# 4. Hafta Cuma Dersi

27 Ekim 2023 Cuma 14:22

## Karşıt-ters ile İspat

orijinal ifade: $\underbrace{\forall x \in D,\ P(x)}\ \Rightarrow\ Q(x)$

ifadenin karşıt tersi: $\underbrace{\forall x \in D,\ \sim Q(x)}_{\text{varsay.}}\ \Rightarrow\ \underbrace{\sim P(x)}_{\text{ulaşmaya çalış}}$

## Çelişki Yöntemi

orijinal ifade: $\forall x \in D,\ P(x)$ veya $\forall x \in D,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$

Mantıksal değili doğru kabul edilir.

$\exists x \in D : \sim P(x)$ — varsayım (*)

$\Rightarrow$ ...

$\Rightarrow$ ... (**)

$\exists x \in D : P(x) \wedge \sim Q(x)$ — varsayım (*)

$\Rightarrow$ ...

$\Rightarrow$ ... (**)

(*) ve (**) çelişir. ⨯

(∴) Sonuç olarak, orijinal ifade doğrudur.

---

**Örn** $\forall n \in \mathbb{Z},\ \underbrace{3 \nmid n^2}_{p} \Rightarrow \underbrace{3 \nmid n}_{q}$, ispatlayalım.

$p \wedge \sim q$

**İspat** (Karşıt-ters)

İspatlanacak ifade: $\underbrace{\forall n \in \mathbb{Z},\ 3 \mid n}_{\text{varsay.}} \Rightarrow \underbrace{3 \mid n^2}_{\text{ulaşmaya çalış}}$

$n \in \mathbb{Z},\ 3 \mid n$ olsun.

$\Rightarrow n = 3.k,\ \exists k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3.(\underbrace{3k^2}_{\in \mathbb{Z}}) \Rightarrow 3 \mid n^2$ ■

**İspat** (Çelişki)

değili: $\exists n \in \mathbb{Z} : (3 \nmid n^2 \wedge 3 \mid n)$

varsayım: $n \in \mathbb{Z}$ için $3 \nmid n^2$ (*) ve $3 \mid n$ olsun.

$3 \mid n \Rightarrow n = 3k,\ \exists k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(\underbrace{3k^2}_{\in \mathbb{Z}}) \Rightarrow 3 \mid n^2$ (**)

(*) ve (**) çelişir. ⨯

Sonuç olarak, orijinal ifade doğrudur. ■

---

**Örn** $\forall n \in \mathbb{Z},\ 4 \nmid (n^2 - 2)$ olduğunu ispatlayınız.

**İspat.** (Çelişki)

varsayım: $\exists n \in \mathbb{Z} : 4 \mid (n^2 - 2)$ olsun.

$\Rightarrow n^2 - 2 = 4k,\ \exists k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n^2 = 4k + 2$ (*)

Thm 2.1

Thm 4.3

göz.

Bölüm-kalan teoremine göre $n \in \mathbb{Z}$ için $n = 2q$ veya $n = 2q+1$ formunda olabilir.

1.Durum: $n = 2q,\ \exists q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n^2 = (2q)^2 = 4q^2$

$\Rightarrow 4k + 2 = 4q^2$ (**)

2.Durum: $n = 2q+1,\ \exists q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n^2 = (2q+1)^2$

$\Rightarrow n^2 = 4q^2 + 4q + 1$

$\Rightarrow 4k + 2 = 4q^2 + 4q + 1$

$\Rightarrow 4k+2 = 4q^2$

$\Rightarrow 4(q^2-k) = 2 \Rightarrow q^2-k = \frac{2}{4} \notin \mathbb{Z}$ (**)

(*) ve (**) çelişir.

$\Rightarrow n^2 = 4q^2+4q+1$

$\Rightarrow 4k+2 = 4q^2+4q+1$

$\Rightarrow 1 = 4q^2+4q-4k$

$\Rightarrow q^2+q-k = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$ (***)

(*) ve (***) çelişir.

Sonuç olarak, orijinal ifade doğrudur

**Örn** $\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayıdır, ispatlayınız.

r rasyonel : $r = \frac{a}{b}$, $\exists a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $OBEB(a,b)=1$

örn $\frac{16}{48} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ $(1,3)=1$

İspat: (Çelişki)

varsayım: $\sqrt{2}$ rasyonel olsun.

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $\exists a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $OBEB(a,b)=1$ (*)

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^2$ çift $\Rightarrow$ n çifttir

$\Rightarrow a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow 2 \mid a^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 \mid a$

$\Rightarrow a = 2k$, $\exists k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2 = 4k^2 = 2b^2$

$\Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow 2 \mid b^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 \mid b$.

$\Rightarrow$ 2 a ve b'nin ortak bölenidir. (**)

(*) ve (**) çelişir.

Sonuç olarak, $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. ∎

**Örn** $1+3\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu ispatlayalım.

İspat (Çelişki)

$1+3\sqrt{2}$ rasyonel olsun.

$\Rightarrow 1+3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $\exists a,b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$

$\Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a-b}{3b}$ $a-b \in \mathbb{Z}$, $3b \in \mathbb{Z}$, $3b \neq 0$ $\Rightarrow \sqrt{2}$ rasyonel. (*)

üstteki ispat (**) ile çelişir.

∎