1. Дайте означення границі функції «на нескінченності» і «в точці»

Границя функції "на нескінченності" визначає, як поводиться функція, коли її аргумент збільшується або зменшується до нескінченності. Якщо ця границя існує і скінчена, то говорять, що функція має границю "на нескінченності".

Границя функції "в точці" визначає, як поводиться функція, коли її аргумент наближається до певної точки на числовій прямій.

2. Геометричне тлумачення границі функції полягає в тому, що вона описує поведінку функції наближену до певного значення при наближенні її аргументу до певної точки або до нескінченності.
3. Властивості границь функції.

Властивості границі числової послідовності:

1 Якщо послідовність має границю, то ця границя є единою.

2 Послідовність, що має границю, є обмеженою.

3 Теорема існування границі монотонної обмеженої послідовності (теорема Вейєрштрасса): якщо послідовність $\{a_n\}$ неспадна і обмежена зверху, $a_n \le M$, то послідовність має границю. Якщо послідовність $\{a_n\}$ не зростає і обмежена знизу, то вона має границю.

4 Нехай послідовність $\{x_n\}$ має границю, яка дорівнює *a*, послідовність $\{y_n\}$ має границю, яка дорівнює *b*, тоді справедливі такі рівності:

7

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n = a \pm b.$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = a \cdot b.$$

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim y_n}{\lim x_n} = \frac{a}{b},\ b \ne 0$$

$$\lim x_n^{y_n} = \lim x_n^{\lim y_n} = a^b$$

5 Якщо $\lim x_n \le \lim y_n$, то $a \le b$.

6 Якщо $x_n \le z_n \le y_n$ і $\lim x_n = a$; $\lim y_n = a$, то $\lim z_n = a$;

4. Нескінченно малі –> 0. Нескінченно великі величини - це величини, які зростають до нескінченності при наближенні до деякої точки.
5. Величина має границю, якщо існує таке число L, до якого вона наближається, коли її аргумент наближається до певної точки або до нескінченності.

6,7. Перша примітна границя (елементарна границя, стандартна границя, чудова границя) - це границя, яка має стандартну форму та може бути виражена аналітично або за допомогою відомих математичних функцій. Ці границі можна використовувати для обчислення більш складних границь.

Перша стандартна границя $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Друга стандартна границя $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Наведемо основні еквівалентності, які є наслідками першої та другої стандартних границь:

1 $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ – власне перша стандартна границя,

та її наслідки:

2 $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3 $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

4 $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

наслідки другої стандартної границі:

5 $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;

6 $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$;

7 $(1 + \alpha(x))^{n} - 1 \sim \alpha(x)n$;

8 $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

8. Нескінченно малі величини називають еквівалентними, якщо вони мають однакове або подібне поведінку при наближенні до деякої точки або до нескінченності.

Наведемо основні еквівалентності, які є наслідками першої та другої стандартних границь:

1 $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ – власне перша стандартна границя,

та її наслідки:

2 $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3 $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

4 $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

наслідки другої стандартної границі:

5 $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;

6 $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$;

7 $(1 + \alpha(x))^{n} - 1 \sim \alpha(x)n$;

8 $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

9. Функція називається неперервною в точці, якщо її значення мало змінюються при наближенні до цієї точки.

Функція називається неперервною на відкритому інтервалі (a, b), якщо вона є неперервною в кожній точці інтервалу (a, b).

Функція називається неперервною на замкнутому інтервалі [a, b], якщо вона є неперервною на цьому інтервалі, а також має границі на його кінцях.

10. Властивості неперервної функції.

Властивості неперервних у точці функцій:

1 Алгебраїчна сума скінченої кількості неперервних функцій є функція неперервна.

31

2 Добуток скінченої кількості неперервних функцій є функція неперервна.

3 Частка двох неперервних функцій є функція неперервна, за умови, що знаменник є відмінним від нуля у відповідній точці.

4 Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y=f(u)$ неперервна у відповідній точці $u_0=\varphi(x_0)$, то складена функція $y=f[\varphi(x)]$ буде неперервною в точці x_0.

5 Будь-яка елементарна функція є неперервною в будь-якій точці області визначення.

Властивості неперервних на відрізку функцій:

1) якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то принаймні в одній точці цього відрізка вона приймає найбільше значення M і принаймні в одній точці – найменше значення m (теорема Вейєрштрасса);

2) нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, тоді між точками a і b знайдеться принаймні одна точка $x = c$, у якій функція перетворюється на нуль: $f(c)=0$, при $a<c<b$ (перша теорема Больцано-Коші);

3) якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $f(a)=A$, $f(b)=B$, і $A \neq B$, то для будь-якого числа C, яке знаходиться між A і B, знайдеться принаймні одна точка $c \in [a;b]$ така, що $f(c)=C$ (друга теорема Больцано-Коші).

11,12. Точка розриву x_0 називається точкою розриву **першого роду**, якщо в цій точці існують обидві скінченні односторонні границі. Точки розриву першого роду бувають усувного і неусувного розриву.

Точка x_0 називається точкою розриву **другого роду**, якщо в цій точці функція f(x) не має принаймні однієї з односторонніх границь, або хоча б одна одностороння границя дорівнює нескінченності. 13. Неперервність основних елементарних функцій

1) Степінна функція: Функції вигляду f(x) = x^n, де n є раціональне число, є неперервними на всьому їх домені. Наприклад, функції f(x) = x, f(x) = x^2, f(x) = x^3, тощо, є неперервними на всій дійсній вісі.
2) Експоненціальна функція: Функція f(x) = e^x, де e - це число Ейлера, є неперервною на всій дійсній вісі. Аналогічно, функція f(x) = a^x, де a > 0 і a ≠ 1, є неперервною на всій дійсній вісі.
3) Логарифмічна функція: Функція f(x) = ln(x), яка є оберненою до експоненціальної функції, є неперервною на своєму домені, яке складається з усіх додатних чисел.
4) Тригонометричні функції: Функції синуса, косинуса, тангенса та їх обернені функції, такі як arcsin(x), arccos(x) та arctan(x), є неперервними на своєму домені. Наприклад, функції sin(x) та cos(x) є неперервними на всій дійсній вісі, а функція tan(x) є неперервною на своєму домені, за винятком точок, де тангенс має вертикальні асимптоти.

Контрольні запитання ТЕМА №1

1. Дайте означення границі функції «на нескінченності» і «в точці».

1.3 Границя функції в точці

Визначення 1.7. Число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що при $0 < |x - x_0| < \delta$, буде виконуватись нерівність: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записується границя функції $f(x)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Визначення 1.3. Число A називається границею числової послідовності $\{a_n\}$, якщо для довільного наперед заданого числа $\varepsilon > 0$, яке може бути яким завгодно малим, існує такий номер $N = N(\varepsilon)$ (залежний від обраного ε), що для усіх значень $n \geq N$ буде виконуватися нерівність: $|a_n - A| < \varepsilon$.

2. Яке геометричне тлумачення границі функції?

Означення границі функції має просте *геометричне тлумачення*: для всіх точок x, які віддалені від точки a не далі, ніж на δ, графік функції $y = f(x)$ лежить усередині смуги шириною 2ε, обмеженої прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$ (рис. 8).

11. Які існують розриви функції?

Точки, у яких порушується хоча б одна з умов неперервності функції, називаються точками розриву, тобто це точки, у яких функція:

1) або не визначена;
2) або не існує границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Точки розриву ділять на точки першого і другого роду.

Визначення 2.5. Точка розриву x_0 називається точкою розриву першого роду, якщо в цій точці існують обидві скінченні односторонні границі. Точки розриву першого роду бувають усувного і неусувного розриву.

Визначення 2.6. Точка x_0 називається точкою розриву другого роду, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має принаймні однієї з односторонніх границь, або хоча б одна одностороння границя дорівнює нескінченності.

Контрольні запитання ТЕМА №2

1. У зв'язку з якими задачами виникає поняття похідної?

2. Дайте означення похідної.

1. *Означення похідної. Її геометричний і механічний зміст.*

Для заданої функції $y = f(x)$, знайдемо приріст Δy, задавши приріст аргументу Δx в точці x.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

<u>О.</u> Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то ця границя називається похідною від функції $f(x)$ в точці x і позначається: y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$.

3. Що можна сказати про властивості диференційованої функції ?

<u>О.</u> Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною* в т. x, якщо її приріст Δy в цій точці може бути представлений у вигляді:

$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$ (1), де A – деяке число, $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx.

<u>Т.</u> Для того, щоб функція $y = f(x)$ була диференційовна в т. x, необхідно та достатньо, щоб ця функція мала скінченну похідну в т. x і в формулі приросту функції (1) $A = f'(x)$.

Без доведення.

Отже, для диференційовної функції потрібно подання Δy у вигляді:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0. \ (2)$$

Поняття: „ функція має скінченну похідну в т. x” рівносильне
„ функція диференційовна в т. x”.

4. Що таке диференціал функції і для чого його використовують?

<u>О.</u> *Диференціалом* функції $y = f(x)$ в т. x називається вираз вигляду

$dy = f'(x) \cdot \Delta x$. (3)

5. Сформулюйте правила знаходження похідних та диференціалів.

<u>Правила обчислення диференціалів.</u>

Маючи таблицю похідних, можна побудувати таблицю диференціалів

$d(\cos x) = -\sin x dx$; $d(e^x) = e^x dx$; $d(tgx) = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$ і т.д.

Правила знаходження диференціалів такі:

1) $d(c \cdot u) = cdu$, $c = \text{const}$.
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$.
3) $d(u \cdot v) = vdu + udv$.
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Правила диференціювання

Вважаємо $c = const$, $u = u(x)$, $v = v(x)$

1. $c' = 0$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(u \pm c)' = u'$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$; $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$
6. $\left(f\left(u(x)\right)\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$
7. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $x = x(y)$ – обернена функція до $y = y(x)$.

6. Запишіть таблицю похідних.

1. $c' = 0$, $c = \text{const}$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\text{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\text{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\text{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$
17. $(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$
18. $(\text{th}\, x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$
19. $(\text{th}\, x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$

7. Як визначаються та позначаються похідні та диференціали вищих порядків?

1.О. Нехай $y = f(x)$. Тоді $y' = f'(x) = \varphi(x)$ – похідна є функцією від x.

Похідна від похідної першого порядку – це друга похідна.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$(y')' = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$(y'')' = y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

....

$$\left(y^{n-1}\right)' = y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Справа наведено інші позначення похідних.

8. В чому полягає правило Лопіталя?

Границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих функцій рівна границі відношення їх похідних, якщо такі існують

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

9. Як записується формула Тейлора та формула Маклорена?

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$ (3) – формула Тейлора для многочлена.

При $a = 0$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k$$ (4) – формула Маклорена.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$$ (8) – формула Маклорена.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Тейлора

10. Які необхідні умови локального екстремуму функції? Необхідна умова екстремуму, Достатня умова екстремуму

Т.1. Необхідна умова екстремуму: якщо функція $f(x)$ диференційовна в т. x_0 і досягає в цій точці локального екстремуму, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в яких $f'(x_0) = 0$, називаються стаціонарними.

Точки, в яких $f'(x_0) = 0, \infty$ або не існує називаються критичними точками І роду.

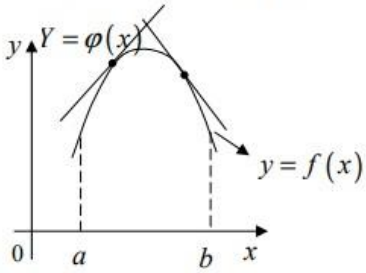
Т.2. Достатня умова екстремуму: нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$.

Якщо при переході через цю точку зліва направо $f'(x)$ змінює знак з «+» на «–», то в точці $x = x_0$ функція досягає максимуму; якщо ж $f'(x)$ змінює знак з «–» на «+», то в точці $x = x_0$ функція досягає мінімуму.

13. Що таке опуклість функції вниз та вгору, точки перегину? Як визначають характер опуклості функції за допомогою другої похідної? Рівняння дотичної

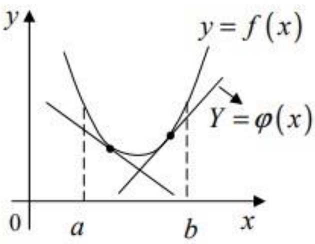
Вважаємо, що на інтервалі (a,b) графік функції $y=f(x)$ не має дотичної, паралельної осі Oy.

Рівняння дотичної $Y=\varphi(x)$. Проведемо до графіка функції дотичні:



$f(x)-Y<0$

Графік функції опуклий, якщо він розташований нижче будь-якої своєї дотичної.



$f(x)-Y>0$

Графік функції вгнутий, якщо він розташований вище будь-якої своєї дотичної.

Т. Якщо $f''(x)<0$ на (a,b), то графік функції $f(x)$ опуклий на (a,b).

Якщо $f''(x)>0$ на (a,b), то графік функції $f(x)$ вгнутий на (a,b).

Доведення. Нехай $x_0\in(a,b)$.

Скористаємось формулою Тейлора, обмежившись похідними 2-го порядку

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,\ c\in(a,b).$$

Рівняння дотичної:

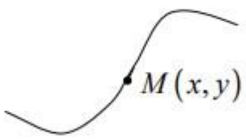
$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ – відомо

$$f(x)-Y=\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,\ (x-x_0)^2>0.$$

1) $f''(x)<0$; тоді $f(x)-Y<0\Rightarrow$ графік опуклий на (a,b),

2) $f''(x)>0$; тоді $f(x)-Y>0\Rightarrow$ графік вгнутий на (a,b).

О. Точка, яка з'єднує опуклу і вгнуту частину графіка, називається точкою перегину («перегиба» рос.).



