#8 Küme Teorisi ve İspatlar

! Bu bölümde kümeler üzerine tanım ve kavramlar verilerek **matematiksel ispat** teknikleri anlatılacak.

Kümeler İle ilgili Tanımlar

<u>Küme:</u> $A = \{x \in E : P(x)\}$ veya $A = \{x \in E \mid P(x)\}$

<u>Altküme:</u> $A \subseteq B \iff \{\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B\}$

$$A \nsubseteq B \iff \{\exists x\colon x \in A \wedge x \notin B\}$$

<u>Öz altküme:</u> $A \subset B \iff A \subseteq B \wedge \{\exists x \in B\colon \wedge\ b \notin A\}$

$A \subseteq B$'yi İspatlamak (Eleman Metodu)

1. $x \in A$ olsun.
2. $\Rightarrow$ A'nın elemanı olma özelliklerinden ilerlenerek B'nin elemanı olma özelliğine ulaşılmaya çalışılır.
3. $\Rightarrow x \in B$ sonucuna varılır.

Doğrudan ispat...

Bir Kümenin Boş Küme Olduğunu İspatlamak

1. Boş Küme olmadığı varsayılır ($A \neq \emptyset$)
2. Çelişkiye ulaşılmaya çalışılır

Çelişki Yöntemiyle ispat...

Örnek

- $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = 6r + 12, \exists r \in \mathbb{Z}\}$ ve
  $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 3s, \exists s \in \mathbb{Z}\}$ veriliyor.
- $A \subseteq B$ olduğunu gösteriniz.
- $B \nsubseteq A$ olduğunu gösteriniz.

Eşit Kümeler

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$A = B'$yi İspatlamak:

1. $(\subseteq)$: $A \subseteq B$ ispatlanır.
2. $(\supseteq)$: $B \subseteq A$ ispatlanır.

Çift taraflı gerektirme ispatı...

Örnek

- $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid m = 6k + 4, \exists k \in \mathbb{Z}\}$ ve
  $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 18m - 2, \exists m \in \mathbb{Z}\}$ ve
  $\mathrm{C} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z = 18n + 16, \exists n \in \mathbb{Z}\}$ veriliyor.
- $A \subseteq B$? $B \subseteq A$? $B = C$?

Kümelerle İlgili Kavramlar

1. Venn Şemaları
2. Sayı Kümeleri
3. Reel Sayı Aralıkları

Kümelerde İşlemler

<u>Birleşim:</u> $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \lor x \in B\}$

<u>Kesişim:</u> $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \land x \in B\}$

<u>Fark:</u> $A - B = \{x \in E \mid x \in A \land x \notin B\}$

<u>Tümleyen:</u> $A^C = \{x \in E \mid x \notin A\}$

Kümelerde İşlemler

Birden Fazla Kümenin Birleşim veya Kesişimi:

Birleşim: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \mid x \in A_i, \exists i \in \{1, \ldots, n\}\}$

Kesişim: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \mid x \in A_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$

Örnek

- $A_i = \{x \in R \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\}$ kümeleri tanımlanıyor.
- $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = ?$ $\bigcap_{i=1}^{3} A_i = ?$

Kümeler İle ilgili Tanımlar

Ayrık Küme: A ve B ayrık kümelerdir $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Karşılıklı Ayrık Kümeler:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ karşılıklı ayrıktır $\Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Bölmelenme(Partition):

$[A_1, A_2, \ldots, A_n]$, A kümesinin bir bölmelenmesidir $\Leftrightarrow$

($A_1, A_2, \ldots, A_n$ karşılıklı ayrıktır $\wedge \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$)

Kümeler İle ilgili Tanımlar

<u>Kuvvet Kümesi:</u> $\wp(A) =$ A 'nın tüm altkümelerinin kümesi

$$|\wp(A)| = 2^{\mathrm{n}}$$

<u>Karteyzen Çarpım:</u>

$$A \times B = \{(x, y) |\, x \in A \wedge y \in B, \forall x \in A, y \in B\}$$

Kümelerde Özdeşlikler

Theorem 6.2.2 Set Identities

Let all sets referred to below be subsets of a universal set U.

1. *Commutative Laws:* For all sets A and B,

$$\text{(a) } A \cup B = B \cup A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap B = B \cap A.$$

2. *Associative Laws:* For all sets A, B, and C,

$$\text{(a) } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{and}$$
$$\text{(b) } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. *Distributive Laws:* For all sets, A, B, and C,

$$\text{(a) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{and}$$
$$\text{(b) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. *Identity Laws:* For all sets A,

$$\text{(a) } A \cup \emptyset = A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap U = A.$$

Kümelerde Özdeşlikler

5. *Complement Laws:*

$$\text{(a) } A \cup A^c = U \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap A^c = \emptyset.$$

6. *Double Complement Law:* For all sets A,

$$(A^c)^c = A.$$

7. *Idempotent Laws:* For all sets A,

$$\text{(a) } A \cup A = A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap A = A.$$

8. *Universal Bound Laws:* For all sets A,

$$\text{(a) } A \cup U = U \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap \emptyset = \emptyset.$$

9. *De Morgan's Laws:* For all sets A and B,

$$\text{(a) } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{and} \quad \text{(b) } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

10. *Absorption Laws:* For all sets A and B,

$$\text{(a) } A \cup (A \cap B) = A \quad \text{and} \quad \text{(b) } A \cap (A \cup B) = A.$$

11. *Complements of U and $\emptyset$:*

$$\text{(a) } U^c = \emptyset \quad \text{and} \quad \text{(b) } \emptyset^c = U.$$

12. *Set Difference Law:* For all sets A and B,

$$A - B = A \cap B^c.$$