

Лабораторна робота №2

з дисципліни “Математичне моделювання систем та процесів”

тема: “Математичні моделі, що описуються диференціальними рівняннями вищих порядків”

Мета роботи – опанувати комп’ютерні засоби для розв’язання та аналізу диференціальних рівнянь вищих порядків та набути навичок побудови найпростіших математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями вищих порядків.

Завдання для виконання

1. Знайти розв’язки диференціальних рівнянь (без початкових умов), заданих за варіантом (*табл. 2.1, табл. 2.2*), в аналітичному вигляді, не використовуючи математичні пакети, тобто вручну.
2. Знайти розв’язок диференціальних рівнянь (без початкових умов), заданих за варіантом (*табл. 2.1, табл. 2.2*), в аналітичному вигляді за допомогою будь-якого математичного пакета, використовуючи спеціальні функції, що наявні в ньому.
3. Знайти аналітичний розв’язок задач Коші (*табл. 2.1, табл. 2.2*), заданих за варіантом, не використовуючи математичні пакети, тобто вручну.
4. Знайти аналітичний розв’язок задач Коші (*табл. 2.1, табл. 2.2*), заданих за варіантом, за допомогою будь-якого математичного пакета, використовуючи спеціальні функції, що наявні в ньому.

5. Розв'язати задані за варіантом задачі Коші (*табл. 2.1, табл. 2.2*):
- ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
- змінюючи точність обчислень, що задана за замовчуванням для кожного метода.
6. На декартовій площині №1 побудувати графіки отриманих розв'язків першої задачі Коші (графіки чисельних розв'язків мають бути побудовані у вигляді точок, які не з'єднані між собою):
- ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
 - ✓ при аналітичному розв'язанні задачі Коші вручну;
 - ✓ при аналітичному розв'язанні задачі Коші за допомогою математичного пакету.
7. На декартовій площині №2 побудувати графіки отриманих розв'язків другої задачі Коші (графіки чисельних розв'язків мають бути побудовані у вигляді точок, які не з'єднані між собою):
- ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
 - ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
 - ✓ при аналітичному розв'язанні задачі Коші вручну;
 - ✓ при аналітичному розв'язанні задачі Коші за допомогою математичного пакету.
8. Сформулювати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами та певні початкові умови (задачу Коші), яке за прийнятний час не розв'язується аналітично за допомогою математичних пакетів, але легко знаходиться його чисельний розв'язок.

9. Розв'язати задачу Коші з п.8:

- ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
- ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
- ✓ будь-яким іншим чисельним методом.

змінюючи точність обчислень, що задана за замовчуванням для кожного метода.

10. На декартовій площині №3 побудувати графіки (у вигляді точок, які не з'єднані між собою) отриманих розв'язків задачі Коші з п.9:

- ✓ методом Рунге-Кутта другого та третього порядку;
- ✓ методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку;
- ✓ будь-яким іншим чисельним методом.

11. Розв'язати задачу, задану за варіантом (табл. 2.3), при необхідності дозволяється використовувати математичні пакети.

12. Номер варіанту визначається таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	2	7	5
2	10	8	9
3	6	9	3
4	11	10	1
5	4	11	8
6	7		

Примітка: Якщо буде обрано пакет *MatLab*, то програма має бути написана у вигляді функції з назвою *Lab_2_p* (де *p* номер варіанту). Дана функція повинна мати два вхідних та один вихідний параметр. В залежності від значення вхідних

параметрів (номер рівняння, метод розв'язання) функція має присвоювати вихідному параметру розв'язок, отриманий методом Рунге-Кутта другого та третього порядку, методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку або аналітичний розв'язок. Дана функція має запускатися з командного рядка *MatLab*.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має містити:

1. Оформлений за зразком титульний аркуш.
2. На кожній сторінці, окрім титульної, в правому верхньому куті прізвище, ініціали студента та номер групи.
3. Наскрізню нумерацію, окрім титульної, в правому нижньому куті.
4. Постановку задачі за варіантом.
5. Математичне підґрунття для виконання даної лабораторної роботи.
6. Аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь з п.1 – 4 завдання.
7. Чисельні розв'язки задач Коші з п.5 завдання (при необхідності таблиці можна розміщувати в альбомному форматі):

Спеціалізований математичний пакет (вказати назву)			
Метод Рунге-Кутта 2–3 порядку		Метод Рунге-Кутта 4–5 порядку	
x	y	x	y

8. Графіки з п.6 та п.7 завдання.
9. Чисельні розв'язки задачі Коші з п.9 завдання (при необхідності таблицю можна розміщувати в альбомному форматі):

Спеціалізований математичний пакет (вказати назву)			
Метод Рунге-Кутта 2–3 порядку		Метод Рунге-Кутта 4–5 порядку	
x	y	x	y

10. Графіки з п.10 завдання.
11. Процес розв'язку задач з п.11 завдання.
12. Висновки по кожному пункту завдання.
13. Основний текст звіту має бути набраний з дотриманням таких вимог:
шрифт Times New Roman 14 пт, відступ першого рядка 12.5 мм з міжрядковим інтервалом 1.5 з вирівнюванням по ширині та

надрукований на одному боці аркуша паперу формату А4 з полями таких розмірів:

- верхнє та нижнє поле: до тексту – 20 мм,
до колонтитула – 12.5 мм;
- лівє поле – 30 мм;
- правє поле – 15 мм.

14. Текст в таблицях має бути набраний з дотриманням таких вимог: шрифт Times New Roman 12 пт (при необхідності дозволяється змінити шрифт на Courier New 8 пт), міжрядковий інтервал 1.0, інтервал перед 6 пт, інтервал після 6 пт.
15. Текст програм має бути набраний з дотриманням таких вимог: шрифт Courier New 8 пт з міжрядковим інтервалом 1.0.
16. Звіт подається на перевірку в роздрукованому та електронному вигляді в форматі *.doc або *.docx, або *.rtf, або *.pdf.

Таблиця 2.1. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
1	$y'' - 4y' - 3y = -5\cos x$	$x_0 = 0.00;$ $y(x_0) = 7.00;$ $y'(x_0) = 11.00$	$[x_0; 9.5]$	21
2	$5y'' + 3y' = -5x^2 \cos x$	$x_0 = 1.00;$ $y(x_0) = 5.00;$ $y'(x_0) = 17.00$	$[x_0; 10.0]$	21
3	$7y'' - 2y' = -3x^2 \cos 2x - x^3$	$x_0 = 5.00;$ $y(x_0) = 15.00;$ $y'(x_0) = 27.00$	$[x_0; 17.0]$	21
4	$-5y'' + 3y' = 5x^3 - 5x \cdot \cos 3x$	$x_0 = 3.00;$ $y(x_0) = 5.00;$ $y'(x_0) = 7.00$	$[x_0; 13.0]$	21
5	$3y'' + 4y' = -7x^2 - 5\cos 7x$	$x_0 = 13.00;$ $y(x_0) = 45.00;$ $y'(x_0) = 71.00$	$[x_0; 23.0]$	21
6	$y'' + 5y' = 5x^2 \cdot \sin x - 4x \cdot \cos 2x$	$x_0 = 13.00;$ $y(x_0) = 3.00;$ $y'(x_0) = 1.00$	$[x_0; 17.0]$	21
7	$5y'' + 3y' = 2e^x - 2x \cdot \cos 3x$	$x_0 = 23.00;$ $y(x_0) = 13.00;$ $y'(x_0) = 15.00$	$[x_0; 27.0]$	21
8	$17y'' - y' = 5x^3 \sin 7x - 4\cos 5x$	$x_0 = 13.00;$ $y(x_0) = 3.00;$ $y'(x_0) = 1.00$	$[x_0; 17.0]$	21

Таблиця 2.1. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
9	$y'' - 5y' = -4x^2 \cdot \cos 7x - 5x^3 \cdot \sin x$	$x_0 = 3.00;$ $y(x_0) = 13.00;$ $y'(x_0) = 11.00$	$[x_0; 9.0]$	21
10	$y'' + 5y' = 7x^3 \sin 3x - 4x^2 \cos 9x$	$x_0 = 13.00;$ $y(x_0) = 3.00;$ $y'(x_0) = 17.50$	$[x_0; 19.0]$	21
11	$y'' - 5y' = -4x^2 \cos 7x + 5x^3 \sin x$	$x_0 = 13.70;$ $y(x_0) = 11.30;$ $y'(x_0) = 5.00$	$[x_0; 9.0]$	21

Таблиця 2.2. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
1	$y''' - 4y'' + 3y = \sin x$	$x_0 = 5.00;$ $y(x_0) = 7.00;$ $y'(x_0) = 11.00;$ $y''(x_0) = 3.00$	$[x_0; 9.5]$	21
2	$y''' + 5y'' + 3y' = x \cdot \sin x$	$x_0 = 4.00;$ $y(x_0) = 5.00;$ $y'(x_0) = 13.00;$ $y''(x_0) = 15.00$	$[x_0; 9.0]$	21
3	$2y''' + 5y'' = x \cdot \sin x - x^2$	$x_0 = 3.00;$ $y(x_0) = 4.50;$ $y'(x_0) = 13.50;$ $y''(x_0) = 12.10$	$[x_0; 19.0]$	21
4	$4y''' - 5y' = 3x^2 - 8x \cdot \sin x$	$x_0 = 4.00;$ $y(x_0) = 5.70;$ $y'(x_0) = 3.50;$ $y''(x_0) = 2.10$	$[x_0; 21.0]$	21
5	$y''' + 12y' - 13y = x^3 - 8x \cdot \sin 2x$	$x_0 = 5.00;$ $y(x_0) = 5.70;$ $y'(x_0) = 13.50;$ $y''(x_0) = 12.15$	$[x_0; 11.0]$	21
6	$5y''' - 5y = 3x \cdot e^x - 8x \cdot \sin x$	$x_0 = 3.00;$ $y(x_0) = 5.70;$ $y'(x_0) = 13.50;$ $y''(x_0) = 12.10$	$[x_0; 23.0]$	21

Таблиця 2.2. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів	
			Інтервал	Кількість точок
7	$3y''' - y'' = 3x^2 \cdot e^x - 8x \cdot \cos x$	$x_0 = 3.00;$ $y(x_0) = 5.70;$ $y'(x_0) = 13.50;$ $y''(x_0) = 12.10$	$[x_0; 23.0]$	21
8	$y''' + 17y' = 3x \cdot e^{-2x}$	$x_0 = 5.00;$ $y(x_0) = 15.70;$ $y'(x_0) = 43.50;$ $y''(x_0) = 32.10$	$[x_0; 13.0]$	21
9	$y''' + y' = 3x \cdot e^{-2x} - 3x^2 \cdot e^x - x^3$	$x_0 = 15.00;$ $y(x_0) = 5.90;$ $y'(x_0) = 13.70;$ $y''(x_0) = 31.50$	$[x_0; 27.0]$	21
10	$4y''' + 3y'' - 8y' - 7y =$ $= -3x \cdot e^{-5x} - 3x^3 \cdot e^{-x}$	$x_0 = 13.40;$ $y(x_0) = 15.10;$ $y'(x_0) = 53.70;$ $y''(x_0) = 41.30$	$[x_0; 17.5]$	21
11	$y''' - 5y'' =$ $= 3x \cdot e^{-2x} - 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot \cos x$	$x_0 = 41.00;$ $y(x_0) = 1.90;$ $y'(x_0) = 17.30;$ $y''(x_0) = 1.50$	$[x_0; 42.0]$	21

Таблиця 2.3. Варіанти завдань

Варіант №	Задача
1	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 9x = 10\cos 2t$ <p>з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти рівняння руху тіла $x(t)$. Подати його у вигляді суми двох коливань одного з власною частотою ω_0, а іншого – з частотою ω зовнішньої сили. Побудувати інтегральну криву розв'язку $x(t)$ та відмітити на графіку період коливань.</p>
2	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 100x = 225\cos 2t + 300\sin 5t$ <p>з початковими умовами $x(0) = 375$, $x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти рівняння руху тіла $x(t)$. Подати його у вигляді суми двох коливань одного з власною частотою ω_0, а іншого – з частотою ω зовнішньої сили. Побудувати інтегральну криву розв'язку $x(t)$ та відмітити на графіку період коливань.</p>
3	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 4x = 5\cos 3t$ <p>з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти рівняння руху тіла $x(t)$. Подати його у вигляді суми двох коливань одного з власною частотою ω_0, а іншого – з частотою ω зовнішньої сили. Побудувати інтегральну криву розв'язку $x(t)$ та відмітити на графіку період коливань.</p>
4	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 25x = 90\cos 4t$ <p>з початковими умовами $x(0) = 0$, $x'(0) = 90$.</p> <p>Знайти рівняння руху тіла $x(t)$. Подати його у вигляді суми двох коливань одного з власною частотою ω_0, а іншого – з частотою ω зовнішньої сили. Побудувати інтегральну криву розв'язку $x(t)$ та відмітити на графіку період коливань.</p>

Таблиця 2.3. Варіанти завдань

Варіант №	Задача
5	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 4x' + 5x = 10\cos 3t$ <p>з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти (і побудувати графік) усталений періодичний розв'язок даного диференціального рівняння та тієї перехідної складової розв'язку, що задовольняє початковим умовам.</p>
6	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 6x' + 13x = 10\cos 5t$ <p>з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти (і побудувати графік) усталений періодичний розв'язок даного диференціального рівняння та тієї перехідної складової розв'язку, що задовольняє початковим умовам.</p>
7	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 2x' + 26x = 600\cos 10t$ <p>з початковими умовами $x(0) = 10$, $x'(0) = 0$.</p> <p>Знайти (і побудувати графік) усталений періодичний розв'язок даного диференціального рівняння та тієї перехідної складової розв'язку, що задовольняє початковим умовам.</p>
8	<p>Деяка система описується диференціальним рівнянням</p> $x'' + 8x' + 25x = 200\cos t + 520\sin t$ <p>з початковими умовами $x(0) = -30$, $x'(0) = -10$.</p> <p>Знайти (і побудувати графік) усталений періодичний розв'язок даного диференціального рівняння та тієї перехідної складової розв'язку, що задовольняє початковим умовам.</p>
9	<p>Параметри системи, що складається з тіла, закріпленого на пружині, з амортизатором: $m = 1$, $c = 2$, $k = 2$, $F_0 = 2$. Зовнішня сила має вигляд $F_3(t) = F_0 \cos \omega t$. Необхідно дослідити можливість практичного резонансу в цій системі. Зокрема, знайти амплітуду $C(\omega)$ усталених періодичних вимушених коливань з частотою ω та побудувати графік $C(\omega)$ і знайти частоту практичного резонансу ω (якщо така частота існує).</p>

Таблиця 2.3. Варіанти завдань

Варіант №	Задача
10	<p>Параметри системи, що складається з тіла, закріпленого на пружині, з амортизатором: $m=1$, $c=6$, $k=45$, $F_0=50$. Зовнішня сила має вигляд $F_3(t)=F_0 \cos \omega t$. Необхідно дослідити можливість практичного резонансу в цій системі. Зокрема, знайти амплітуду $C(\omega)$ усталених періодичних вимушених коливань з частотою ω та побудувати графік $C(\omega)$ і знайти частоту практичного резонансу ω (якщо така частота існує).</p>
11	<p>Параметри системи, що складається з тіла, закріпленого на пружині, з амортизатором: $m=1$, $c=10$, $k=650$, $F_0=100$. Зовнішня сила має вигляд $F_3(t)=F_0 \cos \omega t$. Необхідно дослідити можливість практичного резонансу в цій системі. Зокрема, знайти амплітуду $C(\omega)$ усталених періодичних вимушених коливань з частотою ω та побудувати графік $C(\omega)$ і знайти частоту практичного резонансу ω (якщо така частота існує).</p>

Контрольні питання

1. Яке диференціальне рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку? Навести приклад.
2. Яке диференціальне рівняння називається однорідним лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку? Навести приклад.
3. Яке диференціальне рівняння називається неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку? Навести приклад.
4. Що таке канонічна форма неоднорідного лінійного диференціального рівняння вищого порядку? Навести приклад.
5. Що таке фундаментальна система розв'язків лінійного диференціального рівняння вищого порядку?
6. Що таке загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку?
7. Чому дорівнює загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння вищого порядку?
8. Поняття визначника Вронського та його застосування.
9. Навести приклад неоднорідного лінійного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами.
10. Як будується характеристичне рівняння?
11. Метод невизначених коефіцієнтів пошуку часткового розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння вищого порядку.
12. Які механічні коливання називаються вільними?
13. Які механічні коливання називаються вимушеними?
14. Поняття резонансу та практичного резонансу в механічних системах.
15. Відповідність механічних та електричних систем.