

## Vorlesung 22      Homologie

In der letzten VL: einer Datummenge  $P = \{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^D$  einen simplizialen Komplex zuordnen.

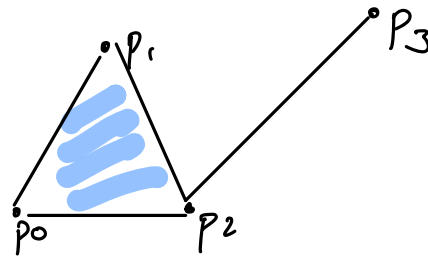
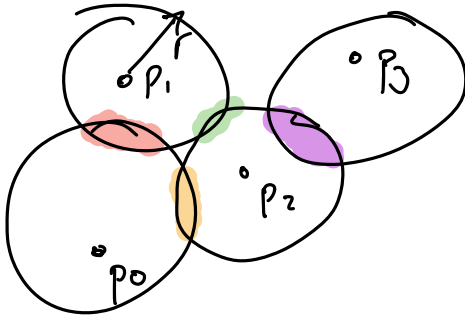
1) Čech-Komplex:


$$C_r(P) := \{ \alpha \subseteq \{0, \dots, n\} \mid \bigcap_{i \in \alpha} B_r(p_i) \neq \emptyset \}$$

2) Vietoris-Komplex

$$VR_r(P) := \{ \alpha \subseteq \{0, \dots, n\} \mid \max_{i,j \in \alpha} \|p_i - p_j\| \leq 2r \}$$

Bsp:



 ist in  $VR_r(P)$  aber nicht in  $C_r(P)$ .

### Proposition 22.1

Für  $r > 0$  und  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^D$ :

$$C_r(P) \subseteq VR_r(P) \subseteq C_{2r}(P).$$

### Beweis

Sei  $\alpha \subseteq \{0, \dots, n\}$ . Falls  $\bigcap_{i \in \alpha} B_r(x_i) \neq \emptyset$ . Dann gilt aber auch für alle  $i, j \in \alpha$ :

$$\|x_i - x_j\| \leq 2r.$$

$$\Rightarrow \alpha \in VR_r(P).$$

Sei  $\alpha \in \mathcal{V}_r(P)$ ,  $\dim \alpha = d$ . Sei  $z := \frac{1}{d+1} \sum_{i \in \alpha} x_i$

Für alle  $k \in \alpha$  gilt:

$$\begin{aligned} \|x_k - z\| &= \frac{1}{d+1} \left\| \sum_{\substack{i \in \alpha \\ i \neq k}} (x_i - x_k) \right\| \\ &\leq \frac{1}{d+1} \sum_{i \in \alpha, i \neq k} \|x_i - x_k\| \leq \frac{d}{d+1} 2r \leq 2r \end{aligned}$$

$\rightarrow z \in \bigcap_{i \in \alpha} B_{2r}(x_i) \Rightarrow \bigcap_{i \in \alpha} B_{2r}(x_i) \neq \emptyset. \quad \square.$

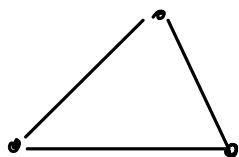
## Homologie

Wir wollen jetzt Löcher in simplizialen Komplexen definieren.

Dies wollen wir zunächst für den Fall eines geometrischen Komplexes in  $\mathbb{R}^2$  behandeln.

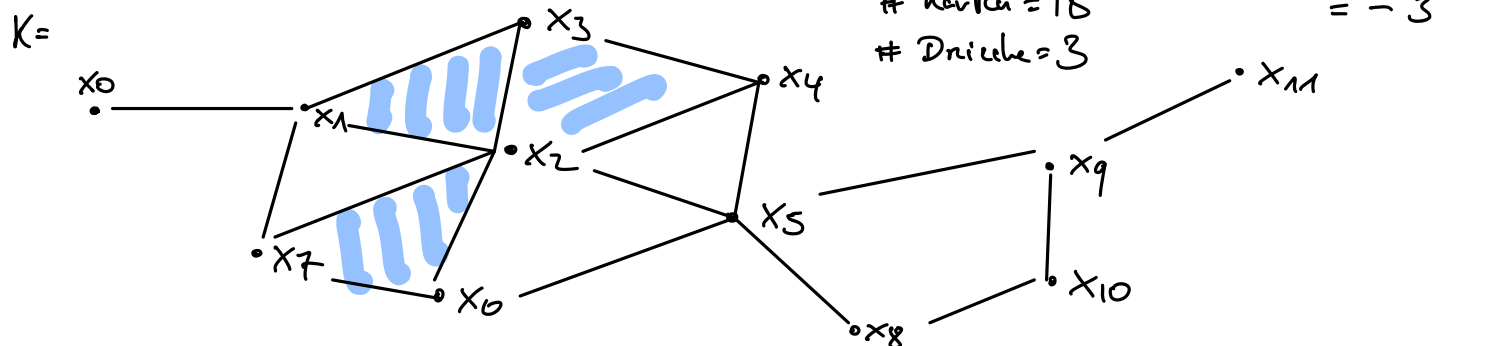
Seien dazu  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$  gegeben, und  $K$  ein Komplex auf diesen Daten. Erste Idee einer Definition: Loch = Simplex  $\Delta$ , der nicht in  $K$  ist, dessen Rand  $\Gamma(\Delta)$  aber in  $K$  ist:

Beispiel 1



Diese Definition ist aber unzureichend:

Beispiel 22.2:



$K$  hat 4 Löcher, aber eines der Löcher ist ein 4-Eck, kein Dreieck (= 2-Simplex).

Der Rand  $(\{x_5, x_9\}, \{x_9, x_{10}\}, \{x_{10}, x_8\}, \{x_8, x_5\})$  definiert das Loch!

### Definition 22.3

Sei  $K$  ein simplizialer Komplex auf  $P = \{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Insbesondere ist  $\dim K \leq 2$  (d.h., wir haben Dreiecke, Kanten und Knoten).

Sei  $\sigma \in P$ . Wir sagen, dass  $\sigma$  ein Loch von  $K$  ist, falls

- $\sigma \notin K$ .
- $K' = \{\alpha \in K \mid \alpha \not\subset \sigma\}$  soll <sup>genau</sup> einen Kreis bilden.  
und  $\dim K' = 1$ .  
↑  
spezieller simplizialer Komplex.

### Theorem 22.4

Sei  $K$  ein simplizialer Komplex in  $\mathbb{R}^2$ , und sei  $K$  zusammenhängend (d.h.  $K^{(1)}$  ist ein zusammenhängender Graph). Dann gilt:

$$1 - \# \{\text{Löcher in } K\} = \# \{\text{Knoten von } K\} - \# \{\text{Kanten in } K\} + \# \{\text{Dreiecke in } K\}$$

### Beweis

Induktion nach der Menge der Kanten.

1.A:  $\# \text{ Kanten} = 0 \rightarrow \# \text{ Dreiecke} = 0$  und  $\# \text{ Löcher} = 0$ .

Da  $K$  zusammenhängend ist, muss  $\# \text{ Knoten} = 1$

In diesem Fall

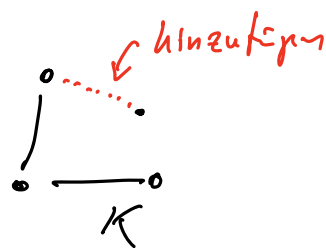
$$1 - 0 = 1 - 0 + 0 \quad \checkmark$$

1.5. Sei  $K$  ein simplizialer Komplex, für den die obige Formel gilt. Wir fügen eine Kante hinzu. Es gibt folgende Möglichkeiten:

1. Wir fügen auch einen Knoten hinzu.

- # Löcher und # Dreiecke bleibt erhalten.

- # Knoten und # Kanten erhöhen sich um 1



2. Wir fügen einen Knoten hinzu.

Dann entsteht ein neuer Kreis.

2a Falls der Kreis drei Kanten hat,

und wir das Dreieck hinzufügen:

- # Löcher und # Knoten bleiben unverändert
- # Dreiecke und # Kanten erhöhen sich um 1

2b Wir fügen kein Dreieck hinzu

- # Löcher und # Kanten erhöhen sich um 1
- # Dreiecke und # Knoten bleiben unverändert.

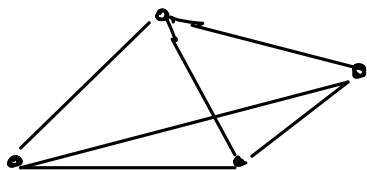
II

In Definition 22.3 haben wir ein Loch als einen "ungefüllten" Kreis definiert. Wie können wir diese Idee in höheren Dimensionen übertragen?

Beispiel 22.5

Wir betrachten ein "leeres" Tetraedron:

$K$ :



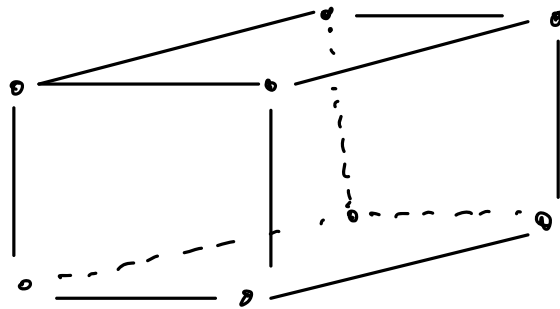
$\dim K = 2$  (bestehend aus allen Knoten, Kanten und Dreiecken).

Intuitiv würden wir sagen, dass  $K$  ein "höherdimensionales" Loch hat, nämlich das Innere, was nicht da ist.

Der Rand des inneren Tetraedrons besteht aus einer Vereinigung von Dreiecken, Knoten und Kanten, die das Loch umschließen. In diesem Sinne, wollen wir das Loch als "ungefüllte" 2-Sphäre verstehen (analog zu ungefülltem Kreis).

Wir brauchen dazu eine geeignete Definition einer 2-Sphäre in einem simplizialen Komplex.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel, den Würfel:



( gefüllte Vierecke  
=  $2 \times$  gefüllte Dreiecke:  
 $\square \leftrightarrow \triangle$  )

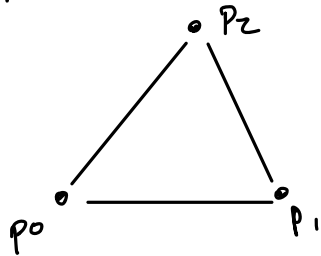
Hier können wir nicht in geschlossener Art und Weise um den Würfel gehen ohne ein Viereck doppelt zu besuchen.

Lösung des Problems: LINEARE ALGEBRA

Die Idee in Homologietheorie-Theorie ist folgende:

- Wir definieren alle Möglichkeiten um ein Loch entlang Simplizes zu gehen als Vektoren in einem Vektorraum.
- Die Addition in diesem Vektorraum interpretieren wir als Vereinigung von zwei Möglichkeiten, um ein Loch zu gehen.
- Löcher werden dann als Element im Kern einer linearen Abbildung definiert.

### Beispiel 22.6



$\{p_0, p_1\} + \{p_1, p_2\} + \{p_0, p_2\} \leftrightarrow$  Pfad um das Loch  
 (auf Ränder abbilden)

$$p_0 + p_1 + p_1 + p_2 + p_0 + p_2 = 0 \quad \text{über } \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

### Definition 22.7

Sei  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  eine endliche Menge.

Der freie Vektorraum bzgl.  $S$  über  $\mathbb{F}_2$  ist:

$$F(S) := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i s_i \mid a_i \in \mathbb{F}_2 \right\} \cong \mathbb{F}_2^m$$

s.d.  $\{s_1, \dots, s_m\}$  linear unabh. sind.

mit Operationen:

- $\sum a_i s_i + \sum b_i s_i := \sum (a_i + b_i) s_i$
- $\lambda \sum a_i s_i := \sum (\lambda a_i) s_i$ .

### Definition 22.8

Sei  $n \geq 0$  und  $K$  ein simplizialer Komplex. Der Vektorraum der  $n$ -Ketten in  $K$  ist

$$\begin{aligned} C_n(K) &:= F(K^{(n)} \setminus K^{(n-1)}) \\ &= F(\{\text{simplices in } K \text{ von dim } n\}). \end{aligned}$$