

## آزمون تستی مرحله یک شازرز، بهمن ۱۳۹۹



زمان آزمون ۱۰۵ دقیقه است.

آزمون شامل ۱۵ سوال ۵ گزینه ای است.

هر پاسخ درست ۴ نمره و هر پاسخ غلط ۱ نمره منفی دارد.

ترتیب سوالات به صورت تصادفی است، پیشنهاد میشود همه سوالات را بخوانید.



۱- اعداد ۱ تا ۱۰ به ترتیب از چپ به راست نوشته شده اند هر مرحله دو عدد متوالی (در آرایه) به طور تصادفی و با احتمال برابر انتخاب می کنیم و اگر این دو عدد  $a$  و  $b$  باشد این دو عدد را پاک می کنیم و جای این دو عدد  $a - b$  را می نویسیم. امید ریاضی عدد نهایی چند است ؟  
مثال:

$$\langle 1, \underline{2}, 3, 4 \rangle \rightarrow \langle 1, \underline{-1}, 4 \rangle \rightarrow \langle \underline{1}, -5 \rangle \rightarrow \langle 6 \rangle$$

(۱) -۱      (۲) ۱      (۳) ۰      (۴) ۹      (۵) -۹

۲- عمو صفر یک تاس ۱۲ وجهی دارد که روی آن اعداد ۱ تا ۱۲ قرار دارد و این تاس را می اندازد. علیرضا ۲ تاس ۶ وجهی متمایز دارد که روی آنها اعداد ۱ تا ۶ قرار دارد و این ۲ تاس را می اندازد. اگر پس از انداخته شدن تاس ها بتواند یک یا دو تاس از این تاس ها را انتخاب کند که جمع اعداد تاس های انتخاب شده اش برابر عدد تاس عمو صفر شود برنده بازی است. احتمال اینکه علیرضا برنده بازی شود چقدر است.

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{12}$       (۳)  $\frac{11}{72}$       (۴)  $\frac{17}{72}$       (۵) هیچ کدام

۳- یک جدول با ۱۳۹۹ سطر و ۱۳۹۹ ستون داریم که در ابتدا تمام خانه های آن برابر ۰ است. ابتدا تعدادی از سطر ها را انتخاب می کنیم (ممکن است هیچ سطر انتخاب نشود) و تمام خانه هایی که در سطر های انتخاب شده قرار دارد را یک واحد زیاد می کنیم. سپس تعدادی از ستون ها را انتخاب می کنیم (ممکن است هیچ ستونی انتخاب نشود) و تمام خانه هایی که در این ستون ها قرار دارد را یک واحد زیاد می کنیم.

اگر تعداد حالت های مختلف جدول نهایی را  $x$  در نظر بگیریم، باقی مانده تقسیم  $x$  بر ۵ چند است ؟

(۱) ۰      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳      (۵) ۴

۴- تعداد رشته هایی به طول ۱۰ از حروف  $a, b, c, d, e$  را بشمارید که هر حرف یا در رشته نیامده باشد یا فقط در یک بازه متوالی از رشته آمده باشد.

(۱) ۱۲۷۴۰۳      (۲) ۱۷۳۷۱      (۳) ۱۰۰۱      (۴) ۳۰۰۳      (۵) ۲۷۵۴۵



۵- یک گراف ۶ راسی داریم که راس های آن از ۱ تا ۶ شماره گذاری شده اند و یالی در این گراف نداریم. میخواهیم دقیقاً ۷ یال بکشیم به طوری که گراف نهایی ساده باشد (طوقه و یال چند گانه نداشته باشد) و همبند نیز باشد. به چند طریق این کار ممکن است؟ دو گراف متفاوتند اگر و تنها اگر دو راس باشد که در یکی از گراف ها بین آن دو یال باشد و در گراف دیگر بین آن دو یال نباشد.

(۱) ۶۳۰۰ (۲) ۵۷۱۵ (۳) ۶۳۱۵ (۴) ۶۴۳۵ (۵) ۵۷۰۰

۶- شایان پس از تمام شدن دوران المپیادش به شغل فروش تسبیح روی آورد. او میخواهد برای فروش بیشتر کمی خلاقیت به خرج دهد. او میخواهد دانه های تسبیح را با  $n$  رنگ به نحوی رنگ کند که رنگ هر دو دانه مجاور متفاوت باشد و به ازای هر دو رنگ متفاوت مانند  $x$  و  $y$  دو دانه مجاور باشند که یکی رنگ  $x$  و دیگری رنگ  $y$  را داشته باشد. لازم به ذکر است که دانه های تسبیح به صورت دایره ای هستند و هر دانه با دو دانه دیگر مجاور است. همچنین تسبیح ها دارای ۱۰ دانه هستند. به ازای چند مقدار  $n$  این رنگ آمیزی ممکن است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵ (۵) ۱۶

۷- به دلیل نزدیک شدن به ولنتاین!، عمو به مغازه سر کوچه رفت تا هدیه ای برای زن عمو بخرد. فروشنده ۳ دسته کارت تبریک به عمو نشان داد که روی کارت های دسته اول اعداد  $\{1, 2, \dots, 8\}$  نوشته شده بود. اعداد روی کارت های دسته دوم  $\{9, 10, \dots, 16\}$  و روی کارت های دسته سوم اعداد  $\{17, 18, \dots, 24\}$  نوشته شده بود.

حال عمو میخواهد از هر دسته دقیقاً یک کارت انتخاب کند که جمع اعداد کارت های انتخاب شده ۳۶ باشد. (۳۶ سال از آشنایی آن دو میگذرد!) عمو به چند طریق میتواند این کار را انجام دهد؟

(۱) ۴۹ (۲) ۶۴ (۳) ۴۳ (۴) ۵۵ (۵) ۴۶

۸- به ازای هر دو راس  $u, v$  در گراف همبند  $G$  تعداد مسیر های مختلف بین آن دو را بدست میاریم، آن را  $f(u, v)$  مینامیم. هر مسیر از  $u$  به  $v$  دنباله از رئوس است که راس تکراری ندارد و هر دو راس متوالی به هم یال دارند و راس اول  $u$  و راس آخر  $v$  باشد.

حال بزرگی یک گراف را برابر بیشینه مقدار ممکن  $f$  به ازای هر جفت از راس ها می نامیم. تعداد گراف های ۶ راسی برچسب دار همبند که عدد بزرگی آن ها برابر ۳ است را در نظر بگیرید. حال باقی مانده تقسیم آن عدد بر ۷ را چند است؟

(۱) ۲ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۴ (۵) ۶



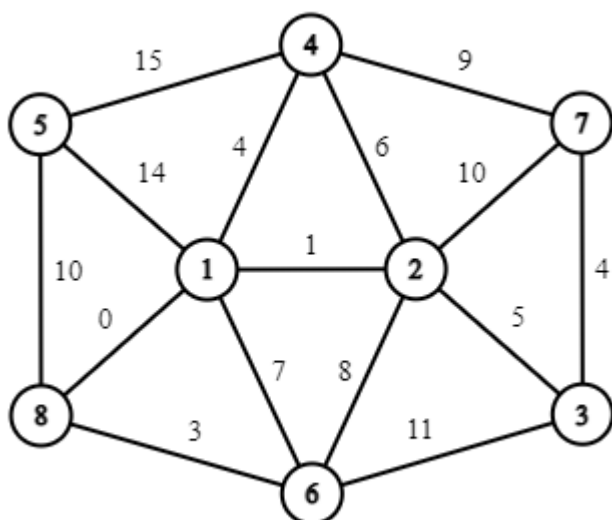
۹- داوود و آراین سر غذا با هم مشکل خوردند و با هم دعوا کردند. علیرضا به آن ها پیشنهاد داد که با هم گردو شکستم بازی کنند و برنده غذا را میل کند. بازی گردو شکستم به این شکل است که دو نفر در فاصله  $t$  از هم قرار دارند و نوبتی حرکت می کنند. در هر مرحله کسی که نوبتش است پای خود را میتواند به صورت طولی بگذارد و فاصله را ۵ تا کم کند یا پای خود را به صورت عرضی بگذارد و فاصله را ۲ تا کم کند.

هر کس در نوبتش باید دقیقا یکی از این عمل ها را انجام دهد. اگر پس از حرکت فاصله نفر  $X$  فاصله دو نفر کمتر یا مساوی ۰ شود نفر  $X$  برنده بازی است. حال گزینه درست را مشخص کنید.

- ۱) به ازای فاصله اولیه های ۵° آراین و به ازای ۶° و ۷° داوود میبرد.
- ۲) به ازای فاصله اولیه ۵° و ۶° و ۷° داوود میبرد.
- ۳) به ازای فاصله اولیه های ۶° آراین و به ازای ۵° و ۷° داوود میبرد.
- ۴) به ازای فاصله اولیه های ۵° و ۷° آراین و به ازای ۶° داوود میبرد.
- ۵) به ازای فاصله اولیه های ۵° و ۶° آراین و به ازای ۷° داوود میبرد.

۱۰- به ازای هر مسیر مانند  $P$  در گراف وزن دار  $G$  سختی آن را برابر بیشینه وزن یال های آن مسیر تعریف میکنیم.  $hard(P)$  را برابر سختی  $P$  تعریف میکنیم. حال اگر از بین مسیر های بین  $u, v$  مسیری که سختی آن از همه کمتر است را  $P_{u,v}$  در نظر بگیریم به ازای گراف روبرو  $\sum_{1 \leq u < v \leq n} hard(P_{u,v})$  برابر

کدام گزینه است ؟



۴۴۴ (۵)

۳۰۲ (۴)

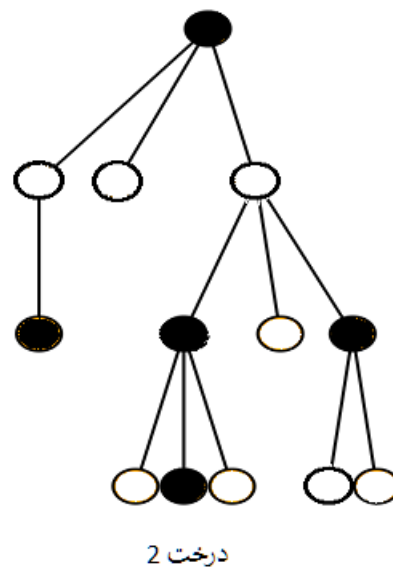
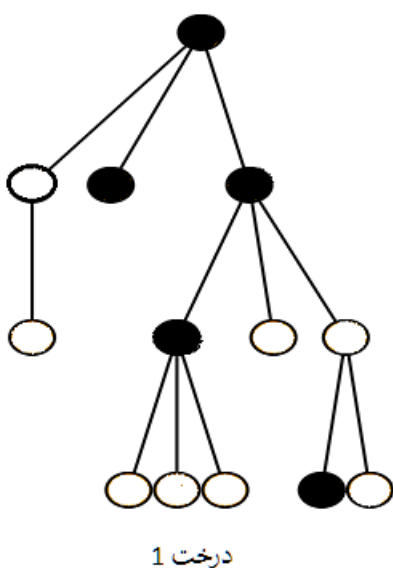
۴۲۰ (۳)

۲۲۲ (۲)

۱۵۱ (۱)



۱۱ - یک درخت ریشه دار داریم که هر راس آن سیاه یا سفید است در هر مرحله می توان یک راس انتخاب کرد و رنگ تمام رئوس زیر درخت آن سفید کرد. همچنین میتوان یک راس انتخاب کرد و رنگ تمام رئوس زیر درخت آن را سیاه کرد. حداقل تعداد مراحلی که از درخت ۱ (سمت چپ) به درخت ۲ (سمت راست) برسیم چقدر است؟



۱۰ (۵)

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)



یک رشته  $n$  رقمی از اعداد  $0$  و  $1$  مثل  $x$  داریم. حال مقدار یک رشته برابر این است که اگر رشته مد نظر عددی در مبنای دو باشد آن عدد چند است. برای مثال مقدار  $1010$  برابر  $5$  است.

$f(x)$  را مقدار بزرگترین عدد که میتوان از شیفیت دادن دوری رشته  $x$  بدست آورد قرار می دهیم. منظور از شیفیت دوری این است که تعدادی رقم از ابتدای آن جدا کرده و به ته آن اضافه کنیم. برای مثال شیفیت های دوری ممکن  $110$  برابر  $110$ ,  $101$ ,  $011$  است و  $f(110) = 6$  است.

با توجه به متن بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید.

۱۲- به ازای همه رشته های ممکن تشکیل شده از  $0$  و  $1$  به طول  $5$  مانند  $x$  جمع  $f(x)$  ها را حساب کنید. (بین  $2^n$  حالت).

(۱) ۸۳۲ (۲) ۷۹۵ (۳) ۸۷۵ (۴) ۸۴۵ (۵) ۷۵۱

۱۳- به ازای همه رشته های ممکن تشکیل شده از  $0$  و  $1$  به طول  $6$  مانند  $x$  جمع  $f(x)$  ها را حساب کنید. (بین  $2^n$  حالت).

(۱) ۳۶۰۳ (۲) ۳۱۶۵ (۳) ۳۹۱۸ (۴) ۲۸۶۵ (۵) ۲۹۰۳

۱۴- سهراب که از کرونا خسته شده بود واکسن کرونای فایزر را زد. اما او دچار تغییر ژنتیکی شد و تبدیل به یک آدم  $1000$  دستی شد و تصمیم گرفت با کشی بازی کند. در هر مرحله او تمام دست هایش را خالی می کند. سپس یک عدد رندوم  $cnt$  بین  $0$  تا  $1000$  گل انتخاب کند.

سپس از بین حالت های قرار دادن گل ها در دستهایش که در هر دست حداکثر یک گل قرار بگیرد یکی را به احتمال برابر انتخاب میکند. (از بین  $\binom{1000}{cnt}$  حالت). سپس کشی یکی از دست های سهراب را انتخاب می کند و اگر در داخل آن دست گل داشت می برد و بازی تمام می شود و گرنه بازی از اول شروع میشود. امید ریاضی تعداد مراحلی که بازی طول میکشد چند است ؟

(۱)  $\sqrt{1000}$  (۲) ۲ (۳) ۱۰۰۰ (۴) ۵۰۰ (۵) بی نهایت

۱۵- همان سوال قبل فقط با این تفاوت که تعداد گل هایی که سهراب انتخاب میکند به فرم  $a^2$  است که شرط  $1000 \geq a^2 \geq 0$  برقرار است. حال امید ریاضی تعداد مراحل را حساب کنید.

(۱)  $\frac{125}{43}$  (۲)  $\frac{4000}{961}$  (۳)  $\frac{2000}{31}$  (۴)  $\frac{2000}{651}$  (۵) ۳۲