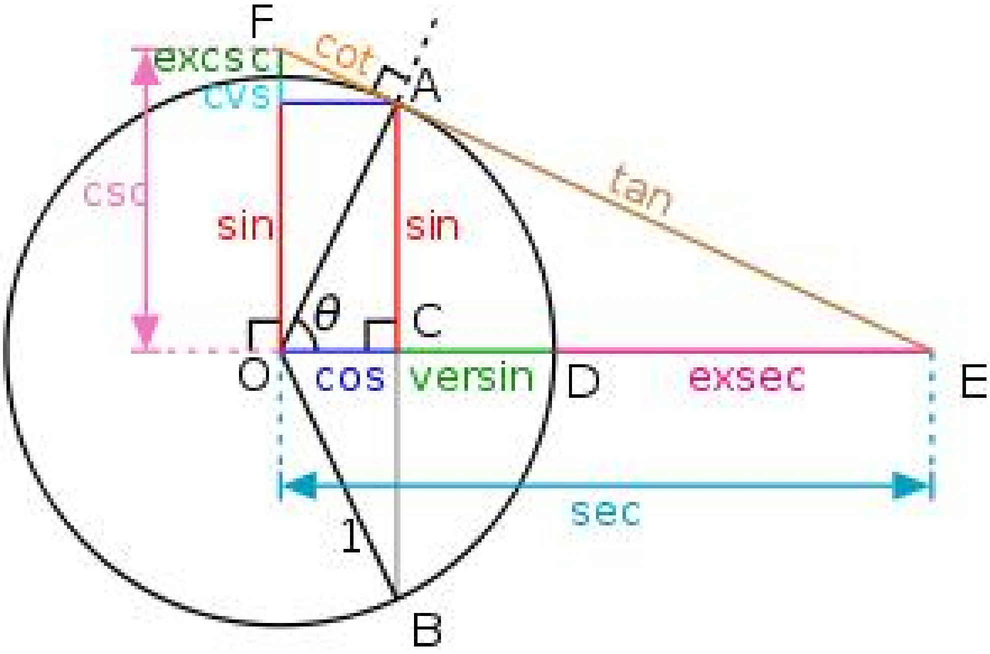
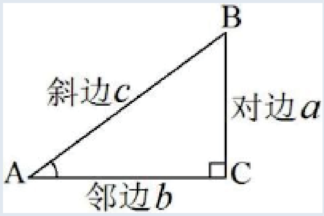
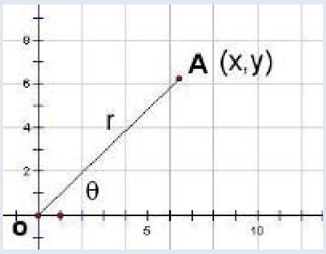

F
excsc
cot
A
cvs
csc
tan
sin
sin
θ
C
O
cos
versin
D
exsec
E
sec
1
B

三角函数公式

- 一、定义公式
  - 

    锐角三角函数
    - 正弦（sin） $\sin A=\frac{a}{c}$
    - 余弦（cos） $\cos A=\frac{b}{c}$
    - 正切（tan或tg） $\tan A=\frac{a}{b}$
    - 余切（cot或ctg） $\cot A=\frac{b}{a}$
    - 正割（sec） $\sec A=\frac{c}{b}$
    - 余割（csc） $\csc A=\frac{c}{a}$
  - 

    任意角三角函数
    - 正弦（sin） $\sin\theta=\frac{y}{r}$
    - 余弦（cos） $\cos\theta=\frac{x}{r}$
    - 正切（tan或tg） $\tan\theta=\frac{y}{x}$
    - 余切（cot或ctg） $\cot\theta=\frac{x}{y}$
    - 正割（sec） $\sec\theta=\frac{r}{x}$
    - 余割（csc） $\csc\theta=\frac{r}{y}$
- 二、函数关系
  - 1、倒数关系
    - $\tan\alpha\cot\alpha=1$
    - $\sin\alpha\csc\alpha=1$
    - $\cos\alpha\sec\alpha=1$
  - 2、商数关系
    - $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
    - $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
  - 3、平方关系
    - $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
    - $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$
    - $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

三角函数公式

三、诱导公式

- 1、设α为为任意角，终边相同的角的同一三角函数的值相等：

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,k\in\mathbb{Z}$$
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha,k\in\mathbb{Z}$$
$$\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha,k\in\mathbb{Z}$$
$$\cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha,k\in\mathbb{Z}$$

- 2、设α为为任意角，π+α与α的三角函数值之间的关系：

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

- 3、设α为为任意角，—α与α的三角函数值之间的关系：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

- 4、设α为为任意角，π—α与α的三角函数值之间的关系：

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

- 5、设α为为任意角，2π—α与α的三角函数值之间的关系：

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

- 6、设α为为任意角，π/2±α及3π/2±α与α的三角函数值之间的关系：

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$
$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

- 口诀：奇变偶不变，符号看象限．即形如（2k+1）90°±α，则函数名称变为余名函数，正弦变余弦，余弦变正弦，正切变余切，余切变正切。形如2k×90°±α，则函数名称不变。

四、基本公式

- 1、和差角公式
  - 二角和差公式
    - $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
    - $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
    - $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
    - $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
    - $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
    - $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
    - $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$
    - $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$
  - 三角和公式
    - $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
    - $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$
- 2、和差化积
  - $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
  - $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
  - $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
  - $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
  - $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
  - 口诀：正加正，正在前，余加余，余并肩，正减正，余在前，余减余，负正弦．
- 3、积化和差
  - $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
  - $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
  - $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$
  - $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

四、基本公式

- 4、二倍角公式
  - $\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
  - $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
  - $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
- 5、三倍角公式
  - $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
  - $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
  - $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)$
  - $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)$
  - $\tan 3\alpha = \tan\alpha\tan(60^\circ-\alpha)\tan(60^\circ+\alpha)$
  - 证明
    - sin3 a =sin(a+2a) =sin^2a·cosa+cos^2a·sina = 2sina(1-sin^2a)+(1-2sin^2a)sina =3sina-4sin^3a
    - cos3a =cos(2a+a) =cos^2acosa-sin^2asina =(2cos^2a-1)cosa-2(1-cos^2a)cosa =4cos^3a-3cosa
    - sin3 a =3sina-4sin^3a =4sina(3/4-sin^2a) = 4sina[(√3/2)-sina][(√3/2)+sina] =4sina(sin60°+sina)(sin60°-sina) =4sina*2sin[(60+a)/2]cos[(60°-a)/2]*2sin[(60°-a)/2]cos[60°+a)/2] = 4sinasin(60°+a)sin(60°-a)
    - cos3a =4cos^3a-3cosa =4cosa(cos^2a-3/4) =4cosa[cos^2a-(√3/2)^2] =4cosa(cosa-cos30°)(cosa+cos30°) =4cosa*2cos[(a+30°)/2]cos[(a-30°)/2]*{-2sin[(a+30°)/2]sin[(a-30°)/2]} =-4cosasin(a+30°)sin(a-30°) =-4cosasin[90°-(60°-a)]sin[-90°+(60°+a)] =-4cosacos(60°-a)[-cos(60°+a)] =4cosacos(60°-a)cos(60°+a)
    - 上述两式相比可得： tan3a=tana·tan(60°-a)·tan(60°+a)
- 6、四倍角公式
  - sin4a=-4*[cosa*sina*(2*sina^2-1)]
  - cos4a=1+(-8*cosa^2+8*cosa^4)
  - tan4a=(4*tana-4*tana^3)/(1-6*tana^2+tana^4)
- 7、五倍角公式
  - $\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$
  - $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$
  - $\tan 5\alpha = \tan\alpha\cdot\dfrac{5-10\tan^2\alpha+\tan^4\alpha}{1-10\tan^2\alpha+5\tan^4\alpha}$

四、基本公式

8、n倍角公式

- 应用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$
- 上式用于求n倍角的三角函数时，可变形为：

$$\begin{aligned}\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\\&=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n\\&=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n\end{aligned}$$

- 所以

$$\cos n\alpha=\mathrm{Re}\left((\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n\right)$$
$$\sin n\alpha=\mathrm{Im}\left((\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n\right)$$

- 其中，Re表示取实数部分，Im表示取虚数部分．而

$$\begin{aligned}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n=&\,\mathrm{C}_n^0\cos^n\alpha+\mathrm{i}\mathrm{C}_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-\mathrm{C}_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha\\&-\mathrm{i}\mathrm{C}_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\mathrm{C}_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha+\mathrm{i}\mathrm{C}_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha\\&-\mathrm{C}_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha-\mathrm{i}\mathrm{C}_n^7\cos^{n-7}\alpha\sin^7\alpha+\cdots\end{aligned}$$

9、半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

正负由α/2所在的象限决定

10、万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

11、辅助角公式

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),\ \tan\varphi=\frac{b}{a}$$

- 证明 — 由于tanφ = b/a ，显然α≠0，且

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

故有

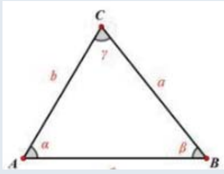
$$\begin{aligned}&a\sin\alpha+b\cos\alpha\\=&\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\alpha\right)\\=&\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cdot\sin\alpha+\sin\varphi\cdot\cos\alpha)\\=&\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)\end{aligned}$$

五、其他公式

1、正弦定理

- 在任意△ABC中，角 A、 B、 C所对的边长分别为 a、 b、 c，三角形 外接圆的半径为 R．则有：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$
- 正弦定理变形可得：
  - $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}$
  - $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$
  - $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

2、余弦定理



对于如图所示的边长为a、b、c而相应角为α、β、γ的△ABC，有：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

3、降幂公式

- sin²α=[1-cos(2α)]/2
- cos²α=[1+cos(2α)]/2
- tan²α=[1-cos(2α)]/[1+cos(2α)]

4、三角和

- sin(α+β+γ)=sinα·cosβ·cosγ+cosα·sinβ·cosγ+cosα·cosβ·sinγ-sinα·sinβ·sinγ
- cos(α+β+γ)=cosα·cosβ·cosγ-cosα·sinβ·sinγ-sinα·cosβ·sinγ-sinα·sinβ·cosγ
- tan(α+β+γ)=(tanα+tanβ+tanγ-tanα·tanβ·tanγ)÷(1-tanα·tanβ-tanβ·tanγ-tanγ·tanα)

5、幂级数

c0+c1x+c2x2+...+cnxn+...=∑cnxn (n=0..∞)
c0+c1(x-a)+c2(x-a)2+...+cn(x-a)n+...=∑cn(x-a)n (n=0..∞)

它们的各项都是正整数幂的幂函数, 其中c0,c1,c2,...cn...及a都是常数， 这种级数称为幂级数。

6、泰勒展开式

- 泰勒展开式又叫幂级数展开法 —— f(x)=f(a)+f'(a)/1!*(x-a)+f''(a)/2!*(x-a)2+...+f(n)(a)/n!*(x-a)n+...
- 实用幂级数：
  - ex= 1+x+x2/2!+x3/3!+...+xn/n!+...,x∈R
  - ln(1+x)=x-x2/2+x3/3-...+(-1)k-1xk/k, x∈(-1,1)
  - sin x = x-x3/3!+x5/5!-...+(-1)k-1x2k-1/(2k-1)!+..., x∈R
  - cos x = 1-x2/2!+x4/4!-...+(-1)kx2k/(2k)!+..., x∈R
  - arcsin x = x + x3/(2*3) + (1*3)x5/(2*4*5) + (1*3*5)x7/(2*4*6*7)...+(2k+1)!!*x2k+1/(2k!!*(2k+1))+..., x∈(-1,1)（!!表示双阶乘）
  - arccos x = π/2 -[x + x3/(2*3) + (1*3)x5/(2*4*5) + (1*3*5)x7/(2*4*6*7)......], x∈(-1,1)
  - arctan x = x - x3/3 + x5/5 -..., x∈(-∞,1)
  - sinh x = x+x3/3!+x^/5!+...+x2k-1/(2k-1)!+..., x∈R
  - cosh x = 1+x2/2!+x^4/4!+...+x2k/(2k)!+..., x∈R
  - arcsinh x =x - x3/(2*3) + (1*3)x5/(2*4*5) -(1*3*5)x7/(2*4*6*7)..., x∈(-1,1)
  - arctanh x = x + x3/3 + x5/5 + ..., x∈(-1,1)

7、傅里叶级数

- 傅里叶级数又称三角级数
- f(x)=a0/2+∑(n=0..∞) (ancosnx+bnsinnx)

  a0=1/π∫(π..-π) (f(x))dx

  an=1/π∫(π..-π) (f(x)cosnx)dx

  bn=1/π∫(π..-π) (f(x)sinnx)dx

角度 函数名	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
sin	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0	- 1/2	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	无限大	$-\sqrt{3}$	0
cot	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	/