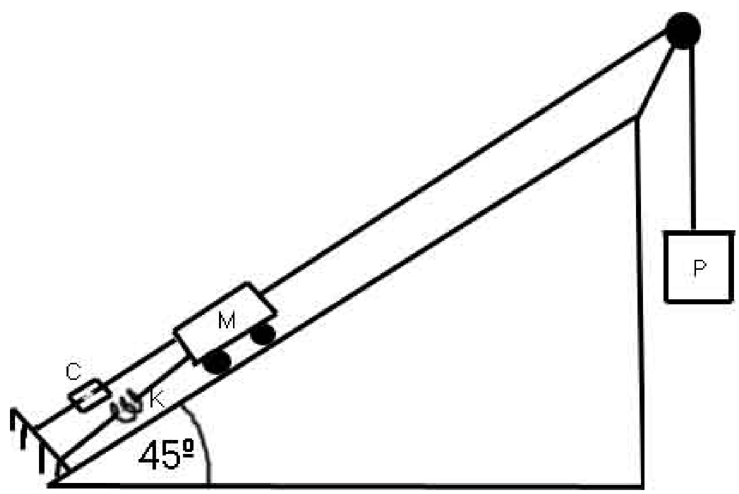
Ejercicios de Introducción a la Teoría de Sistemas

David Morales Sáez
Gabriel Fernandez Díaz
Jorge Castellano Castellano

Ejercicio 1:

Teniendo el siguiente sistema en reposo, estudiar que sucede si quitamos el peso colgante.



$$X_0 = 0m \qquad P = 1kg$$
$$\eta_u = 0.1N/Kg \qquad M = 2Kg$$
$$K = 1 \qquad C = 1$$

En primer lugar, hallamos la ecuación del sistema estabilizado, es decir, sin variación alguna.

$$F_R = \eta_u * M = 0.1 * 2 = 0.2$$
$$F_C = c * \frac{\delta X(t)}{\delta t} = \frac{\delta X(t)}{\delta t}$$
$$F_K = K * \Delta X(t) \simeq K * X(t) = X(t)$$
$$\sum F = M * \frac{\delta^2 X(t)}{\delta t} * \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$F_C + F_K + F_R + Q = M * \frac{\delta^2 X(t)}{\delta t} * \frac{\sqrt{(2)}}{2}$$
$$\frac{\delta X(t)}{\delta t} + X(t) + 0.2 + 1 = \sqrt{2} * \frac{\delta^2 X(t)}{\delta t}$$
$$\sqrt{2} * \frac{\delta^2 X(t)}{\delta t} - \frac{\delta X(t)}{\delta t} - X(t) - 1.2 = 0$$
$$\sqrt{2} s^2 X(s) - sX(s) - X(s) = \frac{1.2}{s}$$

$$X(s)*(\sqrt{2}s^2-s-1)=\frac{1.2}{s}\rightarrow X(s)=\frac{1.2}{s*(\sqrt{2}s^2-s-1)}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2*\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}*\sqrt{2}}=\frac{1}{2*\sqrt{2}}\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

$$A=\frac{1.2}{(\sqrt{2}s^2-s-1)*s}*s|_{s=0}=\frac{1.2}{\sqrt{2}s^2-s-1}|_{s=0}=\frac{1.2}{\sqrt{2}*0^2-0-1}=-1.2$$

$$B=\frac{1.2}{(\sqrt{2}s^2-s-1)*s}*(\sqrt{2}s^2-s-1)|_{s=\frac{1}{2*\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}=$$

$$=\frac{1.2}{s}|_{s=\frac{1}{2*\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1.2}{\frac{1}{2*\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}\simeq 0.38$$

$$C=\frac{1.2}{(\sqrt{2}s^2-s-1)*s}*(\sqrt{2}s^2-s-1)|_{s=\frac{1}{2*\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}=$$

$$=\frac{1.2}{s}|_{s=\frac{1}{2*\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1.2}{\frac{1}{2*\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}\simeq 0.73$$

$$X(s)=\frac{-1.2}{s}+\frac{0.38}{s-1.42}+\frac{0.73}{x+0.74}$$

$$\boxed{X(t)=-1.2+0.38*e^{1.45*t}+0.73*4^{-0.74*t}\rightarrow X(0)=0.009\simeq 0}$$

Como podemos comprobar, en el momento inicial, la posición debe ser 0, y así es (aproximadamente).