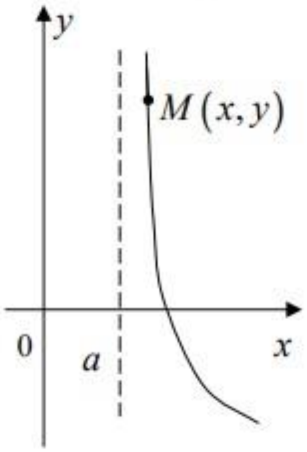
Точку перегину слід шукати серед тих точок, де $f''(x)=0,\infty$ або не існує. Ці точки називаються критичними точками II роду.

14. Що таке асимптоти графіка функції? Якими вони бувають? Як знаходити їх рівняння?

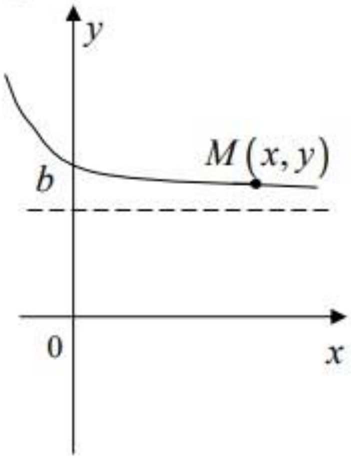
4. *Асимптоти графіка функції.*

О. Пряма l називається асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо, коли $M\to\infty$, $M\in$ графіку функції $f(x)$, відстань $\rho(M,l)\to 0$.

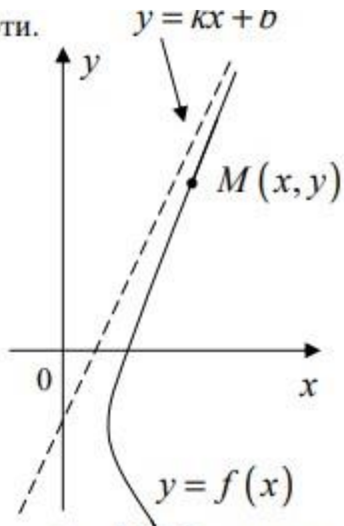
Розрізняють вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти.



$x = a$ – вертикальна асимптота



$y = b$ –горизонтальна асимптота



$y = kx + b$ – похила асимптота

1) $x = a$ – *вертикальна* асимптота, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

2) Пряма $y = kx + b$ є *похилою* асимптотою для функції $f(x)$, якщо при $x \to \pm\infty$ функція $f(x)$ подається у вигляді $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Т. Для того, щоб функція $f(x)$ мала похилу асимптоту $y = kx + b$, необхідно та достатньо, щоб існували скінченні границі:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \ (1), \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = b \ (2).$$

Без доведення.

Отже, для знаходження похилої асимптоти, знаходимо границі (1), (2). Якщо вони обидві скінченні записуємо

$$y = kx + b.$$

3) Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої, при $k = 0$, тобто

$$y = b.$$

3тема

1. Наведіть приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла?
   1) Обчислення площі під кривою: Припустимо, що маємо функцію f(x), яка задає криву на площині. Щоб обчислити площу під цією кривою в певному інтервалі [a, b], можемо використати визначений інтеграл. Визначений інтеграл від f(x) за інтервалом [a, b] позначається як ∫[a,b] f(x) dx і дає нам площу під кривою між x = a та x = b.

   2) Обчислення відстані або переміщення: Припустимо, що маємо функцію швидкості v(t), яка задає швидкість руху тіла відносно часу t. Щоб обчислити відстань, яку тіло подолало протягом певного часу, можна використати визначений інтеграл. Визначений інтеграл від v(t) за інтервалом [a, b] дає нам переміщення тіла за цей інтервал часу.

   3) Обчислення середнього значення функції: Визначений інтеграл також можна використовувати для обчислення середнього значення функції на певному інтервалі. Наприклад, щоб знайти середнє значення функції f(x) на інтервалі [a, b], можна обчислити визначений інтеграл від f(x) за цей інтервал та поділити його на довжину інтервалу (b - a).
2. Які властивості має визначений інтеграл? Властивості визначеного інтеграла

Властивості визначеного інтеграла

1) При перестановці меж інтегрування знак інтегралу змінюється на протилежний: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2) Інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3) Відрізок інтегрування можна розбити на частини:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) Інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожного доданку:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$$

3. Запишіть формулу Ньютона- Лейбніца. Формула ньютона лейбниця

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

4. Як інтегрують частинами у визначеному інтегралі? Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі
   1) розбиваємо підінтегральний вираз на частини u та dv , тобто якийсь фрагмент підінтегральної функції приймаємо за u , а те, що залишилось у підінтегральному виразі, – за dv ;
   2) знаходимо диференціал функції u u x   , а за диференціалом dv x інтегруванням відновлюємо одну із первісних v x ;
   3) застосовуємо формулу інтегрування частинами;
   4) беремо невизначений інтеграл vdu і записуємо остаточну відповідь.
5. Як здійснюється підстановка у визначеному інтегралі? Підстановка у визначений інтеграл

1) обираємо тип заміни змінної $(t = \varphi(x)$ або $x = \psi(t))$ і знаходимо зв'язок між диференціалами нової і вихідної змінних $(dt = \varphi'_x dx$, $dx = \psi'_t dt)$;

2) переходимо у підінтегральному виразі до нової змінної t;

3) знаходимо невизначений інтеграл за новою змінною інтегрування;

4) повертаємось до вихідної змінної x $\square t = \varphi(x)$, $t = \psi^{-1}(x) \square$.

