

Fonctions Récursives Simples.

Université Montpellier-II - UFR des Sciences - GLIN302 - Programmation Applicative et Récursive
C.Dony

11 Fonctions récursives simples

Une définition inductive d'une partie X d'un ensemble consiste à fournir : la donnée explicite de certains éléments de X (base) ; le moyen de construire de nouveaux éléments de X à partir d'éléments déjà construits.

exemple : ensemble des valeurs de la fonction "factorielle" sur les entiers.

Les valeurs de cet ensemble peuvent être calculées par un ordinateur par exemple grace à la fonction *scheme* suivante :

```
(define (fact n)
  (if (= n 0)
      1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Une version En C

```
int fact(int n)
{
  if (n == 0)
    return 1;
  else
    return n * fact(n-1);
}
```

Réflexion : considérer le sens du calcul entre les versions itératives et récursives au vu de l'associativité de la multiplication.

11.1 Itération et récursion

Rappel **Itérer** : répéter n fois un processus en faisant changer la valeur des variables jusqu'à obtention du résultat.

Calcul itératif de factorielle d'un nombre : $n! = \prod_{i=1}^n i$

Un calcul itératif se programme par une boucle (*for* ou *tant-que* ou *repeat-until*).

Exemple de fonction itérative pour le calcul de factorielle (en C).

```
int fact(n){
  // n entier
  int i = 0;
  int result = 1;
  while (i < n){
    // result = fact(i) -- invariant de boucle
```

```

    i = i + 1;
    result = result * i;
    // result = fact(i) -- invariant de boucle
}
// i = n
return(result);
}

```

Inconvénient : nécessité de gérer explicitement l'évolution des variables, l'ordre des affectations et le contrôle des invariants de boucle.

Autre version condensée en C :

```

int factorielle_iterative(int n)
{
    int res = 1;
    for (; n > 1; n--)
        res *= n;
    return res;
}

```

¹.

11.2 Autres Exemples de fonction récursives simples

Multiplication : $an = a + a(n - 1)$

```

(define (mult a n)
  (if (= n 0)
      0
      (+ a (mult a (- n 1)))))

```

Puissance : $a^n = a.a^{n-1}$

```

(define (exp a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (exp a (- n 1)))))

```

Inverse d'une chaîne : $inverse(n) = stringAppend(dernier(n), inverse(sauf Dernier(n)))$

```

(define (inverse s)
  (let ((l (string-length s)))
    (if (= l 0)
        s
        (string-append (inverse (substring s 1 l)) (substring s 0 1)))))

```

¹Apparté : de l'intérêt du type abstrait GrandNombre

11.3 Exemple : Calcul des termes de suites récurrentes

Toute valeur d'une suite récurrente de la forme :

$u_0 = \textit{initial}$ et pour $n > 1$, $u_n = \Phi(u_{n-1}, n)$

peut être calculée par une fonction (de n'importe quel langage de programmation autorisant la définition de fonctions récursives) similaire à la fonction *Scheme* suivante :

```
(define (u n)
  (if (= n 0)
      initial
      (PHI (u (- n 1)) n)))
```

Par exemple calcul de factorielle de 5 :

```
(define initial 1)
(define PHI *)
(u 5) --> 120
```

Tout terme d'une suite arithmétique de raison r de la forme :

$u_0 = \textit{initial}$ et pour $n > 1$, $u_n = u_{n-1} + r$ peut être calculée par la fonction

```
(define (ua n r)
  (if (= n 0)
      initial
      (+ (ua (- n 1) r) r)))
```

Exemple : Multiplication de n par a ,

```
(define initial 0)
(ua 3 4)
```

A noter que le code suivant ne fonctionne pas (voir cours No 3, liaison lexicale) :

```
(let ((initial 0)) (ua 3 4))
```

Pour éviter de passer par une variable globale et de rajouter un paramètre inutile, on peut utiliser la structure de contrôle **letrec** :

Apparté : Letrec

```
(letrec <bindings> <body>)
```

Syntax: <Bindings> should have the form ((<variable1> <init1>) ...),

and <body> should be a sequence of one or more expressions. It is an error for a <variable> to appear

Semantics: The <variable>s are bound to fresh locations holding undefined values, the <init>s are evaluated in the resulting environment (in some unspecified order), each <variable> is assigned to the result of the corresponding <init>, the <body> is evaluated in the resulting environment, and the value(s) of the last expression in <body> is(are) returned. Each binding of a <variable> has the entire letrec expression as its region, making it possible to define mutually recursive procedures.

```
(define (ua n r initial)
  (letrec ((f (lambda (n)
                (if (= n 0)
                    initial
                    (+ r (f (- n 1)))))))
    (f n)))

(ua 3 4 0)
= 12
```

Tout terme d'une suite géométrique de raison q de la forme :

$u_0 = \text{initial}$ et pour $n > 1$, $u_n = q \cdot u_{n-1}$ peut être calculée par la fonction ug suivante :

```
(define (ug q n initial)
  (letrec ((f (lambda (n)
                (if (= n 0)
                    initial
                    (* q (f (- n 1)))))))
    (f n)))
```

Exemple : 4 puissance 3,

```
(ug 4 3 1)
= 64
```

11.4 Calcul de la somme des termes d'une suite

- Exemple historique : La flèche de Zénon (ou histoire d'Achille et la tortue) n'arrive jamais à sa cible située à une distance D car la distance effectivement parcourue d est d'abord la moitié de la distance $((1/2)D)$, puis la moitié de ce qui reste $(1/4)D$ puis encore la moitié de ce qui reste, etc. Elle a parcouru à l'étape 1, $(1/2^1) \cdot D$, à l'étape 2, $(1/2^1 + 1/2^2)D$, puis à l'étape n , $(\sum_{i=1}^n 1/2^i)D$. La distance parcourue par la tortue à l'étape n est toujours inférieure à D , quelque soit n .

```
(define sz
  (lambda (n)
```

```
(if (= n 1)
    (/ 1 (expt 2 n))
    (+ (sz (- n 1)) (/ 1 (expt 2 n))))))
```

Plus élégant, utiliser une fonction anonyme interne pour calculer $(/ 1 (\text{expt } 2 \ n))$

- Généralisation au calcul de la somme des termes de toute suite u .

```
(define (sommeSuite n)
  (if (= n 0)
      (u 0)
      (+ (u n) (sommeSuite (- n 1)))))
```

A essayer avec : `(define (u n) (fact n))`

- Optionnel : même fonctionnalité en n'écrivant qu'une seule fonction récursive, à condition de passer la fonction du calcul d'un terme en argument. La fonction somme devient une fonctionnelle ou fonction d'ordre supérieur.

```
(define (sommeSuite n u)
  (if (= n 1)
      (u 1)
      (+ (sommeSuite (- n 1) u) (u n))))
```

On peut par exemple écrire :

```
(somme 10 (lambda (n) (/ 1 (exp 2 n))))
```

11.5 Interprétation d'un appel à une fonction récursive

Appel récursif : un appel récursif est un appel réalisé alors que l'interprétation d'un appel précédent de la même fonction n'est pas achevé.

L'interprétation d'une fonction récursive passe par une phase d'expansion dans lesquels les appels récursifs sont "empilés" jusqu'à arriver à un appel de la fonction pour lequel une condition d'arrêt sera vérifiée, puis par une phase de contraction dans laquelle les résultats des appels précédemment empilés sont utilisés.

Première comparaison de l'interprétation des versions itératives et récursives de factorielle. La version itérative nécessite de la part du programmeur une gestion explicite de la mémoire alors que dans la version récursive, la mémoire (il faut mémoriser le fait qu'après avoir calculé $\text{fact}(4)$ il faut multiplier le résultat par 5 pour obtenir $\text{fact}(5)$) est gérée par l'interpréteur (usuellement via une pile).

11.6 Découverte d'une solution récursive à des problèmes

Disposer d'une solution récursive à un problème permet d'écrire simplement un programme résolvant (calculant quelque chose de relatif à) ce problème. La découverte de telles solutions est parfois complexe mais rentable en terme de simplicité d'expression des programmes.

Exemple : Algorithme récursif de calcul du pgcd de deux nombres non nuls :

SI b divise a ALORS $\text{pgcd}(a, b) = b$ SINON $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, \text{modulo}(a, b))$

Implantation en Scheme :

```
(define (pgcd a b)
  (if (= b 0)
      a
      (error "b doit être non nul")))
```

```
(let ((m (modulo a b)))
  (if (= m 0)
      b
      (pgcd b m))))
```

11.7 Récursivité terminale et non terminale

Appel récursif non terminal : appel récursif argument d'un calcul englobant.

Exemple : l'appel récursif dans la définition de factorielle est non terminal car sa valeur est ensuite multipliée par n .

Appel récursif terminal appel récursif dont le résultat est celui rendu par la fonction contenant cet appel.

Exemple : appel récursif à `pgcd` dans la fonction précédente.

Propriété : l'interprétation d'un appel récursif terminal peut être réalisée sans consommer de pile.

Il est possible, en terme de mémoire, d'interpréter une fonction récursive terminale comme une fonction itérative car la gestion de la mémoire se déduit trivialement des transformations sur les paramètres.

11.8 Récursivité croisée

Exemple canonique “pair-impair” sur les entiers naturels

```
(define (pair n)
  (or (= n 0) (impair (- n 1))))

(define (impair n)
  (and (not (= n 0)) (pair (- n 1))))
```

Exercice : utiliser “letrec”.

11.9 Application au dessin de figures fractales

Voir, <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Vidéo : “Fractales à la recherche de la dimension cachée”, Michel Schwarz et Bill Jersey, 2010.

Autre cours : “Les images fractales en Scheme, Une exploration des algorithmes récursifs” - Tom Mens - University de Mons-Hainaut (U.M.H.).

Programmation avec effets de bord (impressions à l'écran) :

```
(require (lib "graphics.ss" "graphics"))
(open-graphics)
(define mywin (open-viewport "Dessin" 800 800))
```

Fonction de dessin des triangles de *Sierpinski*

```
(define (s-carre n x y cote)
  (let ((c2 (/ cote 2)))
    (if (= 0 n)
```

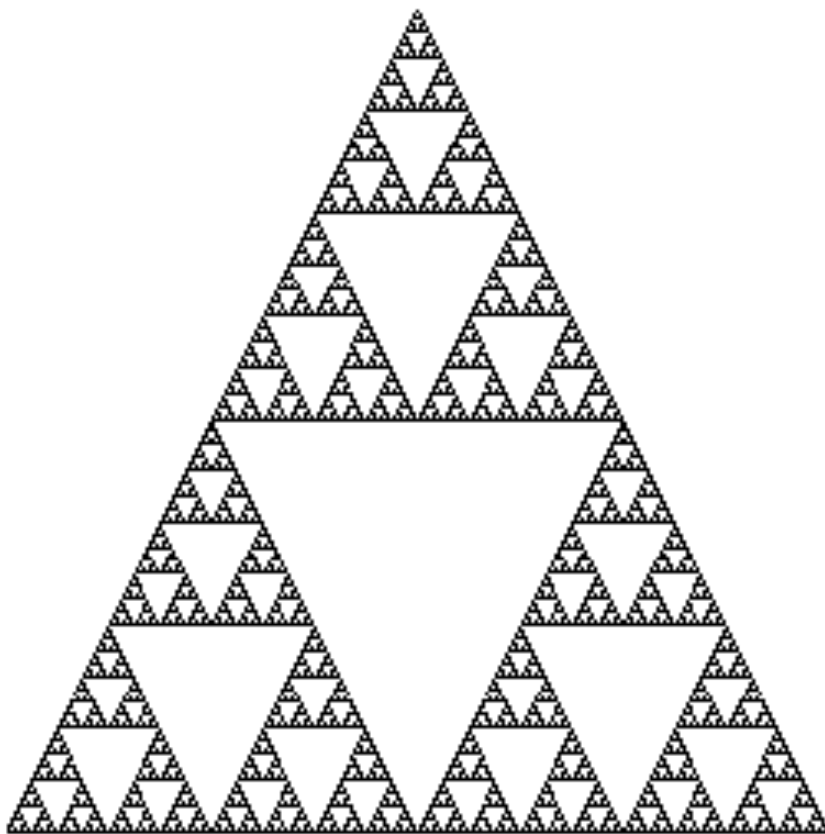


FIG. 1 – (s-carre 9 50 50 700)

```
((draw-solid-rectangle mywin) (make-posn x y) cote cote)
(begin
  (s-carre (- n 1) (+ x (/ cote 4)) y c2)
  (s-carre (- n 1) x (+ y c2) c2)
  (s-carre (- n 1) (+ x c2) (+ y c2) c2))))
```