Partiendo de los cálculos iniciales, sólo debemos quitarle la fuerza ejercida por el peso colgando:

$$\sqrt{2}*\frac{\delta^2X(t)}{\delta t}-\frac{\delta X(t)}{\delta t}-X(t)-0.2=0$$

$$\sqrt{2}s^2X(s)-sX(s)-X(s)=\frac{0.2}{s}$$

$$X(s)*(\sqrt{2}s^2-s-1)=\frac{1.2}{s}\rightarrow X(s)=\frac{0.2}{s*(\sqrt{2}s^2-s-1)}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2*\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}*\sqrt{2}}=\frac{1}{2*\sqrt{2}}\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

$$A=\frac{0.2}{(\sqrt{2}s^2-s-1)*s}*s|_{s=0}=\frac{0.2}{\sqrt{2}s^2-s-1}|_{s=0}=\frac{0.2}{\sqrt{2}*0^2-0-1}=-0.2$$

$$B=\frac{0.2}{(\sqrt{2}s^2-s-1)*s}*(\sqrt{2}s^2-s-1)|_{s=\frac{1}{2*\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}=$$

$$=\frac{0.2}{s}|_{s=\frac{1}{2*\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}=\frac{0.2}{\frac{1}{2*\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}\simeq 0.06$$

$$C=\frac{0.2}{(\sqrt{2}s^2-s-1)*s}*(\sqrt{2}s^2-s-1)|_{s=\frac{1}{2*\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}=$$

$$=\frac{0.2}{s}|_{s=\frac{1}{2*\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}=\frac{0.2}{\frac{1}{2*\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}}\simeq 0.12$$

$$X(s)=\frac{-0.2}{s}+\frac{0.03}{s-1.42}+\frac{0.12}{x+0.74}$$

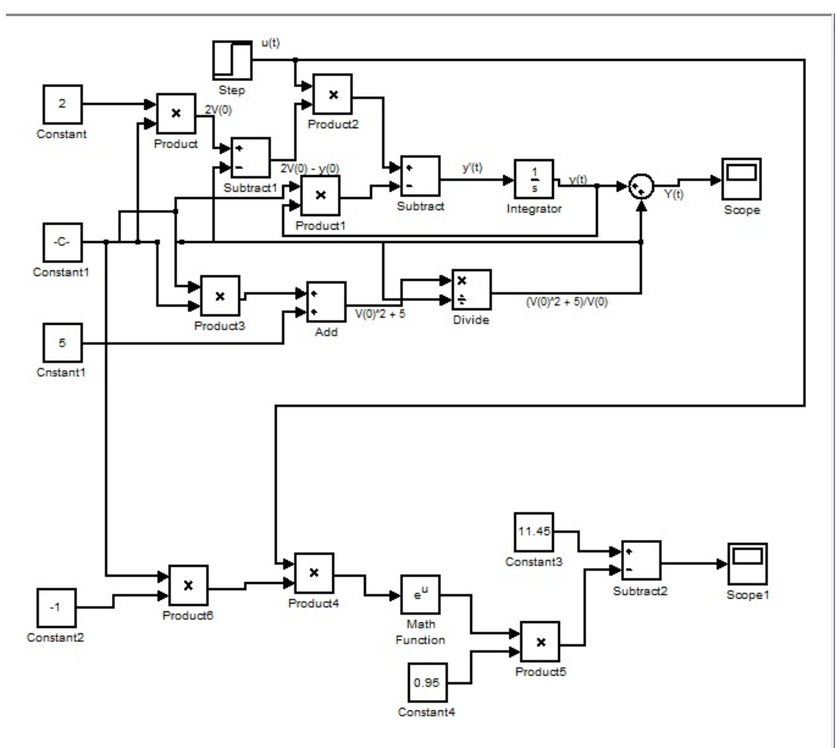
$$\boxed{X(t) = -0.2 + 0.06 * e^{1.45*t} + 0.12 * 4^{-0.74*t} \rightarrow X(0) = 0}$$

Como podemos comprobar, en el momento inicial, la posición debe ser 0, y así es.

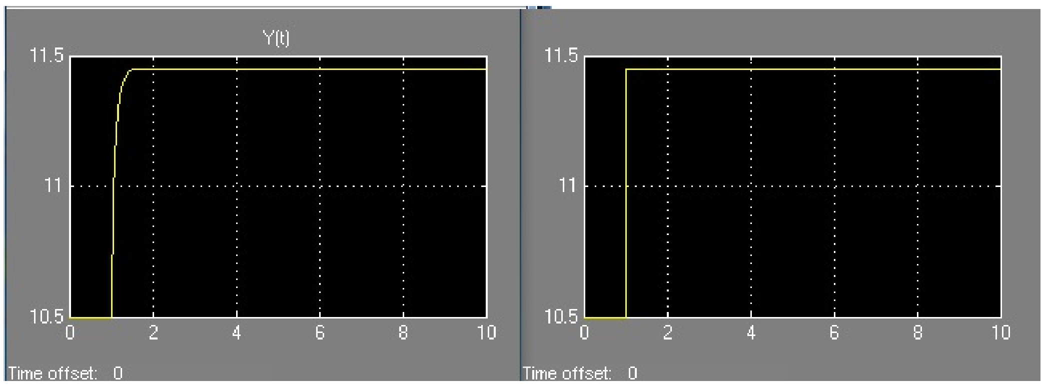
Ejercicio 2:

Con MatLab, hacer un análisis de la respuesta del sistema, para distintas entradas e incrementos. Analizar qué incrementos de V_0 son los permitidos y cuales los aceptables. Buscar las que son con una aproximación inferior al 10%.

Hemos modelizado el sistema (tanto linealmente como no linealmente) con la herramienta del MatLab Simulink. El sistema modelizado es el siguiente:

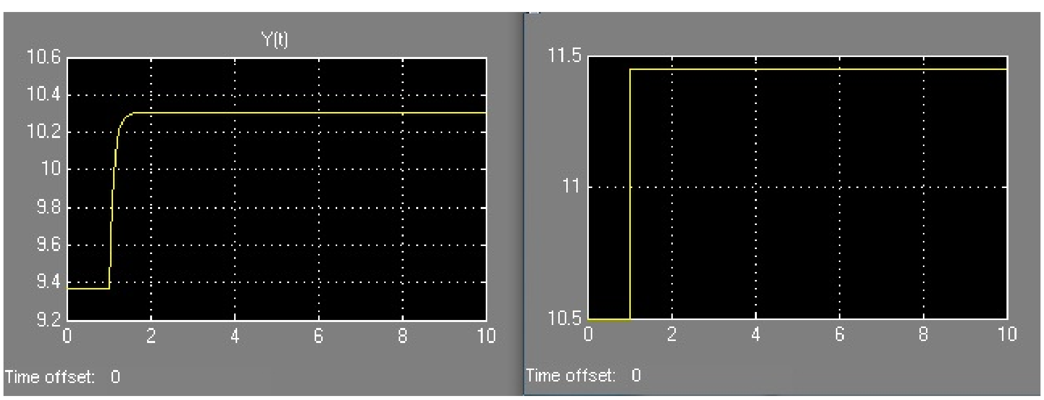


Para comprobar su validez, hemos simulado el sistema con $V_0 = 10$, siendo la salida la siguiente:

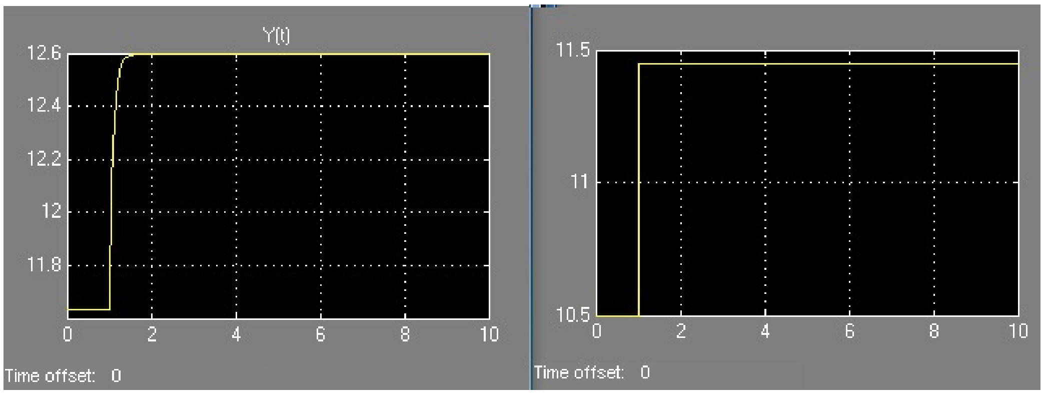


Hay que decir, que la primera gráfica es la salida en el sistema no lineal y la segunda gráfica es el sistema lineal. Además, como podemos ver, el error cometido entre ambos sistemas es 0.

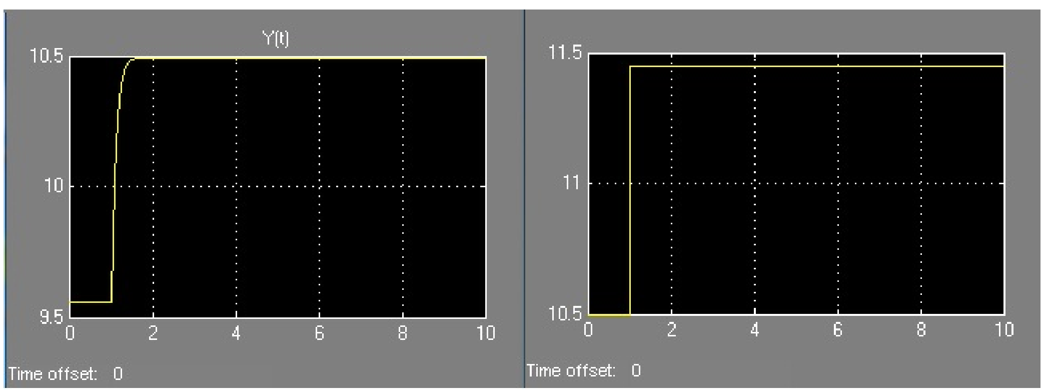
Haciendo cálculos, vemos que el menor valor en el que el error es de un 10% es en 8,8015, siendo su gráfica la siguiente:



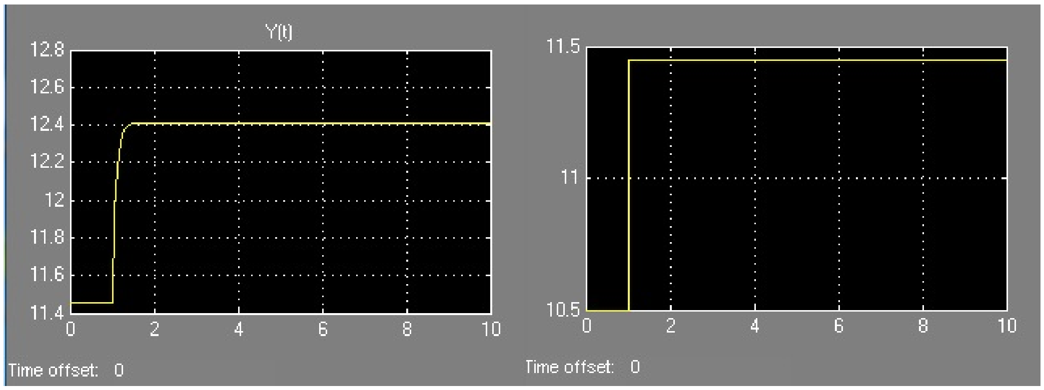
Y el mayor valor con un error de un 10% es 11,188:



Entre ambos valores, el error es inferior a un 10%, siendo mínimo en 10 (normal, ya que es el punto sobre el que hemos linealizado). Esto lo podemos comprobar con la gráfica de la salida del sistema con la entrada 9:



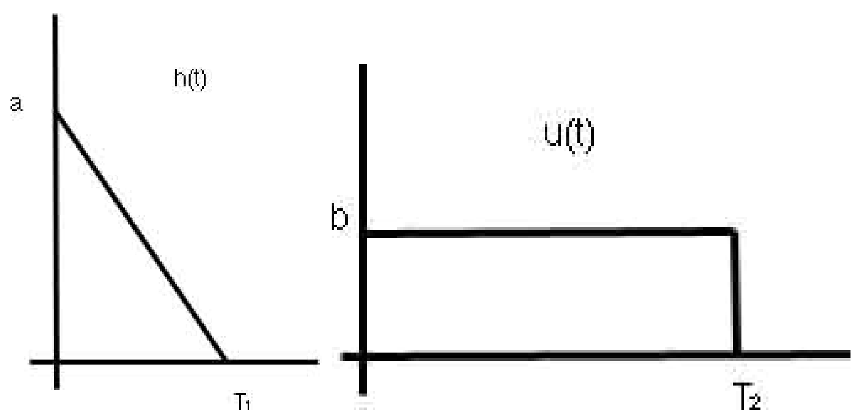
Y con la gráfica de la salida del sistema con la entrada 11:



Todas las entradas inferiores a 8,8015 y superiores a 11,188 tienen un error superior al 10%, por lo que no son consideradas válidas. El valor inicial de entrada más óptimo el 10, como se comentó anteriormente, ya que con él no tenemos ningún error.

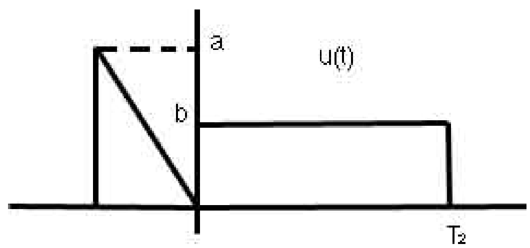
Ejercicio 3:

1) Sean h(t) y u(t) las siguientes, hallar Y(t).



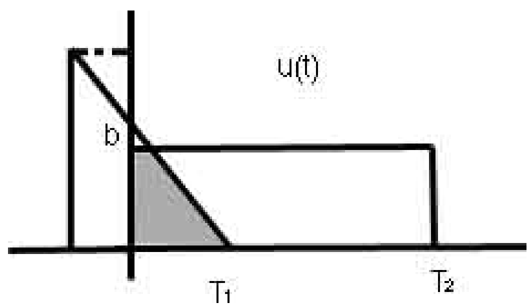
Si el sistema es lineal, $Y(t) = \int_0^t h(t-\tau) * u(\tau)\delta\tau$, siendo $h(t) = \frac{a}{T_1}t$.

En primer lugar, hallaremos la solución si si $t < 0$:



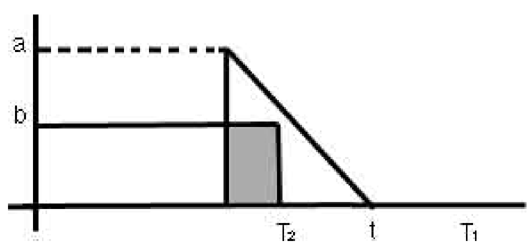
Y(t) = 0

Ahora, hallaremos y(t) si $0 < t \leq T_2$



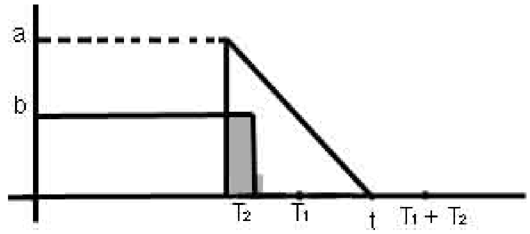
$y(t) = \int_0^t \frac{a}{T_1} * \tau * b * \delta\tau = \frac{a}{T_1} * b * \tau|_0^{T_2} = \frac{a*b*T_2}{T_1}t$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_2 < t \leq T_1$



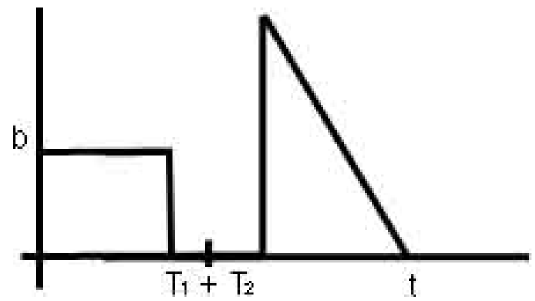
$y(t) = \int_0^{T_2} \frac{a}{T_1} * (t-\tau) * \tau * b * \delta\tau = \frac{a}{T_1} * b * \tau|_0^t = \frac{a*b}{T_1}t$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_1 < t \leq T_1 + T_2$



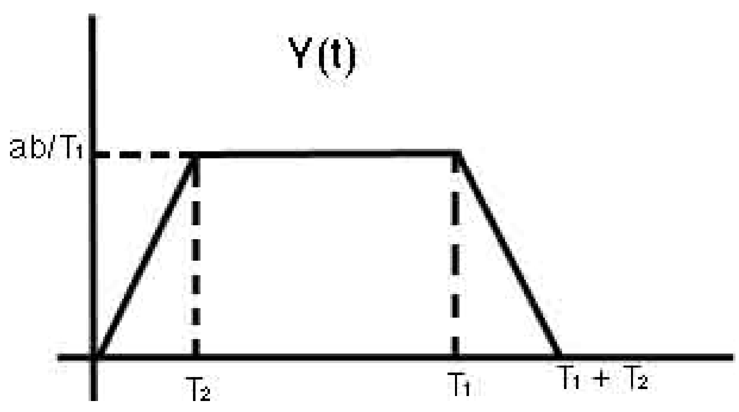
$y(t) = \int_{t-T_1}^{T_2} \frac{a}{T_1} * (t-\tau) * \tau * b * \delta\tau = \frac{a}{T_1} * b * \tau|_{t-T_1}^{T_2} = \frac{a*b}{T_2+T_1-t}$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_1 + T_2 < t$



$y(t) = 0$

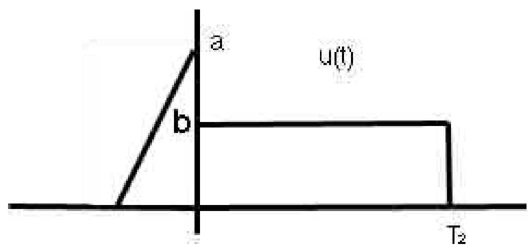
Ahora que tenemos todas las distintas funciones, sólo debemos unificarlas en una única gráfica:



2) Sea $h(t,\tau) = \frac{1}{t+1} + h_0(t-\tau)$ con $h_0(t)$ es la h(t) del ejercicio anterior y u(t) es la misma del ejercicio anterior, hallar $Y(\tau)$, usando distintos valores de t.

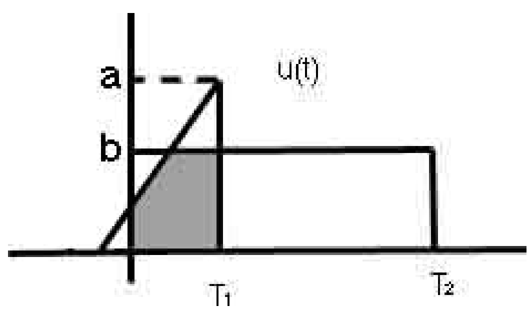
Con t = 0

En primer lugar, hallaremos la solución si $t < 0$:



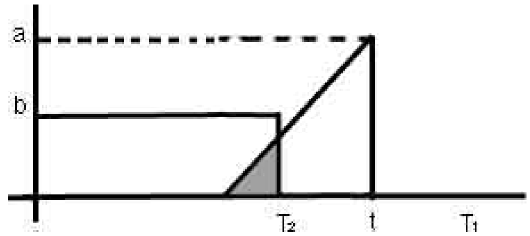
Y(t) = 0

Ahora, hallaremos y(t) si $0 < t \leq T_2$



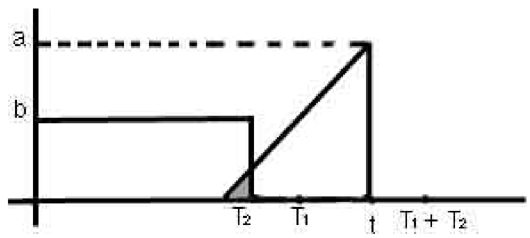
$y(t) = \int_0^t (1 - \frac{a*\tau}{T_1}) * b * \delta\tau = [b*\tau - \frac{a*b*\tau^2}{2*T_1}]_0^t = b*t - \frac{a*b*t}{2*T_1}$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_2 < t \leq T_1$



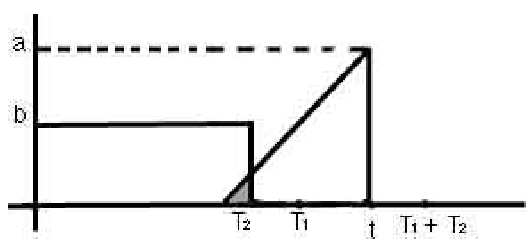
$y(t) = \int_0^{T_2} (1 - \frac{a*\tau}{T_1}) * b * \delta\tau = [b * \tau - \frac{a*b*\tau^2}{2*T_1}]_0^t = b * T_2 - \frac{a*b*T_2^2}{2*T_1}$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_1 < t \leq T_1 + T_2$



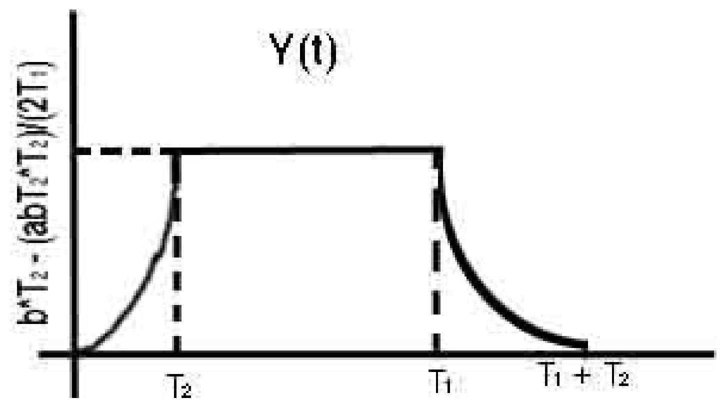
$y(t) = \int_{t-T_1}^{T_2} (1 - \frac{a*\tau}{T_1}) * b * \delta\tau = [b * \tau - \frac{a*b*\tau^2}{2*T_1}]|_{t-T_1}^{T_2} = b * (T_2 + T_1 - t) - \frac{a*b}{2*T_1} * (T_2 + T_1 - t)^2$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_1 + T_2 < t$



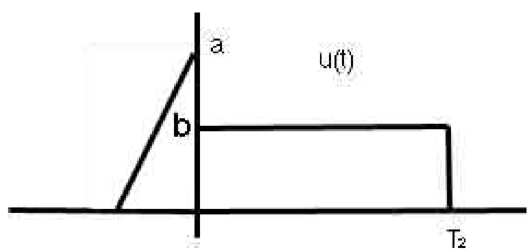
$y(t) = 0$

Ahora que tenemos todas las distintas funciones, slo debemos unificarlas en una única gráfica:



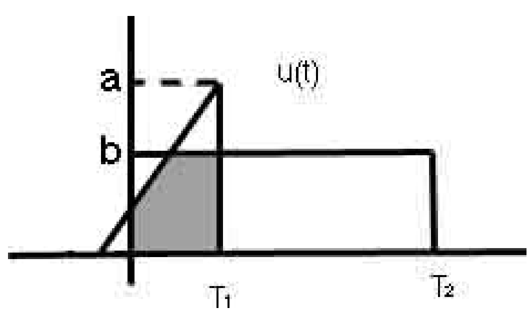
Con t = 1

En primer lugar, hallaremos la solución si $t < 0$:



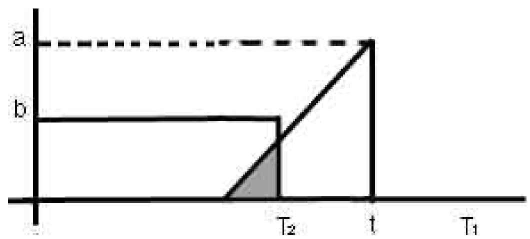
Y(t) = 0

Ahora, hallaremos y(t) si $0 < t \leq T_2$



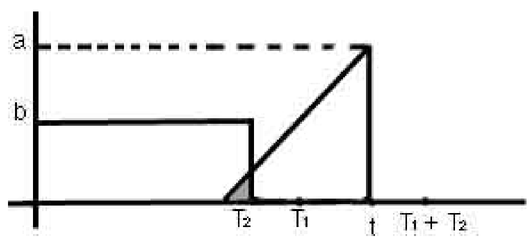
$y(t) = \int_0^t((\frac{1}{2} - \frac{a}{T_1} - \frac{a*\tau}{T_1}) * b * \delta\tau = [\frac{b*\tau}{2} + \frac{a*b*\tau}{T_1} - \frac{a*b*\tau^2}{2*T_1}]_0^t = \frac{b*t}{2} + \frac{a*b*t}{T_1} - \frac{a*b*t^2}{2*T_1}$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_2 < t \leq T_1$



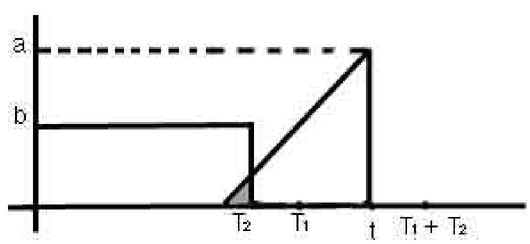
$y(t) = \int_0^{T_2}(\frac{1}{2} - \frac{a}{T_1} - \frac{a*\tau}{T_1}) * b * \delta\tau = [\frac{b*\tau}{2} + \frac{a*b*\tau}{T_1} - \frac{a*b*\tau^2}{2*T_1}]_0^t = frac b * T_2 2 + \frac{a*b*T_2}{T_1} - \frac{a*b*T_2^2}{2*T_1}$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_1 < t \leq T_1 + T_2$



$y(t) = \int_{t-T_1}^{T_2}(\frac{1}{2} - \frac{a}{T_1} - \frac{a*\tau}{T_1})) * b * \delta\tau = [\frac{b*\tau}{2} + \frac{a*b*\tau}{T_1} - \frac{a*b*\tau^2}{2*T_1}]|_{t-T_1}^{T_2} =$
$= (\frac{b}{2} + \frac{a*b}{T_1} - \frac{a*b*(T_2+T_1-t)}{2*T_1}) * (T_2 + T_1 - t)$

Ahora, hallaremos y(t) si $T_1 + T_2 < t$



$y(t) = 0$

Ahora que tenemos todas las distintas funciones, slo debemos unificarlas en una única gráfica: