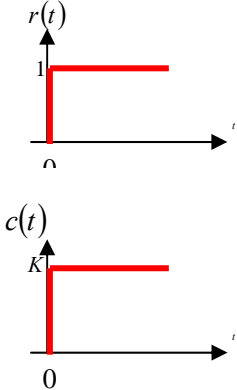
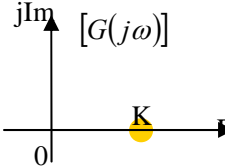
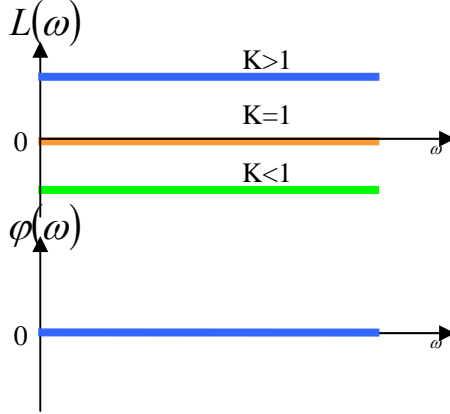
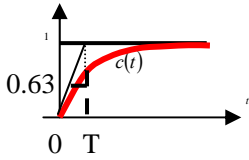
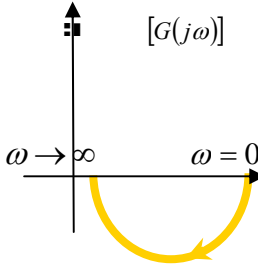
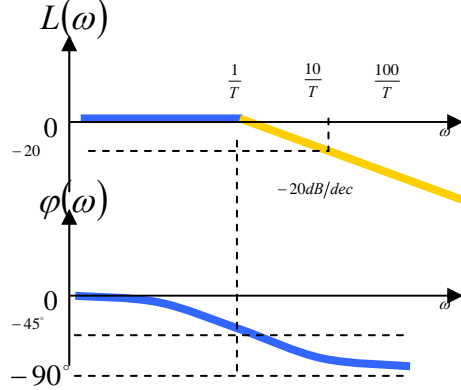
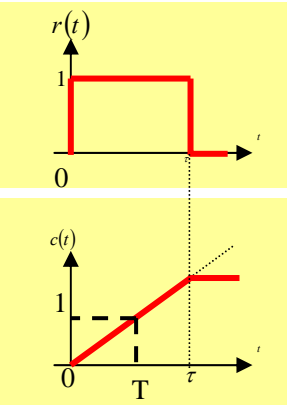
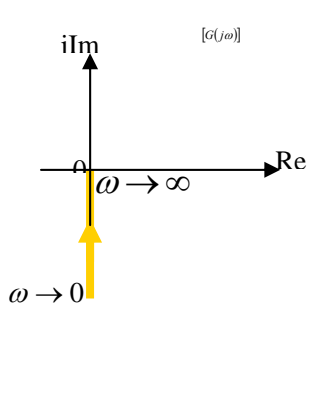
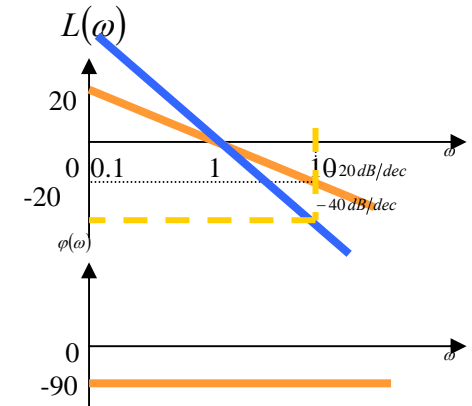
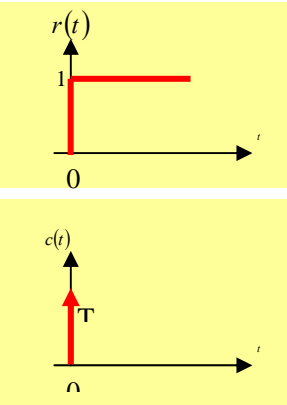
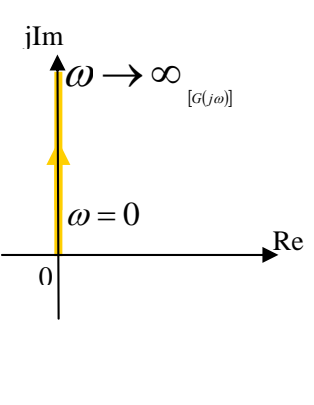
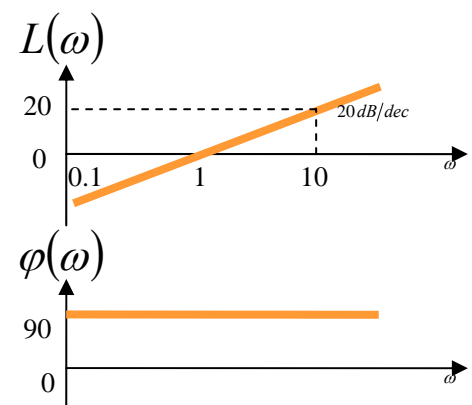


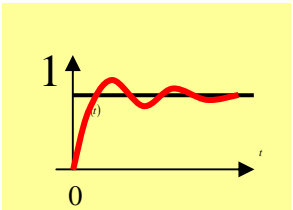
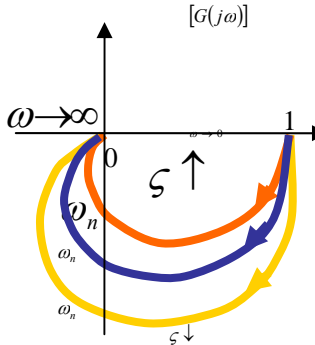
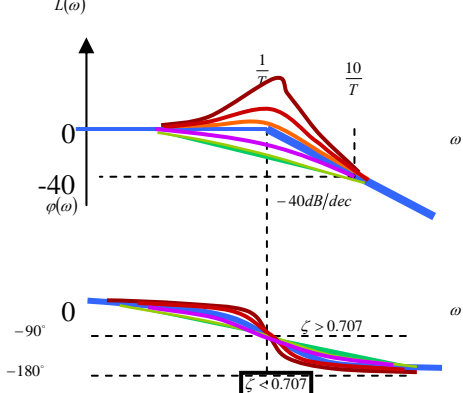
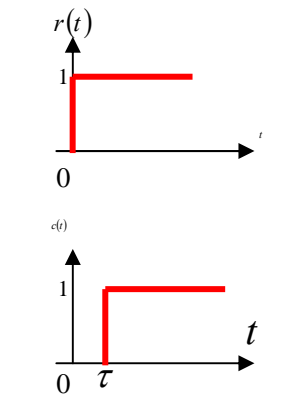
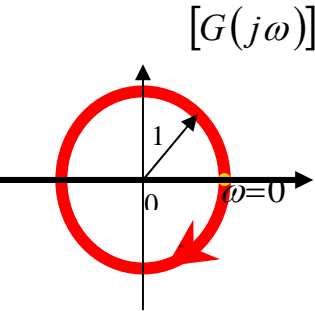
目录

