

# Homework 1

## Problem 3

首先，求出  $g(x)$  的分布函数。

$$G(x) = \int_0^x g(x)dx = \begin{cases} \frac{5}{7}x & 0 \leq x < 0.1 \\ \frac{10}{7}x - \frac{1}{14} & 0.1 \leq x < 0.7 \\ \frac{5}{21}x + \frac{16}{21} & 0.7 \leq x < 1 \end{cases}$$

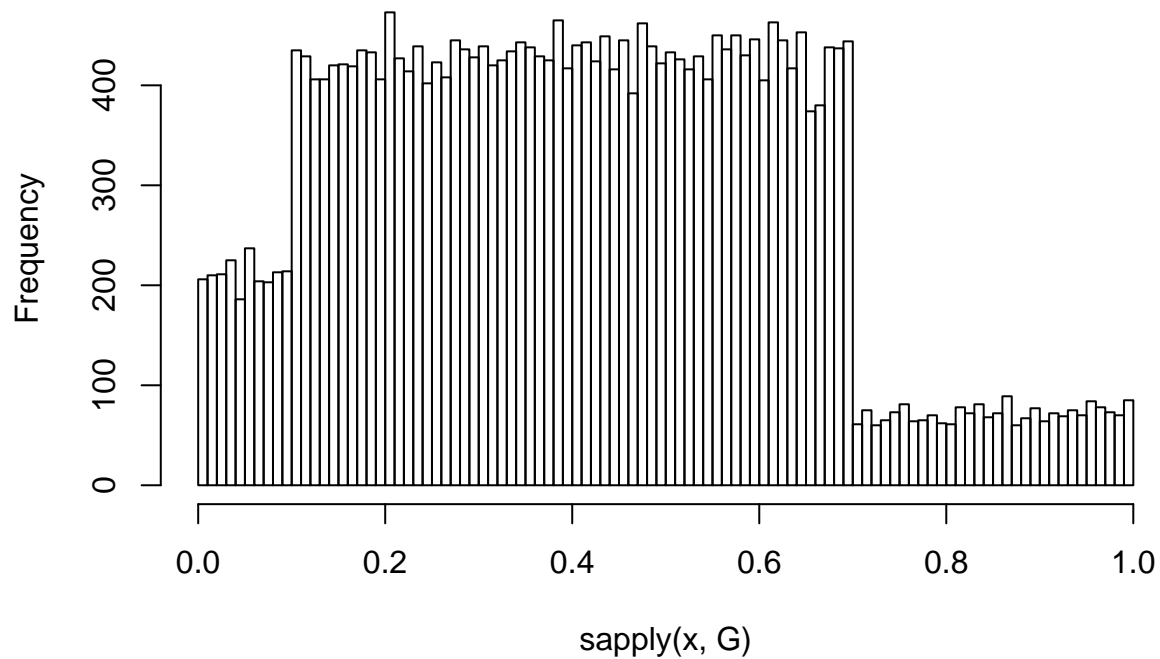
然后，求出它的反函数。

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{7}{5}x & 0 \leq x < \frac{1}{14} \\ \frac{7}{10}x + \frac{1}{20} & \frac{1}{14} \leq x < \frac{13}{14} \\ \frac{21}{5}x - \frac{16}{5} & \frac{13}{14} \leq x < 1 \end{cases}$$

由此，我们可以先生成  $X \sim U(0, 1)$ ，而后代入反函数，得到服从  $g(x)$  分布的随机数。

```
x = runif(30000)
G = function(x) {
  result = numeric()
  if (0 ≤ x && x ≤ 1/14) result = (7/5*x)
  else if (1/14 ≤ x && x ≤ 13/14) result = (7/10*x+1/20)
  else if (13/14 ≤ x && x ≤ 1) result = (21/5*x-16/5)
  return (result)
}
hist(sapply(x, G), breaks=100)
```

## Histogram of $\text{sapply}(x, G)$



### Problem 5

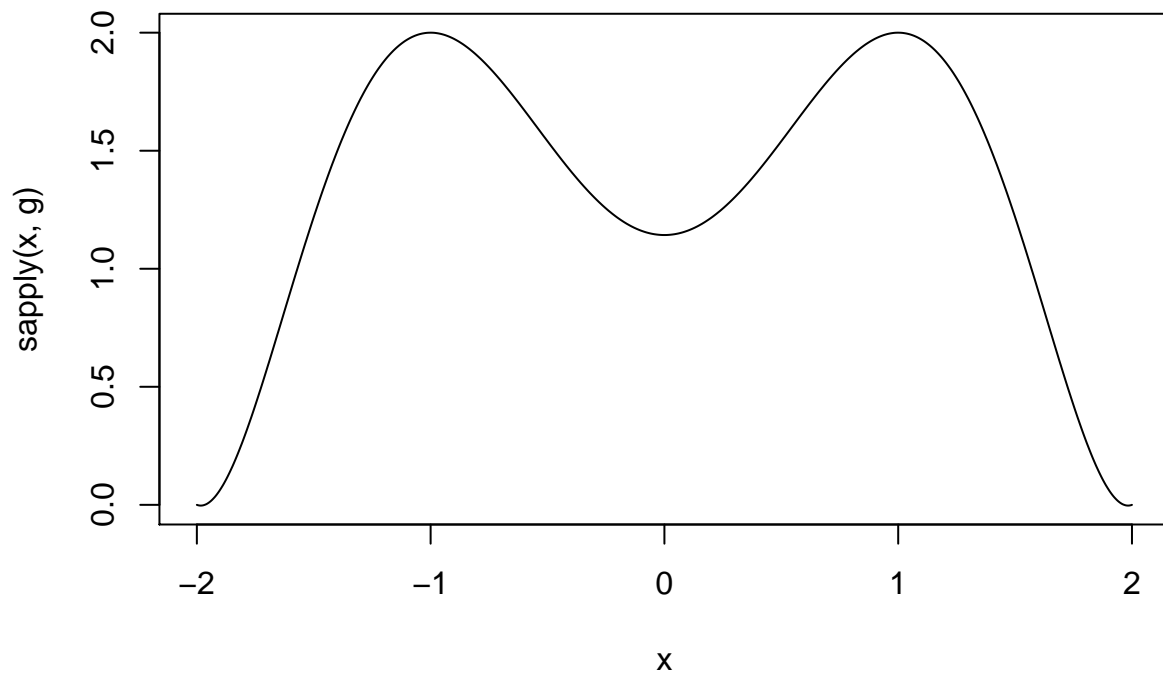
```
g = function(x) { return ((8/7) + (118/63)*x^2 - (74/63)*x^4 + (10/63)*x^6) }  
c_inv = integrate(g, -2, 2)  
c_inv
```

```
## 5.330915 with absolute error < 5.9e-14
```

```
c = 1 / c_inv$value
```

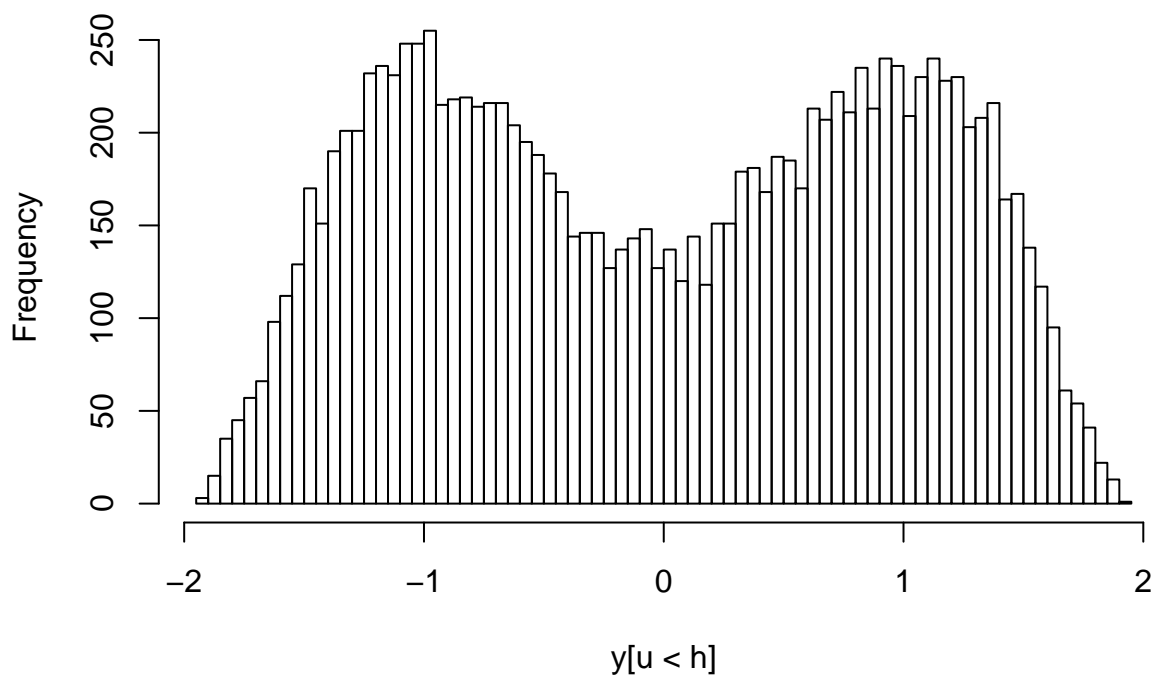
由此可知,  $f(x) = cg(x)$ 。采用接受-拒绝法抽样。选择  $U(-2, 2)$  作为建议分布。 $M = 4$ 。

```
x = seq(-2, 2, length = 1000)  
plot(x, sapply(x, g), type="l")
```



```
f = function(x) { return (c * g(x)) }
N = 50000
y = runif(N) * 4 - 2 # U(-2, 2)
u = runif(N)
M = 3
h = sapply(y, f) / 4 / (1 / 4)
hist(y[u < h], breaks=100)
```

**Histogram of  $y[u < h]$**



### Problem 7

假设

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

所以,

$$Y_1 = aX_1 + bX_2 + \mu_1 Y_2 = cX_1 + dX_2 + \mu_2$$

由  $X_1, X_2$  的分布可以推得它们的边缘分布。容易证明  $X_1, X_2$  相互独立。

所以,  $Y_1 \sim N(\mu_1, a^2 + b^2)$ ,  $Y_2 \sim N(\mu_1, c^2 + d^2)$

因此,  $Y \sim N(\mu_1, a^2 + b^2, \mu_2, c^2 + d^2, \frac{ac+bd}{\mu_1\mu_2})$ 。