
Subdivision volumiques et Cartes Combinatoires Généralisées

Subdivision volumique

- Une subdivision d'un espace topologique est une partition de cet espace en cellules de dimension 0, 1, 2, 3, ... C'est à dire une partition en sommet, arêtes, faces, volumes, ...
- Il existe de très très nombreux modèles pour représenter la topologie d'espaces géométriques. On peut notamment citer des structures permettant de représenter la topologie de subdivisions :
 - De surfaces orientables sans bord : le graphe d'incidence des faces [AFF85], la structure d'arête ailée [Baum75], [Weil85] ;
 - De surfaces, orientables ou non, avec ou sans bords : par exemple la structure quad-edge [GS85] ou des extensions de cartes combinatoires [Tutt84], [Lien91a] ;
 - D'objets réguliers de dimension 3, orientables ou non, avec ou sans bords : par exemple la structure facet-edge [DL87], la structure cell_tuple [Bris89], des graphes d'incidence [Sobh89] ;
 - D'objets complexes de dimension 3 (structure radial-edge [Weil86] ou de dimension n [LL90], [CR91], ...

Cartes généralisées

- Le modèle des n-G-cartes présenté ici permet de représenter la topologie de subdivisions de d'objets réguliers de dimension n, orientables ou non, avec ou sans bord.
- Avant de voir la définition générale des n-G-cartes, nous allons introduire progressivement les notions de 1-G-cartes, 2-G-cartes et 3-G- cartes. Ces différents modèles permettent différentes représentations :
 - Les 1-G-cartes permettent de représenter la topologie de subdivisions d'objets réguliers de dimension 1 ;
 - Les 2-G-cartes permettent de représenter la topologie de subdivisions d'objets réguliers de dimension 2, orientables ou non, avec ou sans bord ;
 - Les 3-G-cartes permettent de représenter la topologie de subdivisions d'objets réguliers de dimension 3, orientables ou non, avec ou sans bord ;

Cartes généralisées de dimension 1 ou 1G-cartes

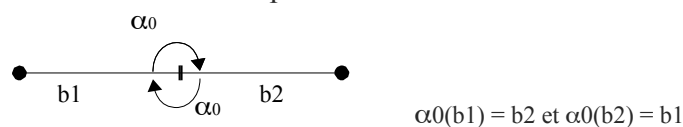
Brins

- Intuitivement un brin peut être vu et être graphiquement représenté comme une « portion » d'arête :

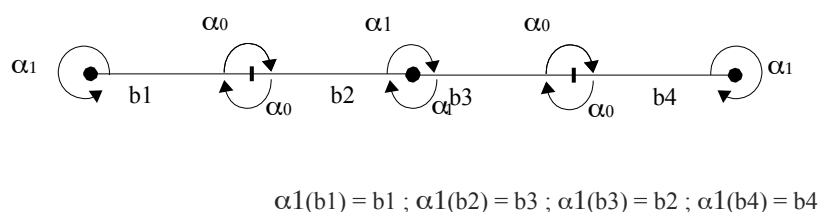


Opérateurs d'assemblage α_0 et α_1

- α_0 permet de relier deux brins entre eux pour former une arête.



- α_1 permet de relier deux arêtes entre elles.



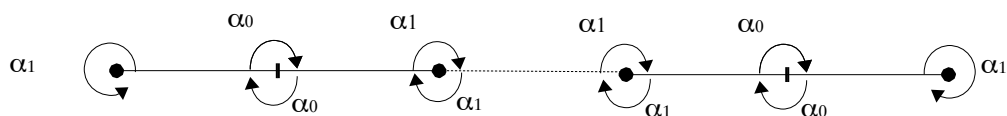
1G-cartes : définition

- Une 1G-carte est un triplet (B, α_0, α_1) où :
 - B est un ensemble fini de brins ;
 - α_0 est une involution sans point fixe (1) ;
 - α_1 est une involution avec ou sans point fixe (2) ;
- (1) $\forall b \alpha_0(\alpha_0(b)) = b$ (involution) et $\alpha_0(b) \neq b$ (sans point fixe) ;
- (2) $\forall b \alpha_1(\alpha_1(b)) = b$ (involution) ;

1G-cartes (2)

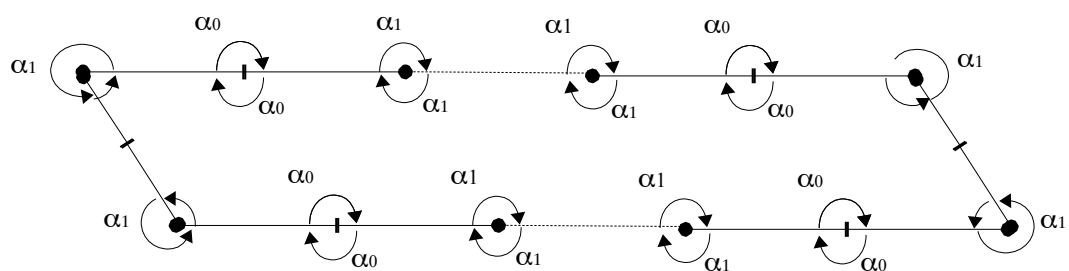
- Le modèle des 1-G-cartes permet de représenter :

- des arcs topologiques (1-cellule) :



Ici l'arc possède deux extrémités (α_1 possède 2 points fixes).

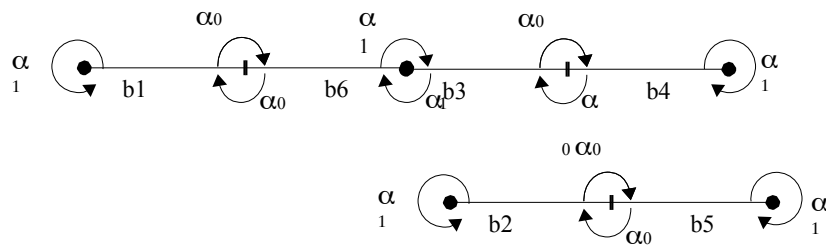
- ou des faces topologiques (2-cellule) :



Ici α_1 ne possède pas de points fixes.

Composante Connexe

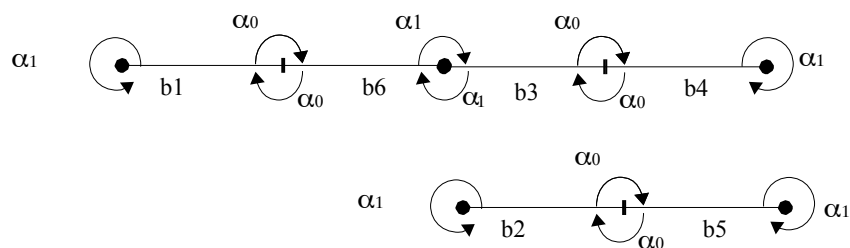
- Une *composante connexe* d'une 1-G-carte (B, α_0, α_1) est l'ensemble des brins que l'on peut obtenir à partir de l'un d'eux par application de α_0 et α_1 dans un ordre quelconque.
- Exemple : Ici la 1-G-carte possède 2 composantes connexes :
 - $\{b_1, b_6, b_3, b_4\}$ et $\{b_2, b_5\}$



Orbite

- Plus généralement, on définit *l'orbite* d'un brin b par rapport à un ensemble d'involutions $\alpha_i, \dots, \alpha_j$ comme l'ensemble des brins que l'on peut obtenir à partir de b par application de $\alpha_i, \dots, \alpha_j$ dans un ordre quelconque. On note cette orbite $\langle \alpha_i, \dots, \alpha_j \rangle(b)$

- Exemples :
 - $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(b_1) = ?$
 - $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(b_2) = ?$



Orbite

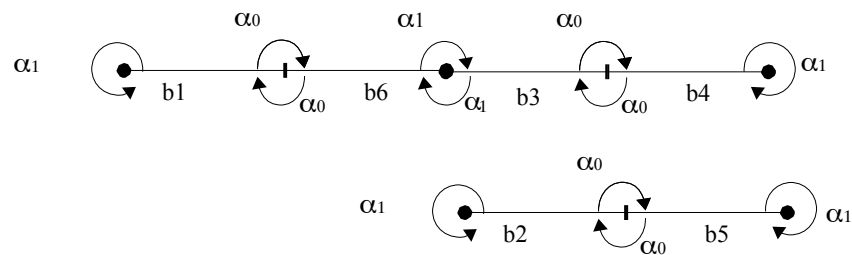
- Plus généralement, on définit *l'orbite* d'un brin b par rapport à un ensemble d'involutions $\alpha_i, \dots, \alpha_j$ comme l'ensemble des brins que l'on peut obtenir à partir de b par application de $\alpha_i, \dots, \alpha_j$ dans un ordre quelconque.

On note cette orbite $\langle \alpha_i, \dots, \alpha_j \rangle(b)$

- Exemples :

○ $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(b_1) = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(b_4) = \{b_1, b_6, b_3, b_4\}$;

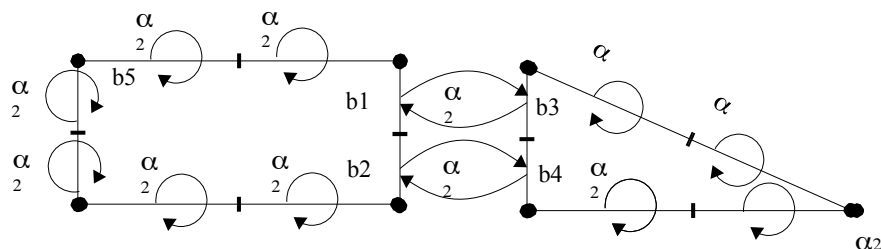
○ $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(b_2) = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(b_5) = \{b_2, b_5\}$;



Cartes généralisées de dimension 2 ou 2G-cartes

Opérateur d'assemblage α_2

- L'opérateur d'assemblage α_2 permet d'assembler 2 faces entre elles le long des arêtes de leur bord.
- On parle de **collage** ou de **couture** de faces entre elles. Exemple (ici les involutions α_0 et α_1 ne sont pas représentées) :



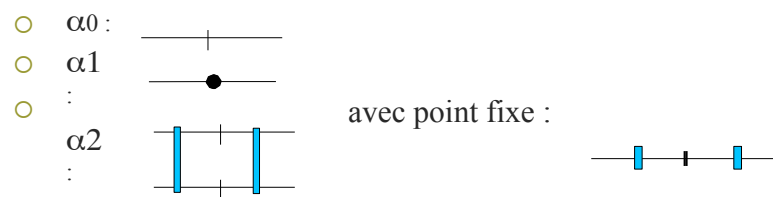
$$\alpha_2(b_1) = b_3 ; \alpha_2(b_2) = b_4 ; \alpha_2(b_3) = b_1 ; \alpha_2(b_4) = b_2 \text{ et } \alpha_2(b_5) = b_5 \dots$$

Définition des 2G-cartes

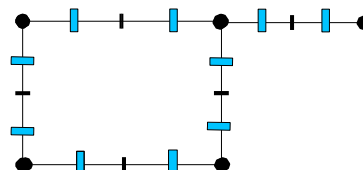
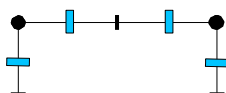
- Une 2G-carte est un quadruplet $(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ où :
 - B est un ensemble fini de brins ;
 - α_0, α_1 sont des involutions sans point fixe (1) ;
 - α_2 est une involution avec ou sans point fixe (2) ;
 - $\alpha_0\alpha_2$ est une involution (3).
- (1) $\forall b \alpha_0(\alpha_0(b)) = b$ (involution) et $\alpha_0(b) \neq b$ (sans point fixe) ;
 $\forall b \alpha_1(\alpha_1(b)) = b$ (involution) et $\alpha_1(b) \neq b$ (sans point fixe) ;
- (2) $\forall b \alpha_2(\alpha_2(b)) = b$ (involution) ;
- (3) $\forall b \alpha_0(\alpha_2(\alpha_0(\alpha_2(b)))) = b$.

Définition (2)

- Dans ce qui suit nous utiliserons une notation graphique simplifiée pour les involutions α_0 , α_1 et α_2 :

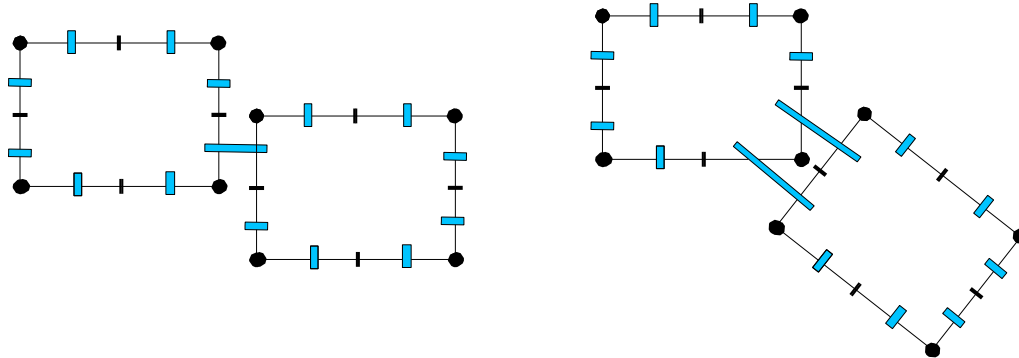


- Du fait de (1) les exemples suivants ne sont pas des 2-G-cartes valides (les objets ne sont pas réguliers) :



Définition (3)

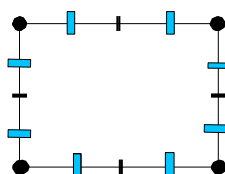
- Du fait de (3) les exemples suivants ne sont pas des 2-G-cartes valides :



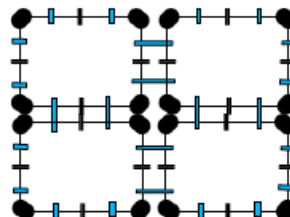
- Le bord d'une 2-G-carte est constitué par l'ensemble des brins ayant un point fixe pour l'involution α_2 . On parle de brins libres par α_2 .
- Les 2-G-cartes permettent de représenter toutes subdivisions de surfaces avec ou sans bords, orientables ou non.

2-G-cartes : Exemple (1)

- Exemple 1 : Subdivision de surface avec bords et orientable ; surfaces homéomorphes à un disque topologique.

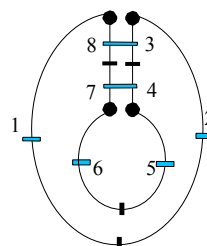
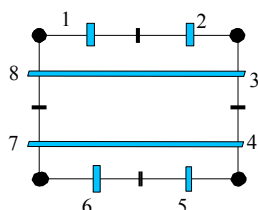


Avec une seule face.



Avec 4 faces

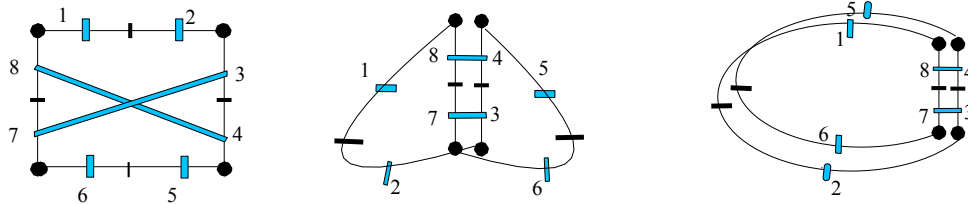
- Exemple 2 : Subdivision de surface avec bords et orientable ; Surfaces homéomorphes à un anneau.



Exercice 3.1 : Donner une 2-G-carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à un anneau et composée de 2 faces de degré 8 (le degré d'une face est égal à son nombre d'arêtes).

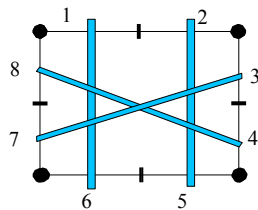
2-G-cartes : Exemple (2)

- Exemple 3 : Subdivision de surface avec bords et non orientable ; Surfaces homéomorphes à une bande de moebius.



Exercice 3.2 : Donner une 2-G-carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à une bande de moebius et composée de 4 faces de degré 4.

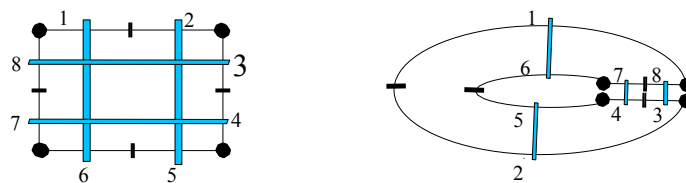
- Exemple 4 : Subdivision de surface sans bords et non orientable ; Surfaces homéomorphes à une bouteille de Klein.



Exercice 3.3 : Donner une 2-G-carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à une bouteille de Klein et composée de 4 faces de degré 4.

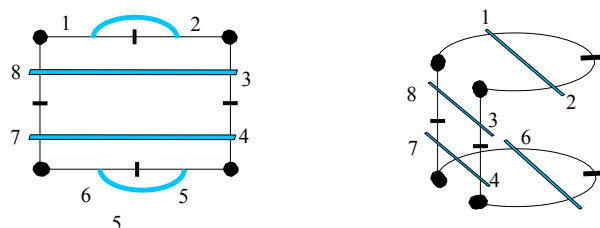
2-G-cartes : Exemple (3)

- Exemple 5 : Subdivision de surface sans bords et orientable ; Surfaces homéomorphes à un tore.



Exercice 3.4 : Donner une 2-G-carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à un tore et composée de 4 faces de degré 4.

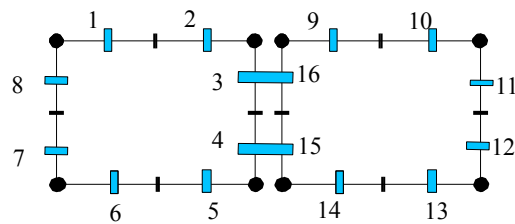
- Exemple 6 : Subdivision de surface sans bords et orientable ; Surfaces homéomorphes à une sphère



Exercice 3.5 : Donner une 2-G-carte représentant une subdivision d'une surface homéomorphe à une sphère et composée de 4 faces de degré 3. Même question avec 6 faces de degré 4

2-G-cartes : Notions de cellules

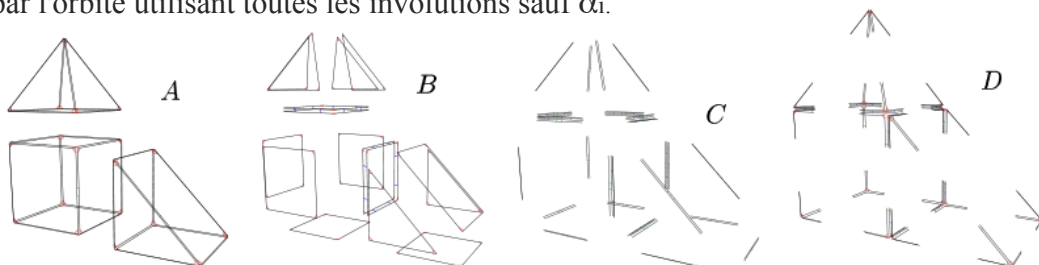
- A l'aide de la notion d'orbite, on peut définir les cellules de différentes dimensions. Plus précisément, on appelle :
 - 0-cellules, les sommets ;
 - 1-cellules, les arêtes ;
 - 2-cellules, les faces.
- L'ensemble des brins de la 0-cellule (du sommet) incidente à un brin b s'obtient par l'orbite $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle(b)$.
 - Sur l'exemple suivant $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle(3) = \{2, 3, 16, 9\}$



- La 1-G-carte (B, α_1, α_2) a des composantes connexes “décrivant” les sommets de la surface.

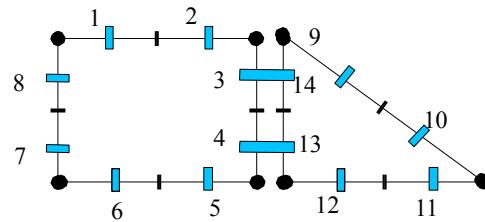
2-G-cartes : Notions de cellules (2)

- L'ensemble des brins de la 1-cellule (de l'arête) incidente à un brin b s'obtient par l'orbite $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle(b)$.
 - Sur l'exemple précédent $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle(3) = \{3, 4, 15, 16\}$.
 - La 1-G-carte (B, α_0, α_2) a des composantes connexes “décrivant” les arêtes de la surface.
- L'ensemble des brins de la 2-cellule (de la face) incidente à un brin b s'obtient par l'orbite $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(b)$.
 - Sur l'exemple précédent $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
 - La 1-G-carte (B, α_0, α_1) a des composantes connexes “décrivant” les faces de la surface.
- On obtient la définition générale suivante : Une i -cellule incidente à un brin b est définie par l'orbite utilisant toutes les involutions sauf α_i .



2-G-cartes : Bord

- Le bord d'une 2-G-carte $G(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ est définie par la 1-G-carte $(B', \alpha'_0, \alpha'_1)$ où
 - B' est un sous-ensemble de B réduit aux brins du bord (tels que $\alpha_2(b) = b$) ;
 - α'_0 est la restriction de α_0 aux brins du bord ;
 - α'_1 est la restriction de $\alpha_1\alpha_2$ aux brins du bord ;



Exercice 3.6 : donner la 1-G-carte du bord de la 2-G-Carte ci-dessus.

