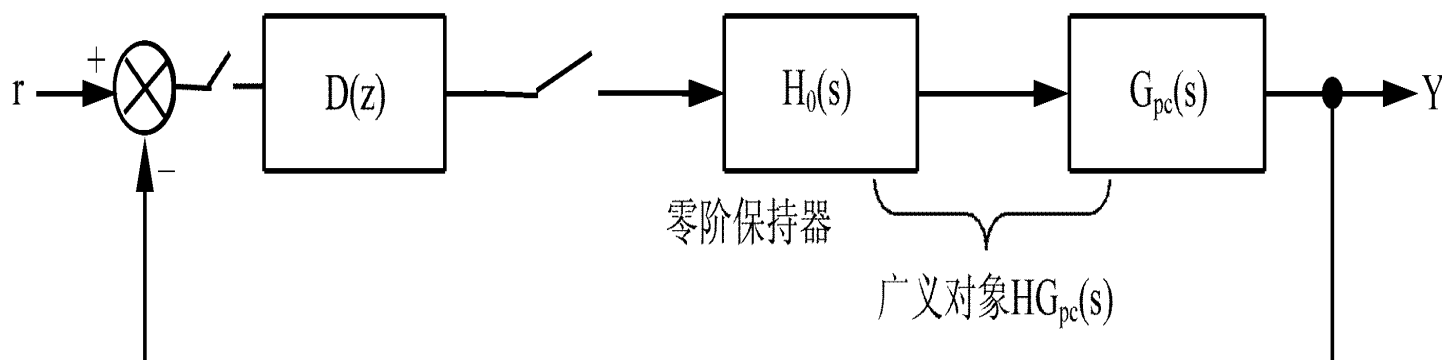


最少拍随动系统设计（林福康整理并负责解释）

1、最少拍控制系统的设计步骤：

- ◆ 根据控制系统的性能要求和其它约束条件，确定所需要的闭环脉冲传递函数 $\phi(z)$
- ◆ 求广义对象的脉冲传递函数 $G(z)$
- ◆ 确定数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$



$$\phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

2、系统的闭环传递函数为

$$\phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{R(z) - Y(z)}{R(z)} = 1 - \phi(z) = \frac{1}{1 + D(z)G(z)}$$

误差脉冲传递函数为

因此最少拍系统的数字控制器为

$$D(z) = \frac{\phi(z)}{G(z)[1 - \phi(z)]} = \frac{1 - \phi_e(z)}{\phi_e(z)G(z)}$$

对于典型输入： $r(t) = \frac{1}{(q-1)!} t^{q-1}$ ，其 z 变换为： $R(z) = \frac{B(z)}{(1 - z^{-1})^q}$

其中 $B(z)$ 为不含 $1-z^{-1}$ 因子的 z^{-1} 多项式； $q=1$ ，输入为单位阶跃输入函数； $q=2$ ，输入为单位速度输入函数； $q=3$ ，输入为单位加速度输入函数

3、◆ 根据 Z 变换的终值定理，求系统的稳态误差，并使其为零（无静差，即准确性约束条件），即：

$$e_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)R(z)\phi_e(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{B(z)}{(1 - z^{-1})^q} \cdot \phi_e(z) = 0$$

$$\phi_e(z) = 1 - \phi(z) = (1 - z^{-1})^q F(z)$$

因此：

$$F(z) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_p z^{-p}$$

这里

$$\phi(z) = 1 - \phi_e(z) = 1 - (1 - z^{-1})^q F(z)$$

则有：

4、◆ 根据最少拍控制，确定最少拍控值的闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ (快速性约束条件)

— 根据 $\phi(z) = 1 - \phi_e(z) = 1 - (1 - z^{-1})^q F(z)$

可知， $\Phi(z)$ 中 z^{-1} 的最高次幂为 $N = p + q$ ，故系统在 N 拍可以达到稳态

— 当 $p = 0$ 时，系统可以在最少 q 拍达到稳态

$$\phi(z) = 1 - (1 - z^{-1})^q$$

— 上述两点可得最少拍控制器选 $\Phi(z)$ 为：

$$D(z) = \frac{\phi(z)}{G(z)[1 - \phi(z)]} = \frac{1 - (1 - z^{-1})^q}{G(z)(1 - z^{-1})^q}$$

◆ 最少拍控制器 $D(z)$ 为：

$$\phi(z) = z^{-l} \prod_{i=1}^u (1 - b_i z^{-1}) \cdot \phi'(z)$$

◆ 因此

$$\phi_e(z) = 1 - \phi(z) = \prod_{j=1}^v (1 - a_j z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})^q F(z)$$

$$\phi'(z) = m_1 z^{-1} + \dots + m_s z^{-s}$$

其中

$$F(z) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_p z^{-p}$$

$$s = v + q \quad p = u + l$$

的项数应按 $\phi_e(z)$ 中 $(1 - z^{-1})^q$ 的最低幂次。而且，如果 a_j 中有 k 个在 $z=1$ 处，则 $\phi_e(z)$ 中 $(1 - z^{-1})$ 的总幂次只需取为 $\max(q, k)$

例：

例子：设对象模型为

$$G(z) = \frac{2.2z^{-1}}{1 - 1.2z^{-1}}$$

$$f(z) = z^{-1}$$

单位元外极点 $z=1.2$ ，现在设计一个对阶跃输入为最少拍的控制器

则控制器为 $D(z) = \frac{0.4545(1 + 1.2z^{-1})}{1 - z^{-1}}$

当输入为单位阶跃时，相应的控制量的 z 变换为

$$U(z) = \frac{f(z)}{G(z)} R(z) = \frac{1 + 1.2z^{-1}}{2.2(1 - z^{-1})} = 0.4545 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$Y(z) = z^{-1} + z^{-2} + \dots$$