Práctica número 4
Teoría de Sistemas

Gabriel Fernández Díaz
David Morales Sáez

2011/2012

4.1.- Dado el sistema discreto lineal de segundo orden

$$x(k+2) - 2ax(k+1) + (a^2+b^2)x(k) = 0$$

Determinar:

a) A, Lz y $\Phi_z(k) = J^k$

$x(k+2) = 2ax(k+1) - (a^2+b^2)x(k) = 0$
$x(k) = x_1(k)$
$x(k+1) = k_2(k)$
$x(k+2) = k_2(k+1)$

$x_2(k+1) = 2ax_2(k) - (a^2+b^2)x_1(k)$
$x_1(k+1) = x_2(k)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2-b^2 & 2a \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2-b^2 & 2a-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 = 0$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} a+bi \\ a-bi \end{bmatrix} \rightarrow Jordan = \begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{bmatrix}$$

$$\Phi_z(k) = Jordan^k = \begin{bmatrix} (a+bi)^k & 0 \\ 0 & (a-bi)^k \end{bmatrix}$$

$$L_{z1} = [11] \rightarrow L_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a+bi & a-bi \end{bmatrix}$$

b) Puntos de equilibrio y condiciones necesarias y suficientes sobre a y b para que el sistema sea estable, estable marginalmente e inestable.

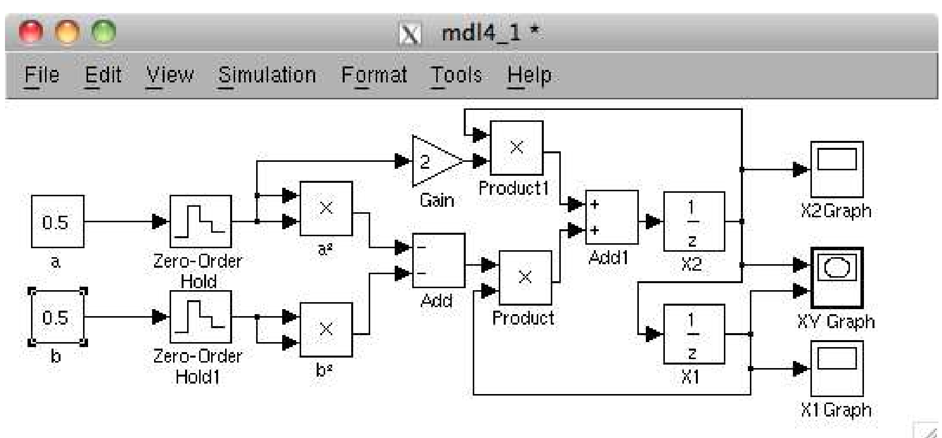
Para poder hallar los puntos de equilibrio, hemos de buscar aquellos puntos que cumplan la condición : $\bar{x}(k+1) = A(k) * \bar{x}(k)$ Dado que nuestra matriz A es constante, podemos despejar y obtenemos que $(I - A)\bar{x}(k) = \bar{O}$:

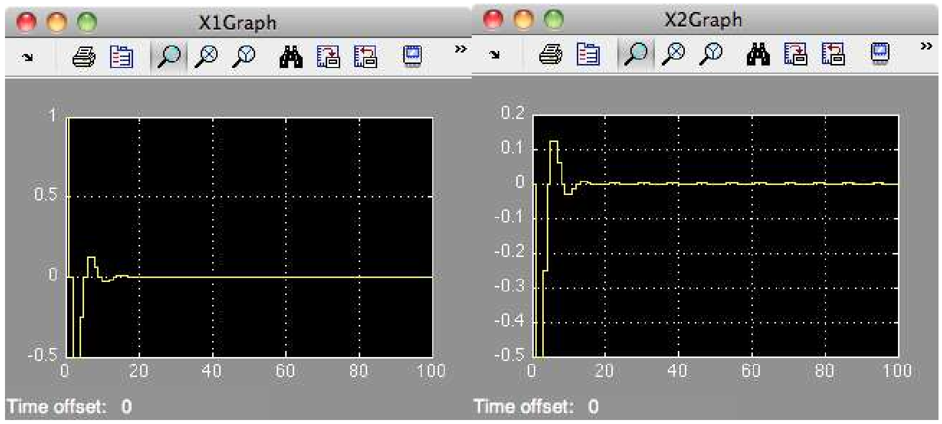
$$|I - A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 - b^2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a^2 + b^2 & 1 - 2a \end{vmatrix} =$$
$$= 1 - 2a + a^2 + b^2 = 0 \rightarrow b = \sqrt{2a - a^2 - 1}$$
$$si \quad a = 1 \rightarrow b = \sqrt{2 - 1 - 1} = 0$$

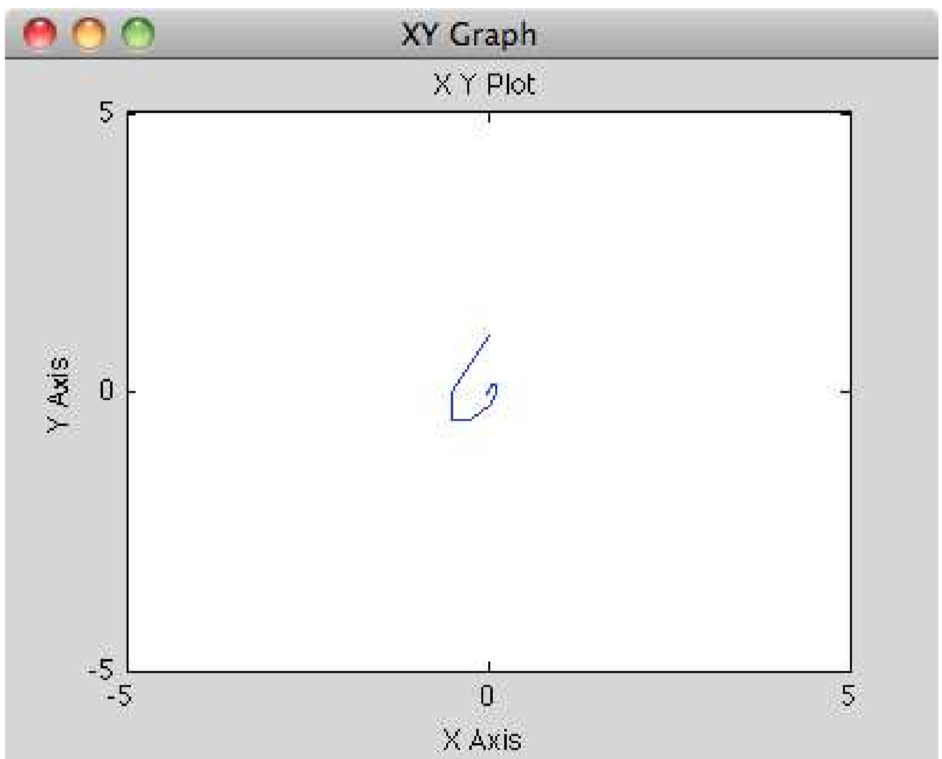
$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \rightarrow x_1(k) = x_2(k)$$

por lo que todos los puntos de equilibrio serán todos aquellos que $x_1(k) = x_2(k)$. Para analizar la estabilidad del sistema, hemos subdividido el planteamiento en tres subestudios:

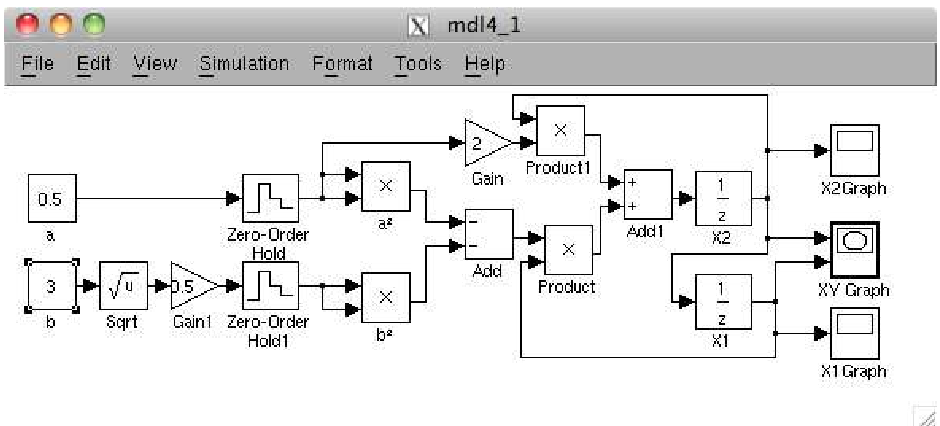
(a) Para que el sistema sea estable, debe cumplirse que $|\lambda| < 1 \rightarrow a^2 + b^2 < 1$, por lo que, si tomamos como valor de $a = \frac{1}{2}$, obtendremos $b = \frac{1}{2}$, y $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$. Si simulamos el sistema en el entorno simulink, obtendremos los siguientes datos:

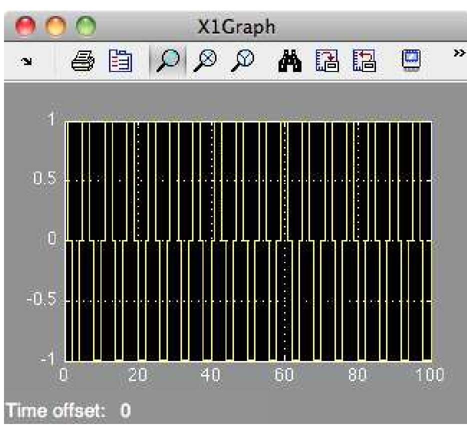


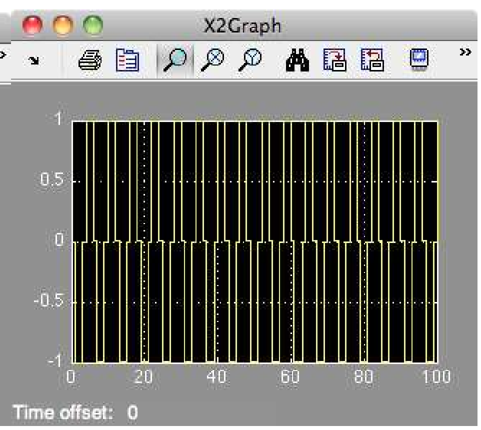

X1Graph
X2Graph
1
0.5
0
-0.5
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0 20 40 60 80 100
0 20 40 60 80 100
Time offset: 0
Time offset: 0

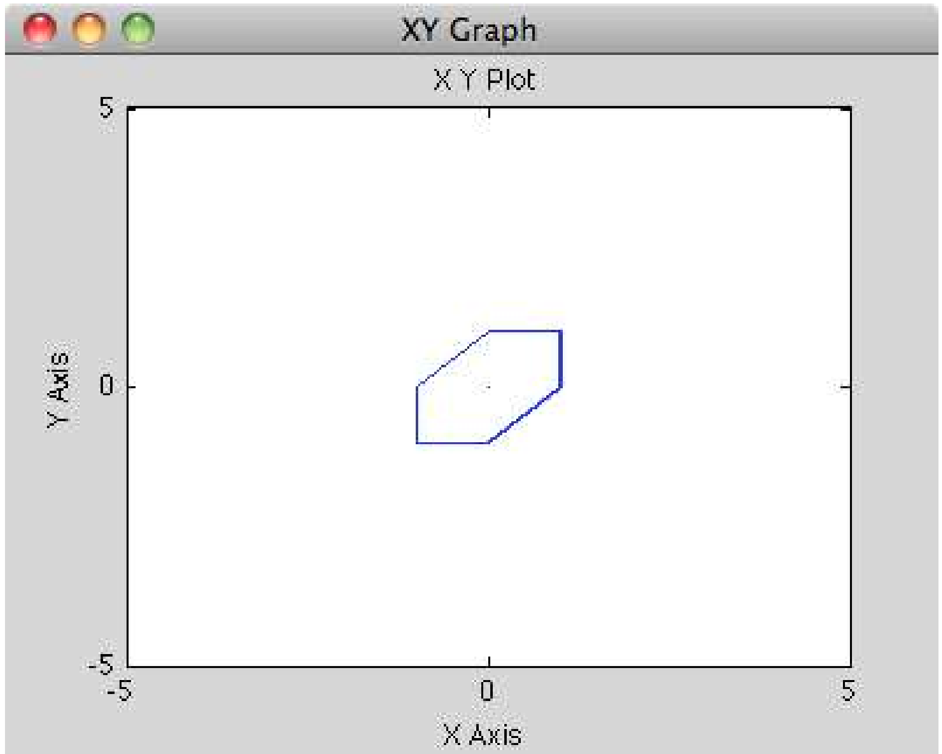

XY Graph
X Y Plot
Y Axis
5
0
-5
-5
0
5
X Axis

(b) En el caso en el que el sistema sistema sea marginalmente estable, debe cumplirse que $|\lambda| = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = 1$, por lo que, si tomamos el valor de $a = \frac{1}{2}$, obtendremos $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = 1$. Si simulamos el sistema en el entorno simulink, obtendremos los siguientes datos:

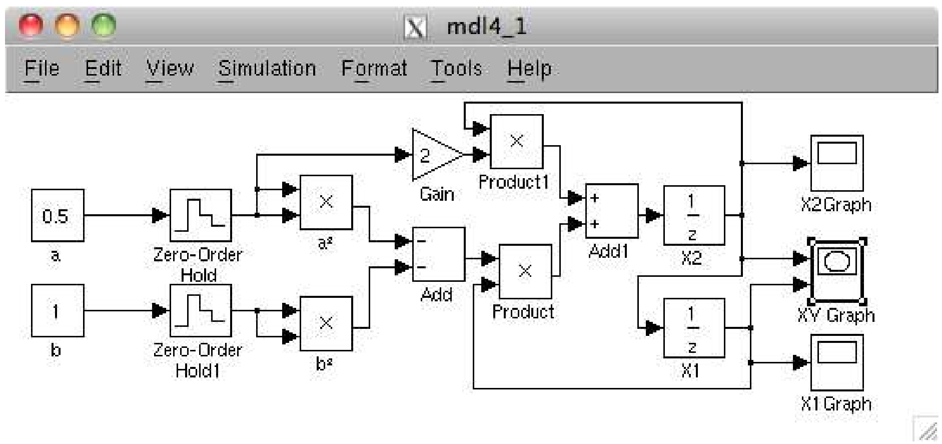


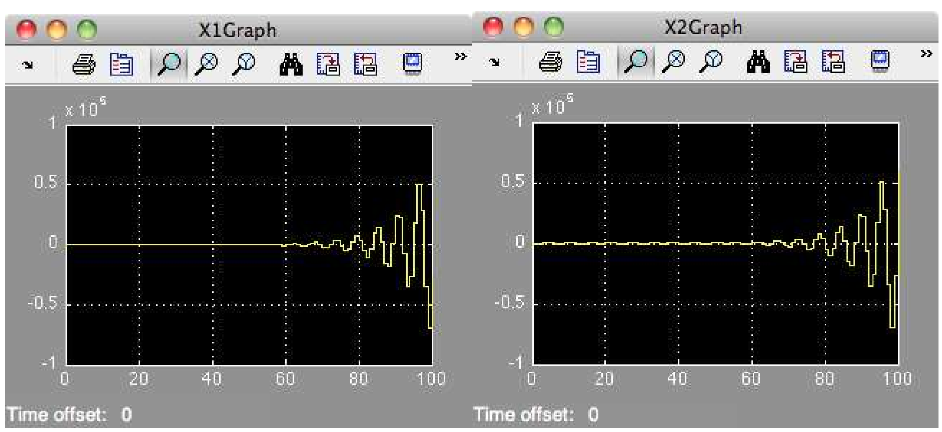


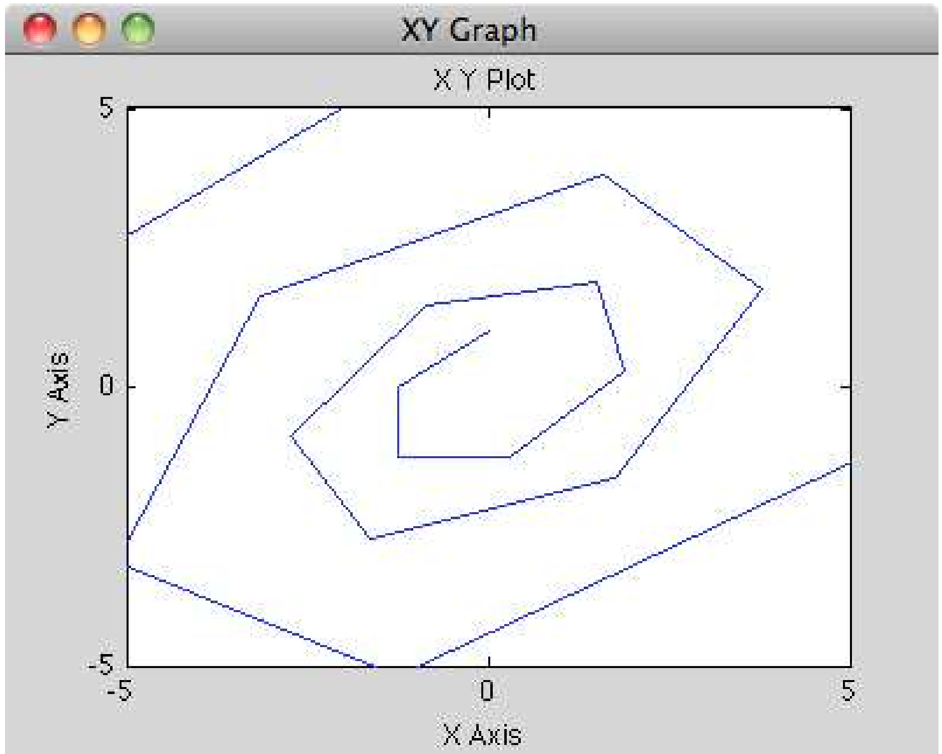



XY Graph
X Y Plot
Y Axis
X Axis
5
0
-5
-5
0
5

(c) Finalmente, para el caso en el que el sistema sea inestable, ha de cumplirse la condición que $|\lambda| > 1 \rightarrow a^2 + b^2 > 1$, por lo que, tomando el valor de $a = \frac{1}{2}$, obtendremos $b = 1$, y $\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} > 1$. Si simulamos el sistema en el entorno simulink, obtendremos los siguientes datos:







XY Graph
X Y Plot
5
0
-5
-5
0
5
Y Axis
X Axis

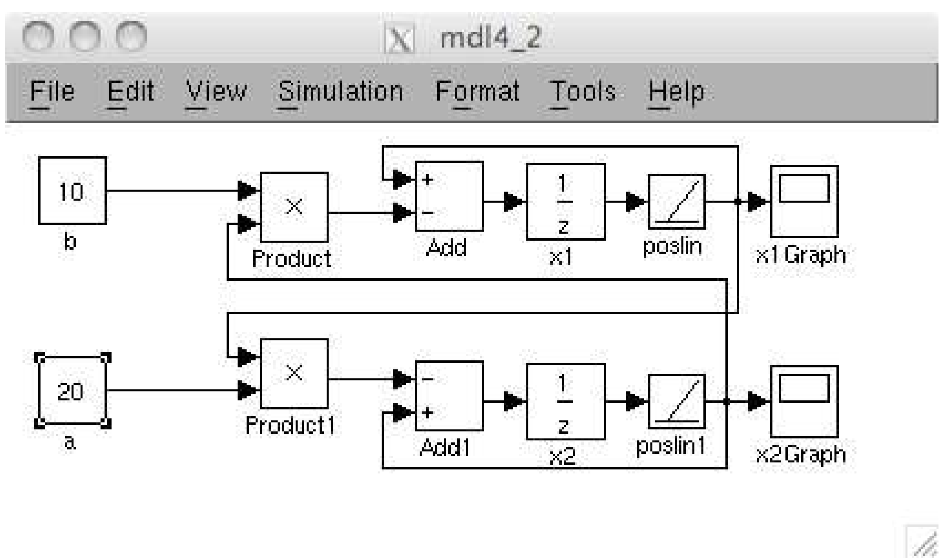
2.- Simular el modelo de Lanchester discreto y ver las condiciones de empate.

El modelo Lanchester discreto se modela de la siguiente forma:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - bx_2(k)$$
$$x_2(k+1) = x_2(k) - ax_1(k)$$

Si deseamos comprobar las condiciones de empate, hemos de buscar la situación en la que, finalmente, obtengan ambos la misma solución ($x_1(k+1) = x_2(k+1)$):

$$x_1(k) - bx_2(k) = x_2(k) - ax_1(k)$$
$$(1+a)x_1(k) = (1+b)x_2(k) \rightarrow \frac{x_1(k)}{x_2(k)} = \frac{1+b}{1+a}$$
$$b = \frac{x_1(k)}{x_2(k)} * (1+a) - 1$$

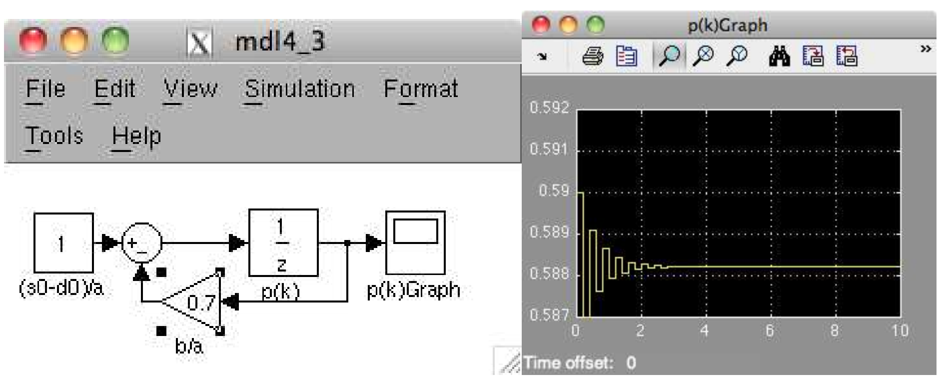


4.3.- Simular el sistema *cobweb* de oferta y demanda para los casos en que se alcance o no precio de equilibrio.

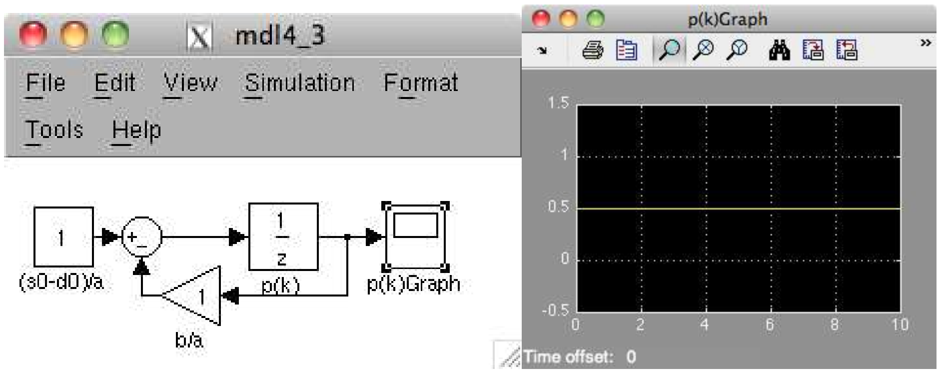
El modelo *cobweb* modela la evolución del precio en función a la oferta y la demanda. Si modelamos la demanda como $d(k+1) = d_0 - a * p(k+1)$, siendo d_0 la demanda inicial y a un factor real positivo, y la oferta como $s(k+1) = s_0 + b * p(k)$, siendo s_0 la oferta inicial y b un factor real positivo, suponemos que la oferta ha de igualar a la demanda, por lo que $s_0 + b * p(k) = d_0 - a * p(k+1)$ y obtenemos el precio: $p(k+1) = \frac{s_0 - d_0}{a} - \frac{b}{a} * p(k)$

En este caso, si deseamos que el sistema sea estable, el factor que multiplica a p(k) ha de cumplir que $\frac{b}{a} < 1 \rightarrow b < a$ En cambio, si queremos que el sistema sea marginalmente estable, el factor ha de ser 1, por lo que el sistema será: $p(k+1) = \frac{s_0 - d_0}{a} - * p(k)$Finalmente, si deseamos que el sistema sea inestable, este factor ha de superar a 1 ($b > a$).

Para el primer caso, hemos tomado como valor de $\frac{s_0 - d_0}{a} = 1$, $p(0) = 0.59$ y de $\frac{b}{a} = 0.7$, creando el siguiente modelo en simulink y con la salida:



Para el segundo caso, hemos tomado como valor de $\frac{s_0 - d_0}{a} = 1$, $p(0) = 0.5$ y de $\frac{b}{a} = 1$ y hemos generado el siguiente modelo en simulink y con la salida:



Finalmente, hemos tomado como valor de $\frac{s_0-d_0}{a} = 1$, $p(0) = 0.59$ y de $\frac{b}{a} = 1.4$, creando el siguiente modelo en simulink y con la salida: