7장. 순차 데이터의 인식

오일석, 패턴인식, 교보문고, 2008.

들어가는 말

- 특징들의 시간성
  - 예) 지진파, 음성, 주식 거래량, 온라인 필기 문자 등
  - 이들을 순차sequential 데이터또는 문맥 의존context-dependent 데이터라 부름
- 순차 데이터의 인식
  - 시간성의 표현과 정보 추론 방법 필요
  - 은닉 마코프 모델은HMM 가장 널리 사용되는 방법
- HMM
  - 19세기 마코프 모델에 토대를 둠 (7.2 절)
  - 1960년대 Baum 등이 은닉 추가하여 HMM으로 확장함 (7.3~7.5절)
  - HMM은 많은 분야에서 문제 해결 도구로 활용됨
    - 패턴인식, 컴퓨터비전, 데이터마이닝, 정보검색, 생물 정보학, 신호처리, 데이터베이스 …..
    - 응용 사례) 음성 인식, 온라인 필기 인식, DNA 열 찾기, 제스처 인식, 영어 발음 교정, 음악 인식 …..
  - 훌륭한 튜토리얼 논문 [Rabiner 89]

7.1 순차 데이터

- 시간성이 없는 데이터
  - 특징들의 선후 관계는 무의미

- 시간성 있는 데이터 (순차 데이터)
  - 특징들의 선후 관계는 매우 중요함

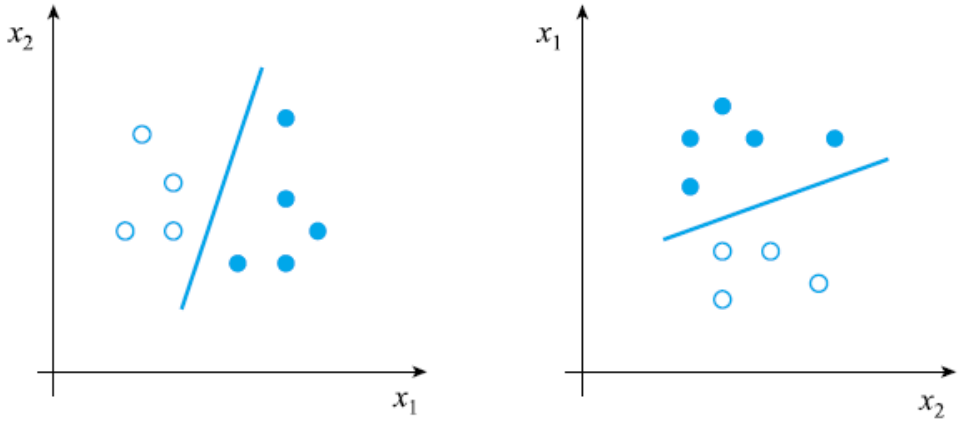


그림 7.1 시간성이 없는 데이터에서 특징의 위치를 바꿈

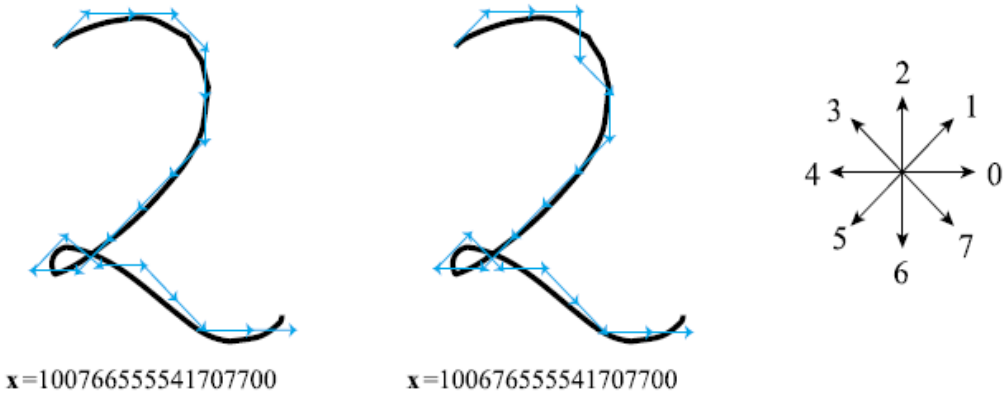


그림 7.2 시간성을 갖는 패턴에서 특징 순서를 바꾸었을 때 나타나는 물리적 왜곡 현상

7.1 순차 데이터

- 순차 데이터
  - 가변 길이
  - 관측 벡터로 표현

$$\mathbf{O} = (o_1, o_2, \cdots, o_{t-1}, o_t, o_{t+1}, \cdots, o_T)^{\mathrm{T}} = o_1 o_2 \cdots o_{t-1} o_t o_{t+1} \cdots o_T \qquad (7.1)$$

  - 관측 o_i가 가질 수 있는 값의 집합을 알파벳이라 함
    - 알파벳 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$
    - v_i를 기호라 함

- 기호들이 시간에 따라 의존성 가짐
  - 예) 그림 7.2의 온라인 숫자
    - $P(o_t=2|o_{t-1}=6) \approx 0$
    - $P(o_t=5|o_{t-1}=6) > P(o_t=4|o_{t-1}=6)$

7.2 마코프 모델

- 우선 은닉 마코프 모델에서 은닉이 빠진 마코프 모델을 공부하자.
  - 러시아 수학자 Andrey Markov가 제안
  - 시간 t에서의 관측은 가장 최근 r개 관측에만 의존한다는 가정 하의 확률 추론

$$\left.\begin{array}{ll} r=0\text{이면, 0차 마코프 체인} & P(o_t \mid o_{t-1}o_{t-2}\cdots o_1) = P(o_t) \\ r=1\text{이면, 1차 마코프 체인} & P(o_t \mid o_{t-1}o_{t-2}\cdots o_1) = P(o_t \mid o_{t-1}) \\ r=2\text{이면, 2차 마코프 체인} & P(o_t \mid o_{t-1}o_{t-2}\cdots o_1) = P(o_t \mid o_{t-1}, o_{t-2}) \end{array}\right\} \quad (7.2)$$

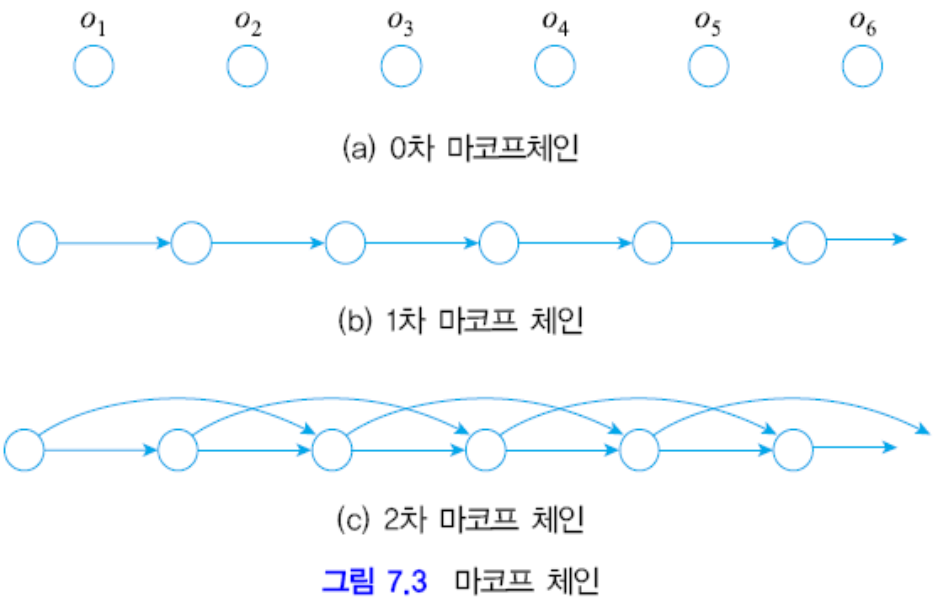


그림 7.3 마코프 체인

7.2 마코프 모델

- 마코프 체인의 합리성은?
  - 예) 최근 사흘의 날씨 정보를 가지고 오늘 날씨 추론
    - 그끄저께 해 (o_{t-3}=해), 그저께 해 (o_{t-2}=해), 어제 비 (o_{t-1}=비)
    - 오늘 비올 확률은?
    - 1차 마코프 체인을 사용한다면

$$P(o_t = \text{비} \mid o_{t-1} = \text{비}, o_{t-2} = \text{비}, o_{t-3} = \text{해}) = P(o_t = \text{비} \mid o_{t-1} = \text{비})$$

      - 즉 1차 마코프 체인에서는 아래 네 개 확률이 같다.
        - 정말 같을까?
        - 다르다면 오차가 무시할 정도일까?

$$P(o_t = \text{비} \mid o_{t-1} = \text{비}, o_{t-2} = \text{비}, o_{t-3} = \text{비})$$

$$P(o_t = \text{비} \mid o_{t-1} = \text{비}, o_{t-2} = \text{비}, o_{t-3} = \text{해})$$

$$P(o_t = \text{비} \mid o_{t-1} = \text{비}, o_{t-2} = \text{해}, o_{t-3} = \text{비})$$

$$P(o_t = \text{비} \mid o_{t-1} = \text{비}, o_{t-2} = \text{해}, o_{t-3} = \text{해})$$

7.2 마코프 모델

- 마코프 모델
  - 1차 마코프 체인 사용
  - 2차 이상에서는 추정할 매개 변수가 많아 현실적인 문제 발생
  - 알파벳을 구성하는 기호 각각을 상태로 간주
- 날씨 예
  - V={비, 구름, 해}
  - 기후 관측에 의해 얻은 날씨 변화 확률

