8. Hafta Cuma Dersi

1 Aralık 2023 Cuma 14:30

Bağıntılar : $R \subseteq A \times B$ (x, y)

$R \subseteq A \times A$

$x R y \iff 2 \mid (x-y)$

$\forall p$ yansıma : $\forall x \in A$ $x R x$ — ters örnek $\exists x \in A$ $x \not R x$

$\forall p \Rightarrow q$ simetri : $x R y \Rightarrow y R x$ $\forall x, y \in A$ — ters örnek $x R y \wedge y \not R x$

$\forall p \wedge q \Rightarrow r$ geçişme : $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ $\forall x, y, z \in A$ — ters örnek $x R y \wedge y R z \wedge x \not R z$

R yans, $\wedge$ sim, $\wedge$ geçişme $\iff$ R → denklik bağıntısı !

$a \in A$ için a'nın Denklik Sınıfı : $[a] = \{x \in A : x R a\}$

örnek $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $\forall x, y \in A$, $x R y \iff 3 \mid (x-y)$

$R = \{(0,3), (1,4), (4,1), (1,1), \ldots\}$ ---> R denklik bağıntısıdır. $A = [1] \cup [0] \cup [2]$

$\Rightarrow [1] = [4] = [7]$

$[0] = [3] = [6]$

$[2] = [5] = [8]$

$[4] = \{1, 4, 7\}$ $[6] = \{6, 0, 3\}$

$x R 4$ $[4] = [7]$ $[6] \cap [7] = \emptyset$ $[7] = \{1, 7, 4\}$

$7-1 = 6$, $3 \mid 6$ $7-7=0$ $3 \mid 0$ $7-4=3$ $3 \mid 3$

Lemma

A bir küme, *R*, *A* üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı ve $a, b \in A$ olsun. $a R b$ ise $[a] = [b]$'dir.

yans, sym, geçişme ✓

$A = \{\ldots a, \ldots, b\}$ $R \subseteq A \times A$ $R = \{(\ ,\ ), (\ ,\ ), \ldots\}$

$a R b$ verilmiş.

ispat : $[a] \subseteq [b]$

$x \in [a]$ olsun.

$\Rightarrow x R a$

$a R b$ $\Rightarrow x R b \Rightarrow x \in [b]$

R'nin geçişme özelliği

$x R a \wedge a R b$

$[b] \subseteq [a]$

$x \in [b]$ olsun.

$\Rightarrow x R b \Rightarrow b R x$ (R'nin simetri özelliği)

$a R b \wedge b R x$

$\Rightarrow a R x \Rightarrow x \in [a]$ (R'nin geçişme özelliği)

$\therefore [a] = [b]$

Lemma

A bir küme, *R*, *A* üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı ve $a, b \in A$ ~~ise~~ olsun.

→ $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ~~veya~~ $\Rightarrow$ $[a] = [b]$'dir.

$[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

$3 \mid (x-y)$

$[a] \cap [b] \neq \emptyset \overset{?}{\Rightarrow} [a] = [b]$

$3 \mid (x-y)$

$R \quad A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$[1] = \{1,4,7\}$
$[2] = \{2,5\}$

ispat : $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ olsun.

$\Rightarrow x \in [a] \cap [b] \quad , \quad \exists x \in A$

$\Rightarrow x \in [a] \wedge x \in [b] \Rightarrow x R a \wedge x R b$

R'nin sim $\Rightarrow a R x \wedge x R b$

R'nin geçişme özelli $\Rightarrow a R b \underset{\text{üstteki lemmadan}}{\Rightarrow} [a] = [b]$. ∎.

Teorem

A bir küme, R, A üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. R'nin farklı denklik sınıfları A için bir bölmelenme oluşturur.

ayrık

$[a_i] \neq [a_j]$ ise

$\Rightarrow A \overset{?}{=} [a_1] \cup [a_2] \ldots \cup [a_m]$

Bölmelenme (Partition):
$[A_1, A_2, \ldots, A_n]$, A kümesinin bir bölmelenmesidir $\Leftrightarrow$
$(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j) \wedge (\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A)$

$\forall i,j \quad \neg [a_i] \neq [a_j] \underset{\text{lemmalardan}}{\Rightarrow} [a_i] \cap [a_j] = \emptyset$

$\subseteq$

$x \in A$ olsun. $\quad x \in [x] \Rightarrow$ en azından bir denklik sınıfındadır.

$\Rightarrow x \in [a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_m]$

$\supseteq \quad x \in [a_1] \cup \ldots \cup [a_n] \Rightarrow x \in [a_i] \quad , \exists i$

$\Rightarrow x \in A$. $\qquad \Rightarrow$

denklik

In each of 3–14, the relation R is an equivalence relation on the set A. Find the distinct equivalence classes of R.

3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$R = \{(0,0), (0,4), (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (4,0), (4,4)\}$

$[0] = \{0, 4\}$
$[1] = \{1, 3\}$
$[2] = \{2\}$

4. $A = \{a, b, c, d\}$
$R = \{(a,a), (b,b), (b,d), (c,c), (d,b), (d,d)\}$

$R \subseteq A \times A$ $\quad A = \mathbb{Z}^{-\{0\}} \times \mathbb{Z}^{-\{0\}}$

yansıma : $\forall (x,y) \in A$

$(x,y) \; R \; (x,y)$

$xy = yx$ ✓

$$(a, b) \; R \; (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$$

$((a,b), (c,d))$

simetri : $(x,y) R (z,t) \Rightarrow (z,t) \; ? \; (x,y)$

$xt = yz \Rightarrow zy = tx \Rightarrow (z,t) R (x,y)$ ✓

geçişme : $(x,y) R (z,t) \wedge (z,t) R (m,n) \Rightarrow (x,y) \; ? \; (m,n)$ ✓

$xt = yz \quad \wedge \quad zn = tm$

$zn = tm$

$x\cancel{t} \cdot \cancel{z}n = y\cancel{z} \cdot \cancel{t}m \quad \Rightarrow xn = ym$

gen

7. $A = \{(1, 3), (2, 4), (-4, -8), (3, 9), (1, 5), (3, 6)\}$. R is defined on A as follows: For all $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b) \; R \; (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$$