Práctica número 5
Teoría de Sistemas

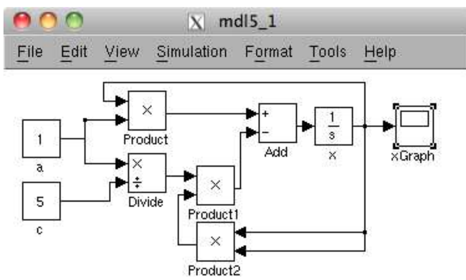
Gabriel Fernández Díaz
David Morales Sáez

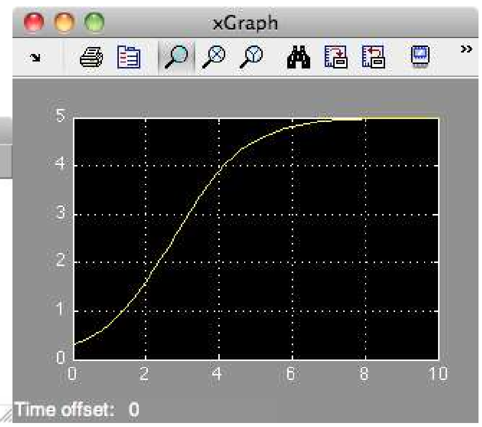
2011/2012

5.1.-Dada la ecuación de crecimiento estratégico $Dx = a(1 - \frac{x}{c})x$

a) Simular el sistema para a=1, c=5 y x(0)=0,3 y representar gráficamente la solución x(t).

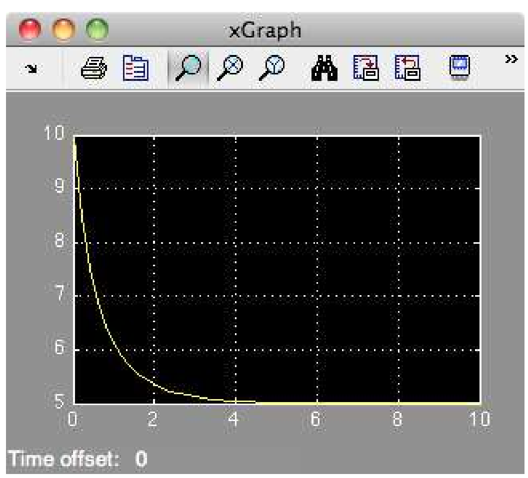
   El sistema anteriormente descrito ha sido simulado en simulink de la siguiente forma y hemos obtenido las siguientes salidas:





b) Lo mismo para x(0)=10

   Las evolución de x(t) a lo largo del tiempo modificando su valor inicial a 10 es la siguiente:



c) Calcular el tiempo de escape para c=-50. Simular cortando antes del tiempo de escape para evitar singularidades (p.e. simulation time 5).

Si partimo de la ecuación inicial $\dot{x} = ax - \frac{ax^2}{c}$, podemos sustituir $z = \frac{1}{x}$, por lo que:

$$\frac{\dot{z}}{-z^2} = \frac{a}{z} - \frac{a}{cz^2} \rightarrow \dot{z} = -az + \frac{a}{c}$$

$$Integramos \quad y \quad sustituimos:$$

$$z(t) = 1 + \left[z(0) - \frac{1}{c}\right] e^{-at} \rightarrow x(t) = \frac{ce^{at}}{\frac{C}{x(0)}e^{-at} - 1} = \frac{x(0)ce^{at}}{x(0)(e^{at} - 1) + c}$$

$$x(x(0)(e^{at} - 1) + c) = x(0)ce^{at}$$

$$x(0)xe^{at} - x(0)x + xc = x(0)xe^{at}$$

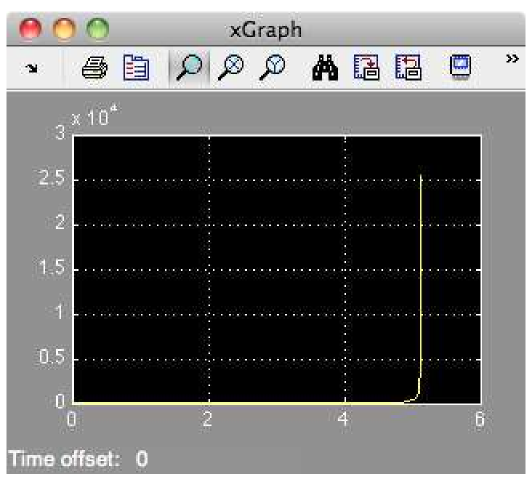
$$(xc - x(0)x)e^{-at} = x(0)c - x(0)x$$

$$e^{-at} = \frac{x(0)c - x(0)x}{xc - x(0)x} \rightarrow t = \frac{ln(\frac{xc - x(0)x}{x(0)c - x(0)x})}{a} = \frac{ln(\frac{xc - x(0)x}{x(0)c - x(0)x} * \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}})}{a}$$

$$t = \frac{ln(\frac{c - x(0)}{\frac{x(0)c}{x} - x(0)})}{a} \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{ln(\frac{c - x(0)}{\frac{x(0)c}{\infty} - x(0)})}{a} = \frac{ln(\frac{c - x(0)}{-x(0)})}{a}$$

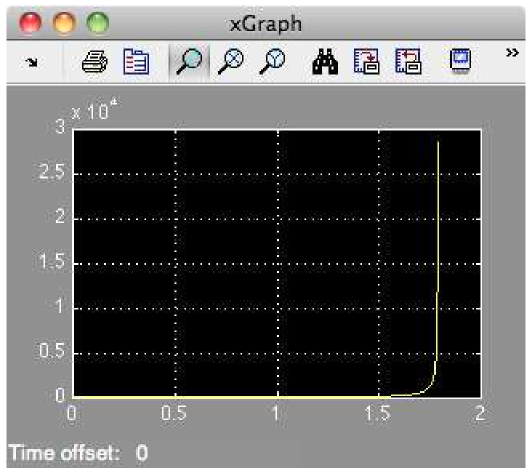
- x(0) = 0.3

  Para el caso en el que x(0) = 0.3, el tiempo de escape es 5.12s, por lo que hemos adecuado el tiempo de simulación para evitar errores:



- x(0) = 10

  Para el caso en el que x(0) = 10, el tiempo de escape es 1.79s, por lo que hemos adecuado el tiempo de simulación para evitar errores:



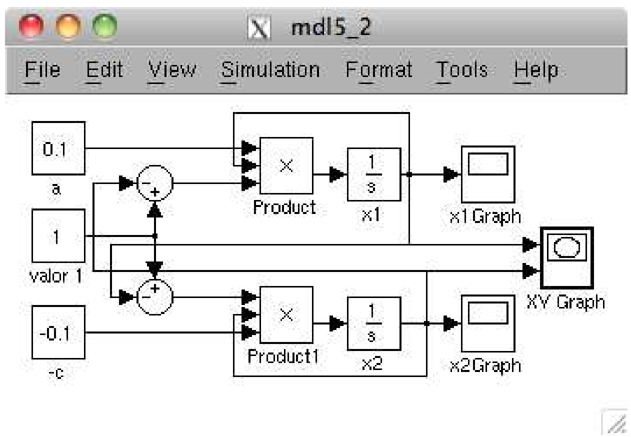
5.2.- En el modelo predador-presa de Volterra:

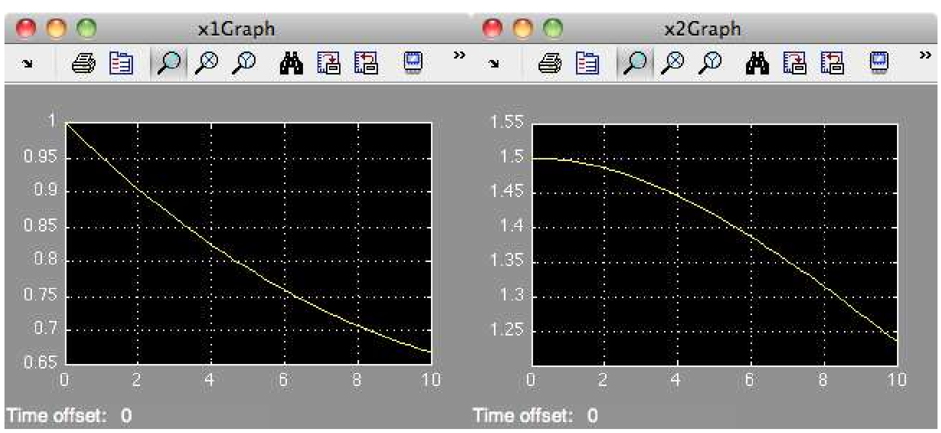
$$Dx1 = ax1(1 - x2)$$
$$Dx2 = -cx2(1 - x1)$$

Para a=0,1 y c=0,1, x1(0)=1, x2(0)= 1,5

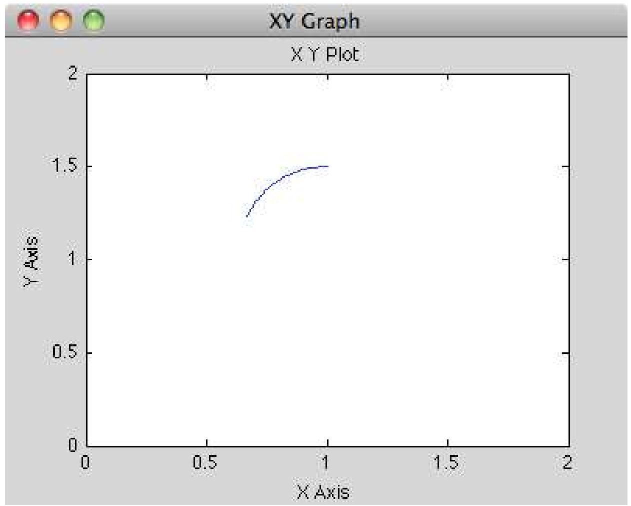
a) Simular el sistema y representar x1 y x2.

El sistema anteriormente descrito ha sido simulado en simulink de la siguiente forma y hemos obtenido las siguientes salidas:



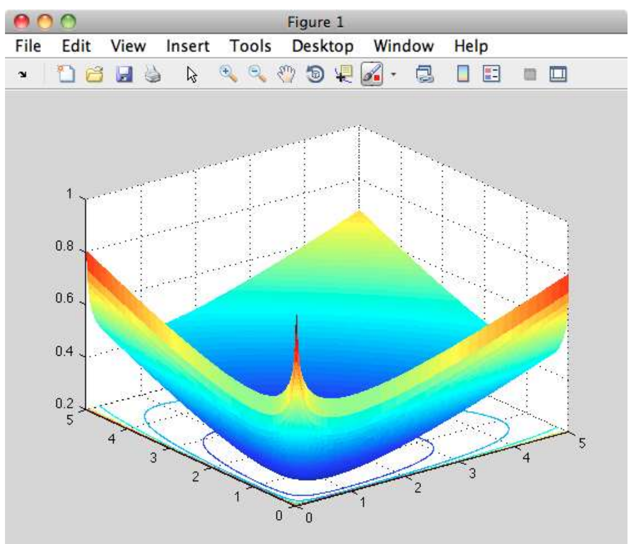


b) Representar x1 y x2 en el espacio de estados.



c) Representar grficamente la funcin Liapunov-Volterra

$$V = a(x2 - lnx2) + c(x1 + lnx1)$$



d) Representar las trayectorias del sistema, es decir las curvas V=cte.