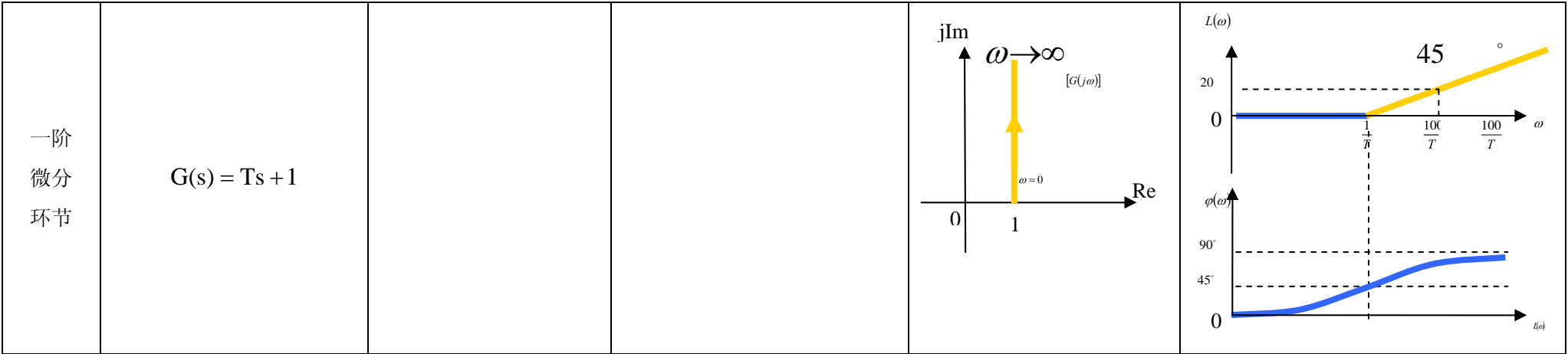
目录	1	四、开环零极点的分布对系统性能的影响.....	14
典型环节各种知识汇总	2	第五章 线性系统的频域分析法	14
第二章 控制系统的数学模型	5	一、频率特性的定义	14
一、系统微分方程的建立	5	二、频率特性和传递函数的关系.....	14
二、传递函数的定义:	6	三、频率特性的图形表示方法	15
三、结构图简化原则	6	四、奈奎斯特稳定判据	15
四、信号流图	7	五、稳定裕度的定义	16
四、梅逊公式	8	第六章 控制系统的校正	17
第三章 线性系统的时域分析	8	一、常用的校正方式	17
一、 ξ, ω_n 变化时动态性能的变化规律:	8	二、开环频率特性分析系统的性能.....	17
二、劳斯判据:	9	三、频率法串联校正	18
三、误差 $e(t)$ 的两种定义	10	第七章 非线性系统	20
四、稳态误差	10	一、描述函数	20
五、各种误差系数的定义公式	10	二、相平面法	22
第四章 根轨迹	11	第八章 离散控制系统	25
一、根轨迹的基本概念	11	一、香农采样定理	25
二、根轨迹方程 (180°)	11	二、实数位移定理	25
三、绘制根轨迹的基本法则	12	三、终值定理	25
		四、离散系统的数学模型	25

典型环节各种知识汇总

典型环节	传递函数		单位阶跃响应的性能指标	极坐标图	Bode图
比例环节	$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=K$				
惯性环节	$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$		$t_d = 0.69T$ $t_r = 2.2T$ $t_s = \begin{cases} 3T & \Delta = 5\%c(\infty) \\ 4T & \Delta = 2\%c(\infty) \end{cases}$ $t_p、M_p$ 不存在		

积分 环节	$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts}$				
微分 环节	$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = Ts$				

振荡 环节	$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$		$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$ $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ $t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\Delta = 5\%)$ $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\Delta = 2\%)$ $M_p = e^{\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100\%$		
延迟 环节					



第二章 控制系统的数学模型

一、系统微分方程的建立

A、机械系统

机械系统的运动方程遵循以下原则：

并联元件的合力等于两元件上的力相加，平行移动，位移相同；

串联元件各元件受力相同，总位移等于各元件相对位移之和；

1、惯性力 $F_m = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$

2、弹力 $F_k = ky = k \int v dt$

3、阻尼力 $F_f = fv = f \frac{dy}{dt}$

B、电路系统

1、电阻 $R = \frac{u_R}{i_R}$

电阻的复阻抗 $Z_R(s) = R$

2、电容 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$

电容的复阻抗 $Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$

2、电感 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$

电容的复阻抗 $Z_L(s) = Ls$

二、传递函数的定义：

在线性定常系统中，当初是条件为零时，系统输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比。

零极点表达式

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$= K_g \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

时间常数表达式

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$= K \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s + 2\zeta\tau_2 s + 1)\cdots(\tau_i s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2^2 s + 2\zeta T_2 s + 1)\cdots(T_j s + 1)}$$

开环传递函数：反馈信号 $B(s)$ 与误差信号 $E(s)$ 之比

单回路闭环系统传递函数的一般公式：

$$\text{闭环传递函数} = \frac{\text{前向传递函数}}{1 + \text{开环传递函数}}$$

多回路闭环系统传递函数的一般公式(仅适合于各回路两两相互交叉，且只有一

个前向通道的情况)：

$$G(s) = \frac{\text{前向传递函数的乘积}}{1 - \sum \text{每一反馈回路的传递函数的乘积}}$$

$G(s) \Leftrightarrow$ 系统零极点分布图 \Leftrightarrow 系统性能 $\begin{cases} \text{稳定性;} \\ \text{动态特性.} \end{cases}$

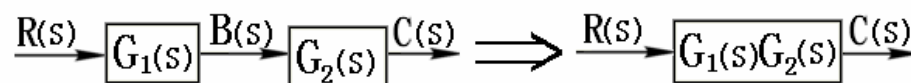
三、结构图简化原则

(1) 各前向通路传递函数的乘积不变；

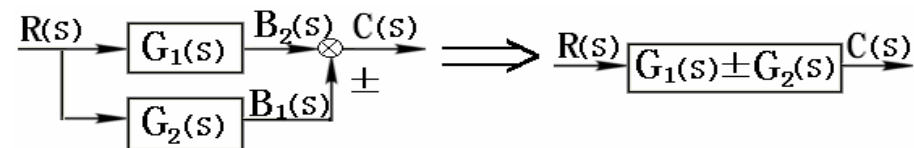
(2) 各反馈回路传递函数的乘积不变。

结构图的等效变换和化简：

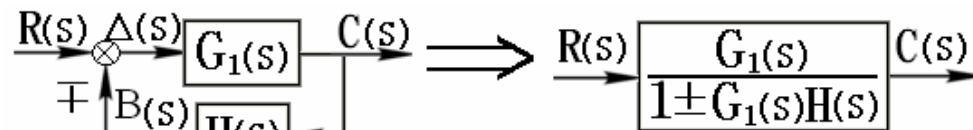
1) .环节串联：



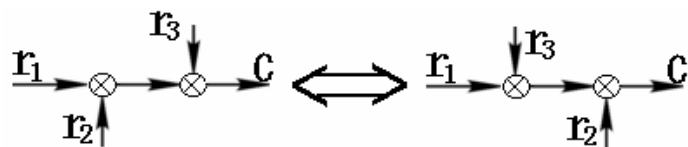
2) .环节并联：



3) .反馈等效：



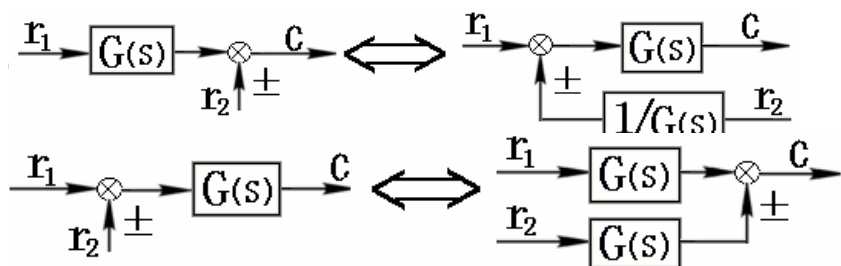
①比较点换位:



②引出点换位:



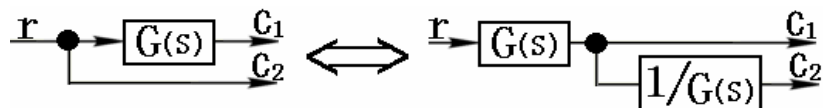
③比较点前移:



⑤引出点前移:



⑥引出点后移:



四、信号流图

(1).信号流的组成

节点: 用来表示变量或信号的点, 用符号“○”表示。

支路: 连接两节点的定向线段, 用符号“→”表示。

(2).信号流图与结构图的关系

信号流图	\Leftrightarrow	结构图
源点 (输入节点)	\Leftrightarrow	输入信号
汇点 (输出节点)	\Leftrightarrow	输出信号
混合节点	\Leftrightarrow	引出点, 比较点
支路	\Leftrightarrow	环节
支路增益	\Leftrightarrow	环节传递函数

前向通道(从源点到汇点) { 顺着信号流动方向
不能走重复的路线

回路(信号流动形成的封闭回路)

互不接触电路(无公共点或公共支路)

四、梅逊公式

$$P = \frac{\sum_{k=1}^n P_k A_k}{\Delta}$$

其中： $\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots$ 称为特征式

P_i ：从输入端到输出端第*k*条前向通路的总传递函数

Δ_i ：在 Δ 中，将与第*i*条前向通路相接触的回路所在项除去后所余下的部分，

称为余子式

$\sum L_i$ ：所有单回路的“回路传递函数”之和

$\sum L_i L_j$ ：两两不接触回路，其“回路传递函数”乘积之和

$\sum L_i L_j L_k$ ：所有三个互不接触回路，其“回路传递函数”乘积之和

“回路传递函数”指反馈回路的前向通路和反馈通路的传递函数只积并且包含表示反馈极性的正负号。

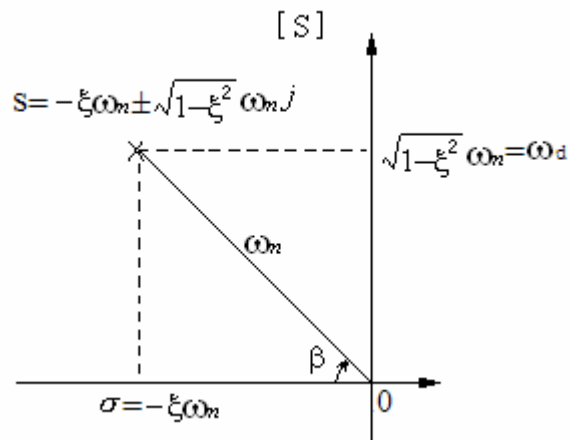
注：可以直接对系统的结构图应用梅逊公式。

第三章 线性系统的时域分析

一、 ξ, ω_n 变化时动态性能的变化规律：

$$\text{极点直角表示法:} \begin{cases} \text{实部: } \xi \omega_n \text{ 不变; 虚部 } \sqrt{1-\xi^2} \omega_n \uparrow \rightarrow \begin{cases} \sigma\% \uparrow \\ t_s \rightarrow \end{cases} \\ \text{虚部: } \sqrt{1-\xi^2} \omega_n \text{ 不变; 实部 } \xi \omega_n \uparrow \rightarrow \begin{cases} \sigma\% \downarrow \\ t_s \downarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{极点极坐标法:} \begin{cases} \text{阻尼比: } \xi \text{ 不变; 固有频率 } \omega_n \uparrow \rightarrow \begin{cases} \sigma\% \rightarrow \\ t_s \downarrow \end{cases} \\ \text{固有频率 } \omega_n \text{ 不变; 阻尼比 } \xi \uparrow \rightarrow \begin{cases} \sigma\% \downarrow \\ t_s \downarrow \end{cases} \end{cases}$$



闭环主导极点：当一个极点距离虚轴较近，且周围没有其他闭环极点和零点，并且该极点的**实部**的绝对值应比其他极点的实部绝对值小**5**倍以上。

对于任何线性定常连续控制系统由如下的关系：

- 1、系统的输入信号导数的响应等于系统对该输入信号响应的导数；
- 2、系统对输入信号积分的响应等于系统对该输入信号响应的积分，积分常数由初始条件确定。

二、劳斯判据：

设系统特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad a_n > 0$$

劳斯表

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\cdots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\cdots
s^{n-2}	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	b_3	b_4	\cdots
s^{n-3}	$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$	c_3	c_4	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^0	a_0				

劳斯判据指出：系统稳定的充要条件是劳斯表中第一列系数都大于零，否则系统不稳定，而且第一列系数符号改变的次数就是系统特征方程中正实部根的个数。

劳斯判据特殊情况的处理

- (1)某行第一列元素为零而该行元素不全为零时 —— 用一个很小的正数 ε 代替第一列的零元素参与计算，表格计算完成后再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。
- 误差与稳态误差

(2)某行元素全部为零时 —— 利用上一行元素构成辅助方程，对辅助方程求导得到新的方程，用新方程的系数代替该行的零元素继续计算。当特征多项式包含形如 $(s + \sigma)(s - \sigma)$ 或 $(s + j\omega)(s - j\omega)$ 的因子时，劳斯表会出现全零行，而此时辅助方程的根就是特征方程根的一部分。

三、误差 $e(t)$ 的两种定义

从输入定义——偏差=误差

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad \begin{cases} \text{可测量} \\ \text{误差的理论含义不明显} \end{cases}$$

从输出定义

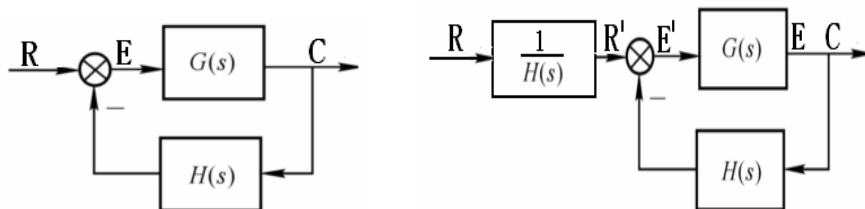
$$E'(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - C(s) \quad \begin{cases} \text{不可测量} \\ \text{较接近}e(t)\text{的含义} \end{cases}$$

两种定义的误差间关系

$$E(s) = H(s)E'(s)$$

对单位反馈系统 $H(s)=1$ ，此时有：

$$E(s) = E'(s)$$



四、稳态误差

$$1、e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad \begin{cases} \text{第一种定义: } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \\ \text{第二种定义: } e_{ss} = e(t) \text{ 中的稳态分量 (动态误差)} \end{cases}$$

2、计算 e_{ss} 的一般方法

步骤：

(1) 判定系统的稳态性

(2)求误差传递函数 $\Phi_e(s), \Phi_{en}(s)$

(3)利用终值定理求 e_{ss} ： $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[\Phi_e(s)R(s) + \Phi_{en}(s)N(s)]$

五、各种误差系数的定义公式

开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = \frac{K}{s^\nu} G_0(s)$$

其中， **K 为开环增益；**
 ν 为开环传递函数中串联积分环节的个数。

静态位置误差系数 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)$

静态速度误差系数 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s)$

静态加速度误差系数 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s)$

型别 ν	静态误差系数			$r(t) = A \cdot 1(t)$	$r(t) = A \cdot t$	$r(t) = A \cdot \frac{t^2}{2}$
	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}}$	位置误差 $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	速度误差 $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

第四章 根轨迹

一、根轨迹的基本概念

根轨迹是当开环系统某一参数（如根轨迹增益 K^* ）从零变化到无穷时，闭环特征方程的根在 s 平面上移动的轨迹。

二、根轨迹方程（ 180° ）

开环传递函数可表示为

$$G(s)H(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

系统的闭环特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

即

$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -1$$

$$\text{幅值条件: } |G(s)H(s)| = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j)|} = 1$$

相角条件:

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) =$$

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{j=1}^n \theta_j = (2k + 1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中, $\sum \varphi_i$ 、 $\sum \theta_j$ 分别代表所有开环零点、极点到根轨迹上某一点的向量相角之和。

三、绘制根轨迹的基本法则

法则1 根轨迹的起点和终点: 根轨迹起始于开环极点, 终止于开环零点;

如果开环零点个数 m 少于开环极点个数 n , 则有 $(n - m)$ 条根轨迹终止于无穷远处。

法则2 根轨迹的分支数, 对称性和连续性: 根轨迹的分支数与开环零点个数 m 、开环极点数 n 中的大者相等, 根轨迹连续并且对称于实轴。

法则3 实轴上的根轨迹: 从实轴上最右端的开环零、极点算起, 奇数开环零极点到偶数开环零极点之间的区域必是根轨迹。

法则4 根轨迹的渐近线: 当系统开环极点个数 n 大于开环零点个数 m 时,

有 $n-m$ 条根轨迹分支沿着与实轴夹角为 φ_a 、交点为 σ_a 的一组渐近线趋向于无穷远处，且有

$$\begin{cases} \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \\ \sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{\text{极点之和} - \text{零点之和}}{n-m} \end{cases} \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, n-m-1$$

法则5 根轨迹的分离点：两条或两条以上根轨迹分支在 s 平面上相遇又分离的点，称为根轨迹的分离点，分离点的坐标 d 是方程

令： $\frac{dK_g}{ds} = 0$ 解出 s 值 即为分离点的坐标（注：此时得到的 K_g 就是

系统响应是否产生振荡的临界值）

分离点或会合点上，根轨迹的切线与正实轴的夹角称为分离角。

$$\theta_d = 180^\circ / k$$

法则6 根轨迹与虚轴的交点：若根轨迹与虚轴相交，意味着闭环特征方程出现纯虚根。

方法一、故可在闭环特征方程中令 $s = j\omega$ ，然后分别令方程的实部和

虚部均为零，从中求得交点的坐标值及其相应的 K^* 值。

方法二、用劳斯稳定判据求根轨迹与虚轴的交点，即劳斯判据中的第

二种特殊情况（某一行为零，构造辅助方程）

法则7 根轨迹的出射角与入射角

$$\text{出射角} \quad \theta_{p_x} = 180^\circ + \sum_{i=1}^m \angle(p_x - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq x}}^n \angle(p_x - p_j)$$

$$\theta_{p_{x+1}} = -\theta_{p_x}$$

其中， $\sum_{i=1}^m \angle(p_x - z_i)$ 是所有零点到 p_x 的向量夹角；

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq x}}^n \angle(p_x - p_j)$ 是其它极点到 p_x 的向量夹角

$$\text{入射角} \quad \phi_{z_x} = 180^\circ + \sum_{j=1}^n \angle(z_x - p_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^m \angle(z_x - z_i)$$

$$\phi_{z_{x+1}} = -\phi_{z_x}$$

根之和：当系统开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的分子、分母阶次差 $(n-m)$

大于等于2时，系统闭环极点之和等于系统开环极点之和。

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n p_i \quad n-m \geq 2$$

式中， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为系统的闭环极点（特征根）， p_1, p_2, \dots, p_n 为系统的开环极点。

四、开环零极点的分布对系统性能的影响

增加一个开环零点使系统的根轨迹向左偏移，**提高了**系统的稳定性，

有利于改善系统的动态性能。开环负实零点离虚轴越近，这种作用越大。

增加一个开环零点使系统的根轨迹向右偏移，**降低了**系统的稳定性，有损于系统的动态性能。开环负实零点离虚轴越近，这种作用越大。

第五章 线性系统的频域分析法

一、频率特性的定义

线性定常系统(或元件)的频率特性是零初始条件下稳态输出正弦信号与输入正弦信号的复数比。用 $G(j\omega)$ 表示，则有

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)\angle\varphi(\omega)$$

频率特性描述了在不同频率下系统(或元件)传递正弦信号的能力。

频率特性 $G(j\omega)$ 还可用实部和虚部形式来描述，即

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

式中， $P(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 分别称为系统(或元件)的实频特性和虚频特性。

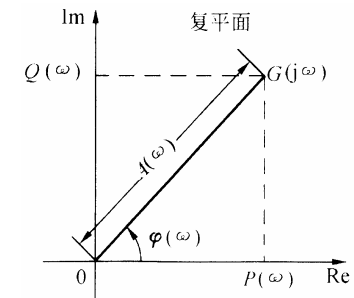
由图的几何关系知，幅频、相频特性与实频、虚频特性之间的关系为

$$P(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$$

$$Q(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



$G(j\omega)$ 在复平面上的表示

二、频率特性和传递函数的关系

频率特性和传递函数的关系为

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

即传递函数的复变量 s 用 $j\omega$ 代替后，就相应变为频率特性。

三、频率特性的图形表示方法

(1) 幅相频率特性曲线

幅相频率特性曲线又称奈奎斯特(Nyquist)曲线, 在复平面上以极坐标的形式表示。设系统的频率特性为

$$G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

对于某个特定频率 ω_i 下的 $G(j\omega_i)$, 可以在复平面用一个向量表示, 向量的长度为 $A(\omega_i)$, 相角为 $\varphi(\omega_i)$ 。当 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ 变化时, 向量 $G(j\omega)$ 的端点在复平面 G 上描绘出来的轨迹就是幅相频率特性曲线。通常把 ω 作为参变量标在曲线相应点的旁边, 并用箭头表示 ω 增大时特性曲线的走向。

(2) 对数频率特性曲线

对数频率特性曲线又叫伯德(Bode)曲线。它由对数幅频特性和对数相频特性两条曲线所组成, 是频率法中应用最广泛的一组图线。伯德图是在半对数坐标纸上绘制出来的。横坐标采用对数刻度, 纵坐标采用线性的均匀刻度。

对数幅频特性为:

$$L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)| = 20\lg A(\omega)$$

单位是dB(分贝)。

频率 ω 每变化10倍称为一个十倍频程, 记作dec。每个dec沿横坐标走过的间隔为一个单位长度, 如图5-5所示。由于横坐标按 ω 的对数分度, 故

对 ω 而言是不均匀的, 但对 $\lg \omega$ 来说却是均匀的线性刻度。

对数相频特性的纵坐标为相角 $\varphi(\omega)$, 单位是度, 采用线性刻度。

四、奈奎斯特稳定判据

在奈氏图中, 如果开环幅相曲线在点 $(-1, j0)$ 以左穿过负实轴, 称为“穿越”。若沿 ω 增加方向, 曲线自上而下(相位增加)穿过 $(-1, j0)$ 点以左的负实轴, 则称为正穿越; 反之曲线自下而上(相位减小)穿过 $(-1, j0)$ 点以左的负实轴, 则称为负穿越。如果沿 ω 增加方向, 幅相曲线自点 $(-1, j0)$ 以左负实轴开始向下或向上, 则分别称为半次正穿越或半次负穿越, 如图5-44(a)所示。

$$R = N_+ - N_-$$

式中 N_+ 是正穿越次数, N_- 是负穿越次数。

$$z = p - 2R$$

其中, z 为闭环系统特征方程在 S 有半平面根的个数; p 为开环系统特征方程在 S 有半平面根的个数; R 为开环频率特性的轨迹在复平面上逆时针包围 $(-1, j0)$ 的圈数。

在Bode图上, 对应 $L(\omega) > 0$ 的频段内沿 ω 增加方向, 对数相频特性曲线自下而上(相角增加)穿过 -180° 线称为正穿越; 反之曲线自上而下(相

角减小) 穿过 -180° 为负穿越。同样, 若沿 ω 增加方向, 对数相频曲线自 -180° 线开始向上或向下, 分别称为半次正穿越或半次负穿越。

※开环有串联积分环节的系统

1、极坐标图

应先在开环极坐标图 $\omega = 0$ 处, 补作一个半径为无穷大, 逆时针旋转 $\nu \cdot 90^\circ$ 的大圆弧增补线, 把它视为奈氏曲线的一部分。

2、Bode图

当 $G(s)H(s)$ 包含积分环节时在对数相频曲线 ω 为 0^+ 的地方, 应该补画一条从相角 $\angle G(j0^+)HG(j0^+) + \nu \cdot 90^\circ$ 到 $\angle G(j0^+)HG(j0^+)$ 的虚线。

其中 ν 为积分环节数。

五、稳定裕度的定义

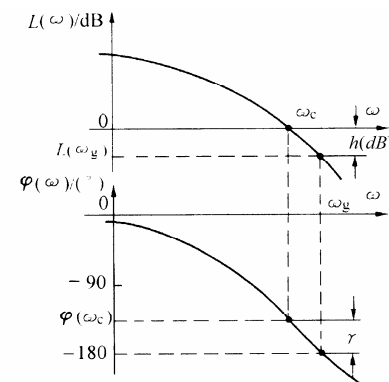
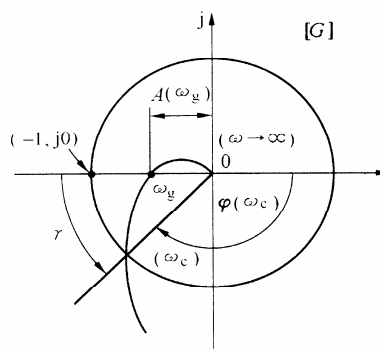
1 相角裕度

相角裕度是指幅相频率特性 $G(j\omega)$ 的幅值 $A(\omega) = |G(j\omega)| = 1$ 时的向量与负实轴的夹角, 常用希腊字母 γ 表示。

在 G 平面上画出以原点为圆心的单位圆, 见图。 $G(j\omega)$ 曲线与单位圆相交, 交点处的频率 ω_c 称为截止频率, 此时有 $A(\omega_c) = 1$ 。按相角裕度的定义

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

由于 $L(\omega_c) = 20 \lg A(\omega_c) = 20 \lg 1 = 0$, 故在伯德图中, 相角余度表现为 $L(\omega) = 0 \text{ dB}$ 处的相角 $\varphi(\omega_c)$ 与 -180° 水平线之间的角度差, 上述两图中的 γ 均为正值。



2 幅值裕度

$G(j\omega)$ 曲线与负实轴交点处的频率 ω_g 称为相角交界频率, 此时幅相特性曲线的幅值为 $A(\omega_g)$, 如图5-45所示。幅值裕度是指 $(-1, j0)$ 点的幅值1与 $A(\omega_g)$ 之比, 常用 h 表示, 即

$$h = \frac{1}{A(\omega_g)}$$

在对数坐标图上

$$20\lg h = -20\lg A(\omega_g) = -L(\omega_g)$$

即 h 的分贝值等于 $L(\omega_g)$ 与 $0dB$ 之间的距离（ $0dB$ 下为正）。

相角裕度的物理意义在于：稳定系统在截止频率 ω_c 处若相角再迟后一个 γ 角度，则系统处于临界状态；若相角迟后大于 γ ，系统将变成不稳定。

幅值裕度的物理意义在于：稳定系统的开环增益再增大 h 倍，则 $\omega = \omega_g$ 处的幅值 $A(\omega_g)$ 等于1，曲线正好通过 $(-1, j0)$ 点，系统处于临界稳定状态；若开环增益增大 h 倍以上，系统将变成不稳定。

第六章 控制系统的校正

一、常用的校正方式

常用的校正方式包括：串联校正；反馈校正；前馈校正；复合校正（反馈校正+前馈校正）。

二、开环频率特性分析系统的性能

实际系统的开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 一般都符合如图所示的特征：左端（频率较低的部分）高；右端（频率较高的部分）低。将 $L(\omega)$ 人为地分为三个频段：低频段、中频段和高频段。低频段主要指第一个转折点以前的

频段；中频段是指截止频率 ω_c 附近的频段；高频段指频率远大于 ω_c 的频段。

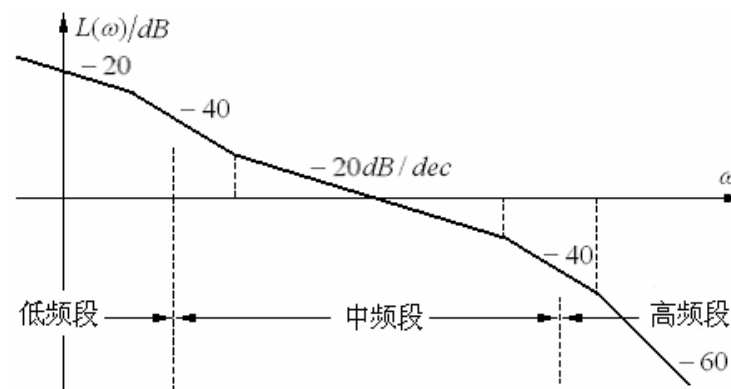


图 对数频率特性三频段的划分

1、 $L(\omega)$ 低频渐近线与系统稳态误差的关系

系统开环传递函数中含积分环节的数目（系统型别）确定了开环对数幅频特性低频渐近线的斜率，而低频渐近线的高度则取决于开环增益的大小。因此， $L(\omega)$ 低频段渐近线集中反映了系统跟踪控制信号的稳态精度信息。根据 $L(\omega)$ 低频段可以确定系统型别 ν 和开环增益 K ，利用第3章中介绍的静态误差系数法可以确定系统在给定输入下的稳态误差。

2、 $L(\omega)$ 中频段特性与系统动态性能的关系

一般情况下，系统开环对数幅频特性的斜率在整个频率范围内是变化的，故截止频率 ω_c 处的相角裕度 γ 应由整个对数幅频特性中各段的斜率所共同确定。在 ω_c 处， $L(\omega)$ 曲线的斜率对相角裕度 γ 的影响最大，远离 ω_c 的对数幅频特性，其斜率对 γ 的影响就很小。为了保证系统有满意的动态性能，希望 $L(\omega)$ 曲线以 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 的斜率穿过 0dB 线，并保持较宽的频段。

3、 $L(\omega)$ 高频段对系统性能的影响

$L(\omega)$ 特性高频段的幅值，直接反映出系统对输入端高频信号的抑制能力，高频段的分贝值越低，说明系统对高频信号的衰减作用越大，即系统的抗高频干扰能力越强

三、频率法串联校正

（a）串联超前校正

超前网络的特性是相角超前，幅值增加。串联超前校正的实质是将超前网络的最大超前角补在校正后系统开环频率特性的截止频率处，提高校正后系统的相角裕度和截止频率，从而改善系统的动态性能。

设计超前校正装置的一般步骤可归纳如下：

(1) 根据给定稳态误差 e_{ss}^* 的要求，确定系统的开环增益 K 。

(2) 根据已确定的开环增益 K ，绘出未校正系统的对数幅频特性曲线，并求出截止频率 ω_{c0} 和相角裕度 γ_0 。当 $\omega_c < \omega_c'$ ， $\gamma_0 < \gamma'$ 时可以考虑用超前校正。

(3) 根据给定的相位裕度 γ^* ，计算校正装置所应提供的最大相角超前量 φ_m ，即

$$\varphi_m = \gamma' - \gamma + (5^\circ \sim 15^\circ)$$

式中 $(5^\circ \sim 15^\circ)$ 是用于补偿引入超前校正装置，截止频率增大所导致的校正前系统的相角裕度的损失量。若未校正系统的对数幅频特性在截止频率处的斜率为 $-40\text{dB}/\text{dec}$ ，并不再向下转折时，可以取 $5^\circ \sim 8^\circ$ ；若该频段斜率从 $-40\text{dB}/\text{dec}$ 继续转折为 $-60\text{dB}/\text{dec}$ ，甚至更负时，则补偿角应适当取大些。注意：如果 $\varphi_m > 60^\circ$ ，则用一级超前校正不能达到要求的 γ' 指标。

(4) 根据所确定的最大超前相角 φ_m ，求出相应的 a 值，即

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

在未校正系统的对数幅频特性上计算

$$L(\omega_c') = -10 \lg \alpha$$

求出校正后系统的截止频率（零分贝频率） ω_c' ，且 $\omega_c' = \omega_m$ 。

(5) 确定校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

其中： $\omega_1 = \frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\omega_c'}{\sqrt{\alpha}}$

$$\omega_2 = \frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} \omega_c'$$

(6) 根据超前网络的参数，确定超前网络的元件值。

(b) 串联迟后校正

迟后网络对低频有用信号不产生衰减，而对高频信号有削弱作用， b 值越小，这种作用越强。

迟后校正的实质是利用迟后网络幅值衰减特性，将系统的中频段压低，

使校正后系统的截止频率减小，挖掘系统自身的相角储备来满足校正后系统的相角裕度要求。

设计迟后校正装置的一般步骤可以归纳如下：

(1) 根据给定的稳态误差或静态误差系数要求，确定开环增益 K 。

(2) 根据确定的 K 值绘制未校正系统的对数幅频特性曲线 $L_0(\omega)$ ，确定其截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 。

(3) 根据 γ' 要求，选择已校正系统的 ω_c' 。

考虑到迟后网络在 ω_c' 处会产生一定的相角迟后 $\varphi_c(\omega_c')$ ，因此下式成立：

$$\gamma' = \gamma(\omega_c') + \varphi_c(\omega_c')$$

(4) 由下式确定迟后网络参数 b 和 T ：

$$20 \lg b + L(\omega_c') = 0$$

$$\omega_2 = \frac{1}{bT} = 0.1 \omega_c'$$

(5) 验算校正后系统的 γ' 和 h 。若不满足，重新回到(2)，直至满足要求。

(6) 确定迟后网络的元件值。

第七章 非线性系统

一、描述函数

1、描述函数的计算方法

设非线性环节的输入、输出特性为

$$y = f(x)$$

在正弦信号 $x = A \sin \omega t$ 作用下，输出 $y(t)$ 是非正弦周期信号。把 $y(t)$ 展开为傅立叶级数

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned}$$

式中

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$$

若非线性特性是中心对称的，则 $y(t)$ 具有奇次对称性， $A_0 = 0$ 。输出的基波分量为

$$y_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

非线性环节的描述函数为

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{Y_1}{A} e^{j\varphi_1} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} e^{j \arctan(A_1/B_1)} \\ &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} = b(A) + ja(A) \end{aligned}$$

2、运用描述函数法的基本条件

应用描述函数法分析非线性系统时，要求系统满足以下条件：

① 非线性系统的结构图可以简化成只有一个非线性环节 $N(A)$ 和一个线性部分 $G(s)$ 相串联的典型形式，如图7-24所示。

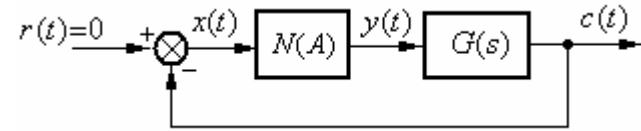


图7-24 非线性系统典型结构图

② 非线性环节的输入、输出特性是奇对称的，即 $y(-x) = -y(x)$ ，保

证非线性特性在正弦信号作用下的输出不包含常值分量，而且 $y(t)$ 中基波分量幅值占优。

③ 线性部分具有较好的低通滤波性能。这样，当非线性环节输入正弦信号时，输出中的高次谐波分量将被大大削弱，因此闭环通道内近似只有基波信号流通，这样用描述函数法所得的分析结果比较准确。线性部分的阶次越高，低通滤波性能越好。

以上条件满足时，可以将非线性环节近似当作线性环节来处理，用其描述函数当作其“频率特性”，借用线性系统频域法中的奈氏判据分析非线性系统的稳定性。

3、非线性系统的稳定性分析

设非线性系统满足上面三个条件，其结构图如图7-24所示，图中 $G(s)$ 的极点均在左半 s 平面，则闭环系统的“频率特性”为

$$\Phi(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{N(A)G(j\omega)}{1 + N(A)G(j\omega)}$$

闭环系统的特征方程为

$$1 + N(A)G(j\omega) = 0$$

或
$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

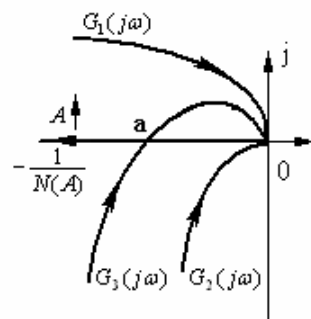
式中 $-1/N(A)$ 叫做非线性特性的负倒描述函数。这里，我们将它理解为广义 $(-1, j0)$ 点。由奈氏判据 $Z = P - 2N$ 可知，当 $G(s)$ 在右半 s 平面没有

极点时， $P = 0$ ，要使系统稳定，要求 $Z = 0$ ，意味着 $G(j\omega)$ 曲线不能包围 $-1/N(A)$ ，否则系统不稳定。由此可以得出判定非线性系统稳定性的推广奈氏判据，其内容如下：

若 $G(j\omega)$ 曲线不包围 $-1/N(A)$ 曲线，则非线性系统稳定；

若 $G(j\omega)$ 曲线包围 $-1/N(A)$ 曲线，则非线性系统不稳定；

若 $G(j\omega)$ 曲线与 $-1/N(A)$ 有交点，则在交点处必然满足式(7-18)对应非线性系统的等幅周期运动；如果这种等幅运动能够稳定地持续下去，便是系统的自振。



4、自振的确定

非线性系统周期运动的稳定性可以这样来判断：

在复平面上，将线性部分 $G(j\omega)$ 曲线包围的区域看成是不稳定区域，而不被 $G(j\omega)$ 曲线包围的区域是稳定区域。当交点处的 $-1/N(A)$ 曲线沿着振幅 A 增加的方向由不稳定区进入稳定区时，则该交点是自振点。反之，交点处的 $-1/N(A)$ 曲线，沿着振幅 A 增加的方向由稳定区进入不稳定区时，该点不是自振点。所对应的周期运动实际上不能持续下去。这时，该点的幅值 A_1 确定了一个边界，当 $x(t)$ 起始振幅小于 A_1 时，系统过程收敛；反之，当 $x(t)$ 起始振幅大于 A_1 时，系统振荡过程会加剧。

5、自振参数计算

如果存在自振点，必然对应系统的自振运动，自振的幅值和频率分别由 $-1/N(A)$ 曲线和 $G(j\omega)$ 曲线在自振点处的 A 和 ω 决定，利用自振的必要条件 $G(j\omega) \cdot N(A) = -1$ 可以求出 A 和 ω 。

二、相平面法

1. 相平面和相轨迹

设一个二阶系统可以用下面的常微分方程

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

来描述。其中 $f(x, \dot{x})$ 是 x 和 \dot{x} 的线性或非线性函数。在一组非全零初始条件下 ($\dot{x}(0)$ 和 $x(0)$ 不全为零)，系统的运动可以用解析解 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 描述。

相平面： 由 x 和 \dot{x} 构成的平面。

辅助方程（用于求相轨迹）

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

2、奇点

$$\text{由} \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} = f(x, \dot{x}) = 0 \end{cases} \text{所确定的点为奇点（又称为平衡点）}$$

3、二阶线性系统的相轨迹

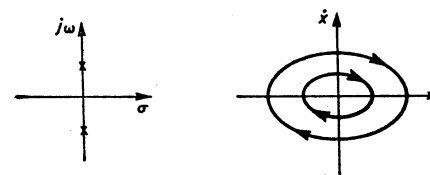
描述二阶线性系统自由运动的微分方程为

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

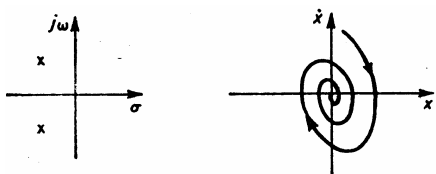
对应的的特征方程为

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

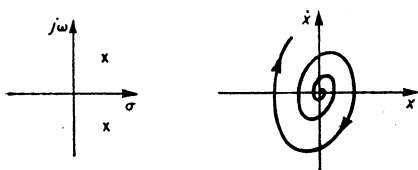
(1) **中心点：** 当 $\xi = 0$ 时， λ_1 、 λ_2 为一对共轭纯虚根



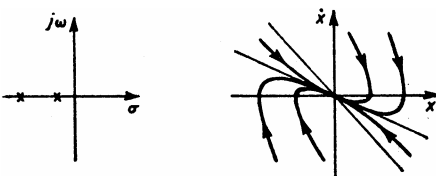
(2) **稳定焦点**: 当 $0 < \xi < 1$ 时, λ_1 、 λ_2 为一对具有负实部的共轭复根, 系统处于欠阻尼状态。对应的相轨迹是一簇对数螺旋线, 收敛于相平面原点;



(3) **不稳定焦点**: 当 $-1 < \xi < 0$ 时, λ_1 、 λ_2 为一对具有正实部的共轭复根。对应的相轨迹是发散的对数螺旋线。



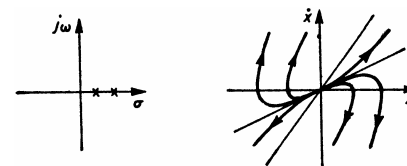
(4) **稳定的节点**: 当 $\xi > 1$ 时, λ_1 、 λ_2 为两个负实根, 系统处于过阻尼状态。



其中图中的两条直线的方程为:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{x} &= \lambda_2 x\end{aligned}$$

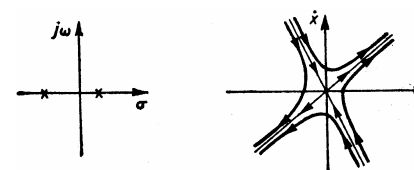
(5) **不稳定的节点**: 当 $\xi < -1$ 时, λ_1 、 λ_2 为两个正实根



其中图中的两条直线的方程为:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{x} &= \lambda_2 x\end{aligned}$$

(6) **鞍点**: λ_1 、 λ_2 为两个符号相反的实根



其中图中二四象限的直线方程为:

$$\dot{x} = -\omega_n x$$

一三象限的直线方程为:

$$\dot{x} = \omega_n x$$

4、二阶非线性系统的相轨迹

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

首先对非线性系统在奇点(0, 0)处进行线性化(如果奇点不在坐标原点可通过坐标平移), 然后按照二阶线性系统的相轨迹进行绘制。线性化过程可通过下式完成:

$$\ddot{x} = \frac{\partial f(\dot{x}, x)}{\partial \dot{x}} \Big|_{\substack{x=0 \\ \dot{x}=0}} \dot{x} + \frac{\partial f(\dot{x}, x)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ \dot{x}=0}} x$$

5、极限环

极限环是一条封闭的相轨迹, 它附近的相轨迹都渐近地趋向它或从它离开。

(1) 稳定极限环

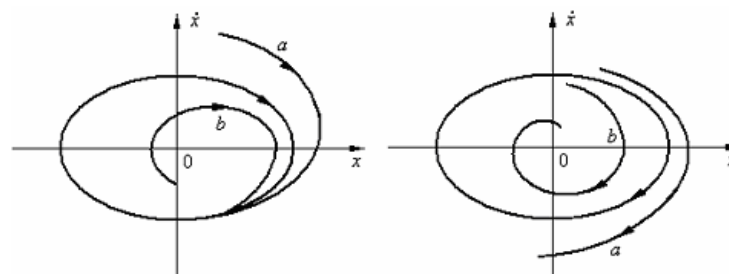
如果由极限环外部和内部起始的相轨迹都渐近地趋向这个极限环, 任何较小的扰动使系统运动离开极限环后, 最后仍能回到极限环上。这样的极限环称为稳定极限环, 对应系统的自振。

(2) 不稳定极限环

如果由极限环外部和内部起始的相轨迹都从极限环发散出去, 任何较小的扰动使系统运动离开极限环后, 系统状态将远离极限环或趋向平衡点, 这样的极限环称为不稳定极限环。相应系统的平衡状态在小范围内稳定而在大范围内不稳定。

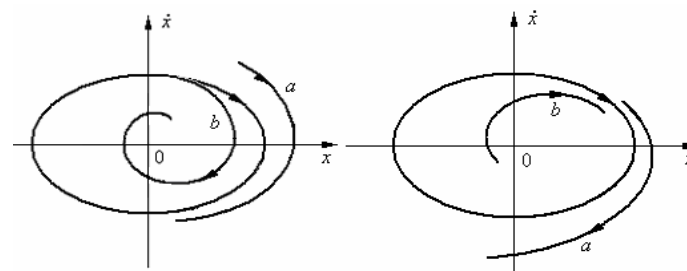
(3) 半稳定极限环

如果由极限环外部起始的相轨迹渐近地趋向于极限环, 由内部起始的相轨迹逐渐离开极限环; 或者由外部起始的相轨迹从极限环发散出去, 由内部起始的相轨迹渐近地趋向于极限环, 这样的极限环称为半稳定极限环。具有这种极限环的系统不会产生自振。系统的运动最终会趋向于极限环内的奇点, 或远离极限环。



稳定极限环

不稳定极限环



半稳定极限环

第八章 离散控制系统

一、香农采样定理

香农采样定理指出：如果采样器的输入信号 $e(t)$ 具有有限带宽，即有直到 ω_h 的频率分量，若要从采样信号 $e^*(t)$ 中完整地恢复信号 $e(t)$ ，则模拟信号的采样角频率 ω_s ，或采样周期 T 必须满足下列条件：

$$\omega_s \geq 2\omega_h \quad \text{或} \quad T \leq \frac{\pi}{\omega_h}$$

二、实数位移定理

实数位移是指整个采样序列 $e(nT)$ 在时间轴上左右平移若干采样周期，其中向左平移 $e(nT + kT)$ 为超前，向右平移 $e(nT - kT)$ 为滞后。实数位移定理表示如下：

如果函数 $e(t)$ 是可 z 变换的，其 z 变换为 $E(z)$ ，则有滞后定理

$$Z[e(t - kT)] = z^{-k} E(z)$$

以及超前定理

$$Z[e(t + kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT) z^{-n}]$$

其中 k 为正整数。

三、终值定理

如果信号 $e(t)$ 的 z 变换为 $E(z)$ ，信号序列 $e(nT)$ 为有限值 ($n=0, 1, 2, \dots$)，且极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT)$ 存在，则信号序列的终值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) E(z)$$

四、离散系统的数学模型

1、线性常系数差分方程

对于线性定常离散系统， k 时刻的输出 $c(k)$ ，不但与 k 时刻的输入 $r(k)$ 有关，而且与 k 时刻以前的输入 $r(k-1)$ ， $r(k-2)$ ， \dots 有关，同时还与 k 时刻以前的输出 $c(k-1)$ ， $c(k-2)$ ， \dots 有关。这种关系一般可以用 n 阶后向差分方程来描述，即

$$c(k) = -\sum_{i=1}^n a_i c(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k-j)$$

式中， a_i ， $i=1, 2, \dots, n$ 和 b_j ， $j=0, 1, \dots, m$ 为常系数， $m \leq n$ 。式(6-34)称为 n 阶线性常系数差分方程。

线性定常离散系统也可以用 n 阶前向差分方程来描述，即

$$c(k+n) = -\sum_{i=1}^n a_i c(k+n-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k+m-j)$$

工程上求解常系数差分方程通常采用迭代法和 z 变换法。

2、脉冲传递函数

定义：在零初始条件下，系统输出采样信号的 z 变换 $C(z)$ 与输入采样信号的 z 变换 $R(z)$ 之比，记作

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c(nT)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n}}$$

3、开环系统脉冲传递函数

1) . 串联环节之间有采样开关时

设开环离散系统如图6-17所示，在两个串联连续环节 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 之间，有理想采样开关。根据脉冲传递函数定义，有

$$Q(z) = G_1(z)R(z), \quad C(z) = G_2(z)Q(z)$$

其中， $G_1(z)$ 和 $G_2(z)$ 分别为 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的脉冲传递函数。于是有

$$C(z) = G_2(z)G_1(z)R(z)$$

因此，开环系统脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = G_1(z)G_2(z) \quad)$$

式(6-37)表明，由理想采样开关隔开的两个线性连续环节串联时的脉冲传递函数，等于这两个环节各自的脉冲传递函数之积。这一结论，可以推广到 n 个环节相串联时的情形。

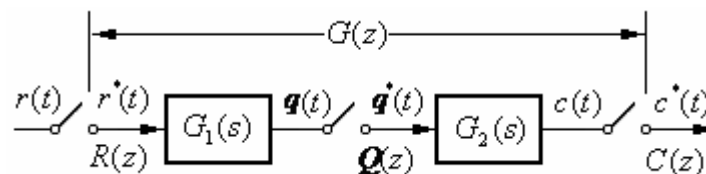


图6-17 环节间有理想采样开关的串联开环离散系统

2) . 串联环节之间无采样开关时

设开环离散系统如图6-18所示，在两个串联连续环节 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 之

间没有理想采样开关隔开。此时系统的传递函数为

$$G(s) = G_1(s) G_2(s)$$

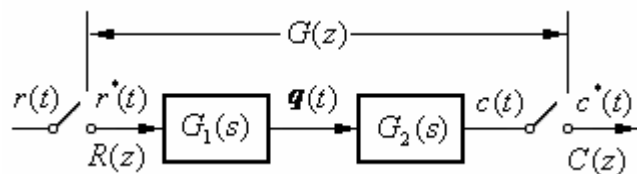


图6-18 环节间无理想采样开关的串联离散系统

将它当作一个整体一起进行 z 变换，由脉冲传递函数定义

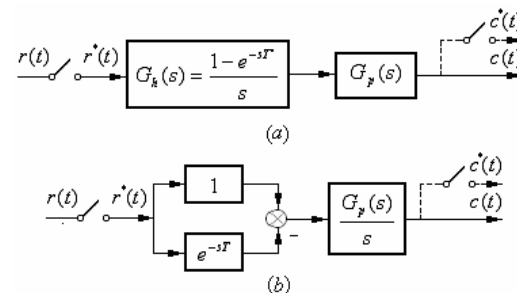
$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = Z[G_1(s) G_2(s)] = G_1 G_2(z)$$

上式表明，没有理想采样开关隔开的两个线性连续环节串联时的脉冲传递函数，等于这两个环节传递函数乘积后的相应 z 变换。这一结论也可以推广到类似的 n 个环节相串联时的情形。

3) . 有零阶保持器时

设有零阶保持器的开环离散系统如图所示。将图(a)变换为图6-19(b)所示的等效开环系统，则有

$$C(z) = Z[1 - e^{-sT}] \cdot Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] = (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] R(z)$$



4 、 闭环系统脉冲传递函数

主要串联环节之间有无采样开关确定闭环系统的脉冲传递函数。

1) 前向通道的脉冲函数的求取时注意输入环节 $R(s)$ 与前向通道的第一个环节 $G_1(s)$ 之间是否有采样开关：

a) 有，则 $G(z) = R(z)G_1(z)$

b) 无，则 $G(z) = RG_1(z)$

2) 反馈通道的脉冲函数的求取：需要找出反馈通道的第一个采样开关，从第一个采样开关之后的环节开始按照串联环节之间有无采样开关确定反馈通道的脉冲传递函数