Ejercicios Introducción de Teoría de Sistemas
Tercera Tanda

David Morales Sez

1.- Para el sistema con función de transferencia $F(s)=\frac{10}{2*s^2+7*s+15}$, obtener la expresión analítica de su respuesta ante escalón.

$$F(s)=\frac{10}{2*s^2+7*s+15}$$
$$G(s)=F(s)*U(s)\rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$$
$$G(s)=\frac{10}{s*((s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16})}=\frac{A*s+B}{(s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16}}+\frac{C}{s}$$
$$C=\frac{10}{s*((s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16})}*s|_{s=0}=\frac{10}{(s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16}}|_{s=0}=\frac{160}{120}=\frac{4}{3}$$
$$\frac{10}{s*((s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16})}=\frac{A*s+B}{(s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16}}+\frac{4}{3*s}\rightarrow 10=(A*s+B)*s+\frac{4}{3}*((s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16})\rightarrow$$
$$\rightarrow s^2*(A+\frac{4}{3})+s*(B+7)\rightarrow A=-\frac{4}{3}\rightarrow B=-7$$
$$G(s)=-\frac{4}{3}*\frac{s}{(s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16}}-7*\frac{1}{(s+\frac{7}{4})^2+\frac{71}{16}}+\frac{4}{3*s}$$

$$\boxed{G(t)=-\frac{4}{3}*e^{-\frac{7}{4}}*cos(\frac{71}{16}*t)-7*e^{-\frac{7}{4}*t}*sen(\frac{71}{16}*t)=0}$$

2. - Considérese el sistema con función de transferencia $F1(s)=\frac{1000}{0.01*s^3+10.07*s^2+71*s+1000}$. Sabiendo que dos de sus polos son complejos conjugados con parte real igual a - 3.5, se pide:

a) Encontrar un sistema equivalente (F2) de segundo orden.
b) Obtener la expresión normalizada para F2.

NOTA: recordar que en $s^3+a*s^2+b*s+c=0$, c es el producto de todas las raíces y a la suma.

$$F1(s)=\frac{1000}{0.01*s^3+10.07*s^2+71*s+1000}=\frac{10^5}{s^3+1007*s^2+7100*s+10^5}$$
$$x_1*x_2*x_3=-10^5\rightarrow x_1+x_2+x_3=-1007$$
$$\begin{cases} x_1=-3,5+\alpha*i \\ x_2=-3,5-\alpha*i \end{cases}$$
$$x_1+x_2+x_3=x_3-7=-1007\rightarrow x_3=-1000$$
$$x_1*x_2*x_3=(3,5^2+\alpha^2)*(-1000)=-10^5\rightarrow \alpha=\sqrt{-10^5+3,5^2*1000}-1000=9,4$$
$$\begin{cases} x_1=-3,5+9,4*i \\ x_2=-3,5-9,4*i \\ x_3=-1000 \end{cases}$$

Viendo que la raíz x_3 está demasiado alejada del resto y no afecta de manera significativa al sistema, podemos obviarla. Por esto, el sistema resultante es:

$$\boxed{F2(s) = \frac{10^5}{(s+9{,}4)^2+3{,}5^2}}$$

Viendo el sistema que tenemos, podemos hallar fácilmente la ganancia, el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural:

$$\frac{K*w_n}{(s+9{,}4)^2+3{,}5^2} = \frac{K*w_n}{s^2+9{,}4*s+100} = \frac{K*w_n}{s^2+2*\xi*w_n*s+w_n^2} \quad (1)$$

$$w_n = \sqrt{100} = 10 \rightarrow \xi = \frac{9{,}4}{2*100} = 0,047 \rightarrow K = 1000 \quad (2)$$

$$\boxed{F2(s) = \frac{1000*100}{s^2+2*0{,}047*10*s+10^2} = \frac{100000}{s^2+9{,}4*s+100}}$$

3.- Un sistema con funcin de transferencia $F(s) = K * \frac{s^3+12*s^2+246*s+2260}{s^3+6*s^2+11*s+6}$, se coloca en un bucle con realimentacin unitaria negativa, como se muestra en la figura. Se pide analizar la estabilidad de esta configuracin en funcin del parmetro K.

$$H(s) = \frac{K*\frac{s^3+12*s^2+246*s+2260}{s^3+6*s^2+11*s+6}}{1-K*\frac{s^3+12*s^2+246*s+2260}{s^3+6*s^2+11*s+6}} =$$

$$\frac{s^3+12*s^2+246*s+2260}{s^3*(1-K)+s^2*(6-12*K)+s*(11-246*K)+6-2260K}$$

$$\begin{cases} s^3 & 1-K & 11-246*K \\ s^2 & 6-12*K & 6-2260*K \\ s^1 & \frac{692*K^2-658*K+60}{6-12*K} & 0 \\ s^0 & \frac{\frac{692*K^2-658*K+60}{6-12*K}*(6-2260*K)}{\frac{692*K^2-658*K+60}{6-12*K}} & 0 \end{cases}$$

Mediante el Criterio de Routh, podemos ver que el sistema es estable para $\boxed{K = 0,0027}$, ya que el rango más restrictivo es el que hay entre $\underline{-\infty < K < 0,0027}$ y todos los coeficientes de la primera columna son del mismo signo con este valor de K.