

# Transmission

## Représentation des signaux

- binaire : 1 si signal, 0 sinon.
- NRZ : transition à la période entre 0 et 1, même valeur que binaire.
- biphasé : fronts à la demi-période, montant si 1, descendant si 0.
- biphasé différentiel : fronts à la demi-période, même sens que le dernier front connu si 0, sens inverse si 1.
- Miller (Delay Mode) : transition à la demi-période si 1, transition à la période entre deux 0, rien sinon.
- bipolaire : zéro si 0, + ou - si 1 (état opposé du dernier 1).
- HDBn : bipolaire, avec en plus sur une plage de n+1 bits à 0 : bit de bourrage (B) ramenant la tension moyenne à zéro, n-1 bits à 0, bit de copie (C) ou de viol (V) prenant l'état du dernier 1.

Schémas : voir TD1 ex4.

## Formules sur les réseaux Telecoms

- Bande Passante :  $F_{min} < BP < F_{max}$  ( $F_{min/max}$  : fréquence minimale/maximale du signal)
- Echantillonnage :  $F_e \geq 2F_{max}$  ( $F_e$  : fréquence d'échantillonnage)
- Quantification :  $n \geq \log_2 D$  ( $D$  : dynamique du signal)
- Capacité :  $C \geq n F_e$
- Rapidité de modulation :  $R \leq 2BP$  (BP en bauds)
- Débit :  $D \leq R \log_2 n$  ( $n$  : valence) avec  $n = \sqrt{1 + \frac{S}{N_0}}$  ( $N_0$  : amplitude du bruit,  $S$  : puissance du signal)
- Débit maximal :  $C = BP \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0}\right)$  ;  $\frac{S}{B} = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N_0}\right)$
- Taux d'Erreur Binaire (TEB ou BER) :  $T_e = \frac{T}{P}$
- Probabilité d'envoi sans erreur :  $P = (1 - T_e)^n$
- Taux de Transfert des Informations :  $TTI = \frac{nb \text{ bits utiles}}{durée \text{ transmission}}$  (message sans contrôle)
- Rendement du support :  $Rend = \frac{TTI}{débit \text{ nominal}}$
- Intensité du trafic :  $I(t) = \frac{1}{T} \int_0^T N(t) dt$  (en erlang, entre 0 et 1)
- Probabilité de perte :  $p = \frac{\frac{E^m}{m!}}{\sum_{k=0}^m \frac{E^k}{k!}}$
- Efficacité de liaison :  $Eff = \frac{T_1}{T} = \frac{1}{1 + \frac{2T_p}{T_1}}$

## Systèmes de contrôle :

VRC : bit de parité  
LRC : caractère de parité  
CRC : redondance cyclique

## Cryptographie :

- Symétrique : AES (128bits)  
- Asymétrique : RSA (>1000bits)  
↳ double cryptage (public, privé)

## Compression :

|- Huffman  
|- Run Length Coding (RLC ou RLE)  
|↳ couple par longueur de plage  
|↳ binaire : 1<sup>er</sup> bit + longueur plages  
|↳ deux VLC : codes à longueur variable

## Organisation du réseau

ZAA : Zone à Autonomie d'Acheminement | ZTP : Zone de Transit Primaire  
ZTS : Zone de Transit Secondaire | ZTI : Zone de Transit International

# Traitement

## Bases du traitement des signaux

### 1) Qu'est-ce qu'un signal ?

On appelle signal toute variation d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur extensive.

Il existe différents types de signaux : chimiques , magnétiques, électriques... etc.

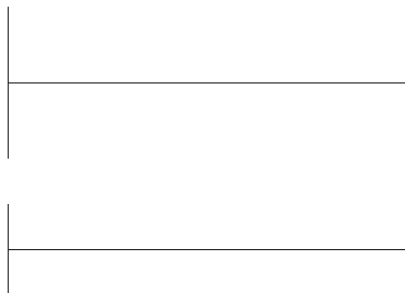
### 2) Axes des signaux :

- temporel (radio, son...)
- spatial (image, GPS...)

### 3) Transformations de Fourier et Laplace :

Transformation : fonction mathématique changeant le problème d'espace pour le simplifier. (voir annexe sur Fourier / Laplace)

#### Annexe : FOURIER / LAPLACE



$$\begin{aligned}\sum x(t)x(t) &= 8 & \sum z(t)x(t) &= 8 \\ \sum x(t)y(t) &= 0 & \sum \frac{z(t)}{x(t)} &= 8 \\ \sum x(t)x(t+1) &= 0 & \sum z(t)x(t) &= \sum x(t)x(t) + x(t)y(t) = 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) + i \sin(\alpha) &= e^{i\alpha} \\ S(f) &= a + bi \\ |a-b| &\rightarrow \text{déphasage} \\ b > a &\rightarrow \text{signal proche} \\ a > b &\rightarrow \text{signal décalé}\end{aligned}$$

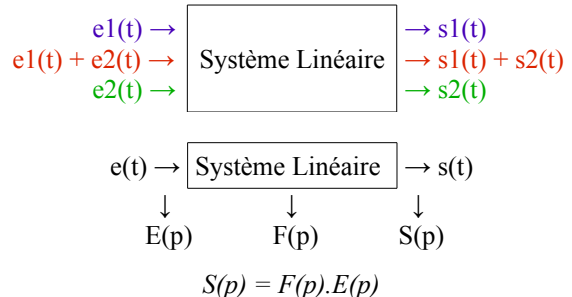
#### Propriétés :

$$\begin{aligned}\rightarrow \text{linéaire } x, y & \quad \mathcal{F}\{x(t)+y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} + \mathcal{F}\{y(t)\} & \mathcal{L}_p\{x(t)\} \\ \rightarrow p=2\pi i f \text{ (si } p=0, \text{ pas de variation)} & \quad \mathcal{F}\{\lambda \cdot x(t)\} = \lambda \cdot \mathcal{F}\{x(t)\} & \mathcal{L}_p\{x'(t)\} = p \cdot \mathcal{L}_p\{x(t)\} \\ & \quad \mathcal{F}\{x'(t)\} = 2\pi i f \mathcal{F}\{x(t)\} & \mathcal{L}_p\{x(t+T)\} = e^{pT} \cdot \mathcal{L}_p\{x(t)\}\end{aligned}$$

### 4) Signaux élémentaires :

- pulsation :  $\omega = 2\pi f$  ou  $2\pi\nu$   
 $\hookrightarrow p = i\omega$  (variable de Laplace)
- échelon : 0 dans  $]-\infty; 0[$ , 1 dans  $[0; +\infty[$   
 $\hookrightarrow H(t)$  : Heaviside  
 $\hookrightarrow \mathcal{L}_p\{H(t)\} = \frac{1}{p}$
- fenêtre : 0 dans  $]-\infty; 0[$  et  $[T; +\infty[$ , 1 dans  $[0; T]$   
 $\hookrightarrow WT(t) = H(t) - H(t-T)$   
 $\hookrightarrow \mathcal{L}_p\{WT(t)\} = \frac{1-e^{-pt}}{p}$
- rang : 0 dans  $]-\infty; 0[$ , t dans  $[0; +\infty[$   
 $\hookrightarrow R(t) = t H(t)$  ;  $R'(t) = H(t)$   
 $\hookrightarrow \mathcal{L}_p\{R(t)\} = \frac{1}{p^2}$
- parabole :  
 $\hookrightarrow P(t) = \frac{1}{2} t^2 H(t)$  ;  $P'(t) = R(t)$   
 $\hookrightarrow \mathcal{L}_p\{P(t)\} = \frac{1}{p^3}$
- impulsion de Dirac :  
 $\hookrightarrow \delta(t)$  a :
  - intégrale égale à 1
  - pente  $]-\infty; 0[$  et  $[0; +\infty[$  égale à 0
  - pente  $[0]$  égale à  $\infty$ $\hookrightarrow \mathcal{L}_p\{\delta(t)\} = \mathcal{L}_p\{H'(t)\} = 1$

### 5) Système linéaire :

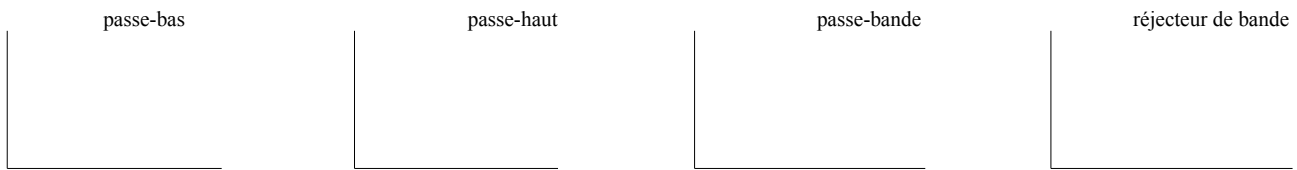


Si un système est linéaire :

- fonctionnement décrit par équations différentielles
- $E(p) = \mathcal{L}_p\{e(t)\}$  et  $S(p) = \mathcal{L}_p\{s(t)\}$
- Fonction de transfert  $F(p) = S(p).E(p)^{-1}$
- Réponse impulsionnelle  $f(t)$
- $s(t)$  est un mélange de  $e(t)$  et  $f(t)$   
 $\hookrightarrow s(t) = (f \circ e)(t)$
- $\hookrightarrow \mathcal{F}\{s(t)\} = \mathcal{F}\{(f \circ e)(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \cdot \mathcal{F}\{e(t)\}$

## 6) Représentation graphique :

Abscisses :  $\log(f)$  Ordonnées :  $20 \log(A(p))$  en dB



$f_c$  : fréquence de coupure

filtre en -3dB : filtre couramment utilisé avec  $f_c$  au niveau de l'amplitude gardée à laquelle on soustrait 3dB

## 7) Gabarit de filtre :

- Butterworth : réponse la plus plate de la BP pour un ordre donné
- Chebitcher : meilleure atténuation en dehors de la BP
- Bessel : déphasage minimal

$$B(p) = \frac{1}{D_n(p)} \quad \text{où } n \text{ est l'ordre coupé à } \omega_c = 2\pi f_c = 1 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$B_{f_c}(p) = B\left(\frac{p}{\omega_c}\right)$$

## 8) Associations de fonctions de transfert :

$$e \rightarrow \boxed{F} \rightarrow u \rightarrow \boxed{G} \rightarrow s \quad \leftrightarrow \quad e \rightarrow \boxed{F.G} \rightarrow s$$

$$e \rightarrow \begin{cases} \boxed{F} \\ \boxed{G} \end{cases} \begin{matrix} u1 \\ u2 \end{matrix} \rightarrow s \quad \leftrightarrow \quad e \rightarrow \boxed{F+G} \rightarrow s$$

## 9) Equations différentielles :

- mise sous forme causale
- transformation de Laplace
- dérivations
- résolution linéaire

## Traitement des signaux discrets

### 1) Transformée de Fourier Numérique (DFT)

- signal discret  $\leftrightarrow$  transformée continue
- signal continu  $\leftrightarrow$  transformée discrète

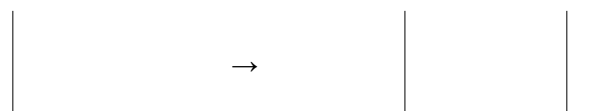
$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} \quad (\text{DFT})$$

$$s_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{i2\pi \frac{kn}{N}} \quad (\text{IDFT})$$

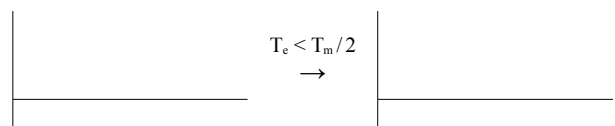
↓ TF

N : nombre d'échantillons  
 $s_n$  :  $n^{\text{ième}}$  échantillon de  $S(\omega)$

### 2) Echantillonnage des signaux



Pour reconstruire  $s(t)$  à partir de  $S_k$ , il faut  $\omega_e > 2\omega_m$   
 $(\omega_m$  : plus haute fréquence du signal)  
 → condition de Shanon



### 3) FT et DFT



$$S_n = S(ndf) = S\left(\frac{n f_e}{N}\right)$$

→ Exemple : passe-haut

$f_e = 2000\text{Hz}$   
 $N = 200$   
 $f_c = 500\text{Hz}$

$n.df = 500$   
 →  $n = 50$



#### 4) Manipulation des signaux discrets : la transformée en Z

$z = e^{Tp}$  avec  $p$  : variable de Laplace

Linéarité :  $Z\{x_k + y_k\} = Z\{x_k\} + Z\{y_k\}$  et  $Z\{\lambda x_k\} = \lambda Z\{x_k\}$

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^{-k} ; z^{-1} Z\{x_k\} = Z\{x_{k-1}\}$$

$$x_k \rightarrow \boxed{\text{boîte numérique}} \rightarrow y_k \quad y_k = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_n x^{k-n} + \dots$$

$y_k$  est l'échantillonnage d'une transformation sur  $x(t)$  donc  $x_k$  est l'échantillonnage de  $x(t)$ .

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{Système Linéaire}} \rightarrow y(t)$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$x_k \quad \quad y_k$$

Dirac :  $d_0 = 1$  et  $d_i = 0$  si  $i \neq 0 \rightarrow D(z) = d_0 z^0 + d_1 z^{-1} \dots = 1 + 0 \dots = 1$

Echelon :  $H(z) = z^0 + z^{-1} + z^{-2} \dots$

$$H(z) - zH(z) = (1-z)H(z) = z^{-n} - z$$

$$H(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^{-n} - z}{1 - z} = \frac{-z}{1 - z} = \frac{z}{z - 1}$$

Echelon retardé d'un échantillon :  $z^{-1} H(z)$

#### 5) Systèmes numériques

$$x_k \rightarrow \boxed{\text{Système Linéaire}} \rightarrow y_k$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$X(z) \quad \quad F(z) \quad \quad Y(z)$$

$$Y(z) = F(z).X(z)$$

Exemple : si  $x_k = H(k)$  et  $F(z) = \frac{1}{az^{-1} + 1}$

alors  $Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{az^{-1} + 1} = \frac{1}{1 + (a-1)z^{-1} - az^{-2}}$

$$x_k \rightarrow \boxed{F(z)} \rightarrow y_k \rightarrow \boxed{G(z)} \rightarrow w_k$$

$$W(z) = G(z).Y(z) = G(z).F(z).X(z)$$

$$x_k \rightarrow \left[ \begin{array}{c} \boxed{F(z)} \\ \boxed{G(z)} \end{array} \right] \rightarrow y_k$$

$$Y(z) = [F(z) + G(z)].X(z)$$

#### 6) Algorithmique

Exemple :  $x_k \rightarrow H(z) \rightarrow y_k$  avec  $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{2 - z^{-1} + z^{-2}}$

Déroulement de l'algorithme :

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{2 - z^{-1} + z^{-2}} X(z)$$

$$(2 - z^{-1} + z^{-2}) Y(z) = (1 - z^{-1}) X(z)$$

$$2Y(z) - z^{-1} Y(z) + z^{-2} Y(z) = X(z) - z^{-1} X(z)$$

$$2Z\{y_k\} - z^{-1} Z\{y_k\} + z^{-2} Z\{y_k\} = Z\{x_k\} - z^{-1} Z\{x_k\}$$

$$2Z\{y_k\} - Z\{y_{k-1}\} + Z\{y_{k-2}\} = Z\{x_k\} - Z\{x_{k-1}\}$$

$$Z\{2y_k - y_{k-1} + y_{k-2}\} = Z\{x_k - x_{k-1}\}$$

$$2y_k - y_{k-1} + y_{k-2} = x_k - x_{k-1}$$

$$y_k = \frac{y_{k-1} - y_{k-2} + x_k - x_{k-1}}{2}$$

$$\text{si } x = \{0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, \dots\}$$

alors  $y_0 = 0$  ;  $y_1 = \frac{1}{2}$  ;  $y_2 = \frac{3}{4}$  ;  $y_3 = -\frac{3}{8}$

#### 7) Filtrage numérique

$$B_3^{\omega_c} = \frac{1}{(\frac{p}{\omega_c} + 1)(\frac{p^2}{\omega_c^2} + \frac{p}{\omega_c} + 1)}$$

$$B_3^{\omega_c}(z) = ?$$

Si  $F(p)$  un filtre défini dans l'espace continu, alors  $G(z)$  aura les mêmes propriétés si  $G(z) = F(t(z))$ .

Pour les basses fréquences,  $t(z) = \frac{2}{T} (\frac{z-1}{z+1})$

Pour les hautes fréquences,  $t(z) = \frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T}{2})} (\frac{z-1}{z+1})$

Fréquence de coupure numérique :

$$\alpha = \frac{f_c}{f_e} \in [0; \frac{1}{2}] \text{ car } f_c < \frac{f_e}{2}$$

On a alors  $\frac{2}{T \omega_c} = \frac{2f_e}{\omega_c} = \frac{2f_e}{\pi f_c} = \frac{1}{\pi \alpha}$

Remarque : on s'arrange pour obtenir  $z^{-1}$  au numérateur de  $G(z)$  pour faciliter l'algorithmique récursive.

# Outils de traitement

## Introduction

Un des buts des outils de traitement du signal est de pouvoir nettoyer le signal du bruit qu'il contient.

### 1) Corrélation linéaire

- covariance :  $\delta_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

- variance :  $\delta_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \bar{x})^2}$

- moyenne :  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$

- coefficient de Pearson :  $r_{p\ xy} = \frac{\delta_{xy}}{\delta_x \delta_y}$   
(1 → linéarité, 0 → pas de linéarité)

### 3) Auto-corrélation

→ comparaison du signal avec ses copies retardées

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * x^c(t-\tau) dt$$

→ si le signal est réel, on a  $x^c = x$  :

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * x(t-\tau) dt$$

Déterminer la fréquence d'un signal :

→

### Propriétés :

- Homogène à une puissance :  $C_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

- Vérifie toujours :  $C_x(0) \geq C_x(\tau)$

- Pour un signal aléatoire :  $\lim_{x \rightarrow \infty} C_x(\tau) = 0$

- Fonction paire :  $C_x(-\tau) = C_x(\tau)$

### Problèmes :

- Si l'énergie du signal est infinie, l'intégrale diverge

- L'utilisation de l'auto-corrélation est en moyenne :

$$C_x(\tau) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) * x^c(t-\tau) dt$$

- Pour les signaux discrets, on utilise le fenêtrage :

$$C_x[n] = \sum_{m=0}^M x[m] * x[m-n]$$

### 2) Application aux signaux

→ ressemblance

→ lien de causalité : mesure du déphasage

→ extraire un signal périodique d'une mesure bruitée

→ mesurer le tempo d'une musique

→ repérer la présence d'un écho sur un radar...etc.

**\*\* SAD (Sum of Absolute Difference) → 0 si identique**

$$SAD_{xy} = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - y(n)|$$

### 4) Cross correlation

- Signaux continus (si réel,  $f^c = f$ ) :

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^c(t) g(t-\tau) dt \quad \text{avec } f^c \text{ le conjugué de } f$$

- Signaux discrets :

$$C_{fg}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^c[m] * g[m-n]$$

- Si facteur d'échelle, corrélation normalisée :

$$C_{fg}[n] = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] * g[m-n]}{\sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]^2 * \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m]^2}}$$

- Si offset, corrélation centrée :

$$C_{fg}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (f[m] - \bar{f}) * (g[m-n] - \bar{g})$$

- Si combinaison des deux, normalisée centrée :

$$C_{fg}[n] = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} (f[m] - \bar{f}) * (g[m-n] - \bar{g})}{\sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} (f[m] - \bar{f})^2 * \sum_{m=-\infty}^{\infty} (g[m-n] - \bar{g})^2}}$$

A cause de supports limités dans le temps, l'infini ne pouvant être atteint, nous irons seulement de  $m=0$  à  $M$ .

### 5) Corrélation et convolution

corrélation :  $f * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^c[m] * g[m-n]$

convolution :  $f * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^c[m] * g[n-m]$

	Corrélation	Convolution	Auto-corrélation
f			
g			
f*g			

## **Filtrage**

### **1) Moyenne**

- Signaux continus :

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{La moyenne se note } \bar{x} \text{ ou } \langle x(t) \rangle.$$

- Signaux discrets :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]$$

Si le signal est bruité (exemple) :

Soit  $s[n] = x[n] + b[n]$  avec  $\bar{b} = 0$ .

$$m = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} (x[p] + b[p]) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] + \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} b[p] = \bar{x} + \bar{b}$$

On a donc :  $m = \bar{x}$

Pour débruiter :

→ Transformations de Fourier / Laplace

→ Bruit associé aux hautes fréquences (HF)

→ Valeur moyenne associée au continu

Nous devons donc réaliser un filtre passe-bas.

### **4) Médiane**

m est définie telle que :

-  $|x \text{ tel que } x < m| = |x \text{ tel que } x > m|$

- m est la valeur centrale de l'ensemble d'échantillons

Meilleure robustesse, moins bonne précision.

→ Compromis nécessaire.

### **5) Moyenne VS Médiane**

- Si le système est déjà robuste : utiliser la moyenne.

- Si le système n'est pas robuste : utiliser la médiane.

### **2) Fenêtre glissante**

→ Pas de périodicité

→ Evolue dans le temps

Pour un signal discret en k avec une fenêtre de taille  $2m+1$  :

$$x_m[k] = \frac{1}{2m+1} \sum_{l=-m}^m x[k+l]$$

Réactivité : plus m est grand, moins le filtre est réactif.

Précision : plus m est grand, plus on risque de détériorer le signal mais moins m est grand, moins on filtre.

→ Compromis nécessaire.

### **3) Eliminer les valeurs aberrantes**

→ Moyenne Winsorisée : les k plus petites (resp. grandes) valeurs sont remplacées par la k+1<sup>ème</sup> plus petite (resp. grande) valeur.

→ Moyenne tronquée : les k plus petites et les k plus grandes valeurs sont omises.

Ces deux techniques sont moins significatives que la moyenne standard.

### **6) Utilisation de l'histogramme**

→ repérer le mode

→ égalisation de l'histogramme

→ transformation, pour L valeurs possibles :

$$p_x(x_k) = p(x = x_k) = \frac{n_k}{N}$$

$$T(x_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_x(x_j)$$