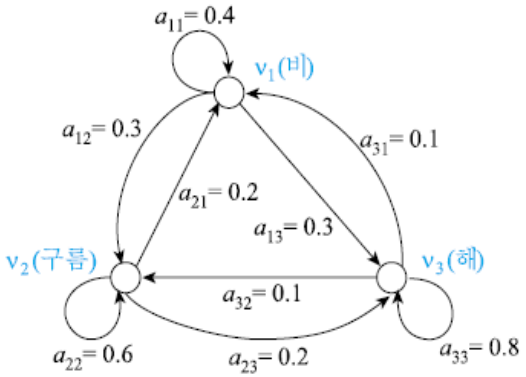
표 7.1 날씨 변화 확률

오늘 \ 내일	비	구름	해
비	0.4	0.3	0.3
구름	0.2	0.6	0.2
해	0.1	0.1	0.8

7.2 마코프 모델

- 상태 전이
  - 상태 전이 확률 행렬과 상태 전이도

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{vmatrix}$$



(a) 상태 전이 확률 행렬 (b) 상태 전이도

그림 7.4 마코프 모델을 위한 상태 전이 확률과 상태 전이도

$$\left.\begin{aligned} & a_{ij} = P(o_t = \nu_j \mid o_{t-1} = \nu_i) \\ & \text{여기서 } a_{ij} \geq 0 \text{ 와 } \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1 \text{ 을 만족} \end{aligned}\right\}$$

7.2 마코프 모델

- 마코프 모델로 무엇을 할 수 있나?
  - 관측벡터 **O**의 확률 구하기

$$
\left.
\begin{aligned}
& P(\mathbf{O}\,|\,\text{마코프모델}) = P(\mathbf{O}\,|\,\mathbf{A}) \\
& = P(\mathbf{O}) \\
& = P(o_1, o_2, \cdots, o_T) \\
& = P(o_1)P(o_2\,|\,o_1)P(o_3\,|\,o_2, o_1)\cdots P(o_t\,|\,o_{t-1}, o_{t-2}, \cdots, o_1)\cdots P(o_T\,|\,o_{T-1}, \cdots, o_1) \\
& = P(o_1)P(o_2\,|\,o_1)P(o_3\,|\,o_2)\cdots P(o_t\,|\,o_{t-1})\cdots P(o_T\,|\,o_{T-1}) \\
& = P(o_1)\prod_{i=1}^{T-1} P(o_{i+1}\,|\,o_i)
\end{aligned}
\right\} \quad (7.4)
$$

  - 예제 7.1 "오늘 해가 떴는데 내일부터 7일 간의 날씨가 해-해-비-비-해-구름-해일 확률은 얼마인가?"

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{O}|\mathbf{A}) &= P(o_1 = \text{해},\ o_2 = \text{해},\ o_3 = \text{해},\ o_4 = \text{비},\ o_5 = \text{비},\ o_6 = \text{해},\ o_7 = \text{구름},\ o_8 = \text{해}\,|\,\mathbf{A}) \\
&= P(\text{해},\ \text{해},\ \text{해},\ \text{비},\ \text{비},\ \text{해},\ \text{구름},\ \text{해}) \\
&= P(\text{해})\,P(\text{해}\,|\,\text{해})\,P(\text{해}\,|\,\text{해})\,P(\text{비}\,|\,\text{해})\,P(\text{비}\,|\,\text{비})\,P(\text{해}\,|\,\text{비})\,P(\text{구름}\,|\,\text{해})\,P(\text{해}\,|\,\text{구름}) \\
&= \pi_3 a_{33} a_{33} a_{31} a_{11} a_{13} a_{32} a_{23} \\
&= 1*0.8*0.8*0.1*0.4*0.3*0.1*0.2 \\
&= 1.536*10^{-4}
\end{aligned}
$$

7.2 마코프 모델

- 또 다른 예, 온라인 필기 숫자 인식

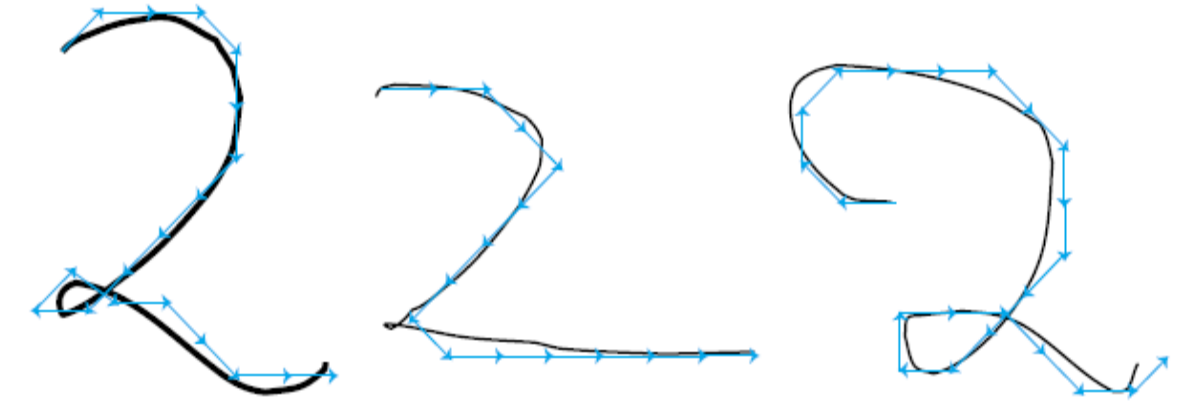


그림 7.5 온라인 필기 숫자 인식에서 부류 2의 훈련 샘플들

7.2 마코프 모델

- 또 다른 예, 온라인 필기 숫자 인식
  - 상태 전이 확률 행렬을 구하면,

표 7.2 상태 전이의 발생 회수

$t-1$ \ t	0	1	2	3	4	5	6	7
0	11	1	0	0	0	0	0	5
1	2	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	1	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2	8	0	1
6	0	0	0	0	0	2	2	0
7	4	0	0	0	0	1	2	4

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 11/17 & 1/17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/17 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/11 & 8/11 & 0 & 1/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 4/11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/11 & 2/11 & 4/11 \end{vmatrix}$$

  - 초기 확률 행렬을 구하면,

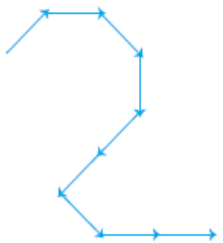
$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0)$$

7.2 마코프 모델

- 또 다른 예, 온라인 필기 숫자 인식
  - 이렇게 만든 마코프 모델로 그림 7.6의 샘플이 발생할 확률을 구하면,

"체인 코드 $1 \rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 0 \rightarrow 0$으로 표현되는 샘플이 발생할 확률은 얼마인가?"

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{O}|\mathbf{A}) &= P(o_1=1,\ o_2=0,\ o_3=7,\ o_4=6,\ o_5=5,\ o_6=5,\ o_7=7,\ o_8=0,\ o_9=0|\mathbf{A}) \\
&= P(1)\ P(0|1)\ P(7|0)\ P(6|7)\ P(5|6)\ P(5|5)\ P(7|5)\ P(0|7)\ P(0|0) \\
&= \pi_2 a_{21} a_{18} a_{87} a_{76} a_{66} a_{68} a_{81} a_{11} \\
&= (1/3)*(2/3)*(5/17)*(2/11)*(1/2)*(8/11)*(1/11)*(4/11)*(11/17) \\
&= 0.9243*10^{-4}
\end{aligned}
$$



$\mathbf{O}$ = 107655700

그림 7.6 이 샘플이 발생할 확률은 0.00009243

7.2 마코프 모델

- 마코프 모델과 0차, 2차 마코프 체인과의 비교 (온라인 필기 숫자 예)
  - 0차 마코프 체인

표 7.3 0차 마코프 체인을 위한 확률 표

	0	1	2	3	4	5	6	7
t	19 (19/55)	4 (4/55)	2 (2/55)	1 (1/55)	3 (3/55)	11 (11/55)	4 (4/55)	11 (11/55)

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{O}|\mathbf{A}_0) &= P(o_1=1,\ o_2=0,\ o_3=7,\ o_4=6,\ o_5=5,\ o_6=5,\ o_7=7,\ o_8=0,\ o_9=0|\mathbf{A}_1) \\
&= P(1)P(0)P(7)P(6)P(5)P(5)P(7)P(0)P(0) \\
&= (4/55)*(19/55)*(11/55)*(4/55)*(11/55)*(11/55)*(11/55)*(19/55) \\
&\quad *(19/55) \\
&= 0.3489*10^{-6}
\end{aligned}
$$

7.2 마코프 모델

- 마코프 모델과 0차, 2차 마코프 체인과의 비교 (온라인 필기 숫자 예)
  - 2차 마코프 체인
    - 추정할 매개 변수가 64*8개로 증가

표 7.4 2차 마코프 체인을 위한 전이 확률 표

$(t-2,t-1)$ \ t	0	1	2	3	4	5	6	7
00	5 (5/9)	0 (0/9)	0 (0/9)	0 (0/9)	0 (0/9)	0 (0/9)	0 (0/9)	4 (4/9)
01	…							
…								
ij								
…								
77								…

- 꼭 이해하고 기억해야 할 것! (MM과 HMM의 근본적인 차이점)
  - 마코프 모델에서는 상태를 나타내는 노드에 관측 (비, 해, 구름) 그 자체가 들어 있다.즉 상태를 볼 수 있다.
  - HMM에서는 상태를 볼 수 없다. 즉 상태가 은닉된다.

Andrey Andreyevich Markov

(1856년 6월 14일 ~ 1922년 7월 20일) 러시아

Markov는 러시아의 수학자이다. 그를 유명하게 만든 이론은 Markov 사슬인데, 이 이론은 시간성 데이터를 처리하는데 현재 가장 널리 쓰이는 은닉 마코프 모델의 이론적 토대가 되었다. 그는 Markov 사슬 이론의 응용으로 A.S. Pushkin의 시 'Eugeny Oregin'에 나타나는 자음과 모음의 분포를 분석하는데 적용하였다. Markov는 1917년에 일어난 러시아 혁명이라는 격변기에서 정치적 완고함을 보이기도 하였다. 일례로 1908년 학생 소요가 한창일 때 그가 교수로 근무하던 Saint Petersburg 대학의 학생들 동향을 관찰하라는 정부 명령이 떨어졌다. 그는 교수가 '정부의 요원'이 될 수 없다고 거부하였고 그것을 계기로 학교를 그만두게 되었고 나중에 복직되었다. 그의 삶과 수학에의 공헌에 대한 상세한 내용은 [Basharin04]를 참고하기 바란다.

[Basharin04] Gely P. Basharin, Amy N. Langville, and Valeriy A. Naumov, "The life and work of A. A. Markov," *Linear Algebra and Its Applications*, Vol.386, pp.3-26, 2004.

7.3 은닉 마코프 모델로의 발전

- 은닉 마코프 모델로의 발전
  - 마코프 모델은 한계를 가진다.
    - 보다 복잡한 현상이나 과정에 대한 모델링 능력의 한계
  - 모델의 용량을 키우기 위해,
    - 상태를 감추다.

7.3.1 동기

- 마코프 체인의 차수와 추정할 매개 변수의 수
  - r차에서 $m^r(m\text{-}1)$ 개의 매개 변수
  - 차수에 따라 기하급수적으로 모델 크기가 증가함

- HMM
  - 차수를 미리 고정하지 않고 모델 자체가 확률 프로세스에 따라 적응적으로 정함
  - 따라서 아무리 먼 과거의 관측도 현재에 영향을 미침
  - 즉 P(해|비,비), P(해|비,비,비), P(해|비,비,…,비), P(해|비,비,해,…,해)가 모두 다름
  - 이런 뛰어난 능력에도 불구하고 모델 크기는 감당할 정도임

- 어떤 비결에 의해 이런 뛰어난 능력이 가능한가?
  - 상태를 감춘다.

7.3.1 동기

- 상태를 감추면,
  - 마코프 모델이 은닉 마코프 모델이 된다.

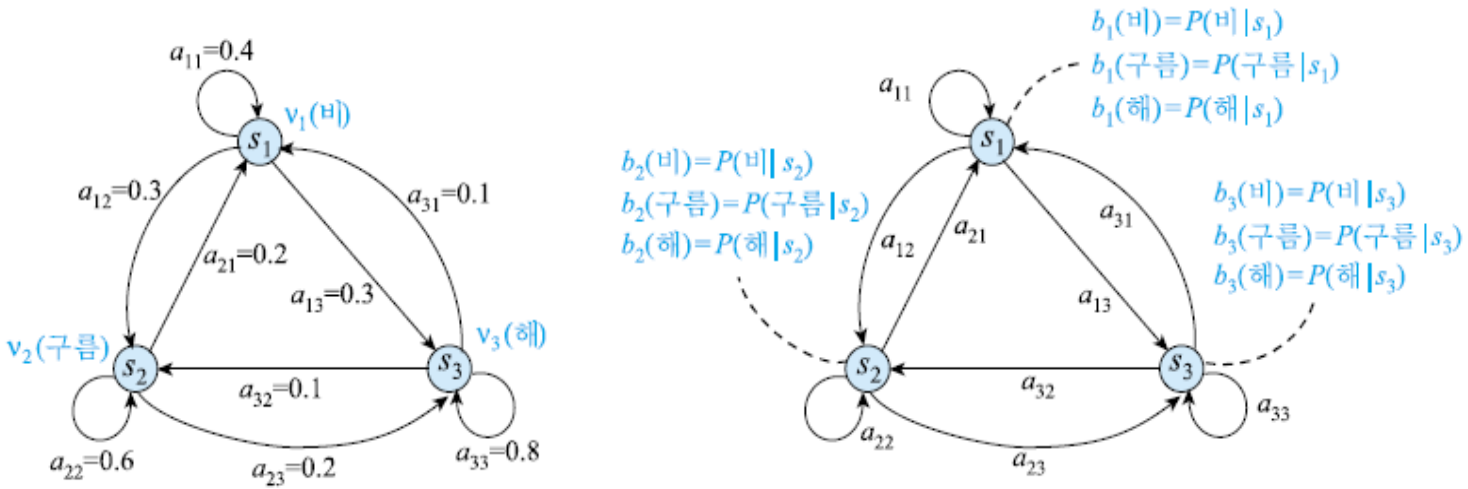


그림 7.7 마코프 모델을 은닉 마코프 모델로 확장

7.3.1 동기

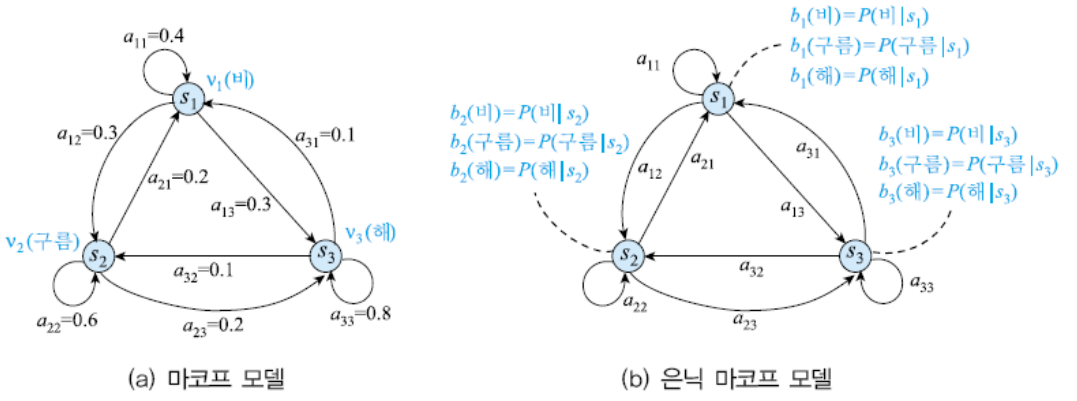


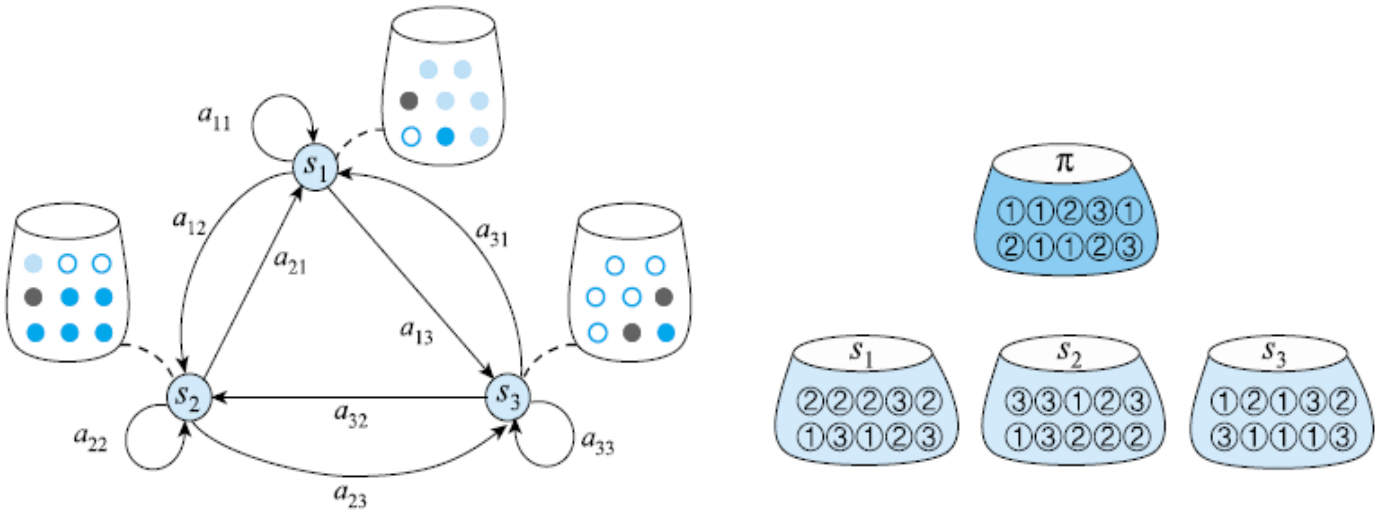
그림 7.7 마코프 모델을 은닉 마코프 모델로 확장

- 그림 7.7.의 해석 (예를 들어, 해→해→비→구름이 관측되었다.)
  - 마코프 모델
    - 그것은 상태 s_3→s_3→s_1→ s_2에서 관측한 것이다.
  - 은닉 마코프 모델
    - 모든 상태에서 {비,해,구름}이 관측 가능하므로 s_3→s_3→s_1→s_2일 수도 있고 s_1→s_2→s_3→s_1일 수도 있다. 가능한 경우는 몇 가지 일까?
    - 그들의 확률은 다르다. 예를 들어 s_3→s_3→s_1→ s_2일 확률은

$$\text{해} \rightarrow \text{해} \rightarrow \text{비} \rightarrow \text{구름이 } s_3 \rightarrow s_3 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2\text{에서 관측되었을 확률} = \left[\pi_3 * b_3(\text{해})\right] * \left[a_{33} * b_3(\text{해})\right] * \left[a_{31} * b_1(\text{비})\right] * \left[a_{12} * b_2(\text{구름})\right]$$

7.3.2 HMM의 예

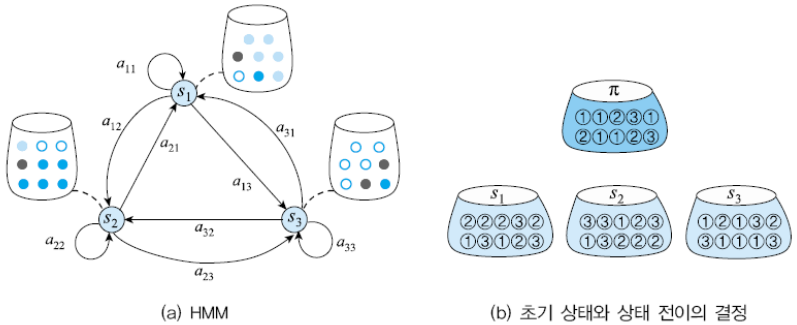
- 예제 7.3 공을 담은 항아리 [Rabiner89]
  - n 개의 항아리, 공의 색깔 m 개
    - 항아리가 상태이고 공의 색깔을 관찰
  - 그림 7.8은 n=3, m=4
    - V={하양(W), 검정(B), 연파랑(L), 진파랑(D)}



(a) HMM　　(b) 초기 상태와 상태 전이의 결정

그림 7.8　공을 담은 항아리를 HMM으로 모델링

7.3.2 HMM의 예



(a) HMM (b) 초기 상태와 상태 전이의 결정

그림 7.8 공을 담은 항아리를 HMM으로 모델링

- 실험 시나리오

이 예에서의 실험을 정리해 보자. 실험이 시작되면 π-항아리에서 카드를 하나 뽑아 번호를 보고 다시 집어 넣는다. 카드 번호의 상태로 들어간다. 그 상태에 해당하는 공 항아리에서 공을 하나 뽑고 색깔을 확인하고 다시 집어 넣는다. 색깔을 o_1에 기록한다. 그 상태에 해당하는 카드 항아리에서 카드를 하나 뽑고 번호를 보고 다시 집어 넣는다. 카드 번호의 상태로 이동한다. 그 상태에 해당하는 공 항아리에서 공을 하나 뽑고 색깔을 o_2에 기록한다. 이런 과정을 반복한다.

