Ejercicios ITS de la Traspuesta de Laplace

David Morales Sáez y Gabriel Díaz Fernández

March 18, 2010

1.- Encontrar f(t) si F(s) está dada por:

1.a) $\frac{s*e^{-s}}{(s+2)^2+1}$

$$g(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1} \rightarrow f(t) = e^{-2t}cost - 2*e^{-2t}sent$$

1.b) $\frac{1-e^{-s}}{s*(1+e^{-3s})}$

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{1+e^{-3s}} * \frac{1-e^{-s}}{s} \rightarrow \frac{(1-e^{-s})*(1-e^{-3s})}{1+e^{-3s}} * \frac{1}{s} = \frac{1-e^{-s}-e^{-3s}+e^{-4s}}{1-e^{-6s}} * \frac{1}{s}$$

$$f(t) = \{ \begin{array}{cc} 1 & 0<t<1 \\ 0 & 1<t<3 \\ -1 & 3<t<4 \\ 0 & 4<t<6 \end{array}$$

$$f(t+6) = f(t)$$

1.c) $\frac{s^2+4s+7}{(s+1)(s^2+2s+5)}$

$$s+1=0 \rightarrow s=-1$$

$$\frac{As+B}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{s+1} = \frac{s^2+4s+7}{(s+1)((s+1)^2+4)}$$

$$s*(As+B) + As + B - (s+1)^2 - 4 = s^2+4s+7$$

$$s^2*(A-2) + s*(A+B-6) + (B-12) = 0$$

$$s=0 \rightarrow B=12 \rightarrow s^2*(As-2) + s*(A+6) = 0 \rightarrow s=1; A=-2$$

$$f(t) = -e^t - 2*e^t*cos(2*t) + 12*e^t*sen(2*t)$$

1.d) $\frac{1}{(s+1)(s+2)^3}$

$$s+1=0 \rightarrow s=-1$$

$$(s+2)^3=0 \rightarrow s=-2$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{a_1}{s+2} + \frac{a_2}{(s+2)^2} + \frac{a_3}{(s+2)^3}$$

$$A = \frac{1}{(s+2)^3}|_{s=-1} = \frac{1}{(s+1)(-1+2)^3} = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{(s+1)}|_{s=-2} = \frac{1}{-2+1} = -1$$

$$a_2 = \frac{\delta}{\delta s}[\frac{1}{(s+1)}]|_{s=-2} = -\frac{1}{(s+1)^2}|_{s=-2} = \frac{1}{1} = 1$$
$$a_3 = \frac{\delta}{\delta s}[\frac{1}{(s+1)^2}]|_{s=-2} = \frac{-2}{(s+1)^3}|_{s=-2} = 2$$
$$f(t) = e^{-t} - 1 + t + 2t$$

2.- Resolver: $\ddot{Y} + y\dot{Y} + 3Y)2e^{-2t}$ **con** $Y(0) = 1$ **y** $\dot{Y}(0) = 2:$

$$\angle[2e^{-2t}] = \frac{2}{s+2}$$
$$\angle[\ddot{Y}] + 4\angle[\dot{Y}] + 3\angle[Y] = \frac{2}{s+2}$$
$$\angle[\dot{Y}] = sY(s) - 1$$
$$\angle[\ddot{Y}] = s^2Y(s) - 2s - 1$$
$$s^2Y(s) - s - 2 + Y(s) * (4s - 4) + 3 * Y(s) = \frac{2}{s+2}$$
$$Y(s) * (s^2 + 4s + 3) - s - 6 = \frac{2}{s+2}$$
$$Y(s) = \frac{2+(s+6)*(s+2)}{(s^2+4s+3)*(s+2)} = \frac{s^2+8s+14}{(s+3)*(s+1)*(s+2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$
$$A = \frac{s^2+8s+14}{(s+3)*(s+1)*(s+2)} * (s+3)|_{s=-3} = \frac{s^2+8s+14}{(s+1)*(s+2)}|_{s=-3} = \frac{9-24+14}{(-2)*(-1)} = -\frac{1}{2}$$
$$B = \frac{s^2+8s+14}{(s+3)*(s+1)*(s+2)} * (s+1)|_{s=-1} = \frac{s^2+8s+14}{(s+3)*(s+2)}|_{s=-1} = \frac{1-8+14}{2*1} = \frac{7}{2}$$
$$C = \frac{s^2+8s+14}{(s+3)*(s+1)*(s+2)} * (s+2)|_{s=-2} = \frac{s^2+8s+14}{(s+1)*(s+3)}|_{s=-2} = \frac{4-16+14}{-1} = -2$$
$$Y(s) = \frac{1}{2} * \frac{1}{s+3} + \frac{7}{2} * \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$
$$Y(t) = \frac{1}{2} * e^{-3t} + \frac{7}{2} * e^{-t} - 2 * e^{-2t}$$

3.- Evaluar $V_0(t)$ para una señal de entrada $V_i(t)$ con $R = 1\Omega$; $L = \sqrt{2}H$; $C = \frac{1}{\sqrt{2}}F$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\tau)\delta\tau = R * i_2(t) = V_0(t)$$
$$\frac{1}{C}i_1(t) = R\frac{\delta}{\delta t}i_2(t)$$
$$i_2(t) = \frac{1}{R}V_0(t) \rightarrow i_1(t) = RC\frac{\delta i_2(t)}{\delta t} = C\frac{\delta V_0(t)}{\delta t}$$
$$V_i(t) = L * \frac{\delta}{\delta t}(i_1(t) + i_2(t)) + V_0(t)$$
$$V_i(t) = LC\frac{\delta^2}{\delta t^2}V_0(t) + \frac{L}{R} * \frac{\delta V_0(t)}{\delta t} + V_0(t) = \frac{s}{s^2+1}$$
$$V_0(0) = 0$$
$$\ddot{X}(t) + \sqrt{2}\dot{X}(t) + X(t) = sent$$
$$s^2C(t) + \sqrt{2}sX(t) + X(t) = \frac{s}{s^2+1} \rightarrow X(t) * (s^2 + \sqrt{2}s + 1) = \frac{s}{s^2+1}$$
$$X(s) = \frac{\frac{s}{s^2+1}}{s^2+\sqrt{2}s+1} = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+\sqrt{2}s+1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s+\frac{\sqrt{2}}{4})^2+\frac{1}{2}}$$
$$s = (s + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 * (As + B) + \frac{1}{2} * (As + B) + s^2 * (Cs + D) + Cs + D$$
$$s^3 * (A + C) + s^2 * (\sqrt{2} * A + B + D) + s * (\frac{1}{2} * A + \sqrt{2} * B + C - 1) + (\frac{1}{2} * B + D) = 0$$
$$s = 0 \rightarrow B = 2 * D \rightarrow B = 2; D = -1$$
$$s^3 * (A + C) + s^2 * (\sqrt{2} * A + 1) + s * (\frac{1}{2} * A + \sqrt{2} * 2 + C - 1) = 0$$
$$s = 1 \rightarrow A + C + \sqrt{2} * A + 1 + \frac{1}{2} * A + 2 * \sqrt{2} + C - 1 = 0 \rightarrow C = \frac{1 - A * (\frac{3}{2} + \sqrt{2})}{2}$$
$$A = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2}$$
$$X(t) = 2 * cos(t) + \frac{1}{2} * e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} * t} * sen(\frac{\sqrt{2}}{2} * t) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} * t} * cos(\frac{\sqrt{2}}{2} * t)$$
$$X(t) = 2 * cos(t) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} * t} * sen(\frac{\sqrt{2}}{2} * t + \frac{\pi}{4})$$

Partiendo del ejercicio mostrado en clase:

a) ¿Qué pasaría si R, L y C fuesen variables? Es decir, si R es muy alta, ¿qué sucede? ¿Y si es muy baja? Lo mismo para las otras tres variables.

$R \rightarrow \infty$

$$Y(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} * \frac{E}{s}$$
$$Y(s) = \frac{1}{\infty} * \frac{E}{s} = 0$$

Como podemos ver, si tenemos una resistencia muy alta, al final no circula ninguna corriente.

$R \rightarrow 0$

$$Y(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} * \frac{E}{s}$$
$$Y(s) = \frac{E}{s*(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$
$$A = \frac{E}{s*(s^2+1)} * s|_{s=0} = \frac{E}{s^2+1}|_{s=0} = 1$$
$$\frac{1}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{1}{s*(s^2+1)}$$
$$1 = s^2 + 1 + s*(Bs+C) \rightarrow s^2*(B+1) + s*C = 0$$
$$B = -1 \rightarrow C = 0$$
$$Y(t) = 1 - sen(t)$$

En este caso, la salida obtenida está movida en el eje.

$L \rightarrow \infty$

$$Y(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} * \frac{E}{s}$$
$$Y(s) = \frac{1}{\infty} * \frac{E}{s} = 0$$

Como podemos ver, si tenemos una bobina muy larga, al final no circula ninguna corriente.

$L \rightarrow 0$

$$Y(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} * \frac{E}{s}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s+1} * \frac{E}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} * \frac{E}{s}$$
$$s+1=0 \rightarrow s=-1$$
$$A = \frac{1}{s*(s+1)} * s|_{s=0} = 1$$
$$B = \frac{1}{s*(s+1)} * (s+1)|_{s=-1} = -1$$
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \rightarrow Y(t) = 1 - e^{-t}$$

La diferencia de potencial se acerca rápidamente al voltaje esperado, 1, llegando a este en un periodo de tiempo muy corto. Esto era de esperar, dado que, al no haber una bobina, el circuito es un circuito clásico del tipo RC.

$C \rightarrow \infty$

$$Y(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} * \frac{E}{s}$$
$$Y(s) = 0 \rightarrow Y(t) = 0$$

Si tenemos un condensador con una capacidad infinita, es normal que suceda esto, dado que nunca dejará de cargarse.

$C \rightarrow 0$

$$Y(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} * \frac{E}{s}$$
$$F(s) = \frac{1}{s} \rightarrow f(t) = 1$$

Si el condensador no tiene capacidad, el voltaje final será igual al inicial, es decir, 1.

b) ¿Y si Y(0) = 0'5 v?

Partiendo de la demostración hecha en clase:

$$s^2 * Y(s) - s * Y(s) - Y(0) + \frac{R}{C} * (s * Y(s) - Y(0)) + \frac{1}{LC} * Y(s) = \frac{1}{LC} * V(s)$$
$$s^2 * Y(s) - \frac{s}{2} - \frac{1}{2} + \frac{R}{C} * s * Y(s) - \frac{R}{2C} + \frac{1}{LC} * Y(s) = \frac{1}{LC} * \frac{F}{s}$$
$$Y(s) * (s^2 + s * \frac{R}{2C} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{LC} * \frac{F}{s} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2} + \frac{R}{2C} \rightarrow$$
$$\rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{LC} * \frac{F}{s} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2} + \frac{R}{2C}}{s^2 + s * \frac{R}{2C} + \frac{1}{LC}}$$

Ahora calculamos la función partiendo de los valores unitarios para las distintas variables.

$$F(s) = \frac{\frac{1}{s} + \frac{s}{2} + 1}{s^2 + \frac{s}{2} + 1} = g(s) + \frac{1}{2} * h(s) + k(s)$$

$$g(s) = \frac{1}{s*((s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16})}; h(s) = \frac{s}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}; k(s) = \frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}$$

$$g(s) = \frac{1}{s*((s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16})} = \frac{As+B}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}} + \frac{C}{s} \rightarrow C = 1$$

$$s*(As+B) + ((s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16} - 1 = 0 \rightarrow s^2(A+1) + s*(B-\frac{1}{2}) = 0 \rightarrow A = -1; B = \frac{1}{2}$$

$$h(s) = \frac{s}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}} = \frac{As+B}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}$$

$$s = As + B \rightarrow s*(A-1) + B = 0 \rightarrow A = 1; B = 0$$

$$k(s) = \frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}} = \frac{As+B}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}$$

$$1 = As + B \rightarrow As + (B-1) = 0 \rightarrow A = 0; B = 1$$

$$f(t) = 1 - e^{-\frac{1}{4}t}cos(\frac{\sqrt{15}}{4}t) + \frac{1}{2}*e^{-\frac{1}{4}t}*sen(\frac{\sqrt{15}}{4}t) + \frac{1}{2}*e^{-\frac{1}{4}t}*cos(\frac{\sqrt{15}}{4}t) + e^{-\frac{1}{4}t}*sen(\frac{\sqrt{15}}{4}t)$$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}*e^{-\frac{1}{4}t}*cos(\frac{\sqrt{15}}{4}t) + \frac{1}{2}*e^{-\frac{1}{4}t}*sen(\frac{\sqrt{15}}{4}t)$$

Modificando las condiciones para que su estado inicial sea 0'5, vemos que se acerca rápidamente a 1, ajustándose en poco tiempo a la recta.