ガウスの法則とアンペールの法則のノート

名大 太郎

2022 年 12 月 1 日

概 要

ガウスの定理とストークスの定理より，電磁気学のガウスの法則とアンペールの法則の微分形の表式を求める．

1 ガウスの法則

1.1 積分形

体積 V，表面積 S を持つ領域を考える．この領域内の電荷 Q と表面を貫く電場 $\boldsymbol{E}$ には以下の関係が成り立つ．

$$\oint_{\boldsymbol{S}} \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho_q dV = Q \tag{1}$$

但し，ϵ_0 は誘電率，ρ_q は電荷密度である．

1.2 ガウスの定理

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} dV = \oint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2}$$

が成り立つ．

1.3 微分形

式 (2) を電場 $\boldsymbol{E}$ に適用し，式 (1) と比較すると

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0} \tag{3}$$

となり，電荷保存の式 (ガウスの法則) の微分形が求まる．

2　アンペールの法則

2.1　積分型

無限に長い直線導線に電流 I を流すと，その周りには図 1 のような磁場 B ができる．その強さは導線からの距離を r として

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

となる．ここで μ_0 は透磁率である．より一般的に，断面積 S を持つ閉曲

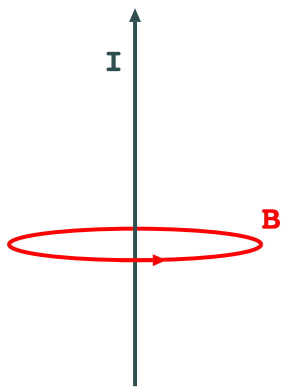

図 1: 直線電流 I の周りの磁場 B.

線 C を考えると

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = I \tag{4}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{j}$ は電流密度である．

2.2　ストークスの定理

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{5}$$

が成立する。

2.3　微分形

ストークスの定理，式 (5) を磁場 $\boldsymbol{B}$ に適用し，式 (4) と比較すると

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{6}$$

が得られる．

3　結論

ガウスの法則とアンペールの法則の微分形の表式を求めた。

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{8}$$

謝辞

本稿の執筆にあたり、文献 [1] を参考にした．また、文書の作成には LaTeX を用いた。

参考文献

[1] Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. L., 1965, The Feynman Lectures on Physics, vol.III (ファインマン 物理学 III 電磁気学), Addison-Wesley