



考研辅导丛书

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

数字信号处理 学习指导与习题精解

陈后金 薛健 胡健



高等教育出版社

考研辅导丛书

——《数字信号处理学习指导与习题精解》

简介

陈后金教授，全国优秀教师，工学博士，博士生导师，北京交通大学“国家电工电子教学基地”主任。主要研究方向为信号与信息处理等，在美国RICE大学、TEXAS大学研修信号处理多年。

长期主讲本科生“信号与系统”和“数字信号处理”等必修课程，以及研究生“高级信号处理”学位课程。主持建设的“信号与系统”课程被评为首批国家精品课程。主编出版了普通高等教育“十五”国家级规划教材《数字信号处理》、北京市高等教育精品教材《信号与系统》等6本教材。主持10多项省部级以上科研和教研项目，发表40多篇科研和教研论文。获得全国高等院校青年教师霍英东教学奖、省部级科技进步奖2项、北京市优秀教学成果奖2项。被评为铁道部青年科技拔尖人才、北京市教育创新标兵。



考研辅导丛书

《信号与系统学习指导书》 张永瑞 王松林

《帮你学数字电子技术基础——释疑、解题、考试》 阎石

《帮你学模拟电子技术基础——释疑、解题、考试》 华成英

●《数字信号处理学习指导与习题精解》 陈后金 薛健 胡健

《自动控制原理典型例题解析与习题精选》 宋申民 陈兴林

ISBN 7-04-017749-8



9 787040 177497 >

定价 19.40 元

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

数字信号处理 学习指导与习题精解

陈后金 薛健 胡健

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理学习指导与习题精解 / 陈后金, 薛健, 胡健. —北京: 高等教育出版社, 2005. 11
ISBN 7-04-017749-8

I. 数... II. ①陈... ②薛... ③胡... III. 数字信号-信号处理-高等学校-教学参考资料
IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 116711 号

策划编辑 刘淑扬 责任编辑 曲文利 封面设计 李卫青 责任绘图 朱 静
版式设计 王 莹 责任校对 王效珍 责任印制 杨 明

| | | | |
|------|----------------|------|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总 机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| 经 销 | 北京蓝色畅想图书发行有限公司 | 网上订购 | http://www.landaco.com |
| 印 刷 | 国防工业出版社印刷厂 | | http://www.landaco.com.cn |
| 开 本 | 787×960 1/16 | 版 次 | 2005 年 11 月第 1 版 |
| 印 张 | 15.25 | 印 次 | 2005 年 11 月第 1 次印刷 |
| 字 数 | 280 000 | 定 价 | 19.40 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 17749-00

内容简介

本书是陈后金等编写的《数字信号处理》主教材的配套参考书,是高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目的研究成果。主教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材,自2004年推出以来,受到读者的欢迎。考虑到这门课程是电气信息专业学生的一门非常重要的专业基础课程,并且是很多专业的考研课程,作者根据自己多年的教学经验编写了这本学习指导,以期提高学生的学习水平。

本书共分9章,具体内容是:离散信号与系统分析基础、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换、IIR数字滤波器的设计、FIR数字滤波器的设计、功率谱估计、数字系统的结构、多速率信号处理基础、信号时频分析与小波分析。每章包括基本知识与重要公式、学习要求、重点和难点提示、思考题、习题精解五部分。另外附录收录了北京交通大学2001年至2005年硕士研究生入学考试试题及详解。

本书可供讲授、学习“数字信号处理”课程的师生作为教材配套参考书使用,也可供准备硕士研究生入学考试的学生作为考前辅导书使用。

前 言

“数字信号处理”课程是电气信息类专业重要的技术基础课程,该课程教材按照主教材与辅助教材相结合、理论教材与实验教材相结合、纸质教材与电子教材相结合的思路进行立体化建设。“数字信号处理教材立体化研究与建设”2003 年被列入高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目,其建设内容包含《数字信号处理》、《数字信号处理学习指导与习题精解》、《信号处理综合设计性实验》、电子教案、网络课件、试题库等。主教材《数字信号处理》是高等教育“十五”国家级规划教材,已于 2004 年由高等教育出版社出版,该课程的所有纸质教材与电子教材将予近期全部由高等教育出版社出版。

本书作为主教材《数字信号处理》的配套参考书,体系与主教材相对应,共分 9 章,每章由基本知识与重要公式、学习要求、重点和难点提示、思考题、习题精解 5 个相互关联的部分组成。基本知识与重要公式突出基本理论、基本概念和基本方法;学习要求给出了需要掌握的知识点;重点和难点提示归纳重点和分析难点;思考题延伸概念和启发思索;习题精解给出了主教材中主要习题的详细解答并有所扩充。另外书中还附有近年来 5 套硕士研究生入学试题及详解。

本书可作为电子信息工程、通信工程、信息工程、自动控制工程、生物医学工程、计算机等专业学生学习“数字信号课程”课程的参考书或考研的辅导书。

本书由陈后金、薛健、胡健编写,郝晓莉、钱满义提供了部分素材。本书的出版得到了高等教育出版社、北京交通大学教务处和电子信息学院的大力支持,在此深表谢意。

限于水平,书中错误及不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2005 年 6 月

于北京交通大学

目 录

| | |
|------------------------------|-----------|
| 第 1 章 离散信号与系统分析基础 | 1 |
| 1.1 基本知识与重要公式 | 1 |
| 1. 离散时间信号与系统的时域分析 | 1 |
| 2. 离散时间信号与系统的频域分析 | 3 |
| 3. 离散时间信号与系统的 z 域分析 | 7 |
| 4. 信号的抽样 | 10 |
| 1.2 学习要求 | 11 |
| 1.3 重点和难点提示 | 11 |
| 1.4 思考题 | 12 |
| 1.5 习题精解 | 12 |
| 第 2 章 离散傅里叶变换 | 42 |
| 2.1 基本知识与重要公式 | 42 |
| 1. 离散傅里叶变换及其性质 | 42 |
| 2. 序列 DFT 与 DTFT 及 z 变换的关系 | 44 |
| 3. 利用 DFT 计算线性卷积 | 45 |
| 4. 利用 DFT 分析连续非周期信号的频谱 | 46 |
| 2.2 学习要求 | 48 |
| 2.3 重点和难点提示 | 48 |
| 2.4 思考题 | 49 |
| 2.5 习题精解 | 49 |
| 第 3 章 快速傅里叶变换 | 63 |
| 3.1 基本知识与重要公式 | 63 |
| 1. 基 2 时间抽取 FFT 算法 | 63 |
| 2. 基 2 频率抽取 FFT 算法 | 64 |
| 3. 基 4 时间抽取 FFT 算法 | 65 |
| 4. FFT 算法的应用 | 66 |
| 5. 线性调频 z 变换算法 | 67 |
| 3.2 学习要求 | 68 |
| 3.3 重点和难点提示 | 68 |
| 3.4 思考题 | 68 |
| 3.5 习题精解 | 69 |
| 第 4 章 IIR 数字滤波器的设计 | 78 |

| | | |
|--------------|---------------------------|------------|
| 4.1 | 基本知识与重要公式 | 78 |
| 1. | 模拟低通滤波器设计 | 78 |
| 2. | 模拟域频率变换 | 81 |
| 3. | 脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器 | 82 |
| 4. | 双线性变换法设计 IIR 数字滤波器 | 83 |
| 4.2 | 学习要求 | 83 |
| 4.3 | 重点和难点提示 | 84 |
| 4.4 | 思考题 | 84 |
| 4.5 | 习题精解 | 85 |
| 第 5 章 | FIR 数字滤波器的设计 | 105 |
| 5.1 | 基本知识与重要公式 | 105 |
| 1. | 线性相位 FIR 数字滤波器的特性 | 105 |
| 2. | 窗函数法设计 FIR 滤波器 | 107 |
| 3. | 频率取样法设计线性相位 FIR 滤波器 | 109 |
| 4. | 线性相位 FIR 滤波器的优化设计 | 110 |
| 5.2 | 学习要求 | 111 |
| 5.3 | 重点和难点提示 | 111 |
| 5.4 | 思考题 | 111 |
| 5.5 | 习题精解 | 112 |
| 第 6 章 | 功率谱估计 | 138 |
| 6.1 | 基本知识与重要公式 | 138 |
| 1. | 随机信号的特征描述 | 138 |
| 2. | 平稳随机序列通过 LTI 离散时间系统 | 139 |
| 3. | 经典功率谱估计 | 139 |
| 4. | 现代功率谱估计 | 140 |
| 6.2 | 学习要求 | 142 |
| 6.3 | 重点和难点提示 | 143 |
| 6.4 | 思考题 | 143 |
| 6.5 | 习题精解 | 143 |
| 第 7 章 | 数字系统的结构 | 151 |
| 7.1 | 基本知识与重要公式 | 151 |
| 1. | IIR 数字滤波器的结构 | 151 |
| 2. | FIR 数字滤波器的结构 | 152 |
| 3. | 数字滤波器的格型结构 | 153 |
| 4. | 有限字长效应 | 155 |
| 7.2 | 学习要求 | 156 |
| 7.3 | 重点和难点提示 | 156 |
| 7.4 | 思考题 | 157 |

| | |
|-------------------------------------|------------|
| 7.5 习题精解 | 157 |
| 第8章 多速率信号处理基础 | 171 |
| 8.1 基本知识与重要公式 | 171 |
| 1. 多速率系统中的基本单元 | 171 |
| 2. 抽取滤波器和内插滤波器 | 172 |
| 3. 多相分解 | 175 |
| 4. 半带滤波器 | 175 |
| 5. 两通道滤波器组 | 176 |
| 8.2 学习要求 | 178 |
| 8.3 重点和难点提示 | 178 |
| 8.4 思考题 | 178 |
| 8.5 习题精解 | 179 |
| 第9章 信号时频分析与小波分析 | 190 |
| 9.1 基本知识与重要公式 | 190 |
| 1. 短时傅里叶变换 | 190 |
| 2. 小波展开与小波变换 | 191 |
| 3. 小波变换与多分辨率分析 | 192 |
| 4. 小波变换与滤波器组 | 195 |
| 5. 基于小波的信号处理与应用 | 198 |
| 9.2 学习要求 | 199 |
| 9.3 重点和难点提示 | 199 |
| 9.4 思考题 | 200 |
| 附录 北京交通大学近年研究生入学试题及详解 | 201 |
| I. 2001 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解 | 201 |
| II. 2002 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解 | 206 |
| III. 2003 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解 | 213 |
| IV. 2004 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解 | 219 |
| V. 2005 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解 | 225 |

离散信号与系统分析基础

1.1 基本知识与重要公式

数字信号处理主要研究如何利用数字方法进行信号分析与系统设计。信号分析涉及离散信号的时域、频域和 z 域分析,离散傅里叶变换及其快速算法,随机信号谱估计,多速率信号处理,信号时频分析;系统设计涉及 IIR 滤波器设计, FIR 滤波器设计,数字滤波器结构,数字滤波器软硬件实现及有限字长效应。本章介绍基本离散信号,信号基本运算,信号抽取与重建,离散信号与系统的时域、频域和 z 域分析等内容,这些内容是数字信号处理的理论基础。

1. 离散时间信号与系统的时域分析

(1) 离散时间信号的时域描述

单位脉冲序列、单位阶跃序列和虚指数序列是离散时间信号与系统分析的基本序列。

单位脉冲序列

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

单位阶跃序列

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

角频率为 Ω 的虚指数序列

$$x[k] = e^{j\Omega k}, k \in \mathbb{Z} \quad (1-3)$$

如果

$$\frac{|\Omega|}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad (1-4)$$

其中 N, m 是不可约的正整数, 则虚指数序列的周期为 N 。

利用单位脉冲序列, 可将任意序列 $x[k]$ 表示为

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[k-n] \quad (1-5)$$

上式表明任意序列都可分解为单位脉冲序列及其位移的线性组合。

两个序列的卷积和定义为

$$y[k] = x_1[k] * x_2[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[k-n] \quad (1-6)$$

序列卷积和具有下列基本性质。

- 交换律 $x_1[k] * x_2[k] = x_2[k] * x_1[k]$
- 结合律 $(x_1[k] * x_2[k]) * x_3[k] = x_1[k] * (x_2[k] * x_3[k])$
- 分配律 $x_1[k] * (x_2[k] + x_3[k]) = x_1[k] * x_2[k] + x_1[k] * x_3[k]$
- 位移特性 若 $x_1[k] * x_2[k] = y[k]$, 则 $x_1[k-n] * x_2[k-m] = y[k-(m+n)]$

两个实序列 $x[k]$ 与 $y[k]$ 的互相关运算定义为

$$r_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[k+n]$$

实序列 $x[k]$ 的自相关运算定义为

$$r_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] x[k+n]$$

序列的相关函数具有下列基本特性:

$$|r_x[n]| \leq r_x[0], r_x[n] = r_x[-n], r_{xy}[n] = r_{yx}[-n]$$

(2) 离散时间系统的时域分析

本课程主要讨论线性时不变 (Linear Time-Invariant, 简称 LTI) 系统。线性系统是指满足均匀性与叠加性的系统, 即

$$T\{ax_1[k] + bx_2[k]\} = aT\{x_1[k]\} + bT\{x_2[k]\} \quad (1-7)$$

其中 a, b 为任意常数。

时不变系统是指当输入序列延时 n 时, 系统的输出也延时 n 。即当系统输入序列为 $x[k]$, 对应的输出序列为 $y[k]$ 时, 则有

$$T\{x[k-n]\} = y[k-n] \quad (1-8)$$

LTI 系统的单位脉冲响应反映离散系统的时域特性, 定义为系统在零状态

条件下,由单位脉冲信号 $\delta[k]$ 激励而产生的响应 $h[k]$,即

$$h[k] = T\{\delta[k]\} \quad (1-9)$$

根据 LTI 系统的单位脉冲响应,可以求解离散 LTI 系统的零状态响应,描述系统的因果性和稳定性。

离散 LTI 系统的零状态响应为

$$y[k] = T\{x[k]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n] = x[k] * h[k] \quad (1-10)$$

离散 LTI 系统具备因果性的充分必要条件为

$$h[k] = 0, \quad k < 0 \quad (1-11)$$

离散 LTI 系统稳定的充分必要条件为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = S < \infty \quad (1-12)$$

2. 离散时间信号与系统的频域分析

(1) 周期序列的频域分析

周期为 N 的任意序列 $\hat{x}[k]$ 可用有限项虚指数信号表示为

$$\hat{x}[k] = \text{IDFS}\{\hat{X}[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} \hat{X}[m] W_N^{-mk} \quad (1-13)$$

式中 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $\hat{X}[m]$ 称为周期序列 $\hat{x}[k]$ 的 DFS 系数或频谱,频谱 $\hat{X}[m]$ 可由

$$\hat{X}[m] = \text{DFS}\{\hat{x}[k]\} = \sum_{k=\langle N \rangle} \hat{x}[k] W_N^{mk} \quad (1-14)$$

确定。周期序列的频谱 $\hat{X}[m]$ 也是一个周期为 N 的序列。

DFS 的性质

若 $\text{DFS}\{\hat{x}[k]\} = \hat{X}[m]$, $\text{DFS}\{\hat{x}_1[k]\} = \hat{X}_1[m]$, $\text{DFS}\{\hat{x}_2[k]\} = \hat{X}_2[m]$, 则有

- 线性特性 $\text{DFS}\{a\hat{x}_1[k] + b\hat{x}_2[k]\} = a\text{DFS}\{\hat{x}_1[k]\} + b\text{DFS}\{\hat{x}_2[k]\}$
- 位移特性 $\text{DFS}\{\hat{x}[k+n]\} = W_N^{-nm}\hat{X}[m]$
- 对称特性 $\text{DFS}\{\hat{x}^*[k]\} = \hat{X}^*[-m]$, $\text{DFS}\{\hat{x}^*[-k]\} = \hat{X}^*[m]$

进一步推导,可得

$$\text{Re}\{\hat{x}[k]\} \xrightarrow{\text{DFS}} \hat{X}_e[m] = \frac{1}{2}(\hat{X}[m] + \hat{X}^*[-m])$$

$$\mathrm{jIm}\{\hat{x}[k]\} \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_o[m] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[m] - \tilde{X}^*[-m])$$

$$\hat{x}_e[k] = \frac{1}{2}(\hat{x}[k] + \hat{x}^*[-k]) \xrightarrow{\text{DFS}} \text{Re}\{\tilde{X}[m]\}$$

$$\hat{x}_o[k] = \frac{1}{2}(\hat{x}[k] - \hat{x}^*[-k]) \xrightarrow{\text{DFS}} \mathrm{jIm}\{\tilde{X}[m]\}$$

若 $\hat{x}[k]$ 为实周期序列, 则有

$$\tilde{X}[m] = \tilde{X}^*[-m]$$

上式也可等价地写为

$$\text{Re}\{\tilde{X}[m]\} = \text{Re}\{\tilde{X}[-m]\}, \quad \text{Im}\{\tilde{X}[m]\} = -\text{Im}\{\tilde{X}[-m]\}$$

即实周期序列 $\hat{x}[k]$ 的频谱 $\tilde{X}[m]$ 的实部为偶函数, 虚部为奇函数。也可等价地写为

$$|\tilde{X}[m]| = |\tilde{X}[-m]|, \quad \arg\{\tilde{X}[m]\} = -\arg\{\tilde{X}[-m]\}$$

即实周期序列 $\hat{x}[k]$ 的频谱 $\tilde{X}[m]$ 的幅度谱为偶函数, 相位谱为奇函数。

• 周期卷积特性 $\text{DFS}\{x_1[k] \tilde{*} x_2[k]\} = \text{DFS}\{\hat{x}_1[k]\} \text{DFS}\{\hat{x}_2[k]\}$

• 对偶特性 $\text{DFS}\{\tilde{X}[k]\} = N \hat{x}[-m]$

• Parseval 等式 $\sum_{k=\langle N \rangle} |\hat{x}[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} |\tilde{X}[m]|^2$

(2) 非周期序列的频域分析

序列 $x[k]$ 的离散时间 Fourier 变换 (Discrete Time Fourier Transform, 简称 DTFT) 定义为

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\Omega k} \quad (1-15)$$

$X(e^{j\Omega})$ 称为非周期序列 $x[k]$ 的频谱或 DTFT。序列频谱 $X(e^{j\Omega})$ 是一个周期为 2π 的连续函数。有许多序列不存在 DTFT。

频谱 $X(e^{j\Omega})$ 的 IDTFT 定义为

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega \quad (1-16)$$

上式表示存在 DTFT 的非周期序列 $x[k]$ 可表示为频率 Ω 在 2π 区间范围内、幅度为 $X(e^{j\Omega}) d\Omega / 2\pi$ 的虚指数信号 $e^{j\Omega k}$ 的线性组合。

DTFT 的性质

若 $x[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega})$, $x_1[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_1(e^{j\Omega})$, $x_2[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_2(e^{j\Omega})$, 则有

- 线性特性 $ax_1[k] + bx_2[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} aX_1(e^{j\Omega}) + bX_2(e^{j\Omega})$
- 时移特性 $x[k+n] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{jn\Omega} X(e^{j\Omega})$
- 频移特性 $e^{jk\Omega_0} x[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$
- 对称特性 $x^*[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\Omega})$, $x^*[-k] \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{j\Omega})$

进一步推导, 可得

$$\text{Re}\{x[k]\} \xrightarrow{\text{DTFT}} X_e(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\Omega}) + X^*(e^{-j\Omega})]$$

$$j\text{Im}\{x[k]\} \xrightarrow{\text{DTFT}} X_o(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\Omega}) - X^*(e^{-j\Omega})]$$

$$x_e[k] = \frac{1}{2}(x[k] + x^*[-k]) \xrightarrow{\text{DTFT}} \text{Re}\{X(e^{j\Omega})\}$$

$$x_o[k] = \frac{1}{2}(x[k] - x^*[-k]) \xrightarrow{\text{DTFT}} j\text{Im}\{X(e^{j\Omega})\}$$

若 $x[k]$ 为实序列, 则存在 $X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$

上式可等价写为

$$\text{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = \text{Re}\{X(e^{-j\Omega})\}, \quad \text{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = -\text{Im}\{X(e^{-j\Omega})\}$$

即实序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 的实部为偶函数, 虚部为奇函数。也可等价地写为

$$|X(e^{j\Omega})| = |X(e^{-j\Omega})|, \quad \phi(\Omega) = -\phi(-\Omega)$$

即实序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 的幅度谱为偶函数, 相位谱为奇函数。

- 卷积特性 $x_1[k] * x_2[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_1(e^{j\Omega}) X_2(e^{j\Omega})$
- 乘积特性 $x_1[k] x_2[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$
- 频域微分 $kx[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} j \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$
- Parseval 等式 $\sum_k |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$

(3) 离散系统的频域分析

离散系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 定义为

$$H(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{h[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} \quad (1-17)$$

一般情况下,离散系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 是复值函数,可用幅度和相位表示为

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{j\phi(\Omega)}$$

$|H(e^{j\Omega})|$ 称为系统的幅度响应, $\phi(\Omega)$ 称为系统的相位响应。

离散系统的群延迟定义为

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\phi(\Omega)}{d\Omega} \quad (1-18)$$

虚指数信号 $\{e^{j\Omega k}; k \in \mathbb{Z}\}$ 通过 LTI 系统的响应为

$$y[k] = T\{e^{j\Omega k}\} = e^{j\Omega k} H(e^{j\Omega}) \quad (1-19)$$

上式表明,虚指数信号通过离散 LTI 系统后信号的频率不变,信号的幅度由系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 在 Ω 点的幅度值确定。所以 $H(e^{j\Omega})$ 表示了系统对不同频率信号的衰减量。

余弦型信号通过系统的响应

$$y[k] = T\{\cos(\Omega k + \theta)\} = A |H(e^{j\Omega})| \cos[\Omega k + \phi(\Omega) + \theta] \quad (1-20)$$

$$y[k] = T\{\sin(\Omega k + \theta)\} = A |H(e^{j\Omega})| \sin[\Omega k + \phi(\Omega) + \theta] \quad (1-21)$$

周期序列通过离散系统的响应

设离散 LTI 系统的输入信号 $\tilde{x}[k]$ 是一个周期为 N 的周期序列, $\tilde{x}[k]$ 的 DFS 系数为 $\tilde{X}[m]$, 则系统的输出响应为

$$\tilde{y}[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=-(N/2)}^{N/2} \tilde{X}[m] H(e^{j\frac{2\pi}{N}m}) e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \quad (1-22)$$

(4) 理想数字滤波器

离散 LTI 系统可以实现对离散信号进行滤波,即保留输入信号中的部分有用频率分量,除去一些不需要的频率分量。具有滤波功能的离散系统称为数字滤波器,常用的理想数字滤波器有低通、高通、带通和带阻滤波器。图 1-1 分别画出了四种理想数字滤波器的频率响应。

理想低通滤波器的单位脉冲响应为

$$h_{LP}[k] = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}(\Omega_c k), \quad -\infty < k < \infty$$

由上式可知理想低通滤波器是非因果系统,故不是物理可实现系统。若在滤波器的通带和阻带间有一个过渡带,且频率响应可在一定范围内波动,则滤波器可实现。滤波器设计是数字信号处理课程的重要内容之一,关于滤波器的设计将在后面详细讨论。

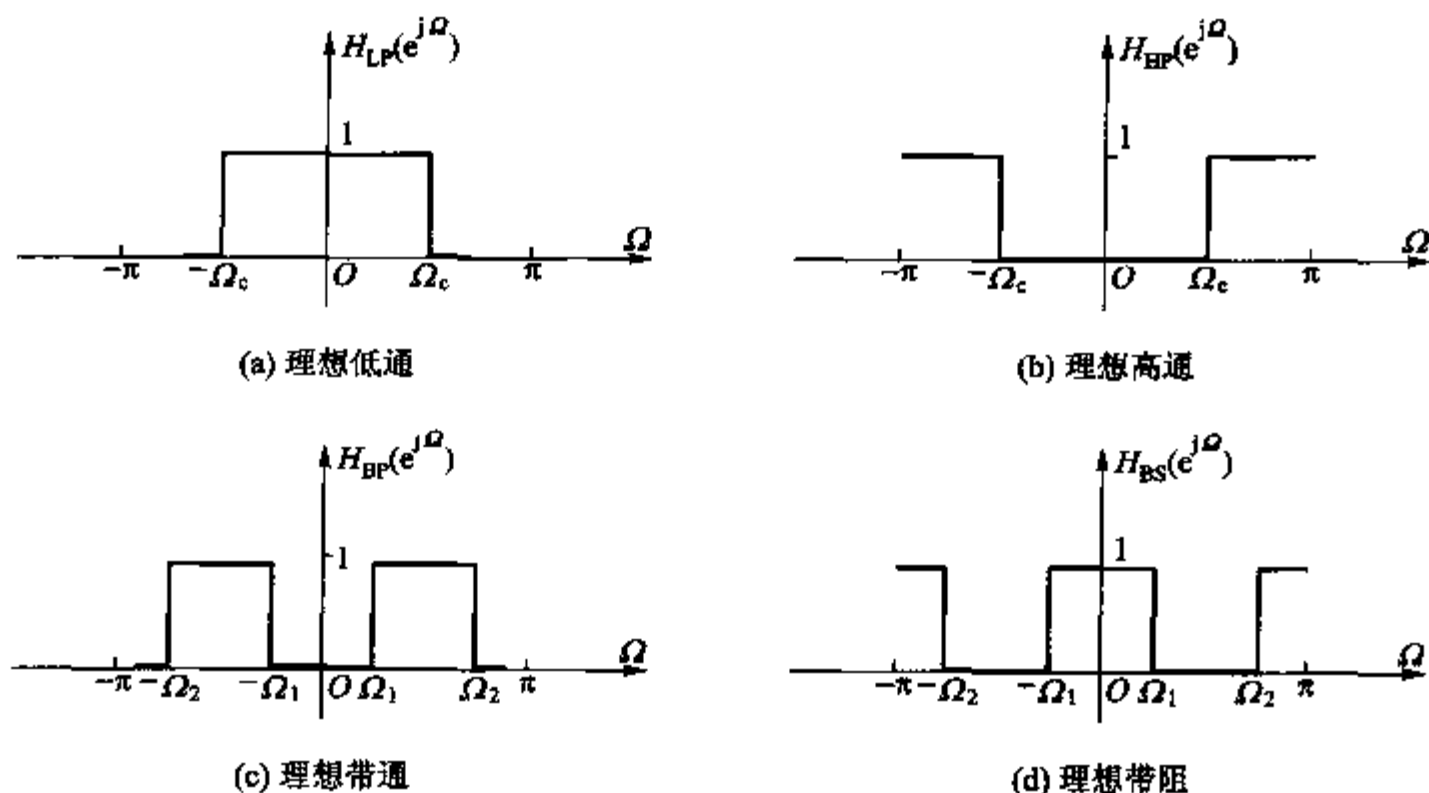


图 1-1 理想数字滤波器的频率响应

3. 离散时间信号与系统的 z 域分析

(1) 双边 z 变换

序列 $x[k]$ 的双边 z 变换定义为

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (1-23)$$

$X(z)$ 的收敛域(ROC)为 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ 。

若 $X(z)$ 的 ROC 包含单位圆, 则序列 $x[k]$ 的 DTFT $X(e^{j\Omega})$ 与 $X(z)$ 的关系为

$$X(e^{j\Omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\Omega}}$$

z 反变换可用围线积分表示为

$$x[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz \quad (1-24)$$

积分路径 C 为 $X(z)$ 的 ROC 中的一条环绕 z 平面原点的逆时针方向的闭合围线。

常用序列的 z 变换如下:

$$\begin{aligned} \delta[k] &\xrightarrow{z} 1, \quad |z| \geq 0 \\ a^k u[k] &\xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \\ -a^k u[-k-1] &\xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (k+1)a^k u[k] &\xrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a| \\
 -(k+1)a^k u[-k-1] &\xrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| < |a| \\
 \cos(\Omega_0 k) u[k] &\xrightarrow{z} \frac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}, \quad |z| > 1 \\
 \sin(\Omega_0 k) u[k] &\xrightarrow{z} \frac{z^{-1}\sin\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}, \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

(2) z 变换的主要性质

若 $x[k] \xrightarrow{z} X(z)$, $R_x = \{z; R_{x-} < |z| < R_{x+}\}$; $y[k] \xrightarrow{z} Y(z)$, $R_y = \{z; R_{y-} < |z| < R_{y+}\}$ 。则有

- 线性特性 $ax[k] + by[k] \xrightarrow{z} aX(z) + bY(z)$, $\text{ROC} = R_x \cap R_y$
- 共轭特性 $x^*[k] \xrightarrow{z} X^*(z^*)$, $\text{ROC} = R_x$
- 翻转特性 $x[-k] \xrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right)$, $\frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$
- 位移特性 $x[k-n] \xrightarrow{z} z^{-n}X(z)$, $\text{ROC} = R_x$, 除了 $z=0$ 或 $z=\infty$
- 卷积特性 $x[k] * y[k] \xrightarrow{z} X(z)Y(z)$, $\text{ROC} = R_x \cap R_y$
- 指数加权特性 $a^k x[k] \xrightarrow{z} X\left(\frac{z}{a}\right)$, $\text{ROC} = |a| R_x$
- z 域微分特性 $kx[k] \xrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}$, $\text{ROC} = R_x$, 除了 $z=0$ 或 $z=\infty$
- Parseval 等式 $\sum_k x[k]y^*[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)Y^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{-1}dz$

(3) 部分分式法计算 z 反变换

设有理多项式 $X(z)$ 为

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{1 + \sum_{l=1}^N a_l z^{-l}} \quad (1-25)$$

其中 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是 z^{-1} 的多项式。如果分母多项式 $A(z)$ 无重根, 且 $M \geq N$, 则式(1-25)可展开为

$$X(z) = \sum_{l=1}^{M-N} k_l z^{-l} + \sum_{l=1}^N \frac{r_l}{1-p_l z^{-1}} \quad (1-26)$$

$\{p_i\}$ 是分母多项式的根。系数 $\{k_i\}$ 可由多项式的长除法确定。系数 r_i 为

$$r_i = (1 - p_i z^{-1}) X(z) \Big|_{z=p_i} \quad (1-27)$$

根据展开的部分分式,即可确定序列 $x[k]$ 。

(4) 离散系统的 z 域分析

系统函数 $H(z)$

系统函数 $H(z)$ 定义为系统单位脉冲响应 $h[k]$ 的 z 变换,即

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad (1-28)$$

差分方程与 $H(z)$ 的关系

描述离散时间系统的差分方程为

$$\sum_{n=0}^N a_n y[k-n] = \sum_{n=0}^M b_n x[k-n]$$

根据差分方程,可得系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (1-29)$$

$H(z)$ 与系统稳定性关系

LTI 系统稳定的充分必要条件是 $H(z)$ 的 ROC 包括单位圆。根据这一结论可以推出,因果 LTI 系统稳定的充分必要条件是 $H(z)$ 的所有极点都在 z 平面的单位圆内。

FIR 系统的单位脉冲响应为有限长,因此系统稳定。而 IIR 系统的系统函数的极点可能在单位圆外,造成系统不稳定。因此,在设计 IIR 系统时需考虑系统的稳定性问题。

全通滤波器

全通滤波器是指系统的幅度响应恒为 1 或常数的系统。 m 阶实系数全通滤波器的系统函数可表示为

$$A_m(z) = \frac{z^{-m} D_m(z^{-1})}{D_m(z)} = \frac{d_m + d_{m-1} z^{-1} + \cdots + d_1 z^{-(m-1)} + z^{-m}}{1 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_{m-1} z^{-(m-1)} + d_m z^{-m}} \quad (1-30)$$

m 阶实系数全通滤波器有下列主要性质。

- $|A_m(e^{j\omega})| = 1$ 。
- 全通滤波器零点与极点的位置关于单位圆镜像对称,若 p 为极点,则 $\frac{1}{p^*}$ 。

为零点。

- 全通滤波器的相位响应 $\phi(\Omega)$ 是单调递减的, 且 $\phi(0) = 0$ 、 $\phi(\pi) = -m\pi$ 、 $\phi(2\pi) = -2m\pi$ 。

4. 信号的抽样

(1) 时域抽样

在数字信号处理中, 抽样一般通过 A/D 转换器实现。T 为抽样周期或抽样间隔。抽样频率 f_{sam} 、角频率 ω_{sam} 与抽样间隔 T 的关系为

$$f_{\text{sam}} = \frac{1}{T}, \quad \omega_{\text{sam}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_{\text{sam}}$$

理想 A/D 转换器在时域的输入输出关系为

$$x[k] = x(t) \big|_{t=kT} \quad (1-31)$$

理想 A/D 转换器在频域的输入输出关系为

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - n\omega_{\text{sam}})] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\Omega + 2\pi n}{T}\right) \quad (1-32)$$

其中 $\Omega = \omega T$, $X(j\omega)$ 表示连续信号 $x(t)$ 的频谱, $X(e^{j\Omega})$ 表示抽样后离散序列 $x[k]$ 的频谱。

时域抽样定理的内容是, 若带限信号 $x(t)$ 的最高频率为 f_m , 则当抽样频率 f_{sam} 满足

$$f_{\text{sam}} \geq 2f_m \quad (1-33)$$

时, 信号 $x(t)$ 可以用等间隔的抽样序列 $x[k]$ 唯一表示。时域抽样定理给出了抽样后离散信号频谱不混叠的最小抽样频率和最大抽样间隔。

(2) 信号的重建

信号的重建一般通过 D/A 转换器实现。T 为连续信号 $x(t)$ 的抽样间隔, 理想 D/A 转换器在时域的输入输出关系为

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - kT) \quad (1-34)$$

$x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 与 $x_s(t)$ 的频谱 $X_s(j\omega)$ 之间的关系为

$$X_s(j\omega) = X(e^{jT\omega}) \quad (1-35)$$

$X(e^{j\Omega})$ 是一个周期为 2π 的函数, $X_s(j\omega)$ 是周期为 $\frac{2\pi}{T} = \omega_{\text{sam}}$ 的函数。若将冲激串信号 $x_s(t)$ 通过理想模拟低通滤波器, 即可得到 $X(j\omega)$, 从而恢复连续信号 $x(t)$ 。

(3) 频域抽样

非周期序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 是周期为 2π 的连续函数,若要获得 $X(e^{j\Omega})$ 在一个周期 $[0, 2\pi)$ 内离散点 $\left\{\Omega_m = \frac{2\pi m}{N}; m = 0, 1, \dots, N-1\right\}$ 上的值,则需要进行频域抽样。可以先将序列 $x[k]$ 周期化为 $\tilde{x}_N[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k + nN]$, 然后计算周期序列 $\tilde{x}_N[k]$ 的 DFS 系数,即可得 $X(e^{j\Omega})$ 的抽样序列 $\tilde{X}[m]$ 为

$$X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}m} = \tilde{X}[m] = \text{DFS}\{\tilde{x}_N[k]\} \quad (1-36)$$

频域抽样定理的内容是,若 $x[k]$ 是长度为 L 的有限序列,则只有当 $X(e^{j\Omega})$ 在一个周期内的等间隔抽样点数 N 大于等于序列 $x[k]$ 长度 L (即 $N \geq L$) 时, $X(e^{j\Omega})$ 才可以由抽样序列 $\tilde{X}[m]$ 唯一表示。

1.2 学习要求

1. 掌握基本序列的定义和特性,以及序列的线性卷积、周期卷积和相关。
2. 掌握线性时不变离散系统的特性,以及系统因果性和稳定性等概念。
3. 掌握系统单位脉冲响应 $h[k]$ 的物理概念,以及离散系统的零状态响应求解。
4. 掌握离散信号与系统频域分析的基本概念及方法。
5. 掌握双边 z 变换及性质,以及根据系统函数 $H(z)$ 分析系统特性的方法。
6. 掌握从频域分析信号抽样与信号重建。

1.3 重点和难点提示

本章重点是离散序列的基本运算和频域分析。基本离散序列以及序列基本运算是信号时域分析的基础,序列线性卷积、循环卷积、周期卷积运算之间既存在区别也存在联系,相关运算在信号检测和谱分析中得到广泛应用。序列 DFS 和 DTFT 是离散信号频域分析的基础,相比连续信号的频谱,两者的相同之处是表达它们的基本信号都是正弦类(虚指数)信号,不同之处是序列的频谱是周期谱。在分析非周期序列频谱 $X(e^{j\Omega})$ 时,由于 $X(e^{j\Omega})$ 是周期为 2π 的周期谱,因而可只分析其在一个周期 $(-\pi, \pi]$ 上的情况, $X(e^{j\Omega})$ 的低频分量在 $\Omega = 0$ 附近,高频分量则在 $|\Omega|$ 接近 π 的附近。

本章的难点是时域抽样和频域抽样。时域抽样是连接连续信号与离散信号的桥梁,在数字信号处理中起着非常重要的作用。通过对信号时域抽样过程的频域分析,建立了连续信号频谱与抽样后的离散信号频谱之间的关系,即时域的离散化导致频谱的周期化,表明若序列是某连续信号的抽样,则序列的频谱是对应连续信号频谱的周期化。频域抽样是对序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 的抽样,它建立了频域抽样序列对应的时间序列与序列 $x[k]$ 之间的关系,即频谱的离散化导致时域的周期化。时域抽样和频域抽样奠定了利用数字方法分析信号频谱的理论基础。

1.4 思考题

1. 离散信号与数字信号有何异同点?
2. 离散序列的傅里叶变换有何特点?
3. 离散时间傅里叶级数与连续时间傅里叶级数有何不同?
4. z 变换的极点位置与收敛域有何联系?
5. 系统函数 $H(z)$ 零、极点对系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 有何影响?
6. 全通滤波器有何特点? 它在数字信号处理中有何作用?
7. 连续时间周期信号经离散化后是否一定是周期序列? 为什么?

8. $x[k]$ 是 $x(t)$ 经 A/D 转换后的离散序列, $x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - kT)$ 是 $x[k]$ 经 D/A 转换后的冲激串,两个信号的频谱是什么关系? 与 $x(t)$ 的频谱又是什么关系?

9. 在对连续信号抽样时,若不知连续信号的最高频率,应如何确定抽样频率?

10. 为何时域抽样定理要求信号的频带有限? 频域抽样定理要求信号的时间长度有限?

1.5 习题精解

1-1 将序列 $x[k] = \{1, -1, 0, 1, 2; k=0,1,2,3,4\}$ 表示为 $u[k]$ 及 $u[k]$ 延迟的和。

解:

利用 $\delta[k] = u[k] - u[k-1]$, 可得

$$x[k] = (u[k] - u[k-1]) - (u[k-1] - u[k-2]) + (u[k-3] -$$

$$\begin{aligned}
 & u[k-4]) + 2(u[k-4] - u[k-5]) \\
 & = u[k] - 2u[k-1] + u[k-2] + u[k-3] + u[k-4] - 2u[k-5]
 \end{aligned}$$

1-2 判断下列系统是否为(1) 线性;(2) 因果;(3) 时不变;(4) 稳定?

$$(1) y[k] = k^2 x[k] \quad (2) y[k] = x^3[k]$$

$$(3) y[k] = a + \sum_{l=-5}^5 x[k-l], a \neq 0$$

$$(4) y[k] = a + \sum_{l=0}^5 x[k-l], a \neq 0$$

$$(5) y[k] = ax[-k], a \neq 0$$

解:

$$(1) \text{ 由于 } T\{ax_1[k] + bx_2[k]\} = k^2(ax_1[k] + bx_2[k])$$

$$aT\{x_1[k]\} + bT\{x_2[k]\} = ak^2x_1[k] + bk^2x_2[k]$$

$$\text{所以 } T\{ax_1[k] + bx_2[k]\} \neq aT\{x_1[k]\} + bT\{x_2[k]\}$$

系统线性。

系统 k 时刻的输出只与 k 时刻的输入有关,系统因果。

$$\text{由于 } T\{x[k-n]\} = k^2x[k-n]$$

$$y[k-n] = (k-n)^2x[k-n]$$

$$\text{所以 } T\{x[k-n]\} \neq y[k-n]$$

系统时变。

当输入信号 $x[k]$ 有界时,输出信号 $y[k]$ 可以是无界的,所以系统不稳定。

$$(2) \text{ 由于 } T\{ax[k]\} = a^3x^3[k] \quad (a \neq 0, 1)$$

$$aT\{x[k]\} = ax^3[k]$$

$$T\{ax[k]\} \neq aT\{x[k]\}$$

系统非线性。

系统 k 时刻的输出只与 k 时刻的输入有关,系统因果。

$$\text{由于 } T\{x[k-n]\} = x^3[k-n] = y[k-n]$$

系统时不变。

当输入信号 $x[k]$ 有界时,输出信号 $y[k]$ 也是有界的,所以系统稳定。

$$(3) T\{bx_1[k] + cx_2[k]\} = a + \sum_{l=-5}^5 \{bx_1[k-l] + cx_2[k-l]\}$$

$$= a + \sum_{l=-5}^5 bx_1[k-l] + a + \sum_{l=-5}^5 cx_2[k-l] - a$$

$$= by_1[k] + cy_2[k] - a$$

所以系统非线性。

系统 k 时刻的输出与系统在 $k+1, k+2, \dots, k+5$ 时刻的输入有关, 系统非因果。

$$T\{x[k-n]\} = a + \sum_{l=-5}^5 x[k-n-l] = y[k-n]$$

系统时不变。

当 $|x[k]| \leq M_x < \infty$ 时

$$|y[k]| \leq |a| + \sum_{l=-5}^5 |x[k-l]| \leq |a| + 11M_x$$

所以当 a 的值有限时, 系统稳定。

(4) 与(3)类似, 该系统非线性、因果、时不变、稳定。

(5) 线性、非因果、时变、稳定。

1-3 试确定下列系统是否为线性、时不变系统。

$$(1) y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[k-nM]$$

$$(2) y[k] = x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k-nM]$$

其中 M 为正整数。

解:

$$\begin{aligned} (1) T\{ax_1[k] + bx_2[k]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax_1[n] + bx_2[n]) \delta[k-nM] \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] \delta[k-nM] + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] \delta[k-nM] \\ &= aT\{x_1[k]\} + bT\{x_2[k]\} \end{aligned}$$

所以系统线性。

$$\begin{aligned} \text{由于 } T\{x[k-m]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-m] \delta[k-nM] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[k-(n+m)M] \\ y[k-m] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[k-m-nM] \end{aligned}$$

除 $M=1$ 外,

$$T\{x[k-m]\} \neq y[k-m]$$

所以系统时变。

$$\begin{aligned} (2) T\{ax_1[k] + bx_2[k]\} &= (ax_1[k] + bx_2[k]) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k-nM] \\ &= ax_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k-nM] + bx_2[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k-nM] \end{aligned}$$

$$= aT|x_1[k]| + bT|x_2[k]|$$

所以系统线性。

例如,在 $M=2$ 时,当输入为 $x[k] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots; k=0, 1, \dots\}$ 时,输出为 $y[k] = \{1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots; k=0, 1, \dots\}$ 。当输入为 $x_1[k] = x[k-1] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots; k=0, 1, \dots\}$ 时,输出为 $y_1[k] = \{0, 0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots; k=0, 1, \dots\}$ 。由于 $y[k-1] \neq y_1[k]$, 所以系统时变。

1-4 确定下列序列的周期。

$$(1) x_1[k] = \cos(0.2\pi k)$$

$$(2) x_2[k] = \cos(0.1\pi k) + 2\sin(0.2\pi k)$$

$$(3) x_3[k] = 3\sin(0.8\pi k) - 2\cos(0.1\pi k)$$

$$(4) x_4[k] = 5\sin(0.1\pi k) + 4\sin(0.9\pi k) - \cos(0.18\pi k)$$

解:

(1) 由于

$$\frac{0.2\pi}{2\pi} = \frac{1}{10}$$

所以序列的周期 $N=10$ 。

(2) 由于

$$\frac{0.1\pi}{2\pi} = \frac{1}{20}, \quad \frac{0.2\pi}{2\pi} = \frac{1}{10}$$

所以

$$N = \text{LCM}(10, 20) = 20$$

LCM 表示最小公倍数 (Least common multiple)。

(3) 由于

$$\frac{0.1\pi}{2\pi} = \frac{1}{20}, \quad \frac{0.8\pi}{2\pi} = \frac{2}{5}$$

所以

$$N = \text{LCM}(5, 20) = 20$$

(4) 由于

$$\frac{0.1\pi}{2\pi} = \frac{1}{20}, \quad \frac{0.9\pi}{2\pi} = \frac{9}{20}, \quad \frac{0.18\pi}{2\pi} = \frac{9}{100}$$

所以

$$L = \text{LCM}(20, 20, 100) = 100$$

1-5 实序列 $x[k]$ 的偶对称部分 $x_e[k]$ 和奇对称 $x_o[k]$ 部分可分别表示为

$$x_e[k] = \frac{1}{2}(x[k] + x[-k]), \quad x_o[k] = \frac{1}{2}(x[k] - x[-k])$$

试证明

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e^2[k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_o^2[k]$$

证:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e^2[k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_o^2[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}(x^2[k] + 2x[k]x[-k] + x^2[-k]) + \\ & \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}(x^2[k] - 2x[k]x[-k] + x^2[-k]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x^2[k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x^2[-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x^2[k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x^2[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] \end{aligned}$$

1-6 已知 LTI 系统的单位阶跃响应为 $s[k]$, 求该系统对任意输入 $x[k]$ 的响应。

解:

由题意可知 $s[k] = T\{u[k]\}$ 。由 $\delta[k] = u[k] - u[k-1]$ 及 LTI 系统的特性可得

$$h[k] = T\{\delta[k]\} = T\{u[k] - u[k-1]\} = s[k] - s[k-1]$$

所以对任意输入 $x[k]$ 的响应 $y[k]$ 为

$$y[k] = h[k] * x[k] = (s[k] - s[k-1]) * x[k]$$

1-7 (1) 已知序列 $x[k] = \{1, 2, 3, 4; k=0, 1, 2, 3\}$, $y[k] = \{-1, 1, -2, 3; k=0, 1, 2, 3\}$, 试计算序列 $x[k]$ 的自相关函数 $r_x[n]$, 以及序列 $x[k]$ 与 $y[k]$ 的互相关函数 $r_{xy}[n]$ 和 $r_{yx}[n]$ 。

(2) 若某两个序列的自相关函数 $r_x[n]$ 相同, 则该两个序列之间应存在何种关系?

(3) 若信号 $s[k] = x[k] + n[k]$, $x[k]$ 与 $n[k]$ 相关性很小, 如何判断 $s[k]$ 中是否存在 $x[k]$?

解:

(1) 根据序列的相关运算定义, 可得

$$R_x[n] = \sum_{k=0}^3 x[k]x[k+n] = x[n] + 2x[n+1] + 3x[n+2] + 4x[n+3]$$

$$= \{4, 11, 20, 30, 20, 11, 4\}$$

$$R_{xy}[n] = \sum_{k=0}^3 x[k]y[k+n] = y[n] + 2y[n+1] + 3y[n+2] + 4y[n+3]$$

$$= \{-4, 1, -7, 7, 6, 4, 3\}$$

$$R_{yx}[n] = \sum_{k=0}^3 y[k]x[k+n]$$

$$= -x[n] + x[n+1] - 2x[n+2] + 3x[n+3]$$

$$= \{3, 4, 6, 7, -7, 1, -4\}$$

(2) 序列的自相关可用序列卷积表示为

$$R_x[n] = x[-n] * x[n]$$

若序列 $x[k]$ 与 $y[k]$ 的自相关函数相同, 则序列 $x[k]$ 与 $y[k]$ 应满足关系

$$x[-n] * x[n] = y[-n] * y[n]$$

容易验证, $y[k] = x[-k]$, $y[k] = x[k-L]$ 都是满足上述关系的解。

(3) 若信号 $s[k]$ 中不存在 $x[k]$, 则 $s[k]$ 的自相关函数

$$R_s[n] = R_n[n]$$

若信号 $s[k]$ 中存在 $x[k]$, 则 $s[k]$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} R_s[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + n[k])(x[k+n] + n[k+n]) \\ &= R_x[n] + R_n[n] + R_{xn}[n] + R_{nx}[n] \end{aligned}$$

由题中所给条件, 可得

$$R_s[n] \approx R_x[n] + R_n[n]$$

所以可利用 $s[k]$ 的自相关函数 $R_s[n]$ 判断 $s[k]$ 中是否存在 $x[k]$ 。

1-8 设 $x[k]$ 是一 N 点序列

$$x[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ -1 & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试确定 $x[k] * x[k]$ 的最大正值和最小负值及它们的位置。

解:

由图 1-2 可知,卷积最大的正值位置为

$$k_1 = \frac{N}{2} - 1, \quad k_2 = \frac{3N}{2} - 1$$

其卷积值为

$$y[k_1] = y[k_2] = \frac{N}{2}$$

卷积最小的负值位置为

$$k_3 = N - 1$$

其卷积值为

$$y[k_3] = -N$$

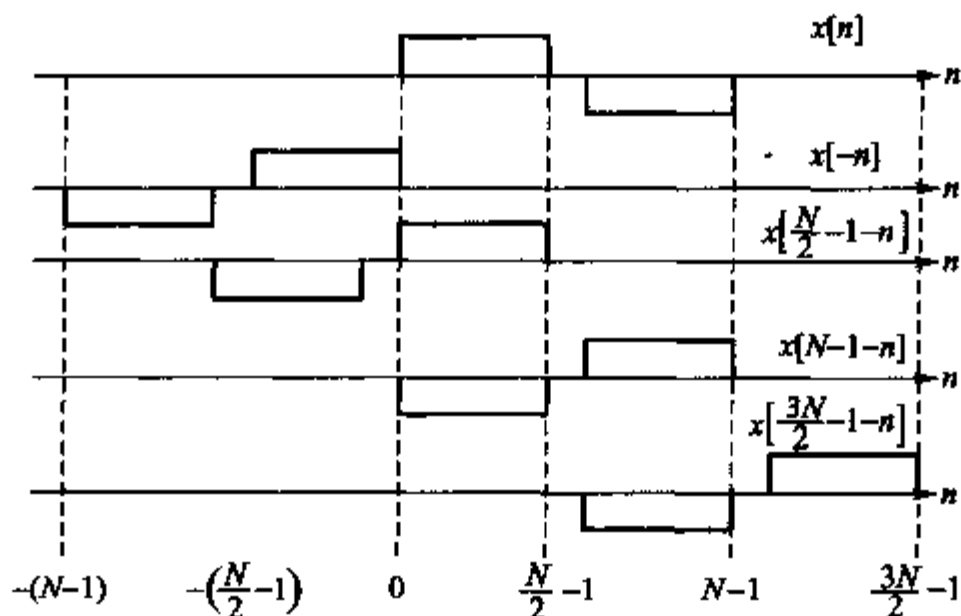


图 1-2 题 1-8 卷积过程示意图

1-9 计算卷积 $y[k] = x[k] * g[k]$

(1) $x[k] = \alpha^k u[k], g[k] = \beta^k u[k]$

(2) $x[k] = g[k] = \begin{cases} k+1 & 0 \leq k \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

解:

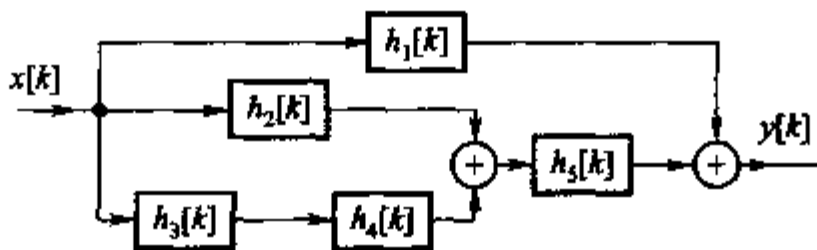
(1) 由卷积的定义,可得

$$y[k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum_{n=0}^k \alpha^n \beta^{k-n} = \frac{\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}}{\beta - \alpha} & k \geq 0, \alpha \neq \beta \\ \sum_{n=0}^k \alpha^n \alpha^{k-n} = (k+1)\alpha^k & k \geq 0, \alpha = \beta \end{cases}$$

(2) 由于 $x[k] = \{1, 2, 3, 4; k=0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } y[k] &= \sum_{n=0}^3 (n+1)x[k-n] = x[k] + 2x[k-1] + 3x[k-2] + 4x[k-3] \\ &= \{1, 4, 10, 20, 25, 24, 16; k=0, 1, \dots, 6\} \end{aligned}$$

1-10 试求题 1~10 图所描述系统的单位脉冲响应 $h[k]$ 。



题 1-10 图

解:

$$\begin{aligned} h[k] &= (h_3[k] * h_4[k] + h_2[k]) * h_5[k] + h_1[k] \\ &= h_3[k] * h_4[k] * h_5[k] + h_2[k] * h_5[k] + h_1[k] \end{aligned}$$

1-11 $x_e[k]$ 、 $x_o[k]$ 分别表示一偶对称和一奇对称序列, 试判断下列序列的对称性。

- (1) $x_e[k] * x_o[k]$
- (2) $x_e[k] * x_e[k]$
- (3) $x_o[k] * x_o[k]$

解:

(1) 设 $x_{e1}[k]$ 和 $x_{o1}[k]$ 分别表示两个偶对称序列, 记作

$$y_1[k] = x_{e1}[k] * x_{o1}[k]$$

则由卷积的定义及序列的偶对称, 可得

$$\begin{aligned} y_1[-k] &= \sum_n x_{e1}[n] x_{o1}[-k-n] = \sum_n x_{e1}[n] x_{o1}[k+n] \\ &= \sum_n x_{e1}[-n] x_{o1}[k-n] = \sum_n x_{e1}[n] x_{o1}[k-n] = y_1[k] \end{aligned}$$

故 $x_{e1}[k] * x_{o1}[k]$ 为偶对称序列。

(2) 设 $x_e[k]$ 和 $x_o[k]$ 分别表示偶对称和奇对称序列, 记作

$$y_2[k] = x_o[k] * x_e[k]$$

则

$$\begin{aligned} y_2[-k] &= \sum_n x_o[n] x_e[-k-n] = \sum_n x_o[n] x_e[k+n] \\ &= \sum_n x_o[-n] x_e[k-n] = - \sum_n x_o[n] x_e[k-n] = -y_2[k] \end{aligned}$$

故序列 $x_e[k] * x_o[k]$ 为奇对称序列。

(3) 设 $x_{o1}[k]$ 和 $x_{o2}[k]$ 分别表示两个奇对称序列, 记作

$$y_3[k] = x_{o1}[k] * x_{o2}[k]$$

则

$$\begin{aligned} y_3[-k] &= \sum_n x_{o1}[n] x_{o2}[-k-n] = - \sum_n x_{o1}[n] x_{o2}[k+n] \\ &= - \sum_n x_{o1}[-n] x_{o2}[k-n] = \sum_n x_{o1}[n] x_{o2}[k-n] = y_3[k] \end{aligned}$$

故序列 $x_{o1}[k] * x_{o2}[k]$ 为偶对称序列。

1-12 试确定下列周期为 4 的序列的 DFS 系数。

(1) $\hat{x}[k] = \{1, 2, 0, 2; k=0, 1, 2, 3\}$

(2) $\hat{h}[k] = \{0, 1, 0, -1; k=0, 1, 2, 3\}$

解:

由 DFS 的定义, 可得

$$\tilde{X}[m] = \sum_{k=0}^3 \hat{x}[k] W_4^{mk} = \{5, 1, -3, 1; m=0, 1, 2, 3\}$$

$$\tilde{H}[m] = \sum_{k=0}^3 \hat{h}[k] W_4^{mk} = \{0, -2j, 0, 2j; m=0, 1, 2, 3\}$$

1-13 试确定下列周期为 4 的序列的周期卷积 $\hat{y}[k] = \hat{x}[k] \circledast \hat{h}[k]$ 。

(1) $\hat{x}[k] = \{0, 1, 0, 2; k=0, 1, 2, 3\}$

(2) $\hat{h}[k] = \{2, 0, 1, 0; k=0, 1, 2, 3\}$

解:

将周期卷积表示为矩阵的积, 则可得

$$\begin{bmatrix} \hat{y}[0] \\ \hat{y}[1] \\ \hat{y}[2] \\ \hat{y}[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1-14 试确定下列周期序列的周期及 DFS 系数。

(1) $\hat{x}_1[k] = \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)$

(2) $\hat{x}_2[k] = 2\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right)$

解:

对一般的周期序列,可用 DFS 计算其频谱。当信号可以直接分解为虚指数信号的线性组合时,利用 IDFS 更为便利。

(1) 因为

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8}$$

所以序列的周期 $N=8$ 。

由 Euler 公式

$$\begin{aligned}\hat{x}_1[k] &= -0.5j \left[\exp\left(j \frac{2\pi k}{8}\right) - \exp\left(-j \frac{2\pi k}{8}\right) \right] \\ &= -0.5j \left[\exp\left(j \frac{2\pi k}{8}\right) - \exp\left(j \frac{2\pi k \times 8}{8}\right) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{8}\right) \right] \\ &= -4j \frac{\left[\exp\left(j \frac{2\pi k}{8}\right) - \exp\left(j \frac{2\pi k \times 7}{8}\right) \right]}{8}\end{aligned}$$

与 IDFS 的定义比较可得,在 $0 \leq m \leq 7$ 范围内

$$\tilde{X}_1[1] = -4j; \quad \tilde{X}_1[7] = 4j; \quad \tilde{X}_1[m] = 0, \text{其他 } m$$

(2) 由于

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6}$$

所以序列的周期为

$$N = \text{LCM}(6, 8) = 24$$

由 Euler 公式

$$\begin{aligned}\hat{x}_2[k] &= -j[W_{24}^{-3k} - W_{24}^{3k}] + \frac{1}{2}[W_{24}^{-4k} + W_{24}^{4k}] \\ &= -j[W_{24}^{-3k} - W_{24}^{3k} W_{24}^{-24k}] + \frac{1}{2}[W_{24}^{-4k} + W_{24}^{4k} W_{24}^{-24k}] \\ &= \frac{1}{24}[-24jW_{24}^{-3k} + 24jW_{24}^{-21k} + 12W_{24}^{-4k} + 12W_{24}^{-20k}]\end{aligned}$$

在 $0 \leq m \leq 23$ 范围内

$$\tilde{X}_2[3] = -24j; \quad \tilde{X}_2[21] = 24j; \quad \tilde{X}_2[4] = 12;$$

$$\tilde{X}_2[20] = 12; \quad \tilde{X}_2[m] = 0, \text{其他 } m$$

1-15 周期序列 $\hat{x}[k]$ 的共轭偶对称部分 $\hat{x}_e[k]$ 和共轭奇对称 $\hat{x}_o[k]$ 部分

可分别表示为

$$\hat{x}_e[k] = \frac{1}{2}(\hat{x}[k] + \hat{x}^*[-k]), \quad \hat{x}_o[k] = \frac{1}{2}(\hat{x}[k] - \hat{x}^*[-k])$$

试证明

$$\text{DFS}\{\hat{x}_e[k]\} = \text{Re}\{\tilde{X}[m]\}, \quad \text{DFS}\{\hat{x}_o[k]\} = j\text{Im}\{\tilde{X}[m]\}$$

证:

由序列 DFS 性质

$$\text{DFS}\{\hat{x}^*[-k]\} = \tilde{X}^*[m]$$

所以

$$\text{DFS}\{\hat{x}_e[k]\} = \frac{1}{2}(\text{DFS}\{\hat{x}[k]\} + \text{DFS}\{\hat{x}^*[-k]\})$$

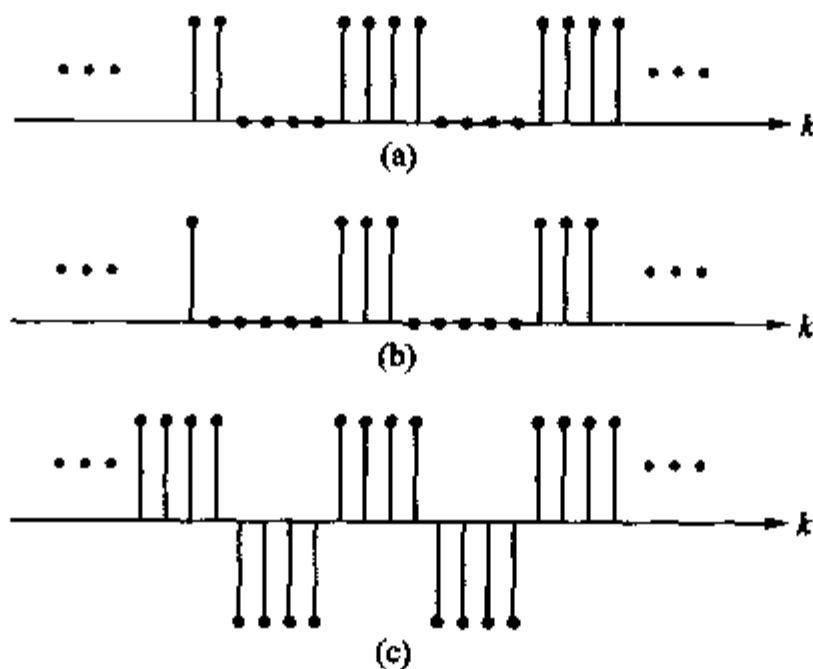
$$= \frac{1}{2}(\tilde{X}[m] + \tilde{X}^*[m]) = \text{Re}\{\tilde{X}[m]\}$$

$$\text{DFS}\{\hat{x}_o[k]\} = \frac{1}{2}(\text{DFS}\{\hat{x}[k]\} - \text{DFS}\{\hat{x}^*[-k]\})$$

$$= \frac{1}{2}(\tilde{X}[m] - \tilde{X}^*[m]) = j\text{Im}\{\tilde{X}[m]\}$$

1-16 在题 1-16 图中画出了几个周期序列 $\hat{x}[k]$, 可利用 DFS 将其表示为

$$\hat{x}[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}[m] W_N^{-mk}$$



题 1-16 图

- (1) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有 $\tilde{X}[m]$ 成实数?
 (2) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有 $\tilde{X}[m]$ (除 $\tilde{X}[0]$ 外) 成虚数?
 (3) 哪些序列能够做到 $\tilde{X}[m] = 0, m = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$?

解:

(1) 题 1-16 图(b)。由于 $\hat{x}[k] = \{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1; k = 0, 1, \dots, 7\}$ 是偶对称序列。

(2) 由于没有奇对称序列, 所以满足条件的序列不存在。

(3) 题 1-16 图(a)、图(c)。

由于

$$\begin{aligned}\tilde{X}[2r] &= \sum_{k=0}^7 \hat{x}[k] W_8^{2rk} = \sum_{k=0}^3 \hat{x}[k] W_4^{rk} + \sum_{k=4}^7 \hat{x}[k] W_4^{rk} \\ &= \sum_{k=0}^3 (\hat{x}[k] + \hat{x}[k+4]) W_4^{rk}\end{aligned}$$

$$\text{DFS}\{0, 0, 0, 0\} = \{0, 0, 0, 0\}, \quad \text{DFS}\{1, 1, 1, 1\} = \{4, 0, 0, 0\}$$

所以图(a)、图(c)满足条件。

1-17 试证明 DFS 的对偶特性

$$\text{DFS}\{\tilde{X}[k]\} = N\hat{x}[-m]$$

证:

由 IDFS 的定义, 可得

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{X}[k] W_N^{kn}$$

令 $n = -m$, 则有

$$\hat{x}[-m] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{X}[k] W_N^{-km}$$

将上式与 DFS 的定义比较, 则有

$$\text{DFS}\{\tilde{X}[k]\} = N\hat{x}[-m]$$

1-18 试证明 DFS 的 Parseval 等式

$$\sum_{k=\langle N \rangle} |\hat{x}[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} |\tilde{X}[m]|^2$$

证:

由 IDFS 定义, 可得

$$\sum_{k=\langle N \rangle} |\hat{x}[k]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} \hat{x}[k] \hat{x}^*[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \left(\sum_{m=\langle N \rangle} \tilde{X}[m] W_N^{-mk} \right) \hat{x}^*[k]$$

交换求和次序

$$\begin{aligned}\sum_{k=\langle N \rangle} |\hat{x}[k]|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} \left(\sum_{k=\langle N \rangle} \hat{x}^*[k] W_N^{-mk} \right) \hat{X}[m] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} \left(\sum_{k=\langle N \rangle} \hat{x}[k] W_N^{mk} \right)^* \hat{X}[m]\end{aligned}$$

由 DFS 定义

$$\sum_{k=\langle N \rangle} |\hat{x}[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} X^*[m] \hat{X}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |\hat{X}[m]|^2$$

1-19 如果 $\hat{x}[k]$ 是一个周期为 N 的序列, 它也是周期为 $2N$ 的周期序列。令 $\hat{X}_1[m] = \text{DFS}\{\hat{x}[k]\}$ 周期为 N , 而 $\hat{X}_2[m] = \text{DFS}\{\hat{x}[k]\}$ 周期为 $2N$, 试根据 $\hat{X}_1[m]$ 来确定 $\hat{X}_2[m]$ 。

解:

由 DFS 的定义

$$\begin{aligned}\hat{X}_2[m] &= \sum_{k=0}^{2N-1} \hat{x}[k] W_{2N}^{km} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] W_{2N}^{km} + \sum_{k=N}^{2N-1} \hat{x}[k] W_{2N}^{km} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] W_{2N}^{km} + \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k+N] W_{2N}^{(k+N)m} \\ &= [1 + (-1)^m] \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] W_{2N}^{km} = \begin{cases} 2X_1\left[\frac{m}{2}\right] & m \text{ 为偶} \\ 0 & m \text{ 为奇} \end{cases}\end{aligned}$$

1-20 试求出下列序列的 DTFT。

(1) $x_1[k] = \alpha^k u[k], |\alpha| < 1$

(2) $x_2[k] = \alpha^k u[-k], |\alpha| > 1$

(3) $x_3[k] = \begin{cases} \alpha^{|k|} & |k| \leq M \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(4) $x_4[k] = \alpha^k u[k+3], |\alpha| < 1$

(5) $x_5[k] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \delta[k-3n]$

(6) $x_6[k] = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)}{\pi k} - \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{\pi k}$

解:

$$(1) X_1(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-jk\Omega} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

$$(2) X_2(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^0 \alpha^k e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{-k} e^{jk\Omega} = \frac{1}{1 - \alpha^{-1} e^{j\Omega}}$$

$$\begin{aligned} (3) X_3(e^{j\Omega}) &= 1 + \sum_{k=1}^M \alpha^k e^{-jk\Omega} + \sum_{k=-1}^{-M} \alpha^{-k} e^{-jk\Omega} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^M \alpha^k e^{-jk\Omega} + \sum_{k=1}^M \alpha^k e^{jk\Omega} = 2\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^M \alpha^k e^{-jk\Omega}\right\} - 1 \\ &= 2 \frac{1 - \alpha \cos \Omega - \alpha^{M+1} \cos[(M+1)\Omega] + \alpha^{M+2} \cos(M\Omega)}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2} - 1 \\ &= \frac{1 - \alpha^2 - 2\alpha^{M+1} \cos[(M+1)\Omega] + 2\alpha^{M+2} \cos(M\Omega)}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2} \end{aligned}$$

$$(4) X_4(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{\alpha^{-3} x_1[k+3]\} = \frac{\alpha^{-3} e^{j3\Omega}}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

$$(5) x_5[k] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{3n} \delta[k-3n]$$

由 DTFT 的线性特性, 可得

$$X_5(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{3n} e^{-j3n\Omega} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 e^{-j3\Omega}}$$

(6) 利用抽样函数, 可将序列 $x_6[k]$ 表示为

$$x_6[k] = \left(\frac{1}{12}\right) \text{Sa}\left(\frac{\pi k}{3}\right) \text{Sa}\left(\frac{\pi k}{4}\right)$$

由于

$$\text{DTFT}\{\text{Sa}(\Omega_c k)\} = \left(\frac{\pi}{\Omega_c}\right) \tilde{p}_{2\Omega_c}(\Omega)$$

上式中 $\tilde{p}_{2\Omega_c}(\Omega)$ 表示幅度为 1、宽度为 $2\Omega_c$ 、周期为 2π 的矩形波。故

$$\text{DTFT}\left\{\text{Sa}\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right\} = 3\tilde{p}_{\frac{2\pi}{3}}(\Omega), \quad \text{DTFT}\left\{\text{Sa}\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right\} = 4\tilde{p}_{\frac{\pi}{2}}(\Omega)$$

由 DTFT 的频域卷积特性, 可得

$$X_6(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \tilde{p}_{\frac{2\pi}{3}}(\Omega) * \tilde{p}_{\frac{\pi}{2}}(\Omega)$$

计算上述卷积, 可得 $X_6(e^{j\Omega})$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 的值为

$$X_6(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{1}{4} & |\Omega| \leq \frac{\pi}{12} \\ \frac{\frac{7\pi}{12} - |\Omega|}{2\pi} & \frac{\pi}{12} \leq |\Omega| \leq \frac{7\pi}{12} \\ 0 & \frac{7\pi}{12} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

1-21 计算下列函数的逆 DTFT。

$$(1) X_1(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + 2\pi n) \quad (2) X_2(e^{j\Omega}) = \frac{1 - e^{j\Omega(N+1)}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

$$(3) X_3(e^{j\Omega}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(\Omega n) \quad (4) X_4(e^{j\Omega}) = \frac{j\alpha e^{j\Omega}}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})^2}, |\alpha| < 1$$

解:

(1) 在区间 $[-\pi, \pi]$ 范围内

$$X_1(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega)$$

由 IDTFT 的定义

$$x_1[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi}$$

$$(2) X_2(e^{j\Omega}) = (-e^{j\Omega}) \frac{1 - e^{j\Omega(N+1)}}{(1 - e^{j\Omega})}$$

由等比级数求和公式, 上式可等价写成

$$X_2(e^{j\Omega}) = - (e^{j\Omega}) (1 + e^{j\Omega} + e^{j2\Omega} + \cdots + e^{jN\Omega})$$

将上式与 DTFT 定义比较, 可得

$$x_2[k] = \begin{cases} -1 & -(N+1) \leq k \leq -1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = u[k] - u[k + N + 1]$$

(3) 由 Euler 公式, 可得

$$X_3(e^{j\Omega}) = e^{jN\Omega} + e^{j(N-1)\Omega} + \cdots + e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + \cdots + e^{-j(N-1)\Omega} + e^{-jN\Omega}$$

与 DTFT 定义比较, 可得

$$x_3[k] = \begin{cases} 1 & |k| \leq N \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = u[k + N] - u[k - (N + 1)]$$

(4) 题 1-20(1) 的结果有

$$\text{DTFT}\{\alpha^k u[k]\} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

由 DTFT 的频域微分特性

$$\text{DTFT}\{k\alpha^k u[k]\} = j \frac{d}{d\Omega} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} = \frac{\alpha e^{-j\Omega}}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})^2} = Y(e^{j\Omega})$$

所以

$$X_4(e^{j\Omega}) = je^{j2\Omega}Y(e^{j\Omega})$$

由 DTFT 的线性特性与时域位移特性

$$x_4[k] = jy[k+2] = j(k+2)\alpha^{k+2}u[k+2]$$

1-22 $x[k]$ 为一有限长序列且

$$x[k] = \{2, 1, -\frac{1}{2}, 0, 3, 2, 0, -3, -4\}$$

不计算 $x[k]$ 的 DTFT $X(e^{j\Omega})$, 试直接确定下列表达式的值。

$$(1) X(e^{j0}) \quad (2) X(e^{j\pi}) \quad (3) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) d\Omega$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \quad (5) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega} \right|^2 d\Omega$$

解:

$$(1) X(e^{j0}) = \sum_{k=-2}^6 x[k] = 0$$

$$(2) X(e^{j\pi}) = \sum_{k=-2}^6 (-1)^k x[k] = 0$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) d\Omega = 2\pi x[0] = -2\pi$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{k=-2}^6 |x[k]|^2 = 88\pi$$

$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega} \right|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{k=-2}^6 k^2 x^2[k] = 1780\pi$$

1-23 (1) 证明 DTFT 的 Parseval 等式

$$\sum_k |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

(2) 利用 (1) 中结论, 试求截频为 Ω_c 的理想低通滤波器的能量 $E = \sum_k |h_{LP}[k]|^2$ 。

解:

(1) 由 IDTFT 定义, 可得

$$\sum_k |x[k]|^2 = \sum_k x[k] x^*[k] = \frac{1}{2\pi} \sum_k \left(\int_{(2\pi)} X(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} d\Omega \right) x^*[k]$$

交换积分与求和顺序

$$\sum_k |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\Omega}) \left(\sum_k x^*[k] e^{jk\Omega} \right) d\Omega$$

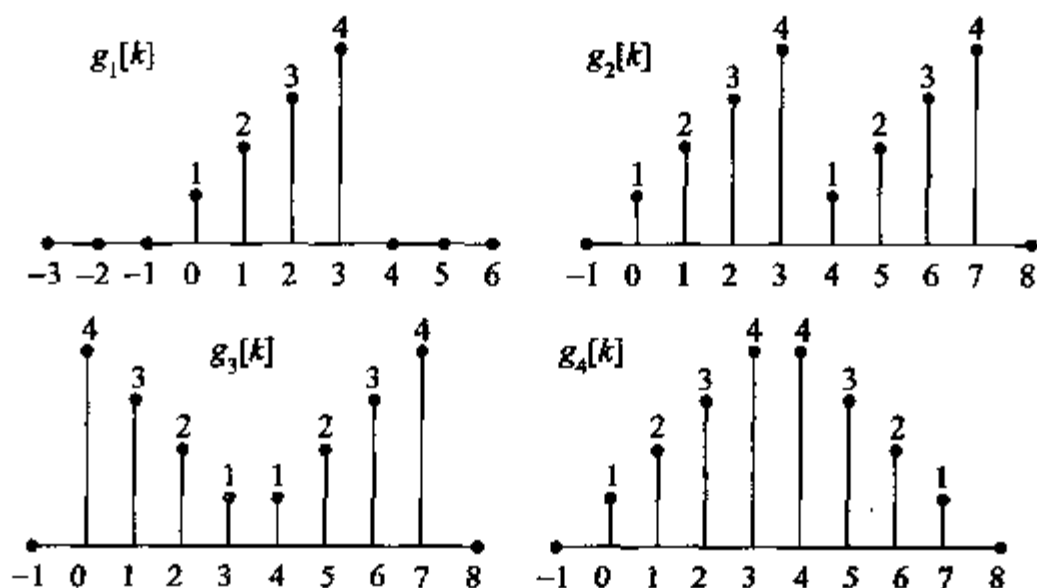
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\Omega}) \left(\sum_k x[k] e^{-jk\Omega} \right)^* d\Omega$$

由 DTFT 定义, 可得

$$\sum_k |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\Omega}) X^*(e^{j\Omega}) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

$$(2) E = \sum_k |h_{LP}[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{LP}(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1 d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi}$$

1-24 已知 $g_1[k]$ 的 DTFT 为 $G_1(e^{j\Omega})$, 试用 $G_1(e^{j\Omega})$ 表示其他序列的 DTFT。



题 1-24 图

解:

$$G_2(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{g_1[k] + g_1[k-4]\} = G_1(e^{j\Omega}) + e^{-j4\Omega} G_1(e^{j\Omega})$$

$$G_3(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{g_1[3-k] + g_1[k-4]\} = e^{-j3\Omega} G_1^*(e^{j\Omega}) + e^{-j4\Omega} G_1(e^{j\Omega})$$

$$G_4(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{g_1[k] + g_1[7-k]\} = G_1(e^{j\Omega}) + e^{-j7\Omega} G_1^*(e^{j\Omega})$$

1-25 已知 $x[k] = R_7[k+3]$, $\tilde{Y}[m] = X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\frac{2\pi m}{3}, m=0,1,2}$ 。不做 IDFS, 求 $\hat{y}[k] = \text{IDFS}\{\tilde{Y}[m]\}$ 。并用 MATLAB 验证你的结果。

解:

由频域抽样定理知

$$\hat{y}[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[k+lN]$$

由图 1-3 可知, 在 $k=0,1,2$ 时有

$$\hat{y}[k] = x[k] + x[k-3] + x[k+3] = \{3, 2, 2; k=0, 2, 1\}$$

验证上述结果的 MATLAB 程序如下:

```
w = (0:2)* 2* pi/3;
```

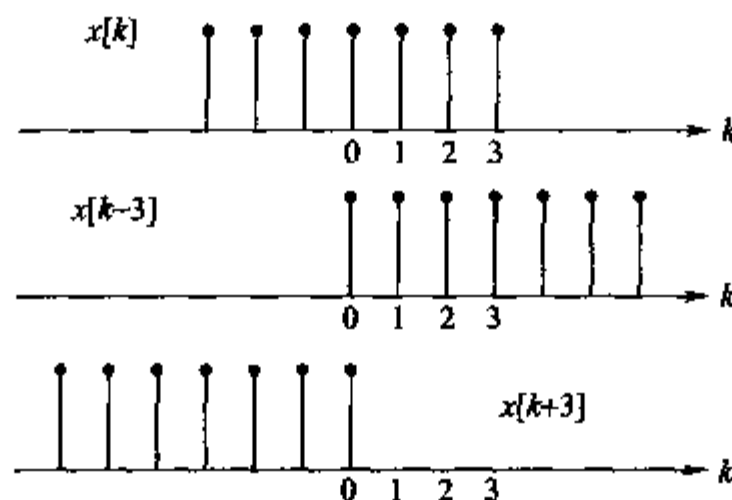


图 1-3 题 1-25 序列周期化的计算过程

```
X = freqz(ones(1,7),[1],w). * exp(j* 3* w);
```

```
y = ifft(X);
```

1-26 已知 $x[k] = \alpha^k u[k]$, $|\alpha| < 1$

(1) 求序列 $x[k]$ 的 DTFT $X(e^{j\Omega})$ 。

(2) 定义周期序列

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k + nN]$$

求出周期序列 $\hat{x}[k]$ 及其 DFS 系数 $\hat{X}[m]$ 。

(3) 根据(1)和(2)中的结论,给出 $\hat{X}[m]$ 和 $X(e^{j\Omega})$ 的关系。

解:

$$(1) X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-jk\Omega} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

(2) 在 $0 \leq k \leq N-1$ 范围内

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{k+nN} = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha^N}$$

所以

$$\hat{X}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] W_N^{mk} = \frac{1}{1 - \alpha^N} \frac{1 - \alpha^N W_N^{Nm}}{1 - \alpha W_N^m} = \frac{1}{1 - \alpha W_N^m}$$

(3) 比较(1)和(2)的结果,可得

$$X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi m}{N}} = \hat{X}[m]$$

1-27 已知离散 LTI 系统的单位脉冲响应为 $h[k] = (0.5)^k u[k]$, 试确定该系统 $H(e^{j\Omega})$ 。当系统的输入信号为 $x[k] = \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) u[k]$ 时, 试确定系统的稳态响应。

解:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}, \quad H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = 1.3572e^{-j0.5005}$$

$$y[k] = \operatorname{Re}\{H(e^{j\frac{\pi}{4}})e^{j\frac{\pi k}{4}}\} = 1.3572\cos\left(\frac{\pi k}{4} - 0.5005\right)$$

1-28 (1) 试确定 2 阶 FIR 滤波器

$$H(z) = 1 + az^{-1} + z^{-2}$$

中的系数 a , 使系统的幅度响应在 $\Omega_0 = 0.4\pi$ 时为零。

(2) 试确定输入信号为 $x[k] = \cos(0.4\pi k)u[k]$ 时, (1) 中系统的输出响应 $y[k]$, $k=0, 1, 2, 3, 4$ 。解释你所获得的结果。

解:

(1) 系统的频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= 1 + e^{-j2\Omega} + ae^{-j\Omega} = e^{-j\Omega}(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}) + ae^{-j\Omega} \\ &= 2(\cos \Omega)e^{-j\Omega} + ae^{-j\Omega} = [2\cos \Omega + a]e^{-j\Omega} \end{aligned}$$

由

$$2\cos \Omega + a = 0$$

可得

$$a = -2\cos(0.4\pi) = -0.6180$$

(2) 系统满足的差分方程为

$$y[k] = x[k] + ax[k-1] + x[k-2]$$

由差分方程, 可得

$$y[0] = x[0] = 1$$

$$y[1] = x[1] + ax[0] = \cos(0.4\pi) + a = -0.3090$$

$$y[2] = x[2] + ax[1] + x[0] = \cos(0.8\pi) + a\cos(0.4\pi) + 1 = 0$$

$$y[3] = x[3] + ax[2] + x[1] = \cos(1.2\pi) + a\cos(0.8\pi) + \cos(0.4\pi) = 0$$

$$y[4] = x[4] + ax[3] + x[2] = \cos(1.6\pi) + a\cos(1.2\pi) + \cos(0.8\pi) = 0$$

由于 $H(e^{j0.4\pi}) = 0$, 故系统的稳态响应为零。 $h[k]$ 的长度 $N=3$, 所以系统在 $k \geq N-1=2$ 时进入稳态, 即系统的输出为零。

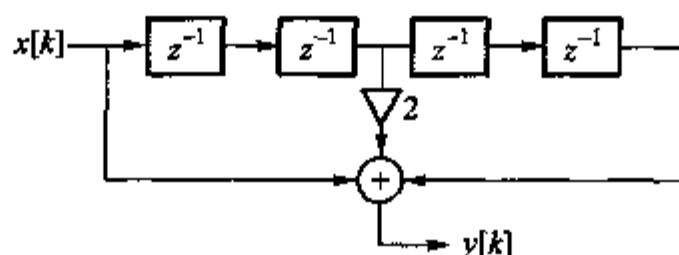
1-29 (1) 试求题 1-29 图所示系统的 $h[k]$ 。

(2) 设系统的初始状态为零, 试确定输入信号为 $x[k] = \cos(\pi k)u[k]$ 时, 系统的瞬态响应和稳态响应。

解:

(1) 由图可得系统的输入输出关系为

$$y[k] = x[k] + 2x[k-2] + x[k-4]$$



题 1-29 图

故系统的单位脉冲响应为

$$h[k] = \delta[k] + 2\delta[k-2] + \delta[k-4]$$

(2) 系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 为

$$H(e^{j\Omega}) = 1 + 2e^{-j2\Omega} + e^{-j4\Omega} = 4e^{-j2\Omega} \cos^2 \Omega$$

由于

$$H(e^{j\pi}) = 4e^{-j2\pi} = 4$$

系统的稳态响应 $y_{st}[k]$ 为

$$y_{st}[k] = |H(e^{j\pi})| \cos[\pi k + \phi(\pi)] = 4 \cos(\pi k), k \geq 0$$

由于

$$\cos(\pi k) u[k] = e^{j\pi k} u[k]$$

所以系统的瞬态响应 $y_{tr}[k]$ 为

$$\begin{aligned} y_{tr}[k] &= - \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} h[n] e^{-j\pi n} \right) e^{j\pi k} \\ &= - \sum_{n=k+1}^{\infty} (\delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]) \cos[\pi(k-n)] \end{aligned}$$

由上式可计算出瞬态响应 $y_{tr}[k]$ 的值为

$$\begin{aligned} y_{tr}[0] &= - \sum_{n=1}^{\infty} (\delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]) \cos(-\pi n) \\ &= - [2\cos(2\pi) + \cos(4\pi)] = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{tr}[1] &= - \sum_{n=2}^{\infty} (\delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]) \cos[\pi(1-n)] \\ &= - [2\cos \pi + \cos(3\pi)] = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{tr}[2] &= - \sum_{n=3}^{\infty} (\delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]) \cos[\pi(2-n)] \\ &= - \cos 2\pi = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{tr}[3] &= - \sum_{n=4}^{\infty} (\delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]) \cos[\pi(3-n)] \\ &= - \cos \pi = 1 \end{aligned}$$

$$y_{tr}[k] = 0, \quad k \geq 4$$

1-30 已知一 LTI 系统的系统响应 $H(e^{j\Omega})$ 为

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-3j\Omega} & |\Omega| < \frac{2\pi}{16}\left(\frac{3}{2}\right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

当系统的输入为 $x[k] = \tilde{\delta}_{16}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k - 16n]$, 求该系统的输出 $y[k]$ 。

解:

$\tilde{\delta}_{16}[k]$ 的 DFS 表示可写为

$$\tilde{\delta}_{16}[k] = \frac{1}{16} \sum_{m=-7}^8 \exp\left(j \frac{2\pi m}{16} k\right)$$

所以 $\tilde{\delta}_{16}[k]$ 通过系统后的响应为

$$\begin{aligned} y[k] &= \frac{1}{16} \left\{ \exp\left[j\left(-\frac{2\pi}{16}\right)k\right] \exp\left[-3j\left(-\frac{2\pi}{16}\right)\right] + \right. \\ &\quad \left. 1 + \exp\left[j\left(\frac{2\pi}{16}\right)k\right] \exp\left[-3j\left(\frac{2\pi}{16}\right)\right] \right\} \\ &= \frac{1}{16} \left\{ 1 + 2\cos\left[\frac{\pi}{8}(k-3)\right] \right\} \end{aligned}$$

1-31 试计算下列序列的 z 变换及 ROC。

(1) $x_1[k] = 0.5^k u[k+1]$

(2) $x_2[k] = u[-k+1]$

(3) $x_3[k] = -k 2^k u[-k-1]$

(4) $x_4[k] = 0.5^k u[-k-1] + 3^k u[-k]$

(5) $x_5[k] = u[k+4] - u[k-4]$

解:

(1) $x_1[k] = 2(0.5)^{k+1} u[k+1]$

利用 z 变换的位移和线性特性, 即可得

$$X_1(z) = \frac{2z}{1 - 0.5z^{-1}}, \quad |z| > 0.5$$

(2) $x_2[k] = \delta[k] + \delta[k-1] - (-u[-k-1])$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} - \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{-z^{-2}}{1 - z^{-1}}, \quad |z| < 1$$

(3) 利用 $-a^k u[-k-1] \rightarrow -\frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|$

及 z 变换的 z 域微分特性, 可得

$$X_3(z) = -z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}, |z| < 2$$

$$(4) \quad x_4[k] = 0.5^k u[-k-1] + 3^k u[-k-1] + \delta[k]$$

$$X_3(z) = -\frac{1}{1-0.5z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} + 1 = \frac{-1+z^{-2}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}, |z| < 0.5$$

$$(5) \quad X_4(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z^1 + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \\ = \frac{z^4 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}, 0 < |z| < \infty$$

1-32 已知序列 $x[k]$ 的 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})^2(1+2z^{-1})}$$

(1) 试确定 $X(z)$ 所有可能的收敛域。

(2) 求(1)中所有不同收敛域时 $X(z)$ 所对应的 $x[k]$ 。

解:

(1) 设

$$X(z) = \frac{A}{1+2z^{-1}} + \frac{B}{1-0.5z^{-1}} + \frac{C}{(1-0.5z^{-1})^2}$$

则

$$A = (1+2z^{-1})X(z) \Big|_{z=-2} = 0.64, C = (1-0.5z^{-1})^2 X(z) \Big|_{z=0.5} = 0.2$$

$$B = \frac{1}{(-0.5)} \frac{d}{dz^{-1}} [(1-0.5z^{-1})^2 X(z)] \Big|_{z=0.5} = 0.16$$

所以

$$X(z) = \frac{0.64}{1+2z^{-1}} + \frac{0.16}{1-0.5z^{-1}} + \frac{0.2}{(1-0.5z^{-1})^2}$$

(2) $X(z)$ 的极点在 z 平面上划分出 3 个连通区域, 每一个连通区域对应于一种 $X(z)$ 的收敛域。三种不同的收敛域及分别对应的序列如下。

$$|z| > 2 \quad x[k] = [0.64(-2)^k + 0.16(0.5)^k + 0.2(k+1)(0.5)^k]u[k]$$

$$0.5 < |z| < 2 \quad x[k] = 0.64(-2)^k u[-k-1] + [0.16(0.5)^k + 0.2(k+1)(0.5)^k]u[k]$$

$$|z| < 0.5 \quad x[k] = [-0.64(-2)^k - 0.16(0.5)^k]u[-k-1] - 0.2(k+1)(0.5)^k u[-k-2]$$

1-33 实序列 $x[k]$ 的自相关函数为 $r_x[n]$ 定义为

$$r_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[k+n]$$

(1) 试确定 $r_x[n]$ 的 z 变换 $R_x(z)$ 及 ROC。

(2) 设 $x[k] = \alpha^k u[k]$, $|\alpha| < 1$, 试计算 $R_x(z)$ 及 $r_x[n]$ 。

解:

$$\begin{aligned} (1) R_x(z) &= Z\{r_x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] Z\{x[k+n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] X(z) z^k \\ &= X(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^k = X(z) X(z^{-1}) \end{aligned}$$

设 $X(z)$ 的 ROC 为 $|z| > R_{x-}$, 则由上述的推导过程可知, $R_x(z)$ 的 ROC 为 $R_{x-} <$

$|z| < \frac{1}{R_{x-}}$ 。当 $R_{x-} \geq 1$ 时, $R_x(z)$ 的 z 变换不存在。

(2) 由于

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|$$

由(1)的结论, 可得

$$R_x(z) = X(z) X(z^{-1}) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \frac{1}{1 - \alpha z}, \quad |\alpha| < |z| < \frac{1}{|\alpha|}$$

由部分分式展开, 可得

$$R_x(z) = \frac{1}{1 - \alpha^2} \left(\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha} z^{-1}} \right), \quad |\alpha| < |z| < \frac{1}{|\alpha|}$$

所以

$$r_x[n] = \frac{1}{1 - \alpha^2} (\alpha^n u[n] + \alpha^{-n} u[-n - 1]) = \frac{\alpha^{|n|}}{1 - \alpha^2}$$

1-34 已知一稳定的 LTI 系统的 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{2(1 - z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

试确定该系统的 $h[k]$ 。

解:

$$H(z) = \frac{2(1 - z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{\frac{4}{3}}{1 - 2z^{-1}}$$

为使系统稳定, $H(z)$ 的 ROC 必须包含单位圆, 即 $0.5 < |z| < 2$, 所以

$$h[k] = \frac{2}{3} (0.5)^k u[k] + \frac{4}{3} 2^k u[-k - 1]$$

1-35 设因果稳定 IIR 滤波器的 $H(z)$ 为

$$H(z) = K \frac{1 - z^{-1}}{1 - dz^{-1}}$$

(1) 试确定 K 的值, 使得 $|H(e^{j\Omega})| \leq 1$ 。

(2) 试求系统的 3 dB 截频 Ω_c 。

(3) 系统的单位脉冲响应 $h[k]$ 。

解:

(1) 系统幅度响应的平方为

$$|H(e^{j\Omega})|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\Omega}} = 2K^2 \frac{1 - \cos \Omega}{1 + d^2 - 2d \cos \Omega}$$

对上式求导, 可得

$$\frac{d|H(e^{j\Omega})|^2}{d\Omega} = 2K^2 \frac{(\sin \Omega)(1 - d)^2}{(1 + d^2 - 2d \cos \Omega)^2}$$

在 $0 \leq \Omega \leq \pi$ 范围内, 系统幅度响应平方的导数非负, 所以在 $\Omega = \pi$ 处 $|H(e^{j\Omega})|$ 达到最大。为使 $|H(e^{j\pi})| = 1$, 则有

$$1 = K \frac{2}{1 + d}$$

所以

$$K = \frac{1 + d}{2}$$

(2) 由

$$|H(e^{j\Omega_c})|^2 = \frac{(1 + d)^2}{2} \frac{1 - \cos \Omega_c}{1 + d^2 - 2d \cos \Omega_c} = \frac{1}{2}$$

可得

$$\cos \Omega_c = \frac{2d}{1 + d^2}$$

$$(3) \quad h[k] = \frac{1 + d}{2} (d^k u[k] - d^{k-1} u[k-1])$$

1-36 设 $H(z)$ 为截频 $\Omega_c = \frac{\pi}{2}$ 理想低通滤波器, 试画出下列系统的幅度响应。

$$(1) H_1(z) = H(-z) \quad (2) H_2(z) = H(z^2) \quad (3) H_3(z) = H(z)H(z^2)$$

$$(4) H_4(z) = H(z)H(-z^2)。$$

解:

各系统的幅度响应如图 1-4 所示。

1-37 设 $G_L(z)$ 和 $G_H(z)$ 分别表示截频 $\Omega_c = \frac{\pi}{2}$ 理想低通和高通滤波器。

试确定题 1-37 图所示的离散时间系统的系统函数 $H_k(z) = \frac{Y_k(z)}{X(z)}$, $k = 0, 1, 2, 3$ 。并画出它们的幅度响应。

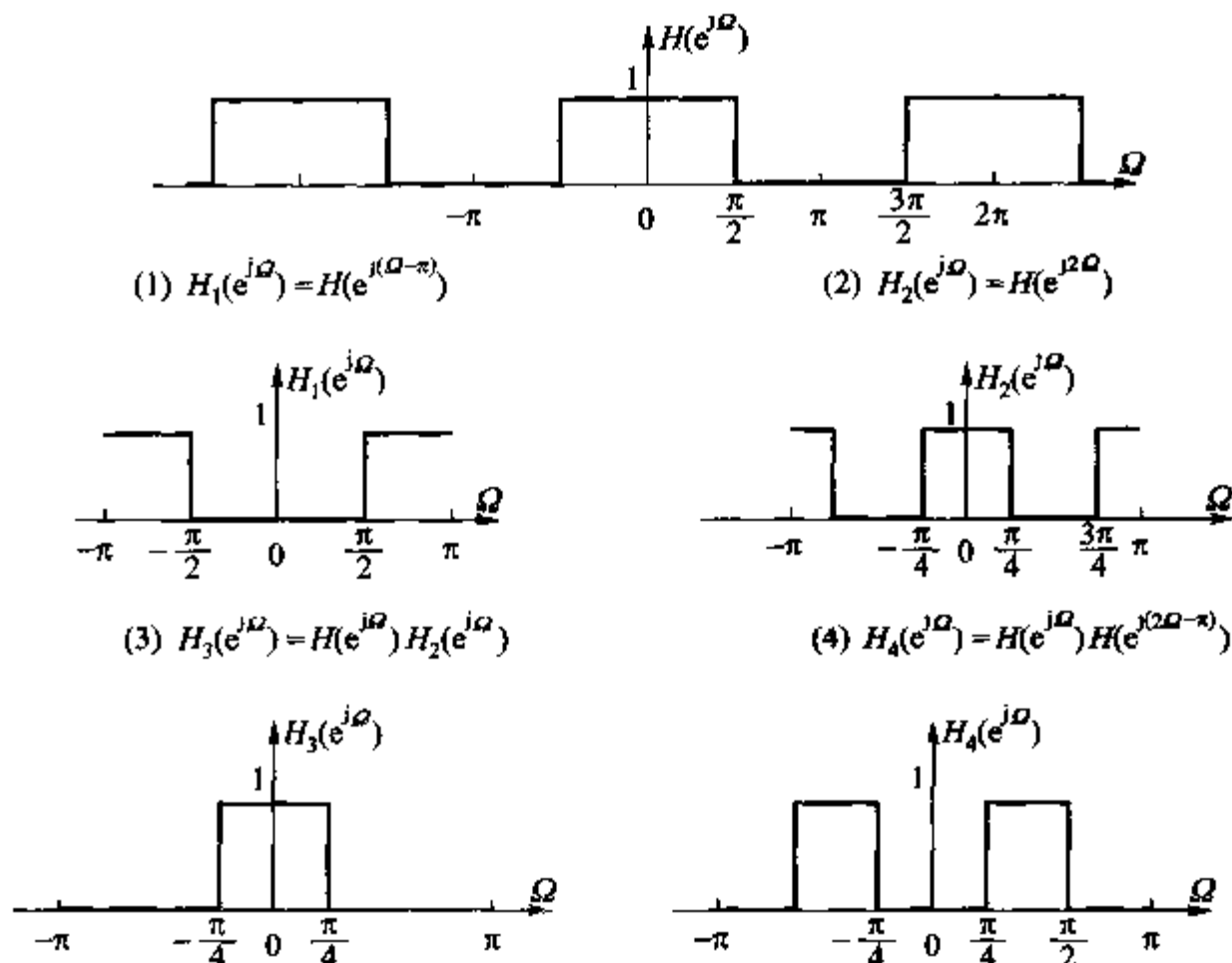
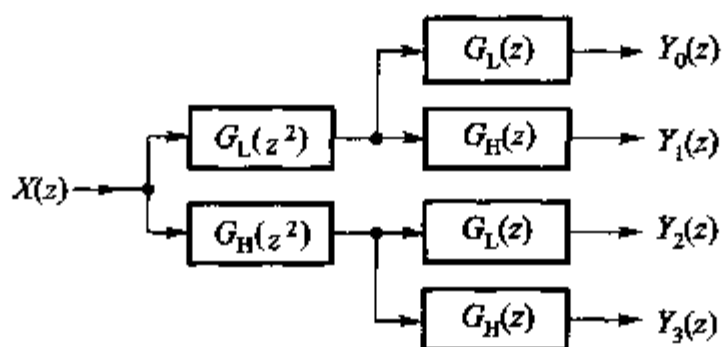


图 1-4 题 1-36 的解答图



题 1-37 图

解:

由题 1-37 图可得

$$H_0(z) = \frac{Y_0(z)}{X(z)} = G_L(z^2)G_L(z)$$

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = G_L(z^2)G_H(z)$$

$$H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X(z)} = G_H(z^2)G_L(z)$$

$$H_3(z) = \frac{Y_3(z)}{X(z)} = G_H(z^2)G_H(z)$$

幅度响应如图 1-5 所示。

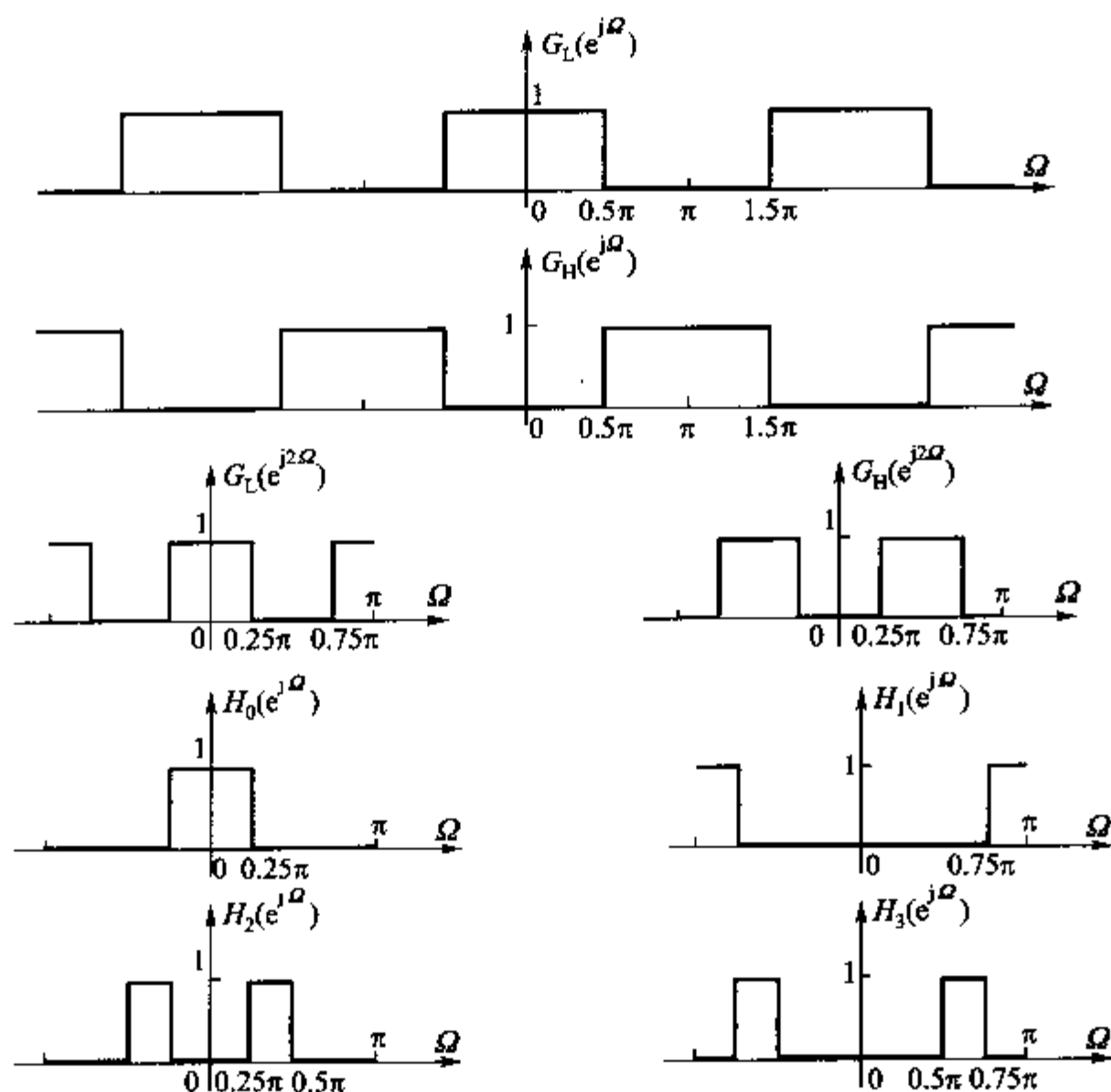
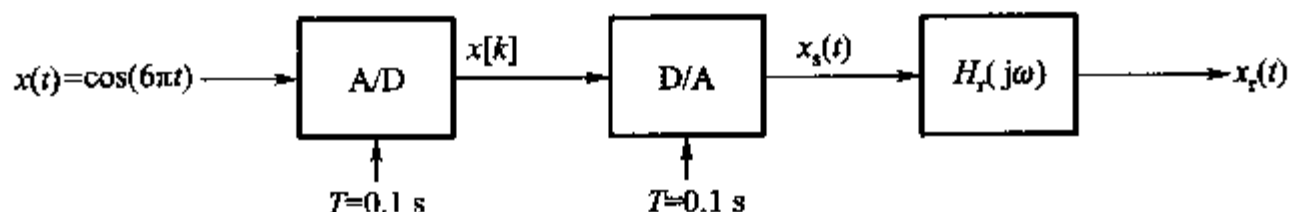


图 1-5 题 1-37 的解答图

1-38 由理想 A/D 和 D/A 构成的系统如题 1-38 图所示。



题 1-38 图

(1) 当重建滤波器的频率响应为

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} 0.1 & 13\pi \leq |\omega| \leq 15\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

时,画出 $x[k]$ 、 $x_s(t)$ 和 $x_r(t)$ 的频谱。

(2) 当重建滤波器的频率响应为

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} 0.1 & 25\pi \leq |\omega| \leq 27\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

时,画出 $x_2(t)$ 的频谱。

解:

(1) 连续信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 为

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - 6\pi) + \pi\delta(\omega + 6\pi)$$

抽样后离散序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 为

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{T} \sum_n X\left(j\frac{\Omega - 2n\pi}{T}\right) \\ &= 10\pi \left[\sum_n \delta(10(\Omega - 2n\pi) - 6\pi) + \delta(10(\Omega - 2n\pi) + 6\pi) \right] \\ &= \pi \left[\sum_n \delta(\Omega - 0.6\pi - 2n\pi) + \delta(\Omega + 0.6\pi - 2n\pi) \right] \end{aligned}$$

图 1-6(a)画出了抽样后离散序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 。

理想 D/A 输出的连续信号 $x_s(t)$ 的频谱 $X_s(j\omega)$ 为

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= X(e^{j\omega T}) \\ &= \pi \left[\sum_n \delta(0.1\omega - 0.6\pi - 2n\pi) + \delta(0.1\omega + 0.6\pi - 2n\pi) \right] \\ &= 10\pi \left[\sum_n \delta(\omega - 6\pi - 20n\pi) + \delta(\omega + 6\pi - 20n\pi) \right] \end{aligned}$$

图 1-6(b)画出了 $x_s(t)$ 的频谱 $X_s(j\omega)$, 图 1-6(c)画出了 $x_s(t)$ 通过重建滤波器后的频谱 $X_n(j\omega)$ 。

(2) 当重建带通滤波器的截频发生变换时,重建信号的频谱将会改变。图 1-6(d)画出了重建信号 $x_2(t)$ 的频谱 $X_2(j\omega)$ 。

1-39 由理想 A/D 和 D/A 构成的系统如题 1-39 图所示。其中重建滤波器是截频为 $\omega_c = \frac{\pi}{T}$ 的理想低通滤波器。

(1) 画出 $y(t) = x^2(t)$ 的频谱 $Y(j\omega)$ 。

(2) $T = \frac{1}{2f_m}$ 时,画出 $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_s(t)$ 的频谱。

(3) $T = \frac{1}{4f_m}$ 时,画出 $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_s(t)$ 的频谱。

(4) 讨论所获得的结果。

解:

(1) 由连续信号的频域卷积定理可得 $y(t)$ 的频谱 $Y(j\omega)$ 为

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * X(j\omega)$$

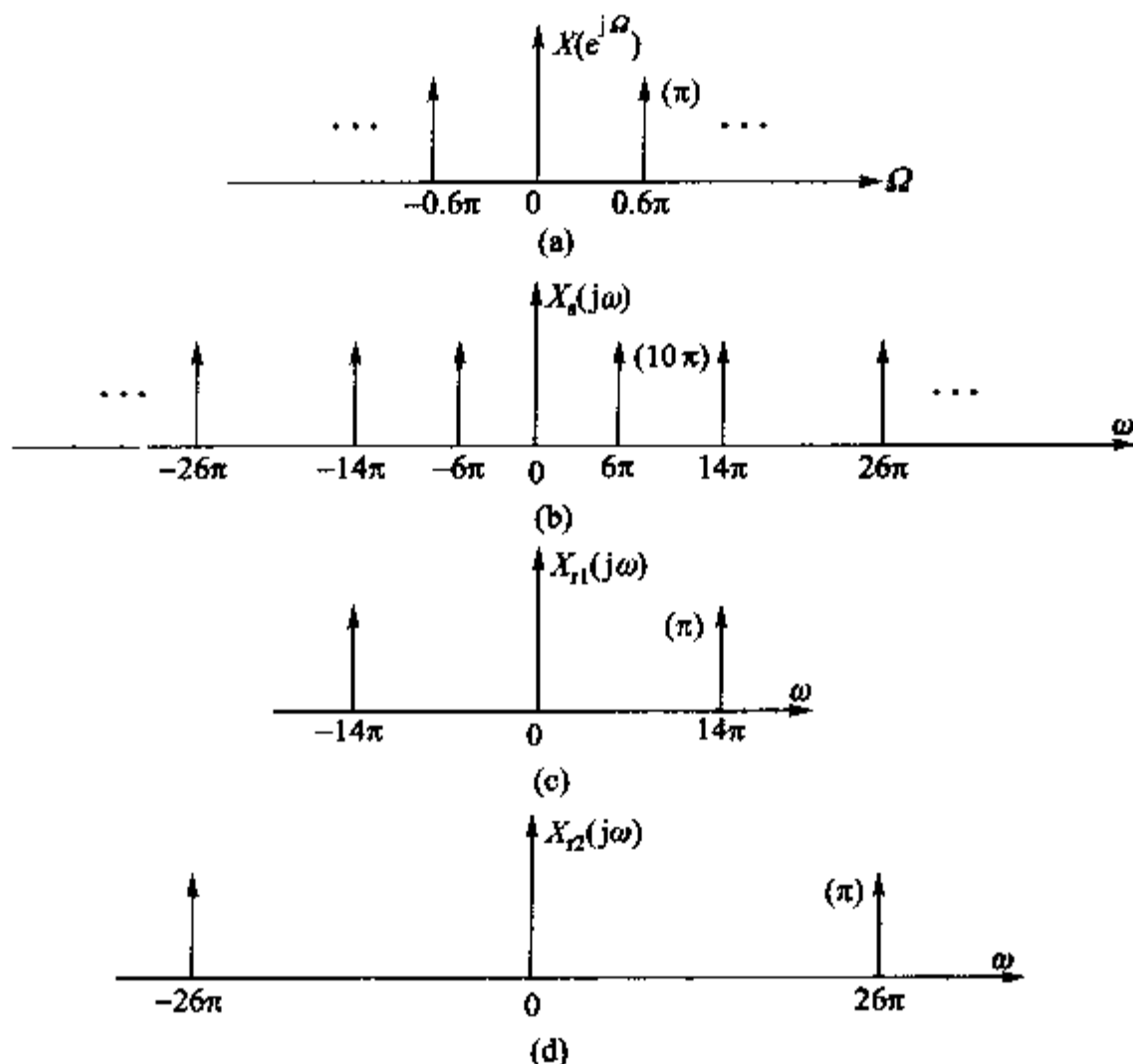
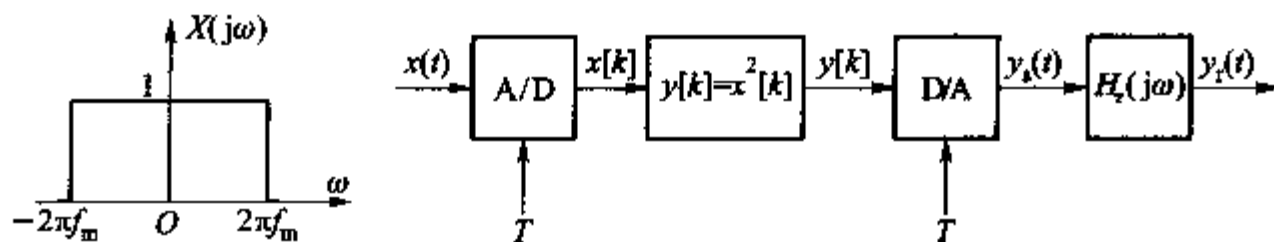


图 1-6 题 1-38 信号的频谱



题 1-39 图

$y(t)$ 的频谱 $Y(j\omega)$ 如图 1-7(a) 所示。

(2) 利用

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_n X\left(j\frac{\Omega - 2n\pi}{T}\right)$$

即可画出抽样后离散序列的频谱 $X(e^{j\Omega})$, 如图 1-7(b) 所示。利用 DTFT 的频域卷积特性, 可得

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int X(e^{j\theta}) X(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

即可计算出 $Y(e^{j\Omega})$, 如图 1-7(c) 所示。在计算上述连续频谱的周期卷积时, 需注意 $X(e^{j\Omega})$ 是周期为 2π 的函数。重建信号 $y_r(t)$ 的频谱 $Y_r(j\omega)$ 如图 1-7(d) 所示。

(3) 与(2)类似,图1-7(e)、图1-7(f)和图1-7(g)分别画出了 $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_r(t)$ 的频谱。

(4) 比较图1-7(a)、图1-7(d)和图1-7(g)可知:当 $T = \frac{1}{2f_m}$ 时,虽然抽样后的信号频谱没有混叠,但由于系统的非线性特性,系统的输出频谱 $Y_r(j\omega)$ 与所希望得到的频谱 $Y(j\omega)$ 相差悬殊。若 $T = \frac{1}{4f_m}$,即按 $y(t)$ 的最高频率分量确定抽样间隔,则可用题1-39图所示系统,用离散方法来完成连续信号的平方运算。

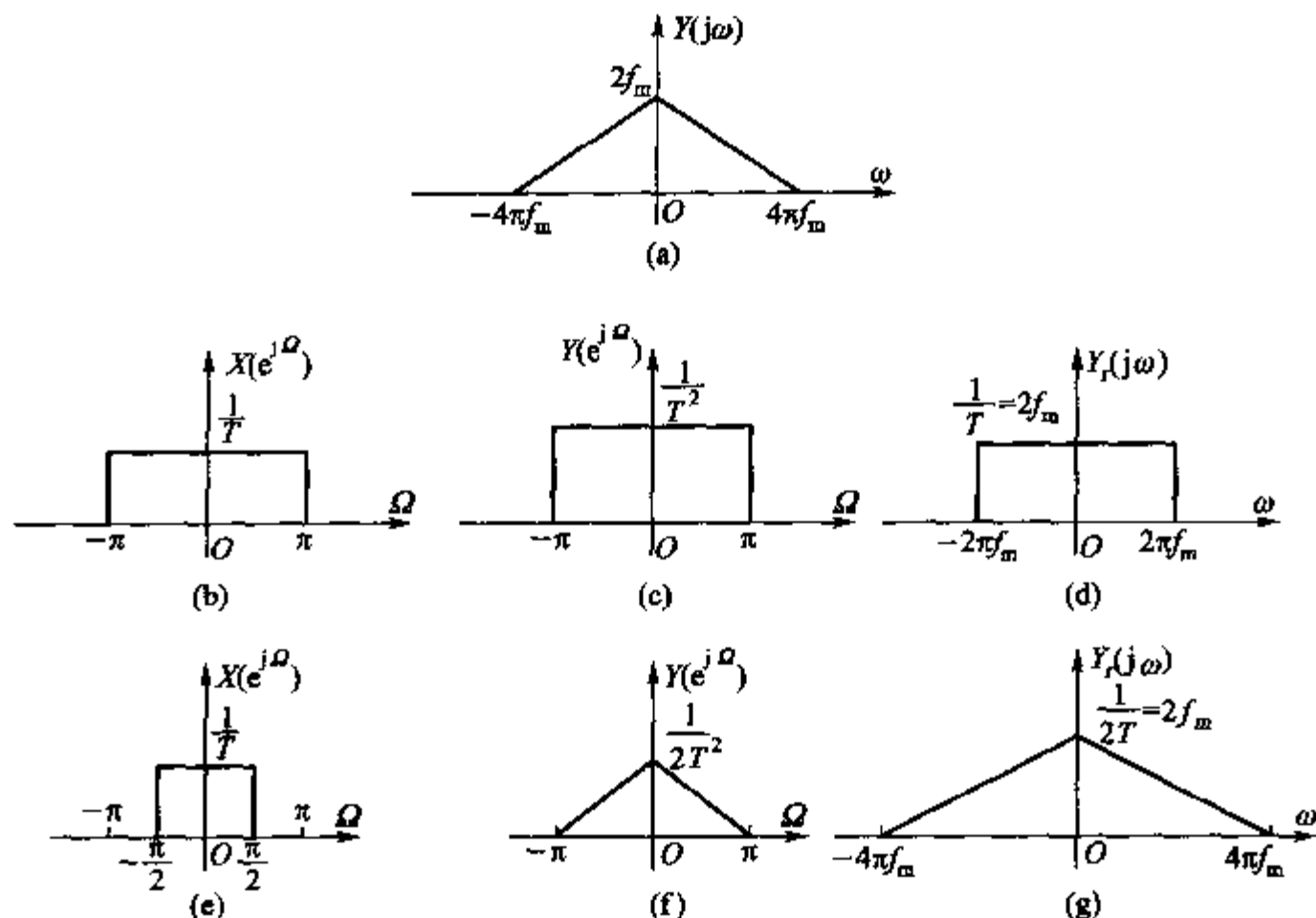
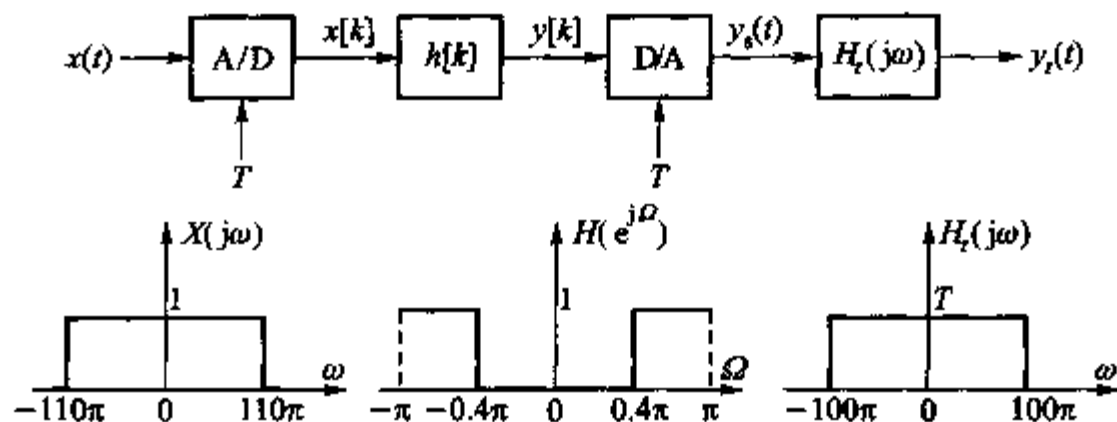


图1-7 题1-39的解答图

1-40 利用数字系统处理模拟信号的框图如题1-40图所示,系统的抽样间隔 $T = 0.01\text{s}$ 。试画出信号 $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_s(t)$ 和 $y_r(t)$ 的频谱。



题1-40图

解:

各信号频谱如图 1-8 所示。

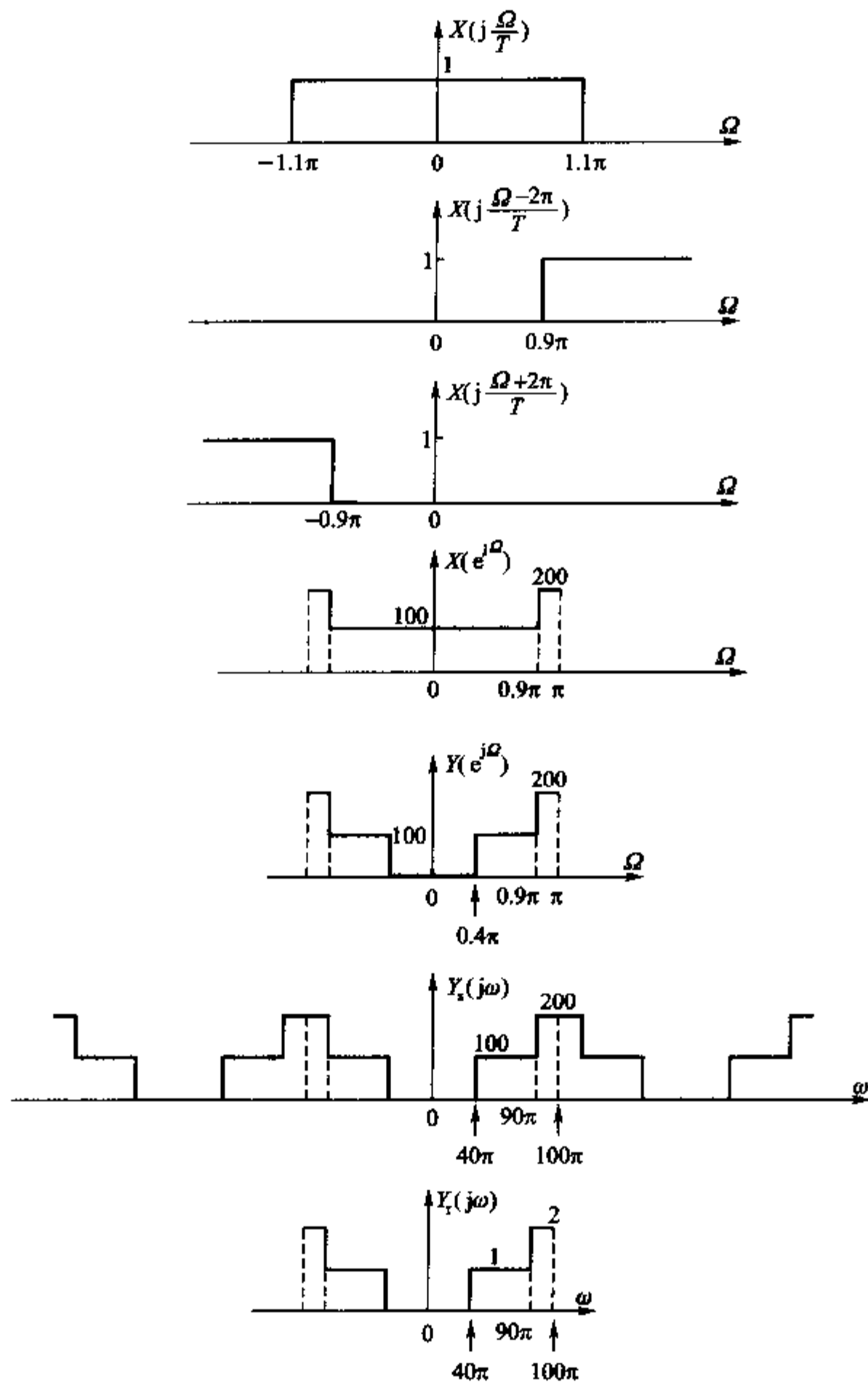


图 1-8 题 1-40 的解答图

第2章

离散傅里叶变换

2.1 基本知识与重要公式

信号的傅里叶变换建立了信号时域与频域之间的对应关系,可以实现将信号从时域映射到频域。本章在分析四种信号频谱特性的基础上,通过有限长序列的傅里叶表示定义有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)。有限长序列的DFT仍是有限长序列,非常适合数字系统进行计算,且DFT存在快速算法,因而DFT在数字信号处理中发挥着重要作用。

信号傅里叶变换的数学概念是时域信号可以由正弦(虚指数)信号线性表达,对应的加权系数就是信号的频谱函数,其反映了信号中各频率正弦(虚指数)信号的分布特性。信号的傅里叶变换为信号与系统的频域分析奠定了理论基础。信号的频域分析具有更加清晰的物理概念,因而在信息技术领域得到广泛应用。读者应在理解有限长序列DFT的数学概念和物理概念的基础上,掌握利用DFT分析任意信号频谱的原理和方法,以及利用DFT实现信号卷积与相关运算的基本思想。

1. 离散傅里叶变换及其性质

周期为 T_0 的连续时间周期信号 $\hat{x}(t)$ 的傅里叶正、反变换为

$$X(n\omega_0) = \text{CFS}\{\hat{x}(t)\} = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \hat{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2-1)$$

$$\hat{x}(t) = \text{ICFS}\{X(n\omega_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (2-2)$$

$X(n\omega_0)$ 称为连续时间周期信号 $\hat{x}(t)$ 的频谱函数, 是离散谱。 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ 称为信号的基频(基波), $n\omega_0$ 称为信号的谐频(谐波)。

连续时间非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶正、反变换为

$$X(j\omega) = \text{CTFT}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-3)$$

$$x(t) = \text{ICTFT}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-4)$$

$X(j\omega)$ 称为连续时间非周期信号 $x(t)$ 的频谱密度函数, 是连续谱。

周期为 N 的离散周期信号 $\hat{x}[k]$ 的傅里叶正、反变换为

$$\tilde{X}[m] = \text{DFS}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] W_N^{km} \quad (2-5)$$

$$\hat{x}[k] = \text{IDFS}\{\tilde{X}[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}[m] e^{j\frac{2\pi}{N}mk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}[m] W_N^{-mk} \quad (2-6)$$

$\tilde{X}[m]$ 称为离散周期信号 $\hat{x}[k]$ 的频谱函数, 是周期离散谱, 周期为 N 。

离散非周期信号 $x[k]$ 的傅里叶正、反变换为

$$X(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{x[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\Omega k} \quad (2-7)$$

$$x[k] = \text{IDTFT}\{X(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega \quad (2-8)$$

$X(e^{j\Omega})$ 称为离散非周期信号 $x[k]$ 的频谱密度函数, 是周期连续谱, 周期为 2π 。

DFT 在信号谱分析和算法快速实现等方面起着重要作用。这是因为有限长序列的 DFT 仍是有限长序列, 可以实现信号傅里叶变换的离散化处理。由于 DFT 存在快速算法(FFT), 故可以有效实现信号卷积和信号相关等信号处理的算法。

有限长序列 $x[k]$ 的离散傅里叶正、反变换定义为

$$X[m] = \text{DFT}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}, m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2-9)$$

$$x[k] = \text{IDFT}\{X[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j\frac{2\pi}{N}mk}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2-10)$$

有限长 N 点序列 $x[k]$ 可由 N 项虚指数信号 $\{e^{j\frac{2\pi}{N}mk}; m = 0, 1, \dots, N-1\}$ 的加权和表示, 加权系数就是序列 $x[k]$ 对应的频谱 $X[m]$ 。

设 $x[k] \xrightarrow{\text{DFT}} X[m], x_1[k] \xrightarrow{\text{DFT}} X_1[m], x_2[k] \xrightarrow{\text{DFT}} X_2[m]$, 有限长序列

的 DFT 存在以下主要性质:

- 线性特性 $ax_1[k] + bx_2[k] \xrightarrow{\text{DFT}} aX_1[m] + bX_2[m]$
- 时域循环位移特性 $x[(k+n)_N]R_N[k] \xrightarrow{\text{DFT}} W_N^{-na}X[m]$
- 频域循环位移特性 $W_N^{lk}x[k] \xrightarrow{\text{DFT}} X[(m+l)_N]R_N[m]$
- 时域循环卷积特性 $x_1[k] \otimes x_2[k] \xrightarrow{\text{DFT}} X_1[m]X_2[m]$
- 频域循环卷积特性 $x_1[k]x_2[k] \xrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{N}X_1[m] \otimes X_2[m]$
- 对称特性 $x^*[k] \xrightarrow{\text{DFT}} X^*[N-m]$
 $x^*[N-k] \xrightarrow{\text{DFT}} X^*[m]$

根据此对称性,可进一步推导,得以下对称特性

$$\text{Re}\{x[k]\} \xrightarrow{\text{DFT}} X_{\text{ep}}[m] = \frac{1}{2}\{X[m] + X^*[N-m]\}$$

$$\text{jIm}\{x[k]\} \xrightarrow{\text{DFT}} X_{\text{op}}[m] = \frac{1}{2}\{X[m] - X^*[N-m]\}$$

$$x_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{x[k] + x^*[N-k]\} \xrightarrow{\text{DFT}} \text{Re}\{X[m]\}$$

$$x_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}\{x[k] - x^*[N-k]\} \xrightarrow{\text{DFT}} \text{jIm}\{X[m]\}$$

若 $x[k]$ 为 N 点实序列,则有

$$X[m] = X^*[N-m]$$

因此有 $|X[m]| = |X[N-m]|$, $\arg\{X[m]\} = -\arg\{X[N-m]\}$

若 $x[k]$ 为 N 点实周期偶对称序列,即 $x[k] = x[N-k]$,则有

$$X[m] = X[N-m]$$

且 $X[m]$ 为实序列。

若 $x[k]$ 为 N 点实周期奇对称序列,即 $x[k] = -x[N-k]$,则有

$$X[m] = -X[N-m]$$

且 $X[m]$ 为虚序列。

- Parseval 等式 $\sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2$

2. 序列 DFT 与 DTFT 及 z 变换的关系

有限长序列 $x[k]$ 既存在 z 变换 $X(z)$ (ROC: $|z| > 0$), 也存在离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 以及离散傅里叶变换 $X[m]$ 。三种变换都与序列 $x[k]$ 之间存在

一一对应关系,也就是说,只要知道 $X[m]$ 、 $X(e^{j\Omega})$ 或 $X(z)$ 中的任一变换,就可以得到原序列 $x[k]$ 。显然,有限长序列对应的三种变换之间必然存在相互关系。

比较有限长序列 DFT 的定义与 DTFT 定义可见,有限长序列离散傅里叶变换 $X[m]$ 是序列离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\Omega})$ 在一个周期 $[0, 2\pi)$ 内的等间隔抽样,即

$$X[m] = \text{DFT}\{x[k]\} = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}m}, m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2-11)$$

比较有限长序列 DFT 的定义与 z 变换定义可见,序列 $x[k]$ 的 DFT $X[m]$ 是序列 $x[k]$ 的 z 变换 $X(z)$ 在单位圆上的等间隔抽样,即

$$X[m] = X(z) \Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}m}}, m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

反之,有限长序列的 z 变换也可以由其 DFT $X[m]$ 表示,即

$$X(z) = \frac{(1 - z^{-N})}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{X[m]}{1 - W_N^{-m} z^{-1}}$$

3. 利用 DFT 计算线性卷积

序列的线性卷积是离散信号处理中的重要运算,由于有限长序列的 DFT 存在快速算法,因而利用 DFT 来实现序列的线性卷积,可以极大地提高计算线性卷积的效率。

长度为 N_1 的序列 $x[k]$ 和长度为 N_2 的序列 $h[k]$ 的线性卷积,可以通过循环卷积实现,时域的循环卷积又可以通过序列 $x[k]$ 和 $h[k]$ 的 DFT 的乘积实现。故利用 DFT 计算序列的线性卷积的具体步骤为

- ① 将序列 $x[k]$ 补 $L - N_1$ 个零,得到长度为 L 的序列 $x_L[k]$ (其中 L 需满足 $L \geq N_1 + N_2 - 1$)。
- ② 将序列 $h[k]$ 补 $L - N_2$ 个零,得到长度为 L 的序列 $h_L[k]$ 。
- ③ 对序列 $x_L[k]$ 和 $h_L[k]$ 分别进行 DFT,得到 $X_L[m]$ 和 $H_L[m]$ 。
- ④ 对 $X_L[m]$ 和 $H_L[m]$ 的乘积进行 IDFT,得到序列 $x[k]$ 和 $h[k]$ 的线性卷积。

在实际中往往会遇到 $x[k]$ 的长度比 $h[k]$ 要长得多,在这种情况下,为了提高利用 DFT 计算序列线性卷积的效率,可以采用分段卷积的方法,将长序列 $x[k]$ 分成若干段短序列,分段与长度为 M 的短序列 $h[k]$ 进行卷积,最后再将各段卷积结果通过某种方式组合起来。分段卷积常用方法有重叠相加法与重叠保留法两种。

重叠相加法的基本思想是,将长序列 $x[k]$ 分解为若干段互不重叠的短序列 $x_n[k]$,利用 DFT 计算 $x_n[k]$ 与 $h[k]$ 的线性卷积 $y_n[k]$,然后再将 $y_n[k]$ 进行重叠相加,即得 $x[k] * h[k]$ 。重叠保留法的基本思想是,将长序列 $x[k]$ 分段时,每段与前一段有 $M-1$ 个点重叠,分段卷积结果 $y_n[k]$ 去掉前 $M-1$ 个点后再相加。

4. 利用 DFT 分析连续非周期信号的频谱

利用 DFT 对连续非周期信号 $x(t)$ 的频谱进行近似分析,需要对信号 $x(t)$ 进行抽样和截短,这将会出现三种现象:混叠现象、泄漏现象和栅栏现象。

混叠现象

若利用有限长序列的 DFT 分析连续非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$,则信号 $x(t)$ 需离散化。设 $x[k]$ 表示对连续信号 $x(t)$ 等间隔 T 抽样获得的离散信号,即 $x[k] = x(t)|_{t=kT}$,则离散信号 $x[k]$ 的 DTFT $X(e^{j\Omega})$ 与连续信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 的关系为

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n\omega_{\text{sam}})) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j \frac{1}{T}(\Omega - n \cdot 2\pi)\right) \quad (2-12)$$

其中, $\omega_{\text{sam}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_{\text{sam}}$ 表示对连续信号抽样的角频率, f_{sam} 称为抽样频率。数字角频率 Ω 与模拟角频率 ω 之间的关系为 $\Omega = \omega T$ 。

若 $x[k] = x(t)|_{t=kT}$,则 $X(e^{j\Omega})$ 是 $X(j\omega)$ 的周期化,且周期为 2π 。工程实际中的连续信号一般都不是带限信号,连续信号在抽样前通常都经过一个模拟低通滤波器(称为抗混叠滤波器)进行低通滤波,以减少混叠误差。

由以上分析可见,在分析连续信号的频谱 $X(j\omega)$ 时,可以将 $x(t)$ 经等间隔 T 抽样得到序列 $x[k]$,再对 $x[k]$ 进行 N 点的 DFT,就可以得到 $X(e^{j\Omega})$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的 N 个频谱抽样点 $X[m]$,从而得到 $X(j\omega)$ 的频谱信息。由于 $X[m]$ 对应于 $X(e^{j\Omega})$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的 N 个频谱抽样点,而 $X(j\omega)$ 对应于 $X(e^{j\Omega})$ 在一个周期 $[-\pi, \pi)$ 内的频谱,因此可以利用频谱函数 $X(e^{j\Omega})$ 的周期性,由 $X(e^{j\Omega})$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上的值得到其在 $(-\pi, 0)$ 上的值。

当 $0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$ 时, $X[m]$ 对应于 $X(j\omega)$ 以下频率点上的抽样值。

$$\omega = \frac{1}{T} \frac{2\pi}{N} m = \frac{\omega_{\text{sam}}}{N} m, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2-13)$$

当 $\frac{N}{2} \leq m \leq N-1$ 时, $X[m]$ 对应于 $X(j\omega)$ 以下频率点上的抽样值。

$$\omega = \frac{1}{T} \left(\frac{2\pi}{N} m - 2\pi \right) = \frac{\omega_{\text{sam}}}{N} (m - N), \quad m = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \quad (2-14)$$

泄漏现象

如果连续信号 $x(t)$ 在时域内无限长, 则离散化后的序列 $x[k]$ 也为无限长, 无法适用 DFT 分析, 这时需要对 $x[k]$ 进行加窗 $w_N[k]$ 截短使之成为有限长序列 $x_N[k]$, 即

$$x_N[k] = x[k] w_N[k] \quad (2-15)$$

这个过程称为时域加窗。

由 DTFT 的性质, 时域上两个序列相乘, 在频域上是两个序列傅里叶变换的卷积, 即加窗后序列 $x_N[k]$ 的频谱 $X_N(e^{j\Omega})$ 为

$$X_N(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W_N(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta \quad (2-16)$$

其中, $W_N(e^{j\Omega})$ 是窗函数 $w_N[k]$ 的 DTFT。

常见的窗函数主要有矩形 (Rectangle) 窗、汉纳 (Hann) 窗、汉明 (Hamming) 窗、布莱克曼 (Blackman) 窗, 这些窗函数 $w_N[k]$ 的幅度谱都是由主瓣以及若干个幅度较小的旁瓣组成。信号的时域加窗会导致在信号的频谱中产生频率泄漏。对同一个窗函数, 增加长度 N 虽然可以减少主瓣宽度, 但不能改善旁瓣泄漏。窗函数的窗口宽度相同时, 不同的窗函数具有不同的主瓣宽度和旁瓣泄漏, 且主瓣宽度越窄的窗函数, 其旁瓣泄漏也越大。在实际应用中, 可根据信号的特性采用合适的窗函数。

栅栏现象

连续信号 $x(t)$ 经过抽样、时域加窗后得到有限长序列 $x_N[k]$, 利用 N 点的 DFT 计算有限长序列 $x_N[k]$ 的频谱 $X_N[m]$ 。 $X_N[m]$ 实际上是 $X_N(e^{j\Omega})$ 在一个周期 $[0, 2\pi)$ 上 N 个等间隔的抽样点, 且两个相邻抽样点之间的频谱间隔 Δf_c (Hz) 为

$$\Delta f_c = \frac{f_{\text{sam}}}{N} \quad (2-17)$$

Δf_c 越小, 则频谱观察的分辨率越高。 $X_N[m]$ 是离散序列, 因而无法反映 $X_N(e^{j\Omega})$ 抽样点之间的全部细节, 这称为栅栏现象。为了改善栅栏现象, 可以在 $X_N(e^{j\Omega})$ 中抽取更多的样点值。一种方法是在序列 $x_N[k]$ 后补零 (zero padding), 构成一个 $L > N$ 序列 $x_L[k]$, L 点序列 $x_L[k]$ 的 DFT $X_L[m]$ 实际上是 $X_N(e^{j\Omega})$ 在一个周期 $[0, 2\pi)$ 的 L 个等间隔抽样点, 因而将会显示更多的 $X_N(e^{j\Omega})$ 细节。

利用 DFT 分析连续时间信号的频谱涉及频谱混叠、频率泄漏及栅栏效应。频谱混叠与连续信号的时域抽样间隔有关,频率泄漏与信号的时域加窗截短的长度有关,栅栏效应与 DFT 的点数有关。在多数情况下,一般已知待分析连续信号的最高频率 f_m 和希望的频谱分辨率 Δf_c , 需要选择频谱分析过程中的抽样频率 f_{sam} 、持续时间 T_p 、样点数 N 等参数。

① 首先确定信号抽样频率 f_{sam} , 根据时域抽样定理, 可得

$$f_{sam} \geq 2f_m \quad (2-18)$$

抽样间隔 T 应满足

$$T = \frac{1}{f_{sam}} \leq \frac{1}{2f_m} \quad (2-19)$$

② 确定信号抽样的持续时间 T_p , T_p 应满足频率分辨率 Δf_c 的要求, 即

$$T_p = NT = \frac{N}{f_{sam}} = \frac{1}{\Delta f_c} \quad (2-20)$$

③ 根据抽样间隔 T 与信号持续时间 T_p 确定 DFT 的点数 N , 即

$$N \geq \frac{T_{pmin}}{T_{max}} = \frac{2f_m}{\Delta f_c} \quad (2-21)$$

2.2 学习要求

1. 了解四种信号傅里叶变换的数学概念及特点。
2. 深刻理解有限长序列 DFT 的定义及概念。
3. 掌握序列 DFT 与序列 DTFT 和 z 变换的相互关系。
4. 掌握利用 DFT 分析任意信号频谱的原理和方法。
5. 理解 DFT 分析信号频谱中出现的现象以及改善这些现象的方法。
6. 掌握利用 DFT 实现序列线性卷积的原理和方法。

2.3 重点和难点提示

本章重点是信号 DFT 的数学概念和物理概念, 傅里叶变换建立的信号时域与频域之间的对应关系, 以及 DFT 在信号分析和系统分析中的重要作用。DFT 是信号傅里叶变换的离散化处理, 实现了利用数字方法对信号进行分析, 奠定了数字信号处理的理论基础。

本章难点是利用 DFT 分析连续信号频谱过程中出现的现象。混叠现象是指连续信号的离散化过程中, 由于时域的离散化导致频域的周期化, 而可能出现

的频谱混叠。改善混叠现象的方法主要有,对于带限信号,根据时域抽样定理选择合适的抽样频率;对于非带限信号,抽样前将连续信号通过抗混低通滤波器使其成为带限信号。泄漏现象是指序列截短过程中,由于序列与窗信号的乘积导致对应的频域卷积,造成的信号频谱分辨率降低。改善泄漏现象的主要方法是选择合适的窗信号和窗口宽度。栅栏现象是指利用 DFT 计算序列的频谱过程中,由于只能得到序列频谱的样点值,而无法观察其全部频谱。改善栅栏现象的主要方法是在序列后补零,以提高频谱观察的分辨率。尽管通过对序列补零可以提高信号频谱的分辨率,但提高的只是频谱显示的分辨率。若连续信号在离散化和时域加窗过程中,由于混叠或泄漏已经造成信号频谱中信息的失真,即使补零也无法再恢复已损失的信息。因此,补零只能提高频谱观察分辨率,不能增加信息而改善失真。

2.4 思考题

1. 序列的离散傅里叶变换 $X[m]$ 与该序列的频谱 $X(e^{j\omega})$ 之间是什么关系?
2. 在序列后补零与在序列每两点之间插入零值点,序列的频谱各有何改变?
3. 为什么 DFT 具有循环卷积的性质,而连续信号的 Fourier 变换,DTFT 和 z 变换却没有?
4. 利用 DFT 分析连续信号频谱会出现哪些误差? 如何克服或改善?
5. 利用 DFT 分析连续周期信号频谱时,如何选择 DFT 参数?
6. 信号谱分析中,如何选择窗函数的形式与窗口的宽度?
7. 既然各类信号均有其傅里叶表示,为什么还要利用 DFT 分析信号频谱?
8. 补零和增加信号长度对谱分析有何影响? 是否都可以提高频谱分辨率?

2.5 习题精解

2-1 已知序列 $x[k] = 4\delta[k] + 3\delta[k-1] + 2\delta[k-2] + \delta[k-3]$, 试求出下列序列。

- (1) $x_1[k] = x[(-k)_5]R_5[k]$
- (2) $x_2[k] = x[(k-2)_5]R_5[k]$
- (3) $x_3[k] = x[(3-k)_5]R_5[k]$

解:

$$x[k] = \{4, 3, 2, 1, 0\}$$

- (1) $x_1[k] = x[(-k)_5]R_5[k] = \{x[0], x[4], x[3], x[2], x[1]\} = \{4, 0,$

1, 2, 3}

(2) $x_2[k] = x[(k-2)_5]R_5[k] = \{x[3], x[4], x[0], x[1], x[2]\} = \{1, 0, 4, 3, 2\}$

(3) $x_3[k] = x[(3-k)_5]R_5[k] = \{x[3], x[2], x[1], x[0], x[4]\} = \{1, 2, 3, 4, 0\}$

2-2 $g[k]$ 和 $h[k]$ 是如下给定的有限序列

$$g[k] = \{5, 2, 4, -1, 2\}, h[k] = \{-3, 4, -1\}$$

(1) 计算 $g[k]$ 和 $h[k]$ 的线性卷积 $y_L[k] = g[k] * h[k]$ 。

(2) 计算 $g[k]$ 和 $h[k]$ 的 6 点循环卷积 $y_{1c}[k] = g[k] \otimes h[k]$ 。

(3) 计算 $g[k]$ 和 $h[k]$ 的 7 点循环卷积 $y_{2c}[k] = g[k] \otimes h[k]$ 。

(4) 计算 $g[k]$ 和 $h[k]$ 的 8 点循环卷积 $y_{3c}[k] = g[k] \otimes h[k]$ 。

(5) 比较以上结果, 有何结论?

解:

$$(1) y_L[k] = \{-15, 14, -9, 17, -14, 9, -2\}$$

$$(2) y_{1c}[k] = \{-17, 14, -9, 17, -14, 9\}$$

$$(3) y_{2c}[k] = \{-15, 14, -9, 17, -14, 9, -2\}$$

$$(4) y_{3c}[k] = \{-15, 14, -9, 17, -14, 9, -2, 0\}$$

(5) 序列的循环卷积与序列的线性卷积存在内在联系, 在一定条件下可以利用序列的循环卷积计算序列的线性卷积。

2-3 试证 N 点序列 $x[k]$ 的离散傅里叶变换 $X[m]$ 满足 Parseval 恒等式

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2$$

证:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] X^*[m] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] \left(\sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{mk} \right)^* \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x^*[k] \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] W_N^{-mk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x^*[k] x[k] = \sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2 \end{aligned}$$

2-4 $X[m]$ 表示 $2M$ 点序列 $x[k]$ 的 DFT, 当 $x[k] = -x[k+M]$ 时, 试证 $X[2r] = 0, r = 0, 1, \dots, M-1$ 。

证:

现将 $x[k]$ 按 k 的自然顺序分成前后两部分, 即

$$\begin{aligned}
 X[m] &= \text{DFT}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{2M-1} x[k] W_{2M}^{km} = \sum_{k=0}^{M-1} x[k] W_{2M}^{mk} + \sum_{k=M}^{2M-1} x[k] W_{2M}^{mk} \\
 &= \sum_{k=0}^{M-1} (x[k] + W_{2M}^{mM} x[k+M]) W_{2M}^{mk}
 \end{aligned}$$

由于 $W_{2M}^{mM} = e^{-j\frac{2\pi m}{2M}M} = (-1)^m$, 上式可写成

$$X[m] = \sum_{k=0}^{M-1} (x[k] + (-1)^m x[k+M]) W_{2M}^{mk}$$

当 m 为偶数时, $(-1)^m = 1$; 当 m 为奇数时, $(-1)^m = -1$ 。因此, 根据 m 为偶数或奇数将频域序列 $X[m]$ 分成偶数组和奇数组。用 $X[2r]$ 表示偶数组, $X[2r+1]$ 表示奇数组, 则有

$$\begin{aligned}
 X[2r] &= \sum_{k=0}^{M-1} (x[k] + x[k+M]) W_{2M}^{2rk}, \quad r = 0, 1, \dots, M-1 \\
 X[2r+1] &= \sum_{k=0}^{M-1} (x[k] - x[k+M]) W_{2M}^{rk} \cdot W_{2M}^{2rk}, \quad r = 0, 1, \dots, M-1
 \end{aligned}$$

由于 $x[k] = -x[k+M]$, 故有 $X[2r] = 0, r = 0, 1, \dots, M-1$, 证毕。

2-5 $g[k]$ 和 $h[k]$ 是 6 点的有限序列, $G[m]$ 和 $H[m]$ 分别表示它们的 DFT。

(1) 如果 $G[m] = \{1+j, -2.1+j3.2, -1.2-j2.4, 0, 0.9+j3.1, -0.3+j1.1\}$, 若存在 $h[k] = g[(k-4)_6] R_6[k]$, 试由 $G[m]$ 确定 $H[m]$ 。

(2) 如果 $g[k] = \{4.1, 3.5, 1.2, 5, 2, 3.3\}$, 且存在 $H[m] = G[(m-3)_6] R_6[m]$, 试由 $g[k]$ 确定 $h[k]$ 。

解:

由 DFT 的时域循环位移性质, 可得

$$\begin{aligned}
 (1) \quad H[m] &= \text{DFT}\{g[(k-4)_6] R_6[k]\} = W_6^{4m} G[m] \\
 &= \{1+j, -1.7213-3.4187j, -1.4785+2.2392j, 0, -3.1347-0.7706j, 1.1026-0.2902j\}
 \end{aligned}$$

(2) 由 DFT 的频域循环位移性质, 可得

$$h[k] = g[k] W_6^{-3k} = (-1)^k g[k] = \{4.1, -3.5, 1.2, -5, 2, -3.3\}$$

2-6 设 $x[k]$ 是一 10 点的有限序列

$$x[k] = \{2, 1, 1, 0, 3, 2, 0, 3, 4, 6\}$$

不计算 DFT, 试确定下列表达式的值, 并用 MATLAB 计算 DFT 验证。

$$(1) \quad X[0] \quad (2) \quad X[5] \quad (3) \quad \sum_{m=0}^9 X[m] \quad (4) \quad \sum_{m=0}^9 e^{-j\frac{4\pi m}{5}} X[m]$$

$$(5) \sum_{m=0}^9 |X[m]|^2$$

解:

$$(1) X[0] = \sum_{k=0}^9 x[k] = 22$$

$$(2) X[5] = \sum_{k=0}^9 x[k] W_{10}^{5k} = \sum_{k=0}^9 (-1)^k x[k] = -2$$

$$(3) \sum_{m=0}^9 X[m] = 10x[0] = 20$$

$$(4) e^{-j\frac{4\pi m}{5}} X[m] = W_{10}^{4m} X[m] \rightarrow x[(k-4)_{10}] R_{10}[k]$$

$$\sum_{m=0}^9 e^{-j\frac{4\pi m}{5}} X[m] = 10x[6] = 0$$

$$(5) \sum_{m=0}^9 |X[m]|^2 = 10 \sum_{k=0}^9 |x[k]|^2 = 800$$

2-7 $X[m]$ 表示 12 点实序列 $x[k]$ 的 DFT。 $X[m]$ 前 7 个点的值为

$$X[0] = 10, \quad X[1] = -5 - 4j, \quad X[2] = 3 - 2j, \quad X[3] = 1 + 3j,$$

$$X[4] = 2 + 5j, \quad X[5] = 6 - 2j, \quad X[6] = 12$$

不计算 IDFT, 试确定下列表达式的值, 并用 MATLAB 编程验证你的结论。

$$(1) x[0] \quad (2) x[6] \quad (3) \sum_{k=0}^{11} x[k] \quad (4) \sum_{k=0}^{11} e^{j\frac{2\pi k}{3}} x[k] \quad (5) \sum_{k=0}^{11} |x[k]|^2$$

解:

$$X = [10, -5 - 4j, 3 - 2j, 1 + 3j, 2 + 5j, 6 - 2j, 12, 6 + 2j, \\ 2 - 5j, 1 - 3j, 3 + 2j, -5 + 4j]$$

$$(1) x[0] = \frac{1}{12} \sum_{m=0}^{11} X[m] = 3$$

$$(2) x[6] = \frac{1}{12} \sum_{m=0}^{11} X[m] W_{12}^{6m} = \frac{1}{12} \sum_{m=0}^{11} (-1)^m X[m] = \frac{7}{3}$$

$$(3) \sum_{k=0}^{11} x[k] = X[0] = 10$$

$$(4) \sum_{k=0}^{11} e^{j\frac{2\pi k}{3}} x[k] = \left(\sum_{k=0}^{11} W_{12}^{4k} x[k] \right)^* = X^*[4] = 2 - 5j$$

$$(5) \sum_{k=0}^{11} |x[k]|^2 = \frac{1}{12} \sum_{m=0}^{11} |X[m]|^2 = \frac{85}{2}$$

MATLAB 编程略。

2-8 已知 $x[k]$ 的 N 点 DFT 为 $X[m]$, 试求 $y[k] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}lk\right)x[k]$ 的 N 点

DFT。

解:

$$y[k] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}lk\right)x[k] = \frac{1}{2}x[k]e^{j\frac{2\pi}{N}lk} + \frac{1}{2}x[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}lk}$$

根据 DFT 的频域循环位移特性,可得 $y[k]$ 的 N 点 DFT 为

$$Y[m] = \text{DFT}\{y[k]\} = \frac{1}{2}X[(m-l)_N] + \frac{1}{2}X[(m+l)_N]$$

2-9 已知一 9 点实序列的 DFT 在偶数点的值为 $X[0] = 3.1, X[2] = 2.5 + 4.6j, X[4] = -1.7 + 5.2j, X[6] = 9.3 + 6.3j, X[8] = 5.5 - 8.0j$, 试确定 DFT 在奇数点的值。

解:

根据实序列 DFT 的对称特性 $X[m] = X^*[N-m]$, 可得

$$X[1] = X^*[9-1] = X^*[8] = 5.5 + 8.0j$$

$$X[3] = X^*[9-3] = X^*[6] = 9.3 - 6.3j$$

$$X[5] = X^*[9-5] = X^*[4] = -1.7 - 5.2j$$

$$X[7] = X^*[9-7] = X^*[2] = 2.5 - 4.6j$$

2-10 已知一 9 点实序列在 5 个点上的 DFT 值为 $X[0] = 23, X[1] = 2.2426 - j, X[4] = -6.3749 + 4.1212j, X[6] = 6.5 + 2.5891j, X[7] = -4.1527 - 0.2645j$, 试确定其他 4 个点的 DFT 值。

解:

根据实序列 DFT 的对称特性 $X[m] = X^*[N-m]$, 可得

$$X[2] = X^*[9-2] = X^*[7] = -4.1527 + 0.2645j$$

$$X[3] = X^*[9-3] = X^*[6] = 6.5 - 2.5891j$$

$$X[5] = X^*[9-5] = X^*[4] = -6.3749 - 4.1212j$$

$$X[8] = X^*[9-8] = X^*[1] = 2.2426 + j$$

2-11 已知一 7 点序列为 $x[0] = 5, x[1] = 3, x[2] = -2, x[3] = -4, x[4] = 1, x[5] = 2, x[6] = 0$ 。 $Y[m] = W_7^m X[m]$ 。不计算 IDFT, 试确定序列 $y[k]$ 。

解:

由 DFT 时域循环位移特性, 有

$$y[k] = x[(k-4)_7]R_7[k] = \{-4, 1, 2, 0, 5, 3, -2\}$$

2-12 $x[k] = \{1, -1, 2, 3, 0, 0\}$, $X[m]$ 是其 DFT。 $G[m] = W_6^{3m} X[m]$, 不计算 IDFT, 试确定 6 点序列 $g[k]$ 。

解:

由 DFT 时域循环位移特性, 有

$$g[k] = x[(k-3)_6]R_6[k] = \{0, 0, 3, 1, -1, 2\}$$

2-13 已知 $x[k]$ 是一 N 点的有限序列, 试求

$$(1) y[k] = \text{DFT}\{\text{DFT}\{x[k]\}\}$$

$$(2) g[k] = \text{DFT}\{\text{DFT}\{\text{DFT}\{\text{DFT}\{x[k]\}\}\}\}$$

解:

$$(1) y[k] = \text{DFT}\{\text{DFT}\{x[k]\}\} = \text{DFT}\{X[m]\} = \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$$

由于当 $x[k]$ 的 DFT 为 $X[m]$ 时, 则 $x^*[N-k]$ 的 DFT 为 $X^*[m]$, 即存在

$$x^*[N-k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X^*[m] e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$$

两边取共轭后, 可得

$$x[N-k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$$

$$\text{故} \quad y[k] = N x[N-k]$$

$$(2) g[k] = \text{DFT}\{\text{DFT}\{\text{DFT}\{\text{DFT}\{x[k]\}\}\}\}$$

$$= \text{DFT}\{\text{DFT}\{N x[N-k]\}\}$$

$$= N^2 x[k]$$

2-14 $x[k]$ 和 $h[k]$ 是在 $0 \leq k \leq 29$ 范围内有定义的 30 点序列, 并且 $h[k] = 0, 0 \leq k \leq 9, 20 \leq k \leq 29$ 。 $x[k]$ 和 $h[k]$ 的 30 点循环卷积记为 $g[k]$, 线性卷积记为 $y[k]$ 。 试确定在哪些点上有 $y[k] = g[k]$ 。

解:

将循环卷积与线性卷积相比较, 由图 2-1 可知

$$\begin{aligned} y[30] &= g[0], y[31] = g[1], \dots, y[39] = g[9] \\ y[19] &= g[19], y[20] = g[20], \dots, y[29] = g[29] \end{aligned}$$

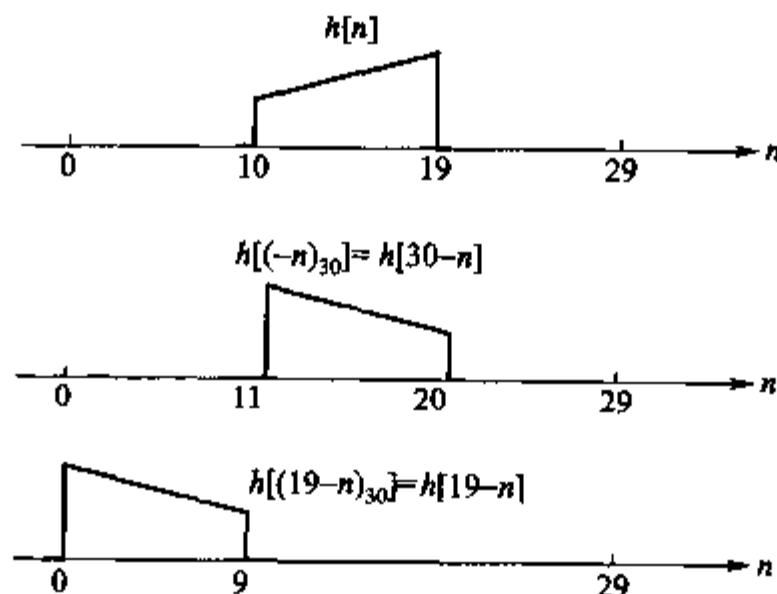


图 2-1 题 2-14 解答图

2-15 (1) 若 N 点序列 $x[k]$, $0 \leq k \leq N-1$, 其 N 点 DFT 为 $X[m]$ 。现构造一 $L \times N$ 点序列

$$y[k] = \begin{cases} x\left[\frac{k}{L}\right] & k = 0, L, \dots, (N-1)L \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

L 是一正整数, 试用 $X[m]$ 表示 $y[k]$ 的 $L \times N$ 点 DFT。

(2) 一个 7 点序列 $x[k]$ 的 DFT 为 $X[m] = \{1, 1, 1, 1, 2, 3, 4\}$, 试利用上述构造方法, 求出 21 点序列 $y[k]$ 的 DFT。

解:

(1) 序列 $y[k]$ 实际上就是序列 $x[k]$ 的 L 倍内插, 由序列内插的定义, 可得 L 倍内插序列 $y[k]$ 的 z 变换 $Y(z)$ 为

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]z^{-k} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ 是 } L \text{ 的整数倍}}}^{\infty} x\left[\frac{k}{L}\right]z^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-nL} = X(z^L)$$

所以 L 倍内插序列 $y[k]$ 的频谱 $Y(e^{j\Omega})$ 为

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{jL\Omega})$$

将序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 压缩 L 倍, 即可得 L 倍内插序列 $y[k]$ 的频谱 $Y(e^{j\Omega})$ 。

由于序列的 DFT 是其频谱在 $[0, 2\pi)$ 上的等间隔抽样, 故 $Y[m]$ 是 $X[m]$ 的 L 次的重复, 即

$$Y[m] = X[m], \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

$$Y[m+N] = X[m], \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

\vdots

$$Y[m+(L-1)N] = X[m], \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

(2) 由 7 点序列 $x[k]$ 构造出 21 点序列 $y[k]$ 时, $L=3$, 故有

$$Y[m] = \{1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4\}$$

2-16 $X[m]$ 是 N 点序列 $x[k]$ 的 DFT, N 为偶数。两个 $\frac{N}{2}$ 点序列定义为

$$x_1[k] = \frac{1}{2}(x[2k] + x[2k+1]),$$

$$x_2[k] = \frac{1}{2}(x[2k] - x[2k+1]), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$$

$X_1[m]$ 和 $X_2[m]$ 分别表示序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 的 $\frac{N}{2}$ 点 DFT, 试由 $X_1[m]$ 和

$X_2[m]$ 确定 $x[k]$ 的 N 点 DFT。

解:

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{x[2k]\} &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2k] W_N^{mk} = \sum_{\substack{l=0 \\ l=\text{偶数}}}^{N-1} x[l] W_N^{\frac{ml}{2}} \\ &= \sum_{\substack{l=0 \\ l=\text{偶数}}}^{N-1} x[l] \frac{(1 + W_N^{\frac{lN}{2}})}{2} W_N^{ml} = \frac{1}{2} \left(X[m] + X\left[m + \frac{N}{2}\right] \right) \\ \text{DFT}\{x[2k+1]\} &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2k+1] W_N^{mk} = \sum_{\substack{l=1 \\ l=\text{奇数}}}^{N-1} x[l] W_N^{\frac{m(l-1)}{2}} \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ l=\text{奇数}}}^{N-1} x[l] \frac{(1 - W_N^{\frac{lN}{2}})}{2} W_N^{ml} W_N^{-m} = \frac{1}{2} \left(X[m] - X\left[m + \frac{N}{2}\right] \right) W_N^{-m} \end{aligned}$$

所以

$$X_1[m] = \frac{1}{4}(1 + W_N^{-m})X[m] + \frac{1}{4}(1 - W_N^{-m})X\left[m + \frac{N}{2}\right], \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$$

$$X_2[m] = \frac{1}{4}(1 - W_N^{-m})X[m] + \frac{1}{4}(1 + W_N^{-m})X\left[m + \frac{N}{2}\right], \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$$

解上述方程即可得

$$X[m] = (1 + W_N^m)X_1[m] + (1 - W_N^m)X_2[m] \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$$

$$X\left[m + \frac{N}{2}\right] = (1 - W_N^m)X_1[m] + (1 + W_N^m)X_2[m] \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$$

2-17 已知有限长 N 序列 $x[k]$ 的 z 变换为 $X(z)$, 若对 $X(z)$ 在单位圆上等间隔抽样 M 点, 且 $M < N$, 试分析此 M 个样点序列对应的 IDFT $x_1[k]$ 与序列 $x[k]$ 的关系。

解:

如果 $X_1[m] = X(z) \big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{M}m}}, m=0, 1, \dots, M-1$

即 $X_1[m]$ 是 $X(z)$ 在单位圆上 M 点等间隔抽样, 根据频域抽样定理, 则存在

$$x_1[k] = \text{IDFT}\{X_1[m]\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[k + lM] R_M[k]$$

上式表明, 将序列 $x[k]$ 以 M 为周期进行周期延拓, 取其主值区间 $[0, M-1]$ 上的值, 即得序列 $x_1[k]$ 。由于 $M < N$, 故在对 $x[k]$ 以 M 为周期进行周期延拓时, 必然存在重叠。

2-18 已知序列 $x[k] = 3k + 2, 0 \leq k \leq 9, h[k] = \{1, 3, 2; k = 0, 1, 2\}$, 试按 $L = 7$ 对序列 $x[k]$ 分段, 并分别利用重叠相加法与重叠保留法计算序列线性卷积 $y[k] = x[k] * h[k]$ 。

解:

(1) 重叠相加法

序列 $x[k]$ 的长度 $N = 10$, 若按 $L = 7$ 对序列进行分段, 可以分解为以下 2 段

$$x_0[k] = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$$

$$x_1[k] = \{23, 26, 29\}$$

将 $x[k]$ 的各段 $x_0[k]$ 、 $x_1[k]$ 分别与序列 $h[k]$ 线性卷积, 可得各段卷积结果为

$$y_0[k] = \{2, 11, 27, 45, 63, 81, 99, 94, 40\}$$

$$y_1[k] = \{23, 95, 153, 139, 58\}$$

由于序列 $h[k]$ 的长度 $M = 3$, 通过相邻段 $M - 1 = 2$ 项的重叠相加, 即可得到卷积序列 $y[k] = x[k] * h[k]$ 为

$$y[k] = \{2, 11, 27, 45, 63, 81, 99, 117, 135, 153, 139, 58\}$$

(2) 重叠保留法

由于序列 $h[k]$ 的长度 $M = 3$, 故每段与前一段应重叠 $M - 1 = 2$ 个样本。对于第一段需要在其前面添加 2 个零。因为 $L = 7$, 且序列 $x[k]$ 的长度 $N = 10$, 则序列 $x[k]$ 可划分为 3 段

$$x_0[k] = \{0, 0, 2, 5, 8, 11, 14\}$$

$$x_1[k] = \{11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$$

$$x_2[k] = \{26, 29, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

计算每段与 $h[k]$ 的 $L = 7$ 点的循环卷积, 得

$$y_0[k] = x_0[k] \circledast h[k] = \{64, 28, 2, 11, 27, 45, 63\}$$

$$y_1[k] = x_1[k] \circledast h[k] = \{150, 105, 81, 99, 117, 135, 153\}$$

$$y_2[k] = x_2[k] \circledast h[k] = \{26, 107, 139, 58, 0, 0, 0\}$$

去掉每个 $y_i[k]$ 前面的 2 个样本后, 把各 $y_i[k]$ 依次拼接在一起, 即可得到输出序列为

$$y[k] = \{2, 11, 27, 45, 63, 81, 99, 117, 135, 153, 139, 58\}$$

2-19 已知一实信号 $x(t)$, 该信号的最高频率为 $\omega_m = 200 \text{ rad/s}$, 用 $\omega_{\text{sam}} = 600 \text{ rad/s}$ 对 $x(t)$ 进行抽样。如对抽样信号做 1 024 点的 DFT, 试确定 $X[m]$ 中

$m = 128$ 和 $m = 768$ 点所分别对应的原连续信号的连续频谱点 ω_1 和 ω_2 。

解:

对连续信号 $x(t)$ 以 $\omega_{\text{sam}} = 600 \text{ rad/s}$ 进行抽样, 得到离散序列 $x[k]$, 由于满足时域抽样定理, 抽样过程没有出现混叠。在利用序列 $x[k]$ 的 DFT $X[m]$ 分析连续信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 时, 从 $X[m]$ 可以获得 $X(j\omega)$ 的对应点频率。

当 $m = 128$ 时, 由于 $0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$, 故有

$$\omega_1 = \frac{\omega_{\text{sam}}}{N} m = \frac{600}{1024} \times 128 \text{ rad/s} = 75 \text{ rad/s}$$

当 $m = 768$ 时, 由于 $\frac{N}{2} \leq m \leq N - 1$, 故可得

$$\omega_2 = \frac{\omega_{\text{sam}}}{N} (m - N) = \frac{600}{1024} \times (768 - 1024) \text{ rad/s} = -150 \text{ rad/s}$$

2-20 已知一离散序列 $x[k] = \cos(\Omega_0 k) + 0.75 \cos(\Omega_1 k)$, 其中 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{15} \text{ rad}$,

$$\Omega_1 = \frac{2.3\pi}{15} \text{ rad}。$$

(1) 对 $x[k]$ 做 64 点 FFT, 画出其信号的频谱。

(2) 如果(1)中显示的谱不能分辨两个谱峰, 是否可对(1)中的 64 点信号补零而分辨出两个谱峰。通过 MATLAB 编程进行证实, 并解释其原因。

解:

(1) 利用 MATLAB 对 $x[k]$ 做 64 点 FFT 的程序如下, 频谱图如图 2-2 所示。

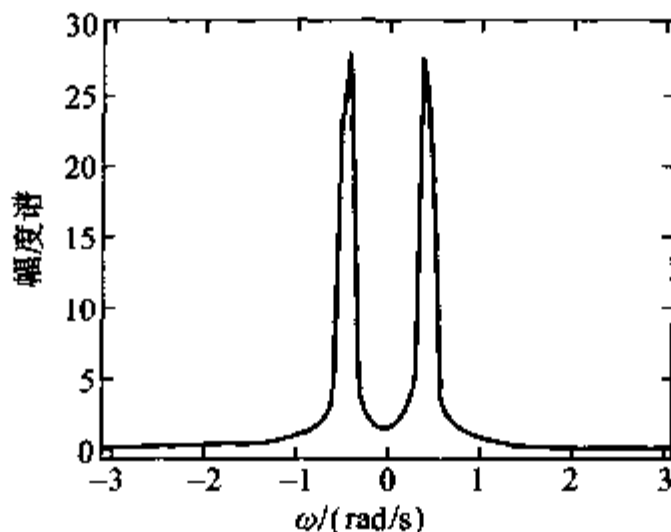


图 2-2 题 2-20(1) 解答图

```

N = 64;
W0 = 2.0 * pi/15.0;
W1 = 2.3 * pi/15.0;
k = (0:N-1);
x = cos(W0 * k) + 0.75 * cos(W1 * k);
L = N;
XW = fft(x, L);
X = fftshift(XW);
w = -pi + (0:L-1) * 2 * pi/L;
plot(w, abs(X));

```

(2) 仍取 64 点的 $x[k]$, 但在 64 点序列后补 192 个零再做 FFT, 其程序如下, 频谱图如图 2-3 所示。

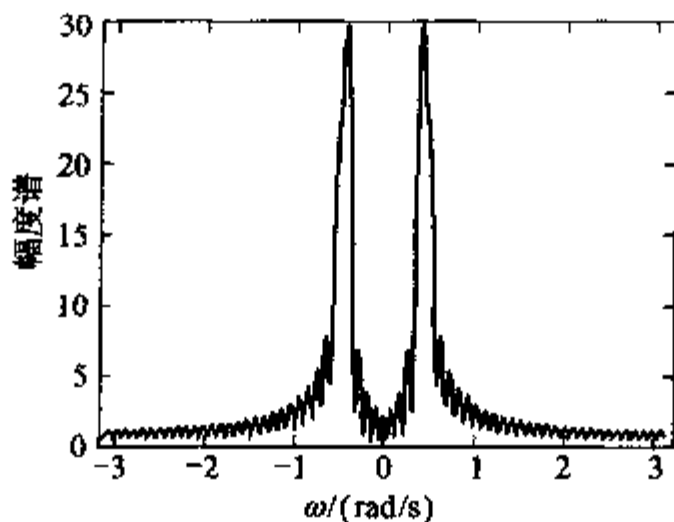


图 2-3 题 2-20(2) 解答图

```

N = 64;
W0 = 2.0 * pi/15.0;
W1 = 2.3 * pi/15.0;
k = (0:N-1);
x = cos(W0 * k) + 0.75 * cos(W1 * k);
L = 4 * N; % 补 3N 个零
XW = fft(x, L);
X = fftshift(XW);
w = -pi + (0:L-1) * 2 * pi/L;
plot(w, abs(X));

```

从图中可见, 在序列后补零, 无法改善信号由于时域截短而造成的频谱分辨率下降, 但可以改善 DFT 的栅栏效果。若能够分辨相邻的两个频率 Ω_0 和 Ω_1 , 根

据矩形窗的主瓣有效宽度 $\Delta\Omega_w \approx \frac{2\pi}{N}$ 应满足 $\Delta\Omega_w < \Omega_1 - \Omega_0$, 即 $\frac{2\pi}{N} < \frac{2.3\pi}{15} - \frac{2\pi}{15} = \frac{0.3\pi}{15}$, 可以确定 $N > 100$ 。

2-21 已知一连续信号为 $x(t) = e^{-3t}u(t)$, 试利用 DFT 近似分析其频谱。若要求频率分辨率 $\Delta f_c = 0.125$ Hz, 试确定抽样频率 f_{sam} 、抽样点数 N 以及持续时间 T_p 。

解:

由连续信号傅里叶变换可直接求出其频谱函数为

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{3 + j\omega}$$

其幅度频谱 $|X(j\omega)|$ 为

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \omega^2}}$$

由于信号 $x(t)$ 的频谱为无限谱, 故不存在有限的最高频率 f_m 。一般选取占信号能量 95% 以上的频带宽度 $(-f_m, f_m)$, 以确定其最高频率 f_m 。根据信号傅里叶变换满足 Parseval 能量守恒, 可以从信号的时域或频域计算信号的总能量。

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{6\pi} \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

当取最高频率 $f_m = 16$ Hz 时, $\omega_m = 32\pi$ rad/s, 可求得在 $(-2\pi f_m, 2\pi f_m)$ 频率范围内的能量为

$$E_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-32\pi}^{32\pi} \frac{1}{9 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{6\pi} \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) \Big|_{-32\pi}^{32\pi} = 0.1635$$

在 $(-2\pi f_m, 2\pi f_m)$ 频率范围内的能量占信号总能量的百分比为

$$\frac{E_m}{E} = \frac{0.1635}{0.16667} \approx 98.1\%$$

根据信号的最高频率 f_m 和要求的频率分辨率 Δf_c , 可以确定 DFT 的其他参数。

(1) 根据信号的最高频率 f_m , 可得最大的抽样间隔 T_{max} 为

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{2 \times 16} \text{ s} = 31.25 \times 10^{-3} \text{ s}$$

相应的最小抽样频率 f_{sam} 为

$$f_{\text{sam}} = \frac{1}{T_{\text{max}}} = 2f_m = 32 \text{ Hz}$$

(2) 根据频率分辨率 Δf_c , 可得最小的信号持续时间 T_{pmin} 为

$$T_{\text{pmin}} = \frac{1}{\Delta f_c} = \frac{1}{0.125} \text{ s} = 8 \text{ s}$$

(3) 由最大的抽样间隔 T_{max} 与最小信号持续时间 T_{pmin} , 可得最少的 DFT 点数 N 为

$$N \geq \frac{T_{\text{pmin}}}{T_{\text{max}}} = \frac{8}{31.25 \times 10^{-3}} = 256 \text{ 点}$$

根据以上 DFT 参数, 按照时域抽样频率 $f_{\text{sam}} = 32 \text{ Hz}$ 对信号 $x(t)$ 抽样, 抽样点数 $N = 256$, 得到有限长序列 $x_N[k]$ 为

$$x_N[k] = x(t) \big|_{t=kT} = e^{-3t} u(t) \big|_{t=kT} = e^{-3kT} \approx e^{\frac{3k}{32}}, \quad k = 0, 1, \dots, 255$$

对序列 $x_N[k]$ 进行 256 点 DFT, 并对计算结果进行重排后, 得到如图 2-4 所示的频谱。

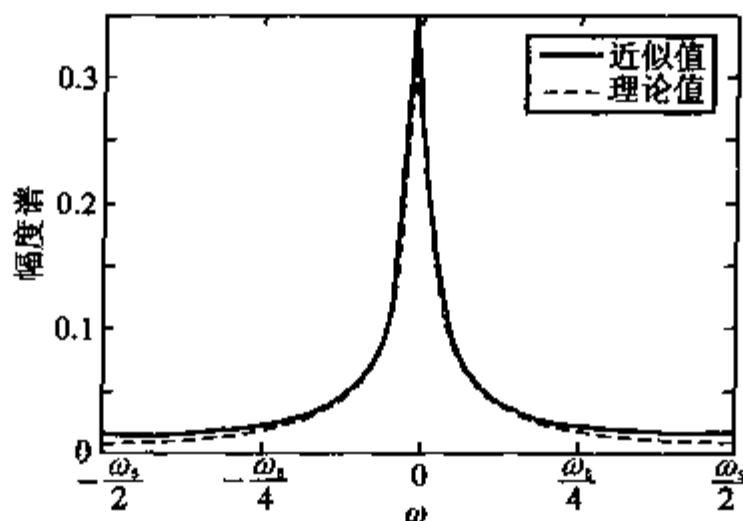


图 2-4 题 2-21 解答图

% compute the spectrum of $x(t) = \exp(-3t)u(t)$ by DFT

$N = 256;$

$fs = 32;$

$T = 1/fs;$

$ws = 2 * pi * fs;$

$t = (0:N-1) * T;$

$x = T * \exp(-3 * t);$

```
X = fftshift(fft(x));  
w = -ws/2 + (0:N-1)*ws/N;  
FT = 1./sqrt(9+w.*w);  
plot(w,abs(X),w,FT);  
legend('近似值','理论值');
```

第 3 章

快速傅里叶变换

3.1 基本知识 with 重要公式

FFT 是计算 DFT 的快速算法。FFT 算法的基本思想是利用旋转因子 W_N 的对称性和周期性等特性,通过将长序列分解为短序列,再由短序列的 DFT 来实现整个序列的 DFT,从而减少 DFT 的复数乘法和复数加法次数,提高 DFT 的运算效率。将 N 点长序列分解为短序列可以有多种方式,常用的有基 2 FFT 算法、基 4 FFT 算法、混合基 FFT 算法等,其中基 2 FFT 是最基本的 FFT 算法。

基 2 FFT 算法要求序列的长度 $N=2^r$,序列分解时是按将 N 点序列分解为 2 个 $\frac{N}{2}$ 点序列,每个 $\frac{N}{2}$ 点序列再分解为 2 个 $\frac{N}{4}$ 点序列,依此类推进行的。每次将序列分解为两个短序列的过程主要有两种不同的分解方法,分别称为基 2 时间抽取(Decimation in Time)的 FFT 算法和基 2 频率抽取(Decimation in Frequency)的 FFT 算法。

1. 基 2 时间抽取 FFT 算法

基 2 时间抽取 FFT 算法是将 N 点序列 $x[k]$ 按序号奇偶分解得到两个 $\frac{N}{2}$ 点子序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$,通过这两个子序列的 DFT $X_1[m]$ 和 $X_2[m]$ 实现序列 $x[k]$ 的 DFT $X[m]$,即

$$\begin{aligned} X[m] &= X_1[m] + W_N^m X_2[m] \\ X\left[m + \frac{N}{2}\right] &= X_1[m] - W_N^m X_2[m] \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3-1) \end{aligned}$$

式(3-1)可以利用图3-1所示的蝶形结构的流图表示。根据上述规律,再将2个 $\frac{N}{2}$ 点的DFT分解为4个 $\frac{N}{4}$ 点的DFT,4个 $\frac{N}{4}$ 点的DFT分解为8个 $\frac{N}{8}$ 点的DFT,依此类推,直至分解为 $\frac{N}{2}$ 个2点的DFT。将此过程利用基本蝶形运算流图表示,即可得到 N 点序列的基2时间抽取FFT算法流图。

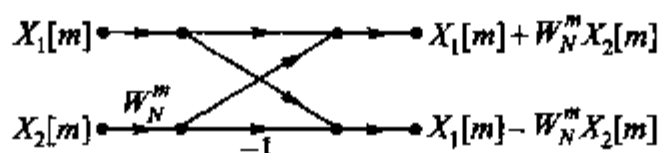


图3-1 基2时间抽取FFT蝶形运算流图

直接计算 N 点序列的DFT需要 N^2 次复数乘法,而利用基2时间抽取FFT算法计算只需 $\frac{N}{2}\log_2 N$ 次复数乘法。显然,序列越长,利用FFT计算序列DFT的效率就越高。

2. 基2频率抽取FFT算法

基2频率抽取FFT算法是将时域序列 $x[k]$ 按前后两部分以一定方式组合后形成两个短序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$,由此两个短序列的DFT可以表达序列 $x[k]$ 的DFT $\{X[m]\}$ 。其中, $x_1[k]$ 的DFT对应 $X[m]$ 中的偶数序列 $X[2m]$, $x_2[k]$ 对应 $X[m]$ 中的奇数序列 $X[2m+1]$,即 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 的DFT相当于对序列 $x[k]$ 的DFT进行了奇偶抽取,因而称为基2频率抽取FFT。式3-2表示将 N 点序列 $x[k]$ 分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点短序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 的方法。

$$\begin{aligned} x_1[k] &= x[k] + x\left[k + \frac{N}{2}\right] \\ x_2[k] &= \left(x[k] - x\left[k + \frac{N}{2}\right]\right) W_N^k \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3-2)$$

式(3-2)可以由图3-2蝶形结构的流图表示。按照上述方法,将2个 $\frac{N}{2}$ 点序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 再按前后分解成4个 $\frac{N}{4}$ 点子序列,将这4个 $\frac{N}{4}$ 点子序列点按下面基本蝶形运算流图分解成新的 $\frac{N}{4}$ 点序列,重复此过程,直到得到 $\frac{N}{2}$ 个2点序列为止。将此过程利用基本蝶形运算流图表示,即可得到 N 点序列的基2频率抽取FFT算法流图。

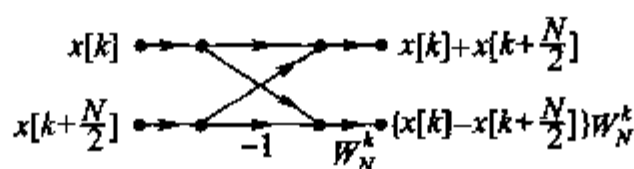


图 3-2 基 2 频率抽取 FFT 蝶形运算流图

3. 基 4 时间抽取 FFT 算法

基 2 时间抽取 FFT 算法是将长度 N 的序列分解为两个长度 $\frac{N}{2}$ 的短序列, 而基 4 时间抽取的 FFT 算法是将长度为 N 的序列 $x[k]$ 分解为 4 个 $\frac{N}{4}$ 的短序列 $x_1[k] = x[4k]$, $x_2[k] = x[4k+1]$, $x_3[k] = x[4k+2]$ 和 $x_4[k] = x[4k+3]$, 利用旋转因子 W_N 的特性, 由四个短序列的 DFT 表达长序列 $x[k]$ 的 DFT。即

$$\begin{aligned} X[m] &= X_1[m] + W_N^m X_2[m] + W_N^{2m} X_3[m] + W_N^{3m} X_4[m] \\ X[m + N/4] &= X_1[m] - j W_N^m X_2[m] - W_N^{2m} X_3[m] + j W_N^{3m} X_4[m] \\ X[m + 2N/4] &= X_1[m] - W_N^m X_2[m] + W_N^{2m} X_3[m] - W_N^{3m} X_4[m] \\ X[m + 3N/4] &= X_1[m] + j W_N^m X_2[m] - W_N^{2m} X_3[m] - j W_N^{3m} X_4[m] \end{aligned} \quad (3-3)$$

其中 $X_1[m]$ 、 $X_2[m]$ 、 $X_3[m]$ 和 $X_4[m]$ 分别是序列 $x_1[k]$ 、 $x_2[k]$ 、 $x_3[k]$ 和 $x_4[k]$ 对应的 $\frac{N}{4}$ 点 DFT, 频率变量 m 的取值为 $m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$ 。

式(3-3)是由基 4 分解的四个子序列所对应的 DFT 来表达序列 $x[k]$ 的 DFT 的计算公式, 其实现过程可用图 3-3 所示的信号流图表示, 这是基 4 时间抽取 FFT 运算中的基本单元。

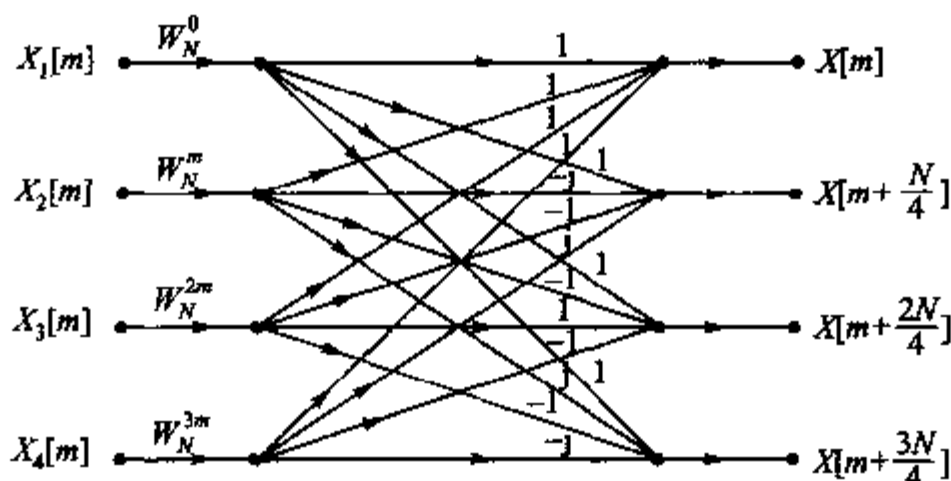


图 3-3 基 4 时间抽取蝶形运算的信号流图

对于 $N = 4^M$ 的序列,基4时间抽取FFT可以由 M 级蝶形运算实现,共需复乘次数为

$$\frac{3}{4}N(M-1) = \frac{3}{4}N(\log_4 N - 1) \approx \frac{3}{8}N\log_2 N, \quad M \gg 1 \quad (3-4)$$

因此,基4时间抽取FFT算法比基2时间抽取FFT算法更加有效。

4. FFT 算法的应用

利用 N 点复序列的 FFT 算法计算两个 N 点实序列 FFT

将两个 N 点实序列构成一个 N 点复序列,通过一次 N 点复序列的 FFT 运算,并利用 DFT 的对称性,即可同时得到两个 N 点的实序列对应的 DFT。设 $x[k]$ 和 $h[k]$ 都是 N 点的实序列, $X[m]$ 和 $H[m]$ 分别表示它们对应的 N 点 DFT。若构造复序列 $y[k] = x[k] + jh[k]$, 且 $y[k]$ 的 DFT 由 N 点复序列的 FFT 计算为 $Y[m]$, 则有

$$X[m] = \frac{1}{2} \{ Y[m] + Y^* [(-m)_N] \} \quad (3-5)$$

$$H[m] = \frac{1}{2j} \{ Y[m] - Y^* [(-m)_N] \} \quad (3-6)$$

利用 N 点复序列的 FFT 算法计算 $2N$ 点实序列 FFT

将长度为 $2N$ 的实序列按时域序号奇偶分解得到两个 N 点实序列,利用由 N 点复序列的 FFT 计算两个 N 点实序列 FFT 的方法,即可得到这两个 N 点实序列的 DFT,再根据基2时域抽取FFT算法基本蝶形运算流图,即可得到长度为 $2N$ 的实序列的 DFT。设 $y[k]$ 是一个长度为 $2N$ 的实序列, $Y[m]$ 是其 $2N$ 点的 DFT。定义两个长度为 N 的实序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 分别为

$$x_1[k] = y[2k], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-7)$$

$$x_2[k] = y[2k+1], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-8)$$

则存在

$$\begin{aligned} Y[m] &= X_1[m] + W_{2N}^m X_2[m] \\ Y[m+N] &= X_1[m] - W_{2N}^m X_2[m] \end{aligned} \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-9)$$

其中 $X_1[m]$ 和 $X_2[m]$ 分别是 N 点实序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 对应的 DFT。根据以上原理,同样也可以利用 N 点 FFT 算法计算出 $4N, 8N$ 等长度序列的 DFT。

利用 FFT 算法计算 IDFT

FFT 在数字信号处理中应用十分广泛,无论是数字信号处理的软件还是硬

件都提供有 FFT。由于相同长度的 IDFT 的运算复杂度与 DFT 相同,若能直接应用 FFT 计算 IDFT,同样可以极大地提高 IDFT 的运算效率。由 IDFT 的定义可知,它与 DFT 定义的主要差别在于 W_N^{mk} ,若将上式表达为 DFT 形式,则有

$$x[k] = \text{IDFT}\{X[m]\} = \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} X^*[m] W_N^{mk} \right)^* \quad (3-10)$$

能够直接利用 FFT 计算 IDFT。具体过程就是将频域序列 $X^*[m]$ 作为 FFT 流图的输入,将流图的输出结果取一次共轭,并乘以 $\frac{1}{N}$,就可得到对应的时域序列 $x[k]$ 。

5. 线性调频 z 变换算法

有限长 N 序列的 DFT 实际上是求解序列 z 变换在 z 平面单位圆上 N 个等间隔的样点,序列线性调频 z 变换(Chirp Z transform,简称 CZT)可以求解序列 z 变换在 z 平面任意轨迹上的样点,且输出序列的点数 M 可以不等于序列长度 N ,因而拓展了序列 DFT 的应用范畴。有限长 N 序列 $x[k]$ 的 M 点 CZT 定义为

$$X(z_m) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] z_m^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] A^{-k} W^{mk}, 0 \leq m \leq M-1 \quad (3-11)$$

其中 $z_m = A W^{-m}$, $A = A_0 e^{j\theta_0}$, $W = W_0 e^{-j\varphi_0}$ 。 A_0 、 W_0 为任意的正实数; θ_0 为起始抽样点的相角,可正可负; φ_0 表示两相邻样点之间的间隔。

根据 $z_m = A W^{-m}$,当 $m=0,1,\dots,M-1$ 时,可得到 z 平面上的一系列离散点 z_0, z_1, \dots, z_{M-1} 的 z 变换,即为序列的 CZT。这些离散点组成了序列 CZT 的轨迹,通常为一条螺旋曲线。序列 CZT 可以通过序列的线性卷积计算而实现,而卷积可以通过快速傅里叶变换 FFT 来实现。利用 FFT 快速实现 CZT 的过程如图 3-4 所示。

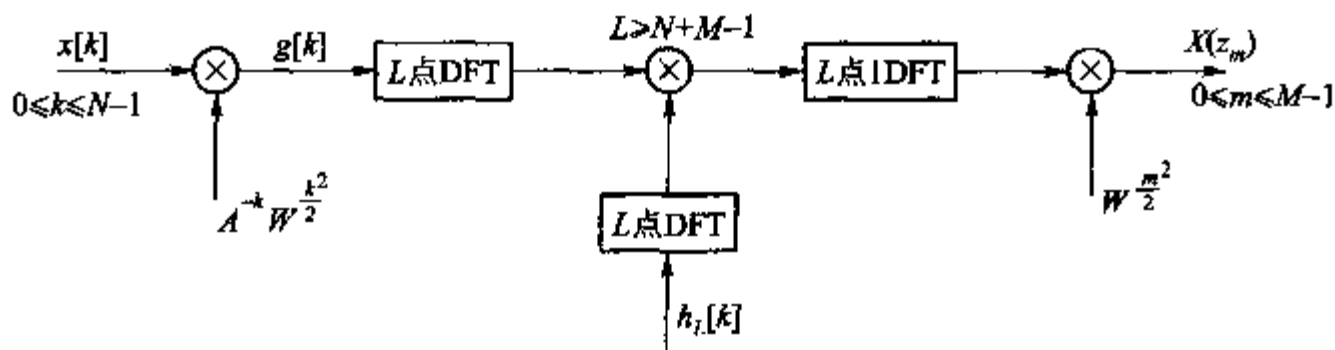


图 3-4 利用 FFT 实现序列 CZT 框图

直接计算序列 CZT 所需的乘法次数为 NM ;如果利用基 2 的 FFT 实现序列 CZT,所需乘法次数约为 $(N+M-1)[\log_2(N+M-1)+2]$,运算效率明显提高。

序列 CZT 与序列 DFT 比较,其算法具有以下特点。

- ① 输入序列长度与输出序列长度可以不等。
- ② M 和 N 可以不是组合数,甚至可以为素数。
- ③ z_k 相邻点的间隔 φ_0 是任意的,可以任意设定频率分辨率。
- ④ 变换轨迹可以不是圆,有利于分析在单位圆内的极点。
- ⑤ 起始点 z_0 不必在 $z=1$ 处,可在任意频率点,因而适用于窄带高分辨率的计算。
- ⑥ 当 $A=1, M=N, W=e^{j\frac{2\pi}{N}}$ 时,序列 CZT 即为序列 DFT。

3.2 学习要求

1. 掌握基 2 时间抽取和基 2 频率抽取 FFT 算法的基本思想和方法。
2. 了解基 4 时间抽取 FFT 算法的基本原理。
3. 掌握实序列 FFT 计算,以及由 N 点序列 FFT 计算 $2N$ 点序列 FFT 的方法。
4. 掌握利用 FFT 计算 IDFT 的过程,以及 IFFT 实现的原理。

3.3 重点和难点提示

本章重点是基 2 时间抽取 FFT 算法的基本原理和 FFT 蝶形运算流图,根据序列 DFT 的定义推导基 2 时间和频率抽取 FFT 的基本表达式,根据 FFT 基本蝶形运算流图推导出 4 点、8 点、16 点序列的 FFT 算法流图,在掌握基 2 时间抽取 FFT 算法原理的基础上,理解基 4 时间抽取 FFT 算法。

本章难点是由短序列的 DFT 表达相应长序列的 DFT 的基本原理及方法。将序列每次分解为 2 个短序列就称为基 2-FFT、每次分解为 4 个短序列就称为基 4-FFT。序列分解的方法主要有抽取分段和顺序分段。若为抽取分段,则对应时间抽取 FFT 算法;若为顺序分段,则对应频率抽取 FFT 算法。因此,FFT 算法的基本思想就是利用旋转因子的特性,通过短序列的 DFT 有效表达相应长序列的 DFT,从而极大地提高序列 DFT 的计算效率。

3.4 思考题

1. FFT 算法的基本思想是什么?
2. FFT 是另一种不同于 DFT 的变换吗?
3. 为什么说 FFT 是 DFT 的高效算法?
4. 基 2 时间抽取 FFT 算法和基 2 频率抽取 FFT 算法有何异同?

5. 推导出基 3 时间抽取 FFT 算法,并说明在什么情况下使用。
6. 如何利用 FFT 算法计算 IDFT?
7. 如何利用 N 点序列 FFT 算法计算长度为 $4N$ 的序列 $x[k]$ 的 DFT?

3.5 习题精解

3-1 画出 $N=4$ 基 2 时间抽取的 FFT 流图,并利用该流图计算序列 $x[k] = \{1, 1, 1, 1\}$ 的 DFT。

解:

$N=4$ 基 2 时间抽取的 FFT 流图如图 3-5 所示。

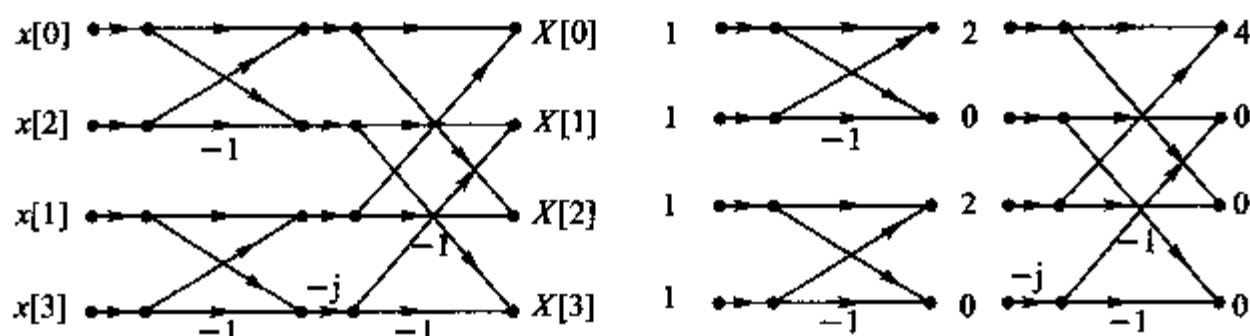


图 3-5 题 3-1 解答图

序列 $x[k] = \{1, 1, 1, 1\}$ 的 DFT 为 $X[m] = \{4, 0, 0, 0\}$ 。

3-2 画出 $N=8$ 基 2 时间抽取的 FFT 流图,并利用该流图计算序列 $x[k] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ 的 DFT。

解:

$N=8$ 基 2 时间抽取的 FFT 流图如图 3-6 所示。

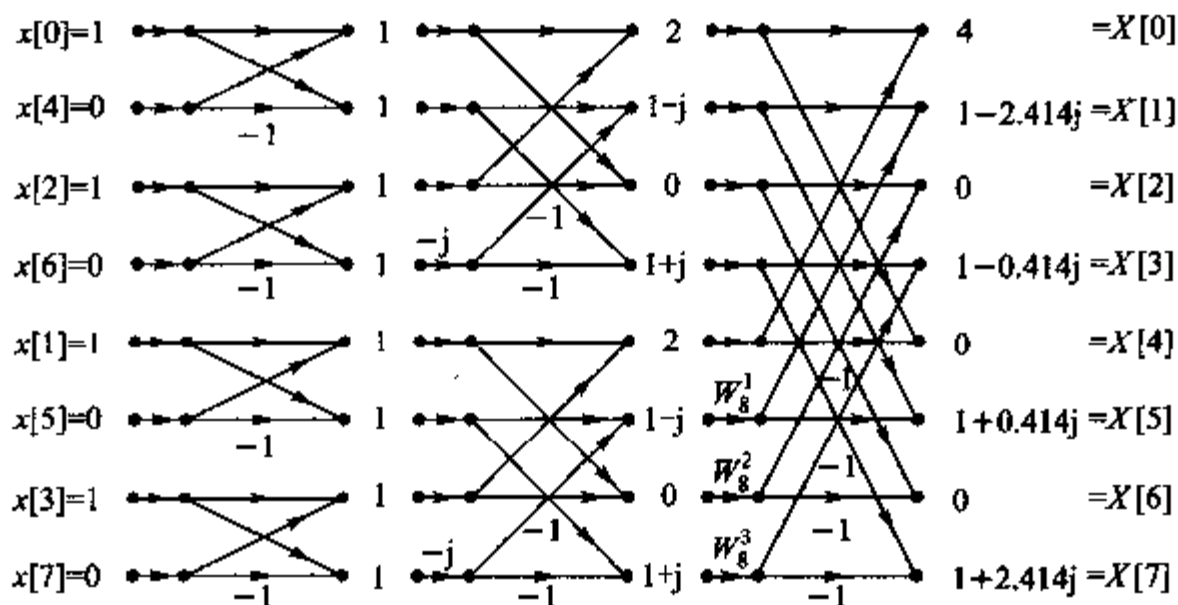


图 3-6 题 3-2 解答图

3-3 利用 $N=8$ 基2 时间抽取的 FFT 流图计算序列 $x[k] = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$ 的 DFT。比较习题 3-1、3-2、3-3 计算结果,有何结论?

解:

利用 8 点基2 时间抽取的 FFT 流图计算序列 $x[k]$ 的 DFT 如图 3-7 所示。根据习题 3-1、3-2、3-3 的计算结果,有下述结论。

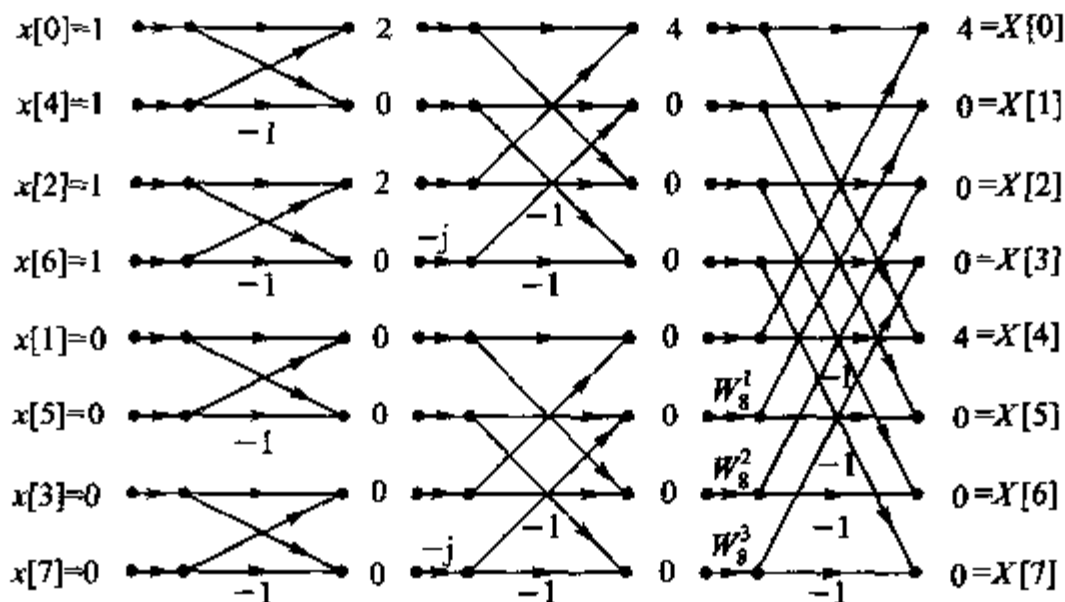


图 3-7 题 3-3 解答图

在序列后补零,不改变信号频谱 $X(e^{j\Omega})$,但可以从其 DFT 中获得 $X(e^{j\Omega})$ 在 $[0, 2\pi)$ 上更多的样点频率信息。在序列之间插零(即信号内插运算),将改变信号的频谱 $X(e^{j\Omega})$,相当于序列的时域扩展,其对应的频谱为原来频谱的压缩。因此上述序列的 DFT 存在下列关系

$$X_2[2m] = X_1[m], \quad m = 0, 1, 2, 3$$

$$X_3[m] = X_1[m], \quad m = 0, 1, 2, 3$$

$$X_3[m] = X_1[m-4], \quad m = 4, 5, 6, 7$$

其中 $X_1[m]$ 、 $X_2[m]$ 和 $X_3[m]$ 分别表示习题 3-1、3-2、3-3 的计算结果。

3-4 画出 $N=4$ 基2 频率抽取的 FFT 流图,并利用其计算序列 $x[k] = \{1, -1, 1, -1\}$ 的 DFT。

解:

根据 $N=4$ 基2 频率抽取的 FFT 流图(如图 3-8 所示),可得 $X[m] = \{0, 0, 4, 0\}$ 。

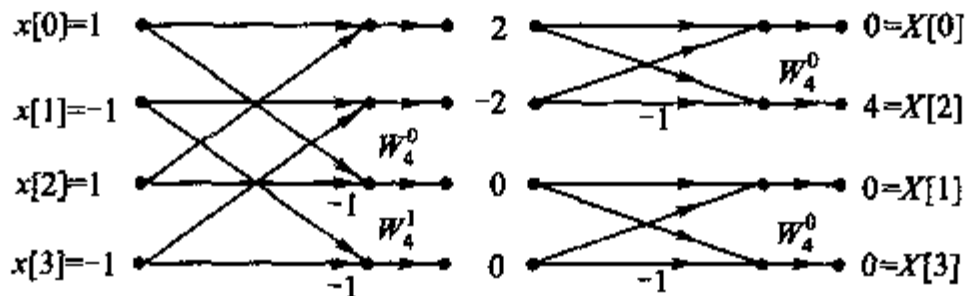


图 3-8 题 3-4 解答图

3-5 试利用 $N=4$ 基 2 时间抽取的 FFT 流图计算 8 点序列 $x[k] = \{1, -1, 1, -1, 2, 1, 1, 2\}$ 的 DFT。

解:

根据基 2 时间抽取 FFT 算法原理, 8 点序列的 DFT $X[m]$ 可由两个 4 点序列的 DFT $X_1[m]$ 和 $X_2[m]$ 表达。如果按照序列 $x[k]$ 序号的奇偶分解为 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$, 则存在

$$\begin{aligned} X[m] &= X_1[m] + W_8^m X_2[m] \\ X[m+4] &= X_1[m] - W_8^m X_2[m] \end{aligned} \quad m = 0, 1, 2, 3$$

其中 $x_1[k] = \{1, 1, 2, 1\}$, $x_2[k] = \{-1, -1, 1, 2\}$ 。 $X_1[m]$ 和 $X_2[m]$ 可通过 4 点的 FFT 来计算, 即根据图 3-9 可得

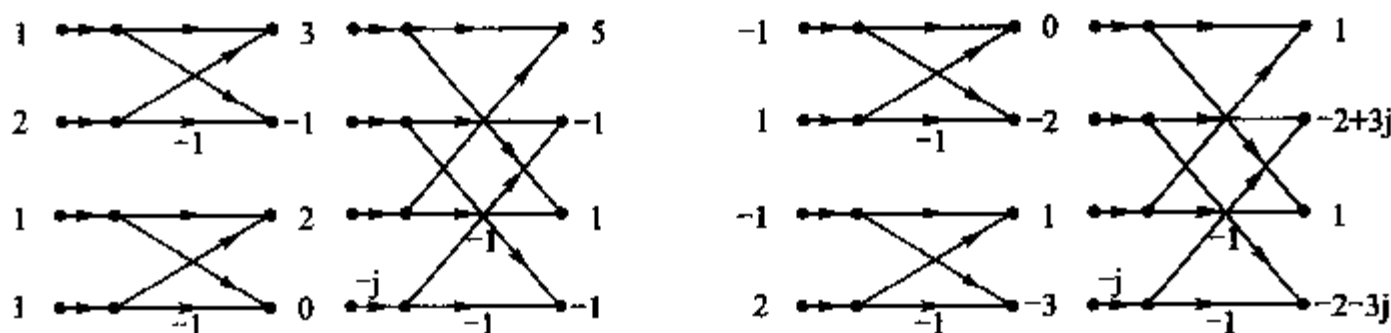


图 3-9 题 3-5 解答图

$$X_1[m] = \{5, -1, 1, -1\}, X_2[m] = \{1, -2+3j, 1, -2-3j\}$$

利用上述公式, 可得序列 $x[k]$ 的 DFT $X[m]$ 为

$$\begin{aligned} X[m] &= \{6, -0.293 + 3.535j, 1 + j, -1.707 + 3.535j, \\ &\quad 4, -1.707 - 3.535j, 1 - j, -0.293 - 3.535j\} \end{aligned}$$

如果按照序列 $x[k]$ 序号的前后分解为 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$, 则存在

$$\begin{aligned} X[2m] &= \sum_{k=0}^3 (x_1[k] + x_2[k]) W_4^{mk} \\ X[2m+1] &= \sum_{k=0}^3 \{(x_1[k] - x_2[k]) W_8^k\} W_4^{mk} \end{aligned} \quad m = 0, 1, 2, 3$$

同样可以由此两个 4 点序列的 DFT 表达一个 8 点序列的 DFT。

3-6 用 8 点 DFT 流图计算下列序列的 8 点 DFT。

(1) $x[k] = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

(2) $y[k] = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

解:

$$(1) x[k] = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1\}$$

根据8点基2时间抽取的FFT流图(如图3-10所示),可得其 $X[m] = \{0, 0, -4j, 0, 0, 0, 4j, 0\}$ 。

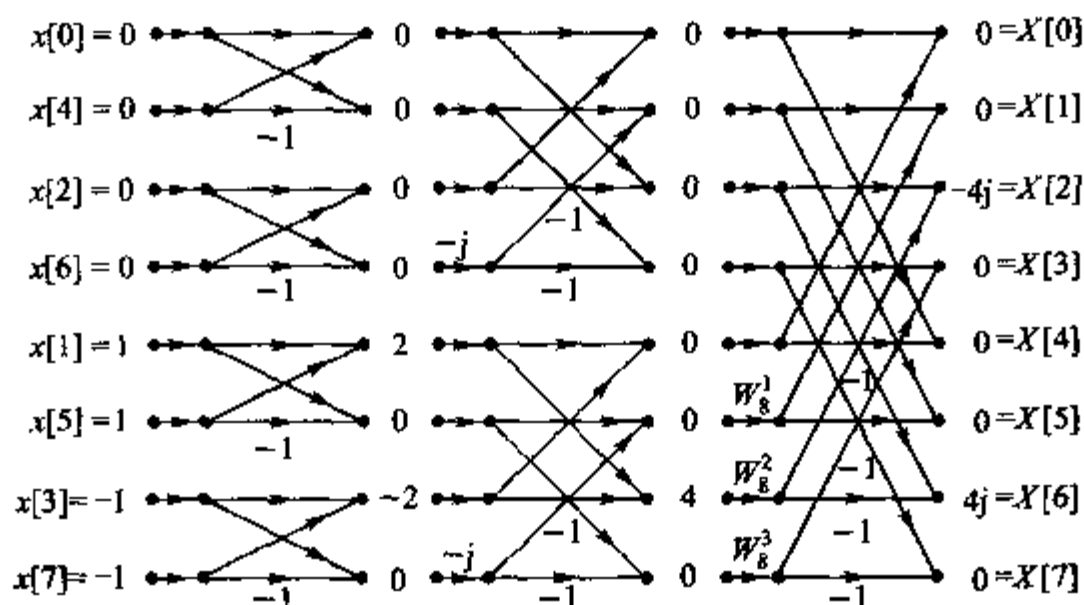


图3-10 题3-6(1)解答图

$$(2) y[k] = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

根据8点基2频率抽取的FFT流图(如图3-11所示),可得其 $X[m] = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$ 。

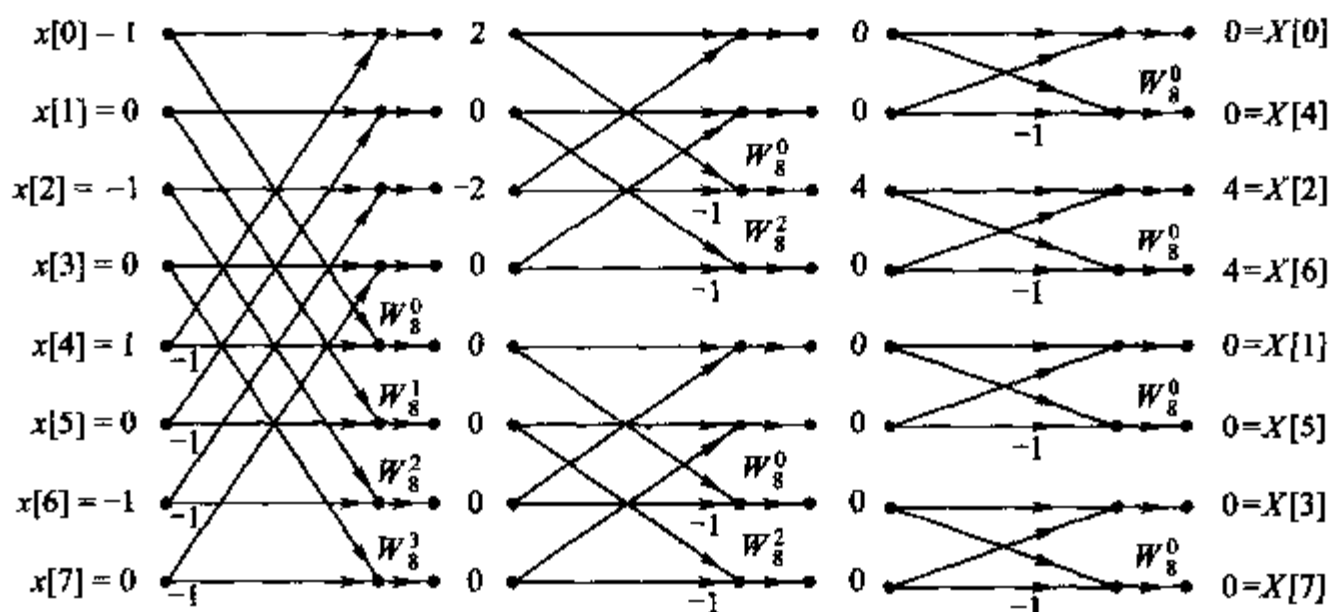


图3-11 题3-6(2)解答图

3-7 已知复序列 $y[k] = x_1[k] + jx_2[k]$ 的 8 点 DFT 为

$$Y[m] = \{1 - 3j, -2 + 4j, 3 + 7j, -4 - 5j, 2 + 5j, -1 - 2j, 4 - 8j, 6j\}$$

试确定实序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 的 8 点 DFT $X_1[m]$ 和 $X_2[m]$, 并由 $Y[m]$ 的 IDFT 验证。

解:

$$\begin{aligned} X_1[m] &= \frac{1}{2} \{ Y[m] + Y^* [(-m)_8] \} \\ &= \{ 1, -1 - j, 3.5 + 7.5j, -2.5 - 1.5j, 2, -2.5 + 1.5j, \\ &\quad 3.5 - 7.5j, -1 + j \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2[m] &= \frac{1}{2j} \{ Y[m] - Y^* [(-m)_8] \} \\ &= \{ -3, 5 + j, -0.5 + 0.5j, -3.5 + 1.5j, 5, -3.5 - 1.5j, \\ &\quad -0.5 - 0.5j, 5 - j \} \end{aligned}$$

由 $y[k] = \text{IDFT}\{Y[m]\} = x_1[k] + jx_2[k]$ 可得, $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 分别为

$$\begin{aligned} x_1[k] &= \{0.375, -1.2929, -0.625, 1.9268, 2.125, \\ &\quad -2.7071, -0.375, 1.5732\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2[k] &= \{0.500, -0.0643, 0.500, -2.8195, -0.250, -2.1857, \\ &\quad 0.250, 1.0695\} \end{aligned}$$

对 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 分别进行 DFT, 即可验证 $X_1[m]$ 和 $X_2[m]$ 的结果。

3-8 利用 128 点的 DFT 和 IDFT 计算一个 60 点序列和一个 1200 点序列的线性卷积。试确定利用重叠相加法计算上述线性卷积所需的最少的 DFT 和 IDFT 次数。

解:

在利用重叠相加法时, 为充分利用 128 点 DFT 计算线性卷积, 可将 1200 点的长序列每段分为 $L = 128 + 1 - 60 = 69$ 点, 共可得 18 段。这样每段 69 点序列与 60 点短序列的线性卷积恰好可以由 128 点的循环卷积计算。每个循环卷积可以由两次 DFT 和一次 IDFT 计算, 故最少需要 36 次 DFT 和 18 次 IDFT。

在利用重叠保留法时, 每段序列直接与 60 点短序列进行循环卷积, 为充分利用 128 点 DFT, 可将 1200 点的长序列每段分为 128 点。由于相邻段存在 $60 - 1 = 59$ 点的重叠保留, 且考虑第一段需补 59 个零, 故每段只从 1200 点的序列中分解到 $128 - 59 = 69$ 个新的数值, 共可得 19 段 $[(1200 + 59)/69 = 18 \text{ 余 } 17]$, 要特别注意最后一段。最少需要 38 次 DFT 和 19 次 IDFT。

3-9 若对模拟信号 $x(t)$ 进行频谱分析, 其最高频率为 4 kHz, 抽样频率为 10 kHz, 而且计算 1024 个抽样点的 DFT, 试确定频谱抽样之间的频率间隔, 以及第 129 根谱线 $X[128]$ 对应连续信号频谱的哪个频率点值。

解:

$$\text{频率间隔 } \Delta f_c = \frac{f_{\text{sam}}}{N} = \frac{10^4}{1\,024} = 9.765\,6\text{ Hz}$$

$$X[128] \text{ 对应连续信号的频率为 } f_{128} = \frac{128 f_{\text{sam}}}{N} = 1\,250\text{ Hz}$$

3-10 已知序列 $x[k] = (0.5)^k, 0 \leq k \leq 8$, 试计算序列 $x[k]$ 在单位圆上的 CZT, 其中 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}, \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}, M = 3$ 。

解:

利用 MATLAB 提供的函数 `czt()` 可以计算出序列的 CZT。

% Compute CZT of sequence $x[k] = 0.5^k$

$N = 9;$ % length of $x[k]$

$n = 0:N-1;$

$xn = (0.5).^n;$

$sita = \pi/3;$ % phase of start point

$fai = 2 * \pi/3;$ % phase interval

$A = \exp(j * sita);$ % complex starting point

$W = \exp(-j * fai);$ % complex ratio between points

$M = 3;$ % length of czt

$y = \text{czt}(xn, M, W, A)$ % call czt function

运行结果 y 为

$$1.002 - 0.578\,5j \quad 0.668 \quad 1.002 + 0.578\,5j$$

3-11 若某 DSP 硬件系统只提供最多 2 048 点的 FFT 程序, 试推导利用 2 048 点的 FFT 程序计算 8 192 点的 FFT 和 IFFT 的计算表达式。

解:

在许多实际 DSP 系统中, 由于资源限制, 只能提供有限点的 FFT 算法。但根据 FFT 算法原理, 可以利用 N 点序列的 DFT 来实现 $2N$ 点序列的 DFT。

对于长度为 $2N$ 的序列 $x[k]$ 进行时间抽取, 即将其分解为两个长度 N 点的序列, 即

$$x_1[k] = x[2k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_2[k] = x[2k+1], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

其中, $x_1[k]$ 是序列 $x[k]$ 中的偶数点构成的序列, $x_2[k]$ 是序列 $x[k]$ 中的奇数点构成的序列。

分别利用 N 点 FFT 算法计算出序列 $x_1[k]$ 的 DFT $X_1[m]$ 和序列 $x_2[k]$ 的 DFT $X_2[m]$, 则序列 $x[k]$ 的 DFT $X[m]$ 可以由 $X_1[m]$ 和 $X_2[m]$ 表达为

$$X[m] = X_1[m] + W_N^m X_2[m]$$

$$X\left[m + \frac{N}{2}\right] = X_1[m] - W_N^m X_2[m] \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

从而可以由两次 N 点的 FFT 计算实现 $2N$ 点的 FFT。

如果序列 $x[k]$ 为实序列, 这两个 N 点的实序列 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 可以构成一个 N 点的复序列 $y[k] = x_1[k] + jx_2[k]$, 从而通过一次 N 点 FFT 就可以计算出相应的 $X_1[m]$ 和 $X_2[m]$ 。

如此类推, 可以利用两个 $2N$ 点 FFT 来实现一个 $4N$ 点的 FFT, 从而可以利用 N 点的 FFT 程序实现 $4N$ 点序列的 DFT 的计算。

3-12 已知某 4 点序列 $x[k]$ 的 DFT 为 $X[m] = \{1 + 2j, 2 + 3j, 3 + 4j, 4 + 5j\}$, 试由 FFT 计算 $X[m]$ 的 IDFT $x[k]$, 并通过 IFFT 验证计算结果。

解:

由于
$$x[k] = \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} X^*[m] W_N^{mk} \right)^*$$

故由 FFT 计算 N 点 $X[m]$ 的 IDFT $x[k]$ 的过程为

$$X[m] \rightarrow X^*[m] \rightarrow \text{FFT} \rightarrow Nx^*[k] \rightarrow x[k]$$

根据 $X[m]$ 可得 $X^*[m] = \{1 - 2j, 2 - 3j, 3 - 4j, 4 - 5j\}$

对 $X^*[m]$ 进行 FFT 可得 $4x^*[k] = \{10 - 14j, 4j, -2 + 2j, -4\}$

最后可得 $x[k] = \{2.5 + 3.5j, -j, -0.5 - 0.5j, -1\}$

通过对 $X[m]$ 直接进行 IDFT 可以求得序列 $x[k]$, 验证以上结果正确。

3-13 试推导基 4 频率抽取 FFT 算法, 并画出 16 点基 4 频率抽取 FFT 算法流程图。

解:

设序列 $x[k]$ 的长度为 $N = 4^M$, M 为正整数。

现将 $x[k]$ 按 k 的自然顺序依次分成四部分, 即

$$\begin{aligned} X[m] &= \text{DFT}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{km} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} x[k] W_N^{mk} + \sum_{k=\frac{N}{4}}^{\frac{N}{2}-1} x[k] W_N^{mk} + \sum_{k=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{4}-1} x[k] W_N^{mk} + \sum_{k=\frac{3N}{4}}^{N-1} x[k] W_N^{mk} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} \left\{ x[k] W_N^{mk} + x\left[k + \frac{N}{4}\right] W_N^{m\left(k+\frac{N}{4}\right)} + x\left[k + \frac{N}{2}\right] W_N^{m\left(k+\frac{N}{2}\right)} + \right. \\ &\quad \left. x\left[k + \frac{3N}{4}\right] W_N^{m\left(k+\frac{3N}{4}\right)} \right\} \end{aligned}$$

由于 $W_N^{\frac{mN}{4}} = e^{-j\frac{m\pi}{2}} = (-j)^m$, $W_N^{\frac{mN}{2}} = e^{-jm\pi} = (-1)^m$, $W_N^{\frac{3mN}{4}} = e^{-j\frac{3m\pi}{2}} = (j)^m$

分别令 $m = 4r, 4r+1, 4r+2, 4r+3$ ($r = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4}-1$), 上式 $X[m]$ 可表达为四组序列, 即

$$X[4r] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} \left(x[k] + x\left[k + \frac{N}{4}\right] + x\left[k + \frac{N}{2}\right] + x\left[k + \frac{3N}{4}\right] \right) W_N^{rk}$$

$$X[4r+1] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} \left(x[k] - jx\left[k + \frac{N}{4}\right] - x\left[k + \frac{N}{2}\right] + jx\left[k + \frac{3N}{4}\right] \right) W_N^k W_N^{rk}$$

$$X[4r+2] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} \left(x[k] - x\left[k + \frac{N}{4}\right] + x\left[k + \frac{N}{2}\right] - x\left[k + \frac{3N}{4}\right] \right) W_N^{2k} W_N^{rk}$$

$$X[4r+3] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} \left(x[k] + jx\left[k + \frac{N}{4}\right] - x\left[k + \frac{N}{2}\right] - jx\left[k + \frac{3N}{4}\right] \right) W_N^{3k} W_N^{rk}$$

若令序列 $x_1[k], x_2[k], x_3[k], x_4[k]$ 分别为

$$x_1[k] = x[k] + x\left[k + \frac{N}{4}\right] + x\left[k + \frac{N}{2}\right] + x\left[k + \frac{3N}{4}\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

$$x_2[k] = \left(x[k] - jx\left[k + \frac{N}{4}\right] - x\left[k + \frac{N}{2}\right] + jx\left[k + \frac{3N}{4}\right] \right) W_N^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

$$x_3[k] = \left(x[k] - x\left[k + \frac{N}{4}\right] + x\left[k + \frac{N}{2}\right] - x\left[k + \frac{3N}{4}\right] \right) W_N^{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

$$x_4[k] = \left(x[k] + jx\left[k + \frac{N}{4}\right] - x\left[k + \frac{N}{2}\right] - jx\left[k + \frac{3N}{4}\right] \right) W_N^{3k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

若将序列 $x[k]$ 按上式分解为 4 个子序列 $x_1[k], x_2[k], x_3[k], x_4[k]$, 则 4 个子序列 $x_1[k], x_2[k], x_3[k], x_4[k]$ 的 DFT 分别对应 $X[m]$ 的 $X[4m], X[4m+1], X[4m+2], X[4m+3]$ 。

序列 $x_1[k], x_2[k], x_3[k], x_4[k]$ 可表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \\ x_4[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_N^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_N^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_N^{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ x\left[k + \frac{N}{4}\right] \\ x\left[k + \frac{N}{2}\right] \\ x\left[k + \frac{3N}{4}\right] \end{bmatrix}$$

上式运算关系可用蝶形运算表示,如图 3-12 所示,这是基 4 频率抽取 FFT 运算的基本单元(右图为简化图)。

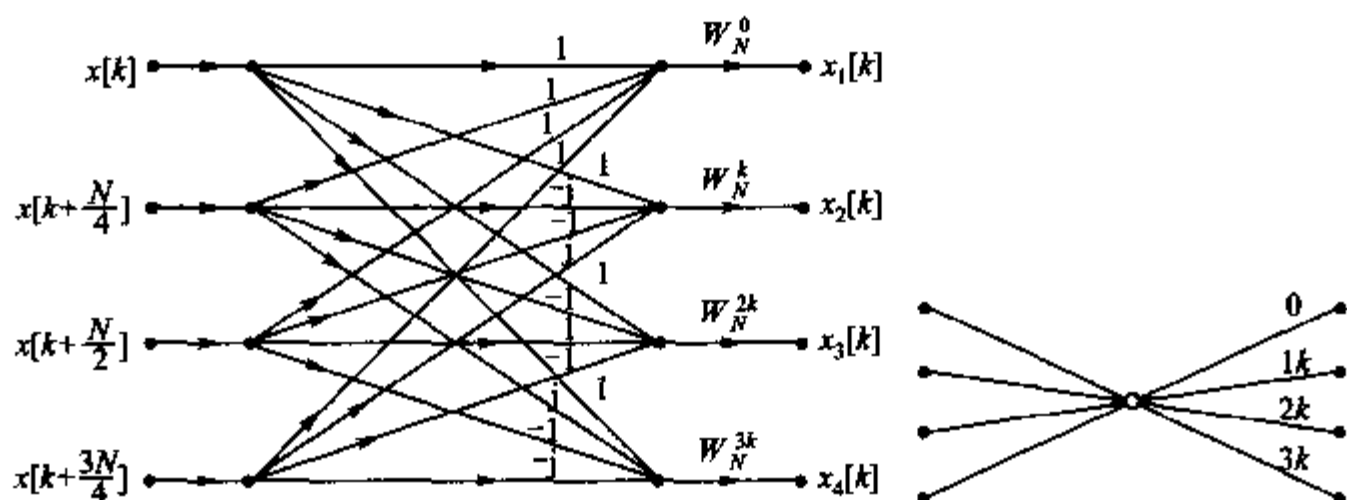


图 3-12 基 4 频率抽取 FFT 运算的基本单元

根据基 4 频率抽取 FFT 运算的基本单元, $N = 16 = 4^2$ 点的基 4 频率抽取 FFT 算法流图如图 3-13 所示。

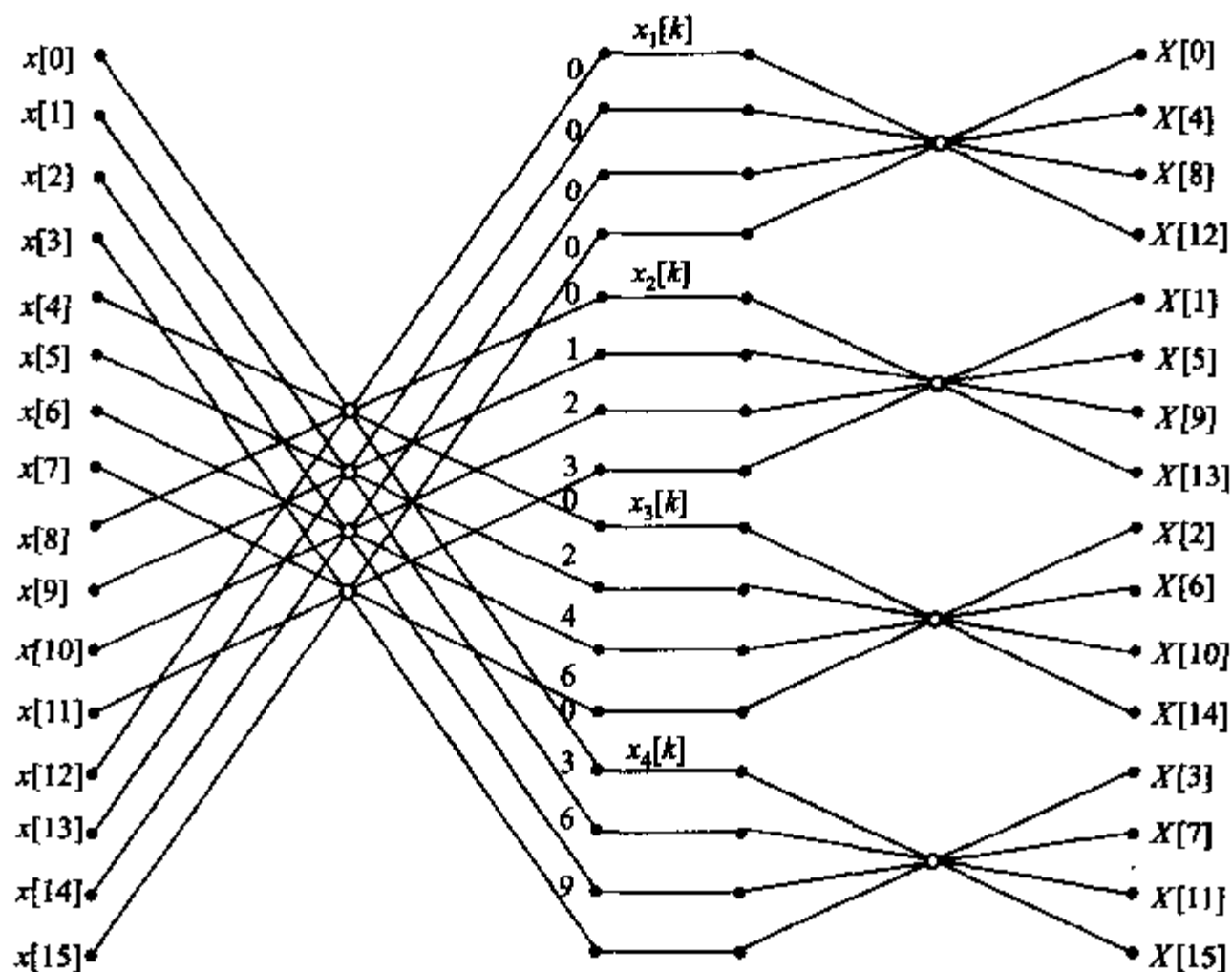


图 3-13 16 点基 4 频率抽取 FFT 算法流图

第4章

IIR 数字滤波器的设计

4.1 基本知识 with 重要公式

数字滤波器设计的目标是求解满足设计指标的离散系统的系统函数 $H(z)$, IIR 数字滤波器的设计思想是通过模拟滤波器来设计相应的数字滤波器,其基本方法是先将数字滤波器技术指标转换为对应的模拟滤波器技术指标,然后设计满足技术指标的模拟滤波器 $H(s)$,再将模拟滤波器 $H(s)$ 转换为对应的数字滤波器 $H(z)$ 。因此,在 IIR 数字滤波器设计中,模拟滤波器设计是基础,模拟滤波器到数字滤波器的转换是核心。模拟滤波器的设计都是通过设计模拟低通滤波器而实现,比较常用的模拟低通滤波器有 Butterworth(巴特沃思)和 Chebyshev(切比雪夫)等,将模拟滤波器变换为数字滤波器的方法有脉冲响应不变法和双线性变换法。

1. 模拟低通滤波器设计

在设计滤波器时需要给出滤波器的技术指标。模拟滤波器的技术指标有通带截频 ω_p ,通带最大衰减 A_p ,阻带截频 ω_s ,阻带最小衰减 A_s 。滤波器的衰减特性与滤波器幅度响应的关系为

$$A(j\omega) = -10\lg |H(j\omega)|^2 = -20\lg |H(j\omega)| \quad (\text{dB}) \quad (4-1)$$

模拟滤波器设计以模拟低通滤波器为基础。首先将模拟非低通滤波器的技术指标转换为模拟低通滤波器的技术指标,然后设计模拟低通滤波器 $H_L(s)$,最后将 $H_L(s)$ 转换为待设计模拟滤波器 $H(s)$ 。

(1) Butterworth 滤波器

N 阶 Butterworth 模拟低通滤波器幅度响应的模平方为

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad (4-2)$$

其中, N 为模拟滤波器阶数, ω_c 为 Butterworth 滤波器的 3 dB 截频, 因为 $-20\lg |H(j\omega_c)| \approx 3\text{dB}$ 。当 $\omega_c = 1$ 时, Butterworth 滤波器称为归一化的 Butterworth 滤波器, 记为 $H_{10}(s)$ 。

Butterworth 滤波器具有下列基本特性。

- ① $|H(j0)| = 1$, $|H(j\infty)| = 0$ 。
- ② 幅度响应随着 ω 的增加单调下降。
- ③ $|H(j\omega)|^2$ 在 $\omega = 0$ 处从 1 到 $2N - 1$ 阶导数为零, 即在 $\omega = 0$ 具有最大平坦性。

Butterworth 模拟低通滤波器的设计步骤。

- ① 确定滤波器的阶数 N 。

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)} \quad (4-3)$$

- ② 确定滤波器的 3 dB 截频 ω_c 。

$$\frac{\omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} \leq \omega_c \leq \frac{\omega_s}{(10^{0.1A_s} - 1)^{\frac{1}{2N}}} \quad (4-4)$$

- ③ 由 N 确定归一化 Butterworth 滤波器的 $H_{10}(s)$ 。

$$H_{10}(s) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{s - s_k}, \quad s_k = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4-5)$$

- ④ 由 ω_c 确定非归一化 Butterworth 滤波器的系统函数 $H_L(s)$ 。

$$H_L(s) = H_{10}\left(\frac{s}{\omega_c}\right) \quad (4-6)$$

常用的归一化 Butterworth 模拟滤波器的系统函数为

$$\text{1 阶} \quad H_{10}(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (4-7)$$

$$\text{2 阶} \quad H_{10}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (4-8)$$

$$\text{3 阶} \quad H_{10}(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)} \quad (4-9)$$

$$4 \text{ 阶} \quad H_{10}(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)} \quad (4-10)$$

(2) Chebyshev 滤波器

Chebyshev 滤波器有 CB Chebyshev I (CB I) 型和 Chebyshev II (CB II) 型滤波器两种。 N 阶 CB I 型模拟低通滤波器幅度响应的模方为

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \quad (4-11)$$

N 阶 CB II 型模拟低通滤波器的幅度响应的模方为

$$|H(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)} = \frac{\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)} \quad (4-12)$$

其中, N 是滤波器阶数, ε 和 ω_c 是低通滤波器的参数, $C_N(x)$ 是 N 阶 Chebyshev 多项式。当 $\omega_c = 1$ 时, 所得到的滤波器称为归一化的 Chebyshev 低通滤波器。

CB I 型和 CB II 型滤波器最大的区别是 CB I 型低通滤波器在通带等波纹波动, 参数 ε 控制通带波动, CB II 型低通滤波器在阻带等波纹波动, 参数 ε 控制阻带波动。

CB I 型低通滤波器的设计步骤:

① 由通带截频 ω_p 确定 ω_c 。

$$\omega_c = \omega_p \quad (4-13)$$

② 由通带衰减 A_p 确定 ε 。

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} \quad (4-14)$$

③ 由通带、阻带指标确定 N 。

$$N \geq \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \quad (4-15)$$

④ 由 N 、 ε 确定归一化 CB I 型低通滤波器的系统函数 $H_{10}(s)$ 。

$$H_{10}(s) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{s - s_k} \quad (4-16)$$

其中

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k, k = 1, 2, \dots, N \quad (4-17)$$

$$\sigma_k = -(\sinh \beta) \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right], \quad \omega_k = -(\cosh \beta) \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right],$$

$$\beta = \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{N}$$

⑤ 由 ω_c 确定非归一化 CB I 型低通滤波器的系统函数 $H_L(s)$ 。

$$H_L(s) = H_{L0}\left(\frac{s}{\omega_c}\right)$$

CB II 型低通滤波器的设计步骤:

① 由阻带截频 ω_s 确定 ω_c 。

$$\omega_c = \omega_s \quad (4-18)$$

② 由阻带衰减确定 ε 。

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{0.1A_s} - 1}} \quad (4-19)$$

③ 由通带、阻带指标确定 N 。

$$N \geq \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}}\right)}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \quad (4-20)$$

④ 由 N 、 ε 确定归一化 CB II 型低通滤波器的系统函数 $H_{L0}(s)$ 。

$$H_{L0}(s) = \prod_{k=1}^N \frac{s - z_k}{s - p_k} \quad (4-21)$$

其中

$$p_k = \frac{1}{s_k}, z_k = \frac{j}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)}, \quad k=1, 2, \dots, N$$

⑤ 由 ω_c 确定非归一化 CB II 型低通滤波器的系统函数 $H_L(s)$ 。

$$H_L(s) = H_{L0}\left(\frac{s}{\omega_c}\right)$$

2. 模拟域频率变换

模拟非低通滤波器的设计方法可通过模拟域频率变换实现,具体方法如下。

(1) 模拟高通滤波器的设计

① 由频率变换将高通滤波器频率指标转换为原型低通滤波器频率指标。

$$\bar{\omega}_p = \frac{\omega_0}{\omega_p}, \quad \bar{\omega}_s = \frac{\omega_0}{\omega_s} \quad (4-22)$$

其中 ω_0 是任意常数,为便于计算一般取 $\omega_0 = 1$ 。

② 设计满足指标 $\bar{\omega}_p, \bar{\omega}_s, A_p, A_s$ 的原型低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

③ 将原型低通滤波器转换为高通滤波器。

$$H_{HP}(s) = H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{\omega_0}{s}} \quad (4-23)$$

(2) 模拟带通滤波器的设计

① 根据带通滤波器通带的上、下截频确定通带宽度 B 和中心频率 ω_0 。

$$B = \omega_{p2} - \omega_{p1}, \omega_0^2 = \omega_{p1} \omega_{p2} \quad (4-24)$$

② 确定原型低通滤波器的阻带截频 $\bar{\omega}_s$ 。

$$\bar{\omega}_s = \min \{ |\bar{\omega}_{s1}|, |\bar{\omega}_{s2}| \} \quad (4-25)$$

式中

$$\bar{\omega}_{s1} = \frac{\omega_{s1}^2 - \omega_0^2}{B\omega_{s1}}, \bar{\omega}_{s2} = \frac{\omega_{s2}^2 - \omega_0^2}{B\omega_{s2}} \quad (4-26)$$

③ 设计通带截频为 $\bar{\omega}_p = 1$ rad/s、阻带截频为 $\bar{\omega}_s$ 、通带衰减为 A_p 、阻带衰减为 A_s 的原型低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

④ 将原型低通滤波器转换为带通滤波器。

$$H_{BP}(s) = H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}} \quad (4-27)$$

(3) 模拟带阻滤波器的设计

① 根据带阻滤波器的阻带上、下截频确定阻带宽度 B 和中心频率 ω_0 。

$$B = \omega_{s2} - \omega_{s1}, \omega_0^2 = \omega_{s1} \omega_{s2} \quad (4-28)$$

② 确定原型低通滤波器的通带截频 $\bar{\omega}_p$ 。

$$\bar{\omega}_p = \max \{ |\bar{\omega}_{p1}|, |\bar{\omega}_{p2}| \} \quad (4-29)$$

式中

$$\bar{\omega}_{p1} = \frac{B\omega_{p1}}{-\omega_{p1}^2 + \omega_0^2}, \bar{\omega}_{p2} = \frac{B\omega_{p2}}{-\omega_{p2}^2 + \omega_0^2} \quad (4-30)$$

③ 设计通带截频为 $\bar{\omega}_p$ (rad/s)、阻带截频为 $\bar{\omega}_s = 1$ (rad/s)、通带衰减为 A_p (dB)、阻带衰减为 A_s (dB) 的原型低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

④ 将原型低通滤波器转换为带阻滤波器。

$$H_{BS}(s) = H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}} \quad (4-31)$$

3. 脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器

脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器的基本思想是通过对模拟滤波器冲激响应 $h(t)$ 的等间隔抽样来获得数字滤波器的脉冲响应 $h[k] = h(t) \Big|_{t=kT}$, 其设计步骤如下:

① 利用模拟频率和数字频率的关系

$$\omega = \frac{\Omega}{T} \quad (4-32)$$

将数字滤波器的频率指标 $\{\Omega_k\}$ 转换为模拟滤波器的频率指标 $\{\omega_k\}$ 。

② 根据模拟滤波器的技术指标设计模拟滤波器的 $H(s)$ 。

③ 对 $H(s)$ 进行部分分式展开。若 $H(s)$ 的极点为单极点, 则可得

$$H(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s + p_i} \quad (4-33)$$

④ 确定数字滤波器的 $H(z)$ 。由式(4-33)可得

$$H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{TA_i}{1 - e^{-p_i T} z^{-1}} \quad (4-34)$$

脉冲响应不变法的优点是数字滤波器和模拟滤波器的频率关系是线性的; 其最大缺点是存在频谱的混叠, 因而不能直接用来设计高通、带阻等类型的数字滤波器。

4. 双线性变换法设计 IIR 数字滤波器

双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的基本思想是利用数值积分将模拟系统变换为数字系统, 其一般步骤如下:

① 由模拟频率和数字频率的关系

$$\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (4-35)$$

将数字滤波器的频率指标 $\{\Omega_k\}$ 转换为模拟滤波器的频率指标 $\{\omega_k\}$ 。

② 由模拟滤波器的指标设计模拟滤波器的 $H(s)$ 。

③ 用双线性变换将模拟滤波器 $H(s)$ 转换为数字滤波器 $H(z)$ 。

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (4-36)$$

双线性变换法避免了脉冲响应不变法中频谱的混叠, 但数字滤波器和模拟滤波器的频率关系是非线性的。由于频率关系非线性对设计幅度响应是分段线性的滤波器不会产生不良影响, 故在实际中得到了广泛的使用。

4.2 学习要求

1. 掌握 Butterworth 模拟低通滤波器的设计方法, 以及常用模拟低通滤波器的频域特性。
2. 掌握模拟域频率变换设计模拟高通、带通和带阻滤波器的基本方法。
3. 掌握脉冲响应不变法设计数字滤波器的基本思想和方法, 了解其局限性。

4. 掌握双线性变换法设计数字滤波器的基本原理及其特点。
5. 掌握设计 IIR 数字低通、高通、带通和带阻滤波器的主要步骤。

4.3 重点和难点提示

本章重点是将模拟滤波器转换为数字滤波器。IIR 数字滤波器的设计过程如下:

$$\{\Omega_p, \Omega_s\} \xrightarrow{\text{频率转换}} \{\omega_p, \omega_s\} \xrightarrow[\text{设计模拟滤波器}]{} H(s) \xrightarrow[\text{双线性变换法}]{\text{脉冲响应不变法}} H(z)$$

常用的模拟滤波器转换为数字滤波器的方法有脉冲响应不变法和双线性变换法。脉冲响应不变法的基本思想是使数字滤波器脉冲响应 $h[k]$ 等于模拟滤波器冲激响应 $h(t)$ 的抽样。在利用脉冲响应不变法时,数字频率与模拟频率的转换关系为 $\omega = \frac{\Omega}{T}$, $H(s)$ 到 $H(z)$ 的转换由式(4-34)实现。这种方法的优点是 ω

与 Ω 是线性关系,数字滤波器较好地保留了模拟滤波器的幅度响应,但存在频谱的混叠,因而不能直接用来设计高通、带阻等类型的数字滤波器。双线性变换法的基本思想是利用数值积分将模拟系统转换为数字系统。在利用双线性变换法时,数字频率与模拟频率的转换关系为 $\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$, $H(s)$ 到 $H(z)$ 的转换

由式(4-36)实现。双线性变换法避免了脉冲响应不变法中的频谱混叠,但模拟与数字频率关系是非线性关系,因而适用于幅度响应是分段线性的数字滤波器。

本章难点是模拟非低通滤波器的设计。设计模拟滤波器的过程如下:

$$\{\omega_p, \omega_s\} \xrightarrow{\text{频率变换}} \{\bar{\omega}_p, \bar{\omega}_s\} \xrightarrow[\text{低通滤波器}]{\text{设计原型}} H_L(\bar{s}) \xrightarrow{\text{复频率变换}} H(s)$$

显然,模拟滤波器的设计关键是模拟域频率变换和复频率变换。模拟域频率变换反映了高通、带通和带阻滤波器与低通滤波器之间的频率映射关系,具有清晰的物理概念。在模拟非低通滤波器的设计过程中,频率变换与复频率变换应一致,以保证设计过程正确。

4.4 思考题

1. IIR 数字滤波器能否设计成具有线性相位?为什么?
2. 如何利用数字微分器仿真实现模拟微分器?求出 s 域和 z 域之间的关系。

3. 脉冲响应不变法与双线性变换法各有何特性?
4. 利用脉冲响应不变法能否设计 IIR 数字高通或带阻滤波器?
5. 在设计 IIR 数字滤波器时,能否不通过模拟滤波器来设计数字滤波器?
6. IIR 数字滤波器的优缺点是什么?

4.5 习题精解

4-1 已知 Butterworth 滤波器的阶数由

$$N \geq \frac{\lg \left(\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right)}{2 \lg \left(\frac{\omega_p}{\omega_s} \right)}$$

确定。若 ω_c 由 $\frac{\omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} \leq \omega_c \leq \frac{\omega_s}{(10^{0.1A_s} - 1)^{\frac{1}{2N}}}$ 确定,试证明 Butterworth 滤波器在通带和阻带均满足技术指标。

证:

$$\omega_{c1} = \frac{\omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}}, \omega_{c2} = \frac{\omega_s}{(10^{0.1A_s} - 1)^{\frac{1}{2N}}}, \omega_{c1} \leq \omega_{c3} \leq \omega_{c2}$$

$$\text{记 } A(\omega; \omega_c) = -10 \lg |H(j\omega)|^2 = 10 \lg \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \right)$$

由上式可知, $A(\omega; \omega_c)$ 是关于变量 $\frac{\omega}{\omega_c}$ 的单调递增函数。由于 $A(\omega; \omega_c)$ 满足

$$A(\omega_p; \omega_{c1}) = A_p, A(\omega_s; \omega_{c1}) \geq A_s$$

$$A(\omega_p; \omega_{c2}) \leq A_p, A(\omega_s; \omega_{c2}) = A_s$$

且存在 $\omega_{c1} \leq \omega_{c3}$, 所以

$$\frac{\omega_p}{\omega_{c3}} \leq \frac{\omega_p}{\omega_{c1}}$$

由 $A(\omega; \omega_c)$ 的单调递增特性及 $A(\omega_p; \omega_{c1}) = A_p$ 可得

$$A(\omega_p; \omega_{c3}) \leq A_p$$

由于 $\omega_{c3} \leq \omega_{c2}$, 所以

$$\frac{\omega_s}{\omega_{c2}} \leq \frac{\omega_s}{\omega_{c3}}$$

由 $A(\omega; \omega_c)$ 的单调递增特性及 $A(\omega_s; \omega_{c2}) = A_s$ 可得

$$A(\omega_s; \omega_{c3}) \geq A_s$$

4-2 试利用 Butterworth 滤波器, 设计一个满足下列条件的模拟低通滤波器。

$$\begin{cases} 0.8 \geq |H(j\omega)| \geq 1 & 0 \leq \omega \leq 5 \text{ rad/s} \\ |H(j\omega)| \geq 0.1 & \omega \geq 10 \text{ rad/s} \end{cases}$$

解:

(1) 模拟低通滤波器的设计指标为

$$\omega_p = 5 \text{ rad/s}, \quad \omega_s = 10 \text{ rad/s}$$

$$A_p = -20\lg(0.8) = 1.94 \text{ dB}, \quad A_s = -20\lg(0.1) = 20.0 \text{ dB}$$

(2) 设计模拟低通滤波器

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)} \approx 3.7$$

选取 $N=4$ 。根据通带边界确定 Butterworth 滤波器的 3 dB 截频 ω_c 为

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} = 5.37 \text{ rad/s}$$

4 阶 Butterworth 滤波器的系统函数一般形式为

$$H(s) = \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 0.7654\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1\right]\left[\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 1.8478\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1\right]}$$

将 ω_c 代入上式可得

$$H(s) = \frac{833.3025}{(s^2 + 4.1123s + 28.867)(s^2 + 9.9279s + 28.867)}$$

4-3 已知一模拟低通滤波器的技术指标为

$$f_p = 2.1 \text{ kHz}, \quad f_s = 8 \text{ kHz}, \quad A_p = 0.5 \text{ dB}, \quad A_s = 30 \text{ dB}$$

试分别确定用 Butterworth 滤波器和 CB I 型滤波器实现该指标所需的阶数。

解:

Butterworth 滤波器

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)} \approx 3.37$$

取 $N_{BW} = 4$ 。

CB I 型滤波器

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.3493$$

$$\operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} \right)$$

$$N \geq \frac{\varepsilon}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \approx 2.58$$

取 $N_{CB} = 3$ 。

4-4 试用 Chebyshev I 型滤波器, 重做题 4-2。

解:

由题所给条件得

$$\omega_c = \omega_p = 5 \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{0.8^2} - 1} = 0.75$$

$$N = \frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{0.01} - 1} \right)}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{10}{5} \right)} \approx 2.5$$

选取 $N = 3$, 则有

$$\beta = \frac{\operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{N} = 0.3662$$

$$\sigma_1 = -(\sinh \beta) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = -0.1872$$

$$\omega_1 = -(\cosh \beta) \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = -0.9274$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\sinh \beta}{\frac{s}{5} + \sinh \beta} \times \frac{\sigma_1^2 + \omega_1^2}{\left(\frac{s}{5} \right)^2 - 2\sigma_1 \left(\frac{s}{5} \right) + (\sigma_1^2 + \omega_1^2)} \\ &= \frac{41.6667}{(s + 1.8722)(s^2 + 1.8722s + 22.2552)} \\ &= \frac{41.6667}{s^3 + 3.7444s^2 + 25.7604s + 41.6667} \end{aligned}$$

由此可见,实现同样指标的滤波器,Chebyshev I 型比 Butterworth 滤波器阶数通常要低。

4-5 已知 $H(s)$ 为 CB I 型低通滤波器,且

$$N = 3, \quad \omega_p = 3 \text{ rad/s}, \quad \omega_s = 10 \text{ rad/s}, \quad \delta_s = 0.01$$

该滤波器在阻带正好满足指标。试确定用实系数有理多项式表示的 $H(s)$ 。

解:

(1) 由通带截频 ω_p 确定 ω_c

$$\omega_c = \omega_p = 3 \text{ rad/s}$$

(2) 由阻带波动确定 ε

$$\text{由} \quad \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cosh^2 \left[N \operatorname{arccosh} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right]} = \delta_s^2$$

$$\text{得} \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{\delta_s^2} - 1}}{\cosh \left[N \operatorname{arccosh} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right]} = 0.7238$$

(3) 确定 3 阶 CB I 型低通滤波器的 $H(s)$

$$H(s) = \frac{\omega_c^3 \sinh \beta}{s + \omega_c \sinh \beta} \times \frac{\sigma_1^2 + \omega_1^2}{s^2 - 2\sigma_1 \omega_c s + \omega_c^2 (\sigma_1^2 + \omega_1^2)}$$

其中

$$\beta = \frac{\operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{3} = 0.3757$$

$$\sigma_1 = -(\sinh \beta) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = -0.1923$$

$$\omega_1 = -(\cosh \beta) \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = -0.9279$$

所以

$$H(s) = \frac{9.3255}{s^3 + 2.3078s^2 + 9.4131s + 9.3255}$$

4-6 试利用 Butterworth 滤波器设计通带 1 dB 截频 $\omega_p = 5 \text{ rad/s}$ 的 3 阶模拟高通滤波器。

解:

将高通滤波器通带截频转换为低通滤波器通带截频,得

$$\bar{\omega}_p = \frac{1}{\omega_p} = \frac{1}{5} \text{ rad/s}$$

Butterworth 低通滤波器的 3 dB 截频 ω_c 为

$$\omega_c = \frac{\bar{\omega}_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} = 0.2505 \text{ rad/s}$$

满足条件的原型低通滤波器为

$$H_L(\bar{s}) = \frac{\omega_c^3}{(\bar{s} + \omega_c)(\bar{s}^2 + \omega_c \bar{s} + \omega_c^2)} = \frac{0.0157}{\bar{s}^3 + 0.501\bar{s}^2 + 0.1255\bar{s} + 0.0157}$$

由复频率变换得高通滤波器

$$H_{HP}(s) = H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=\frac{1}{s}} = \frac{s^3}{s^3 + 7.9835s^2 + 31.8658s + 63.6059}$$

4-7 直接计算幅度响应的模方,证明

$$H_{BP}(s) = \frac{Bs}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$$

是一个中心频率为 ω_0 ($|H_{BP}(j\omega_0)| = 1$), 通带 3 dB 带宽为 B 的带通滤波器。

证:

$$|H_{BP}(j\omega)|^2 = \frac{B^2\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + B^2\omega^2}$$

由上式可知

$$|H_{BP}(j\omega)|^2 \leq 1$$

在 $\omega = \pm\omega_0$ 时, $|H_{BP}(j\omega)|^2$ 达到最大值 1, 即

$$|H_{BP}(j\omega_0)| = 1$$

由 $|H_{BP}(j\omega)|^2 = \frac{1}{2}$ 得

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = B^2\omega^2$$

设 $\omega > 0, \omega > \omega_0$ 则有

$$\omega^2 - B\omega - \omega_0^2 = 0$$

解方程可得

$$\omega_{p2} = \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \omega_0^2}$$

设 $\omega > 0, \omega < \omega_0$ 则有

$$\omega^2 + B\omega - \omega_0^2 = 0$$

解方程得

$$\omega_{p1} = -\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \omega_0^2}$$

所以带通滤波器 3 dB 带宽 B 为

$$\Delta\omega_{3\text{ dB}} = \omega_{p2} - \omega_{p1} = B$$

4-8 直接计算幅度响应的模方,证明

$$H_{BS}(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$$

是一个中心频率为 ω_0 ($|H_{BS}(j\omega_0)| = 0$), 阻带 3 dB 带宽为 B 的带阻滤波器。

证:

$$|H_{BS}(j\omega)|^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + B^2\omega^2}$$

由上式可知

$$0 \leq |H_{BS}(j\omega)|^2 \leq 1$$

在 $\omega = \pm\omega_0$ 时, $|H_{BS}(j\omega)|^2$ 达到最小值 0, 即

$$|H_{BS}(j\omega_0)| = 0$$

由 $|H_{BS}(j\omega)|^2 = \frac{1}{2}$ 得

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = B^2\omega^2$$

设 $\omega > 0, \omega > \omega_0$, 则有

$$\omega^2 - B\omega - \omega_0^2 = 0$$

解方程得

$$\omega_{p2} = \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \omega_0^2}$$

设 $\omega > 0, \omega < \omega_0$, 则有

$$\omega^2 + B\omega - \omega_0^2 = 0$$

解方程得

$$\omega_{p1} = -\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \omega_0^2}$$

带阻滤波器的 3 dB 带宽 B 为

$$\Delta\omega_{3\text{ dB}} = \omega_{p2} - \omega_{p1} = B$$

4-9 有人提出了以下一种设计模拟带阻滤波器的方法。

(1) 由 $B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$ 、 $\omega_0^2 = \omega_{p1}\omega_{p2}$ 确定变换参数。

(2) 原型低通滤波器的阻带截频 $\bar{\omega}_s$ 为

$$\bar{\omega}_s = \min \{ |\bar{\omega}_{s1}|, |\bar{\omega}_{s2}| \}$$

其中

$$\bar{\omega}_{s1} = \frac{B\omega_{s1}}{-\omega_{s1}^2 + \omega_0^2}, \bar{\omega}_{s2} = \frac{B\omega_{s2}}{-\omega_{s2}^2 + \omega_0^2}$$

(3) 设计通带截频为 1 rad/s、阻带截频为 $\bar{\omega}_s$ 、通带衰减为 A_p 、阻带衰减为 A_s 的原型低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

(4) 由低通到带通变换获得带阻滤波器。

用上述步骤,设计满足指标 $A_p \leq 1$ dB, $A_s \geq 10$ dB, $\omega_{p1} = 6$ rad/s, $\omega_{p2} = 13$ rad/s, $\omega_{s1} = 9$ rad/s, $\omega_{s2} = 11$ rad/s 的带阻滤波器,画出滤波器的幅度响应曲线,并分析和讨论所出现的问题。

解:

(1) 带阻到低通频率变换中的参数为

$$B = \omega_{p2} - \omega_{p1} = 7 \text{ rad/s}, \omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}} = 8.8318 \text{ rad/s}$$

(2) 根据频率变换得低通滤波器阻带边界频率为

$$\bar{\omega}_{s1} = \frac{B\omega_{s1}}{-\omega_{s1}^2 + \omega_0^2} = -21 \text{ rad/s}, \bar{\omega}_{s2} = \frac{B\omega_{s2}}{-\omega_{s2}^2 + \omega_0^2} \approx -1.7907 \text{ rad/s}$$

$$\text{选取 } \bar{\omega}_s = \min \{ |\bar{\omega}_{s1}|, |\bar{\omega}_{s2}| \} = 1.7907 \text{ rad/s}$$

(3) 由

$$[N, wc] = \text{buttord}(1, ws_bar, Ap, As, 's');$$

$$[num, den] = \text{butter}(N, wc, 's');$$

得原型低通滤波器的分子多项式系数 num 与分母多项式系数 den 分别为

$$\text{num} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3.4274]$$

$$\text{den} = [1.0000 \quad 3.5555 \quad 6.3208 \quad 6.5824 \quad 3.4274]$$

(4) 由

$$[numt, dent] = \text{lp2bs}(num, den, w0, B);$$

得带阻滤波器分子多项式系数 numt 与分母多项式系数 dent 分别为

$$\begin{aligned} \text{numt} = & [1.0000e+000 \quad 1.7830e-014 \quad 3.1200e+002 \quad 3.6258e-012 \\ & 3.6504e+004 \quad 2.3634e-010 \quad 1.8982e+006 \quad 4.6565e-009 \\ & 3.7015e+007] \end{aligned}$$

$$\text{dent} = [1.0000\text{e} + 000 \quad 1.3444\text{e} + 001 \quad 4.0237\text{e} + 002 \quad 3.5016\text{e} + 003 \\ 5.1302\text{e} + 004 \quad 2.7313\text{e} + 005 \quad 2.4480\text{e} + 006 \quad 6.3797\text{e} + 006 \\ 3.7015\text{e} + 007]$$

图 4-1 画出了该滤波器的增益响应曲线。由图可知,所设计的滤波器满足设计指标。但该方法存在以下不足:由于选择了通带截频作为变换的参数,使得带阻滤波器中心频率 ω_0 不在阻带 $[\omega_{s1}, \omega_{s2}]$ 范围内,且滤波器的阶数较高。

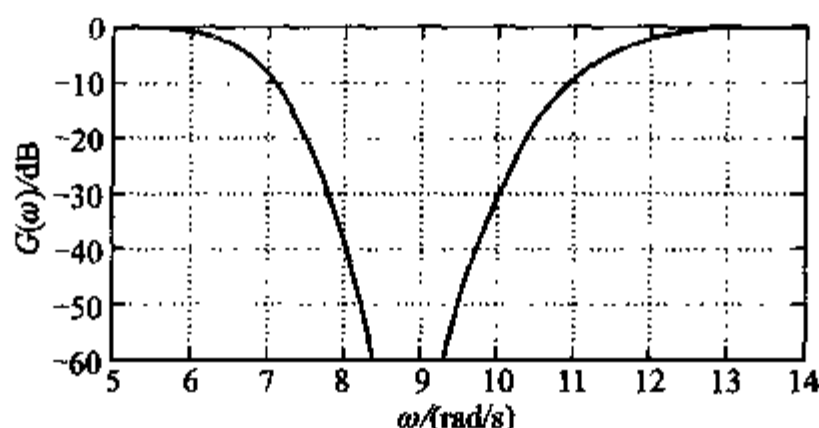


图 4-1 题 4-9 所设计的带阻滤波器的增益响应

4-10 为获取数字音乐信号,用 48 kHz 对模拟信号进行抽样。为了减少混叠,在抽样前用模拟抗混叠滤波器进行滤波。滤波器的指标为

$$f_p = 19 \text{ kHz}, \quad f_s = 24 \text{ kHz}, \quad \delta_p = 0.05, \quad \delta_s = 10^{-4}$$

由于音乐信号的能量是随频率的增加而衰减的,所以要求抗混叠滤波器在通带的幅度响应是单调下降的。试判断可用的滤波器类型,并确定滤波器的参数 (N, ω_c) 。

解:

根据模拟低通滤波器的幅度响应,可选用 Butterworth 或 CB II 型滤波器。

$$A_p = -20 \lg(1 - \delta_p) = 0.4455 \text{ dB}$$

$$A_s = -20 \lg(\delta_s) = 80.0 \text{ dB}$$

Butterworth 滤波器

$$N \geq \frac{\lg \left(\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \right)}{2 \lg \left(\frac{\omega_p}{\omega_s} \right)} \approx 44.2$$

选取 $N_{BW} = 45$ 。

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N_{BW}}}} \approx 1.2242 \times 10^5 \text{ rad/s}$$

CB II 型滤波器

$$\omega_c = \omega_s = 24 \times 10^3 \times 2\pi \text{ rad/s} = 4.8\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{0.1A_p} - 1}} = 10^{-4}$$

$$N \geq \frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}} \right)}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \approx 15.5$$

选取 $N_{CB} = 16$ 。

4-11 利用脉冲响应不变法,将下列模拟滤波器转换为数字滤波器,设 $T = 2 \text{ s}$ 。

$$(1) H_1(s) = \frac{\lambda}{(s + \beta)^2 + \lambda^2}$$

$$(2) H_2(s) = \frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 + \lambda^2}$$

$$(3) H_3(s) = \frac{Cs + D}{(s + \beta)^2 + \lambda^2}$$

解:

(1) 由部分分式展开可得

$$\frac{\lambda}{(s + \beta)^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s + \beta - j\lambda} - \frac{1}{s + \beta + j\lambda} \right)$$

由于存在

$$\frac{1}{s + p_i} \longrightarrow \frac{1}{1 - e^{-p_i T} z^{-1}}$$

因此可得

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{T}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{-(\beta + j\lambda)T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-(\beta - j\lambda)T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{T e^{-\beta T} \sin(\lambda T) z^{-1}}{1 - 2e^{-\beta T} \cos(\lambda T) z^{-1} + e^{-2\beta T} z^{-2}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + \beta - j\lambda} + \frac{1}{s + \beta + j\lambda} \right)$$

$$H_2(z) = \frac{T}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-(\beta + j\lambda)T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-(\beta - j\lambda)T} z^{-1}} \right)$$

$$= \frac{T[1 - e^{-\beta T} \cos(\lambda T) z^{-1}]}{1 - 2e^{-\beta T} \cos(\lambda T) z^{-1} + e^{-2\beta T} z^{-2}}$$

(3) 由于

$$H_3(s) = \frac{C(s + \beta) + (D - \beta C)}{(s + \beta)^2 + \lambda^2} = CH_2(s) + \frac{(D - \beta C)}{\lambda} H_1(s)$$

利用(1)和(2)的结论可得

$$H_3(z) = CH_2(z) + [(D - \beta C)/\lambda] H_1(z)$$

$$\begin{aligned} & TC + Te^{-\beta T} \left[\frac{D - \beta C}{\lambda} \sin(\lambda T) - C \cos(\lambda T) \right] z^{-1} \\ &= \frac{TC + Te^{-\beta T} \left[\frac{D - \beta C}{\lambda} \sin(\lambda T) - C \cos(\lambda T) \right] z^{-1}}{1 - 2e^{-\beta T} \cos(\lambda T) z^{-1} + e^{-2\beta T} z^{-2}} \end{aligned}$$

4-12 利用脉冲响应不变法,将下列模拟滤波器转换为数字滤波器,设 $T = 1$ s。

$$(1) H_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$(2) H_2(s) = \frac{s+1}{(s+0.1)^2 + 9}$$

$$(3) H_3(s) = \frac{3s^2 + 4}{(s+2)\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}$$

解:

$$(1) H_1(s) = \frac{0.5}{s+1} + \frac{0.5}{s+3}$$

$$H_1(z) = \frac{0.5}{1 - e^{-1} z^{-1}} + \frac{0.5}{1 - e^{-3} z^{-1}} = \frac{1 - 0.2088 z^{-1}}{1 - 0.4177 z^{-1} + 0.0183 z^{-2}}$$

$$(2) H_2(s) = \frac{0.3 \times 3}{(s+0.1)^2 + 9} + \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2 + 9}$$

由题4-11(1)和(2)结论可得

$$H_2(z) = \frac{1 + e^{-0.1}(0.3 \sin 3 - \cos 3) z^{-1}}{1 - 2e^{-0.1}(\cos 3) z^{-1} + e^{-0.2} z^{-2}} = \frac{1 + 0.9341 z^{-1}}{1 + 1.7916 z^{-1} + 0.8187 z^{-2}}$$

$$(3) H_3(s) = \frac{\frac{64}{13}}{s+2} + \frac{\left(-\frac{25}{13}\right)s - \frac{14}{13}}{s^2 + s + \frac{5}{4}} = \frac{\frac{64}{13}}{s+2} + \frac{\left(-\frac{25}{13}\right)s - \frac{14}{13}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

由题4-11(3)结论可得

$$\begin{aligned}
 H_3(z) &= \frac{\frac{64}{13}}{1 - e^{-2}z^{-1}} + \frac{-\frac{25}{13} + e^{-0.5} \left[\left(-\frac{3}{16} \right) \sin 1 + \frac{25}{13} \cos 1 \right] z^{-1}}{1 - 2e^{-0.5}(\cos 1)z^{-1} + e^{-1}z^{-2}} \\
 &= \frac{4.9231}{1 - 0.1353z^{-1}} + \frac{-1.9231 + 0.5713z^{-1}}{1 - 0.6554z^{-1} + 0.3679z^{-2}} \\
 &= \frac{3 - 2.3951z^{-1} + 1.7338z^{-2}}{1 - 0.7908z^{-1} + 0.4566z^{-2} - 0.0498z^{-3}}
 \end{aligned}$$

4-13 利用模拟 Butterworth 低通滤波器和脉冲响应不变法,设计一个满足下列条件的数字低通滤波器。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |H(e^{j\Omega})| \leq 1 \quad 0 \leq \Omega \leq 0.2\pi$$

$$|H(e^{j\Omega})| \leq 0.2 \quad 0.6\pi \leq \Omega \leq \pi$$

解:

取 $T=1$ 。

(1) 模拟低通滤波器的设计指标为

$$\omega_p = \frac{\Omega_p}{T} = 0.2\pi \text{ rad/s}, \quad \omega_s = \frac{\Omega_s}{T} = 0.6\pi \text{ rad/s}$$

$$A_p = -20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.0 \text{ dB}, \quad A_s = -20\lg(0.2) = 13.98 \text{ dB}$$

(2) 设计模拟低通滤波器

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)} \approx 1.45$$

选取 $N=2$ 。由于在 ω_p 处衰减是 3 dB, 所以 ω_p 与 ω_s 恰好相等, 即 $\omega_c = \omega_p = 0.2\pi \text{ rad/s}$ 。

2 阶 Butterworth 低通滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1} = \frac{0.3948}{s^2 + 0.8886s + 0.3948} \\
 &= 0.8886 \frac{0.4443}{(s + 0.4443)^2 + 0.4443^2}
 \end{aligned}$$

(3) 利用脉冲响应不变法将模拟低通滤波器转换为数字低通滤波器

$$\begin{aligned}
 H(z) &= 0.888\ 6 \frac{e^{-0.444\ 3} (\sin 0.444\ 3) z^{-1}}{1 - 2e^{-0.444\ 3} (\cos 0.444\ 3) z^{-1} + e^{-0.888\ 6} z^{-2}} \\
 &= \frac{0.244\ 9 z^{-1}}{1 - 1.158\ 0 z^{-1} + 0.411\ 2 z^{-2}}
 \end{aligned}$$

4-14 利用 Chebyshev I 型滤波器,重做题 4-13。

解:

取 $T=1$ 。

(1) 模拟低通滤波器指标为

$$\omega_p = \frac{\Omega_p}{T} = 0.2\pi \text{ rad/s}, \omega_s = \frac{\Omega_s}{T} = 0.6\pi \text{ rad/s}$$

$$A_p = -20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.0 \text{ dB}, A_s = -20\lg(0.2) = 13.98 \text{ dB}$$

(2) 由通带截频 ω_p 确定 ω_c

$$\omega_c = \omega_p = 0.2\pi \text{ rad/s}$$

(3) 由通带衰减 A_p 确定 ε

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 1$$

(4) 由通带、阻带指标确定 N

$$N \geq \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = 1.288\ 7, \text{ 选取 } N = 2$$

(5) 设计模拟低通滤波器

$$\beta = \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{N} = 0.440\ 7$$

$$s_1 = -(\sinh \beta) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - j(\cosh \beta) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.321\ 8 - j0.776\ 9$$

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \frac{\omega_c^2 |s_1|^2}{s^2 - 2\sigma_1 \omega_c s + \omega_c^2 |s_1|^2} \approx \frac{0.197\ 4}{s^2 + 0.404\ 4s + 0.279\ 2}$$

(6) 利用脉冲响应不变法将模拟滤波器转换为数字滤波器

$$H(z) = \frac{0.159\ 4 z^{-1}}{1 - 1.443\ 1 z^{-1} + 0.667\ 4 z^{-2}}$$

4-15 设连续系统的单位冲激响应为 $h(t)$, 则由脉冲响应不变法确定的离散系统的单位脉冲响应为 $h[k] = Th(kT)$, 离散系统频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 与连续系统频率响应 $H(j\omega)$ 的关系为

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(j\frac{\Omega + 2\pi n}{T}\right) \quad (4-37)$$

(1) 当连续系统的 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{1}{s+p} \quad (4-38)$$

时, 由经典的脉冲响应不变法确定的离散系统的 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{T}{1 - e^{-pT}z^{-1}} \quad (4-39)$$

取 $T=p=1$, 试验证离散系统与连续系统频率响应的关系不满足式(4-37)。

(2) 由式(4-39)确定 $H(z)$ 不满足式(4-37) 是因为在推导式(4-39) 时假设了 $h(0)=1$ 。由于式(4-38)对应的 $h(t)$ 在 $t=0$ 时不连续, 故 $h(t)$ 在 $t=0$ 时的值应为 0.5。所以离散系统的 $h[k]$ 应修正为

$$h[k] = T(e^{-pkT} - 0.5\delta[k])$$

试证明修正后的离散系统的 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + e^{-pT}z^{-1}}{1 - e^{-pT}z^{-1}}$$

取 $T=p=1$, 试验证修正后的离散系统与连续系统频率响应的关系满足式(4-37)。

(3) 利用 Laplace 变换中的初值定理, 讨论在何种情况下需对脉冲响应不变法进行上述的修正。

解:

(1) 取 $T=p=1$ 。连续系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

由式(4-37)可得 $H_1(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j(\Omega + 2\pi n) + 1}$

由式(4-39)可得

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - e^{-1}z^{-1}}$$

图 4-2(a) 分别画出了 $|H_1(e^{j\Omega})|$ 与 $|H(e^{j\Omega})|$ 。由图可知, 离散系统与连续系统频率响应的关系不满足式(4-37)。

(2) 修正后离散系统的 $h[k]$ 为

$$h[k] = T(e^{-pT} - 0.5\delta[k])$$

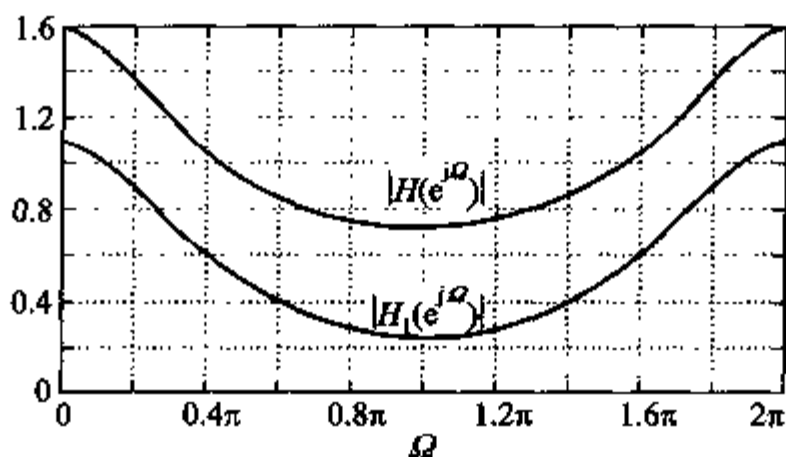
对上式进行 z 变换可得

$$\begin{aligned} H(z) &= T\left[\frac{1}{1 - e^{-pT}z^{-1}} - 0.5\right] = T\left[\frac{1 - 0.5(1 - e^{-pT}z^{-1})}{1 - e^{-pT}z^{-1}}\right] \\ &= \frac{T}{2}\left[\frac{1 + e^{-pT}z^{-1}}{1 - e^{-pT}z^{-1}}\right] \end{aligned}$$

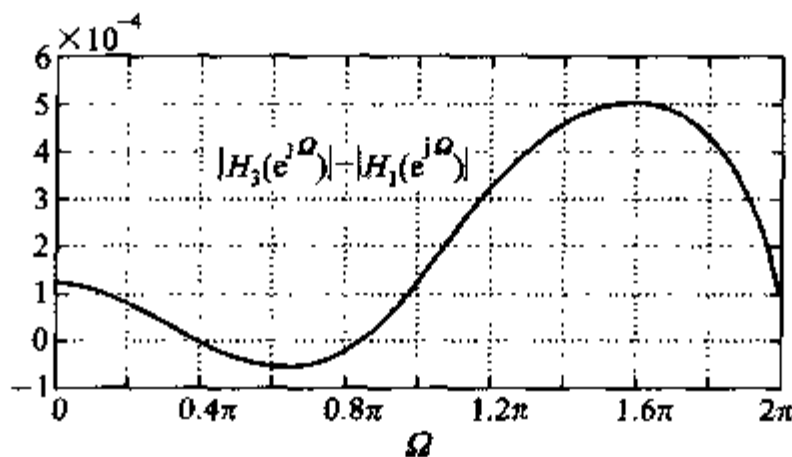
记上式表示的离散系统在 $T = p = 1$ 时频率响应为 $H_3(e^{j\Omega})$, 则有

$$H_3(e^{j\Omega}) = 0.5\left[\frac{1 + e^{-1}e^{-j\Omega}}{1 - e^{-1}e^{-j\Omega}}\right]$$

图 4-2(b) 画出了 $|H_3(e^{j\Omega})| - |H_1(e^{j\Omega})|$ 的曲线。由图可知, 误差的量级为 10^{-4} , 误差是在计算 $H_1(e^{j\Omega})$ 的无穷求和时产生的。这就验证了离散系统与连续系统频率响应的关系满足式(4-37)。



(a)



(b)

图 4-2 题 4-15 解答图

(3) 利用 Laplace 变换中的初值定理可知

$$h(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s)$$

如果 $H(s)$ 的分子多项式的阶数只比分母多项式的阶数低 1 阶, $h(0^+) \neq 0$, 这时需对脉冲响应不变法进行上述的修正。

如果 $H(s)$ 的分母多项式的阶数比分子多项式的阶数高于 1 阶, $h(0^+) = 0$, 这时不需进行上述的修正。

当 $H(s)$ 的分母多项式的阶数与分子多项式的阶数相等时, $h(t)$ 中将会有 $\delta(t)$, 这时不能应用脉冲响应不变法。

4-16 利用双线性变换法, 将下列模拟滤波器转换为数字滤波器, 设 $T=1$ s。

$$(1) H_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)}$$

$$(2) H_2(s) = \frac{2s}{s^2 + 0.2s + 1}$$

$$(3) H_3(s) = \frac{s^3}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

解:

$$\begin{aligned} (1) \quad H_1(z) &= H_1(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{2}{\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1\right)\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+4\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{9}(1+z^{-1})^2}{1-\frac{1}{9}z^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad H_2(z) &= H_2(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{4\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{4\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0.2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} \\ &= \frac{\frac{20}{27}(1-z^{-1})^2}{1-\frac{10}{9}z^{-1}+\frac{23}{27}z^{-2}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad H_3(z) = H_3(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\frac{8}{21}(1-z^{-1})^3}{1-\frac{25}{21}z^{-1}+\frac{5}{7}z^{-2}-\frac{1}{7}z^{-3}}$$

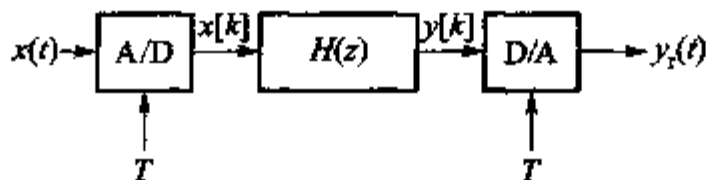
4-17 在实际中, 可以通过题 4-17 图所示系统来实现一个模拟滤波器。

设要实现的模拟低通滤波器 $H(s)$ 的指标为

$$f_p = 1.2 \text{ kHz}, \quad A_p \leq 3 \text{ dB}, \quad f_s = 2 \text{ kHz}, \quad A_s \geq 15 \text{ dB}$$

(1) 如果系统的抽样频率 $f_{\text{sam}} = 8 \text{ kHz}$, 试确定图中数字滤波器 $H(z)$ 的设计指标, 使得如图所示系统能和模拟低通滤波器 $H(s)$ 等价。

(2) 用双线性变换法, 分别设计满足(1)中指标的 BW 型和 CB I 型的数字低通滤波器。



题 4-17 图

解:

(1) 等效数字滤波器的频率指标

$$\Omega_p = \frac{2\pi f_p}{f_{\text{sam}}} = 0.3\pi \text{ rad} \quad \Omega_s = \frac{2\pi f_s}{f_{\text{sam}}} = 0.5\pi \text{ rad}$$

(2) 取 $T=2$, 则设计数字滤波器所需模拟滤波器频率指标为

$$\omega_p = \tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) = 0.5095 \text{ rad/s}, \quad \omega_s = \tan\left(\frac{\Omega_s}{2}\right) = 1 \text{ rad/s}$$

BW 型:

由于在 ω_p 处衰减是 3 dB, 故 ω_p 与 ω_c 恰好相等, 即 $\omega_c = \omega_p = 0.5095 \text{ rad/s}$

$$N \geq \frac{\lg(10^{0.1A_s} - 1)}{2\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)} \approx 2.5, \text{ 选取 } N = 3$$

$$\begin{aligned} H_{\text{BW}}(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1} \\ &= \frac{1}{s^3 + 1.0191s^2 + 0.5192s + 0.1323} \end{aligned}$$

由双线性变换得

$$H_{\text{BW}}(z) = \frac{0.0495(1+z^{-1})^3}{1 - 1.1619z^{-1} + 0.6959z^{-2} - 0.1378z^{-3}}$$

CB I 型:

$$\omega_c = \omega_p = 0.5095 \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 1$$

$$N \geq \frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} \right)}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)} \approx 1.8, \text{ 选取 } N = 2$$

$$H_{\text{CR}}(s) = \frac{0.1301}{s^2 + 0.3286s + 0.1838}$$

由双线性变换得

$$H_{\text{CR}}(z) = \frac{0.086(1+z^{-1})^2}{1-1.0794z^{-1}+0.5655z^{-2}}$$

4-18 利用 3 阶模拟 Butterworth 低通滤波器和双线性变换法, 设计一个通带衰减为 1 dB, 截止频率为 $\Omega_p = 0.5\pi \text{ rad}$ 的数字高通滤波器。

解:

为了方便计算, 整个设计过程选取 $T=2$ 。

根据双线性变换法中模拟频率与数字频率之间的关系, 可得模拟高通滤波器的截频 ω_p 为

$$\omega_p = \tan \left(\frac{\Omega_p}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1 \text{ rad/s}$$

根据模拟低通到模拟高通的频率变换关系 (取 $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$), 可得模拟低通滤波器的截频为

$$\bar{\omega}_p = \frac{\omega_0}{\omega_p} = \frac{1}{\omega_p} = 1 \text{ rad/s}$$

根据截频 $\bar{\omega}_p$ 和指定的滤波器阶数, 可得模拟 Butterworth 低通滤波器 3 dB 截频 ω_c 为

$$\omega_c = \frac{\bar{\omega}_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} = \frac{1}{(10^{0.1 \times 1} - 1)^{\frac{1}{6}}} = 1.2526 \text{ dB}$$

3 阶模拟 Butterworth 原型低通滤波器为

$$H_L(\bar{s}) = \frac{1}{\left(\frac{\bar{s}}{\omega_c} + 1 \right) \left(\frac{\bar{s}^2}{\omega_c^2} + \frac{\bar{s}}{\omega_c} + 1 \right)} = \frac{\omega_c^3}{(\bar{s} + \omega_c)(\bar{s}^2 + \omega_c \bar{s} + \omega_c^2)}$$

由低通到高通的复频率变换可得模拟高通滤波器为

$$H_{\text{HP}}(s) = H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=\frac{1}{s}} = \frac{\omega_c^3 s^3}{(\omega_c s + 1)(\omega_c^2 s^2 + \omega_c s + 1)}$$

由双线性变换可得数字高通滤波器为

$$H_{\text{HP}}(z) = H_{\text{HP}}(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ = \frac{0.2283 - 0.6849z^{-1} + 0.6849z^{-2} - 0.2283z^{-3}}{1.000 - 0.4099z^{-1} + 0.3779z^{-2} - 0.0386z^{-3}}$$

4-19 利用双线性变换法设计满足下列指标的 Butterworth 型数字带阻滤波器

$$\Omega_{p1} = 0.2\pi \text{ rad}, \quad \Omega_{p2} = 0.8\pi \text{ rad}, \quad \Omega_{s1} = 0.5\pi \text{ rad},$$

$$\Omega_{s2} = 0.6\pi \text{ rad}, A_p \leq 1 \text{ dB}, A_s \geq 26 \text{ dB}$$

解:

取双线性变换的参数 $T=2$ 。

(1) 由 $\omega = \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ 获得模拟带阻滤波器的频率指标为

$$\omega_{p1} = 0.3249 \text{ rad/s}, \omega_{p2} = 3.0777 \text{ rad/s},$$

$$\omega_{s1} = 1.000 \text{ rad/s}, \omega_{s2} = 1.3764 \text{ rad/s}$$

(2) 由模拟带阻滤波器的阻带上下截频确定低通到带阻频率变换式中的参数

$$B = \omega_{s2} - \omega_{s1} = 0.3764 \text{ rad/s}, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{s1}\omega_{s2}} = 1.1732 \text{ rad/s}$$

(3) 确定模拟低通滤波器通带截频

$$\bar{\omega}_{p1} = \frac{B\omega_{p1}}{-\omega_{p1}^2 + \omega_0^2} = 0.0962 \text{ rad/s},$$

$$\bar{\omega}_{p2} = \frac{B\omega_{p2}}{-\omega_{p2}^2 + \omega_0^2} = -0.1431 \text{ rad/s}$$

$$\bar{\omega}_p = \max\{|\bar{\omega}_{p1}|, |\bar{\omega}_{p2}|\} = 0.1431 \text{ rad/s}$$

(4) 设计满足指标 $\bar{\omega}_p = 0.1431 \text{ rad/s}$, $\bar{\omega}_s = 1 \text{ rad/s}$, $A_p \leq 1 \text{ dB}$, $A_s \geq 26 \text{ dB}$ 的 Butterworth 型模拟低通滤波器 $H_1(\bar{s})$ 。

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{2\lg(\bar{\omega}_p)} = 1.8864$$

选取 $N=2$

$$\omega_c = \frac{\omega_s}{(10^{0.1A_s} - 1)^{\frac{1}{2N}}} = 0.2240 \text{ rad/s}$$

$$H_L(\bar{s}) = \frac{\omega_c^2}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\omega_c\bar{s} + \omega_c^2} = \frac{0.0502}{\bar{s}^2 + 0.3168\bar{s} + 0.0502}$$

(5) 由复频率变换获得模拟带阻滤波器

$$\begin{aligned} H_{BS}(s) &= H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}} \\ &= \frac{s^4 + 2.7528s^2 + 1.8944}{s^4 + 2.3761s^3 + 5.5758s^2 + 3.2705s + 1.8944} \end{aligned}$$

(6) 由双线性变换获得数字带阻滤波器

$$\begin{aligned} H_{BS}(z) &= H_{BS}(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{0.4 + 0.2534z^{-1} + 0.8402z^{-2} + 0.2534z^{-3} + 0.4z^{-4}}{1 + 0.3801z^{-1} + 0.4403z^{-2} + 0.1267z^{-3} + 0.2z^{-4}} \end{aligned}$$

4-20 利用双线性变换法设计满足下列指标的 Butterworth 型数字带通滤波器

$$\Omega_{p1} = 0.25\pi \text{ rad}, \Omega_{p2} = 0.35\pi \text{ rad}, \Omega_{s1} = 0.2\pi \text{ rad},$$

$$\Omega_{s2} = 0.4\pi \text{ rad}, A_p \leq 1 \text{ dB}, A_s \geq 15 \text{ dB}$$

(要求设计出的 Butterworth 型数字滤波器写成 4 阶子式的积, 用阻带指标确定模拟 Butterworth 滤波器的 ω_c 。)

解:

取双线性变换的参数 $T=2$ 。

(1) 由 $\omega = \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ 获得模拟带通滤波器的频率指标为

$$\omega_{p2} = 0.6128 \text{ rad/s}, \omega_{p1} = 0.4142 \text{ rad/s},$$

$$\omega_{s1} = 0.3249 \text{ rad/s}, \omega_{s2} = 0.7265 \text{ rad/s}$$

(2) 由模拟带通滤波器的上下截频确定低通到带通变换式中的参数

$$B = \omega_{p2} - \omega_{p1} = 0.1986 \text{ rad/s}, \omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}} = 0.5038 \text{ rad/s}$$

(3) 确定模拟低通滤波器的阻带截频

$$\bar{\omega}_{s1} = \frac{\omega_{s1}^2 - \omega_0^2}{B\omega_{s1}} = -2.2977 \text{ rad/s}, \quad \bar{\omega}_{s2} = \frac{\omega_{s2}^2 - \omega_0^2}{B\omega_{s2}} = 1.8993 \text{ rad/s}$$

选取 $\bar{\omega}_s = \min\{|\bar{\omega}_{s1}|, |\bar{\omega}_{s2}|\} = 1.8993 \text{ rad/s}$

(4) 设计满足指标 $\bar{\omega}_p = 1 \text{ rad/s}, \bar{\omega}_s = 1.8993 \text{ rad/s}, A_p \leq 1 \text{ dB}, A_s \geq 15 \text{ dB}$ 的 Butterworth 型模拟低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

由 $[N, \omega_c] = \text{buttord}(1, \omega_s, A_p, A_s, 's')$; 可得模拟低通滤波器的

$$N = 4, \omega_c = 1.238 \text{ 3 rad/s}$$

由阶数 N 和 3 dB 截频 ω_c 可得 Butterworth 型模拟低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 为

$$H_L(\bar{s}) = \frac{1.533 \bar{s}^2}{(\bar{s}^2 + 0.947 \bar{s} + 1.533)(\bar{s}^2 + 2.288 \bar{s} + 1.533)}$$

(5) 由复频率变换可得模拟带通滤波器

$$\begin{aligned} H_{\text{BP}}(s) &= H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{B_s}} \\ &= \frac{0.060 \, 5 s^4}{(s^4 + 0.188 \, 2 s^3 + 0.568 \, 1 s^2 + 0.047 \, 8 s + 0.064 \, 4)} \times \\ &\quad \frac{1}{(s^4 + 0.454 \, 4 s^3 + 0.568 \, 1 s^2 + 0.115 \, 3 s + 0.064 \, 4)} \end{aligned}$$

(6) 由双线性变换可得数字带通滤波器

$$\begin{aligned} H_{\text{BP}}(z) &= \frac{0.032 \, 4 - 0.064 \, 7 z^{-2} + 0.032 \, 4 z^{-4}}{1 - 2.153 \, 1 z^{-1} + 2.809 \, 8 z^{-2} - 1.852 \, 4 z^{-3} + 0.747 \, 4 z^{-4}} \times \\ &\quad \frac{0.027 \, 5 - 0.054 \, 9 z^{-2} + 0.027 \, 5 z^{-4}}{1 - 2.007 \, 2 z^{-1} + 2.384 z^{-2} - 1.391 \, 4 z^{-3} + 0.482 \, 6 z^{-4}} \end{aligned}$$

第 5 章

FIR 数字滤波器的设计

5.1 基本知识与重要公式

IIR 数字滤波器能够实现在较低的阶数下获得较好的幅度响应,但其相位响应无法设计成线性特性。FIR 数字滤波器具有诸多特性:可以很容易地设计成线性相位,可以具有任意的幅度特性;单位脉冲响应有限长,系统总是稳定;任何非因果的 FIR 系统都能经过一定的延时变成果因果 FIR 系统等。本章重点介绍线性相位 FIR 滤波器的特性与设计,常用的 FIR 数字滤波器设计方法有窗口法、频率取样法和优化设计方法。

1. 线性相位 FIR 数字滤波器的特性

FIR 滤波器是指系统的单位脉冲响应 $h[k]$ 仅在有限范围内有非零值的滤波器。 M 阶 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$ 可表示为

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h[k]z^{-k} \quad (5-1)$$

$H(z)$ 是 z^{-1} 的 M 阶多项式,在有限 z 平面上 $H(z)$ 有 M 个零点,其 M 个极点都位于 z 平面原点 $z=0$ 处。

若离散系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 可以写为

$$H(e^{j\Omega}) = A(\Omega)e^{j(-\alpha\Omega+\beta)} \quad (5-2)$$

其中 α 和 β 是与 Ω 无关的常数, $A(\Omega)$ 是实函数,则称系统是线性相位系统。 $A(\Omega)$ 称为系统的幅度函数。

线性相位系统的时域特性

实系数 FIR 系统是线性相位的充要条件为

$$h[k] = \pm h[M - k] \quad (5-3)$$

由于按对称性 $h[k]$ 可分为偶对称和奇对称, 按阶数 $h[k]$ 又可有 M 为奇数和 M 为偶数, 所以线性相位 FIR 数字滤波器可以有四种类型。表 5-1 给出了四种类型线性相位系统的定义。

线性相位系统的频域特性

I 型线性相位滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j0.5M\Omega} A(\Omega) \quad (5-4)$$

其幅度函数 $A(\Omega)$ 为

$$A(\Omega) = h[L] + \sum_{k=1}^L 2h[L-k] \cos(k\Omega), L = \frac{M}{2} \quad (5-5)$$

II 型线性相位滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j0.5M\Omega} A(\Omega) \quad (5-6)$$

其幅度函数 $A(\Omega)$ 为

$$A(\Omega) = \sum_{k=0}^L 2h[L-k] \cos[(k+0.5)\Omega], L = \frac{M-1}{2} \quad (5-7)$$

III 型线性相位滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j(0.5M\Omega-0.5\pi)} A(\Omega) \quad (5-8)$$

其幅度函数 $A(\Omega)$ 为

$$A(\Omega) = \sum_{k=1}^L 2h[L-k] \sin(k\Omega), L = \frac{M}{2} \quad (5-9)$$

IV 型线性相位滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j(0.5M\Omega-0.5\pi)} A(\Omega) \quad (5-10)$$

其幅度函数 $A(\Omega)$ 为

$$A(\Omega) = \sum_{k=0}^L 2h[L-k] \sin[(k+0.5)\Omega], L = \frac{M-1}{2} \quad (5-11)$$

线性相位 FIR 滤波器频率响应一般形式可写为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{j(-0.5M\Omega+\beta)} A(\Omega) \quad (5-12)$$

对 I 型和 II 型线性相位 FIR 滤波器 $\beta=0$, 对 III 型和 IV 型线性相位 FIR 滤波器 $\beta=\frac{\pi}{2}$ 。表 5-1 总结了四种线性相位 FIR 滤波器的时域和频域特性。

表 5-1 四种线性相位 FIR 滤波器的性质

| 类型 | I | II | III | IV |
|----------------------------------|---------------------|--------|---------------------|-------------------------|
| 阶数 M | 偶数 | 奇数 | 偶数 | 奇数 |
| $h[k]$ 的对称性 | 偶对称 | 偶对称 | 奇对称 | 奇对称 |
| $A(\Omega)$ 关于 $\Omega=0$ 的对称性 | 偶对称 | 偶对称 | 奇对称 | 奇对称 |
| $A(\Omega)$ 关于 $\Omega=\pi$ 的对称性 | 偶对称 | 奇对称 | 奇对称 | 偶对称 |
| $A(\Omega)$ 的周期 | 2π | 4π | 2π | 4π |
| β | 0 | 0 | 0.5π | 0.5π |
| $A(0)$ | 任意 | 任意 | 0 | 0 |
| $A(\pi)$ | 任意 | 0 | 0 | 任意 |
| 可适用的滤波器类型 | LP, HP, BP, BS 等 | LP, BP | 微分器, Hilbert 变换器 | 微分器, Hilbert 变换器, HP |

线性相位系统的零点分布特性

实系数线性相位 FIR 滤波器零点一般是以 4 个一组的形式出现的, 即若 z_k 是 $H(z)$ 的零点, 则 z_k^* 、 $\frac{1}{z_k}$ 和 $\frac{1}{z_k^*}$ 也是 $H(z)$ 的零点。 $H(z)$ 在单位圆上和实轴上的零点是成对出现的, 在 $z_k = \pm 1$ 处的零点可以单独出现。只有 $z_k = 1$ 的零点对 $H(z)$ 贡献的因子为一个奇对称多项式, 所以奇对称线性相位系统在 $z_k = 1$ 的零点必是奇数阶的。

四种类型的线性相位系统在 $z_k = \pm 1$ 的零点特性如下。

- ① I 型 FIR 滤波器。在 $z_k = 1$ 和 $z_k = -1$ 无零点或者有偶数个零点。
- ② II 型 FIR 滤波器。在 $z_k = -1$ 有奇数个零点, 在 $z_k = 1$ 无零点或者有偶数个零点。
- ③ III 型 FIR 滤波器。在 $z_k = 1$ 和 $z_k = -1$ 有奇数个零点。
- ④ IV 型 FIR 滤波器。在 $z_k = 1$ 有奇数个零点, 在 $z_k = -1$ 无零点或者有偶数个零点。

2. 窗函数法设计 FIR 滤波器

窗函数法设计线性相位 FIR 数字滤波器的基本思想是, 根据待逼近的理想频率响应 $H_d(e^{j\Omega})$, 确定线性相位滤波器的类型, 并利用 IDTFT 求得单位脉冲响应 $h_d[k]$, 然后利用窗函数对它进行截短和平滑, 使系统成为物理可实现的线性相位 FIR 滤波器。设计步骤如下:

① 根据所需设计的滤波器的类型(低通、高通、带通、带阻等),确定线性相位滤波器的类型(I型、II型、III型、IV型)。

② 确定理想滤波器的幅度函数 $A_d(\Omega)$ 。

③ 确定理想滤波器的相位 $\phi_d(\Omega)$

$$\phi_d(\Omega) = -0.5M\Omega + \beta$$

对于 I 型和 II 型线性相位 FIR 滤波器 $\beta = 0$, 对于 III 型和 IV 型线性相位 FIR 滤波器 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 。

④ 对 $H_d(e^{j\Omega}) = A_d(\Omega)e^{j\phi_d(\Omega)}$ 进行 IDTFT 得 $h_d[k]$, 即

$$h_d[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_d(\Omega) e^{j\phi_d(\Omega)} e^{jk\Omega} d\Omega$$

⑤ 利用窗函数 $w[k]$ 将 $h_d[k]$ 截短得 FIR 滤波器 $h[k]$ 为

$$h[k] = h_d[k]w[k]$$

常用窗函数

矩形窗

$$w[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5-13)$$

Hann(汉纳)窗

$$w[k] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right) & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5-14)$$

Hamming(汉明)窗

$$w[k] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right) & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5-15)$$

Blackman(布莱克曼)窗

$$w[k] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi k}{M}\right) & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5-16)$$

Kaiser(凯泽)窗

$$w[k] = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2k}{M}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, 0 \leq k \leq M \quad (5-17)$$

Kaiser 窗设计 FIR 滤波器时,估计窗函数参数 β 及滤波器阶数 M 的经验公式为

$$A = -20\lg(\min\{\delta_p, \delta_s\})$$

$$\beta \approx \begin{cases} 0.1102(A - 8.7) & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & A < 21 \end{cases} \quad (5-18)$$

$$M \approx \frac{A - 7.95}{2.285 |\Omega_p - \Omega_s|}, \quad A > 21 \quad (5-19)$$

表 5-2 总结了常用窗函数的性质。在实际设计中,可由待设计的 FIR 数字滤波器阻带衰减或通带波动来确定窗函数的类型,由过渡带宽度估计窗函数的长度 $N(N = M + 1)$ 。

表 5-2 常用窗函数性质

| 窗的类型 | 主瓣宽度 | 近似过渡带宽度 | δ_p, δ_s | A_p/dB | A_s/dB |
|----------|-------------------|---------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| 矩形 | $\frac{4\pi}{N}$ | $\frac{1.8\pi}{N}$ | 0.09 | 0.82 | 21 |
| Hann | $\frac{8\pi}{N}$ | $\frac{6.2\pi}{N}$ | 0.0064 | 0.056 | 44 |
| Hamming | $\frac{8\pi}{N}$ | $\frac{7\pi}{N}$ | 0.0022 | 0.019 | 53 |
| Blackman | $\frac{12\pi}{N}$ | $\frac{11.4\pi}{N}$ | 0.0002 | 0.0017 | 74 |

3. 频率取样法设计线性相位 FIR 滤波器

频率取样法设计 FIR 数字滤波器的基本思想是:根据所需滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$,设计一个 M 阶的 FIR 滤波器 $h[k]$,使得在 $M + 1$ 个取样点 $\{\Omega_m = \frac{2\pi m}{(M+1)}, m = 0, 1, \dots, M\}$ 上, FIR 滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与 $H_d(e^{j\omega})$ 相等。频

率取样法设计实系数线性相位 FIR 滤波器的步骤如下:

① 根据所需设计的滤波器的类型(低通、高通、带通、带阻等),确定线性相位滤波器的类型(I型、II型、III型、IV型)。

② 获得 $H_d(e^{j\Omega}) = A_d(\Omega)e^{j(-0.5M\Omega+\beta)}$ 在 $\Omega \in [0, 2\pi)$ 区间的 $M+1$ 个取样点上的值 $H_d[m]$, 即

$$H_d[m] = A_d(\Omega)e^{j(-0.5M\Omega+\beta)} \Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{M+1}m} = e^{j\beta} e^{-j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(\frac{2\pi}{M+1}m\right) \quad (5-20)$$

对 I 型和 II 型线性相位滤波器 $\beta=0$, 对 III 型和 IV 型线性相位滤波器 $\beta=\frac{\pi}{2}$ 。在确定 $H_d[m]$ 的取值时,其前一半的值可由式(5-20)确定,后一半的值可利用实序列 DFT 的对称性 $H_d[m] = H_d^*[(M+1-m)]$ 得出。

③ 利用 IDFT 得到 $h[k]$ 为

$$h[k] = \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M H_d[m] W_{M+1}^{-mk}$$

在用频率取样法设计 FIR 滤波器时,若 $H_d(e^{j\Omega})$ 是理想滤波器,则所设计出的滤波器的幅度函数 $A(\Omega)$ 在通带的边界会出现过冲,在阻带会存在较大的波动。上述现象不会随着滤波器阶数 M 的增加而改善。为改善滤波器的幅度特性,可在通带和阻带的样本间增加幅度值非零的过渡样本点。过渡点的幅度值的大小将影响所设计出的滤波器性能。能使滤波器阻带衰减达到最大的过渡点幅度值称为最优值,最优值可通过优化算法或实验得出。

4. 线性相位 FIR 滤波器的优化设计

FIR 数字滤波器优化设计的基本思想是,在一定的误差准则下,设计线性相位 FIR 滤波器 $H(z)$,使得 $H(z)$ 所对应的幅度函数 $A(\Omega)$ 和理想滤波器的幅度函数 $D(\Omega)$ 的误差在 $\Omega \in [0, \pi]$ 区间上达到最小。常用的误差准则有以下几种。

最大最小误差准则(minimax criterion)或 Chebyshev 误差准则

$$\varepsilon = \max_{\Omega \in I} |W(\Omega)[A(\Omega) - D(\Omega)]| \quad (5-21)$$

加权积分平方误差准则

$$\varepsilon = \int_I [W(\Omega)(A(\Omega) - D(\Omega))]^2 d\Omega \quad (5-22)$$

加权离散平方误差准则

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^K [W(\Omega_m)(A(\Omega_m) - D(\Omega_m))]^2 \quad (5-23)$$

其中 $\{\Omega_m; m=1,2,\dots,K\}$ 是 K 个选定的频率取样点, $W(\Omega)$ 是加权函数。

根据不同的误差准则可以得到优化设计线性相位 FIR 数字滤波器的不同算法。Remez 算法是利用 Chebyshev 误差准则和数学优化中的 Remez 交替定理得到的一种优化算法, 这种方法设计出的 FIR 滤波器的幅度响应在通带和阻带都呈现等波纹的波动。

5.2 学习要求

1. 掌握线性相位 FIR 数字滤波器的时域和频域特性, 以及其零点分布规律。
2. 掌握窗函数法设计线性相位 FIR 数字滤波器的方法, 以及窗函数对设计结果的影响。
3. 理解频率取样法设计线性相位 FIR 数字滤波器的原理及方法。
4. 了解 FIR 数字滤波器优化设计的基本思想及基本方法。

5.3 重点和难点提示

本章重点是利用窗函数法和频率取样法设计 FIR 数字滤波器。窗函数法的设计过程是根据给定的频率响应, 利用 IDTFT 求得单位脉冲响应, 再利用窗函数对其进行截短和平滑, 设计出一个物理可实现的具有线性相位的 FIR 数字滤波器。频率取样法的设计过程是对给定的频率响应进行取样, 然后由 IDFT 直接求得 FIR 滤波器的脉冲响应 $h[k]$ 。在频率取样法中, 离散频谱点 $H_d[m]$ 的确定是关键。为使设计出的滤波器是实系数线性相位系统, 在确定 $H_d[m]$ 时需保证幅度响应 $A_d[m]$ 与相位响应 $\phi_d[m]$ 均满足线性相位条件。

本章难点是线性相位 FIR 数字滤波器的优化设计。FIR 数字滤波器优化设计的思想是, 在某种误差准则下, 使得设计出 FIR 滤波器与所要求的 FIR 滤波器之间的误差达到最小。应理解 FIR 滤波器优化设计的误差准则的数学概念和物理概念, 掌握等波纹 FIR 滤波器优化设计的基本方法。

5.4 思考题

1. 为什么 FIR 滤波器的设计不能像 IIR 那样采用间接法?
2. 为什么 FIR 滤波器能设计成线性相位?
3. 能否利用频率变换, 从 FIR 低通滤波器出发设计其他类型 FIR 滤波器? 为什么?

4. 窗函数法与频率取样法设计思想有何共同点与不同点?
5. 利用窗函数法设计 FIR 滤波器时,如何选择窗函数?
6. 利用窗函数法设计 FIR 滤波器时,选用固定参数的窗函数和可调参数的窗函数所设计的滤波器有何不同?
7. 在频率取样法设计中,如果阻带衰减不够,应采取什么措施?
8. 优化设计的基本思想是什么?与窗函数法和频率取样法相比有什么优点?

5.5 习题精解

5-1 设 $F_1(z)$ 是线性相位 FIR 系统函数 $H(z)$ 的一个因子。试确定满足条件的最低阶的 $H(z)$ 。

$$(1) F_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$(2) F_1(z) = 3 + 5z^{-1} - 4z^{-2} - 2z^{-3}$$

解:

由于线性相位 FIR 系统的零点互为倒数,故只需找出与因子 $F_1(z)$ 成倒数关系的零点即可求出要求的 $H(z)$ 。为避免计算零点,可利用以下的关系,设 $F_1(z)$ 是 z^{-1} 的 M 阶多项式,则零点为其倒数的 M 阶多项式 $F_2(z)$ 为

$$F_2(z) = z^{-M} F_1(z^{-1})$$

$$\begin{aligned} (1) \quad H(z) &= F_1(z) z^{-2} F_1(z^{-1}) \\ &= (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2})(3 + 2z^{-1} + z^{-2}) \\ &= 3 + 8z^{-1} + 14z^{-2} + 8z^{-3} + 3z^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad H(z) &= F_2(z) z^{-3} F_2(z^{-1}) \\ &= (3 + 5z^{-1} - 4z^{-2} - 2z^{-3})(-2 - 4z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3}) \\ &= -6 - 22z^{-1} + 3z^{-2} + 54z^{-3} + 3z^{-4} - 22z^{-5} - 6z^{-6} \end{aligned}$$

5-2 某 3 阶 FIR 滤波器的系统函数 $H_1(z)$ 为

$$H_1(z) = (6 - z^{-1} - 12z^{-2})(2 + 5z^{-1})$$

- (1) 试确定幅度响应和 $H_1(z)$ 相同的所有 FIR 滤波器的系统函数。
- (2) 上述 FIR 滤波器哪个是最大相位系统,哪个是最小相位系统?

解:

(1) 设 $H(z) = a + bz^{-1}$ 是一个实系数的 1 阶 FIR 系统,则 $H_0(z) = z^{-1}H(z^{-1}) = b + az^{-1}$ 是与 $H(z)$ 幅度响应相同、零点为 $H(z)$ 零点倒数的 FIR 系统。

将 $H_1(z)$ 改写为

$$\begin{aligned} H_1(z) &= (2 - 3z^{-1})(3 + 4z^{-1})(2 + 5z^{-1}) \\ &= 12 + 28z^{-1} - 29z^{-2} - 60z^{-3} \end{aligned}$$

下面的滤波器均与 $H_1(z)$ 具有相同的幅度响应。

$$\begin{aligned} H_2(z) &= (-3 + 2z^{-1})(3 + 4z^{-1})(2 + 5z^{-1}) \\ &= -18 - 57z^{-1} - 14z^{-2} + 40z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(z) &= (2 - 3z^{-1})(4 + 3z^{-1})(2 + 5z^{-1}) \\ &= 16 + 28z^{-1} - 48z^{-2} - 45z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4(z) &= (2 - 3z^{-1})(3 + 4z^{-1})(5 + 2z^{-1}) \\ &= 30 + 7z^{-1} - 62z^{-2} - 24z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_5(z) &= (-3 + 2z^{-1})(4 + 3z^{-1})(2 + 5z^{-1}) \\ &= -24 - 62z^{-1} + 7z^{-2} + 30z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_6(z) &= (2 - 3z^{-1})(4 + 3z^{-1})(5 + 2z^{-1}) \\ &= 40 - 14z^{-1} - 57z^{-2} - 18z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_7(z) &= (-3 + 2z^{-1})(3 + 4z^{-1})(5 + 2z^{-1}) \\ &= -45 - 48z^{-1} + 28z^{-2} + 16z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_8(z) &= (-3 + 2z^{-1})(4 + 3z^{-1})(5 + 2z^{-1}) \\ &= -60 - 29z^{-1} + 28z^{-2} + 12z^{-3} \end{aligned}$$

(2) 因为 $H_1(z)$ 的所有零点都在单位圆外, 所以 $H_1(z)$ 是最大相位系统。

因为 $H_8(z)$ 的所有零点都在单位圆内, 所以 $H_8(z)$ 是最小相位系统。

5-3 已知 8 阶 I 型线性相位 FIR 滤波器的部分零点为 $z_1 = 2, z_2 = j0.5, z_3 = j$ 。

(1) 试确定该滤波器的其他零点。

(2) 设 $h[0] = 1$, 求出该滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

解:

$$(1) z_4 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{2}$$

$$z_5 = \frac{1}{z_2} = -j2, z_6 = z_2^* = -j0.5, z_7 = z_3^* = j2$$

$$z_8 = \frac{1}{z_3} = -j$$

$$\begin{aligned} (2) H(z) &= \prod_{k=1}^8 (1 - z^{-1} z_k) \\ &= 1 + z^{-8} - 2.5(z^{-1} + z^{-7}) + 6.25(z^{-2} + z^{-6}) - \\ &\quad 13.125(z^{-3} + z^{-5}) + 10.5z^{-4} \end{aligned}$$

5-4 已知 9 阶 II 型线性相位 FIR 滤波器的部分零点为 $z_1 = 2, z_2 = j0.5, z_3 = -j$ 。

(1) 试确定该滤波器的其他零点。

(2) 设 $h[0] = 1$, 求出该滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

解:

$$(1) z_4 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{2}$$

$$z_5 = \frac{1}{z_2} = -j2, z_6 = z_2^* = -j0.5, z_7 = z_5^* = j2$$

$$z_8 = \frac{1}{z_3} = j$$

$$z_9 = -1$$

$$\begin{aligned} (2) H(z) &= \prod_{k=1}^9 (1 - z^{-1} z_k) \\ &= 1 + z^{-9} - 1.5(z^{-1} + z^{-8}) + 3.75(z^{-2} + z^{-7}) - \\ &\quad 6.875(z^{-3} + z^{-6}) - 2.625(z^{-4} + z^{-5}) \end{aligned}$$

5-5 已知 8 阶 III 型线性相位 FIR 滤波器的部分零点为 $z_1 = -0.2, z_2 = j0.8$ 。

(1) 试确定该滤波器的其他零点。

(2) 设 $h[0] = 1$, 求出该滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

解:

$$(1) z_3 = \frac{1}{z_1} = -5$$

$$z_4 = \frac{1}{z_2} = -j1.25, z_5 = z_2^* = -j0.8, z_6 = z_4^* = j1.25$$

$$z_7 = -1$$

$$z_8 = 1$$

$$\begin{aligned} (2) H(z) &= \prod_{k=1}^8 (1 - z^{-1} z_k) \\ &= 1 - z^{-8} + 5.2(z^{-1} - z^{-7}) + 2.2025(z^{-2} - z^{-6}) - 6.253(z^{-3} - z^{-5}) \end{aligned}$$

5-6 已知 9 阶 IV 型线性相位 FIR 滤波器的部分零点为 $z_1 = -1, z_2 = 0.8, z_3 = 0.5j$ 。

(1) 试确定该滤波器的其他零点。

(2) 设 $h[0] = 1$, 求出该滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

解:

$$(1) z_4 = \frac{1}{z_2} = 1.25$$

$$z_5 = \frac{1}{z_3} = -j2, z_6 = z_3^* = -j0.5, z_7 = z_5^* = j2$$

$$z_8 = z_1 = -1$$

$$z_9 = 1$$

$$\begin{aligned} (2) H(z) &= \prod_{k=1}^9 (1 - z^{-1} z_k) \\ &= 1 - z^{-9} - 1.05(z^{-1} - z^{-8}) + 2.2(z^{-2} - z^{-7}) - 2.4125(z^{-3} - z^{-6}) - \\ &\quad 6.6625(z^{-4} - z^{-5}) \end{aligned}$$

5-7 试证明 I 型线性相位滤波器的频率响应可以写为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j0.5M\Omega} A(\Omega)$$

其幅度函数 $A(\Omega)$ 为

$$A(\Omega) = h[L] + \sum_{k=1}^L 2h[L-k] \cos k\Omega, L = \frac{M}{2}$$

证:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k] e^{-jk\Omega} + h\left[\frac{M}{2}\right] e^{-j\left(\frac{M}{2}\right)\Omega} + \sum_{k=\frac{M}{2}+1}^M h[k] e^{-jk\Omega}$$

令 $l = M - k$, 则有

$$\sum_{k=\frac{M}{2}+1}^M h[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{l=0}^{\frac{M}{2}-1} h[M-l] e^{-j(M-l)\Omega} = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k] e^{-j(M-k)\Omega}$$

所以

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= e^{-j\left(\frac{M}{2}\right)\Omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k] [e^{-jk\Omega} e^{j\left(\frac{M}{2}\right)\Omega} + e^{-j\left(\frac{M}{2}-k\right)\Omega}] + h\left[\frac{M}{2}\right] \right\} \\ &= e^{-j\left(\frac{M}{2}\right)\Omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[k] \cos[(0.5M - k)\Omega] + h\left[\frac{M}{2}\right] \right\} \end{aligned}$$

$$= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} 2h[0.5M - k] \cos(k\Omega) + h\left[\frac{M}{2}\right] \right\}$$

记 $L = \frac{M}{2}$, 则有

$$A(\Omega) = \sum_{k=1}^L 2h[L - k] \cos(k\Omega) + h[L]$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} A(\Omega)$$

5-8 试证明 II 型线性相位滤波器的频率响应可以写为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j0.5M\Omega} A(\Omega)$$

其幅度函数 $A(\Omega)$ 为

$$A(\Omega) = \sum_{k=0}^L 2h[L - k] \cos[(k + 0.5)\Omega], \quad L = \frac{M-1}{2}$$

证:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k] e^{-jk\Omega} + \sum_{k=\frac{M+1}{2}}^M h[k] e^{-jk\Omega}$$

令 $l = M - k$, 则有

$$\sum_{k=\frac{M+1}{2}}^M h[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{l=0}^{\frac{M-1}{2}} h[M - l] e^{-j(M-l)\Omega} = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k] e^{-j(M-k)\Omega}$$

所以

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k] [e^{-jk\Omega} e^{j(\frac{M}{2})\Omega} + e^{-j(\frac{M}{2}-k)\Omega}] \right\} \\ &= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[k] \cos[(0.5M - k)\Omega] \\ &= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[k] \cos\left[\left(\frac{M-1}{2} - k + 0.5\right)\Omega\right] \\ &= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h\left[\frac{M-1}{2} - k\right] \cos[(k + 0.5)\Omega] \end{aligned}$$

记 $L = \frac{M-1}{2}$, 则有

$$A(\Omega) = \sum_{k=0}^L 2h[L - k] \cos[(k + 0.5)\Omega]$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} A(\Omega)$$

5-9 试证明Ⅲ型线性相位滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j(0.5M\Omega - 0.5\pi)} A(\Omega)$$

其幅度函数 $A(\Omega)$ 为

$$A(\Omega) = \sum_{k=1}^L 2h[L-k] \sin(k\Omega), \quad L = \frac{M}{2}$$

证:

对Ⅲ型线性相位系统, $h[\frac{M}{2}] = 0$, 所以

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k] e^{-jk\Omega} + \sum_{k=\frac{M}{2}+1}^M h[k] e^{-jk\Omega}$$

令 $l = M - k$, 则有

$$\sum_{k=\frac{M}{2}+1}^M h[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{l=0}^{\frac{M}{2}-1} h[M-l] e^{-j(M-l)\Omega} = - \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k] e^{-j(M-k)\Omega}$$

所以

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k] [e^{-jk\Omega} e^{j(\frac{M}{2})\Omega} - e^{-j(\frac{M}{2}-k)\Omega}] \\ &= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2jh[k] \sin[(0.5M - k)\Omega] \\ &= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} 2jh[0.5M - k] \sin(k\Omega) \end{aligned}$$

记 $L = \frac{M}{2}$, 则有

$$A(\Omega) = \sum_{k=1}^L 2h[L-k] \sin(k\Omega)$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} e^{j\frac{\pi}{2}} A(\Omega)$$

5-10 试证明Ⅳ型线性相位滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j(0.5M\Omega - 0.5\pi)} A(\Omega)$$

其幅度函数 $A(\Omega)$ 为

$$A(\Omega) = \sum_{k=0}^L 2h[L-k] \sin[(k+0.5)\Omega], \quad L = \frac{M-1}{2}$$

证:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k] e^{-jk\Omega} + \sum_{k=\frac{M+1}{2}}^M h[k] e^{-jk\Omega}$$

令 $l = M - k$, 则有

$$\sum_{k=\frac{M+1}{2}}^M h[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{l=0}^{\frac{M-1}{2}} h[M-l] e^{-j(M-l)\Omega} = - \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k] e^{-j(M-k)\Omega}$$

所以

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= e^{-j\frac{M}{2}\Omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k] [e^{-jk\Omega} e^{j\frac{M}{2}\Omega} - e^{-j(\frac{M}{2}-k)\Omega}] \right\} \\ &= e^{-j\frac{M}{2}\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2jh[k] \sin[(0.5M - k)\Omega] \\ &= e^{-j\frac{M}{2}\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2jh[k] \sin\left[\left(\frac{M-1}{2} - k + 0.5\right)\Omega\right] \\ &= e^{-j\frac{M}{2}\Omega} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2jh\left[\frac{M-1}{2} - k\right] \sin[(k + 0.5)\Omega] \end{aligned}$$

记 $L = \frac{M-1}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \sum_{k=0}^L 2h[L-k] \sin[(k + 0.5)\Omega] \\ H(e^{j\Omega}) &= e^{-j(\frac{M}{2})\Omega} e^{j\frac{\pi}{2}} A(\Omega) \end{aligned}$$

5-11 试用矩形窗函数法设计一个线性相位 FIR 低通数字滤波器, 其在 $\Omega \in [-\pi, \pi)$ 内的频率响应为

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega} & |\Omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 确定滤波器的阶数 M 。
- (2) 求滤波器单位脉冲响应 $h[k]$ 的表达式, 并计算出其具体值。
- (3) 求滤波器系统函数 $H(z)$ 。

解:

- (1) 滤波器的阶数 $M = 3 \times 2 = 6$ 。
- (2) 根据 IDTFT 可得滤波器单位脉冲响应 $h[k]$ 为

$$h_d[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j(k-3)\Omega} d\Omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi j(k-3)} (e^{j\frac{(k-3)\pi}{2}} - e^{-j\frac{(k-3)\pi}{2}}) = \frac{\sin\left[\frac{(k-3)\pi}{2}\right]}{\pi(k-3)}$$

$$h[k] = 0.5 \text{Sa}\left[\frac{(k-3)\pi}{2}\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{3\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, 0.5, \frac{1}{\pi}, 0, -\frac{1}{3\pi}; k = 0, 1, \dots, 6 \right]$$

$$= [-0.1061, 0, 0.3183, 0.5, 0.3183, 0, -0.1061; k = 0, 1, \dots, 6]$$

(3) 由数字滤波器的单位脉冲响应 $h[k]$ 的 z 变换, 可得 FIR 滤波器系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = -0.1061(1 - z^{-6}) + 0.3183(z^{-2} + z^{-4}) + 0.5z^{-3}$$

5-12 试用矩形窗函数法设计一个线性相位 FIR 高通数字滤波器, 其在 $\Omega \in [0, 2\pi]$ 内的幅度响应逼近

$$|H_d(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & \Omega_c \leq \Omega \leq 2\pi - \Omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 若选用 I 型线性相位系统, 试确定 $h[k]$ 。

(2) 若选用 IV 型线性相位系统, 试确定 $h[k]$ 。

解:

(1) 由于 I 型线性相位系统的幅度函数关于 $\Omega = \pi$ 偶对称, 故在 $\Omega \in [0, 2\pi]$ 内的频率响应为

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega 0.5M} & \Omega_c \leq \Omega \leq 2\pi - \Omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$h_d[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_c}^{2\pi - \Omega_c} e^{-j0.5M\Omega} e^{jk\Omega} d\Omega$$

当 $k \neq 0.5M$ 时

$$h_d[k] = \frac{1}{2\pi j(k - 0.5M)} (e^{j(k-0.5M)(2\pi - \Omega_c)} - e^{j(k-0.5M)\Omega_c})$$

$$= \frac{1}{2\pi j(k - 0.5M)} (e^{-j(k-0.5M)\Omega_c} - e^{j(k-0.5M)\Omega_c})$$

$$= \frac{-\sin[(k - 0.5M)\Omega_c]}{\pi(k - 0.5M)} = \frac{-\Omega_c}{\pi} \text{Sa}[(k - 0.5M)\Omega_c]$$

当 $k = 0.5M$ 时

$$h_d[0.5M] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_c}^{2\pi - \Omega_c} 1 d\Omega = 1 - \frac{\Omega_c}{\pi}$$

综上所述, I 型线性相位系统的 $h[k]$ 为

$$h[k] = \delta[k - 0.5M] - \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}[(k - 0.5M)\Omega_c], 0 \leq k \leq M$$

(2) IV 型线性相位系统在 $\Omega \in [0, 2\pi]$ 范围内的频率响应为

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} je^{-j\Omega 0.5M} & \Omega_c \leq \Omega \leq 2\pi - \Omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_d[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_c}^{2\pi-\Omega_c} je^{-j\Omega 0.5M} e^{jk\Omega} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi(k-0.5M)} (e^{j(k-0.5M)(2\pi-\Omega_c)} - e^{j(k-0.5M)\Omega_c}) \\ &= \frac{-1}{2\pi(k-0.5M)} (e^{-j(k-0.5M)\Omega_c} + e^{j(k-0.5M)\Omega_c}) = \frac{-\cos[(k-0.5M)\Omega_c]}{\pi(k-0.5M)} \end{aligned}$$

所以 IV 型线性相位高通滤波器的 $h[k]$ 为

$$h[k] = \frac{-\cos[(k-0.5M)\Omega_c]}{\pi(k-0.5M)}, 0 \leq k \leq M$$

5-13 试用矩形窗设计一个线性相位 FIR 带通滤波器, 要求其在 $\Omega \in [-\pi, \pi]$ 范围内频率响应逼近

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\Omega} & |\Omega \pm \Omega_0| < \Omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) $h[k]$ 可以是哪几种线性相位滤波器?
- (2) 求出 $h[k]$ 的表达式, 确定 α 与 M 的关系。
- (3) 当 $M=30$ 、 $\Omega_c=0.1\pi$ 、 $\Omega_0=0.6\pi$ 时, 求出用矩形窗和汉明窗设计的滤波器的幅度函数并画出它们的波形。

解:

(1) 由于系统的幅度函数关于 $\Omega=0$ 偶对称, 所以 $h[k]$ 只可能是 I 型和 II 型线性相位滤波器。

(2)

$$\begin{aligned} h_d[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\Omega_0-\Omega_c}^{\Omega_0+\Omega_c} e^{j(k-\alpha)\Omega} d\Omega - \int_{-\Omega_0+\Omega_c}^{\Omega_0-\Omega_c} e^{j(k-\alpha)\Omega} d\Omega \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin[(k-\alpha)(\Omega_0+\Omega_c)] - \sin[(k-\alpha)(\Omega_0-\Omega_c)]}{(k-\alpha)} \\ &= \frac{2\Omega_c}{\pi} \cos[(k-\alpha)\Omega_0] \text{Sa}[(k-\alpha)\Omega_c] \end{aligned}$$

为使 $h_d[k]$ 为线性相位系统, 需有 $\alpha = \frac{M}{2}$ 。

(3) 矩形窗时的幅度函数为

$$A(\Omega) = 0.2 + \sum_{k=1}^{15} 0.4 \cos(0.6\pi k) \text{Sa}(0.1\pi k) \cos(k\Omega)$$

利用 Hamming 窗时, FIR 滤波器的幅度函数为

$$A(\Omega) = 0.2 + \sum_{k=1}^{15} 0.4 \cos(0.6\pi k) \text{Sa}(0.1\pi k) \left[0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi k}{30}\right) \right] \cos(k\Omega)$$

图 5-1 画出利用矩形窗和 Hamming 窗的幅度函数。由图可见, 利用 Hamming 窗减小了滤波器幅度响应在通带与阻带的波动, 但增加了过渡带宽度。

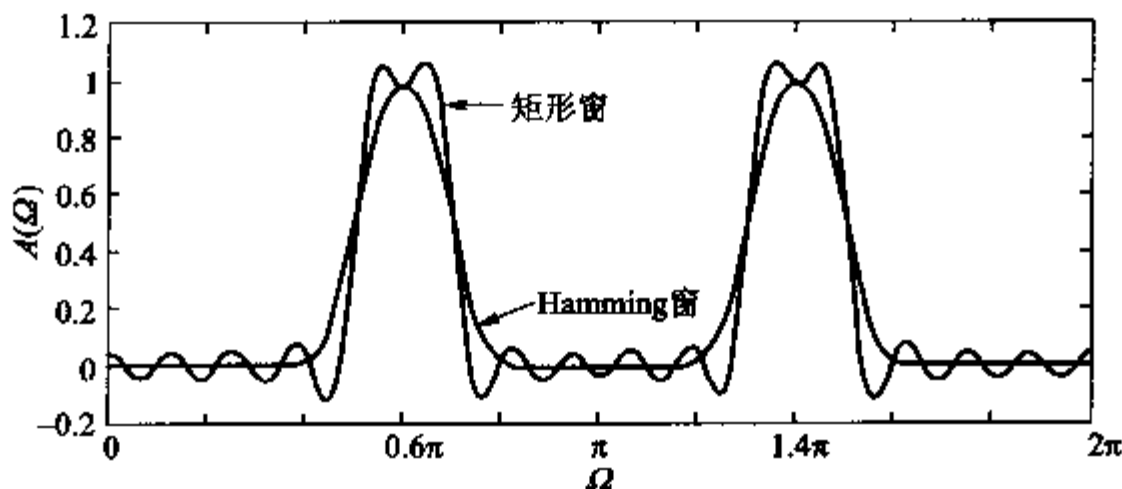


图 5-1 题 5-13 所设计的带通滤波器的幅度函数

5-14 长度为 N 的 Bartlett 窗定义为

$$w[k] = 1 - \frac{|2k - N + 1|}{N + 1}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

(1) 试证明, 当 N 是奇数时 Bartlett 窗可表示为两个长度为 $\frac{N+1}{2}$ 的矩形窗的卷积。

(2) 试证明, 当 N 是偶数时 Bartlett 窗可表示为长度分别为 $\frac{N+2}{2}$ 和 $\frac{N}{2}$ 的矩形窗的卷积。

(3) 求出 Bartlett 窗的频谱和频谱的主瓣宽度。

(4) 已知用 Bartlett 窗设计的 FIR 滤波器的 $\delta_s = \delta_p = 0.05$, 试由实验确定 FIR 滤波器的过渡带的宽度与 N 的关系。将获得的结果和 Hann 窗进行比较, 有何结论?

解:

(1) 当 N 为奇数时, 定义

$$x_1[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

当 $0 \leq k \leq \frac{N-1}{2}$ 时

$$\begin{aligned} x_1[k] * x_1[k] &= k+1 = \frac{N+1}{2} \frac{2(k+1)}{N+1} = \frac{N+1}{2} \left(1 + \frac{2k+2-N-1}{N+1} \right) \\ &= \frac{N+1}{2} \left[1 - \frac{(N-1)-2k}{N+1} \right] \end{aligned}$$

当 $\frac{N+1}{2} \leq k \leq N-1$ 时

$$\begin{aligned} x_1[k] * x_1[k] &= \frac{N-1}{2} - \left(-\frac{N-1}{2} + k \right) + 1 = N-k = \frac{N+1}{2} \frac{2(N-k)}{N+1} \\ &= \frac{N+1}{2} \left[1 + \frac{(N-1)-2k}{N+1} \right] \end{aligned}$$

综合以上二式可得

$$x_1[k] * x_1[k] = \frac{N+1}{2} w[k]$$

(2) 当 N 为偶数时, 定义

$$x_2[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad x_3[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

当 $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$ 时

$$x_2[k] * x_3[k] = k+1 = \frac{N+1}{2} \left[1 - \frac{(N-1)-2k}{N+1} \right]$$

当 $k = \frac{N}{2}$ 时

$$x_2[k] * x_3[k] = \frac{N}{2} = \frac{N+1}{2} \left(1 - \frac{N}{N+1} \right)$$

当 $\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq N-1$ 时

$$x_2[k] * x_3[k] = \frac{N}{2} - \left(-\frac{N}{2} + 1 + k \right) + 1 = N-k = \frac{N+1}{2} \left[1 + \frac{(N-1)-2k}{N+1} \right]$$

综合以上三式可得

$$x_2[k] * x_3[k] = \frac{N+1}{2} w[k]$$

(3) 当 N 为奇数时

$$\begin{aligned}
 W(e^{j\Omega}) &= \frac{2}{N+1} X_1^2(e^{j\Omega}) = \frac{2}{N+1} \times \frac{\sin^2\left[\frac{(N+1)\Omega}{4}\right]}{\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j(N-1)\Omega} \\
 &= \frac{2\sin^2\left[\frac{(N+1)\Omega}{4}\right]}{(N+1)\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j(N-1)\Omega}
 \end{aligned}$$

由上式可求得

$$\text{主瓣宽度} = \frac{8\pi}{N+1}$$

当 N 为偶数时

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{2}{N+1} X_2(e^{j\Omega}) X_3(e^{j\Omega}) = \frac{2}{N+1} \frac{\sin\left[\frac{(N+2)\Omega}{4}\right] \sin\left(\frac{N\Omega}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j(N-1)\Omega}$$

由上式可求得

$$\text{主瓣宽度} = \frac{8\pi}{N+2}$$

(4) 图 5-2 画出了用 Bartlett 窗设计的 FIR 滤波器在不连续点附加的幅度函数 $A(\Omega)$ 。该滤波器过渡带宽度近似为 $\frac{6.8\pi}{N}$ 。与 Hann 窗设计的 FIR 滤波器相比较, Bartlett 窗设计的 FIR 滤波器不仅过渡带变宽, 而且波动也加大, 所以 Bartlett 窗不如 Hann 窗。

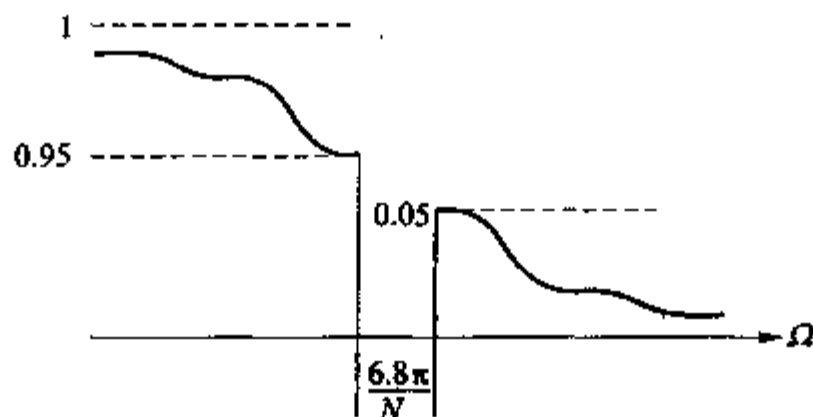
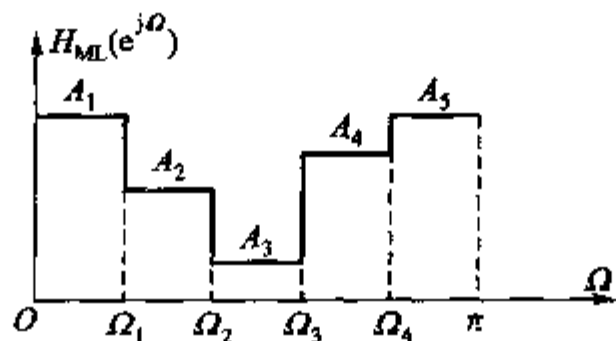


图 5-2 Bartlett 窗设计的 FIR 滤波器在不连续点附加的幅度函数 $A(\Omega)$

5-15 理想零相位多带滤波器的频率响应定义为

$$H_{ML}(e^{j\Omega}) = A_k, \quad \Omega_{k-1} \leq |\Omega| \leq \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, L$$

试证该滤波器单位脉冲响应为



题 5-15 图

$$h_{ML}[k] = \sum_{l=1}^L (A_l - A_{l+1}) \frac{\sin(\Omega_l k)}{\pi k}, \text{ 其中 } A_{L+1} = 0$$

证:

记

$$H_l(e^{j\Omega}) = A_l, \quad \Omega_{l-1} \leq |\Omega| \leq \Omega_l$$

则

$$h_{ML}[k] = \sum_{l=1}^L h_l[k]$$

$$h_1[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_1}^{\Omega_1} A_1 e^{j\Omega k} d\Omega = \frac{A_1 \sin(\Omega_1 k)}{\pi k}$$

$$h_l[k] = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\Omega_l}^{\Omega_l} A_l e^{j\Omega k} d\Omega - \int_{-\Omega_{l-1}}^{\Omega_{l-1}} A_l e^{j\Omega k} d\Omega \right] = \frac{A_l}{\pi k} [\sin(\Omega_l k) - \sin(\Omega_{l-1} k)]$$

$l = 2, 3, \dots, L$

$$\begin{aligned} h_{ML}[k] &= \frac{A_1 \sin(\Omega_1 k)}{\pi k} + \sum_{l=2}^L \frac{A_l}{\pi k} [\sin(\Omega_l k) - \sin(\Omega_{l-1} k)] \\ &= \sum_{l=1}^L \frac{A_l \sin(\Omega_l k)}{\pi k} - \sum_{l=1}^{L-1} \frac{A_{l+1} \sin(\Omega_{l+1} k)}{\pi k} = \sum_{l=1}^L (A_l - A_{l+1}) \frac{\sin(\Omega_l k)}{\pi k} \end{aligned}$$

5-16 理想 Hilbert 变换器(又称 90°相移器)的频率响应为

$$H_{HT}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} j & -\pi < \Omega < 0 \\ -j & 0 < \Omega < \pi \end{cases}$$

(1) 讨论可用哪些类线性相位滤波器进行设计?

(2) 试求出线性相位滤波器的 $h[k]$ 。

(3) 分别画出 $M=4$ 和 $M=5$ 时滤波器的幅度响应,并讨论所获得的结果。

(4) 取 $M=15$,用计算机分别画出用矩形窗和 Blackman 窗设计出的 FIR 滤波器的幅度函数,并简要评述所获得的结果。

解:

(1) 由于要求幅度关于 $\Omega=0$ 奇对称,故可选用 III 型和 IV 型。

(2) 设

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} je^{-j0.5M\Omega} & -\pi < \Omega < 0 \\ -je^{-j0.5M\Omega} & 0 < \Omega < \pi \end{cases}$$

则有

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j(k-0.5M)\Omega} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} -j e^{j(k-0.5M)\Omega} d\Omega$$

M 为偶且 $k = \frac{M}{2}$ 时

$$h\left[\frac{M}{2}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} -j d\Omega = 0$$

其他情况

$$\begin{aligned} h[k] &= \frac{1}{2\pi(k-0.5M)} [1 - e^{-j(k-0.5M)\pi} - (e^{j(k-0.5M)\pi} - 1)] \\ &= \frac{1}{2\pi(k-0.5M)} [2 - (e^{-j(k-0.5M)\pi} + e^{j(k-0.5M)\pi})] \\ &= \frac{1}{\pi(k-0.5M)} \{1 - \cos[(k-0.5M)\pi]\} = \frac{2\sin^2\left[\frac{(k-0.5M)\pi}{2}\right]}{\pi(k-0.5M)} \end{aligned}$$

所以

$$h_d[k] = \begin{cases} \frac{2\sin^2\left[\frac{(k-0.5M)\pi}{2}\right]}{\pi(k-0.5M)} & k \neq 0.5M \\ 0 & k = 0.5M \end{cases}$$

(3) 图 5-3 画出了 $M=4$ 和 $M=5$ 时, Hilbert 变换器的幅度函数。由图可见, III 型线性相位系统的幅度函数在 $\Omega = \pm\pi$ 附近的误差较大。

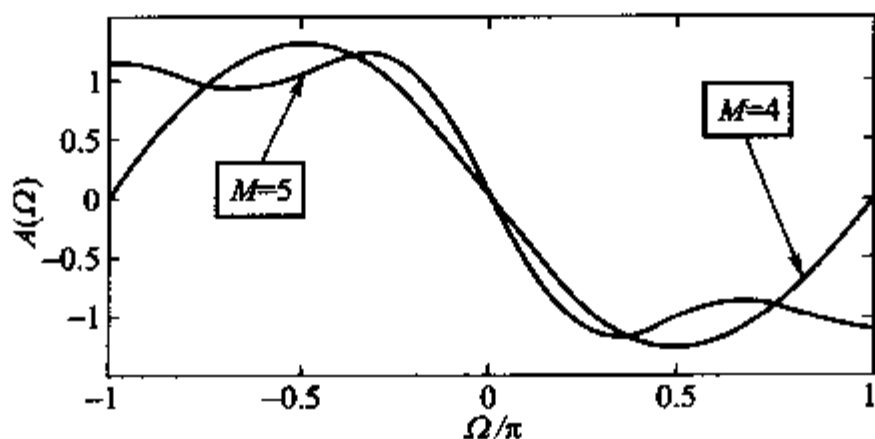


图 5-3 $M=4$ 和 $M=5$ 时 Hilbert 变换器的幅度函数

(4) 图 5-4 画出了 $M=15$ 时, 用矩形窗和 Blackman 窗设计出的 Hilbert 变换器的幅度函数。由图可见, 用矩形窗时, 幅度函数波动较大。Blackman 窗减小了幅度函数的波动, 但在 $\Omega=0$ 附近趋向于零的速度较慢。

5-17 试用矩形窗设计一个线性相位 FIR 数字滤波器, 要求其在 $\Omega \in [-\pi, \pi]$ 范围内幅度响应逼近理想限带微分器

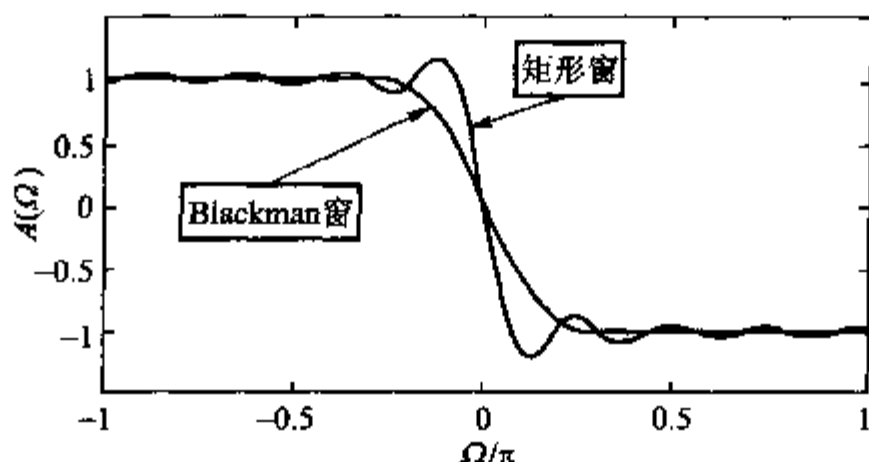


图 5-4 $M=15$ 时用矩形窗和 Blackman 窗设计出的 Hilbert 变换器的幅度函数

$$H_{\text{BLDIF}}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} j\Omega & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

- (1) 试确定零相位理想限带微分器的单位脉冲响应 $h_{\text{BLDIF}}[k]$ 。
 (2) 若 $\Omega_c = 0.8\pi$, 试求 $M=6$ 时滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

解:

- (1) 用单位阶跃函数 $u(\Omega)$, 可将 $H_{\text{BLDIF}}(e^{j\Omega})$ 表示为

$$H_{\text{BLDIF}}(e^{j\Omega}) = j\Omega[u(\Omega + \Omega_c) - u(\Omega - \Omega_c)]$$

对上式求导可得

$$H'_{\text{BLDIF}}(e^{j\Omega}) = j[u(\Omega + \Omega_c) - u(\Omega - \Omega_c)] + j\Omega_c[-\delta(\Omega + \Omega_c) - \delta(\Omega - \Omega_c)]$$

两边同乘 j

$$jH'_{\text{BLDIF}}(e^{j\Omega}) = -[u(\Omega + \Omega_c) - u(\Omega - \Omega_c)] + \Omega_c[\delta(\Omega + \Omega_c) + \delta(\Omega - \Omega_c)]$$

由 DTFT 的频域微分特性

$$\begin{aligned} 2\pi kh_{\text{BLDIF}}[k] &= -\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{jk\Omega} d\Omega + \Omega_c[e^{-jk\Omega_c} + e^{jk\Omega_c}] \\ &= -\frac{1}{jk}[e^{jk\Omega_c} - e^{-jk\Omega_c}] + \Omega_c[e^{-jk\Omega_c} + e^{jk\Omega_c}] \\ &= -\frac{2}{k}\sin(\Omega_c k) + 2\Omega_c \cos(\Omega_c k) \end{aligned}$$

两边同除 $2\pi k$, 可得

$$h_{\text{BLDIF}}[k] = -\frac{\sin(\Omega_c k)}{\pi k^2} + \frac{\Omega_c \cos(\Omega_c k)}{\pi k}, \quad k \neq 0$$

$k=0$ 时, 直接由 IDTFT, 可得

$$h_{\text{BLDIF}}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} j\Omega d\Omega = 0$$

所以

$$h_{\text{BLDIF}}[k] = \begin{cases} -\frac{\sin(\Omega_c k)}{\pi k^2} + \frac{\Omega_c \cos(\Omega_c k)}{\pi k} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

(2) $h[k] = h_{\text{BLDIF}}[k-3] = [-0.082\ 4, -0.123\ 6, 0.647\ 2, 0, -0.647\ 2, 0.123\ 6, 0.082\ 4; k=0, 1, \dots, 6]$

$$H(z) = -0.082\ 4(1 - z^{-6}) - 0.123\ 6(z^{-1} - z^{-5}) + 0.647\ 2(z^{-2} - z^{-4})$$

5-18 试用矩形窗设计一个线性相位 FIR 数字滤波器, 要求其在 $\Omega \in [-\pi, \pi]$ 范围内幅度响应逼近理想线性通带低通滤波器

$$H_{\text{LLP}}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

(1) 试确定零相位理想线性通带低通滤波器的单位脉冲响应 $h_{\text{LLP}}[k]$ 。

(2) 若 $\Omega_c = 0.6\pi$, 试求 $M=6$ 时滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

解:

(1) 对 $H_{\text{LLP}}(e^{j\Omega})$ 求导, 可得

$$H'_{\text{LLP}}(e^{j\Omega}) = -[u(\Omega + \Omega_c) - u(\Omega)] + [u(\Omega) - u(\Omega - \Omega_c)] + \Omega_c[\delta(\Omega + \Omega_c) - \delta(\Omega - \Omega_c)]$$

$$jH'_{\text{LLP}}(e^{j\Omega}) = -j[u(\Omega + \Omega_c) - u(\Omega)] + j[u(\Omega) - u(\Omega - \Omega_c)] + j\Omega_c[\delta(\Omega + \Omega_c) - \delta(\Omega - \Omega_c)]$$

由 DTFT 的频域微分特性

$$\begin{aligned} 2\pi k h_{\text{LLP}}[k] &= -j \int_{-\Omega_c}^0 e^{jk\Omega} d\Omega + j \int_0^{\Omega_c} e^{jk\Omega} d\Omega + j\Omega_c(e^{-jk\Omega_c} - e^{jk\Omega_c}) \\ &= -j \int_0^{\Omega_c} e^{-jk\Omega} d\Omega + j \int_0^{\Omega_c} e^{jk\Omega} d\Omega - j\Omega_c(e^{jk\Omega_c} - e^{-jk\Omega_c}) \\ &= -2 \int_0^{\Omega_c} \sin(k\Omega) d\Omega + 2\Omega_c \sin(k\Omega_c) \\ &= \frac{2}{k} [\cos(k\Omega_c) - 1] + 2\Omega_c \sin(k\Omega_c) \end{aligned}$$

两边同除 $2\pi k$, 可得

$$h_{\text{LLP}}[k] = \frac{\cos(\Omega_c k) - 1}{\pi k^2} + \frac{\Omega_c \sin(\Omega_c k)}{\pi k}, \quad k \neq 0$$

在 $k=0$ 时, 直接由 IDTFT, 可得

$$h_{\text{LLP}}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} |\Omega| d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_c} \Omega d\Omega = \frac{\Omega_c^2}{\pi}$$

(2) $h[k] = h_{\text{LLP}}[k-3] = [-0.124\ 3, -0.320\ 3, 0.154\ 0, 1.131\ 0,$

$0.154\ 0, -0.320\ 3, -0.124\ 3; k=0, 1, \dots, 6]$

$$H(z) = -0.124\ 3(1 + z^{-6}) - 0.320\ 3(z^{-1} + z^{-5}) + 0.154\ 0(z^{-2} + z^{-4}) + 1.131\ 0z^{-3}$$

5-19 (1) 利用 II 型线性相位滤波器的幅度函数的特性

$$A_d(\Omega) = -A_d(2\pi - \Omega), \quad A_d(\pi) = 0$$

试证明 II 型线性相位滤波器在 $M+1$ 个取样点值满足

$$H_d[m] = \begin{cases} A_d[m] e^{-j\frac{\pi M}{M+1}m} & 0 \leq m \leq \frac{M-1}{2} \\ 0 & m = \frac{M+1}{2} \\ H_d^*[M+1-m] & \frac{M+3}{2} \leq m \leq M \end{cases}$$

(2) 试推导 $h[k]$ 的表达式, 并证明 $h[k]$ 满足线性相位条件。

解:

(1) II 型线性相位 FIR 滤波器频率响应的一般形式为

$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j0.5M\Omega} A_d(\Omega)$$

$H_d(e^{j\Omega})$ 在 $M+1$ 个取样点上的值 $H_d[m]$ 为

$$H_d[m] = H_d(e^{j\frac{2\pi m}{M+1}}) = e^{-j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(\frac{2\pi m}{M+1}\right) = e^{-j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d[m]$$

$$H_d\left[\frac{M+1}{2}\right] = H_d(e^{j\pi}) = e^{-j0.5M\pi} A_d(\pi) = 0$$

$$\begin{aligned} H_d[M+1-m] &= H_d(e^{j\frac{2\pi(M+1-m)}{M+1}}) = e^{-jM\pi} e^{j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(2\pi - \frac{2\pi m}{M+1}\right) \\ &= e^{j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(\frac{2\pi m}{M+1}\right) = H_d^*[m] \end{aligned}$$

由上式可知, $H_d[M] = H_d^*[1]$, $H_d[M-1] = H_d^*[2]$, \dots , $H_d\left[\frac{M+3}{2}\right] = H_d^*$

$\left[\frac{M-1}{2}\right]$ 。所以 $H_d[m]$ 在 $\frac{M+3}{2} \leq m \leq M$ 范围内的值可由 $H_d[m]$ 在 $1 \leq m \leq \frac{M-1}{2}$

的值确定, 即

$$H_d[m] = \begin{cases} A_d[m] e^{-j\frac{\pi M}{M+1}m} & 0 \leq m \leq \frac{M-1}{2} \\ 0 & m = \frac{M+1}{2} \\ H_d^*[M+1-m] & \frac{M+3}{2} \leq m \leq M \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 (M+1)h[k] &= \sum_{m=0}^M H_d[m] W_{M+1}^{-mk} = H_d[0] + \sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} + \sum_{m=\frac{M+3}{2}}^M H_d[m] W_{M+1}^{-mk} \\
 &= H_d[0] + \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} + \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} H_d[M+1-m] W_{M+1}^{-(M+1-m)k} \\
 &= H_d[0] + \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} + \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} H_d^*[m] W_{M+1}^{mk} \\
 &= H_d[0] + 2\operatorname{Re}\left\{ \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} \right\} \\
 &= A_d[0] + 2 \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} A_d[m] \cos\left[\frac{\pi m}{M+1}(2k-M) \right]
 \end{aligned}$$

所以

$$h[k] = \frac{A_d[0]}{M+1} + 2 \frac{1}{M+1} \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} A_d[m] \cos\left[\frac{\pi m}{M+1}(2k-M) \right]$$

由上式,可得

$$\begin{aligned}
 h[M-k] &= \frac{A_d[0]}{M+1} + 2 \frac{1}{M+1} \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} A_d[m] \cos\left[\frac{\pi m}{M+1}(2M-2k-M) \right] \\
 &= \frac{A_d[0]}{M+1} + 2 \frac{1}{M+1} \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} A_d[m] \cos\left[-\frac{\pi m}{M+1}(2k-M) \right] = h[k]
 \end{aligned}$$

即 $h[k]$ 满足线性相位条件。

5-20 (1) 利用Ⅲ型线性相位滤波器的幅度函数的特性

$$A_d(\Omega) = -A_d(2\pi - \Omega), \quad A_d(0) = A_d(\pi) = 0$$

试证明Ⅲ型线性相位滤波器在 $M+1$ 个取样点值满足

$$H_d[m] = \begin{cases} 0 & m=0 \\ jA_d[m] e^{-j\frac{\pi M}{M+1}m} & 1 \leq m \leq \frac{M}{2} \\ H_d^*[M+1-m] & \frac{M}{2}+1 \leq m \leq M \end{cases}$$

(2) 试推导 $h[k]$ 的表达式,并证明 $h[k]$ 满足线性相位条件。

解:

(1) Ⅲ型线性相位 FIR 滤波器频率响应的一般形式为

$$H_d(e^{j\Omega}) = je^{-j0.5M\Omega} A_d(\Omega)$$

$H_d(e^{j\Omega})$ 在 $M+1$ 个取样点上的值 $H_d[m]$ 为

$$H_d[m] = H_d(e^{j\frac{2\pi m}{M+1}}) = je^{-j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(\frac{2\pi m}{M+1}\right) = je^{-j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d[m]$$

$$H_d[0] = H_d(e^{j0}) = A_d(0) = 0$$

$$\begin{aligned} H_d[M+1-m] &= H_d(e^{j\frac{2\pi(M+1-m)}{M+1}}) = je^{-jM\pi} e^{j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(2\pi - \frac{2\pi m}{M+1}\right) \\ &= -je^{j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(\frac{2\pi m}{M+1}\right) = H_d^*[m] \end{aligned}$$

由上式可知, $H_d[M] = H_d^*[1]$, $H_d[M-1] = H_d^*[2]$, \dots , $H_d\left[\frac{M}{2}+1\right] = H_d^*\left[\frac{M}{2}\right]$ 。

所以 $H_d[m]$ 在 $\frac{M}{2}+1 \leq m \leq M$ 范围内的值可由 $H_d[m]$ 在 $1 \leq m \leq \frac{M}{2}$ 的值确定, 即

$$H_d[m] = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ jA_d[m] e^{-j\frac{M\pi}{M+1}m} & 1 \leq m \leq \frac{M}{2} \\ H_d^*[M+1-m] & \frac{M}{2}+1 \leq m \leq M \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} (M+1)h[k] &= \sum_{m=0}^M H_d[m] W_{M+1}^{-mk} = \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} + \sum_{m=\frac{M}{2}+1}^M H_d[m] W_{M+1}^{-mk} \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} + \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} H_d[M+1-m] W_{M+1}^{-(M+1-m)k} \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} + \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} H_d^*[m] W_{M+1}^{mk} \\ &= 2\operatorname{Re}\left\{ \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} \right\} = -2 \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} A_d[m] \sin\left[\frac{\pi m}{M+1}(2k-M)\right] \end{aligned}$$

所以

$$h[k] = \frac{-2}{M+1} \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} A_d[m] \sin\left[\frac{\pi m}{M+1}(2k-M)\right]$$

由上式可得

$$h[M-k] = \frac{-2}{M+1} \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} A_d[m] \sin\left[\frac{\pi m}{M+1}(2M-2k-M)\right]$$

$$= \frac{-2}{M+1} \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} A_d[m] \sin \left[-\frac{\pi m}{M+1} (2k-M) \right] = -h[k]$$

即 $h[k]$ 满足线性相位条件。

5-21 (1) 利用 IV 型线性相位滤波器的幅度函数的特性

$$A_d(\Omega) = A_d(2\pi - \Omega), \quad A_d(0) = 0$$

试证明 IV 型线性相位滤波器在 $M+1$ 个取样点值满足

$$H_d[m] = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ jA_d[m] e^{-j\frac{\pi M}{M+1}m} & 1 \leq m \leq \frac{M+1}{2} \\ H_d^*[M+1-m] & \frac{M+3}{2} \leq m \leq M \end{cases}$$

(2) 试推导 $h[k]$ 的表达式, 并证明 $h[k]$ 满足线性相位条件。

解:

(1) IV 型线性相位 FIR 滤波器频率响应的一般形式为

$$H_d(e^{j\Omega}) = je^{-j\Omega \frac{M}{2}} A_d(\Omega)$$

$H_d(e^{j\Omega})$ 在 $M+1$ 个取样点上的值 $H_d[m]$ 为

$$H_d[m] = H_d(e^{j\frac{2\pi m}{M+1}}) = je^{-j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(\frac{2\pi m}{M+1}\right) = je^{-j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d[m]$$

$$H_d[0] = H_d(e^{j0}) = A_d(0) = 0$$

$$H_d[M+1-m] = H_d(e^{j\frac{2\pi(M+1-m)}{M+1}}) = je^{-jM\pi} e^{j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(2\pi - \frac{2\pi m}{M+1}\right)$$

$$= -je^{j\frac{M\pi}{M+1}m} A_d\left(\frac{2\pi m}{M+1}\right) = H_d^*[m]$$

由上式可知, $H_d[M] = H_d^*[1]$, $H_d[M-1] = H_d^*[2]$, \dots , $H_d\left[\frac{M+3}{2}\right] = H_d^*\left[\frac{M-1}{2}\right]$ 。所以 $H_d[m]$ 在 $\frac{M+3}{2} \leq m \leq M$ 范围内的值可由 $H_d[m]$ 在 $1 \leq m \leq \frac{M-1}{2}$ 的值确定, 即

$$H_d[m] = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ jA_d[m] e^{-j\frac{\pi M}{M+1}m} & 1 \leq m \leq \frac{M+1}{2} \\ H_d^*[M+1-m] & \frac{M+3}{2} \leq m \leq M \end{cases}$$

$$(2) (M+1)h[k] = \sum_{m=0}^M H_d[m] W_{M+1}^{-mk}$$

$$= H_d\left[\frac{M+1}{2}\right] (-1)^k + \sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk} + \sum_{m=\frac{M+3}{2}}^M H_d[m] W_{M+1}^{-mk}$$

$$\begin{aligned}
 &= H_d\left[\frac{M+1}{2}\right](-1)^k + 2\operatorname{Re}\left\{\sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} H_d[m] W_{M+1}^{-mk}\right\} \\
 &= A_d\left[\frac{M+1}{2}\right](-1)^{k+0.5(M-1)} - 2\sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} A_d[m] \sin\left[\frac{\pi m}{M+1}(2k-M)\right]
 \end{aligned}$$

所以

$$h[k] = \frac{A_d\left[\frac{M+1}{2}\right](-1)^{k+0.5(M-1)}}{M+1} - \frac{2}{M+1}\sum_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} A_d[m] \sin\left[\frac{\pi m}{M+1}(2k-M)\right]$$

由上式易得

$$h[M-k] = -h[k]$$

即 $h[k]$ 满足线性相位条件。

5-22 试用频率取样法设计 FIR 低通数字滤波器, 其在 $\Omega \in [-\pi, \pi)$ 内的理想幅度函数为

$$A(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \frac{3\pi}{7} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求出阶数 $M=6$ 的线性相位 FIR 系统的 $h[k]$ 和 $H(z)$ 。

解:

由 $M=6$ 可得取样点为 $\{\Omega_m = \frac{2\pi m}{7}, m=0, 1, \dots, 6\}$ 。由

$$H_d[m] = e^{-j\frac{6\pi m}{7}} A_d\left(\frac{2\pi m}{7}\right)$$

可得 $H_d[m]$ 在 $0 \leq m \leq 3$ 范围内的值为

$$H_d[0] = A_d(0) = 1$$

$$H_d[1] = e^{-j\frac{6\pi}{7}} A_d\left(\frac{2\pi}{7}\right) = e^{-j\frac{6\pi}{7}}$$

$$H_d[2] = e^{-j\frac{12\pi}{7}} A_d\left(\frac{4\pi}{7}\right) = 0$$

$$H_d[3] = e^{-j\frac{18\pi}{7}} A_d\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 0$$

由共轭对称关系可得 $H_d[m]$ 在 $4 \leq m \leq 6$ 范围内的值为

$$H_d[6] = H_d[7-1] = H_d^*[1] = e^{j\frac{6\pi}{7}}$$

$$H_d[5] = H_d[7-2] = H_d^*[2] = 0$$

$$H_d[4] = H_d[7-3] = H_d^*[3] = 0$$

对 $H_d[m]$ 做 7 点的 IDFT, 可得 $h[k]$ 为

$$\begin{aligned} h[k] &= \frac{1}{7} \sum_{m=0}^6 H_d[m] W_7^{-mk} = \frac{1}{7} \left[1 + e^{-j\frac{6\pi}{7}} e^{j\frac{2\pi}{7}k} + e^{j\frac{6\pi}{7}} e^{j\frac{12\pi}{7}k} \right] \\ &= \frac{1}{7} \left[1 + e^{-j\frac{6\pi}{7}} e^{j\frac{2\pi}{7}k} + e^{j\frac{6\pi}{7}} e^{-j\frac{14\pi}{7}k} e^{j\frac{12\pi}{7}k} \right] \\ &= \frac{1}{7} \left[1 + e^{j\frac{2\pi}{7}(k-3)} + e^{-j\frac{2\pi}{7}(k-3)} \right] = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} \cos \left[\frac{2\pi}{7}(k-3) \right] \\ &= [-0.1146, 0.0793, 0.3210, 0.4286, 0.3210, 0.0793, -0.1146] \end{aligned}$$

$$H(z) = -0.1146(1+z^{-6}) + 0.0793(z^{-1}+z^{-5}) + 0.3210(z^{-2}+z^{-4}) + 0.4286z^{-3}$$

5-23 已知 9 阶 II 型线性相位 FIR 滤波器的幅度函数满足

$$A\left(\frac{2\pi m}{10}\right) = \begin{cases} 1 & m = 0, 1, 2 \\ 0 & m = 3, 4, 5 \end{cases}$$

试求出 $h[k]$ 的表达式。

解:

$H_d[m]$ 的取值为

$$\begin{aligned} H_d[0] &= 1, \quad H_d[1] = e^{-j\frac{9\pi \times 1}{10}}, \quad H_d[2] = e^{-j\frac{9\pi \times 2}{10}} \\ H_d[9] &= e^{j\frac{9\pi \times 1}{10}}, \quad H_d[8] = e^{j\frac{9\pi \times 2}{10}} \end{aligned}$$

m 取其他值时 $H_d[m] = 0$ 。对 $H_d[m]$ 做 10 点 IDFT, 可得

$$h[k] = 0.1 + 0.2 \cos \left[\frac{\pi}{10}(2k-9) \right] + 0.2 \cos \left[\frac{2\pi}{10}(2k-9) \right]$$

5-24 已知 18 阶 III 型线性相位 FIR 滤波器的幅度函数满足

$$A\left(\frac{2\pi m}{19}\right) = \begin{cases} 1 & m = 3, 4, 5 \\ 0 & m = 0, 1, 2, 6, 7, 8, 9 \end{cases}$$

试求出 $h[k]$ 的表达式。

解:

$H_d[m]$ 的取值为

$$\begin{aligned} H_d[3] &= je^{-j\frac{18\pi \times 3}{19}}, \quad H_d[4] = je^{-j\frac{18\pi \times 4}{19}}, \quad H_d[5] = je^{-j\frac{18\pi \times 5}{19}} \\ H_d[16] &= -je^{j\frac{18\pi \times 3}{19}}, \quad H_d[15] = -je^{j\frac{18\pi \times 4}{19}}, \quad H_d[14] = -je^{j\frac{18\pi \times 5}{19}} \end{aligned}$$

m 取其他值时 $H_d[m] = 0$ 。对 $H_d[m]$ 做 19 点 IDFT, 可得

$$h[k] = -\frac{2}{19} \sin \left[\frac{2\pi \times 3}{19}(k-9) \right] - \frac{2}{19} \sin \left[\frac{2\pi \times 4}{19}(k-9) \right] - \frac{2}{19} \sin \left[\frac{2\pi \times 5}{19}(k-9) \right]$$

5-25 试证明 $L=1$ 时, II 型线性相位系统 $h[k]$ 与 $g[k]$ 的关系应修改为

$$h[0] = \frac{1}{4}g[1], \quad h[1] = \frac{1}{4}(2g[0] + g[1])$$

证:

当 $L=1$ 时,由教材可知,Ⅱ型线性相位系统的 $A(\Omega)$ 可分别表示为

$$A(\Omega) = 2h[1]\cos(0.5\Omega) + 2h[0]\cos(1.5\Omega)$$

$$\begin{aligned} 2A(\Omega) &= g[0]\cos(0.5\Omega) + g[1]\cos(1.5\Omega) + (g[0] + g[1])\cos(0.5\Omega) \\ &= (2g[0] + g[1])\cos(0.5\Omega) + g[1]\cos(1.5\Omega) \end{aligned}$$

比较上述两式

$$h[0] = \frac{1}{4}g[1], \quad h[1] = \frac{1}{4}(2g[0] + g[1])$$

5-26 试证明Ⅱ型线性相位系统的 $g[k]$ 可用 $h[k]$ 表示为

$$g[L] = 4h[0]$$

$$g[k] = 4h[L-k] - g[k+1], \quad k = L-1, L-2, \dots, 1$$

$$g[0] = 2h[L] - 0.5g[1]$$

证:

由教材可知

$$\begin{aligned} 2A(\Omega) &= \sum_{k=0}^L 4h[L-k]\cos[(k+0.5)\Omega] \\ 2A(\Omega) &= g[0]\cos(0.5\Omega) + g[L]\cos[(L+0.5)\Omega] + \\ &\quad \sum_{k=0}^{L-1} (g[k] + g[k+1])\cos[(k+0.5)\Omega] \end{aligned}$$

比较上述两式可得

$$4h[L] = 2g[0] + g[1]$$

$$4h[L-k] = g[k] + g[k+1], \quad 1 \leq k \leq L-1$$

$$4h[0] = g[L]$$

整理上式即可得

$$g[L] = 4h[0]$$

$$g[k] = 4h[L-k] - g[k+1], \quad k = L-1, L-2, \dots, 1$$

$$g[0] = 2h[L] - 0.5g[1]$$

5-27 试证明Ⅲ型线性相位系统的幅度函数可表示为

$$A(\Omega) = \sin \Omega \sum_{k=0}^{L-1} g[k]\cos(k\Omega), \quad L = \frac{M}{2}$$

其中

$$h[0] = \frac{1}{4}g[L-1]$$

$$h[1] = \frac{1}{4}g[L-2]$$

$$h[k] = \frac{1}{4}(g[L-1-k] - g[L+1-k]), \quad k = 2, 3, \dots, L-2$$

$$h[L-1] = \frac{1}{4}(2g[0] - g[2])$$

证:

由于

$$A(\Omega) = \sum_{k=1}^L 2h[L-k] \sin(k\Omega) \quad (5-24)$$

设Ⅲ型线性相位系统的幅度函数可表示为

$$A(\Omega) = \sin \Omega \sum_{k=0}^{L-1} g[k] \cos(k\Omega)$$

由三角公式 $\sin x \cos y = 0.5[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ 可得

$$\begin{aligned} 2A(\Omega) &= \sum_{k=0}^{L-1} g[k] \sin[(k+1)\Omega] - \sum_{k=0}^{L-1} g[k] \sin[(k-1)\Omega] \\ &= \sum_{k=1}^L g[k-1] \sin(k\Omega) + g[0] \sin \Omega - \sum_{k=1}^{L-2} g[k+1] \sin(k\Omega) \\ &= (2g[0] - g[2]) \sin \Omega + \sum_{k=2}^{L-2} (g[k-1] - g[k+1]) \sin(k\Omega) + \\ &\quad g[L-2] \sin[(L-1)\Omega] + g[L-1] \sin(L\Omega) \end{aligned} \quad (5-25)$$

若 $L > 3$, 比较式(5-24)和式(5-25)可得

$$\begin{aligned} 4h[L-1] &= 2g[0] - g[2] \\ 4h[L-k] &= g[k-1] - g[k+1], \quad k = 2, 3, \dots, L-2 \\ 4h[1] &= g[L-2] \\ 4h[0] &= g[L-1] \end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{1}{4}g[L-1] \\ h[1] &= \frac{1}{4}g[L-2] \\ h[k] &= \frac{1}{4}(g[L-1-k] - g[L+1-k]), \quad k = 2, 3, \dots, L-2 \\ h[L-1] &= \frac{1}{4}(2g[0] - g[2]) \end{aligned}$$

当 $L=1$ 时, 由于

$$A(\Omega) = g[0] \sin \Omega$$

所以

$$h[0] = \frac{1}{2}g[0]$$

当 $L=2$ 时, 由于

$$A(\Omega) = \sin \Omega [g[0] + g[1] \cos(k\Omega)] = g[0] \sin \Omega + 0.5g[1] \sin(2\Omega)$$

所以
$$h[0] = \frac{1}{4}g[1], \quad h[1] = \frac{1}{2}g[0]$$

当 $L=3$ 时, 由于

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \sin \Omega [g[0] + g[1] \cos \Omega + g[2] \cos(2\Omega)] \\ &= (g[0] - 0.5g[2]) \sin \Omega + 0.5g[1] \sin(2\Omega) + 0.5g[2] \sin(3\Omega) \end{aligned}$$

所以
$$h[0] = \frac{1}{4}g[2], \quad h[1] = \frac{1}{4}g[1], \quad h[2] = \frac{1}{4}(2g[0] - g[2])$$

5-28 试证明IV型线性相位系统的幅度函数可表示为

$$A(\Omega) = \sin(0.5\Omega) \sum_{k=0}^L g[k] \cos(k\Omega), \quad L = \frac{M-1}{2}$$

其中

$$h[0] = \frac{1}{4}g[L]$$

$$h[k] = \frac{1}{4}(g[L-k] - g[L+1-k]), \quad k = 1, 2, \dots, L-1$$

$$h[L] = \frac{1}{4}(2g[0] - g[1])$$

证:

IV型线性相位系统的幅度函数

$$A(\Omega) = \sum_{k=0}^L 2h[L-k] \sin((k+0.5)\Omega), \quad L = \frac{M-1}{2} \quad (5-26)$$

设IV型线性相位系统的幅度函数可表示为

$$A(\Omega) = \sin(0.5\Omega) \sum_{k=0}^L g[k] \cos(k\Omega)$$

由三角公式 $\sin x \cos y = 0.5[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$, 可得

$$\begin{aligned} 2A(\Omega) &= \sum_{k=0}^L g[k] \sin[(k+0.5)\Omega] - \sum_{k=0}^L g[k] \sin[(k-0.5)\Omega] \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} g[k] \sin[(k+0.5)\Omega] + g[L] \sin[(L+0.5)\Omega] + \\ &\quad g[0] \sin(0.5\Omega) - \sum_{k=0}^{L-1} g[k+1] \sin[(k+0.5)\Omega] \\ &= (2g[0] - g[1]) \sin(0.5\Omega) + \sum_{k=1}^{L-1} (g[k] - \\ &\quad g[k+1]) \sin[(k+0.5)\Omega] + g[L] \sin[(L+0.5)\Omega] \end{aligned} \quad (5-27)$$

若 $L > 1$, 比较式(5-26)和式(5-27)可得

$$4h[L] = 2g[0] - g[1]$$

$$4h[L-k] = g[k] - g[k+1], \quad k = 1, 2, \dots, L-1$$

$$4h[0] = g[L]$$

整理后得

$$h[0] = \frac{1}{4}g[L]$$

$$h[k] = \frac{1}{4}(g[L-k] - g[L+1-k]), \quad k = 1, 2, \dots, L-1$$

$$h[L] = \frac{1}{4}(2g[0] - g[1])$$

若 $L=1$, 则有

$$2A(\Omega) = (2g[0] - g[1])\sin(0.5\Omega) + g[1]\sin(1.5\Omega)$$

所以
$$h[0] = \frac{1}{2}g[1], \quad h[1] = \frac{1}{4}(2g[0] - g[1])$$

5-29 在用积分加权平方误差准则设计 FIR 时, 设理想低通滤波器的幅度函数 $D(\Omega)$ 在 $[0, \pi]$ 范围的值为

$$D(\Omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 0 & \Omega_s \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

加权函数 $W(\Omega)$ 在通带的值为常数 W_p , 在阻带的值为常数 W_s , 在过渡带的值为 0。对 I 型线性相位滤波器, 试推导式矩阵 C 和列向量 d 的解析表达式。

解:

I 型线性相位系统的 $Q(\Omega) = 1$, 故 C 矩阵的 (m, k) 个元素为

$$c_{m,k} = W_p^2 \int_0^{\Omega_p} \cos(m\Omega) \cos(k\Omega) d\Omega + W_s^2 \int_{\Omega_s}^{\pi} \cos(m\Omega) \cos(k\Omega) d\Omega$$

由积分公式

$$\int \cos(mx) \cos(nx) dx = 0.5x \text{Sa}[(n+m)x] + 0.5x \text{Sa}[(n-m)x]$$

可得

$$\begin{aligned} c_{m,k} = & 0.5\Omega_p W_p^2 \{ \text{Sa}[(k+m)\Omega_p] + \text{Sa}[(k-m)\Omega_p] \} + \\ & 0.5\pi W_s^2 \{ \text{Sa}[(k+m)\pi] + \text{Sa}[(k-m)\pi] \} - \\ & 0.5\Omega_s W_s^2 \{ \text{Sa}[(k-m)\Omega_s] + \text{Sa}[(k+m)\Omega_s] \} \end{aligned}$$

直接积分可得列向量 d 的第 m 个元素为

$$d_m = W_p^2 \int_0^{\Omega_p} \cos(m\Omega) d\Omega = W_p^2 \Omega_p \text{Sa}(m\Omega_p)$$

第6章

功率谱估计

6.1 基本知识与重要公式

许多实际应用的信号本质上都是随机信号,对于随机信号,通常不计算其傅里叶变换,而分析其功率谱。为了实现随机信号的功率谱分析,需要了解随机信号的描述,特别是平稳各态遍历随机序列的描述与特征,以及平稳随机序列通过LTI离散时间系统的分析方法。在此基础上,就可掌握平稳各态遍历随机信号的经典功率谱估计方法和基于信号参数模型的现代谱估计方法。

1. 随机信号的特征描述

随机信号是随机变量的时间过程,可以用分布函数来描述。但在实际中,通过大量随机实验确定二维以上概率分布是十分复杂和困难的,因此通常采用均值、方差、自相关函数、互相关函数等数字特征来描述。

本课程只讨论平稳各态遍历随机信号,这类信号在进行时域特征描述时,可以用时间平均代替集总平均,即

$$\text{均值} \quad m_x = E\{X[k]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x[k] \quad (6-1)$$

$$\text{方差} \quad \sigma_x^2 = E\{[X[k] - m_x]^2\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N [x[k] - m_x]^2 \quad (6-2)$$

$$\begin{aligned} \text{自相关函数} \quad R_x[n] &= E\{X[k]X[k+n]\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x[k]x[k+n] \end{aligned} \quad (6-3)$$

且自相关函数具有下述特性:

若 $x[k]$ 是实信号, 则

$$R_x[n] = R_x[-n] \quad (6-4)$$

$$R_x[0] = E\{X^2[k]\}, \quad R_x[\infty] = m_x^2 \quad (6-5)$$

$$R_x[0] \geq R_x[n] \quad (6-6)$$

频域描述随机信号统计规律的重要特征参数是功率谱。对于平稳随机信号, 根据维纳-辛钦公式, 自相关函数和功率谱密度是一对离散时间傅里叶变换对。对于平稳各态遍历随机序列 $X[k]$, 其功率谱密度可以借助其一个样本 $x[k]$ 得到, 即

$$P_x(\Omega) = \text{DTFT}\{R_x[n]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|X(e^{j\Omega})|^2}{2N+1} \quad (6-7)$$

式中

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-N}^N x[k] e^{-j\Omega k} \quad (6-8)$$

2. 平稳随机序列通过 LTI 离散时间系统

平稳随机信号 $X[k]$ 通过单位脉冲响应为 $h[k]$ 的 LTI 离散时间系统, 其输出 $Y[k]$ 也是一个平稳随机信号。若 $X[k]$ 的均值为 m_x , 方差为 σ_x^2 , 自相关函数为 $R_x[n]$, 功率谱为 $P_x(\Omega)$, 则输出 $Y[k]$ 的数字特征为

$$\text{均值} \quad m_y = m_x \sum_n h[n] = m_x H(e^{j0}) \quad (6-9)$$

$$\text{自相关函数} \quad R_y[n] = R_h[n] * R_x[n] \quad (6-10)$$

$$\text{功率谱} \quad P_y(\Omega) = \text{DTFT}\{R_y[n]\} = |H(e^{j\Omega})|^2 P_x(\Omega) \quad (6-11)$$

$$\text{互相关函数} \quad R_{xy}[n] = h[n] * R_x[n] = R_{yx}[-n] \quad (6-12)$$

$$\text{互功率谱} \quad P_{xy}(\Omega) = H(e^{j\Omega}) P_x(\Omega), \quad P_{yx}(\Omega) = H^*(e^{j\Omega}) P_x(\Omega) \quad (6-13)$$

3. 经典功率谱估计

由于工程实际中只能得到有限长的随机信号, 用其计算功率谱只是随机信号真实功率谱的估计, 故称为功率谱估计。经典功率谱估计又称非参数法功率谱估计, 常用的方法有自相关法、周期图法, 以及改进的周期图法。若能够获得随机信号一个样本足够长的观测数据, 则采用相关法和改进的周期图法就能取得较好的谱估计结果。但对于短序列, 谱估计的质量明显下降。

相关法(间接法)

相关法是先估计随机信号的自相关函数 $\hat{R}_x[n]$, 然后再对 $\hat{R}_x[n]$ 进行傅里叶变换得随机信号的功率谱估计。若已知平稳各态遍历随机信号一个样本 $x[k]$ 的 N 个观测值, 则其自相关函数的估计为

$$\hat{R}_x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-|n|} x[k]x[k+|n|] = \frac{1}{N} x[-n] * x[n] \quad (6-14)$$

对 $\hat{R}_x[n]$ 进行傅里叶变换可得功率谱估计为

$$\hat{P}_x(\Omega) = \sum_{n=-L}^L \hat{R}_x[n] e^{-j\Omega n}, \quad |L| \leq N-1 \quad (6-15)$$

相关法谱估计的质量由自相关函数的估计质量决定。当 N 固定, n 很大时, 式(6-14)可能的乘积项将非常少, 自相关函数的估计值与真实值的偏差将加大。当 $N \rightarrow \infty$ 时, 偏差和方差均趋于零, 是渐进无偏的一致估计。因此为保证谱估计的质量, 在式(6-15)中常取 $L \ll N-1$ 。

周期图法(直接法)及其改进

若已获得随机信号单一样本的 N 个观测值 $x_N[k]$, 则通过对 $x_N[k]$ 进行傅里叶变换可得到其功率谱估计, 这种方法称为周期图法, 即

$$I_N(\Omega) = \hat{P}_x(\Omega) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\Omega})|^2 \quad (6-16)$$

周期图不是功率谱的一致估计, 其估计方差不随 N 的增大而趋于零。改进周期图的基本思想是减小方差, 常用的方法有两种, 一种是 Blackman 和 Tukey 提出平滑周期图法, 一种是 Bartlett 和 Welch 提出的平均周期图法。

平滑周期图法是对自相关函数估计值加窗函数 $w[n]$, 将误差较大的自相关函数估计值 $\hat{R}_x[n]$ 截去, 即

$$P_M(\Omega) = \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w[n] \hat{R}_x[n] e^{-j\Omega n} \quad (6-17)$$

平均周期图法是将随机信号样本的 N 个观测值分成每段长 M 的 A 段, 计算每段的周期图, 然后再将它们求和并取平均, 即

$$P_M^A(\Omega) = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{A-1} I_M^i(\Omega) \quad (6-18)$$

式中 $I_M^i(\Omega)$ 是第 i 段序列的周期图。这样估计方差将减小为原来的 $\frac{1}{A}$, 但方差减小的代价是偏差的增大和谱分辨率的降低。

将观测值分段时各段数据可以没有重叠, 也可以有重叠。若有重叠, 在同样的分段数下, 各段数据变长, 这就使得偏差减小, 频率分辨率提高。分段时窗函数的形状不影响方差, 各段数据重叠 50%, 将使方差减小 $\frac{1}{2}$, 但更多的重叠并不能使方差继续减小。

4. 现代功率谱估计

基于参数模型法的现代功率谱估计的基本方法如下:

① 选择一个好的模型,在输入是白噪声的情况下,使其输出等于待研究的信号,至少也是对该信号的一个良好近似。

② 利用已知的有限长序列求模型的参数。

③ 利用求出的模型参数估计该信号的功率谱。

平稳随机信号的自回归(AR)模型是参数模型法中常用的模型之一,其系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^p a_n z^{-n}} = \frac{1}{A(z)} \quad (6-19)$$

模型只有 p 个极点,用 $AR(p)$ 表示。

利用 L-D 递推算法和 Burg 递推算法可以由已知的有限长随机序列求出 AR 模型的参数。当 AR 模型输入功率谱为 σ^2 的白噪声时,由式(6-11)可得输出序列的功率谱为

$$\hat{P}_{AR}(\Omega) = \sigma^2 |H(e^{j\Omega})|^2 = \frac{\sigma^2}{\left| 1 + \sum_{n=1}^p a_n e^{-j\Omega n} \right|^2} \quad (6-20)$$

式(6-20)即是待研究的随机信号的功率谱估计。

L-D 递推算法

AR 模型的 Yule-Walker(Y-W)方程,给出了平稳随机信号 AR 模型输出信号的自相关函数 $R_y[m]$ 与模型参数 a_1, a_2, \dots, a_p 的关系,其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[1] & R_y[2] & \cdots & R_y[p] \\ R_y[1] & R_y[0] & R_y[1] & \cdots & R_y[p-1] \\ R_y[2] & R_y[1] & R_y[0] & \cdots & R_y[p-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[p] & R_y[p-1] & R_y[p-2] & \cdots & R_y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-21)$$

利用 L-D 递推算法可以由 Y-W 方程递推求出 a_1, a_2, \dots, a_p 和 σ_p^2 ,其步骤如下。

① 计算自相关函数的估计值 $\hat{R}_y[n]$ 。

② 根据自相关函数的估计值,由式(6-22)至式(6-26)递推求出 a_1, a_2, \dots, a_p 和 σ_p^2 。

$$a_1(1) = -\frac{R_y[1]}{R_y[0]} \quad (6-22)$$

$$\sigma_1^2 = R_y[0](1 - |a_1(1)|^2) \quad (6-23)$$

$$a_p(p) = - \frac{R_y[p] + \sum_{n=1}^{p-1} a_{p-1}(n) R_y[p-n]}{\sigma_{p-1}^2} \quad (6-24)$$

$$a_p(n) = a_{p-1}(n) + a_p(p) a_{p-1}(p-n) \quad (n = 1, 2, \dots, p-1) \quad (6-25)$$

$$\sigma_p^2 = [1 - |a_p(p)|^2] \sigma_{p-1}^2 \quad (6-26)$$

③ 由式(6-20)求出功率谱估计 $\hat{P}_{AR}(\Omega)$ 。

Burg 递推算法

Burg 递推算法的基本思想是直接由观测数据,利用线性预测器的前向和后向预测的总均方误差之和为最小的准则来估计反射系数,进而通过 L-D 算法的递推公式求出 AR 模型优化的参数。Burg 算法步骤如下。

① 确定初始条件为

$$e_0^f[k] = e_0^b[k] = y[k]$$

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y^2[k]$$

② 从 $p=1$ 开始迭代计算。由式(6-27)和式(6-25)计算 AR 模型参数,由式(6-26)递推 p 阶均方误差,式中 $K_p = a_p(p)$ 为 p 阶预测器的反射系数。

$$K_p = \frac{-2 \sum_{k=p}^{N-1} e_{p-1}^f[k] e_{p-1}^b[k-1]}{\sum_{k=p}^{N-1} \{e_{p-1}^f[k]^2 + e_{p-1}^b[k-1]^2\}} \quad (6-27)$$

③ 由式(6-28)和式(6-29)递推高一阶前、后向预测误差。

$$e_p^f[k] = e_{p-1}^f[k] + K_p e_{p-1}^b[k-1] \quad (6-28)$$

$$e_p^b[k] = e_{p-1}^b[k-1] + K_p e_{p-1}^f[k] \quad (6-29)$$

④ 若阶数小于 p , 则阶数加 1, 回到步骤(2)进行下一次迭代, 直到达到预定阶数 p 。

⑤ 由式(6-20)进行功率谱估计。

6.2 学习要求

1. 了解平稳各态遍历随机信号的特征描述。
2. 了解平稳各态遍历随机信号通过 LTI 离散系统的响应特征。
3. 掌握随机信号自相关函数估计的计算方法。
4. 掌握利用相关法和周期图法进行功率谱估计的基本原理及方法。
5. 了解现代功率谱估计的基本思想及主要数学模型。

6.3 重点和难点提示

本章的重点是随机信号的经典功率谱估计。常用的经典谱估计方法有相关法和周期图法。相关法功率谱估计的关键是获得随机信号自相关函数估计 $\hat{R}_x[n]$, 可根据式(6-14)通过随机信号的样本 $x[k]$ 和 $x[-k]$ 的卷积和得到。对随机信号自相关函数估计 $\hat{R}_x[n]$ 进行傅里叶变换即得随机信号功率谱估计。周期图法功率谱估计的关键是计算随机信号样本 N 个观测值 $x_N[k]$ 的傅里叶变换 $X_N(e^{j\omega})$, 根据 $X_N(e^{j\omega})$ 可由式(6-16)得随机信号功率谱估计。

本章的难点是现代功率谱估计的基本概念及方法。基于参数模型法的现代功率谱估计的基本思想是根据待研究随机信号的先验知识, 对随机信号在 N 个观测值以外的数据做出某种比较合理的假设, 它克服了经典谱估计方法中假设随机信号在 N 个观测值以外的数据都为零的不合理性, 从而提高了随机信号功率谱估计质量。现代功率谱估计主要基于 AR、MA 和 ARMA 模型, 理解 AR 模型以及 AR 模型参数的求解(L-D 和 Burg 算法)是分析其他模型的基础。

6.4 思考题

1. 计算平稳各态遍历随机序列的自相关函数估计主要有哪些方法?
2. 如何衡量功率谱估计的质量?
3. 在周期图法中如何提高功率谱估计的质量?
4. 利用 Welch 法进行功率谱估计有何特点? 如何评价其估计的质量?
5. 利用周期图法进行功率谱估计, 补零起着什么作用? 为什么补零不能提高频率分辨率?
6. 现代功率谱估计与经典功率谱估计的主要区别是什么?
7. 为什么说 AR 模型与线性预测误差滤波器有密切关系?
8. 前向预测误差与后向预测误差有何区别?
9. L-D 算法和 BURG 算法的主要区别是什么? 模型阶数的高低对谱估计结果有何影响?
10. 功率谱估计在实际中有何应用?

6.5 习题精解

6-1 已知某随机信号的观测序列为 $x[k] = \sin(\Omega_0 k + \theta)$, 式中 θ 为一均

匀分布的随机变量,其概率密度函数为

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & |\theta| \leq \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试计算该随机信号的均值和自相关函数。

解:

由随机信号均值的定义,可得

$$E\{x[k]\} = E\{\sin(\Omega_0 k + \theta)\} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega_0 k + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

由随机信号自相关函数的定义,可得

$$\begin{aligned} R_x[k_1, k_2] &= E\{\sin(\Omega_0 k_1 + \theta) \sin(\Omega_0 k_2 + \theta)\} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega_0 k_1 + \theta) \sin(\Omega_0 k_2 + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \cos[\Omega_0(k_2 - k_1)] \end{aligned}$$

6-2 设 $x[k] = A + \hat{x}[k]$, 式中 $A = E\{x[k]\}$, 且 $E\{\hat{x}[k]\} = 0$, 试证

$$R_x[n] = A^2 + R_{\hat{x}}[n]$$

证:

根据自相关函数的定义,可得

$$\begin{aligned} R_x[n] &= E\{x[k]x[k+n]\} = E\{(A + \hat{x}[k])(A + \hat{x}[k+n])\} \\ &= E\{A^2\} + E\{A\hat{x}[k]\} + E\{A\hat{x}[k+n]\} + E\{\hat{x}[k]\hat{x}[k+n]\} \end{aligned}$$

由于 $E\{\hat{x}[k]\} = 0$, 故可得

$$R_x[n] = A^2 + R_{\hat{x}}[n]$$

6-3 已知某随机序列的功率谱 $P_x(\Omega) = 1 + \cos \Omega$, 试求其自相关函数和平均功率 \bar{P} 。

解:

因为

$$P_x(\Omega) = 1 + \cos \Omega = 1 + \frac{1}{2}e^{j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x[n] e^{-jn\Omega}$$

所以

$$R_x[n] = \{0.5, \underset{\downarrow}{1}, 0.5\}, \quad \bar{P} = R_x[0] = 1$$

6-4 设有一数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{z+1}{(z-0.6)(z-0.8)}$$

若输入随机序列的均值为 5, 试求输出序列的均值。

解:

因为系统极点在单位圆内,所以系统稳定,故有

$$H(e^{j\Omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega} + 1}{(e^{j\Omega} - 0.6)(e^{j\Omega} - 0.8)}$$

由式(6-9)可得 $m_y = m_x H(e^{j0}) = 125$

6-5 一平稳随机序列 $X[k]$, 其自相关函数 $R_x[n] = \sigma_x^2 \delta[n]$, 自功率谱 $P_x(\Omega) = \sigma_x^2$ 为常数, 试求通过一个 q 阶 FIR 滤波器后的 $R_y[n]$ 、 $R_{xy}[n]$ 、 $P_{xy}(\Omega)$ 。

解:

设 q 阶 FIR 滤波器为

$$y[k] = \sum_{i=0}^q b_i x[k-i]$$

该滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i}$$

故得

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{i=0}^q b_i e^{-j\Omega i}$$

由式(6-11)可得输出功率谱为

$$\begin{aligned} P_y(\Omega) &= |H(e^{j\Omega})|^2 P_x(\Omega) = \left| \sum_{i=0}^q b_i e^{-j\Omega i} \right|^2 \sigma_x^2 \\ &= \sigma_x^2 \left\{ \left[\sum_{i=0}^q b_i \cos(i\Omega) \right]^2 + \left[\sum_{i=0}^q b_i \sin(i\Omega) \right]^2 \right\} \\ &= \sigma_x^2 \left\{ \sum_{i=0}^q b_i^2 + \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q b_i b_j \cos[(i-j)\Omega] \right\} \end{aligned}$$

利用傅里叶变换对

$$\delta[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} 1$$

$$\delta[k+m] + \delta[k-m] \xrightarrow{\text{DTFT}} 2\cos(m\Omega)$$

对 $P_y(\Omega)$ 求傅里叶反变换即得输出的自相关函数

$$R_y[n] = \left[\sigma_x^2 \sum_{i=0}^q b_i^2 \right] \delta[n] + \sigma_x^2 \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \frac{b_i b_j}{2} \{ \delta[n+j-i] + \delta[n+j+i] \}$$

互功率谱和互相关函数可类似地求出, 分别为

$$P_{xy}(\Omega) = \sigma_x^2 \left[b_0 + \sum_{i=1}^q b_i \cos(i\Omega) - j \sum_{i=1}^q b_i \sin(i\Omega) \right]$$

$$R_{xy}[n] = E\{x[k]y[k+n]\} = E\left\{x[k] \sum_{i=0}^q b_i x[k+n-i]\right\} = \sum_{i=0}^q b_i R_x[n-i]$$

6-6 某 LTI 离散系统其差分方程为

$$y[k] = 0.8y[k-1] + x[k] + x[k-1]$$

式中 $x[k]$ 是宽平稳随机序列, 具有零均值和自相关函数 $R_x[n] = 0.5^{|n|}$ 。求:
(1) 系统输出 $y[k]$ 的功率谱。(2) 输出自相关函数 $R_y[n]$ 。(3) 输出的方差 σ_y^2 。

解:

(1) 由差分方程可得系统函数为

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

由于系统的极点位于单位圆内, 故系统稳定, 系统的频率响应为

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - 0.8e^{-j\Omega}}, \quad |H(e^{j\Omega})|^2 = \frac{2 + 2\cos \Omega}{1.64 - 1.6\cos \Omega}$$

根据维纳-辛钦公式, 可得输入序列的功率谱为

$$P_x(\Omega) \approx \text{DTFT}\{0.5^{|n|}\} = \frac{1 - 0.5^2}{1 - \cos \Omega + 0.5^2} = \frac{0.75}{1.25 - \cos \Omega}$$

利用式(6-11)可得输出 $y[k]$ 的功率谱为

$$P_y(\Omega) = |H(e^{j\Omega})|^2 P_x(\Omega) = \frac{1.5 + 1.5\cos \Omega}{(1.64 - 1.6\cos \Omega)(1.25 - \cos \Omega)}$$

(2) 输出自相关函数 $R_y[n]$ 为

$$R_y[n] = \text{IDTFT}\{P_y(\Omega)\}$$

(3) 输出 $y[k]$ 的均值为 $m_y = m_x H(e^{j0}) = 0$

其方差为

$$\sigma_y^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |y[k] - m_y|^2 = R_y[0]$$

6-7 已知某平稳随机序列的一个样本 $x[k]$ 的 6 个观测值为 $\{0.174\ 6, 0.725\ 8, 2.183\ 2, -0.186\ 7, -0.588\ 3, -0.136\ 4\}$, 试求其均值、方差和自相关函数估计。

解:

$$\text{均值估计} \quad \hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 x[k] = 0.362$$

$$\text{方差估计} \quad \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x[k] - \hat{m}_x|^2 = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 |x[k] - \hat{m}_x|^2 = 0.822\ 8$$

自相关函数估计

$$\hat{R}_x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] x[k+n]$$

$$= \{-0.004, -0.033\ 6, -0.126\ 2, -0.168\ 9, 0.249, 0.953\ 9, 0.249, \downarrow\}$$

$-0.168\ 9, -0.126\ 2, -0.033\ 6, -0.004\}$

6-8 已知某平稳随机序列的一个样本 $x[k]$ 的 4 个观测值为 $\{1, -1, 0, 1\}$, 试分别用自相关法和周期图法计算其功率谱估计。

解:

自相关法

$$\hat{R}_x[n] = \frac{1}{N} x[-n] * x[n] = \frac{1}{4} \{1, -1, -1, \overset{\downarrow}{3}, -1, -1, 1\}$$

对上式进行傅里叶变换即得功率谱估计为

$$\begin{aligned}\hat{P}_x(\Omega) &= \text{DTFT}\{\hat{R}_x[n]\} = \frac{1}{4}(e^{j3\Omega} - e^{j2\Omega} - e^{j\Omega} + 3 - e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega}) \\ &= \frac{1}{4}[3 - 2\cos\Omega - 2\cos(2\Omega) + 2\cos(3\Omega)]\end{aligned}$$

周期图法

对 $x[k]$ 进行离散时间傅里叶变换, 有

$$X_N(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\Omega k} = 1 - e^{-j\Omega} + e^{-j3\Omega}$$

根据式(6-16)即可求出功率谱估计为

$$\begin{aligned}I_N(\Omega) &= \frac{1}{N} |X_N(e^{j\Omega})|^2 = \frac{1}{N} X_N(e^{j\Omega}) X_N^*(e^{j\Omega}) \\ &= \frac{1}{4} (1 - e^{-j\Omega} + e^{-j3\Omega})(1 - e^{j\Omega} + e^{j3\Omega}) \\ &= \frac{1}{4} [3 - 2\cos\Omega - 2\cos(2\Omega) + 2\cos(3\Omega)]\end{aligned}$$

6-9 已知某平稳连续随机信号的最高频率 $f_m = 100\text{ Hz}$, 利用周期图法估计该信号的功率谱。

(1) 若用 DFT 进行谱分析, 抽样频率 $f_{\text{sam}} = 1\ 200\text{ Hz}$, 谱线间隔小于 2 Hz , 则进行谱估计的信号的最小长度 N 是多少?

(2) 试给出两种将谱估计的方差减小到原来方差 $\frac{1}{5}$ 的方法, 并比较这两种方法。

解:

(1) 信号的最小长度 $N = \frac{f_{\text{sam}}}{\Delta f_c} = 600$

(2) 可以采用 Bartlett 法, 将 600 个观测值分成长度 $L = 120$ 的 5 段, 或者采用 Welch 法, 将 600 个观测值按各段 50% 重叠分成长度 $L = 200$ 的 5 段。

在同样的分段数下, 采用 Welch 法, 各段数据变长, 因此偏差比 Bartlett 法减

小,频率分辨率比 Bartlett 法高。

6-10 设有均值为 0, 方差为 1 的白噪声 $\eta[k]$ 通过下列差分方程表示的滤波器后产生随机信号 $y[k]$

$$y[k] = 0.9y[k-1] + \eta[k]$$

(1) 根据 AR 模型确定滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

(2) 求输出功率谱 $P_y(\Omega)$ 。

解:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$$

故 $H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.9e^{-j\Omega}}$, 已知 $P_\eta(\Omega) = 1$

所以 $P_y(\Omega) = |H(e^{j\Omega})|^2 P_\eta(\Omega) = \frac{1}{1.81 - 1.8\cos\Omega}$

6-11 已知一平稳随机序列自相关函数的估计值为

$$\hat{R}_x[0] = 1, \quad \hat{R}_x[1] = 0.7, \quad \hat{R}_x[2] = 0.3, \quad \hat{R}_x[3] = 0.1$$

试用 L-D 算法求 AR(3) 模型的参数。

解:

令 $p=1$, 由式(6-22) 和式(6-23)可求出

$$a_1(1) = -\frac{R_x[1]}{R_x[0]} = -0.7$$

$$\sigma_1^2 = R_x[0](1 - |a_1(1)|^2) = 0.51$$

令 $p=2$, 由式(6-24)、式(6-25) 和式(6-26)求出 AR(2) 模型的参数

$$a_2(2) = -\frac{R_x[2] + a_1(1)R_x[1]}{\sigma_1^2} = 0.3725$$

$$a_2(1) = a_1(1) + a_2(2)a_1(1) = -0.9608$$

$$\sigma_2^2 = (1 - |a_2(2)|^2)\sigma_1^2 = 0.4392$$

令 $p=3$, 由式(6-24)、式(6-25) 和式(6-26)求出 AR(3) 模型的参数

$$a_3(3) = -\frac{R_x[3] + a_2(1)R_x[2] + a_2(2)R_x[1]}{\sigma_2^2} = -0.1652$$

$$a_3(2) = a_2(2) + a_3(3)a_2(1) = 0.5312$$

$$a_3(1) = a_2(1) + a_3(3)a_2(2) = -1.0223$$

$$\sigma_3^2 = (1 - |a_3(3)|^2)\sigma_2^2 = 0.4272$$

由式(6-20)可求出该随机信号的功率谱估计为

$$\hat{P}_{AR}(\Omega) = \frac{\sigma_3^2}{|1 - 1.0223e^{-j\Omega} + 0.5312e^{-j2\Omega} - 0.1652e^{-j3\Omega}|^2}$$

6-12 一平稳随机序列的一个样本 $x[k]$ 的 5 个观测值为 $\{1, -1, 0, -1, 1\}$ 。

(1) 利用 L-D 算法设计一个 3 阶 AR 模型, 确定模型的参数。

(2) 利用 Burg 算法计算各阶反射系数, 并画出格形预测误差滤波器的框图。

解:

(1) 自相关函数为

$$R_x[n] = \frac{1}{5}x[n] \tilde{*} x[-n] = \frac{1}{5}\{1, -2, 1, -2, \overset{\downarrow}{4}, -2, 1, -2, 1\}$$

利用 L-D 算法可以递推求出 3 阶 AR 模型的参数为

$$a_3(0) = 1, \quad a_3(1) = 0.5, \quad a_3(2) = 0.25, \quad a_3(3) = 0.5$$

(2)

① 确定初始条件为

$$e_0^f[k] = e_0^b[k] = x[k] = \{1, -1, 0, -1, 1\}$$

② 从 $p=1$ 开始迭代计算。由式(6-27)计算 K_1 , 得

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{-2 \sum_{k=1}^4 e_0^f[k] e_0^b[k-1]}{\sum_{k=1}^4 \{e_0^f[k]^2 + e_0^b[k-1]^2\}} \\ &= \frac{-2e_0^f[1]e_0^b[0] - 2e_0^f[2]e_0^b[1] - 2e_0^f[3]e_0^b[2] - 2e_0^f[4]e_0^b[3]}{e_0^f[1]^2 + e_0^b[0]^2 + e_0^f[2]^2 + e_0^b[1]^2 + e_0^f[3]^2 + e_0^b[2]^2 + e_0^f[4]^2 + e_0^b[3]^2} \\ &= 0.6667 \end{aligned}$$

③ 由式(6-28)和式(6-29)递推 1 阶前、后向预测误差

$$e_1^f[k] = e_0^f[k] + K_1 e_0^b[k-1] = \{1, -0.3333, -0.6667, -1, 0.3333\}$$

$$e_1^b[k] = e_0^b[k-1] + K_1 e_0^f[k] = \{0.6667, 0.3333, -1, -0.6667, -0.3333\}$$

④ 令 $p=2$, 由式(6-27)计算 K_2 , 有

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{-2 \sum_{k=2}^4 e_1^f[k] e_1^b[k-1]}{\sum_{k=2}^4 \{e_1^f[k]^2 + e_1^b[k-1]^2\}} \\ &= \frac{-2e_1^f[2]e_1^b[1] - 2e_1^f[3]e_1^b[2] - 2e_1^f[4]e_1^b[3]}{e_1^f[2]^2 + e_1^b[1]^2 + e_1^f[3]^2 + e_1^b[2]^2 + e_1^f[4]^2 + e_1^b[3]^2} = -0.3571 \end{aligned}$$

⑤ 由式(6-28)和式(6-29)递推 2 阶前、后向预测误差

$$\begin{aligned}
 e_2^f[k] &= e_1^f[k] + K_2 e_1^b[k-1] \\
 &= \{1.000\ 0, -0.571\ 4, -0.785\ 7, -0.642\ 9, 0.571\ 4\} \\
 e_2^b[k] &= e_1^b[k-1] + K_2 e_1^f[k] \\
 &= \{-0.357\ 1, 0.785\ 7, 0.571\ 4, -0.642\ 9, -0.785\ 7\}
 \end{aligned}$$

⑥ 令 $p=3$, 由式(6-27)计算 K_3 , 有

$$\begin{aligned}
 K_3 &= \frac{-2 \sum_{k=3}^4 e_0^f[k] e_0^b[k-1]}{\sum_{k=3}^4 |e_0^f[k]^2 + e_0^b[k-1]^2|} = \frac{-2e_2^f[3]e_2^b[2] - 2e_2^f[4]e_2^b[3]}{e_2^f[3]^2 + e_2^b[2]^2 + e_2^f[4]^2 + e_2^b[3]^2} \\
 &= 0.993\ 1
 \end{aligned}$$

格形预测误差滤波器的框图如图 6-1 所示。

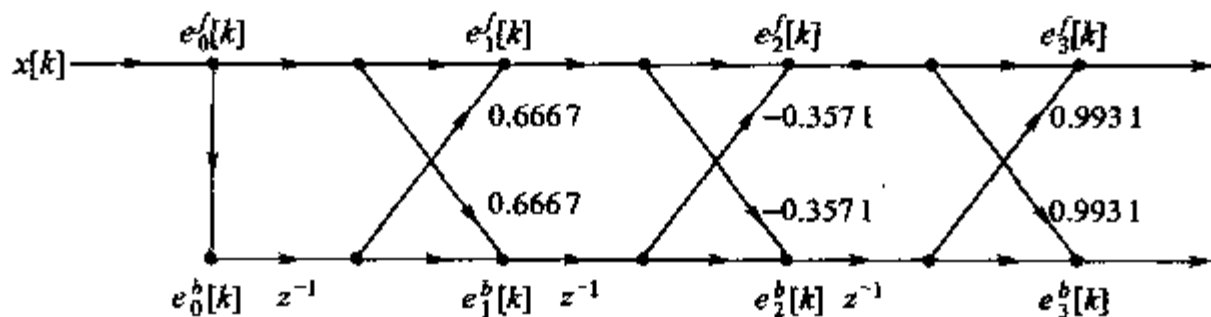


图 6-1 题 6-12 解答图

第 7 章

数字系统的结构

7.1 基本知识与重要公式

数字系统可以用直接型、级联型、并联型等多种不同的运算结构来实现。在不考虑有限字长影响时,这些不同的实现方法是等效的;在考虑有限字长影响时,这些不同的实现方法在精度、稳定性以及运算速度等方面存在一定差异。尽管有限字长对直接型结构的数字系统影响最大,但直接型结构是其他运算结构的基础。

1. IIR 数字滤波器的结构

IIR 数字滤波器的结构主要有直接型、级联型和并联型。直接型结构有直接 I 型、直接 II 型和转置的直接 II 型,由 IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 的分子、分母多项式可直接得到。由于直接 II 型结构所需延时器的数目仅为直接 I 型结构所需延时器数目的一半,所以在实际中更多地使用直接 II 型结构。若 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (7-1)$$

且 $M = N$, 则直接 II 型和转置的直接 II 型结构如图 7-1 所示。

若将 $H(z)$ 的 $N(z)$ 和 $D(z)$ 都分解成 1 阶或 2 阶实系数因子形式,然后将它们组成 1 阶和 2 阶子系统,即

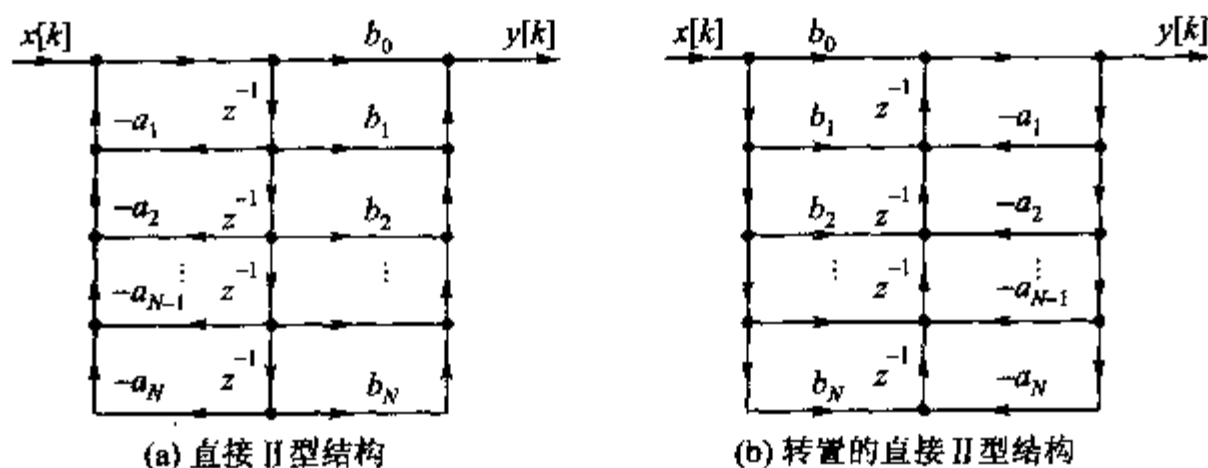


图 7-1 IIR 数字滤波器的直接 II 型结构

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\cdots H_L(z) \quad (7-2)$$

分别画出各子系统的直接型结构,再将它们级联起来,便可得到 IIR 数字滤波器的级联型结构。

若将系统函数 $H(z)$ 展开成部分分式,形成 1 阶、2 阶实系数子系统并联形式,即

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_J(z) \quad (7-3)$$

分别画出各子系统的直接型结构,再将它们并联起来,便可得到 IIR 数字滤波器的并联型结构。

从有限字长的影响来看,直接型受到有限字长影响最大,易于出现不稳定现象,而级联型和并联型结构受有限字长影响较小。级联型结构的每一个基本节系数变化只影响该子系统的零极点,因而易于控制滤波器的零、极点,也便于调整滤波器的频率特性。并联型各子系统之间互不影响,易于实现并行处理。

2. FIR 数字滤波器的结构

FIR 滤波器常用的结构有直接型、级联型与频率取样型。线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h[k]$ 具有对称性,即 $h[k] = \pm h[M-k]$,因此,在利用直接型结构实现时可以共用乘法器,如图 7-2 所示。

由频率取样法设计的 FIR 数字滤波器可以采用频率取样型结构实现,其系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{H[m]}{1 - W_N^{-m} z^{-1}} \quad (7-4)$$

该结构是由 N 个 1 阶 IIR 子系统并联,再与一个 FIR 子系统级联而构成,如图 7-3 所示。由于频率取样型结构在 z 平面单位圆上存在零点和极点,在有限字长情况下,若单位圆上的极点不能和零点抵消,则滤波器可能会出现不稳定。

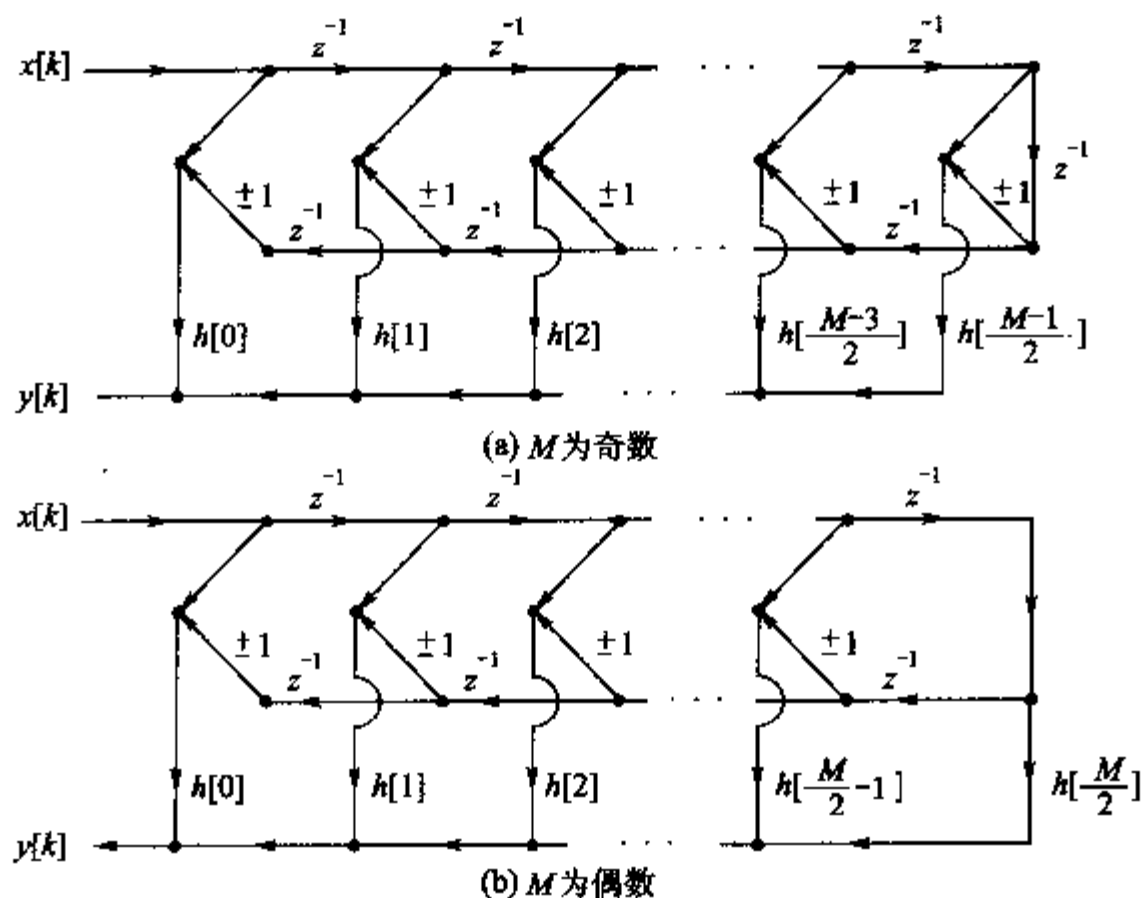


图 7-2 线性相位 FIR 数字滤波器的直接型结构

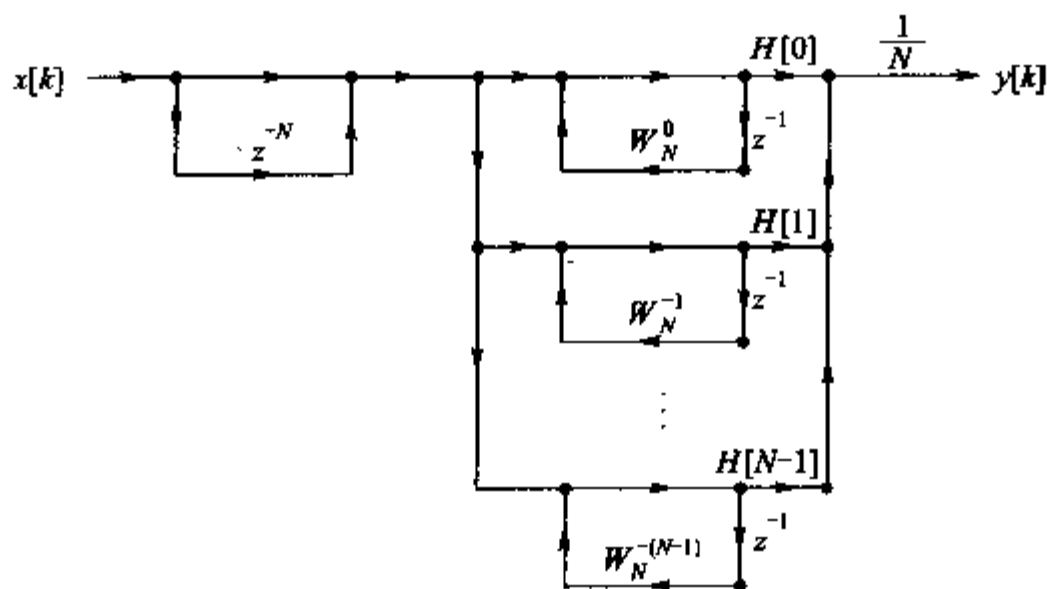


图 7-3 FIR 滤波器频率取样型结构

3. 数字滤波器的格型结构

IIR 数字滤波器和 FIR 数字滤波器也可以通过格型结构实现,格型结构在信号建模、谱估计和自适应滤波中得到了广泛应用。根据谱估计中预测误差滤波器的格型结构,可以推导出全零点 FIR 滤波器、全极点 IIR 滤波器和零极点 IIR 滤波器的格型结构,如图 7-4 所示。全零点滤波器的系统函数 $H_{AZ}(z)$ 和全极点滤波器的系统函数 $H_{AP}(z)$ 可分别表达为

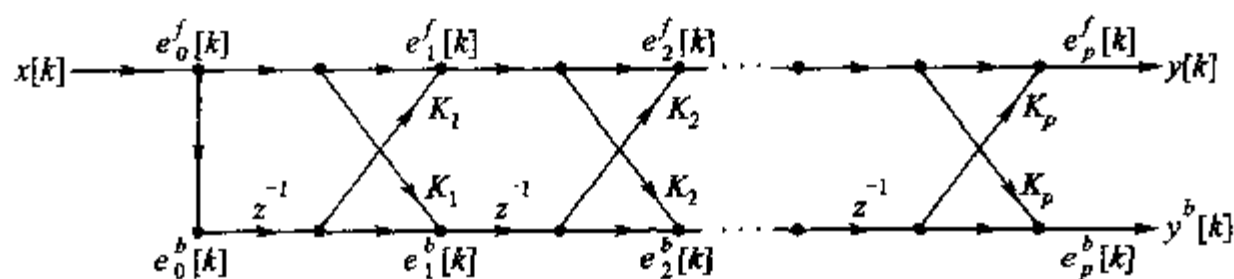
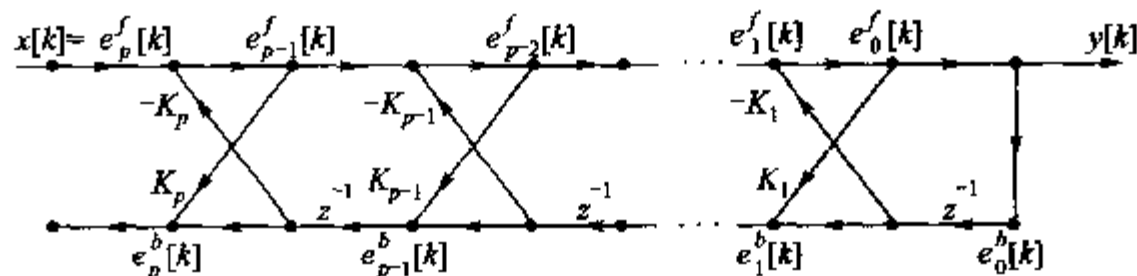
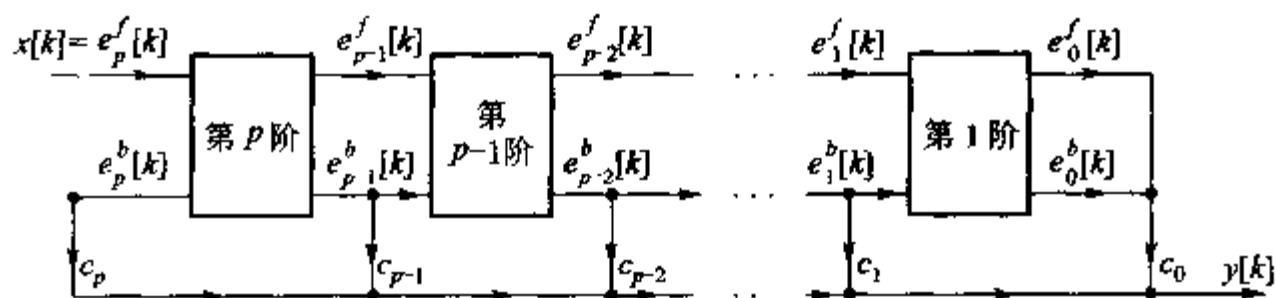
(a) p 阶全零点 FIR 滤波器的格型结构(b) p 阶全极点 IIR 滤波器的格型结构(c) p 阶零极点 IIR 滤波器的格型结构

图 7-4 格型结构

$$H_{AZ}(z) = A(z) = 1 + \sum_{n=1}^p a_p(n)z^{-n}, \quad H_{AP}(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^p a_p(n)z^{-n}}$$

则图 7-4(a)、(b)中各反射系数可由式(7-5)至式(7-7)递推求出。

$$K_p = a_p(p) \quad (7-5)$$

$$a_{p-1}(i) = \frac{a_p(i) - K_p a_p(p-i)}{1 - K_p^2} \quad i = 1, 2, \dots, p-1 \quad (7-6)$$

$$K_{p-1} = a_{p-1}(p-1) = \frac{a_p(p-1) - K_p a_p(1)}{1 - K_p^2} \quad (7-7)$$

零极点滤波器的系统函数 $H(z)$ 可表达为

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^p c_m z^{-m} A_m(z^{-1})}{A(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

式中

$$B(z) = \sum_{m=0}^p b_m z^{-m} = \sum_{m=0}^p c_m z^{-m} A_m(z^{-1})$$

则图 7-4(c) 中的方框是图 7-4(b) 全极点 IIR 滤波器的基本格型单元, c 参数可由式(7-8)和式(7-9)递推求出。

$$c_p = b_p \quad (7-8)$$

$$b_m = c_m + \sum_{i=m+1}^p c_i a_i (i-m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (7-9)$$

实现格型结构比实现直接型或级联型结构需要更多的运算, 但格型结构可以降低有限字长效应的影响。

4. 有限字长效应

实际数字系统中的参数, 总是存储在有限字长的存储单元中, 以有限位数表示, 由此必然产生一定的误差。有限字长的影响主要表现在 A/D 转换的量化误差、滤波器系数的量化误差、滤波器的定点运算误差三方面。

模拟信号经过 A/D 转换器转换为 b 位数字信号 $\hat{x}[k]$ 可表示为

$$\hat{x}[k] = x[k] + e[k]$$

式中 $x[k]$ 为精确抽样值, $e[k]$ 为量化误差。 $e[k]$ 的均值与方差分别为

$$m_e = E\{e[k]\} = 0, \quad \sigma_e^2 = E\{e^2[k]\} = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12}$$

若信号 $x[k]$ 的平均功率为 σ_x^2 , 则信噪比 SNR 和字长之间有如下关系:

$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) \approx 6.02b + 10.79 + 10 \lg(\sigma_x^2) \text{ dB} \quad (7-10)$$

即每增加一位字长, SNR 约增加 6 dB。显然, 字长越长 A/D 转换的量化误差越小。

在实现式(7-1)描述的数字滤波器时, 由于字长有限, 滤波器系数 a_j 、 b_i 量化后不能准确地取所要求的值, 使系统函数零、极点的实际位置也与设计位置不同, 系统的实际频响与所要求的频响出现偏差。系数量化误差对 IIR 数字滤波器影响较大, 可能会使原本在单位圆内的极点跑到单位圆外, 造成系统不稳定。若要维持 IIR 数字滤波器稳定, 则系数量化时的最小字长应满足

$$\left| \frac{\Delta a_j}{\max\{a_j\}} \right| \leq \frac{q}{2} = 2^{-(b+1)} \quad (7-11)$$

式中 $\max\{a_j\}$ 为式(7-1)分母多项式的最大系数, $|\Delta a_j|$ 为

$$|\Delta\alpha_j| = 1 + \sum_{k=1}^N a_k \quad (7-12)$$

滤波器系数的量化误差与滤波器的结构有关,直接型结构对系数量化误差很敏感,量化误差较大;而并联结构和级联结构中每个子系统最多只有两个共轭极点,故量化误差较小。

滤波器的定点运算误差主要是加法溢出和乘法舍入误差。避免加法溢出的方法是适当增加字长或是将输入信号乘以一个小于1的比例因子 A 使加法运算结果在数的有效表示范围内。乘法运算的舍入误差对IIR数字滤波器影响严重,可能会使极点从原来的单位圆内迁移到单位圆上,从而产生等幅序列形式的极限环振荡,致使滤波器不能正常工作。极限环振荡的幅度称为死区,死区 $|\hat{y}[k-1]|$ 与滤波器系数 α 及有效字长 b 之间的关系为

$$|\hat{y}[k-1]| \leq \frac{2^{-(b+1)}}{1-|\alpha|} \quad (7-13)$$

在字长一定的情况下, $|\alpha|$ 减小,死区减小;而在 α 一定时,增加字长 b ,死区也减小。滤波器的定点运算误差也与滤波器的结构有关,一般情况下,并联型结构误差最小,级联次之,直接型结构误差最大,级联型结构还与级联的顺序有关。

7.2 学习要求

1. 牢固掌握IIR及FIR数字滤波器的直接型结构。
2. 了解数字滤波器的格型结构。
3. 掌握有限字长对数字滤波器设计的影响及改善有限字长效应的基本方法。

7.3 重点和难点提示

本章重点是IIR数字滤波器的直接型结构和FIR数字滤波器的线性相位直接型结构。IIR数字滤波器的直接型结构受有限字长影响较大,易于出现不稳定现象,在实际中很少采用,但直接型结构是级联型结构和并联型结构的基础。若将系统函数表示成实系数1阶或2阶子系统的乘积,每个子系统由直接型结构实现,这些子系统级联起来即得级联型结构。若将系统函数表示成实系数1阶或2阶子系统之和,每个子系统由直接型结构实现,这些子系统并联起来即得并联型结构。FIR数字滤波器的线性相位直接型结构工作稳定,结构简单,易于实现。在实现FIR线性相位直接型结构时,利用其脉冲响应 $h[k]$ 的对称性实现

乘法器共用,可减少乘法器的数量。

本章难点是有限字长效应。有限字长对数字滤波器的影响比较复杂,很难严格地分析,但可以定性地了解有限字长效应对数字信号处理的影响。随着高精度器件的不断出现,通过选取合理的系统构成形式,就可以有效地改善数字滤波器有限字长的影响。

7.4 思考题

1. 为什么 $H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{H[m]}{1-W_N^{-m}z^{-1}}$ 能实现 FIR 滤波器?

2. 对于频率取样型 FIR 数字滤波器,采取什么措施能够避免可能出现的系统不稳定?

3. 滤波器的格型结构主要有哪些应用场合?

4. 除了 IIR 和 FIR 的基本结构、格型结构外,还有哪些滤波器的实现结构?

5. 为什么有限字长对 IIR 系统影响较大,对 FIR 系统影响较小?

6. 有限字长对数字滤波器会产生哪些影响?如何减小有限字长效应?

7.5 习题精解

7-1 已知某数字系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{z^3}{(z-0.4)(z^2-0.6z+0.25)}$$

试分别画出其直接型、级联型、并联型结构。

解:

将 $H(z)$ 表示为

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}+0.49z^{-2}-0.1z^{-3}}$$

由此可画出系统的直接型结构,如图 7-5(a)所示。由于系统有一单实数极点和一对共轭复数极点,故可将 $H(z)$ 表示为实系数 1 阶、2 阶子系统的乘积,即

$$H(z) = \frac{1}{1-0.4z^{-1}} \frac{1}{1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2}}$$

由此可画出系统的级联型结构,如图 7-5(b)所示。将 $H(z)$ 表示为实系数 1 阶、2 阶子系统之和,即

$$H(z) = \frac{0.9412}{1-0.4z^{-1}} + \frac{0.0588+0.5882z^{-1}}{1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2}}$$

由此可画出系统的并联型结构,如图7-5(c)所示。

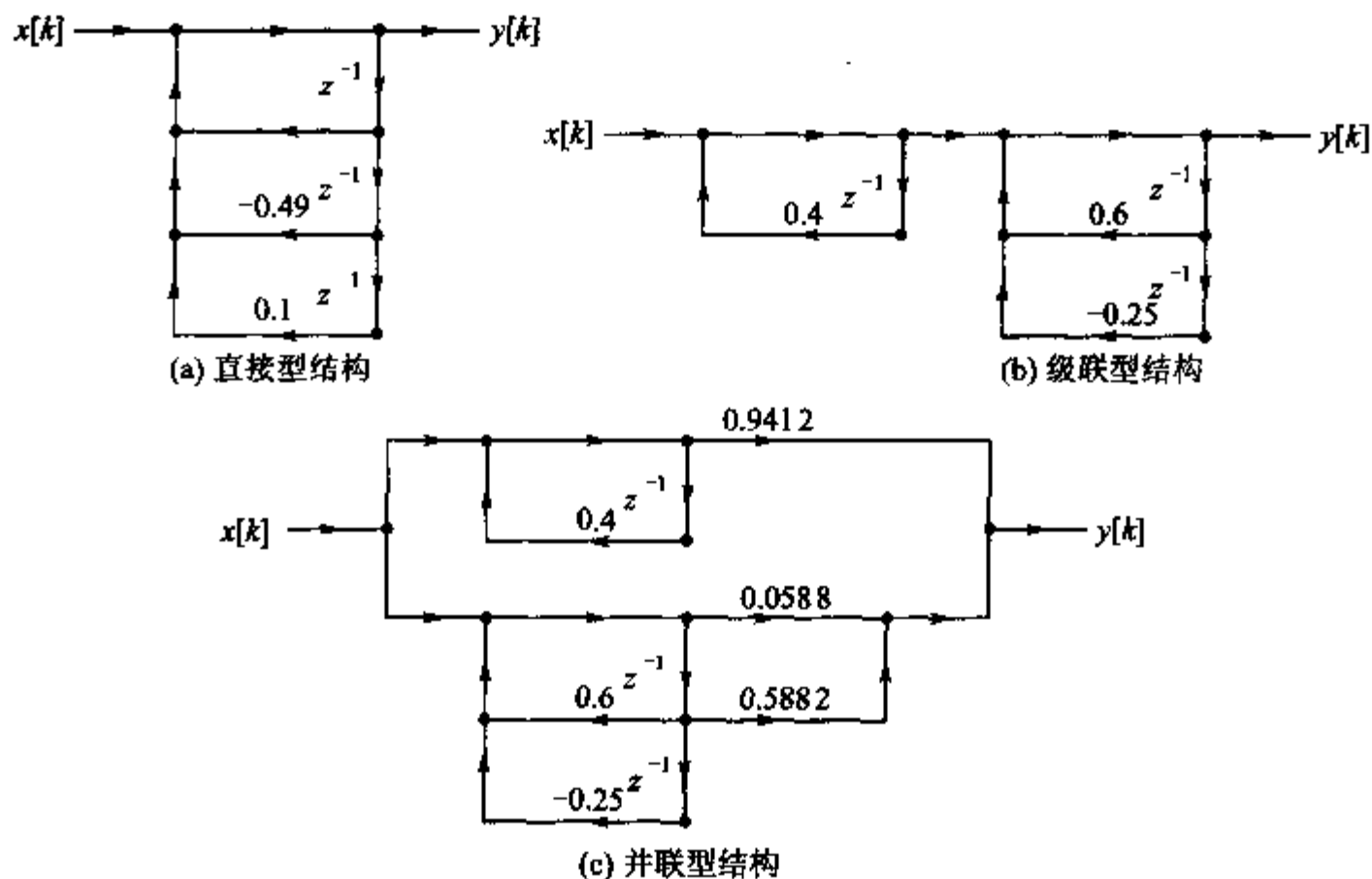
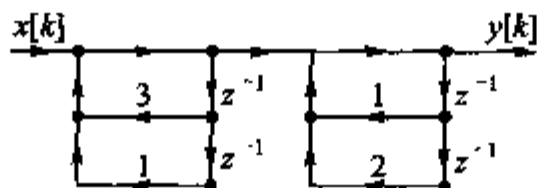


图 7-5 题 7-1 解答图

7-2 一线性时不变系统用题 7-2 图的流图实现。

- (1) 写出该系统的差分方程和系统函数。
- (2) 计算每个输出样本需要多少次实数乘法和实数加法?



题 7-2 图

解:

$$(1) H(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}}$$

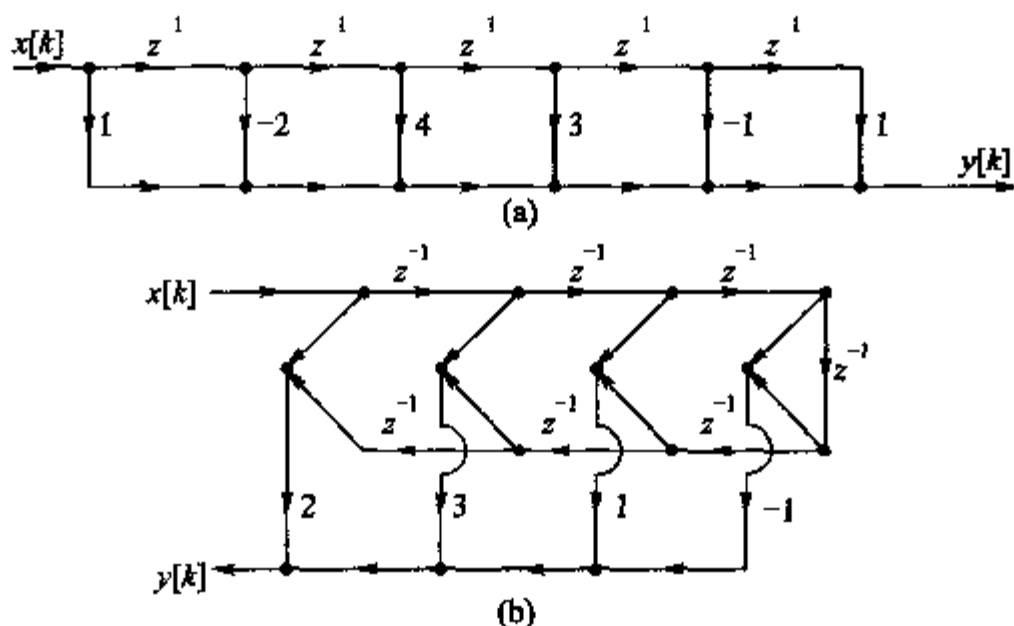
$$y[k] - 4y[k-1] + 7y[k-3] + 2y[k-4] = x[k]$$

- (2) 每个输出样本需要 4 次实数乘法和 4 次实数加法。

7-3 已知 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = (1 + z^{-1})(1 - 2z^{-1} + 2z^{-2})$$

试分别画出其直接型、级联型结构。



题 7-5 图

$$(2) h[k] = 2\delta[k] + 3\delta[k-1] + \delta[k-2] - \delta[k-3] - \delta[k-4] + \delta[k-5] + 3\delta[k-6] + 2\delta[k-7]$$

7-6 对于频率取样型 FIR 数字滤波器,为了保证系统的稳定性,通常在 r 圆上取样($r < 1$ 但近似等于 1),试修正教材中式(7-17)、式(7-18)和式(7-19),并画出相应的流图。

解:

为保证频率取样型 FIR 数字滤波器的稳定,在 r 圆上取样,即用 rz^{-1} 代替 z^{-1} ,以使极点和相应的零点移到单位圆内,由此式(7-4)可改写为

$$H(z) \approx \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{H[m]}{1 - r W_N^{-m} z^{-1}}$$

利用 $H[m] = H^*[N-m]$ 和 $(W_N^{-k})^* = W_N^{-(N-k)}$ 即可推出实系数频率取样型 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \left\{ \frac{H[0]}{1 - rz^{-1}} + \frac{H\left[\frac{N}{2}\right]}{1 + rz^{-1}} + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2|H[m]|H_m(z) \right\}, \quad N \text{ 为奇数}$$

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \left\{ \frac{H[0]}{1 - rz^{-1}} + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2|H[m]|H_m(z) \right\}, \quad N \text{ 为偶数}$$

其中

$$H_m(z) = \frac{\cos(\varphi[m]) - rz^{-1} \cos\left(\varphi[m] - \frac{2\pi m}{N}\right)}{1 - 2rz^{-1} \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) + r^2 z^{-2}}$$

图 7-8 画出了 N 为偶数时修正的频率取样型结构。

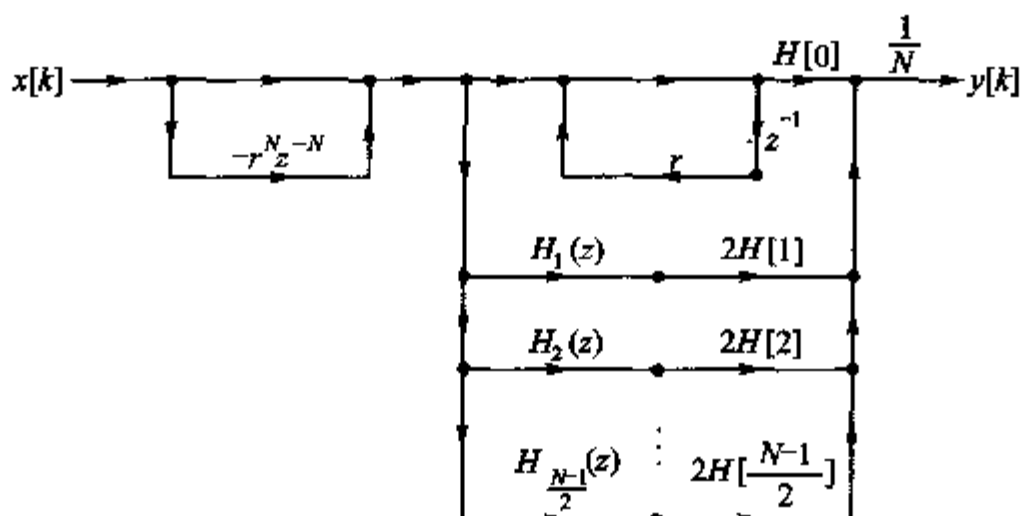
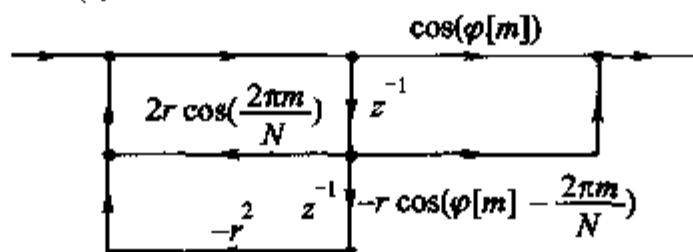
(a) N 为偶数时修正的频率取样型结构图(b) 实系数 2 阶子系统 $H_m(z)$ 的结构图

图 7-8 题 7-6 解答图

7-7 已知 FIR 数字滤波器频率特性的 16 个取样值为

$$H[0] = 12, \quad H[1] = -3 - j, \quad H[2] = 1 + j,$$

$$H[3] \sim H[13] = 0, \quad H[14] = 1 - j, \quad H[15] = -3 + j$$

若设 $r=1$, 试计算 $H(z)$ 并画出实系数形式的频率取样型结构。

解:

由式(7-4), 可得

$$H(z) = \frac{1 - z^{-16}}{16} \left\{ \frac{12}{1 - z^{-1}} + \frac{-3 - j}{1 - W_{16}^{-1} z^{-1}} + \frac{1 + j}{1 - W_{16}^{-2} z^{-1}} + \frac{1 - j}{1 - W_{16}^{-14} z^{-1}} + \frac{-3 + j}{1 - W_{16}^{-15} z^{-1}} \right\}$$

利用 $W_{16}^{-15} = W_{16}^{-(16-1)} = W_{16}^1$, $W_{16}^{-14} = W_{16}^{-(16-2)} = W_{16}^2$, 将上式化为实系数表示式

$$H(z) = \frac{1 - z^{-16}}{16} \left\{ \frac{12}{1 - z^{-1}} + \frac{-6 + \left[6\cos\left(\frac{2\pi}{16}\right) + 2\sin\left(\frac{2\pi}{16}\right) \right] z^{-1}}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{16}\right) z^{-1} + z^{-2}} + \frac{2 - \left[2\cos\left(\frac{4\pi}{16}\right) + 2\sin\left(\frac{4\pi}{16}\right) \right] z^{-1}}{1 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{16}\right) z^{-1} + z^{-2}} \right\}$$

由此可画出实系数频率取样型结构,如图7-9所示。

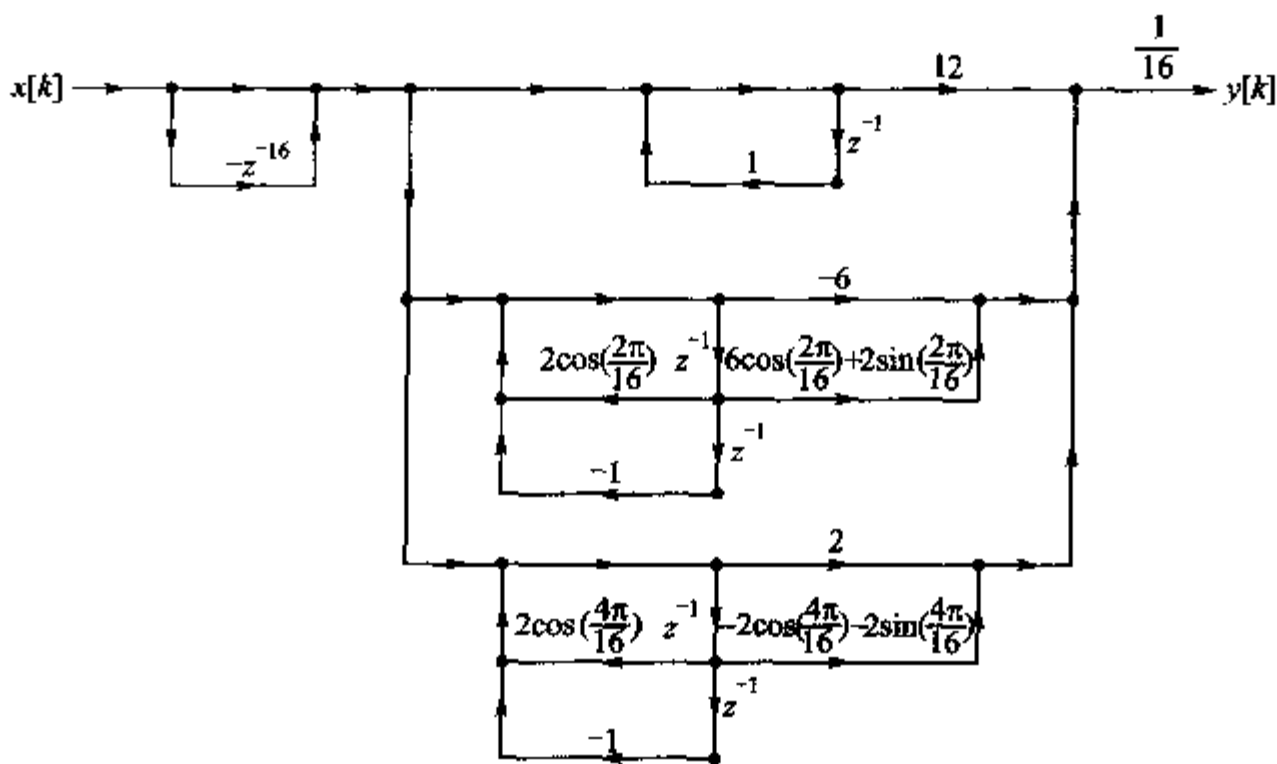


图7-9 题7-7解答图

7-8 一线性时不变系统的单位脉冲响应

$$h[k] = \begin{cases} a^k & 0 \leq k \leq 7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 画出该系统的直接型 FIR 结构流图。

(2) 证明该系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - a^8 z^{-8}}{1 - az^{-1}}$$

并由该系统函数画出由 FIR 系统和 IIR 系统级联而成的结构流图。

(3) 比较(1)和(2)两种系统实现方法,哪一种需要较多的延迟器? 哪一种实现需要较多的运算次数?

解:

$$\begin{aligned} (1) H(z) &= \sum_{k=0}^7 h[k] z^{-k} \\ &= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + a^4 z^{-4} + a^5 z^{-5} + a^6 z^{-6} + a^7 z^{-7} \end{aligned}$$

直接型 FIR 结构流图如图7-10(a)所示。

(2) 由(1),根据等比数列的前 n 项和,即可得到

$$H(z) = \frac{1 - a^8 z^{-8}}{1 - az^{-1}} = (1 - a^8 z^{-8}) \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

由此可画出由 FIR 系统和 IIR 系统级联而成的结构流图,如图7-10(b)所示。

(3) (2)中的实现需要延迟器较多,(1)中的实现需要运算次数较多。

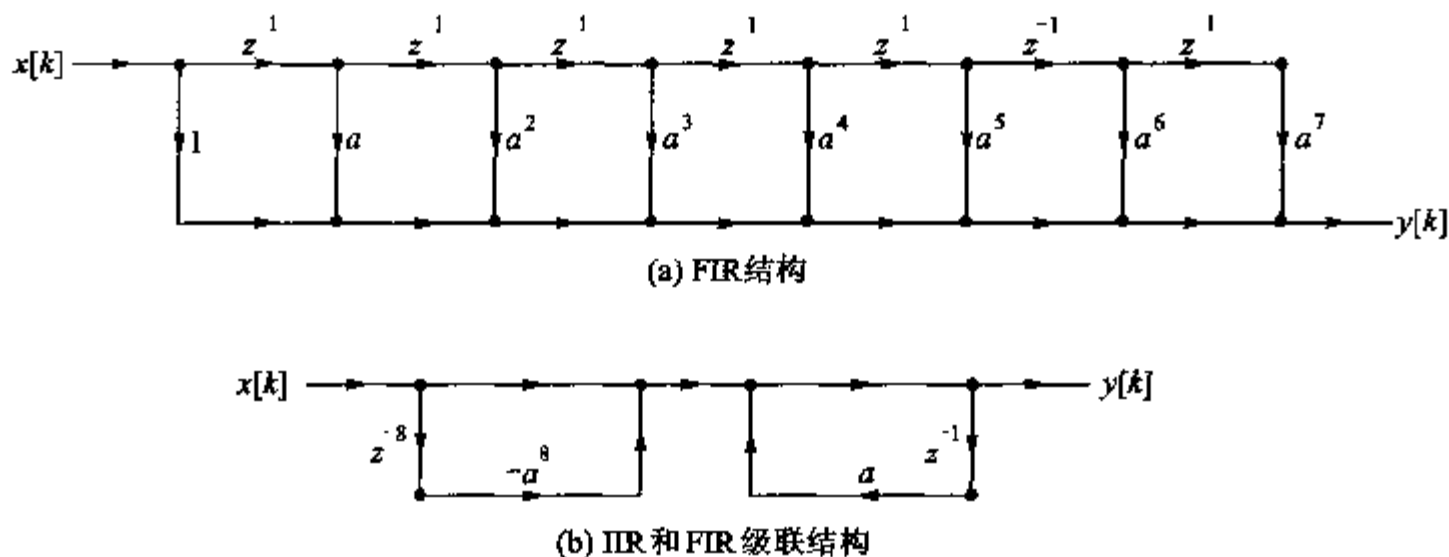


图 7-10 题 7-8 解答图

7-9 分别画出题 7-1 和 7-3 所述系统的格型结构。

解:

(1) 题 7-1 为一全极点系统,其 $H(z)$ 可以表示为

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.49z^{-2} - 0.1z^{-3}}$$

由此可以得到 $a_3(1) = -1, a_3(2) = 0.49, a_3(3) = -0.1$, 利用全极点系统格型结构反射系数的递推公式,可推出

$$K_3 = a_3(3) = -0.1$$

$$K_2 = a_2(2) = \frac{a_3(2) - K_3 a_3(1)}{1 - K_3^2} = 0.3939$$

$$a_2(1) = \frac{a_3(1) - K_3 a_3(2)}{1 - K_3^2} = -0.9606$$

$$K_1 = a_1(1) = \frac{a_2(1) - K_2 a_2(1)}{1 - K_2^2} = -0.6891$$

由确定的反射系数 K_1, K_2, K_3 可得题 7-1 所示系统的格型结构,如图 7-11(a) 所示。

(2) 题 7-2 为一全零点系统,其 $H(z)$ 可以表示为 $H(z) = 1 - z^{-1} + 2z^{-3}$ 。由于全极点系统和全零点系统格型结构反射系数的递推公式相同,故由 $a_3(1) = -1, a_3(2) = 0, a_3(3) = 2$, 可推出反射系数 K_1, K_2, K_3 分别为

$$K_1 = 1.0000, K_2 = -0.6667, K_3 = 2.0000$$

其格型结构如图 7-11(b) 所示。

7-10 已知输入信号 $x[k]$ 乘比例因子 A 以后的方差 $A^2 \sigma_f^2 = 16$, 试求使

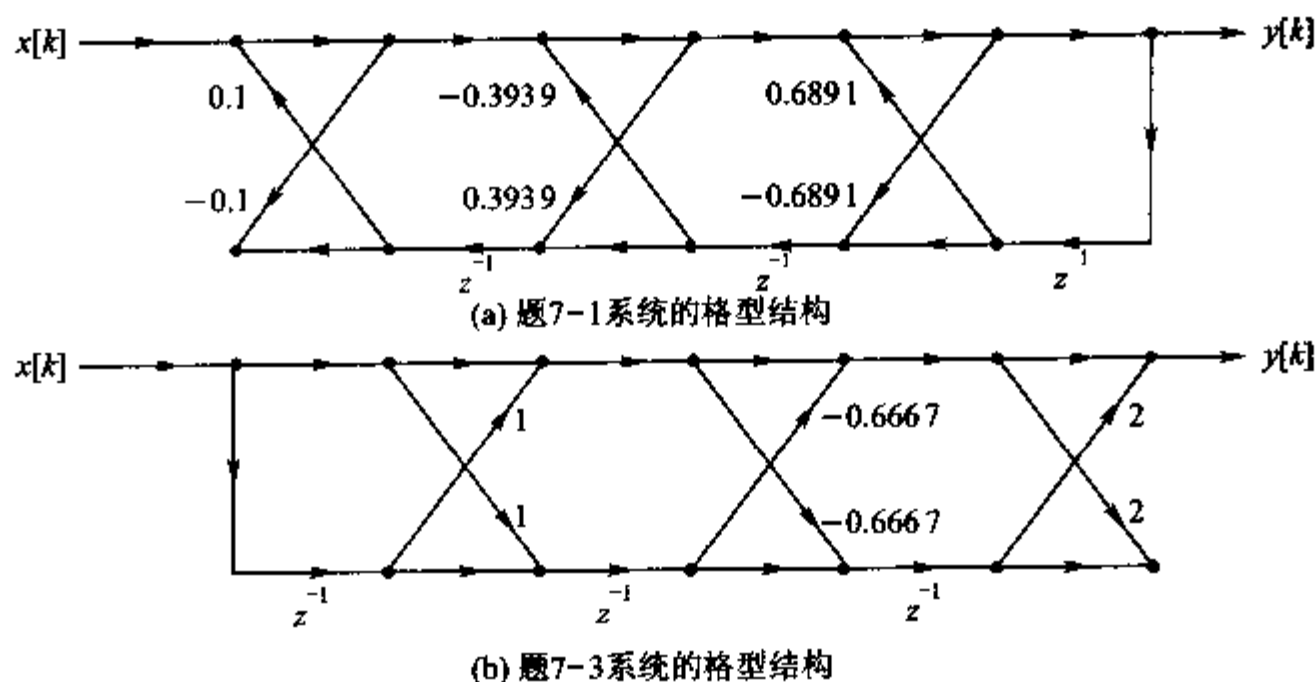


图 7-11 题 7-9 解答图

SNR ≥ 60 dB 时的字长 b 的位数。

解:

由式(7-10)

$$\text{SNR} \approx 6.02b + 10.79 + 10\log_{10}(\sigma_x^2) \text{ dB} \geq 60 \text{ dB}$$

可以解出字长 $b \geq 8$

7-11 已知某数字系统的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.1z^{-1}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.745z^{-2}} \\ &= \frac{0.1z^{-1}}{[1 - (0.85 + j0.15)z^{-1}][1 - (0.85 - j0.15)z^{-1}]} \end{aligned}$$

(1) 确定保持稳定的最小字长。

(2) 若使极点位置在 0.5% 以内变化, 系数 a_2 ($=0.745$) 变化的百分数是多少? 并确定 a_2 在这个变化范围内时所需要的最小字长。

(3) 若采用 8 位字长的寄存器存储系数, 写出该系统实际的系统函数 $\hat{H}(z)$ 。

解:

$$(1) \quad \Delta a_k = 1 - 1.7 + 0.745 = 0.045$$

已知最大系数 $\max |a_k| = 1.7$, 保持系统稳定的最小字长 b 满足

$$\frac{0.045}{1.7} = 0.02647 \leq 2^{-(b+1)}$$

即 $2^b \geq 18.89$

故字长 $b = 5$ 才能保证滤波器工作稳定。

(2) 系统的两个极点为 $p_1 = 0.85 + j0.15$, $p_2 = 0.85 - j0.15$, 故

$$|p_1| = |p_2| = 0.8631$$

系统函数可表示为 $H(z) = \frac{0.1z^{-1}}{1 - (p_1 + p_2)z^{-1} + p_1p_2z^{-2}} = \frac{0.1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$

其中 $a_1 = -(p_1 + p_2) = -1.7$, $a_2 = p_1p_2 = 0.745$

极点 p_1, p_2 对系数 a_2 变化的灵敏度为

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_2} = \frac{1}{p_2 - p_1} = -\frac{1}{0.3j}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial a_2} = \frac{1}{p_1 - p_2} = \frac{1}{0.3j}$$

$$\left| \frac{\partial p_1}{\partial a_2} \right| = \left| \frac{\partial p_2}{\partial a_2} \right| = \frac{10}{3}$$

可见, p_1, p_2 对系数 a_2 变化的灵敏度相同, 因此只研究系数 a_2 变化对 p_1 的影响即可。极点 p_1 的位置误差 $|\Delta p_1|$ 与系数 a_2 的误差 $|\Delta a_2|$ 的关系为

$$|\Delta p_1| = \left| \frac{\partial p_1}{\partial a_2} \right| |\Delta a_2|$$

若极点位置在 0.5% 以内变化, 即 $\frac{|\Delta p_1|}{p_1} = 0.5\%$, 则系数 $a_2 (=0.745)$ 变化的百分数为

$$\frac{|\Delta a_2|}{a_2} = \frac{\frac{|\Delta p_1|}{p_1}}{\left| \frac{\partial p_1}{\partial a_2} \right|} = \frac{0.5\%}{\frac{10}{3}} = 0.15\%$$

若系数 a_2 在 0.15% 范围内变化, 则所需要的字长 b 应满足

$$|\Delta a_2| = 0.15\% \cdot a_2 = 0.0011175 > 2^{-(b+1)}$$

由此可求出最小字长 $b=9$ 。

(3) 若采用 8 位字长的寄存器存储系数, 第 1 位用来存放整数, 后 7 位用来存放小数, 则有

$$Q\{(0.1)_{10}\} = Q\{0.0001100011\cdots\} = 0.0001100 = (0.0938)_{10}$$

$$Q\{(1.7)_{10}\} = Q\{1.1011001100\cdots\} = 1.1011010 = (1.7031)_{10}$$

$$Q\{(0.745)_{10}\} = Q\{0.101111010\cdots\} = 0.1011111 = (0.7422)_{10}$$

故
$$\hat{H}(z) = \frac{0.0938z^{-1}}{1 - 1.7031z^{-1} + 0.7422z^{-2}}$$

7-12 已知某2阶数字系统的差分方程为

$$y[k] - y[k-1] + 0.75y[k-2] = x[k]$$

若采用字长 $b=3$ (不含符号位) 的定点运算, 舍入处理, 试求当 $x[k]=0, \hat{y}[-2]=0, \hat{y}[-1]=0.5$ 时的输出 $\hat{y}[k]$ (取前9点值)。

解:

若对乘法运算采用舍入量化处理, 相应的差分方程为

$$\hat{y}[k] = x[k] + \hat{y}[k-1] - Q\{0.75\hat{y}[k-2]\}$$

将十进制数用字长 $b=3$ 的二进制数表示, 有 $(0.75)_{10} = 0.110, \hat{y}[-1] = (0.5)_{10} = 0.100$, 则滤波器的输出 $\hat{y}[k]$ 为

$$\hat{y}[0] = x[0] + Q\{\hat{y}[-1]\} - Q\{0.110\hat{y}[-2]\} = 0.100 = (0.5)_{10}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[1] &= x[1] + Q\{\hat{y}[0]\} - Q\{0.110\hat{y}[-1]\} = 0.100 - 0.011 = 0.001 \\ &= (0.125)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[2] &= x[2] + Q\{\hat{y}[1]\} - Q\{0.110\hat{y}[0]\} = 0.001 - 0.011 = 1.010 \\ &= (-0.25)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[3] &= x[3] + Q\{\hat{y}[2]\} - Q\{0.110\hat{y}[1]\} = 1.010 - 0.001 = 1.011 \\ &= (-0.375)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[4] &= x[4] + Q\{\hat{y}[3]\} - Q\{0.110\hat{y}[2]\} = 1.011 + 0.010 = 1.001 \\ &= (-0.125)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[5] &= x[5] + Q\{\hat{y}[4]\} - Q\{0.110\hat{y}[3]\} = 1.001 + 0.010 = 0.001 \\ &= (0.125)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[6] &= x[6] + Q\{\hat{y}[5]\} - Q\{0.110\hat{y}[4]\} = 0.001 + 0.001 = 0.010 \\ &= (0.25)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[7] &= x[7] + Q\{\hat{y}[6]\} - Q\{0.110\hat{y}[5]\} = 0.010 - 0.001 = 0.001 \\ &= (0.125)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[8] &= x[8] + Q\{\hat{y}[7]\} - Q\{0.110\hat{y}[6]\} = 0.001 - 0.010 = 1.001 \\ &= (-0.125)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[9] &= x[9] + Q\{\hat{y}[8]\} - Q\{0.110\hat{y}[7]\} = 1.001 - 0.001 = 1.010 \\ &= (-0.25)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[10] &= x[10] + Q\{\hat{y}[9]\} - Q\{0.110\hat{y}[8]\} = 1.010 + 0.001 = 1.001 \\ &= (-0.125)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}[11] &= x[11] + Q\{\hat{y}[10]\} - Q\{0.110\hat{y}[9]\} = 1.001 + 0.010 = 0.001 \\ &= (0.125)_{10}\end{aligned}$$

显然, $k \geq 4$ 后产生了极限环振荡, 从 $k=4$ 到 $k=9$ 的 6 点为一个振荡周期。

7-13 已知某 2 阶 IIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{0.4 - 0.34z^{-1}}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

若用 6 位字长 (不含符号位) 的定点运算, 舍入方式进行量化处理, 试计算直接型、级联型和并联型三种结构形式的乘积量化噪声方差, 并对结构进行比较。

解:

(1) 直接型结构

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{0.4 - 0.34z^{-1}}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} = \frac{0.4 - 0.34z^{-1}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.63z^{-2}} \\ &= \frac{0.1}{1 - 0.9z^{-1}} + \frac{0.3}{1 - 0.7z^{-1}}\end{aligned}$$

$$h[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = [0.1(0.9)^k + 0.3(0.7)^k]u[k]$$

直接 II 型结构乘积量化误差统计分析模型如图 7-12(a) 所示, 由 $H(z)$ 可知 $M=1, N=2$, 故乘积量化噪声通过系统的输出噪声方差为

$$\begin{aligned}\sigma_v^2 &= N \frac{2^{-2b}}{12} \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|^2 + (M+1) \frac{2^{-2b}}{12} = \frac{q^2}{12} (2 * 0.3102 + 2) \\ &= 0.2184q^2\end{aligned}$$

(2) 级联结构

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \frac{0.4 - 0.34z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1}} = H_1(z)H_2(z)$$

基于直接 II 型结构的级联结构乘积量化误差统计分析模型如图 7-12(b) 所示。第一个子系统乘积量化噪声要经过第二个子系统滤波, 因此有

$$H_{a1}(z) = \frac{0.4 - 0.34z^{-1}}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}, \quad H_{a2}(z) = \frac{0.4 - 0.34z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1}}$$

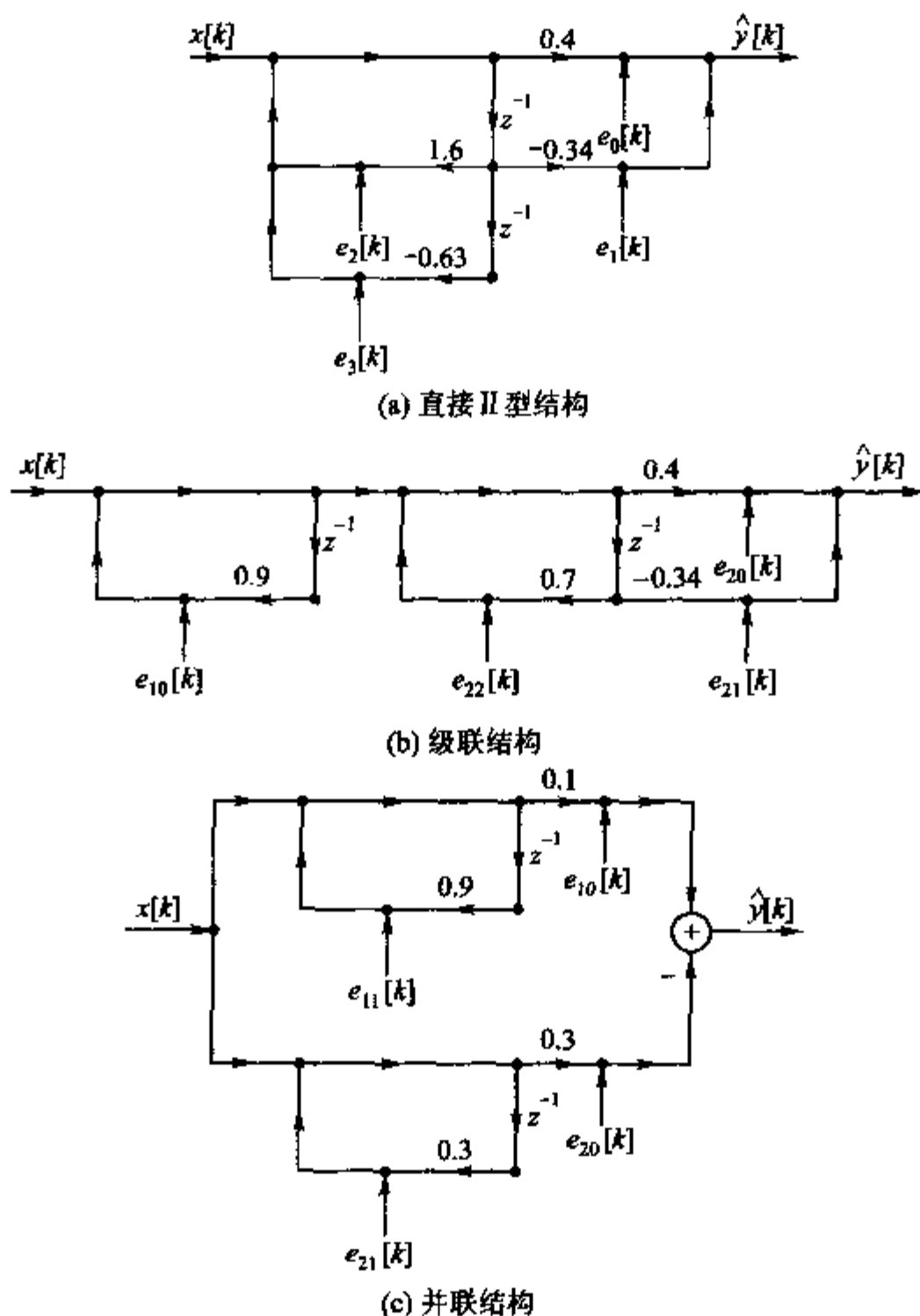


图 7-12 题 7-13 乘积量化误差统计分析模型

$$h_{e1}[k] = [0.1(0.9)^k + 0.3(0.7)^k]u[k],$$

$$h_{e2}[k] = 0.4857\delta[k] - 0.0857(0.7)^k u[k]$$

$$\begin{aligned}\sigma_v^2 &= \frac{q^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h_{e1}^2[k] + \left\{ \frac{q^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h_{e2}^2[k] + (M+1) \frac{q^2}{12} \right\} \\ &= \frac{q^2}{12} (0.3102 + 0.1671 + 2) = 0.2064q^2\end{aligned}$$

(3) 并联结构

$$H(z) = \frac{0.1}{1 - 0.9z^{-1}} + \frac{0.3}{1 - 0.7z^{-1}} = H_1(z) + H_2(z)$$

基于直接Ⅱ型结构的并联结构乘积量化误差统计分析模型如图7-12(c)所示,从图中可以看出

$$\begin{aligned} H_{e1}(z) &= \frac{0.1}{1 - 0.9z^{-1}}, & H_{e2}(z) &= \frac{0.3}{1 - 0.7z^{-1}} \\ h_{e1}[k] &= 0.1(0.9)^k u[k], & h_{e2}[k] &= 0.3(0.7)^k u[k] \\ \sigma_v^2 &= \left\{ \frac{q^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h_{e1}^2[k] + \frac{q^2}{12} \right\} + \left\{ \frac{q^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h_{e2}^2[k] + \frac{q^2}{12} \right\} \\ &= \frac{q^2}{12} (0.0526 + 0.1765 + 2) = 0.1858q^2 \end{aligned}$$

7-14 已知一 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{3}{8}z^{-3} + \frac{1}{2}z^{-4}$$

若用6位字长(含符号位)的定点运算,舍入方式进行量化处理,试计算直接型结构乘积量化噪声的输出噪声方差。

解:

N 阶 FIR 数字滤波器直接型结构乘积量化噪声的输出噪声方差为

$$\sigma_v^2 = (N+1) \frac{q^2}{12} = \frac{5}{12} 2^{-2b} = 4.069 \times 10^{-4}$$

7-15 已知某数字系统的差分方程为

$$y[k] - \alpha y[k-1] = x[k] - \frac{1}{\alpha^2} x[k-1]$$

采用直接型结构, b 位字长(不含符号位)定点运算,舍入处理。假设 $x[k]$ 是白噪声,幅度在 $[-1, 1]$ 之间均匀分布,系数 α 满足 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, 试求在保证不发生溢出的条件下,滤波器的输出信噪比。

解:

$$H(z) = \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad h[k] = \frac{1}{\alpha^3} \delta[k] + \left(1 - \frac{1}{\alpha^3}\right) \alpha^k u[k]$$

在保证不发生溢出的条件下,滤波器的输出为

$$y_{\max}[k] \leq A x_{\max} \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < 1$$

其中

$$A < \frac{1}{x_{\max} \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|} = \frac{1 + \alpha}{\alpha^2}$$

采用直接 I 型结构,其乘积量化误差模型如图 7-13(a)所示,乘积量化噪声通过系统的输出噪声方差为

$$\sigma_v^2 = (M + N + 1) \frac{2^{-2b}}{12} \sum_{k=0}^{\infty} |h_s[k]|^2 \approx \frac{2^{-2b}}{4} \frac{1}{1 - \alpha^2}$$

$$\frac{y_{\max}^2}{\sigma_v^2} < 2^{2(b+1)} (1 - \alpha^2)$$

采用直接 II 型结构,其乘积量化误差模型如图 7-13(b)所示,乘积量化噪声通过系统的输出噪声方差为

$$\sigma_v^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|^2 + \frac{2^{-2b}}{12} \approx \frac{2^{-2b}}{12} \left[\frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} + 1 \right]$$

$$\frac{y_{\max}^2}{\sigma_v^2} < \frac{12\alpha(1 + \alpha)2^{2b}}{\alpha^2 + \alpha + 1}$$

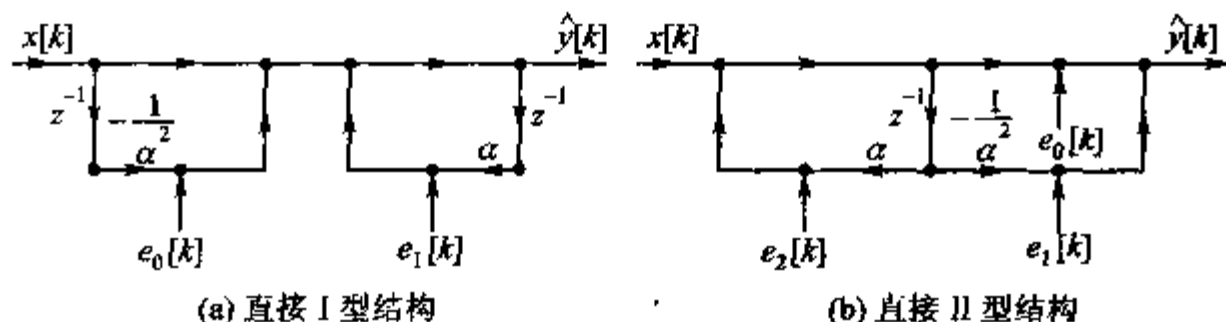


图 7-13 题 7-15 乘积量化误差统计分析模型

第8章

多速率信号处理基础

8.1 基本知识 with 重要公式

多速率信号处理系统是指在一个数字信号处理系统中存在不同抽样速率的信号。多速率信号处理系统在语音信号处理、图像信号处理、通信系统等领域有着广泛的应用。为了能在同一个系统中处理不同抽样速率的信号,需要研究抽样率转换问题。用数字方法进行抽样率转换不需要对模拟信号重新抽样,因而是一种更加有效的方法。滤波器组在信号时频分析和信号子带编码等方面得到广泛应用,多速率信号处理是实现滤波器组的重要组成部分。

1. 多速率系统中的基本单元

抽取运算

抽取运算的时域表示为

$$x_D[k] = x[Mk], k \in \mathbb{Z} \quad (8-1)$$

抽取运算的框图表示如图 8-1 所示。

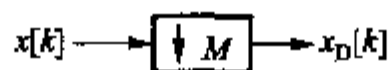


图 8-1 M 倍抽取运算的框图

抽取运算的 z 域描述为

$$X_D(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \quad (8-2)$$

抽取运算的频域描述为

$$X_D(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\Omega-2\pi l}{M}}) \quad (8-3)$$

内插运算

内插运算的时域表示为

$$x_1[k] = \begin{cases} x\left[\frac{k}{L}\right] & k = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8-4)$$

内插运算的框图表示如图 8-2 所示。

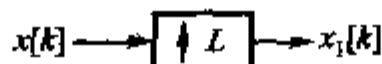


图 8-2 L 倍内插运算的框图

内插运算的 z 域描述为

$$X_1(z) = X(z^L) \quad (8-5)$$

内插运算的频域描述为

$$X_1(e^{j\Omega}) = X(e^{jL\Omega}) \quad (8-6)$$

抽取等式

抽取等式如图 8-3 所示。

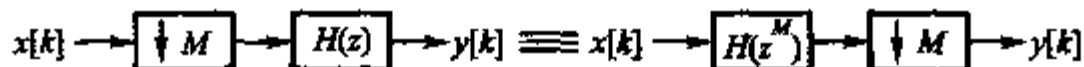


图 8-3 抽取等式

内插等式

内插等式如图 8-4 所示。

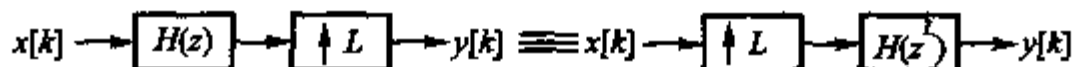


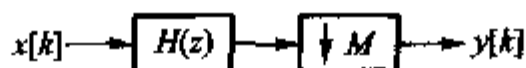
图 8-4 内插等式

2. 抽取滤波器和内插滤波器

抽取滤波器

由式(8-3)可知,在一般情况下抽取后的离散序列的频谱将会出现混叠。为了避免混叠,可在信号抽取前用低通滤波器对信号进行滤波,如图 8-5 所示。

M 倍抽取滤波系统输出信号的时域表达式可写为

图 8-5 M 倍抽取滤波系统

$$y[k] = \sum_n x[n] h[Mk - n] \quad (8-7)$$

在理想情况下,抽取滤波器可以是截频为 $\frac{\pi}{M}$ 的理想低通滤波器,即

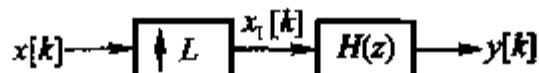
$$|H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \frac{\pi}{M} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8-8)$$

若信号 $x[k]$ 需保留的最高频率分量为 $\frac{\Omega_m}{M}$ ($\Omega_m < \pi$),则物理可实现的抽取滤波器 $H(z)$ 的幅度响应可为

$$|H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \frac{\Omega_m}{M} \\ 0 & \frac{2\pi l - \Omega_m}{M} \leq |\Omega| \leq \frac{2\pi l + \Omega_m}{M}, l = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} \quad (8-9)$$

内插滤波器

由式(8-6)可知,信号的内插会产生镜像频谱。为了消除这些镜像频谱,可将内插后的信号通过一个低通滤波器,如图 8-6 所示。

图 8-6 L 倍内插滤波系统

L 倍内插滤波器系统输出的时域表示可写为

$$y[k] = \sum_n x[n] h[k - nL] \quad (8-10)$$

在一般情况下,内插滤波器可以是截频为 $\frac{\pi}{L}$ 的理想低通滤波器,即

$$|H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \frac{\pi}{L} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8-11)$$

若信号 $x[k]$ 的频谱是带限的,即 $x[k]$ 的频谱只在 $[-\Omega_m, \Omega_m]$ ($\Omega_m < \pi$) 范围内有非零值,则物理可实现的内插滤波器的幅度响应可为

$$|H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \frac{\Omega_m}{L} \\ 0 & \frac{2\pi l - \Omega_m}{L} \leq |\Omega| \leq \frac{2\pi l + \Omega_m}{L}, l = 1, 2, \dots, L-1 \end{cases} \quad (8-12)$$

有理数倍抽样率转换

将离散序列的抽样率改变 $\frac{L}{M}$ 倍,可由 L 倍内插系统与 M 倍抽取系统的级联构成的系统来完成,如图8-7所示。 $H(z)$ 的幅度响应需满足

$$|H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \min\left\{\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right\} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8-13)$$

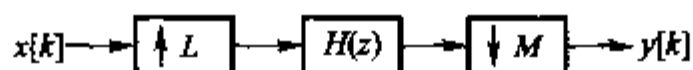


图8-7 有理数倍抽样率转换框图

抽取滤波器和内插滤波器的多级实现

由于 M 倍抽取滤波器的阻带截频为 $\frac{\pi}{M}$,故随着 M 的增加,抽取滤波器的过渡带宽度将会变窄。当 M 较大时,所需的FIR滤波器的阶数将很高。为了减少系统的运算量,可采用多级方案来实现 M 倍抽取滤波系统。

设 $M = M_1 M_2$, $H(z) = I(z)G(z^{M_1})$,则可得图8-8所示的2级抽取滤波系统的实现方案。

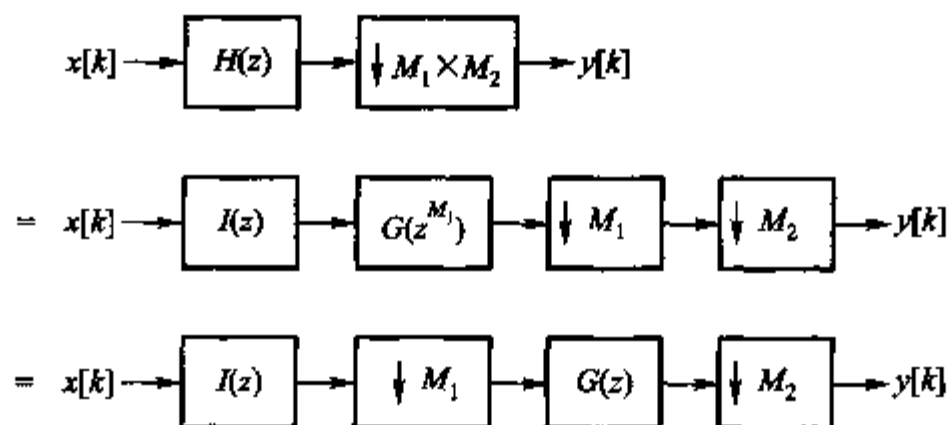


图8-8 抽取滤波系统2级实现方案

若抽取滤波器 $H(z)$ 的技术指标为 $\Omega_p, \Omega_s, \delta_p, \delta_s$,则
 $G(z)$ 技术指标为

$$\Omega_{p,c} = M_1 \Omega_p, \Omega_{s,c} = M_1 \Omega_s, \delta_{p,c} = \frac{\delta_p}{2}, \delta_{s,c} = \delta_s \quad (8-14)$$

$I(z)$ 技术指标为

$$\Omega_{p,i} = \Omega_p, \quad \Omega_{s,i} = \frac{2\pi}{M_1} - \Omega_s, \quad \delta_{p,i} = \frac{\delta_p}{2}, \quad \delta_{s,i} = \delta_s \quad (8-15)$$

3. 多相分解

系统的多相表示在多抽样率信号处理中有着重要的作用。利用多相表示不但可以简化滤波器组理论的推导,而且能够有效实现多速率系统的结构,从而极大提高系统运算的效率。

I 型多相分解为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} z^{-n} E_n(z^M) \quad (8-16)$$

其中

$$E_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[mM+n]z^{-k}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

II 型多相分解为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} z^{-(M-1-n)} R_n(z^M) \quad (8-17)$$

其中

$$R_n(z) = E_{M-1-n}(z), \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

4. 半带滤波器

半带滤波器是多速率信号处理系统中的一个基本单元。由于半带滤波有近一半的系数为零,所以利用半带滤波器可有效地完成两倍的抽取和内插滤波。在设计两通道滤波器组时,也需要用到半带滤波器。

半带滤波器的时域特性为

$$h[2k] = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8-18)$$

半带滤波器的频域特性为

$$H(e^{j\Omega}) + H(e^{j(\pi-\Omega)}) = 1 \quad (8-19)$$

$$\delta_p = \delta_s = \delta, \quad \Omega_p + \Omega_s = \pi \quad (8-20)$$

半带 FIR 滤波器长度 N 的约束为

$$N = 2K + 1 = 4J + 3 \quad (8-21)$$

Parks - McClellan 算法设计半带 FIR 滤波器步骤如下。

- ① 使滤波器指标满足: $\Omega_p + \Omega_s = \pi, \delta_p = \delta_s$ 。
- ② 确定滤波器的长度 N , 并使 N 满足 $N = 4J + 3$ 。 J 为正整数。
- ③ 利用 Parks - McClellan 算法确定 $h_d[k]$ 。
- ④ 根据半带滤波器的特性以及 $h_d[k]$, 获得半带滤波器的单位脉冲响应 $h_{\text{half}}[k]$, 即

$$h_{\text{half}}[0] = \frac{1}{2}, \quad h_{\text{half}}[2k] = 0, \quad k \neq 0, \quad h_{\text{half}}[2k+1] = h_d[2k+1]$$

- ⑤ 由半带滤波器的单位脉冲响应 $h_{\text{half}}[k]$ 可得半带滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

5. 两通道滤波器组

滤波器组是指由多个滤波器构成的多通道系统, 主要有分解滤波器组和合成滤波器组。在信号分析中, 分解滤波器组将一个输入信号分解为多个子带信号以实现对不同子带信号的不同处理, 处理后的各子带信号再经过合成滤波器组恢复。两通道滤波器组是由两个通道构成的最简单的滤波器组。

两通道滤波器组输入输出关系

两通道滤波器组框图如图 8-9 所示。由图可以得到系统的输出 $Y(z)$ 为

$$Y(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z) \quad (8-22)$$

其中 $T(z)$ 称为畸变系统函数。

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)] \quad (8-23)$$

$$A(z) = \frac{1}{2} [H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)] \quad (8-24)$$

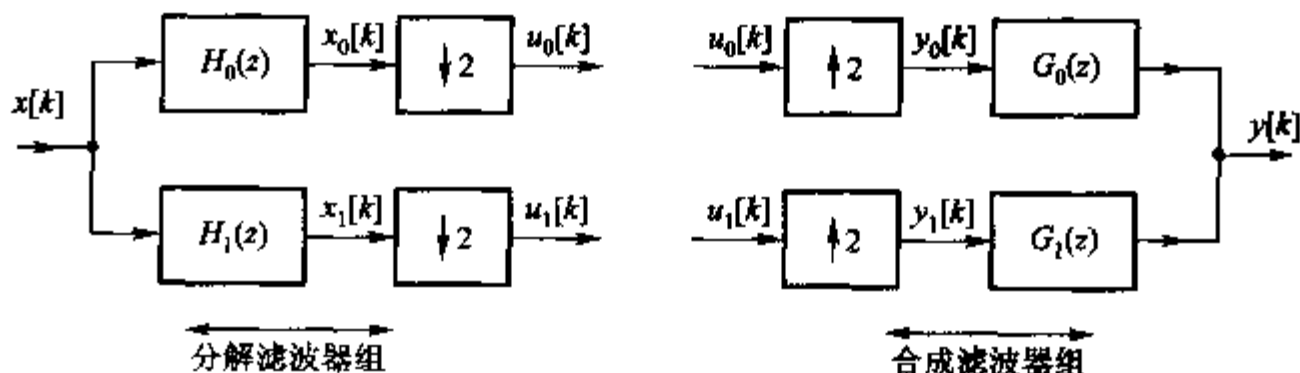


图 8-9 两通道滤波器组

无混叠滤波器组

若两通道滤波器组的 $A(z) = 0$, 则称该两通道滤波器组为无混叠两通道滤

波器组。一种实现无混叠两通道滤波器组的方案为

$$G_0(z) = H_1(-z), \quad G_1(z) = -H_0(-z) \quad (8-25)$$

PR 滤波器组

若无混叠两通道滤波器组的畸变系统函数 $T(z)$ 满足

$$T(z) = cz^{-N} \quad c \neq 0 \quad (8-26)$$

则称该两通道滤波器组为 PR 滤波器组。

两通道 FIR PR 滤波器组

如果选择

$$H_1(z) = -z^{-(N-1)}H_0(-z^{-1}) \quad (8-27)$$

$$G_0(z) = H_1(-z), \quad G_1(z) = -H_0(-z) \quad (8-28)$$

当 FIR 滤波器的长度 N 为偶数时, 则有

$$T(z) = \frac{1}{2}\{H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z^{-1})H_0(-z)\}z^{-(N-1)} \quad (8-29)$$

如果 $H_0(z)$ 是功率对称滤波器, 即

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z^{-1})H_0(-z) = 1 \quad (8-30)$$

则有

$$T(z) = 0.5z^{-(N-1)}$$

所以两通道 FIR PR 滤波器组的设计可归结为设计满足式 (8-30) 的功率对称滤波器 $H_0(z)$ 。

$H_0(z)$ 的设计步骤

设 $H_0(z)$ 通带截频和阻带截频分别为 Ω_p 和 Ω_s ($\Omega_p + \Omega_s = \pi$), $H_0(z)$ 阻带波动为 δ_s ,

$$\delta_s = \frac{\delta_s^2}{2}$$

① 设计满足指标

$$\delta_{s,q} = \delta_{p,q} = \delta_s, \quad \Omega_p + \Omega_s = \pi \quad (8-31)$$

的零相位半带滤波器 $Q(z)$ 。

② 确定 $F(z)$

$$F(z) = Q(z) + \delta_s \quad (8-32)$$

③ 由 $F(z)$ 的谱因子确定 $H_0(z)$ 。

8.2 学习要求

1. 掌握序列抽取运算与内插运算后的频谱变化规律。
2. 掌握如何确定抽取滤波器与内插滤波器的频率指标。
3. 掌握有理数倍抽样率转换中的序列频谱分析及滤波器设计。
4. 掌握抽取滤波器和内插滤波器多级实现的基本思想。
5. 了解半带滤波器的基本特性以及半带滤波器设计的基本方法。
6. 了解两通道滤波器组设计中的基本概念以及两通道 FIR PR 滤波器组的设计方法。

8.3 重点和难点提示

本章重点是信号的抽取和内插的时域、频域及 z 域分析。多速率信号处理及滤波器组在现代信号处理中有着广泛的应用,这里仅介绍了最基本的概念及方法。抽取与内插运算的时域、频域及 z 域描述是分析多速率系统分析的基础,掌握其基本特性和基本分析方法,可为进一步研究多速率信号处理系统打下一个良好的基础。

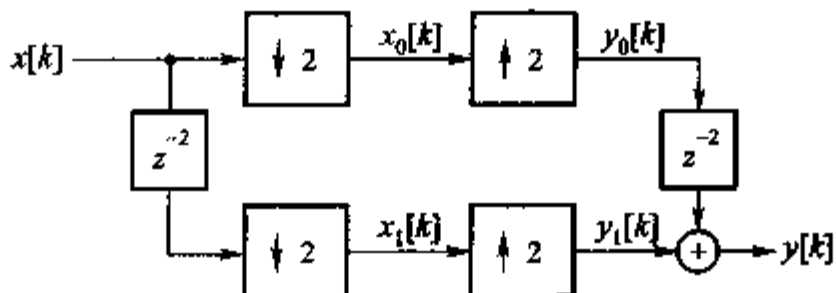
本章难点是两通道滤波器组的分析与设计。在 z 域分析了两通道滤波器组的输入输出关系,引入了无混叠滤波器组和 PR 滤波器组的概念。在设计滤波器组时,不仅需要各滤波器满足其通阻带设计指标的要求,还需要满足滤波器组中的某些约束条件,因而设计过程较为复杂,两通道滤波器组的设计一般通过优化设计来实现。

8.4 思考题

1. 在多速率系统中应如何定义系统的因果性?
2. 抽取与内插运算单元是否为因果系统?
3. 在抽样率转换系统中,应如何确定滤波器的频率指标?
4. 如何设计过渡带很窄的 FIR 滤波器?
5. 已知 IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z)$,如何计算其多相分量 $E_k(z)$?
6. 两通道滤波器组中存在哪几方面的失真?应如何消除这些失真?

8.5 习题精解

8-1 试求题 8-1 图所示系统的输入和输出关系。



题 8-1 图

解:

由题 8-1 图可得

$$X_0(z) = \frac{1}{2} [X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})]$$

$$X_1(z) = \frac{1}{2} [X(z^{\frac{1}{2}})z^{-1} + X(-z^{\frac{1}{2}})z^{-1}]$$

$$Y_0(z) = \frac{1}{2} [X(z) + X(-z)]$$

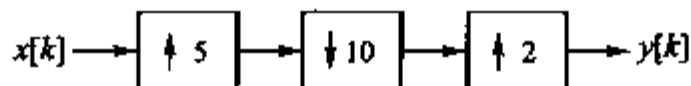
$$Y_1(z) = \frac{1}{2} [X(z)z^{-2} + X(-z)z^{-2}]$$

$$Y(z) = Y_0(z)z^{-2} + Y_1(z) = z^{-2} [X(z) + X(-z)]$$

所以

$$\begin{cases} y[k] = 2x[k-2] & k \text{ 为偶数} \\ y[k] = 0 & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

8-2 试求题 8-2 图所示多速率系统的输入和输出关系。



题 8-2 图

解:

由于 10 倍的抽取可等价于图 8-10(a), 所以题 8-2 图可等价于图 8-10(b)。由图 8-10(b) 可知

$$w[k] = x[k]$$

所以

$$\begin{cases} y[k] = x[k] & k \text{ 为偶数} \\ y[k] = 0 & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

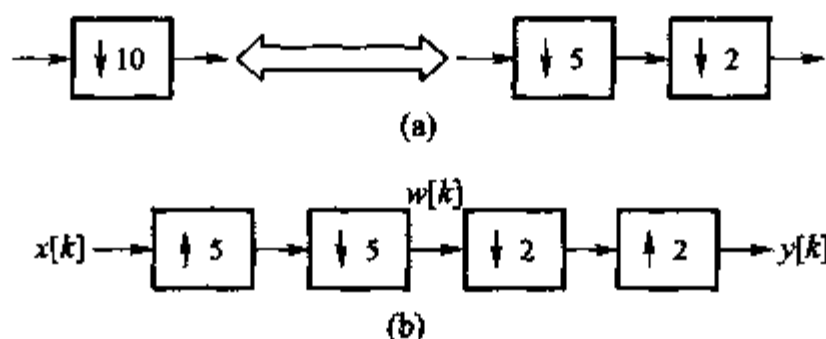
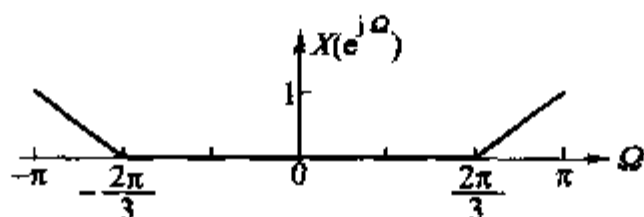


图 8-10 题 8-2 解答图

8-3 已知实信号 $x[k]$ 的频谱如题 8-3 图所示, 试画出该信号 3 倍抽取后的频谱。并讨论所得到的结果。



题 8-3 图

解:

解题过程如图 8-11 所示。由本题的结果可知, 抽取不混叠条件

$$X(e^{j\Omega}) = 0, |\Omega| > \frac{\pi}{M}$$

只是抽取不混叠的充分条件, 不是必要条件。

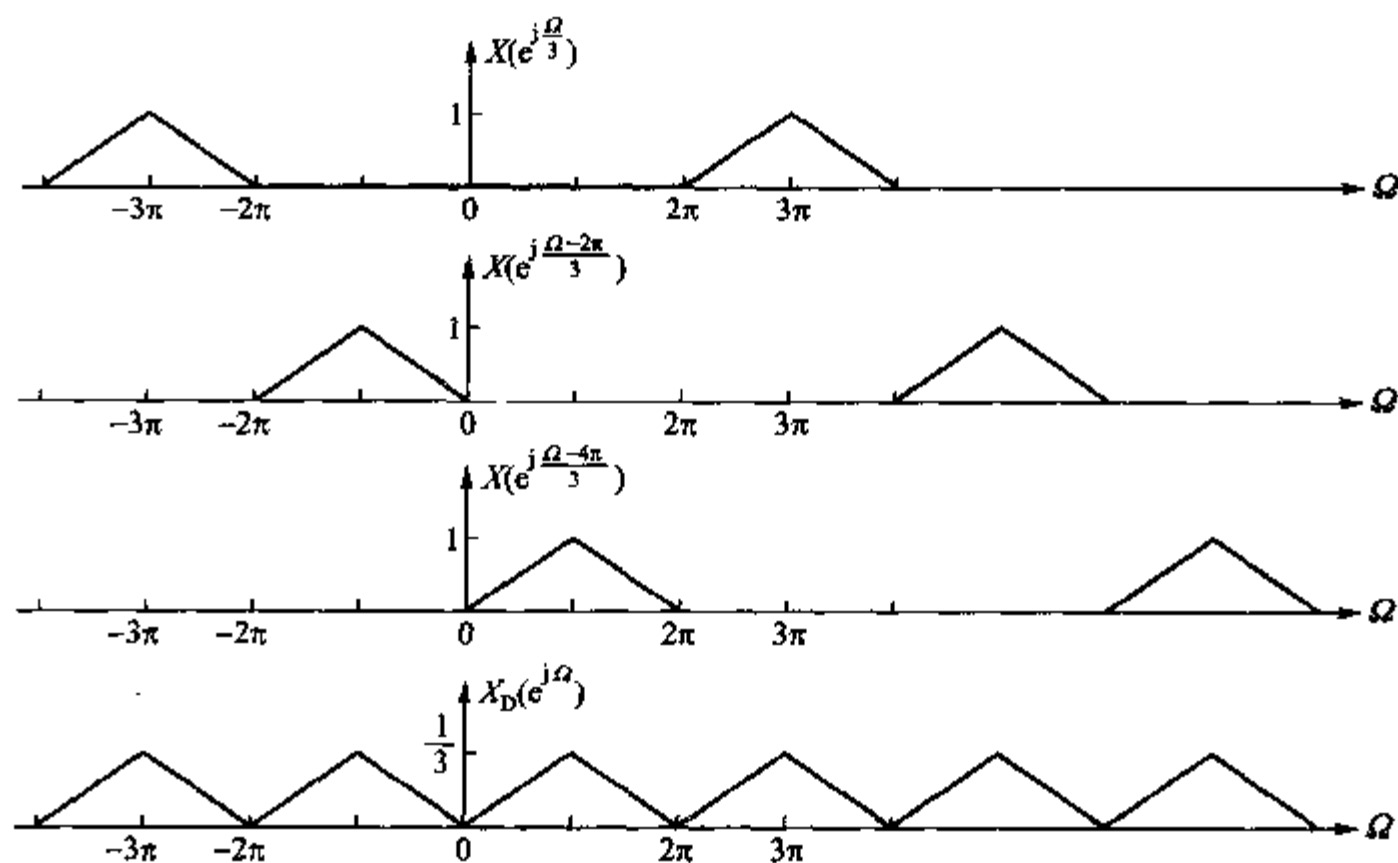
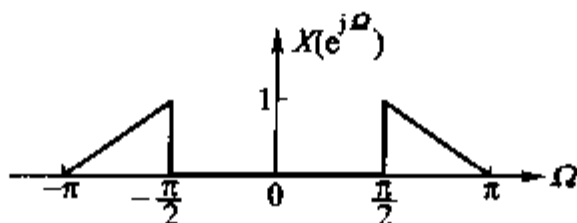


图 8-11 题 8-3 解答图

8-4 (1) 将信号 $x[k]$ M 倍抽取后得 $w[k]$, 再将信号 $w[k]$ M 倍内插后得 $y[k]$ 。试推导 $X(e^{j\Omega})$ 和 $Y(e^{j\Omega})$ 的关系。

(2) 设 $x[k]$ 的频谱如题 8-4 图所示, 试画出 $M=2$ 时 $y[k]$ 的频谱。



题 8-4 图

解:

(1) 由式(8-3)可得

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega - \frac{2\pi l}{M})})$$

由上式及式(8-6)

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega - \frac{2\pi l}{M})})$$

(2) 当 $M=2$ 时

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega - \pi)})]$$

根据上式, 图 8-12 画出了 $y[k]$ 的频谱 $Y(e^{j\Omega})$ 。

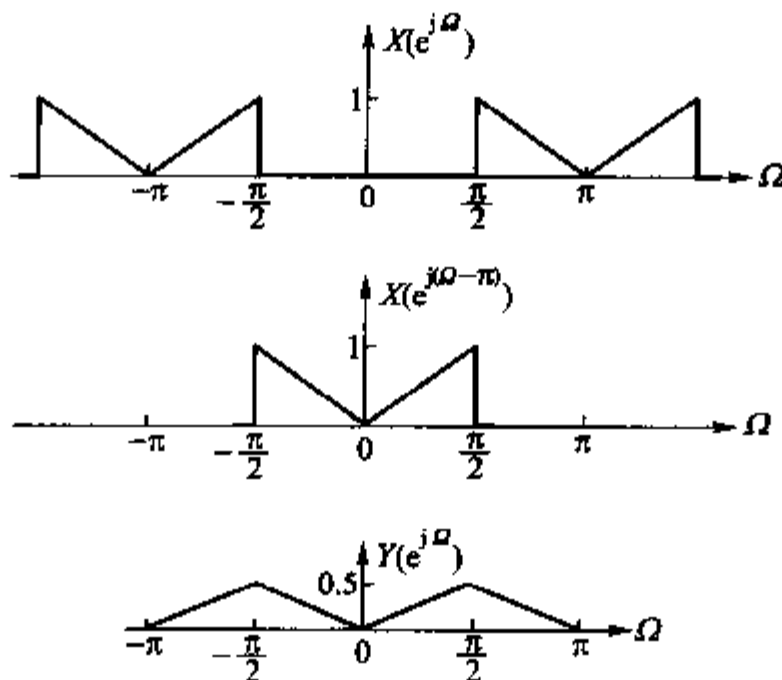


图 8-12 题 8-4 解答图

8-5 信号 $x[k]$ 的 L 倍线性内插定义为

$$y[kL + n] = \frac{L-n}{L}x[k] + \frac{n}{L}x[k+1], \quad -\infty < k < \infty, \quad 0 \leq n \leq L-1$$

试证明可用 L 倍内插滤波系统实现 L 倍线性内插。求出内插滤波的单位脉冲响应 $h[k]$ 。

解:

由式(8-10), L 倍内插滤波系统的输出可表示为

$$\begin{aligned} y[kL + n] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] h[kL + n - lL] \quad n = 0, 1, \dots, L-1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \dots + x[k-1] h[n+L] + x[k] h[n] + x[k+1] h[n-L] + \dots \end{aligned}$$

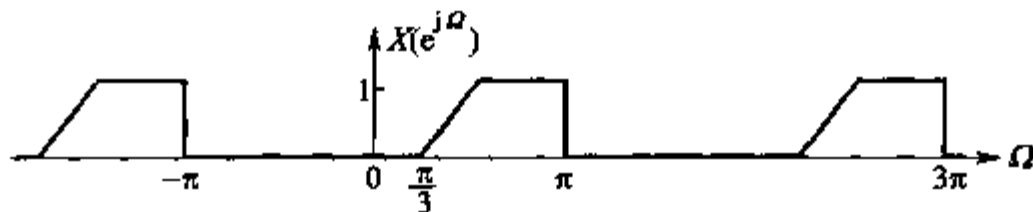
将上式与线性内插定义比较后可得

$$\begin{aligned} h[0] &= 1, & h[-L] &= 0 \\ h[1] &= 1 - \frac{1}{L}, & h[1-L] &= \frac{1}{L} \\ h[2] &= 1 - \frac{2}{L}, & h[-2] &= 1 - \frac{2}{L} \\ &\vdots \\ h[L-1] &= \frac{1}{L}, & h[-1] &= 1 - \frac{1}{L} \end{aligned}$$

综上所述, 可得

$$h[n] = \begin{cases} \left(1 - \frac{|n|}{L}\right) & |n| \leq L-1 \\ 0 & |n| \geq L \end{cases}$$

8-6 已知复信号 $x[k]$ 的频谱如题 8-6 图所示, 试画出该信号 3 倍抽取后的频谱并讨论所得到的结果。



题 8-6 图

解:

解题过程如图 8-13 所示。

记 $\Omega_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$, $\Omega_1 = \pi \text{ rad}$, 则

$$\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_0 = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{M} \text{ rad}$$

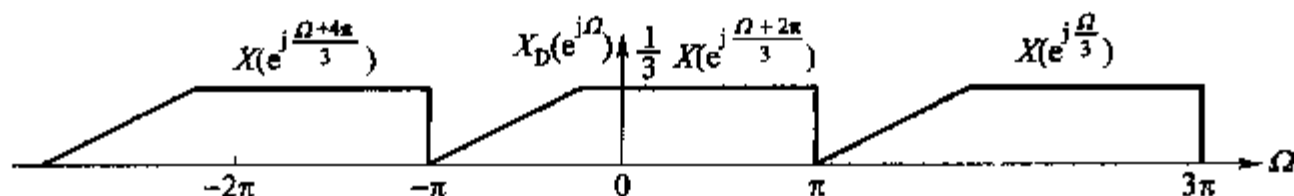


图 8-13 题 8-6 解答图

所以对此信号 M 倍抽取不混叠条件为

$$\Delta\Omega \leq \frac{2\pi}{M} \text{ rad}$$

8-7 设 $H(z) = I(z)G(z^{10})$, 重做教材例 8-4, 并比较两种方案对系统计算的要求。

解:

抽取滤波器的通带截频和阻带截频分别为

$$\Omega_p = 2\pi \frac{500}{f_{\text{sam}}} = \frac{\pi}{48} \text{ rad}, \Omega_s = \frac{\pi}{M} = \frac{\pi}{40} \text{ rad}$$

若将 $H(z)$ 分解为 $H(z) = I(z)G(z^{10})$, 即 $M_1 = 10, M_2 = 4$, 则 $I(z)$ 和 $G(z)$ 设计指标分别为

$$\delta_{p,I} = \frac{\delta_p}{2} = 0.005, \quad \delta_{s,I} = \delta_s = 0.001, \quad \Omega_{p,I} = \Omega_p = \frac{\pi}{48} \text{ rad},$$

$$\Omega_{s,I} = \frac{2\pi}{M_1} - \Omega_s = \frac{7\pi}{40} \text{ rad}$$

$$\delta_{p,G} = \frac{\delta_p}{2} = 0.005, \quad \delta_{s,G} = \delta_s = 0.001, \quad \Omega_{p,G} = M_1\Omega_p = \frac{5\pi}{24} \text{ rad},$$

$$\Omega_{s,G} = M_1\Omega_s = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$I(z)$ 和 $G(z)$ 的长度分别为

$$N_I = 39, \quad N_G = 134$$

完成 $I(z)$ 和 $G(z)$ 系统每秒所需的乘法数分别为

$$R_{M,I} = N_I \times \frac{f_{\text{sam}}}{M_1} = 18\,720, \quad R_{M,G} = N_G \times \frac{f_{\text{sam}}}{M} = 1\,608\,000$$

与直接法系统每秒所需的乘法次数的比为

$$\frac{R_{M,H}}{R_{M,G} + R_{M,I}} \approx 4.29$$

与教材例 8-4 的结果相比较, 本题的实现方案对系统的计算要求可稍低一些。

8-8 设离散信号 $x[k]$ 的抽样频率 = 500 Hz, 现要用系统将 $x[k]$ 转换为抽

样频率 = 10 kHz 的离散信号 $y[k]$ 。已知 $x[k]$ 中有用的频率分量在 0 到 150 Hz 的范围内,要求内插滤波器在通带和阻带的波动分别为 0.02 和 0.01。

(1) 试确定内插滤波器的设计指标。

(2) 如果用 Parks - McClellan 算法设计等波纹 FIR 滤波器,试确定用直接实现方案时,系统每秒所需的乘法数。

(3) 试确定一种 2 级的实现方案,计算系统每秒所需的乘法次数。

解:

(1) 内插滤波的倍数

$$L = \frac{f_{y, \text{sam}}}{f_{x, \text{sam}}} = 20$$

内插滤波器在通带和阻带的波动分别为

$$\delta_p = 0.02, \quad \delta_s = 0.01$$

内插滤波器的通带截频和阻带截频分别为

$$\Omega_p = 2\pi \times \frac{150}{f_{y, \text{sam}}} = \frac{3\pi}{100} \text{ rad}, \quad \Omega_s = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{20} \text{ rad}$$

(2) 若直接设计,则由 Parks - McClellan 算法可得滤波器 $H(z)$ 的长度 N 为

$$N = 182$$

(注:需对 remezord 函数估计出的滤波器长度进行修正。)

系统每秒所需的乘法数

$$R_{M,H} = N \times \frac{f_{y, \text{sam}}}{L} = 45\,500$$

(3) 将 $H(z)$ 分解为 $H(z) = I(z)G(z^5)$, 即 $L_1 = 5, L_2 = 4$, 则 $I(z)$ 和 $G(z)$ 设计指标分别为

$$\delta_{p,I} = \frac{\delta_p}{2} = 0.01, \quad \delta_{s,I} = \delta_s = 0.01, \quad \Omega_{p,I} = \Omega_p = \frac{3\pi}{100} \text{ rad},$$

$$\Omega_{s,I} = \frac{2\pi}{L_1} - \Omega_s = \frac{7\pi}{20} \text{ rad}$$

$$\delta_{p,G} = \frac{\delta_p}{2} = 0.01, \quad \delta_{s,G} = \delta_s = 0.01, \quad \Omega_{p,G} = L_1 \Omega_p = \frac{\pi}{20} \text{ rad},$$

$$\Omega_{s,G} = M_1 \Omega_s = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$I(z)$ 和 $G(z)$ 的长度分别为

$$N_I = 12, \quad N_G = 42$$

完成 $I(z)$ 和 $G(z)$ 系统每秒所需的乘法数分别为

$$R_{M,I} = N_I \times \frac{f_{y, \text{sam}}}{L_1} = 24\,000, \quad R_{M,G} = N_G \times \frac{f_{y, \text{sam}}}{L} = 10\,500$$

两种方法系统每秒所需的乘法次数的比为

$$\frac{R_{M,H}}{R_{M,G} + R_{M,I}} \approx 1.32$$

8-9 试确定 2 阶 IIR 系统

$$H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$

$M=2$ 的多相分量 $E_0(z)$ 和 $E_1(z)$ 。

解:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{[2 + z^{-1}][(1 + 0.8z^{-2}) - 0.7z^{-1}]}{[(1 + 0.8z^{-2}) + 0.7z^{-1}][(1 + 0.8z^{-2}) - 0.7z^{-1}]} \\ &= \frac{2 - 0.4z^{-1} + 0.9z^{-2} + 0.8z^{-3}}{1 + 1.11z^{-2} + 0.64z^{-4}} = \frac{(2 + 0.9z^{-2}) + z^{-1}(-0.4 + 0.8z^{-2})}{1 + 1.11z^{-2} + 0.64z^{-4}} \end{aligned}$$

所以

$$E_0(z) = \frac{2 + 0.9z^{-1}}{1 + 1.11z^{-1} + 0.64z^{-2}}, \quad E_1(z) = \frac{-0.4 + 0.8z^{-1}}{1 + 1.11z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

8-10 已知 FIR 线性相位内插滤波器的阶数为 11, 画出 4 倍内插滤波系统的多相结构框图。

解:

11 阶 FIR 线性相位滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} \\ &\quad + h[5]z^{-6} + h[4]z^{-7} + h[3]z^{-8} + h[2]z^{-9} + h[1]z^{-10} + h[0]z^{-11} \end{aligned}$$

其多相分量分别为

$$E_0(z) = h[0] + h[4]z^{-1} + h[3]z^{-2}, \quad E_1(z) = h[1] + h[5]z^{-1} + h[2]z^{-2}$$

$$E_2(z) = h[2] + h[5]z^{-1} + h[1]z^{-2}, \quad E_3(z) = h[3] + h[4]z^{-1} + h[0]z^{-2}$$

由上式可见 $E_0(z) = z^{-2}E_3(z^{-1})$, $E_1(z) = z^{-2}E_2(z^{-1})$, 在系统实现时可利用这点来减少乘法器的数量。系统的结构框图如图 8-14 所示。

8-11 已知 FIR 线性相位抽取滤波器的阶数为 14, 画出 3 倍抽取滤波系统的多相结构框图。

解:

14 阶 FIR 线性相位滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} + \\ &\quad h[6]z^{-6} + h[7]z^{-7} + h[6]z^{-8} + h[5]z^{-9} + h[4]z^{-10} + h[3]z^{-11} + \\ &\quad h[2]z^{-12} + h[1]z^{-13} + h[0]z^{-14} \end{aligned}$$

其 II 型多相分量分别为

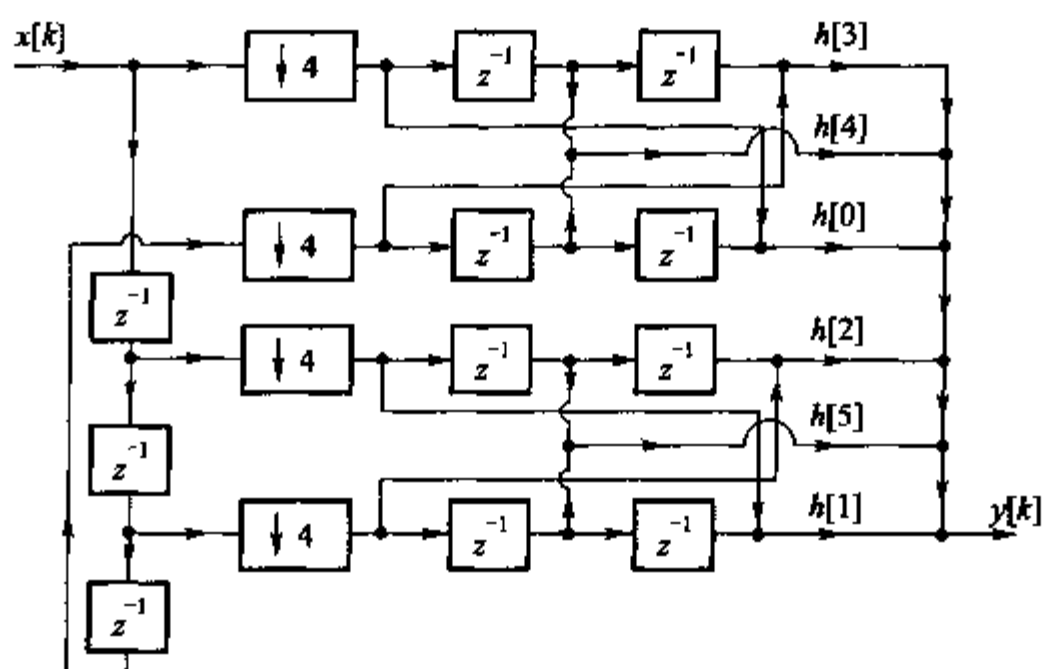


图 8-14 题 8-10 解答图

$$R_0(z) = h[2] + h[5]z^{-1} + h[6]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[0]z^{-4}$$

$$R_1(z) = h[1] + h[4]z^{-1} + h[7]z^{-2} + h[4]z^{-3} + h[1]z^{-4}$$

$$R_2(z) = h[0] + h[3]z^{-1} + h[6]z^{-2} + h[5]z^{-3} + h[2]z^{-4}$$

由上式可见 $R_0(z) = z^{-2}R_2(z^{-1})$, $R_1(z) = z^{-2}R_1(z^{-1})$, 在系统实现时可利用这点来减少乘法器的数量。系统的结构框图如图 8-15 所示。

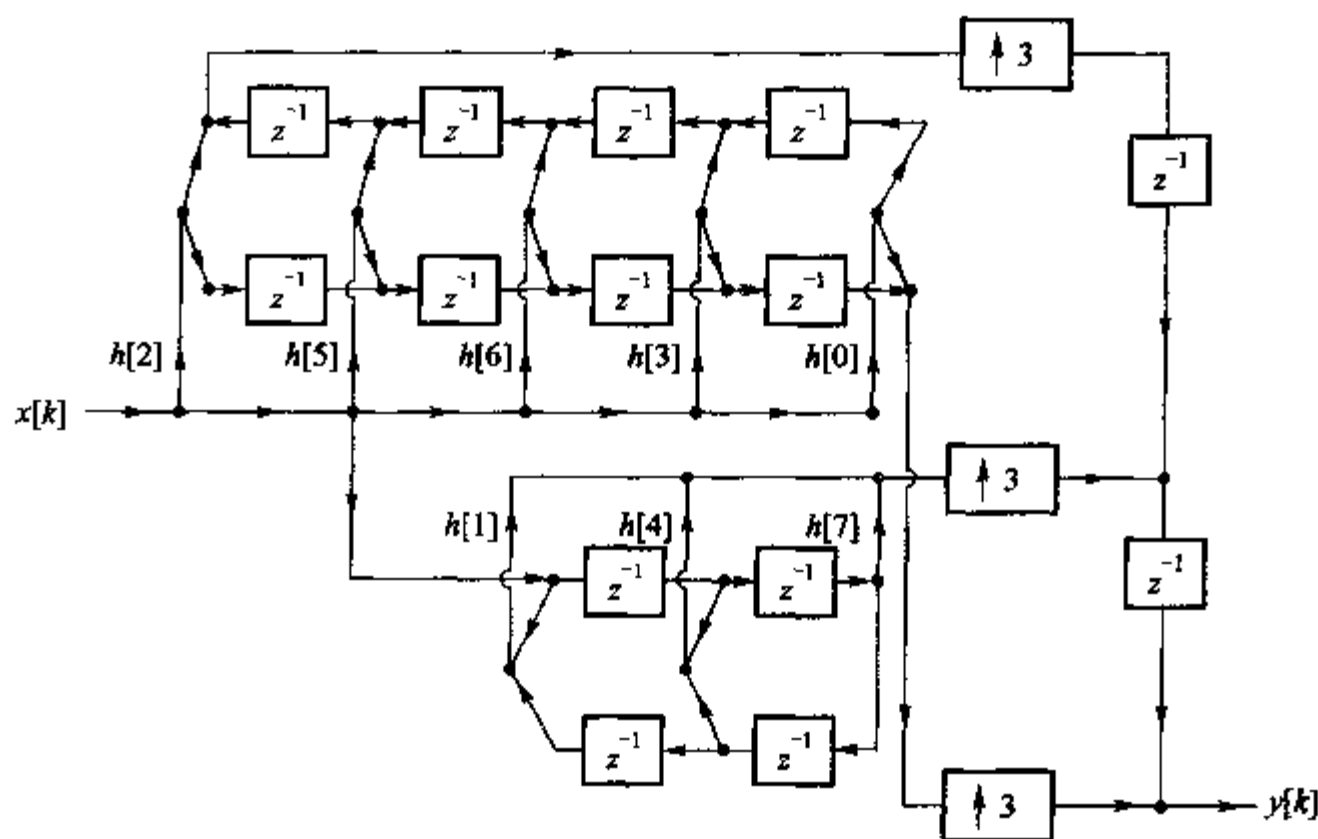
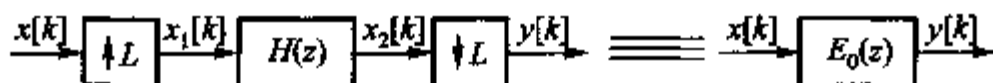


图 8-15 题 8-11 解答图

8-12 试证明题 8-12 图所示等式。



题 8-12 图

证:

对 $H(z)$ 做多相分解, 可得

$$H(z) = \sum_{n=0}^{L-1} E_n(z^L) z^{-n}$$

由式(8-5)可得

$$X_1(z) = X(z^L)$$

所以

$$X_2(z) = H(z)X_1(z) = \sum_{n=0}^{L-1} E_n(z^L) z^{-n} X(z^L)$$

由式(8-2)及上式可得

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} X_2(z^{\frac{1}{L}} W_L^l) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{L-1} X(z) E_n(z) z^{-\frac{n}{L}} W_L^{-nl} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} X(z) E_n(z) z^{-\frac{n}{L}} \tilde{\delta}_L[n] = X(z) E_0(z) \end{aligned}$$

8-13 试证明一般的两通道滤波器组的输出可表示为

$$y[2k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_0[n] x[2k-n], \quad y[2k+1] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n] x[2k+1-n]$$

当系统的输入和输出可写成上面的形式时, 称其为周期为 2 的时变系统。

证:

记为

$$T(z) = \frac{1}{2}(H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z))$$

$$A(z) = \frac{1}{2}(H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z))$$

则两通道滤波器组的输入输出关系可写为

$$Y(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z)$$

由 z 变换的性质可知, $(-1)^k x[k] \leftrightarrow X(-z)$, 所以上式的等价时域表达式为

$$y[k] = \sum_n (t[n] + a[n](-1)^{k-n}) x[k-n]$$

令 $s_0[n] = t[n] + a[n](-1)^n$, $s_1[n] = t[n] - a[n](-1)^n$, 则有

$$y[2k] = \sum_n s_0[n] x[2k-n], \quad y[2k+1] = \sum_n s_1[n] x[2k+1-n]$$

8-14 已知两通道 QMF 滤波器组中的 $H_0(z)$ 为

$$H_0(z) = \frac{(1 + z^{-1})}{\sqrt{2}}$$

(1) 求出该系统中的 $H_1(z)$ 、 $G_0(z)$ 和 $G_1(z)$ 。

(2) 证明该 QMF 滤波器组是 PR QMF 滤波器组。

解:

(1)

$$H_1(z) = H_0(-z) = \frac{(1 - z^{-1})}{\sqrt{2}}$$

$$G_0(z) = H_1(-z) = \frac{(1 + z^{-1})}{\sqrt{2}}$$

$$G_1(z) = -H_0(-z) = \frac{(-1 + z^{-1})}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \quad E_0(z^2) = E_1(z^2) = 1/\sqrt{2}$$

$$T(z) = 2z^{-1}E_0(z^2)E_1(z^2) = z^{-1}$$

8-15 已知两通道 FIR PR 滤波器组中的滤波器在 z 域的关系为

$$H_1(z) = -z^{-(N-1)}H_0(-z^{-1})$$

$$G_0(z) = H_1(-z), G_1(z) = -H_0(-z)$$

求滤波器在时域的等价关系。

解:

由 z 变换的性质可得

$$H_0(z^{-1}) \longleftrightarrow h_0[-k]$$

$$H_0(-z^{-1}) \longleftrightarrow (-1)^k h_0[-k]$$

$$-z^{-(N-1)}H_0(-z^{-1}) \longleftrightarrow -(-1)^{k-(N-1)}h_0[-(k-(N-1))]$$

$$= (-1)^k h_0[N-1-k]$$

所以

$$h_1[k] = (-1)^k h_0[N-1-k]$$

由

$$G_0(z) = H_1(-z)$$

可得

$$g_0[k] = (-1)^k h_1[k] = (-1)^k \times (-1)^k h_0[N-1-k] = h_0[N-1-k]$$

由

$$G_1(z) = -H_0(-z)$$

可得

$$g_1[k] = -(-1)^k h_0[k] = h_1[N-1-k]$$

8-16 已知两通道 FIR PR 滤波器组中的低通滤波器 $H_0(z)$ 的阶数为 3, $H_0(z)$ 在 $z = -1$ 有两个零点。试确定 $H_0(z)$ 的系数。是否可以将 $H_0(z)$ 设计线性相位系统?

解:

由题目所给条件,可以假设 $H_0(z)$ 的形式为

$$\begin{aligned} H_0(z) &= a(1 + 2z^{-1} + z^{-2})(1 + bz^{-1}) \\ &= a[1 + (2+b)z^{-1} + (1+2b)z^{-2} + bz^{-3}] \end{aligned}$$

$H_0(z)H_0(z^{-1})$ 中二次幂的系数 d_2 为

$$d_2 = a^2(b^2 + 4b + 1)$$

$H_0(z)H_0(z^{-1})$ 中零次幂的系数 d_0 为

$$d_0 = a^2(6b^2 + 8b + 6)$$

由 PR 条件

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z^{-1})H_0(-z) = 1$$

可知

$$d_2 = 0, \quad d_0 = 0.5$$

由于 $a \neq 0$, 由 $d_2 = 0$, 可得方程

$$b^2 + 4b + 1 = 0$$

上述二次方程的根为

$$b_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

取 $b_1 = -2 + \sqrt{3}$, 则由 $d_0 = 0.5$, 可得

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{64 - 32\sqrt{3}}}$$

所以

$$\begin{aligned} H_0(z) &= a_1(1 + 2z^{-1} + z^{-2})(1 + b_1z^{-1}) \\ &= 0.3415 + 0.5915z^{-1} + 0.1585z^{-2} - 0.0915z^{-3} \end{aligned}$$

取 $b_2 = -2 - \sqrt{3}$, 则由 $d_0 = 0.5$, 可得

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{64 + 32\sqrt{3}}}$$

所以

$$\begin{aligned} H_0(z) &= a_2(1 + 2z^{-1} + z^{-2})(1 + b_2z^{-1}) \\ &= 0.0915 - 0.1585z^{-1} - 0.5915z^{-2} - 0.3415z^{-3} \end{aligned}$$

由上述推导过程可知, $H_0(z)$ 不能设计成线性相位系统。

第9章

信号时频分析与小波分析

9.1 基本知识 with 重要公式

信号的傅里叶变换是以正弦类(虚指数)信号为基函数的正交变换,其物理概念清晰,对确定性信号和平稳信号的分析发挥了重要作用,但傅里叶变换无法有效地反映非平稳信号在某些瞬间的突变。对于非平稳信号,人们需要同时获得信号的时间特性和频率特性,这就是信号的时频分析所研究的内容。

信号的短时傅里叶变换(STFT)能够在一定程度上改善傅里叶变换的不足,能够同时获得信号的时间特性和频率特性,但其在信号的时频分析中,时间分辨率固定不变,因而不能有效地反映信号的突变程度。小波(wavelet)分析拓展了信号 STFT 的方法,实现了一种全新的信号时频分析方法,有效地解决了信号短时傅里叶变换的缺陷,因而得到了广泛应用。为便于理解和应用信号的小波变换,本章从信号表达的概念来展现信号的离散小波变换(DWT)的数学概念,从信号空间(Signal Space)的概念来描述信号 DWT 的多分辨率分析(MRA),从滤波器组(Filter Bank)的概念来解释和实现信号的 DWT。

1. 短时傅里叶变换

信号短时傅里叶变换(Short Time Fourier Transform,简称 STFT)是一种信号时频分析方法,可以同时获得信号的时间特性和频率特性。信号 $x(t)$ 的 STFT 定义为

$$X(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (9-1)$$

其中 $w(t)$ 为时窗信号。信号 $x(t)$ 的短时傅里叶变换 $X(\omega, t)$ 是时间 t 和频率 ω 的二元函数。随着时窗信号 $w(t)$ 在整个积分区间上的滑动, 可以获得信号 $x(t)$ 在各局部区间上对应的频率分布。

连续信号 $x(t)$ 的短时傅里叶变换也是通过 DFT 实现的。若 $x[k]$ 是连续信号 $x(t)$ 的抽样, 抽样间隔 T 与抽样频率 f_{sam} 的关系为 $T = \frac{1}{f_{\text{sam}}}$ 。信号 $x(t)$ 的 STFT 的 DFT 计算表达式为

$$X[m, k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w[n - k] e^{-j\frac{2\pi}{N} mn}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9-2)$$

其中, N 为时窗信号 $w[k]$ 的宽度, m 为频率变量, k 为时间变量。

在信号 $x(t)$ 短时傅里叶变换的 DFT 实现中, 时间分辨率由信号 $x(t)$ 的时窗宽度 T_p 决定, 时窗宽度越窄, 时间分辨率越高。信号 $x(t)$ 的时窗宽度为

$$T_p = NT = \frac{N}{f_s} \quad (9-3)$$

频率分辨率 Δf_c 是指 DFT 分析中相邻谱线之间的间隔, 间隔越小, 频率分辨率越高。频谱分辨率为

$$\Delta f_c = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p} \quad (9-4)$$

在信号时频分析中, 时间分辨率 T_p 与频率分辨率 Δf_c 之间受到“测不准原理”的制约, 因而无法同时获得较高的时间分辨率和频率分辨率, 即在时间上观察越细致, 必定在频率上观察越粗略。从信号分析的角度, 对于信号中变化较快的区域采用较高的时间分辨率, 变化较慢的区域采用较低的时间分辨率。信号的短时傅里叶变换过程中时间分辨率固定不变, 因而不能有效地反映信号的突变程度。

2. 小波展开与小波变换

小波信号是能量有限的小信号, 具有良好的时频特性。在信号分析中, 为了更好地分析与处理信号, 常将信号 $x(t)$ 表达为某类基信号的线性组合, 不同的基信号对应不同的变换。若利用小波信号 $\psi_{j,k}(t)$ 来表达信号 $x(t)$, 就可实现信号 $x(t)$ 的小波变换。即

$$x(t) = \sum_k \sum_j d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t) \quad (9-5)$$

其中 $\{d_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ 称为信号 $x(t)$ 的离散小波变换 (Discrete Wavelet Transform, 简称 DWT), $x(t)$ 的小波表达式称为离散小波反变换 (Inverse Discrete Wavelet Transform, 简称 IDWT)。信号的离散小波变换 $d_{j,k}$ 是二维整数变量 j 和 k 的函数, 变量 k 表示信号 DWT 的时间或空间 (time or space), 变量 j 表示 DWT 的频率或尺度 (frequency or scale)。

小波信号 $\psi_{j,k}(t)$ 是小波母函数 $\psi(t)$ 经时间平移和尺度展缩而产生, 即

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z} \quad (9-6)$$

3. 小波变换与多分辨分析

为了更好地理解信号小波变换的数学概念和物理概念, 根据信号空间的概念描述了尺度函数 $\varphi(t)$ (scaling function), 并建立了信号小波变换与多分辨分析 (Multiresolution Analysis, 简称 MRA) 之间的关系。

尺度函数

满足特定条件的信号构成的信号集合称为信号空间。在信号处理中, 由 L^2 定义的信号空间十分重要, 所有满足平方可积的信号构成的信号空间称为平方可积信号空间 L^2 。

尺度函数 $\varphi(t)$ 也是能量有限的信号, 由 $\varphi(t)$ 经过平移和展缩而得到尺度函数 $\varphi_{j,k}(t)$ 为

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z} \quad (9-7)$$

所有可以由信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 线性表达的信号集合称为信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 张成的闭信号空间 V_j , 即

$$V_j = \overline{\text{Span}\{\varphi_{j,k}(t)\}} = \overline{\text{Span}\{\varphi_k(2^j t)\}}, j, k \in \mathbb{Z} \quad (9-8)$$

尺度信号 $\varphi_{j+1,k}(t)$ 比尺度信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 具有更高的时间分辨率, 因而由信号 $\varphi_{j+1,k}(t)$ 张成的信号空间 V_{j+1} 包含由信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 张成的信号空间 V_j , 即存在 $V_j \subset V_{j+1}$, 并且存在一致单调性

$$V_{-\infty} \cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{\infty} \quad (9-9)$$

其中 $V_{-\infty} = \{0\}$, $V_{\infty} = L^2$ 。

尺度函数 $\varphi(t) \in V_0$, 因而必然有 $\varphi(t) \in V_1$, 即尺度函数 $\varphi(t)$ 可以由信号 $\varphi(2t)$ 线性表达, 即存在

$$\varphi(t) = \sum_n h_0[n] \sqrt{2} \varphi(2t - n), n \in \mathbb{Z} \quad (9-10)$$

式 (9-10) 称为尺度函数 $\varphi(t)$ 的多分辨分析 (MRA) 方程。 $h_0[n]$ 是尺度函数系

数,也可以看作是尺度滤波器的单位脉冲响应。

小波函数

由小波函数 $\psi(t)$ 经过尺度展缩与平移得到小波信号

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

小波信号 $\psi_{j,k}(t)$ 一般设计为尺度信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 的正交信号,即存在

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,l}(t) \rangle = \int \varphi_{j,k}(t) \psi_{j,l}(t) dt = 0, \quad j, k, l \in \mathbb{Z} \quad (9-11)$$

小波信号 $\psi_{j,k}(t)$ 张成的信号空间 W_j 与尺度信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 张成的信号空间 V_j 的正交和等于 V_{j+1} , 即

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (9-12)$$

利用尺度信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 和小波信号 $\psi_{j,k}(t)$ 共同表达任意信号 $x(t)$ 时,可以更有效地表达信号 $x(t)$ 的不同分量。尺度信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 表达信号 $x(t)$ 中的粗略信息 (coarse information), 小波信号 $\psi_{j,k}(t)$ 表达信号 $x(t)$ 中的精细信息 (fine information)。

根据式 (9-12) 描述的小波信号空间 W_j 和尺度信号空间 V_j 之间的关系, 可以将平方可积的信号空间 L^2 表达为

$$L^2 = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus W_{j_0+2} \oplus W_{j_0+3} \oplus \cdots \quad (9-13)$$

其中 V_{j_0} 称为初始尺度信号空间。

若初始尺度 $j_0 = -\infty$, 则平方可积的信号空间 L^2 全部由小波信号空间表达, 即

$$L^2 = \cdots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \quad (9-14)$$

由此可见, 信号可以由尺度信号与小波信号共同表达, 也可以完全由小波信号表达。

$W_0 \subset V_1, \psi(t) \in W_0$, 因而存在 $\psi(t) \in V_1$; 这表明小波函数 $\psi(t)$ 可以由尺度信号 $\varphi(2t-k)$ 线性表达, 即

$$\psi(t) = \sum_n h_1[n] \sqrt{2} \varphi(2t-n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (9-15)$$

式 (9-15) 称为小波函数 $\psi(t)$ 的多分辨率分析 (MRA) 方程。 $h_1[n]$ 称为小波函数系数, 也可以看作是小波滤波器的单位脉冲响应。

当尺度信号 $\varphi(t)$ 与小波信号 $\psi(t)$ 满足正交时, 则 $h_1[n]$ 与 $h_0[n]$ 之间存在

$$h_1[n] = (-1)^n h_0[1-n] \quad (9-16)$$

当尺度函数系数 $h_0[n]$ 为有限长序列, 且长度 N 为偶数时, 式 (9-16) 可进一步表达为

$$h_1[n] = (-1)^n h_0[N-1-n] \quad (9-17)$$

根据式(9-13),任意平方可积信号 $x(t) \in L^2$,都可以由尺度信号和小波信号线性表达为

$$x(t) = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (9-18)$$

其中 j_0 是信号空间 V_{j_0} 对应的下标。当 $j_0 = -\infty$ 时,式(9-18)可表示为

$$x(t) = \sum_k \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (9-19)$$

在信号 $x(t)$ 的小波展开式中,由低分辨率的尺度信号 $\varphi_{j_0,k}(t)$ 表达的 $\sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(t)$ 对应信号 $x(t)$ 的低频分量,是信号 $x(t)$ 最粗略的近似(approximation)。由一系列不同尺度的小波信号 $\psi_{j_0,k}(t)$ 、 $\psi_{j_0+1,k}(t)$ 、 $\psi_{j_0+2,k}(t)$ 等表达的 $\sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$ 对应信号 $x(t)$ 的高频分量,表达了信号 $x(t)$ 中丰富的细节(detail)。为了区别尺度参数 j 与时间参数 k ,展开系数 $c_{j,k}$ 和 $d_{j,k}$ 一般分别写为 $c_j[k]$ 和 $d_j[k]$ 。

当尺度信号 $\varphi(t)$ 与小波信号 $\psi(t)$ 构成正交标准基时,信号 $x(t)$ 的展开系数可由信号的内积计算,并且信号 $x(t)$ 的 DWT 满足

$$\int |x(t)|^2 dt = \sum_k |c_{j_0}[k]|^2 + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} |d_j[k]|^2 \quad (9-20)$$

式(9-20)称为离散小波变换的 Parseval 等式,它表明信号 $x(t)$ 在时域的能量等于信号在小波变换域中各展开分量的能量之和,满足能量守恒。

尺度函数系数与小波函数系数

在信号的小波分析中,一般利用小波函数系数 $h_1[n]$ 和尺度函数系数 $h_0[n]$ 实现信号的 DWT。尺度信号 $\varphi(t)$ 和小波信号 $\psi(t)$ 的特性及相互关系是通过 $h_1[n]$ 和 $h_0[n]$ 的约束条件来体现的,这些约束条件是设计小波信号 $\psi(t)$ 和尺度信号 $\varphi(t)$ 的理论基础。

若尺度函数 $\varphi(t)$ 的 MRA 方程成立,且 $\int \varphi(t) dt = 1$,则尺度函数系数 $h_0[n]$ 需满足

$$\sum_n h_0[n] = \sqrt{2} \quad (9-21)$$

若 $\psi(t)$ 与 $\varphi(t)$ 满足正交性,则存在 $\int \psi(t) dt = 0$,且小波函数系数 $h_1[n]$ 需满足

$$\sum_n h_1[n] = 0 \quad (9-22)$$

若实现 $\varphi(t)$ 的正交性 $\int \varphi(t) \varphi(t-k) dt = \delta[k]$, 则尺度函数系数 $h_0[n]$ 需满足

$$\sum_n h_0[n] h_0[n-2k] = \delta[k], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (9-23)$$

若实现 $\psi(t)$ 的正交性 $\int \psi(t) \psi(t-k) dt = \delta[k]$, 则小波函数系数 $h_1[n]$ 需满足

$$\sum_n h_1[n] h_1[2k-n] = \delta[k], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (9-24)$$

若实现 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 的正交性 $\int \varphi(t-k) \psi(t-l) dt = 0$, 则 $h_0[n]$ 与 $h_1[n]$ 需满足

$$\sum_n h_0[n] h_1[n-2k] = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (9-25)$$

4. 小波变换与滤波器组

信号的离散小波变换并不是直接由 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 经信号内积运算来实现, 而是利用 $h_0[n]$ 和 $h_1[n]$ 来实现, 并且将信号小波展开系数 $c_j[k]$ 和 $d_j[k]$ 看作是离散信号, $h_0[n]$ 和 $h_1[n]$ 看作是数字滤波器, 从而建立小波变换与滤波器组之间的关系, 由滤波器组的理论来理解和实现信号的 DWT 和 IDWT。

离散小波变换的分解算法

若信号隶属于信号空间 V_{j+1} , 即 $x(t) \in V_{j+1}$, 则信号 $x(t)$ 可由尺度信号 $\varphi_{j+1,k}(t)$ 表达为

$$x(t) = \sum_k c_{j+1}[k] 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}t - k) \quad (9-26)$$

由于存在 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, 故信号 $x(t)$ 可由尺度信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 和小波信号 $\psi_{j,k}(t)$ 共同表达为

$$x(t) = \sum_k c_j[k] 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) + \sum_k d_j[k] 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (9-27)$$

当尺度信号 $\varphi_{j,k}(t)$ 和小波信号 $\psi_{j,k}(t)$ 构成正交标准基时, 式(9-27)中展开系数 $c_j[k]$ 和 $d_j[k]$ 可由信号内积分别计算为

$$c_j[k] = \langle x(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle = \int x(t) 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) dt \quad (9-28)$$

$$d_j[k] = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int x(t) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) dt \quad (9-29)$$

根据尺度函数 $\varphi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的 MRA 方程可推导出

$$c_j[k] = \sum_i h_0[i - 2k] c_{j+1}[i] \quad (9-30)$$

$$d_j[k] = \sum_i h_1[i - 2k] c_{j+1}[i] \quad (9-31)$$

式(9-30)和式(9-31)称为信号 DWT 的分解方程,其建立了较高尺度的展开系数 $c_{j+1}[k]$ 与较低尺度的展开系数 $c_j[k]$ 和 $d_j[k]$ 之间的相互关系,可以由滤波器组实现,如图 9-1 表示。

图中 $y_0[k] = \sum_i h_0[i - k] c_{j+1}[i]$, $y_1[k] = \sum_i h_1[i - k] c_{j+1}[i]$ 。

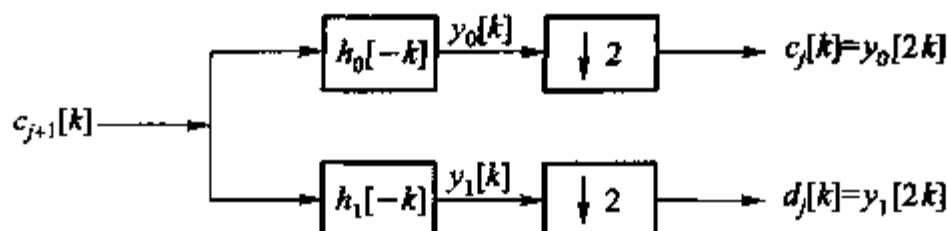


图 9-1 DWT 分解算法的滤波器组实现

DWT 的分解算法具有递推结构,即可以对 $c_j[k]$ 进一步展开而得到 $c_{j-1}[k]$ 、 $d_{j-1}[k]$ 。如此类推,由展开系数 $c_{j+1}[k]$ 可以得到所需的尺度下的小波展开系数。由此可见,信号小波变换的过程实际就是逐级从信号中分解出不同精度的细节信息,实现对信号 $x(t)$ 的时频分析。在足够高的尺度下,信号 $x(t)$ 的展开系数 $c_{j+1}[k]$ 近似等于信号 $x(t)$ 的抽样序列 $x[k]$ 。

离散小波反变换的重构算法

IDWT 重构算法是 DWT 分解算法的逆运算,它是通过由展开系数 $c_j[k]$ 和 $d_j[k]$ 重构展开系数 $c_{j+1}[k]$ 而实现的。若信号 $x(t) \in V_{j+1}$, 根据尺度函数 $\varphi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的 MRA 方程,可推导出

$$x(t) = \sum_l \left\{ \sum_k c_j[k] h_0[l - 2k] + \sum_k d_j[k] h_1[l - 2k] \right\} 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1} t - l) \quad (9-32)$$

因而存在

$$c_{j+1}[k] = \sum_i c_j[i] h_0[k - 2i] + \sum_i d_j[i] h_1[k - 2i] \quad (9-33)$$

式(9-33)称为信号 $x(t)$ 的 IDWT 的重构方程,表明高尺度的展开系数 $c_{j+1}[k]$ 可由低尺度的展开系数 $c_j[k]$ 和 $d_j[k]$ 通过内插和滤波器组 $h_0[-n]$ 和 $h_1[-n]$ 重构,如图 9-2 所示。IDWT 重构算法也存在与分解算法对应的递推结构,可以

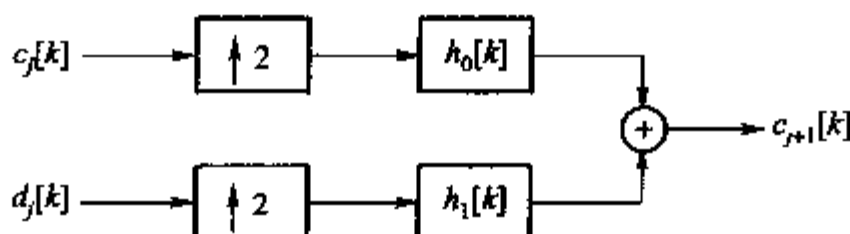


图 9-2 IDWT 重构算法的滤波器组实现

实现由多级展开系数重构信号 $x(t)$ 。

小波变换的时频分析

信号 $x(t)$ 小波变换可以由信号的抽样序列 $c_{j+1}[k]$ 经过滤波器组 $h_0[-n]$ 和 $h_1[-n]$ 而实现, 因此可以根据频域对信号滤波的概念来分析信号的小波变换, 根据滤波器组的理论来理解信号小波变换的时频特性。

若数字滤波器 $h_0[-n]$ 和 $h_1[-n]$ 对应的系统函数分别为 $H_0(z)$ 和 $H_1(z)$, 频率特性分别为 $H_0(e^{j\omega})$ 和 $H_1(e^{j\omega})$, 则信号 DWT 的三级分解算法树型结构可以由图 9-3 描述。

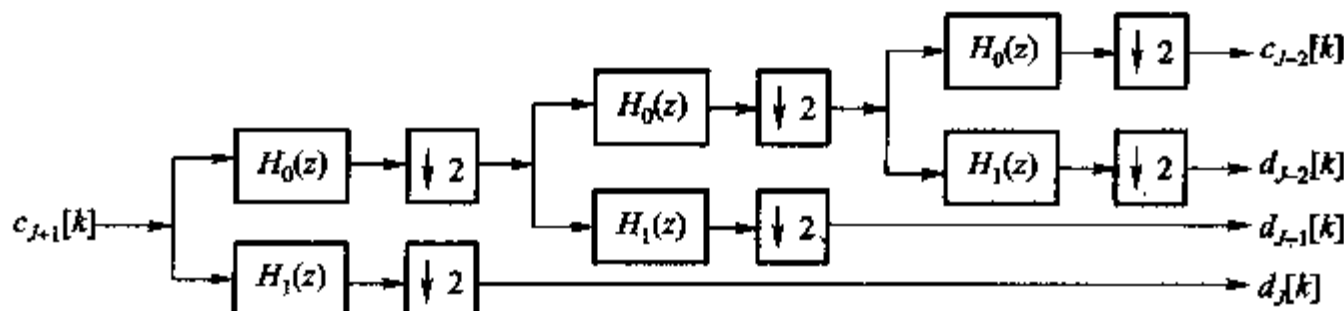


图 9-3 DWT 三级分解算法树型结构

其中, $H_0(z)$ 通常为数字低通滤波器, $H_1(z)$ 为数字高通滤波器, $H_0(z)$ 和 $H_1(z)$ 构成关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称的正交镜像滤波器组, 图 9-4(a) 为其对应的频率特性。根据 $H_0(e^{j\omega})$ 和 $H_1(e^{j\omega})$ 的频率特性, 以及滤波器组的理论, 可得 $c_{j-2}[k]$ 、 $d_{j-2}[k]$ 、 $d_{j-1}[k]$ 、 $d_j[k]$ 分别通过的各等效数字滤波器 $H^{(0)}(z)$ 、 $H^{(1)}(z)$ 、 $H^{(2)}(z)$ 、 $H^{(3)}(z)$ 的频率特性, 如图 9-4(b) 所示。

由此可见, 小波系数 $d_j[k]$ 对应信号的高频分量 $\left(\frac{\pi}{2} \sim \pi\right)$, 对应的基函数为 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k)$, 平移步长 $\frac{k}{2^j}$ 较小, 因而具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率。小波系数 $d_{j-1}[k]$ 和 $d_{j-2}[k]$ 对应信号较低频的信号分量, 相应的平移步长较宽, 因而时间分辨率较低, 频率分辨率较高。这说明信号的小波变换能够根据信号的变化特性调整时窗和频窗, 从而更有效地实现信号的时频分析。

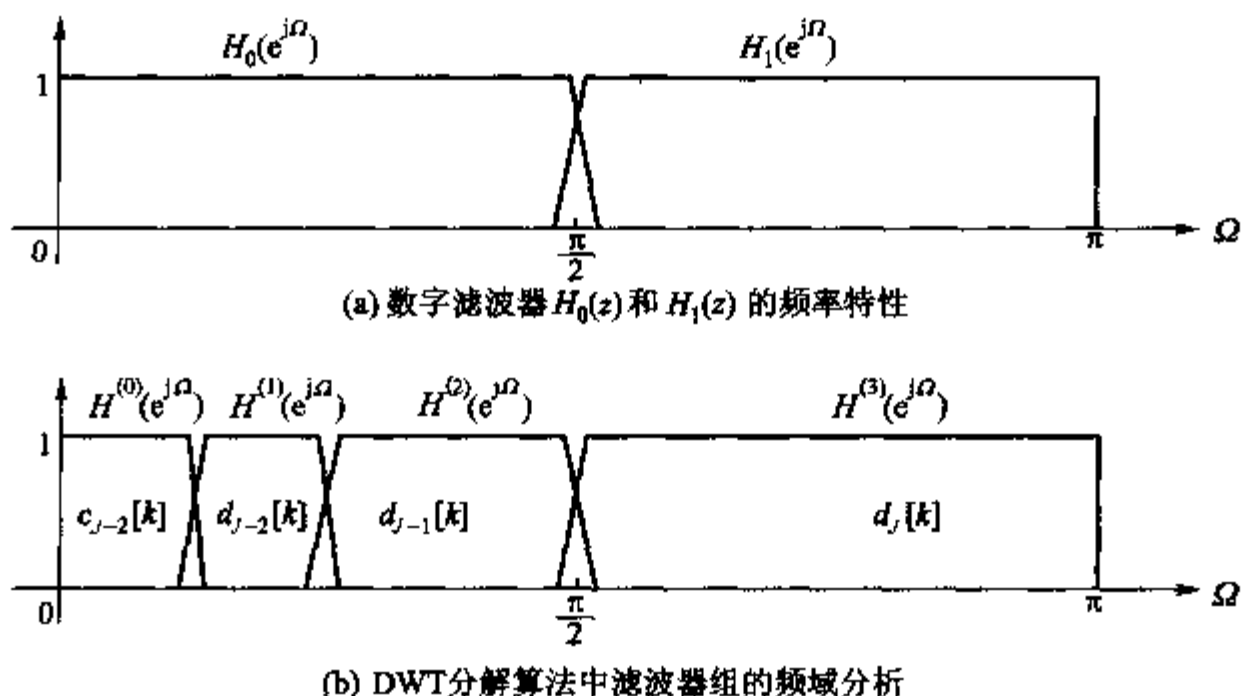


图9-4 信号小波分析的频域描述

5. 基于小波的信号处理与应用

基于小波的信号处理是将信号进行离散小波变换,在小波变换域对数据进行处理,再由离散小波反变换得到处理后的信号。基于小波的信号处理存在许多优点,在信号去噪和信号压缩等方面取得了良好的效果。

小波去噪

含有加性噪声的信号 $s(t)$ 的数学模型一般为

$$s(t) = x(t) + \sigma \varepsilon(t) \quad (9-34)$$

其中 $x(t)$ 为有用信号, $\varepsilon(t)$ 设为高斯白噪声信号,其分布为 $\mu(0,1)$, σ 为噪声信号的标准方差。基于小波的信号去噪的过程主要为,首先对信号 $s(t)$ 进行 N 级离散小波变换,对 N 级不同尺度的小波展开系数 $d_j[k]$ 、 $d_{j-1}[k]$ 、 \dots 、 $d_{j-N+1}[k]$ 进行阈值化,根据阈值化后的小波展开系数通过 N 级离散小波反变换重构信号 $\hat{s}(t)$ 。阈值方式主要有软阈值化 (soft-thresholding) 和硬阈值化 (hard-thresholding),软阈值是将低于阈值的系数置为零,而高于阈值的系数也相应减少,硬阈值是只将低于阈值的系数置为零。软阈值化和硬阈值化的输入输出关系分别为

$$Th_{\text{soft}}(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x)(|x| - t) & |x| \geq t \\ 0 & |x| < t \end{cases} \quad (9-35)$$

$$Th_{\text{hard}}(x) = \begin{cases} x & |x| \geq t \\ 0 & |x| < t \end{cases} \quad (9-36)$$

小波信号去噪的基本原理是在小波变换域进行阈值化处理以滤除噪声,因而能够较好地保留信号中有用的细节信息。

小波压缩

基于小波的信号压缩主要有两种方法,第一种信号压缩方法是直接去除信号小波表达中某些高精度信号分量的对应的 DWT 系数,通过舍弃不同精度下的细节信息,由剩余的较粗略精度的 DWT 系数重建信号,从而实现对信号的压缩。第二种信号压缩方法是去除信号小波表达中各精度信号分量的 DWT 系数中幅度较小的数据,通过将信号 DWT 代表细节的系数中幅度较小的系数置为零,由剩余的最粗略精度的 DWT 系数和部分幅度较大的 DWT 细节系数重建信号。由于信号中的噪声一般表现出高频特性,在信号的小波变换域中,噪声信号对应的 DWT 系数一般分布在较高精度的系数上,而且多数情况下这些系数幅度都较小,通过以上两种信号压缩方法,同样可以滤除信号中的噪声。因此,在许多场合下,可以同时实现信号的压缩和去噪,这是基于小波的信号压缩所具有的重要特性。

9.2 学习要求

1. 了解信号傅里叶分析的局限性,以及信号时频分析的概念。
2. 了解信号 STFT 的基本原理,以及测不准原理的物理意义。
3. 了解信号小波展开和小波变换的数学概念。
4. 理解信号小波变换与多分辨率、滤波器组的相互关系。
5. 掌握利用小波变换进行信号去噪和信号滤波的基本思想及方法。
6. 掌握利用 MATLAB 进行信号的小波分析及应用。

9.3 重点和难点提示

本章重点是从信号表达的角度深刻理解信号的时域分析、频域分析、时频分析的数学概念和物理概念,了解它们之间的区别和联系。信号分析的重要内容是将信号表达为某类基本信号,以利于信号的有效处理。信号的时域表达是将信号分解为 $\delta(t)$ 信号,使得信号在时域具有任意的分辨率,但无频率分辨率,因为 $\delta(t)$ 具有无限的频宽。信号的傅里叶表达是将信号分解为 $e^{j\omega t}$ 信号,使得信号在频域具有任意的分辨率,而无时间分辨率,因为 $e^{j\omega t}$ 为持续时间无限的正弦类信号。短时傅里叶变换可以同时具有时间和频率分辨率,但其时频窗口形状保持不变。小波表示可同时具有时间和频率的分辨率,且其时域窗口可以自动调整,实现了对高频信号具有较高的时间分辨率,对低频信号具有较高的频率分

辨率。

本章难点是从信号空间和分辨率的角度深刻理解尺度函数 $\varphi(t)$ 的 MRA 方程和小波函数 $\psi(t)$ 的 MRA 方程,这是信号小波分析的基本方程,也是设计尺度函数 $\varphi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 、实现 DWT 分解算法和 IDWT 重构算法的理论基础。 $\varphi(t)$ 的 MRA 方程建立了 $\varphi(t)$ 与 $h_0[n]$ 之间的一一对应关系, $\psi(t)$ 的 MRA 方程建立了 $\psi(t)$ 与 $h_1[n]$ 之间的一一对应关系,从而将信号小波变换与滤波器组理论联系起来。

9.4 思考题

1. 为什么信号傅里叶变换不能有效反映信号的突变?
2. 信号短时傅里叶变换的基信号是什么信号?
3. 在信号时频分析中,信号的小波变换克服了测不准原理的限制吗?
4. 基于傅里叶变换与基于小波变换的信号去噪有何区别?
5. 小波基函数的非唯一性有何理论意义和实际意义?
6. 为什么在基于小波的信号压缩过程中,能够同时实现信号去噪?

附录

北京交通大学近年研究生入学试题及详解

I. 2001 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解

1. (15 分) 利用数字系统处理模拟信号的框图如图 A-1 所示。其中 $X(j\omega)$ 为连续信号的频谱, $H(e^{j\Omega})$ 是离散系统的频率响应。 $H_r(j\omega)$ 是重建滤波器。系统的抽样间隔 $T=0.02\text{ s}$ 。试画出信号 $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_s(t)$ 、 $y_r(t)$ 的频谱。

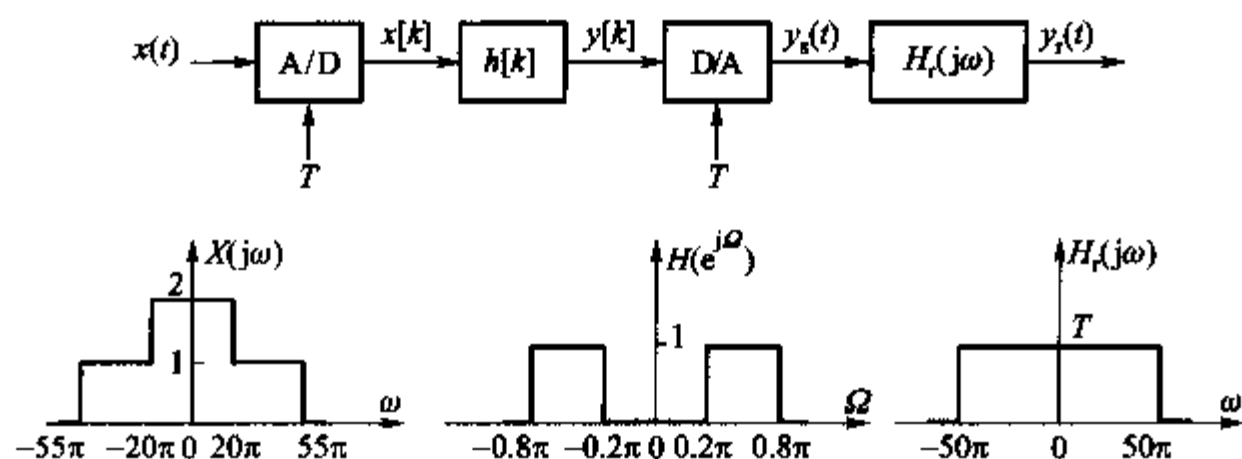


图 A-1

解:

$x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_s(t)$ 、 $y_r(t)$ 的频谱分别为

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X\left(j \frac{\Omega + 2\pi n}{T}\right)$$

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega})$$

$$Y_s(j\omega) = Y(e^{j\Omega})$$

$$Y_r(j\omega) = H_r(j\omega)Y_s(j\omega)$$

$x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_s(t)$ 、 $y_r(t)$ 的频谱如图 A-2 所示

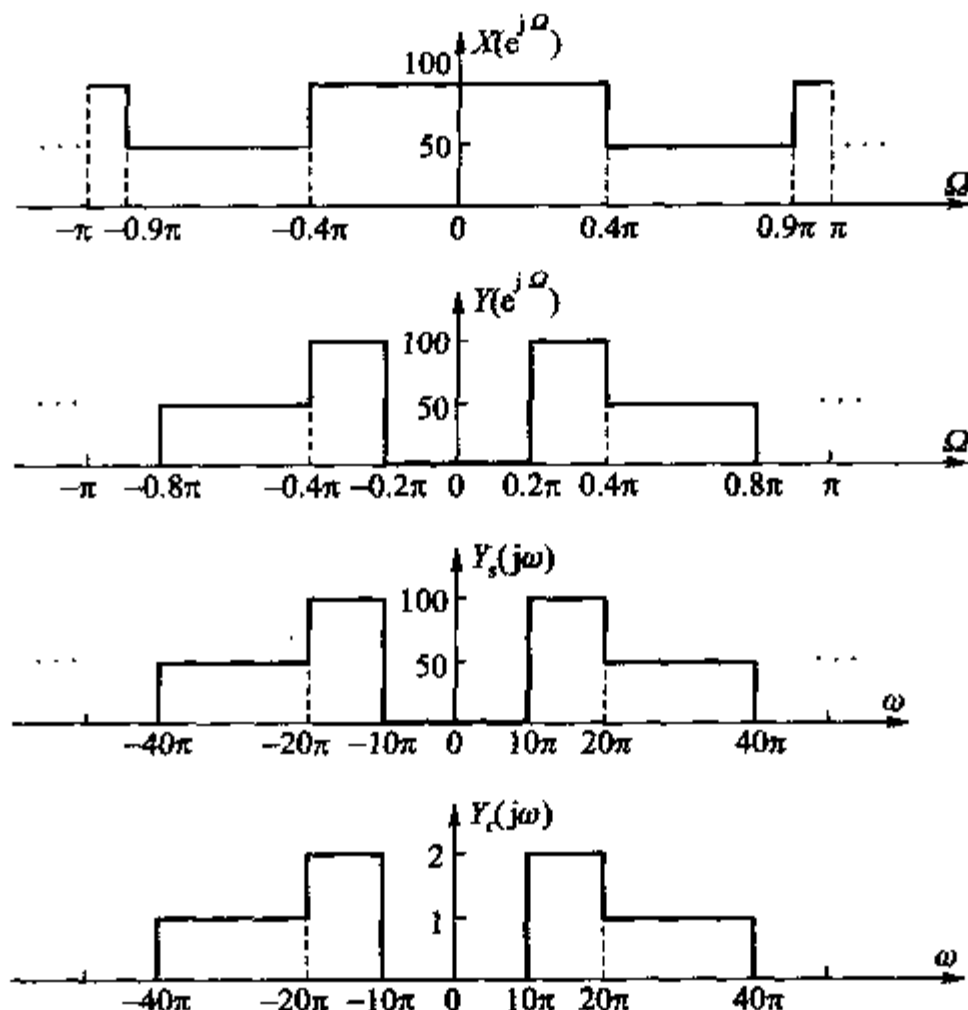


图 A-2

2. (20 分) 推导基 2 时域抽取 FFT 算法的递推公式。画出 $N=8$ 的 FFT 流图。利用流图计算 $X[m] = \{22, -3+j, -2+2j, -3-j, 2, -3+j, -2-2j, -3-j; m=0, 1, \dots, 7\}$ 的 IDFT。

解:

$$\begin{aligned} X[m] &= \text{DFT}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{km} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_N^{2rm} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)m} \end{aligned}$$

记

$$X_1[m] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_{\frac{N}{2}}^{rm}, X_2[m] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_{\frac{N}{2}}^{rm}$$

则有

$$X[m] = X_1[m] + W_N^m X_2[m]$$

$$X\left[m + \frac{N}{2}\right] = X_1[m] - W_N^m X_2[m]$$

由上式可得 $N=8$ 的 FFT 流图如图 A-3 所示。

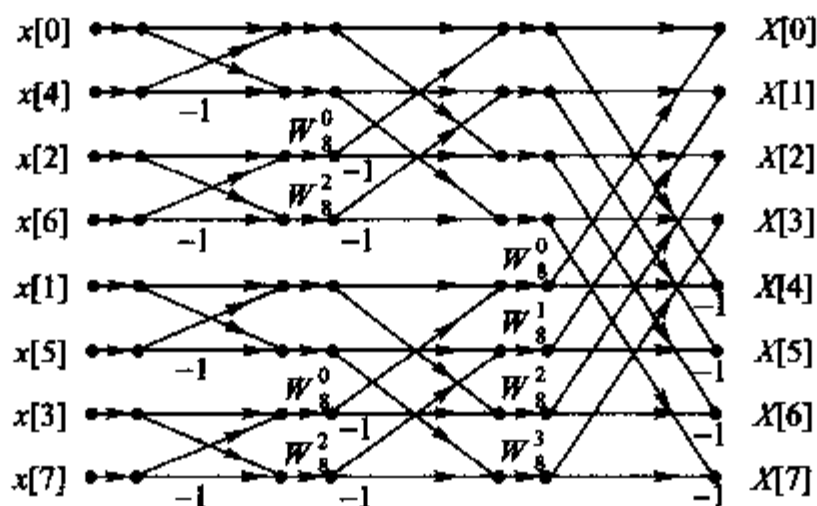


图 A-3

利用

$$x[k] = \frac{1}{N} (\text{DFT}\{X^*[m]\})^*$$

就可用 FFT 流图计算 IDFT。利用图 A-3 流图,可得

$$\text{DFT}\{X^*[m]\} = \{8, 16, 24, 24, 32, 16, 32, 24; k = 0, 1, \dots, 7\}$$

所以

$$x[k] = [1, 2, 3, 3, 4, 2, 4, 3; k = 0, 1, \dots, 7]$$

3. (15 分) 试利用 Butterworth 模拟滤波器和双线性变换法, 设计一个 3 dB 截频 $\Omega_c = 0.4\pi$ rad、阶数为 3 的数字低通滤波器。并画出 $H(z)$ 的直接型结构框图。

解:

取双线性变换中的参数 $T=2$, 则可得模拟低通滤波器的 3 dB 截频 ω_c 。

$$\omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \tan(0.2\pi) = 0.7265$$

满足条件的模拟低通滤波器的 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1} = \frac{0.3835}{s^3 + 1.4531s^2 + 1.0557s + 0.3835}$$

由双线性变换可得

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.0985 + 0.2956z^{-1} + 0.2956z^{-2} + 0.0985z^{-3}}{1 - 0.5772z^{-1} + 0.4218z^{-2} - 0.0563z^{-3}}$$

$H(z)$ 的直接型结构框图如图 A-4 所示。

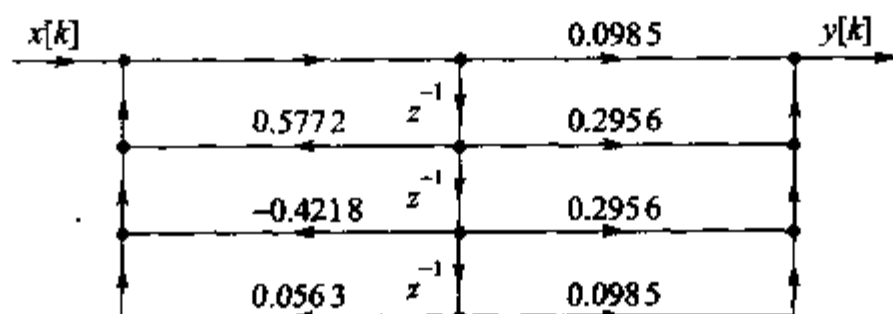


图 A-4

4. (15 分) 试用矩形窗口法设计一个线性相位 FIR 高通数字滤波器, 其频率响应为

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j3\Omega} & \frac{\pi}{2} \leq |\Omega| \leq \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 试求 $h[k]$ 和 $H(z)$ 。
- (2) 画出 $H(z)$ 直接型结构框图。
- (3) 如果所设计的滤波器通带衰减不能满足要求, 可采取什么办法?

解:

$$\begin{aligned} (1) \quad h_d[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} d\Omega = \delta[k-3] - 0.5 \text{Sa}[0.5\pi(k-3)], \\ &k = 0, 1, \dots, 6 \\ &= [0.1061, 0, -0.3183, 0.5, -0.3183, 0, 0.1061; k=0, \\ &1, \dots, 6] \end{aligned}$$

$$H(z) = 0.1061(1 + z^{-6}) - 0.3183(z^{-2} + z^{-4}) + 0.5z^{-3}$$

(2) $H(z)$ 直接型结构框图如图 A-5 所示。

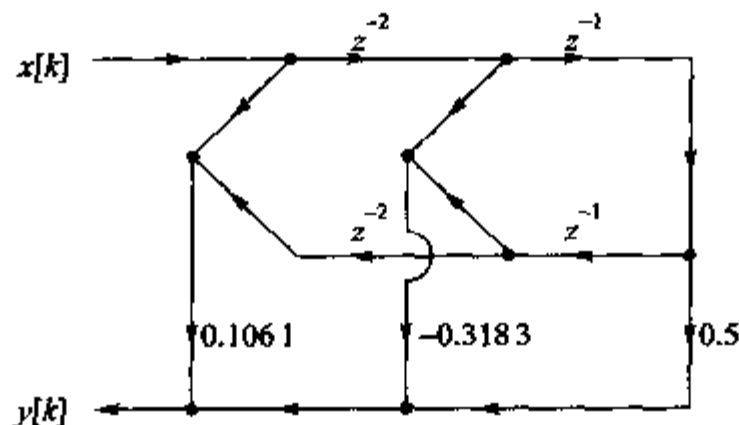


图 A-5

(3) 可选择其他窗函数, 如 Hamming 窗、Kaiser 窗等。

5. (15 分) 设 $X(e^{j\Omega})$ 和 $Y(e^{j\Omega})$ 分别表示实序列 $x[k]$ 和 $y[k]$ 的 DTFT, $x[k]$

与 $y[k]$ 的互相关函数定义为

$$r_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k+n]$$

(1) 试推导用 $X(e^{j\Omega})$ 和 $Y(e^{j\Omega})$ 表示的 $r_{xy}[n]$ 的 DTFT。

(2) 如果 $x[k], y[k]$ 分别是 N 点和 M 点的有限序列, 由(1)中的结论, 给出利用 DFT 和 IDFT 计算序列互相关的方法。

(3) 如果 $x[k] = [1, 2, 1, 3; k=0, 1, 2, 3], y[k] = [1, 1, 2, 2; k=0, 1, 2, 3]$, 不计算 DFT 和 IDFT, 求按(2)中方法由 IDFT 计算出的结果。

解:

(1) 由 DTFT 的定义和性质可得

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{r_{xy}[n]\} &= \sum_n \left(\sum_k x[k]y[k+n] \right) e^{-jn\Omega} = \sum_k x[k] \left(\sum_n y[k+n] e^{-jn\Omega} \right) \\ &= Y(e^{j\Omega}) \sum_k x[k] e^{jk\Omega} = Y(e^{j\Omega}) \left(\sum_k x[k] e^{-jk\Omega} \right)^* \\ &= X^*(e^{j\Omega}) Y(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

(2) 对 $x[k]$ 和 $y[k]$ 补零使其成为长度为 $L (L \geq N+M-1)$ 序列。计算 L 点的 DFT, 可得

$$X[m] = \text{DFT}\{x[k]\}, Y[m] = \text{DFT}\{y[k]\}$$

计算 $X^*[m]Y[m]$ 的 L 点 IDFT, 可得

$$\hat{r}_{xy}[n] = \text{IDFT}(X^*[m]Y[m])$$

其中

$$\hat{r}_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xy}[n+kL], \quad n = 0, 1, \dots, L-1$$

(3) 为了利用基 2 的 FFT 算法计算 DFT, 取(2)中的 $L=8$ 。直接计算 $x[k]$ 与 $y[k]$ 的互相关, 可得

$$r_{xy}[n] = [3, 4, 9, 11, 7, 6, 2; n = -3, -2, \dots, 3]$$

对 $r_{xy}[n]$ 按 $L=8$ 周期化, 可得

$$\hat{r}_{xy}[n] = [11, 7, 6, 2, 0, 3, 4, 9; n = 0, 1, \dots, 7]$$

6. (20 分) 回答问题。

(1) 脉冲响应不变法和双线性变换法在 IIR 数字滤波器的设计中起什么作用? 试比较它们的优缺点。

(2) 试比较 IIR 数字滤波器和 FIR 数字滤波器主要优缺点。

(3) 如何利用 DFT 计算序列 DTFT 的抽样值? 其中是否存在混叠和泄漏?

(4) 何为最小相位系统? 何为全通系统? 它们在数字系统的设计中有什么应用?

解:

(1) 脉冲响应不变法和双线性变换法在 IIR 数字滤波器的设计中的作用是将模拟滤波器变换为数字滤波器。脉冲响应不变法的主要优点是模拟频率与数字频率之间的关系是线性的,其主要缺点是存在频谱混叠。双线性变换法主要优点是避免了频谱混叠,其缺点是模拟频率与数字频率之间的关系是非线性的。

(2) 在相同的技术指标下, IIR 滤波器的阶数比 FIR 滤波器低,因而实现的成本较低。在 IIR 滤波器的设计中可利用封闭公式,可直接设计出满足设计指标的滤波器。而 FIR 滤波器设计一般给出的是经验公式,对设计出的滤波器还需验证其是否满足设计指标。FIR 滤波器可很容易的设计为线性相位系统,而 IIR 滤波器需利用优化才能设计为近似的线性相位系统。FIR 滤波器一定是稳定系统。FIR 滤波器的实现可用 FFT 算法,而 IIR 滤波器不能。FIR 滤波器受有限字长的影响较小。

(3) 计算序列 DTFT 的抽样值时,一般需将序列周期化后才能用 DFT 计算其抽样值。若序列的长度比 DFT 的点数少,则可直接用 DFT 计算其抽样值。在计算序列 DTFT 的抽样值的过程中只存在泄漏,不存在混叠。

(4) 最小相位系统是指零点全在单位圆内的稳定系统。全通系统是指幅度响应为常数的稳定系统。利用最小相位系统的概念可得到幅度响应相同但群延迟最小的系统。利用全通系统可设计出通带为近似线性相位的 IIR 滤波器。

II. 2002 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解

1. 填空题(30 分,每小题 3 分)

(1) 试判断系统 $y[k] = T\{x[k]\} = k^2 x[k+1]$ 是否为线性、因果、时不变和稳定_____。

(2) 已知一 IIR 滤波器的 $H(z) = \frac{0.9 + z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1}}$, 试判断滤波器的类型为_____。

(3) 已知一实信号 $x(t)$, 该信号的最高频率为 $f_m = 20$ Hz, 用 $f_{\text{sam}} = 60$ Hz 对 $x(t)$ 进行抽样。如对抽样信号做 100 点的 DFT, 试确定 $X[m]$ 中, $m = 40$ 点所对应原连续信号的连续频谱点为_____ Hz。

(4) 已知序列 $x[k] = \{-2, 2, 3, -1; k=0, 1, 2, 3\}$, 序列长度 $N=4$, 写出序列 $x[(2-k)_N]R_4[k]$ 的值_____。

(5) 已知一离散系统的 $H(z) = \frac{0.6(1+z^{-1})}{1+0.2z^{-1}}$, 则信号 $x[k] = \cos(0.9\pi k) \times u[k]$ 通过该系统的稳态响应为_____。

(6) 一稳定 LTI 系统的 $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+2.6z^{-1}+1.2z^{-2}}$, $H(z)$ 的收敛域为_____, 该系统是否为因果系统_____。

(7) 已知 $x[k] = \{1, 2, 2, 1; k=0, 1, 2, 3\}$, $h[k] = \{1, 0, -1; k=0, 1, 2\}$, $x[k]$ 和 $h[k]$ 的 4 点循环卷积为_____。

(8) 已知 8 点的有限序列 $x[k] = \cos\left(\frac{6\pi k}{4}\right)$, 则 $x[k]$ 的 8 点的 DFT 为_____。

(9) 设 $H(z)$ 是线性相位 FIR 系统, 已知 $H(z)$ 中的 3 个零点分别为 1、0.8、 $1+j$, 该系统阶数至少为_____。

(10) 已知 10 点的有限序列 $x[k]$ 和 $h[k]$ 的非零范围分别为 $0 \leq k \leq 9$ 和 $7 \leq k \leq 9$ 。 $x[k]$ 和 $h[k]$ 的 10 点循环卷积记为 $g[k]$, 线性卷积记为 $y[k]$ 。试确定在哪些点上有 $y[l] = g[k]$ 。_____。

解:

(1) 线性、非因果、时变、不稳定

(2) 全通系统

(3) $f_{40} = 40 \times f_{\text{sam}} / N = 24 \text{ Hz}$

(4) $x[(2-k)_N]R_4[k] = \{x[2], x[1], x[0], x[3]; k=0, 1, 2, 3\} = \{3, 2, -2, -1; k=0, 1, 2, 3\}$

(5) $y_s[k] = \text{Re}\{H(e^{j0.9\pi})e^{j0.9\pi k}\} = 0.2311\cos(0.9\pi k - 1.3375)$

(6) 解方程

$$1 + 2.6z^{-1} + 1.2z^{-2} = 0$$

可得系统的极点为 $p_1 = -0.6$ 、 $p_2 = -2$ 。由于稳定系统的收敛域必须包含单位圆, 所以系统的收敛域为

$$0.6 < |z| < 2$$

由于收敛域是一个环状区域, 所以系统是非因果的。

(7)

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[3] & h[2] & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[3] & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & h[3] \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(8) 由于

$$x[k] = \cos\left(\frac{6\pi k}{4}\right) = \left(\frac{1}{8}\right) \left[4e^{\frac{2\pi k \times 6}{8}} + 4e^{\frac{2\pi k \times 6}{8}}\right] = \left(\frac{1}{8}\right) \left[4e^{\frac{2\pi k \times 6}{8}} + 4e^{\frac{2\pi k \times 2}{8}}\right]$$

所以

$$X[m] = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0; m = 0, 1, \dots, 7\}$$

(9) 由线性相位系统零点的特性可知, $z=1$ 的零点可单独出现, $z=0.8$ 的零点需成对出现, $z=1+j$ 的零点需 4 个 1 组, 所以系统至少为 7 阶。

$$(10) y[9] = g[9]$$

$$y[10+l] = g[l], l=0, 1, \dots, 6$$

2. (15 分) 回答问题。

(1) 画出 $N=4$ 时域抽取 FFT 的流图。

(2) 利用(1)中的结果画出 $N=4$ 时 IFFT 的流图。

(3) 已知一 8 点序列 $x[k]$ 的 DFT 为 $X[m] = \{11, 3, -5, 3, 3, 3, -5, 3\}$, 试利用(2)中流图计算 $x[2k]$ 的值。

解:

(1) $N=4$ 时域抽取的 FFT 的流图如图 A-6 所示。

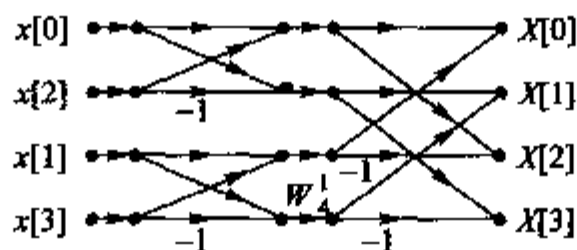


图 A-6

(2) 由图 A-6 可得 $N=4$ 的 IFFT 的流图如图 A-7 所示。

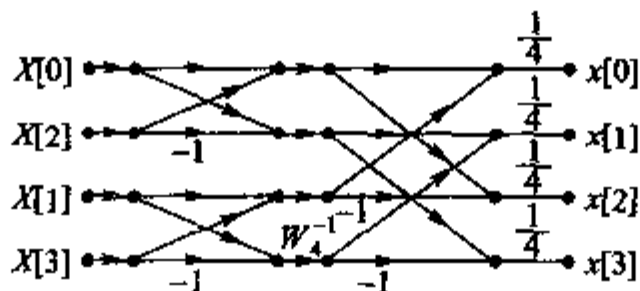


图 A-7

(3) 由 IDFT 的定义, 有

$$x[k] = \text{IDFT}\{X[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] W_N^{-mk}$$

由上式可得

$$x[2k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] W_N^{-mk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ X[m] + X\left[m + \frac{N}{2}\right] \right\} W_N^{-mk}$$

所以

$$x[2k] = 0.5 \text{IDFT}\{X[m] + X[m+4]\}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$0.5\{X[m] + X[m+4]\} = \{7, 3, -5, 3; m = 0, 1, 2, 3\}$$

由图 A-7 对 $\{7, 3, -5, 3; m = 0, 1, 2, 3\}$ 计算 4 点的 IDFT, 可得

$$x[2k] = \{2, 3, -1, 3; k = 0, 1, 2, 3\}$$

3. (15 分) 已知一理想带通滤波器的幅频响应为

$$|H_{BP}(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & 0.4\pi \leq |\Omega| \leq 0.6\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

现要设计一个实系数线性相位的 FIR 滤波器 $H_d(z)$, 使得 $|H_{BP}(e^{j\frac{2\pi m}{N}})| = |H_d(e^{j\frac{2\pi m}{N}})|$ 。

(1) 取 $N=9$ 时, 试写出 $H_d(e^{j\frac{2\pi m}{N}})$ 的取值。

(2) 求出 $N=9$ 时 $h[k]$ 的表示式, 并判断是否满足线性相位条件。

(3) 画出该滤波线性相位直接型结构框图。

(4) 如所设计的滤波器阻带的最小衰减达不到指标, 可采取何种方法增加阻带的最小衰减?

解:

$$\begin{aligned} (1) \quad H_d[m] &= H_d(e^{j\frac{2\pi m}{9}}) = e^{-j\frac{8\pi}{9}m} A_d\left(\frac{2\pi m}{9}\right) \\ &= \left[0, 0, \exp\left(-j\frac{16\pi}{9}\right), 0, 0, 0, 0, \exp\left(j\frac{16\pi}{9}\right), 0\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad h[k] &= \text{IDFT}\{H_d[m]\} = \frac{1}{9} \left(e^{j\frac{2\pi \times 2k - 16\pi}{9}} + e^{j\frac{2\pi \times 7k + 16\pi}{9}} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(e^{j\frac{2\pi \times 2k - 16\pi}{9}} + e^{j\frac{2\pi \times 7k + 16\pi - 2\pi \times 9k}{9}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} (e^{j\frac{2\pi \times 2k - 16\pi}{9}} + e^{-j\frac{2\pi \times 2k - 16\pi}{9}}) = \frac{2}{9} \cos\left[\frac{2\pi}{9}(2k - 8)\right]$$

由上式容易验证

$$h[k] = h[8 - k]$$

所以这是一个 I 型线性相位系统。

$$(3) H(z) = 0.1702(1 + z^{-8}) - 0.1111(z^{-1} + z^{-7}) - 0.2088(z^{-2} + z^{-6}) + 0.0386(z^{-3} + z^{-5}) + 0.2222z^{-4}$$

系统的直接型结构框图如图 A-8 所示。

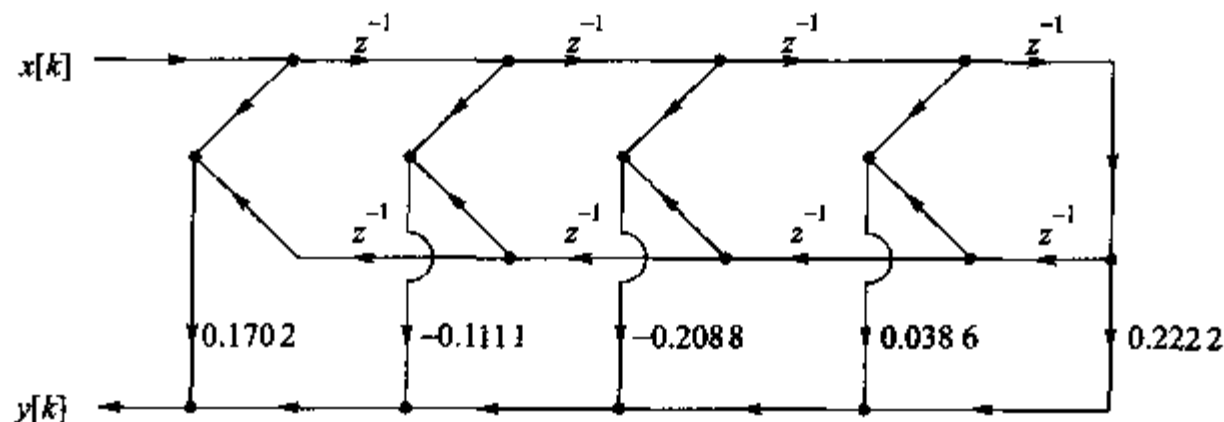


图 A-8

(4) 若所设计的滤波器阻带的最小衰减达不到指标,可采取在通带与阻带间增加过渡点的方法来提高阻带的最小衰减。

4. (15 分) 利用 Butterworth 模拟滤波器和双线性变换法,设计一个 3 dB 截频 $\Omega_p = 0.5\pi$ rad、阶数为 3 的数字高通滤波器,并画出 $H(z)$ 的直接型结构图。

解:

由题 4-20 知

$$H(z) = \frac{\frac{1}{6}(1 - z^{-1})^3}{1 + \frac{1}{3}z^{-2}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{6}z^{-3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-2}}$$

$H(z)$ 的直接型结构框图如图 A-9 所示。

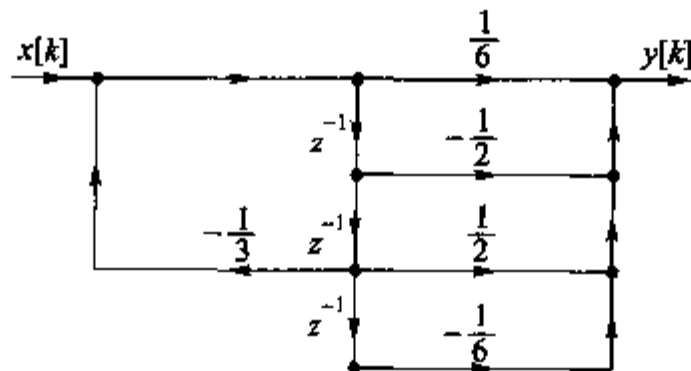


图 A-9

5. (10 分) 设 $G_L(z)$ 和 $G_H(z)$ 分别表示截止频率 $\Omega_c = \frac{\pi}{2}$ 的理想低通和高通滤波。试确定图 A-10 所示的离散时间系统的传输函数 $H_k(z) = \frac{Y_k(z)}{X(z)}$, $k=0, 1, 2, 3$, 并画出它们的幅度响应。

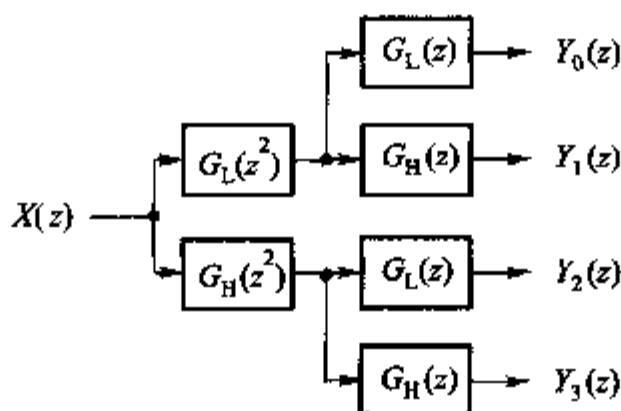


图 A-10

解:

$$H_0(z) = \frac{Y_0(z)}{X(z)} = G_L(z^2) G_L(z)$$

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = G_L(z^2) G_H(z)$$

$$H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X(z)} = G_H(z^2) G_L(z)$$

$$H_3(z) = \frac{Y_3(z)}{X(z)} = G_H(z^2) G_H(z)$$

详见题 1-36。

6. (15 分) 利用数字系统处理模拟信号的框图如图 A-11 所示。其中 $X(j\omega)$ 为连续信号的频谱, $H(e^{j\Omega})$ 是离散系统的频率响应。 $H_r(j\omega)$ 是重建滤波器。

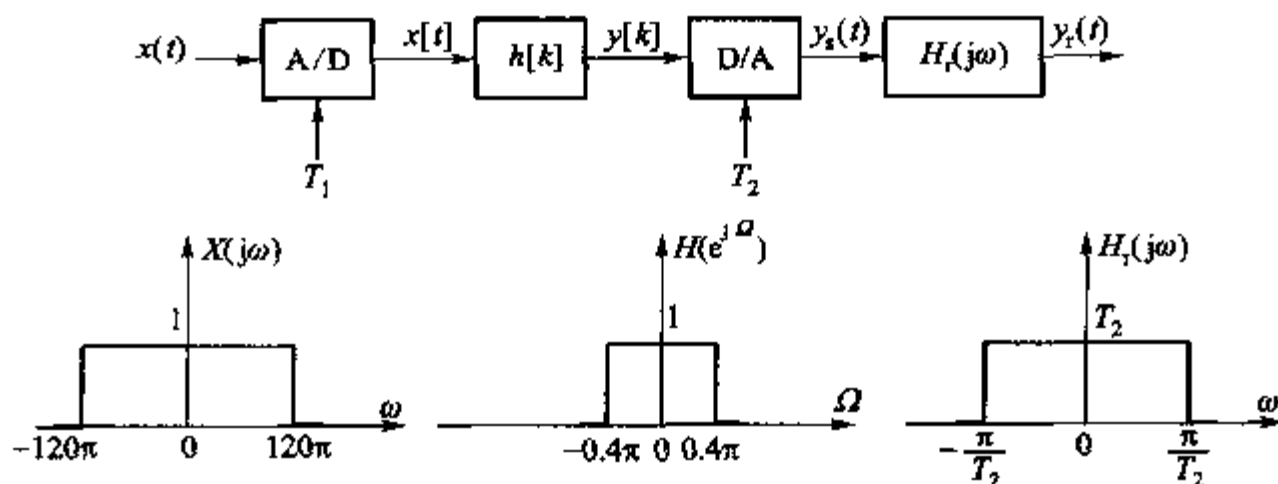


图 A-11

- (1) 当 $T_1 = T_2 = 0.01$ s, 试画出信号 $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_s(t)$ 、 $y_r(t)$ 的频谱。
- (2) 当 $T_1 = 0.01$ s, $T_2 = 0.02$ s, 重画信号 $y_s(t)$ 、 $y_r(t)$ 的频谱。和(1)中的结果比较, 你能得到哪些结论?

解:

(1) $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y_s(t)$ 、 $y_r(t)$ 的频谱如图 A-12 所示。

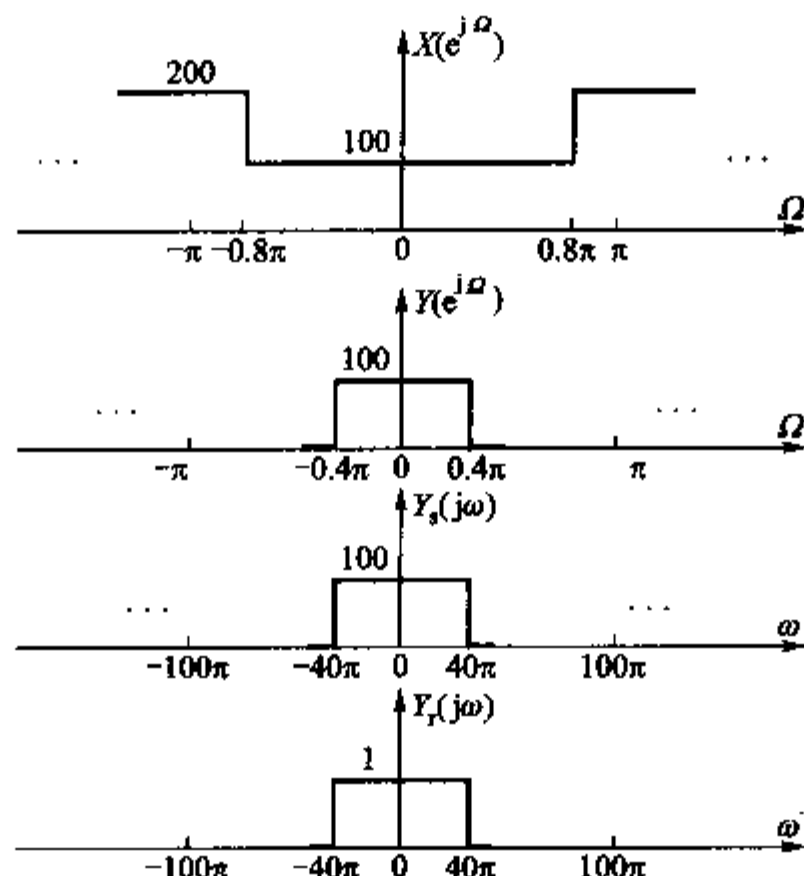


图 A-12

(2) 当 $T_2 = 0.02$ s 时, $y_s(t)$ 、 $y_r(t)$ 的频谱如图 A-13 所示。

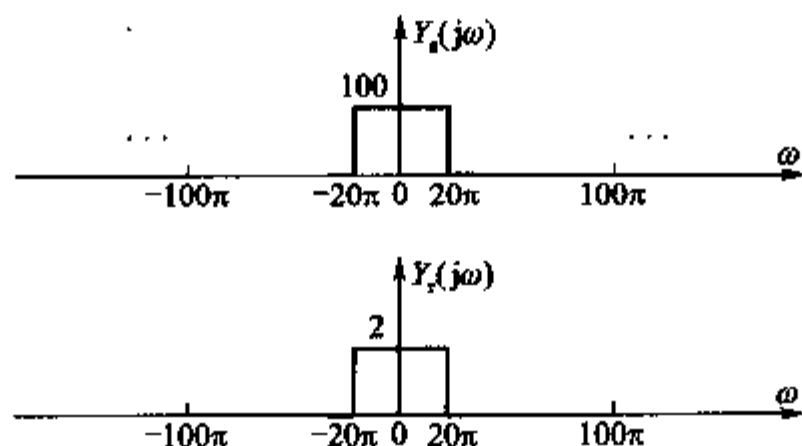


图 A-13

记(1)时系统的输出为 $y_1(t)$, (2)时系统的输出为 $y_2(t)$ 。比较图 A-12 与图 A-13 可知, $Y_1(j\omega) = 2Y_2(j2\omega)$, 其时域等价表示为 $y_1(t) = y_2\left(\frac{t}{2}\right)$ 。由此可知当 D/A 的频率与 A/D 的频率不同时, 输出信号将会变化一个尺度因子。

III. 2003 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解

1. 填空题(50 分, 每小题 5 分)

(1) 已知一离散系统的输入输出关系为 $y[k] = k^2 x[k-1]$ (其中 $x[k]$ 为输入, $y[k]$ 为输出), 试判断该系统的特性(线性、时不变和因果) _____, _____。

(2) 已知 $x[k] = \{1, 2, 3, 2, 1; k=0, 1, 2, 3, 4\}$, $h[k] = \{1, 0, 1, -1, 0; k=0, 1, 2, 3, 4\}$, 则 $x[k]$ 和 $h[k]$ 的 5 点循环卷积为 _____。

(3) 设实连续信号 $x(t)$ 中含有频率分别为 30 Hz 和 84 Hz 的正弦信号, 现用 $f_{\text{sam}} = 100$ Hz 的抽样频率对该信号进行抽样, 并利用 DFT 近似计算信号的频谱。用 DFT 近似计算出的频谱的谱峰将出现在 _____ Hz。

(4) 已知一 IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z) = \frac{1}{1+0.9z^{-1}}$, 试判断滤波器的类型(低通、高通、带通、带阻)为 _____。

(5) 已知 4 点的有限序列 $x[k] = \{1, 2, 2, -1; k=0, 1, 2, 3\}$, 3 点的有限序列 $h[k] = \{1, 2, 4; k=0, 1, 2\}$, 试计算序列 $y[k] = x[k] * h[k]$ _____。

(6) 已知 4 阶线性相位 FIR 系统函数 $H(z)$ 的一个零点为 $z_1 = 1+j$ 。则系统的其他零点为 _____。

(7) 已知序列 $x[k] = \cos(0.35\pi k) + 2\sin(0.45\pi k)$, 则该信号的周期为 _____。

(8) 已知 5 点的有限序列 $x[k] = \{1, 2, 4, -2, -4; k=0, 1, 2, 3, 4\}$, 则 $x[k]$ 自相关函数 $R_x[n]$ _____。

(9) 在硬件实现时, 由于字长有限, 采用何种结构更好?(直接型、并联型结构) _____。

(10) 用频率取样法设计线性相位 FIR 滤波器时, 控制滤波器阻带衰减的方法为 _____。

解:

(1) 线性、时变、因果

$$\begin{aligned} (2) \quad x[k] \otimes h[k] &= x[k] \otimes \{\delta[k] + \delta[k-2] - \delta[k-3]\} \\ &= x[k] + x[(k-2)_5] - x[(k-3)_5] = \{0, 1, 3, 3, 2; k=0, \\ &\quad 1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

(3) 30 Hz, 16 Hz

(4) 高通滤波器

(5) $y[k] = x[k] * h[k] = x[k] + 2x[k-1] + 4x[k-2] = \{1, 4, 10, 11, 6, -4; k=0, 1, \dots, 5\}$

$$(6) z_2 = z_1^* = 1 - j, z_3 = \frac{1}{z_1} = \frac{1-j}{2}, z_4 = z_3^* = \frac{1+j}{2}$$

(7) 40

(8) $R_x[n] = \{-4, -10, -13, 10, 34, 10, -13, -10, -4; k = -4, -3, \dots, 4\}$

(9) 并联型结构

(10) 增加过渡点

2. (10 分) 已知数字带通滤波器的设计指标为: 通带中心频率 Ω_0 , 通带上截频 Ω_{p2} , 通带下截频 Ω_{p1} , 通带最大衰减 A_p , 阻带上截频 Ω_{s2} , 阻带下截频 Ω_{s1} , 阻带最小衰减 A_s , 试写出用双线性变换法设计 IIR 设计数字带通滤波器的主要步骤。

解:

取双线性变换中的参数 $T=2$ 。

(1) 将数字带通滤波器的频率指标转换为模拟带通滤波器的频率指标

$$\omega_{p1} = \tan\left(\frac{\Omega_{p1}}{2}\right), \omega_{p2} = \tan\left(\frac{\Omega_{p2}}{2}\right), \omega_{s1} = \tan\left(\frac{\Omega_{s1}}{2}\right), \omega_{s2} = \tan\left(\frac{\Omega_{s2}}{2}\right)$$

(2) 确定低通到带通变换式中的参数 B 和 ω_0

$$B = \omega_{p2} - \omega_{p1}, \omega_0^2 = \omega_{p1} \omega_{p2}$$

(3) 确定原型低通滤波器的阻带截频 $\bar{\omega}_s$

$$\bar{\omega}_{s1} = \frac{\omega_{s1}^2 - \omega_{p1} \omega_{p2}}{(\omega_{p2} - \omega_{p1}) \omega_{s1}}, \bar{\omega}_{s2} = \frac{\omega_{s2}^2 - \omega_{p1} \omega_{p2}}{(\omega_{p2} - \omega_{p1}) \omega_{s2}}$$

$$\bar{\omega}_s = \min\{|\bar{\omega}_{s1}|, |\bar{\omega}_{s2}|\}$$

(4) 设计通带截频为 1 (rad/s)、阻带截频为 $\bar{\omega}_s$ 、通带衰减为 A_p dB、阻带衰减为 A_s dB 的原型低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

(5) 将原型模拟低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 转换为模拟带通滤波器 $H_{BP}(s)$

$$H_{BP}(s) = H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{B}}$$

(6) 用双线性变换将模拟滤波器带通滤波器 $H_{BP}(s)$ 转换为数字带通滤波器 $H(z)$

$$H(z) = H_{BP}(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

3. (10 分) 已知系统 $H(z)$ 的频率响应如图 A-14 所示, 系统 $H_1(z)$ 定义为 $H_1(z) = H(z^3)$, 试画出系统 $H_1(z)$ 的频率响应 $H_1(e^{j\omega})$ 。

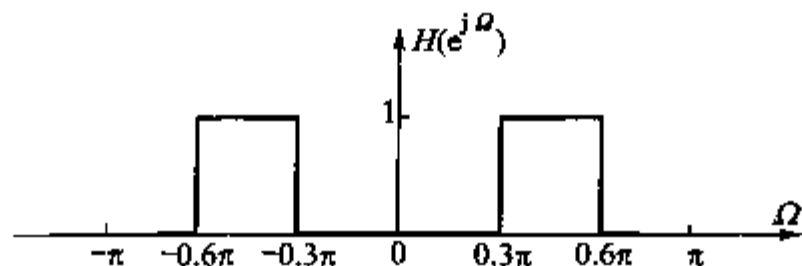


图 A-14

解:

由 $H_1(e^{j\Omega}) = H(e^{j3\Omega})$ 可画出系统 $H_1(z)$ 的频率响应如图 A-15 所示。

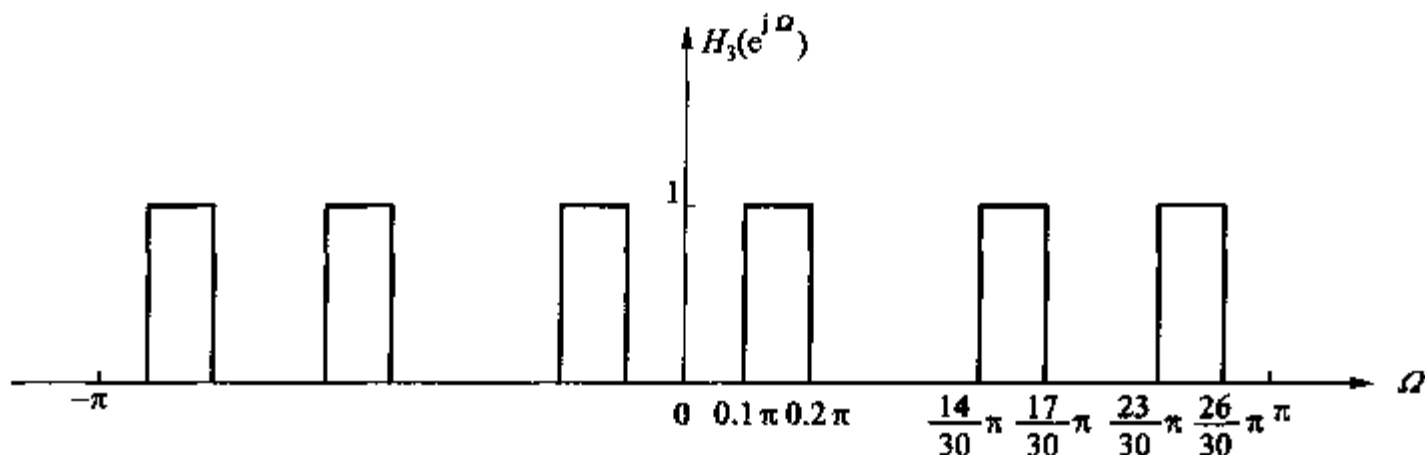


图 A-15

4. (10 分) 已知一序列 $x[k]$ 的离散时间 Fourier 变换 (DTFT) 为

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1 - e^{-j4\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

试求出序列 $x[k]$ 。

解:

由于

$$X(e^{j\Omega}) = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega}$$

所以

$$x[k] = \{1, 1, 1, 1; k = 0, 1, 2, 3\}$$

5. (10 分) 已知 1 阶离散系统的零点 $z = 2$, 极点 $p = 0.5$,

(1) 写出该系统的系统函数。

(2) 定性地画出系统的幅度响应。

解:

$$(1) \quad H(z) = \frac{-0.5 + z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$$(2) \quad H(e^{j\Omega}) = \frac{-0.5 + e^{-j\Omega}}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} = e^{-j\Omega} \frac{1 - 0.5e^{j\Omega}}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

由于上式中的分子分母互为共轭, 所以

$$|H(e^{j\Omega})| = 1$$

系统的幅度响应如图 A-16 所示。

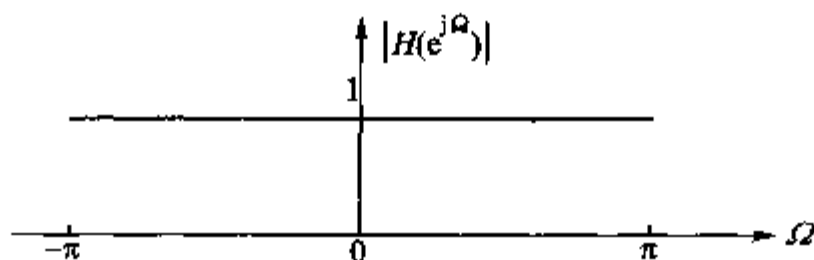


图 A-16

6. (20 分) 试用矩形窗口法设计一个线性相位 FIR 数字滤波器, 其频率响应逼近

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq 0.2\pi, 0.8\pi \leq |\Omega| \leq \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求出长度 $N=5$, 窗口为矩形窗的线性相位 FIR 数字滤波器的 $h[k]$ 表达式。

(2) 画出该数字滤波器 $H(z)$ 的直接型结构框图 (不必计算 $h[k]$ 各点的数值)。

(3) 如果所设计的数字滤波器阻带衰减达不到指标, 可采取何种措施?

(4) 对于此带阻数字滤波器, 可否取 $N=6$?

解:

(1) 由 IDTFT 可得理想带通滤波器的单位脉冲响应为

$$\begin{aligned} h_d[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-0.8\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega + \int_{-0.2\pi}^{-0.8\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega + \int_{0.8\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega \right] \\ &= 0.2\text{Sa}(0.2\pi k) + \delta[k] - 0.8\text{Sa}(0.8\pi k) \end{aligned}$$

$$h[k] = h_d[k-2] = 0.2\text{Sa}[0.2\pi(k-2)] + \delta[k-2] - 0.8\text{Sa}[0.8\pi(k-2)]$$

(2) $H(z)$ 的直接型结构框图如图 A-17 所示。

(3) 选用非矩形窗。

(4) 若 $N=6$, 则设计出的滤波器是 II 型线性相位系统, 该系统恒有 $|H(e^{j\pi})| = 0$, 所以不能取 $N=6$ 。

7. (20 分) 回答问题。

(1) 画出基 2 时域抽取 4 点 FFT 的信号流图。

(2) 利用流图计算 4 点序列 $x[k] = \{1, -2, 4, -2; k=0, 1, 2, 3\}$ 的 DFT。

(3) 将以上序列以 4 为周期进行周期延拓, 形成周期序列 $\hat{x}[k]$, 试写出周

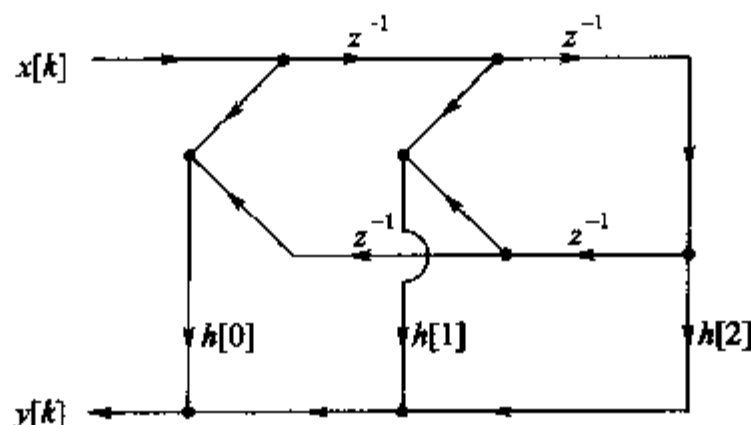


图 A-17

期序列 $\hat{x}[k]$ 的 DFS 表达式。

(4) 已知一理想系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 如图 A-18 所示, 试求出周期序列 $\hat{x}[k]$ 通过该系统的响应 $\hat{y}[k]$ 。

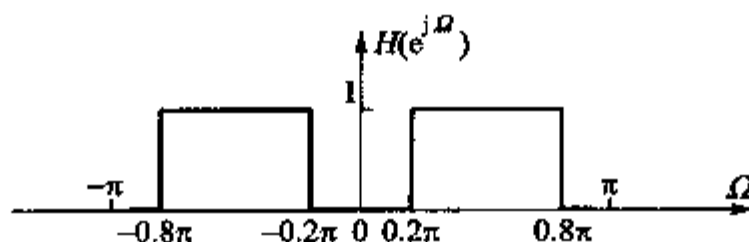


图 A-18

解:

(1) $N=4$ 时域抽取的 FFT 的流图如图 A-19 所示。

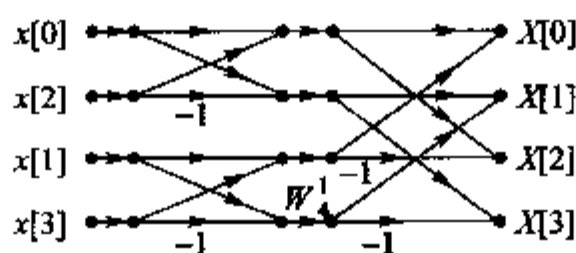


图 A-19

(2) 利用(1)中的流图计算, 可得

$$X[m] = \{1, -3, 9, -3; m = 0, 1, 2, 3\}$$

(3) 由 IDFS 的定义及(2)中的结果, 得

$$\hat{x}[k] = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 \tilde{X}[m] e^{j\frac{2\pi mk}{4}} = \frac{1}{4} (1 - 3e^{j\frac{2\pi k}{4}} + 9e^{j\frac{2\pi \times 2k}{4}} - 3e^{j\frac{2\pi \times 3k}{4}})$$

(4)

$$\hat{y}[k] = \frac{1}{4} [H(e^{j0}) - 3H(e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{2\pi k}{4}} + 9H(e^{j\pi})e^{j\frac{2\pi \times 2k}{4}} - 3H(e^{j\frac{3\pi}{2}})e^{j\frac{2\pi \times 3k}{4}}]$$

由图 A-18 可知

$$H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0, H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = 1$$

所以

$$\hat{y}[k] = \frac{1}{4}(-3e^{j\frac{2\pi k}{4}} - 3e^{j\frac{2\pi \times 3k}{4}}) = -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

8. (20 分) 利用数字系统处理模拟信号的框图如图 A-20 所示。其中 $X(f)$ 为连续信号 $x(t)$ 的频谱, $H(e^{j\Omega})$ 是离散系统 $h[k]$ 的频率响应。

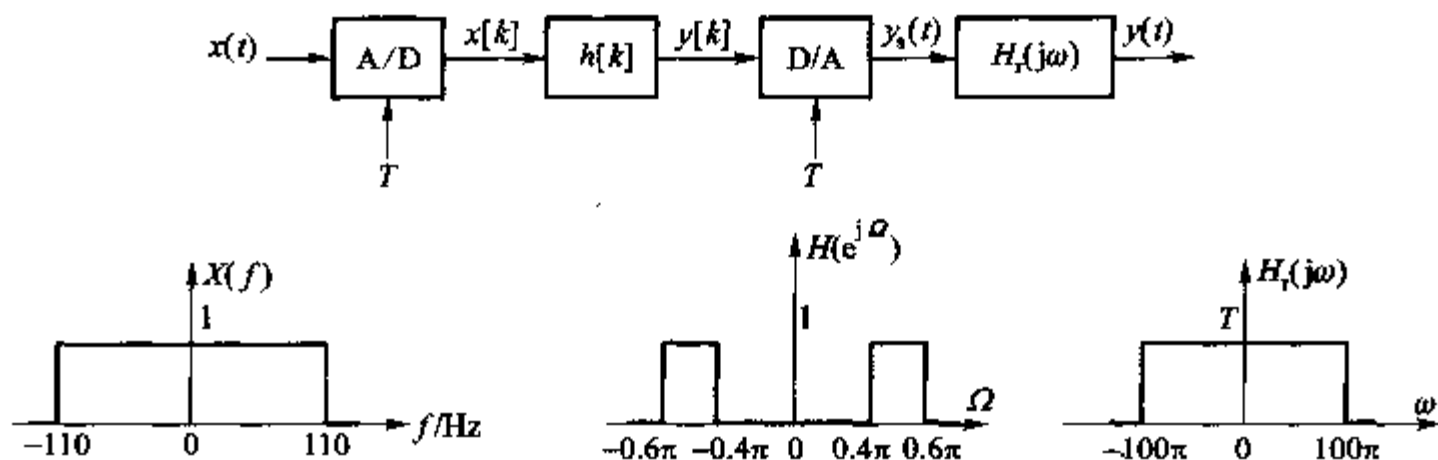


图 A-20

(1) 当 $T = 0.01$ s, 试画出信号 $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y(t)$ 的频谱。

(2) 若使 A/D 抽样后的信号频谱不混叠, A/D 抽样最大间隔应为多少?

解:

$$\omega_m = 110 \times 2\pi \text{ rad/s} = 220\pi \text{ rad/s} \quad \omega_{\max} = \frac{2\pi}{T} = 200\pi \text{ rad/s}$$

(1) $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y(t)$ 的频谱如图 A-21 所示。

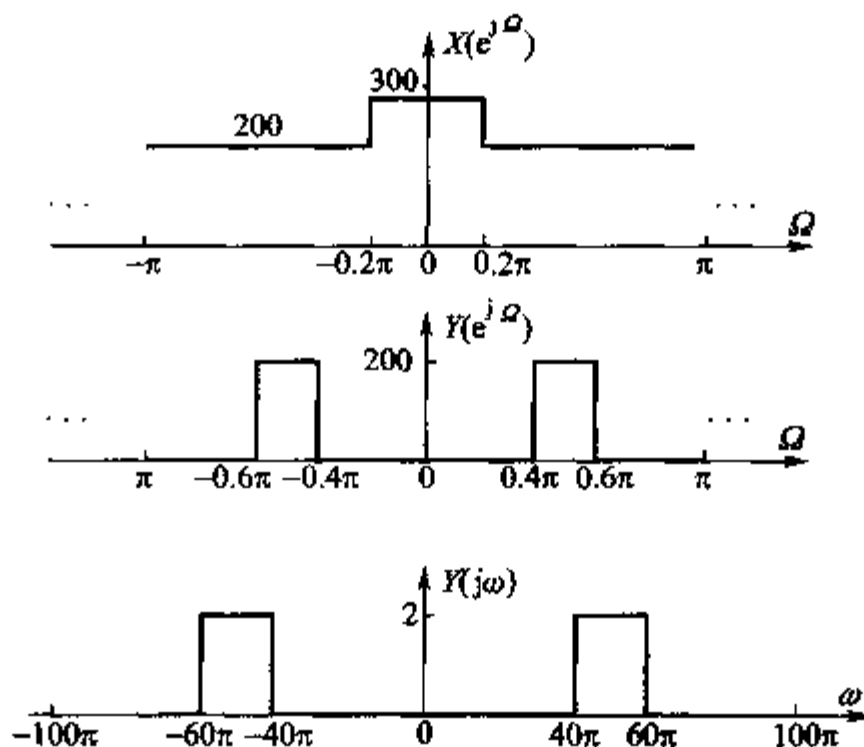


图 A-21

$$(2) \quad T \leq \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{220} \text{ s}$$

即若要不混叠,则 A/D 抽样最大间隔为 $\frac{1}{220}$ s。

IV. 2004 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解

1. 填空题(50 分,每小题 5 分)

(1) 已知有限长序列 $x[k] = \{1, 4, 3, 2; k = 0, 1, 2, 3\}$, 则 $x[-2-k]$ = _____。

(2) FIR 滤波器是否一定为线性相位系统? _____。

(3) 已知 $x[k] = \{3, 2, 0, 2; k = 0, 1, 2, 3\}$, $h[k] = \{4, -2, 1, -1; k = 0, 1, 2, 3\}$ 则 $x[k]$ 和 $h[k]$ 的 4 点循环卷积为 _____。

(4) 设实连续信号 $x(t)$ 中含有频率分别为 70 Hz 和 152 Hz 的正弦信号, 现用 $f_{\text{sam}} = 200$ Hz 的抽样频率对该信号进行抽样, 并利用 DFT 近似计算信号的频谱。用 DFT 近似计算出的频谱中, 其谱峰将出现在 _____ Hz。

(5) 已知一离散 LTI 系统对单位阶跃序列 $u[k]$ 的响应为 $y[k] = \{3, 2, 2, -1; k = 0, 1, 2, 3\}$, 当系统的输入信号 $x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-2]$, 该系统的输出响应为 _____。

(6) 已知一 FIR 数字滤波器的系统函数 $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{2}$, 试判断滤波器的类型(低通、高通、带通、带阻)为 _____。

(7) 已知序列 $x[k] = 2\cos(0.25\pi k) - 3\sin(0.45\pi k)$, 则该信号的周期为 _____。

(8) 已知有限序列 $x[k] = \{-1, -1, 4, 3; k = 0, 1, 2, 3\}$, 序列 $x[k]$ 的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 。记 $X(e^{j\omega})$ 在 $\Omega = \frac{2\pi m}{3}; m = 0, 1, 2$ 的取样值为 $X[m]$, 则 $\text{IDFT}\{X[m]\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(9) 已知一离散因果 LTI 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{0.75(1-z^{-1})}{1-0.5z^{-1}}$$

则信号 $x[k] = \cos(\pi k)u[k]$ 通过该系统的稳态响应为 _____。

(10) 已知 4 点的有限序列 $x[k] = \{1, 2, 4, -2; k = 0, 1, 2, 3\}$, 则 $x[k]$ 自相关函数 $R_x[n]$ _____。

解:

$$(1) x[-2-k] = \{2, 3, 4, 1; k = -5, -4, -3, -2\}$$

(2) 不一定

(3)

$$\begin{bmatrix} h[0] & h[3] & h[2] & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[3] & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & h[3] \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(4) 70 Hz, 48 Hz

(5) 由于

$$x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-2] = (u[k] - u[k-1]) + 2(u[k-2] - u[k-3])$$

所以

$$\begin{aligned} T\{x[k]\} &= y[k] - y[k-1] + 2y[k-2] - 2y[k-3] \\ &= \{3, -1, 6, -5, 1, -6, 2; k = 0, 1, \dots, 6\} \end{aligned}$$

(6) 高通

(7) 40

$$(8) \text{IDFT}\{X[m]\} = x[k] + x[k+3] = \{2, -1, 4; k = 0, 1, 2\}$$

(9) 由于

$$\cos(\pi k) = \exp(j\pi k)$$

所以

$$y_s[k] = H(e^{j\pi})e^{j\pi k} = e^{j\pi k} = \cos(\pi k)$$

$$(10) R_s[n] = \{-2, 0, 2, 25, 2, 0, -2; k = -3, \dots, 3\}$$

2. (20 分) 已知一离散系统 $H_d(z)$ 的频率响应 $H_d(e^{j\Omega})$, 如图 A-22 所示, 系统 $H(z)$ 定义为 $H(z) = H_d(-z)$ 。

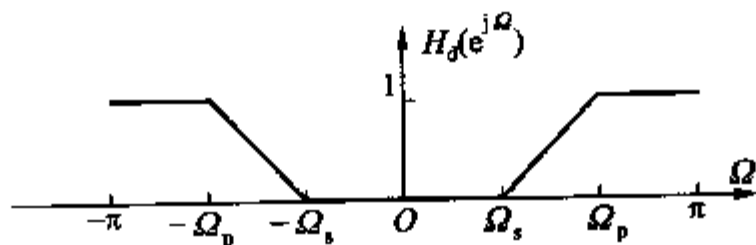


图 A-22

(1) 试画出系统 $H(z)$ 的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 。

(2) 试写出利用 $H(z) = H_d(-z)$ 及双线性变换法设计 IIR 数字高通滤波器

的主要步骤。

(3) 试利用 Butterworth 模拟滤波器设计一个 2 阶 3dB 截频 $\Omega_c = \frac{\pi}{2}$ 的数字高通滤波器。已知 2 阶归一化 Butterworth 模拟滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

解:

(1) 由 $H(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j(\Omega-\pi)})$ 及图 A-22 可得 $H(z)$ 的频率响应如图 A-23 所示。

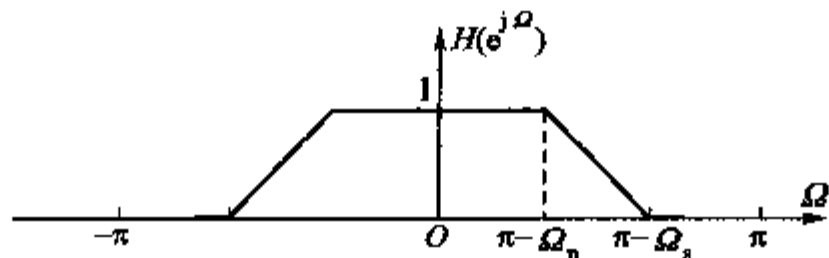


图 A-23

(2) 取双线性变换的参数 $T=2$, 由(1)中的结果, 可得以下设计步骤。

① 由 $\Omega = \pi - \bar{\Omega}$ 将数字高通滤波器的频率指标转换为数字低通滤波器的频率指标。

② 由 $\omega = \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ 将数字低通滤波器的频率指标转换为模拟低通滤波器的频率指标。

③ 设计模拟低通滤波器。

④ 由双线性变换

$$H_{LP}(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

将模拟低通滤波器转换为数字低通滤波器。

⑤ 由变换

$$H_{HP}(z) = H_{LP}(-z)$$

将数字低通滤波器转换为数字高通滤波器。

(3)

数字低通滤波器的 3 dB 截频 $\Omega_c = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ 。

模拟低通滤波器的 3 dB 截频 $\omega_c = \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = 1$ 。

满足条件的模拟低通滤波器为

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

由双线性变换,得

$$H_{LP}(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.2929(1+z^{-1})^2}{1+0.1716z^{-2}}$$

由数字低通滤波器到数字高通滤波器的变换,得

$$H_{HP}(z) = H_{LP}(-z) = \frac{0.2929(1-z^{-1})^2}{1+0.1716z^{-2}}$$

3. (20 分) 一离散系统的框图如图 A-24 图所示。

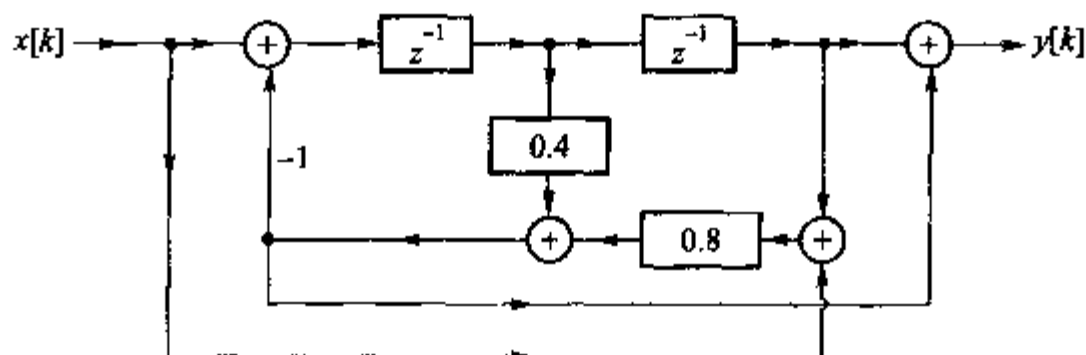


图 A-24

- (1) 试求出该系统的 $H(z)$ 。
- (2) 该系统的幅度响应和相位响应各有什么特点?
- (3) 画出该系统的直接型框图。
- (4) 试比较两种框图的优缺点。

解:

(1)

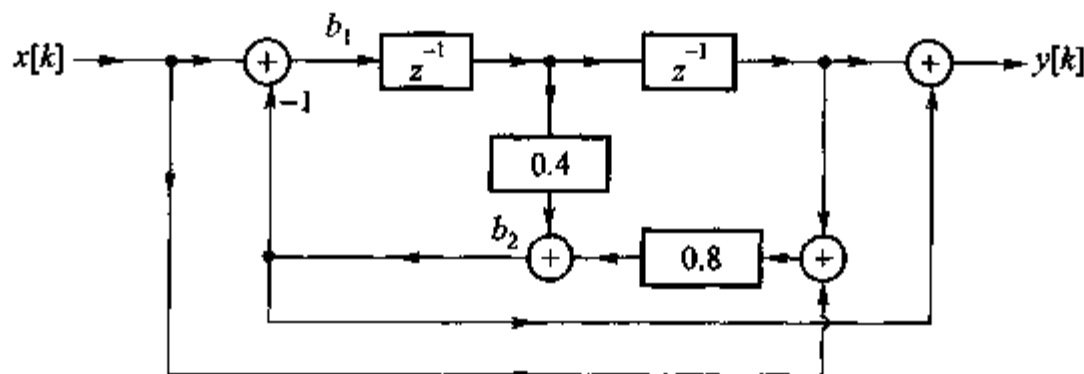


图 A-25

设图 A-25 中的两个加法器的输出为 b_1 和 b_2 , 则可得下列方程组

$$B_1(z) = X(z) - B_2(z)$$

$$B_2(z) = 0.4z^{-1}B_1(z) + 0.8(z^{-2}B_1(z) + X(z))$$

$$Y(z) = z^{-2}B_1(z) + B_2(z)$$

由上述方程组,可得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.8 + 0.4z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$

- (2) 该系统是一个全通滤波器。其幅度响应恒为 1, 相位响应单调递减。
 (3) 该系统的直接型框图如图 A-26 所示。

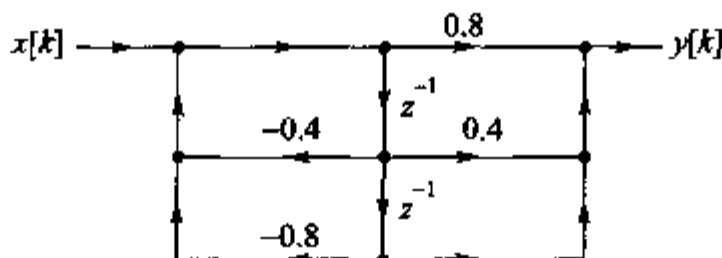


图 A-26

- (4) 图 A-24 的结构与直接型结构相比,减少了两个乘法器。
 4. (20 分) 已知理想高通滤波器 $H_d(z)$ 的频率响应为

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & 0.5\pi \leq |\Omega| \leq \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

用窗口法设计线性相位 FIR 滤波器

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]z^{-k}$$

使 $H(z)$ 的幅度响应逼近理想高通滤波器 $H_d(z)$ 的幅度响应。

- (1) 可采用哪几种类型的线性相位 FIR 滤波器来设计 $H(z)$?
 (2) 求出 $N=7$, 窗口为矩形窗的线性相位 FIR 数字滤波器的 $h[k]$ 。
 (3) 用矩形窗进行设计有何优缺点?
 (4) 画出该数字滤波器 $H(z)$ 的直接型结构框图。

解:

- (1) 可采用 I 型和 IV 型线性相位 FIR 滤波器。
 (2) 由 IDTFT 可得理想高通滤波器的单位脉冲响应为

$$\begin{aligned} h_d[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-0.5\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega + \int_{0.5\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega \right] \\ &= \delta[k] - 0.5\text{Sa}(0.5\pi k) \\ h[k] &= h_d[k-3] = \delta[k-3] - 0.5\text{Sa}[0.5\pi(k-3)] \end{aligned}$$

$$= \{0.1061, 0, -0.3183, -0.5000, -0.3183, 0, 0.1061\};$$

$$k = 0, 1, \dots, 6\}$$

(3) 优点: 最小平方误差, 过渡带窄; 缺点: 通、阻带波动较大。

(4) $H(z)$ 的直接型结构框图如图 A-27 所示。

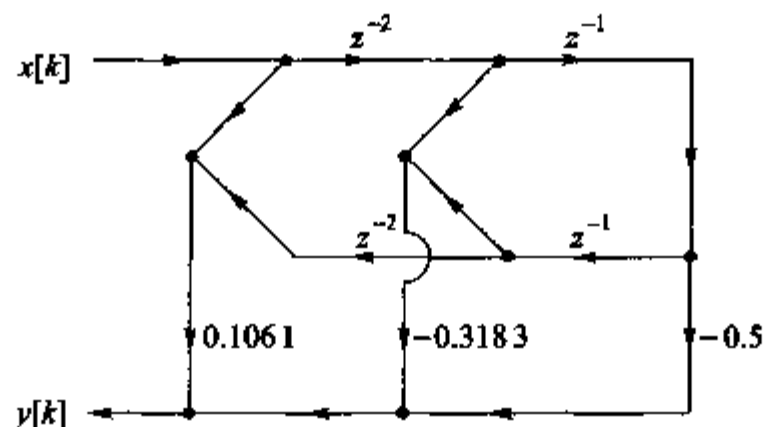


图 A-27

5. (20 分) 回答问题。

(1) 画出基 2 频域抽取 4 点 FFT 的信号流图。

(2) 试写出利用 N 点 FFT 计算 N 点序列 $X[m]$ 的 IDFT 的步骤。

(3) 已知实序列 $x[k]$ 和 $y[k]$ 的 N 点 DFT 为 $X[m]$ 和 $Y[m]$, 给出一种只计算一次 IDFT 就可得出 $x[k]$ 和 $y[k]$ 的计算方法。

解:

(1) $N=4$ 频域抽取的 FFT 的流图如图 A-28 所示。

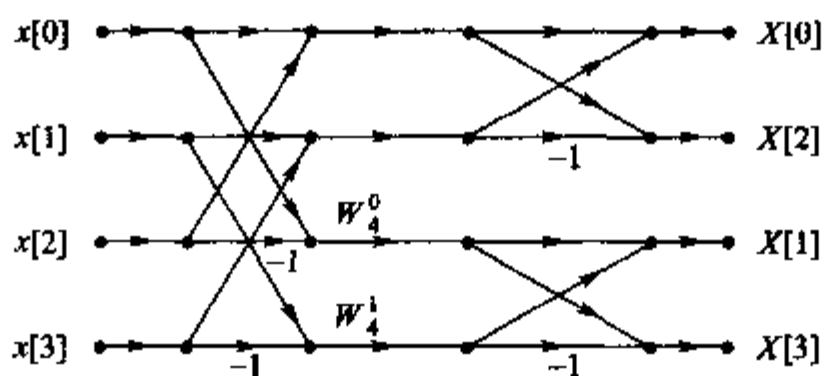


图 A-28

(2)

① 对 $X[m]$ 共轭得 $X^*[m]$ 。

② 对 $X^*[m]$ 做 N 点 FFT。

③ 对②中结果求共轭并除 N 。

(3) 构造 N 点序列 $Z[m]$

$$Z[m] = X[m] + jY[m]$$

对 $Z[m]$ 做 N 点 IDFT, 得

$$z[k] = \text{IDFT}\{Z[m]\}$$

取 $z[k]$ 的实部和虚部, 得

$$x[k] = \text{Re}\{z[k]\}, y[k] = \text{Im}\{z[k]\}$$

6. (20 分) 利用数字系统处理模拟信号的框图如图 A-29 所示。其中 $X(j\omega)$ 为连续信号 $x(t)$ 的频谱, $H(e^{j\Omega})$ 是离散系统 $h[k]$ 的频率响应。当抽样间隔 $T = \frac{1}{40}$ s 时, 试画出信号 $x[k]$ 、 $y[k]$ 、 $y(t)$ 的频谱。

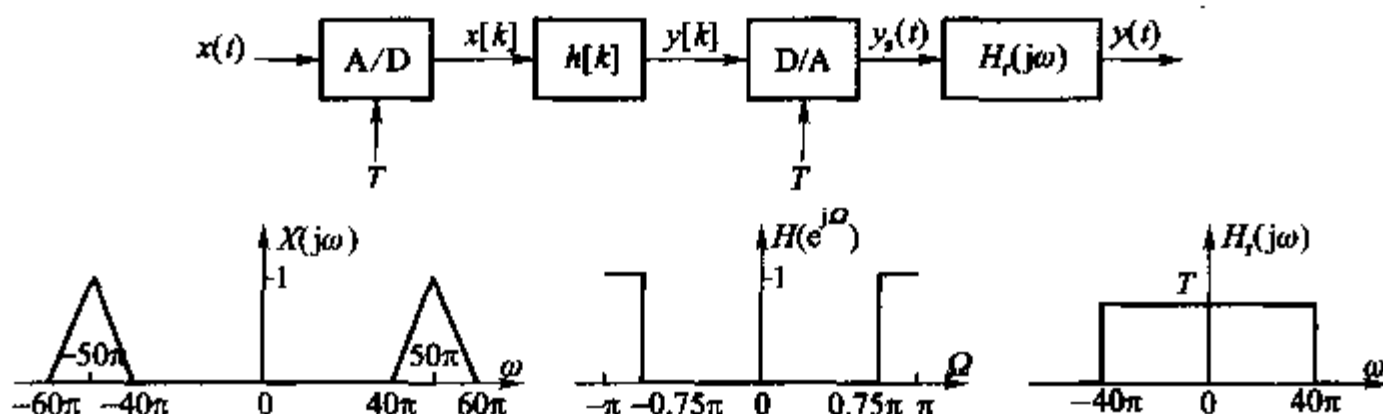


图 A-29

解:

频谱如图 A-30 所示。

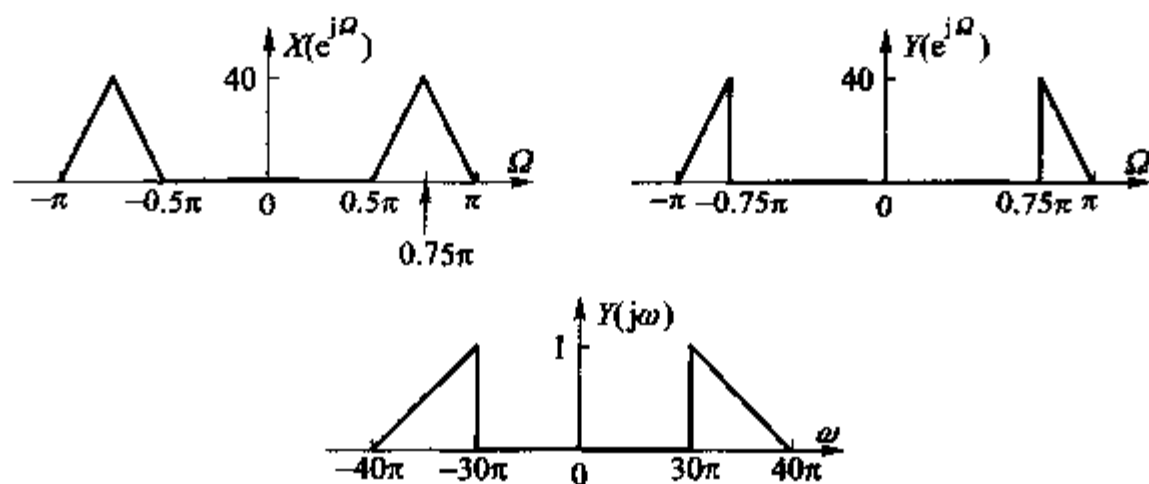


图 A-30

V. 2005 年硕士研究生《数字信号处理》试题及详解

一、填空题(50 分, 每题 5 分)

1. 已知一离散系统的输入输出关系为 $y[k] = x[k-1] + 3x[k-2]$ (其中 $x[k]$ 为输入, $y[k]$ 为输出), 试判断该系统的特性(线性、时变性和因果性)

_____ , _____ , _____。

2. 设实连续信号 $x(t)$ 中含有频率 40 Hz 的余弦信号, 现用 $f_{\text{sam}} \approx 128$ Hz 的抽样频率对其进行抽样, 并利用 $N = 1024$ 点 DFT 分析信号的频谱, 计算出的频谱的谱峰将出现在第 _____ 条谱线。

3. 已知 4 阶线性相位 FIR 系统函数 $H(z)$ 的一个零点为 $z_1 = 2 - 2j$, 则系统的其他零点为 _____。

4. 已知序列 $x[k] = \cos(0.15\pi k) + 2\sin(0.25\pi k)$, 则该信号的周期为 _____。

5. 已知 5 点的有限序列 $x[k] = \{1, 2, 4, -2, -1; k = 0, 1, 2, 3, 4\}$, 则 $x[k]$ 自相关函数 $R_x[n] =$ _____。

6. 用窗口法设计线性相位 FIR 滤波器时, 如何控制滤波器阻带衰减? _____。

7. IIR 数字滤波器可否设计为因果稳定的具有线性相位的离散系统? _____。

8. 已知一离散 LTI 系统的单位阶跃响应为 $y[k] = \{1, 2, 3, 2; k = 0, 1, 2, 3\}$, 当系统的输入为 $x[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \delta[k-3]$ 时, 该系统的零状态响应为 _____。

9. 已知序列 $x[k] = \{2, 3, 4, 5, 6; k = 0, 1, 2, 3, 4\}$, 序列 $x[k]$ 的 DTFT 为 $X(e^{j\Omega})$ 。记 $X(e^{j\Omega})$ 在 $\left\{\Omega = \frac{2\pi m}{4}; m = 0, 1, 2, 3\right\}$ 的 4 点取样值为 $X[m]$, 则 $\text{IDFT}\{X[m]\} =$ _____。

10. FIR 优化设计准则主要有 _____。

解:

1. 线性、时不变、因果

$$2. m = \frac{40 \times N}{f_{\text{sam}}} = 320$$

$$3. z_2 = z_1^* = 2(1-j), z_3 = \frac{1}{z_1} = \frac{1+j}{4}, z_4 = z_3^* = \frac{1-j}{4}$$

4. 40

$$5. R_x[n] = \{-1, -4, -4, 4, 26, 4, -4, -4, -1; k = -4, \dots, 4\}$$

6. 选用合适的窗函数

7. 不可以

8. 由于

$$x[k] = u[k] - u[k-4]$$

由系统的线性特性, 可得

$$T\{x[k]\} = y[k] - y[k-4]$$

$$= \{1, 2, 3, 2, -1, -2, -3, -2; k = 0, 1, \dots, 7\}$$

$$9. \text{IDFT}\{X[m]\} = x[k] + x[k+4] = \{8, 3, 4, 5; k = 0, 1, 2, 3\}$$

10. 均方误差准则、Chebyshev 误差准则

二、计算题(100 分)

1. (12 分) 已知确定序列 $x[k] = \{1, 2, 2, 1; k = 0, 1, 2, 3\}$, $h[k] = \{2, 1, -1, 1; k = 0, 1, 2, 3\}$, 试计算

(1) 4 点循环卷积 $x[k] \otimes h[k]$ 。

(2) 7 点循环卷积 $x[k] \otimes h[k]$ 。

(3) 写出利用 DFT 计算线性卷积 $x[k] * h[k]$ 的步骤。

解:

$$\begin{aligned} (1) \quad x[k] \otimes h[k] &= h[k] \otimes \{\delta[k] + 2\delta[k-1] + 2\delta[k-2] + \delta[k-3]\} \\ &= h[k] + 2h[(k-1)_4] + 2h[(k-2)_4] + h[(k-3)_4] \\ &= \{3, 6, 6, 3; k = 0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x[k] \otimes h[k] &= h[k] \otimes \{\delta[k] + 2\delta[k-1] + 2\delta[k-2] + \delta[k-3]\} \\ &= h[k] + 2h[(k-1)_7] + 2h[(k-2)_7] + h[(k-3)_7] \\ &= \{2, 5, 5, 3, 1, 1, 1; k = 0, 1, \dots, 6\} \end{aligned}$$

(3) 为了能利用 FFT 算法, 将 $x[k]$ 与 $h[k]$ 补零成为 8 点的序列。用 FFT 算法计算 $x[k]$ 与 $h[k]$ 的 8 点 DFT 得 $X[m]$ 与 $Y[m]$ 。计算 $X[m]Y[m]$ 的 8 点 IDFT 即得 $x[k]$ 与 $h[k]$ 的线性卷积。

2. (14 分) 已知一连续信号 $x(t)$ 的频率成分集中在 $0 \sim 2\,000$ Hz 之间, 若利用 DFT 对该信号进行谱分析, 指出下列各参数如何选取。

(1) 可允许的最大抽样间隔 T_{\max} 。

(2) 若该信号只记录了 2 s, 抽样间隔 $T = 0.000\,2$ s, 应至少做多少点的 DFT?

(3) 简述利用 DFT 分析连续时间信号 $x(t)$ 的频谱时, 会引起哪些误差, 如何改善?

解:

$$(1) \quad T_{\max} = \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{4\,000} \text{ s}$$

(2) 为充分利用已有数据, 应有 $N \geq \frac{2}{T} = 10\,000$, 即至少应做 10 000 点 DFT。

(3) 混叠误差, 可通过提高抽样频率或抗混叠滤波来减小其误差; 频率泄

漏,可通过选择合适的窗函数来减小其误差;栅栏现象,可通过补零来提高两条谱线间的频率间隔。

3. (10 分) 已知序列的双边 z 变换为

$$X(z) = \frac{2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

试求其可能对应的序列 $x[k]$ 。

解:

由部分分式展开,可得

$$X(z) = \frac{8}{z - 0.5} - \frac{8}{z - 0.25}$$

收敛域为 $|z| > 0.5$ 时

$$\begin{aligned} x[k] &= 8(0.5)^{k-1}u[k-1] - 8(0.25)^{k-1}u[k-1] \\ &= 16(0.5)^k u[k-1] - 32(0.25)^k u[k-1] \end{aligned}$$

收敛域为 $0.25 < |z| < 0.5$ 时

$$\begin{aligned} x[k] &= -8(0.5)^{k-1}u[-k] - 8(0.25)^{k-1}u[k-1] \\ &= -16(0.5)^k u[-k] - 32(0.25)^k u[k-1] \end{aligned}$$

收敛域为 $|z| < 0.25$ 时

$$\begin{aligned} x[k] &= -8(0.5)^{k-1}u[-k] + 8(0.25)^{k-1}u[-k] \\ &= -16(0.5)^k u[-k] + 32(0.25)^k u[-k] \end{aligned}$$

4. (18 分) 试推导基 2 时间抽取 FFT 算法,并画出 4 点的基 2 时间抽取 FFT 信号流程图。

(1) 利用该 4 点 FFT 流图计算 $x[k] = \{2, 1, 3, 4; k=0, 1, 2, 3\}$ 的 4 点 DFT $X[m]$ 。

(2) 写出利用该 4 点 FFT 流图计算 8 点实序列 $y[k]$ 的 DFT $Y[m]$ 的步骤。

(3) 试写出利用 FFT 计算 IFFT 的步骤。

解:

$$\begin{aligned} (1) \quad X[m] &= \text{DFT}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{km} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_N^{2rm} + \\ &\quad \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)m} \end{aligned}$$

记

$$X_1[m] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_N^{rm}, X_2[m] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_N^{rm}$$

则有

$$\begin{aligned} X[m] &= X_1[m] + W_N^m X_2[m] \\ X\left[m + \frac{N}{2}\right] &= X_1[m] - W_N^m X_2[m] \end{aligned}$$

由上式可得 $N=4$ 的 FFT 的流图如图 A-31 所示。

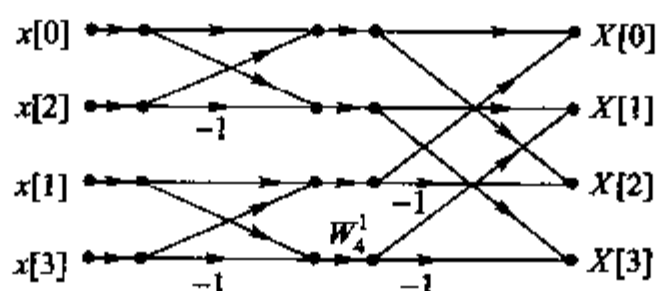


图 A-31

由流图 A-31 计算, 可得

$$\text{DFT}\{[2, 1, 3, 4]\} = \{10, -1 + 3j, 0, -1 - 3j; m = 0, 1, 2, 3\}$$

(2) 抽取 $y[k]$ 的偶数点得 4 点序列 $y_1[k]$, 抽取 $y[k]$ 的奇数点得 4 点序列 $y_2[k]$ 。由 4 点 FFT 流图计算 $y_1[k]$ 和 $y_2[k]$ 的 DFT $Y_1[m]$ 和 $Y_2[m]$ 。由

$$Y[m] = Y_1[m] + W_8^m Y_2[m], Y[m+4] = Y_1[m] - W_8^m Y_2[m], m = 0, 1, 2, 3$$

计算 $y[k]$ 的 8 点 DFT。

(3)

- ① 对 $X[m]$ 共轭, 得 $X^*[m]$ 。
- ② 对 $X^*[m]$ 做 N 点 FFT。
- ③ 对②中结果共轭并除 N 。

5. (18 分) 已知某模拟滤波器的系统函数为 $H(s) = \frac{3}{(s+2)(s+1)}$ 。

(1) 分别利用脉冲响应不变法和双线性变换法将其转换为数字滤波器, 求出相应的 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$, 抽样间隔 $T=2$ 。

(2) 分别画出 $H(s)$ 、 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 幅度响应的草图 (标明关键点的值)。

(3) 简述脉冲响应不变法和双线性变换法的优缺点。

解:

(1) 由部分分式展开, 可得

$$H(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

$$H_1(z) = \frac{6}{1-e^{-2}z^{-1}} - \frac{6}{1-e^{-4}z^{-1}} = \frac{0.7021z^{-1}}{1-0.1537z^{-1}+0.0025z^{-2}}$$

$$H_2(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.5(1+z^{-1})^2}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

(2) $H(s)$ 、 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的幅度响应如图 A-32 所示。

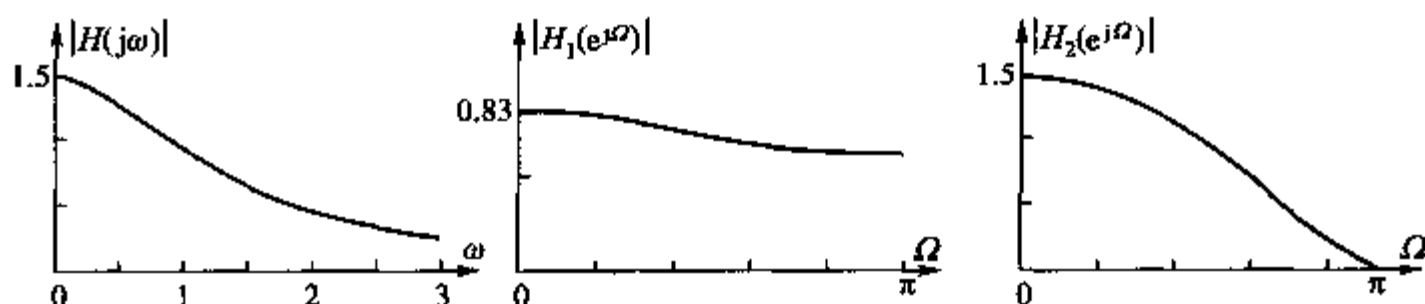


图 A-32

(3) 脉冲响应不变法的主要优点是模拟频率与数字频率之间的关系是线性的, 其主要缺点是存在频谱混叠。双线性变换法主要优点是避免了频谱混叠, 其缺点是模拟频率与数字频率之间的关系是非线性的。

6. (18 分) 试用矩形窗口法设计一个 5 阶线性相位 FIR 带通数字滤波器, 其在 $\Omega \in [-\pi, \pi]$ 内的幅度响应逼近

$$|H_d(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{3} \leq |\Omega| \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 试求 $h[k]$ 的表达式及 $h[k]$ 的具体值。

(2) 试求 $H(z)$, 并画出其线性相位的直接型结构图。

解:

(1) 由 IDTFT 可得理想带通滤波器的单位脉冲响应为

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi/3}^{-\pi/3} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \text{Sa} \left[\frac{2}{3} \pi(k - 2.5) \right] - \frac{1}{3} \text{Sa} \left[\frac{1}{3} \pi(k - 2.5) \right] \\
 &= [-0.1739, -0.2122, 0.2330, 0.2330, -0.2122, \\
 &\quad -0.1739; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5]
 \end{aligned}$$

(2) $H(z) = -0.1739(1 + z^{-5}) - 0.2122(z^{-1} + z^{-4}) + 0.2330(z^{-2} + z^{-3})$ 系统的直接型结构图如图 A-33 所示。

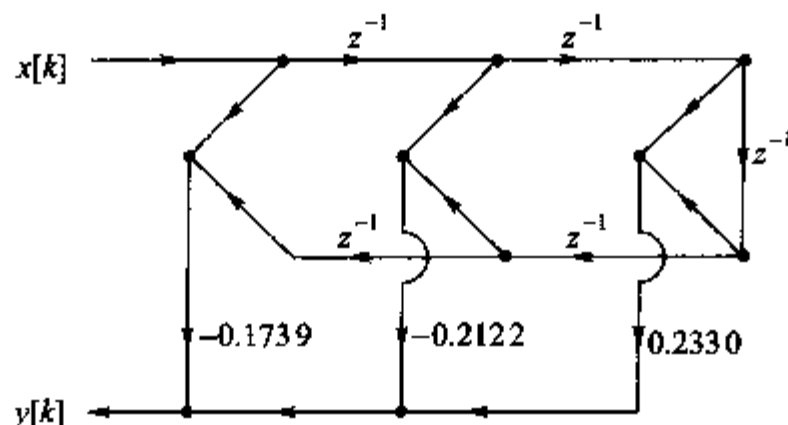


图 A-33

7. (10 分) 设平稳各态历遍随机信号的观测值 $x[k] = \{1, -1, 2, -2; k = 0, 1, 2, 3\}$, 试分别用直接法(周期图法)和间接法(相关法)求其功率谱估计值 $P_x(\Omega)$, 并简述现代功率谱估计的基本思想。

解:

周期图法

对 $x[k]$ 进行 DTFT, 有

$$X_N(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\Omega k} = 1 - e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} - 2e^{-j3\Omega}$$

$$I_N(\Omega) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\Omega})|^2 = \frac{1}{4} [10 - 14\cos\Omega + 8\cos(2\Omega) - 4\cos(3\Omega)]$$

自相关法

$$\hat{R}_x[n] = \frac{1}{N} x[-n] * x[n] = \frac{1}{4} \{-2, 4, -7, 10, -7, 4, -2\}$$

对上式进行傅里叶变换即得功率谱估计为

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_x(\Omega) &= \text{DTFT}[\hat{R}_x[n]] = \frac{1}{4} (10 + 2\text{Re}[\sum_{n=1}^3 \hat{R}_x[n] e^{-jn\Omega}]) \\
 &= \frac{1}{4} [10 - 14\cos\Omega + 8\cos(2\Omega) - 4\cos(3\Omega)]
 \end{aligned}$$

现代谱估计技术是以随机过程的参数模型为基础,故也称为参数模型法。参数模型法的基本思想则是根据待研究信号的先验知识,对信号在窗口外的数据作出某种比较合理的假设。例如可以利用已观察到的数据对它们作出预测或外推,以达到提高谱估计质量的目的。

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 数字信号处理学习指导与习题精解

作者 =

页数 = 2 3 2

S S 号 = 0

出版日期 =

封面
书名
版权
前言
目录
正文