5. Hafta Cuma Dersi

3 Kasım 2023 Cuma 14:08

Matematiksel İndüksiyon

$\forall n \geq a \quad P(n)$

→ Temel Adım: $n=a$ için ifade doğru mu? $P(a)$? ✓

→ İndüksiyon Adımı: Bir $k \geq a$ için $P(k)$ doğru olsun. (indüksiyon hipotezi)

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ---- $P(k+1)$

Sonuç olarak; $\forall n \geq a$ için $P(n)$ doğrudur. ∎

eşitlik $\sum_{i=1}^{n} \ldots = \ldots \quad \forall n \geq a \quad \prod_{i=1}^{n} \ldots = \ldots$

eşitlik ✓

→ eşitsizlik

bölünebilme

diziler

17. $\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{2i+2}\right) = \frac{1}{(2n+2)!}$, for all integers $n \geq 0$.

$\forall n \geq 0$ için $\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{(2n+2)!}$

$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}$

İspat: Temel adım: $n=0$ $\quad \underbrace{\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}_{\text{sol}} = \underbrace{\frac{1}{(2.0+2)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}}_{\text{sağ}} \Rightarrow P(0)$ doğrudur.

İndüksiyon adımı: Bir $k \geq 0$ için $P(k)$ doğru olsun:

$n=k \rightarrow \left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{(2k+2)!}$

ulaşmak istediğimiz yer:

$n=k+1$

$\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2k+2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2(k+1)+1}\cdot\frac{1}{2(k+1)+2}\right) = \frac{1}{(2(k+1)+2)!}$

$\rightarrow \frac{1}{(2k+4)!} = \frac{1}{(2k+2+2)!}$

$n=k+1$ için; $\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2k+2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2(k+1)+1}\cdot\frac{1}{2(k+1)+2}\right)$

$= \frac{1}{(2k+2)!}\cdot\left(\frac{1}{(2(k+1)+1}\cdot\frac{1}{2(k+1)+2}\right)$

$= \frac{1}{(2k+2)!}\cdot\left(\frac{1}{2k+3}\cdot\frac{1}{2k+4}\right) = \frac{1}{(2k+2)!.(2k+3).(2k+4)} = \frac{1}{(2k+4)!} = \frac{1}{(2(k+1)+2)!}$

$\Rightarrow P(k+1)$ doğru çıkmış oldu.

$\therefore \forall n \geq 0$ için $P(n)$ doğrudur. ∎

Eşitsizlik üzerine kurulu mat. ind. örnekleri:

Örnek

• Her $n \geq 3$ tamsayısı için

$$2n + 1 < 2^n$$

olduğunu ispatlayınız.

ispat: Temel adım: $n=3$ için ifade doğru mu? sol $2n+1=7$ $<$ sağ $2^n=8$ ✓ $\Rightarrow P(3)$ doğrudur.

İndüksiyon adımı: Bir $k>3$ için $P(k)$ doğru olsun.

$n=k$: $2k+1 < 2^k$

eşitsizliğin her iki tarafına 2 ekleyelim

$\Rightarrow \underbrace{2k+1+2}_{2k+3} < 2^k + 2 < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$

$k>3$ olduğundan $2 < 2^k$

ulaşmak istediğim: $n=k+1$

$2(k+1)+1 \overset{?}{<} 2^{k+1}$

$2k+2+1$ $\quad$ $2^k \cdot 2$

$2k+3$ $\quad$ 2^k+2^k

$\Rightarrow 2(k+1)+1 < 2^{k+1}$

$\Rightarrow P(k+1)$ doğru çıkmış oldu.

Sonuç olarak, $\forall n \geq 3$ için $2n+1 < 2^n$. (*)

Örnek

• Her $n \geq 5$ tamsayısı için

$$n^2 < 2^n$$

olduğunu ispatlayınız.

Temel adım: $n=5$ için doğru mu? $n^2=5^2=25 < 2^n=2^5=32$ ✓ $\Rightarrow P(5)$ doğrudur.

İndüksiyon adımı: Bir $k>5$ için $P(k)$ doğru olsun.

$n=k$; $k^2 < 2^k$

varmak istediğim yer: $n=k+1$ için

$(k+1)^2 < 2^{k+1}$

k^2+2k+1 $\quad$ $2^k \cdot 2$

2^k+2^k

$n=k+1$ için $\Rightarrow k^2+2k+1 < 2^k+2k+1 < 2^k+2^k = 2^{k+1}$

(*) $\Rightarrow$ $k>5$ olduğuna göre, $2k+1 < 2^k$

$\Rightarrow (k+1)^2 < 2^{k+1}$ $\Rightarrow P(k+1)$ doğru çıkmış oldu.

HW

If a, b, and c are integers and $a^2 + b^2 = c^2$, then at least one of a and b is even.

Mat. ind. ile alakası yok!

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ için $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow$ a ve b'den en az biri çift olmalıdır.

4. hafta Cuma dersindeki ispatlardan birisi kullanılacak.