2-G-cartes : Exercice 3.7

- La 2-G-carte suivante est représentée par un tableau. Les brins sont numérotés de 1 à 16 et le tableau décrit les liens (par exemple, la valeur 4 dans la case référencée $[\alpha_0, 3]$ indique que $\alpha_0(3) = 4$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
α_0	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
α_1	8	3	2	5	4	7	6	1	16	11	10	13	12	15	14	9
α_2	1	2	16	15	5	6	11	12	9	10	7	8	13	14	4	3

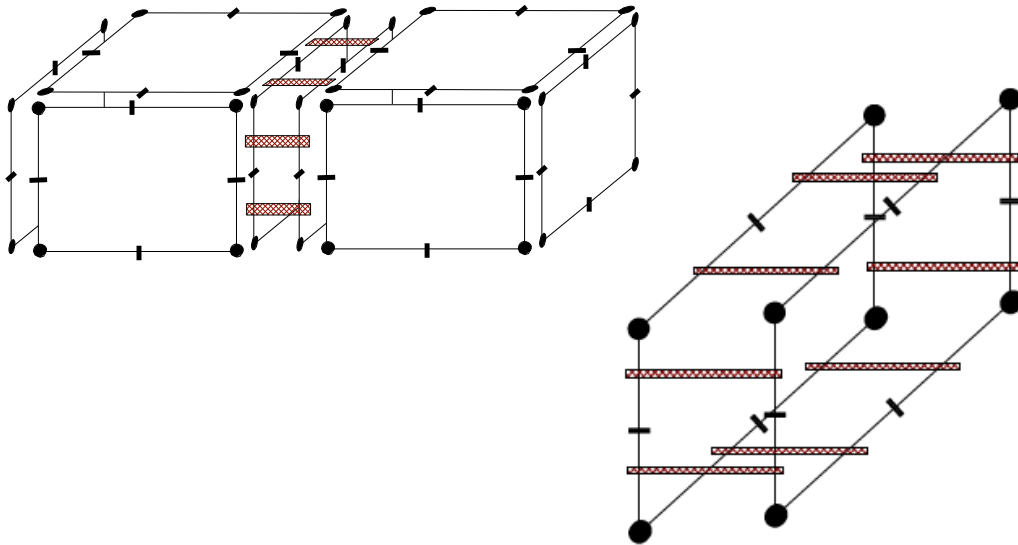
- **Questions :**
 - Donnez une représentation graphique de la 2-G-cartes ci-dessus.
 - Indiquez à quelle surface connue la surface représentée par cette carte est homéomorphe.
 - On fait les modifications suivantes :
 - $\alpha_2(3) = 3$; $\alpha_2(4) = 4$;
 - $\alpha_2(15) = 15$; $\alpha_2(16) = 16$;

A quelle surface connue la 2-G-carte résultante est-elle homéomorphe ?

Cartes généralisées de dimension 3 ou 3G-cartes

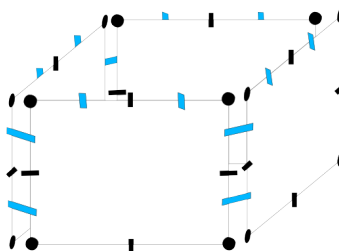
Opérateur d'assemblage α_3

- L'opérateur d'assemblage α_3 permet d'assembler des volumes entre eux le long des faces de leur bords.



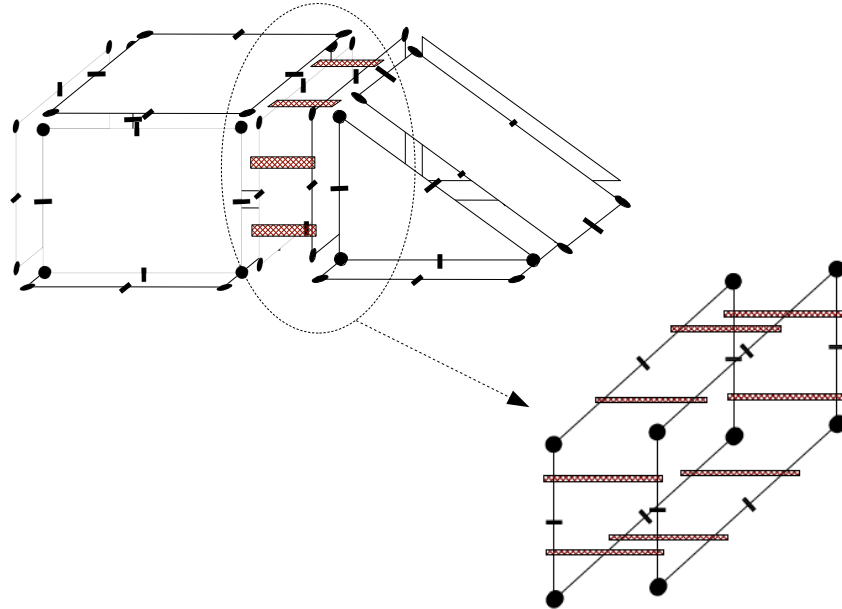
Définition des 3G-cartes

- Une 3G-carte est un n-uplet $(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
 - B est un ensemble fini de brins ;
 - $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont des involutions sans point fixe (1);
 - α_3 est une involution avec ou sans point fixe (2) ;
 - $\alpha_0\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_3$ sont des involutions (3).
- Du fait de (1) la 3-G-carte suivante n'est pas valide (α_2 a des points fixes) :



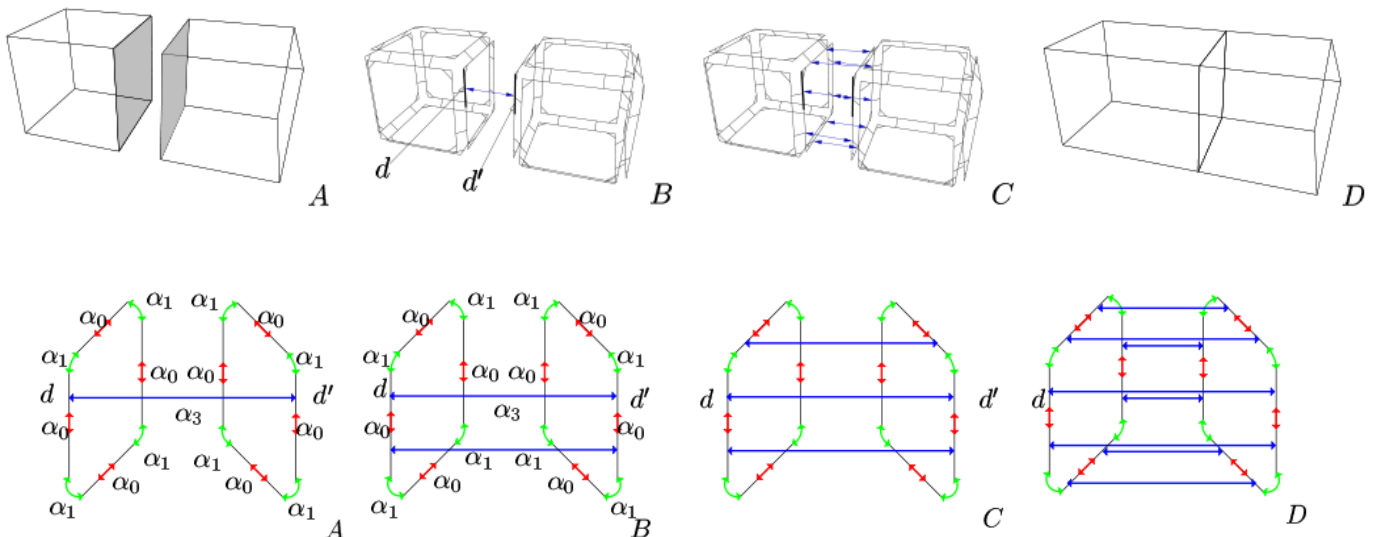
Définition des 3G-cartes (2)

- Du fait que $\alpha_0\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_3$ soient des involutions, cela oblige à coudre les volumes élémentaires pour tous les brins.
- Exemple de 3-G-carte (les liaisons α_2 ne sont pas représentées)



Opération de Couture de face

- On détermine les brins de l'orbite qu'on lie par une relation α_3 .



Propriétés des 3G-cartes

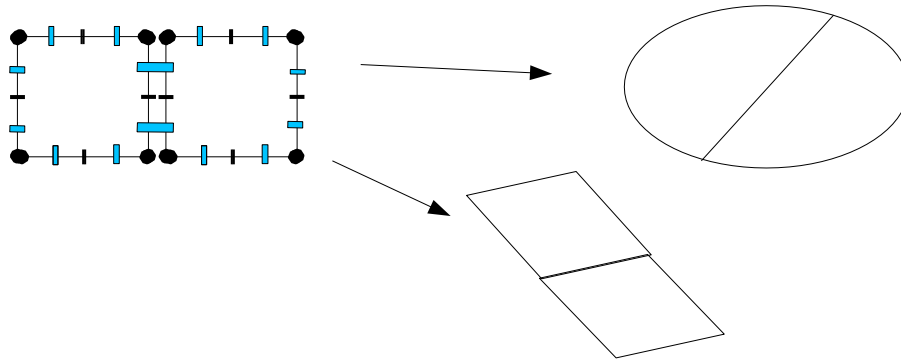
- On retrouve toutes les propriétés énoncées pour les 2-G-cartes, notamment les notions de cellules et de bords.
- Une i -cellule incidente à un brin b est définie par l'ensemble des brins incidents à l'orbite composée de toutes les involutions sauf α_i .
- Le bord d'une 3-G-carte $G(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est définie par la 2-G-carte $(B', \alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ où
 - B' est un sous-ensemble de B réduit aux brins du bord (tels que $\alpha_3(b) = b$) ;
 - α'_0 et α'_1 sont les restrictions de α_0 et α_1 aux brins du bord ;
 - α'_2 est la restriction de $\alpha_2\alpha_3$ aux brins du bord ;

Cartes généralisées de dimension n ou n -G-cartes

- Une n -G-carte est un n -uplet $(B, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
 - B est un ensemble fini de brins ;
 - Pour $i, 0 \leq i < n-1$, α_i est une involution sans point fixe ;
 - α_n est une involution avec ou sans point fixe ;
 - Pour $i, j, 0 \leq i < i+2 \leq j \leq n$, $\alpha_i\alpha_j$ est une involution.

Plongement

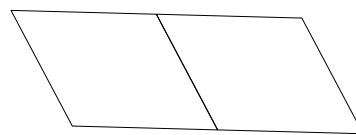
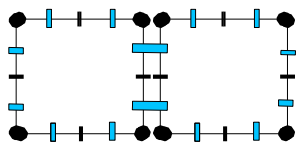
- Les éléments vus précédemment permettent de représenter la topologie des objets (leur structure). Ces informations sont indépendantes des informations sur le plongement. A une topologie donnée correspond un nombre illimité de plongements de cette structure dans l'espace à 2 ou à 3 dimensions.



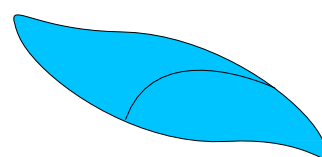
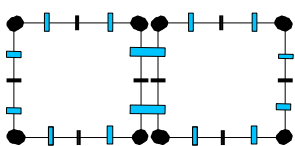
- Dans le modèle des cartes généralisées, le plongement est complètement indépendant de la topologie. Ceci constitue un grand avantage car, la gestion séparée la topologie et du plongement simplifie les algorithmes.

Plongement (2)

- Le plongement peut être simple ou complexe.
 - Le plongement le plus simple consiste uniquement à associer des points aux sommets, les arêtes seront plongées comme des segments de droites, les faces comme des polygones et les volumes comme des polyèdres



- D'autres plongements peuvent être envisagés, on peut, par exemple associer des courbes aux arêtes, les faces seront plongées comme des surfaces bordées par ces courbes, ...



Implémentation et opérations

- Les structures de données pour implémenter les cartes généralisées sont simples, voir très simples. Au niveau de la topologie, la structure de données suivante suffit pour implémenter les 3-G-cartes (formalisme C++);

```
Class Brin {  
    Brin * alpha[4];  
}
```

- Les objets créés se manipulent au travers d'opérations garantissant la cohérence des G-cartes. Par exemple, les 3-G-cartes (et les autres modèles volumiques) se manipulent au travers d'opérations simples :
 - Parcours
 - Ajout d'un volume (1) ;
 - Collage de 2 volumes par couture de 2 faces (2) ;
 - Éclatement d'un volume en 2 (3) ;
 - Chanfreinage de sommets ou d'arêtes (4) ;
 -

Implémentation et opérations (2) Parcours

Très important : outils pour retrouver les orbites
Exemple : parcours d'une face en 3D

Algorithme 1:Parcours de la face incidente à b ; Version basique

```
 $F$  une file;  
push( $b$ );  
tant que  $F$  non vide faire  
     $b' \leftarrow pop(F)$ ;  
    Si  $b'$  n'est pas marqué alors  
        traitement  $b'$ ;  
        marquer  $b'$ ;  
        push( $\alpha_0(b')$ ); push( $\alpha_1(b')$ ); push( $\alpha_3(b')$ );  
    Démarquer les brins marqué;
```

Implémentation et opérations (2) Parcours optimisés

Parcours d'une face en 3D

on peut faire mieux en étudiant les propriétés des G-cartes

($\alpha_0 \circ \alpha_3$ et $\alpha_1 \circ \alpha_3$ sont des involutions)

Algorithme 2: Parcours de la face incidente à b ; Version optimisée

```
 $b' \leftarrow b;$   
 $nb_3 \leftarrow true;$   
 $nb_0 \leftarrow true;$   
répéter  
    Traitement  $b'$  ;  
    Si  $nb_3$  et  $\alpha_3(b') \neq b'$  alors  $b' \leftarrow \alpha_3(b')$  ;  
    sinon  
        Si  $nb_0$  alors  $b' \leftarrow \alpha_0(b')$  ;  
        Sinon  $b' \leftarrow \alpha_1(b')$  ;  
         $nb_0 \leftarrow !nb_0$  ;  
     $nb_3 \leftarrow !nb_3$  ;  
jusqu'à  $b' = b$  ;
```

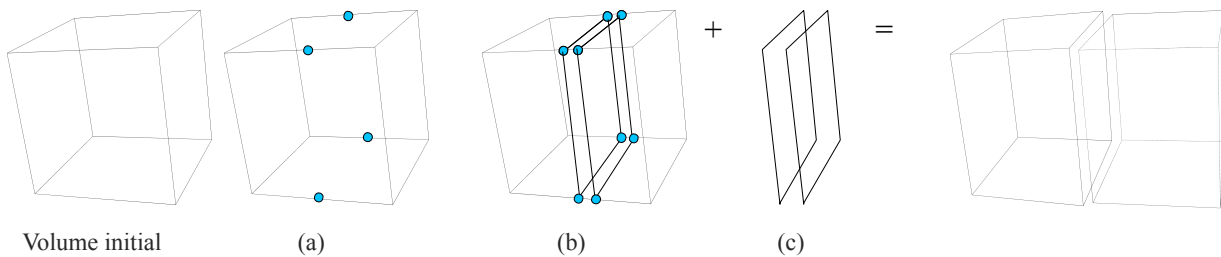
Attention : marche pas si des brins tel que $\alpha_0(b) = b$ ou $\alpha_1(b) = b$

Implémentation et opérations (3)

- (1) La création de volume est classique. De nombreuses méthodes existent :
 - Création de volumes réguliers classiques : cube, ...
 - Création de volumes par extrusion d'une face d'un degré quelconque (famille des prismes) ;
 - Cylindre de révolution ;
 - ...
- (2) Les algorithmes de couture de 2 faces de volumes doivent vérifier que les faces sont de même degré avant d'effectuer la couture brin à brin. Au cas où les faces sont de degré différent, il est simple d'effectuer des opérations d'éclatement d'arêtes pour les rendre isomorphes (de même degré).

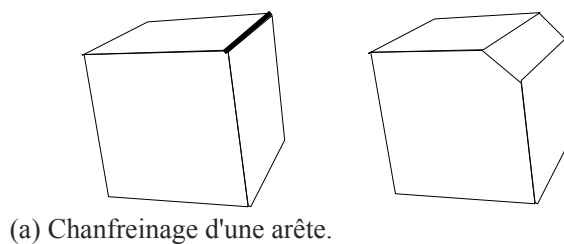
Implémentation et opérations (4)

- (3) L'opération d'éclatement de volume peut se décomposer en plusieurs opérations simples :
 - Éclatement d'arêtes (a) ;
 - Éclatement de faces (b) ;
 - Ajout de 2 faces (c).

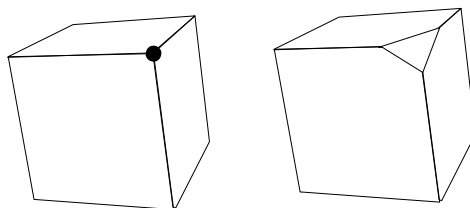


Implémentation et opérations (5)

- (4) Les opérations de chanfreinage consistent en l'ajout de faces :
 - En remplacement d'une arête (a) ;
 - En remplacement d'un sommet (b).



(a) Chanfreinage d'une arête.



(b) Chanfreinage d'un sommet.

Implémentation et opérations (6)

- Le plongement géométrique linéaire se gère également simplement. Par exemple, il suffit d'associer un point à chaque sommet et de référencer ce sommet au niveau du brin :

```
Class Brin {  
    Brin * alpha[4];  
    Point * S;  
}
```

```
Class Point {  
    x, y, z : double ;  
}
```

- On peut gérer un plongement photométrique en associant des caractéristiques photométriques aux faces (couleurs, matières, ...)

Conclusion

- La représentation par frontières possède de nombreux avantages. Les avantages principaux sont les suivants :
 - Les frontières des objets étant explicitement connues, les objets ainsi modélisés peuvent être visualisés facilement et rapidement, souvent en temps interactif ;
La représentation explicite des contours est aussi très utile en CAO (par exemple pour l'usinage des pièces mécaniques), ou en animation pour la détection de contacts (collisions) ;
 - Les cartes généralisées séparent la topologie (et les opérations topologiques) du plongement (et des opérations de plongements) apportant une clarification et une robustesse supplémentaire des algorithmes.

Conclusion (2)

- La représentation par frontières a pourtant des inconvénients :
 - La représentation explicite des contours s'avère fort gourmande en espace mémoire ;
 - L'imprécision numérique compromet la fiabilité des représentations par frontières. Le problème se pose, par exemple, pour déclarer que deux points sont suffisamment proches pour être considérés comme égaux ou du moins indiscernable. Une solution classique est de gérer un epsilon à ce niveau.
 - Enfin, le calcul des opérations booléennes est relativement difficile à cause de la complexité liée aux structures de données, à cause de l'imprécision numérique et à cause des trop nombreux cas particuliers.

Conclusion (3)

- Ces inconvénients ont fait naître l'idée, maintenant classique, d'utiliser une représentation plus concise (typiquement la représentation constructive, CSG) et de ne calculer qu'au besoin la représentation par frontières.
- La connaissance des concepts et des modèles en représentation par les bords reste primordiale pour les personnes s'intéressant aux modélisateurs et notamment pour ceux désirant écrire des plugins dans des modélisateurs.
- Le modèle des cartes généralisées est l'un des modèles BRep les plus intuitifs et les plus concis en terme de définition. Son implémentation est relativement simple.

Références (1)

Références sur les cartes généralisées :

- P. Lienhardt. *Topological models for boundary representation: a comparison with n-dimensional generalized maps*. Computer-Aided Design, Volume 23, Issue 1 Jan./Feb. 1991.
- P. Lienhardt. *N-dimensional generalized topological maps. and cellular quazi-manifolds*. Journal of Computational Geometry and Applications , 1994.
- P. Lienhardt. *Aspects in Topology-Based Geometric Modeling*. Proceedings of the 7th International Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery, 1997.
- J.F. Dufourd. *An obj3 functional specifications for the boundary representation*. ACM Symposium on Solid Modeling Foundation and CAD/CAM Applications, 1991
- Y. Bertrand, J.F. Dufourd, J. Françon, and P. Lienhardt. *Algebraic specifications and developments in geometric modeling*. Avril 1993. TAPSOFT'93, Orsay.

Références (2)

Références sur les "autres" structures combinatoires

- [AFF85] S. Ansal di, L. de Floriani, B. Falcidieno, *Geometric Modeling of Solid Objects by Using a Face Adjacency Graph Representation*, Computer Graphics, 19, 3, 131-139, 1985.
- [Baum75] B. Baumgart, *A polyhedron Representation for Computer Vision*, AFPIS Nat. Conf. Proc., 44, 589-596, 1975.
- [Bris89] E. Brisson, *Representing Geometric Structures in D Dimensions :Topology and Order* Actes de 5th A.C.M. Symposium on Computational Geometry, Saarbrücken, 218-227, juin 1989.
- [CR91] G. Crocker, W. Reinke. *An editable Non-Manifold Boundary Representation*. Computer Graphics and Applications, 11, 2, 1991
- [DL87] D. Dobkin, M. Laszlo. *Primitives for the Manipulation of Three-Dimensional Subdivisions*. In Third ACM Symosium on Computational Geometry. Juin 1987

Références (3)

Références sur les "autres" structures combinatoires (suite)

- [GS85] Guibas, L. and Stolfi, J., *Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams*, ACT Transactions On Graphics, 4(2), April, 1985.
- [LL90] Y. Luo, G. Lukacs, *A boundary representation for form features and non-manifold solid objects*. In Proceedings of Symposium on Solid Modeling and Applications'1991.
- [Sobh89] C. Sobhanpanah, *Extension of a boundary representation technique for the description of N dimensional polytopes*. Computers & Graphics 13(1): 17-23, 1989
- [Tutt84] W. Tuttle, *Graph theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison Wesley, 1984
- [Weil85] K. Weiler, *Edge-Based Data Structures for Solid Modeling in Curved-Surface Environments*, IEEE Computer Graphics and Applications, vol. 5, no. 1, pp. 21-40, Jan., 1985
- [Weil86] K. Weiler, *The radial edge structure: a topological representation for non-manifold geometric boundary modeling*, IFIP WG5.2 Working Conference on Geometric Modeling for CAD Applications, Rensselaerville, NY, 12-14, May 1986