

MAT 203 AYRIK MATEMATİK

Öğr. Üyesi: Dr. Sümeyra BEDİR

#5.2 MATEMATİKSEL İNDÜKSİYON

! Bu bölümde diziler ve diğer bazı sayılar teorisi tanım ve kavramları üzerinden **matematiksel indüksiyon** teknikleri anlatılacak.

#5.1 DİZİLER (özet)

Sonsuz Reel Sayı Dizileri

- Genel terim: a_k , k için bir başlangıç değeri ile birlikte verilir.
- a_k : k .terimin değerinin k 'ya bağlı olarak nasıl hesaplandığının formülüdür.
- Sonsuz dizinin terimlerinin aldıkları değerler sonlu sayıda olabilir.
- Bir dizi farklı genel terimlerle ifade edilebilir.

Toplam ve Çarpım Sembolleri

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n.$$

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_n.$$

Faktöriyel

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$$0! = 1$$

$$0 \leq r \leq n,$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

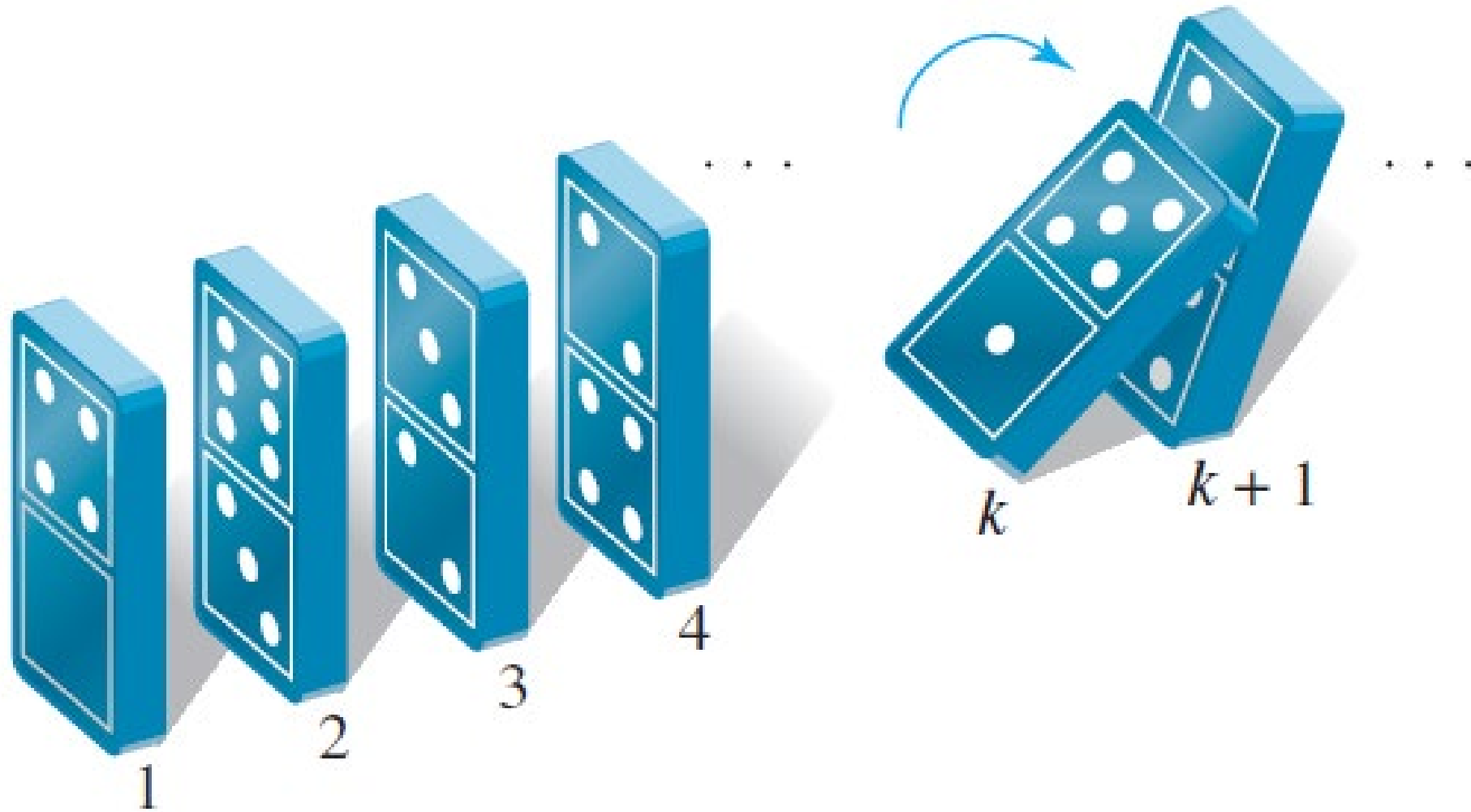
Matematiksel İndüksiyon Prensipleri

Örnek (n coin problemi)

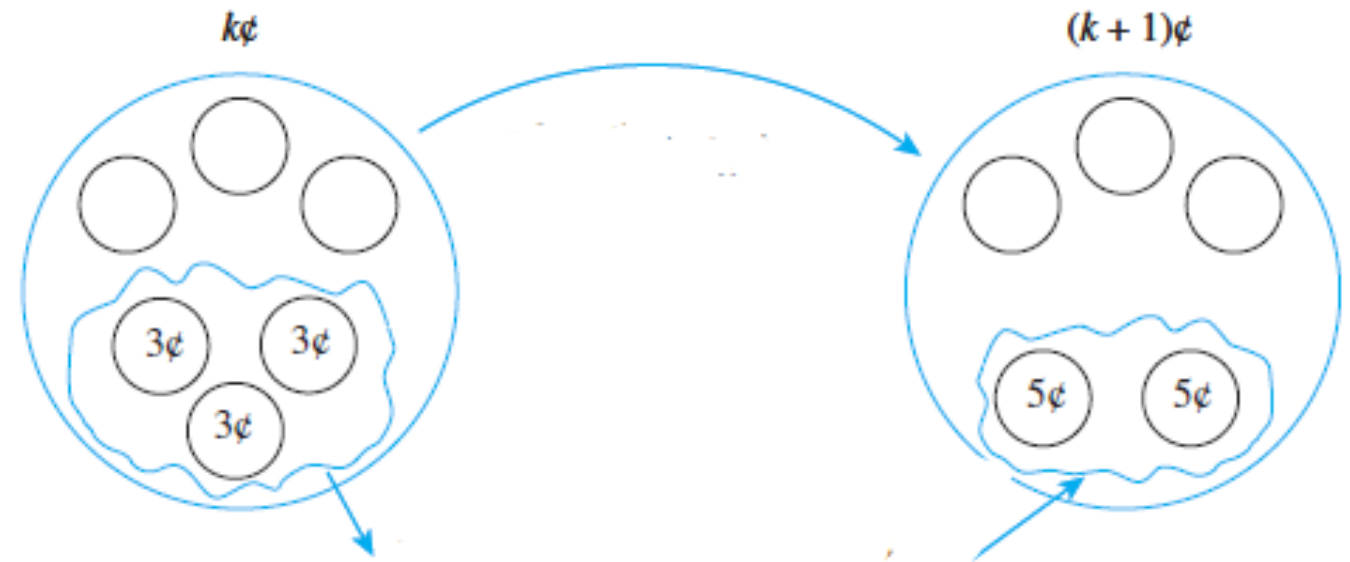
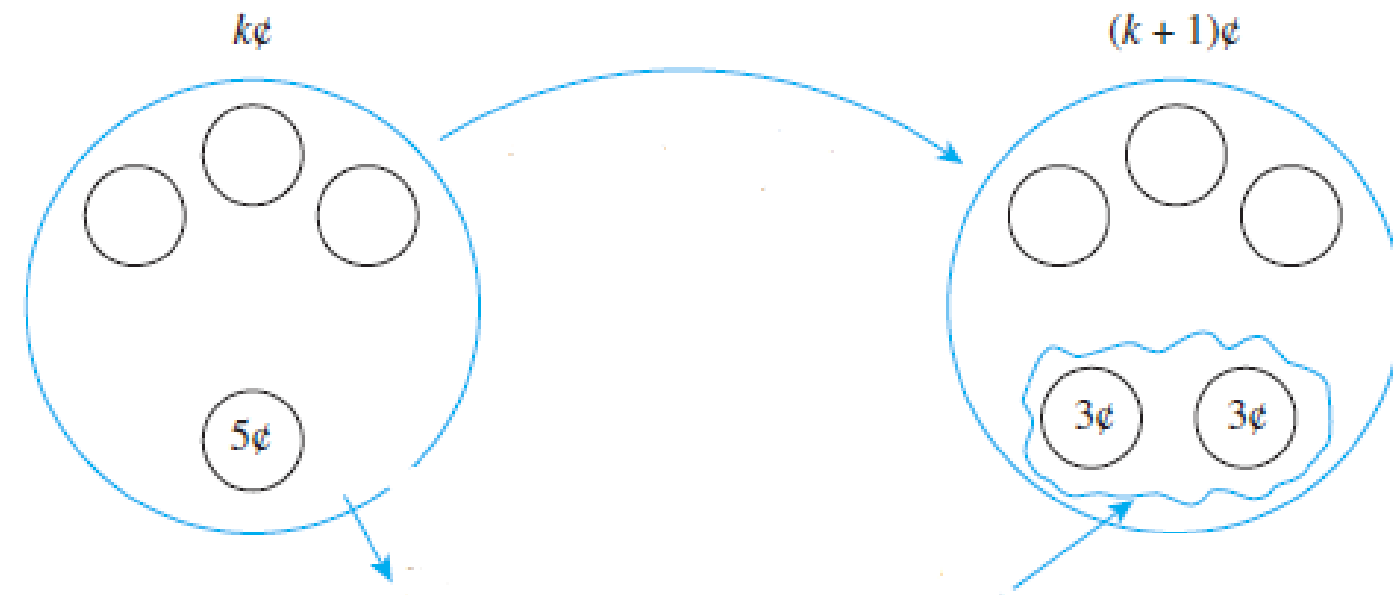
- $\forall n \geq 8$ için, n cent, 3lük ve 5liklerle ifade edilebilir..

8¢	3¢ + 5¢
9¢	3¢ + 3¢ + 3¢
10¢	5¢ + 5¢
11¢	3¢ + 3¢ + 5¢
12¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 3¢
13¢	3¢ + 5¢ + 5¢
14¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 5¢
15¢	5¢ + 5¢ + 5¢
16¢	3¢ + 3¢ + 5¢ + 5¢
17¢	3¢ + 3¢ + 3¢ + 3¢ + 5¢

Matematiksel İndüksiyon Prensipleri



Matematiksel İndüksiyon Prensipleri



Matematiksel İndüksiyon Prensibi ile İspat

$P(n)$ 'in $n \geq a$ için doğruluğunu ispatlamak;

1. $P(a)$ doğru mu?
2. Her $k \geq a$ için $P(k)$ doğru ise $P(k+1)$ doğru mu? ($P(k)$ varsayılır, $P(k+1)$ ispatlanmaya çalışılır)
3. $P(n)$ 'in $\forall n \geq a$ için doğru olduğu sonucuna varılır.

Matematiksel İndüksiyon Prensipleri ile İspat

1. Eşitlikler (Çarpım Sembolü/Toplam Sembolü içerebilir)
2. Eşitsizlikler
3. Bölünebilme
4. Diziler (Genel Terim, yinelemeli diziler)

Örnek

- Her $n \geq 1$ tamsayısı için aşağıdaki ifadeyi ispatlayınız.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Örnek

- Her $n \geq 0$ tamsayısı için aşağıdaki ifadeyi ispatlayınız.

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Örnek

- Her $n \geq 3$ tamsayısı için

$$2n + 1 < 2^n$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek

- Her $n \geq 5$ tamsayısı için

$$n^2 < 2^n$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek

- Her $n \geq 2$ tamsayısı için

$$2^n < (n + 1)!$$

olduğunu ispatlayınız.