\ln x dx,$

2) $\int P_n(x)\arccos(ax)dx;$ 4) $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}(ax)dx;$

при цьому через u в таких інтегралах позначають обернені тригонометричні чи логарифмічні функції. Отже інтеграли п. 2) та 4) можуть бути розв'язані методом інтегрування частинами.

$$I=\int\limits_0^{\frac{1}{3}} x\cdot\operatorname{arctg}3x dx=\left[\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}3x; & du=\dfrac{3}{1+9x^2}dx; \\ dv=xdx; & \mathrm{v}=\dfrac{1}{2}x^2. \end{array}\right]=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}3x\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}-$$

$$-\frac{3}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\frac{x^2}{1+9x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\operatorname{arctg}1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\frac{9x^2}{1+9x^2}dx=\frac{1}{18}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\frac{1+9x^2-1}{1+9x^2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\frac{(1+9x^2)-1}{1+9x^2}dx=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{1+9x^2}\right)dx=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{6}x\Big|_0^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\frac{1}{9}+x^2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{6}x\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{54}\cdot3\operatorname{arctg}3x\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}==\frac{\pi}{72}-\frac{1}{18}+\frac{1}{18}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{18}+\frac{\pi}{72}=-\frac{1}{18}+\frac{\pi}{36}.$$

3) $$\int\limits_1^e\frac{1}{x}\ln x^{10}dx=10\int\limits_1^e\frac{1}{x}\ln xdx=\left[\begin{array}{l|c|c} \ln x=t; & x & t \\ & e & 1 \\ \dfrac{1}{x}dx=dt. & 1 & 0 \end{array}\right]=10\int\limits_0^1 tdt=10\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1=5$$

4) $$\int\limits_1^e(5x^3-4x^2+8x)\ln x^{10}dx=10\int\limits_1^e(5x^3-4x^2+8x)\ln xdx=\left[\begin{array}{l} u=\ln x; \\ dv=(5x^3-4x^2+8x)dx; \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} du=\dfrac{1}{x}dx; \\ v=\dfrac{5}{4}x^4-\dfrac{4}{3}x^3+4x^2. \end{array}\right]=10\left(\frac{5}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2\right)\ln x\Bigg|_1^e=\int\limits_1^e\left(\frac{5}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2\right)\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=10\left(\frac{5}{4}e^4-\frac{4}{3}e^3+4e^2\right)-\int\limits_1^e\left(\frac{5}{4}x^3-\frac{4}{3}x^2+4x\right)dx=10\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{4}{3}e+4\right)\cdot e^2-$$

$$-\left(\frac{5}{16}x^4-\frac{4}{9}x^3+2x^2\right)\Bigg|_1^e=10\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{4}{3}e+4\right)\cdot e^2-\left(\frac{5}{16}e^2-\frac{4}{3}e+2\right)\cdot e^2+\frac{269}{144}=$$

$$=\frac{269}{144}+\left(\frac{195}{16}e^2-12e+38\right)e^2.$$

Відповідь. 1) $I=\frac{1}{27}\left(\frac{\pi}{4}\right)^9$; 2) $I=\frac{\pi}{36}-\frac{1}{18}$; 3) $I=5$;

4) $I=\frac{269}{144}+\left(\frac{195}{16}e^2-12e+38\right)e^2$.

Приклад 1.13.

1) $I=\int_0^1 (x^2+4x+1)2^x\,dx$;

2) $I=\int_0^1 e^{2x}\sin 3x\,dx$;

3) $I=\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$;

4) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

Розв'язання

1) $$I=\int_0^1\left(x^2+4x+1\right)\cdot 2^x\,dx=\left[\begin{array}{ll} u=x^2+4x+1; & du=(2x+4)dx; \\ dv=2^x dx; & v=\frac{1}{\ln 2}2^x. \end{array}\right]=$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}\cdot\left(x^2+4x+1\right)\Bigg|_0^1-\frac{2}{\ln 2}\int_0^1(x+2)\cdot 2^x\,dx.$$

Розглянемо окремо $\int_0^1 (x+2)2^x dx$.

$$\int_0^1(x+2)\cdot 2^x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x+2;\ du=dx; \\ dv=2^x dx;\ v=\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x. \end{array}\right]=\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x\cdot(x+2)\Bigg|_0^1-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 2^x\,dx=$$

$$=\frac{(6-2)}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}\cdot 2^x\Bigg|_0^1=\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}(2-1)==\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}.$$

Остаточно маємо:

$$I=\frac{1}{\ln 2}\cdot(12-1)-\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}\right)=\frac{11}{\ln 2}-\frac{8}{\ln^2 2}+\frac{2}{\ln^3 2}.$$

2) $$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x\,dx=\left[\begin{array}{ll} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin 3x\,dx; & v=-\frac{1}{3}\cos 3x. \end{array}\right]=-\frac{1}{3}\cdot e^{2x}\cos 3x\Bigg|_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1 e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Розглянемо останній інтеграл

$$\int_0^1 e^{2x}\cos 3x dx = \begin{bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos 3x dx; & v = \frac{1}{3}\sin 3x. \end{bmatrix} == \frac{1}{3}\cdot e^{2x}\sin 3x\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot e^2 \sin 3 - \frac{2}{3}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx.$$

Підставляючи цей результат у попередню рівність, дістанемо таке співвідношення:

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}\left(e^2\cos 3 - 1\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^2\sin 3 - \frac{2}{3}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x\, dx\right).$$

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}\left(e^2\cos 3 - 1\right) + \frac{2}{9}e^2\sin 3 - \frac{4}{9}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x\, dx.$$

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx + \frac{4}{9}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}\left(e^2\cos 3 - 1\right) + \frac{2}{9}e^2\sin 3.$$

$$\frac{13}{9}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}\left(e^2\cos 3 - 1\right) + \frac{2}{9}e^2\sin 3.$$

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx = \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}\left(1 - e^2\cos 3\right) + \frac{2}{9}e^2\sin 3\right).$$

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx = \frac{3}{13}\left(1 - e^2\cos 3\right) + \frac{2}{13}e^2\sin 3.$$

3) $I = \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16 - x^2}dx.$

Схожий інтеграл вже був розв'язаний раніше методом заміни змінної інтегрування. Розв'яжемо його зараз методом інтегрування частинами

$$I = \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16 - x^2}dx = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{\left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2}{\sqrt{16 - x^2}}dx = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{16 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}}dx = 16\int_0^{\sqrt{7}} \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}dx -$$

$$- \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}dx == 16\cdot \arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^{\sqrt{7}} - \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}dx = 16\cdot \arcsin\frac{\sqrt{7}}{4} - \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}dx.$$

Розглянемо останній інтеграл окремо.

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}dx = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x\cdot x}{\sqrt{16 - x^2}}dx = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx; \\ dv = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}dx; & v = -\sqrt{16 - x^2}. \end{bmatrix} =$$

$$= -x\sqrt{16 - x^2}\Big|_0^{\sqrt{7}} + \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16 - x^2}dx = -3\sqrt{7} + \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16 - x^2}dx.$$

Тепер виходить,

$$\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16-x^2}\,dx = 16\cdot\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4} - \left(-3\sqrt{7} + \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16-x^2}\,dx\right).$$

$$\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16-x^2}\,dx = 16\cdot\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4} + 3\sqrt{7} - \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16-x^2}\,dx.$$

$$2\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16-x^2}\,dx = 16\cdot\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4} + 3\sqrt{7}.$$

$$2\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16-x^2}\,dx = 8\cdot\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{7}.$$

4) $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx = \begin{bmatrix} x = U; & dx = dU; \\ \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = dV; & V = -ctgx \end{bmatrix} = -x\,\mathrm{ctg}\,x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}\,x dx =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) + \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1}{2} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \ln\sqrt{3}.$$

Відповідь. 1) $I = \dfrac{11}{\ln 2} - \dfrac{8}{\ln^2 2} + \dfrac{2}{\ln^3 2}$; 2) $I = \dfrac{3}{13}(1 - e^2\cos 3) + \dfrac{2}{13}e^2\sin 3$;
3) $I = 8\arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{4} + \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$; 4) $I = -\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18} + \ln\sqrt{3}$.

2. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

2.1. Невласні інтеграли I роду

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на нескінченному проміжку $[a; +\infty)$. Розглянемо тепер скінченний проміжок $[a; N]$, де $N > a$. Тоді можна говорити про визначений інтеграл від цієї функції $\int_a^N f(x)dx$. Тепер припустимо, що N – змінна. У цьому випадку інтеграл $\int_a^N f(x)dx$ є функцією від N, як інтеграл зі змінною верхньою границею, тобто $\int_a^N f(x)\,dx = \Phi(N)$.

Визначення. Невласним інтегралом I роду або інтегралом з нескінченними межами інтегрування називається границя інтеграла $\int_a^N f(x)dx$ коли $N \to \infty$, тобто,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx. \qquad (2.1)$$

При цьому, якщо названа границя існує, то інтеграл називається збіжним, а якщо не існує, то розбіжним. Аналогічно визначається інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{b} f(x)\,dx. \qquad (2.2)$$

для функції неперервної на проміжку $(-\infty; b]$. Якщо ж функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(-\infty;+\infty)$, то можна розглядати такий невласний інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (2.3)$$

Якщо обидва інтеграли у правій частині рівності (2.3) збіжні, то і інтеграл зліва також вважається збіжним.

Наведемо властивості збіжності невласних інтегралів.

Теорема 1. (порівняння). Нехай функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ неперервні на проміжку $[a; +\infty)$ і до того ж задовольняють умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тоді:

1) якщо збігається інтеграл $\int_a^{\infty}\varphi(x)\,dx$, то збігається і інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$;

2) якщо розбігається інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, то розбігається і інтеграл $\int\limits_a^{N} \varphi(x)\,dx$.

Справедливість цієї властивості виходить з властивостей визначеного інтеграла та з властивостей границь функцій.

Теорема 2. (порівняння). Нехай на проміжку $[a;\,+\infty)$ визначені невід'ємні та неперервні функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$. До того ж $\varphi(x)$ відрізняється від 0, коли $x \to \infty$. Якщо при цьому існує скінчена границя відношення цих функцій коли $x \to \infty$, яка відрізняється від нуля, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0, \tag{2.4}$$

то обидва інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ та $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ водночас збігаються або розбігаються.

Теорема 3. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a\,;+\,\infty)$. Якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M > 0$ існує таке число α, що є справедливою нерівність

$$0 \le f(x) \le \frac{M}{x^{\alpha}}, \tag{2.5}$$

то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Теорема 4. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a;\,+\,\infty)$. Якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M > 0$ є справедливою нерівність

$$f(x) \ge \frac{M}{x}, \tag{2.6}$$

тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Визначення. Якщо функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a;\,+\,\infty)$ і інтегровна на будь-якому проміжку $[a;b]$, де $b > a$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а

$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|dx$ розбігається, то інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ називається умовно збіжним.

Теорема 5. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і збігається інтеграл $\int_{a}^{+\infty}|f(x)|dx$, тоді збігається і інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

2.2. Невласні інтеграли II роду

Розглянемо функцію $y = f(x)$, неперервну на проміжку $[a; b)$, яка в точці b має нескінченний розрив.

***Визначення*:** Невласним інтегралом II роду або інтегралом від функції, неперервної на проміжку $[a; b)$ та не обмеженої у точці b називається границя інтеграла

$$\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \text{ коли } \varepsilon \to 0+0,$$

тобто

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{2.7}$$

При цьому, якщо названа границя має скінчене значення, то інтеграл називається збіжним, а коли границя не існує, то інтеграл називається розбіжним. Аналогічно визначається інтеграл

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{2.8}$$

для функції $y = f(x)$, неперервної на проміжку $(a; b]$ з нескінченним розривом у точці a.

Нехай тепер функція неперервна на проміжку $[a; b]$ за винятком внутрішньої точки c, $(a < c < b)$. Тоді невласним інтегралом від необмеженої у внутрішній точці с функції називається така сума границь:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0+0} \int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0+0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx. \tag{2.9}$$

Розглянемо властивості інтегралів від необмежних функцій.

Теорема 1. (порівняння). Нехай функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ неперервні на проміжку $[a; b)$, а у точці b мають нескінченний розрив і до того ж задовольняють умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тоді:

1) якщо збігається інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$, то збігається і інтеграл $\int_a^b f(x)dx$;

2) якщо розбігається інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, то розбігається і інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема 2. (порівняння). Нехай на проміжку [*a; b*) визначені додатні та неперервні функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$, які у точці b мають нескінченний розрив. До того ж існує границя $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k > 0.$

Тоді обидва інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b \varphi(x)dx$ водночас збігаються або розбігаються.

Визначення. Невласний інтеграл II роду $\int_a^b f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 3. Якщо збігається невласний інтеграл II роду $\int_a^b |f(x)|dx$, то збігається і невласний інтеграл II роду $\int_a^b f(x)dx$.

2.3. Головні значення невласних інтегралів

Розглянемо невласні інтеграли типу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ з неперервною функцією *f(x)* та $\int_a^b f(x)dx$, де функція *f*(*x*) неперервна на проміжку [*a;b*], за винятком внутрішньої точки *c*, що є точкою нескінченного розриву. Як відомо, ці інтеграли можна подати у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N_1 \to +\infty} \int_{-N_1}^{0} f(x)dx + \lim_{N_2 \to +\infty} \int_{0}^{N_2} f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

При цьому слід мати на увазі, що N_1 та N_2 змінюються незалежно одне від одного, а ε_1 та ε_2 також змінюються незалежно одне від одного. Розглянемо тепер частинні випадки цих інтегралів, припустивши, що $N_1 = N_2$ та $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Тоді

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \left(\int_{-N}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{N} f(x)dx \right). \qquad (2.10)$$

$$V.P. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right). \qquad (2.11)$$

Інтеграли, подані формулами (2.10) та (2.11), називаються головними значеннями невласних інтегралів відповідно I та II роду. Тут використані символи V.P. – це перші букви слів valeur principal – головне значення.

Якщо невласний інтеграл збігається у звичайному розумінні, то він збігається і у розумінні головних значень. Буває так, що у звичайному розумінні інтеграл розбігається, а у розумінні головних значень збігається. Отже, із збіжності у розумінні головних значень не випливає збіжність у звичайному розумінні.

2.7. Приклади

Приклад 2.1. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

1) $I = \int_2^{+\infty} x \cdot 3^{-x} dx;$ 2) $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^4 x}{x} dx;$

3) $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx, (\alpha \in R);$ 4) $I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^8} dx.$

Розв'язання

1) $$I = \int_2^{+\infty} x \cdot 3^{-x} dx = \lim_{N \to +\infty} \int_2^N x \cdot 3^{-x} dx = \begin{bmatrix} x = U; & dx = dU; \\ 3^{-x} dx = dV; & -\frac{1}{\ln 3} 3^{-x} = V. \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{-x}{3^x \cdot \ln 3} \Bigg|_2^N + \frac{1}{3} \int_2^N 3^{-x} dx \right) = \lim_{N \to \infty} \left(-\frac{N}{3^N \ln 3} + \frac{2}{9 \ln 3} - \frac{1}{3^x} \cdot \frac{1}{\ln^2 3} \Bigg|_2^N \right) =$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left(-\frac{N}{3^N \ln 3} + \frac{2}{9 \ln 3} - \frac{1}{3^N \ln^2 3} + \frac{1}{9 \ln^2 3} \right) = -\frac{1}{\ln 3} \lim_{N \to +\infty} \frac{N}{3^N} - \frac{1}{\ln^2 3} \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{3^N} +$$

$$+ \frac{2}{9 \ln 3} + \frac{1}{9 \ln^2 3} = \frac{2}{9 \ln 3} + \frac{1}{9 \ln^2 3} < \infty.$$

Інтеграл збігається.

Зауваження. Для знаходження границі першого доданка було використане правило Лопіталя

2) $$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln^4 x}{x}dx=\lim_{N\to+\infty}\int_1^N\frac{\ln^4 x}{x}dx=\left[\begin{array}{ll}\ln x=t; & \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline N & \ln N\\ \hline 1 & 0\\ \hline\end{array}\\ \frac{1}{x}dx=dt & \end{array}\right]=\lim_{N\to+\infty}\int_0^{\ln N}t^4dt=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^{\ln N}=\frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\left(\ln^5 N\right)=\infty.$$

Інтеграл розбігається.

3) $$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{N\to+\infty}\int_1^N x^{-\alpha}dx=\lim_{N\to+\infty}\begin{cases}\left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^N, & \alpha\neq1;\\ \left.\ln|x|\right|_1^N, & \alpha=1;\end{cases}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha+1}\left(N^{-\alpha+1}-1\right), & \alpha\neq1;\\ \ln N-\ln 1, & \alpha=1\end{cases}=\lim_{N\to\infty}\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha+1}\left(N^{-\alpha+1}-1\right), \alpha<1;\\ \dfrac{1}{-\alpha+1}\left(\dfrac{1}{N^{\alpha+1}}-1\right), \alpha>1;\\ \ln N, \quad \alpha=1\end{cases}=\begin{cases}\infty, & \alpha<1;\\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1;\\ \infty, & \alpha=1.\end{cases}$$

Отже, інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ збігається, коли $\alpha>1$, розбігається, коли $\alpha\le1$.

4) $$I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^8}dx.$$

Безпосереднє дослідження на збіжність цього інтеграла неможливе, оскільки $\cos 4x$ при $x\to\infty$ не наближається до певного числа. Візьмемо до уваги той факт що $\left|\frac{\cos 4x}{x^8}\right|\le\frac{1}{x^8}$. Інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^8}dx$ збігається, що виходить з попереднього прикладу. На основі теореми 3 стверджуємо, що збігається інтеграл $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos 4x}{x^8}\right|dx$, а з теореми 5 виходить, що збігається і інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^8}dx$, до того ж, збігається абсолютно.

Відповідь. 1) збігається; 2) розбігається; 3) збігається, коли $\alpha > 1$; розбігається, коли $\alpha \le 1$; 4) збігається абсолютно.

Приклад 2.2. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

1) $I = \int\limits_{-6}^{-2} \frac{1}{x+2} dx$; 2) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^a} dx, \alpha \in R.$; 3) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Розв'язання

1) $I = \int\limits_{-6}^{-2} \frac{1}{x+2} dx$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку [-6; -2). У точці $x = -2$ функція має нескінченний розрив. Отже, це невласний інтеграл II роду.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_{-6}^{-2} \frac{1}{x+2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln|x+2| \Big|_{-6}^{-2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} (\ln \varepsilon - \ln 4) = -\infty .$$

Інтеграл розбігається.

2) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^a} dx, a \in R.$

Підінтегральна функція неперервна на проміжку (0; 1], а у точці $x = 0$ функція має нескінченний розрив. Отже, це невласний інтеграл II роду.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} x^{-a} dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-a+1}}{-a+1}\right|_{0+\varepsilon}^{1}, & a \ne 1 \\ \ln|x| \Big|_{0+\varepsilon}^{1}, & a = 1 \end{cases} = \frac{1}{1-a} \lim_{\varepsilon \to 0+0} \begin{cases} 1 - \varepsilon^{-a-1}, & a < 1; \\ 1 - \dfrac{1}{\varepsilon^{a-1}}, & a > 1; \\ -\ln \varepsilon, & a = 1; \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{1-a} \begin{cases} 1; & a < 1; \\ \infty; & a > 1; \\ \infty; & a = 1. \end{cases}$$

Таким чином, цей інтеграл збігається, коли $\alpha < 1$ та розбігається, коли $\alpha \ge 1$.

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку (0; 1], а у точці $x = 0$ функція має нескінченний розрив.

Досліджувати на збіжність цей інтеграл, виходячи з означення невласного інтеграла, не можна, оскільки $\cos\frac{1}{x}$ не прямує до певного значення.

Візьмемо до уваги очевидну нерівність:

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x}} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Як уже відомо, збігається інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$,отже, за теоремою порівняння збігається і інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Відповідь. 1) розбігається; 2) збігається, коли $\alpha < 1$, розбігається, коли $\alpha \ge 1$; 3) збігається.

Приклад 2.3. Дослідити невласні інтеграли на збіжність у звичайному розумінні та на збіжність у розумінні головних значень.

1) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4+x^2} dx$; 2) $I = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x \ln x} dx$.

Розв'язання

1) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4+x^2} dx = \lim_{N_1 \to +\infty} \int_{N_1}^{0} \frac{x}{4+x^2} dx + \lim_{N_2 \to +\infty} \int_{0}^{N_2} \frac{x}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{N_1 \to +\infty} \ln\left|4+x^2\right| \Big|_{-N_1}^{0} +$$

$$+\frac{1}{2} \lim_{N_2 \to +\infty} \ln\left|4+x^2\right| \Big|_{0}^{N_2} = \frac{1}{2} \lim_{N_1 \to +\infty} \ln 4 - \ln\left(\left|4+N_1^2\right|\right) + \frac{1}{2} \lim_{N_2 \to +\infty} \ln\left(\left|4+N_2^2\right| - \ln 4\right) = \infty.$$

Інтеграл у звичайному розумінні розбігається.

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4+x^2} dx = \lim_{N_1 \to +\infty} \left(\int_{-N}^{0} \frac{x}{4+x^2} dx + \lim_{N_2 \to +\infty} \int_{0}^{N} \frac{x}{4+x^2} dx \right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\int_{-N}^{N} \frac{x}{4+x^2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \to +\infty} \ln\left|4+x^2\right| \Big|_{-N}^{N} = \frac{1}{2} \lim_{N \to +\infty} \left(\ln\left|4+N^2\right| - \ln\left|4+N^2\right| \right) = 0.$$

Значить, у розумінні головних значень інтеграл збігається.

2) $\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x \ln x} dx$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку $\left[\frac{1}{2};4\right]$ за винятком внутрішньої точки $x = 1$, у якій функція має нескінченний розрив.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln x} dx + \int_{1}^{4} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+0} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_1} \frac{1}{x \ln x} dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+0} \int_{1-\varepsilon_2}^{4} \frac{1}{x \ln x} dx =$$

$$=\left[\begin{array}{l} \ln x = t; \\ \frac{1}{x}dx = dt; \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 1-\varepsilon_1 & \ln(1-\varepsilon_1) \\ \hline \frac{1}{2} & \ln\frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 4 & \ln 4 \\ \hline 1+\varepsilon_1 & \ln(1+\varepsilon_2) \\ \hline \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon_1\to 0+0} \int\limits_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln(1-\varepsilon_1)} \frac{1}{t}dt +$$

$$+\lim \int\limits_{\ln(1+\varepsilon_2)}^{4} \frac{1}{t}dt = \lim_{\varepsilon_1\to 0+0}\left(\ln|\,t\,| \Bigg|_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln(1-\varepsilon_1)}\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0+0}\left(\ln|\,t\,| \Bigg|_{\ln(1+\varepsilon_2)}^{\ln 4}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0+0}\left(\ln|\ln(1-\varepsilon_1)| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| + \lim_{\varepsilon_2\to 0+0} \ln|\ln 4| - \ln|\ln(1-\varepsilon_2)|\right) = \infty.$$

Інтеграл збігається у звичайному розумінні.

$$V.P. \int\limits_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x\ln x}dx + \int\limits_{1+\varepsilon}^{4} \frac{1}{x\ln x}dx \right) =$$

$$=\left[\begin{array}{l} \ln x = t; \\ \frac{1}{x}dx = dt; \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 1-\varepsilon & \ln(1-\varepsilon) \\ \hline \frac{1}{2} & \ln\frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 4 & \ln 4 \\ \hline 1+\varepsilon & \ln(1+\varepsilon) \\ \hline \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\ln(1-\varepsilon)} \frac{1}{t}dt +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 4} \frac{1}{t}dt \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|\ln(1-\varepsilon)| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| + \ln|\ln 4| - \ln|\ln(1-\varepsilon)| \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|\ln 1| + \ln\left|\frac{\ln 4}{\ln 2^{-1}}\right| - \ln|\ln 1| \right) = \ln\left|\frac{2\ln 2}{-\ln 2}\right| = \ln 2.$$

Як бачимо, інтеграл збігається і у розумінні головних значень.

Відповідь. 1) збігається у розумінні головних значень; 2) збігається у розумінні головних значень.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

3.1. Обчислення площі плоскої фігури, границя якої зображена у декартових координатах

1. Площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком [*a;b*] на осі *OX*, прямими $x = a$ та $x = b$ і графіком неперервної, невід'ємної функції $y = f(x)$ (рис. 3.1)**.**

Раніше було доведено, що площа такої криволінійної трапеції може бути знайдена за допомогою визначеного інтеграла.

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3.1)$$

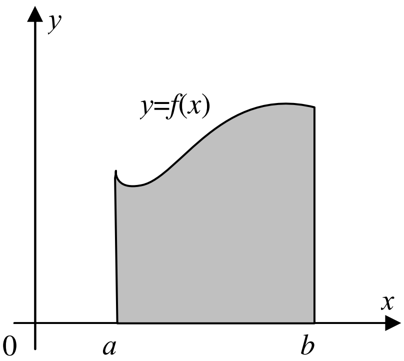

Рисунок 3.1

2. Площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком [*c*; *d*] осі *OY*, прямими $y = c$ та $y = d$ і графіком неперервної, невід'ємної функції $x = f(y)$ (рис. 3.2).

Площа криволінійної трапеції у цьому випадку може бути обчислена як і у випадку 1, якщо взяти до уваги, що криволінійна трапеція прилягає не до осі *OX*, а до осі *OY*.

$$S = \int_c^d f(y)dy. \qquad (3.2)$$

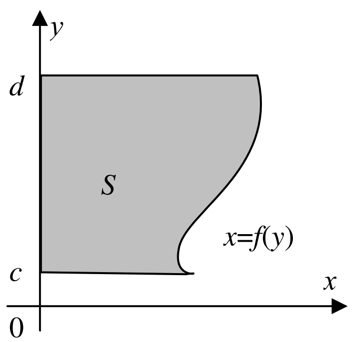

Рисунок 3.2

3. Площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком [*a; b*] осі *OX*, прямими $x = a$ та $x = b$ і графіком неперервної, недодатної функції $y = f(x)$ (рис. 3.3)**.**

Розглянемо допоміжну функцію $y = -f(x)$. Ця функція невід'ємна на сегменті [*a;b*], а площа криволінійної трапеції aA_1B_1b, обмеженої відрізком [*a;b*] осі *OX*, прямими $x = a$ та $x = b$ і графіком функції $y = -f(x)$, дорівнює площі криволінійної трапеції $aABb$.

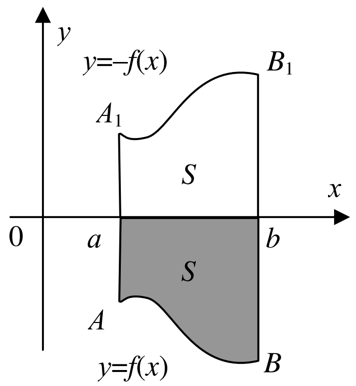

Рисунок 3.3

Таким чином,

$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (3.3)$$

або

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (3.4)$$

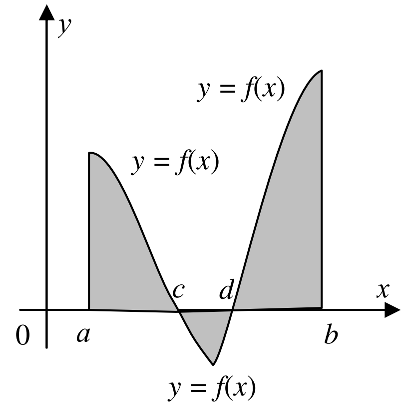

Рисунок 3.4

4. Площа плоскої фігури, обмеженої відрізком [*a;b*] осі *OX*, прямими *x = a* та *x = b* і графіком неперервної функції *y = f(x)* (рис. 3.4)**.**

Якщо на сегменті [*a;b*] функція *y= f(x)* зберігає певний знак, то площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції, визначається у відповідності з п. 1 або п. 3. Розглянемо тепер той випадок, коли знак функції на сегменті [*a;b*] змінюється. Тоді плоску фігуру слід розбити на суму криволінійних трапецій так, щоб кожна з них була обмежена функцією певного знака і скористатись результатами п. 1 та п. 3, або ж такою формулою

$$S=\int_a^b |f(x)|dx. \tag{3.5}$$

5. Площа плоскої фігури, обмеженої прямими *x = a* та *x = b* і графіками неперервних функцій *y = f(x)*, *y = φ(x)*, де $0\le\varphi(x)\le f(x)$ (рис. 3.5)**.**

Площу *S* даної фігури можна розглядати як різницю площ двох криволінійних трапецій aA_1B_1b та aA_2B_2b, тобто

$$S=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx. \tag{3.5}$$

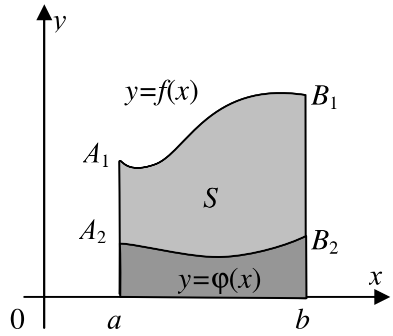

Рисунок 3.5

6. Площа плоскої фігури, обмеженої прямими *x = a* та *x = b* і графіками неперервних функцій *y = f(x)*, *y = φ(x)*, де $f(x)\le\varphi(x)\le 0$ (рис. 3.6).

Розглянемо допоміжні функції *y* = –*f*(*x*) та $y=-\varphi(x)$. Зрозуміло, що $(-f(x))\ge 0$, $(-\varphi(x))\ge 0$. Площа S плоскої фігури $A_1A_2B_2B_1$ дорівнює площі плоскої фігури $A_3A_4B_4B_3$ яка, у відповідності з випадком 5, може бути знайдена за формулою (2.5), стосовно функцій *y*= –*f*(*x*), $y=-\varphi(x)$, тобто

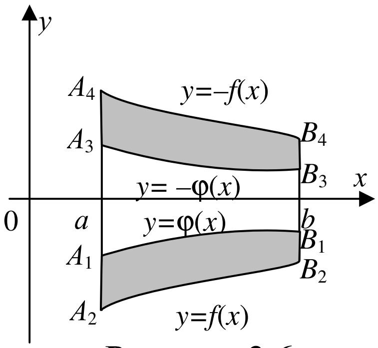

Рисунок 3.6

$$S=\int_a^b (-f(x)+\varphi(x))dx \tag{3.6}$$

або

$$S=-\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx. \tag{2.6}$$

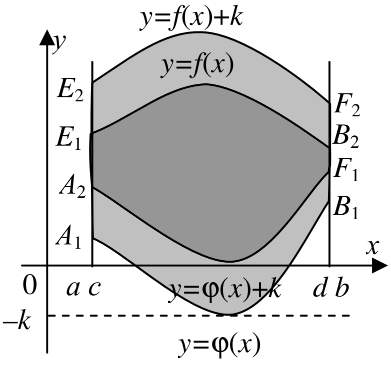

Рисунок 3.7

7. Площа плоскої фігури, обмеженої відрізком [*a;b*] осі *OX*, прямими *x* = *a* та *x* = *b* і графіком функцій *y* = *f*(*x*), *y* = φ(*x*) ($f(x) \geq \varphi(x)$)**, які на сегменті [*a;b*] можуть набувати як додатних, так і від'ємних значень** (рис. 3.7)**.**

Площу заданої фігури у цьому випадку можна розглядати як суму площин декількох фігур, кожна з яких відповідає будь-якому з попередніх випадків. Але такий метод є досить громіздким.

Розглянемо допоміжні функції $y = f(x) + k$ та $y = \varphi(x) + k$, де (-*k*) – найменше значення функції $y = \varphi(x)$ на сегменті [*a;b*].Графіки допоміжних функцій виходять з графіків заданих функцій паралельним переносом уздовж осі *OY* на величину *k*. Завдяки паралельному переносу утворюється фігура $E_1E_2F_2F_1$, що є рівновеликою заданій фігурі $A_1A_2B_2B_1$. Площу фігури $E_1E_2F_2F_1$, а отже, і площу фігури $A_1A_2B_2B_1$, можна знайти за формулою (3.5):

$$S = \int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)dx.$$

8. Площа плоскої фігури, симетричної відносно осі *OY* (рис. 3.8).

Нехай плоска фігура, площу якої необхідно обчислити, є криволінійна трапеція, обмежена відрізком $[-a;a]$ осі *OX*, прямими $x = -a$, $x = a$ і графіком функції $y = f(x)$, парної на $[-a;a]$.

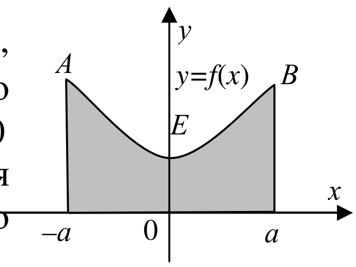

Рисунок 3.10

Оскільки функція $y = f(x)$ парна на відрізку $[-a;a]$, то її графік симетричний відносно осі *OY*. З цього виходить, що площі криволінійних трапецій $-aAE0$ і *0EBa* рівні між собою, значить, для знаходження площі всієї криволінійної трапеції *–aABa* достатньо знайти площу криволінійної трапеції *0EBa*, тобто, $S = S_{-aABa} = 2S_{0EBa}$ або

$$S = 2\int_0^b f(x)dx. \tag{3.7}$$

3.1.2. Обчислення площі плоскої фігури, границя якої задана у параметричній формі

1. Нехай неперервна невід'ємна на сегменті [*a*; *b*] функція $y = f(x)$ задана у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{3.8}$$

де $t \in [\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ (рис. 3.9).

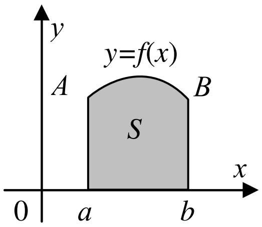

Рисунок 3.12

Функція $\psi(t)$ є неперервною та невід'ємною, а функція $\varphi(t)$ є диференційовною функцією, її похідна $\varphi'(t)$ є неперервною невід'ємною функцією.

Знайдемо площу криволінійної трапеції $aABb$. Будемо виходити з формули (3.7)

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left[\begin{array}{l} x = \varphi(t); \\ dx = \varphi'(t)dt; \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline b & \beta \\ \hline a & \alpha \\ \hline \end{array} \right] = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

Отже,

$$S = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt. \qquad (3.9)$$

Але, оскільки $f\left(\varphi(t)\right) = y$, а $y = \psi(t)$, то формула набуває вигляд

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (3.10)$$

або

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \qquad (3.10')$$

2. Нехай неперевна та невід'ємна на сегменті $[c; d]$ осі Oy функція $y = f(x)$ задана у параметричній формі (3.8), де $t \in [\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = c$; $\varphi(\beta) = d$ (рис. 3.2). Функція $\varphi(t)$ є неперервною та невід'ємною, а функція $\psi(t)$ є диференційованою функцією, її похідна $\psi'(t)$ є неперервною невід'ємною функцією.

Тоді площа фігури $cCDd$ знаходиться за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\psi'(t)dt. \qquad (3.11)$$

або

$$S = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt. \qquad (3.11')$$

3.1.3. Обчислення площі плоскої фігури, границя якої задана у полярній системі координат

Нехай в полярній системі координат на сегменті $[\alpha;\beta]$ задано неперервну функцію $\boldsymbol{\rho = f(\varphi)}$. Потрібно визначити площу криволінійного сектора,

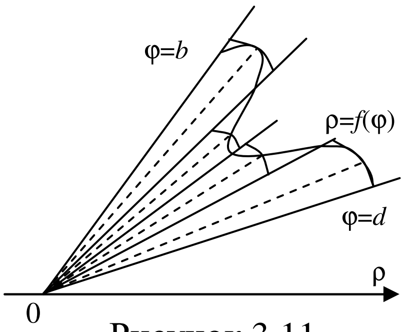

Рисунок 3.11

обмеженого промінями $\varphi=\alpha;\varphi=\beta$ і графіком функції **ρ = *f*(φ)** (рис. 3.11).

Сегмент $[\alpha;\beta]$ точками розподілу $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_n=\beta$ розіб'ємо на часткові сегменти, довжини яких позначаються відповідно $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, ..., $\Delta\varphi_n$. Через точки розподілу проведемо промені, внаслідок чого увесь криволінійний сектор буде поданий у вигляді суми часткових криволінійних секторів. У кожному частковому секторі виберемо будь-яким чином проміжні точки $c_1,c_2,\ldots,c_n$, і обчислимо значення функції в цих точках: $f(c_1), f(c_2),\ldots, f(c_n)$. Кожен криволінійний сектор замінимо круговим сектором з центральним кутом $\Delta\varphi_i$ і радіусом, що дорівнює значенню функції в проміжній точці C_i (i = 1; 2; ...; n). Тепер можна визначити суму S_n площ кругових секторів, яка приблизно дорівнює площі S криволінійного сектора.

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f^2(c_i)\Delta\varphi_i.$$

Дана сума є інтегральною сумою. Очевидно, що при необмеженому збільшенні числа точок розбиття і за умови, що величина кожного з часткових сегментів наближається до нуля є справедливою рівність

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f^2(c_i)\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)d\varphi,\text{ де }\lambda=\max\Delta\varphi_i, 1\le i\le n.$$

Таким чином, одержана формула

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3.12)$$

3.1.4. Приклади

Приклад 3.1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=\cos x$; $y=\sin x$; $x=\frac{\pi}{6}$; $x=\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання

Як випливає з рисунка 3.12, задана фігура, площу якої слід знайти, складається з двох частин. У одній з частин $\cos x\ge\sin x$, а в іншій $\sin x\ge\cos x$. Тому $S=S_1+S_2$, де

$$S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx; \; S_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - \cos x)dx.$$

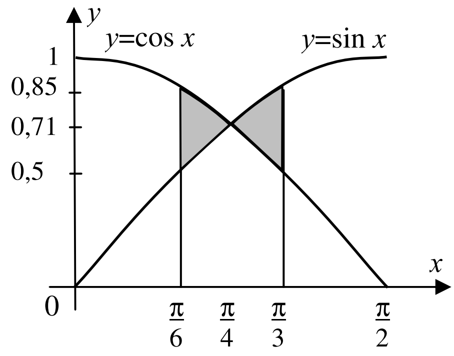

Рисунок 3.12

$$S_1 = (\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) -$$

$$-(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}}{2} \text{ (од. кв.).}$$

$$S_2 = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}}{2} \text{(од. кв.).}$$

Таким чином,
$S = (2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3})$ (од. кв.).
Відповідь. $S = (2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3})$ (од. кв.).

Приклад 3.2. Знайти площу фігури, обмеженою лініями $y = -x^2 + 5x - 6$ та $x - y = 10$.

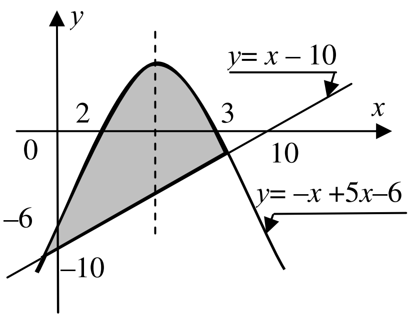

Рисунок 3.13

Розв'язання

Побудуємо задану фігуру (рис. 3.13). Рівняння $y = -x^2 + 5x - 6$ визначає параболу, яка перетинає вісь OX у точках $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; віссю симетрії цієї параболи є пряма $x = 2{,}5$; вітки параболи напрямлені вниз. Рівняння $x - y = 10$ визначає пряму, яка перетинає осі OX та OY відповідно у точках $x = 10$ та $y = -10$.

Площа фігури визначається за формулою:

$$S = \int\limits_a^b \big(f(x) - \varphi(x)\big)\, dx\,,$$

де $f(x) = -x^2 + 5x - 6$, $\varphi(x) = x - 10$.

Для знаходження меж інтегрування a і b слід розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x + 6; \\ y = x - 10. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, приходимо до квадратного рівняння

$$-x^2 + 5x - 6 = x - 10 \text{ або } x^2 - 4x - 10 = 0.$$

Коренями цього рівняння є числа $x_1 = 2 - 2\sqrt{5}$; $x_2 = 2 + 2\sqrt{5}$. Тоді

$$S=\int_{2-2\sqrt5}^{2+2\sqrt5}\left(-x^2+5x+6-x+10\right)dx=\int_{2-2\sqrt5}^{2+2\sqrt5}\left(-x^2+4x+16\right)dx=$$

$$=(-\frac{1}{3}x^3+2x^2+16x)\Bigg|_{2-2\sqrt5}^{2+2\sqrt5}=-\frac{8}{3}(1+3\sqrt5+15+5\sqrt5-1+3\sqrt5-15+$$

$$+5\sqrt5)+2\cdot4(1+2\sqrt5+5-1+2\sqrt5-5)+16\cdot2(1+\sqrt5-1+\sqrt5)=$$

$$=\frac{160\sqrt5}{3}\text{(од.кв).}$$

Відповідь. $\frac{160\sqrt5}{3}$(од.кв).

Приклад 3.3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\operatorname{tg}x$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$.

Розв'язання

Функція $y=\operatorname{tg}x$ на $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ є парною функцією (рис. 3.14). Тоді за формулою (3.7) маємо

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\,dx=-2\ln\left|\cos x\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-2\left(\ln\frac{\sqrt2}{2}-\ln1\right)=$$

$$=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln2\right)=\ln2\,(\textbf{од. кв}).$$

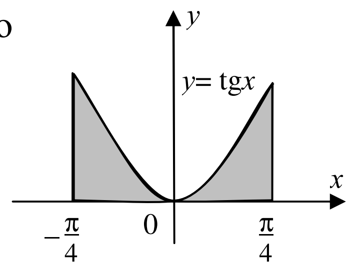

Рисунок 3.14

Відповідь. ln 2 (од. кв.).

Приклад 3/4. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases}x=a\cos t;\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

Розв'язання

Еліпс – фігура, симетрична відносно осей *OX* і *OY* (рис. 3.15) Тому достатньо обчислити лише площу, розташовану в I чверті, враховуючи, що при цьому *t* змінюється від π/2 до 0.

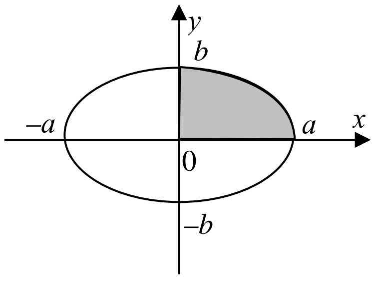

Рисунок 3.15

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(b\sin t)(a\cos t)'\,dt=4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin t(-\sin t)dt=$$

$$=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 tdt=-2ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos2t)\,dt=$$

$$=-2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin\,2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=0+2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab(\text{од.кв})$$

Приклад 3.15. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано рівняннями

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t); \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$$

та

$$y = 6,$$

якщо $0 \le x \le 8\pi$; $y \ge 6$.

Розв'язання

Задана крива є циклоїдою; максимальне значення y дорівнює $4 \cdot 2$, тобто 8. Оскільки $x \in [0; 4 \cdot 2\pi]$,то це означає, що задано лише одну арку циклоїди. Рівняння $y = 6$ задає пряму (рис. 3.16). Щоб знайти площу фігури A_1ABEE_1, необхідно знайти такі значення t, за яких відбувається перетин прямої та циклоїди. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

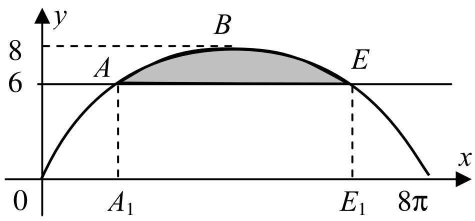

Рисунок 3.16

$$\begin{cases} y = 6; \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; \ 6 = 4(1 - \cos t); \ 1 - \cos t = \frac{6}{4}; \ \cos t = -\frac{1}{2};$$

$$t = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z; \qquad t = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідно до умови прикладу, маємо такі корені:

$$t_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad t_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Площу фігури A_1ABEE_1 можна знайти за формулою (3.9).

$$S_{A_1ABEE_1} = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 4(1 - \cos t) \cdot 4(t - \sin t)' dt = 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1 - \cos t)^2 dt = 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = 16\left(\frac{3}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} dt - 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos t dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 2t dt\right) =$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} - 2\sin t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\right) = 16\left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cdot \left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \cdot \left(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 16\left(\pi - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 16\pi + 36\sqrt{3}.$$

Тепер обчислимо площу прямокутника A_1AEE_1 за формулою (3.1). Спочатку знайдемо межі інтегрування.

$$x_1 = x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3};$$

$$x_2 = x\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{16\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

$$S_{A_1ABB_1} = \int\limits_{\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}}^{\frac{16\pi}{3}+2\sqrt{3}} 6\,dx = 6x\Bigg|_{\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}}^{\frac{16\pi}{3}+2\sqrt{3}} = 6\left(\frac{16\pi}{3} + 2\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) = 16\pi + 24\sqrt{3}.$$

Остаточно,

$$S_{ABE} = \left(16\pi + 36\sqrt{3}\right) - \left(16\pi + 24\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}\,(\text{од.кв .}).$$

Зауваження. Площу прямокутника можна було знайти і простіше :

$$S = A_1E_1 \cdot A_1A\,.$$

Відповідь. $12\sqrt{3}$ (од. кв.).

Приклад 3.5. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $\rho = \cos 2\varphi$.

Розв'язання

Графік функції $\boldsymbol{\rho = \cos 2\varphi}$ є чотирипелюстковою “трояндою”. При обчисленні площі, обмеженої кривою Гвідо $\boldsymbol{\rho = a\cos k\varphi}$ слід мати на увазі, що корисною є така формула: $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$. За цією формулою знаходимо площу однієї пелюстки. В нашому випадку $k = 2$. З міркувань симетрії можна обчислити площу половини пелюстки, вважаючи, що $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

$$S = 8\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi\;\; d\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 + \cos 4\varphi\right)\;\; d\varphi = 2\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

(од.кв).

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$ (од. кв).

Приклад 3.6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $\rho = 8\sin\varphi$ та $\rho = 8\sqrt{3}\cos\varphi$.

Розв'язання

Задані рівняння у полярній системі координат визначають кола з радіусами, що відповідно дорівнюють 4 та $4\sqrt{3}$ (рис. 3.17). Для кола, заданого рівнянням $\rho = 8\sin\varphi$, φ належить проміжку $[0;\pi]$, а для кола $\rho = 8\sqrt{3}\cos\varphi$, φ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Зображуємо обидва кола на одному рисунку. Фігура, площу якої необхідно обчислити, є спільною частиною двох кругів. Проведемо допоміжну лінію *OE* і будемо тепер задану фігуру розглядати як суму двох фігур *OBE* та *OAE*. Спочатку дізнаємось, за якого значення φ перетинаються два кола. Для цього розв'яжемо таку систему рівнянь:

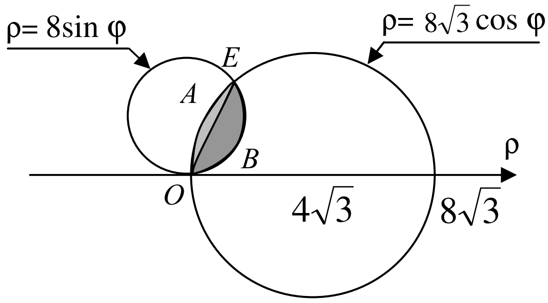

Рисунок 3.17

$$\begin{cases} \rho = 8\sin\varphi; \\ \rho = 8\sqrt{3}\cos\varphi. \end{cases}$$

$$8\sin\varphi = 8\sqrt{3}\cos\varphi; \quad \sin\varphi = \sqrt{3}\cos\varphi;$$

Поділимо обидві частини рівності на $\cos\varphi \neq 0$.

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{3}; \quad \mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3}.$$

Дістали найпростіше тригонометричне рівняння. З множини розв'язків цього рівняння

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$$

нам підходить значення кореня $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Отже, фігура *OBE* є частиною круга, обмеженого колом $\rho = 8\sin\varphi$, коли $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, а фігура *OAE* – то частина круга, обмеженого колом $\rho = 8\sqrt{3}\cos\varphi$, коли $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (8\sin\varphi)^2 dx = 32\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi d\varphi = 32 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 16\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Аналогічно,

$$S_{OAE} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sqrt{3}\cos\varphi\right)^2 d\varphi = 96\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = 96 \cdot \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 48\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 48\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 48\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$S_{OAEB} = S_{OBE} + S_{OAE} = 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 48\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 16\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right) \approx 14{,}18 \ \ (\text{од.кв.})$$

Відповідь. $16\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right) \approx 14{,}18 \ \ (\text{од.кв.})$.

Приклад 3.7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $\rho = 7$ та $\rho = 14\cos 3\varphi$.

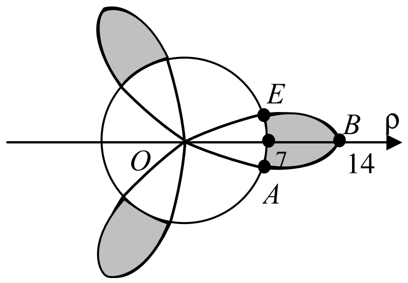

Рисунок 3.18

Розв'язання

Перше з рівнянь визначає коло з центром у точці $O(0;\ 0)$ та радіусом $r = 7$. Друге рівняння задає трипелюсткову „троянду”.

Знайдена фігура, площу S якої необхідно знайти, складається з трьох рівновеликих частин. Знайдемо площу S_1 однієї з цих частин, наприклад, ABE. Шукаємо точки перетину кривих.

$$\begin{cases} \rho = 7; \\ \rho = 14\cos 3\varphi. \end{cases}$$

Знаходимо φ:

$$7 = 14\cos 3\varphi;\ \cos 3\varphi = \frac{1}{2};\ 3\varphi = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

$$3\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z;\ \ \varphi = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z.$$

Відповідно умові прикладу маємо значення коренів:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{9} \ \text{та} \ \varphi_2 = \frac{\pi}{9},$$

тобто φ змінюється у проміжку $\left[-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right]$. Тоді,

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \left((14\cos 3\varphi)^2 - (7)^2\right) d\varphi = \frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \left(4\cos^2 3\varphi - 1\right) d\varphi = \frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \left(2(1 + \cos 6\varphi) - 1\right) d\varphi =$$

$$= \frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (2 + 2\cos 6\varphi - 1)\, d\varphi = \frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (1 + 2\cos 6\varphi)\, d\varphi = \frac{49}{2}\left(\varphi + \frac{1}{3}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} =$$

$$= \frac{49}{2}\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{49}{2}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = 49\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \ \ (\text{од.кв.})$$

$$S = 3S_1 = 49\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ \ (\text{од.кв.}).$$

Відповідь. $49\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (од.кв.).

3.2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

3.2.1. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, заданої у декартових координатах

Нехай на сегменті [*a;b*] задана неперервна невід'ємна функція $y=f(x)$. Функція $y=f(x)$ на сегменті [*a;b*] є диференційованою, а її похідна $f'(x)$ на цьому сегменті є неперервною (рис. 3.19). Розіб´ємо сегмент [*a;b*] на часткові сегменти точками розподілу $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. Через ці точки проведемо вертикальні прямі і за їх допомогою дугу *AB* розіб'ємо на часткові дуги. У кожну дугу впишемо хорду, що з'єднує кінці дуги, завдяки чому одержимо

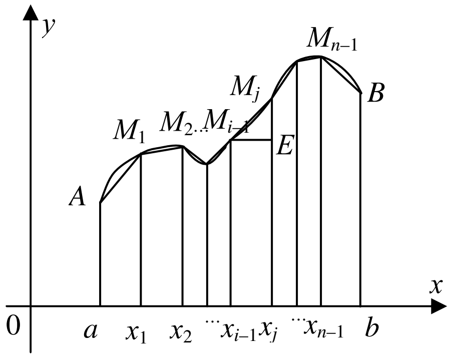

Рисунок 3.19

ламану $AM_1M_2...M_{n-1}B$. Позначимо довжини часткових дуг відповідно $\Delta\ell_1,\Delta\ell_2,...,\Delta\ell_n$. Тоді довжина ламаної

$$\ell_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta\ell_i .$$

Визначення. Довжиною ℓ дуги *AB* називається границя, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної, якщо число ланок ламаної необмежено збільшується, а довжина її найбільшої ланки наближається до нуля, тобто,

$$\ell=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\ell_i,\ \text{ де } \lambda=\max\Delta\ell_i, 1\le i\le n.$$

Розглянемо одну ланку ламаної. З точки M_{i-1} проведемо відрізок $M_{i-1}E$ паралельно до осі *OX*. Введемо позначення: $\Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$, де i = 1, 2, …, n. З прямокутного трикутника $M_{i-1}M_iE$ випливає, що

$$\Delta l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i .$$

Розглянемо відношення

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} .$$

Функція $y=f(x)$ на сегменті [*a;b*] задовольняє умови теореми Лагранжа. Значить,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f'(c_i)(x_i - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i) \quad \text{, де } \ c_i \in (x_{i-1}; x_i).$$

Тепер довжину ламаної можна подати у вигляді

$$\ell_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i \ .$$

Сума є інтегральною сумою. Отже, довжина дуги AB може бути знайдена як границя інтегральної суми.

$$\ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \, .$$

Таким чином, одержано формулу

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{3.13}$$

Зауваження. Величина $d\ell = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ або $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ називається диференціалом дуги у декартових координатах.

3.2.2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, заданої у параметричній формі

Нехай неперервна невід'ємна на сегменті $[a;b]$ функція $y = f(x)$, задана у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{3.14}$$

де $t \in [\alpha;\beta]$ $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$. Функція $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$ є диференційованими на сегменті $[a;b]$, їх похідні $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$ є неперервними на цьому сегменті, та $\varphi'(t)$ на сегменті $[\alpha;\beta]$ відрізняється від нуля. За цих умов існує похідна $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, що є також неперервною функцією.

Для знаходження довжини дуги кривої будемо виходити з відомої вже формули (3.13):

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \, .$$

Перетворимо підінтегральний вираз, для чого внесемо dx під корінь.

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2}.$$

Враховуючи, що $f'(x)\,dx = dy$, дістанемо

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ .$$

Оскільки $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$. Тоді,

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Отже, отримана формула

$$\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\ . \qquad (3.15)$$

Можна показати, що якщо крива не плоска, а просторова, задана рівняннями

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t); \\ z=\xi(t), \end{cases} \qquad (3.16)$$

де $t\in[\alpha;\beta]$, а функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\xi(t)$ мають неперервні похідні, то довжина дуги знаходиться за формулою:

$$\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\xi'(t))^2}\,dt\,. \qquad (3.17)$$

Зауваження. Величина $d\ell=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$ називається диференціалом дуги у параметричній формі.

3.2.3. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, заданої у полярних координатах

Нехай неперервна невід'ємна на сегменті [a; b] функція $y=f(\varphi)$ задана у полярних координатах:

$$\rho=f(\varphi),$$

де $\varphi\in[\alpha;\beta]$. Функція $\rho(\varphi)$ є диференціовною на сегменті [α; β], а її похідна $\rho'(\varphi)$ є неперервною функцією на цьому сегменті.

Скористаємося формулами, що зв'язують декартові і полярні координати.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Запишемо їх у такому вигляді:

$$\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi; \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Таку залежність між x, y, φ можна розглядати як параметричне завдання функції. Тоді, відповідно до п. 3.2.2, довжину дуги кривої знайдемо, користуючись формулою

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left((\rho(\varphi)\cos\varphi)'\right)^2+\left((\rho(\varphi)\sin\varphi)'\right)^2}\,d\varphi.$$

Перетворимо підкореневий вираз таким чином

$$\left(\rho(\varphi)\cos\varphi\right)' = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi;$$
$$\left(\rho(\varphi)\sin\varphi\right)' = \rho(\varphi)\cos\varphi + \rho'(\varphi)\sin\varphi;$$
$$\left(\left(\rho(\varphi)\cos\varphi\right)'\right)^2 = \left(\rho'(\varphi)\right)^2\cos^2\varphi - 2\rho'(\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi;$$
$$\left(\left(\rho(\varphi)\sin\varphi\right)'\right)^2 = \left(\rho'(\varphi)\right)^2\sin^2\varphi + 2\rho'(\varphi)f(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2(\varphi)\cos^2\varphi;$$
$$\left(\left(\rho(\varphi)\cos\varphi\right)'\right)^2 + \left(\left(\rho(\varphi)\sin\varphi\right)'\right)^2 = \left(\rho'(\varphi)\right)^2 + \rho^2(\varphi).$$

Отже, остаточно маємо формулу

$$l = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\rho'(\varphi)\right)^2 + \rho^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (3.18)$$

Зауваження. Величина $dl = \sqrt{\left(\rho'(\varphi)\right)^2 + \rho^2(\varphi)}d\varphi$ називається диференціалом дуги у полярних координатах.

3.2.4. Приклади

Приклад 3.8. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = \frac{5}{2}\left(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}}\right)$ від точки $M_1(0;5)$ до точки $M_2\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2e}\left(e^2+1\right)\right)$.

Розв'язання

Будемо користуватись формулою (3.13).

Знаходимо y'.

$$y' = \frac{5}{2}\left(e^{\frac{x}{5}}\cdot\frac{1}{5} + e^{-\frac{x}{5}}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{5}} - e^{-\frac{x}{5}}\right),\ \left(y'\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{5}} - 2 + e^{-\frac{2x}{5}}\right);$$

$$1 + \left(y'\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2x}{5}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-\frac{2x}{5}} = \frac{1}{4}e^{\frac{2x}{5}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-\frac{2x}{5}} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{5}} + e^{-\frac{2x}{5}}\right)^2;$$

$$\sqrt{1 + \left(y'\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{5}} + e^{-\frac{2x}{5}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2x}{5}} + e^{-\frac{2x}{5}}\right).$$

Далі можна знайти довжину дуги

$$\ell = \int_0^5 \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2x}{5}} + e^{-\frac{2x}{5}}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}e^{\frac{2x}{5}} - \frac{5}{2}e^{-\frac{2x}{5}}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{5}{4}\left(\left(e^2 - e^{-2}\right) - (1-1)\right) = \frac{5}{4}\left(e^2 - e^{-2}\right).$$

Відповідь. $\left(e^2 - e^{-2}\right)$.

Приклад 3.9. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням $y=\ln(\cos x)$, де $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Розв'язання

Користуємось формулою (1.13). Знаходимо y'.

$$y'=(\ln(\cos x))'=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-tgx. \quad 1+(y')^2=1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\ell=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}\right)-\ln 1=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}\right).$$

Відповідь. $\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Приклад 3.10. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x, \text{ де } x\in[1;e].$$

Розв'язання

Використовуємо формулу (3.13). Знаходимо y'.

$$y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x};\ (y')^2=\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2};$$

$$1+(y')^2=1+\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}=\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}=\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2.$$

$$\ell=\int_1^e\frac{x^2+1}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right)\Bigg|_1^e=\frac{1}{4}(e^2-1)+\frac{1}{2}(\ln e-\ln 1)=$$

$$=\frac{1}{4}(e^2-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(e^2+1).$$

Приклад 3.11. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t);\\ y=a(1-\cos t),\end{cases} \quad \text{де} \quad t\in[0;2\pi].$$

Розв'язання

Будемо користуватись формулою (3.15). Для цього знайдемо x' та y'.

$$x'=a(1-\cos t);\ (x')^2=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t);\ y'=a\sin t;\ (y')^2=a^2\sin^2 t;$$

$$(x')^2+(y')^2=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\frac{1}{\frac{1}{2}}\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-8a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi}=-8a(0-1)=8a\ (\text{од. довж.}).$$

Відповідь. $8a$ (од. довжини).

Приклад 3.12. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівняннями

$$\begin{cases} x = \sin t + 2t\cos t; \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad \text{де} \quad t \in [0;2\pi].$$

Розв'язання

Довжину дуги знаходимо за формулою (3.15). Маємо

$$x' = 2t\sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t - 2\cos t + 2\cos t = t^2\cos t.$$

$$y' = -2t\cos t - (2-t^2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = -2\sin t + t^2\sin t + 2\sin t = t^2\sin t.$$

$$(x')^2 = t^4\cos^2 t; \quad (y')^2 = t^4\sin^2 t; \quad (x')^2 + (y')^2 = t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t = t^4;$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{t^4} = t^2; \ \ell = \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \text{ (од. довж.).}$$

Відповідь. $\dfrac{\pi^3}{3}$ (од. довж.).

Приклад 3.13. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = ae^{m\varphi}$ при зміні φ від 0 до 2π.

Розв'язання

Використовуємо формулу (3.18)

$$\rho = ae^{m\varphi}; \ \rho^2 = a^2e^{2m\varphi}; \rho = mae^{m\varphi}; \quad (\rho')^2 = a^2m^2e^{2m\varphi};$$

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2e^{2m\varphi}(1+m^2)}d\varphi = a\sqrt{1+m^2}\int_0^{2\pi}e^{m\varphi}d\varphi = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}\left(e^{2\pi m}-1\right).$$

Відповідь. $\dfrac{a}{m}\sqrt{1+m^2}\left(e^{2\pi m}-1\right).$

Приклад 3.14. Знайти довжину дуги, заданої рівнянням

$$\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}, \quad (a > 0).$$

Розв'язання

Необхідно з'ясувати, яких значень набуває φ. Будемо виходити з припущення, що $\sin^3\dfrac{\varphi}{3} \ge 0$, тоді $\sin\dfrac{\varphi}{3} \ge 0$ а це означає, що

$$2\pi n \le \frac{\varphi}{3} \le \pi + 2\pi n, \quad 6\pi n \le \varphi \le 3\pi + 6\pi n.$$

Будемо розглядати $\varphi \in [0;3\pi]$.

Відповідно до формули (3.18), маємо

$$\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}; \quad \rho^2 = a^2\sin^6\frac{\varphi}{3};$$

$$\rho' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3};\quad (\rho')^2 = a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3};$$

$$\rho^2 + (\rho')^2 = a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right) = a^2\sin^4\frac{\varphi}{3};\ \sqrt{a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}} = a\sin^2\frac{\varphi}{3}.$$

$$\ell = \int_0^{3\pi} a\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(3\pi - \frac{3}{2}(\sin 2\pi - \sin 0)\right) = \frac{3\pi a}{2}\ (\text{од. довж.}).$$

Відповідь. $\frac{3\pi a}{2}$ (од. довж.).

3.3. Обчислення об'єму тіла

3.3.1. Обчислення об'єму тіла за площею паралельних перетинів

Нехай є деяке просторове тіло V та задано неперервну на сегменті $[a;b]$ функцію $S = S(x)$, що дозволяє обчислювати площі поперечних перетинів тіла паралельними між собою площинами, перпендикулярними до осі OX (рис. 3.20). Необхідно визначити об'єм тіла V.

Розіб'ємо сегмент $[a;b]$ точками розподілу $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на часткові сегменти і через точки розподілу проведемо січні площини, задані рівняннями $x = x_0; x = x_1; \ldots; x = x_n$. Ці площини розбивають усе тіло V на часткові шари. У кожному з часткових сегментів $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ виберемо довільним чином проміжні точки c_1, c_2, ..., c_n.

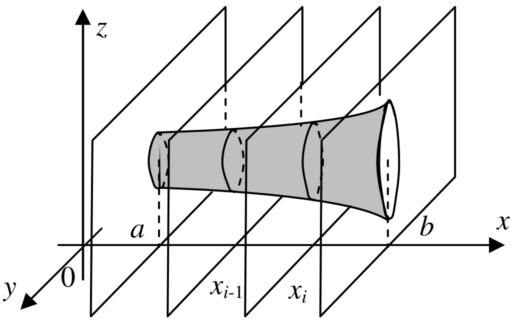

Рисунок 3.20

Кожен частковий шар тіла довільної форми замінимо на циліндрове тіло, твірні якого паралельні до осі OX, а напрямна співпадає з контуром перерізу тіла площиною $x = c_i$ (i = 1, 2, ..., n). Об'єм такого тіла може бути знайдений за формулою $V_i = S(c_i)\Delta x_i$ (i = 1, 2, ..., n). Сума об'ємів усіх часткових циліндрових тіл знаходиться за формулою

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i\ .$$

Ця сума є інтегральною сумою. Очевидно, що коли n прямує до нескінченності, об'єм V заданого тіла V є границею інтегральної суми V_n.

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx\ ,\quad \text{де}\quad \lambda = \max\Delta x_i,\ 1 \le i \le n\ .$$

Остаточно,

$$V = \int_a^b S(x)dx . \qquad (3.19)$$

3.3.1. Обчислення об'єму тіла обертання криволінійної трапеції, заданої у декартових координатах навколо осі *OX*

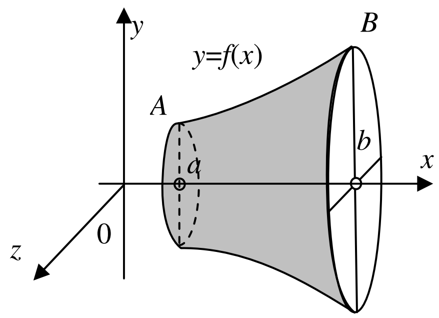

Рисунок 3.21

Нехай на сегменті $[a;b]$ задано неперервну невід’ємну функцію $y = f(x)$. Криволінійна трапеція *aABb* обертається навколо осі *OX* і при цьому утворюється просторове тіло (рис. 3.21). Визначимо об'єм тіла обертання. Поперечний переріз цього тіла в точці площинами перпендикулярними до осі *OX* є кругом, радіус якого дорівнює значенню функції в точці, тобто, $S(x) = \pi(f(x))^2$.

Знаючи площі поперечних перетинів, можемо знайти і об'єм тіла за формулою

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx . \qquad (3.20)$$

Якщо криволінійна трапеція *cCDd*, обмежена лініями $y = c$, $y = d$ та $x = f(y)$, де $f(y)$ – неперервна та невід’ємна на сегменті $[c;\ d]$ осі *OY* функція, то об’єм тіла обертання навколо осі *OY* криволінійної трапеції *cCDd* знаходиться за формулою

$$V = \pi\int_c^d f^2(y)dy . \qquad (3.21)$$

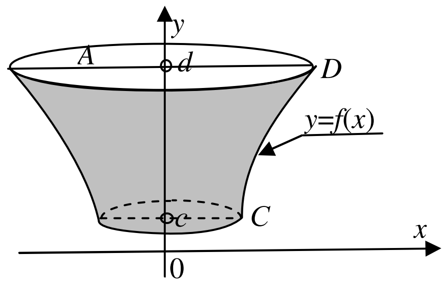

Рисунок 3.22

Нехай на сегменті $[a;b]$ задані неперервні невід’ємні функції $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, де $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис. 3.23).

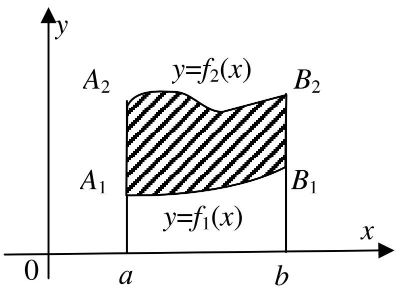

Рисунок 3.23

Якщо фігура $A_1A_2B_2B_1$ обертається навколо осі *OX*, то об’єм *V* тіла обертання знаходиться за формулою

$$V = \pi\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))\,dx . \qquad (3.22)$$

Нехай на сегменті $[c;\ d]$ осі *OY* задані неперервні невід’ємні функції $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, де $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис. 3.24).

Об’єм *V* тіла обертання фігури $C_1C_2D_2D_1$ навколо осі *OY* знаходиться за формулою

$$V = \pi \int_{c}^{d} (f_2^2(y) - f_1^2(y))\,dy\,. \qquad (3.23)$$

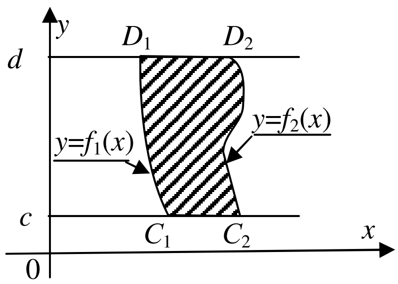

Рисунок 3.24

3.3.3. Обчислення об’єму тіла обертання криволінійної трапеції, заданої у параметричній формі, навколо осі *OX*

Нехай неперервна невід’ємна на сегменті $[a; b]$ функція $y = f(x)$ задана у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де $t \in [\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ та $y > 0$.

Функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ є диференційованими, а їх похідні $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$ – неперервні на цьому сегменті, до того ж функція $x = \varphi(t)$ є зростаючою, з чого виходить, що функція $\varphi'(t)$ на сегменті $[\alpha; \beta]$ є додатною функцією, та функція $\psi(t)$ є додатною на сегменті $[a; b]$.

Знайдемо об’єм тіла обертання криволінійної трапеції *aABb* навколо осі *OX* (рис. 3.41).

Для цього будемо виходити з формули (3.20)

$$V = \pi \int_{a}^{b} f^2(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} x = \varphi(t); \\ dx = \varphi'(t)\,dt; \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline b & \beta \\ \hline a & \alpha \\ \hline \end{array} \right] = \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Оскільки $y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$, то маємо таку формулу

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt \qquad (3.24)$$

або

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)\,dt\,. \qquad (3.24')$$

Якщо на відміну від зазначених раніше умов $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, функція $\varphi(t)$ є спадною функцією, з чого виходить, що $\varphi'(t)$ є від’ємною на сегменті $[\alpha; \beta]$, то замість формули (3.24) слід користуватись такою формулою

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt \qquad (3.25)$$

або

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)\,dt\,. \qquad (3.25')$$

Якщо при аналогічних припущеннях криволінійна трапеція задана на сегменті [c; d] осі OY, обертається навколо осі OY, то об'єм тіла обертання знаходиться за формулою

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt\ , \qquad (3.26)$$

де $\psi(\alpha) = c$, $\psi(\beta) = d$, $\psi(t)$ – зростаюча на сегменті [c; d] функція, а її похідна $\psi'(t)$ є додатною на цьому сегменті.

Об'єм зазначеного тіла обертання знаходиться за формулою

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt\ , \qquad (3.27)$$

де $\psi(\alpha) = d$, $\psi(\beta) = c$, $\varphi(t)$ – спадаюча на сегменті [c; d] функція, а її похідна $\psi'(t)$ є від'ємною на цьому сегменті.

3.3.4. Обчислення об'єму тіла обертання криволінійного сектора, заданого у полярних координатах навколо полярної осі

Нехай криволінійний вектор, обмежений лініями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна невід'ємна функція, обертається навколо полярної осі.

Об'єм тіла обертання може бути знайдений за формулою

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin\ \varphi\, d\varphi\ . \qquad (3.28)$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість формули (3.28).

3.3.5. Приклади

Приклад 3.15. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1\cdot$

Розв'язання

Задана поверхня є еліпсоїдом (рис. 3.22). При перетині еліпсоїда площинами, перпендикулярними до осі OX, маємо еліпси

$$\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{4}$$

або

$$\frac{y^2}{\left(5\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2} = 1.$$

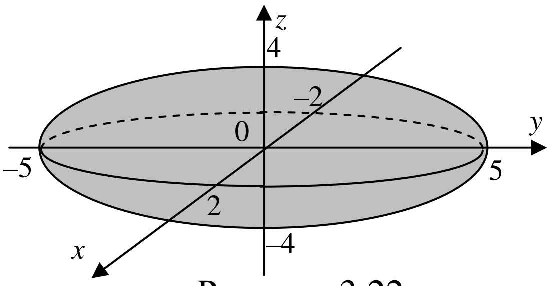

Рисунок 3.22

Піввісі еліпса дорівнюють відповідно

$$5\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \text{ та } 4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Раніше було показано, що площа еліпса з півосями a та b дорівнює πab.

Отже, в даному випадку площа $S(x)$ поперечного перетину в точці x знаходиться за формулою

$$S(x) = 5\pi(4 - x^2), \quad \text{де} \quad x \in [-2;2].$$

Тоді шуканий об'єм V знаходимо за формулою (3.19):

$$V = 5\pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = 10\pi\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx = 10\pi(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = 10\pi(8-\frac{8}{3}) = \frac{160\pi}{3}\text{(од. куб.)}$$

В і д п о в і д ь. $\frac{160\,\pi}{3}$ (од. довж.).

Приклад 3.16. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{2px}$, $y = 0$, $x = h$.

Розв'язання

Тіло обертання є частинною параболоїда обертання (рис. 3.23).

$$V = \pi\int_0^h\left(\sqrt{2px}\right)^2 dx = 2\pi p\int_0^h x dx = 2p\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^h =$$

$$= \pi ph^2 \text{ (од. куб.).}$$

В і д п о в і д ь. πph^2 (од. куб.).

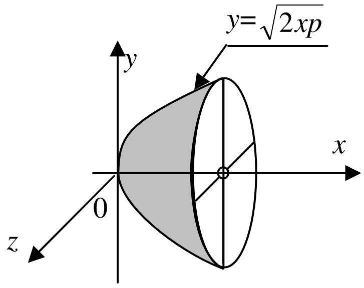

Рисунок 3.23

Приклад 3.17. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $y = 3\sin 2x$; $x = \frac{\pi}{4}$; $y = 0$.

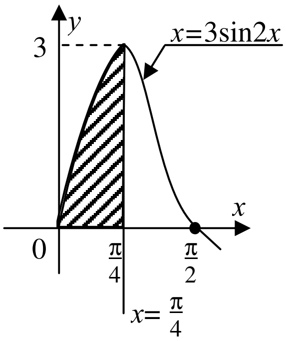

Рисунок 3.24

Розв'язання

Побудуємо задану фігуру (рис. 3.24).

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\sin 2x)^2 dx = 9\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x dx = \frac{9}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4x)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\pi(x-\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{2}\pi\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{9\pi^2}{8} \text{ (од. куб.).}$$

Відповідь. $\frac{9\pi^2}{8}$ (од. куб.).

Приклад 3.18. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4x - 3$ та $y = x - 1$.

Розв'язання

Побудуємо задану фігуру. Об'єм V тіла обертання являє собою різницю двох об'ємів: об'єм V_1 тіла, яке утворене обертанням дуги AB параболи та об'єм V_2 тіла, яке утворене обертанням відрізка AB прямої навколо осі OX.

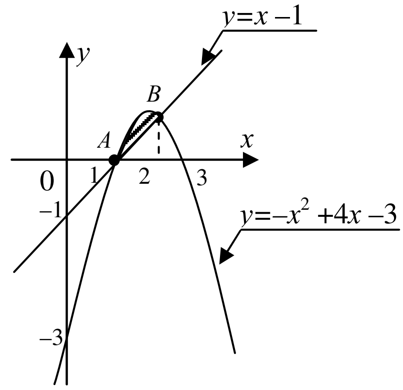

Рисунок 3.25

Знайдемо точки перетину прямої та параболи.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3; \\ y = x - 1. \end{cases}$$

$x - 1 = -x^2 + 4x - 3$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Тоді

$$V_1 = \pi\int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)^2 dx = \pi\int_1^2 (x^4 + 16x^2 + 9 - 8x^3 + 6x^2 - 24x)dx =$$

$$= \pi\int_1^2 (x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9)dx = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{22}{3}x^3 - 12x^2 + 9x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5}(32-1) - 2(16-1) + \frac{22}{3}(8-1) - 12(4-1) + 9(2-1)\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{31}{5} - 30 + \frac{154}{3} - 36 + 9\right) = \frac{8\pi}{15} \text{ (од. куб.)}.$$

$$V_2 = \pi\int_1^2 (x-1)^2 dx = \pi\frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_1^2 = \pi(1-0) = \frac{\pi}{3} \text{ (од. куб.)}.$$

Шуканий об'єм V дорівнює різниці знайдених об'ємів.

$$V = \frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{5}\pi \text{ (од. куб.)}.$$

Приклад 3.19. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі OY фігури, обмеженої лініями $y = 2x$; $x + y = 10$; $x = 1$.

Розв'язання

Побудуємо задану фігуру. Шуканий об'єм V являє собою суму двох об'ємів: об'єма V_1 тіла, яке утворене обертанням осі OY відрізка CB та об'єм V_2 тіла, яке утворене обертанням навколо осі OY відрізка AB.

Знайдемо координати точок A, B, C.

З системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 10; \\ x = 1 \end{cases}$$

знаходимо координати точки C.

$x = 1, y = 9$ $C(1; 9)$.

З системи рівнянь

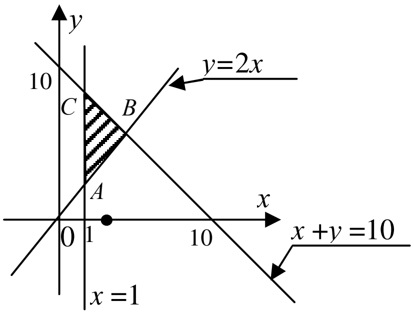

Рисунок 3.26

$$\begin{cases} y = 2x; \\ x = 1 \end{cases}$$

знаходимо координати точки A.

$x = 1, y = 2$ $A(1; 2)$.

З системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 10; \\ y = 2x \end{cases}$$

знаходимо координати точки B.

$x + 2x = 10,\ 3x = 10,\ x = \dfrac{10}{3},\ y = \dfrac{20}{3}$ $B\left(\dfrac{10}{3};\ \dfrac{20}{3}\right)$.

Знаходимо зазначені об'єми тіл обертання навколо осі OY за формулою

$$V = \pi\int_{c}^{d} f^2(y)dy.$$

$$V_1 = \pi\int_{2}^{\frac{20}{3}}\left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4}\int_{2}^{\frac{20}{3}} y^2 dy = \frac{\pi}{4}y^3\Big|_{2}^{\frac{20}{3}} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{8000}{27} - 8\right) = \frac{1946\pi}{81} \text{ (од. куб.)}.$$

$$V_2 = \pi\int_{\frac{20}{3}}^{9}(10 - y)^2 dy = -\frac{\pi}{3}(10 - y)^3\Big|_{\frac{20}{3}}^{9} = -\frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1000}{27}\right) = \frac{973\pi}{81} \text{ (од. куб.)}.$$

Тоді знаходимо шуканий об'єм V.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1946\pi}{81} + \frac{973\pi}{81} = \frac{973\pi}{27} \text{ (од. куб.)}.$$

Відповідь. $\dfrac{973\pi}{27}$ (од. куб.).

Приклад 3.20. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі OX та навколо осі OY фігури, обмеженої лініями $x = y^2 + 4$ та $x = -y^2 + 12$, $y = 0$.

Розв'язання

Побудуємо задану фігуру.

Знайдемо об'єм V_{OX} тіла обертання фігуру ABC навколо осі OX. Цей об'єм складається з суми двох об'ємів: об'єм V_1 тіла обертання навколо осі OX фігури ABD та об'єма V_2 тіла обертання навколо осі OX фігури DBC. Знайдемо координати точок A, B, C, D.

Точки A та C є вершинами заданих парабол, отже це такі точки: $A(4; 0)$; $C(12;0)$.

Координати точки B знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x = y^2 + 4; \\ x = -y^2 + 12, \end{cases}$$

маючи на увазі, що $y_B > 0$.

Розв'язком цієї системи рівнянь є $x = 8$ та $y = 2$. Значить точки B та D є такими: $B(8;\ 2)$, $D(8;\ 0)$.

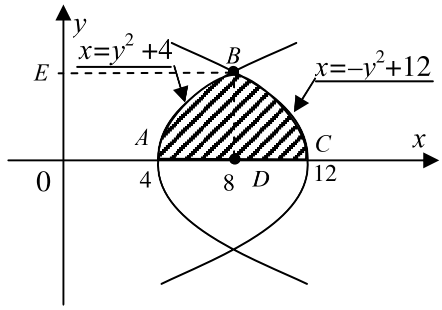

Рисунок 3.27

Запишемо рівняння парабол у вигляді $y = \sqrt{x-4}$ та $y = \sqrt{12-x}$. Далі маємо:

$$V_1 = \pi\int_4^8 \left(\sqrt{x-4}\right)^2 dx = \pi\int_4^8 (x-4)\,dx = \frac{\pi}{2}(x-4)\Big|_4^8 = \frac{\pi}{2}(16-0) = 8\pi \text{ (од. куб.)}.$$

$$V_2 = \pi\int_8^{12} \left(\sqrt{12-x}\right)^2 dx = \pi\int_8^{12} (12-x)\,dx = -\frac{\pi}{2}(12-x)\Big|_8^{12} = -\frac{\pi}{2}(0-16) = 8\pi \text{ (од. куб.)}.$$

$V_{OX} = V_1 + V_2 = 8\pi + 8\pi = 16\pi$ (од. куб.).

Якщо фігура ABC обертається навколо вісі OY, то об'єм V_{OY} тіла обертання є різницею двох об'ємів: об'єм V_1 тіла обертання навколо осі OY фігури $EACO$ та об'єм V_2 тіла обертання навколо осі OY фігури $EBAO$.

Знайдемо ці об'єми, виходячи з формули $V = \pi\int_c^d f(y)dy$.

$$V_1 = \pi\int_0^2 \left(-y^2+12\right)dy = \pi\left(-\frac{1}{3}y^3 + 12y\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(-\frac{8}{3} + 24\right) = \frac{64\pi}{3} \text{ (од. куб.)}.$$

$$V_2 = \pi\int_0^2 \left(y^2+4\right)dy = \pi\left(\frac{1}{3}y^3 + 4y\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{8}{3} + 8\right) = \frac{32\pi}{3} \text{ (од. куб.)}.$$

Тоді $V_{OY} = V_1 - V_2 = \dfrac{64\pi}{3} - \dfrac{32\pi}{3} = \dfrac{32\pi}{3}$ (од. куб.).

Відповідь. $V_{OX} = 16\pi$ (од. куб.); $V_{OY} = \dfrac{32\pi}{3}$ (од. куб.).

Приклад 3.21. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі OX фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases} x = 16\cos^3 t; \\ y = 16\sin^3 t. \end{cases}$.

Розв'язання

Побудуємо задану фігуру (рис. 3.28).

Навколо осі OX обертається фігура ABC, внаслідок чого утворюється тіло обертання. Оскільки фігура ABC є симетричною відносно осі OY, то об'єм V зазначеного тіла обертання дорівнює подвійному об'єму V_1 тіла обертання навколо осі OX фігури OBC.

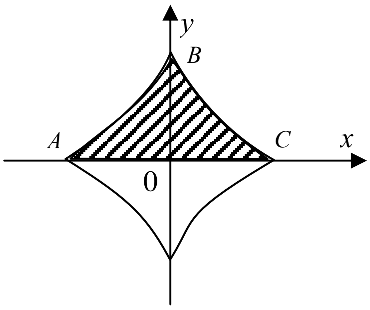

Рисунок 3.28

$$V = 2V_1 = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 16^2 \sin^6 t(-3\cdot 16\cos^2 t\sin t)dt =$$

$$= -6\pi\cdot 16^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\sin t dt =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \cos t = z; & \begin{array}{|c|c|}\hline t & z \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \frac{\pi}{2} & 0 \\ \hline \end{array} \\ -\sin t dt = dz; & \end{array}\right] = 6\pi\cdot 16^3\int_0^1 (1-z^2)^3 z^2 dz =$$

$$= 6\pi\cdot 16^3\int_0^1 (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8)dz = 6\pi\cdot 16^3\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{3}{5}z^5 + \frac{3}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 6\pi\cdot 16^3\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) = \frac{32\cdot 16^3}{105}\pi \text{ (од. куб.).}$$

Відповідь. $\frac{32\cdot 16^3}{105}\pi$ (од. куб.).

Приклад 3.22. Знайти об'єм тіла обертання навколо полярної осі фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = 5(1 - \cos\varphi)$.

Розв'язання

Побудуємо задану фігуру (рис. 3.29).

Кардіоїда є симетричною відносно полярної осі фігурою. Будемо вважати, що навколо полярної осі обертається фігура OAB.

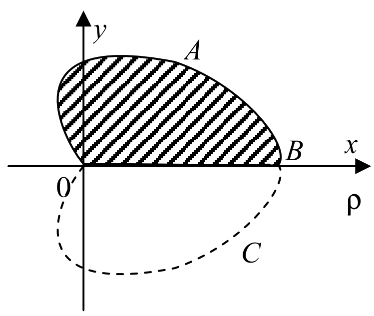

Рисунок 3.29

Згідно з формулою (3.28) маємо

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} 5^3(1-\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} 1\text{-}\cos\varphi = z; & \begin{array}{|c|c|}\hline \varphi & z \\ \hline \pi & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \sin\varphi d\varphi = dz; & \end{array}\right] = \frac{1250\pi}{3}\int_0^2 z^3 dz =$$

$$= \frac{1250\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}z^4\Big|_0^2 = \frac{5000}{3}\pi \text{ (од. куб.).}$$

Відповідь. $= \frac{5000}{3}\pi$ (од. куб.).

3.4. Обчислення площі поверхні тіла обертання

3.4.1. Обчислення площі поверхні тіла обертання дуги, заданої у декартових координатах навколо осі *OX*

Нехай на сегменті $[a;b]$ задано неперервну невід'ємну функцію $y=f(x)$. Функція $y=f(x)$ диференційована на сегменті $[a;b]$, а її похідна $f'(x)$ неперервна на цьому сегменті. Крива $y=f(x)$ обертається навколо осі *OX* і при цьому утворюється тіло обертання (рис. 3.24). Визначимо площу поверхні тіла обертання дуги кривої $y=f(x)$ навколо осі *OX*.

Сегмент $[a;b]$ точками розподілу $a<x_0<x_1<x_2<..<x_n=b$ розіб'ємо на часткові сегменти, довжини яких позначимо $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Через точки розподілу проведемо прямі, паралельні осі OY, які дугу *AB* розіб'ють на часткові дуги.

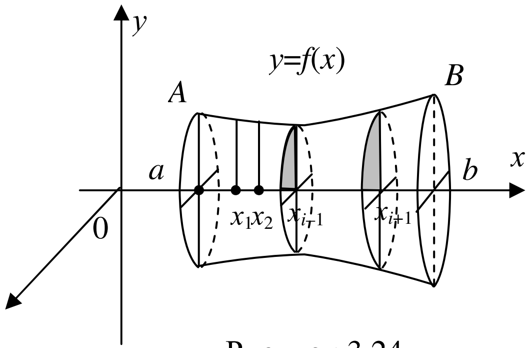

Рисунок 3.24

У кожну часткову дугу впишемо хорду, що сполучає кінці дуги. Кожна хорда при обертанні утворює зрізаний конус, площу поверхні якого можна знайти за формулою:

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta l_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

де Δl_i – довжина часткової хорди.

Як було показано раніше

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i, \text{ де } c_i \in [x_{i-1};x_i].$$

Площа поверхні, яку утворює при обертанні вся ламана, вписана в дугу *AB*, таким чином, дорівнює

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i .$$

Сума S_n є інтегральною сумою. Очевидно, що при необмеженому збільшенні числа *n* точок розбиття площа S_n необмежено наближатиметься до значення площі *S* поверхні тіла обертання

$$S = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0} 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x_i)\right)^2}\,dx,$$

де $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$.

Остаточно, маємо формулу

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x_i)\right)^2}\,dx. \qquad (3.29)$$

Якщо функція $y = f(x)$ на сегменті $[a; b]$ є недодатною, тобто $f(x) < 0$, то площа поверхні обертання знаходиться за формулою

$$S = -2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (3.30)$$

3.4.2. Обчислення площі поверхні тіла обертання дуги, заданої у параметричній формі, навколо осі *OX*

Нехай неперервна невід'ємна на сегменті $[a; b]$ функція $y = f(x)$ задана у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де $t \in [\alpha; \beta]$; $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$. Функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ є диференційованими на сегменті $[\alpha; \beta]$, а їх похідні $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$ є неперервними на цьому сегменті та $\varphi'(t)$ відрізняється від нуля на сегменті $[\alpha; \beta]$.
Знайдемо площу поверхні тіла обертання дуги заданої кривої навколо осі *OX*.

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Зробимо заміну змінної інтегрування у інтегралі $x = \varphi(t)$, враховуючи, що диференціал дуги $dl = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ можна подати у вигляді

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(x))^2}\,dt.$$

Отже,

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)dl = = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(x))^2}\,dt.$$

Остаточно маємо

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(x))^2}\,dt \qquad (3.31)$$

або

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(x))^2}\,dt. \qquad (3.31')$$

3.4.3. Обчислення площі поверхні тіла обертання дуги, заданої у полярних координатах, навколо полярної осі

Нехай неперервна невід'ємна на сегменті $[a; b]$ функція $y = f(x)$ задана у полярних координатах:

$$\rho = \rho(\varphi),$$

де $\varphi \in [\alpha; \beta]$. Функції $\rho(\varphi)$ є диференційованою на сегменті $[\alpha; \beta]$ функцією, а її похідна $\rho'(\varphi)$ неперервна на цьому сегменті.

Визначимо площу поверхні тіла обертання заданої дуги навколо полярної осі.

Як і у п. 3.2.3 функцію $\rho = \rho(\varphi)$ подамо у вигляді

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi; \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \end{cases}$$

при цьому $\varphi \in [\alpha; \beta]$; $\rho(\alpha)\cos\alpha = a$; $\rho(\beta)\cos\alpha = b$.

У такому уразі будемо користуватися формулою (3.25), враховуючи, що $\psi(t) = \rho(\varphi)\sin\varphi$, а диференціал дуги $dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(x))^2}dt$ у полярних координатах маж вигляд

$$dl = \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2}d\varphi.$$

Отже, маємо

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2}d\varphi. \qquad (3.32)$$

3.4.4. Приклади

Приклад 3.23. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі OX астроїди, заданої рівнянням $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$.

Розв'язання

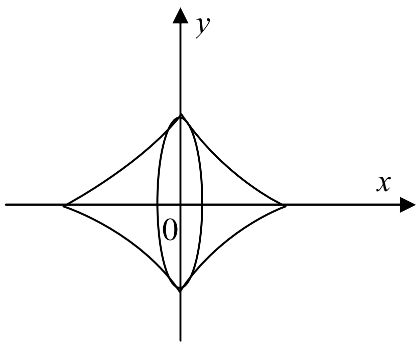

Рисунок 3.30

Функція $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ є неявно заданою функцією. Знайдемо похідну y'.

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \cdot y' = 0;\ y' = \frac{-x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}};$$

$$(y')^2 = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}};\ 1 + (y')^2 = 1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Поділимо обидві частини рівності $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ на $x^{\frac{2}{3}} \neq 0$. Маємо $1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}$. Значить,

$$1 + (y')^2 = \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}};\quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{2}{|x|^{\frac{1}{3}}} = 2 \cdot |x|^{-\frac{1}{3}}.$$

Тоді, враховуючи симетрію заданої кривої (рис. 3.30), знаходимо площу за формулою

$$S = 2\pi\int\limits_{-a}^{8} y\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx.$$

Виходить

$$S = 2\pi\cdot 2\int\limits_{0}^{8} y\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx.$$

Виразимо y через x: $y^{\frac{2}{3}} = 4 - x^{\frac{2}{3}}$. Тоді $y = \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

$$S = 4\pi\int\limits_{0}^{8}\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = 8\pi a^{\frac{1}{3}}\int\limits_{0}^{8}\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{3}}dx\,.$$

Зробимо заміну $4 - x^{\frac{2}{3}} = t^2$, тоді $\left(-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = 2tdt.$

Знаходимо нові межі інтегрування: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 8 \Rightarrow t = 0.$

$$S = 8\pi a^{\frac{1}{3}}\int\limits_{2}^{0} t^3\left(-3t\right)dt = -24\pi\int\limits_{a^{\frac{1}{3}}}^{0} t^4 dt = -24\pi\left.\frac{t^5}{5}\right|_2^0 = \frac{48}{5}\pi a^2 \quad \left(\text{од.кв.}\right).$$

Відповідь. $\dfrac{48}{5}\pi a^2 \quad \left(\text{од.кв.}\right)$.

Приклад 3.24. Крива $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, де $y \geq 0$, обертається навколо осі OX. Знайти площу поверхні тіла обертання.

Розв'язання

Задана крива є верхньою частиною еліпса, коли $y \geq 0$ (рис. 3.31).

Тілом обертання фігури ABC навколо осі OX є еліпсоїд, півосі якого $a = 3$, $b = c = 2$. Знайдемо y з рівняння еліпса.

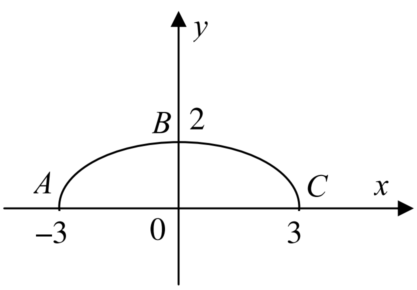

Рисунок 3.31

$$y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right),\ y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \text{ або } y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\,.$$

Знаходимо далі диференціал дуги

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx\,.$$

$$y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{9 - x^2}} = \frac{-2x}{3\sqrt{9 - x^2}}\,.$$

$$(y')^2 = \frac{4x^2}{9(9 - x^2)};\ 1 + (y')^2 = \frac{81 - 5x^2}{9(9 - x^2)}.$$

$$dl = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{81 - 5x^2}{9 - x^2}}\,dx\,.$$

Площа S тіла обертання дуги ABC навколо осі OX дорівнює подвійній площі S_1 тіла обертання навколо осі OX дуги BC.

$$S=2S_1=4\pi\int_0^3\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}dx\cdot\frac{1}{3}\sqrt{\frac{81-5x^2}{9-x^2}}dx=$$

$$=\frac{8\pi}{9}\int_0^3\sqrt{81-5x^2}dx=\frac{8\sqrt{5}\pi}{9}\sqrt{\frac{81}{5}-x^2}dx=\left[\begin{array}{l} x=\frac{9}{\sqrt{5}}\sin t; \\ dx=\frac{9}{\sqrt{5}}\cos tdt; \end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline 3 & \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}\right]=$$

$$=\frac{8\sqrt{5}\pi}{9}\cdot\frac{9}{\sqrt{5}}\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}\sqrt{\frac{81}{5}-\frac{81}{5}\sin^2 t}\cos tdt=\frac{8\cdot 9\pi}{\sqrt{5}}\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=$$

$$=\frac{72\pi}{\sqrt{5}}\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}\cos^2 tdt=\frac{36}{\sqrt{5}}\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}(1+\cos 2t)dt=\frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\right)\Bigg|_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}=$$

$$=\frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{2}\sin 2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\Bigg|.$$

Знайдений вираз можна спростити.

$$S=\frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2\sin\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\cos\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=$$

$$=\frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)=$$

$$=\frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{5}{9}}\right)=\frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)\text{ (од. кв.).}$$

Відповідь. $\frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)$ (од. кв.).

Приклад 3.25. Знайти площу поверхні тіла обертання навколо осі OX кривої

$$\begin{cases} x=7(t\sin t+\cos t); \\ y=7(\sin t-t\cos t), \end{cases}$$

де $0\le t\le\pi$.

Розв'язання

Знайдемо диференціал дуги у параметричній формі.

$x'=7(\sin t+t\cos t-\sin t)=7t\cos t$;

$y'=7(\cos t-\cos t-t\sin t)=7t\sin t$.

$(x')^2=49t^2\cos^2 t$; $(y')^2=49t^2\sin^2 t$, $(x')^2+(y')^2=49t^2$.

$dl=\sqrt{49t^2}dt=7tdt$.

Тоді

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} 7(\sin t - t\cos t)7t dt = 98\pi\int_0^{\pi}(t\sin t - t^2\cos t)dt =$$

$$= 98\pi\left(\int_0^{\pi} t\sin t dt - \int_0^{\pi} t^2\cos t dt\right).$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} t\sin t dt = \begin{bmatrix} u = t; & du = dt; \\ dv = \sin t dt; & v = -\cos t. \end{bmatrix} = -t\cos t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos t dt =$$

$$= -\pi\cos\pi + \sin t\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} t^2 cos t dt = \begin{bmatrix} u = t^2; & du = 2t dt; \\ dv = cos t dt; & v = \sin t. \end{bmatrix} = t^2\sin t\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} t\sin t dt = -2\pi.$$

Звідси

$S = 98\pi(\pi + 2\pi) = 294\pi^2$ (од. кв.).

Відповідь. $294\pi^2$ (од. кв.).

Приклад 3.26. Знайти площу поверхні тіла обертання навколо полярної осі кола $\rho = 16\sin\varphi$.

Розв'язання

Задана крива описується коли $0 \le \varphi \le \pi$ (рис. 3.32). Крива є симетричною відносно осі OY, отже шукану площу S будемо шукати як подвійну площу S_1 тіла обертання навколо полярної осі правого півкола. Тоді $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Знайдемо диференціал дуги у полярних координатах.

$\rho' = 16c0s\,\varphi$; $\rho^2 = 16^2\sin^2\varphi$; $(\rho')^2 = 16^2\cos^2\varphi$;

$(\rho')^2 + \rho^2 = 16^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 16^2$.

$dl = \sqrt{16^2}dx = 16d\varphi$.

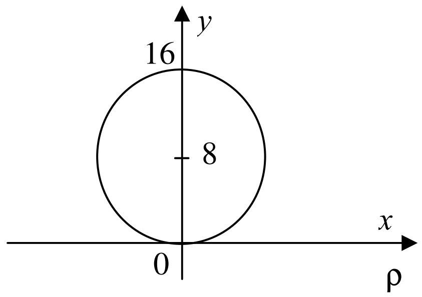

Рисунок 3.32

Тоді за формулою (3.32) маємо

$$S = 2S_1 = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin\varphi\sin\varphi\cdot 16d\varphi =$$

$$= 4\pi\cdot 16^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi = 512\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= 512\pi\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 512\pi\cdot\frac{\pi}{2} = 256\pi^2$$

(од. кв.).

Відповідь. $= 256\pi^2$ (од. кв.).

3.5. Загальна схема застосування визначеного інтеграла

Визначений інтеграл широкого застосовується при розв'язанні задач геометрії, механіки, фізики, техніки.

У попередніх параграфах було показано, що за допомогою визначеного інтеграла можуть бути знайдені деякі невідомі величини. При цьому застосовується метод складання інтегральної суми з подальшим граничним переходом. У ряді випадків зручніше користуватися іншою схемою застосування визначеного інтеграла. Нехай нас цікавить значення величини F на сегменті $[a;b]$. При цьому будемо вважати, що кожному частковому проміжку $[x;x+\Delta x]\in[a;b]$ відповідає така частина величини F_i, що коли проміжок $[a;b]$ розкладено на часткові проміжки, то і величина F розкладається на відповідні частини. Тоді можна вважати, що величина F є функцією проміжку $[x;x+\Delta x]$. Задача полягає у тому, щоб знайти значення функції на усьому проміжку $[a;b]$.

Розглянемо такий елемент ΔF величини F, що відповідає проміжку $[x;x+\Delta x]$. Аналізуючи механічні чи фізичні властивості величини F, знаходимо для величини ΔF наближене значення типу $f(x)\Delta x$, яке є лінійним відносно Δx, а від ΔF відрізняється лише на нескінченно малу більш високого порядку, ніж Δx, коли $\Delta x\to 0$. Це означає, що з нескінченно малого при $\Delta x\to 0$ елемента ΔF виділяють його головну частину. Тоді відносна похибка наближеної рівності

$$\Delta F\approx f(x)\Delta x$$

буде наближатися до нуля разом з Δx. Далі, щоб знайти значення F на $[a;b]$, можна подати F у вигляді

$$F=\int_a^b f(x)dx$$

або, оскільки $f(x)dx=dF(x)$, то

$$F=\int_a^b dF(x)=F(b)-F(a).$$

Треба зазначити, перевага цього методу полягає у тому, що необов'язково знати функцію $F(x)$, а достатньо знати лише її диференціал або приріст.

Метод інтегральних сум зручніше застосовувати при розв'язанні геометричних задач, а метод складання диференціала частіше застосовується при розв'язанні фізичних задач.

Приклад 3.27. Посудина циліндричної форми під атмосферним тиском, що дорівнює 10330 кг/м^2, заповнюється газом. Зверху посудина закрита поршнем.

Визначити роботу, що витрачається на ізотермічне стиснення газу при переміщенні поршня на відстань $h = 1{,}2\, м$ за умови, що висота циліндра $H = 1{,}5\, м$, а радіус циліндра $R = 0{,}4\, м$.

Розв'язання

При ізотермічній зміні стану газу, коли його температура залишається незмінною, залежність між об'ємом V і тиском P газу виражається формулою $pV = c$ відповідно до закону Бойля-Маріотта.

Якщо поршень висунути всередину циліндра на x м, то тиск газу на одиницю площі поршня можна визначити за формулою

$$P(x) = \frac{c}{V(x)} = \frac{c}{S \cdot (H - x)},$$

а тиск на всю площу поршня буде дорівнювати

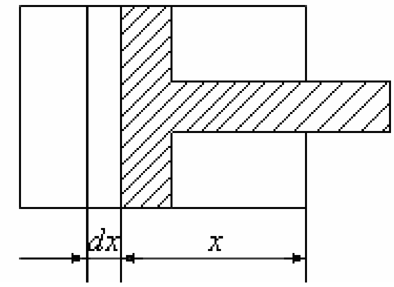

Рисунок 3.33

$$P(x) = Sp(x) = \frac{c}{H - x}.$$

Вважаючи, що робота, яка витрачається на рух поршня на x м, є деяка функція $q(x)$, та вважаючи, що при подальшому переміщені поршня на малу відстань dx тиск $P(x)$ залишається незмінним, знайдемо наближене значення приросту функції $q(x)$, тобто її диференціал (рис. 3.33).

$$\Delta q \approx P(x)dx = \frac{c}{H - x}dx = dq.$$

Тоді шукана робота A може бути знайдена за допомогою визначеного інтеграла.

$$A = c\int_0^h \frac{dx}{H - x} = (-c \cdot \ln|H - x|)\Big|_0^h = -c \cdot \ln\left|\frac{H - h}{H}\right| = c \cdot \ln\left|\frac{H}{H - h}\right|.$$

Визначимо

$$V_0 = \pi R^2 H = 0{,}24\pi\,(м^3); \quad c = p_0 V_0 = 2479{,}2\pi; A = 12533{,}3\, кГм = 122951{,}7 \text{ Дж}.$$

Наведемо без доведення ще деякі випадки застосування визначенного інтеграла.

1. Робота A, яку виконує деяка змінна сила $F(x)$ по переміщенню матеріальної точки вздовж відрізка $[a;b]$ осі OX визначається за формулою:

$$A = \int_a^b F(x)dx. \tag{3.33}$$

2. Координати центра мас плоскої дуги, заданої рівнянням $y = f(x)$ на сегменті $[a;b]$, визначаються формулами

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}; \\ y_c = \dfrac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}. \end{cases} \tag{3.34}$$

3. Маса плоскої кривої L, що задана рівняннями $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, де $\rho(x;y)$ – лінійна густина маси у точці ($x;y$)$\in L$ визначається формулою

$$M=\int_\alpha^\beta \rho(\varphi(t);\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{3.35}$$

4. Маса плоскої кривої L, що задана рівнянням $y=f(x)$, де $\rho(x;y)$ – лінійна густина маси у точці $(x;y)\in L$ визначається формулою

$$M=\int_\alpha^\beta \rho(x;f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{3.36}$$

5. Статичні моменти кривої L, що задана рівнянням $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, де $t\in[\alpha;\beta]$, відносно осей OX, OY, якщо лінійна густина $\rho(x;y)\equiv 1$ мають вигляд

$$M_x=\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt; \tag{3.37}$$

$$M_y=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{3.38}$$

6. Статичні моменти кривої L, що задана рівнянням $y=f(x)$, де $x\in[a;b]$, відносно осей OX, OY, якщо лінійна густина $\rho(x;y)\equiv 1$.

$$M_x=\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx; \tag{3.39}$$

$$M_y=\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{3.40}$$

7. Моменти інерції кривої L, що задана рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, де $t\in[\alpha;\beta]$, відносно осей OX, OY, якщо лінійна густина $\rho(x;y)\equiv 1$, знаходяться за формулами

$$I_x=\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt; \tag{3.41}$$

$$I_y=\int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{3.42}$$

8. Координати центра мас плоскої однорідної фігури, обмеженої неперервними лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, знаходяться за формулами

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int\limits_a^b x\big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx}{\int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx}; \\ y_c = \dfrac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \big(f_2^2(x) - f_1^2(x)\big)\,dx}{\int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx}. \end{cases} \tag{3.43}$$

9. Статичні моменти відносно осей OX та OY плоскої фігури, обмеженої неперервними лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, якщо поверхнева густина $\rho \equiv 1$, знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int\limits_a^b \big(f_2^2(x) - f_1^2(x)\big)\,dx; \\ M_y &= \int\limits_a^b x\big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Моменти інерції відносно осей OX та OY плоскої фігури, обмеженої неперервними лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, якщо поверхнева густина $\rho \equiv 1$, знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3}\int\limits_a^b \big(f_2^3(x) - f_1^3(x)\big)\,dx; \\ I_y &= \int\limits_a^b x^2\big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \end{aligned} \tag{3.45}$$