이 실험이 우리 눈에 다 보이는 것이 아니라는 사실을 기억해야 한다. 보이는 것은 공의 색깔, 즉 $\mathbf{O} = o_1 o_2 \cdots o_T$뿐이다. 실험이 커튼 뒤에서 이루어지고 실험하는 사람이 단지 공의 색깔만 불러 준다고 생각하면 된다. 우리가 가진 것은 $\mathbf{O}$뿐이다. ■■■

- $\mathbf{O}$=(빨강,하양,하양,파랑)^{T}이 관찰되었다면,
  - 발생 확률은? 어느 상태에서 관측되었을까?

7.3.2 HMM의 예

- 예제 7.4 여자 친구의 삶 [Wikipedia]
  - 여자 친구의 일상을 관찰, V={산책, 쇼핑, 청소}
  - 날씨는 해와 비 (상태)
  - 내가 가진 정보

날씨

$$P(\text{비 온 다음 날 비}) = P(q_t = \text{비} \mid q_{t-1} = \text{비}) = 0.7$$
$$P(\text{비 온 다음 날 해}) = P(q_t = \text{해} \mid q_{t-1} = \text{비}) = 0.3$$
$$P(\text{해 뜬 다음 날 비}) = P(q_t = \text{비} \mid q_{t-1} = \text{해}) = 0.4$$
$$P(\text{해 뜬 다음 날 해}) = P(q_t = \text{해} \mid q_{t-1} = \text{해}) = 0.6$$
$$P(\text{비}) = 0.6$$
$$P(\text{해}) = 0.4$$

날씨에 따른 그녀의 행동

$$P(\text{비 오는 날 산책}) = P(o_t = \text{산책} \mid q_t = \text{비}) = 0.1$$
$$P(\text{비 오는 날 쇼핑}) = P(o_t = \text{쇼핑} \mid q_t = \text{비}) = 0.4$$
$$P(\text{비 오는 날 청소}) = P(o_t = \text{청소} \mid q_t = \text{비}) = 0.5$$
$$P(\text{해 뜬 날 산책}) = P(o_t = \text{산책} \mid q_t = \text{해}) = 0.6$$
$$P(\text{해 뜬 날 쇼핑}) = P(o_t = \text{쇼핑} \mid q_t = \text{해}) = 0.3$$
$$P(\text{해 뜬 날 청소}) = P(o_t = \text{청소} \mid q_t = \text{해}) = 0.1$$

  - 답할 수 있나?
    - 그녀가 일주일 연속으로 쇼핑만 할 확률은?
    - 그끄저께 산책, 그저께 산책, 어제 청소했다는데 3일간 그곳 날씨는?
    - 그끄저께 산책, 그저께 산책, 어제 청소했다는데 오늘과 내일 무얼할까?

7.3.2 HMM의 예

- HMM을 사용하면 확률 추론할 수 있다. 어떻게?

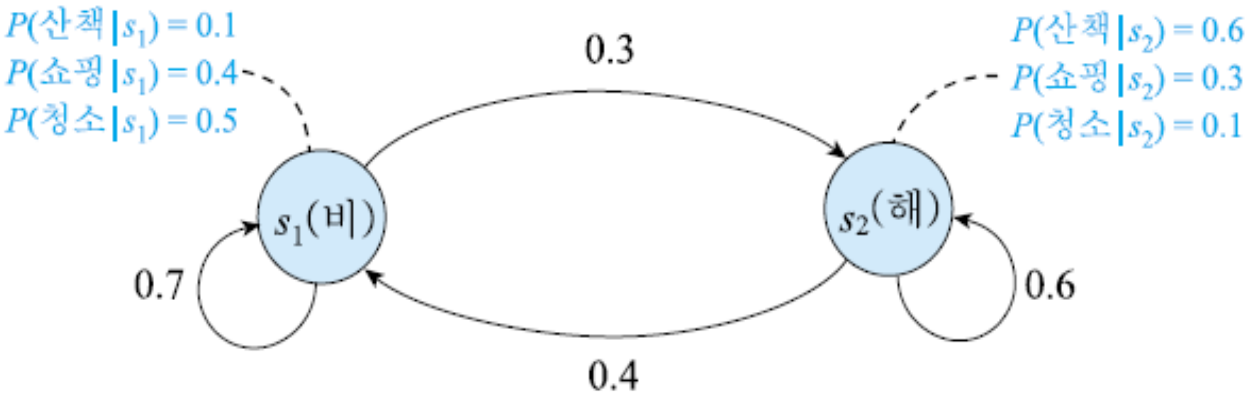


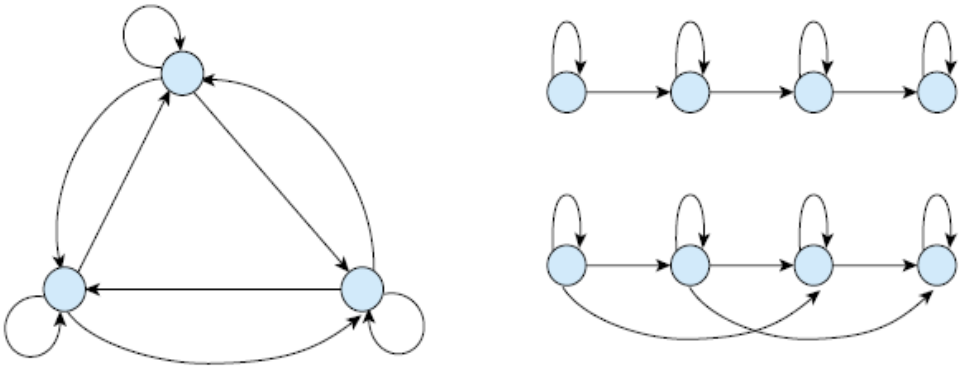
그림 7.9 그녀의 삶을 HMM으로 모델링

7.3.3 구성 요소와 세 가지 문제

- 앞의 예제는 한쪽 면만 조망
  - 모델을 알때 확률 추론하라.
    - 그녀의 삶 예에서는 날씨와 그녀의 행위에 대한 확률 분포 알고 있음
  - 또 다른 측면
    - 어느 것이 상태인가? 상태는 몇 가지인가? (아키텍처 설계)
    - 확률 분포는 어떻게 구하나? (학습)
    - 예) 온라인 필기 인식
      - 무엇이 상태인고 상태를 몇 가지로 할까?
      - 가진 것은 오로지 훈련 집합

7.3.3 구성 요소와 세 가지 문제

- 아키텍처
  - HMM은 가중치 방향 그래프로 표현
    - 노드가 상태
    - 상태로 사용할 것이 명확한 경우도 있지만 그렇지 않은 경우도 있다.
  - 대표적인 아키텍처
    - 어고딕 모델과 좌우 모델
    - 응용의 특성에 따라 적절한 아키텍처 선택 중요
      - 예를 들어 음성 인식은 좌우 모델이 적당함. 왜?



(a) 어고딕 모델 (b) 좌우 모델

그림 7.10 HMM의 대표적인 아키텍처

7.3.3 구성 요소와 세 가지 문제

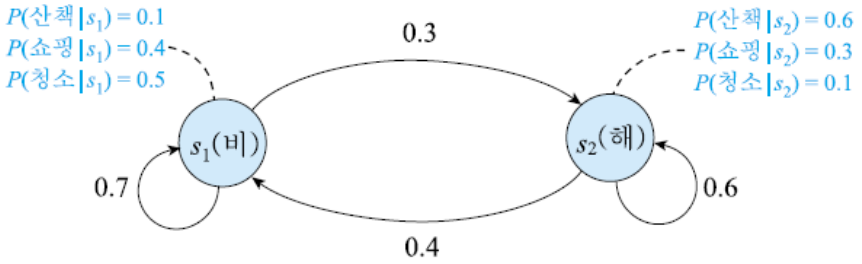


그림 7.9 그녀의 삶을 HMM으로 모델링

- 세 가지 매개변수 $\boldsymbol{\Theta} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$

1. 상태 전이 확률 행렬 $\mathbf{A}=|a_{ij}|$

$$\left.\begin{aligned} & a_{ij} = P(q_{t+1} = s_j \mid q_t = s_i),\ 1 \le i, j \le n \\ & \text{이 때} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \end{aligned}\right\}$$

2. 관측 행렬 $\mathbf{B}=|b_j(v_k)|$

$$\left.\begin{aligned} & b_j(\mathrm{v}_k) = P(o_t = \mathrm{v}_k \mid q_t = s_j),\ 1 \le j \le n, 1 \le k \le m \\ & \text{이 때} \sum_{k=1}^{m} b_j(\mathrm{v}_k) = 1 \end{aligned}\right\}$$

3. 초기 확률 벡터 $\boldsymbol{\pi}=|\pi_i|$

$$\left.\begin{aligned} & \pi_i = P(q_1 = s_i),\ 1 \le i \le n \\ & \text{이 때} \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \end{aligned}\right\}$$

7.3.3 구성 요소와 세 가지 문제

- 세 가지 문제
  1. **평가**. 모델 Θ가 주어진 상황에서, 관측벡터 $\mathbf{O}$를 얻었을때 $P(\mathbf{O}|\Theta)$는?
  2. **디코딩**. 모델 Θ가 주어진 상황에서, 관측벡터 $\mathbf{O}$를 얻었을때 최적의 상태열은?
  3. **학습**. 훈련집합 $X=\{\mathbf{O}_1,..,\mathbf{O}_N\}$이 주어져 있을때 HMM의 매개 변수 Θ는?

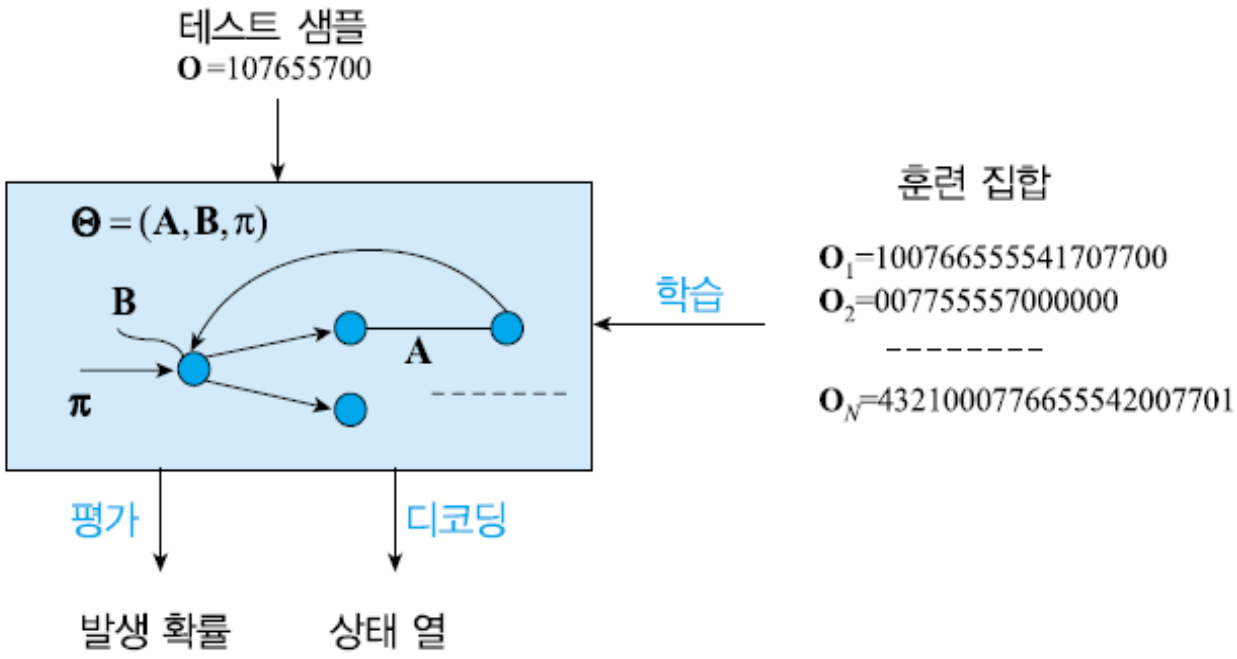


그림 7.11 HMM의 세 가지 문제

7.4 알고리즘

- 이제 세 가지 문제를 풀기 위한 알고리즘을 공부하자.
  - **평가**. 동적 프로그래밍 이용
  - **디코딩**. 동적 프로그래밍 이용 (Viterbi 알고리즘)
  - **학습**. EM 알고리즘 (Baum-Welch 알고리즘)

7.4.1 평가

- 평가 문제란?
  - 모델 $\boldsymbol{\Theta}$가 주어진 상황에서, 관측벡터 $\mathbf{O}$를 얻었을때 $P(\mathbf{O}|\boldsymbol{\Theta})$는?
  - 예) 그녀가 일주일 연속으로 쇼핑만 할 확률은?

- 평가 문제를 풀어 보자.
  - HMM에서는 $\mathbf{O}$를 관측한 상태 열을 모른다.
  - 우선 $\mathbf{O}$를 관측한 상태 열을 안다고 가정하고 그것을 $\mathbf{Q}=(q_1,\ldots,q_T)$라 하자.
  - 그럼 아래 식을 유도할 수 있다.

$$P(\mathbf{O},\mathbf{Q}|\boldsymbol{\Theta}) = \pi_{q_1} b_{q_1}(o_1) a_{q_1 q_2} b_{q_2}(o_2) \cdots a_{q_{T-1} q_T} b_{q_T}(o_T) \qquad (7.10)$$

  - 원래 문제 $P(\mathbf{O}|\boldsymbol{\Theta})$는 모든 상태 열에 대해 (7.10)의 식을 더하여 구할 수 있다.

$$P(\mathbf{O}|\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{\text{모든 } \mathbf{Q}} P(\mathbf{O},\mathbf{Q}|\boldsymbol{\Theta})$$

7.4.1 평가

- 예제 7.5 여자 친구의 삶
  - "그녀가 오늘 산책, 내일 산책, 모레 청소, 그리고 글피 쇼핑할 확률은?"
  - 즉 $\mathbf{O}$=(o_1=산책, o_2=산책, o_3=청소, o_4=쇼핑)일 때, $P(\mathbf{O}|\boldsymbol{\Theta})$는?

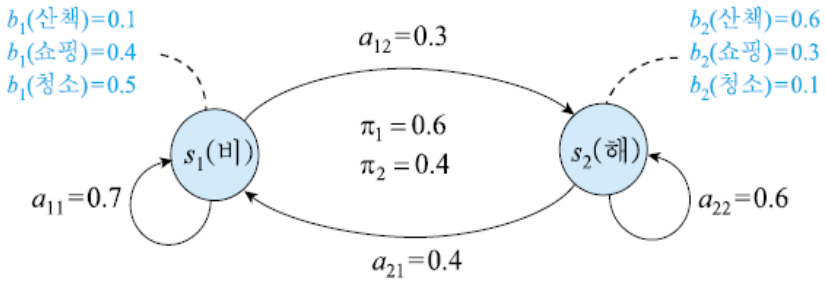


그림 7.12 그녀의 삶 시나리오의 HMM

  - 모든 상태 열을 나열하면,

$\mathbf{Q}_1$ = 비비비비, $\mathbf{Q}_2$ = 비비비해, $\mathbf{Q}_3$ = 비비해비, $\mathbf{Q}_4$ = 비비해해,
$\mathbf{Q}_5$ = 비해비비, $\mathbf{Q}_6$ = 비해비해, $\mathbf{Q}_7$ = 비해해비, $\mathbf{Q}_8$ = 비해해해,
$\mathbf{Q}_9$ = 해비비비, $\mathbf{Q}_{10}$ = 해비비해, $\mathbf{Q}_{11}$ = 해비해비, $\mathbf{Q}_{12}$ = 해비해해,
$\mathbf{Q}_{13}$ = 해해비비, $\mathbf{Q}_{14}$ = 해해비해, $\mathbf{Q}_{15}$ = 해해해비, $\mathbf{Q}_{16}$ = 해해해해

7.4.1 평가

- 예제 7.5 여자 친구의 삶
  - 상태 열 Q_1에 대해 구해 보면,

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{O}, \mathbf{Q}_1 \mid \Theta) &= \pi_1 b_1(\text{산책}) a_{11} b_1(\text{산책}) a_{11} b_1(\text{청소}) a_{11} b_1(\text{쇼핑}) \\
&= 0.6 * 0.1 * 0.7 * 0.1 * 0.7 * 0.5 * 0.7 * 0.4 \\
&= 4.116 * 10^{-4}
\end{aligned}
$$

  - 모든 상태 열에 대한 값을 더하여 답을 구해 보면,

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{O} \mid \Theta) &= \sum_{i=1}^{16} P(\mathbf{O}, \mathbf{Q}_i \mid \Theta) \\
&= 0.4116 * 10^{-3} + 0.1323 * 10^{-3} + 0.02216 * 10^{-3} + 0.02268 * 10^{-3} \\
&+ 0.6048 * 10^{-3} + 0.1944 * 10^{-3} + 0.10368 * 10^{-3} + 0.11664 * 10^{-3} \\
&+ 0.9408 * 10^{-3} + 0.3024 * 10^{-3} + 0.04608 * 10^{-3} + 0.05184 * 10^{-3}. \\
&+ 4.8384 * 10^{-3} + 1.5552 * 10^{-3} + 0.82944 * 10^{-3} + 0.93312 * 10^{-3} \\
&= 0.0111
\end{aligned}
$$

7.4.1 평가

- 답은 구할 수 있다. 하지만,
  - 예제 7.5에서 상태 열의 개수는 2^4=16 가지
  - 일반적으로 상태의 수가 n이고 관측 열 $\mathbf{O}$의 길이가 T라면 N^T 가지의 상태 열
  - 각각의 상태 열은 $2T$-1번의 곱셈. 따라서 시간 복잡도는 $\Theta(N^T T)$
    - 예) n=5, T=30이라면 5.4948*10^{22} 번의 곱셈 필요. 계산 폭발!

- 보다 효율적인 알고리즘이 있다.
  - 기본 아이디어는 동적 프로그래밍에 의한 중복 계산 제거
  - 예) 예제 7.5의 $\mathbf{Q}_1$='비비비비', $\mathbf{Q}_2$='비비비해'의 계산
    - $P(\mathbf{O},\mathbf{Q}_1|\Theta)=\pi_1 b_1(\text{산책}) a_{11} b_1(\text{산책}) a_{11} b_1(\text{청소}) a_{11} b_1(\text{쇼핑})$
    - $P(\mathbf{O},\mathbf{Q}_1|\Theta)=\pi_1 b_1(\text{산책}) a_{11} b_1(\text{산책}) a_{11} b_1(\text{청소}) a_{12} b_2(\text{쇼핑})$
    - 빨간 부분의 계산은 같다.

7.4.1 평가

- 동적 프로그래밍
  - 그림 7.13의 격자에 16개의 모든 상태 열이 들어 있다.
    - 예, 진한 파랑은 $\mathbf{Q}_1$='비비비비', 연파랑은 $\mathbf{Q}_7$='비해해비'에 해당

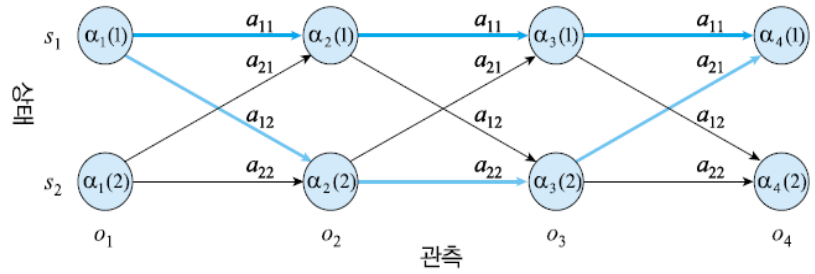


그림 7.13 전방 계산을 위해 상태도를 격자 모양으로 펼침

  - $\alpha_t(i)$ 는 관측 벡터의 일부 $o_1 o_2 \ldots o_t$를 관측하고 시간 t에 s_i에 있을 확률

$$\left.\begin{aligned}\alpha_t(i) &= P(o_1, o_2, \cdots, o_t, q_t = s_i \mid \Theta) \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{t-1}(j) a_{ji}\right] * b_i(o_t)\end{aligned}\right\}$$

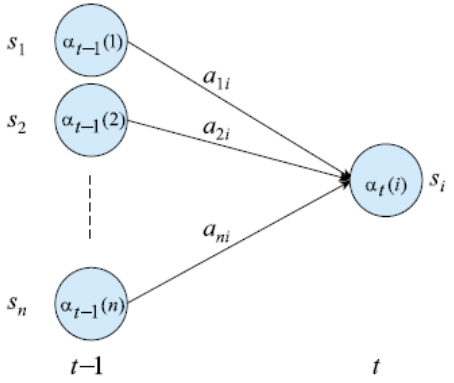


그림 7.14 $\alpha_t(i)$의 순환 계산

7.4.1 평가

- 전방 알고리즘forward algorithm
  - 초기식을 포함시키 완벽한 식으로 정리하고 그것을 가상 코드로 적으면,

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(o_1), \quad 1 \le i \le n$$

$$\alpha_t(i) = \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{t-1}(j) a_{ji} \right] * b_i(o_t), \quad 2 \le t \le T, 1 \le i \le n$$

$$P(\mathbf{O} \mid \mathbf{\Theta}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_T(j)$$

알고리즘 [7.1] 전방 계산에 의한 관측 벡터의 발생 확률 계산

입력: HMM $\mathbf{\Theta} = (\mathbf{A},\mathbf{B},\boldsymbol{\pi})$, 관측 벡터 $\mathbf{O} = o_1 o_2 \cdots o_T$

출력: $\mathbf{O}$의 발생 확률 $P(\mathbf{O} \mid \mathbf{\Theta})$

알고리즘:

```
1.  배열 α[1…T][1…n]을 생성하라.
2.  for (i = 1 to n) α[1][i] = π_i*b_i(o_1);      // (7.13)
3.  for (t = 2 to T)
4.      for (i = 1 to n) {
5.          sum = 0;
6.          for (j = 1 to n) sum = sum + α[t−1][j]*a_ji;
7.          α[t][i] = sum*b_i(o_t);          // 라인 5-7이 (7.14)
8.      }
9.  sum = 0;
10. for (j = 1 to n) sum = sum + α[T][j];     // (7.15)
11. P(O | Θ) = sum;
```

시간 복잡도는$\Theta(N^2T)$
n=5, T=30이라면 750 번의 곱셈
이전의 낱낱 계산과 비교해 보라.

7.4.1 평가

- 예제 7.6 전방 계산에 의한 확률 평가

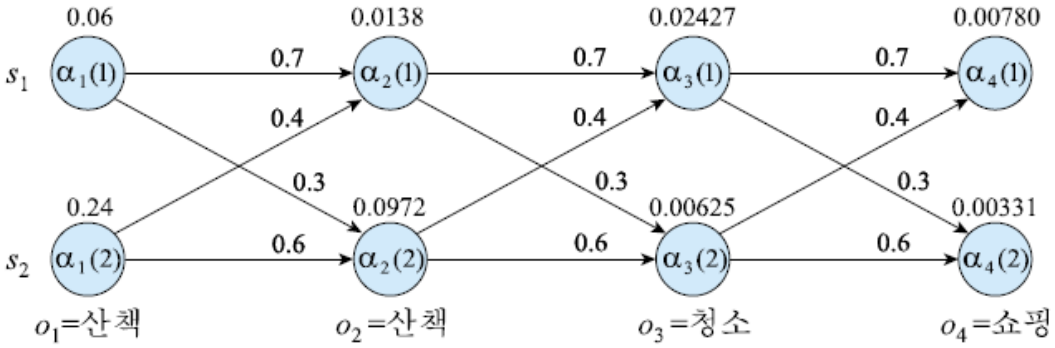


그림 7.15 전방 계산 예

t=1일 때 $\alpha[1][1] = \pi_1 * b_1(\text{산책}) = 0.6*0.1 = 0.06$

$\alpha[1][2] = \pi_2 * b_2(\text{산책}) = 0.4*0.6 = 0.24$

t=2일 때 $\alpha[2][1] = (\alpha[1][1]*a_{11}+\alpha[1][2]*a_{21})*b_1(\text{산책}) = (0.06*0.7+0.24*0.4)*0.1 = 0.0138$

$\alpha[2][2] = (\alpha[1][1]*a_{12}+\alpha[1][2]*a_{22})*b_2(\text{산책}) = (0.06*0.3+0.24*0.6)*0.6 = 0.0972$

t=3과 4일 때 $\alpha[3][1]=(\alpha[2][1]*a_{11}+\alpha[2][2]*a_{21})*b_1(\text{청소})=(0.0138*0.7+0.0972*0.4)*0.5=0.02427$

$\alpha[3][2]=(\alpha[2][1]*a_{12}+\alpha[2][2]*a_{22})*b_2(\text{청소})=(0.0138*0.3+0.0972*0.6)*0.1=0.00625$

$\alpha[4][1]=(\alpha[3][1]*a_{11}+\alpha[3][2]*a_{21})*b_1(\text{쇼핑})=(0.02427*0.7+0.00625*0.4)*0.4=0.00780$

$\alpha[4][2]=(\alpha[3][1]*a_{12}+\alpha[3][2]*a_{22})*b_2(\text{쇼핑})=(0.02427*0.3+0.00625*0.6)*0.3=0.00331$

답은 $P(\mathbf{O} \mid \mathbf{\Theta}) = \alpha[4][1] + \alpha[4][2] = 0.0111$

7.4.2 디코딩

- 디코딩 문제란?
  - 모델 $\boldsymbol{\Theta}$가 주어진 상황에서, 관측벡터 $\mathbf{O}$를 얻었을때 그것의 최적 상태열은?
  - 예) 그끄저께 산책, 그저께 산책, 어제 청소했다는데 3일간 그곳 날씨는?
  - 무엇을 기준으로 최적을 판단할 것인가?

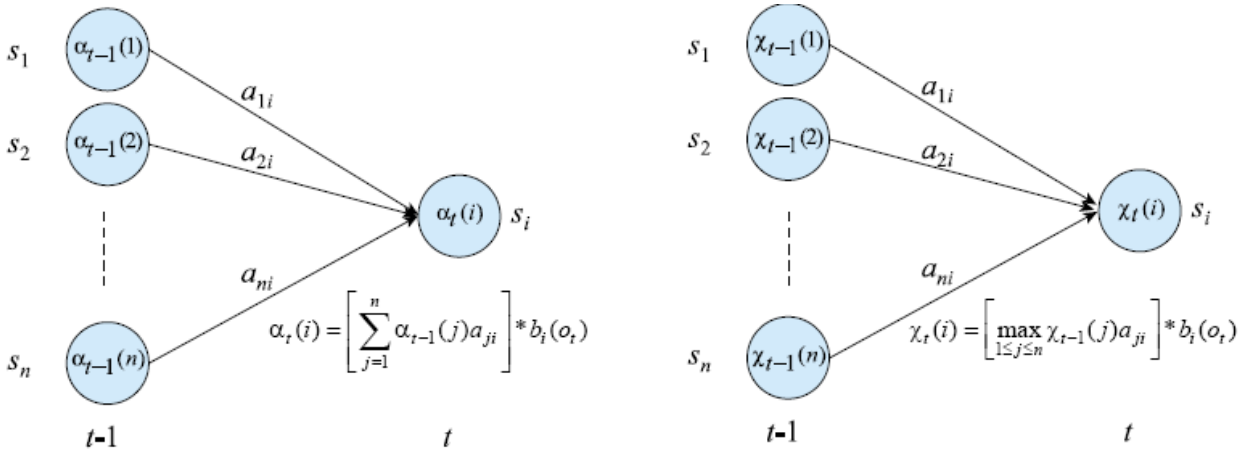
- 생각 1
  - 예를 들어, $\mathbf{O}$=(o_1=산책, o_2=산책, o_3=청소, o_4=쇼핑)이었다면, 산책은 s_1보다 s_2가 확률이 높으므로 s_2, 청소는 s_1이 확률이 높으므로 s_1, 쇼핑은 s_1이 확률이 높으므로 s_1을 취함. 즉 $\mathbf{O}$의 최적 상태열은 Q= $s_2 s_2 s_1 s_1$='해해비비'로 함
  - 합리적인가?

7.4.2 디코딩

- 합리적인 생각은,
  - $P(\mathbf{O},\mathbf{Q}|\Theta)$를 기준 함수로 채택하고 이것을 최대화하는 $\hat{\mathbf{Q}}$를 찾아야 한다. 즉,

$$\hat{\mathbf{Q}} = \underset{\text{모든 } \mathbf{Q}}{\arg\max}\, P(\mathbf{O}, \mathbf{Q} \mid \Theta) \qquad (7.16)$$

    - 평가 문제와 비슷하다.
      - 모든 $\mathbf{Q}$에 대해 계산하고 (그것을 더하는 대신) 그것 중 가장 큰 것을 취함
      - 이런 낱낱 방법은 계산 폭발
      - 동적 프로그래밍을 이용하자.



(a) 평가 문제 (합 연산) (b) 디코딩 문제 (최대 선택 연산)

그림 7.16 평가 문제와 디코딩 문제의 연산 차이

7.4.2 디코딩

- Viterbi 알고리즘
  - 전방 계산 (τ는 매 단계에서 최적 경로 기록)

$$\chi_1(i) = \pi_i b_i(o_1), \quad 1 \le i \le n \tag{7.18}$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_t(i) &= \left[\max_{1\le j\le n} \chi_{t-1}(j) a_{ji}\right] * b_i(o_t), \quad 2 \le t \le T, 1 \le i \le n \\ \tau_t(i) &= \arg\max_{1\le j\le n} \left[\chi_{t-1}(j) a_{ji}\right], \quad 2 \le t \le T, 1 \le i \le n \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

  - 최적 경로 역추적

$$\left.\begin{aligned} \hat{q}_T &= \arg\max_{1\le j\le n} \chi_T(j) \\ \hat{q}_t &= \tau_{t+1}(\hat{q}_{t+1}), \quad t = T-1, T-2, \cdots, 1 \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

7.4.2 디코딩

- Viterbi 알고리즘
  - 가상 코드로 쓰면,

알고리즘 [7.2] 디코딩을 위한 Viterbi 알고리즘

입력: HMM $\Theta = (\mathbf{A},\mathbf{B},\boldsymbol{\pi})$, 관측 벡터 $\mathbf{O} = o_1 o_2 \cdots o_T$

출력: 최적 경로 $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \cdots, \hat{q}_T)$

알고리즘:

1. 배열 $\chi[1\cdots T][1\cdots n]$와 $\tau[1\cdots T][1\cdots n]$을 생성하라.
2. **for** $(i = 1$ **to** $n)$ $\chi[1][i] = \pi_i * b_i(o_1)$; // (7.18)
3. **for** $(t = 2$ **to** $T)$
4. **for** $(i = 1$ **to** $n)$ {
5. $\chi[t-1][j] * a_{ji}$, $1 \le j \le n$ 중에 가장 큰 것의 첨자를 k라 둔다.
6. $\chi[t][i] = \chi[t-1][k] * a_{ki} * b_i(o_t)$; // (7.19)
7. $\tau[t][i] = k$; // (7.19)
8. }
   // 지금부터 (7.20)에 의한 경로 역 추적
9. $\chi[T][j]$, $1 \le j \le n$ 중에 가장 큰 것의 첨자를 $\hat{q}_T$로 한다.
10. **for** $(t = T-1$ **to** $1)$ $\hat{q}_t = \tau[t+1][\hat{q}_{t+1}]$; // (7.20)

시간 복잡도는 $\Theta(N^2T)$

7.4.2 디코딩

- 예제 7.7 Viterbi 알고리즘에 의한 디코딩

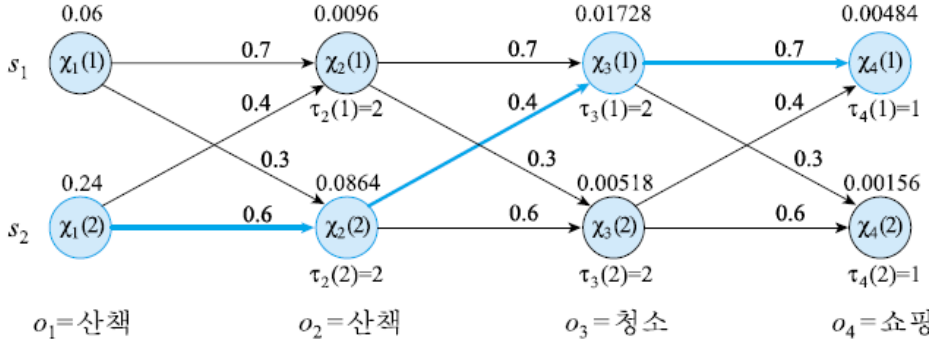


그림 7.17 Viterbi 알고리즘의 전방 계산과 최적 경로 역 추적 (파란 색이 최적 경로)

t=1일 때

$\chi[1][1] = \pi_1 * b_1(\text{산책}) = 0.6*0.1 = 0.06$

$\chi[1][2] = \pi_2 * b_2(\text{산책}) = 0.4*0.6 = 0.24$

t=2일 때

$\chi[2][1] = \max(\chi[1][1]*a_{11},\ \chi[1][2]*a_{21})*b_1(\text{산책}) = (0.24*0.4)*0.1 = 0.0096$

$\tau[2][1] = 2$

$\chi[2][2] = \max(\chi[1][1]*a_{12},\ \chi[1][2]*a_{22})*b_2(\text{산책}) = (0.24*0.6)*0.6 = 0.0864$

$\tau[2][2] = 2$

t=3과 4일 때

$\chi[3][1] = \max(\chi[2][1]*a_{11},\ \chi[2][2]*a_{21})*b_1(\text{청소}) = (0.0864*0.4)*0.5 = 0.01728$

$\tau[3][1] = 2$

$\chi[3][2] = \max(\chi[2][1]*a_{12},\ \chi[2][2]*a_{22})*b_2(\text{청소}) = (0.0864*0.6)*0.1 = 0.00518$

$\tau[3][2] = 2$

$\chi[4][1] = \max(\chi[3][1]*a_{11},\ \chi[3][2]*a_{21})*b_1(\text{쇼핑}) = (0.01728*0.7)*0.4 = 0.00484$

$\tau[4][1] = 1$

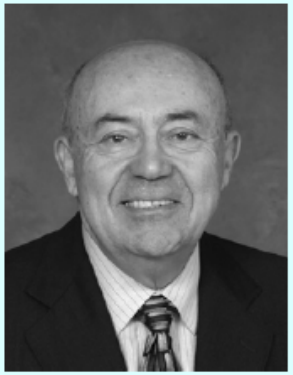
$\chi[4][2] = \max(\chi[3][1]*a_{12},\ \chi[3][2]*a_{22})*b_2(\text{쇼핑}) = (0.01728*0.3)*0.3 = 0.00156$

$\tau[4][2] = 1$

역추적하면 $\hat{q}_4 = 1,\ \hat{q}_3 = 1,\ \hat{q}_2 = 2,\ \hat{q}_1 = 2$ 답은 $\mathbf{Q} = (\hat{q}_1 = s_2, \hat{q}_2 = s_2, \hat{q}_2 = s_1, \hat{q}_4 = s_1)$

Andrew Viterbi

(1935년 3월 9일 ~) 이탈리아 출신의 미국인



Viterbi는 다섯 살 때 유대인 부모를 따라 이탈리아에서 미국으로 이민을 갔다. 무솔리니 정권을 피해 망명한 것이다. 미국 땅을 밟은 지 닷새 만에 나치 독일이 폴란드를 침공하여 2차 세계 대전이 발발하였다. Viterbi는 '적절한 순간에 적절한 곳'을 선택했다고 말하곤 한다. 그는 MIT 전기공학과에서 학사와 석사를 취득하고 남가주대학 (USC)에서 박사 학위를 취득한다. 이후 UCLA에서 교수 생활을 시작하였다. 1967년에는 그에게 세계적인 명성을 안겨준 Viterbi 알고리즘을 발표한다 [Viterbi67]. 이 알고리즘은 데이터 디코딩을 위해 개발되었는데 현재 무선 통신에 폭 넓게 활용되고 있다. 패턴 인식에서는 은닉 마코프 모델의 디코딩 문제를 위한 알고리즘으로 활용된다. Viterbi는 이 알고리즘을 자산으로 1969년에 동료들과 Linkabit라는 벤처 회사를 차린다. 이 회사가 성장하기 시작하자 그는 또 다른 이민을 꿈꾸기 시작한다. 대학에서 산업계로의 이적을 고민한 것이다. 결국 또 다른 '적절한 순간에 적절한 곳'을 선택하게 된다. 이후 동료들과 Qualcomm을 설립하게 되고 세계적인 통신 회사로 성장시킨다. 2003년에는 Viterbi 그룹이라는 벤처 투자 회사를 설립하였다. Forbes는 2000년의 미국 갑부 400 인 명단에 Viterbi를 386 등에 올렸다. 그는 성공한 교수이자 성공한 경영인으로 평가된다. Morton과의 인터뷰는 Viterbi를 가장 잘 드러내는 문헌이다 [Morton99].

7.4.3 학습

- 학습 문제란?
  - 관측 벡터 $\mathbf{O}$가 주어져 있을때 HMM의 매개 변수 $\mathbf{\Theta}$는?
    - 즉 $\mathbf{O}$의 발생 확률을 최대로 하는 $\mathbf{\Theta}$를 찾는 문제
  - 평가와 디코딩의 반대 작업
  - 평가와 디코딩 같은 분석적 방법 없음
    - 수치적 방법 필요

- 학습의 목적을 적어보면,

$$\hat{\mathbf{\Theta}} = \underset{\text{모든}\mathbf{\Theta}}{\arg\max}\, P(\mathbf{O} \mid \mathbf{\Theta}) \qquad (7.21)$$

7.4.3 학습

- 학습 알고리즘 스케치
  - 반복적 개선

알고리즘 [7.3] HMM 학습 알고리즘 스케치

입력: HMM 아키텍처 (n, m, 그래프 형태 등), 관측 벡터 $\mathbf{O} = o_1 o_2 \cdots o_T$

출력: HMM $\hat{\mathbf{\Theta}} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$

알고리즘:

1. $\mathbf{\Theta}$를 초기화 하라.
2. 적절한 방법으로 $P(\mathbf{O} \mid \mathbf{\Theta}^{new}) > P(\mathbf{O} \mid \mathbf{\Theta})$인 개선된 $\mathbf{\Theta}^{new}$를 찾아라.
3. 만족스러우면 $\hat{\mathbf{\Theta}} = \mathbf{\Theta}^{new}$로 하고 멈추고, 그렇지 않으면 $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}^{new}$로 하고 2로 가라.

7.4.3 학습

- 가진 것과 찾아야 하는 것
  - 가진 것 **O,** 찾아야 하는 것 **Θ=(A,B,π)**
  - O로 직접 **Θ**를 찾을 수 없다.
    - 은닉 변수latent variable γ와 κ 등장
    - 가우시언 혼합 추정과 유사성 있음
- Baum-Welch 알고리즘의 골격

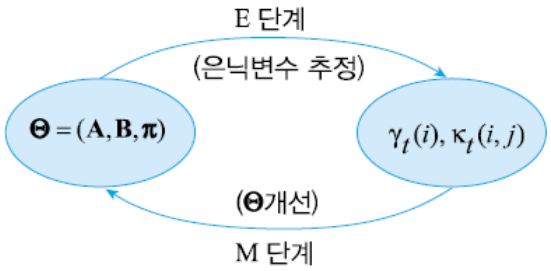


그림 7.18 Baum-Welch 학습 알고리즘은 EM 알고리즘의 일종임

알고리즘 [7.4] HMM 학습을 위한 Baum-Welch 알고리즘 스케치

입력: HMM 아키텍처 (n, m, 그래프 형태 등), 관측 벡터 $\mathbf{O} = o_1 o_2 \cdots o_T$

출력: HMM $\hat{\boldsymbol{\Theta}} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$

알고리즘:

1. $\boldsymbol{\Theta}$를 초기화 하라.
2. // 개선된 $\boldsymbol{\Theta}^{new}$ 찾기
   2.1 (E 단계) $\boldsymbol{\Theta}$로 $\gamma_t(i), 1 \le t \le T, 1 \le i \le n$ 과 $\kappa_t(i,j), 1 \le t \le T-1, 1 \le i, j \le n$ 을 추정하라.
   2.2 (M 단계) $\gamma_t(i)$와 $\kappa_t(i,j)$를 가지고 $\boldsymbol{\Theta}^{new}$를 찾아라.
3. 만족스러우면 $\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{\Theta}^{new}$로 하고 멈추고, 그렇지 않으면 $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}^{new}$로 하고 2로 가라.

7.4.3 학습

- E 단계 (γ와 κ 의 추정)
  - $\gamma_t(i)$는 시간 t에서 상태 s_i에 있을 확률
  - $\kappa_t(i,j)$는 시간 t에 s_i, t+1에 s_j에 있을 확률

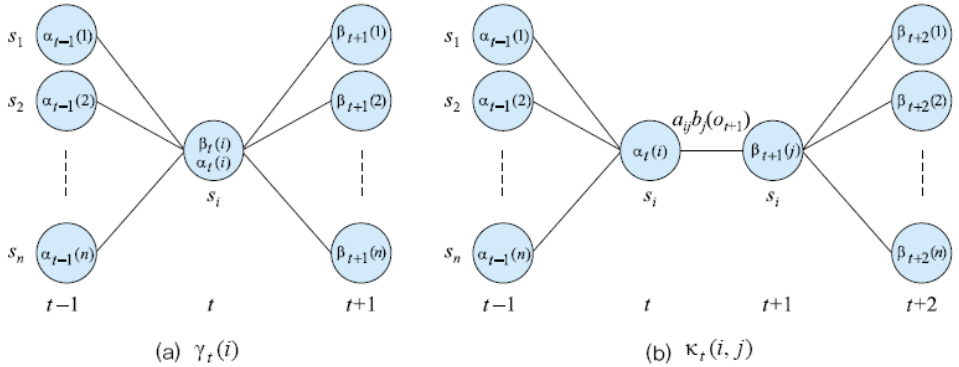


그림 7.19 은닉 변수 $\gamma_t(i)$와 $\kappa_t(i,j)$의 역할

$$\gamma_t(i) = P(q_t = s_i \mid \mathbf{O}, \mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_t(j)\beta_t(j)}, \quad 1 \le t \le T, 1 \le i \le n \tag{7.22}$$

$$\kappa_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha_t(k)a_{kl}b_l(o_{t+1})\beta_{t+1}(l)}, \quad 1 \le t \le T-1, 1 \le i,j \le n \tag{7.26}$$

- γ와 κ를 구하는데 필요한 α와 β는

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(o_1), \quad 1 \le i \le n \tag{7.13}$$

$$\alpha_t(i) = \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{t-1}(j)a_{ji}\right] * b_i(o_t), \quad 2 \le t \le T, 1 \le i \le n \tag{7.14}$$

$$\beta_T(i) = 1, \quad 1 \le i \le n \tag{7.24}$$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j), \quad 1 \le t \le T-1, 1 \le i \le n \tag{7.25}$$

7.4.3 학습

- M 단계 (Θ의 추정)
  - E 단계에서 구한 γ와 κ 로 Θ^{new}의 재추정reestimation
  - $P(\mathbf{O}|\Theta^{new}) > P(\mathbf{O}|\Theta)$이어야 함. 즉 Θ^{new}는 Θ보다 $\mathbf{O}$를 '잘 설명해야' 함

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{new} &= \frac{s_i\text{에서 } s_j\text{로 이전할 기대값}}{s_i\text{에서 이전할 기대값}} \\ &= \frac{t=1\text{일 때 } s_i\text{에서 } s_j\text{로 이전할 확률} + \cdots + t=T-1\text{일 때 } s_i\text{에서 } s_j\text{로 이전할 확률}}{t=1\text{일 때 } s_i\text{에서 이전할 확률} + \cdots + t=T-1\text{일 때 } s_i\text{에서 이전할 확률}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \kappa_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}, \quad 1 \le i, j \le n \end{aligned}\right\} \quad (7.27)$$

$$\left.\begin{aligned} b_i(v_k)^{new} &= \frac{s_i\text{에서 } v_k\text{를 관측할 기대값}}{s_i\text{에 있을 기대값}} \\ &= \frac{o_t = v_k\text{인 모든 } t\text{에 대해 } s_i\text{에 있을 확률의 합}}{t=1\text{일 때 } s_i\text{에 있을 확률} + \cdots + t=T\text{일 때 } s_i\text{에 있을 확률}} \\ &= \frac{\sum_{o_t=v_k\text{인 } t=1}^{T} \gamma_t(i)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i)}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le k \le m \end{aligned}\right\} \quad (7.28)$$

$$\pi_i^{new} = t\text{가 1일 때 } s_i\text{에 있을 확률} = \gamma_1(i), \quad 1 \le i \le n \quad (7.29)$$

7.4.3 학습

- Baum-Welch 알고리즘
  - 초기화는 어떻게?
  - 멈춤 조건은 어떻게?
- 특성
  - 수렴한다.
  - 욕심 알고리즘이므로 전역 최적점 보장 못한다.
- 어고딕과 좌우 모델
  - 크기 문제 (어고딕 모델)
  - 다중 관측 학습 (좌우 모델)

알고리즘 [7.5] HMM 학습을 위한 Baum-Welch 알고리즘

입력: HMM 아키텍처 (n, m, 그래프 형태 등), 관측 벡터 $\mathbf{O} = o_1 o_2 \cdots o_T$

출력: HMM $\hat{\mathbf{\Theta}} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$

알고리즘:

1. $\mathbf{\Theta}$를 초기화 하라.
2. **repeat** {

   // E 단계

   // 라인 3의 α는 (7.13)~(7.14), β는 (7.24)~(7.25)
3. $\mathbf{O}$와 $\mathbf{\Theta}$를 가지고 $\alpha_t(i), 1 \le t \le T, 1 \le i \le n$ 과 $\beta_t(i), 1 \le t \le T, 1 \le i \le n$ 을 구한다.

   // 라인 4의 γ는 (7.22), κ는 (7.26)
4. α와 β로 $\gamma_t(i), 1 \le t \le T, 1 \le i \le n$ 과 $\kappa_t(i,j), 1 \le t \le T-1, 1 \le i, j \le n$ 을 계산한다.

   // M 단계
5. γ와 κ를 가지고 a_{ij}^{new}, $1 \le i, j \le n$을 추정한다. // (7.27)
6. γ를 가지고 $b_i(v_k)^{new}$, $1 \le i \le n$, $1 \le k \le m$을 추정한다. // (7.28)
7. γ를 가지고 $\pi_i^{new}, 1 \le i \le n$ 을 추정한다. // (7.29)
8. $\mathbf{\Theta} = (\mathbf{A}^{new}, \mathbf{B}^{new}, \boldsymbol{\pi}^{new})$;
9. } **until** (멈춤 조건);
10. $\hat{\mathbf{\Theta}} = \mathbf{\Theta}$;

7.5 부연 설명

1. HMM의 출력은 확률. 큰 장점이다.
2. 샘플 생성 능력이 있다. HMM은 생성generative 모델이다.

알고리즘 [7.6] HMM에 의한 관측 벡터 생성

입력: HMM $\boldsymbol{\Theta} = (\mathbf{A},\mathbf{B},\boldsymbol{\pi})$, 관측 벡터의 길이 T

출력: 관측 벡터 $\mathbf{O} = o_1 o_2 \cdots o_T$

알고리즘:

1. $\boldsymbol{\pi}$에 따라 초기 상태 q_1을 결정한다.
2. $t = 1$;
3. **while** $(t \neq T)$ {
4. $\quad$ **B**에 따라 상태 q_t에서 관측 값을 결정하고 그것을 o_t에 기록한다.
5. $\quad$ **A**에 따라 다음 상태 q_{t+1}을 결정한다.
6. $\quad$ t++;
7. }

7.5 부연 설명

3. HMM을 예측 목적으로 사용할 수 있다.
4. HMM을 분류기로 사용할 수 있다.
   - 부류 별로 독립적으로 HMM 구축
   - (7.30)으로 분류

$$\mathbf{O}\text{를 } q = \arg\max_{j} P(\mathbf{O} \mid \mathbf{\Theta}_{\omega_j}) P(\omega_j)\text{일 때 } \omega_q\text{로 분류하라.} \qquad (7.30)$$

5. 적절한 아키텍처를 선택해야 한다.
   - 그녀의 삶은 어떤 모델?
   - 음성 인식은 어떤 모델?
6. 상태의 개수를 적절히 해야 한다.
7. 훌륭한 공개 소프트웨어가 있다.
   - 캠브리지 대학의 HTK (HMM Toolkit)