Práctica número 3
Teoría de Sistemas

Gabriel Fernández Díaz
David Morales Sáez

2011/2012

3.1.1.- En el sistema contínuo invariante definido por la ecuación diferencial $D^3x + D^2x + 1.25Dx = 0$ Determinar:

a) Puntos de equilibrio.

$$\dddot{x} + \ddot{x} + 1.25 * \dot{x} = 0$$
$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x_1} = \dot{x}$$
$$x_3 = \dot{x_2} = \ddot{x}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.25 & -1 \end{bmatrix}$$
$$A\bar{x} = \bar{O} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 : \quad libre$$

b) Estabilidad.

$$|A - \lambda I] = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1.25 & -\lambda - 1 \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + \lambda + 1.25) = 0$$
$$\lambda = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + i \\ -\frac{1}{2} - i \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow Jordan = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es estable y amortiguado, ya que solo hay un autovalor nulo y el resto son imaginarios, cuyas componentes reales son negativas.

c) Oscilaciones.

Dado que el sistema es estable y amortiguado, es oscilante con amortiguaciones.

d) Modificar el sistema con una realimentación en la entrada de forma que el autovalor cero cambie a -1, dejando los demás invariantes.

$$Jordan' = Jordan + R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}-i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = L^{-1} * L_z * Jordan * L_z^{-1} * L$$

$$Jordan = L_z^{-1} * L * A * L^{-1} * L_z \rightarrow$$

$$Jordan + R = L_z^{-1} * L * A * L^{-1} * L_z + R$$

$$L^{-1} * L_z * (J + R) * L_z^{-1} * L = L^{-1} * L_z * (L_z^{-1} * L * A * L^{-1} * L_z + R) * L_z^{-1} * L = A'$$

$$A' = A + L^{-1} * L_z * R * L_z^{-1} * L =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.25 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -0.8 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.25 & -1 \end{bmatrix}$$

e) Aproximar el nuevo Sistema por el modo dominante.

$$\Phi_z = \begin{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)*t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-\frac{1}{2}+i)*t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

El modelo dominante del nuevo sistema será:

$$\Phi_{zap}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi'_{ap}(t) = (L`)^{-1} L'_z \Phi'_{zap}(t) L'_z L'$$

$$L_1 = [100] \rightarrow L' = \begin{bmatrix} L'_1 \\ L'_1 * A' \\ A'_1 * J'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.2 & -0.8 \\ 1 & 0.8 & 1.8 \end{bmatrix}$$

$$L'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1.8 & 0.8 \\ -1 & -0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$L'_{z1} = [111] \rightarrow L'_z = \begin{bmatrix} L'_{z1} \\ L'_{z1} * J' \\ L'_{z1} * J'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.5+i & -0.5-i & -1 \\ -0.75-i & -0.75+i & 1 \end{bmatrix}$$

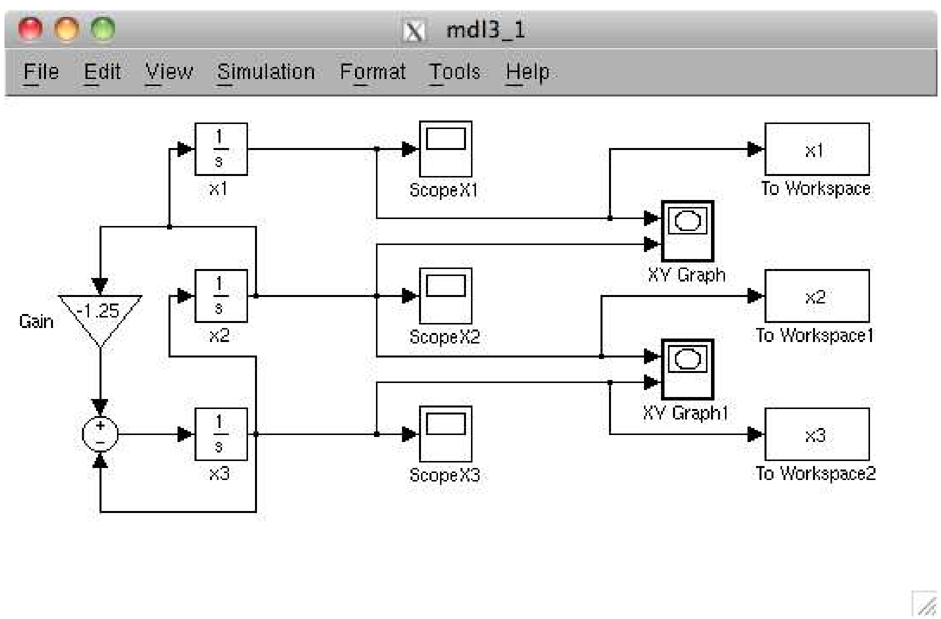
$$L'^{-1}_z = \begin{bmatrix} -0.5*i & -0.4-0.7*i & -0.4-0.2*i \\ 0.5*i & -0.4+0.7*i & -0.4+0.2*i \\ 1 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\Phi'_{zap}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0.8e^t & 0.8e^t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

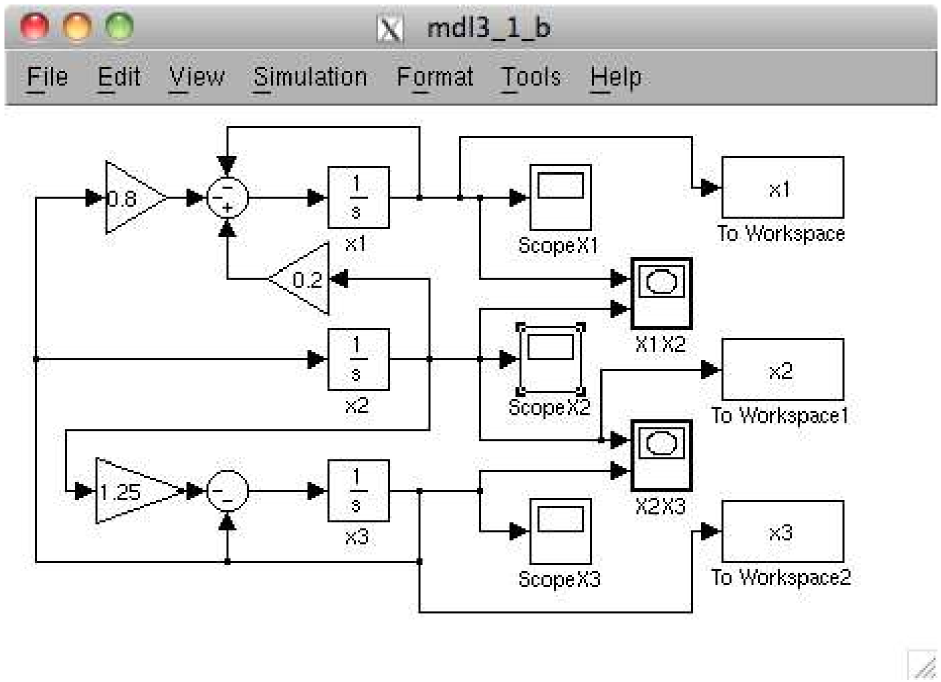
[1]

f) Simular los sistemas original y el modificado.

Los modelos simulados, tanto el original como el modificado son los siguientes:

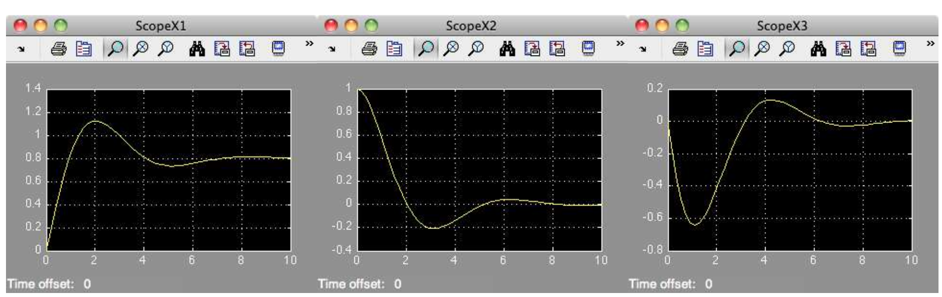


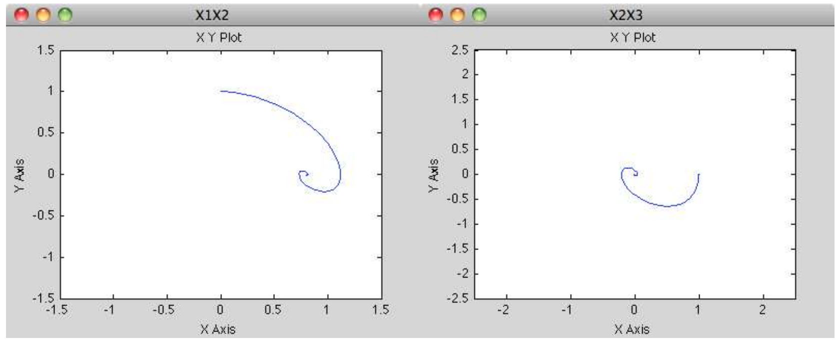
[1]Los valores que son de orden inferior a $10^{-}10$ han sido aproximados a 0



g) Para valores iniciales cero, excepto $x_2 = 1$, representar las gráficas de x_1 versus x_2 y de x_2 versus x_3. Representar las señales x_1, x_2, x_3 en scopes.

(a) Sistema original:




X1X2
X Y Plot
Y Axis
X Axis
X2X3
X Y Plot
Y Axis
X Axis

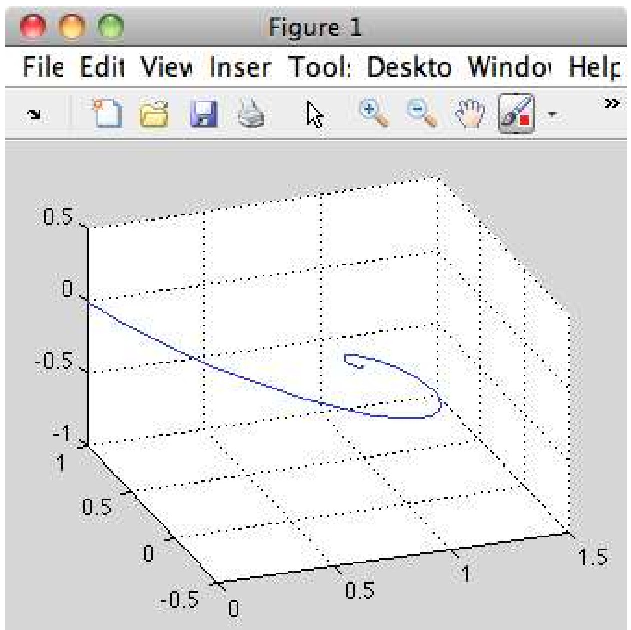
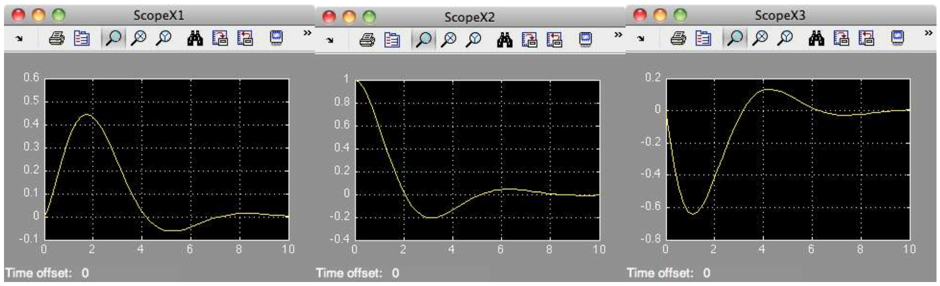
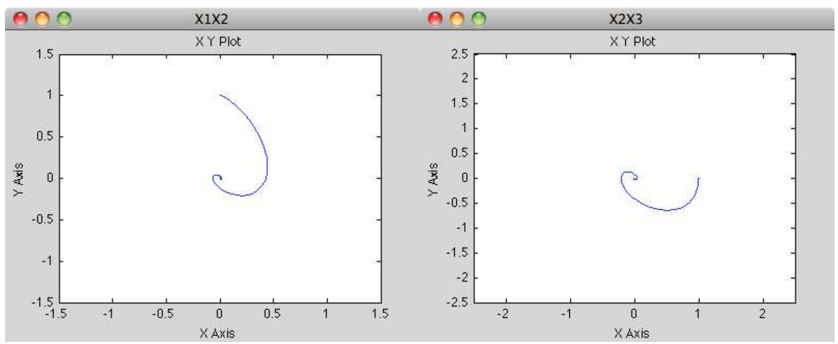
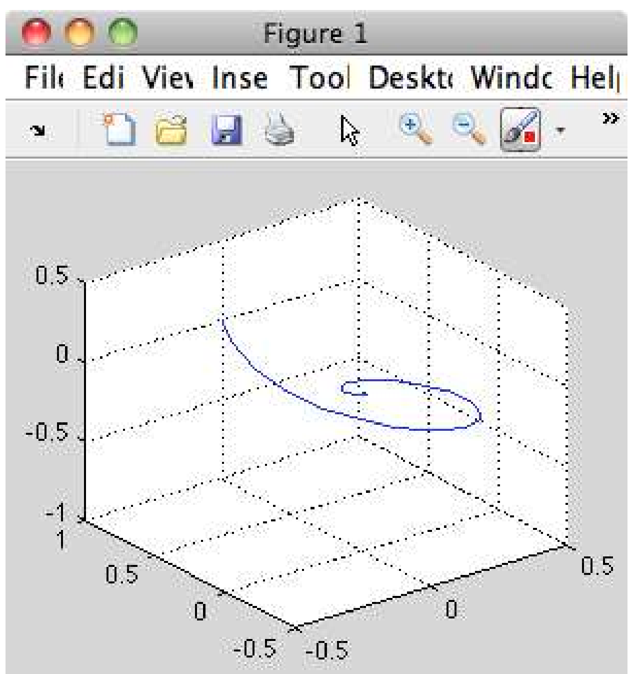


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help

(b) Sistema modificado:

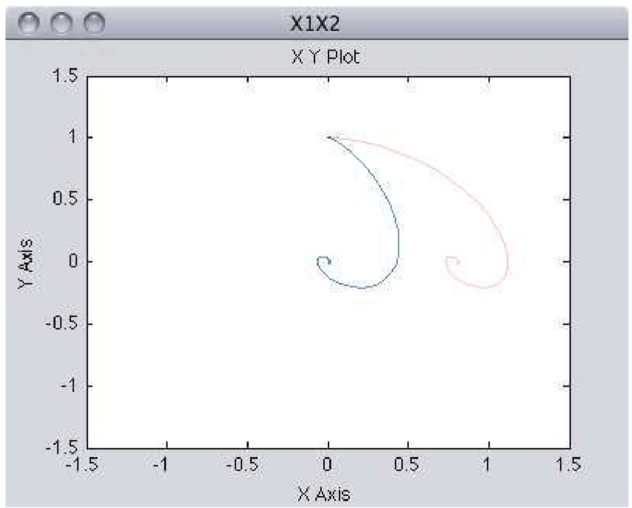






h) Simular el sistema modificado aproximado y compararlo con el sistema modificado sin aproximar.

Como podemos comprobar en la siguiente imagen, la componente x_1 varía ostensiblemente, modificando la traza del camino que realiza en la aproximación al punto de equilibrio.



Por otro lado, las componentes x_2 y x_3 no varían en absoluto, por lo que la modificación afecta exclusivamente a la primera componente.

3.1.2.- Determinar los puntos de equilibrio, la estabilidad y las oscilaciones en los casos de las prácticas 1.1, 1.2 y 2.3.

1.1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} -1+i \\ -1-i \\ -1 \end{bmatrix}$$

Los puntos de equilibrio han de cumplir:

$$A\bar{x} + B\bar{r} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} -3x_1 + x_2 + r_1 = 0 \\ -4x_1 + x_3 + r_2 = 0 \\ -2x_1 + r_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = \frac{r_3}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2}r_3 - r_1 \\ x_3 = 2r_3 - r_2 \end{array}\right. \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{r_3}{2} \\ \frac{3}{2}r_3 - r_1 \\ 2r_3 - r_2 \end{bmatrix}$$

Es un sistema asintóticamente estable con unas oscilaciones amortiguadas.

1.2

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ r \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} -1+2i \\ -1-2i \\ -1+i \\ -1-i \end{bmatrix}$$

Los puntos de equilibrio han de cumplir:

$$A\bar{x} + B\bar{r} = 0$$

$$\left.\begin{array}{c} -4x_1 + x_2 = 0 \\ -11x_1 + x_3 = 0 \\ -14x_1 + x_4 + r = 0 \\ -10x_1 + r = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = \frac{r}{10} \\ x_2 = \frac{4r}{10} \\ x_3 = \frac{11r}{10} \\ x_4 = \frac{4r}{10} \end{array}\right. \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{r}{10} \\ \frac{4r}{10} \\ \frac{11r}{10} \\ \frac{4r}{10} \end{bmatrix}$$

Este es un sistema estable con unas oscilaciones amortiguadas.

2.3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = 0; \quad \lambda = \begin{bmatrix} -0.5+1.32i \\ -0.5-1.32i \\ -0.5+1.32i \\ -0.5-1.32i \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los puntos de equilibrio han de cumplir:

$$A\bar{x} + B\bar{r} = 0$$

$$\left.\begin{array}{cc} V_{x_1} = 0 & -x_1 + x_2 - V_{x_1} = 0 \\ V_{x_2} = 0 & x_1 - x_2 - V_{x_2} = 0 \\ V_{y_1} = 0 & -y_1 + y_2 - V_{y_1} = 0 \\ V_{y_2} = 0 & y_1 + y_2 - V_{y_2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ y_1 = y_2 \end{array}\right. \qquad \dot{x}0 \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde a y b pueden ser cualquier valor. Este sistema es inestable ya que tiene varios autovalores nulos y tiene oscilaciones amortiguadas, dado que las componentes reales de los autovalores imaginarios son negativos.

3.2.- Un sistema competitivo de Lanchester en el que las capacidades combativas van disminuyendo conforme avanza el tiempo viene dado por el sistema variable en el tiempo de ecuaciones:

$$Dx1 = -\tfrac{a}{t}x_2$$

$$Dx2 = -\tfrac{b}{t}x_1$$

Siempre para t $>$ 1

1.1 Resolver el sistema analticamente.

$$\dot{x_1} = -\frac{a}{t}x_2; \quad \dot{x_2} = -\frac{b}{t}x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{t} \\ -\frac{b}{t} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{a}{t} \\ -\frac{b}{t} & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - \frac{ab}{t^2} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\pm\sqrt{ab}}{t} \rightarrow \omega^2 = \frac{ab}{t^2}$$

$$Jordan = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{bmatrix}$$

$$\Phi_z(t) = \begin{bmatrix} e^{\omega * t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega * t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{ab}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{ab}} \end{bmatrix}$$

$$L_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega & -\omega \end{bmatrix} \rightarrow |L_z| = -\frac{1}{2\omega} \rightarrow L_z^{-1} = -\frac{1}{2\omega}\begin{bmatrix} \omega & 1 \\ \omega & -1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{t} \end{bmatrix} \rightarrow |L| = -\frac{a}{t} \rightarrow L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{a} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}L_z\Phi_z L_z^{-1}L =$$

$$-\frac{1}{2\omega} * L^{-1} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega & -\omega \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e^{\sqrt{ab}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{ab}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega & 1 \\ \omega & -1 \end{bmatrix} * L =$$

$$-\frac{1}{2\omega} * L^{-1} * \begin{bmatrix} \omega(e^{\sqrt{ab}*t} + e^{-\sqrt{ab}*t}) & e^{\sqrt{ab}*t} - e^{-\sqrt{ab}*t} \\ \omega^2(e^{\sqrt{ab}*t} - e^{-\sqrt{ab}*t}) & \omega(e^{\sqrt{ab}*t} + e^{-\sqrt{ab}*t}) \end{bmatrix} * L =$$

$$-\frac{1}{2\omega} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{a} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega(e^{\sqrt{ab}*t} + e^{-\sqrt{ab}*t}) & e^{\sqrt{ab}*t} - e^{-\sqrt{ab}*t} \\ \omega^2(e^{\sqrt{ab}*t} - e^{-\sqrt{ab}*t}) & \omega(e^{\sqrt{ab}*t} + e^{-\sqrt{ab}*t}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{t} \end{bmatrix} =$$

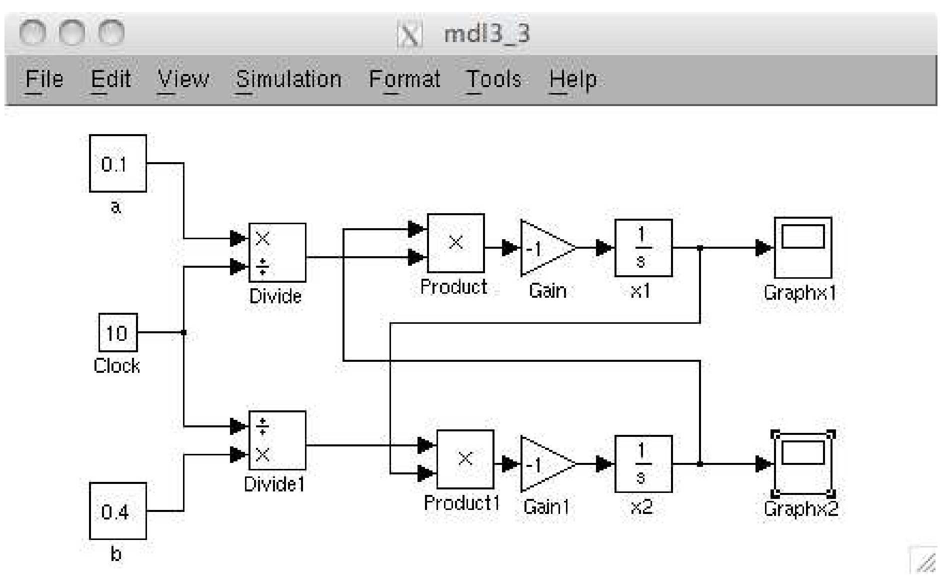
$$-\frac{1}{2\omega} * \begin{bmatrix} \omega(e^{\sqrt{ab}*t} + e^{-\sqrt{ab}*t}) & -\frac{a}{t}(e^{\sqrt{ab}*t} - e^{-\sqrt{ab}*t}) \\ -\frac{b}{t}(e^{\sqrt{ab}*t} - e^{-\sqrt{ab}*t}) & \omega(e^{\sqrt{ab}*t} + e^{-\sqrt{ab}*t}) \end{bmatrix}$$

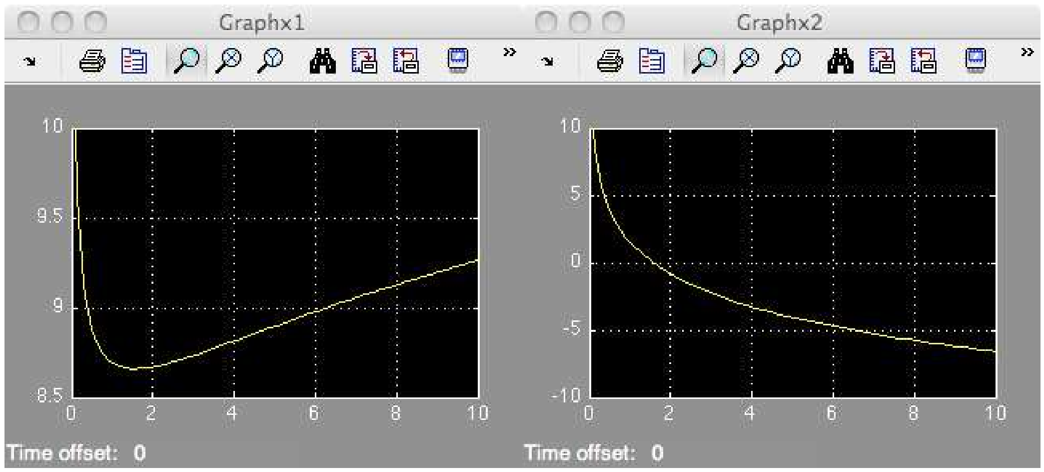
1.2 Simular el sistema para a= 0.1 y b= 0.4 y varios valores iniciales de los efectivos.

Dado los valores de a y b, para ver el estado en el que ambos jugadores empatasen, la proporción de poblaciones iniciales debera ser igual a la proporción de fuerzas:

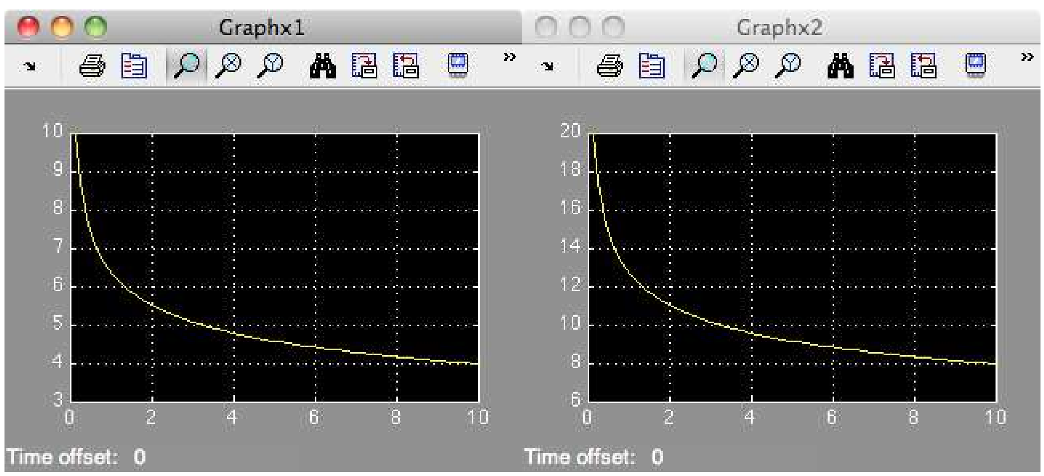
$$x_1(0) * \sqrt{\frac{b}{t}} = x_2(0) * \sqrt{\frac{a}{t}}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{0.1}{0.4}} = \frac{1}{2}$$

Si, se buscase el empate, la población inical de x_2 debiera ser el doble que la de x_1 (20 y 10, respectivamente). En cambio, si quisiesemos que x_1 ganase, la población de x_2 debiera ser menor (10 y 10). Finalmente, si deseamos que gane x_2, su población debería ser superior al doble (40 sobre 10, por ejemplo).

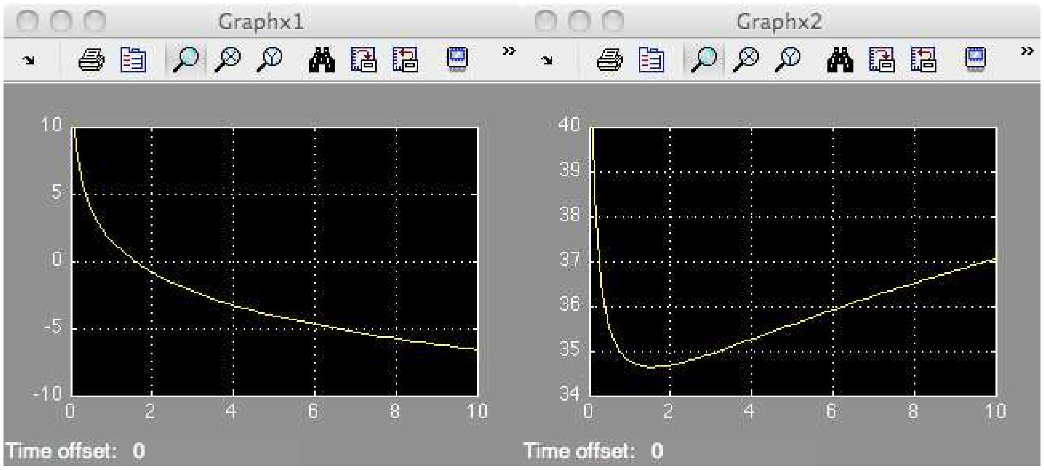




x_1 gana a x_2



x_1 y x_2 empatan



x_2 gana a x_1

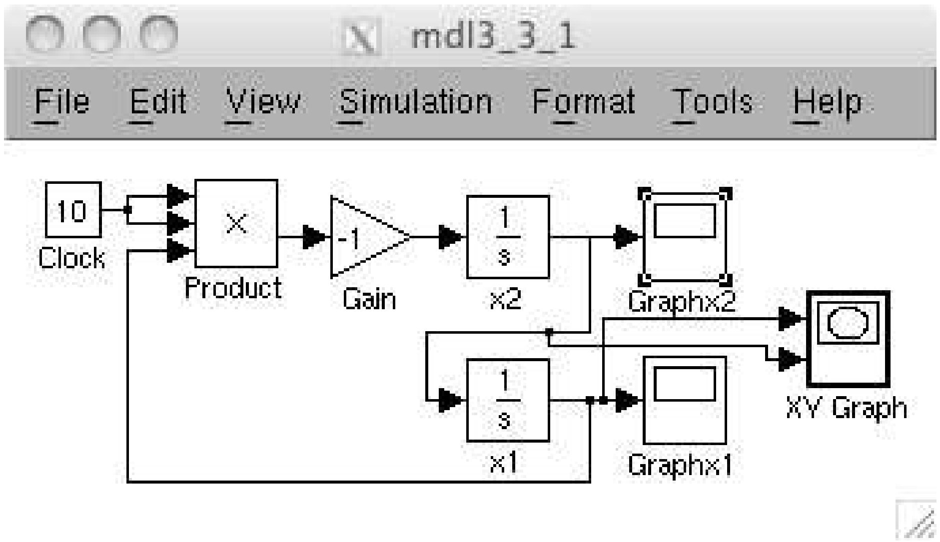
3.3.- Las ecuaciones que definen un oscilador armónico de frecuencia variable son:

$$Dx_1 = x_2$$

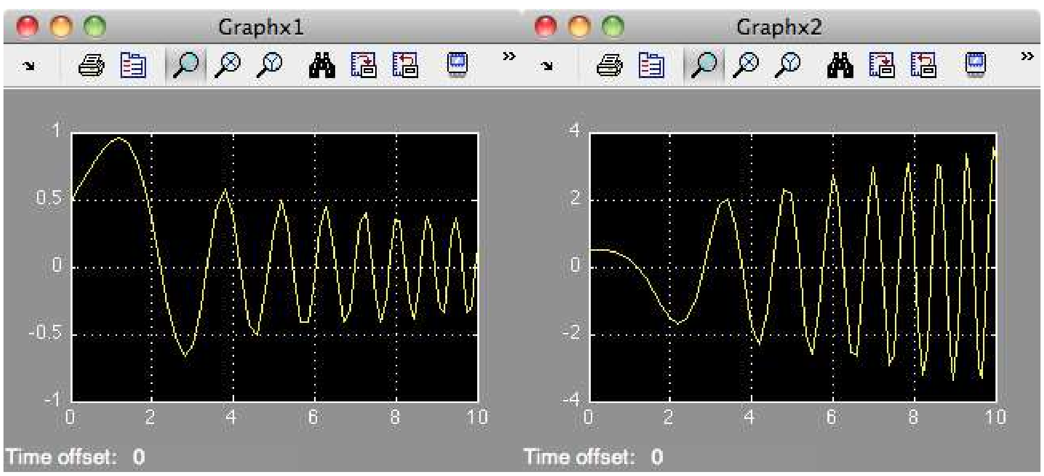
$$Dx_2 = -w(t)^2 x_1$$

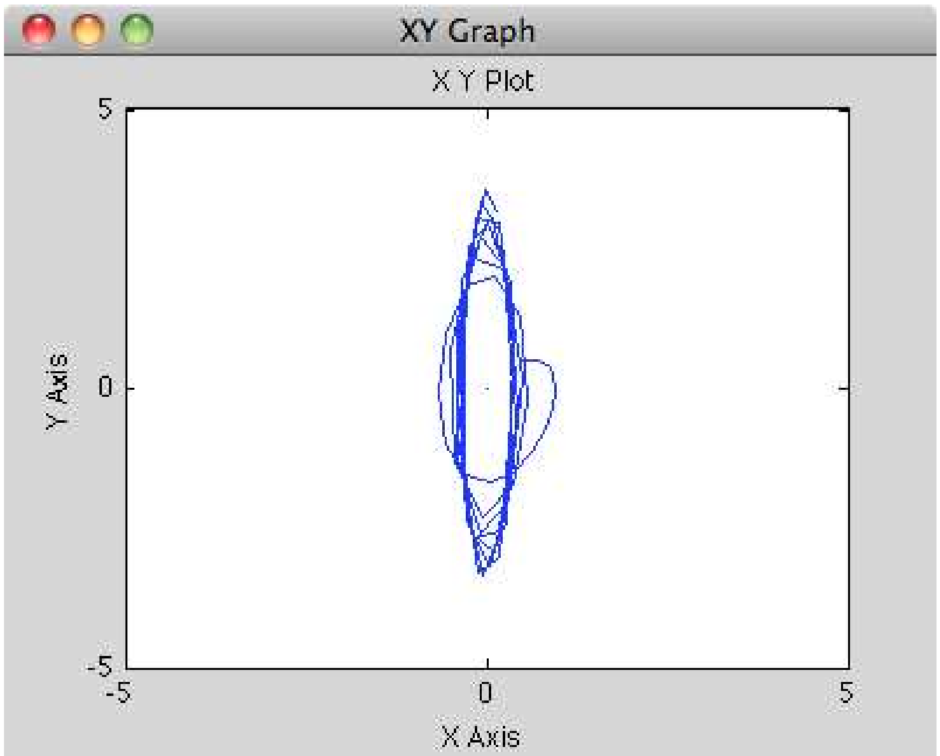
Simular y comentar el comportamiento del sistema para los casos w(t) = t y w(t)= sin(at) para a=10, a=1 y a=0.1

Para la simulación del primer caso, hemos creado el siguiente modelo en simulink:



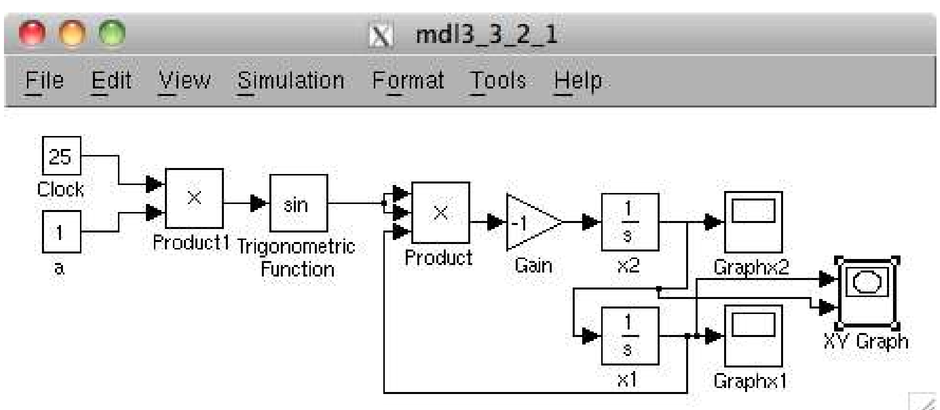
y hemos obtenido los siguientes resultados:



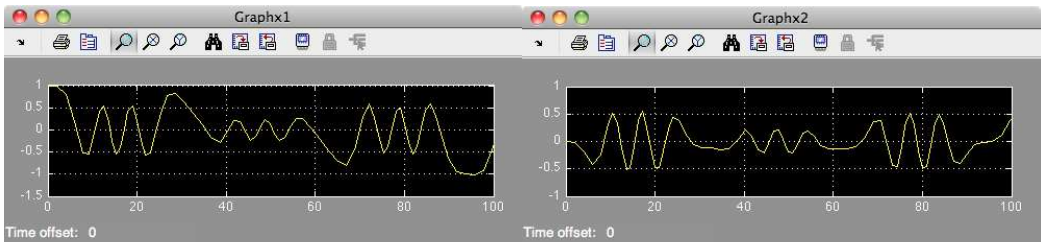


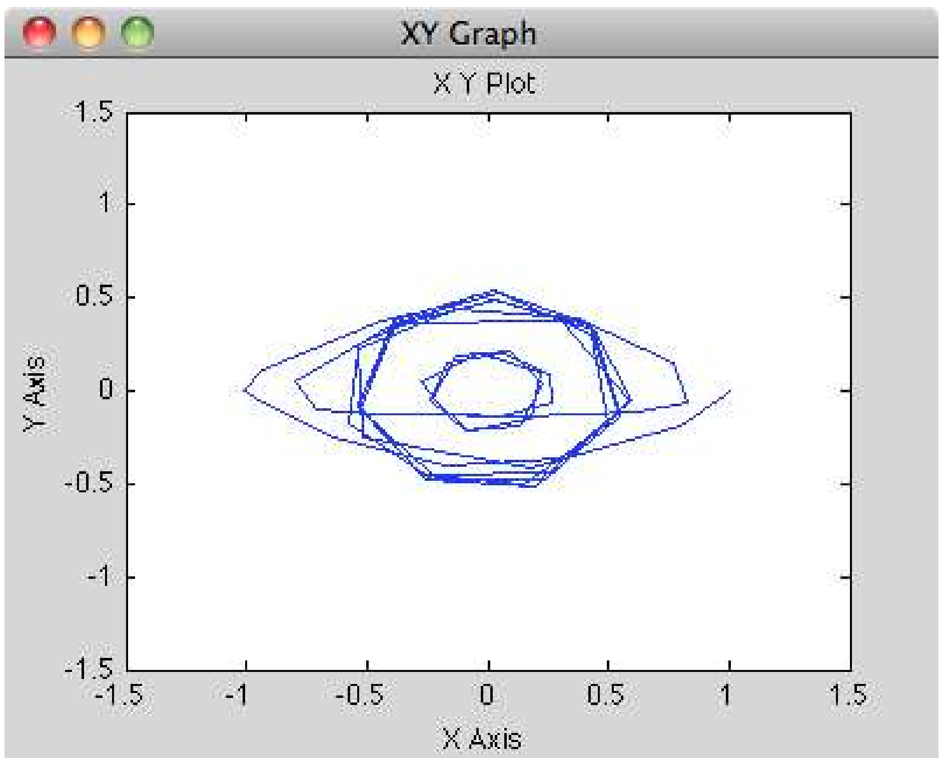
Como podemos comprobar, este sistema es inestable, ya que, si bien x_1 tiende a un valor constante, x_2 tiende a infinito.

En las simulaciones del segundo caso, podemos ver cierta divergencia en los resultados, como explicaremos a continuación. El sistema que se ha modelado en simulink es el siguiente:



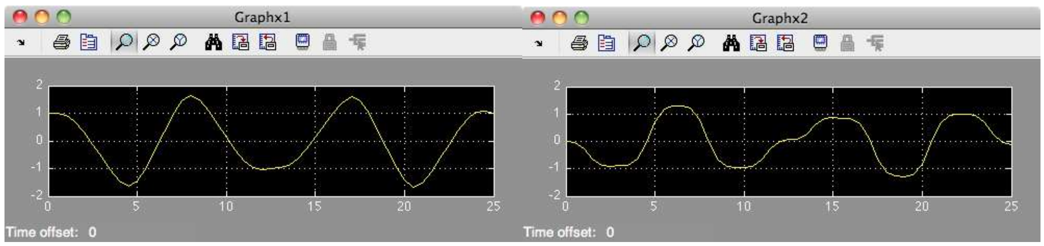
1.- a = 0.1

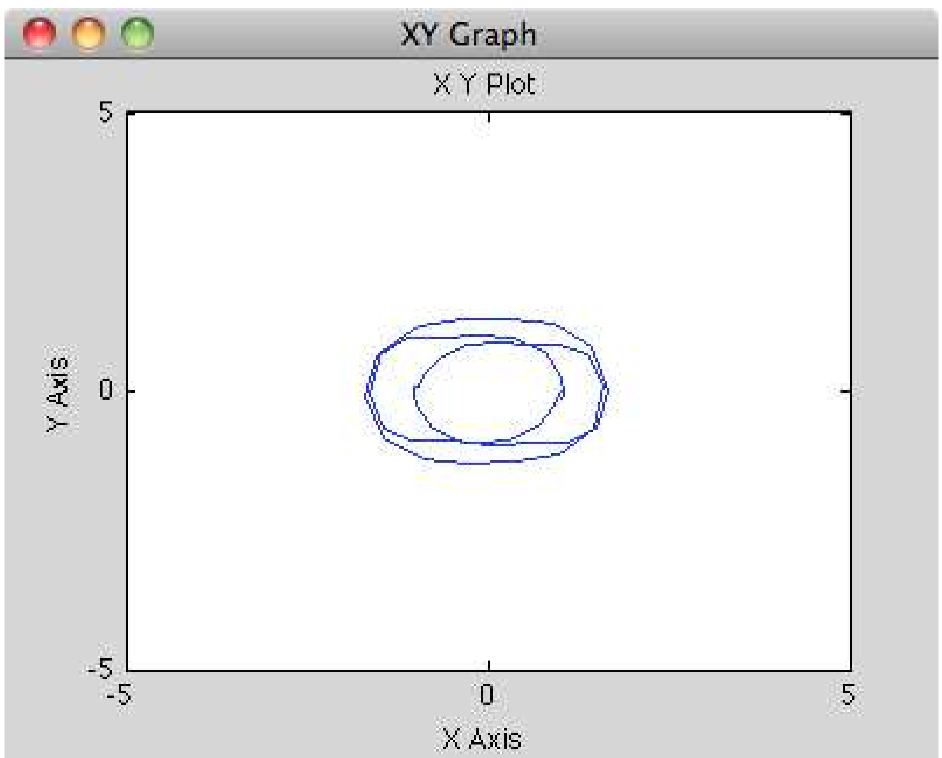




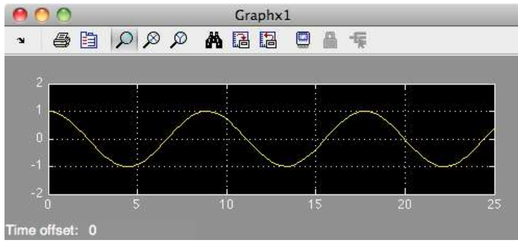
Como podemos ver, este sistema es marginalmente estable, ya que no tiende a un valor constante ni al infinito.

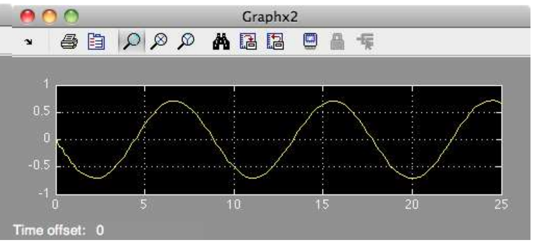
2.- a = 1

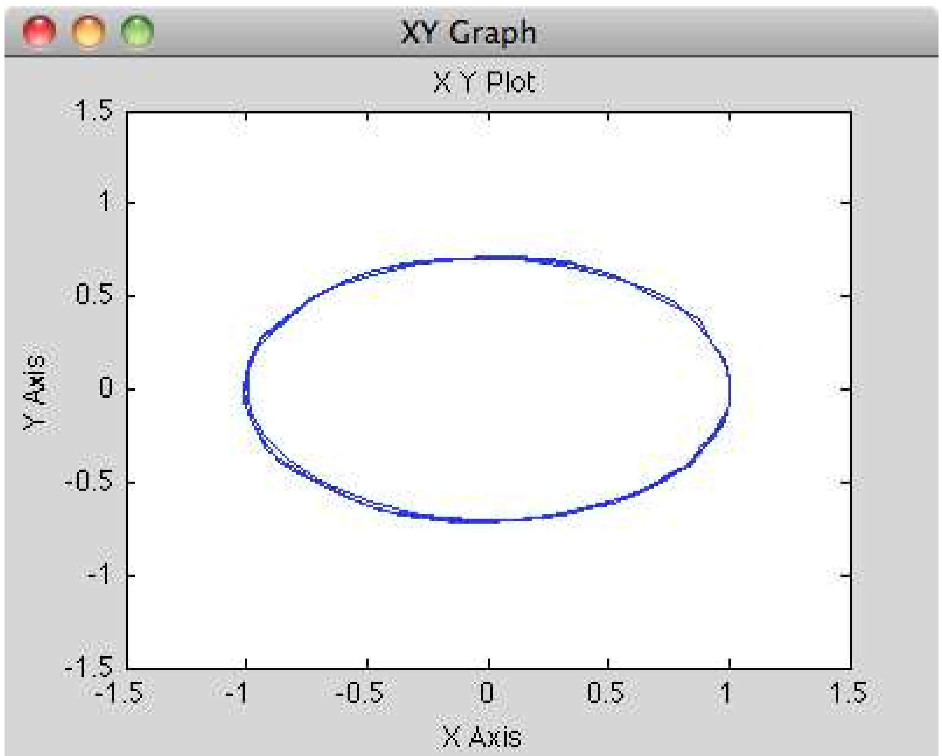




Este sistema es inestable ya que, si bien no se perciben ondulaciones crecientes, a largo plazo tiende a alejarse del punto de equilibrio.







Este sistema, al igual que el primero, es marginalmente estable.