6. Що таке невласний інтеграл першого роду? Як визначають його збіжність, розбіжність?

Невла́сний інтегра́л, **невласти́вий інтегра́л** — розширення поняття інтеграла Рімана. В інтегралі Рімана розглядають

- скінченний проміжок інтегрування [*a*, *b*];
- підінтегральна функція *f*(*x*) — обмежена (необхідна умова інтегровності функції за Ріманом).

У невласному інтегралі першого роду порушується перша умова, другого роду - друга умова.

Нехай $a \in R$. Невласний інтеграл першого роду визначається на одному з таких нескінченних інтервалів:

1. $(a, +\infty)$;
2. $(-\infty, a)$;
3. $(-\infty, +\infty)$.

Означення для інтервалу (*a*, +∞) [ред. | ред. код]

Невласний інтеграл першого роду є площею нескінченно широкої криволінійної трапеції

Означення. Нехай функція *f* : (*a*, +∞) → *R* така, що ∀ *A* > *a* : *f* ∈ *R*([*a*, *A*]), тобто є скінченним інтеграл Рімана

$$\int_a^A f(x)\,dx =: F(A).$$

Якщо існує скінченна границя послідовності інтегралів *F*(*A*), коли *A* → +∞, то

- значення цієї границі називають *невласним інтегралом першого роду* для функції *f* по інтервалу (*a*, +∞) і позначають символом $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$;
- невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називають *збіжним*.

Якщо ж виконуються умови означення, але границя *F*(*A*) не існує або рівна ±∞, то кажуть, що невласний інтеграл першого роду для функції *f розбігається* (або є *розбіжним*).

Аналогічно можна дати означення невласного інтеграла першого роду для інтервалу (−∞, *a*).

Означення. Нехай функція *f* : (−∞, +∞) → *R* така, що ∀ *A*, *B* ∈ *R*, *A* < *B* : *f* ∈ *R*([*A*, *B*]), тобто є скінченним інтеграл Рімана

$$\int_A^B f(x)\,dx =: F(A,B);$$

Якщо існує скінченна подвійна границя послідовності інтегралів *F*(*A*, *B*), коли *A* → −∞ та *B* → +∞ незалежно одне від одного, то

- значення цієї границі називають *невласним інтегралом першого роду* для функції *f* по інтервалу (−∞, +∞) і позначають одним із символів
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$
- невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ називають *збіжним*.

Якщо ж виконується умова означення, але границя *F*(*A*, *B*) не існує або рівна ±∞, то кажуть, що невласний інтеграл першого роду для функції *f розбігається* (або є *розбіжним*).

7. Що таке невласний інтеграл другого роду? Як визначають його збіжність, розбіжність?

Невла́сний інтегра́л, **невласти́вий інтегра́л** — розширення поняття інтеграла Рімана. В інтегралі Рімана розглядають

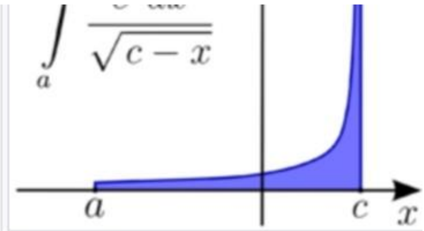
- скінченний проміжок інтегрування [*a*, *b*];
- підінтегральна функція *f*(*x*) — обмежена (необхідна умова інтегровності функції за Ріманом).

У невласному інтегралі першого роду порушується перша умова, другого роду - друга умова.

Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на інтервалі $[a, b)$.

Означення. Точка b називається *особливою точкою* функції $f(x)$, якщо

- для всіх $\alpha \in (0, b - a)$ функція f є обмеженою на інтервалі $[a, b - \alpha]$;
- функція f — необмежена на інтервалі $[a, b)$.



Невласний інтеграл другого роду є площею нескінченно високої криволінійно трапеції

Розглянемо функцію

$$F(\alpha) := \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx, \quad \alpha \in (0, b-a).$$

Означення. Нехай виконуються умови:

1. функція $f(x)$ визначена та неперервна на інтервалі $[a, b)$;
2. точка b — особлива точка функції $f(x)$;
3. існує скінченна границя $F(\alpha)$ при $\alpha \to 0$.

Тоді

- значення цієї границі називають *невласним інтегралом другого роду* і позначають символом
$$\int_a^b f(x)\,dx;$$
- кажуть, що цей невласний інтеграл *збігається* (або є *збіжним*).

Якщо виконуються умови 1—2 означення, але границя $F(\alpha)$ не існує або дорівнює $\pm\infty$, то такий невласний інтеграл *розбігається* (називається *розбіжним*).

1. Що таке первісна функція і що таке невизначений інтеграл функції?
   Первісна функція (інтеграл) є оберненою операцією до диференціювання функцій. Якщо дана функція f(x) є диференційованою на певному інтервалі, то її первісною функцією (інтегралом) є така функція F(x), для якої виконується F'(x) = f(x). У невизначеного не вказуються межі.
2. Які основні властивості невизначеного інтеграла?

   ## Основні властивості невизначеного інтеграла

   1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

   2. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$

   3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, якщо $k \neq 0$.

   4. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
3. Таблиця інтегралів

$\int 0dx = C$	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0.$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0.$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\ ) + C,\ a \neq 0.$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1.$	$\int \frac{dx}{cos\, x} = ln\left\lvert tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right\rvert + C.$
$\int e^x dx = e^x + C.$	
$\int cos\, x dx = sin\ x + C$	$\int \frac{dx}{\sin\ x} \ln\left\lvert tg \frac{x}{2}\right\rvert + C$
$\int chdx = shx + C$	
$\int \sin\ xdx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int shxdx = chx + C$	$\int \frac{dx}{chx} = 2arctge^x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	
$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$	$\int \frac{dx}{shx} = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + C$
$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

4. Що таке «інтеграл, який не береться»? Наведіть приклади.
   Інтеграл, який не береться, відомий як незбіжний інтеграл або нескінчений інтеграл. Це випадок, коли неможливо знайти точний числовий результат для визначеного інтеграла через наявні методи обчислення.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$$

5. Які три основні методи знаходження невизначених інтегралів?
   Для обчислення невизначених інтегралів використовуються
   1) Таблиця основних формул інтегрування
   2) Метод підстановки (або формула заміни змінної)
   3) Метод інтегрування частинами
6. Запишіть формулу інтегрування частинами. В яких випадках вона застосовується?

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

якщо підінтегральна функція подана у виді добутку двох неперервних і глáдких функцій

7. Що таке елементарний дріб? Дробово-раціональна функція? Як розкладають і інтегрують дробово-раціональні функції?

   Елементарний дріб - це дріб, в якому чисельник і знаменник є простими алгебраїчними виразами. Прості алгебраїчні вирази означають, що вони складаються з одночленів, додавання та віднімання.

Дробово-раціональною функцією (або ***раціональним дробом***) називається функція, рівна відношенню двох многочленів, тобто $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ - многочлен степеня m, а $Q_n(x)$ - многочлен степеня n.

Раціональний дріб називається ***правильним***, якщо степінь чисельника менше степеня знаменника, тобто $m<n$; в протилежному випадку(якщо $m \geq n$) раціональний дріб називається ***неправильним***.

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^2}, (k \geq 2)$;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \left(\frac{p^2}{4}-q\right)<0$;

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \left(\frac{p^2}{4}-q\right)<0, k \geq 2.$

8. Які підстановки використовуються для інтегрування раціональних функцій від та sin x cos x ?

Підстановка

Внесення під диференціал

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}(\sin(x))$$

$$u = \sin(x)$$
$$\mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$$ [1]

9. Які підстановки використовуються для інтегрування ірраціональностей?
   Підстановки Чебишова та Ейлера.

1. Функція двох (багатьох) змінних - це математична вираз, який залежить від двох або більше змінних і повертає результат.
2. Границя функції двох змінних означає поведінку цієї функції, коли її аргументи (змінні) наближаються до певних значень.

Означення. Число B називається *границею функції* при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ виконується нерівність $|f(x; y) - B| < \varepsilon$ і позначається $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = B$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = B$.

Границя функції двох змінних існує, якщо функція при наближенні аргументів до певної точки зближується до певного значення.

3. Основні теореми про границі функції багатьох змінних

Теорема 1. **Якщо функція** $z = f(x, y)$ **має границю при** $(x, y) \to (x_0; y_0)$ **, то вона єдина.**

Теорема 2. **Якщо функція** $z = f(x, y)$ **має границю при** $(x, y) \to (x_0; y_0)$ **, то вона обмежена в деякому околі точки** $(x_0; y_0)$ **.**

Теорема 3. **Якщо** $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = b$ **,** $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} g(x, y) = c$ **і в деякому околі точки** $(x_0; y_0)$ **виконується нерівність** $f(x, y) \le g(x, y)$ **, то** $b \le c$ **.**

Теорема 4. **Нехай** $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = b$ **,** $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} g(x, y) = c$ **. Тоді:**

1) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \left(f(x, y) + g(x, y)\right) = b + c$ **;**

2) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) \cdot g(x, y) = b \cdot c$ **;**

3) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{b}{c} \quad (c \ne 0)$ **.**

4. Неперервність функції двох змінних - це властивість функції, за якої вона не має різких зломів або розривів у своїй діапазоні змінних.
5. Частковий приріст функцій двох змінних відображає зміну значення функції при зміні однієї зі змінних, утримуючи інші змінні постійними. Повний приріст функцій двох змінних відображає загальну зміну значення функції при зміні обох змінних одночасно.
6. Частинні похідні функції двох змінних - це похідні функції відносно однієї змінної, утримуючи іншу змінну як постійну.
8. Функція однієї чи кількох дійсних змінних називається диференційованою в точці, якщо в деякому околі цієї точки вона в певному сенсі досить добре наближається деякою лінійною функцією (відображенням).
9. Якщо всі часткові похідні в точці існують і є в ній неперервними то функція є диференційованою.
10. Повним диференціалом функції двох незалежних змінних називається головна частина повного приросту функції, лінійна відносно приростів незалежних змінних. Тобто овний диференціал функції двох змінних описує приріст функції від двох змінних (x, y) в околі певної точки (a, b).
11. формула повного диференціала функції

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Для функції $U = f(x,y,z)$ $\quad dU = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial z}dz.$

Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ складної функції $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,

де $x = t^3+1$, $y = t^2$.

Розв'язання. Якщо $z = f(x,y)$ – складна функція двох змінних, де x і y є функціями змінної t : $x = x(t)$, $y = y(t)$, які диференційовані в точці t, то складна функція $z = f(x(t), y(t))$ диференційована в точці t і справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Обчислимо частинні похідні для нашого прикладу:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\, y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y^2}{x})}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2; \quad \frac{dy}{dt} = 2t..$$

Підставимо ці похідні в наведену формулу для $\frac{dz}{dt}$:

12. $$\frac{dz}{dt} = -\frac{y}{x^2+y^2}3t^2 + \frac{x}{x^2+y^2}2t = -\frac{t^2\,3t^2+(t^3+1)2t}{(t^3+1)^2+t^4} = \frac{-t^4+2t}{t^6+2t^3+t^4+1}.$$

13. Щоб знайти похідну функції заданої неявно, потрібно обчислити похідну рівності (за x). Потім із отриманої рівності знайти значення y'(x).
14. Похідна функції за напрямом даного вектора

Розв'язання. Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial l}$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

де $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\bar{l}$, тобто координати одиничного вектора $\bar{l}^{\circ} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|}$.

15. Градієнт - це векторна величина, яка характеризує найшвидше зростання функції в кожній точці її області визначення. Тому похідна за напрямом градієнта має найбільше значення.
16. Рівняння нормалі. Рівняння дотичної

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

S: $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ в точці $M_0(2, 1, -3)$.

Розв'язання . Якщо поверхня S задається рівнянням у неявному вигляді $F(x, y, z) = 0$, то рівняння дотичної площини до поверхні S в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$F'_X(M_0)(x - x_0) + F'_Y(M_0)(y - y_0) + F'_Z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{x-x_0}{F'_X(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_Y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_Z(M_0)}.$$

Якщо рівняння поверхні S задано у явному вигляді $z = f(x,y)$, то рівняння дотичної площини записується так:

$$z - z_0 = f'_X(M_0)(x - x_0) + f'_Y(M_0)(y - y_0),$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{x-x_0}{f'_X(M_0)} = \frac{y-y_0}{f'_Y(M_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Для нашого прикладу запишемо рівняння поверхні у вигляді:

$x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$, тобто $F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6$.

Знайдемо значення частинних похідних:

$F'_X = 2x$; $F'_X(M_0) = 4$;

$F'_Y = -8y$; $F'_Y(M_0) = -8$;

17. $F'_Z = 4z$; $F'_Z(M_0) = -12$.

Підставимо ці значення у формулу дотичної площини:

$$4(x-2)-8(y-1)-12(z+3)=0,$$

$$4x-8y-12z-36=0,$$

$x-2y-3z-9=0$ – рівняння дотичної площини.

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z+3}{-12}.$$

18. Точки локального екстремуму функції двох змінних - це точки, в яких функція досягає максимального або мінімального значення в певному околі цих точок.

Існують два типи локальних екстремумів:

1) Локальний максимум: Функція досягає найбільшого значення в певному околі точки. В цій точці значення функції вище, ніж у всіх навколишніх точках.
2) Локальний мінімум: Функція досягає найменшого значення в певному околі точки. В цій точці значення функції нижче, ніж у всіх навколишніх точках.

Точки локального екстремуму можуть бути внутрішніми або на границі області визначення функції.

19. Необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних

Необхідні умови екстремуму: якщо у точці $M(x_0, y_0)$ функція $f(x, y)$ має екстремум, то

53

$$\frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial y}=0.$$

20.

екстремуму. Достатні умови екстремуму.

Нехай $M(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка.

Складемо $\Delta = AC - B^2$, де $A = \dfrac{\partial f^2(x_0 y_0)}{\partial x^2}$; $C = \dfrac{\partial^2 f(x_0 y_0)}{\partial y^2}$; $B = \dfrac{\partial^2 f(x_0 y_0)}{\partial x \partial y}$.

$$\text{Тоді, якщо } \Delta = \begin{cases} > 0, \textit{екстремум існує} \begin{cases} \max, \ A < 0, (C < 0) \\ \min, \ A > 0, (C > 0) \end{cases} \\ < 0, \textit{екстремум не існує} \\ = 0 \ \textit{невизначеність (потрібні додаткові дослідження)} \end{cases}$$

Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2y\ (2- x-y)$ в області D: трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Розв'язання. Правило відшукання точок, у яких функція $z = f(x,y)$ досягає своїх найбільшого й найменшого значень базується на послідовності обчислень

1) знаходять критичні точки, які лежать усередині області D;

2) на границі області D за допомогою рівнянь границі функцію

$z = f(x,y)$ зводять до функції однієї змінної, для якої знаходять критичні точки;

3) знаходять значення функції в усіх знайдених точках і в кутових точках границі, серед цих значень вибирають найбільше та найменше.

Проведемо обчислення для нашого прикладу.

1) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy\,(4 - 3x\ -2y),$$
$$z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(2 - x - 2y).$$

Визначимо критичні точки, які лежать у даному трикутнику. Оскільки всередині трикутника $x > 0$, $y > 0$, то прирівнявши $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, дістанемо систему:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y\ \ = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Критична точка $M_1\left(1, \frac{1}{2}\right)$ лежить усередені трикутника.

Значення функції $z(M_1) = 1\frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

2) На сторонах трикутника x = 0 і y = 0 значення функції дорівнює нулю. Знайдемо значення функції на стороні x + y = 6: y = 6 – x, $0 \le x \le 6$, і наша функція двох незалежних змінних перетворюється на функцію однієї змінної

$$z_1 = z(x) = x^2(6-x)(2-x-6+x) = -4x^2(6-x).$$

Знайдемо її критичні точки. Для цього, прирівнявши $z'(x)$ до нуля, дістанемо:

$$-48x + 12x^2 = 0; \quad 12x\,(x-4) = 0;$$

$$x = 4 \quad (x = 0 \text{ – кутова точка}).$$

При цьому y = 6 – x = 2. Отже, $M_2(4,2)$ – критична точка.

Обчислимо значення функції у цій точці та на кінцях інтервалу $M_3(0;6)$ і $M_4\,(6,0)$:

$$z(M_2) = -128; \quad z\,(M_3) = z\,(M_4) = 0.$$

3) Порівняємо всі добуті значення. Отже, найменше й найбільше значення функції треба шукати серед таких її значень:

$z = \frac{1}{4}$ в точці $M_1\left(1;\frac{1}{2}\right)$ всередині трикутника;

$z = -128$ в точці $M_2(4;2)$;

$z = 0$ у вершинах трикутника $M_3(0;6)$ і $M_4(6;0)$

і на сторонах трикутника x = 0 і y = 0.

Отже, $z_{найб} = z\,(1;\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; $z_{найм} = z\,(4;2) = -128.$

22. Екстремуми функції багатьох змінних, які відбуваються на обмеженій області, називаються умовними екстремумами. Ці обмеження можуть бути задані у вигляді рівнянь або нерівностей, що обмежують допустимі значення змінних. Умовний екстремум

23. Функція Лагранжа

Функція Лагранжа. Нехай $M_0(x_0;y_0)$ – точка умовного екстремуму.
Необхідні умови умовного екстремуму функції $z=f(x,y)$ при зв'язку $\varphi(x,y)=0$.
Складемо допоміжну функцію
$L(x,y,\lambda)= f(x,y)+ \lambda\cdot \varphi(x,y)$, (2)
де λ – деяке поки, що невідоме число.
Залежність $L(x,y,\lambda)$ називають **функцією Лагранжа**, а число λ – **множником Лагранжа**.
Число λ разом з x_0 та y_0 обчислюють з системи трьох рівнянь = функція зв'язку + два рівняння з часткових похідних $f(x,y)$.