Práctica número 1
Teoría de Sistemas

Gabriel Fernández Díaz
David Morales Sáez

2011/2012

1.- Hallar las matrices **A** y **B** de los sistemas invariantes definidos por las ecuaciones diferenciales:

a) $D^3x + 3D^2x + 4D^1x + 2x = D^2r_1 + D^1r_2 + r_3$

b) $D^4x + 4D^3x + 11D^2x + 14D^1x + 10x = D^1r + r$

D^n quiere decir derivada respecto a t n veces.

Hallar los autovalores y construir modelos Simulink de los sistemas anteriores simularlos usando:

1) Como entradas un generador de pulsos cuadrados de periodo diez y valores iniciales cero para todas las variables de estado.

2) cero para todas las entradas y valores iniciales, excepto $x_1 = 1$.

Representar la evolución en tiempo de las distintas variables de estado.

a)

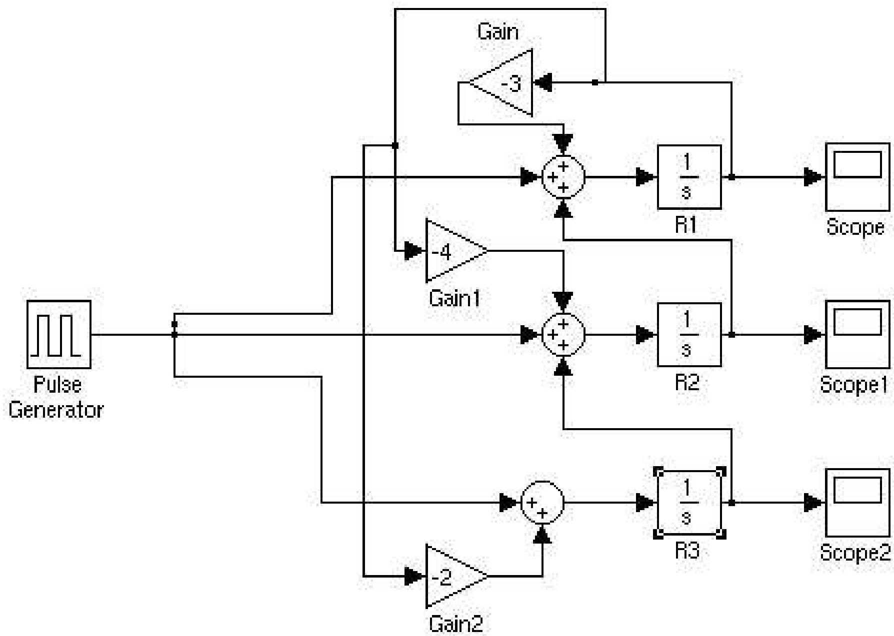
$$\begin{aligned}
D^3x &+ 3D^2x + +4D^1x + 2x = D^2r_1 + D^1r_2 + r_3 \\
\dddot{x_1} &= -3\ddot{x}_1 + \ddot{r}_1 + [-\dot{x}_1 + \dot{r}_2 - 2x_1 + r_3] \rightarrow \ddot{x}_2 \\
\ddot{x}_2 &= -\dot{x}_1 + \dot{r}_2 + [-2x_1 + r_3] \rightarrow \dot{x}_3 \\
\dot{x}_3 &= -2x_1 + r_3 \\
A &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

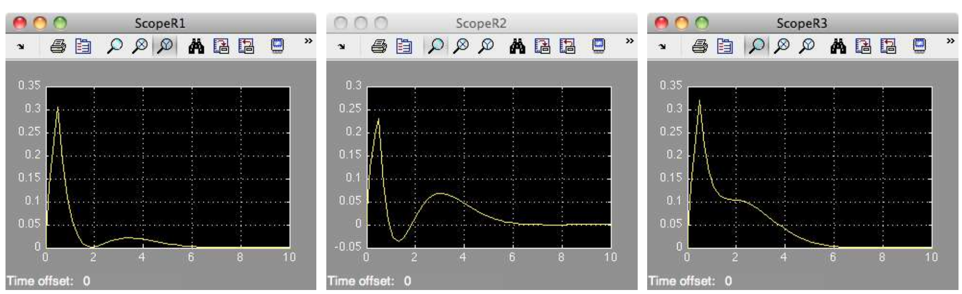
Autovalores :

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 2 = 0$$

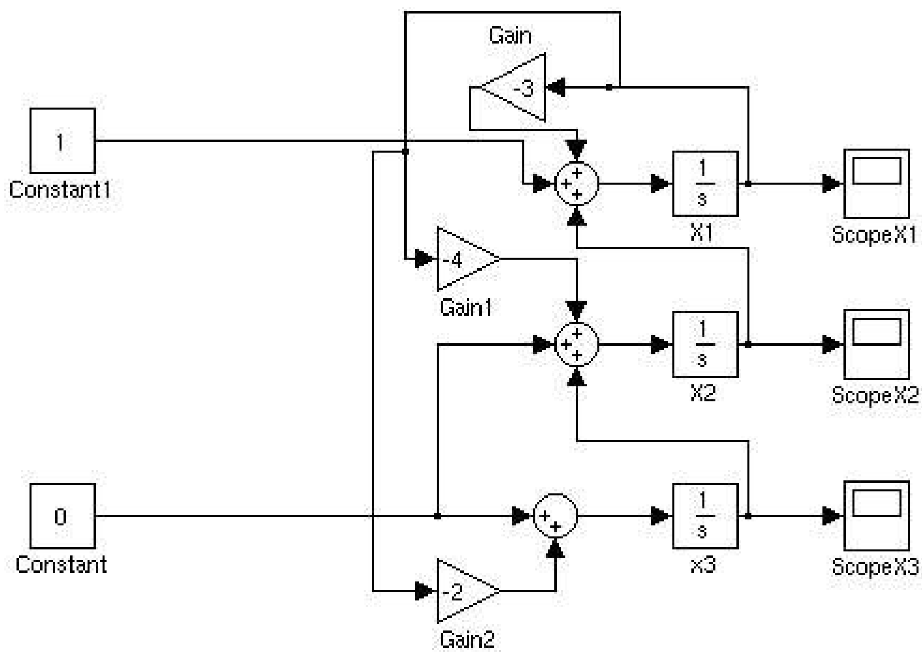
$$\lambda = \begin{bmatrix} -1+i \\ -1-i \\ -1 \end{bmatrix}$$

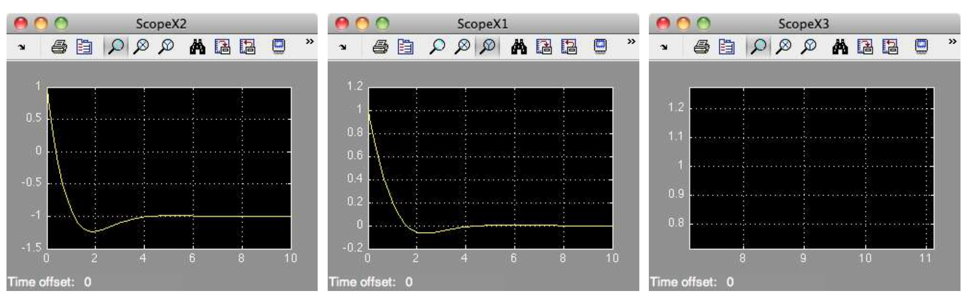
1)


Gain
-3
1
s
R1
Scope
-4
Gain1
Pulse
Generator
1
s
R2
Scope1
1
s
R3
Scope2
-2
Gain2


ScopeR1
ScopeR2
ScopeR3
Time offset: 0
Time offset: 0
Time offset: 0

2)


Gain
-3
1
Constant1
+
+
+
1
s
X1
ScopeX1
-4
Gain1
+
+
+
1
s
X2
ScopeX2
0
Constant
+
+
1
s
x3
ScopeX3
-2
Gain2


ScopeX2
Time offset: 0
ScopeX1
Time offset: 0
ScopeX3
Time offset: 0

b)

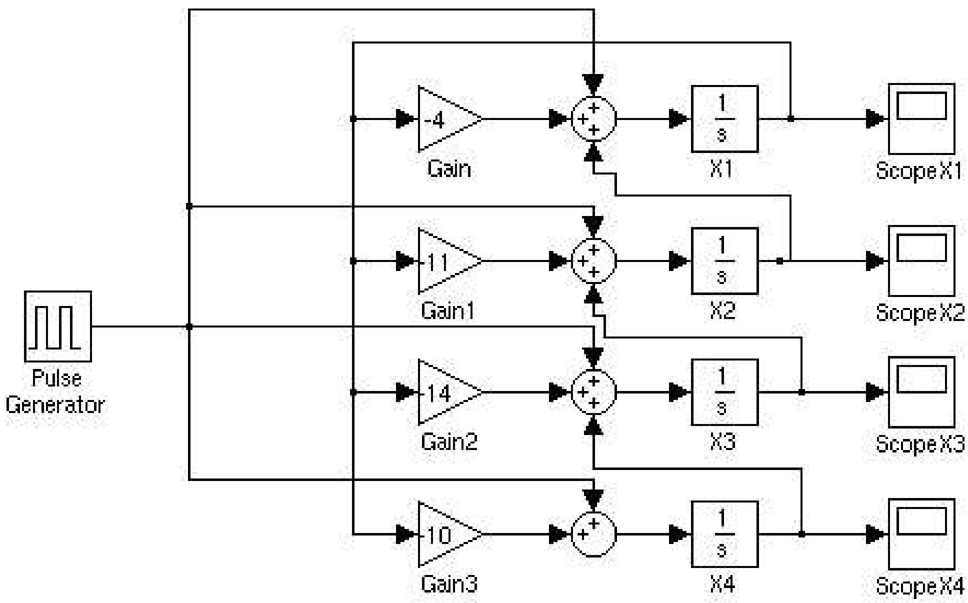
$$
\begin{aligned}
D^4x &+ 4D^3x + 11D^2x + 14D^1x + 10x = D^1r + r \\
\dddot{x_1} &= -4\ddot{x_1} + [-11\ddot{x_1} - 14\dot{x_1} + \dot{r} - 10x + r] \to \dddot{x_2} \\
\dddot{x_2} &= -11\ddot{x_1} + [-14\dot{x_1} + \dot{r} - 10x + r] \to \ddot{x_3} \\
\ddot{x_3} &= -14\dot{x_1} + \dot{r} + [-10x + r] \to \dot{x_4} \\
\dot{x_4} &= -10x + r \\
A &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ r \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

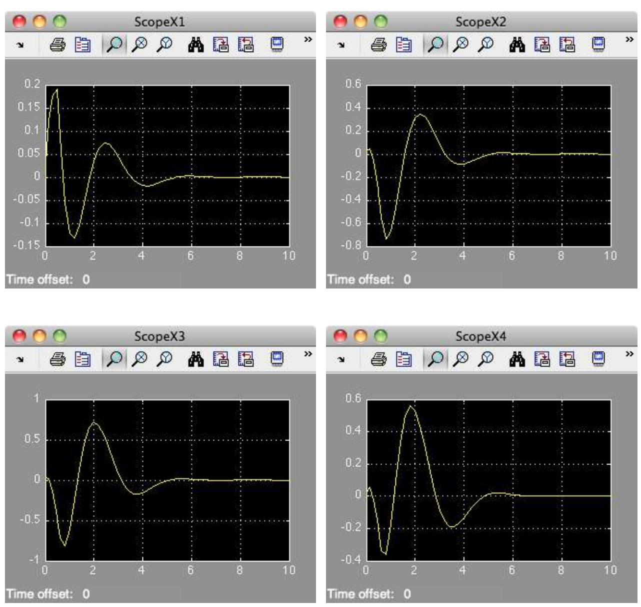
$Autovalores:$

$$
\begin{bmatrix} -4-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -11 & -\lambda & 1 & 0 \\ -14 & 0 & -\lambda & 1 \\ -10 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \to \lambda^4 + 4\lambda^3 + 11\lambda^2 + 14\lambda + 10 = 0
$$

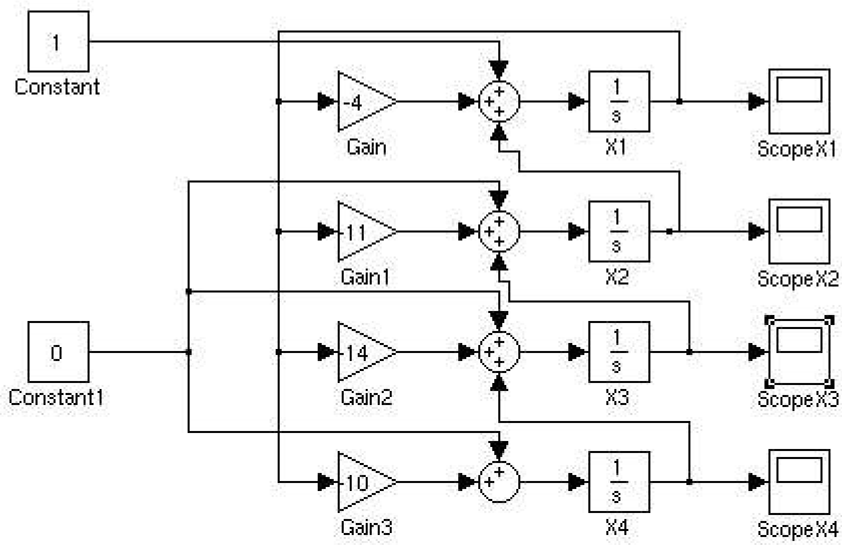
$$
\lambda = \begin{bmatrix} -1+2i \\ -1-2i \\ -1+i \\ -1-i \end{bmatrix}
$$

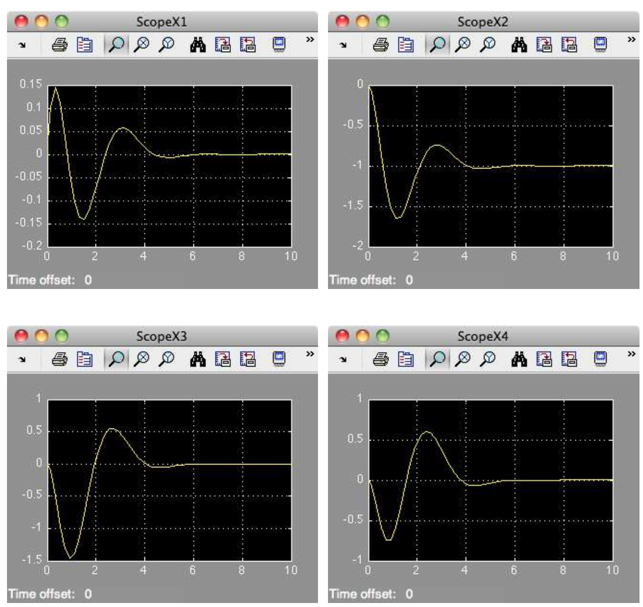
1)


-4
Gain
11
Gain1
14
Gain2
10
Gain3
1
s
X1
X2
X3
X4
ScopeX1
ScopeX2
ScopeX3
ScopeX4
Pulse
Generator


ScopeX1
ScopeX2
ScopeX3
ScopeX4
Time offset: 0

2)


1
Constant
-4
Gain
1
s
X1
ScopeX1
-11
Gain1
X2
ScopeX2
0
Constant1
-14
Gain2
X3
ScopeX3
-10
Gain3
X4
ScopeX4


ScopeX1
ScopeX2
ScopeX3
ScopeX4
Time offset: 0

2.- Las ecuaciones del movimiento de un sistema de dos masas puntuales de valores m1 y m2, unidas por una fuerza de recuperación (resorte), de constante k, moviéndose en un plano sin rozamiento son:

$$k(r_2 - r_1) = m_1 D^2 r_1$$
$$k(r_1 - r_2) = m_2 D^2 r_2$$

Con $r_1 = [x_1, y_1]$ y $r_2 = [x_2, y_2]$ (coordenadas x,y de los puntos). D^2 es la segunda derivada respecto del tiempo.

Hallar la matriz **A** del sistema (Ecuaciones de estado). Para $m_1 = 1Kg$, $m_2 = 2Kg$, $k = 1New/m$. Hallar los autovalores de **A**. Construir un modelo en Simulink del sistema anterior para los valores $r_1(0) = (0,1)$, $r_2(0) = (1,0)$ y velocidades $v_1(0) = v_2(0) = 0$. Representar gráficamente el movimiento del punto 1 en el plano. Lo mismo para el punto 2. Representar la evolución en el tiempo de las distintas variables de estado.

$$\begin{array}{lcl} k(r_2 - r_1) = m_1 D^2 r_1 & \rightarrow & k([x_2 - x_1], [y_2 - y_1]) = m_1 D^2 [x_1, y_1] \\ k(r_1 - r_2) = m_2 D^2 r_2 & \rightarrow & k([x_1 - x_2], [y_1 - y_2]) = m_2 D^2 [x_2, y_2] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} k([x_2 - x_1], [y_2 - y_1]) & = & D^2 [x_1, y_1] \\ k([x_1 - x_2], [y_1 - y_2]) & = & 2D^2 [x_2, y_2] \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} D^2 x_1 = k(x_2 - x_1) \\ D^2 y_1 = k(y_2 - y_1) \end{array}\right\} \rightarrow a_1$$

$$\left.\begin{array}{r} D^2 x_2 = \frac{k}{2}(x_1 - x_2) \\ D^2 y_2 = \frac{k}{2}(y_1 - y_2) \end{array}\right\} \rightarrow a_2$$

$$\begin{array}{rl} \dot{x_1} = v_{x1} & \dot{y_1} = v_{y1} \\ \dot{x_2} = v_{x2} & \dot{y_2} = v_{y2} \\ \dot{v_{x1}} = k(x_2 - x_1) & \dot{v_{y1}} = k(y_2 - y_1) \\ \dot{v_{x2}} = k(x_1 - x_2) & \dot{v_{y2}} = k(y_1 - y_2) \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \\ \dot{v_{x1}} \\ \dot{v_{x2}} \\ \dot{v_{y1}} \\ \dot{v_{y2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

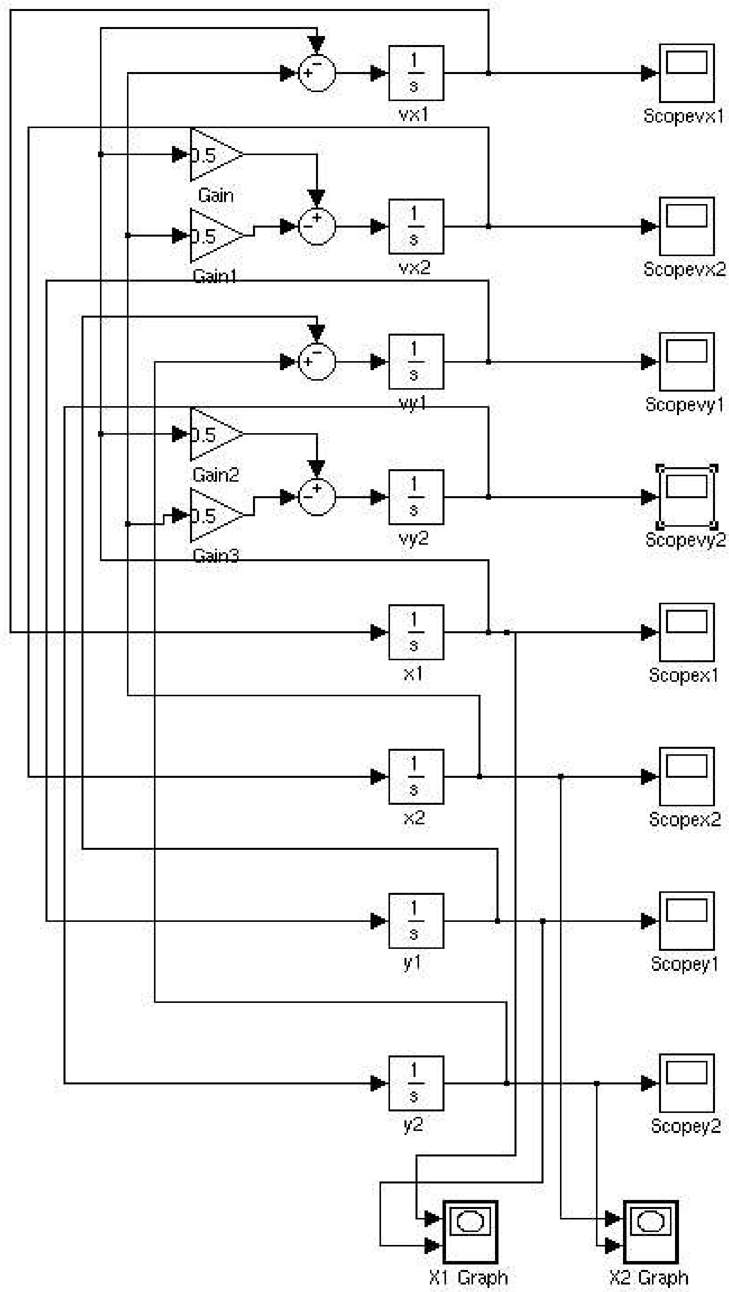
$Autovalores:$

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & k & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

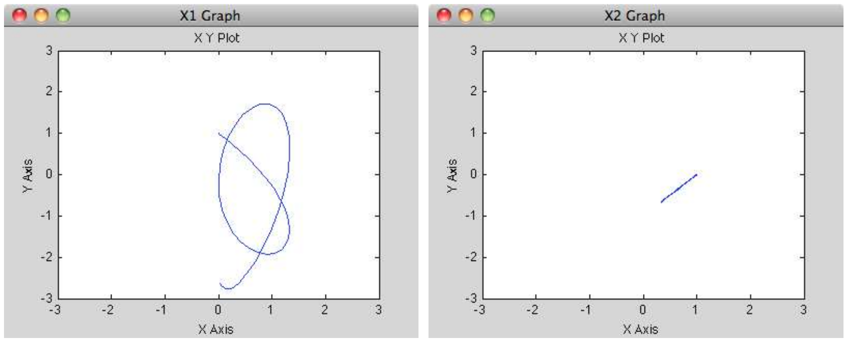
$$\rightarrow \lambda^8 + 3k\lambda^6 + \frac{9k^2\lambda^4}{2} = 0$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.2247i \\ 1.2247i \\ -1.2247i \\ -1.2247i \end{bmatrix}$$

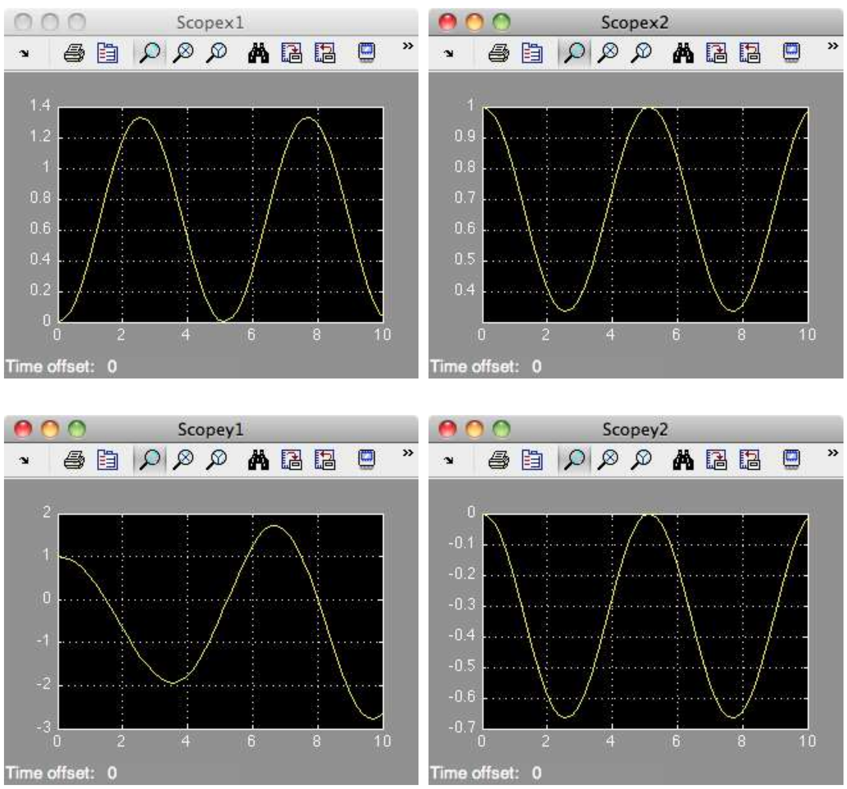
Esquema en Simulink



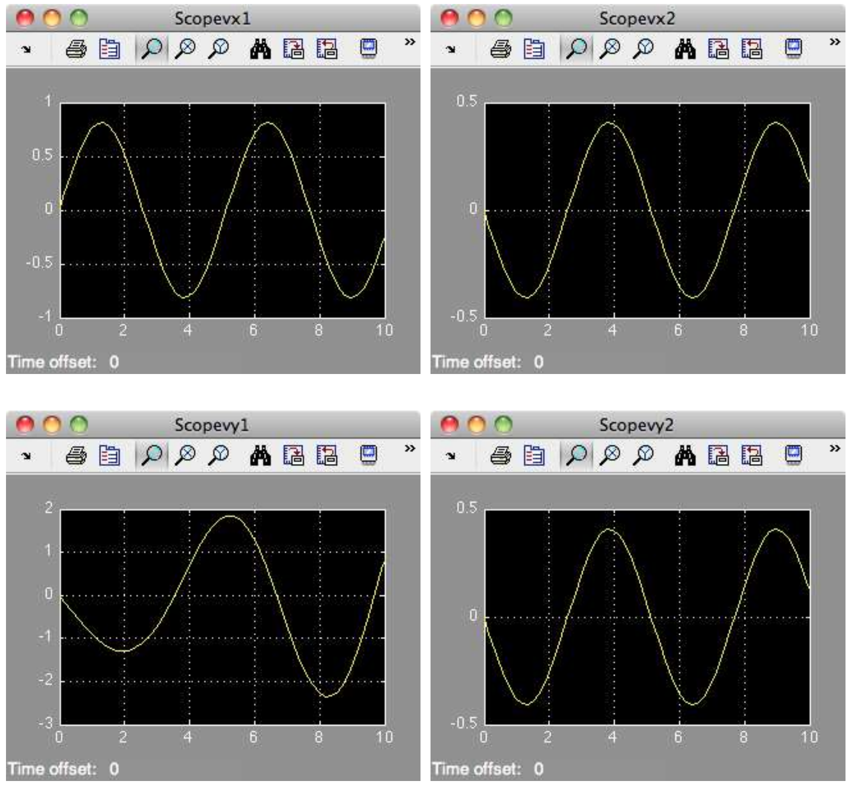
Movimiento de los puntos



Evolución de las posiciones a lo largo del tiempo



Evolución de las velocidades a lo largo del tiempo



3.- Hallar las ecuaciones de estado del circuito de la figura 1 (matrices **A**, **B**, **C** y **D**). V es la señal de entrada y V_0 la de salida. Usar como variables de estado los voltajes en los condensadores y las corrientes en las bobinas. Construir un modelo Simulink para L= 1 Henrio, C_1= C_2= 1 Faradio, R =1 Ohmio, el voltaje aplicado V de cero voltios y el valor del voltaje inicial de C_1= 1 Voltio. Representar gráficamente la evolución temporal del voltaje en C_2 y de la corriente i_R en la resistencia R. Hallar los autovalores de la matriz A del sistema.

Utilizando la teoría de nudos, utilizamos el nudo donde confluyen la intensidad i_L y la intensidad i_R y obtenemos la siguiente ecuación, de donde extraemos las ecuaciones de estado:

$$i_L + C_2 * \dot{V_2} = \frac{V - V_2}{R} + C_1 * (\dot{V} - \dot{V_2})$$

dado que $V_2 = L * \dot{i_L}$

$$\begin{aligned}
i_L \quad &+ \quad C_2 * L * \ddot{i_L} = \frac{V - L * \dot{i_L}}{R} + C_1 * (\dot{V} - L * \ddot{i_L}) \\
i_L \quad &= \quad X_1 \\
& \quad\quad \textit{sustituimos} \quad y \quad \textit{reordenamos}:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{X_1} \quad &= \quad \frac{\dot{X_1}}{R * (C_2 + 1)} + \frac{C_1 * \dot{V}}{L * (C_2 + 1)} + [-\frac{X_1}{L * (C_2 + 1)} + \frac{V}{R * L * (C_2 + 1)}] \rightarrow \dot{X_2} \\
\dot{X_1} \quad &= \quad \frac{X_1}{R * (C_2 + 1)} + \frac{C_1 * V}{L * (C_2 + 1)} + X_2 \\
\dot{X_2} \quad &= \quad -\frac{X_1}{L * (C_2 + 1)} + \frac{V}{R * L * (C_2 + 1)} \\
A \quad &= \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{R*(C_2+1)} & 1 \\ \frac{-1}{L*(C_2+1)} & 0 \end{bmatrix} \\
B \quad &= \quad \begin{bmatrix} \frac{C_1}{L*(C_2+1)} \\ \frac{1}{R*L*(C_2+1)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

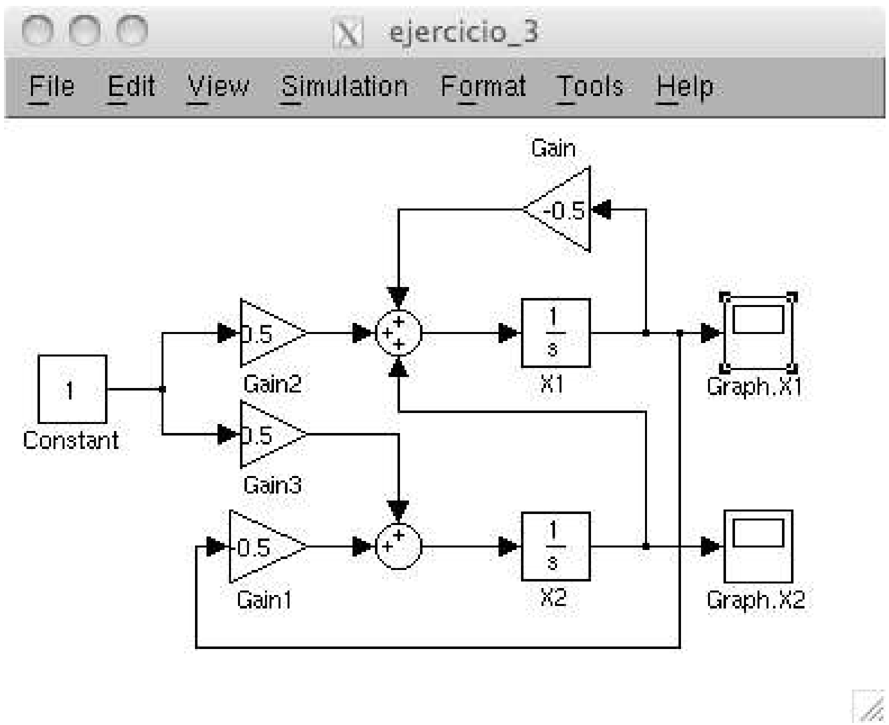
$Autovalores:$

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R*(C_2+1)} - \lambda & 1 \\ \frac{-1}{L*(C_2+1)} & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda^2 - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\
\lambda &= \begin{bmatrix} 0.25 + 0.6614i \\ 0.25 - 0.6614i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Conociendo la función de salida $V_0 = V - V_2$:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= V - V_2 \rightarrow V_2 = L * \dot{i_L} = L * \dot{X_1} \\
V_0 &= V - \frac{L * X_1}{R * (C_2 + 1)} - \frac{C_1 * V}{C_2 + 1} - L * X_2 \\
V_0 &= (\frac{C_1}{C_2 + 1} - 1) * V - \frac{L * X_1}{R * (C_2 + 1)} - L * X_2 \\
C &= \begin{bmatrix} -\frac{L}{R*(C_2+1)} \\ -L \end{bmatrix} \\
D &= [\frac{C_1}{C_2 + 1} - 1]
\end{aligned}
$$

El modelo simulink del sistema es el siguiente:



Además, la evolución de las distintas variables de estado es la siguiente: