Práctica número 2
Teoría de Sistemas

Gabriel Fernández Díaz
David Morales Sáez

2011/2012

2.1- Para los casos de las prácticas 1.1 y 1.3, determinar:

a. Las matrices Jordan, J, de cada uno de los sistemas

- 1.1: La matriz A: $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [\lambda{*}I{-}A] = \begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda & -1 \\ 2 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$$\lambda^3 + 3*\lambda^2 + 4*\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = \begin{bmatrix} -0.23 + 1.92*i \\ -0.23 - 1.92*i \\ -0.53 \end{bmatrix}$$

$$Jordan = \begin{bmatrix} -0.23 + 1.92*i & 0 & 0 \\ 0 & -0.23 - 1.92*i & 0 \\ 0 & 0 & -0.53 \end{bmatrix}$$

- 1.3: La matriz A: $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [\lambda{*}I{-}A] = \begin{bmatrix} \lambda+4 & -1 & 0 & 0 \\ 11 & \lambda & -1 & 0 \\ 14 & 0 & \lambda & -1 \\ 10 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$$\lambda^4 + 4*\lambda^3 + 11*\lambda^2 - 13*\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda = \begin{bmatrix} -2.52 + 3.04*i \\ -2.52 - 3.04*i \\ 0.52 + 0.61*i \\ 0.52 - 0.61*i \end{bmatrix}$$

$$Jordan = \begin{bmatrix} \begin{matrix}-2.52\\+3.04*i\end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix}-2.52\\-3.04*i\end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix}0.52\\+0.61*i\end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}0.5201\\-0.61*i\end{matrix} \end{bmatrix}$$

b. Las soluciones Jordan, ϕ_z(t), para cada caso.

- 1.1: La matriz Jordan $= \begin{bmatrix} -0.23+1.92*i & 0 & 0 \\ 0 & -0.23-1.92*i & 0 \\ 0 & 0 & -0.53 \end{bmatrix}$

  por lo que $\phi_z = \begin{bmatrix} e^{(-0.23+1.92*i)*t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-0.23-1.92*i)*t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.53*t} \end{bmatrix}$

- 1.3: La matriz Jordan $= \begin{bmatrix} \begin{array}{c} -2.52 \\ +3.04*i \end{array} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{c} -2.52 \\ -3.04*i \end{array} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{array}{c} 0.52 \\ +0.61*i \end{array} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} 0.52 \\ -0.61*i \end{array} \end{bmatrix}$

  por lo que $\phi_z = \begin{bmatrix} e^{\left(\begin{array}{c} -2.52 \\ +3.04*i \end{array}\right)*t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\left(\begin{array}{c} -2.52 \\ -3.04*i \end{array}\right)*t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\left(\begin{array}{c} 0.52 \\ +0.61*i \end{array}\right)*t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\left(\begin{array}{c} 0.52 \\ -0.61*i \end{array}\right)*t} \end{bmatrix}$

c. Las matrices de Lastres de cada sistema

- 1.1: La matriz del sistema A $= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  y con $L_1 = [100]$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- 1.3 : La matriz del sistema A $= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  t y con $L_1 = [1000]$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

d. Las matrices de Lastres de las formas Jordan, L_z

- 1.1: La matriz Jordan $= \begin{bmatrix} -0.23+1.92*i & 0 & 0 \\ 0 & -0.23-1.92*i & 0 \\ 0 & 0 & -0.53 \end{bmatrix}$

  por lo que, tomando $L_1 = [111]$, $L_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.23+1.92*i & -0.23-1.92*i & -0.53 \\ -3.63-0.88*i & -3.63+0.88*i & 0.28 \end{bmatrix}$

- 1.3: La matriz Jordan $= \begin{bmatrix} \begin{array}{c} -2.52 \\ +3.04*i \end{array} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{c} -2.52 \\ -3.04*i \end{array} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{array}{c} 0.52 \\ +0.61*i \end{array} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} 0.52 \\ -0.61*i \end{array} \end{bmatrix}$

  por lo que, tomando $L_1 = [1111]$,

$$L_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{array}{c} -2.52 \\ +3.04*i \end{array} & \begin{array}{c} -2.52 \\ -3.04*i \end{array} & \begin{array}{c} -0.52 \\ +0.61*i \end{array} & \begin{array}{c} -0.52 \\ -0.61*i \end{array} \\ \begin{array}{c} -2.9 \\ -15.33*i \end{array} & \begin{array}{c} -2.9 \\ +15.33*i \end{array} & \begin{array}{c} -0.1 \\ +0.63*i \end{array} & \begin{array}{c} -0.1 \\ -0.63*i \end{array} \\ \begin{array}{c} 53.93 \\ 29.81*i \end{array} & \begin{array}{c} 53.93 \\ -29.81*i \end{array} & \begin{array}{c} -0.44 \\ 0.27*i \end{array} & \begin{array}{c} -0.44 \\ -0.17*i \end{array} \end{bmatrix}$$

e. Las soluciones, ϕ(t) para cada caso

- 1.1: La matriz $\phi_z = \begin{bmatrix} e^{(-0.23+1.92*i)*t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-0.23-1.92*i)*t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.53*t} \end{bmatrix}$

  y la matriz $L_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 1 \\ 21 & -9 & 1 \end{bmatrix}$, siendo $L_z^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & -0.1 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$

  y $\phi = L_z * \phi_z * L_z^{-1}$: [1]

$$\phi_1 : \begin{bmatrix} \frac{0.99}{e^{0.53*t}} + \frac{0.14*i+0.01}{e^{t*(1.92*i+0.23)}} + \frac{0.01-0.14*i}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \\ \frac{-0.52}{e^{0.53*t}} + \frac{0.26-0.04*i}{e^{t*(0.23+1.92*i)}} + \frac{0.26+0.04*i}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \\ \frac{0.28}{e^{0.53*t}} + \frac{-0.14-0.49*i}{e^{t*(0.23+1.92*i)}} + \frac{-0.13+0.49*i}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 : \begin{bmatrix} \frac{0.12}{e^{0.53*t}} + \frac{9.27*i-0.06}{e^{t*(1.92*i+0.23)}} + \frac{-0.27*i-0.06}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \\ \frac{-0.06}{e^{0.53*t}} + \frac{0.53+0.05*i}{e^{t*(0.23+1.92*i)}} + \frac{0.53-0.05*i}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \\ \frac{0.03}{e^{0.53*t}} + \frac{-0.02-1.03*i}{e^{t*(0.23+1.92*i)}} + \frac{-0.02+1.03*i}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \end{bmatrix}$$

$$\phi_3 : \begin{bmatrix} \frac{0.27}{e^{0.53*t}} + \frac{-0.13+0.02*i}{e^{t*(1.92*i+0.23)}} + \frac{-0.13-0.02*i}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \\ \frac{-0.14}{e^{0.53*t}} + \frac{0.07+0.25*i}{e^{t*(0.23+1.92*i)}} + \frac{0.07-0.25*i}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \\ \frac{0.07}{e^{0.53*t}} + \frac{0.46-0.19*i}{e^{t*(0.23+1.92*i)}} + \frac{0.46+0.19*i}{e^{t*(0.23-1.92*i)}} \end{bmatrix}$$

siendo $\phi = [\phi_1 \phi_2 \phi_3]$

[1]Dado el tamaõ de los valores integrantes de la matriz, hemos decidido mostrarlo por subvectores columna, facilitando su lectura. Además, hemos decidido que todo valor inferior a 10^{-10} será considerado como cero.

- 1.3: La matriz $\phi_z = \begin{bmatrix} e^{\left(\begin{smallmatrix}-2.52\\+3.04*i\end{smallmatrix}\right)*t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\left(\begin{smallmatrix}-2.52\\-3.04*i\end{smallmatrix}\right)*t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\left(\begin{smallmatrix}0.52\\+0.61*i\end{smallmatrix}\right)*t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\left(\begin{smallmatrix}0.52\\-0.61*i\end{smallmatrix}\right)*t} \end{bmatrix}$

  y la matriz $L_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{smallmatrix}-2.52\\+3.04*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-2.52\\-3.04*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-0.52\\+0.61*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-0.52\\-0.61*i\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}-2.9\\-15.33*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-2.9\\+15.33*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-0.1\\+0.63*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-0.1\\-0.63*i\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}53.93\\29.81*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}53.93\\-29.81*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-0.44\\0.27*i\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-0.44\\-0.27*i\end{smallmatrix} \end{bmatrix}$

  por lo que $L_z^{-1} = \begin{bmatrix} -0.01+0.01i & -0.01-0.04i & 0.02+0.02i & 0.01-0.01i \\ 0.02+0.01i & -0.04+0.02i & 0.01-0.03i & 0.01-0.01i \\ 0.22-0.02i & 0.42-0.71i & 0.13-0.23i & 0.02-0.04i \\ 0.77+0.01i & -0.38+0.73i & -0.15+0.24i & -0.04+0.05i \end{bmatrix}$

  y $\phi = L_z * \phi_z * L_z^{-1}$: [2]

$$\phi_1 : \begin{bmatrix} \frac{1}{e^{t*(0.52-3.04*i)}} \\ \frac{0.25+3.95*i}{e^{(t*(2.52+3.04*i)}} + \frac{-2.52+3.04*i}{e^{t*(2.52-3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (37.52+9.45*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (-35.03-16.44*i) \\ \frac{11.95-10.03*i}{e^{(t*(2.52+3.04*i)}} + \frac{-2.9-15.33*i}{e^{t*(2-52-3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (21.56+21.99*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (-30.61+3.37*i) \\ \frac{-60.62-11.08*i)}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + \frac{53.93+29.81*i)}{e^{t*(2.52-3.04*)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (24.86-1.68*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (-18.18-17.05*i) \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 : \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0.02+0.06*i}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (0.8+0.92*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (0.18-0.98*i) \\ \frac{0.13-0.22*i}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (0.16+0.96*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (-0.29-0.74*i) \\ \frac{-0.98+0.16*i)}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (0.67+0.41*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (0.31-0.57*i) \end{bmatrix}$$

$$\phi_3 : \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-0.01-0.03*i}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (-0.15-1.56*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (0.16+1.29*i) \\ \frac{-0.06+0.11*i}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + e^{t*(0.51-0.61*i)} * (0.42-0.92*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (0.65+0.81*i) \\ \frac{0.5-0.08*i}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (-0.34-0.74*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (-0.16+0.82*i) \end{bmatrix}$$

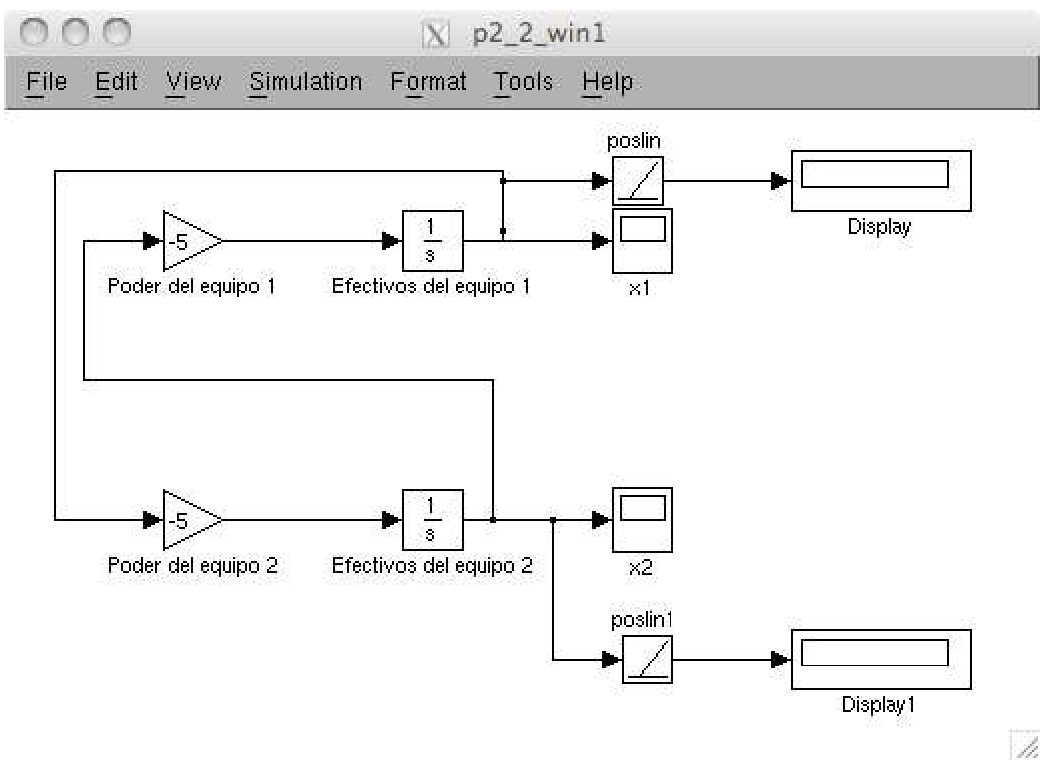
$$\phi_4 : \begin{bmatrix} 0 \\ frac{-}0.02-0.06*ie^{t*0.52+3.04*i)} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (-0.32-0.11*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (0.34+0.17*i) \\ \frac{-0.14)}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (-0.17-0.21*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (0.31-0.02*i) \\ \frac{1.04-0.17*)}{e^{t*(2.52+3.04*i)}} + e^{t*(0.52-0.61*i)} * (-0.22-0.01*i) + e^{t*(0.52+0.61*i)} * (0.17+0.18*i) \end{bmatrix}$$

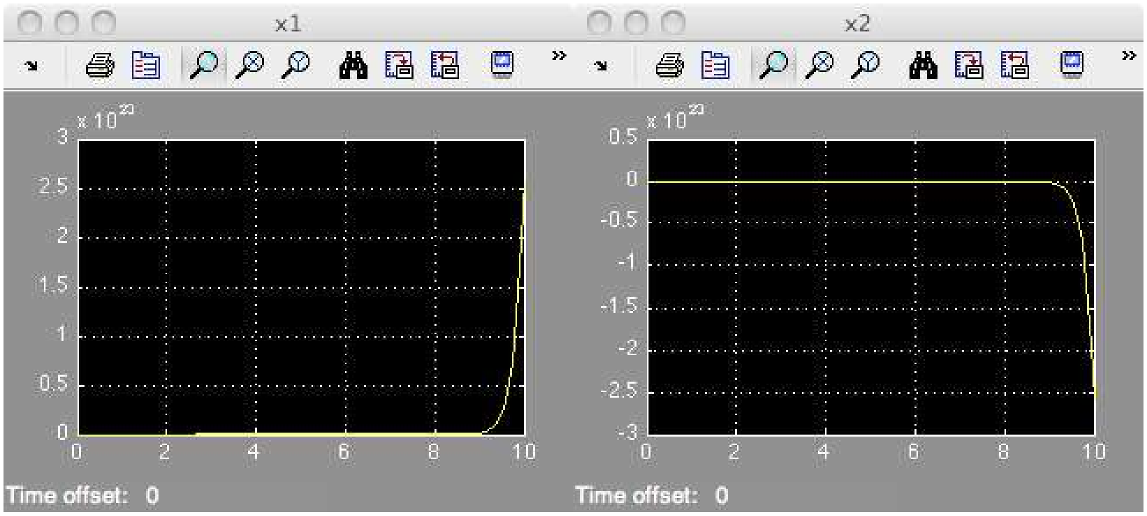
  siendo $\phi = [\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4]$

[2]Dado el tamaõ de los valores integrantes de la matriz, hemos decidido mostrarlo por subvectores columna, facilitando su lectura. Además, hemos decidido que todo valor inferior a 10^{-10} será considerado como cero.

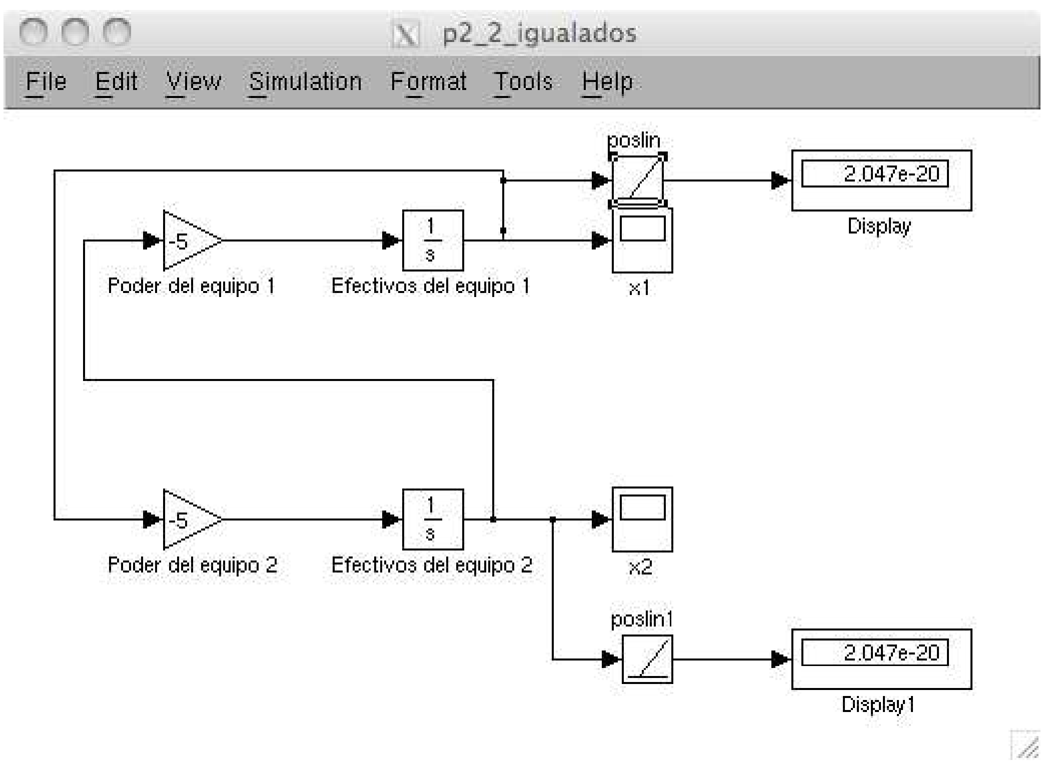
2.2.- Simular el modelo de Lanchester para los casos: a) que uno de los contendientes gane: b) que haya empate. Limitar los valores de las variables de estado a positivos (pista: usar el bloque poslin del Neural Network Blockset, Transfer Functions). Indicar el número de efectivos que quedan al final del juego (usar el bloque Display). Ver la evolución del juego en un Scope. Comprobar el tiempo de duración del juego calculándolo analíticamente.

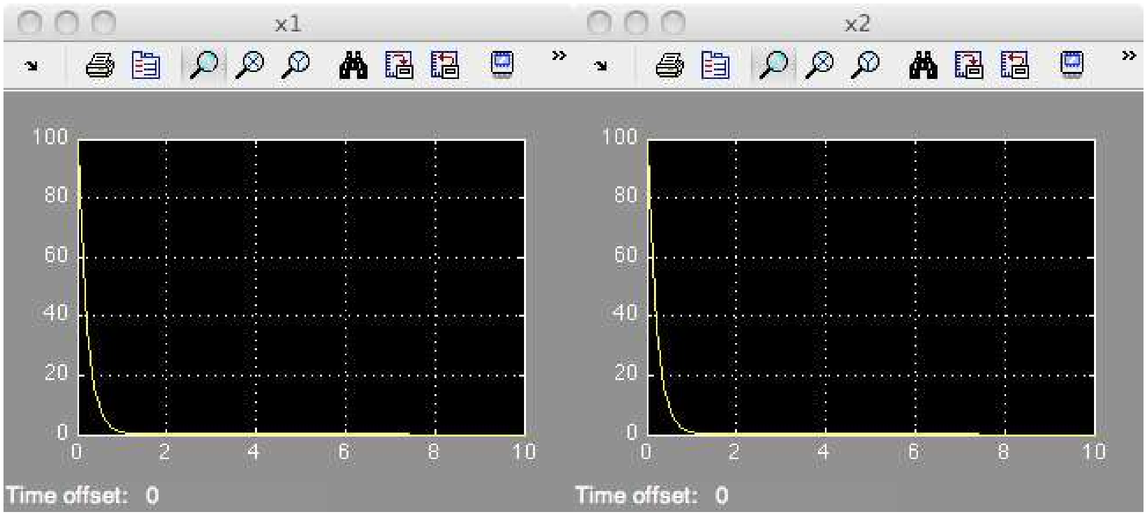
Para que un contendiente gane, ha de tener una ventaja, por lo que, manteniendo el mismo poder en ambos (-5), hemos creado una clara diferencia en el nmero de efectivos que disponen al principio, teniendo el jugador 1 el doble que el jugador 2 (200 y 100, respectivamente). El modelo simulado es el siguiente:





Por otro lado, si deseásemos que hubiese un empate, solo tendríamos que igualar el número inicial de efectivos en ambos bandos (en nuestro caso, 100), quedando el sistema de la siguiente forma:





Para comprobar el tiempo de duración del juego, hemos de utilizar la ecuación $T = \frac{1}{2*\omega} \ln \frac{x_1(0)+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}x_2(0)}{x_1(0)-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}x_2(0)}$:

- El primer jugador gana

$$T = \frac{1}{2*\omega} \ln \frac{x_1(0)+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}x_2(0)}{x_1(0)-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}x_2(0)} = \frac{1}{2*5} \ln \frac{200+100}{200-100} = \frac{\ln 3}{10}$$

- Ambos jugadores empatan

$$T = \frac{1}{2*\omega} \ln \frac{x_1(0)+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}x_2(0)}{x_1(0)-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}x_2(0)} = \frac{1}{2*5} \ln \frac{100+100}{100-100} = \infty$$

2.3.- Repetir la Práctica 1.2, cuando los puntos se mueven sobre un plano con rozamiento proporcional a la velocidad, en cuyo caso las ecuaciones dinámicas son:

$k(r_2 - r_1) - aD^1 r_1 = m_1 D^2 r_1$
$k(r_1 - r_2) - aD^1 r_2 = m_2 D^2 r_2$

Todo lo anterior para $m_1 = m_2 = 1Kg$, k= 1 New/m., y a= 1 New.seg/m. Ver todo el proceso en Gráficas, Scopes y hacer Displays de las coordenadas finales de los puntos. Comprobar para el caso de que $D^1 r_1(0) = -D^1 r_2(0)$ el centro de gravedad del sistema no se mueve, y que los puntos acaban en él.

$$\left.\begin{array}{r} k(r_2 - r_1) - aD^1 r_1 = m_1 D^2 r_1 \\ k(r_1 - r_2) - aD^1 r_2 = m_2 D^2 r_2 \end{array}\right\} \to r = [x, y]$$

$$([x_2 - x_1], [y_2 - y_1]) - aD^1[x_1, y_1] = D^2[x_1, y_1]$$
$$([x_1 - x_2], [y_1 - y_2]) - aD^1[x_2, y_2] = D^2[x_2, y_2]$$

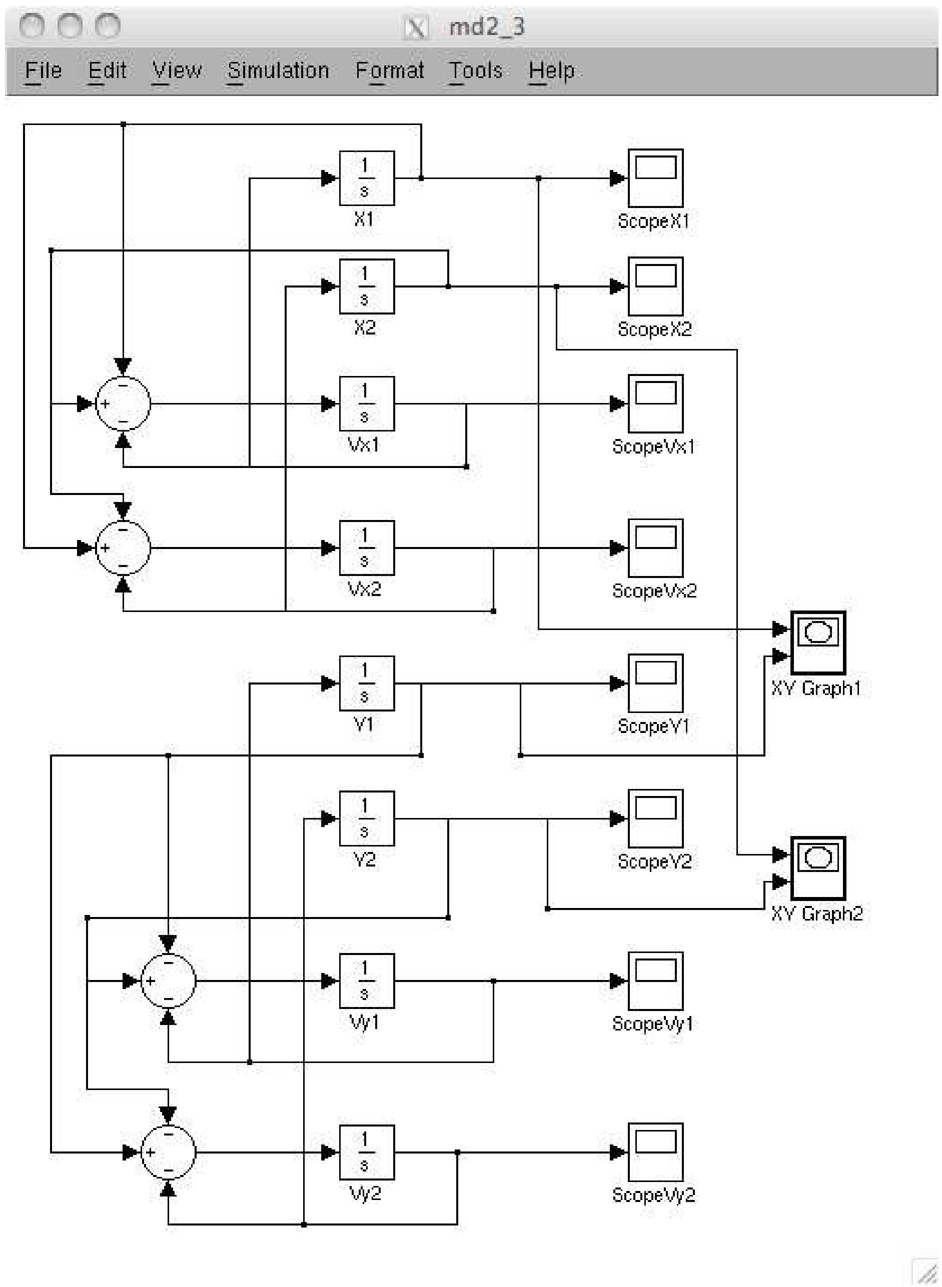
$$\left.\begin{array}{r} D^2 x_1 = (x_2 - x_1) - \dot{(x_1)} \\ D^2 y_1 = (y_2 - y_1) - \dot{(y_1)} \end{array}\right\} \to a_1$$

$$\left.\begin{array}{r} D^2 x_2 = (x_1 - x_2) - \dot{(x_2)} \\ D^2 y_2 = (y_1 - y_2) - \dot{(y_2)} \end{array}\right\} \to a_2$$

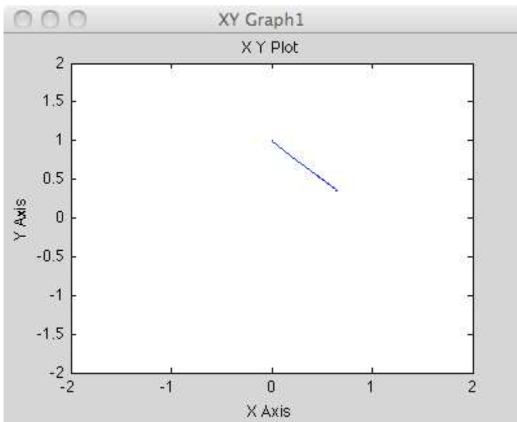
$$\begin{array}{ll} \dot{x_1} = V_{x_1} & \dot{V_{x_1}} = x_2 - x_1 - V_{x_1} \\ \dot{x_2} = V_{x_2} & \dot{V_{x_2}} = x_1 - x_2 - V_{x_2} \\ \dot{y_1} = V_{y_1} & \dot{V_{y_1}} = y_2 - y_1 - V_{y_1} \\ \dot{y_2} = V_{y_2} & \dot{V_{y_2}} = y_1 - y_2 - V_{y_2} \end{array}$$

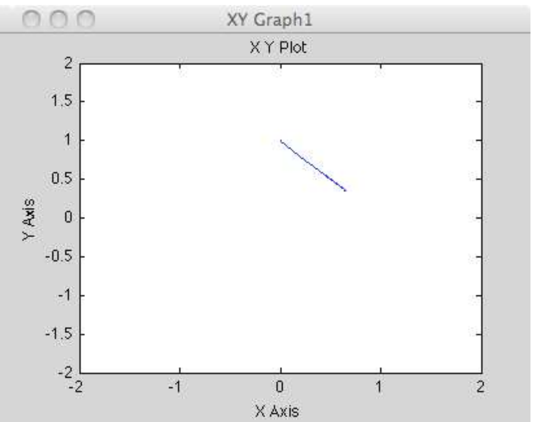
$$A = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \\ \dot{V_{x_1}} \\ \dot{V_{x_2}} \\ \dot{V_{y_1}} \\ \dot{V_{y_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El sistema modelado en simulink es el siguiente:



Las gráficas que muestran la evolución de la posición de r_1 y r_2 son las siguientes:





2.4.- Hallar analíticamente la matriz de transición de estados del sistema formado por el siguiente circuito de la figura. Particularizar para L = 1H., $C_1 = C_2 = 1F.$, $R = R_1 = 1\Omega$. Hallar analítica la solución v_0 para todas las condiciones iniciales cero, excepto $v_0(0) = 1V$ y $I(t) = 0A$. Representar la solución. Simular el sistema y verificar la solución analítica.

$I = i_l + i_{C_2} + i_{R_1}; \quad i_L + i_{c_2} = i_R + i_{C_1}$

Variables de estado: $i_L = x_1$; $v_2 = x_2$; $v_0 = x3$

luego: $I = x_1 + C_2\dot{x_2} + \frac{x_2+x_3}{R_1} \rightarrow \dot{x_2} = \frac{I}{C_2} - \frac{x_1}{C_2} - \frac{c_2}{R_1C_2} - \frac{x_3}{R_1C_2}$; $\dot{x_1} = \frac{x_2}{L}$

y $x_1 + C_2\dot{x_2} = \frac{x_3}{R} + C_1\dot{x_3} \rightarrow \dot{x_3} = -\frac{x_2}{R_1C_1} - x_3\frac{R+R_1}{RR_1C_1} + \frac{I}{C_1}$

Ecuaciones de estado:

$\dot{x_1} = \frac{x_2}{L}$

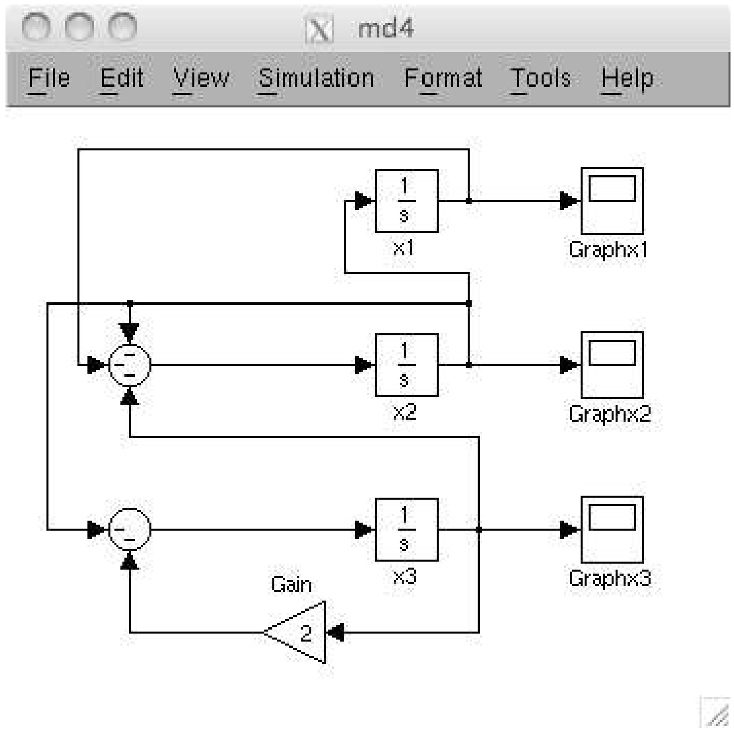
$\dot{x_2} = \frac{I}{C_2} - \frac{x_1}{C_2} - \frac{c_2}{R_1C_2} - \frac{x_3}{R_1C_2}$

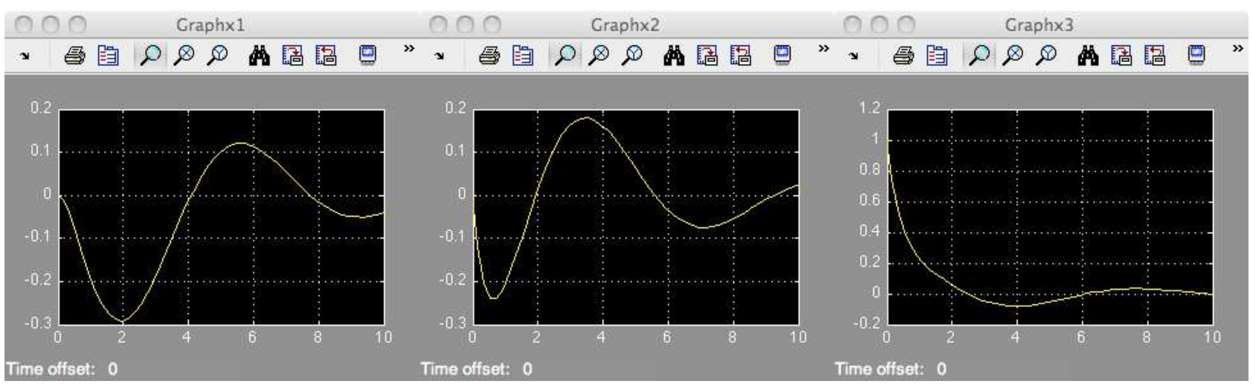
$\dot{x_3} = -\frac{x_2}{R_1C_1} - x_3\frac{R+R_1}{RR_1C_1} + \frac{I}{C_1}$

Ecuación de salida:

$v_0 = x_3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$


md4
File Edit View Simulation Format Tools Help
1
s
x1
Graphx1
1
s
x2
Graphx2
1
s
x3
Graphx3
Gain
2


Graphx1
Graphx2
Graphx3
Time offset: 0
Time offset: 0
Time offset: 0

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda^3 + 3*\lambda^2 + 2*\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -2.52 \\ -0.24 + 0.86*i \\ -0.24 + 0.86*i \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -2.52 & 0 & 0 \\ 0 & -0.24 + 0.86*i & 0 \\ 0 & 0 & -0.24 + 0.86*i \end{bmatrix} \rightarrow \Phi_z = e^{\lambda * t} I = \begin{bmatrix} e^{-2.52*t} \\ e^{-0.24+0.86*i} \\ e^{-0.24+0.86*i} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \bar{L_1} \\ \bar{L_1} * A \\ \bar{L_1} * A^2 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{L_1} = [100] \rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_z = \begin{bmatrix} \bar{L_{1z}} \\ \bar{L_{1z}} * J \\ \bar{L_{1z}} * J^2 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{L_{1z}} = [111] \rightarrow L_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2.52 & -0.24 + 0.86*i & -0.24 - 0.86*i \\ 6.35 & -0.68 - 0.41*i & -0.68 + 0.41*i \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1} * L_z * \Phi_z * L_z^{-1} * L$$

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{0.52+0.094*i}{e^{t*(0.24+0.86)}} + \frac{0.52-0.09*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} - \frac{0.03}{e^{2.52*t}} \\ \frac{0.09}{e^{2.52*t}} + \frac{-0.04-0.47*i}{e^{t*(0.24+0.86*i)}} + \frac{-0.04+0.47*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} - 3 \\ \frac{0.17}{e^{2.52*t}} + \frac{-0.08+0.23*i}{e^{t*(0.24+0.86*i)}} + \frac{-0.08-0.22*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} - 4.98 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{-0.09}{e^{2.52*t}} + \frac{0.04+0.446*i}{e^{t*(0.24+0.86*i}} + \frac{0.04-0.47*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} \\ \frac{0.22}{e^{2.52*t}} + \frac{0.39-0.15*i}{e^{t*(0.24+0.86*i)}} + \frac{0.39+0.15*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} - 1 \\ \frac{0.42}{e^{2.53*t}} + \frac{-0.21-0.02*i}{e^{t*(0.24+0.86*i)}} + \frac{-0.21+0.02*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{-0.17}{e^{2.52*t}} + \frac{0.08-0.22*i}{e^{t*(0.24+0.86*i}} + \frac{0.08+0.22*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} \\ \frac{0.42}{e^{2.52*t}} + \frac{0.21-0.02*i}{e^{t*(0.24+0.86*i)}} + \frac{-0.21+0.02*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} \\ \frac{0.81}{e^{2.52*t}} + \frac{0.09+0.06*i}{e^{t*(0.24+0.86*i)}} + \frac{0.09-0.06*i}{e^{t*(0.24-0.86*i)}} - 1 \end{bmatrix}$$

siendo $\Phi(t) = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3]$

y sabiendo que $\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I}{C_2} \\ \frac{I}{C_1} \end{bmatrix}$, y dado que I = 0:

$$\bar{x}(t) = \Phi(t) * \bar{x}(0) + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} 0 \delta\tau$$
$$\bar{x}(t) = \Phi(t) * \bar{x}(0)$$

La representación de las tres componentes halladas analíticamente es la siguiente: