



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КНУ ім. Тараса Шевченка

Фізико-технічний інститут

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

С. М. Пономаренко

Електрика та магнетизм

збірник задач

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= 4\pi \iiint_V \rho dV & \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 & \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \\ & & & + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

С. М. Пономаренко

Електрика та магнетизм збірник задач

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний
посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Прикладна фізика» спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»*

КИЇВ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

УДК 537
ББК 22.3
П 563

Рецензенти:

І. Р. Зачек, д.ф.-м.н., професор кафедри загальної фізики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка»

О. М. Кордюк, д.ф.-м.н., член-кореспондент НАН України, директор Київського академічного університету

В. В. Іванова, к.т.н., доцент кафедри прикладної фізики ФТІ

Відповідальний ре- **Т. В. Литвинова**, к.т.н., доцент, в. о. директора ФТІ
дактор:

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 9/2019 від 30.05.2019 р.) за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту (протокол № 5/2019 від 24.04.2019 р.)

Електронне мережне видання

Пономаренко Сергій Миколайович, к.ф.-м.н., доцент

Електрика та магнетизм збірник задач

С. М. Пономаренко

П 563 Електрика та магнетизм: збірник задач [Електронний ресурс] : навчальний посібник / С. М. Пономаренко — К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — 154 с. — Бібліогр.: с. 154.

Наведено 431 задачі з курсу «Електрика та магнетизм». До більшості задач подано відповіді.

Для студентів фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали».

© С. М. Пономаренко, 2021 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського (ФТІ), 2021 р.

Зміст

Передмова	5
Рекомендації щодо розв'язку задач	7
Розділ 0. Система рівнянь Максвелла	9
§ 0.1. Рівняння Максвелла	9
§ 0.2. Закони збереження	10
§ 0.3. Граничні умови для полів	11
§ 0.4. Зв'язок між полями та потенціалами	11
Розділ 1. Електростатика	12
§ 1.1. Закон Кулона. Напруженість поля. Поняття потоку. Теорема Гауса	12
§ 1.2. Дипольний момент. Поле диполя. Сили, що діють на диполь з боку поля.	17
§ 1.3. Поняття потенціалу. Зв'язок потенціалу і напруженості . . .	19
§ 1.4. Рівняння Максвелла у випадку електростатики. Рівняння Пуассона та Лапласа	22
§ 1.5. Провідники в електростатичному полі. Метод електричних зображень	25
§ 1.6. Граничні умови. Поле у речовині	32
§ 1.7. Електрична ємність. Ємність взаємна, ємності коефіцієнти .	38
§ 1.8. Енергія електричного поля	44
§ 1.9. Пондеромоторні сили	47
Розділ 2. Постійний струм	51
§ 2.1. Струми в середовищах. Закон Ома в диференціальній формі	51
§ 2.2. Електричні кола. Правила Кірхгофа	55
§ 2.3. Закон Джоуля-Ленца	57

Розділ 3. Магнітостатика	61
§ 3.1. Закон Біо-Савара-Лапласа. Теорема про циркуляцію	61
§ 3.2. Векторний потенціал. Магнітний момент	65
§ 3.3. Магнітне поле у речовині. Граничні умови	68
§ 3.4. Пондеромоторні сили в магнітному полі. Енергія та тиск поля	75
Розділ 4. Електродинаміка	82
§ 4.1. Закон Фарадея	82
§ 4.2. Надпровідники у магнітному полі	89
§ 4.3. Рівняння Максвелла. Вектор Пойнтінга	91
Розділ 5. Рух частинок в електромагнітному полі	96
§ 5.1. Рух заряду електричному полі	96
§ 5.2. Рух заряду в магнітному полі	97
§ 5.3. Рух заряду в електричному та магнітному полях	97
Розділ 6. Релятивістська електродинаміка	101
§ 6.1. Перетворення електричних та магнітних полів	101
Розділ 7. Квазістаціонарні струми в електричних колах	103
§ 7.1. Перехідні процеси в електричних колах	103
§ 7.2. Вільні коливання в електричних колах	104
§ 7.3. Вимушені коливання в електричних колах. Резонанс	105
Відповіді	109
Додатки	144
Додаток А. Основні формули векторного аналізу	144
А.1 Диференціальні оператори	144
А.2 Диференціальні операції в різних системах координат	144
А.3 Другі похідні	145
А.4 Похідні від добутків	145
А.5 Інтегральні характеристики та теореми	146
Додаток Б. Системи одиниць в електродинаміці	147
Додаток В. Сфери в електричному та магнітному полях	149
Додаток Г. Фізичні константи	153
Література	154

Передмова

Дисципліна «Електрика та магнетизм» курсу «Загальна фізика», який вивчається студентами Фізико-технічного інституту КПІ імені Ігоря Сікорського на другому курсі, входить до циклу базової підготовки студентів, що навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали». На вивчення дисципліни відведено один семестр, практичні заняття проводяться один раз на тиждень. Велика частина програмного матеріалу, пов'язана з умінням розв'язування конкретних задач. Вироблення умінь, навичок і методів розв'язку величезного числа задач, звичайно, не може бути реалізована тільки за рахунок годин, відведених на практичні заняття, і має на увазі велику самостійну роботу студента.

Назви розділів та підрозділів посібника відповідають робочій програмі курсу. До кожного з них подано короткий теоретичний матеріал, який містить основні формули, необхідні для розв'язування задач. В кінці збірника міститься довідковий матеріал та перелік використаної літератури.

Задачі збірника мають в основному підвищений рівень складності і розташовано у такій послідовності, що для розв'язання наступних задач можна використовувати розв'язок попередніх. Практично до кожної задачі в кінці збірника наведена відповідь, деякі задачі містять детальних розв'язок.

Всі формули в основному тексті і відповідях наведені в гаусовій системі одиниць (СГС). Система одиниць СГС була вибрана з огляду на традиції викладання фізичних дисциплін в фізико-технічному інституті, крім того, при вивченні саме теорії електромагнітного поля вона має безперечні переваги (див. наприклад [15, §85]). За необхідності, студенту буде не складно перевести формули із системи СГС в СІ і навпаки, крім того, в Додатку Б наведено алгоритм таких дій. Зрозуміло, що задачі на освоєння законів постійного та змінного струмів, все ж таки зручніше розв'язувати в системі СІ, тому у відповідних розділах використовується саме ця система одиниць. Хоч більшість задач передбачають отримання розв'язку у вигляді формули, однак є й такі задачі, які вимагають числової відповіді, а тому вихідні дані і числові відповіді надані з урахуванням точності значень відповідних величин і правил дій над наближеними числами. В кінці збірника дана таблиця основних фізичних констант та інші довідкові

таблиці.

Задачі даного збірника щорічно пропонуються студентам при складанні письмового екзамену, який передбачено навчальним планом. Зрозуміло, що багато задач було взято з джерел, які перелічені в списку літератури, оскільки методика викладання дисципліни «Електрика та магнетизм» на протязі століть вже є здебільшого завершеною і багато вже винайдених іншими вченими задач є ключовими для розуміння предмета. Однак в збірнику є й велика частина авторських задач, ідеї яких сформувались у автора на основі власного досвіду викладання предмету.

Дана версія посібника є електронним виданням, тому для зручності користування ним передбачена система навігації у вигляді гіперпосилань та бічної панелі змісту.

С. М. Пономаренко

Рекомендації щодо розв'язку задач

Як відомо, фізична теорія описує певне коло явищ природи і має свої межі застосування. Для чіткого усвідомлення основних аспектів теорії, меж її застосування та пояснення на її основі заданих явищ, необхідно тренуватись в розв'язуванні задач.

В основу кожної задачі покладено деяке фізичне явище, яке описується одним або кількома фундаментальними законами. Тому, першою рекомендацією для розв'язку задач буде наступна:

- ретельно опрацюйте теорію.

Однак, саме по собі знання теорії ще не гарантує успіху в досягненні розв'язку. Як правило, явище, що описується в задачі, на перший погляд може здатись складним, таким, що залежить від багатьох факторів, тому крім знання основ теорії слід ще визначити, які з цих факторів мають суттєве значення, а які другорядні. Саме визначення таких факторів є процесом побудови фізичної моделі. Тому наступною рекомендацією буде:

- побудуйте фізичну модель явища.

Енциклопедія дає наступне означення поняттю фізичної моделі: *фізична модель — це фізичне уявлення про явище з метою його дослідження, яке представляється за допомогою іншого фізичного явища, що має в тому чи іншому аспекті аналогічну динаміку поведінки.*

Крім того, навіть якщо фізична ситуація є зрозумілою, вона може бути складною в математичному відношенні, тому вдало побудована фізична модель може значно спростити математичні розрахунки.

Наступним важливим етапом розв'язку задачі є:

- схематичне креслення, яке робить умову задачі більш наочною і полегшує її розв'язання.

Схематичне креслення є важливим евристичним методом, що полегшує побудову та аналіз фізичної моделі. Побудувавши таку модель і усвідомивши межі її застосовності

- слід записати математичні співвідношення, між шуканими та відомими величинами у вигляді системи рівнянь.

Такі рівняння складають основу математичної моделі фізичного явища. Перш ніж розв'язувати складену систему,

- переконайтеся в тому, що число невідомих дорівнює числу рівнянь.

Після того, як отриманий результат у вигляді математичного співвідношення (формули), перш за все,

- перевірте розмірність результату.

Проте правильна розмірність ще не гарантує правильного результату, окрім цього

- розгляньте граничні випадки в отриманих формулах, переконайтесь, що вони дають фізично адекватні результати.

Лише після всього вище сказаного, проведіть арифметичні розрахунки, які слід проводити за правилами наближених обчислень. Отримавши відповідь, за можливості, необхідно

- оцінити, наскільки числовий результат відповідає дійсності.

Іноді така оцінка дозволяє встановити помилковість отриманого результату.

Система рівнянь Максвелла

Невозможно избавиться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и обладают собственным разумом, что они мудрее нас, мудрее даже тех, кто их открыл, и что мы извлекаем из них больше, чем первоначально было заложено

Г. Герц

§ 0.1.

Рівняння Максвелла

Система рівнянь Максвелла сформульована Дж. К. Максвеллом в 60-х роках XIX століття на основі узагальнення емпіричних законів і розвитку ідей про електромагнітні явища. Вони є основою теорії електромагнітного поля, ця система рівнянь дозволяє розв'язувати задачі, пов'язані з відшукуванням електричних і магнітних полів, що створюються заданим розподілом електричних зарядів і струмів.

Інтегральна форма:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_V \rho dV$$

Теорема Гауса для електричного поля

(Int I)

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Теорема Гауса для магнітного поля

(Int II)

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Закон електромагнітної індукції (Int III)

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Закон Ампера

(Int IV)

Диференціальна форма:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (\text{Diff I})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Diff II})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Diff III})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{Diff IV})$$

\mathbf{E} – вектор напруженості електричного поля,

\mathbf{H} – вектор напруженості магнітного поля,

\mathbf{D} – вектор індукції електричного поля, визначається формулою:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \quad (2)$$

\mathbf{P} – вектор поляризації (дипольний момент одиниці об'єму),

\mathbf{M} – вектор намагніченості (дипольний магнітний момент одиниці об'єму),

ρ – об'ємна густина вільних електричних зарядів,

\mathbf{j} – вектор густини електричного струму провідності.

У випадку лінійних ізотропних середовищ:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (4)$$

ϵ – діелектрична проникність середовища,

μ – магнітна проникність середовища.

§ 0.2. Закони збереження

З рівнянь Максвелла випливають закони збереження:

- електричного заряду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5)$$

- енергії

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (6)$$

w – густина енергії електромагнітного поля, визначається формулою:

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (7)$$

\mathbf{S} – вектор Пойнтінга (вектор густини потоку енергії), визначається формулою:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (8)$$

величина

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (9)$$

є потужністю, що виділяється в одиниці об'єму речовини (закон Джоуля-Ленца).

§ 0.3. Граничні умови для полів

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (10)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \quad (11)$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (12)$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}i \quad (13)$$

σ – поверхнева густина вільних зарядів на границі розділу,
 i – поверхневий струм провідності, який тече по границі розділу.

§ 0.4. Зв'язок між полями та потенціалами

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (14)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (15)$$

φ – скалярний потенціал,
 \mathbf{A} – вектор-потенціал.

Потенціали електромагнітного поля визначені не однозначно, якщо замість потенціалів \mathbf{A} та φ вибрати інші \mathbf{A}' та φ' , які пов'язані з вихідними перетвореннями:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad (16)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (17)$$

де $f(x, y, z, t)$ – довільна функція, то характеристики поля \mathbf{E} та \mathbf{B} залишаються незмінними.

Електростатика

...взаимное притяжение электрической жидкости, именуемой положительной, и электрической жидкости, именуемой обычно отрицательной, состоит в обратном отношении квадратов расстояний...

Шарль Огюстен Кулон

§ 1.1.

Закон Кулона. Напруженість поля. Поняття потоку. Теорема Гауса

Теоретичні відомості

Закон Кулона — закон взаємодії точкових електричних зарядів у вакуумі:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}. \quad (1.1)$$

Напруженість поля:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \quad (1.2)$$

де q — пробний заряд.

Напруженість поля точкового заряду Q :

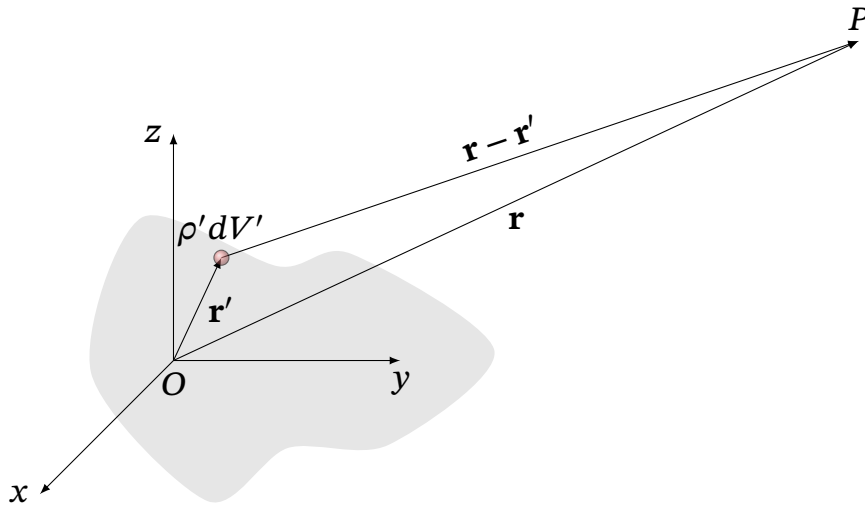
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.3)$$

де \mathbf{r} — радіус-вектор точки спостереження.

Напруженість електричного поля зарядженого тіла довільної форми (принцип суперпозиції):

$$\mathbf{E} = \iiint_{V'} \frac{\rho' dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.4)$$

де \mathbf{r}' — радіус-вектор елементів заряду $\rho(\mathbf{r}')dV'$, а \mathbf{r} — радіус-вектор точки спостереження (рис. 1.1).

Рис. 1.1. Тіло із заданим розподілом заряду $\rho(\mathbf{r}')$

Потік вектора напруженості електричного поля через довільну поверхню S :

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5)$$

Теорема Гауса для вектора напруженості електричного поля: потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнену поверхню S не залежить лише від заряду, що знаходиться всередині цієї поверхні

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_V \rho dV \quad (1.6)$$

1.1. У двох точках на одній лінії з точковим зарядом напруженість електричного поля складає E_1 і E_2 , відповідно. Чому вона дорівнює посередині між цими точками?

1.2. Напруженість електричного поля в центрі кривизни рівномірно зарядженого півкільця складає E . Чому вона дорівнює в центрі кільця такого самого радіуса і з таким самим зарядом?

1.3. Як вплине на силу взаємодії заряджених кульок у двох вершинах правильного трикутника така сама заряджена кулька, вміщена в третю вершину?

Задачі на використання принципу суперпозиції

1.4. За допомогою принципу суперпозиції обчисліть напруженість електричного поля в точці, яка розташована на відстані r від тонкої рівномірно зарядженої нитки з густиною заряду λ .

1.5. За допомогою принципу суперпозиції обчисліть напруженість електричного поля в точці, яка розташована на осі тонкого, рівномірно зарядженого диска з густиною заряду σ радіусом R , на відстані z від його центру.

1.6. Заряд рівномірно розподілений по поверхні нескінченної тонкої пластини з поверхневою густиною заряду σ . Визначити напруженість електричного поля над поверхнею пластини.

1.7. Заряд рівномірно розподілений по поверхні напівсфери радіуса R з поверхневою густиною заряду σ . Визначити напруженість електричного поля в центрі напівсфери.

1.8. Дві однорідно і різнойменно заряджені поверхневою густиною σ нескінченні площини перетинаються під прямим кутом. Знайти величину та напрямок напруженості електростатичного поля в довільній точці та побудувати силові лінії.

1.9. Тонке кільце радіусом R заряджене з лінійною густиною, яка змінюється за законом $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$, де λ_0 – постійна, φ – полярний кут. Знайти модуль напруженості електричного поля: а) в центрі кільця; б) на осі кільця в залежності від відстані z до його центру. Дослідити отриманий вираз при $z \gg R$.

1.10. Рівномірно заряджена з поверхневою густиною ρ нескінченна тонка пластина розділена на дві половини щілиною ширини d . Знайти напруженість електричного поля на великих відстанях $r \gg d$ від щілини.

1.11. Сфера радіуса R , яка заряджена з поверхневою густиною заряду $\sigma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, де \mathbf{a} – постійний вектор, \mathbf{r} – радіус-вектор точки сфери відносно її центру (рис. 1.2). Знайти напруженість \mathbf{E} електричного поля в центрі сфери.

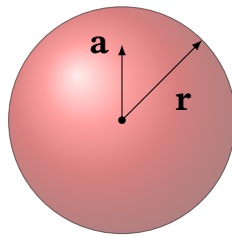


Рис. 1.2. До задачі 1.11

1.12. На нескінченній площині, що рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ , лежить оболонка напівсфери, яка торкається площини тільки своїм полюсом (рис. 1.3). Знайти напруженість електричного поля у центрі основи оболонки, точці O , якщо півсфера заряджена з густиною $-\sigma$.

1.13. У нескінченній тонкій площині, яка заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду σ , вирізано круглий отвір радіусом R (рис. 1.4). Знайти напруженість електричного поля на осі цього отвору.

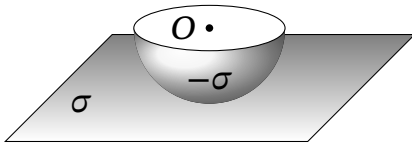


Рис. 1.3. До задачі 1.12

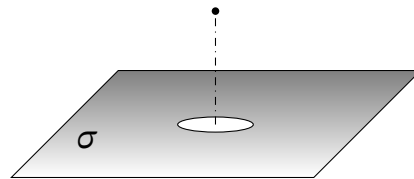


Рис. 1.4. До задачі 1.13

1.14. У сфері, яка заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду σ , вирізано круглий отвір, малий в порівнянні з радіусом сфери. Знайти напруженість поля в центрі цього отвору.

1.15. У сфері радіусом R , яка заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду σ , вирізано круглий отвір радіусом r , малий в порівнянні з радіусом сфери ($r \ll R$). Знайти напруженість поля в центрі сфери.

Визначення потоку електростатичного поля через довільні поверхні

1.16. Поле створюється в вакуумі рівномірно зарядженою прямолінійною нескінченною ниткою. Лінійна густина заряду дорівнює λ . Обчислити потік вектора напруженості цього поля через поверхню квадрата зі стороною l , площа якого паралельна зарядженій нитці і розташована від неї на відстані $l/2$.

1.17. Напівнескінченна рівномірно заряджена нитка має лінійну густину заряду λ . Знайти потік електричного поля через кільце радіусом R , центр якого співпадає з кінцем нитки. Нитка перпендикулярна до площини кільця.

1.18. Точковий заряд розташований в одній з вершин куба. Знайти потік електричного поля через куб. Визначити потік через кожен з граней куба.

1.19. Заряд q знаходиться на осі кільця радіусом R . Відстань від заряду до центра кільця дорівнює l . Знайти потік електричного поля через поверхню, що охоплюється кільцем.

Визначення напруженості електростатичного поля за допомогою теореми Гауса

1.20. За допомогою теореми Гауса обчисліть напруженість електричного поля в точці, яка розташована на відстані r від а) тонкої рівномірно зарядженої нитки з густиною заряду λ , б) нескінченної рівномірно зарядженої площини з густиною заряду σ .

1.21. Знайдіть напруженість електричного поля в середині та зовні нескінченного рівномірно зарядженого циліндра густиною заряду ρ та радіусом R . Накресліть графік $E(r)$.

1.22. Знайдіть напруженість електричного поля в середині та зовні рівномірно зарядженої сфери густиною заряду ρ та радіусом R . Накресліть графік $E(r)$.

1.23. Усередині нескінченного циліндра, однорідно зарядженого з об'ємною густиною ρ , є циліндрична порожнина. Відстань між паралельними осями циліндра і порожнини дорівнює l . Знайти напруженість електричного поля всередині порожнини.

1.24. Сферична порожнина розташована ексцентрично в середині кулі, яка однорідно заряджена по об'єму з густиною ρ . Відстань між центрами кулі і порожнини дорівнює l . Визначити напруженість E електричного поля в точках порожнини.

1.25. Система складається з кулі радіусом R , яка заряджена рівномірно, і навколишнього середовища, що заповнене зарядом з об'ємною густиною

$\rho = \frac{a}{r}$, де a – константа, r – відстань до центру кулі. Знайти заряд кулі, при якому модуль вектора напруженості електричного поля поза її межами не буде залежати від r .

1.26. Середня густина заряду електронної хмари в атомі водню дорівнює $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, де $-e$ — заряд електрона, a – борівський радіус, а r – відстань до протона. Визначити напруженість \mathbf{E} електричного поля в атомі водню. Дослідити \mathbf{E} на малих ($r \ll a$) та великих ($r \gg a$) відстанях від протона.

§ 1.2.

Дипольний момент. Поле диполя. Сили, що діють на диполь з боку поля.

Теоретичні відомості

Електричний дипольний момент системи точкових зарядів:

$$\mathbf{p}_e = \sum_i q_i \mathbf{r}_i \quad (1.7)$$

Електричний дипольний момент зарядженого тіла:

$$\mathbf{p} = \iiint_V \rho \mathbf{r} dV. \quad (1.8)$$

Напруженість поля електричного диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (1.9)$$

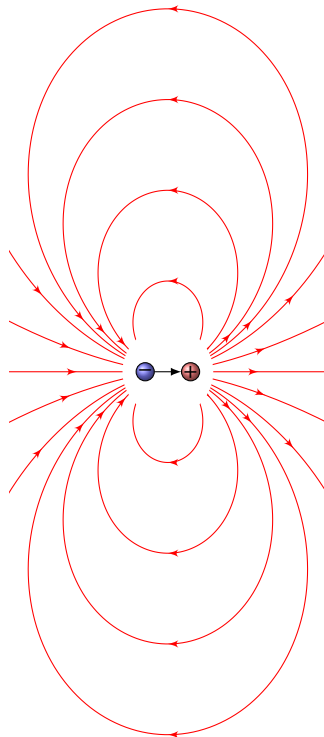


Рис. 1.5. Електричне поле диполя

Сила, що діє на електричний диполь з боку електричного поля:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}. \quad (1.10)$$

Момент сили, що діє на диполь в електричному полі:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}]. \quad (1.11)$$

1.27. Визначте електричний дипольний момент системи, що складається з двох різнойменних однакових за модулем зарядів. Як напрямлена ця величина? Чи залежить ця величина від вибору початку координат?

1.28. У центрі півкільця радіусом R знаходиться точковий заряд $-q$. Півкільце має повний заряд $+q$, розподілений за законом $\lambda \sim \cos \varphi$, де λ – лінійна густина заряду, φ – кут між радіусом-вектором даної точки і віссю симетрії системи Oz (рис. 1.6). В дипольному наближенні знайти напруженість електричного поля на осі Oz на відстані z від системи ($z \gg R$).

1.29. На відстані l від плоского конденсатора напруженість електричного поля дорівнює E_1 (рис. 1.7). Поле в середині конденсатора E_2 . Знайдіть об'єм конденсатора. Відомо, що l набагато більше за відстань між пластинами.

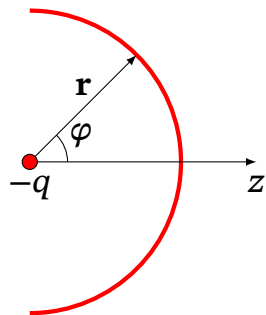


Рис. 1.6. До задачі 1.28

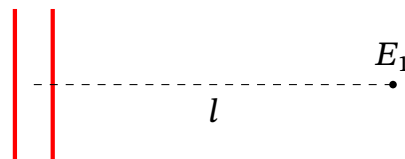


Рис. 1.7. До задачі 1.29

1.30. Визначити силу взаємодії двох диполей з моментами \mathbf{p}_1 та \mathbf{p}_2 , які розміщені на відстані d один від одного і орієнтовані один відносно одного а) $(\mathbf{p}_1 \uparrow \uparrow \mathbf{p}_2) \perp \mathbf{r}$, б) $(\mathbf{p}_1 \downarrow \uparrow \mathbf{p}_2) \perp \mathbf{r}$, в) $\mathbf{p}_1 \uparrow \uparrow \mathbf{p}_2 \uparrow \mathbf{r}$, г) $\mathbf{p}_1 \downarrow \uparrow \mathbf{p}_2 \uparrow \mathbf{r}$, де \mathbf{r} – радіус-вектор напрямлений від диполя 1 до диполя 2.

1.31. Частинка з дипольним моментом \mathbf{p} розміщена на відстані r від довгого зарядженого дроту, густина поверхневого заряду на якому λ . Знайти силу та

момент сил взаємодії частинки та дроту, якщо: а) \mathbf{p} напрямлений паралельно дроту, б) \mathbf{p} напрямлений перпендикулярно до дроту, в) \mathbf{p} напрямлений перпендикулярно дроту і лежить в паралельній до нього площині.

1.32. Знайдіть силу і обертовий момент, що діють на диполь \mathbf{p} в полі точкового заряду q .

1.33. Два однакові точкові диполі з моментом p , розташовано взаємно перпендикулярно на відстані r (рис. 1.8). Які обертові моменти діють на кожен з диполів та на всю систему в цілому?

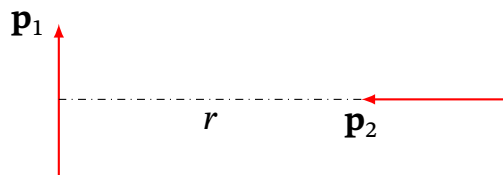


Рис. 1.8. До задачі 1.33

1.34. Незаряджена металева куля радіуса R вноситься в електричне поле, яке за відсутності кулі було однорідним і дорівнювало \mathbf{E}_0 . Знайти дипольний момент кулі. Визначити густину поверхневих зарядів на кулі. Знайти повний заряд, індукований на одній половині поверхні кулі.

1.35. З якою силою взаємодіють дві незаряджені кулі радіусами R , що вміщені в однорідне електричне поле напруженістю \mathbf{E}_0 , яке напрямлене а) вздовж прямої, що з'єднує центри куль, б) перпендикулярно до прямої, що з'єднує центри куль. Відстань між кулями $l \gg R$?

§ 1.3. Поняття потенціалу. Зв'язок потенціалу і напруженості

Теоретичні відомості

Робота сил електростатичного поля по переміщенню заряду q з точки 1 в точку 2 дорівнює:

$$A_{12} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (1.12)$$

Робота сил електростатичного поля по переміщенню заряду вздовж замкненого контуру дорівнює нулю, а отже, електростатичне поле є потенціальним полем. Тому роботу можна записати роботу через різницю потенціалів:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.13)$$

У випадку точкового заряду Q , потенціал дорівнює:

$$\varphi = \frac{Q}{r}, \quad (1.14)$$

де r — відстань від заряду Q до довільної точки поля.

Потенціал поля суцільного тіла (принцип суперпозиції):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.15)$$

де \mathbf{r}' — радіус-вектор елементів заряду $\rho(\mathbf{r}') dV'$, а \mathbf{r} — радіус-вектор точки спостереження.

Потенціал диполя:

$$\varphi = \frac{(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})}{r^3} \quad (1.16)$$

Зв'язок напруженості та потенціалу:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (1.17)$$

1.36. Чому дорівнює різниця потенціалів між точками 1 та 2 біля пластин ідеального конденсатора (рис. 1.9), що заряджений до напруги V ?

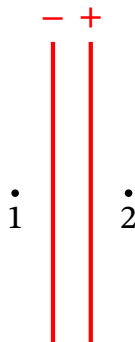


Рис. 1.9. До задачі 1.36

1.37. Робота сил поля при переміщенні заряду вздовж екіпотенціальної поверхні $A = 0$. Як це пояснити, адже в кожній точці траєкторії на заряд діє сила $F \neq 0$?

1.38. У двох точках поля точкового заряду відношення напруженостей $\frac{E_1}{E_2} = \eta$. Чому дорівнює відношення $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ потенціалів поля в цих точках?

1.39. У двох точках на одній лінії з точковим зарядом потенціал електричного поля дорівнює φ_1 і φ_2 , відповідно. Яку величину він має посередині

між цими точками?

1.40. Потенціал електричного поля в центрі зарядженого кільця складає φ_0 . Чому він дорівнюватиме, для півкільця такого ж радіусу?

1.41. Доведіть взаємну ортогональність силових ліній та екіпотенціальних поверхонь електричного поля.

1.42. Виведіть формулі зв'язку напруженості та потенціалу (1.17).

1.43. Знайдіть вираз для потенціалу, який створюється однорідним електричним полем \mathbf{E} .

1.44. Знайти потенціал тонкого кільця радіусом R , яке рівномірно заряджене зарядом q як функцію відстані r від центра кільця при $r \gg R$.

1.45. Два коаксіальних тонких однорідно заряджених кільця однаковими радіусами R розташовані на відстані a , один від одного. Заряди кілець $+q$ і $-q$ відповідно. Знайти різницю потенціалів між центрами кілець.

1.46. Обчисліть потенціал електричного поля в точці, яка розташована на осі тонкого рівномірно зарядженого диска з густиною заряду σ і радіусом R , на відстані z від його центру. Знайдіть напруженість електричного поля в цій точці, використовуючи формулу зв'язку напруженості та потенціалу.

1.47. Знайдіть потенціали для умов задач 1.4 та 1.6.

1.48. Знайдіть потенціал в середині сфери (в довільній точці), якщо розподіл заряду по поверхні якої задано виразом $\sigma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ (див. задачу 1.11).

1.49. За допомогою (1.17) використовуючи (1.16) отримайте формулу для напруженості електричного поля диполя (1.9).

Рівняння Максвелла у випадку електростатики. Рівняння Пуассона та Лапласа

Теоретичні відомості

Для випадку електростатики у вакуумі, рівняння Максвелла приймають вигляд:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q \quad \text{Теорема Гауса для електричного поля} \quad (1.18)$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0 \quad \text{Теорема про циркуляцію для електростатичного поля,} \quad (1.19)$$

або у диференціальній формі:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (1.21)$$

З урахуванням зв'язку напруженості та потенціалу 1.17, з рівняння 1.20 отримуємо рівняння Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (1.22)$$

В областях, де заряди відсутні, рівняння (1.22) приймає вигляд:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1.23)$$

яке називається рівнянням Лапласа.

Якщо розподіл зарядів в просторі відомий, то розв'язком цих рівнянь буде вираз (3.8). У випадках, якщо в просторі наявні поверхні, на яких потенціали (або його нормальні похідні) відомі, то розв'язок вже не буде простим. Такі задачі називаються задачами з граничними умовами. У випадку заданого розподілу зарядів та заданих граничних умов, розв'язок рівняння Пуассона (або Лапласа) буде мати не більше одного розв'язку, що регламентується теоремою єдиності. Одним із способів розв'язку таких задач, який ґрунтується на цій теоремі буде розглянуто в **методі зображень**.

1.50. Покажіть, що зв'язок напруженості та потенціалу 1.17 сумісний з рівнянням 1.21.

1.51. Розрахуйте $\nabla \cdot \mathbf{r}$ та $\nabla \times \mathbf{r}$, де \mathbf{r} — радіус-вектор довільної точки.

1.52. Розрахуйте $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ та $\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, де \mathbf{r} — радіус-вектор довільної точки.

1.53. Розрахуйте $\Delta \frac{1}{r}$, де r — модуль радіус-вектор довільної точки.

1.54. Густина однорідно зарядженої кулі радіусом R дорівнює ρ . Знайдіть $\nabla \cdot \mathbf{E}$ в середині ($r \leq R$) та зовні ($r > R$) сфери, де r відстань від центра кулі до довільної точки. Знайдіть напруженість поля в середині та зовні кулі.

1.55. Чи можна створити в просторі електростатичне поле, напруженість якого виражається формулою $\mathbf{E} = [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$? Зобразіть силові лінії такого поля. Відповідь аргументуйте.

1.56. Електричне поле однорідне всередині деякої області простору. Чи містять внутрішні точки цієї області якісь заряди, які беруть участь у створенні даного електричного поля?

1.57. Доведіть, що якщо потенціал на поверхні деякого порожнього тіла дорівнює φ_0 , то в середині провідника він матиме таке ж саме значення.

1.58. Доведіть на основі рівняння Лапласа, що потенціал в пустому не може мати екстремумів.

1.59. Доведіть на основі рівняння Лапласа, що середнє значення потенціалу по поверхні довільної сфери дорівнює значенню потенціалу в середині сфери.

Знаходження значення напруженості чи потенціалу, що створюються заданим розподілом зарядів

1.60. Знайти потенціал в довільній точці простору а) сфери радіусом R , рівномірно зарядженої по поверхні густиною заряду σ ; б) кулі радіусом R , рівномірно зарядженої по об'єму густиною заряду ρ ; в) циліндра радіусом R , рівномірно зарядженого лінійною густиною λ ; г) плоского шару товщиною $2a$, рівномірно зарядженого об'ємною густиною ρ . д) плоского шару товщиною $2a$, зарядженого об'ємною густиною ρ .

1.61. Знайти потенціал та поле в довільній точці простору плоского шару

товщиною $2a$, зарядженого об'ємною густиною

$$\rho = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -a \\ -\rho_0, & -a \leq x \leq 0, \\ \rho_0, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & a < x < \infty. \end{cases}$$

1.62. Кульовий шар між сферами радіусів R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$) заряджений з густиною $\rho = \frac{a}{r^2}$. Знайти потенціал поля в довільній точці.

1.63. Усередині півсфери радіуса R розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = \rho_0 e^{ar}$, де ρ_0 і a — додатні постійні, а r — відстань до центру кривизни півсфери. Знайти напруженість електричного поля в центрі кривизни півсфери.

Знаходження розподілу зарядів, що створюють задані значення напруженості чи потенціалу

1.64. Потенціал поля всередині зарядженої кулі залежить тільки від відстані до його центру як $\varphi = ar^2 + b$, де a і b — константи. Знайти розподіл об'ємного заряду всередині кулі.

1.65. Знайти розподіл зарядів, які створюють потенціал^a $\varphi = \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}}$, де a — деяка додатна константа. *Вказівка:* Згадайте, що $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$, де $\delta(r)$ — дельта-функція Дірака [7, Глава I].

^aПотенціал такого виду називається екранованим кулонівським потенціалом [2, §1.8, стор.26].

1.66. Напруженість електричного поля в просторі дається формулою:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}(1 + br)e^{-br}$$

де e і b — додатні константи, а r — відстань до початку координат. Визначити розподіл об'ємної густини заряду, що створює це поле. Чому дорівнює повний заряд Q ?

1.67. Заряджена куля радіуса R створює в просторі поле, яке дорівнює $E = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$ всередині кулі ($r < R$) і $E = \frac{\pi R^3}{3 r^2}$ зовні ($r > R$). За яким законом розподілено заряд всередині кулі?

1.68. В електронній лампі електрони вилітають із однієї розжареної металевої пластини (катода) і збираються на іншій плоскій металевій пластині (аноді), яка розташована паралельно на відстані d (d набагато менша за лінійні розміри пластин). Потенціал електричного поля між пластинами змінюється за законом $\varphi = kx^{\frac{4}{3}}$, де x — відстань від катода. Чому дорівнює густина поверхневих зарядів на пластинах? Як змінюється густина об'ємного заряду $\rho(x)$ в просторі між пластинами?

§ 1.5.

Провідники в електростатичному полі. Метод електричних зображень

Теоретичні відомості

Основні властивості провідників, вміщених в електростатичне поле:

- Силкові лінії електричного поля перпендикулярні до поверхні провідника, отже поверхня провідника в електростатичному полі є еквіпотенціальною поверхнею (1.10).
- Поле в середині провідника відсутнє $E_{\text{in}} = 0$.
- В об'ємі провідника заряди відсутні, заряди розташовуються лише на поверхні провідника.
- Поле на поверхні провідника дорівнює $E = 4\pi\sigma$.

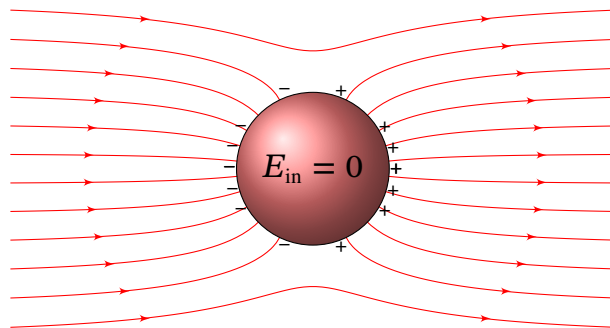


Рис. 1.10. Металева сфера вміщена в однорідне електричне поле.

Принципові питання електростатики металів

1.69. Доведіть, що поверхня металу в зовнішньому електростатичному полі є екіпотенціальною поверхнею.

1.70. Доведіть, що в присутності зовнішніх електростатичних полів, електричне поле в товщі металу дорівнюватиме нулю. Як змінюватиметься потенціал в просторі в середині металу? На основі теореми Гауса покажіть, що заряд у товщі провідника дорівнюватиме нулю.

1.71. Доведіть, що електричне поле на поверхні провідника визначається формулою:

$$E = 4\pi\sigma,$$

де σ — густина поверхневих зарядів на провіднику.

1.72. Замкнені металеві оболонки мають дві поверхні, зовнішню та внутрішню. Доведіть, що в присутності зовнішніх електростатичних полів, заряди можуть накопичуватись лише на зовнішніх поверхнях металу. (Вказівка: Скористайтесь теоремою Гауса та теоремою про циркуляцію для вектора \mathbf{E} .) Яким буде потенціал в порожнині?

1.73. Доведіть, що при вміщенні електричного заряду q в порожнину незарядженої металевої оболонки, заряд на її внутрішній поверхні дорівнюватиме величині $-q$, а на зовнішній q . Чи залежатиме зовнішнє електростатичне поле від положення заряду в середині порожнини? Яким буде заряд внутрішньої та зовнішньої поверхонь порожнини, якщо металева оболонка має заряд Q ?

Обчислення потенціалу та напруженості провідника в присутності інших заряджених тіл

1.74. Показати, що незаряджена сфера радіусом R вміщена в поле точкового заряду q , який знаходиться на відстані l ($l > R$) від її центру матиме потенціал

$$\varphi = \frac{q}{l}.$$

Як зміниться потенціал, якщо сфера матиме заряд Q ?

1.75. Показати, що потенціал сфери радіусом R , в середину якої вміщено точковий заряд q , що знаходиться на відстані l ($l < R$) від її центру не залежатиме від l і дорівнюватиме

$$\varphi = \frac{q}{R}.$$

Як зміниться потенціал, якщо сфера матиме заряд Q ?

1.76. Дві віддалені одна від одної провідні кулі, радіуси яких R_1 і R_2 , несуть заряди Q_1 і Q_2 відповідно. Чому дорівнюватимуть потенціали і заряди куль після того, як їх з'єднають дротом?

1.77. Металева куля радіусом R_1 оточена тонкою металевою концентричною оболонкою радіусом R_2 , а в простір між ними на відстані R від центру знаходиться точковий заряд Q ($R_1 < R < R_2$). Знайти заряди кулі та оболонки, якщо обидва провідники заземлені?

1.78. Дві концентричні сфери з радіусами R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$) отримали заряди q_1 і q_2 відповідно, які розподілилися рівномірно по їх поверхнях. Знайти потенціал поля в довільній точці на відстані r від центру сфер.

1.79. Точковий заряд q знаходиться на відстані r від центра незарядженого сферичного шару провідника, внутрішній і зовнішній радіуси якого дорівнюють відповідно R_1 і R_2 . Знайти потенціал в центрі сферичного шару, якщо $r < R_1$.

1.80. Три концентричні сфери мають радіуси R_1 , R_2 та R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). Сфери 1 та 3 несуть заряди відповідно $+Q$ і $-Q$. Середня сфера 2 заземлена провідником (рис. 1.11). Знайти заряд q заземленої сфери 2 та залежності $E(r)$ та $\varphi(r)$ і побудувати їх графіки.

1.81. Три концентричні сфери мають радіуси R_1 , R_2 та R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). Сфері 2 надають заряд $+Q$, а сфери 1 та 3 з'єднують провідником (рис. 1.12). Знайти заряди сфер 1 та 3. Знайти залежності $E(r)$ та $\varphi(r)$ і побудувати їх графіки.

1.82. Розв'язати задачу 1.81 за умови, що сферу 3 заземлюють. Знайти залежності $E(r)$ та $\varphi(r)$ і побудувати їх графіки.

1.83. У просторі між обкладками незаміщений плоский конденсатор вносять металеву пластину, що має заряд Q , так що між пластиною і обкладками конденсатора залишаються зазори d_1 та d_2 (рис. 1.13). Площі пластини і обкладок конденсатора однакові і дорівнюють S . Визначити різницю потенціалів між обкладками конденсатора. Крайовими ефектами нехтувати.

1.84. Обкладки плоского конденсатора, які знаходяться відстані $d = 1$ см. (між ними повітря) заряджаються до напруги $U = 200$ В. Після від'єднання від джерела напруги в конденсатор вміщують пластину з діелектрика товщиною 5 мм і діелектричною проникністю $\epsilon = 2$. Визначити напруженість електричного поля в повітряному зазорі та у вміщеному діелектрику. Яка напруга на конденсаторі після вміщення пластини?

1.85. У плоскому конденсаторі на ліву обкладку поміщають заряд $+Q_1$, а на праву $+Q_2$. Всередину конденсатора паралельно обкладкам поміщають незаряджену металеву пластину (рис. 1.13). Які заряди будуть індуковані на лівій і правій поверхнях пластини, якщо $Q_2 > Q_1$?

1.86. Три однакові нерухомі металеві пластини розташовані в повітрі на відстані d_1 і d_2 ($d_2 > d_1$) одна від одної. Площа кожної з пластин дорівнює S (рис. 1.15). На середню пластину поміщають позитивний заряд Q . Пластини 1 і 3 не заряджені і підключені через ключ до резистору з невідомим опором, відмінним від нуля. Які заряди встановляться на пластинах 1 і 3 після замикання ключа, через довгий проміжок часу? Крайовими ефектами нехтувати.

1.87. Три однакові металеві пластини розташовані в повітрі на однакових відстанях d одна від одної. Площа кожної пластини дорівнює S (рис. 1.16). На пластині 1 знаходиться позитивний заряд $+Q$. Пластини 2 і 3 не заря-

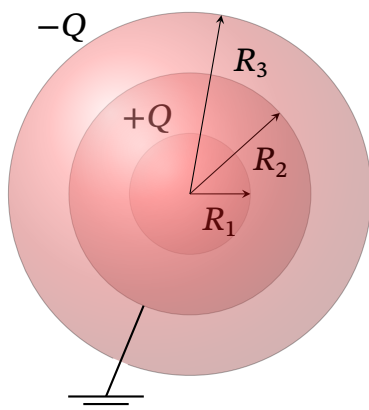


Рис. 1.11. До задачі 1.80

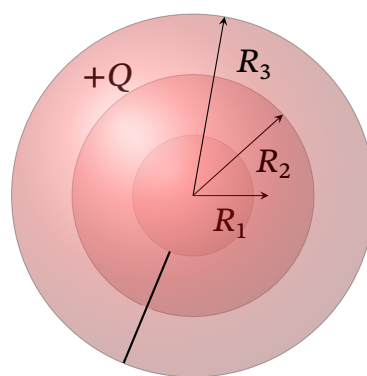


Рис. 1.12. До задачі 1.81

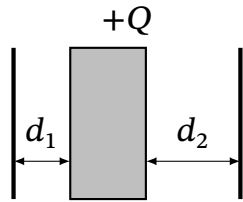


Рис. 1.13. До задачі 1.83

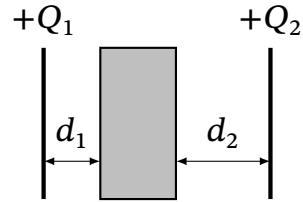


Рис. 1.14. До задачі 1.85

джені і підключені через ключ до резистору з невідомим відмінним від нуля опором. Які заряди встановляться на пластинах 2 і 3 після великого часу після замикання ключа?

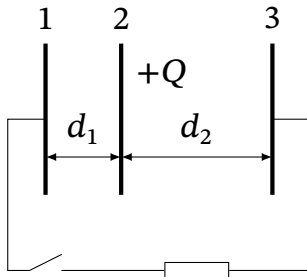


Рис. 1.15. До задачі 1.86

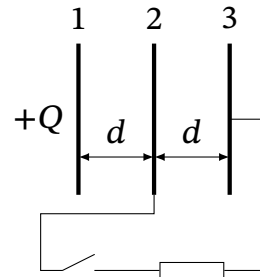


Рис. 1.16. До задачі 1.87

1.88. Три тонкі незаряджені металеві пластини площею S кожна розташовані на відстанях d одна від одної, причому d багато менше розмірів пластин. До пластин 2 і 3 під'єднали батарею з ЕРС \mathcal{E} (рис. 1.17). Пластині 1 надали позитивний заряд q_0 . Визначити заряд, який встановився на пластинах 2 і 3.

1.89. Три однакові нерухомі металеві пластини розташовані в повітрі на різних відстанях d_1 і d_2 ($d_2 > d_1$) один від одного (рис. 1.18). На середній пластині 2 знаходиться позитивний заряд Q . Спочатку не заряджені пластини 1 і 3 підключають через ключ до батареї з ЕРС \mathcal{E} . Визначити, які заряди встановилися на пластинах 1 та 3 після замикання ключа.

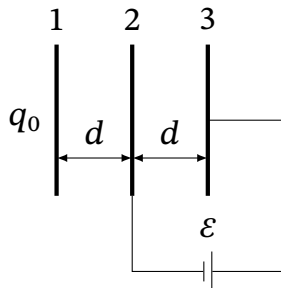


Рис. 1.17. До задачі 1.88

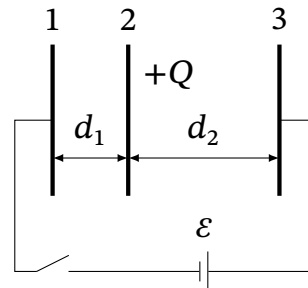


Рис. 1.18. До задачі 1.89

Метод зображень. Розподіл зарядів на провідниках, які знаходяться в електричному полі.

Теоретичні відомості

Теорема єдиності в електростатиці обґрунтовує «метод зображень», який допомагає розв'язувати задачі за участю точкового заряду і площини (або декількох площин), точкового заряду і сфери (заземленою і незаземленою) і в ряді інших випадків.

Розв'язок задач «методом зображень» полягає в підборі фіктивних зарядів поза розглянутою областю, таких, що їх спільне з реальними зарядами поле забезпечує задані граничні умови (потенціал на провіднику). Оскільки всередині області заряди не змінилися, знайдене поле задовольняє рівнянням Пуассона (є його розв'язком). Виконуються також граничні умови. По теоремі єдиності інших рішень немає.

Основні формули методу електричних зображень для сферичних провідників:

- для заряду, що знаходиться поза межами заземленої незарядженої сфери, величина заряду-зображення дорівнює:

$$q' = -\frac{R}{b}q \quad (1.24)$$

- відстань заряду зображення до центру сфери:

$$a = \frac{R^2}{b} \quad (1.25)$$

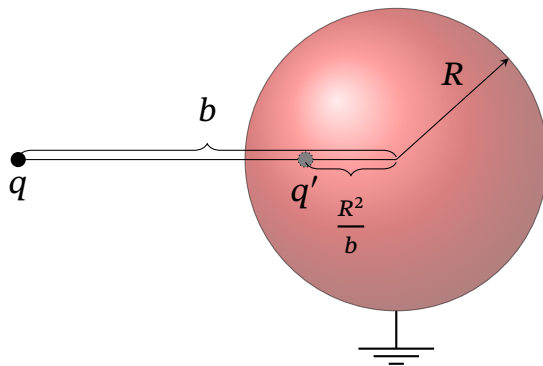


Рис. 1.19. Зображення заряду розміщеного поза незарядженою заземленою сферою

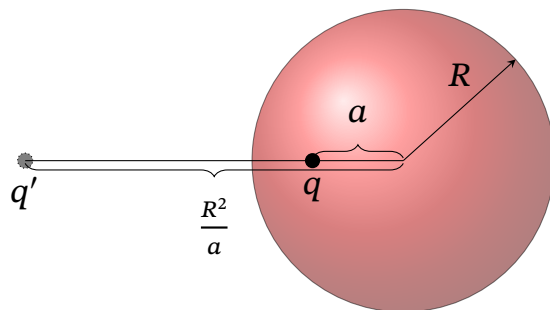


Рис. 1.20. Зображення заряду розміщеного в середині незарядженої сфери

1.90. Який заряд наводиться на металевій кулі для випадків, зображених на а) рис. 1.19 б) рис. 1.20?

1.91. Точковий заряд q підноситься на відстань l до центру незаземленої нейтральної металеві кулі радіусом R ($l > R$). Чому дорівнюватиме потенціал кулі? Розв'яжіть задачу методом зображень. Результат порівняйте з задачею 1.74. Знайдіть дипольний момент кулі.

1.92. В металевій ізольованій кулі радіусом R є сферична порожнина, в центрі якої знаходиться заряд q_0 . Поза кулею на відстані b від її центру розташовано другий заряд q (рис. 1.21). Знайти силу, яка діє на заряд q .

1.93. В металевій кулі радіусом R є дві сферичні порожнини, радіусами a та b . В центрі кожної порожнини розташовані електричні заряди q_a та q_b , відповідно (рис. 1.22). Знайдіть густини поверхневого заряду σ_a , σ_b та σ_R на поверхнях сфер.

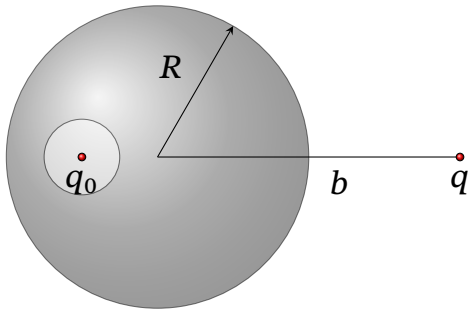


Рис. 1.21. До задачі 1.92

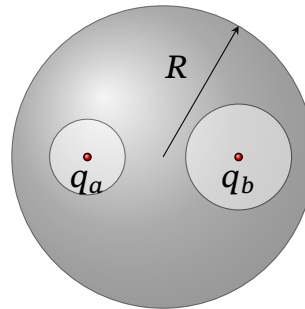


Рис. 1.22. До задачі 1.93

1.94. Точковий заряд q знаходиться на відстані b від центру металеві кулі радіусом R ($b > R$). Визначити силу взаємодії між зарядом і кулею. Розглянути випадки коли а) куля незаряджена і заземлена, б) куля незаряджена і незаземлена, в) куля несе заряд Q і незаземлена. Для всіх випадків проаналізувати отриманий вираз для сили при $b \gtrsim R$.

1.95. Точковий заряд q знаходиться на відстані a від центру заземленої незарядженої металеві кулі радіусом R ($a < R$). Визначити силу взаємодії між зарядом і кулею. Як зміниться результат якщо куля буде незаземленою? Як зміниться результат якщо куля буде зарядженою?

1.96. Точковий заряд q поміщений на відстані $R/2$ від центру тонкостінної металеві незарядженої сфери радіусом R , яка має заряд $-2q$. Визначити поверхневу густину заряду на внутрішній і зовнішній поверхнях сфери в точках, найбільш віддалених від цього заряду. Як зміниться результат, якщо сферу заземлити?

1.97. Знайти розподіл зарядів на поверхні провідника, границя якого являє собою нескінченну площину з виступом у вигляді напівсфери радіусом R . Поверхнева густина заряду на великій відстані від виступу σ_0 .

1.98. Довга тонка дротина розташована паралельно осі довгого металевого циліндра радіусом r на відстані $R > r$ від його осі. Лінійна густина заряду нитки λ , а циліндра $-\lambda$. Знайти силу взаємодії на одиницю довжини між провідниками.

1.99. На відстані $b = 10R$ від заземленої незарядженої металеві сфери радіусом R розташований точковий електричний диполь з моментом p , причому вісь диполя перпендикулярна прямій, що сполучає центр сфери з серединою осі диполя (рис. 1.23). Знайти силу взаємодії між диполем і сферою.

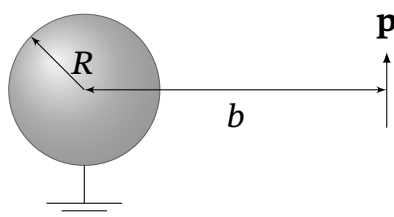


Рис. 1.23. До задачі 1.99

1.100. Заземлена металева куля радіусом R лежить на тонкому рівномірно зарядженому діелектричному диску такого ж радіуса. Знайти заряд кулі, якщо заряд диска дорівнює q .

1.101. Система двох тонких концентричних півкілець з зарядами Q і q , та радіусами r_1 і r_2 , поміщені в середину заземленої металеві сфери радіусом R , так, що центри кілець і кулі співпадають. Знайти потенціал у центрі сфери, якщо площини кілець перпендикулярні.

Теоретичні відомості

Рівняння Максвелла для електростатичного поля в речовині:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (1.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (1.21)$$

де ρ – густина вільних електричних зарядів.

Теорема Гауса для вектора \mathbf{E} в речовині:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi \left(\iiint_V \rho dV + \iiint_V \rho' dV \right), \quad (1.27)$$

де ρ – густина вільних електричних зарядів, ρ' – густина зв'язаних електричних зарядів.

Поляризованість (вектор поляризації) \mathbf{P} — величина, що дорівнює дипольному моменту одиниці об'єму речовини:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V} \quad (1.28)$$

Теорема Гауса для поляризованості \mathbf{P} (зв'язаний заряд, що з'являється на поверхні S протилежний за знаком до заряду, що виникає в об'ємі V):

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = - \iiint_V \rho' dV. \quad (1.29)$$

Диференціальна форма:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho', \quad (1.30)$$

де ρ' – об'ємна густина зв'язаних електричних зарядів.

Поверхнева густина зв'язаних електричних зарядів на межі розділу двох діелектриків:

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}, \quad (1.31)$$

де \mathbf{n} – вектор нормалі до поверхні розділу двох середовищ, що напрямлений з середовища 1 в середовище 2.

Означення вектора електричної індукції:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (1.32)$$

Теорема Гауса для вектора \mathbf{D} :

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV. \quad (1.33)$$

Зв'язок між вектором поляризації (поляризованістю) та електричним полем, *яке зумовило поляризацію* (у випадку ізотропних діелектриків):

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}, \quad (1.34)$$

де χ – поляризованість діелектрика.

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi, \quad (1.35)$$

діелектрична проникність діелектрика.

Граничні умови для векторів \mathbf{E} та \mathbf{D} :

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (1.36)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad (1.37)$$

де σ – поверхнева густина вільних електричних зарядів на границі розділу діелектриків.

Принципові питання електростатики діелектриків

1.102. Отримайте граничні умови 1.36 та 1.37.

1.103. Довгий циліндр виготовлений з діелектрика з замороженою поляризованістю $\mathbf{P} = \text{const}$, що напрямлена вздовж його осі. Зобразити схематичну картину полів вектора \mathbf{D} та вектора \mathbf{E} в середині та зовні циліндра.

1.104. Довгий циліндр довжиною $2l$ і радіусом r ($l \gg r$) виготовлений з діелектрика з замороженою поляризованістю $\mathbf{P} = \text{const}$, що напрямлена вздовж його осі. Оцінити а) величину і напрямок поля на основах зовні циліндра, б) величину і напрямок поля в центрі циліндра, в) величину і напрямок поля на зовнішній поверхні циліндра на середині його довжини.

1.105. Короткий циліндр (диск) товщиною d і радіусом R виготовлений з діелектрика з замороженою поляризованістю $\mathbf{P} = \text{const}$, що напрямлена вздовж його осі. Оцінити поле зовні та в середині поблизу центра його основи. Визначити вектор індукції в цих точках.

1.106. Показати, що на межі розділу зарядженого провідника, густина поверхневих зарядів на якому σ і однорідного діелектрика з діелектричною проникністю ϵ , що поляризується під дією електричного поля провідника, густина зв'язаних зарядів σ' визначається формулою:

$$\sigma' = -\sigma \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}.$$

1.107. Поблизу плоскої поверхні однорідного діелектрика з діелектричною проникністю ϵ напруженість електричного поля в вакуумі дорівнює E_0 і складає кут θ з нормаллю до поверхні (1.24). Вважаючи поле зовні та в середині діелектрика однорідним, знайти а) потік вектора \mathbf{E} через сферу радіуса R , центр якої лежить на поверхні діелектрика, б) циркуляцію вектора \mathbf{D} вздовж контура Γ довжиною l , площа якого перпендикулярна до поверхні діелектрика.

1.108. Знайти закон заломлення силових ліній на поверхні розділу двох діелектриків з проникностями ϵ_1 та ϵ_2 . Зобразіть схематично картину заломлення однорідного поля на границі розділу для векторів \mathbf{E} та \mathbf{D} .

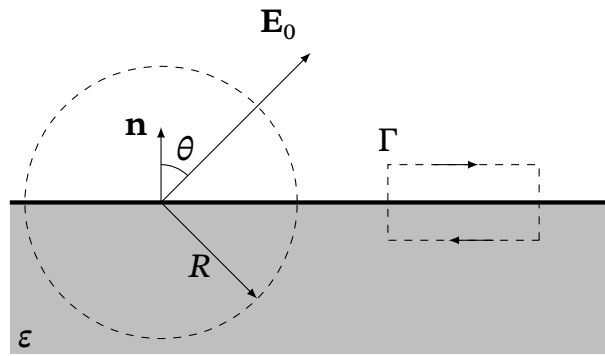


Рис. 1.24. До задачі 1.107

Знаходження напруженості електростатичного поля в діелектриках, які мають заморожену поляризованість

1.109. Знайти напруженість та індукцію електричного поля в центрі матеріалу, який має форму прямого круглого циліндра довжиною l і радіусом R , поляризованість якого однорідна, напрямлена вздовж осі і дорівнює \mathbf{P} .

1.110. Розв'язати задачу 1.109, у випадку, якщо поляризованість \mathbf{P} напрямлена перпендикулярно до осі циліндра.

1.111. Діелектрична куля радіусом R поляризована однорідно з поляризованістю \mathbf{P} . Знайти напруженість електричного поля всередині та зовні кулі.

1.112. Нескінченно довгий діелектричний циліндр радіусом R радіально поляризований таким чином, що поляризованість визначається законом $\mathbf{P} = a\mathbf{r}$, де a – позитивна константа. Знайти заряд, який припадає на одиницю довжини циліндра. Визначити напруженість та індукцію електричного поля в залежності від відстані до осі в середині та зовні циліндра.

1.113. В середині плоского конденсатора, обкладки якого з'єднані між собою, вміщена діелектрична пластина товщиною h з замороженою поляризованістю \mathbf{P} , що напрямлена перпендикулярно граням пластини і обкладкам конденсатора. Визначити модулі напруженості електричного поля та індукції зовні та в середині пластини. Відстань між пластинами конденсатора дорівнює d .

Знаходження напруженості електростатичного поля в діелектриках по заданому розподілу заряду

1.114. Порожня металева куля, заряд якої q , а радіус R плаває діелектричній рідині з проникністю ϵ так, що її центр знаходиться на рівні рідини. Знайти густину вільних зарядів на поверхні кулі. Зобразіть схематично картину поля для векторів \mathbf{E} та \mathbf{D} .

1.115. Точковий заряд q розташований на плоскій границі розділу двох однорідних нескінченних діелектриків з проникностями ϵ_1 і ϵ_2 . Знайти напруженість, індукцію і потенціал електричного поля у всьому просторі.

1.116. Простір між обкладками плоского конденсатора заповнено повітрям, а напруженість поля в зазорі дорівнює E_0 . Потім половину зазору заповнюють діелектриком з проникністю ϵ так, що його поверхня в одному випадку паралельна до обкладок, а в іншому перпендикулярна до обкладок. Знайти модулі векторів \mathbf{E} та \mathbf{D} для цих випадків, якщо а) напруга між обкладками залишалась незмінною, б) заряд на обкладках залишався постійним.

Знаходження розподілу заряду по заданій напруженості електростатичного поля

1.117. Однорідна куля радіусом R з діелектричною проникністю ϵ вміщується в однорідне електричне поле напруженістю \mathbf{E}_0 . Знайти дипольний момент кулі та напруженість електричного поля в усьому просторі, а також розподіл зв'язаних зарядів на кулі.

1.118. В нескінченному діелектрику з проникністю ϵ створене однорідне поле напруженістю \mathbf{E}_0 . В діелектрику вирізається сферична порожнина радіусом R . Знайти дипольний момент порожнини, поляризованість та напруженість електричного поля в усьому просторі після утворення порожнини, а також розподіл зв'язаних зарядів на поверхні порожнини.

1.119. (Узагальнений випадок задач 1.117 та 1.118) Однорідна куля радіусом R з діелектричною проникністю ϵ_i занурена в однорідний необмежений діелектрик з діелектричною проникністю ϵ_e . На великій відстані від кулі в діелектрику є однорідне електричне поле \mathbf{E}_0 . Знайти дипольний момент кулі, потенціал і напруженість електричного поля в усьому просторі, а також розподіл зв'язаних зарядів на поверхні кулі.

Визначення густини поляризаційних зарядів в діелектрику та вектора поляризації

1.120. Визначити густину зв'язаних зарядів на поверхнях слюдяної пластинки ($\epsilon = 4.4$) товщиною 0.2 мм, що є ізолятором у плоскому конденсаторі, різниця потенціалів на пластинах якого дорівнює 400 В.

1.121. Металева сфера радіусом R , що несе заряд q , розташована в нескінченному однорідному діелектричному середовищі з проникністю ϵ . Визначити поляризованість в довільній точці середовища, а також густини поверхневих і об'ємних зв'язаних зарядів в діелектрику.

1.122. Метал довільної форми, що має заряд q , оточений шаром однорідного діелектрика з проникністю ϵ . Знайти сумарні поверхневі зв'язані заряди на внутрішній і зовнішній поверхнях діелектрика.

1.123. В деякій точці в середині однорідного діелектрика з проникністю ϵ густина сторонніх зарядів ρ . Знайти в цій точці густину зв'язаних зарядів.

1.124. Точковий заряд q знаходиться в центрі кулі радіусом R з діелектрика з проникністю ϵ_1 . Куля оточена безмежним діелектриком з проникністю ϵ_2 . Знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі розділу цих діелектриків.

Метод електричних зображень для діелектриків

1.125. Точковий заряд q знаходиться в середовищі з діелектричною проникністю ϵ_1 на відстані d від границі розділу діелектриків. Діелектрична проникність другого діелектрика дорівнює ϵ_2 . Чому дорівнює сила, що діє на заряд? Від чого залежить напрямок цієї сили?

1.126. Два точкових заряди q_1 та q_2 знаходяться на однакових відстанях d від границі розділу двох діелектриків з проникностями ϵ_1 та ϵ_2 , відповідно. Знайдіть сили, що діють на кожен з зарядів. Проаналізуйте знак сил, що діють на заряди.

1.127. Однорідний ізотропний діелектрик з проникністю ϵ заповнює весь нижній півпростір. У вакуумі на відстані d від його поверхні знаходиться точковий заряд q . Визначити поверхневу густину поляризаційних (зв'яза-

них) зарядів в довільній точці на межі розділу, а також повний зв'язаний заряд на поверхні діелектрика. Який результат вийде, при $\epsilon \rightarrow \infty$, який це має фізичний зміст?

§ 1.7. Електрична ємність. Ємність взаємна, ємності коефіцієнти

Теоретичні відомості

Означення електричної ємності:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (1.38)$$

Електрична ємність металеві сфери радіусу R :

$$C = R. \quad (1.39)$$

Електрична ємність плоского конденсатора (S — площа пластин, d — відстань між пластинами):

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}. \quad (1.40)$$

У випадку системи провідників, потенціал кожного з них залежить не тільки від заряду провідника, а визначається напруженостями, що створюються іншими провідниками, тобто від зарядів інших провідників, причому за принципом суперпозиції він прямо пропорційний цим зарядам. Наприклад, потенціал i -го провідника визначається як:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N V_{ij} q_j, \quad (1.41)$$

де V_{ij} — називаються потенціальними коефіцієнтами і утворюють потенціальну матрицю \mathbb{V} . Ємнісні коефіцієнти визначаються формою, розмірами та взаємним розташуванням провідників. Матриця, обернена до потенціальної $\mathbb{C} = \mathbb{V}^{-1}$ називається ємнісною матрицею, а її елементи C_{ij} — ємнісними коефіцієнтами:

$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \varphi_j. \quad (1.42)$$

Для потенціальних (та ємнісних) коефіцієнтів виконується теорема взаємності, яка говорить про те, що потенціальна (ємнісна) матриця є симетричною:

$$V_{ij} = V_{ji}, \quad C_{ij} = C_{ji}$$

При чому:

$$V_{ii} > V_{ji} > 0, \quad C_{ii} > 0, C_{ij} < 0. \quad (1.43)$$

1.128. Чому ємність окремого провідника залежить від присутності поблизу інших провідників та їхнього розташування?

1.129. Як зміниться ємність відокремленого провідника при появі поблизу іншого провідника?

1.130. Чому ємність конденсатора не залежить від наявності оточуючих тіл чи електричних полів?

1.131. У плоский повітряний конденсатор паралельно до обкладок вставляють діелектричну пластину, тоншу за зазор між обкладками. Як це вплине на ємність конденсатора? Чи залежатиме вона від положення пластини відносно обкладок?

1.132. У плоский повітряний конденсатор паралельно до обкладок вставляють пластину діелектрика з проникністю ϵ і товщиною в половину зазору між обкладками. Як і в скільки разів зміниться ємність конденсатора?

1.133. Конденсатор приєднано до джерела постійної напруги. Чи зміниться напруженість електричного поля в конденсаторі, якщо його заповнити діелектриком? Як зміниться при цьому поверхнева густина вільних зарядів на обкладках конденсатора? Чому дорівнюватиме густина зв'язаних зарядів на поверхні діелектрика?

1.134. Як зміниться напруженість поля між обкладками плоского конденсатора, якщо на одній з його обкладок заряд буде збільшено вдвічі?

1.135. Два однакові металеві диски діаметром 12 см розташовані паралельно один до одного на відстані 0.2 см. Диски зсунуті один відносно одного так, що центр одного з них перебуває проти краю іншого (рис. 1.25). Визначити ємність такої системи.

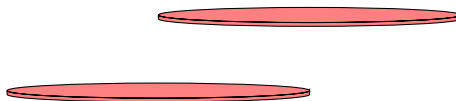


Рис. 1.25. До задачі 1.135

1.136. Дві концентричні металеві сфери мають радіуси R_1 та R_2 ($R_2 > R_1$). Внутрішню сферу заземлюють. Знайдіть ємність зовнішньої сфери.

1.137. Визначити наближено взаємну ємність системи, яка складається з двох металевих куль радіусами R_1 та R_2 , що знаходяться на дуже великій

в порівнянні з їх радіусами відстані одна від одної. Система занурена в однорідний діелектрик проникністю ϵ .

1.138. Простір між обкладинками сферичного конденсатора частково заповнено діелектриком, який розташований в середині тілесного кута Ω з вершиною в центрі обкладок. Радіуси обкладок R_1 та R_2 , проникність діелектрика ϵ . Знайти ємність конденсатора.

1.139. Сферичний конденсатор з радіусами обкладок R_1 та R_2 заповнений діелектриком, проникність якого залежить від відстані до центра r за законом $\epsilon = aR_1^2/r$, де a – деяка позитивна константа. Знайти ємність такого конденсатора.

1.140. В середині сферичного конденсатора з радіусами обкладок R_1 та R_2 діелектрична проникність змінюється за законом:

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_1, & R_1 \leq r < R, \\ \epsilon_2, & R \leq r < R_2, \end{cases}$$

де R – деяка відстань $R_1 < R < R_2$.

Знайти ємність конденсатора, розподіл зв'язаних зарядів та повний заряд в діелектрику.

1.141. Плоский конденсатор заповнений діелектриком, проникність якого змінюється за законом $\epsilon = a \frac{z+d}{d}$, де a , деяка позитивна константа, d – відстань між обкладками, вісь z – напрямлена перпендикулярно обкладкам, площа яких S . Нехтуючи крайовими ефектами, знайти ємність конденсатора та розподіл в ньому зв'язаних зарядів, якщо різниця потенціалів між обкладинками V .

1.142. Визначити взаємну ємність системи, яка складається із металевої кулі радіусом R і нескінченної металевої площини, яка розташована на відстані l від кулі. Вважати $l \gg R$.

1.143. Визначити ємнісні коефіцієнти для двох металевих куль з радіусами R_1 і R_2 . Центри куль знаходяться на відстані $l \gg R_1, R_2$ один від одного.

1.144. Визначте ємнісні коефіцієнти для чотирьох паралельних металевих пластин площею S , розташованих і з'єднаних так, як показано на рис. 1.26, за умови $d_1, d_2 \ll \sqrt{S}$.

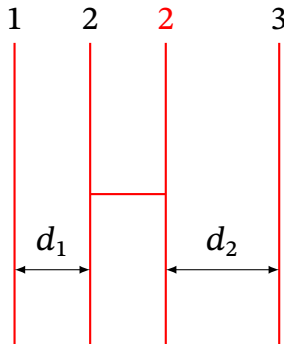


Рис. 1.26. До задачі 1.144

1.145. Два довгих дроти радіусом R кожен, розташовані паралельно один одному. Відстань між їх осями дорівнює l ($l \gg R$). Знайти взаємну ємність одиниці довжини ділянки дротів.

1.146. Відімкнена від джерела дводротова лінія електропередачі знаходиться в однорідному полі грозової хмари з напруженістю $E_0 = 2$ кВ/м, яке напрямлене перпендикулярно поверхні землі. Один з дротів заземлений, інший – ізолюваний. Висота дротів над поверхнею $h = 5$ м, відстань між ними $d = 1$ м, а їх радіуси $R = 1$ см. Знайдіть потенціал ізолюваного дроту.

1.147. Два довгих дроти радіусом R кожен, розташовані паралельно один одному на висоті h над поверхнею Землі ($h \gg R$). Відстань між їх осями дорівнює l . Знайти взаємну ємність одиниці довжини ділянки дротів.

1.148. В середину порожнього тонкостінного і заземленого металевого циліндра радіусом R вміщені два довгих паралельних дроти. Середина відстані між дротами співпадає з віссю циліндра. Радіус дротів r , відстань між ними l . Знайти взаємну ємність одиниці довжини лінії.

Ємність систем конденсаторів

1.149. Є кілька конденсаторів різної ємності. Як і що треба зробити, щоб отримати ємність: а) меншу за найменшу з наявних; б) найменшу з усіх можливих; в) більшу за найбільшу з наявних; г) найбільшу з усіх можливих.

1.150. Скільки та якої величини різних ємностей можна ввімкнути між двома точками кола, маючи три конденсатори однакової ємності C ?

1.151. Конденсатор, ємністю $C_1 = 1$ мкФ витримує напругу не більше $V_1 = 6$ кВ, а конденсатор, ємністю $C_2 = 2$ мкФ — не більше $V_2 = 4$ кВ. Яку напругу може витримати система двох таких конденсаторів, з'єднаних послідовно?

1.152. Ділянка кола AB (рис. 1.27) містить джерело ЕРС \mathcal{E} та два конденсатора ємностями C_1 та C_2 . Різниця потенціалів на ділянці $\varphi_A - \varphi_B$. Знайдіть напругу на конденсаторах.

1.153. Знайдіть напругу на кожному з конденсаторів (рис. 1.28).

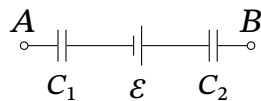


Рис. 1.27. До задачі 1.155

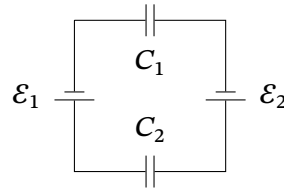


Рис. 1.28. До задачі 1.153

1.154. В схемі, яка наведена на рис. 1.29 знайти різницю потенціалів між точками A та B , якщо ЕРС джерела дорівнює \mathcal{E} , а відношення ємностей $C_2/C_1 = \eta$.

1.155. Знайти ємність нескінченного кола, яке утворене повторенням однієї і тієї ж ланки з двох однакових конденсаторів, кожен з яких має ємність C (рис. 1.30).

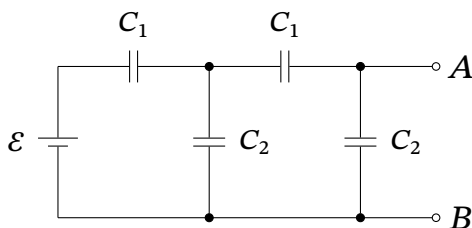


Рис. 1.29. До задачі 1.154

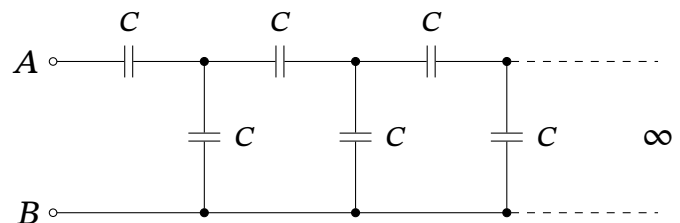


Рис. 1.30. До задачі 1.155

1.156. Знайти різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між точками A та B системи, яка показана: а) на рис 1.31, б) на рис 1.32.

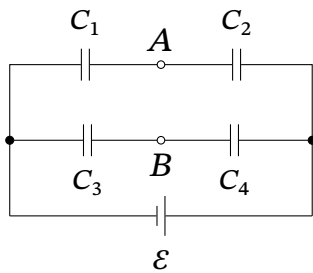


Рис. 1.31. До задачі 1.156

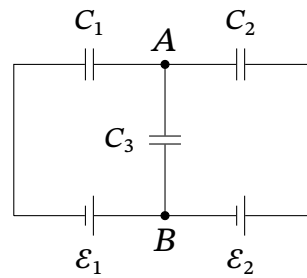


Рис. 1.32. До задачі 1.156

1.157. До джерела ЕРС \mathcal{E} послідовно приєднали два повітряні конденсатори, кожен ємністю C . Потім один з конденсаторів заповнили діелектриком проникністю 3. У скільки разів зменшилась напруженість електричного поля у цьому конденсаторі? Який заряд пройде через джерело?

1.158. Конденсатор ємністю C_1 мкФ, заряджений до напруги V , приєднали до кінців системи з двох послідовно з'єднаних незаряджених конденсаторів, ємності яких C_2 і C_3 . Який заряд пройде при цьому по підвідних провідниках?

1.159. Які заряди пройдуть після замикання ключа у схемах поданих на а) рис. 1.33 та б) рис. 1.34 через напрямки, казані стрілками. На схемах ЕРС кожного з джерел $\mathcal{E} = 60$ В, ємності конденсаторів $C_1 = 2$ мкФ та $C_2 = 3$ мкФ.

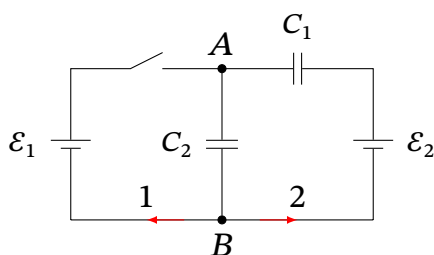


Рис. 1.33. До задачі 1.159

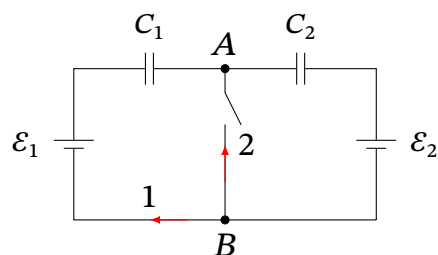


Рис. 1.34. До задачі 1.159

1.160. Батарею паралельно з'єднаних конденсаторів з ємностями $C_1 = 1$ мкФ і $C_2 = 2$ мкФ спочатку під'єднали до джерела з ЕРС, яка дорівнює $\mathcal{E} = 6$ В (ключ в положенні 1 на рис. 1.35). Потім ключ переводять в положення 2, поєднуючи батарею з конденсатором ємністю $C_3 = 3$ мкФ. Знайдіть заряд, який отримає конденсатор ємністю C_3 .

1.161. Незаряджений плоский конденсатор ємністю C_1 розташований в зовнішньому однорідному електричному полі E_0 , перпендикулярному до площин його обкладок (див. 1.36). Відстань між обкладками d . Конденсатор ємністю C_2 , що несе на своїх пластинах заряди $\pm q_0$ (плюс на обкладанні ліворуч), підключається до першого конденсатору. Визначте заряди q_1 і q_2 на лівих пластинах конденсаторів після підключення. Впливом зовнішнього електричного поля в місці знаходження другого конденсатора знехтувати.

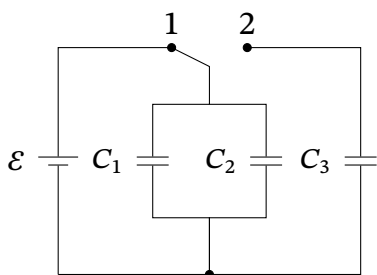


Рис. 1.35. До задачі 1.160

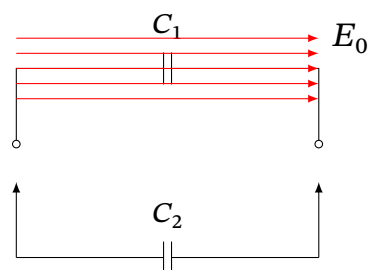


Рис. 1.36. До задачі 1.161

§ 1.8.

Енергія електричного поля

Теоретичні відомості

Енергія системи заряджених частинок:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad (1.44)$$

де φ_i — потенціал, в якому перебуває частинка зарядом q_i .

Власна електростатична енергія зарядженого тіла:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \iint_S \sigma \varphi dS, \quad (1.45)$$

де ρ та σ — об'ємна та поверхнева густини вільних електричних зарядів, відповідно.

Енергія жорсткого диполя в електричному полі:

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.46)$$

Енергія квазіпружного диполя в електричному полі:

$$W = -\frac{1}{2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}). \quad (1.47)$$

Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.48)$$

Густина енергії електричного поля:

$$w = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{8\pi}. \quad (1.49)$$

Енергія електростатичного поля:

$$W = \iiint_V \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{8\pi} dV \quad (1.50)$$

Визначення енергії системи заряджених частинок та диполів

1.162. Обчислити енергію нескінченного лінійного ланцюжку точкових зарядів, величина яких дорівнює q , а знаки чергуються. Відстань між сусідніми різноіменними зарядами дорівнює a (рис. 1.37).

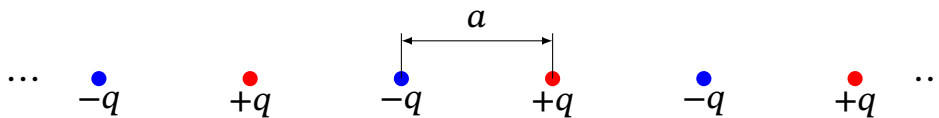


Рис. 1.37. До задачі 1.162

1.163. Знайти електростатичну енергію іонного кристалу NaCl. Кристалічна ґратка NaCl кубічна з відстанню між сусідніми однозарядними йонами Na та Cl дорівнює $a = 2.81$.

1.164. Два диполя з моментами \mathbf{p}_1 і \mathbf{p}_2 , які лежать в одній площині на відстані d один від одного, утворюють з прямою, яка з'єднує диполі, кути θ_1 і θ_2 відповідно (рис. 1.38). Обчислити енергію взаємодії диполів. Знайти кути, при яких енергія буде а) максимальною, б) дорівнюватиме нулю та в) мінімальною.

1.165. На відстані d від півпростору, заповненого однорідним діелектриком з проникністю ϵ , закріплений центр точкового диполя з дипольним моментом \mathbf{p} . Диполь може вільно обертатися, змінюючи напрямок. Паралельно межі півпростору прикладене однорідне зовнішнє електричне поле \mathbf{E} (рис. 1.39). Знайти встановлене рівноважне значення кута α між напрямком векторів \mathbf{E} і \mathbf{p} .

Визначення електростатичної енергії заряджених тіл та конденсаторів

1.166. Покажіть, що енергія провідника довільної форми, потенціал якого

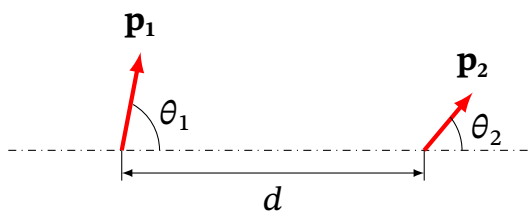


Рис. 1.38. До задачі 1.164

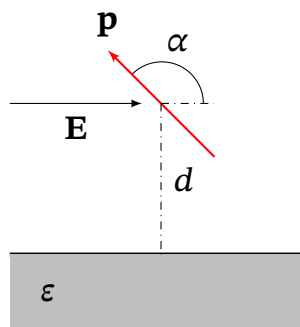


Рис. 1.39. До задачі 1.165

φ , що несе заряд Q дорівнює:

$$W = \frac{1}{2} Q \varphi$$

1.167. Нехай система складається з N провідників, заряди яких Q_i а потенціали на них φ_i . Чому дорівнює енергія системи цих провідників?

1.168. Система складається із двох провідників довільної форми, які розташовані на відстані, що перевищує суму їх характерних лінійних розмірів. Один з провідників є заряджений, інший незаряджений. Тіла починають квазістатично (нескінченно повільно) зближувати, як при цьому змінюватиметься а) потенціал зарядженого провідника, б) потенціал незарядженого провідника, в) різниця потенціалів між провідниками?

1.169. Знайдіть енергію системи, яка розглянута в задачі 1.76 до і після з'єднання дротом. Поясніть результат з точки зору закону збереження енергії.

1.170. Система складається з двох концентричних тонких металевих оболонок з радіусами R_1 і R_2 і відповідними зарядами q_1 і q_2 . Знайти власну енергію кожної оболонки, енергію взаємодії оболонок і повну електричну енергію системи.

1.171. Металева сфера радіусом R , що має заряд q , занурена на половину в нескінченний ізотропний діелектрик з проникністю ϵ . Знайти енергію електростатичного поля.

1.172. Центр незарядженої металевої сфери радіусом R розташований на плоскій границі двох ізотропних діелектриків з проникностями ϵ_1 і ϵ_2 . В середині сфери на відстані від її центру знаходиться точковий заряд q .

Визначити енергію поля поза сферою.

1.173. На скільки зміниться повна енергія металічної кулі радіусом R_1 з зарядом q , якщо її оточити концентричними сферичними шарами діелектрика з діелектричною проникністю ε і радіусами R_2 і R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$).

1.174. До пластин плоского конденсатора прикладено напругу $V = 0.1$ кВ. Площа пластин дорівнює $S = 0.01$ м². Спочатку пластини конденсатора знаходились на відстані $d_1 = 1$ мм, а згодом їх розсунули до відстані $d_2 = 25$ мм. На скільки зміниться енергія конденсатора після розсовування пластин, якщо перед розсовуванням джерело напруги а) не відмикають; б) відмикають.

1.175. Плоский конденсатор заповнений діелектриком і під'єднано до джерела постійної напруги. Енергія конденсатора становить $W = 200$ ерг. Після того, як конденсатор від'єднали від джерела напруги, діелектрик вийняли, виконавши при цьому роботу, що дорівнює $A = 700$ ерг. Знайдіть діелектричну проникність діелектрика.

§ 1.9.

Пондеромоторні сили

Теоретичні відомості

Пондеромоторні (узагальнені) сили Q_i , що діють на діелектрики з боку електричного поля:

$$Q_i = \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_{\varphi} = - \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_q, \quad (1.51)$$

де W – енергія електростатичного поля, q_i – узагальнені координати. Похідні беруться за умови постійного потенціалу (індекс φ), або постійного заряду (індекс q).

Об'ємні сили. Об'ємна густина пондеромоторних сил:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2, \quad (1.52)$$

де ρ – густина вільних електричних зарядів.

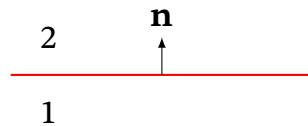


Перший доданок — об'ємні сили, що діють на вільні заряди, другий пов'язаний з силами, що діють на діелектрики. Вираз другого доданку справедливий у випадку жорстких діелектриків, а також для таких, що слабо поляризуються в електричному полі [17, §32].

Поверхневі сили сили. Сила, що діє на одиницю поверхні провідника з боку електричного поля:

$$\mathbf{f}_\sigma = \frac{1}{8\pi} (E_{2n}^2 - E_{1n}^2), \quad (1.53)$$

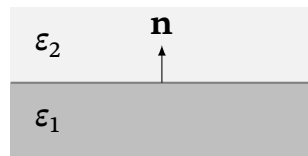
де \mathbf{n} – нормаль до поверхні провідника, що напрямлена із півпростору 1 в півпростір 2.



Сила, що діє на одиницю поверхні розділу двох середовищ з боку електричного поля:

$$\mathbf{f}_\sigma = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) D_n^2 \mathbf{n} + \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) E_\tau^2 \mathbf{n}, \quad (1.54)$$

де \mathbf{n} – нормаль до поверхні розділу середовищ, що напрямлена із середовища 1 в середовище 2.



1.176. Два однакових точкових заряди (величина заряду q) знаходяться на відстані l один від одного в твердому діелектриці з проникністю ε . Заряди розташовані в центрах малих сферичних порожнин. Знайдіть силу взаємодії зарядів.

Визначення сил, що діють на провідники в електростатичному полі

1.177. Металеву сферу із загальним зарядом q розрізали навпіл. Яку силу необхідно прикласти, щоб утримати половини разом? Сферу вважати нескінченно тонкою.

1.178. Як зміниться відповідь в задачі 1.177, якщо в центрі сфери помістити додатково точковий заряд q_0 ?

1.179. Нескінченно довга тонка провідна циліндрична оболонка радіусом R розрізана уздовж осі. Визначити силу відштовхування, що діє на одиницю довжини кожної половини, якщо на одиницю довжини оболонки припадає заряд λ .

1.180. Незаряджена металева сфера маси m плаває в діелектричній рідині з проникністю ε , занурившись в неї на одну чверть свого об'єму. До якого потенціалу слід зарядити сферу, щоб вона плавала зануреною в неї на половину?

1.181. Знайти силу взаємодії двох однакових незаряджених металевих сфер радіусами R , вміщених в однорідне електричне поле з напруженістю E_0 , яке напрямне паралельно лінії, що з'єднує центри сфер. Відстань між центрами сфер дорівнює l , причому $l \gg R$.

1.182. З якою силою притягуються пластини плоского конденсатора у вакуумі, заряд якого q , а площа пластин S ?

1.183. Між обкладками плоского повітряного конденсатора розташована діелектрична пластина товщиною d_2 з діелектричною проникністю ϵ , сумарна товщина повітряних зазорів між пластиною та обкладками дорівнює d_1 . Різниця потенціалів між обкладками дорівнює V . Визначити силу притягання між обкладками. Площа всіх пластин дорівнює S .

Визначення сил, що діють на діелектрики в електростатичному полі

1.184. Відомо, що легкі діелектричні тіла притягуються до наелектризованих тіл. Чому це відбувається? Чи може бути ситуація, коли діелектричні тіла відштовхуватимуться від наелектризованого тіла?

1.185. Нехай однорідний діелектрик у вигляді витягнутого еліпсоїда з проникністю ϵ_2 знаходиться в середовищі з проникністю ϵ_1 . Покажіть, що при вміщенні такого тіла в неоднорідне електричне поле, воно орієнтуватиметься вздовж силових ліній якщо його $\epsilon_2 > \epsilon_1$, і перпендикулярно силовим лініям у випадку, якщо $\epsilon_2 < \epsilon_1$.

1.186. Для задачі 1.116 знайдіть силу, що діє на одиницю поверхні діелектрика в обох випадках.

1.187. З якою силою втягується діелектрична пластина в плоский конденсатор, якщо вона входить в простір між обкладками на довжину x (рис. 1.40)? Розглянути випадки а) заряд на пластинках є постійним і рівним Q ; б) потенціал на пластинках підтримується постійним і рівним V . Відстань між обкладками d , довжина обкладок l , а ширина a . Діелектрична проникність пластини ϵ . Вважати, що $x \gg d$ і $l - x \gg d$. Поясніть сенс цих умов. Порівняйте значення сил в обох випадках, якщо $Q = CV$.

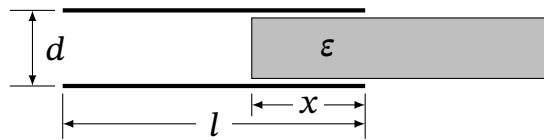


Рис. 1.40. До задачі 1.187

1.188. Плоский конденсатор занурено в ідеальну рідину з діелектричною проникністю ϵ і густиною ρ так, що його обкладки розташовані вертикально. Відстань між ними дорівнює d , різниця потенціалів V . Визначити висоту підняття рідини в конденсаторі.

1.189. Довгий тонкий циліндричний стрижень з однорідного ізотропного діелектрика з діелектричною проникністю ϵ знаходиться в однорідному електричному полі з напруженістю E_0 , що утворює кут α з напрямком осі стрижня. Об'єм стрижня дорівнює V . Який зовнішній момент сил слід прикласти, щоб утримати стрижень в даному положенні?

1.190. На осі симетрії тонкого кільця радіусом R , зарядженого зарядом q , на відстані z від його центру розташована діелектрична кулька радіусом r ($r \ll R$) з діелектричною проникністю діелектрика ϵ (рис. 1.41). Яка сила діє на кульку з боку електричного поля?

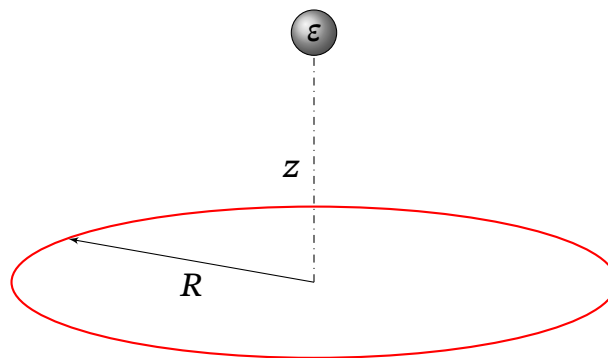


Рис. 1.41. До задачі 1.190

1.191. Для умов задачі 1.190 визначити, у яких точках z на осі кільця сила, що діє на кульку буде а) мінімальною, б) максимальною, в) дорівнюватиме нулю?

1.192. Два точкові заряди q_1 та q_2 знаходяться на відстані r один від одного в центрах малих сферичних порожнин в твердому діелектрику з проникністю ϵ . Знайдіть сили, що діють на заряди.

Постійний струм

§ 2.1. Струми в середовищах. Закон Ома в диференціальній формі

Теоретичні відомості

Сила струму (потік заряду):

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (2.1)$$

Сила струму як потік вектора густини струму через довільну поверхню S :

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.2)$$

Закон Ома в диференціальній формі:

$$\mathbf{j} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \quad (2.3)$$

де λ — електрична провідність ділянки кола, \mathbf{E}^* — напруженість поля сторонніх сил. Електрорушійна сила:

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}^* d\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

Для випадку постійного струму, закон збереження електричного заряду приймає вигляд:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.5)$$

2.1. Для струмів до 30 А застосовуються кабелі, мідні дроти яких мають діаметр 2.6 мм. Питомий опір міді $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. а) Визначити опір такого кабелю довжиною 100 м. б) Яка напруженість електричного поля в дроті, якщо по ньому тече струм 30 А? в) За цих умов, скільки часу потрібно, щоб електрон пройшов відстань в 100 м вздовж дроту? Кожен атом міді дає один електрон в електричну провідність.

2.2. Плоский конденсатор увімкнений послідовно в коло, що складається з резистора опором R і джерела з ЕРС \mathcal{E} . У простір між пластинами конденсатора паралельно до них всовують з постійною швидкістю v металеву пластинку товщиною d . Поперечні розміри всувають пластинки $l \times l$ збігаються з розмірами обкладок конденсатора, а відстань між обкладинками дорівнює d_0 . Нехтуючи внутрішнім опором джерела, знайдіть силу струму колі.

2.3. Розв'язати попередню задачу 2.2 за умови, що у простір між пластинами конденсатора паралельно до них всовують діелектричну пластинку товщиною d з проникністю ϵ .

2.4. Отримайте граничні умови для густини струму на поверхні розділу двох провідників, що мають різну електропровідність λ_1 і λ_2 . Знайдіть закон заломлення ліній струму на поверхні розділу двох провідників.

2.5. Доведіть, що при проходженні постійного струму через неоднорідний провідник ($\lambda = \lambda(\mathbf{r})$), в його об'ємі може виникати вільний об'ємний заряд. Від чого залежить знак і величина цього заряду? Чи виникатиме об'ємний заряд, якщо провідник однорідний?

2.6. Доведіть, що при проходженні постійного струму по провіднику, на його поверхні виникають поверхневі заряди.

Вказівка: Для доведення скористайтесь граничними умовами для векторів густини струму та електричної індукції.

2.7. Покажіть, що при проходженні струму густиною \mathbf{j} через неоднорідний діелектрик ($\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$), який має слабку неоднорідну провідність ($\lambda = \lambda(\mathbf{r})$), в його об'ємі утворюється заряд, густина якого дорівнює:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} \left(\mathbf{j} \cdot \nabla \frac{\lambda}{\epsilon} \right).$$

2.8. На плоский конденсатор ємністю C подано постійну напругу V . Знайти струм втрат через конденсатор, якщо питомий опір однорідної речовини, якою заповнений зазор між обкладками конденсатора, дорівнює ρ , а діелектрична проникність ϵ .

2.9. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнено двома однорідними шарами діелектрика, що слабо проводять. Товщини шарів діелектрика дорівнюють d_1 і d_2 , діелектрична проникність і питома провідність дорівнюють ϵ_1 і λ_1 та ϵ_2 і λ_2 , відповідно. До конденсатора прикладено постійну напруги V . Площа пластин конденсатора S . Знайти а) густину струму в діелектрику; б) поверхневу густину вільних зарядів на пластинах конденсатора; в) поверхневу густину вільних зарядів на межі розділу діелектриків; г) поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі розділу діелектриків; д) опір конденсатора.

2.10. Простір між пластинами шаруватого плоского конденсатора заповнено багатошаровим діелектриком, що має слабку електропровідність. Діелектрична проникність і питома провідність змінюються від $\epsilon = 4$ та $\lambda = 10^{-9} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ на одній поверхні діелектрика до $\epsilon = 3$ та $\lambda = 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ на іншій його поверхні. Конденсатор включений в коло батареї постійної ЕРС. Визначити величину і знак сумарного вільного заряду q , який виникає в діелектрику, коли в колі встановиться постійний електричний струм $I = 10^{-7} \text{ А}$, що тече через діелектрик від сторони 1 до сторони 2.

2.11. Плоский конденсатор, заповнений речовиною, діелектрична проникність якої дорівнює ϵ , за час τ втрачає третину наданого йому заряду. Вважаючи, що втрата заряду відбувається тільки через діелектричну прокладку, знайти питомий опір її матеріалу.

2.12. Обчислити опір між обкладками циліндричного конденсатора, радіус внутрішньої обкладки якого R_1 , а зовнішньої – R_2 . Конденсатор має довжину $l \gg R_2$ і заповнений діелектриком з проникністю ϵ і електропровідністю λ . Знайдіть ємність такого конденсатора

2.13. Між двома концентричними сферами з ідеального провідника, знаходиться речовина з питомим опором ρ і діелектричною проникністю ϵ . Визначити опір такого шару, якщо його внутрішній радіус дорівнює r_1 , а зовнішній – r_2 . Розгляньте випадок $R_2 \rightarrow \infty$.

2.14. Показати, що опір однорідного провідного середовища, що заповнює весь простір між двома металевими оболонками довільної форми не залежить від відстані між ними^a і дорівнює $\frac{\rho}{4\pi\lambda C}$, де λ – питома провідність середовища, а C – взаємна ємність цієї системи в вакуумі. Запишіть дану величину в одиницях системи SI.

“Цей результат був емпірично знайдений телеграфістами, які виявили що опір землі між телеграфними станціями не залежить від відстані між ними.

2.15. Дві металеві кулі радіусами r_1 та r_2 занурені в однорідне середовище з питомим опором ρ . Чому дорівнює опір середовища між кулями? Визначити взаємну ємність цих куль. Вважати, що відстань між кулями набагато більша за їх радіуси.

2.16. Коло постійного струму складається з довгої однопровідної лінії, в яку увімкнено джерело з ЕРС \mathcal{E} . Лінія замикається через Землю, в яку зариті дві металеві кулі розташовані на великій відстані одна від одної (рис. 2.1). Відомі радіуси куль r_1 та r_2 , а також провідність ґрунту λ_1 і λ_2 в місцях, де вони закопані. Нехтуючи усіма опорами, крім опору заземлення, визначити заряд кожної кулі.

2.17. Фундамент металевої опори виконано із матеріалу, який добре проводить струм і має вигляд півсфери діаметром $D = 2$ м (рис. 2.2). Ґрунт навколо фундаменту має провідність $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ См/см і є заземленням. Знайти опір заземлення і крокову напругу на відстані $r = 5$ м від центру опори при замиканні на опорі дроту напругою $\varphi_0 = 10$ кВ. Довжина кроку людини $\ell = 0.7$ м.

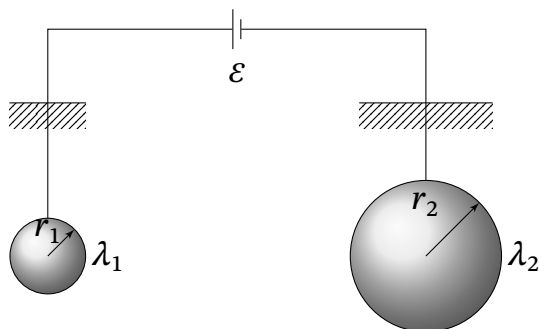


Рис. 2.1. До задачі 2.16

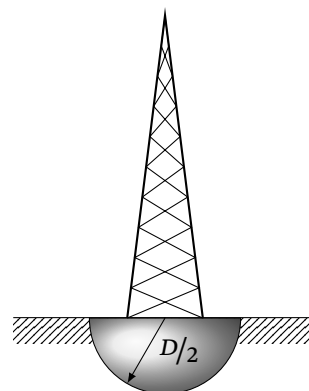


Рис. 2.2. До задачі 2.17

2.18. В нескінченному середовищі з провідністю λ_e , знаходиться сферична краплина радіусом R , провідність якої λ_i . На далекій відстані від краплини тече струм густиною \mathbf{j}_0 . Знайти дипольний момент краплини, результуючий розподіл струму в середовищі та розподіл зарядів на поверхні краплини.

2.19. В нескінченному середовищі з провідністю λ , по якому йшов струм \mathbf{j}_0 , виникла сферична порожнина радіусом R . Знайти результуючий розподіл струму в середовищі.

§ 2.2.

Електричні кола. Правила Кірхгофа

Теоретичні відомості

Закон Ома для однорідної ділянки кола в інтегральній формі ^a:

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.6)$$

Закон Ома для ділянки кола в інтегральній формі:

$$\varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E} = -IR \quad (2.7)$$

Величина, $V = \varphi_1 - \varphi_2$ — називається різницею потенціалів (або падінням напруги) на ділянці кола, величина $U = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}$ називається напругою (робота як сторонніх сил, так і сил електричного поля по переміщенню одиничного додатного заряду).

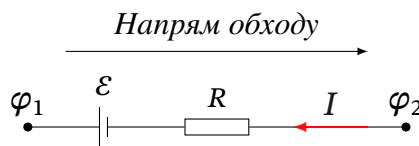


Рис. 2.3. Ілюстрація до закону Ома для неоднорідної ділянки кола

Правила Кірхгофа застосовуються для розрахунку параметрів розгуджених електричних кіл. Розгалужені кола, це такі кола, що містять з'єднання трьох або більшої кількості провідників в одній точці, які називаються *вузлами*. Замкнена частина електричного кола називається *контуром*, а провідник що сполучає два вузли — *гілкою*. По всім елементам гілки тече один і той же струм.

Перше правило Кірхгофа: алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю:

$$\sum_i I_i = 0 \quad (2.8)$$

Як правило, струм, який входить у вузол беруть з додатнім знаком, а який виходить і з вузла — з від'ємним. Якщо коло містить N вузлів, то перше правило Кірхгофа достатньо записати для $N - 1$ вузла.

Друге правило Кірхгофа: сума спадів напруг у контурі дорівнює сумі електрорушійних сил, які діють у цьому контурі:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_j \mathcal{E}_j \quad (2.9)$$

Якщо коло містить M гілок і N вузлів, то кількість рівнянь, які треба записати за другим правилом Кірхгофа дорівнює $M - (N - 1)$.

^aПри використанні формул на закони Ома в інтегральній формі, зручно користуватись системою одиниць SI

2.20. Три гальванічні елементи з ЕРС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ і внутрішніми опорами r_1, r_2 і r_3 з'єднані за схемою, показаною на рис. 2.4. Опором з'єднувальних провідників можна знехтувати. Яку напругу U буде показувати вольтметр, увімкнений так, як вказано на цьому рисунку? Чому дорівнюватимуть покази вольтметра, якщо величини \mathcal{E}_i та r_i пов'язані співвідношеннями $\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} = \frac{\mathcal{E}_3}{r_3}$?

2.21. У схемі, зображеній на 2.5, задані опори R_1 і R_2 . Визначити опір R , при якому потужність, що розсіюється на ньому буде максимальною. Яка умова того, що струм, який проходить через опір R , дорівнюватиме нулю?

2.22. Знайти різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між точками A та B схеми, що зображена на рис. 2.6, якщо $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $\mathcal{E}_1 = 5$ В і $\mathcal{E}_2 = 2$ В. Внутрішніми опорами джерел живлення можна знехтувати.

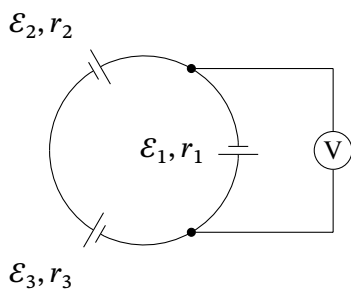


Рис. 2.4. До задачі 2.20

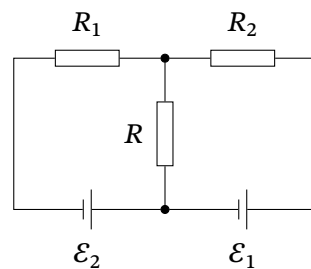


Рис. 2.5. До задачі 2.21

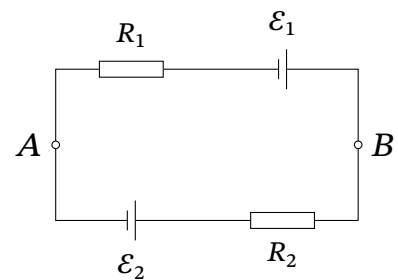


Рис. 2.6. До задачі 2.22

2.23. Точність вимірювання опорів містком Уїтстона найбільша, коли опори сусідніх плечей однакові, тобто, коли $R_1 = R_2$ (рис. 2.7). Довести це для випадку, коли опір гальванометра дуже великий, в цьому випадку струмом через гальванометр можна знехтувати.

2.24. На телеграфній однопровідній лінії є пошкодження з певним опором заземлення r (рис. 2.8) Показати, що струм I на приймаючому кінці лінії буде найменшим в тому випадку, коли пошкодження сталося в середині лінії. Опір приймального апарату малий в порівнянні з опорами всієї лінії.

2.25. Знайти опір між точками A та B нескінченного кола (рис. 2.9).

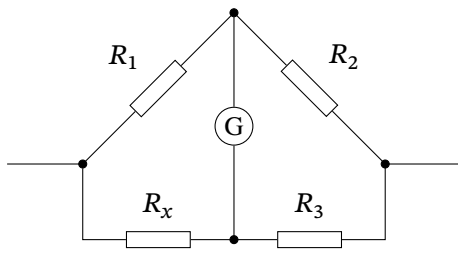


Рис. 2.7. До задачі 2.23

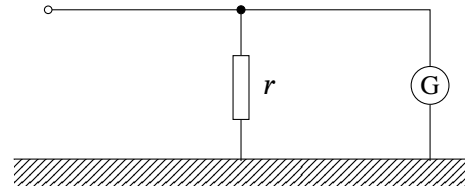


Рис. 2.8. До задачі 2.24

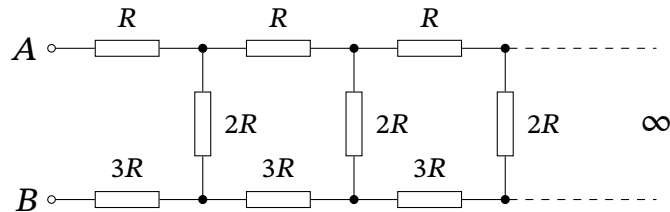


Рис. 2.9. До задачі 2.25

2.26. Між точками A та B кола (рис. 2.10) підтримують напругу $V = 20$ В. Знайти струм та його напрямок на ділянці 1 – 2, якщо $R_1 = 5$ Ом і $R_2 = 10$ Ом.

2.27. В схемі (рис. 2.11) знайти опір між точками між точками A та B , якщо $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 50$ Ом.

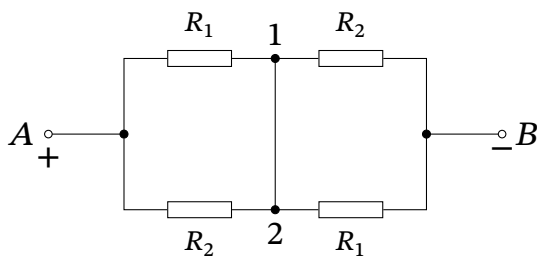


Рис. 2.10. До задачі 2.26

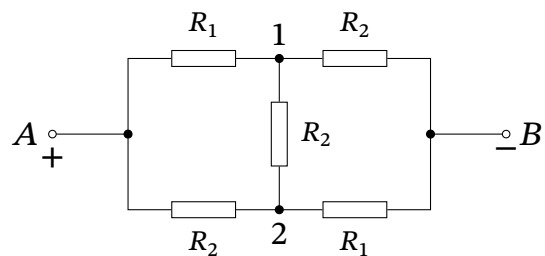


Рис. 2.11. До задачі 2.27

§ 2.3. Закон Джоуля-Ленца

Теоретичні відомості

При проходженні струму по ділянці кола, робота електричного поля та сторонніх сил (у випадку неоднорідної ділянки) перетворюється в теплоту:

$$A = Q. \quad (2.10)$$

Потужність, що виділяється дорівнює:

$$P = UI, \quad (2.11)$$

де U – напруга ділянки кола, I – сила струму.

Кількість теплоти, що виділяється за час dt на ділянці провідника (закон Джоуля-Ленца):

$$dQ = I^2 R dt. \quad (2.12)$$

Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі:

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

де w – теплова потужність, що виділяється в одиниці об'єму провідника при проходженні струму.

2.28. Як зміниться кількість теплоти, що виділяється в провіднику, що увімкнений у мережу з постійною напругою, при зменшенні довжини провідника вдвічі?

2.29. Запобіжник розрахований на силу струму 10 А. Чи можна вмикати в мережу напругою 220 В споживач потужністю 10 кВт?

2.30. У дволітровому електричному чайнику потужністю 1 кВт вода закипає за 20 хв, тоді як в чайнику потужністю 3 кВт це зайняло б 5 хв. Чому не вигідні малопотужні при бори?

2.31. Є n ідеально провідних тіл у вакуумі з зарядами q_1, q_2, \dots, q_n і потенціалами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Яка кількість теплоти буде виділятися щосекундно, якщо простір між цими тілами заповнити однорідною рідиною з питомою провідністю λ і діелектричною проникністю ϵ , а потенціали тіл підтримувати сталими?

2.32. Простір між обкладками циліндричного конденсатора довжиною l заповнено речовиною з питомим опором ρ і діелектричною проникністю $\epsilon = 1$. Визначити теплову потужність струму, що виділяється в конденсаторі, якщо напруга між його обкладками U , радіуси обкладок R_1 і R_2 . Крайовими ефектами знехтувати.

2.33. Простір між обкладками сферичного конденсатора радіусами R_1 і R_2 заповнено провідним середовищем з провідністю λ і діелектричної проникністю ϵ . У початковий момент часу внутрішній обкладці надали заряд q . Знайти кількість, теплоти, що при цьому виділилося.

2.34. Зазор між обкладками плоского конденсатора товщиною d заповнений послідовно двома діелектричними шарами однакової товщини. Питомі опору шарів відповідно дорівнюють ρ_1 і ρ_2 , діелектрична проникність $\epsilon = 1$.

Площа обкладок S . На конденсатор подано напругу U . Знайти потужність, що виділяється в кожному шарі.

2.35. Провідна куля знаходиться в середовищі з заданою провідністю λ_e . Густина струму далеко від кулі однорідна. При якому значенні провідності кулі λ_i в ній виділяється найбільша потужність?

2.36. Струм протікає від мідної трубки радіусом $R_1 = 1$ мм до мідної трубки радіусом $R_2 = 1$ см через алюмінієву фольгу (рис. 2.12). Знайдіть товщину фольги, якщо при рівномірному зменшенні струму з $I_0 = 2$ А до нуля за $\tau = 1$ хв в фользі виділась теплота $Q = 2$ мДж? Питомий опір алюмінію $\rho = 25$ нОм·м.

2.37. Джерело ЕРС \mathcal{E} зі з'єднувальними провідниками діаметром d під'єднано до тонкостінної бляшанки довжиною b (рис. 2.13). Товщина стінок бляшанки d , а питомий опір матеріалу, з якого вона виготовлена ρ . Внутрішнім опором джерела та з'єднувальних провідників можна знехтувати. При деякому радіусі бляшанки в колі виділяється максимальна теплова потужність. Визначте величину цієї потужності.

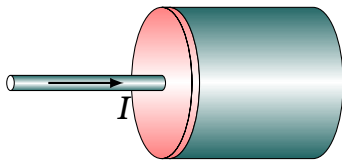


Рис. 2.12. До задачі 2.36

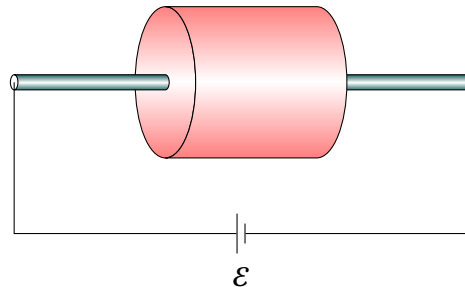


Рис. 2.13. До задачі 2.37

2.38. У початковий момент часу на лівому конденсаторі напруга дорівнює V_0 , правий конденсатор не заряджений і обидва ключі розімкнуті (рис. 2.14). Спочатку замикають ключ 1, потім, дочекавшись встановлення рівноваги, замикають ключ 2. Знайдіть кількість теплоти, що виділилася на кожному з опорів.

2.39. Яка кількість теплоти виділиться на резисторах після замикання ключа в схемі, що зображена на рис. 2.15? Внутрішнім опором батареї знехтувати.

2.40. У схемі, показаній на рис. 2.16, обидва джерела однакові. Лампа є нелінійним елементом, її вольт-амперна характеристика (зв'язок струму з напругою) описується виразом $I = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\mathcal{E}V}{3}}$, де r — внутрішній опір, а \mathcal{E} — величина ЕРС кожного джерела. Поки ключ розімкнений, лампа споживає потужність $P_1 = 6$ Вт. Якою стане споживана лампою потужність P_2 після замикання ключа ?

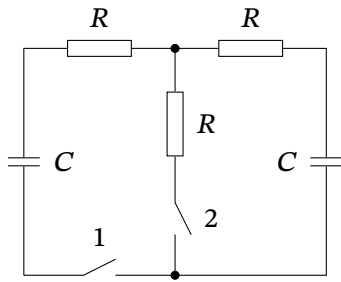


Рис. 2.14. До задачі 2.38

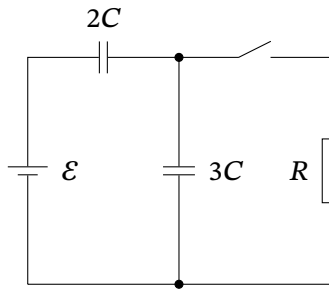


Рис. 2.15. До задачі 2.39

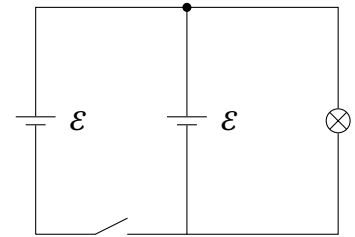


Рис. 2.16. До задачі 2.40

Магнітостатика

Так як я уже давно рассматривал силы, проявляющиеся в электрических явлениях, всеобщими природными силами, то я должен был отсюда вывести и магнитные действия

Х.-К. Эрстед

§ 3.1. Закон Біо-Савара-Лапласа. Теорема про циркуляцію

Теоретичні відомості

Для випадку магнітостатики у вакуумі, рівняння Максвелла приймають вигляд: Інтегральна форма:

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{Теорема Гауса для магнітного поля} \quad (3.1)$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Теорема про циркуляцію вектора індукції} \quad (3.2)$$

або у диференціальній формі:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (3.4)$$

Розв'язком цих рівнянь є закон Біо-Савара-Лапласа:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \iiint_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r} dV}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (3.5)$$

де \mathbf{r} — радіус-вектором проведений від елемента струму $\mathbf{j}dV$ до точки спостереження.

Визначення характеристик магнітного поля розподілів струмів, які мають певну симетрію

3.1. Визначити магнітне поле на відстані r від нескінченно довгого провідника зі струмом (рис. 3.1) за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа та за допомогою теореми про циркуляцію. Порівняйте результати.

3.2. Визначте магнітне поле в точці P на відстані r від короткого провідника зі струмом. Положення точки P визначається кутами α_1 та α_2 (рис. 3.2). Поясніть, чому в цьому випадку не можна скористатись теоремою про циркуляцію.

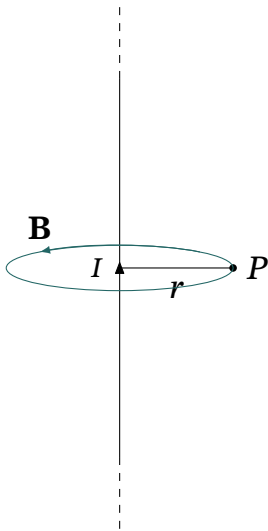


Рис. 3.1. До задачі 3.1

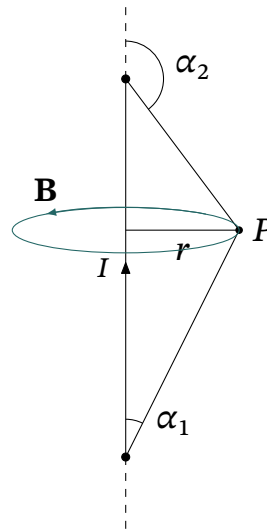


Рис. 3.2. До задачі 3.2

3.3. Знайдіть індукцію магнітного поля в точці O контуру зі струмом I , який показано а) на 3.3, при чому радіуси a та b і кут φ відомі; б) на 3.4, при чому радіуси a та сторона b відомі.

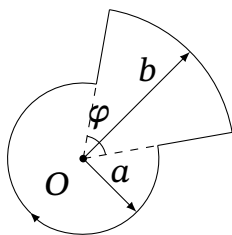


Рис. 3.3. До задачі 3.3

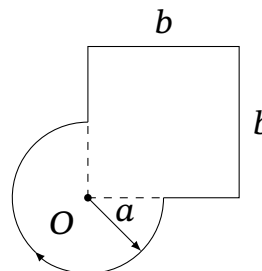


Рис. 3.4. До задачі 3.3

3.4. Вдovж нескінченної металевї пластини тече струм рївномїрно розподїлений по її ширинї з густиною i . Знайти магнїтне поле в просторї навколо такої пластини.

3.5. Знайдїть магнїтне поле в серединї нескінченно довгого соленоїда, по поверхнї якого по колу тече струм, рївномїрно розподїлений за шириною з густиною i .

3.6. Знайти магнїтне поле, що створюється тонким пївкїльцем радїусом R в його центрі.

3.7. Визначити індукцію магнїтного поля в дипольному наближеннї електричного диполя з моментом \mathbf{p}_e що рухається зі швидкістю \mathbf{v} .

3.8. По провіднику, який має форму еліпса, тече струм I . Велика і мала півовісі еліпса дорівнюють a та b відповідно. Визначити індукцію магнїтного поля в фокусї еліпса.

3.9. Знайти поле на осї і в центрі колового витка радїусом R , по якому тече струмом I . Використовуючи отриманий результат, знайти: а) поле на осї круглого соленоїда в точцї, з якої його край видно під кутами α_1 та α_2 , б) поле на кінцї напівнескінченного соленоїда, в) поле в серединї нескінченного соленоїда. Число витків на одиницю довжини соленоїда дорівнює n .

3.10. Знайти магнїтне поле на осї рївномїрно зарядженого диска радїусом R (повний заряд диска дорівнює q , що обертається навколо осї з кутовою швидкістю ω на відстанї z від диска).

3.11. Нескінченно довгий циліндричний дрїт складається з двох коаксіальних циліндрів. Внутрішній суцільний циліндр, виготовлений з немагнїтного матеріалу і має радїус R_1 . Радїус зовнішнього пустотілого циліндра дорівнює R_2 . Уздовж циліндрів течуть постійні струми однакової величини I , але спрямовані протилежно. Визначити залежність величини індукції магнїтного поля від відстанї до осї дроту.

3.12. Нескінченно довгий циліндричний циліндричний дрїт складається з двох коаксіальних циліндрів. Внутрішній суцільний циліндр, виготовлений з немагнїтного матеріалу і має радїус R_1 та питомий опір ρ_1 . Радїус зовнішнього циліндра дорівнює R_2 та питомий опір ρ_2 . Зовнішня поверхня

внутрішнього циліндра знаходиться в тісному контакті із внутрішньою поверхнею зовнішнього. Уздовж циліндрів тече постійний струм I . Визначити залежність величини індукції магнітного поля від відстані до осі дроту.

3.13. В середині довгого прямого дроту круглого перерізу є довга кругла циліндрична порожнина, вісь якої паралельна осі проводу і зміщена щодо неї на відстань d (рис. 3.5). По дроту тече постійний струм густиною j , рівномірно розподілений за перерізом. Нехтуючи впливом речовини дроту, визначити величину індукції магнітного поля всередині порожнини.

3.14. Уздовж довгої тонкостінної циліндричної трубки радіуса R тече постійний струм I . У стінці трубки є тонка щілина ширини d , паралельна осі трубки (рис. 3.6). Визначити величину індукції магнітного поля в точці, що лежить всередині трубки на її радіусі, якщо відстань від середини щілини до даної точки дорівнює r ($R \gg d$).

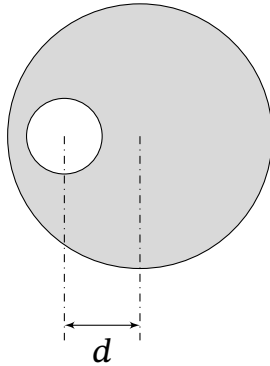


Рис. 3.5. До задачі 3.13

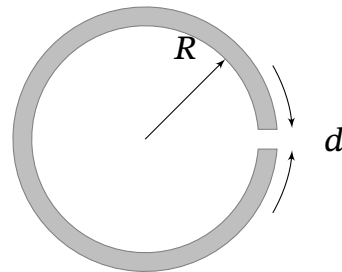


Рис. 3.6. До задачі 3.14

3.15. Нескінченно довгий діелектричний циліндр радіусом R радіально поляризований таким чином, що поляризованість визначається законом $\mathbf{P} = a\mathbf{r}$, де a – позитивна константа. Циліндр обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо своєї осі. Визначити магнітне поле в залежності від відстані до осі в середині та зовні циліндра.

§ 3.2.

Векторний потенціал. Магнітний момент

Теоретичні відомості

Зв'язок вектора індукції магнітного поля з вектор-потенціалом:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.6)$$

Рівняння Пуассона для вектор-потенціалу:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.7)$$

Розв'язком цього рівняння є вектор-потенціал:

$$\mathbf{A} = \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}' dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.8)$$

де \mathbf{r}' — радіус-вектор елементів заряду $\rho(\mathbf{r}')dV'$, а \mathbf{r} — радіус-вектор точки спостереження.

Циркуляція вектор-потенціалу вздовж довільного контуру L дорівнює потоку вектора індукції магнітного поля крізь поверхню S , на яку натягнуто даний контур:

$$\iint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r}. \quad (3.9)$$

Означення вектора магнітного моменту:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2c} \iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV, \quad (3.10)$$

Вектор-потенціал поля магнітного диполя:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.11)$$

Магнітне поле диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}. \quad (3.12)$$

Поняття ротора

3.16. Знайдіть $\nabla \times \mathbf{r}$, \mathbf{r} — радіус-вектор довільної точки.

3.17. Знайдіть $\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, \mathbf{r} — радіус-вектор довільної точки.

3.18. Знайдіть $\nabla \times \left[\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right]$, де \mathbf{a} – довільний постійний вектор, \mathbf{r} – радіус-вектор довільної точки.

Розрахунок магнітного моменту струмів

3.19. Показати, що з означення вектора магнітного моменту 3.10 для випадку колового витка зі струмом I площею S впливає формула:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{c} I S \mathbf{n},$$

де \mathbf{n} — вектор нормалі до поверхні S .

3.20. Згідно теорії Бора, електрон в основному стані атома водню обертається навколо ядра по коловій орбіті на відстані, що дорівнює борівському радіусу a . Знайти магнітний момент електрона, що пов'язаний з таким орбітальним рухом.

3.21. Знайдіть магнітний момент короткого соленоїда довжиною b і радіусом R по поверхні якого тече поверхневий коловий струм густиною i .

3.22. Знайти магнітний момент котушки, яка представляє собою витки, щільно намотані на половину тора. Сила струму яка тече по витках I , діаметр перерізу тора D , кількість витків $N = 500$.

3.23. Для умов задачі 3.10 знайти магнітне поле за умови $z \gg R$ та виразити його через магнітний момент диска.

3.24. Знайти магнітний момент однорідно зарядженої сфери (кулі) радіусом R , яка має повний заряд q і обертається навколо одного зі своїх діаметрів з кутовою швидкістю ω . Визначити гіромагнітне відношення для обох випадків, якщо маса сфери (кулі) дорівнює m .

3.25. Гіромагнітним співвідношенням (магнітомеханічним співвідношенням) називається відношення дипольного магнітного моменту тіла до його моменту імпульсу. Знайдіть гіромагнітне співвідношення для сфери (кулі). Скористайтесь відповідями до задачі 3.24.

3.26. Користуючись поняттям гіромагнітного співвідношення та моменту інерції, запропонуйте спосіб знаходження магнітних моментів довільних тіл, повний заряд яких дорівнює q , що обертаються з кутовою швидкістю ω .

Задачі на знаходження та використання поняття векторного потенціалу

3.27. Доведіть формулу 3.9. *Вказівка:* скористайтесь формулами (3.6) та теоремою Стокса (A.39).

3.28. Використовуючи вираз для вектор-потенціалу (3.8) та зв'язок (3.6) виведіть закон Біо-Савара-Лапласа.

3.29. Знайти вектор-потенціал нескінченного провідника по якому тече струм I .

3.30. Знайти вектор-потенціал всередині і поза межами нескінченно довгого соленоїда радіусом R , по якому протікає струм, який створює однорідне магнітне поле з індукцією \mathbf{B} . Покласти $\mathbf{A} = 0$ на осі соленоїда.

3.31. Знайти вектор потенціал колового провідника радіусом R зі струмом I в довільній точці простору в дипольному наближенні.

3.32. Використовуючи вираз для вектор-потенціалу (3.11), що створюється магнітним диполем \mathbf{p}_m , показати, що магнітне поле диполя виражається формулою (3.12). *Вказівка:* скористайтесь формулою векторного аналізу (A.34).

3.33. Уздовж осі довгого кругового циліндра радіусом R тече струм з постійною густиною \mathbf{j} . Знайти вектор-потенціал магнітного поля в залежності від відстані r до осі циліндра.

3.34. Середня густина заряду електронної хмари в атомі водню дорівнює $\rho = \frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$, де a – борівський радіус, r – відстань до протона, а e – заряд електрона. Якщо помістити атом у зовнішнє однорідне магнітне поле з індукцією \mathbf{B}_0 , то електронна хмара почне обертатися, що в свою чергу утворить в просторі струм з об'ємною густиною $\mathbf{j} = \frac{e\rho}{2mc} \mathbf{r} \times \mathbf{B}_0$, де m – маса електрона. На яку величину $\Delta \mathbf{B}$ зміниться індукція магнітного поля в центрі

атома внаслідок обертання електронної хмари?

3.35. Сфера радіусом R , що заряджена рівномірно з поверхневою густиною σ обертається з кутовою швидкістю ω навколо одного зі своїх діаметрів. Знайдіть вектор-потенціал та магнітне поле в середині та зовні сфери як функцію \mathbf{r} . Запишіть отримані вирази через магнітний момент.

3.36. Вздовж осі провідника товщиною d , вигнутого в формі напівциліндра радіусом R ($R \gg d$), тече струм з постійною густиною j . Знайти векторний потенціал на площині, що розташована уздовж осі напівциліндра і спирається на його краї.

§ 3.3. Магнітне поле у речовині. Граничні умови

Теоретичні відомості

Теорема про циркуляцію для вектора \mathbf{B} в речовині:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \left(\iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \mathbf{j}' \cdot d\mathbf{S} \right), \quad (3.13)$$

де \mathbf{j} – густина струмів провідності, \mathbf{j}' – густина молекулярних струмів.

Намагніченість \mathbf{M} — величина, що дорівнює дипольному моменту одиниці об'єму речовини:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{p}_m}{V} \quad (3.14)$$

Циркуляція для вектора намагніченості \mathbf{M} :

$$c \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j}' \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.15)$$

Диференціальна форма:

$$c \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}'. \quad (3.16)$$

Означення вектора напруженості магнітного поля:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad (3.17)$$

Теорема про циркуляцію для вектора \mathbf{H} :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.18)$$

де \mathbf{j} – густина струмів провідності.

Диференціальна форма:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3.19)$$

Поверхнева густина молекулярних струмів:

$$\mathbf{i}' = c [\mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)], \quad (3.20)$$

де \mathbf{M}_1 та \mathbf{M}_2 — намагніченості магнетиків на поверхні їх розділу, \mathbf{n} — нормаль до розділу магнетиків, яка проведена від магнетика 1 до магнетика 2.

Зв'язок між вектором намагнічування та вектором напруженості магнітного поля, *яке зумовило намагнічування* (у випадку ізотропних лінійних магнетиків):

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (3.21)$$

де χ_m — магнітна сприйнятливість магнетика.

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m, \quad (3.22)$$

магнітна проникність лінійного магнетика.

Лінійними магнетиками є речовини, для яких $\mu \gtrsim 1$, і які називаються парамагнітними, та для яких $\mu \lesssim 1$, які називаються діамагнітними. Парамагнітні речовини намагнічуюся вздовж магнітного поля, а діамагнітні — проти.

Зв'язок між векторами \mathbf{B} та \mathbf{H} у випадку лінійних магнетиків:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (3.23)$$

Зв'язок 3.23 у випадку слабих полів також використовується і для нелінійних магнетиків (наприклад, феромагнетиків).

Граничні умови для векторів \mathbf{B} та \mathbf{H} :

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (3.24)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2] - [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \quad (3.25)$$

\mathbf{i} — поверхнева густина струму провідності, який тече по границі розділу середовищ.

3.37. Отримайте граничні умови 3.24 та 3.25.

Принципові питання магнітостатики магнетиків

3.38. Довгий циліндр виготовлений з магнетика з замороженою намагніченістю $\mathbf{M} = \text{const}$, що напрямлена вздовж його осі. Знайти магнітну індукцію і напруженість магнітного поля всередині і зовні циліндра. Чому дорівнює об'ємна та поверхнева густина струмів намагнічування. Зобразити схематичну картину полів вектора \mathbf{B} та вектора \mathbf{H} в середині та зовні циліндра.

3.39. Знайдіть намагніченість довгого циліндра, вміщеного в зовнішнє однорідне магнітне поле індукцією \mathbf{B}_0 . Магнітна проникність матеріалу циліндра дорівнює μ .

3.40. Знайдіть намагніченість короткого циліндра, вміщеного в зовнішнє однорідне магнітне поле індукцією \mathbf{B}_0 . Магнітна проникність матеріалу циліндра дорівнює μ .

3.41. Поблизу плоскої поверхні однорідного магнетика з магнітною проникністю μ індукція магнітного поля в вакуумі дорівнює \mathbf{B}_0 і складає кут θ з нормаллю до поверхні (3.7). Вважаючи індукцію зовні та в середині магнетика однорідною, знайти а) потік вектора \mathbf{H} через сферу радіуса R , центр якої лежить на поверхні магнетика, б) циркуляцію вектора \mathbf{B} вздовж контура Γ довжиною l , площина якого перпендикулярна до поверхні діелектрика.

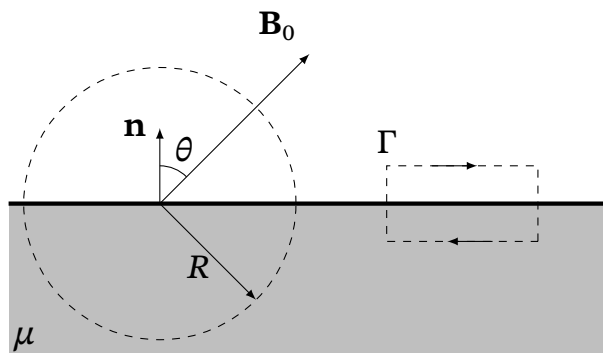


Рис. 3.7. До задачі 3.41

Визначення характеристик магнітного поля в присутності магнетиків з заданою намагніченістю

3.42. Нескінченно довгий непровідний циліндр радіусом R намагнічений таким чином, що намагніченість визначається законом $\mathbf{M} = ar^2\mathbf{e}_\varphi$, де r – відстань від осі циліндра. Визначити індукцію та напруженість магнітного поля в залежності від відстані до осі в середині та зовні циліндра.

3.43. Куля радіуса R має однорідну намагніченість \mathbf{M} . Знайти магнітну індукцію і напруженість магнітного поля всередині і зовні кулі.

3.44. Тонке тороїдальне осердя радіусом R з намагніченістю \mathbf{M} має зазор розміром d ($d \ll R$) (рис. 3.8). Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях зазору, визначити напруженість та індукцію поля в осерді та зазорі.

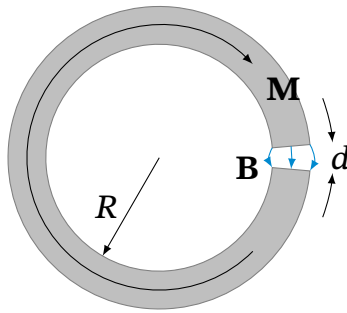


Рис. 3.8. До задачі 3.44

Визначення характеристик магнітного поля в присутності ізотропних лінійних магнетиків

3.45. Постійний струм I тече вздовж довгого циліндричного дроту круглого перерізу. Дріт виготовлений з парамагнетика сприйнятливістю χ . Знайти: а) поверхневий молекулярний струм; б) об'ємний молекулярний струм. Як ці струми направлені один відносно одного?

3.46. Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком, сприйнятливість якого залежить тільки від відстані до осі соленоїда як $\chi = ar^2$, де a – додатна постійна. На осі соленоїда індукція магнітного поля дорівнює \mathbf{B}_0 . Радіус соленоїда R . Знайти залежність від r : а) намагніченості магнетика; б) густину об'ємного струму в магнетикі. Знайдіть густину поверхневого струму. Який повний молекулярний струм на одиницю довжини?

3.47. Нескінченно довгий соленоїд, що має n витків на одиницю довжини і по якому тече струм I заповнений магнетиком з сприйнятливістю χ . Знайдіть напруженість та індукцію магнітного поля у всьому просторі. Визначте величину і напрямок поверхневого струму намагніченості, який тече по поверхні магнетика. В якому випадку поверхневий струм буде протилежний напрямком до I ?

3.48. Нескінченний прямолінійний однорідний дріт радіусом R , виготовлений з матеріалу, який має магнітну проникність μ_1 , знаходиться в непровідному нескінченному однорідному середовищі з магнітною проникністю μ_2 . По дроту тече постійний струм I . Знайти напруженість поля, магнітну індукцію, намагніченість, об'ємну і поверхневу густини молекулярних струмів всередині дроту і зовні як функції радіальної координати r .

3.49. Прямий тонкий нескінченно довгий циліндр малого радіусу R , по якому тече струм I , лежить на поверхні плоского непровідного однорідного магнетика з магнітною проникністю μ , що займає половину простору. Зна-

йти намагніченість, магнітну індукцію, напруженість і молекулярні струми в усьому просторі.

3.50. Коаксіальний кабель складається з двох циліндричних трубок радіусами R_1 та R_2 , які розділені непровідним магнетиком з магнітною сприйнятливістю χ . По трубкам тече струм I в протилежних напрямках. Визначте магнітне поле в магнетику. Знайдіть струми намагнічування, які течуть на його поверхнях. Переконайтесь, що вільні струми та струми намагнічування створюють правильне значення магнітного поля.

3.51. Струм I тече вздовж прямого мідного провідника радіусом R . Магнітна сприйнятливість міді дорівнює $-9.7 \cdot 10^{-6}$. Визначте магнітне поле в міді. Знайдіть повний струм намагнічування який тече вздовж провідника.

3.52. По круговому контуру радіусом 40 м, що занурений в рідкий кисень, тече струм 1 А. Визначте намагніченість в центрі цього контуру. Магнітна сприйнятливість рідкого кисню $3.4 \cdot 10^{-3}$.

3.53. Циліндричний провідник радіусом R перпендикулярно через плоску межу розділу двох магнетиків з проникностями μ_1 та μ_2 . По провіднику тече постійний струм I . Знайти розподіл полів \mathbf{H} і \mathbf{B} у всьому просторі, та накреслити картину їх ліній.

3.54. В однорідне магнітне поле \mathbf{B}_0 вноситься куля радіуса R з магнітною проникністю μ_i . Знайдіть магнітний момент кулі, магнітне поле \mathbf{B} в усьому просторі та розподіл струму в кулі. Магнітна проникність навколишнього середовища μ_e .

3.55. Знайти магнітне поле в сферичній порожнині радіусом R , що знаходиться в зовнішньому магнітному полі \mathbf{B}_0 . Магнітна проникність середовища, що оточує порожнину, дорівнює μ .

Визначення характеристик магнітного поля в присутності ізотропних нелінійних магнетиків

3.56. Постійний магніт має вигляд кільця з вузьким поперечним зазором шириною d . Середній радіус кільця R ($R \gg d$) (рис. 3.9а). Залишкова намагніченість матеріалу магніту M_r , його коерцитивної сила H_c . Вважаючи, що залежність $M(H)$ на ділянці від H_c до нуля (рис. 3.9б) є лінійною і розсі-

ювання магнітного поля на краях зазору немає, знайти індукцію магнітного поля в зазорі.

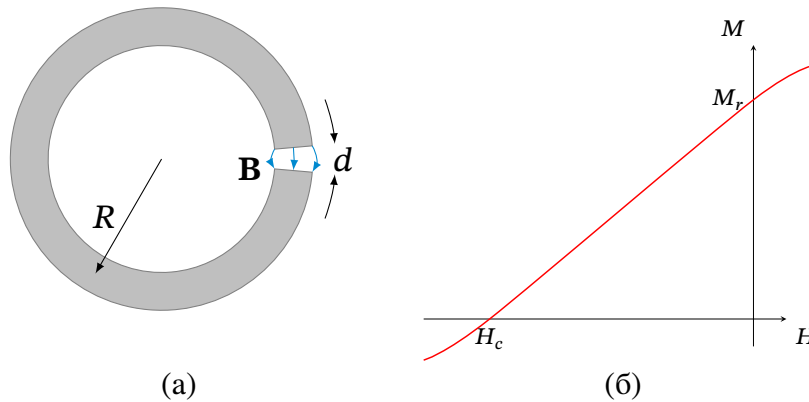


Рис. 3.9. До задачі 3.56.

3.57. Феромагнітний матеріал має залишкову намагніченість $M_0 = 500$ Гс та коерцитивну силу $H_0 = 500$ Е. Крива намагніченості є чвертю кола (рис. 3.10б). Із цього матеріалу виготовлено постійний магніт, що має вигляд тора квадратного перерізу з поперечним розрізом. Внутрішній радіус тора $R_1 = 1.5$ см, зовнішній – $R_2 = 2.5$ см, ширина розрізу $d = 0.5$ см (рис. 3.10а). Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях зазору, визначити величину магнітного поля в зазорі.

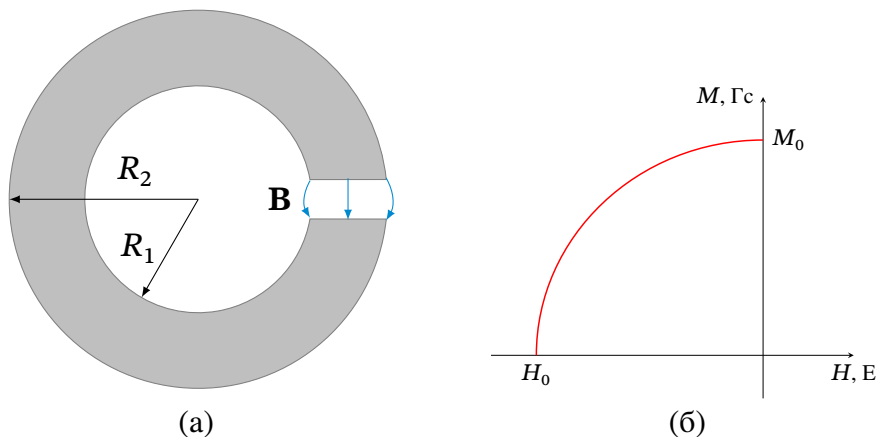


Рис. 3.10. До задачі 3.57.

3.58. На тонке осердя довжиною l з зазором d намотана котушка з числом витків N , по якій тече струм (рис. 3.11а). Залежність $M(H)$ для деякого подана на рис. 3.11б. Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях зазору, знайти значення сили струму, при якому настане насичення осердя.

Як буде змінюватися магнітна індукція B в щілині осердя при $I > I_0$?
Величини M_0 та H_0 вважати заданими.

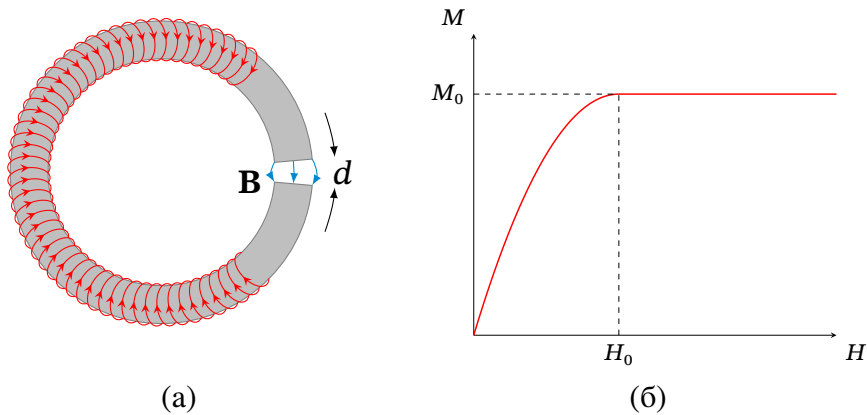


Рис. 3.11. До задачі 3.58.

3.59. На тонке залізне осердя довжиною $l = 1$ м з зазором $d = 1$ мм намотана котушка з числом витків $N = 1600$, по якій тече струм $I = 1$ А (рис. 3.12а). Залежність $B(H)$ заліза подана на рис. 3.12б. Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях зазору, визначити робочу точку залізного осердя. Знайти його магнітну проникність для цієї точки.

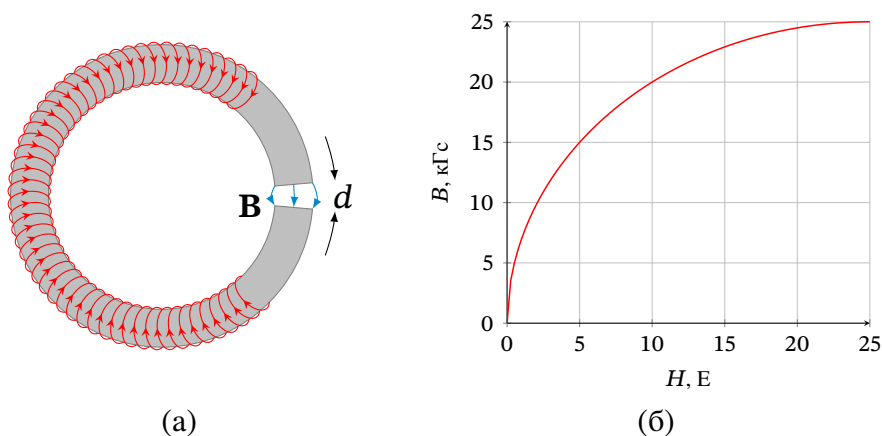


Рис. 3.12. До задачі 3.59.

3.60. Електромагніт з тонким осердям квадратного перерізу зі стороною a , виготовлений з матеріалу з великою магнітною проникністю μ , має тонкий плоский поперечний зазор ширини d , в якому створюється магнітне поле з індукцією B (рис. 3.13). Оцінити в дипольному наближенні магнітну індукцію в точці P , що лежить в площині зазору на великій відстані r від його

центру ($r \gg a, R \gg a \gg d$, де R — середній радіус тора).

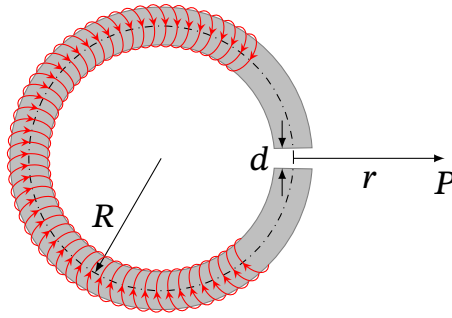


Рис. 3.13. До задачі 3.60

§ 3.4. Пондеромоторні сили в магнітному полі. Енергія та тиск поля

Теоретичні відомості

Сила, з якою магнітне поле діє на провідник зі струмом в магнітному полі (сила Ампера):

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \iiint_V \mathbf{j} dV \times \mathbf{B}. \quad (3.26)$$

Хоча магнітне поле не являється потенціальним, однак, формально можна (за відсутності феромагнетиків) обчислити роботу, яку виконує сила Ампера, по переміщенню контуру в магнітному полі як:

$$A = -\frac{I}{c}(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (3.27)$$

де Φ_1 та Φ_2 — потоки магнітного поля, що пронизують контур в початковому та кінцевому положеннях.

Оскільки робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії, формально можна ввести поняття «потенціальної енергії», яка в даному випадку доцільно називати потенціальною функцією контуру в магнітному полі:

$$U_m = -\frac{1}{c} I \Phi. \quad (3.28)$$

Пондеромоторні сили (узагальнені), що діють на магнетики, або струми з боку поля:

$$Q_i = -\left(\frac{\partial U_m}{\partial q_i}\right)_\Phi = \left(\frac{\partial U_m}{\partial q_i}\right)_I, \quad (3.29)$$

де q_i — узагальнені координати. Похідні беруться за умови постійного потоку (індекс Φ), або постійного струму (індекс I).

Магнітна енергія системи електричних струмів виражається як:

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (3.30)$$

Густина енергії магнітного поля:

$$w_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi}. \quad (3.31)$$

Сила, що діє на одиницю площі провідника, по якому тече струм:

$$\mathbf{f}_\sigma = (w_1 - w_2)\mathbf{n}, \quad (3.32)$$

де w_1 та w_2 густини енергії магнітного поля по різні боки поверхні провідника, \mathbf{n} – вектор нормалі до поверхні розділу середовищ, напрямлений від середовища 1 до середовища 2.

Сила, що діє на диполь в магнітному полі:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla)\mathbf{B}. \quad (3.33)$$

Енергія жорсткого диполя в магнітному полі:

$$W_m = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \quad (3.34)$$

Енергія квазіпружного диполя в магнітному полі:

$$W_m = -\frac{1}{2}\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \quad (3.35)$$

Густина пондеромоторних сил, що діють на лінійні магнетики:

$$\mathbf{f} = \frac{\mu - 1}{8\pi\mu} \nabla B^2, \quad (3.36)$$

де \mathbf{j} – густина струмів провідності в речовині.

Сила, що діє на одиницю площі поверхні розділу двох середовищ:

$$\mathbf{f}_\sigma = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) B_n^2 \mathbf{n} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{8\pi} H_\tau^2 \mathbf{n}, \quad (3.37)$$

де \mathbf{n} – вектор нормалі до поверхні розділу середовищ, напрямлений від середовища 1 до середовища 2.

Сила взаємодії між провідниками зі струмом

3.61. Знайти силу (на одиницю довжини) взаємодії між двома довгими паралельними провідниками, по яким течуть однакові за величиною струми I в одному (різних) напрямках. Відстань між провідниками дорівнює r . Визначте енергію взаємодії провідників.

3.62. Знайти силу (на одиницю довжини) взаємодії між двома довгими паралельними провідниками, по яким течуть однакові за величиною струми I в одному напрямку. Причому, один з провідників є лінійним, а інший являє собою тонку смужку, шириною b . Відстань від лінійного провідника до найближчого краю смуги дорівнює a .

3.63. Вздовж довгого суцільного циліндричного провідника радіусом R тече струм I . Знайти тиск на поверхні провідника.

3.64. Вздовж довгого рідкого циліндричного провідника радіусом R тече струм I . Як змінюється тиск в середині рідини залежно від відстані до осі провідника.

3.65. Плоска рамка довільної форми площею S , по якій тече струм I вміщена в однорідне магнітне поле B так, що може вільно обертатись навколо осі, яка перпендикулярна до магнітного поля. В початковий момент часу кут між нормаллю до рамки і напрямком магнітного поля дорівнює θ . Знайдіть узагальнену силу, що діє на рамку.

3.66. Квадратна рамка зі стороною a , яка виготовлена з тонкого провідника, розташована в одній площині з довгим прямим провідником, по якому тече струм I_0 . По рамці, в свою чергу, тече струм I , а відстань між провідником та найближчою до нього стороною рамки дорівнює $2a$. Визначити а) силу, яка діє на рамку з боку провідника, б) роботу сил поля при переміщенні рамки на нескінченність.

3.67. По двом нескінченним паралельним площинам течуть струми з лінійною густиною i . Знайдіть силу, що діє на одиницю поверхні кожної площини.

3.68. Дротяний контур $ABCD$ в формі квадрата (рис. 3.14) знаходиться в магнітному полі довгого тонкого стрижня з магнітним моментом одиниці об'єму M_0 і перерізом S , причому північний полюс N магніту знаходиться в центрі квадрата, а сам магніт перпендикулярний до площини дротяного контуру. До протилежних кінців діагоналі AC підключають джерело ЕРС, внаслідок чого по сторонам контуру йде струм сили I . Знайти момент пари сил N , що обертають контур, і його напрям.

3.69. У магнітному полі магніту задачі 3.68 поміщений круговий провідник радіусом R , по якому тече струм I за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку північного полюса магніту. Магніт розташований по осі кругового струму, і його північний полюс розташований на відстані d від центру провідника. Визначити сили, що діють на провідник з боку магніту.

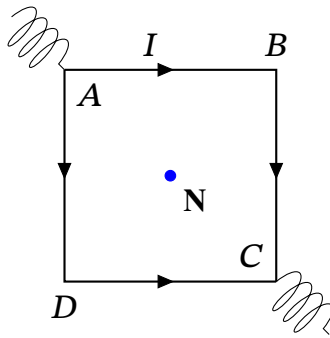


Рис. 3.14. До задачі 3.68.

3.70. Котушку зі струмом I помістили в однорідне магнітне поле так, що її вісь співпала з напрямком поля. Обмотка котушки має один шар з мідного дроту діаметром d , радіус витків R . При якому значенні індукції зовнішнього магнітного поля обмотка котушки може бути розірвана? Межу міцності міді на розрив σ_{\max} вважати відомою.

Дії магнітного поля на магнітні диполі. Взаємодія диполів

3.71. Соленоїд радіусом R і довжиною l ($l \gg R$) має обмотку, що складається з N витків. По соленоїду тече струм I . У центрі соленоїда на його осі розміщена невелика котушка, яка має магнітний момент \mathbf{p}_m , і розташована перпендикулярно осі соленоїда. Визначити величину моменту сили, що діє на котушку.

3.72. Невеликий виток зі струмом знаходиться на відстані r від довгого прямого провідника зі струмом I . Магнітний момент витка дорівнює \mathbf{p}_m . Знайти силу і момент сили, що діє на виток, якщо: а) \mathbf{p}_m паралельний прямому провіднику, б) \mathbf{p}_m напрямлений по радіусу-вектору \mathbf{r} , в) \mathbf{p}_m збігається за напрямком з магнітним полем струму I в місці розташування витка.

3.73. Дві котушки з магнітними моментами \mathbf{p}_1 і \mathbf{p}_2 розташовані довільним чином одна відносно одної. Відстань l між котушками велика в порівнянні з їх розмірами. Визначити силу взаємодії між ними. Розгляньте можливі часткові випадки

3.74. На осі кругового витка радіусом R , по якому тече струм I , знаходиться невелика котушка зі струмом, що має магнітний момент \mathbf{p}_m , орієнтований вздовж осі витка. Знайти модуль сили, що діє на котушку, якщо її відстань від центру витка дорівнює z .

Пондеромоторні сили, що діють на магнетики в магнітному полі

3.75. На осі симетрії тонкого кільця радіусом R , по якому тече струм I , на відстані z від його центру розташована кулька з магнетика радіусом r ($r \ll R$) і магнітною проникністю μ (рис. 3.15). Яка сила діє на кульку з боку магнітного поля?

3.76. Тонкий діамагнітний стрижень маси $m = 0.1$ г і густини $\rho = 9.8$ г/см³, що має магнітну сприйнятливість $\chi_m = -14.5 \cdot 10^{-6}$, підвішено за центр мас, який розташований на осі кругового струму на відстані d (значно більшу за довжину стрижня) від площини витка (рис. 3.16). Радіус витка $R = d = 10$ см; сила струму $I = 100$ А. Як зорієнтується стрижень і яка результуюча сила нього діє?

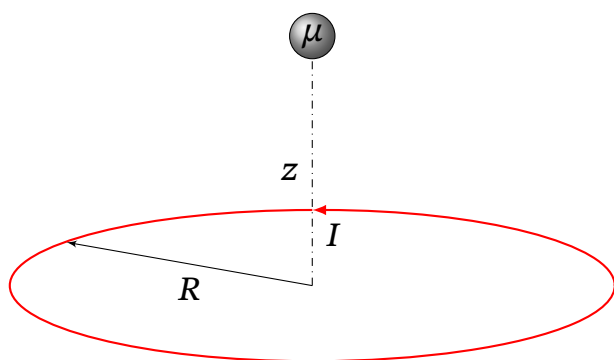


Рис. 3.15. До задачі 3.75

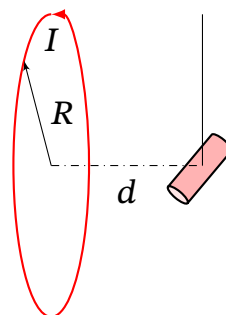


Рис. 3.16. До задачі 3.77

3.77. Розв'яжіть задачу 3.77, якщо замість діамагнетика підвісили довгий тонкий алюмінієвий стрижень маси $m = 0.1$ г. Густина алюмінію $\rho = 2.7$ г/см³, магнітна сприйнятливість $\chi_m = 2.1 \cdot 10^{-5}$.

3.78. На відстані l від нескінченного прямого проводу, по якому йде постійний струм I , розташована кулька радіуса r ($r \ll l$), з магнітною проникністю μ . Знайти силу, що діє на кульку.

3.79. Довгий соленоїд, намотаний на тонкостінний капіляр, занурений одним кінцем в парамагнітну рідину на глибину, що значно перевищує його діаметр. Густина рідини ρ , магнітна проникність μ . На скільки підніметься рівень рідини в капілярі, якщо по соленоїду пропустити струм I ? Число витків на одиницю довжини соленоїда дорівнює n .

3.80. В соленоїд, площа колового перерізу якого S , довжина l і густина намотки n внесено магнетик з проникністю μ . Знайти силу, що діє на магнетик, якщо по соленоїду тече струм I .

3.81. Знайдіть силу, що діє на провідник малого радіусу R , який лежить на поверхні магнетика з проникністю μ . *Вказівка:* скористайтесь відповідями до задачі 3.49.

3.82. Оцінити порядок величини «виштовхувальної» сили, що діє на непровідне тіло об'ємом V , поміщене в провідну немагнітну рідину, в якій тече струм густиною \mathbf{j} поперек магнітного поля з індукцією \mathbf{B} . Які ефекти можуть привести до відмінності реальної виштовхувальної сили від сили, отриманої за такою оцінкою?

3.83. Між полюсами магніту створено поле, індукція якого змінюється з відстанню від осі за законом $B = B_0 e^{-\frac{r^3}{r_0^3}}$, де B_0 та r_0 — додатні постійні. Маленький діамагнітний зразок у вигляді тонкого диска з об'ємом V і з магнітною сприйнятливістю χ_m вміщують по середині між полюсами на такій відстані від осі, щоб на нього діяла максимальна сила, що виштовхує зразок з міжполюсного простору. Знайти величину цієї сили.

3.84. Котушка, що складається з N витків, намотана на залізне тороїдальне осердя з магнітною проникністю μ . Радіус тора R , радіус перерізу осердя r , причому $r \ll R$. Тор розрізаний на дві половини, що розсунуті так, щоб між ними утворився повітряний зазор ширини d , як показано на рис. 3.17. Визначити величину сили взаємодії між половинами тора, якщо в обмотці протікає струм I , а $\mu \gg 1$.

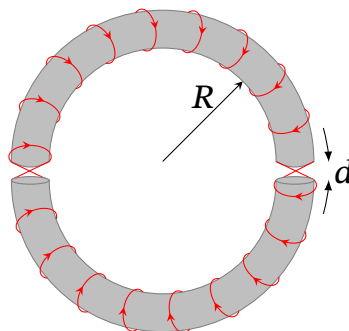


Рис. 3.17. До задачі 3.84

3.85. Тороїдальне осердя виготовлені із зігнутого в кільце стрижня діаметром 1 см і довжиною 1 м. На нього рівномірно намотана обмотка з щільністю 100 витків/см. Магнітна проникність стрижня $\mu \approx 1$.

- а) Яке магнітне поле в осерді, якщо через обмотку тече струм силою 100 А?
- б) Знайдіть індуктивність обмотки (в генрі), припускаючи, що намотування є дуже щільною і її товщиною можна знехтувати;
- в) Розрахуйте електричну енергію, яка витрачається на створення магнітного поля в осерді при струмі силою 100 А;
- г) Визначте енергію магнітного поля, зосередженого в осерді.

Знехтувати радіальною залежністю поля, вважати його однорідним і рівним за величиною полю в центрі осердя.

Електродинаміка

§ 4.1. Закон Фарадея

Індукція струмів в провідниках, що рухаються в магнітному полі

Теоретичні відомості

Рекомендується прочитати [18, Глава 16, 17].

Причиною виникнення індукційних струмів в рухомих провідниках з точки зору лабораторної системи відліку є сила, що діє на заряди в рухомих провідниках з боку магнітного поля.

Для знаходження струмів та ЕРС, що виникають в таких умовах, зручно користуватись правилом потоку: ЕРС, що індукується в контурі можна визначити за формулою:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad (4.1)$$

де $d\mathbf{S}$ – площа, що замітається провідником за час dt .



Слід зауважити, що у задачах з рухомими провідниками, як правило, магнітне поле не змінюється в часі $\mathbf{B}(t) = \text{const}$, тому правило потоку можна записати у вигляді, що формально нагадує закон електромагнітної індукції Фарадея. Причини цього розкриваються в релятивістській електродинаміці.

4.1. Дві довгі паралельні мідні рейки, розташовані вертикально на відстані l одна від одної, замкнуті вгорі на опір R і поміщені в однорідне магнітне поле B , перпендикулярне до площини шин. Уздовж шин падає мідний провідник масою m . Тертя відсутнє. Чому дорівнює встановлене значення швидкості падіння?

4.2. По двом вертикальним рейкам, які з'єднані внизу опором R і вгорі батареєю з ЕРС \mathcal{E} та внутрішнім опором r , без тертя ковзає провідник довжиною l та масою m (рис. 4.1). Вся система знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого \mathbf{B} перпендикулярна до площини рисун-

ка. Знайти максимальну швидкість провідника в полі тяжіння, нехтуючи опором рейок.

4.3. По двом вертикальним рейкам, які з'єднані вгорі та внизу опорами R , без тертя ковзає провідник довжиною l , масою m та опором R (рис. 4.2). Вся система знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого \mathbf{B} перпендикулярна до площини рисунка. Знайти максимальну швидкість провідника в полі тяжіння, нехтуючи опором рейок.

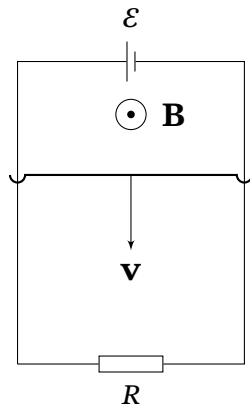


Рис. 4.1. До задачі 4.2

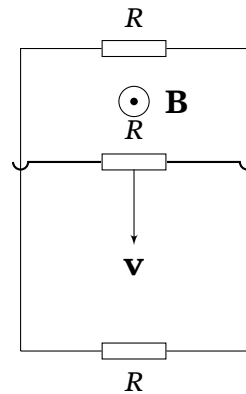


Рис. 4.2. До задачі 4.3

4.4. Металевий диск радіусом r обертається з кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі у однорідному магнітному полі \mathbf{B} , яке перпендикулярне площині диска. Схема здійснюється шляхом підключення одного кінця резистора, опором R до осі, а іншого – до рухомого контакту, який торкається зовнішнього краю диска (рис. 4.4). Знайдіть струм у колі.

4.5. (Дисковий генератор Фарадея) Два диска радіусами R_1 та R_2 обертаються з кутовою швидкістю ω в однорідному магнітному полі з індукцією \mathbf{B} , перпендикулярній їх площині (рис. 4.3). Центри дисків приєднані до обкладок конденсатора C_1 , ободи — через ковзаючі контакти до обкладок конденсатора C_2 . Знайти напруги на конденсаторах, якщо диски обертаються в одному напрямку і якщо в різних.

4.6. Металевий циліндр радіусом R вміщений в однорідне постійне магнітне поле \mathbf{B} , спрямоване уздовж його осі. Циліндр обертають з постійною кутовою швидкістю ω навколо своєї осі. Знайти: а) різницю потенціалів між поверхнею циліндра і віссю; б) поверхневу і об'ємну густини зарядів в циліндрі. Переконайтесь, що повний заряд на одиницю довжини дорівнює

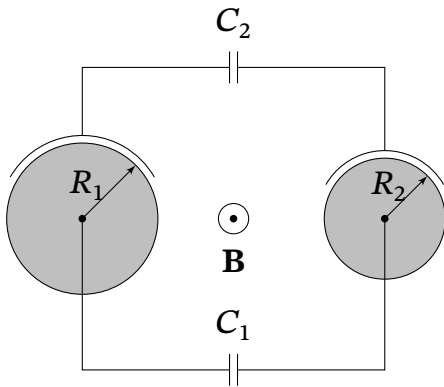


Рис. 4.3. До задачі 4.5

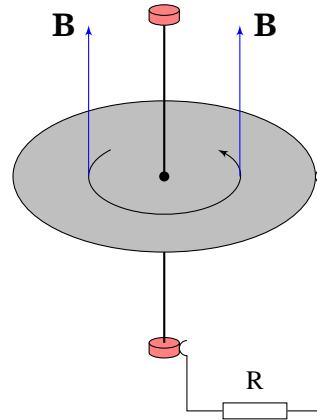


Рис. 4.4. До задачі 4.4

нулю.

4.7. Діелектричний циліндр радіусом R та проникністю ϵ вміщений в однорідне постійне магнітне поле \mathbf{B} , спрямоване уздовж його осі. Циліндр обертають з постійною кутовою швидкістю ω навколо своєї осі. Знайти об'ємну і поверхневу густини зв'язаних зарядів в циліндрі. Переконайтесь, що повний заряд на одиницю довжини дорівнює нулю.

4.8. На непровідному диску радіуса R закріплений по хорді дріт довжиною l (рис. 4.5). Диск обертається з постійною кутовою швидкістю ω . Перпендикулярно до диска напрямлене магнітне поле з індукцією B . Знайти напругу між серединою і кінцем дроту.

4.9. Довгий прямолінійний провідник, по якому тече струм I_0 , і П-подібний провідник $ABCD$ з рухомою перемичкою AB довжини l розташовані в одній площині. Сторона CD контуру розташована на відстані a від провідника. Перемичку переміщують із заданою постійною швидкістю v (рис. 4.6). Знайти: а) ЕРС індукції в контурі як функцію відстані від перемички до провідника, б) силу струму в контурі, якщо опір одиниці довжини всіх складових його провідників дорівнює r . Індуктивністю контура можна знехтувати.

4.10. Квадратна рамка зі стороною a рухається зі постійною швидкістю в напрямку від провідника, по якому тече струм I (рис. 4.8). Відстань від провідника до лівої сторони рамки $s(t)$. Знайдіть ЕРС індукції, яка виникає в рамці. В якому напрямку тече струм? Визначити взаємну індуктивність системи.

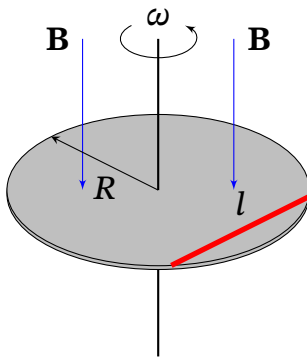


Рис. 4.5. До задачі 4.8

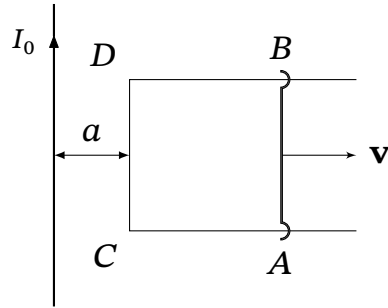


Рис. 4.6. До задачі 4.9

4.11. По двом мідним шинам, сполученим котушкою індуктивності L , без тертя ковзає провідник довжиною l і масою m (рис. 4.7). Система знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією \mathbf{B} , зображеному на рисунку. У початковий момент часу провіднику поштовхом надали швидкість v_0 . Нехтуючи опором контуру, знайти закон руху провідника та закон зміни сили струму в контурі.

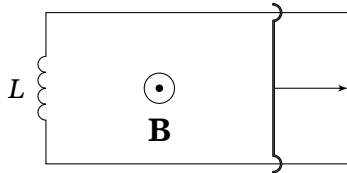


Рис. 4.7. До задачі 4.11

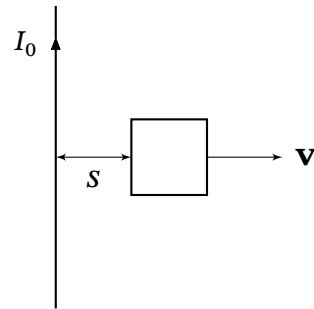


Рис. 4.8. До задачі 4.10

Явище електромагнітної індукції

Теоретичні відомості

Закон електромагнетної індукції Фарадея: ЕРС, що виникає в контурі, прямо пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує площу S , яка охоплюється цим контуром:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.2)$$

Причиною виникнення ЕРС в цьому випадку в лабораторній системі відліку є вихрове електричне поле, яке виникає за рахунок зміни в часі магнітного поля.

4.12. Електричний заряд q рівномірно розподілений по довжині твердого непровідного тонкого кругового кільця масою m . Кільце може вільно обертатися навколо своєї осі. Спочатку кільце знаходилося в спокої. Потім було

увімкнено однорідне магнітне поле $B = B(t)$, перпендикулярне площині кільця, яке довільно змінюється у часі. Знайти кутову швидкість обертання кільця.

4.13. Контур є колом, з'єднаним по діаметру конденсаторами ємностями C_1 , C_2 та C_3 , які увімкнені в розриви провідників (рис. 4.9), і знаходиться в однорідному змінному магнітному полі. Швидкість зміни магнітного потоку через площу кільця постійний і дорівнює $\dot{\Phi}$. Знайти заряди конденсаторів, якщо спочатку конденсатори були не заряджені.

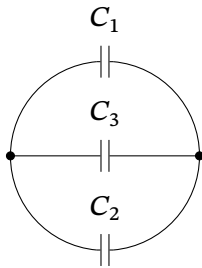


Рис. 4.9. До задачі 4.13

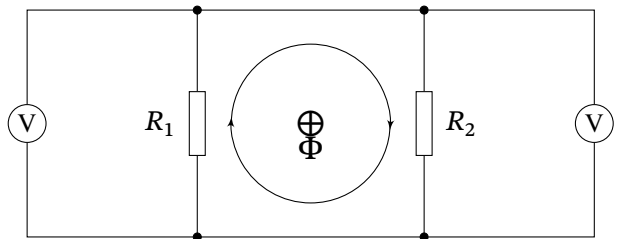


Рис. 4.10. До задачі 4.14

Індуктивності та коефіцієнт взаємної індукції. Теорема взаємності

Теоретичні відомості

Магнітний потік, що пронизує магнітне поле i -го контура, що пронизує k -й контур:

$$\Phi_i = \sum_{i,k} \frac{1}{c} L_{ik} I_i, \quad (4.3)$$

де L_{ik} – називається коефіцієнтом самоіндукції (або індуктивністю), якщо $i = k$, і коефіцієнтом взаємної індукції, якщо $i \neq k$.

Для випадку двох витків, магнітні потоки, що взаємно пронизують два витка (або дві котушки), по яких течуть струми I_1 та I_2 :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{c} L_{11} I_1 + \frac{1}{c} L_{12} I_2 \\ \Phi_2 &= \frac{1}{c} L_{21} I_1 + \frac{1}{c} L_{22} I_2, \end{aligned}$$

де L_{11} та L_{22} – індуктивності витків (або котушок), L_{12} та L_{21} – коефіцієнти взаємної індукції витків (або котушок).

Теорема взаємності стверджує, що

$$L_{12} = L_{21}. \quad (4.4)$$

Згідно закону електромагнітної індукції, ЕРС, що виникають в контурах (або котушках):

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{1}{c}L_{11}\frac{dI_1}{dt} - \frac{1}{c}L_{12}\frac{dI_2}{dt} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{1}{c}L_{21}\frac{dI_1}{dt} - \frac{1}{c}L_{22}\frac{dI_2}{dt}, \quad (4.6)$$

Коефіцієнт зв'язку контурів:

$$k = \sqrt{\frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}} \leq 1. \quad (4.7)$$

Магнітна енергія системи електричних струмів:

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k. \quad (4.8)$$

У випадку одинарного контуру (або котушки), енергія магнітного поля:

$$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2}. \quad (4.9)$$

4.15. Обчисліть індуктивність довгого соленоїда довжиною l , який має N витків. Витки намотані на магнетик, з проникністю μ , площа перерізу якого S .

4.16. Обчисліть індуктивність тороїдальної котушки, що намотана на магнетик проникністю μ , який має форму циліндра висотою b з внутрішнім радіусом R і зовнішнім радіусом $R + a$. Число витків дорівнює N .

4.17. Знайдіть взаємну індукцію тороїдальної котушки, параметри якої подано в задачі 4.16 та прямолінійного нескінченно довгого провідника, який проходить вздовж осі циліндра.

4.18. Коаксіальний кабель складається з суцільного внутрішнього провідника радіусом R_1 і тонкого зовнішнього циліндричного провідника радіусом R_2 . Знайти індуктивність одиниці довжини кабелю. Вважати, що магнітна проникність матеріалу провідників і зазору між ними дорівнює μ , струм розподілений по провідникам рівномірно.

4.19. Знайти індуктивність одиниці довжини двох широких нескінченно довгих провідників, які знаходяться на відстані a один від одного. Ширина провідників b ($b \gg a$). Площини провідників паралельні.

4.20. Знайти індуктивність одиниці довжини двох циліндричних нескінченно довгих провідників, які знаходяться на відстані a один від одного. Радіус провідників R ($R \ll a$).

4.21. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції довгого дроту та квадратної рамки стороною a . Рамка і дріт лежать в одній площині. Сторони рамки і дроту паралельні, найближча до дроту сторона рамки знаходиться на відстані l від нього.

4.22. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції двох тонких витків однакового радіуса R , які лежать на відстані $l \gg R$. Осі витків співпадають. Площі витків паралельні.

4.23. Між двом паралельним провідникам нескінченної довжини, які знаходяться на відстані $2a$ один від одного лежить кругле провідне кільце радіусом a , яке дотикається до провідників і ізольоване від них. Знайдіть коефіцієнт взаємної індукції між круглим провідником і двома прямими провідниками.

Задачі, які розв'язуються за допомогою теореми взаємності

4.24. Два тонкі колові провідники, осі яких співпадають, лежать в одній площині. Радіус зовнішнього провідника R_1 внутрішнього R_2 ($R_2 \ll R_1$). Знайдіть а) коефіцієнт взаємоіндукції провідників та б) магнітний потік, що пронизує площу зовнішнього провідника, якщо по внутрішньому провіднику тече струм I .

4.25. Знайти потік вектора індукції магнітного поля, який створюється квадратною рамкою зі стороною a , по якій тече струм I , через напівплощину, границя якої розташована на відстані b від однієї з сторін рамки (рис. 4.11).

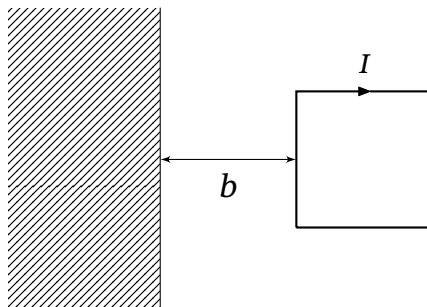


Рис. 4.11. До задачі 4.25

4.26. Два коаксіальних кругових витка радіусами R і r ($r \ll R$) розміщені на відстані R один від одного. По малому витку пропускається струм $i = i_0 \cos \omega t$. Знайти струм I в великому витку, провідність якого дорівнює G .

4.27. Магнітний диполь з моментом p_m обертається з частотою ω навколо осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна магнітному моменту (рис. 4.12). Знайти струм в плоскому нерухомому кільці радіусом a з опором R , яке знаходиться на відстані $l \gg a$ від диполя. Нормаль \mathbf{n} до площини кільця перпендикулярна осі обертання диполя. Самоіндукцією рамки знехтувати.

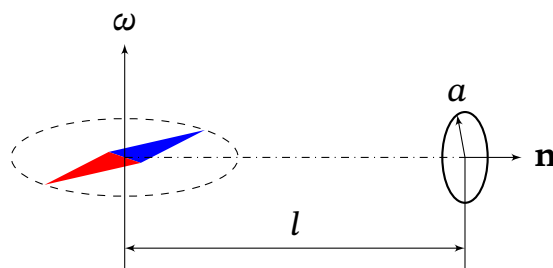


Рис. 4.12. До задачі 4.27

4.28. Намагнічена куля пролітає вздовж осі тонкої котушки, з'єднаної з балістичним гальванометром через ідеальний випрямляючий елемент. Куля намагнічена уздовж своєї осі, її розміри малі в порівнянні з діаметром котушки D . Визначити магнітний момент кулі p_m , якщо відомо, що гальванометр відхилився після прольоту кулі на кут φ . Відомі балістична постійна гальванометра b [рад/Кл], число витків котушки n і опір кола R .

§ 4.2.

Надпровідники у магнітному полі

Теоретичні відомості

Рекомендується вивчити [15, § 80].

4.29. Надпровідна куля радіусом R вміщена в однорідне магнітне поле з індукцією \mathbf{B}_0 . Знайдіть магнітний момент кулі, магнітне поле \mathbf{B} в усьому просторі та розподіл струму в кулі.

4.30. Надпровідна куля радіусом R , яка складається з однакових півсфер, вміщена в однорідне магнітне поле з індукцією B_0 , перпендикулярне площині розрізу. Знайдіть силу, необхідну для відриву однієї півсфери від іншої.

Закон збереження магнітного потоку для надпровідників

4.31. В центр надпровідного кільця індуктивністю L і радіусом R внесено магнітний диполь з дипольним моментом p_m , який направлений вздовж осі кільця. Який струм установиться в кільці?

4.32. Провідне кільце з індуктивністю L знаходиться в нормальному стані в зовнішньому магнітному полі (магнітний потік через контур кільця дорівнює Φ_0). Потім температура знижується і кільце переходить в надпровідний стан. Який струм буде текти по кільцю, якщо вимкнути зовнішнє магнітне поле?

4.33. У постійному однорідному магнітному полі з індукцією B знаходиться кругле жорстке надпровідникове кільце радіусом R малого перерізу. У початковий момент площина кільця паралельна напрямку магнітного поля, а струм в кільці відсутній. Визначити силу струму в кільці відразу після того, як воно було повернуто так, що площина кільця стала перпендикулярна до ліній магнітного поля. Знайти витрачену роботу.

Метод зображень в магнітостатиці

4.34. На якій висоті постійний магніт з магнітним моментом p_m і масою m буде левітувати в горизонтальному положенні над плоскою горизонтальною поверхнею надпровідника I роду? Магніт вважати точковим диполем.

4.35. Над плоскою поверхнею надпровідника I роду на ізолюючому шарі товщини $h = 5$ мм лежить тонке надпровідний кільце радіусом $R = 10$ см, по якому тече постійний струм. При якому струмі кільце почне левітувати над поверхнею надпровідника, якщо маса кільця $m = 1$ г?

Сили, що діють на надпровідники в магнітному полі

4.36. Металева надпровідна кулька летить у напрямку до соленоїда уздовж його осі. Поле соленоїда $B_0 = 10^3$ Гс. Якою має бути початкова швидкість кульки, щоб вона змогла влетіти в соленоїд? Радіус кульки 2 см, маса 1 г.

4.37. Невелика надпровідна кулька радіусом r знаходиться на осі на відстані z від площини кільця радіусом R , по якому тече струм I . Знайдіть силу взаємодії між кулькою та кільцем.

4.38. Знайти розподіл магнітного тиску по поверхні надпровідного кулі радіусом R , що внесена в однорідне зовнішнє магнітне поле \mathbf{B}_0 .

§ 4.3.

Рівняння Максвелла. Вектор Пойнтінга

Закон електромагнітної індукції в інтегральній формі

Теоретичні відомості

Закон електромагнетної індукції Фарадея: циркуляція вектора напруженості електричного поля вздовж довільного замкнутого контуру L , прямо пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує площу S , яка охоплюється цим контуром:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.10)$$

4.39. Чи можна за допомогою змінного в часі магнітного поля створити однорідне електричне поле?

4.40. Непровідне кільце масою m , яке має заряд q , може вільно обертатись навколо своєї осі. У початковий момент кільце знаходиться в стані спокою і магнітне поле відсутнє. Потім увімкнули однорідне магнітне поле, перпендикулярне до площини кільця, яке почало зростати за деяким законом $\mathbf{B}(t)$. Знайти кутову швидкість кільця в залежності від величини поля.

4.41. На поверхні довгого суцільного непровідного циліндра радіусом R рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною σ . Циліндр може обертатися без тертя навколо своєї осі. Зовнішнє однорідне магнітне поле з вектором індукції \mathbf{B} направлено вздовж осі циліндра. Знайти кутову швидкість обертання, яку набуде циліндр після вимикання магнітного поля. Густина маси речовини циліндра ρ , спочатку циліндр нерухомий.

4.42. На довгий соленоїд з густиною намотки n та радіусом R , по витках якого тече змінний струм величиною, що змінюється за законом $I(t) = I_0 \cos \omega t$, щільно надітий тор з діелектрика проникністю ϵ (рис. 4.13). У торі є дуже тонкий поперечний розріз. Знайти напруженість електричного поля в зазорі залежно від відстані до осі соленоїда.

4.43. У довгому соленоїді радіусом R з густиною намотування n змінюють струм з постійною швидкістю \dot{I} . Знайти модуль напруженості вихрового

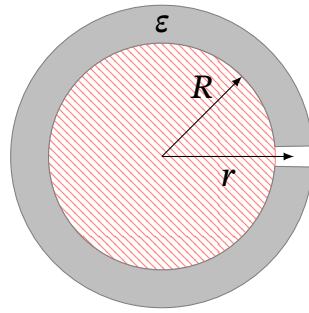


Рис. 4.13. До задачі 4.42

електричного поля $E(r)$ як функцію відстані r від осі соленоїда.

4.44. Однорідно заряджений з об'ємною густиною заряду ρ нескінченний циліндр радіусом R обертається навколо своєї осі кутовою швидкістю, яка залежить від часу за законом $\omega = kt$. Знайти електричне та магнітне поле у всьому просторі в залежності від часу.

Струм зміщення

Теоретичні відомості

Закон Ампера з додавкою Максвелла:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.11)$$

Фізична сутність цього закону полягає в тому, що причиною виникнення магнітного поля є як струми провідності, густина яких характеризується величиною \mathbf{j} , так і змінне в часі електричне поле. Історично, змінне в часі електричне поле характеризують так званою густиною струму зміщення, яку визначають як:

$$\mathbf{j}_{\text{зм}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4.12)$$

4.45. В необмежене однорідне провідне середовище вміщена металева куля, якій наданий електричний заряд. Оскільки середовище провідне, то за рахунок стікання заряду з кулі, з'являться електричні струми. Показати, що в цьому випадку магнітного поля не виникатиме.

4.46. Плоский конденсатор складається з двох однакових металевих дисків, простір між якими заповнено однорідним діелектриком що має слабку провідність. Спочатку конденсатор було під'єднано до джерела постійної напруги. Нехтуючи крайовими ефектами, покажіть, що магнітне поле в просторі між обкладками конденсатора буде відсутнє.

4.47. По дроту радіусом R , тече постійний струм I , який рівномірно розподілений по його поперечному перерізу. Вузький розрив в дроті шириною d ($d \ll R$), утворює конденсатор з паралельними пластинами. Знайдіть магнітне поле в розриві, на відстані $s < R$ від осі.

4.48. Плоский конденсатор складається з двох однакових металевих дисків, простір між якими заповнено однорідним діелектриком з діелектричною проникністю ϵ . Відстань між внутрішніми поверхнями дисків дорівнює d . Між обкладками конденсатора підтримується змінна напруга $V = V_0 \sin \omega t$. Нехтуючи крайовими ефектами, знайти магнітне поле в просторі між обкладками конденсатора.

4.49. Для умов задачі 4.48, визначте, чому дорівнює магнітне поле в просторі між обкладками конденсатора, якщо діелектрик має провідність λ .

Закони збереження. Вектор Пойнтінга

Теоретичні відомості

Рівняння неперервності струму (закон збереження електричного заряду).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.13)$$

Вектор Пойнтінга (вектор густини потоку енергії електромагнітного поля):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (4.14)$$

Густина імпульсу електромагнітного поля:

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}. \quad (4.15)$$

Рівняння неперервності для енергії електромагнітного поля:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (4.16)$$

w – густина енергії електромагнітного поля, визначається формулою:

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \quad (4.17)$$

величина

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (4.18)$$

є потужністю, що виділяється в одиниці об'єму речовини (закон Джоуля-Ленца).

4.50. Довести, що з рівнянь Максвелла випливає закон збереження електричного заряду 4.13.

4.51. За яких умов електричний струм, об'ємна густина якого змінюється в просторі за законом $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, де \mathbf{j}_0 , \mathbf{k} – постійні вектори, забезпечити стаціонарний розподіл зарядів у просторі?

4.52. Електричний заряд знаходиться в центрі кругового витка, по якому тече струм. Покажіть схематично напрямки вектора Пойнтінга в довільних точках простору навколо системи.

4.53. Частинка, що має заряд q рухається у вакуумі із постійним вектором швидкості $\mathbf{v} \ll c$. Знайдіть вектор Пойнтінга електромагнітного поля частинки.

4.54. Точковий диполь, що має дипольний момент \mathbf{p} рухається у вакуумі із постійним вектором швидкості $\mathbf{v} \ll c$. Знайдіть вектор Пойнтінга електромагнітного поля диполя (в дипольному наближенні). Розгляньте випадки коли а) $\mathbf{p}_e \parallel \mathbf{v}$ та б) $\mathbf{p}_e \perp \mathbf{v}$.

Вказівка: *Скористайтесь відповіддю до задачі 3.7.*

4.55. По прямому провіднику круглого перерізу тече постійний струм I . Знайти потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню даного провідника, що має опір R .

4.56. Довгий соленоїд радіусом r , кількість витків якого N під'єднується до джерела постійної ЕРС \mathcal{E} через опір R (опором самого соленоїда можна знехтувати). Знайти електромагнітну енергію, яка зайшла до соленоїду в процесі встановлення струму, і порівняти її з магнітною енергією соленоїда.

4.57. Плоский конденсатор складається з двох круглих пластинок, які знаходяться на відстані d одна від одної, кожна радіус R . Через конденсатор тече постійний струм I , як вказано на рис. 4.14, що заряджає конденсатор. Як виглядають силові лінії електричного та магнітного поля в конденсаторі? Знайдіть вектор Пойнтінга на відстані r від центра конденсатора. Показати, що потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню конденсатора дорівнює збільшенню його енергії за одиницю часу. Розсіюванням поля на краях при розрахунку знехтувати.

4.58. Між пластинами плоского конденсатора діє однорідне магнітне поле напруженості індукцією \mathbf{B} , паралельне його пластинам (рис. 4.15). Пластини конденсатора заряджають до заряду q , а потім їх з'єднують провідником, що має значний опір. Доведіть, що імпульс системи має зберігатись.

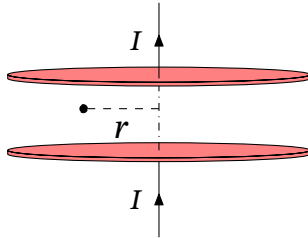


Рис. 4.14. До задачі 4.57

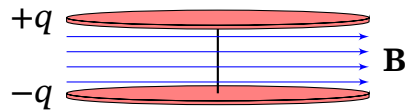


Рис. 4.15. До задачі 4.58

4.59. Циліндричний нерелятивістський електронний пучок радіуса R поширюється у вільному просторі. Електрони пучка летять паралельно, їхня енергія дорівнює W , а концентрація n . Знайти величину і напрямок вектора Пойнтінга в будь-якій точці простору (зовні та всередині пучка).

4.60. По двопровідній лінії з радіус провідників R , які знаходяться на відстані d один від одного, передається потужність P при постійній напрузі. Нехтуючи опором провідників, визначити як змінюється вектор Пойнтінга в площині між провідниками.

4.61. Заряджений плоский повітряний конденсатор з напруженістю електричного поля між пластинами 282 В/см поміщений всередині соленоїда, поперечний переріз якого має форму прямокутника зі сторонами, паралельними і перпендикулярними пластинам конденсатора. У колі обмотки соленоїда є батарея постійного струму і ключ. Вся система (разом з батареєю) поміщена на горизонтальних рейках, які паралельні пластинам конденсатора. Система може переміщатися по рейкам без тертя. Спочатку коло соленоїда розімкнуте. Потім ключ замикається і в соленоїді створюється постійне магнітне поле з індукцією 2000 Гс . Знайти зміну механічного імпульсу системи після замикання ключа. Об'єм повітряного простору між пластинами конденсатора дорівнює 200 см^3 .

4.62. (Аналог парадоксу диска Фейнмана [18]) Чи порушується закон збереження моменту імпульсу в задачі 4.40.

Рух частинок в електромагнітному полі

§ 5.1. Рух заряду в електричному полі

Теоретичні відомості

Сила, що діє на заряджену частинку в електромагнітному полі (сила Лоренца):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right]. \quad (5.1)$$

5.1. Однорідно заряджене кільце радіуса R має заряд Q . Покажіть, що точковий заряд $-q$ маси m , який знаходиться на осі кільця буде здійснювати гармонічні коливання при невеликому зміщенні вздовж осі відносно центра та знайдіть частоту цих коливань.

5.2. Визначте кут розсіювання для частинки масою m з електричним зарядом q , що рухається в електричному полі нерухомого центру, що має заряд Q . Швидкість частинки до розсіювання v_0 і значення прицільного параметра b вважати відомими.

5.3. Частинка з питомим зарядом q/m рухається прямолінійно під дією електричного поля $E = E_0 - kx$, де k — додатна постійна, x — відстань від точки, в частинка знаходилась в стані спокою в початковий момент. Знайти відстань, яку пройде частинка до зупинки.

5.4. Знайти траєкторію релятивістської частини що має зарядом q , початкову кінетичну енергію \mathcal{E}_0 і початковий імпульсом p_0 , напрямлений вздовж осі Ox в постійному однорідному електричному полі E , що протилежно осі Oy . Знайти траєкторію частинки.

§ 5.2.

Рух заряду в магнітному полі

5.5. Релятивістська частинка зарядом q рухається в постійному однорідному магнітному полі B . Знайти закони її руху, а також радіус і частоту обертання.

5.6. Конічний маятник складається з кульки питомим зарядом q/m , яка підвішена на довгій нитці. Як зміниться кутова швидкість обертання маятника після увімкнення вертикального магнітного поля \mathbf{B} ? В якому випадку кутова швидкість збільшиться і в якому зменшиться?

5.7. З поверхні циліндричного провідника радіусом R , по якому тече постійний струм I , вилітає електрон з початковою швидкістю v_0 , перпендикулярно до поверхні провідника. На яку максимальну відстань віддаляться електрон від осі провідника, перш ніж повернути назад під дією магнітного поля струму?

5.8. (Гradientний дрейф частинки в неоднорідному магнітному полі) Частинка, питомим зарядом q/m залітає в область сильного магнітного поля, перпендикулярно до силових ліній з швидкістю v . Магнітне поле напрямлене вздовж осі Oz і слабо змінюється вздовж осі Ox за законом $B_z = B_0 + Ax$, де A — позитивна константа. В цьому випадку виникає дрейф вздовж осі y . Знайдіть швидкість gradientного дрейфу. Намалуйте схематично траєкторію руху частинки.

§ 5.3.

Рух заряду в електричному та магнітному полях

5.9. Визначте кут θ розсіювання для частинки масою m з електричним зарядом q , що рухається в електричному полі нерухомого розсіювального центру, що має заряд Q . Швидкість частинки до розсіювання v_0 і значення прицільного параметра b вважати відомими.

5.10. Розглянемо частинку питомим зарядом q/m , що рухається в присутності постійних і однорідних електромагнітних полів, заданих у вигляді $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y$ та $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$. В початковий момент частинка знаходиться в стані спокою у початку координат. Знайти закони руху частинки. Зобразіть траєкторію частинки в площині xOy для випадків $q < 0$ та $q > 0$.

5.11. При якій початковій швидкості зарядженої частинки її траєкторія прямолінійна при русі в ортогональних електричних і магнітних полях?

5.12. Розв'язати задачу 5.10 для випадку, якщо електричне поле змінюється за законом $\mathbf{E} = E_0 \cos \Omega t \mathbf{e}_y$, де $\Omega = \frac{qB_0}{mc}$ — циклотронна частота.

5.13. Розглянемо пучок іонів питомим зарядом q/m , що рухається влітають в область постійних і однорідних паралельних електромагнітних полів, заданих у вигляді $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y$ та $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_y$, з швидкістю $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_x$. На відстані l від точки початку координат знаходиться плоский екран, орієнтований перпендикулярно осі Ox . Знайти рівняння сліду іонів на екрані. Показати, що при $z \ll l$ слід матиме вигляд параболи.

5.14. Частинка з питомим зарядом q/m знаходиться всередині соленоїда круглого перерізу на відстані r від його осі. В обмотці увімкнули струм, і індукція магнітного поля стала рівною B_0 . Знайти швидкість частинки і радіус кривизни її траєкторії, якщо за час наростання струму в соленоїді її зміщенням можна знехтувати.

5.15. (Рух заряду в полі монополя та діона) Частинка, яка створює радіальне магнітне поле вигляду $\mathbf{B} = \frac{G\mathbf{r}}{r^3}$ називається *магнітним монополем*, а G — магнітний заряд цього монополя, якщо крім магнітного заряду, частинка має ще й електричний заряд Q , то вона називається *діоном*.

Від'ємний заряд q масою m запустили таким чином, що він рухається в поле діона по коловій орбіті з постійною за модулем швидкістю $v \ll c$. Знайдіть радіус цієї орбіти, та відстань площини орбіти до діона.

Вкажіть величини, що зберігаються при русі заряду q , запишіть їх для розглядуваної ситуації. Вказівка: *Скористайтесь виразом* $\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}$.

Прискорення частинок в установках

Теоретичні відомості

Бетатрон — циклічний прискорювач електронів з фіксованою рівноважною коловою орбітою, прискорення в якому відбувається за допомогою вихрового електричного поля. Магнітне поле при цьому перпендикулярне до орбіти електронів і змінюється з часом.

Для того, щоб електрони в бетатроні рухались по рівноважній коловій орбіті радіуса

R , необхідно, щоб виконувалась *бетатронна умова*:

$$\langle B(t) \rangle = 2B(R, t), \quad (5.2)$$

де $\langle B(t) \rangle$ — середнє значення індукції магнітного поля по площі, що обмежена орбітою, $B(R, t)$ — значення індукції магнітного поля в точках на рівноважній орбіті електронів.

Циклотрон — це прискорювач заряджених частинок (протонів, іонів), в якому частинки утримуються на спіральній траєкторії в постійному однорідному магнітному полі і прискорюються швидкозмінним (радіочастотним) електричним полем.

5.16. Виведіть бетатронну умову 5.2. Покажіть за допомогою бетатронної умови, що напруженість вихрового електричного поля в бетатроні має екстремум на рівноважній орбіті.

5.17. За допомогою бетатронної умови 5.2 знайдіть радіус R колової траєкторії електрона, якщо індукція магнітного поля змінюється з відстанню r від центра бетатрона за умовою:

$$B = B_0 - kr^2,$$

де B_0 та k — додатні постійні.

5.18. На рис. 5.1 зображена схема мас-спектрометра. У іонізаторі I утворюються іони, які прискорюються напругою $V = 10$ кВ і входять через щілину в магнітне поле з індукцією $B = 0.1$ Т. Після повороту іони потрапляють на фотографічну пластинку P і викликають її почорніння. На якій відстані, один від одного будуть перебувати на платівці смуги іонів H^+ , ${}^2\text{H}^+$, ${}^3\text{H}^+$, He^+ ? Якою повинна бути ширина щілини, щоб смуги іонів ${}^{16}\text{O}^+$ та ${}^{15}\text{N}^+$ можна було розділити?

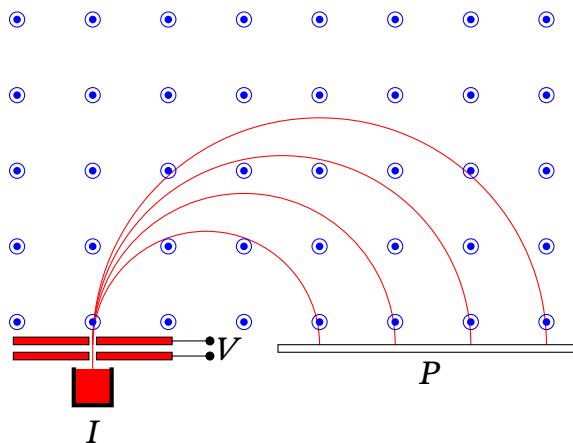


Рис. 5.1. До задачі 5.18

5.19. Магнетрон складається з довгого циліндричного анода радіусом a і коаксіального з ним циліндричного катода радіусом b ($b < a$). На осі системи є нитка з струмом розжарення I , яка створює в навколишньому просторі магнітне поле. Знайти найменшу різницю потенціалів між катодом і анодом, при якій термоелектрони, що залишають катод без початкової швидкості, почнуть досягати анода.

5.20. Магнетрон що складається з нитки розжарення радіусом a і коаксіального циліндричного анода радіусом b , які знаходяться в однорідному магнітному полі, паралельному нитці. Між ниткою і анодом прикладена прискорююча різниця потенціалів V . Знайти значення індукції магнітного поля, при якому електрони, що вилітають з нульовою початковою швидкістю з нитки, будуть досягати анода.

Релятивістська електродинаміка

§ 6.1. Перетворення електричних та магнітних полів

Теоретичні відомості

Закони лоренцівські перетворення векторів **E** та **B**:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \left(E_y - \frac{V}{c}B_z\right)\Gamma, & B'_y &= \left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right)\Gamma \\ E'_z &= \left(E_z + \frac{V}{c}B_y\right)\Gamma, & B'_z &= \left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right)\Gamma, \end{aligned}$$

де $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$

6.1. Заряджена частинка q рухається зі швидкістю $v \approx c$ в лабораторній системі відліку. Знайдіть величину електричного і магнітного поля частинки в цій системі відліку в довільній точці простору.

6.2. Як пояснюється виникнення ЕРС індукції в провіднику, що рухається в магнітному полі, в системі відліку, що пов'язана з провідником?

6.3. Який критерій того, що може існувати така система відліку, в якій електромагнітне поле буде або як суто магнітне, або як суто електричне?

6.4. Якщо в деякій системі відліку поле лише суто електричне або лише суто магнітне, то яку загальну властивість буде мати в цьому випадку електромагнітне поле у всіх інших системах відліку?

6.5. Заряд, що пролітає повз магнітну стрілку буде впливати на неї, оскільки навколо рухомого заряду існує магнітне поле. Як пояснити явище впливу заряду на стрілку відносно системи відліку, в якій заряд знаходиться в спокої?

6.6. Доведіть, що рухомий коловий струм має дипольний електричний момент. Який зв'язок між магнітним моментом струму і його дипольним електричним моментом?

6.7. Два електрона з однаковими швидкостями $v \approx c$ рухаються паралельно один одному на відстані a один від одного. В скільки разів відрізняється сила взаємодії між ними в системі відліку, що пов'язана з ними від сили в лабораторній системі відліку.

6.8. Два електрона з однаковими швидкостями $v \approx c$ рухаються паралельно один одному по обидва боки від нескінченної позитивно зарядженої площини на відстані a від неї. Заряди розподілені по поверхні площини рівномірно з деякою густиною. При якій густині відстань між електронами залишатиметься постійною і рівною $2a$?

6.9. Нескінченно заряджена нитка має густину заряду ρ . Знайти густину зарядів та густину струму нитки відносно системи відліку, що рухається вздовж нитки з швидкістю V .

6.10. По нескінченно довгому провіднику тече струм густиною j . Знайти густину зарядів та густину струму нитки відносно системи відліку, що рухається вздовж нитки з швидкістю V ($\mathbf{j} \uparrow \uparrow \mathbf{v}$).

6.11. Знайти скалярний та векторний потенціал зарядженої частинки, що рухається в лабораторній системі відліку з швидкістю $v \approx c$.

Квазістаціонарні струми в електричних колах

§ 7.1. Перехідні процеси в електричних колах

7.1. Знайти закон зміни в часі струму, який тече через індуктивність L в схемою (рис. 7.1) після замикання ключа в момент $t = 0$.

7.2. У схемі (рис. 7.2) відомі ЕРС \mathcal{E} джерела, опір R і індуктивності котушок L_1 і L_2 . Внутрішнім опором джерела і опором котушок можна знехтувати. Знайти струми, які встановляться в котушках після замикання ключа.

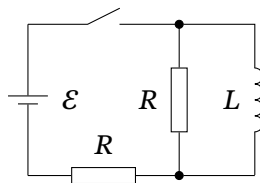


Рис. 7.1. До задачі 7.1

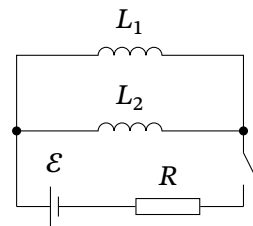


Рис. 7.2. До задачі 7.2

7.3. У колі, зображеному на рис. 7.3, ЕРС батареї $\mathcal{E} = 100$ В, опори резисторів $R_1 = 10$ Ом і $R_2 = 6$ Ом, а ємності конденсаторів $C_1 = 60$ мкФ і $C_2 = 100$ мкФ. У початковому стані ключ розімкнений, а конденсатори не заряджені. Через деякий час після замикання ключа в системі встановиться рівновага. Яка кількість теплоти виділиться в колі за час встановлення рівноваги?

7.4. У схемі на рис. 7.4 після встановлення струмів миттєво перекидають ключ з положення 1 в положення 2. Вважаючи котушки L_1 і L_2 ідеальними,

визначте кількість теплоти, що виділиться на резисторі R . ЕРС джерела струму \mathcal{E} , а внутрішній опір r .

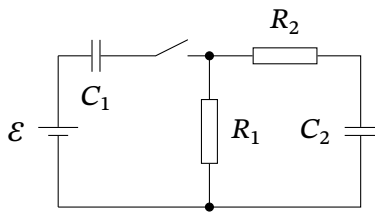


Рис. 7.3. До задачі 7.3

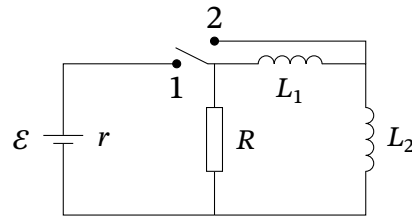


Рис. 7.4. До задачі 7.4

§ 7.2. Вільні коливання в електричних колах

7.5. Знайти максимальний струм в колі (рис 7.5) і максимальну напруга на конденсаторі після замикання ключа. Активним опором кола можна знехтувати.

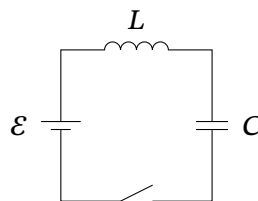


Рис. 7.5. До задачі 7.5

7.6. Коливальний контур містить індуктивність і ємність. В деякий момент часу з конденсатора швидко витягують пластину з діелектричною проникністю ϵ . Як зміниться частота коливань контуру? У скільки разів зміняться максимальні величини заряду на конденсаторі і струму в котушці, якщо пластину витягують в момент, коли заряд на конденсаторі а) відсутній б) максимальний?

7.7. Знайти частоти згасаючих коливань контуру, який показаний показаного на рис 7.6. Ємність C , індуктивність L і активний опір R вважати відомими.

7.8. Високодобротний коливальний контур (рис. 7.7) включає дві послідовно з'єднані котушки з індуктивностями L_1 і L_2 . Після того, як котушку L_2 замикають накоротко, частота власних коливань контуру не змінюється. Визначити коефіцієнт взаємної індукції.

7.9. Визначити частоти вільних коливань у двох індуктивно зв'язаних контурах, схема яких подана на рис. 7.8. Коефіцієнт взаємної індукції контурів L_{12} .

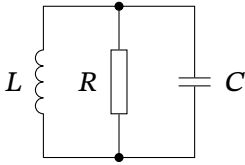


Рис. 7.6. До задачі 7.7

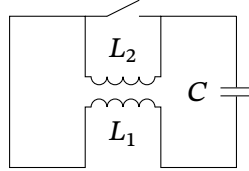


Рис. 7.7. До задачі 7.8

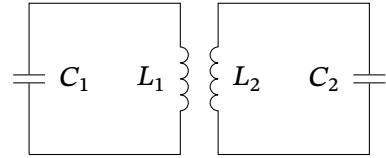
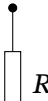

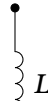


Рис. 7.8. До задачі 7.9

§ 7.3. Вимушені коливання в електричних колах. Резонанс

Теоретичні відомості

Елемент			
Імпеданс, Z	R	$\frac{1}{i\omega C}$	$i\omega L$

Результати, отримані формальним застосуванням правил Кірхгофа для постійних струмів, в комплексній формі зберігають вигляд і для встановлених квазістаціонарних гармонічних струмів. *Перше правило Кірхгофа:* алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю:

$$\sum_i I_i = 0 \quad (7.1)$$

Друге правило Кірхгофа: сума спадів напруг $I_i Z_i$ у контурі дорівнює сумі електрорушійних сил, які діють у цьому контурі:

$$\sum_i I_i Z_i = \sum_j \mathcal{E}_j \quad (7.2)$$

Середня потужність, що виділяється у вигляді теплоти (потужність втрат) за період визначається як:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi, \quad (7.3)$$

де U_0 та I_0 — амплітудні значення сили напруги та струму в колі, φ — зсув фаз між напругою та струмом.

Потужність втрат за період виражена через амплітуду струму:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Re} Z, \quad (7.4)$$

де I_0 — амплітуда струму в електричному колі, $\operatorname{Re} Z$ — дійсна частина комплексного імпедансу кола Z .

Величини

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (7.5)$$

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (7.6)$$

Називаються діючими значеннями напруги та сили струму.

Правила Кірхгофа для змінного струму

7.10. Частота змінної напруги у контурі зображеному на рис. 7.9 дорівнює $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Як залежить струм, що тече через амперметр, від опору реостата R ?

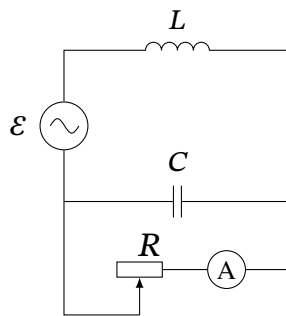


Рис. 7.9. До задачі 7.10

7.11. Знайдіть струм в колі, яке зображене на рис. 7.10, якщо ЕРС джерела змінюється за законом $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. Чому буде дорівнювати струм, якщо котушки матимуть взаємну індуктивність M ?

7.12. В колі, зображеному на рис. 7.11, діє джерело змінної ЕРС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. При яких умовах струм в колі не залежить від частоти? Знайдіть різницю фаз між ЕРС та напругою на кінцях RC -пари за цих умов.

7.13. Знайти умову, при якій в схемі рис. 7.12 струм, що протікає через деяке навантаження Z , не буде залежати від нього.

7.14. В колі, зображеному на рис. 7.14, діє змінна ЕРС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \omega t$. Визначити струми I_1 та I , якщо параметри кола задовольняють співвідношенню $\omega^2 = \frac{1}{4LC}$.

7.15. Параметри R і C схеми (рис. 7.13) задані. При якій частоті ω вихідна напруга V_{out} буде знаходитися в фазі із вхідною напругою V_{in} ? Яким при

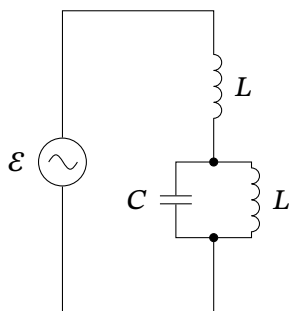


Рис. 7.10. До задачі 7.11

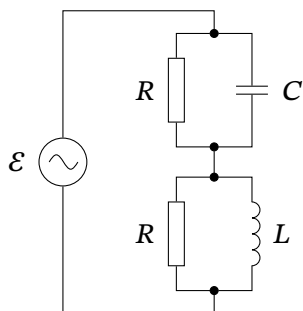


Рис. 7.11. До задачі 7.12

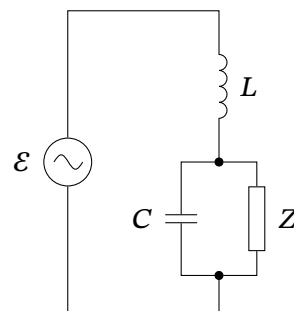


Рис. 7.12. До задачі 7.13

цьому буде відношення амплітуди напруг V_{out} та V_{in} ?

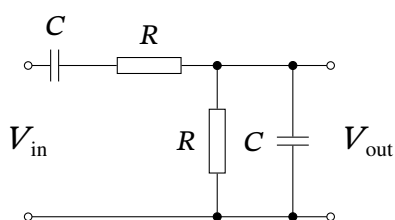


Рис. 7.13. До задачі 7.15

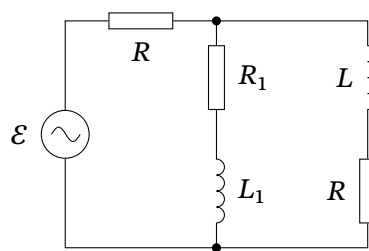


Рис. 7.14. До задачі 7.14

Мостові схеми в колах змінного струму

7.16. При якому співвідношенні між параметрами моста, зображеного на рис. 7.15, напруга на його виході знаходиться в фазі з вхідною напругою $V = V_0 \cos \omega t$. Визначити при цьому амплітуду напруги на виході.

7.17. Знайти умови, при яких міст зображений на рис. 7.16, буде збалансований (тобто $V_{\text{out}} = 0$ при подачі на його вхід періодичної напруги $V_{\text{in}}(t)$ будь-якої форми.

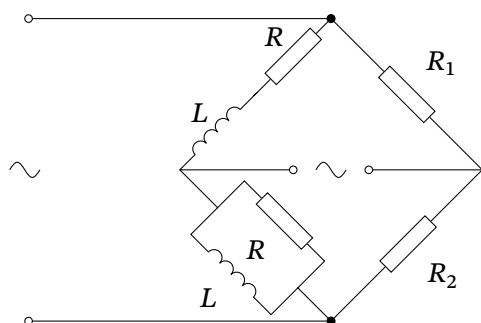


Рис. 7.15. До задачі 7.16

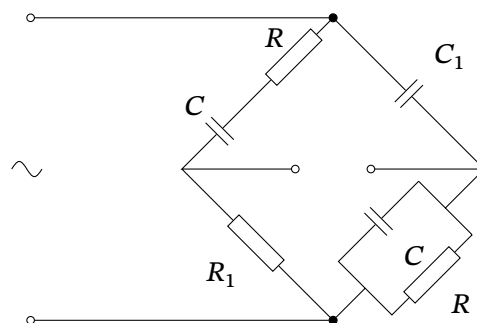


Рис. 7.16. До задачі 7.17

7.18. До джерела із діючим значенням напруги $U = 100$ В приєднали реальну котушку, імпеданс якої $Z = 50$ Ом, а індуктивний опір $X_L = 30$ Ом. Яка потужність виділятиметься в колі. Знайдіть зсув фаз між струмом та напругою.

7.19. Знайдіть імпеданс нескінченного кола, показаного на рис. 7.17. Розгляньте випадок коли $Z_1 = i\omega L$, $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$, за яких частот коло не буде споживати потужність від джерела?

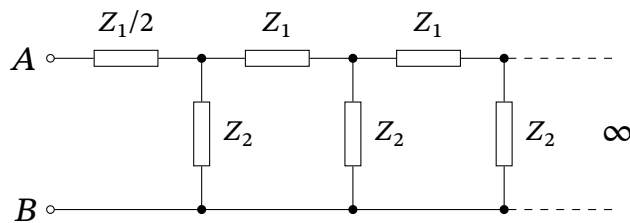


Рис. 7.17. До задачі 7.19

7.20. Знайти силу взаємодії на одиницю довжини між паралельними провідниками, по яким течуть гармонічні струми амплітудами I_1 та I_2 зі зсувом фаз φ , що знаходяться на відстані r один від одного.

Електричні фільтри

7.21. Знайти частоти пропускання фільтрів, зображених на рис. 7.18а, 7.18б та 7.18в.

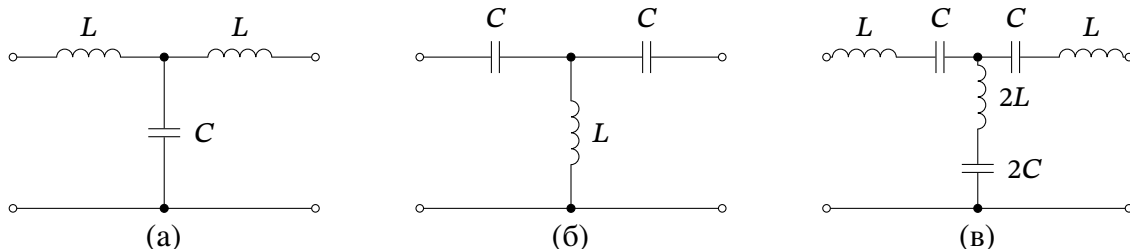


Рис. 7.18. До задачі 7.21

Відповіді

Електростатика

1.1. $E = \frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}.$

1.4. $E = \frac{2\lambda}{r}.$

1.5. $E_z = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$

1.6. $E_z = 2\pi\sigma.$

1.7. $E_z = \pi\sigma.$

1.8. $E = 2\sqrt{2}\pi\sigma$

1.9. а) $E = \frac{\pi\lambda_0}{R}$; б) $E = \frac{\pi\lambda_0 R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$

1.10. $\mathbf{E} = 2\pi\sigma \frac{\mathbf{r}}{r} - 2d\sigma \frac{\mathbf{r}}{r^2}$, де \mathbf{r} — радіус-вектор проведений від осі симетрії щілини в точку спостереження.

1.11. $\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi R \mathbf{a}$

$$1.12. E_z = \pi\sigma.$$

$$1.13. E_z = \frac{2\pi\sigma z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$1.14. E_z = 2\pi\sigma.$$

$$1.15. \mathbf{E} = -\frac{\pi r^2 \sigma}{R^3} \mathbf{r}, \text{ де } \mathbf{r} \text{ — радіус-вектор з початком у центрі вирізаного отвору і кінцем у центрі сфери.}$$

$$1.16. \Phi = \pi l \lambda$$

$$1.17. \Phi = 2\pi \lambda R.$$

$$1.18. \text{ Потік через куб } \Phi = \frac{\pi}{2}q. \text{ Потік через грані, що сходяться у вершині, в якій розташований заряд } \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0, \text{ потік через інші грані } \Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = \frac{\pi}{6}q.$$

$$1.19. \Phi = 2\pi q \left(1 - \frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\right).$$

$$1.21. \mathbf{E} = \begin{cases} 2\pi\rho r \\ \frac{2\pi\rho R^2}{r} \end{cases}.$$

$$1.22. E = \begin{cases} \rho \frac{4\pi}{3} r \\ \rho \frac{4\pi R^3}{3r^2} \end{cases}.$$

$$1.23. \mathbf{E} = 2\pi\rho\mathbf{l}, \text{ де } \mathbf{l} \text{ — вектор, проведений від центру циліндра до центру порожнини.}$$

$$1.24. \mathbf{E} = \frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{l}, \text{ де } \mathbf{l} \text{ — вектор, проведений від центру кулі до центру порожнини.}$$

$$1.25. \quad q = 2\pi a R^2$$

$$1.26. \quad \mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3} \left[1 + \frac{2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \right] \exp\left(-\frac{2r}{a}\right). \text{ При } r \ll a, \mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}, \text{ при } r \gg a, \\ \mathbf{E} = \frac{2e\mathbf{r}}{a^2 r} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

$$1.28. \quad E_z = \frac{\pi q R}{2z^3}$$

$$1.29. \quad V = \frac{E_1}{E_2} 2\pi l^3.$$

$$1.30. \quad \text{а) } F = \frac{3p_1 p_2}{d^4}, \text{ диполі відштовхуються, б) } F = \frac{3p_1 p_2}{d^4}, \text{ диполі при-} \\ \text{тягуються, в) } F = \frac{6p_1 p_2}{d^4}, \text{ диполі притягуються, г) } F = \frac{6p_1 p_2}{d^4}, \text{ диполі} \\ \text{відштовхуються.}$$

$$1.31. \quad \text{Вказівка: Сила, що діє на диполь в неоднорідному магнітному} \\ \text{полі визначається за формулою } \mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \text{ а момент сили } \mathbf{M} = \\ [\mathbf{p} \times \mathbf{E}] + [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]. \\ \text{а) } \mathbf{F} = 0, \mathbf{M} = \frac{2\lambda}{r^2} [\mathbf{p} \times \mathbf{r}], \text{ б) } \mathbf{F} = \frac{2\lambda \mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{M} = 0, \text{ в) } \mathbf{F} = \frac{2\lambda \mathbf{p}}{r^2}, \mathbf{M} = 0.$$

$$1.33. \quad M_1 = -\frac{p^2}{r^3}, M_2 = -\frac{2p^2}{r^3}. \text{ Обертовий момент, що діє на систему} \\ \text{дорівнює нулю.}$$

$$1.34. \quad \mathbf{p} = \mathbf{E}_0 R^3, \sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r}, Q = \frac{3}{4} E_0 R^2$$

$$1.35. \quad \text{а) } F = \frac{6E_0^2 R^6}{l^4}, \text{ кулі притягуються, б) } F = \frac{3E_0^2 R^6}{l^4}, \text{ кулі відштовхую-} \\ \text{ться.}$$

$$1.38. \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \sqrt{\eta}.$$

$$1.43. \quad \varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \text{ де } \mathbf{r} - \text{ радіус вектор довільної точки поля.}$$

$$1.44. \quad \varphi = \frac{q}{r} + \frac{q}{4r} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta)$$

$$1.45. \Delta\varphi = \frac{2q}{R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2}} \right)$$

$$1.46. \varphi = 2\pi\sigma \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right).$$

$$1.48. \varphi = -\frac{4}{3}\pi R(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}).$$

1.56. Так. Відповідь обґрунтовується за допомогою теореми Гауса та теореми про циркуляцію.

1.60.

$$a) \varphi = \begin{cases} \frac{\sigma\pi R^2}{R}, & r < R, \\ \frac{\sigma\pi R^2}{r}, & r > R \end{cases},$$

$$б) \varphi = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi\rho(3R^2 - r^2), & r < R, \\ \frac{4\pi R^3 \rho}{3r}, & r > R \end{cases},$$

$$в) \varphi = \begin{cases} \lambda \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), & r < R, \\ -2\lambda \ln \frac{r}{R}, & r > R \end{cases},$$

$$г) \varphi = \begin{cases} -2\pi\rho z^2, & |z| < a, \\ 2\pi\rho a(a - 2|z|), & |z| \geq a \end{cases}$$

1.61.

$$\varphi = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -a \\ 2\pi\rho_0(x + a)^2, & -a \leq x \leq 0, \\ -2\pi\rho_0(x - a)^2 + 4\pi\rho_0a^2, & 0 \leq x \leq a, \\ 4\pi\rho_0a^2, & a < x < \infty, \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -a \\ -4\pi\rho_0(x+a), & -a \leq x \leq 0, \\ 4\pi\rho_0(x-a), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & a < x < \infty, \end{cases}$$

$$1.62. \quad \varphi(r) = \begin{cases} 4\pi a \ln \frac{R_2}{R_1}, & r \leq R_1 \\ 4\pi a \left[\left(1 - \frac{R_1}{r}\right) + \ln \frac{R_2}{r} \right], & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 4\pi a \frac{R_2 - R_1}{r}, & r \geq R_2 \end{cases}$$

$$1.63. \quad E = \frac{\pi\rho_0}{a}(e^{aR} - 1).$$

$$1.64. \quad \rho = \frac{3a}{2\pi}.$$

1.65. Розподіл зарядів знайдемо з рівняння Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Розпишемо

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot \nabla \left(\frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}} \right) = \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{q}{r} \nabla e^{-\frac{r}{a}} + e^{-\frac{r}{a}} \nabla \frac{q}{r} \right) = \\ &= \nabla \left(\frac{q}{r} \right) \nabla e^{-\frac{r}{a}} + \frac{q}{r} \Delta e^{-\frac{r}{a}} + \nabla e^{-\frac{r}{a}} \nabla \left(\frac{q}{r} \right) + e^{-\frac{r}{a}} \Delta \left(\frac{q}{r} \right) = \\ &= e^{-\frac{r}{a}} \Delta \left(\frac{q}{r} \right) + 2 \nabla \left(\frac{q}{r} \right) \cdot \nabla e^{-\frac{r}{a}} + \frac{q}{r} \Delta e^{-\frac{r}{a}} = \\ &= -4\pi q \delta(r) + \frac{q}{a^2} \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \end{aligned}$$

Співставляючи останній вираз з рівнянням Пуассона, знайдемо розподіл заряду:

$$\rho = q\delta(r) - \frac{q}{4\pi a^2} \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r},$$

звідки видно, що екранований кулонівський потенціал створюється точковим зарядом, навколо якого розподілена «хмара» електричного за-

ряду. Такий характер розподілу зустрічається, наприклад, в електролітах, або плазмі.

$$1.66. \quad \rho = \frac{eb^2}{4\pi r} e^{-br} \text{ при } r \neq 0. \quad Q = 0.$$

$$1.67. \quad \rho_{\text{in}} = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right), \text{ при } r < R, \quad \rho_{\text{out}} = 0, \text{ при } r > R.$$

$$1.68. \quad \sigma|_{x=0} = 0, \quad \sigma|_{x=d} = -\frac{1}{3\pi} k d^{\frac{1}{3}}, \quad \rho = -\frac{k}{9\pi} x^{-\frac{2}{3}}.$$

$$1.74. \quad \varphi = \frac{q}{l} + \frac{Q}{R}.$$

$$1.75. \quad \varphi = \frac{q}{R} + \frac{Q}{R}.$$

$$1.76. \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{R_1 + R_2}, \quad q_1 = (Q_1 + Q_2) \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad q_2 = (Q_1 + Q_2) \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$1.77. \quad q_1 = -Q \frac{R_2 - R}{R_2 - R_1} \frac{R_1}{R}, \quad q_2 = -Q \frac{R - R_1}{R_2 - R_1} \frac{R_2}{R}$$

$$1.78. \quad \varphi(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}, & r \leq R_1 \\ \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1}{r}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{q_1 + q_2}{r}, & r \geq R_2 \end{cases}$$

$$1.79. \quad \varphi = q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$1.80. \quad q = Q \left(\frac{R_2}{R_3} - 1 \right)$$

$$1.81. \quad q_1 = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}, \quad q_2 = -q_1, \quad E(r) = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ \frac{q_1}{r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q + q_1}{r^2}, & R_2 < r < R_3 \\ \frac{Q}{r^2}, & r > R_3 \end{cases},$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3}, & r < R_1 \\ \frac{q_1}{r} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3}, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q + q_1}{r}, & R_2 < r < R_3 \\ \frac{Q}{r}, & r > R_3 \end{cases}.$$

$$1.82. \quad q_1 = -Q \frac{R_1(R_3 - R_2)}{R_2(R_3 - R_1)}, \quad q_2 = Q \frac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)}.$$

$$1.83. \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi Q}{S}(d_2 - d_1).$$

$$1.85. \quad Q_L = \frac{Q_2 - Q_1}{2}, \quad Q_R = -Q_L.$$

$$1.86. \quad Q_1 = -\frac{Q}{2} \frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1}, \quad Q_2 = -Q_1.$$

$$1.87. \quad Q_2 = -\frac{Q}{2}, \quad Q_3 = \frac{Q}{2}.$$

$$1.88. \quad Q_2 = -\frac{q_0}{2} - \frac{\varepsilon S}{4\pi d}, \quad Q_3 = \frac{q_0}{2} + \frac{\varepsilon S}{4\pi d}.$$

$$1.89. \quad Q_1 = -\frac{2\varepsilon S + 4\pi Q(d_2 - d_1)}{8\pi(d_1 + d_2)}, \quad Q_3 = -Q_1.$$

$$1.90. \quad \text{a) } q', \quad \text{б) } -q.$$

$$1.91. \quad p = \frac{R^3}{l^2} q.$$

$$1.92. F = \frac{qq_0}{b^2} + \frac{q^2 R}{b^3} - \frac{q^2 R b}{(b^2 - R^2)^2}.$$

$$1.93. \sigma_a = -\frac{q_a}{4\pi a^2}, \sigma_b = -\frac{q_a}{4\pi b^2}, \sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}.$$

$$1.94. \text{ а) } F = \frac{q^2 R b}{(b^2 - R^2)^2}, \text{ б) } F = q^2 R \left(\frac{b}{(b^2 - R^2)^2} - \frac{1}{b^3} \right), \text{ в) } F = \frac{qQ}{b^2} - \frac{q^2 R^3 (2b^2 - R^2)}{b^3 (b^2 - R^2)^2}.$$

1.95. $F = -\frac{qRa}{(a^2 - R^2)^2}$. Якщо кулю буде незаземленою, результат не зміниться. Сила взаємодії не залежить від заряду кулі.

$$1.96. \sigma_{in} = \frac{q}{18\pi r^2}, \sigma_{out} = -\frac{q}{4\pi r^2}. \text{ Після заземлення } \sigma_{in} = \frac{q}{18\pi r^2}, \sigma_{out} = 0.$$

$$1.98. F = \frac{2\lambda^2}{R(1 - r^2/R^2)}.$$

$$1.99. F = \frac{3p^2 R^3}{b^7}, \text{ взаємодія — притягування.}$$

1.100. Згідно методу зображень, металева куля створює заряд-зображення dq' елемента поверхні диска, на якому міститься заряд $dq = \sigma dS$, де $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$. Величину заряду-зображення (заряд кулі) можна знайти як:

$$q' = - \int \frac{R}{r} \sigma dS.$$

Для інтегрування, зручно скористатись елементом тілесного кута, під яким видно елемент диска з центру сфери:

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}.$$

Отже

$$q' = -2\pi R^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = -2(\sqrt{2} - 1)q.$$

$$1.101. \varphi = \frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} + \frac{Q+q}{R}.$$

1.104. а) $\mathbf{E} = \pm 2\pi\mathbf{P}$, б) $\mathbf{E} = -2\pi\mathbf{P}\left(\frac{r}{l}\right)^2$, в) величину і напрямок поля на поверхні циліндра поблизу його центра приблизно дорівнює полю в його центрі. $\mathbf{E}_A = 4\pi\mathbf{P}$, \mathbf{P}

1.105. Поле зовні $\mathbf{E} = 2\pi\mathbf{P}\frac{d}{R}$, поле в середині $\mathbf{E} = -2\pi\mathbf{P}\left(2 - \frac{d}{R}\right)$. Індукція зовні та в середині $\mathbf{D} = 2\pi\mathbf{P}\frac{d}{R}$.

1.107. а) $\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \pi R^2 E_0 \cos \theta$, б) $\oint_\Gamma \mathbf{D} d\mathbf{r} = -(\varepsilon - 1) l E_0 \sin \theta$.

1.108. $\varepsilon_2 \tan \theta_1 = \varepsilon_1 \tan \theta_2$, де θ_1 та θ_2 — кути між нормаллю до поверхні та силовими лініями в діелектрику 1 та 2, відповідно.

1.109. $\mathbf{E} = -4\pi\mathbf{P}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}\right)$.

1.110. $\mathbf{E} = -2\pi\mathbf{P}\frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}$.

1.111.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}, & r \leq R \\ \frac{4\pi}{3}R^3\left(\frac{\mathbf{P}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{P}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}\right), & r > R. \end{cases}$$

1.112. $\lambda = 0$, $\mathbf{D} = 0$ у всьому просторі, $\mathbf{E} = \begin{cases} -4\pi a \mathbf{r}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$.

1.113. $E_1 = 4\pi P \frac{h}{d}$, $E_2 = 4\pi P \left(1 - \frac{h}{d}\right)$, $D_1 = D_2 = E_1$.

1.114. Заряди на поверхні кулі, яка знаходиться у вакуумі $\sigma_1 = \frac{q}{2\pi R(\varepsilon+1)}$, на поверхні, що занурена в діелектрик — $\sigma_2 = \varepsilon \frac{q}{2\pi R(\varepsilon+1)}$.

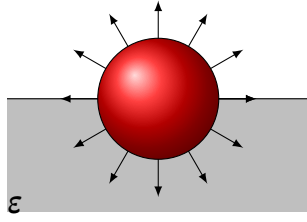


Рис. 19. Картина ліній вектора **E**

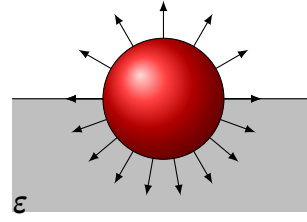


Рис. 20. Картина ліній вектора **D**

$$\mathbf{1.115.} \quad \varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r}, \quad \mathbf{E} = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{D} = \begin{cases} \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, & \text{в діелектрику 1} \\ \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, & \text{в діелектрику 2} \end{cases}$$

1.116. У випадку паралельного заповнення до обкладок: а) за постійної напруги $E_1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}E_0$, $E_2 = \frac{2}{\varepsilon+1}E_0$, $D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}E_0$; б) за постійного заряду $E_1 = E_0$, $E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon}$, $D_1 = D_2 = E_0$. У випадку перпендикулярно заповнення до обкладок: а) за постійної напруги $E_1 = E_2 = E_0$, $D_1 = E_0$, $D_2 = \varepsilon D_1$; б) за постійного заряду $E_1 = E_2 = \frac{2}{\varepsilon+1}E_0$, $D_1 = \frac{2}{\varepsilon+1}E_0$, $D_2 = \varepsilon D_1$.

$$\mathbf{1.117.} \quad \mathbf{p} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} R^3 \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3}{\varepsilon+2} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R \end{cases}, \quad \sigma' = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \frac{E_0 \mathbf{r}}{r}.$$

$$\mathbf{1.118.} \quad \mathbf{p} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\frac{1}{\varepsilon}+2} R^3 \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\frac{1}{\varepsilon}+2} \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3}{\frac{1}{\varepsilon}+2} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R \end{cases}.$$

$$\mathbf{1.119.} \quad \mathbf{p} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} R^3 \mathbf{E}_0, \quad \varphi = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_e + 2\varepsilon_e} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), & r \leq R \\ -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{pr}}{r^3}, & r > R \end{cases},$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R \end{cases}, \quad \sigma' = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \frac{E_0 \mathbf{r}}{r}.$$

$$\mathbf{1.120.} \quad \sigma' = 1.06 \cdot 10^{-8} \text{ K/cm}^2.$$

$$1.121. \mathbf{P}(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \rho' = 0, \sigma' = -\frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \frac{q}{R^2}$$

$$1.122. q'_{\text{внутр}} = -q \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}, q'_{\text{зовн}} = q \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}.$$

$$1.123. \rho' = -\rho \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}.$$

$$1.124. \sigma' = \frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right)$$

$$1.125. F = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\varepsilon_1} \frac{q}{4d^2}.$$

$$1.126. F_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_1} \frac{q_1^2}{4d^2} + \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q_1 q_2}{4d^2}, F_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_2} \frac{q_2^2}{4d^2} + \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q_1 q_2}{4d^2}.$$

$$1.127. \sigma' = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{qd}{(x^2+h^2)^{3/2}}, \text{ де } x - \text{ координата вздовж межі розділу, } q' = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} q.$$

$$1.134. \text{ Збільшиться в 1.5 рази.}$$

$$1.135. C \approx 70 \text{ см.}$$

$$1.136. C = \frac{R_2^2}{R_2 - R_1}.$$

$$1.137. C \approx \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$1.138. C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(1 + \frac{\varepsilon-1}{4\pi} \Omega \right).$$

$$1.139. C = \frac{a R_1^2}{R_2 - R_1}.$$

1.140. $C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1}$, зв'язані заряди знаходяться на границях розділу: $\sigma'_{R_1} = -\frac{q}{4\pi R_1^2} \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}$, $\sigma'_{R_2} = \frac{q}{4\pi R_2^2} \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}$, $\sigma'_R = \frac{q}{4\pi R^2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$.

1.141. $C = \frac{aS}{4\pi d \ln 2}$, заряд обкладки конденсатора $\sigma = \frac{aV}{4\pi d \ln 2}$, $\sigma'_{z=0} = -\sigma \left(1 - \frac{1}{a} \right)$, $\sigma'_{z=d} = -\sigma \left(1 - \frac{1}{2a} \right)$, $\rho' = -\frac{\sigma d}{a(z+d)^2}$.

1.142. $C \approx R$.

1.143. $C_{11} = \frac{R_1 l^2}{l^2 - R_1 R_2}$, $C_{22} = -\frac{l R_1 R_2}{l^2 - R_1 R_2}$, $C_{22} = \frac{R_2 l^2}{l^2 - R_1 R_2}$.

1.144. $C_{11} = \frac{S}{4\pi d_1}$, $C_{12} = -\frac{S}{4\pi d_1}$, $C_{22} = \frac{S}{4\pi} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)$, $C_{13} = 0$, $C_{23} = -\frac{S}{4\pi d_2}$, $C_{33} = \frac{S}{4\pi d_2}$.

1.145. $C = \frac{1}{4 \ln \frac{l-R}{R}}$.

1.146. $\varphi = E_0 h \left(1 - \frac{\ln \frac{\sqrt{2h^2+d^2}}{d}}{\ln \frac{2h}{R}} \right) = 6.6 \text{ кВ}$.

1.147. $C = \frac{1}{4 \ln \frac{2hl}{R\sqrt{d^2+2h^2}}}$.

1.148. $C = \frac{1}{4} \ln^{-1} \frac{\left(\frac{2R^2}{l} - \frac{l}{2} + r \right)(l-r)}{\left(\frac{2R^2}{l} + \frac{l}{2} - r \right)r}$.

1.151. 9 кВ.

1.152. $U_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_B + \varepsilon}{C_1 + C_2} C_2$, $U_2 = \frac{\varphi_A - \varphi_B + \varepsilon}{C_1 + C_2} C_1$.

$$1.153. \quad V_1 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)C_2}{C_1 + C_2}, \quad V_1 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)C_1}{C_1 + C_2}.$$

$$1.154. \quad V = \varepsilon / (1 + 3\eta + \eta^2).$$

$$1.155. \quad C_{\text{ланки}} = C(\sqrt{5} - 1)/2.$$

$$1.156. \quad \text{а) } \varphi_A - \varphi_B = \varepsilon \frac{C_2 C_3 - C_1 C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}, \quad \text{б) } \varphi_A - \varphi_B = \frac{\varepsilon_2 C_2 - \varepsilon_1 C_1}{(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

$$1.157. \quad \text{Напруженість зменшиться у } \frac{1+\varepsilon}{2} \text{ рази. Заряд, що пройде через джерело } \frac{1}{2} C \varepsilon \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}.$$

$$1.158. \quad q = V \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}.$$

$$1.159. \quad \text{а) } \Delta q_1 = \varepsilon C_2, \quad \Delta q_2 = -\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon, \quad \text{б) } \Delta q_1 = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon_1, \quad \Delta q_2 = \varepsilon (C_1 - C_2).$$

$$1.160. \quad q_3 = \varepsilon C_3 \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2 + C_3} = 9 \text{ мкФ}.$$

$$1.161. \quad q_1 = C \left(\frac{q_0}{C_2} - E_0 d \right), \quad q_2 = C \left(\frac{q_0}{C_1} - E_0 d \right), \quad \text{де } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

$$1.162. \quad W = -\frac{2q^2}{a}$$

$$1.163. \quad W = -1.747 \frac{e^2}{a} = -8.94 \text{ eВ}.$$

$$1.164. \quad W = -(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = -\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} = -\frac{p_1 p_2}{d^3} [3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)], \quad \text{а) } \theta_1 = \theta_2 = \pi/2, \quad \text{б) } \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi/2, \quad \text{в) } \theta_1 = \theta_2 = 0.$$

1.165. В діелектрику виникає зображення диполя, з моментом $\mathbf{p}' = -\mathbf{p} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$. Кут між полем \mathbf{E} і диполем \mathbf{p}' дорівнює $\pi - \alpha$.
Сумарний момент сил, що діє на диполь

$$[\mathbf{p} \times \mathbf{E}] + \left[\mathbf{p} \times \left(\frac{3(\mathbf{p}'\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}'}{r^3} \right) \right] = 0$$

Звідки, можливі наступні випадки $\alpha = 0$, та $\alpha = \pm \arccos \left(-\frac{E}{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{3}{8} \frac{p}{d^3}} \right)$.

1.170. $W_1 = \frac{q_1^2}{2R_1}$, $W_2 = \frac{q_2^2}{2R_2}$, $W_{12} = \frac{q_1 q_2}{R_2}$, $W = W_1 + W_2 + W_{12}$.

1.171. $W = \frac{q^2}{(\varepsilon+1)R}$.

1.172. $W = \frac{q^2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R}$.

1.173. $\Delta W = \frac{q^2}{2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$.

1.174. а) $\Delta W = \frac{SV^2}{8\pi} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \approx 0.18 \text{ ерг};$
б) $\Delta W = \frac{SV^2}{8\pi} \left(\frac{d_2}{d_1^2} - \frac{d_1}{d_2^2} \right) \approx 0.11 \text{ ерг}.$

1.175. $\varepsilon = \frac{A}{W} + 1 = 4.5.$

1.176. $F = \frac{q^2}{l^2} \frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon}.$

1.177. $F = \frac{q^2}{8R^2}.$

1.178. $F = \frac{q(q+2q_0)}{8R^2}.$

$$1.179. F = \frac{\lambda^2}{\pi R}.$$

$$1.180. \varphi = \sqrt{\frac{2mg(1+\varepsilon)^2}{\pi\varepsilon}}.$$

$$1.181. F = \frac{6R^6}{l^4} E_0.$$

$$1.182. F = \frac{2\pi q^2}{S}.$$

$$1.183. F = \frac{S}{8\pi} \left(\frac{\varepsilon V}{\varepsilon d_1 + d_2} \right)^2.$$

1.186. У випадку паралельного заповнення до обкладок: а) за постійної напруги $\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1} E_0^2 \mathbf{n}$; б) за постійного заряду $\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) E_0^2 \mathbf{n}$. У випадку перпендикулярно заповнення до обкладок: а) за постійної напруги $\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon E_0^2 \mathbf{n}$; б) за постійного заряду $\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1} E_0^2 \mathbf{n}$. Де \mathbf{n} – напрямлений перпендикулярно до поверхні розділу у вакуум.

$$1.188. h = \frac{\varepsilon-1}{8\pi g\rho} \left(\frac{V}{d} \right)^2.$$

$$1.189. M = \frac{V}{8\pi} \frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon+1} E_0^2 \sin 2\alpha.$$

$$1.190. \mathbf{F} = q^2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} r^3 \frac{z(R^2-2z^2)}{(R^2+z^2)^4} \mathbf{k}.$$

1.191. а) $F \approx \frac{0.13r^3}{3R^5} (\varepsilon - 1) Q^2$, при $z = 0.286R$; б) $F \approx -\frac{0.13r^3}{3R^5} (\varepsilon - 1) Q^2$, при $z = 1.104R$; в) При $z = 0$, положення нестійкої рівноваги, та при $z = R/\sqrt{2}$, положення стійкої рівноваги.

$$1.192. F_1 = F_2 = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Постійний струм

$$2.4. \quad j_{1n} = j_{2n}, \quad \frac{j_{1\tau}}{\lambda_1} = \frac{j_{2\tau}}{\lambda_2}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

2.5. Для постійних струмів:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (7)$$

використовуючи закон Ома в диференціальній формі:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\lambda \mathbf{E}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \lambda = 0. \quad (8)$$

З теореми Гауса в диференціальній формі $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$, бачимо, що густина об'ємних зарядів в провіднику дорівнює:

$$\rho = -\frac{\mathbf{j} \cdot \nabla \lambda}{4\pi\lambda^2}. \quad (9)$$

Якщо провідник однорідний ($\lambda = \text{const}$), то об'ємного заряду не виникає.

$$2.8. \quad I = \frac{4\pi V C}{\rho \varepsilon}$$

$$2.9. \quad \text{а) } j = V \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right)^{-1}; \quad \text{б) } \sigma_1 = \frac{V \varepsilon_1}{4\pi \lambda_1} \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right)^{-1}, \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_2 \lambda_1}{\varepsilon_1 \lambda_2} \sigma_1.$$

$$\text{в) } \sigma = \frac{V \varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2}{4\pi d_1 \lambda_2 + d_2 \lambda_1}; \quad \text{г) } \sigma' = -\frac{V (\varepsilon_2 - 1) \lambda_1 - (\varepsilon_1 - 1) \lambda_2}{4\pi d_1 \lambda_2 + d_2 \lambda_1}; \quad \text{д) } R = \frac{1}{S} \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right).$$

$$2.10. \quad q = \frac{I}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} \right).$$

$$2.11. \quad \rho = \frac{4\pi\tau}{\varepsilon \ln \frac{3}{2}}$$

$$2.12. \quad R = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi l \lambda}, \quad C = \frac{\varepsilon}{\lambda R}.$$

$$2.13. \quad R = \frac{\varepsilon \rho (r_2 - r_1)}{4\pi r_1 r_2}.$$

2.14. Згідно теореми Гауса, заряд однієї із оболонок дорівнює:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

З іншого боку, із означення ємності системи двох провідників:

$$Q = CV,$$

де V – різниця потенціалів між провідниками, C – їх взаємна ємність. Звідси,

$$V = \frac{1}{4\pi C} \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Струм між цими провідниками можна знайти як:

$$I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \lambda \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Отже, опір середовища знаходимо з закону Ома:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\lambda C}.$$

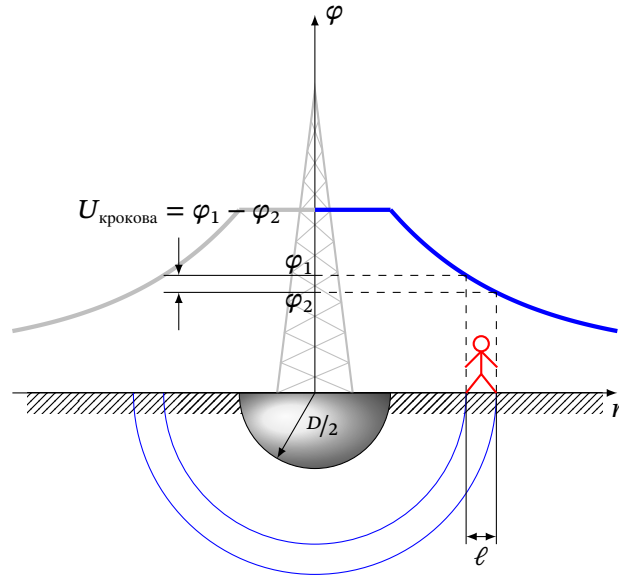
В системі SI остання формула матиме вигляд:

$$R = \frac{\varepsilon_0}{\lambda C}.$$

2.15. $R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), C = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$

2.16. $q_1 = \frac{\varepsilon r_2}{r_2/r_1 + \lambda_1/\lambda_2}, q_2 = \frac{\varepsilon r_1}{r_1/r_2 + \lambda_2/\lambda_1}.$

2.17.



Опір заземлення $R = \frac{1}{\pi \lambda D} \approx 8 \text{ Ом}$.

Потенціал заземленої кулі спадає обернено пропорційно відстані:

$$\varphi = \frac{\varphi_0 D}{2} \frac{1}{r},$$

а крокова напруга визначається за формулою (див. рис.) $U_{\text{крокова}} = \varphi_1 - \varphi_2$, тобто

$$U_{\text{крокова}} = \frac{\varphi_0 D}{2} \frac{\ell}{r^2} \approx 246 \text{ В},$$

де було враховано, що $r = \frac{r + (r + \ell)}{2}$.

2.18. $\mathbf{p} = \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} R^3 \mathbf{E}_0,$

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \frac{3\lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \mathbf{j}_0, & r \leq R \\ \mathbf{j}_0 + \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \left(\frac{3R^3}{r^5} (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{r}) - \frac{R^3}{r^3} \mathbf{j}_0 \right), & r > R, \end{cases} \quad \text{де } r \text{ — відстань від центру}$$

порожнини, $\sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \frac{\mathbf{E}_0 \mathbf{r}}{R}.$

2.19. Задача аналогічна до 2.18, де треба покласти $\lambda_i = 0$.

2.20. $U = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{r_1 + r_2 + r_3} r_1 - \varepsilon_1.$

2.21. $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, I = 0 \text{ при } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_1}{R_2}.$

$$2.22. \varphi_A - \varphi_B = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} R_2 - \varepsilon_1 = -4 \text{ В.}$$

2.23. Відносна похибка

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{(R_x + R_3)(R_1 + R_2)}{R_2 R_x} \frac{\Delta V}{V}$$

де V – напруга на містку і ΔV – різниця потенціалів на клемі гальванометра при зміні R_x на $R_x + \Delta R_x$. У стані рівноваги $R_x/R_3 = R_1/R_2 = b$, тому множник при $\frac{\Delta V}{V}$ дорівнюватиме $(1 + b)^2/b$, він має мінімум при $b = 1$.

$$2.25. R_{AB} = 2R(1 + \sqrt{3}).$$

$$2.26. I = \frac{V R_2 - R_1}{2 R_1 R_2} = 1.0 \text{ А. Струм тече від 1 до 2.}$$

$$2.27. R_{AB} = R_2 \frac{R_2 + 3R_1}{R_1 + 3R_2}.$$

$$2.31. Q = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \sum_i^n q_i \varphi_i.$$

$$2.32. P = \frac{2\pi l U}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

$$2.33. Q = \frac{q^2}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

$$2.34. P_1 = \frac{2V^2}{d} \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S, P_2 = \frac{2V^2}{d} \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S.$$

2.35. Напруженість поля в середині кулі визначається формулою

$$\mathbf{E}_i = \frac{3}{\lambda_i + 2\lambda_e} \mathbf{j}_0,$$

де \mathbf{j}_0 – густина струму далеко від кулі. Потужність, що виділяється в одиниці об'єму згідно закону Джоуля-Ленца $w = \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{E}_i$, отже, використо-

вуючи закон Ома $\mathbf{j}_i = \lambda_i \mathbf{E}_i$:

$$w = \frac{9\lambda_i}{(\lambda_i + 2\lambda_e)^2} \mathbf{j}_i^2.$$

Звідки випливає, що максимум потужності буде при $\lambda_i = 2\lambda_e$.

$$2.36. \quad d = \frac{\rho I_0^2}{6\pi Q} \tau \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$2.37. \quad P_{\max} = \frac{\pi \varepsilon^2 d}{\rho \left(1 + \ln\left(\frac{b}{d}\right)\right)}.$$

$$2.38. \quad \text{На кожному з опорів виділиться } Q = \frac{CV_0^2}{6}.$$

$$2.39. \quad Q = \frac{2}{5} C \varepsilon^2.$$

$$2.40. \quad P_2 = \frac{(\sqrt{13}-1)^3}{8} P_1 \approx 13.3 \text{ Вт.}$$

Магнітостатика

$$3.3. \quad \text{а) } \frac{I}{c} \left(\frac{2\pi - \varphi}{a} + \frac{\varphi}{b} \right); \quad \text{б) } \frac{I}{c} \left(\frac{3\pi}{a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right).$$

$$3.4. \quad \mathbf{B} = \frac{2\pi i}{c} [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}], \text{ де } \boldsymbol{\tau} - \text{тангенціальний вектор, напрямлений в бік протікання струму, } \mathbf{n} - \text{вектор нормалі до поверхні.}$$

$$3.5. \quad \mathbf{B} = -\frac{4\pi i}{c} [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}], \text{ де } \boldsymbol{\tau} - \text{тангенціальний вектор, напрямлений в бік протікання струму, } \mathbf{n} - \text{вектор зовнішньої нормалі до поверхні соленоїда.}$$

$$3.6. \quad B = \frac{4I}{c\pi R}.$$

$$3.7. \quad \mathbf{B} = \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right], \text{ де } \mathbf{E} - \text{напруженість електричного поля диполя.}$$

$$3.8. \quad B = \frac{2\pi I}{cp}, \text{ де } p = \frac{b^2}{a} - \text{фокальний параметр еліпса.}$$

$$3.9. \quad B_z = \frac{2\pi}{c} \frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}, \text{ а) } B_z = \frac{2\pi}{c} In(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \text{ б) } B_z(0) = \frac{2\pi}{c} In, \\ \text{в) } B_z(0) = \frac{4\pi}{c} In.$$

$$3.10. \quad B_z(z) = \frac{2q\omega}{cR^2} \left(\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z \right).$$

$$3.11. \quad B(r) = \begin{cases} \frac{2Ir}{cR_1^2}, & r < R_1 \\ \frac{2I}{cr}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0, & r \geq R_2 \end{cases}.$$

$$3.12. \quad B(r) = \begin{cases} \frac{2I\rho_1 r}{c(\rho_1(R_2^2-R_1^2)+\rho_2 R_1^2)}, & r < R_1 \\ \frac{2I(\rho_1(r^2-R_1^2)+\rho_2 R_1^2)}{cr(\rho_1(R_2^2-R_1^2)+\rho_2 R_1^2)}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{2I}{cr}, & r \geq R_2. \end{cases}$$

$$3.13. \quad B = \frac{2\pi}{c} jd.$$

$$3.14. \quad B(r) = \frac{1}{c} \frac{Id}{rR}.$$

$$3.15. \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} a\omega r^2 \mathbf{e}_r, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}.$$

$$3.21. \quad p = \frac{1}{c} ib\pi R^2.$$

$$3.22. \quad p = \frac{IND^2}{2c}.$$

$$3.23. \quad B = \frac{q\omega R^2}{2c z^3}, \quad B = \frac{2p_m}{z^3}.$$

$$3.24. \quad \text{Для сфери } \mathbf{p}_m = \frac{qR^2}{3c}\boldsymbol{\omega}, \text{ для кулі } \mathbf{p}_m = \frac{qR^2}{5c}\boldsymbol{\omega}. \text{ В обох випадках } \frac{p_m}{L} = \frac{q}{2mc}.$$

$$3.29. \quad \mathbf{A} = -\frac{2I}{c} \ln r \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \text{ — орт, направлений вздовж провідника зі струмом.}$$

$$3.30. \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}].$$

$$3.31. \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}, \text{ де } \mathbf{p}_m = \frac{I\pi R^2}{c} \mathbf{n} \text{ — дипольний момент колового витка, } \mathbf{n} \text{ — вектор нормалі до поверхні витка.}$$

$$3.32. \quad \text{З рівняння (A.34) випливає, що } \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = -(\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \text{ Розписуючи останній вираз в декартовій системі координат, отримуємо шукану формулу.}$$

$$3.33. \quad \text{При калібровці } \mathbf{A}(0) = 0,$$

$$\mathbf{A}(r) = \begin{cases} -\frac{1}{c} \pi r^2 \mathbf{j}, & r \leq R \\ -\frac{1}{c} 2\pi R^2 \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{r}{R} \right) \mathbf{j}, & r \geq R \end{cases}.$$

$$3.34. \quad \Delta \mathbf{B} = -\frac{e^2 \mathbf{B}_0}{3amc^2}.$$

$$3.35. \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} R \omega \sigma r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{4\pi}{3} R^4 \omega \sigma \frac{\sin \theta}{r^2} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}, & r \geq R \end{cases},$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{8\pi}{3c} R \sigma \omega = \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}, & r \geq R \end{cases}.$$

3.36. $\mathbf{A} = -\frac{2\pi j R d}{c} \ln R$, \mathbf{k} — орт, напрямлений вздовж провідника зі струмом.

3.38. $\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{M}$, $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{j}' = 0$, $\mathbf{i}' = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$.

3.39. $\mathbf{M} = \frac{\mu-1}{4\pi} \mathbf{B}_0$.

3.40. $\mathbf{M} = \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \mathbf{B}_0$.

3.41. а) $\oint_S \mathbf{H} d\mathbf{S} = \frac{\mu-1}{\mu} \pi R^2 B_0 \cos \theta$, б) $\oint_\Gamma \mathbf{B} d\mathbf{r} = -(\mu-1) l B_0 \sin \theta$.

3.42. $\mathbf{B} = \begin{cases} 4\pi\mathbf{M}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$, $\mathbf{H} = 0$ в усьому просторі.

3.43. При $r \leq R$, $\mathbf{B} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}$, $\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M}$.

3.44. $\mathbf{H}_{\text{осердя}} \approx -4\pi\mathbf{M} \frac{d}{2\pi R}$, $\mathbf{H}_{\text{зазор}} \approx 4\pi\mathbf{M} \left(1 - \frac{d}{2\pi R}\right)$, $\mathbf{B}_{\text{осердя}} = \mathbf{B}_{\text{зазор}} = \mathbf{H}_{\text{зазор}}$.

3.45. а) $I'_{\text{пов}} = 4\pi\chi I$; б) $I'_{\text{об}} = 4\pi\chi I$. Струми напрямлені протилежно один відносно одного.

3.46. а) $\mathbf{M} = ar^2 \mathbf{B}_0$; б) $\mathbf{j}' = 2a [\mathbf{r} \times \mathbf{B}_0]$. Поверхневий струм $i' = -caR [\mathbf{R} \times \mathbf{B}_0]$, де \mathbf{R} — радіус-вектор точок на поверхні. Поверхневий та об'ємний струми течуть в різних напрямках. Повний молекулярний струм на одиницю довжини дорівнює нулю.

3.47. $\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} n I \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (1 + \chi) n I \mathbf{e}_z$, $\mathbf{i}' = \chi n I \mathbf{e}_\varphi$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.48.} \quad H(r) &= \begin{cases} \frac{2I}{cR^2}r, & r < R \\ \frac{2I}{cr}, & r \geq R \end{cases}, \quad B(r) = \begin{cases} \mu_1 \frac{2I}{cR^2}r, & r < R \\ \mu_2 \frac{2I}{cr}, & r \geq R \end{cases}, \\
 M(r) &= \begin{cases} (\mu_1 - 1) \frac{2I}{cR^2}r, & r < R \\ (\mu_2 - 1) \frac{2I}{cr}, & r \geq R \end{cases}, \quad j'(r) = \begin{cases} (\mu_1 - 1) \frac{4I}{cR^2}, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases}, \\
 i' &= \frac{2I}{R}(\mu_2 - \mu_1), \text{ при } r = R.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.49.} \quad M(r) &= \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{4I}{r}, \quad B(r) = \frac{\mu}{\mu+1} \frac{4I}{cr}, \quad H_1(r) = \frac{\mu}{\mu+1} \frac{4I}{cr}, \quad H_2(r) = \frac{1}{\mu+1} \frac{4I}{cr}, \\
 I' &= I \frac{\mu-1}{\mu+1}.
 \end{aligned}$$

3.50. $B_r = (1 + 4\pi\chi) \frac{2I}{cr}$, $I' = 4\pi\chi I$, на зовнішній та внутрішній поверхнях магнетика напрямок струмів намагнічування співпадає з напрямком вільних струмів.

3.51. $I' = 0$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.53.} \quad \mathbf{H} &= \begin{cases} \frac{2Ir}{cR^2} \mathbf{e}_\varphi, & r \leq R \\ \frac{2I}{cR} \mathbf{e}_\varphi, & r > R \end{cases}, \\
 \mathbf{B} &= \begin{cases} \frac{2Ir}{cR^2} \mathbf{e}_\varphi, & r \leq R \\ \frac{2I\mu_1}{cR} \mathbf{e}_\varphi, & r > R \text{ (в середовищі з } \mu_1 \text{)} \\ \frac{2I\mu_2}{cR} \mathbf{e}_\varphi, & r > R \text{ (в середовищі з } \mu_2 \text{)} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.54.} \quad \mathbf{p}_m = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} R^3 \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{3\mu_i}{\mu_i + 2\mu_e} \mathbf{B}_0, & r \leq R, \\ \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}, & r > R. \end{cases}$$

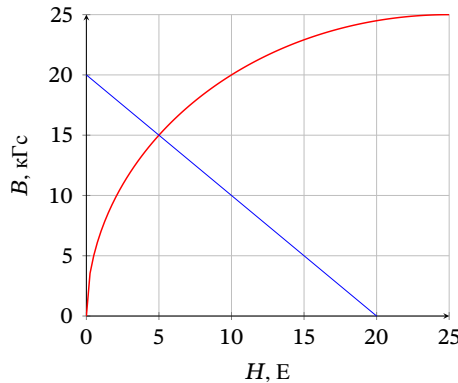
Густина об'ємних струмів намагнічування $\mathbf{j}' = 0$, поверхнева густина струмів намагнічування $i = \frac{3c}{4\pi} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{r}}{R}$, де \mathbf{r} – радіус-вектор поверхні провідника.

3.55. $\mathbf{B} = \frac{3\mu}{1+2\mu} \mathbf{B}_0$.

$$3.56. \quad B = \frac{4\pi M_r}{1 + \frac{2dM_r}{RH_c}}.$$

$$3.58. \quad I_0 = \frac{cl}{4\pi N} \left(H_0 + 4\pi M_0 \frac{d}{l} \right), \quad B = \frac{4\pi N}{cl} I + 4\pi M_0 \left(1 - \frac{d}{l} \right).$$

3.59. На рисунку показана робоча точка залізного осердя ($H \approx 5$ Е, $B \approx 15$ кГс). $\mu = 3000$.



$$3.60. \quad p_m = \frac{\mu^{-1}}{\mu} B a^2 d, \quad B = \frac{p_m}{r^3}.$$

3.61. $\frac{F}{l} = \frac{2\pi I^2}{c^2 r}, \quad \frac{W}{l} = \frac{2\pi I^2}{c^2} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$, де r_0 — значення відстані, прийняте за нульовий рівень енергії.

$$3.62. \quad \frac{F}{l} = \frac{2I^2}{c^2 b} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right).$$

$$3.63. \quad p = \frac{I^2}{2\pi c^2 R^2}.$$

$$3.64. \quad p = \frac{I^2(R^2 - r^2)}{R^4 \pi c^2}.$$

3.65. Узагальненою силою є момент сил, що діє з боку магнітного поля $N = -\frac{1}{c} I S B \sin \theta$.

$$3.67. \quad p = \frac{2\pi i^2}{c^2}.$$

$$3.68. N = 2IM_0S.$$

$$3.69. F_{\parallel}/l = I \cdot B_{\perp} = I \cdot B \cos \varphi.$$

$$3.70. B = \frac{c\pi d^2 \sigma_{\max}}{4RI}.$$

$$3.71. M = \frac{4\pi p_m NI}{cl}.$$

3.72. а) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = -\frac{2I}{cr^2} \mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})$, б) $\mathbf{F} = -\frac{2I}{cr^2} [\mathbf{k} \times \mathbf{p}]$, $\mathbf{M} = 0$,
в) $\mathbf{F} = \frac{2I}{cr^2} [\mathbf{k} \times \mathbf{p}]$, $\mathbf{M} = 0$, де \mathbf{k} — орт, напрямлений вздовж струму.

$$3.74. \mathbf{F} = -\frac{6\pi}{c} \frac{IR^2 z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{p}_m.$$

$$3.75. \mathbf{F} = -\left(\frac{2\pi IR^2}{c}\right)^2 \frac{3z}{(z^2 + R^2)^4} \mathbf{k}.$$

3.76. Діамагнетик орієнтується перпендикулярно осі витка. $F = 1.1 \cdot 10^{-7}$ дин.

3.77. Алюмінієвий стрижень орієнтується вздовж осі витка.

$$3.78. F = -\frac{4I^2 r^3}{c^2 l^3} \frac{\mu-1}{\mu+2}.$$

$$3.79. h = \frac{2\pi\mu(\mu-1)n^2 I^2}{g\rho c^2}.$$

$$3.80. F = \frac{2\pi}{c} (\mu-1) n^2 I^2 S.$$

$$3.82. \mathbf{F} = \frac{V}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}].$$

$$3.84. \quad F = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\pi \mu I N r}{\pi R + \mu d} \right)^2.$$

3.85.

а) $B = 1.257 \text{ Тл.}$

б) $L = 10^{-2} \text{ Гн;}$

в) $W_e \approx 50 \text{ Дж;}$

г) $W_m \approx 50 \text{ Дж.}$

Електродинаміка

$$4.1. \quad v = c \frac{mgR}{(Bl)^2}.$$

$$4.2. \quad v = c \frac{\mathcal{E} + \frac{mg}{Bl} r}{\left(1 + \frac{r}{R}\right) Bl}.$$

$$4.3. \quad v = \frac{3}{2} \frac{mgRc^2}{B^2 l^2}.$$

$$4.4. \quad I = \frac{\omega B r^2}{2cR}.$$

4.5. $V_1 = \frac{B\omega C_2 |R_1^2 \pm R_2^2|}{2(C_1 + C_2)}, V_2 = \frac{B\omega C_1 |R_1^2 \pm R_2^2|}{2(C_1 + C_2)}$. Знак «+» стосується випадку обертання дисків в різних напрямках, «-» — до обертання дисків в одному напрямку.

$$4.6. \quad \text{а) } V = \frac{B\omega R^2}{2c}; \text{ б) } \sigma = \frac{\omega BR}{4\pi}, \rho = -\frac{\omega B}{2\pi}.$$

$$4.7. \quad \rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{2\pi c}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}), \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{2\pi c}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B})R.$$

$$4.8. \quad V = \frac{Bl^2 \omega}{8c}.$$

$$4.9. \text{ а) } \mathcal{E} = \frac{2I_0 l}{c(a+vt)}, \text{ б) } I = \frac{I_0 l v}{cr(a+vt)(l+vt)}.$$

$$4.10. \mathcal{E} = \frac{2Ia^2 v}{c(b+vt)(a+b+vt)}, L_{12} = 2a \ln \left(1 + \frac{a}{s} \right).$$

$$4.11. x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, I = -v_0 \sqrt{\frac{m}{L}} \sin \omega t, \text{ де } \omega = \frac{lB}{\sqrt{mL}}.$$

$$4.12. \omega = \frac{qB(t)}{2mc}.$$

$$4.13. q_1 = -\frac{1}{c} \dot{\Phi} \frac{C_1(C_2+C_3/2)}{C_1+C_2+C_3}, q_2 = \frac{1}{c} \dot{\Phi} \frac{C_2(C_1+C_3/2)}{C_1+C_2+C_3}, q_3 = \frac{1}{c} \dot{\Phi} \frac{C_3/2(C_2-C_1)}{C_1+C_2+C_3}.$$

$$4.14. V_1 = \alpha \frac{R_1}{R_1+R_2}, V_2 = -\alpha \frac{R_2}{R_1+R_2}.$$

$$4.15. L = \frac{4\pi\nu N^2 S}{l}.$$

$$4.16. L = 2bM\mu \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right).$$

$$4.17. L_{12} = 2bN\mu \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right).$$

$$4.18. L/l = \frac{\mu}{2} \left(1 + 4 \ln \frac{R_2}{R_1} \right).$$

$$4.19. L = 4\pi \frac{a}{b}.$$

$$4.20. L = \frac{1}{4\pi^2} \ln \frac{a}{R}.$$

$$4.21. L_{12} = 2a \ln \left(1 + \frac{a}{l} \right).$$

$$4.22. L_{12} \approx \frac{2\pi^2 R^4}{l^3}.$$

$$4.23. \quad M = 8\pi a.$$

$$4.24. \quad \text{а) } L_{12} \approx \frac{2\pi^2 R_1^2}{R_2} \quad \text{б) } \Phi_{12} = \frac{2\pi^2 R_1^2}{c R_2} I.$$

$$4.25. \quad \Phi = \frac{2Ia}{c} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

$$4.26. \quad I = \frac{\pi^2 r^2 G \omega}{\sqrt{2} c^2 R} i_0 \sin \omega t.$$

$$4.27. \quad I = \frac{2p_m \pi a^2 \omega}{c R l^3} \sin \omega t.$$

$$4.28. \quad \text{В СИ } p_m = \frac{\varphi R D}{4\pi b n}.$$

$$4.29. \quad \mathbf{p}_m = -\frac{1}{2} R^3 \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{B} = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \mathbf{B}_0 - \frac{3R^3(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{2r^5}, & r > R, \end{cases}$$

Густина об'ємних струмів намагнічування $\mathbf{j}' = 0$.

Поверхнева густина струмів намагнічування $i = -\frac{3c}{8\pi} \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{r}}{R}$, де \mathbf{r} – радіус-вектор поверхні провідника.

$$4.30. \quad F = \frac{9}{64} B_0^2 R^2.$$

4.31. Магнітний потік, що пронизує надпровідне кільце зберігається $\Phi = \text{const}$. Оскільки, в спочатку диполь не було внесено, то $\Phi = 0$, і залишатиметься таким же. Коли магнітний диполь опиниться в центрі кільця, то магнітний потік, що пронизує кільце, можна порахувати як:

$$\Phi = \frac{1}{c} L I + \frac{1}{c} L_{21} I_m = 0,$$

де L – індуктивність кільця, I – струм, що тече по кільцю, L_{21} – коефіцієнт взаємодії, I_m – умовний струм, що циркулює в диполі p_m ($I_m = \frac{cp_m}{S}$, S – умовна площа витка диполя).

З закону збереження магнітного потоку випливає, що $I = -\frac{L_{12}}{L} \frac{cp_m}{S}$. Для знаходження L_{21} , скористаємось теоремою взаємності, $L_{21} = L_{12} = \frac{2\pi S}{R}$.

Отже,

$$I = -\frac{2\pi c p_m}{RL}.$$

Знак мінус вказує на те, що індукційний що магнітний момент струму протилежний магнітного моменту диполя.

$$4.32. \quad I = \frac{c\Phi_0}{L}.$$

$$4.33. \quad I = \frac{cB\pi R^2}{L}, \quad A = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{B^2\pi^2 R^4}{2L}.$$

$$4.34. \quad h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3p_m^2}{mg}}.$$

$$4.35. \quad I \geq c\sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}} = 8.4 \cdot 10^{10} \text{ Фр/с} = 25 \text{ А}.$$

$$4.36. \quad v_0 = B_0 \sqrt{\frac{R^3}{2m}} \approx 20 \text{ м/с}.$$

$$4.37. \quad F = \left(\frac{2\pi IR}{c}\right)^2 \frac{3r^3 z}{2(R^2+z^2)^4}.$$

$$4.38. \quad p = \frac{9}{32\pi} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r}, \text{ де } \mathbf{r} - \text{радіус-вектор поверхні сфери.}$$

$$4.40. \quad \omega = -\frac{q\mathbf{B}(t)}{2mc}.$$

$$4.41. \quad \omega = \frac{2\sigma\mathbf{B}}{c\rho R}.$$

$$4.42. \quad E(r) = \frac{2\pi\epsilon n I_0 R^2 \omega}{c^2} \frac{1}{r} \sin \omega t.$$

$$4.43. \quad \mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{2\pi}{c^2} n \dot{I} r \mathbf{e}_\varphi, & r < R, \\ -\frac{2\pi}{c^2} n a^2 \dot{I} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, & r > R. \end{cases}$$

$$4.44. \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2\pi\rho\omega}{c}(R^2 - r^2)\mathbf{e}_z, & r < R, \\ 0, & r \geq R, \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\pi k\rho r\omega}{2c^2}(2R^2 - r^2)\mathbf{e}_\varphi + 2\pi\rho r\mathbf{e}_r, & r < R, \\ \frac{\pi k\rho rR^4}{2c^2r}\mathbf{e}_\varphi + \frac{2\pi\rho R^2}{r}\mathbf{e}_r, & r \geq R. \end{cases}$$

$$4.47. \quad B = \frac{2I}{cR^2}S.$$

$$4.48. \quad B = \frac{\varepsilon\omega r}{2cd}V_0 \cos \omega t, \text{ де } r - \text{відстань від осі конденсатора.}$$

$$4.49. \quad B = \frac{2\pi\lambda rV_0}{cd} \left(\sin \omega t + \frac{\varepsilon\omega}{4\pi\lambda} \cos \omega t \right).$$

$$4.51. \quad \text{Це можливо за умови } \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k} = 0.$$

$$4.53. \quad \mathbf{S} = \frac{q^2}{4\pi r^5} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}).$$

$$4.54. \quad \text{Вектор Пойнтінга в дипольному наближенні } \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}^2 \mathbf{v} - \mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})).$$

$$4.55. \quad \Phi = I^2 R$$

$$4.56. \quad W = \frac{2\pi^2 N^2 \varepsilon^2}{c^2 l R^2} = \frac{1}{2c^2} L I^2.$$

$$4.60. \quad S = \frac{P}{4\pi \ln\left(\frac{d}{R}\right)} \frac{d^2}{x^2(x-d)^2}, \text{ де } x - \text{відстань від точки до осі одного з провідників.}$$

$$4.61. \quad \Delta p = \frac{EB}{2\pi c} V = 10^{-6} \text{ г}\cdot\text{см/с.}$$

Рух частинок в електромагнітному полі

$$5.1. \quad \omega = \sqrt{\frac{qQ}{mR^3}}.$$

$$5.2. \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{q}{m} \frac{Q}{v_0^2 b}$$

$$5.3. \quad x = \frac{2E_0}{k}.$$

$$5.4. \quad x = \frac{p_0 c}{qE} \operatorname{arcsch} \frac{cqEt}{\varepsilon_0}, \quad y = \frac{1}{qE} \sqrt{\varepsilon_0^2 + (qcEt)^2} - \frac{\varepsilon_0}{qE}. \text{ Траєкторія частинки}$$

$$y = \frac{\varepsilon_0}{qE} \left(\operatorname{ch} \frac{eEx}{cp_0} - 1 \right).$$

$$5.6. \quad \Delta\omega = \pm \frac{qB}{2mc}. \text{ Частота } \Delta\omega > 0, \text{ якщо } \mathbf{B} \uparrow \downarrow \omega, \text{ і } \Delta\omega < 0, \text{ якщо } \mathbf{B} \uparrow \uparrow \omega.$$

$$5.7. \quad l_{\max} = R e^{\frac{mv_0}{2cqI}}.$$

$$5.8. \quad v_G = \frac{m}{q} \frac{cv^2 A}{2B^2}.$$

$$5.9. \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{q}{m} \frac{Q}{bv_0^2}.$$

$$5.10. \quad x(t) = \frac{E_0}{B_0} c \left(t - \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \right), \quad y(t) = \frac{E_0}{B_0} \frac{c}{\Omega} (1 - \cos \Omega t), \text{ де } \Omega = \frac{qB_0}{mc} \text{ —}$$

циклотронна частота.

$$5.11. \quad v_0 = c \frac{E_0}{B_0}.$$

$$5.12. \quad x(t) = \frac{qE_0}{2m\Omega^2} (\sin \Omega t - \Omega t \cos \Omega t), \quad y(t) = \frac{qE_0}{2m\Omega} t \sin \Omega t.$$

$$5.13. \quad z = l \operatorname{tg} \sqrt{\frac{qB_0^2}{2mc^2E_0}} y.$$

$$5.14. \quad v = \frac{rqB_0}{2mc}, \quad \rho = \frac{r}{2}.$$

5.15. Радіус орбіти $R = \frac{qQc}{mv^2} \sin \theta$, відстань площини орбіти до діона $d = \frac{qQc}{mv^2} \cos \theta$, де $\operatorname{tg} \theta = \frac{Qc}{Gv}$.

Зберігається енергія $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Qq}{r}$, та вектор $\mathbf{J} = \mathbf{L} - \frac{Gq}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}$. Для умов нашої задачі $E = -\frac{mv^2}{2}$, а $\mathbf{J} = (mvR - \frac{Gq}{c} \cos \theta) \mathbf{n}$, де \mathbf{n} — вектор нормалі до траєкторії.

$$5.17. \quad R = \sqrt{\frac{2B_0}{3a}}.$$

$$5.18. \quad \Delta l = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2V}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}).$$

$$5.19. \quad V = 2 \frac{e}{m} \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{a}{b}.$$

$$5.20. \quad B \leq \sqrt{\frac{8mV}{e}} \frac{b}{b^2 - a^2}.$$

Релятивістська електродинаміка

6.1. $\mathbf{E} = \frac{q^2}{r^3} \mathbf{r} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$, де θ — кут між вектором швидкості \mathbf{v} і радіус-вектором \mathbf{r} , $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3}$.

6.7. Сила в лабораторній системі менша в $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ разів.

$$6.8. \quad \sigma = \frac{e^2}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$6.9. \quad \rho' = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad j' = \rho' V.$$

$$6.10. \quad \rho' = \frac{-vj}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad j' = \frac{j}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

6.11. У власній системі відліку частинки $\varphi' = \frac{q}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$, $\mathbf{A}' = 0$, де x' , y' , z' – декартові координати власної системи відліку. В лабораторній системі відліку $\varphi = \frac{q}{\sqrt{(x-Vt)^2 + (1-V^2/c^2)(y^2+z^2)}}$, $\mathbf{A} = \varphi \frac{\mathbf{V}}{c}$.

Квазістаціонарні струми в електричних колах

$$7.1. \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t} \right).$$

$$7.2. \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

$$7.3. \quad Q = \frac{C_1 \mathcal{E}^2}{2} = 0.3 \text{ Дж.}$$

$$7.4. \quad Q = \frac{L_2 \mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

$$7.5. \quad I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{C/L}, \quad U_{C\max} = 2\mathcal{E}.$$

7.7. $\omega = \frac{i}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$, комплексному ω відповідають згасаючі коливання в контурі.

$$7.8. \quad M = -L_2.$$

$$7.9. \omega_{1,2}^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm \sqrt{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_{12}^2}}{2 C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$$

$$7.10. I = \frac{\varepsilon}{i \omega L}, \text{ тобто струм через амперметр не залежить від опору реостата.}$$

$$7.11. I = \varepsilon_0 \frac{1 - \omega^2 CL}{\omega L (2 - \omega^2 CL)} \sin \omega t, I = \varepsilon_0 \frac{1 - \omega^2 CL}{\omega (2 - \omega^2 CL)} \sin \omega t.$$

$$7.12. RC = L/R, \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

$$7.13. \omega^2 LC = 1.$$

$$7.14. I_1 = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos 2\omega t, I_1 = \frac{\varepsilon_0}{2(R+R_1)}.$$

$$7.16. \omega L = R, V_{out} = V_{in} \left(\frac{1}{3} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right).$$

$$7.17. R_1 C = RC_1.$$

$$7.18. P = 160 \text{ Вт}, \varphi \approx 37^\circ.$$

$$7.19. \text{ Імпеданс кола } Z = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + Z_1 Z_2}, Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}. \text{ При } \omega > 2/\sqrt{LC}.$$

$$7.20. F = \frac{2I_1 I_2}{2cr} \cos \varphi.$$

$$7.21. \text{ а) } \omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}}, \text{ б) } \omega \geq \sqrt{\frac{1}{2LC}}, \text{ в) } \Omega_2 < \omega < \Omega_1, \text{ де } \Omega_1^2 = 1/LC, \Omega_2^2 = \frac{1}{5}(\Omega_1^2 + 4\Omega^2), \Omega = 1/4LC.$$

Додатки

Додаток А.

Основні формули векторного аналізу

А.1 Диференціальні оператори

Оператор «набла» ∇

$$\nabla = \text{grad} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (\text{A.10})$$

Оператор Лапласа (лапласіан) Δ

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \quad (\text{A.11})$$

Дивергенція вектора \mathbf{A}

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.12})$$

Ротор вектора \mathbf{A}

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.13})$$

А.2 Диференціальні операції в різних системах координат

Декартова система координат

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{A.14})$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{A.17})$$

Циліндрична система координат

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (\text{A.18})$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \\ & + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Сферична система координат

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \quad (\text{A.22})$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta + \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A.3 Другі похідні

$$\text{rot grad } \varphi = \nabla \times (\nabla\varphi) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \quad (\text{A.28})$$

A.4 Похідні від добутків

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \psi \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ grad } \psi \quad (\text{A.29})$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi \quad (\text{A.30})$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A} \quad (\text{A.31})$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{A.32})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (\text{A.33})$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} A^2 = (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{A.35})$$

А.5 Інтегральні характеристики та теореми

Потік вектора \mathbf{A}

$$\Phi_{\mathbf{A}} = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.36})$$

Циркуляція вектора \mathbf{A}

$$\Gamma_{\mathbf{A}} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{A.37})$$

Теорема Остроградського-Гаусса

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (\text{A.38})$$

Теорема Стокса

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.39})$$

Теорема Гріна:

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \iint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.40})$$

Додаток Б. Системи одиниць в електродинаміці

Таблиця Б.1. Таблиця перевodu виразів і формул із однієї системи одиниць в іншу

Величина	Система SI	Система СГС
Швидкість світла	$(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$	c
Напруженість електричного поля (потенціал)	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{E}(\varphi)$	$\mathbf{E}(\varphi)$
Електрична індукція	$\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}} \mathbf{D}$	\mathbf{D}
Густина заряду (заряд, струм, густина струму, поляризація)	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \rho(q, I, \mathbf{j}, \mathbf{P})$	$\rho(q, I, \mathbf{j}, \mathbf{P})$
Магнітна індукція (вектор-потенціал)	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}(\mathbf{A})$	$\mathbf{B}(\mathbf{A})$
Напруженість магнітного поля	$\sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H}$	\mathbf{H}
Намагніченість	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{M}$	\mathbf{M}
Провідність	$\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}$	σ
Опір	$4\pi\varepsilon_0 R$	R
Ємність	$\frac{C}{4\pi\varepsilon_0}$	C
Індуктивність	$\frac{4\pi}{\mu_0} L$	L

Табл. **Б.1** дає схему перевodu виразів і рівнянь з системи СГС в систему SI, і навпаки, при незмінності всіх механічних величин. Щоб за допомогою табл. **Б.1** перетворити будь-яке рівняння, записане в системі одиниць СГС, в рівняння в системі SI, *слід в обох частинах рівняння замінити символи, перелічені в стовпчику «Система СГС», на відповідні символи системи SI.*

Наприклад, якщо ми маємо вираз для магнітної індукції нескінченного соленоїда в системі СГС:

$$B = \frac{4\pi}{c} In.$$

Для переведення цієї формули в систему SI, замінимо ліву частину $B \rightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B$, в правій частині замінимо $1/c \rightarrow \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, а $I \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} I$. Тоді отримаємо:

$$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B = 4\pi \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} In,$$

звідки

$$B = \mu_0 In.$$

Таблиця Б.2. Чисельні коефіцієнти переведу між системами SI та Гауса

Величина	Система SI	Система СГС	Відношення 1 SI = X СГС
Довжина	метр, м	сантиметр, см	10^2
Маса	кілограм, кг	грам, г	10^3
Час	секунда, с	секунда, с	1
Сила	Ньютон, Н	дина, дина	10^5
Робота, енергія	Джоуль, Дж	ерг	10^7
Тиск	Паскаль, Па	дина/см ²	10
Електричний заряд	Кулон, Кл	Франклін (статКулон), Фр	$3 \cdot 10^9$
Густина електричного заряду	Кл/м ³	Фр/см ³	$3 \cdot 10^3$
Сила струму	Ампер, А	Фр/с (статАмпер)	$3 \cdot 10^9$
Густина струму	А/м ²	Фр/(с·см ²)	$3 \cdot 10^5$
Електричний дипольний момент	Кл·м	Фр·см	$3 \cdot 10^{11}$
Електрична напруга	Вольт, В	статВольт, статВ	$1/3 \cdot 10^{-2}$
Напруженість електричного поля	В/м	статВ/см	$1/3 \cdot 10^{-4}$
Індукція електричного поля	Кл/м ²	Фр/см ²	$3 \cdot 10^5$
Електричний опір	Ом, Ом	с/см	$1/9 \cdot 10^{-11}$
Електрична ємність	Фарад, Ф	см	$9 \cdot 10^{11}$
Напруженість магнітного поля	А/м	Ерстед, Е	$4\pi \cdot 10^{-3}$
Магнітна індукція	Тесла, Тл	Гаус, Гс	10^4
Магнітний дипольний момент	А·м ²	ерг/Гс	10^3
Магнітний потік	Вебер, Вб	Максвел, Мкс	10^8
Індуктивність	Генрі, Гн	см	10^9

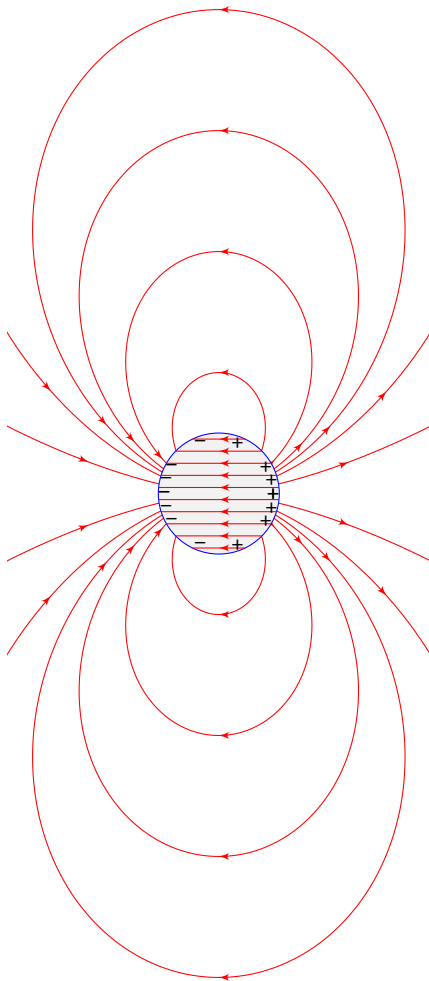
У визначенні розмірності індуктивності в Гаусовій системі існує деяка плутанина. Вона пов'язана з тим, що ряд авторів використовує електромагнітну систему одиниць для введення поняття індуктивності. В цій системі енергія магнітного поля визначається як $L'I^2/2$, в гаусовій же системі ця величина дається означенням $LI^2/2c^2$. Звідки видно, що $L' = L/c^2$, а отже розмірністю $L' \in [c^2/\text{см}]$.

Сфери в електричному та магнітному полях

Позначення

1. \mathbf{E}_0 та \mathbf{B}_0 – поля на далекій відстані від куль.
2. R – радіус кулі.
3. Індекс e відноситься до оточуючого середовища, i – до матеріалу кулі.
4. Формули для діелектриків можна замінити на формули для металів, якщо покласти $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow 0$.
5. Формули для магнетиків можна замінити на формули для надпровідників, якщо покласти $\mu = 0$.

Електростатичне поле однорідно поляризованої кулі. Задача 1.111

Поле вектора \mathbf{E} 

Вектор поляризації в середині кулі:

$$\mathbf{P} = \text{const.}$$

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{P}.$$

Напруженість електричного поля:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, & r \leq R \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \left(\frac{\mathbf{P}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{P}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right), & r > R. \end{cases}$$

Зв'язані заряди на поверхні:

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}.$$

Діелектрична куля в однорідному електричному полі. Задача 1.119

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} R^3 \mathbf{E}_0,$$

Напрямок дипольного моменту визначається різницею $\varepsilon_e - \varepsilon_i$.

Потенціал кулі:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), & r \leq R \\ -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, & r > R \end{cases},$$

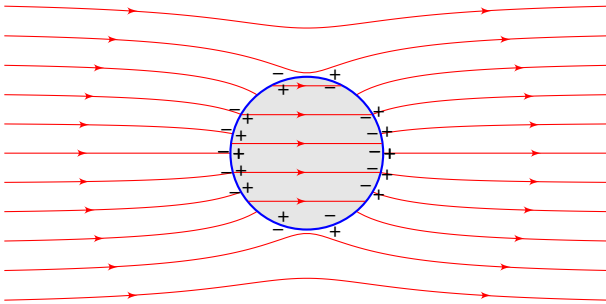
Поле кулі:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

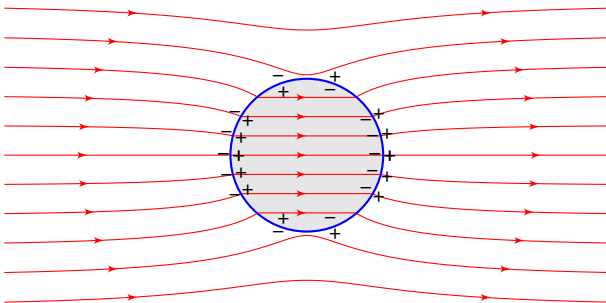
Зв'язані заряди на поверхні:

$$\sigma' = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{R}.$$

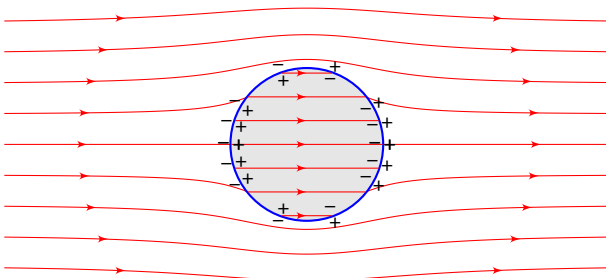
Поле вектора \mathbf{E} ($\varepsilon_i > \varepsilon_e$)



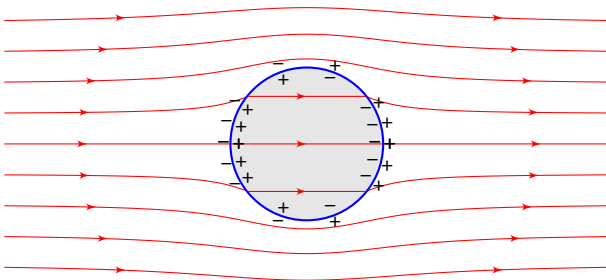
Поле вектора \mathbf{D} ($\varepsilon_i > \varepsilon_e$)



Поле вектора \mathbf{E} ($\varepsilon_i < \varepsilon_e$)



Поле вектора \mathbf{D} ($\varepsilon_i < \varepsilon_e$)



Металева сфера в однорідному електричному полі

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = R^3 \mathbf{E}_0,$$

Потенціал кулі:

$$\varphi = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, & r > R \end{cases},$$

Поле кулі:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

Вільні заряди на поверхні:

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{R}.$$

Провідна куля в середовищі по якому тече струм. Задача 2.18

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} R^3 \mathbf{E}_0,$$

Поле:

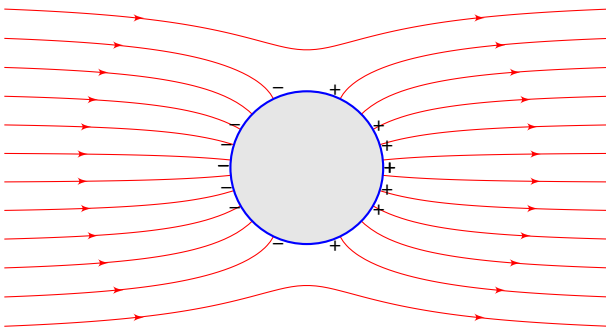
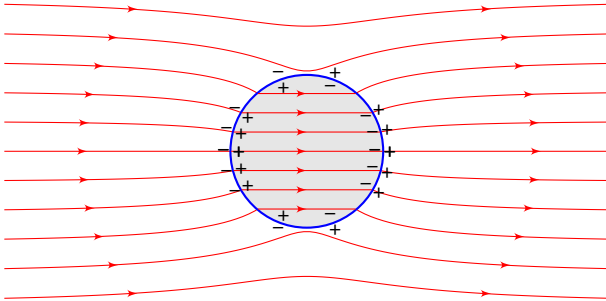
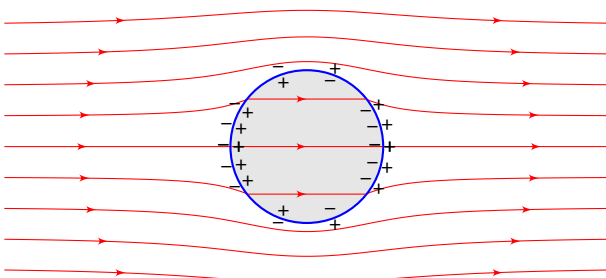
$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3\lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \mathbf{E}_0, & r \leq R \\ \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

Густина струму:

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \frac{3\lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \mathbf{j}_0, & r \leq R \\ \mathbf{j}_0 + \lambda_e \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \lambda_e \frac{\mathbf{p}}{r^3}, & r > R, \end{cases}$$

Заряди на поверхні:

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda_i - \lambda_e}{\lambda_i + 2\lambda_e} \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{R}.$$

Поле вектора \mathbf{E} Поле вектора \mathbf{j} ($\lambda_i > \lambda_e$)Поле вектора \mathbf{j} ($\lambda_i < \lambda_e$)

Куля з магнетика в однорідному магнітному полі. Задача 3.54

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p}_m = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} R^3 \mathbf{B}_0,$$

Поле кулі:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{3\mu_i}{\mu_i + 2\mu_e} \mathbf{B}_0, & r \leq R \\ \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

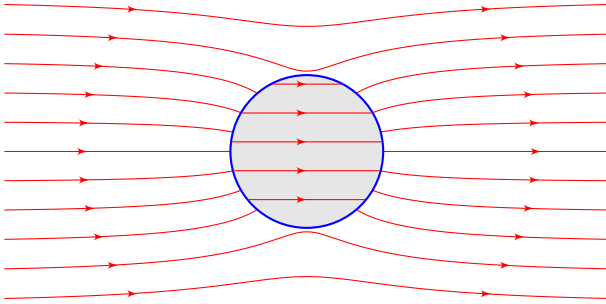
Густина об'ємних струмів намагнічування $\mathbf{j}' = 0$.

Поверхнева густина струмів намагнічування

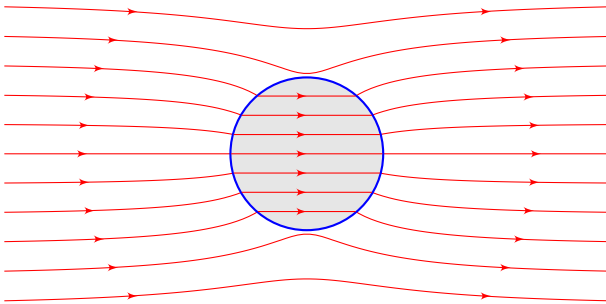
$$i = \frac{3c}{4\pi} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{r}}{R},$$

де \mathbf{r} – радіус-вектор поверхні провідника.

Поле вектора \mathbf{H} ($\mu_e > \mu_i$)



Поле вектора \mathbf{B} ($\mu_e > \mu_i$)



Надпровідна куля в однорідному магнітному полі \mathbf{B}_0 . Задача 4.29

Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p}_m = -\frac{1}{2} R^3 \mathbf{B}_0,$$

Поле кулі:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}, & r > R, \end{cases}$$

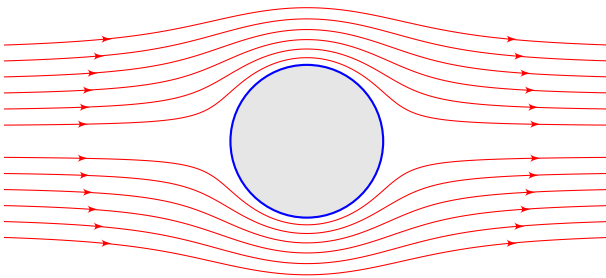
Густина об'ємних струмів намагнічування $\mathbf{j}' = 0$.

Поверхнева густина струмів намагнічування

$$i = -\frac{3c}{8\pi} \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{r}}{R},$$

де \mathbf{r} – радіус-вектор поверхні провідника.

Поле вектора \mathbf{B}



Фізичні константи

Таблиця Г.1. Деякі фізичні константи в системі СГС

Константа	Символ	Значення
Швидкість світла у вакуумі	c	$2.99792458 \cdot 10^{10}$ см/с
Гравітаційна стала	G	$6.67428 \cdot 10^{-8}$ см ³ /(г·с ²)
Стала Планка	\hbar	$1.0545716 \cdot 10^{-27}$ ерг·с
Елементарний заряд	e	$4.80320427 \cdot 10^{-10}$ Фр
Маса електрона	m_e	$9.10938215 \cdot 10^{-20}$ г
Енергія спокою електрона	$m_e c^2$	$0.511 \cdot 10^6$ еВ
Маса протона	m_p	$1.6726219 \cdot 10^{-30}$ г
Енергія спокою протона	$m_p c^2$	$938.26 \cdot 10^6$ еВ
Електрон-Вольт	еВ	$1.602 \cdot 10^{-12}$ ерг
Борівський радіус	a_0	$5.2917720859 \cdot 10^{-9}$ см
Магнетон Бора	μ_B	$9.27400915 \cdot 10^{-21}$ ерг/Гс
Стала Больцмана	k	$1.3806504 \cdot 10^{-16}$ ерг/К
Універсальна газова стала	R	$8.314 \cdot 10^7$ ерг/(К·моль)
Число Авогадро	N_A	$6.022 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Атомна одиниця маси	u	1.6604210^{-24} г

Література

Підручники та посібники

1. *Алешкевич В. А.* Электромагнетизм. — М. : Физматлит, 2014. — 404 с.
2. *Ахиезер А. И.* Общая физика : Электрические и магнитные явления: Справочное пособие. — К. : Наукова думка, 1981. — 472 с.
3. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. — М. : Высшая школа, 1985. — 504 с.
4. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. — М. : Наука, 1984. — 208 с. — (Проблемы науки и технического прогресса).
5. *Джексон Д.* Классическая электродинамика. — М. : Мир, 1965. — 703 с.
6. *Зильберман Г. Е.* Электричество и магнетизм. — М. : Наука, 1970. — 384 с.
7. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Классическая теория поля. — ГИТТЛ, 1951. — 479 с.
8. *Калашников С. Г.* Электричество. — 6-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — 624 с. — ISBN 5-9221-0312-1.
9. *Матвеев А. Н.* Том 3. Электричество и магнетизм. — Высшая школа, 1983. — 463 с.
10. *Мешков И. Н., Чириков Б. В.* Электромагнитное поле : в 2 частях. Часть 1. Электричество и магнетизм. — Н. : Наука, 1987. — 272 с.
11. *Парновский С. Л.* Електрика та магнетизм: додаткові матеріали до курсу. — ФТІ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 24 с.
12. *Парселл Э.* Берклеевский курс физики : в 6 т. Том 2. Электричество и магнетизм. — 3-е изд. — М. : Наука, 1983. — 416 с.
13. *Пеннер Д. И., Угаров В. А.* Электродинамика и специальная теория относительности. — М. : Просвещение, 1980. — 271 с.

14. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Том 2. Электричество. — 3-е изд. — М. : Наука, 1988. — 496 с.
15. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики : в 5 т. Том 3. Электричество. — 4-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — 655 с.
16. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика / пер. А. В. Гапонова, М. А. Миллер. — Перевод со 2-го издания. — М. : ИЛ, 1954. — 604 с.
17. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — 11-е изд. — М.: Физматлит, 2003. — 618 с.
18. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 6. Электродинамика. — 2-е. — М.: Мир, 1977. — 354 с.
19. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 5. Электричество и магнетизм. — 2-е. — М.: Мир, 1977. — 306 с.
20. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 7. Физика сплошных сред. — 2-е. — М.: Мир, 1977. — 290 с.

Задачники

21. *Брандт Н. Н., Миронова Г. А., А. М. С.* Электростатика в вопросах и задачах. Пособие по решению задач для студентов. — 2-е изд. — СПб. : Лань, 2010. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-1088-0.
22. *Зильберман А. Р., Сурков Е. Л.* Задачи для физиков. — 1971.
23. *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике. — 9-е изд. — Бином, 2012. — 432 с.
24. Сборник задач по общему курсу физики. III. Электричество и магнетизм / С. П. Стрелков [и др.] ; под ред. И. А. Яковлев. — 5-е. — М.: Физматлит, 2006. — 232 с.
25. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика / С. М. Козел [и др.] ; под ред. В. А. Овчинкин. — Наука, 2004. — 400 с.
26. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями / под ред. А. П. Леванюк. — 3-е, переработанное. — М.: Мир, 1978. — 546 с.