集合论II

二元关系: 介绍与例子(1)

对应《问题求解》
二元关系: 简介与简单的运算


examples


借题发挥


Learning by
Doing

ant-hengxin 发消息

为TA充电

请关注蚂蚁老师!

你们之所以会对这样一门硬核的课感到恐惧, 这是因为你们有成年人的思维. 成年人会想这个对我有没有用, 会考虑利益, 会考虑难还是不难; 但是当你们回想你们的小时候, 当你们还是小学生甚至是婴儿幼儿的时候, 你们面对一个新鲜事物的时候应该想的不是难还是不难, 你们大概想知道它好不好玩.

— 魏恒峰, 南京大学

《编译原理》课程介绍

“关系”

父母: 和同学的关系怎样

数学课: 3和5的的大小关系是什么?

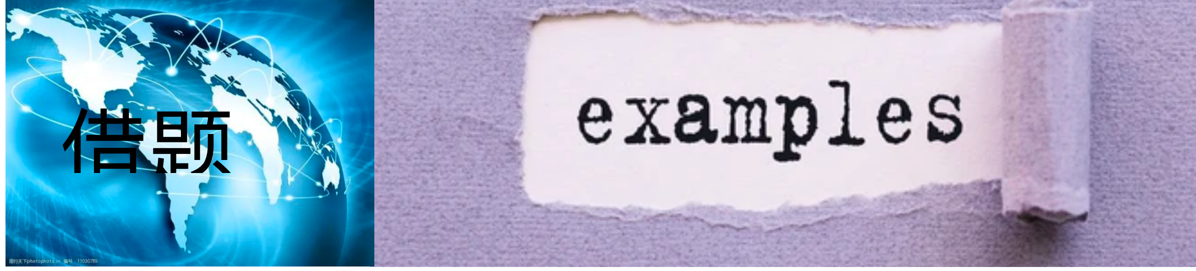
Google Relation meaning

Dictionary

Definitions from Oxford Languages · Learn more

relation

1. the way in which two or more people or things are connected; a thing's effect on or relevance to another.
2. a person who is connected by blood or marriage; a relative.



“关系”

connected? 地铁线路应该是connected的

顶点(vertices)

(提示：千万不要在这一站从8号线换为7号线!)

边(edges)

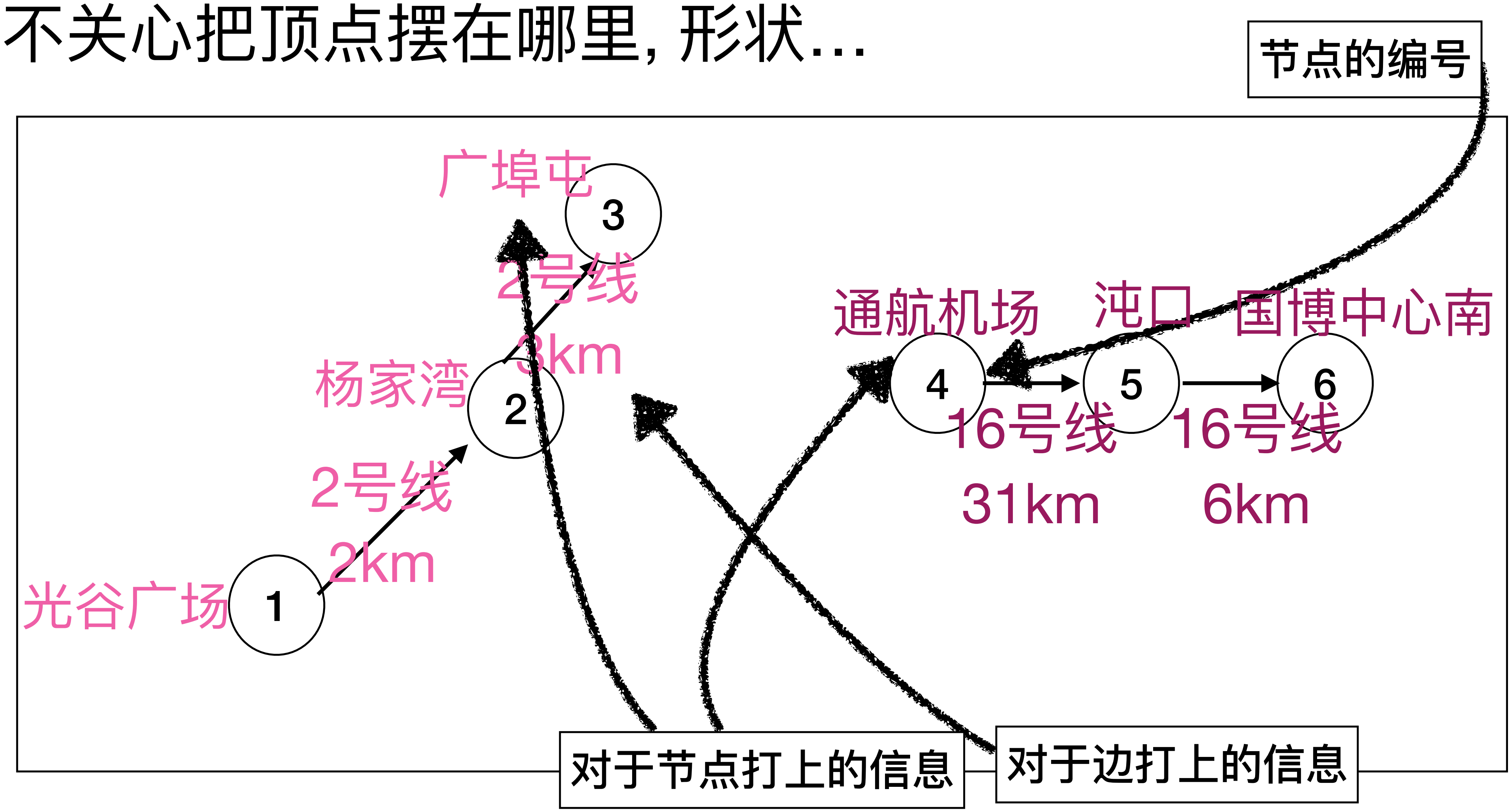
武汉轨道交通图

“关系”

connected? 地铁线路应该是connected的

假设现在只关心2号线, 16号线其中的一些站点…

- 我们不关心把顶点摆在哪里, 形状…



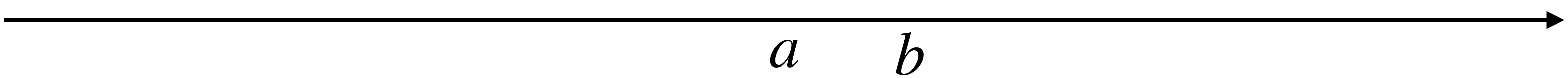
但是我们可以在顶点和边上打上去额外的信息

“关系”

ℝ上的Near关系

如果 $|a - b| < 1 (a, b \in \mathbb{R})$, 则称$a, b$具有Near关系.

满足所有这样的关系记作的集合是R.



我们发现:

这时候|1-1|=0<1, 在R里面. 上面的关系可以用(a,b)表示

- $\forall a \in X\,.\,(a, a) \in R$ — 自反性(reflexivity)
- $\forall a, b \in X\,.\,((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$ — 对称性(symmetry)
- $\forall a, b, c \in X\,.\,((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R)$ — 传递性(transitivity) (这个关系里面不存在)

“关系”

整除关系

如果$X = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$, “关系”是$X$上的整除关系.

有关系的个体是:

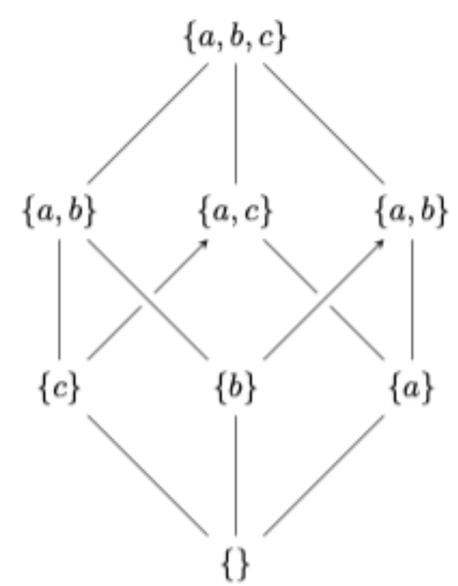
$R = \{(1,2), \ldots, (4,12), \ldots, (12,60), \ldots, (4,60), \ldots, (60,60)\}$

我们发现:

- $\forall a \in X \,.\, (a, a) \in R$ – 自反性(reflexivity)
- $\forall a, b \in X \,.\, ((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$ – 对称性(symmetry
- $\forall a, b, c \in X \,.\, ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R)$
  – 传递性(transitivity) (这个就有了)

“关系”

集合上的包含关系: 集合$\{a, b, c\}$



我们发现:

- $\forall a \in X\,.\,(a, a) \in R$ – 自反性(reflexivity)
- $\forall a, b \in X\,.\,((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$ – 对称性(symmetry
- $\forall a, b, c \in X\,.\,((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R)$ – 传递性(transitivity) (这个就有了)

“关系”

整数上的 “大于” 关系

我们发现:

- $\forall a \in X\,.\,(a, a) \in R$ – 自反性(reflexivity)
- $\forall a, b \in X\,.\,((a, b) \in R \to (b, a) \in R)$ – 对称性(symmetry)
- $\forall a, b, c \in X\,.\,((a, b) \in R \land (b, c) \in R \to (a, c) \in R)$
  – 传递性(transitivity)
- $\forall a, b \in X\,.\,((a, b) \in R \lor (b, a) \in R)$ – 连接性(connectivity)

接下来的工作

如何用(a,b)表示a, b有关系?

定义: 元组(序偶)

定义出来的东西有什么好玩的性质?

一. 有序对

问题: 我们怎么刻画有序对?

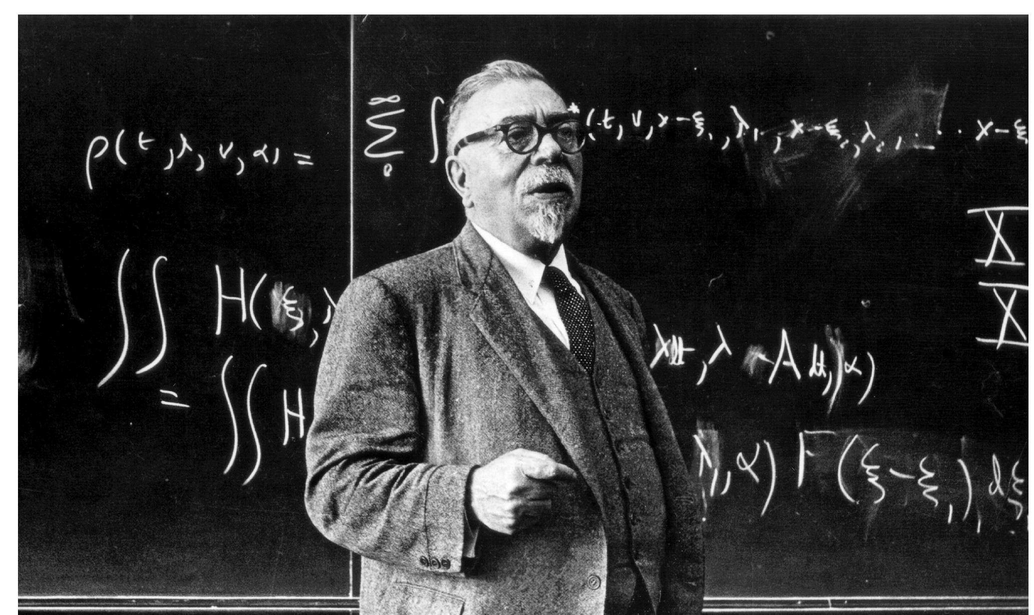
- 我们希望: $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$

1. 有序对

Def1. 有序对(Ordered Pairs)

$$(a, b) \triangleq \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$$

然后我们就证明看到前面的直觉了…



Norbert Wiener; 1914

一. 有序对

1. 有

De

然

定理 3.4.1.

$$(a,b)=(c,d) \iff a=c\wedge b=d$$

证明. 也就是证明

$$\Big(\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}\Big) \iff (a=c\wedge b=d)$$

我们有:

$$\begin{aligned}
&\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}\\
\iff &(\{a\}=\{c\}\vee\{a\}=\{c,d\})\wedge(\{a,b\}=\{c\}\vee\{a,b\}=\{c,d\})\\
\iff &(\{a\}=\{c\}\wedge\{a,b\}=\{c\})\vee\\
&(\{a\}=\{c\}\wedge\{a,b\}=\{c,d\})\vee\\
&(\{a\}=\{c,d\}\wedge\{a,b\}=\{c\})\vee\\
&(\{a\}=\{c,d\}\wedge\{a,b\}=\{c,d\})
\end{aligned}$$

□

Norbert Wiener; 1914

一. 有序对

1. 有序对

Def2.n元组(n-ary tuples)

$$(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$$

2. Cartesian积:

Def3. The Cartesian product $A \times B$ of A and B is defined as

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

有什么运算律呢

一. 有序对

2. Cartesian积:

Def3. The Cartesian product $A \times B$ of A and B is defined as

$$A \times B \triangleq \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

有什么运算律呢

(2) 运算规律

例子:

$X \times \varnothing = \varnothing \times X$

$X \times Y \neq Y \times X$

$(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$

$A = \{1\} \qquad (A \times A) \times A \neq; A \times (A \times A)$

没有交换律, 结合律, 只有分配率.

一. 有序对

2. Cartesian积:

Def3. The Cartesian product $A \times B$ of A and B is defined as

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}$$

有什么运算律呢

(2) 运算规律: 分配率

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$$

Why?

一. 有序对

2. Cartesian积:

Def3. The Cartesian product $A \times B$ of A and B is defined as

$$A \times B \triangleq \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

有什么运算律呢

Proof. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

对于任意的有序对(a,b):

$$(a,b) \in A \times (B \cap C)$$
$$\Longleftrightarrow a \in A \wedge b \in (B \cap C)$$
$$\Longleftrightarrow a \in A \wedge b \in B \wedge b \in C$$
$$\Longleftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \in C)$$
$$\Longleftrightarrow (a,b) \in A \times B \wedge (a,b) \in A \times C$$
$$\Longleftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

起关键作用的就是这个和连接词

一. 有序对

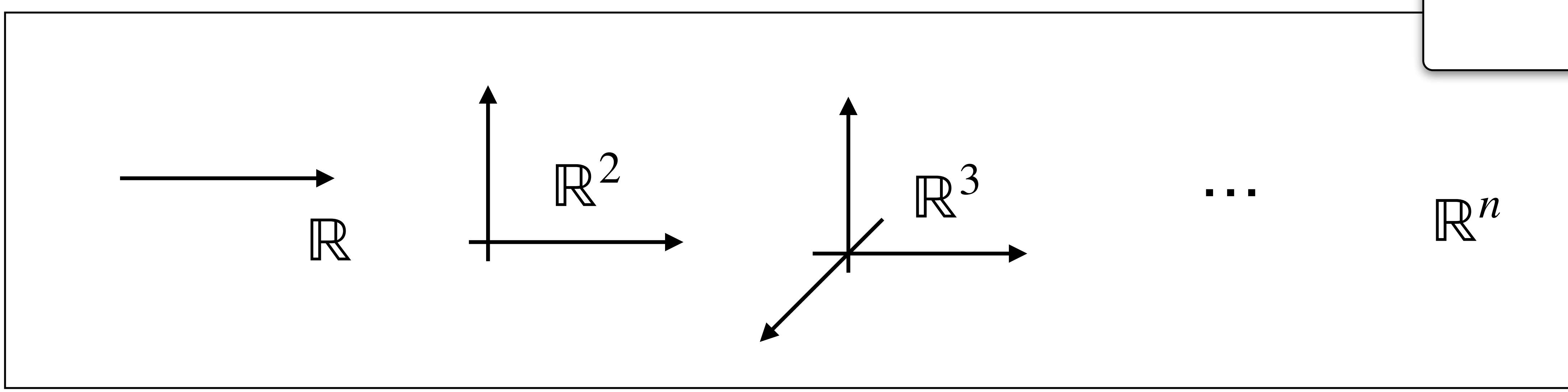
3. n-ary Cartesian Product:

Def4.

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \triangleq (X_1 \times X_2) \times X_3$$

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \triangleq (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$$

同样是归纳法



二. 有序对定义的二元关系

1. 关系(relations)

Def5. A *relation* from A to B is a subset of $A \times B$

$$R \subseteq A \times B$$

Sepcially, if $A = B$, R is called a relation *on* A.

记法: 如果$(a, b) \in \mathbb{R}$, 记作aRb

如果$(a, b) \notin \mathbb{R}$, 记作$a\overline{R}b$

二. 有序对定义的二元关系

1. 关系(relations)

Def5. A *relation* from A to B is a subset of $A \times B$

$$R \subseteq A \times B$$

Sepcially, if $A = B$, R is called a relation *on* A.

记法: 如果$(a, b) \in \mathbb{R}$, 记作aRb

如果$(a, b) \notin \mathbb{R}$, 记作$a\overline{R}b$

小于关系: $< = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \text{ is less than } b\}$

整除关系: $D = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists q \in \mathbb{N} \,.\, a \cdot q = b\}$

妈妈关系: $M = \{(a, b) \in 人 \times 人 \mid a \text{ is the mother of } b\}$

爸爸关系: $F = \{(a, b) \in 人 \times 人 \mid a \text{ is the father of } b\}$

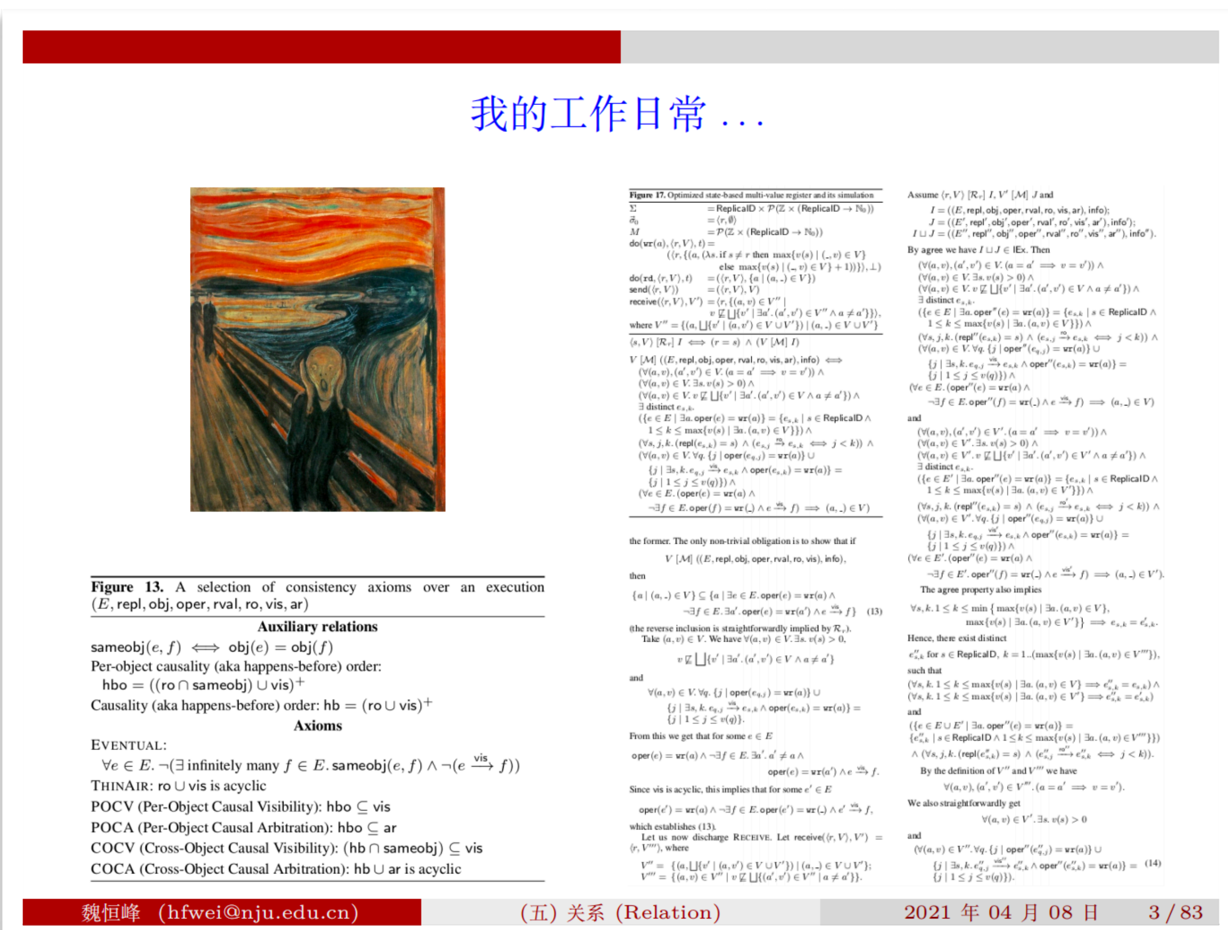
三. 关系的简单运算

(一) 三个定义 1. 定义域(domain) 2. 值域(range) 3. 域(field)

(二) 五种操作 逆, 限制, 像, 逆像, 复合.

(三) 七个性质

自反/反自反; 对称/反对称; 传递性; 连接性; 三分的



离散数学学得好不好, 一个重要的标准在于是否完成了这样的转变

— 魏恒峰, 南京大学

在2021年《离散数学》

三. 关系的简单运算

提示: 和中学的函数类比

(一) 三个定义

1. 定义域(domain)

Def6. $$\text{dom}(R) = \{a \mid \exists b\,.\,(a,b) \in R\}$$

“所有有定义的地方 第一个元素的集合”

2. 值域(range)

Def7. $$\text{ran}(R) = \{b \mid \exists a\,.\,(a,b) \in R\}$$

“所有有定义的地方 第二个元素的集合”

3. 域(field)

Def8. $$\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$$

三. 关系的简单运算

提示: 和中学的函数类比

(一) 三个定义

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\mathrm{dom}(R) = [1,1], \mathrm{ran}(R) = [-1,1], \mathrm{fld}(R) = [-1,1]$$

就是用集合的眼光来理解这些内容.

$$\mathrm{dom}(R) \subseteq \bigcup\bigcup R$$

三. 关系的简单运算

(一) 三个定义

$$\mathrm{dom}(R) \subseteq \bigcup\bigcup R$$

任何的定义域, 值域都会在二元组的某一个元素中``出现''.

证明. 对任意 a,

$$\begin{aligned} & a \in \mathrm{dom}(R) \\ \Longrightarrow\ & \exists b.\ (a, b) \in R \\ \Longrightarrow\ & \exists b.\ \{\{a\}, \{a, b\}\} \in R \\ \Longrightarrow\ & \exists b.\ \{a, b\} \in \bigcup R \\ \Longrightarrow\ & \exists b.\ a \in \bigcup\bigcup R \\ \Longrightarrow\ & a \in \bigcup\bigcup R \end{aligned}$$

$\square$

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

1. 逆变换(inverse)

Def9.The *inverse* of R is the relation

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$$

例子:

- 如果 $R = \{(x, y) \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R^{-1} = R$
- $R = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R^{-1} = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x > 0\}$
- $\leq = \{(x, y) \mid x \leq y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\leq^{-1} = \geq \triangleq \{(x, y) \mid x \geq y\}$

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

1. 逆变换(inverse)

Def9.The *inverse* of R is the relation

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$$

Th1. 关系的逆的逆还是原来的关系

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

Proof. 对任意(a, b)

$$(a, b) \in (R^{-1})^{-1}$$

$$\iff (b, a) \in R^{-1}$$

$$\iff (a, b) \in R$$

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

1. 逆变换(inverse)

Def9.The *inverse* of R is the relation

$$R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$$

Th2. 关系的逆与交, 并, 补: 如果R, S均为关系, 那么有

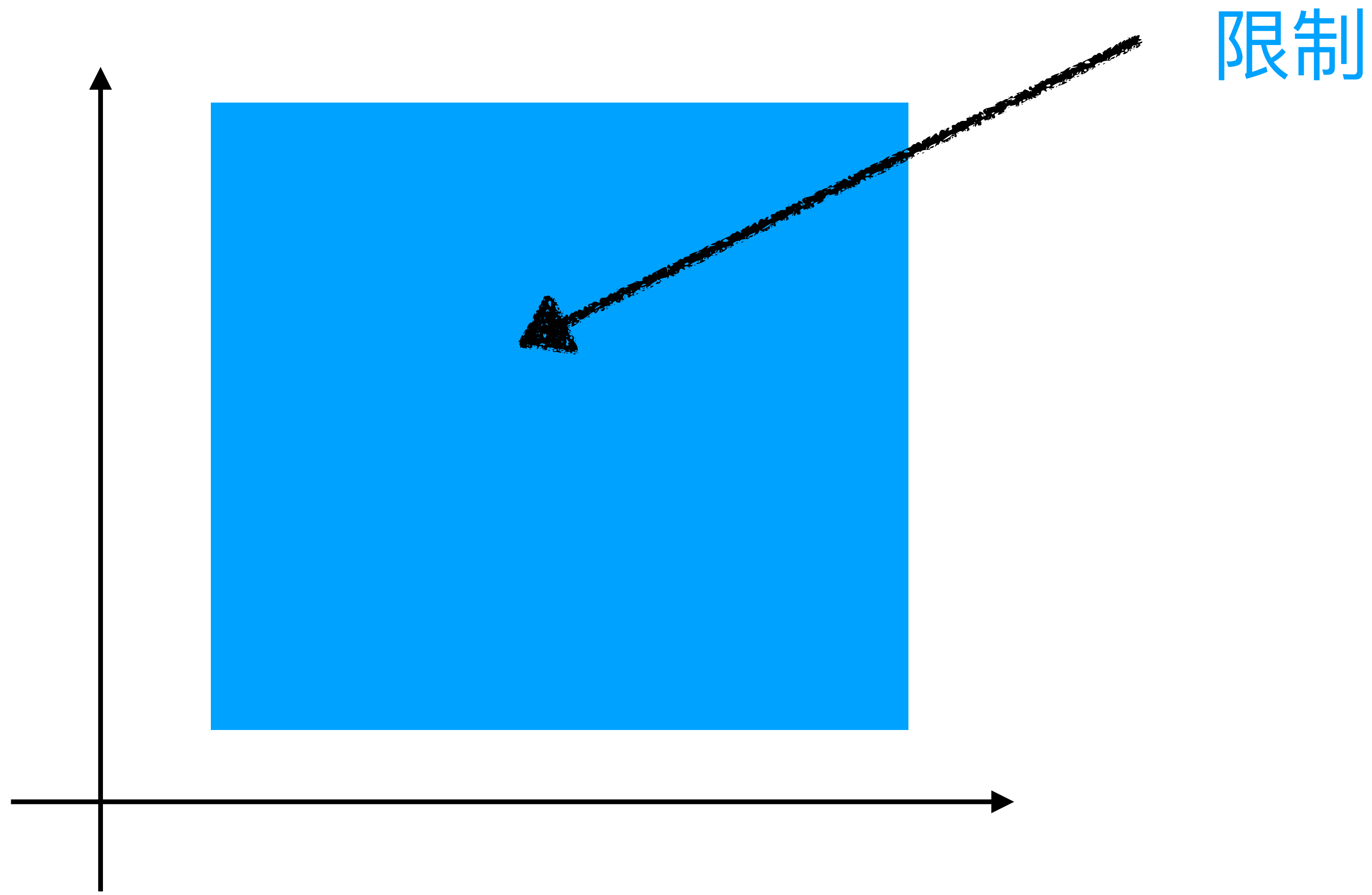
$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$
$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$
$$(R \backslash S)^{-1} = R^{-1} \backslash S^{-1}$$

Proof. 提示: 把集合写出来就行了.

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

2. 限制



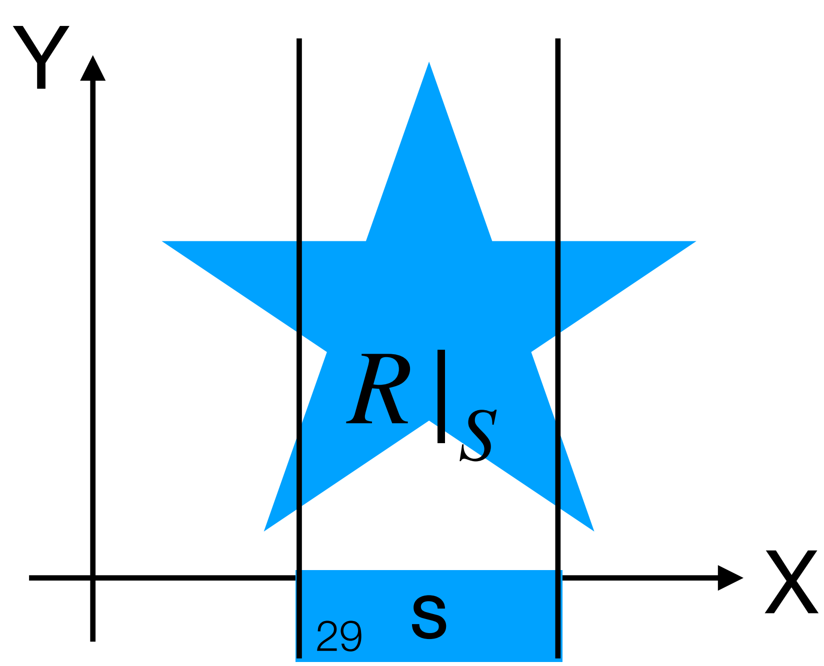
三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

2. 限制

Def10.左限制 (Left-Restriction) Suppose $R \subseteq X \times Y$ and $S \subseteq X$. The *left restriction* relation of R to S over X and Y is

$$R|_S = \{(x, y) \in R \mid x \in S\}$$



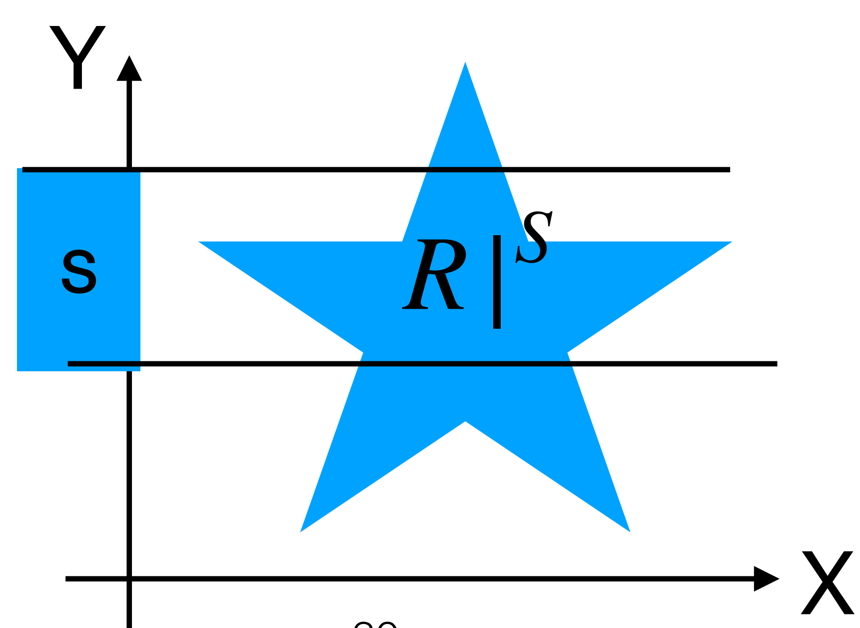
三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

2. 限制

Def11.右限制 (Right-Restriction) Suppose $R \subseteq X \times Y$ and $S \subseteq Y$. The *left restriction* relation of R to S over X and Y is

$$R|^{S} = \{(x, y) \in R \mid y \in S\}$$



三. 关系的简单运算

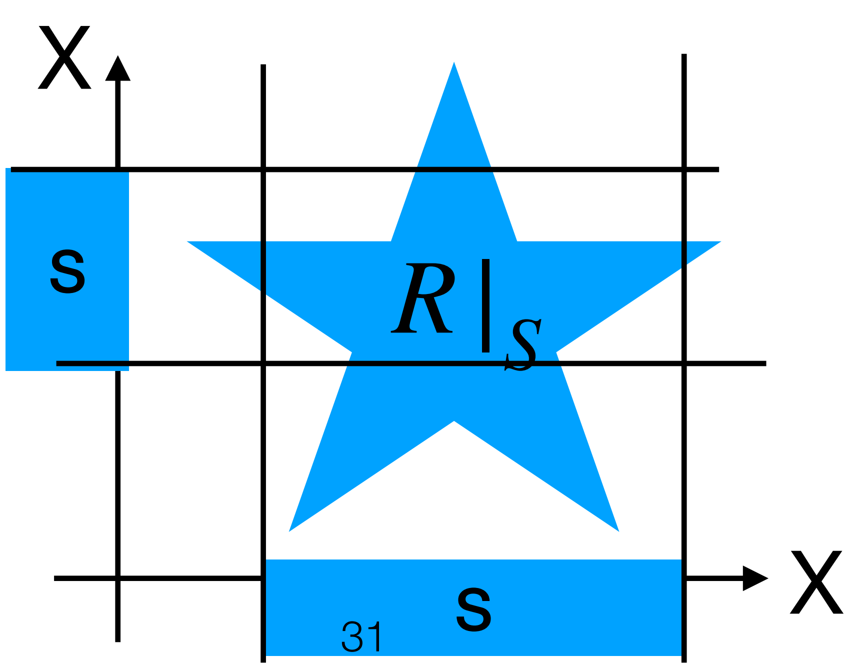
(二) 五种操作

2. 限制

很多时候关系是从自己到自己的, 所以

Def12.限制 (Restriction) Suppose $R \subseteq X \times X$and $S \subseteq X$. The *restriction* relation of R to S over X is

$$R|_S = \{(x, y) \in R \mid x \in S \wedge y \in S\}$$

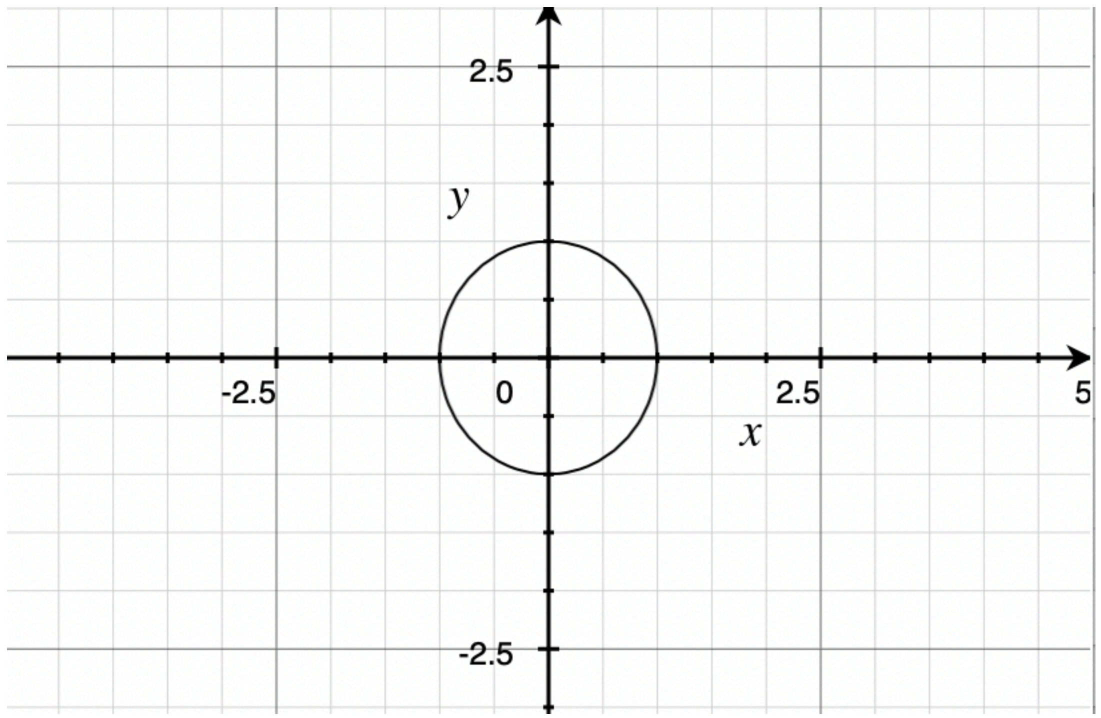


三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

2. 限制

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

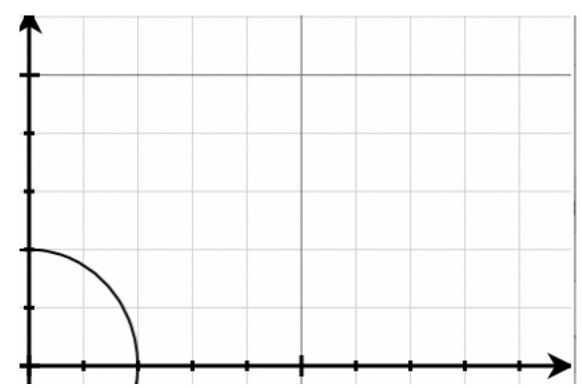


三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

2. 限制

$$R|_{\mathbb{R}^+} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

3. 像

Def 13. The *image* of X under relation R is the set

$$R[X] = \{b \in \mathrm{ran}(R) \mid \exists a \in X.\ (a, b) \in R\}$$

为了简化记号, 我们一般写作

$$R[a] \triangleq R[\{a\}] = \{b \mid (a, b) \in R\}$$

4. 逆像

Def 14. The *inverse image* of Y under relation R is the set

$$R^{-1}[Y] = \{a \in \mathrm{dom}(R) \mid \exists b \in Y.\ (a, b) \in R\}$$

为了简化记号, 我们一般写作

$$R^{-1}[b] \triangleq R^{-1}[\{b\}] = \{a \mid (a, b) \in R\}$$

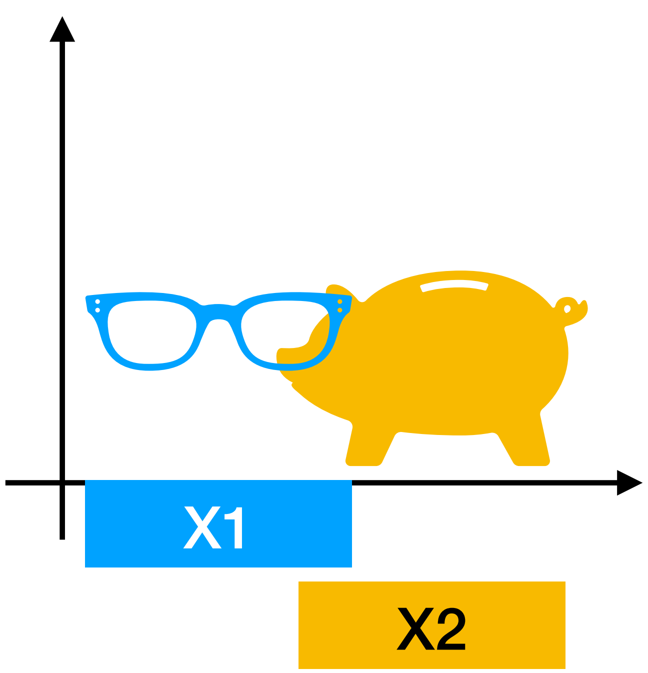
三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

[像和逆像的一些性质]

(1) $R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2]$

Th3



Proof. 对于任意的b

Definition is always your friend!

$$
\begin{aligned}
& b \in R[X_1 \cup X_2] \\
\Longleftrightarrow\ & \exists a \in X_1 \cup X_2.\ (a,b) \in R \\
\Longleftrightarrow\ & \exists a \in X_1.\ (a,b) \in R \vee \exists a \in X_2.\ (a,b) \in R \\
\Longleftrightarrow\ & b \in R[X_1] \vee b \in R[X_2] \\
\Longleftrightarrow\ & b \in R[X_1] \cup R[X_2]
\end{aligned}
$$

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

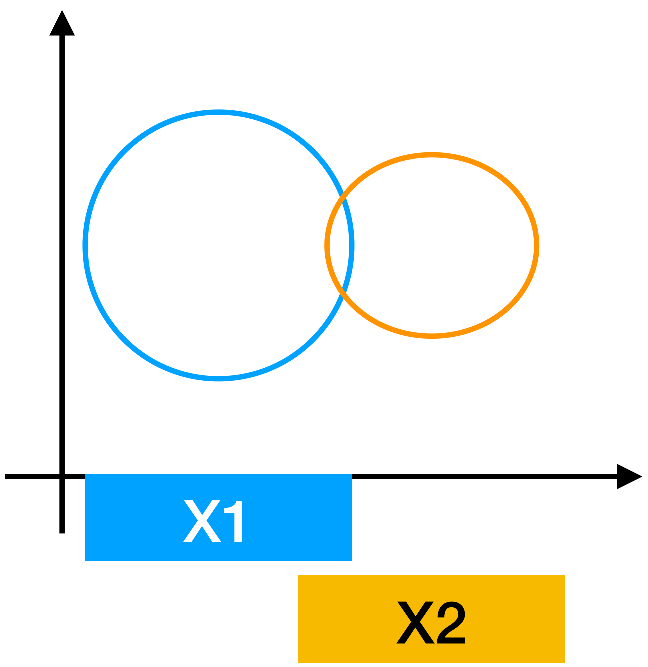
[像和逆像的一些性质]

(2) $R[X_1 \cap X_2] \subseteq R[X_1] \cap R[X_2]$

Th4

左边: 只有两个点(交点)

右边: 是介于x_1, x_2之间的图形区域



证明可以仿照上述, 但是注意哪一步变为了单方向的推演

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

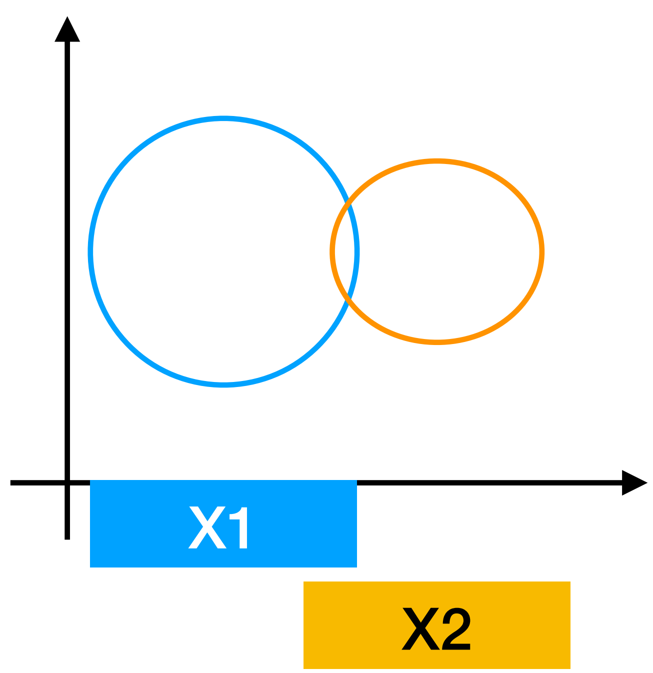
[像和逆像的一些性质]

BE CAREFUL (3) $R[X_1 \backslash X_2] \supseteq R[X_1] \backslash R[X_2]$

Th5

左边: 蓝色圆环拿掉两个交点

右边: 是从x_1, 到x_2做端点的蓝色区域



证明可以仿照上述, 但是注意哪一步变为了单方向的推演

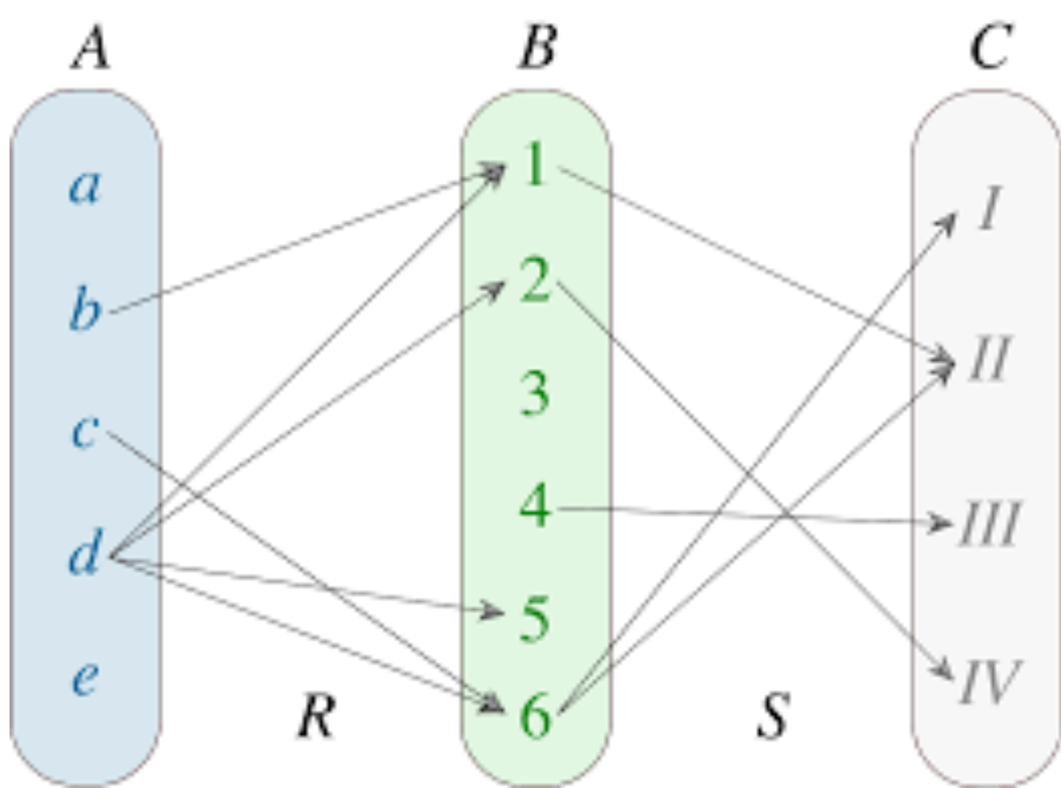
三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

5. 复合

Def 15. The *composition* of relation $R \subseteq X \times Y$ and $S \subseteq Y \times Z$ is the *relation*

$$R \circ S = \{(a,c) \mid \exists b \,.\, (a,b) \in S \wedge (b,c) \in R\}$$



三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

这是以前排版了大部分的文稿... 实在懒得改了...

⚠️警告: 记号的解释不一致的问题

关于$R \circ S$的记号

- 南京大学《离散数学》课程
  - 从右往左计算
- 中国地质大学的《离散数学》课程
  - 定义是从左往右的, 也就是定义如

    $$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b \,.\, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$
- 个人感觉文献中从右往左的情况多一些
- 余下的文档中, 仍然保持从右往左的顺序, 以便于书写.

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

5. 复合

Def 15. The *composition* of relation $R \subseteq X \times Y$ and $S \subseteq Y \times Z$ is the *relation*

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b \,.\, (a, b) \in S \land (b, c) \in R\}$$

问: $(A \circ B) \circ C \stackrel{?}{=} A \circ (B \circ C)$

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

5. 复合

Def 15. The *composition* of relation $R \subseteq X \times Y$ and $S \subseteq Y \times Z$ is the *relation*

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b \,.\, (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$$

Th6. 满足结合律$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

如果这个是这样的话就太好了! (矩阵乘法)

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

5. 复合 Th6. $(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$

Proof. 对任意(a,b) $(a,b)\in(R\circ S)\circ T$

$$\iff \exists c\,.\,\Big((a,c)\in T\wedge(c,b)\in R\circ S\Big)$$

$$\iff \exists c\,.\,\Big((a,c)\in T\wedge\big(\exists d\,.\,(c,d)\in S\wedge(d,b)\in R\big)\Big)$$

$$\iff \exists d\,.\,\exists c\,.\,\Big((a,c)\in T\wedge(c,d)\in S\wedge(d,b)\in R\Big)$$

$$\iff \exists d\,.\,\Big(\big(\exists c\,.\,(a,c)\in T\wedge(c,d)\in S\big)\wedge(d,b)\in R\Big)$$

$$\iff \exists d\,.\,\Big((a,d)\in S\circ T\wedge(d,b)\in R\Big)$$

$$\iff (a,b)\in R\circ(S\circ T)$$

三. 关系的简单运算

(二) 五种操作

5. 复合　Th7. 和矩阵的逆类似 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

提示:

$$
\begin{aligned}
& (a, b) \in (R \circ S)^{-1} \\
\iff & (b, a) \in R \circ S \iff \exists c\,.\,(c, b) \in S^{-1} \wedge (a, c) \in R^{-1} \\
\iff & \exists c\,.\,(b, c) \in S \wedge (c, a) \in R \\
\iff & (a, b) \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}
$$

三. 关系的简单运算

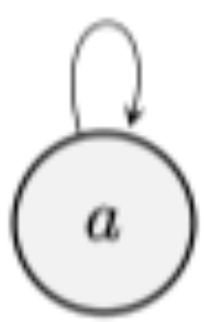
(三) 七个性质

1. 自反的:

Def16. $R \subseteq X \times X$ is reflexive if

$$\forall a \in X.\ (a, a) \in R$$

$$\forall a \in X.\ (a, a) \in R$$



举几个例子:

- $\leq\ \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is reflexive
- 三角形上的全等关系是自反的

三. 关系的简单运算

(三) 七个性质

1. 自反的:

Def16. $R \subseteq X \times X$ is reflexive if

$$\forall a \in X . (a, a) \in R$$

Th8.所有自反的关系都是这个关系的一个子集

R is reflexive $\iff$ $I \subseteq R$, 其中

$I = \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}$.

Th9.R is reflexive $\iff$ $R^{-1} = R$

三. 关系的简单运算

(三) 七个性质

2. 反自反的(Irreflexive):

Def17. $R \subseteq X \times X$ is irreflexive if

$$\forall a \in X.\, (a, a) \notin R$$

例子:

- $< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is irreflexive
- $> \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is irreflexive

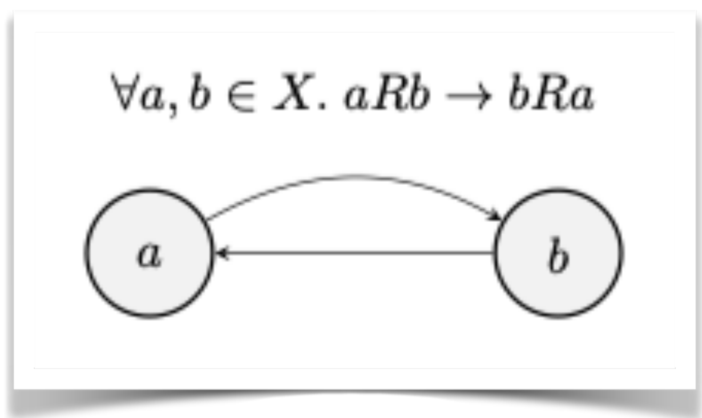
三. 关系的简单运算

(三) 七个性质

3. 对称(symmetric)

Def18. $R \subseteq X \times X$ is irreflexive if

$$\forall a, b \in X \, . \, aRb \to bRa$$



对于求逆运算很友好!

Th10. R is symmetric $\iff R^{-1} = R$

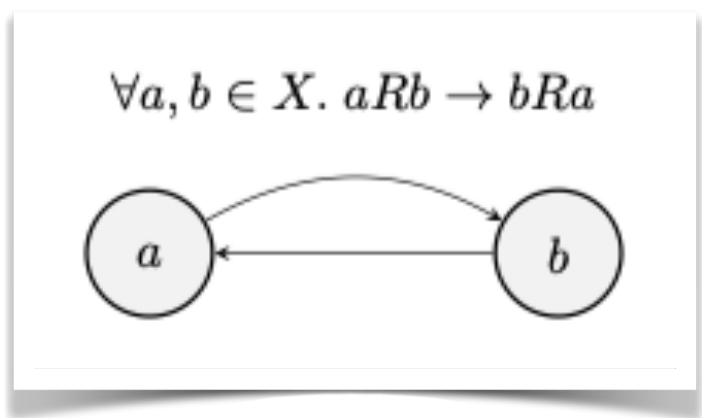
三. 关系的简单运算

(三) 七个性质

4. 反对称(antisymmetric)

Def19. $R \subseteq X \times X$ is antisymmetric if

$$\forall a, b \in X\,.\,((aRb \wedge bRa) \rightarrow a = b)$$



例如: >(大于), |(整除)就是反对称的.

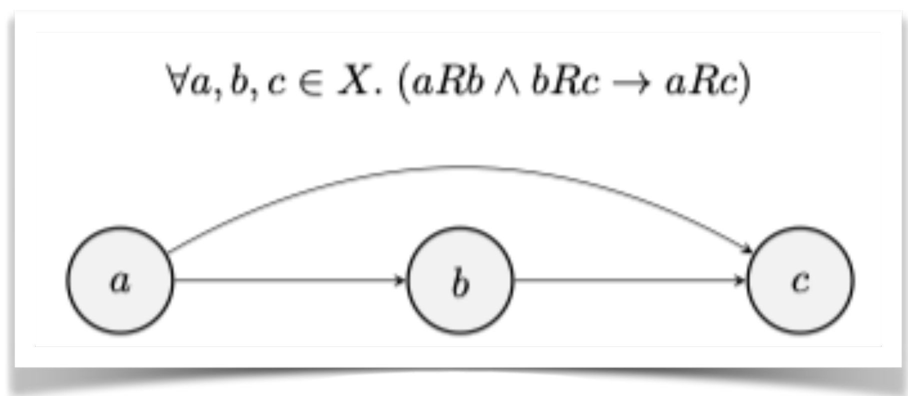
三. 关系的简单运算

(三) 七个性质

5. 传递性(transitive)

Def20. $R \subseteq X \times X$ is transitive if

$$\forall a, b, c \in X.\ (aRb \land bRc \rightarrow aRc)$$



具有这样的关系的就意味着经过反复作用, 它不会跑出去

三. 关系的简单运算

(三) 七个性质

5. 传递性(transitive)

这样就构成了偏序关系

Def20. $R \subseteq X \times X$ is transitive if

$$\forall a, b, c \in X\,.\,(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$$

Th11. 封闭性: R is transitive $\iff R \circ R \subseteq R$

Proof. 对任意(a, b)

$$(a, b) \in R \circ R$$

$$\implies \exists c\,.\,(a, c) \in R \wedge (b, c) \in R$$

$$\implies (a, b) \in R$$

对任意(a, b, c)

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R \circ R \implies (a, c) \in R$$

三. 关系的简单运算

(三) 七个性质

6. 连接性(Connex)

有了这个就有了全序关系

Def21. $R \subseteq X \times X$ is connex if

$$\forall a, b \in X.\ (aRb \vee bRa)$$

7. 三分的(Trichotomous)

Def22. $R \subseteq X \times X$ is trichotomous if

$\forall a, b \in X$. (exactly one of aRb, bRa, or $a = b$ holds)

比如实数上的大于关系就满足这一个.

三. 关系的简单运算

(三) 七个性质

Th12. 求逆的可行性:

R is symmetric and transitive $\iff R = R^{-1} \circ R$

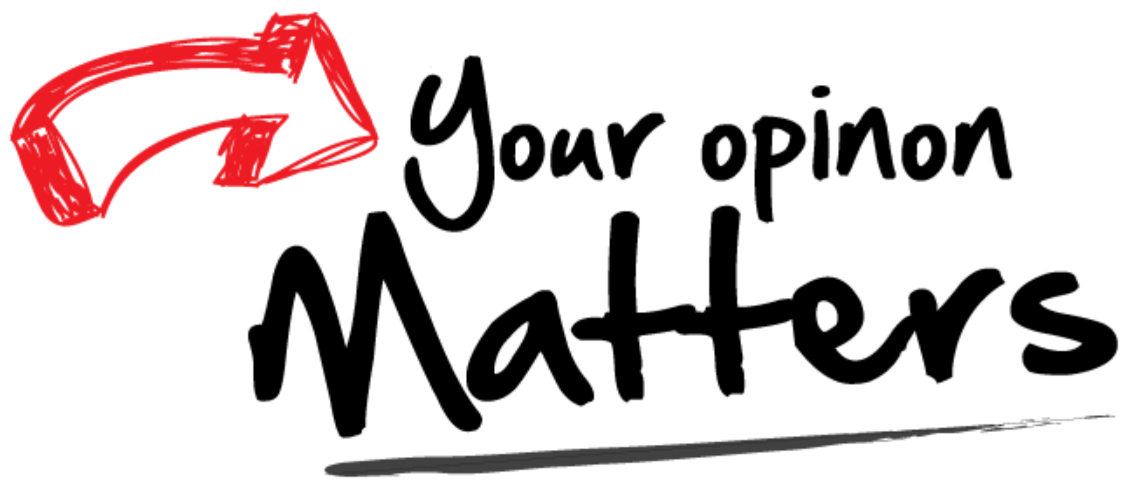
Proof. 对任意(a, b)

$$
\begin{aligned}
& (a, b) \in R \circ R \\
\Longrightarrow\ & \exists c \,.\, (a, c) \in R \land (b, c) \in R \\
\Longrightarrow\ & (a, b) \in R
\end{aligned}
$$

参考文章和课件

1. 魏恒峰《离散数学2020》集合论II. 关系
2. 南京大学《计算机问题求解2021》集合论II. 关系

Thank You!



QQ: 2095728218
Email: micoael@qq.com
(学校) gwzhang@cug.edu.cn