

《高等数学》(下册)期末总复习

一、 向量代数与空间解析几何

(一) 向量代数

1、 点 $M(x, y, z) \Leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

2、 点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow$ 向量 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$;

3、 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} ; \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} ;$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z) ; \lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \quad (\lambda \text{ 为数}) ;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z ;$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} , (|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}) ;$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \quad (\text{对应坐标成比例}) ; \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 ;$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} ; \quad \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

(二) 曲面、空间曲线及其方程

1、 曲面及其方程 $\Sigma: F(x, y, z) = 0$, 旋转曲面【绕谁不换谁, 正负根号里没有谁; 作图时先画

母线然后绕其轴旋转之】, 柱面【柱面三缺一, 缺谁母线就平行于谁; 作图时先画准线结合母线特点得柱面】, 二次曲面【截痕法与伸缩变形法作图】; 要熟悉常见的曲面及其方程并会作

图【球面 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$, 圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$,

旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 等】

2、 空间曲线及其方程: 一般方程(面交式) 参数方程;

3、 曲线(曲面或空间立体)在坐标面上的投影: 投谁便消去谁

4、 会作简单立体图形

(三) 平面方程与直线方程:

1、 平面方程:

1) 一般方程： $Ax + By + Cz + D = 0$, 其中 $\vec{n} = (A, B, C)$ 为其一法向量 .

2) 点法式方程：法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 点 $M(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$, 则 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

3) 截距式方程： $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

4) 平面束方程：过直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

2、直线方程：

1) 对称式方程(点向式方程)：方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$, 点 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, 则 $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

2) 参数式方程： $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

3) 一般式方程： $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

3、面面、线线、线面关系：

1) 面面： $\cos \theta = |\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} ;$

$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 ;$

$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \text{ (或重合)} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

2) 线线： $\cos \theta = |\cos(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2})| = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} ;$

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 ; L_1 \parallel L_2 \text{ (或重合)} \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

3) 线面： $\sin \varphi = |\cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}})| = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} ;$

$L \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} ; L \parallel \Pi \text{ (或 } L \text{ 在 } \Pi \text{ 上)} \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$

4、距离 点面： $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ ；

点线： $d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$ ，其中 \vec{s} 为直线的方向向量， M 为直线上任意一点。

二、多元函数的微分学及其应用

(一) 极限 (求法与一元函数的类似, 洛必达法则除外):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \text{ 时, 有 } |f(x,y) - A| < \varepsilon$$

(二) 连续性: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

$$\stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \text{ 时, 有 } |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

(三) 偏导数:

1、显函数: $z = f(x,y)$

$$1) \text{ 定义: } f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

2) 求导法则: 对 x 求偏导, 暂时视 y 为常量; 对 y 求偏导, 暂时视 x 为常量

3) 复合函数的求导法则 (链式法则): 若 $z = f(u,v)$ 具有连续偏导数, 而 $u = g(x,y)$ 与

$v = h(x,y)$ 都具有偏导数, 则复合函数 $z = f[g(x,y), h(x,y)]$ 的偏导数为:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = f'_1 \cdot g_x + f'_2 \cdot h_x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y = f'_1 \cdot g_y + f'_2 \cdot h_y$$

$$\text{特别的, 设 } z = f[h(x), g(x)], \text{ 则 } \frac{dz}{dx} = f'_1 \cdot h'(x) + f'_2 \cdot g'(x)$$

例如, 设 $z = f(xy, 2x+3y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数:

$$\text{令 } u = xy, v = 2x+3y, \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot y + f'_2 \cdot 2 = yf'_1 + 2f'_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xf'_1 + 3f'_2.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(yf'_1) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(f'_2) = [f'_1 + y(f''_{11} \cdot x + f''_{12} \cdot 3)] + 2(f''_{21} \cdot x + f''_{22} \cdot 3) \\ &= f'_1 + xyf''_{11} + (3y+2x)f''_{12} + 6f''_{22} \end{aligned}$$

注意: 1) 解题时, 要注意偏导数以及导数的写法. 2) 高阶混合偏导数在连续的条件下相等;

$$3) \text{ 其中 } f'_1 = \left. \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \right|_{\substack{u=xy \\ v=2x+3y}} = f'_u(xy, 2x+3y) \text{【即 } f'_1(xy, 2x+3y) \text{】与原函数具有相同的复合结构.}$$

2、隐函数：

1) 一个方程的情形：

$$\begin{array}{l}
 \text{二元方程可确定一个一元隐函数：} F(x, y) = 0 \xrightarrow{y=y(x)} \left\{ \begin{array}{l} \text{公式法：} \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \\ \text{隐函数求导法：方程两边对} x \text{求导，注意} y = y(x) \text{为} x \text{的函数} \\ \text{微分法：方程两边取微分，} F_x dx + F_y dy = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{三元方程可确定一个二元隐函数：} F(x, y, z) = 0 \xrightarrow{z=z(x, y)} \left\{ \begin{array}{l} \text{公式法：} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \\ \text{隐函数求导法：方程两边对} x \text{ (或} y \text{) 求偏导，注意} z = z(x, y) \text{为} x, y \text{的函数} \\ \text{微分法：方程两边取微分，} F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \Rightarrow dz = \dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

2) 方程组的情形：(隐函数求导法)

$$\text{三元方程组确定两个一元隐函数：} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{y=y(x) \\ z=z(x)}} \text{对} x \text{求导} \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$$

$$\text{四元方程组可确定两个二元隐函数：} \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{u=u(x, y) \\ v=v(x, y)}} \text{对} x \text{ (或} y \text{) 求偏导，视} y \text{ (或} x \text{) 为常量，得} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ (或} \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{)}$$

(四) 全微分：可微函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为： $dz = z_x dx + z_y dy$.

定义为： $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ ，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

连续 \nleftrightarrow 偏导数存在

关系图——多元函数在某点： $\nwarrow \times \nearrow$ 可微分

$\uparrow \nleftrightarrow$
偏导数连续

(五) 应用：

1、几何应用：

1) 空间曲线的切线与法平面：

$$\text{a、 若曲线} \Gamma \text{的方程为参数方程：} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \text{点} M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma \leftrightarrow t = t_0, \text{则}$$

切向量为 $\vec{T} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ ，

切线方程为 $\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$ ；

法平面方程为 $x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$

b、若曲线 Γ 的方程为： $\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$ ，点 $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ ，则切向量为 $\vec{T} = (1, y'(x_0), z'(x_0))$ ，从而可得切线方程与法平面方程。

c、若曲线 Γ 的方程为一般方程： $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ，点 $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ ，则切向量为 $\vec{T} = (1, y'(x_0), z'(x_0))$ （利用隐函数求导法，方程两边对 x 求导，可得 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ ），从而可得切线方程与法平面方程。【另解： $\vec{n}_1 = (F_x, F_y, F_z)|_M$ ， $\vec{n}_2 = (G_x, G_y, G_z)|_M$ ，可取切向量为 $\vec{T} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ 】

附录——平面曲线的情形

(1) 若平面曲线 $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ， $t = t_0 \leftrightarrow M_0 \in C$ ，则

切向量 $\vec{T} = (x'(t_0), y'(t_0))$ ，法向量 $\vec{n} = (y'(t_0), -x'(t_0))$ ；

(2) 若 $C: y = f(x)$ ， $M_0(x_0, y_0) \in C$ ，则

$\vec{T} = (1, f'(x_0))$ ， $\vec{n} = (f'(x_0), -1)$ ；

(3) 若 $C: F(x, y) = 0$ ， $M_0(x_0, y_0) \in C$ ，则

$\vec{T} = (1, \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}) = (1, -\frac{F_x}{F_y})|_{M_0}$ ， $\vec{n} = (F_x, F_y)|_{M_0}$ 。

2) 曲面的切平面与法线：

a、若曲面 Σ 的方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，点 $M(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ ，则

法向量为： $\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$ ，

切平面方程为： $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$ ；

法线方程为： $\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

b、若曲面 Σ 的方程为 $z = f(x, y)$ ，点 $M(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ ，则

法向量为： $\vec{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ ，

切平面方程为： $f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ ；

法线方程为： $\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$

2、**极值**：1) **无条件**：设 $z = f(x, y)$ 【 f 具有一、二阶连续偏导数】，则

$$\text{由} \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \text{解得驻点 } (x_0, y_0),$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$ ，然后利用 A, B, C 判定极值与否：

$AC - B^2 > 0$ 有极值， $A > 0$ 极小， $A < 0$ 极大；

$AC - B^2 < 0$ 无极值；

$AC - B^2 = 0$ 用此法无法判定。

注意：最后必须求出极值。

2) **条件极值**：法 I 【拉格朗日乘数法】

$z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值：令 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ ，联立方程

$$\begin{cases} L_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}, \text{其解 } (x_0, y_0) \text{ 为可能的极值点。至于它是否为极值点，一般可由问题的本身性质}$$

来判定。

法 II 【化为无条件极值】

由方程 $\varphi(x, y) = 0$ 解出 $y = y(x)$ 【要求好解！】，然后转化为一元函数 $z = f[x, y(x)]$ 的无条件极值问题。

3、**方向导数与梯度**：(以二元函数为例) 1)、**方向导数**：设 $z = f(x, y)$ 可微分，

$$\vec{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta), \text{ 则 } \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

2) **梯度**： $\text{grad} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ ，方向导数的最大值为梯度的模，取得方向导

数的最大值的方向为梯度的方向；且梯度为等值线 $f(x, y) = C$ 上的一个法向量。

三、积分

(一)求法

1、重积分

I、 二重积分 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$

a、 直角坐标：
$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, & \text{若 } D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases} [X: \text{上下}] \\ \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx, & \text{若 } D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases} [Y: \text{左右}] \end{cases}$$

若 D 既不是 X - 型也不是 Y - 型，则适当分割之。

注意：通过二重积分，可交换二次积分的积分次序，这是一类常考的题型。

b、 极坐标：
$$I \xrightarrow[\substack{d\sigma = \rho d\rho d\theta}]{\substack{x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta}} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$\xrightarrow[\substack{D: \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \end{cases}}]{\substack{\alpha \leq \theta \leq \beta \\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta)}} \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

II、 三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$

a、 直角坐标 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ ：

1) 投影法：

i) 先一后二公式：
$$I \xrightarrow[\substack{D_{xy} = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}}]{\substack{\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}}} \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

ii) 三次积分公式：
$$I \xrightarrow[\substack{\Omega: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{cases}}]{\substack{\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}}} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

2) 截面法：(先二后一公式)
$$I \xrightarrow[\substack{D_z = \{(x, y, z) | c \leq z \leq d, (x, y) \in D_z\}}]{\substack{\Omega = \{(x, y, z) | c \leq z \leq d, (x, y) \in D_z\}}} \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

b、 柱面坐标：
$$I \xrightarrow[\substack{dv = \rho d\rho d\theta dz}]{\substack{x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z}} \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \cdot \rho d\rho d\theta dz$$

$$\xrightarrow[\substack{\Omega: \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ z_1(\rho, \theta) \leq z \leq z_2(\rho, \theta) \end{cases}}]{\substack{\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}}} \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \theta)}^{z_2(\rho, \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz$$

c、球面坐标：
$$I \xrightarrow[\substack{dv=r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta}]{\substack{\begin{cases} x=r \sin \varphi \cos \theta \\ y=r \sin \varphi \sin \theta \\ z=r \cos \varphi \end{cases}}} \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$\xrightarrow[\substack{\Omega: \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta) \\ r_1(\varphi, \theta) \leq r \leq r_2(\varphi, \theta) \end{cases}}]{\substack{\int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \sin \varphi d\varphi \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 dr}}$$

2、曲线积分

I、第一类（对弧长）：

a、平面曲线：
$$\int_L f(x, y) ds \xrightarrow[\substack{\alpha \leq t \leq \beta}]{L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt (\alpha < \beta)$$

b、空间曲线：
$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \xrightarrow[\substack{\alpha \leq t \leq \beta}]{\Gamma: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt (\alpha < \beta)$$

II、第二类（对坐标）

a、平 面 曲 线：

$$I = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \xrightarrow[\substack{\text{由 } \alpha \text{ 变到 } \beta}]{L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt$$

$$I = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

i) 参数法：
$$I \xrightarrow[\substack{\text{由 } \alpha \text{ 变到 } \beta}]{L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt$$

ii) 与路径无关：选取特殊的路径求之，注意条件：单连通，偏导数处处连续。

定理 设函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通区域 D 内处处具有连续的偏导数，则下列命题相互等价：

(1) $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 在 D 内与路径无关；

(2) 沿 D 内任意一条闭曲线 C ， $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ；

(3) 在 D 内恒有： $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ；

(4) $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 在 D 内为某函数 $u(x, y)$ 的全微分，即存在函数 $u(x, y)$ ，使得

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = du(x, y) .$$

这里 $u(x, y)$ 可由下列三种方法求得：

曲线积分法： $u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C$;

凑全微分法：利用微分的运算法则，将 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 凑成 $d(\cdots)$ ，则 $u(x, y) = (\cdots) + C$;

偏积分法：由 $du = Pdx + Qdy$ ，得 $u_x = P(x, y)$;

两边对 x 求偏积分可得 $u(x, y) = \int P(x, y)dx = f(x, y) + C(y)$

两边对 y 求偏导可得 $u_y = f_y(x, y) + C'(y)$,

再由 $u_y = Q(x, y)$ ，可解得 $C(y)$ ，从而得 $u(x, y)$.

iii) Green 公式： $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$; 不闭则补之 . 注意条件：

偏导数处处连续， L 为 D 的正向边界 .

iv) 化为第一类： $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L [P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta]ds$

b、空间曲线： $I = \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

i) 参数法： $I \xrightarrow[\text{由}\alpha\text{变到}\beta]{\Gamma: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}} \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt$

ii) *与路径无关：选取特殊的路径求之，注意条件：单连通，偏导数处处连续 .

iii) Stokes 公式：

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \stackrel{\text{或}}{=} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ;$$

不闭则补之 . 注意方向： L 的方向与 Σ 的侧符合右手规则 .

iv) 化为第一类： $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

3、曲面积分

I、第一类（对面积）：

$$I = \iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \begin{cases} \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy & \Sigma: z = z(x, y) \\ \iint_{D_{xz}} f[x, y(z, x), z] \cdot \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dzdx & \Sigma: y = y(z, x) \\ \iint_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z] \cdot \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz & \Sigma: x = x(y, z) \end{cases}$$

II、第二类（对坐标）： $I = \iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$

1) Gauss 公式：
$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

若不闭则补之．注意条件：偏导数处处连续及方向性： Σ 为 Ω 的整个边界曲面的外侧．

2) 投影法：注意垂直性．若不垂直，则

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz \quad \underline{\underline{\Sigma: x = x(y, z) \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dydz}} \quad \text{【前正后负】}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx \quad \underline{\underline{\Sigma: y = y(z, x) \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dzdx}} \quad \text{【右正左负】}$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy \quad \underline{\underline{\Sigma: z = z(x, y) \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy}} \quad \text{【上正下负】}$$

3) 化为第一类：
$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

4) 化为单一型：
$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \iint_{\Sigma} \left(P \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} + Q \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} + R \right) dxdy$$

(二)应用

1、面积：

平面 $A = \iint_D dxdy$ ；

曲面 $A = \iint_{\Sigma} dS$ ， $A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$ ($\iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dydz$ 或 $\iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dzdx$)

2、体积：
$$V = \iiint_{\Omega} dv$$
；
$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$
 【曲顶柱体】

3、物理应用：质量、功、转动惯量、质心、引力、流量（通量）、环流量等等【自学之】

设 $\vec{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ ，则

散度 $\text{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ，

旋度 $\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

(三) 奇偶对称性：设 f 连续．

1、定积分的奇偶对称性：
$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x) \text{ 为奇函数；} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{若 } f(x) \text{ 为偶函数。} \end{cases}$$

2、二重积分的**奇偶对称性**：设 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数;} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & \text{若 } f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数,} \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴上方的部分。

同理，若 D 关于 y 轴对称，则还需视 $f(x, y)$ 关于 x 的奇偶性。

3、三重积分的**奇偶对称性**：设 Ω 关于 xOy 面对称，则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数;} \\ 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv, & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数,} \end{cases}$$

其中 Ω_1 为 Ω 在 xOy 面上方的部分。

同理，若 Ω 关于 yOz 面对称，则还需视 $f(x, y, z)$ 关于 x 的奇偶性；

而若 Ω 关于 zOx 面对称，则还需视 $f(x, y, z)$ 关于 y 的奇偶性。

4、对面积的曲面积分的**奇偶对称性**：设函数 $f(x, y, z)$ 在光滑（或分片光滑）曲面 Σ 上连续。

若 Σ 关于 xOy 面对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数;} \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS, & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

其中 Σ_1 为 Σ 在 $z \geq 0$ 的部分。

同理，若 Σ 关于 yOz （或 zOx ）面对称，则视 $f(x, y, z)$ 关于 x （或 y ）的奇偶性。

5、对弧长的曲线积分的**奇偶对称性**：设函数 $f(x, y)$ 在光滑（或分段光滑）曲线 L 上连续。

若 L 关于 x 轴对称，则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数;} \\ 2 \int_{L_1} f(x, y) ds, & \text{若 } f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

其中 L_1 为 L 在 $y \geq 0$ 的部分。

同理，若 L 关于 y 轴对称，则视 $f(x, y)$ 关于 x 的奇偶性。

四、级数

(一) 常数项级数及其收敛性

1、定义： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛（发散） $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 存在（不存在）【部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \text{】}$$

2、基本性质：1) $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n (k \neq 0)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同的收敛性；

2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛【口诀：收加收为收，收加发为发，发加发未必发】

3) 改变有限项的值不影响级数的收敛性

4) 收敛的级数可以任意加括号

5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ；反之未必。

6) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

3、特殊级数的收敛性【必须牢记之】：

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；

p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (常数 $p > 0$)：当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散；

等比级数（几何级数） $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$ ，当 $|q| \geq 1$ 时发散，当 $|q| < 1$ 时收敛，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = \frac{a}{1-q} (|q| < 1) .$$

4、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，其中 $u_n \geq 0 (n=1, 2, \cdots)$ ：

I、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{s_n\}$ 有界

II、比较：1) $u_n \leq v_n (n > N)$ 【大的收，小的也收；小的发，大的也发】；

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 < l < +\infty)$ 【同敛散】

III、比值(根值): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho)$, 当 $\rho < 1$ 时收敛; 当 $\rho > 1 (\rho = +\infty)$ 时发散; 而当 $\rho = 1$ 时

用此法不能判定其收敛性.

IV、极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = l (0 < l < +\infty)$, 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散.

5、交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n (u_n > 0, n=1, 2, \dots)$: $\{u_n\}$ 单调减少趋于零.

6、一般项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (u_n 为任意常数): 发散或收敛 (绝对收敛, 条件收敛)

(二) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$:

1、Abel 定理: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在当 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 时收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < |x_0|$ 时必绝对收敛; 反之,

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时发散, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| > |x_0|$ 时必发散.

2、收敛半径: 1) 若 $a_n \neq 0$ 【不缺项】: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$), $R = \begin{cases} +\infty, & \rho = 0, \\ 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty, \\ 0, & \rho = +\infty; \end{cases}$

2) 若缺项: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \dots < 1$, 解得收敛区间.

3、收敛域: 先求收敛半径 R , 可得收敛区间 $(-R, R)$, 再讨论端点 $x = \pm R$ 处的收敛性可得所求的收敛域

4、幂级数和函数的求法: 先求收敛域, 再利用幂级数的运算性质 (加减乘除四则运算, 逐项求导, 逐项积分, 和函数的连续性) 以及换元法, 然后代已知的展开式, 可得所求的和函数.

5、函数展开成幂级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n (x \in I)$:

1) 直接展开法: 【利用 Taylor 展开定理】求导数得系数, 写出泰勒级数, 求其收敛域, 最后记得判定余项趋于零, 便可得到所求的展开式.

2) 间接展开法: 利用幂级数的运算性质 (加减乘除四则运算, 逐项求导, 逐项积分, 和函数的连续性) 以及换元法, 然后代已知的展开式, 可得所求的展开式.

注: 以下 7 个常用的展开式必须牢记:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (|x| < +\infty); \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (|x| < +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} (|x| < +\infty); \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (|x| < 1); \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} (-1 < x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots (|x| < 1) \quad \text{【}\alpha \text{ 为常数, } I = \begin{cases} [-1, 1] & \alpha > 0 \\ (-1, 1] & -1 < \alpha < 0 \\ (-1, 1) & \alpha \leq -1 \end{cases} \text{】}$$

(三) 傅里叶级数：只复习 $T = 2\pi$ 情形，一般周期 $T = 2l$ 类似。

1、系数：
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx (n=0, 1, 2, \cdots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx (n=1, 2, \cdots)$$

2、收敛性：条件为在一个周期上 1) 处处连续或只有有限个第一类间断点；2) 只有有限个极值点。

3、和：
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x) & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点} \end{cases}$$

4、傅里叶级数展开式：
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), (x \in C)$$

$$\text{其中 } C = \{x \mid f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\}$$

5、函数展开成傅里叶级数：

- 1) 若 $f(x)$ 为 $T = 2\pi$ 的周期函数，则对 $f(x)$ 验证收敛定理的条件，求出 $f(x)$ 的间断点，利用收敛定理，写出 $f(x)$ 的傅氏级数的收敛性，再求出傅氏系数，最后写出所求的傅氏级数展开式。注意：必须写出展开式成立的范围，在展开式不成立的点（必为间断点）必须指明傅氏级数的收敛性。
 - 2) 若 $f(x)$ 只在 $[-\pi, \pi]$ 上有定义，则必须对 $f(x)$ 进行周期延拓，然后对周期延拓后所得的函数 $F(x)$ 的傅氏级数展开式限制在 $[-\pi, \pi]$ 上讨论。
 - 3) 若 $f(x)$ 只在 $[0, \pi]$ 上有定义，对 $f(x)$ 进行奇（偶）延拓再周期延拓，可得正弦（余弦）级数。
- 注意：间断点或连续点的判定，必须为周期函数的！

五、微分方程

(一) 一阶微分方程： $F(x, y, y') = 0$ ， $y' = f(x, y)$ 或 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

1、可分离变量： $f(x)dx = g(y)dy$ ，积分之可得通解

2、齐次： $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ ，令 $u = \frac{y}{x}$ ，可将原方程化为关于 x, u 的可分离变量

3、线性： $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ，通解为 $y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]$ ；或利用常数变易法或利用

用积分因之法： $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

4、伯努利： $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n (n \neq 0, 1)$ ，令 $z = y^{1-n}$ ，可将原方程化为关于 x, z 的线性。

5、全微分方程： $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (条件：在单连通区域 D 内 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$)。

1) 曲线积分法：通解为 $u(x, y) = C$ ，其中 $u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ；

2) 凑微分法：利用微分的运算法则，设法将原方程凑成 $d[\Delta] = 0$ ，则可得通解为 $\Delta = C$ 。

(二) 可降阶的高阶微分方程：

I、 $y^{(n)} = f(x)$ 【右端只含 x 】：连续积分之；

II、 $y'' = f(x, y')$ 【不显含 y 】：令 $y' = p$ ，则 $y'' = \frac{dp}{dx}$ ，可将原方程化为关于 x, p 的一阶。

III、 $y'' = f(y, y')$ 【不显含 x 】：令 $y' = p$ ，则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$ ，可将原方程化为关于 y, p 的一阶。

(三) 常系数线性微分方程：

1、齐次： $y'' + py' + qy = 0$ ，其中 p, q 都为常数。

1) 特征方程 $r^2 + pr + q = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = ?$

2) 通解： $y = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \\ (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} & r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \\ e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) & r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \end{cases}$

2、非齐次： $y'' + py' + qy = f(x)$ ，其中 p, q 都为常数

1) 先求出对应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解： $Y = Y(x)$ ；

2) 后求原非齐次方程的特解 .

A、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型：令 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$, 其中 k 是特征方程含根 λ 的重数

B、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型：

令 $y^* = x^k e^{\lambda x} [Q_m(x) \cos \omega x + R_m(x) \sin \omega x]$, 其中 $m = \max\{l, n\}$, k 是特征方程含根 $\lambda + i\omega$ 的重数

(四) 概念与理论

1. 概念：阶，解（特解，通解），初始条件，初值问题，积分曲线

2. 线性微分方程的解的结构：

1) 齐次： $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

通解： $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, 其中 $y_1(x), y_2(x)$ 为该方程线性无关

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

的两个解 .

2) 非齐次： $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

通解： $y = Y(x) + y^*(x)$, 其中 $Y(x)$ 为对应的齐次方程的通解 , $y^*(x)$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

为原方程的一个特解 .

3) 设 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 分别为 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$

与 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$ 的特解 , 则 $y^* = y_1^*(x) + y_2^*(x)$

为 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解 .