eşitlik
eşitsizlik
bölünebilme
diziler → yinelemeli tanım verilir. iddia edilen genel terimin $\forall n \geq a$ a_n için sağlandığını göster.

Mat. İnd. $\forall n \geq a$ için $P(n)$

Temel adım: $P(a)$ doğru mu?

İndüksiyon adımı: Bir $k > a$ için $P(k)$ doğru olsun. $(n=k)$

$n=k+1$ için; - - - - - - - -

n=k+1 istenilen ne?

$\Rightarrow P(k+1)$ doğrudur.

Sonuçta $\forall n \geq a$ için $P(n)$ doğrudur.

24. A sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is defined by letting $a_1 = 3$ and $a_k = 7a_{k-1}$ for all integers $k \geq 2$. Show that $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ for all integers $n \geq 1$.

$\boxed{a_1 = 3 \quad a_k = 7a_{k-1} \quad \forall k \geq 2}$ sorudа verilen yinelemeli tanım.

yinelemeli tanımı verilen dizi için

ispatlanacak $P(n)$ ← $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$, $\forall n \geq 1$ ($n=1$) olduğunu ispatlayınız.

İspat (Mat. İnd.)

Temel adım: $P(1)$: $a_1 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 7^{1-1} = 3 \cdot 1 = 3$ ✓ $\boxed{a_1 = 3}$ $\Rightarrow P(1)$ doğrudur.

İndüksiyon adımı: Bir $k > 1$ için $P(k)$ doğru olsun.

✓ $\boxed{a_k = 3 \cdot 7^{k-1}}$ ← ind. hipotezi

n=k+1: $a_{k+1} \stackrel{?}{=} 3 \cdot 7^{k+1-1}$

$n=k+1$ için; $a_{k+1} = 7 \cdot a_k$ (yinelemeli tanımdan gelir) !

$a_{k+1} = 7 \cdot (3 \cdot 7^{k-1}) = 3 \cdot 7^k = 3 \cdot 7^{(k+1)-1}$ $\Rightarrow P(k+1)$ doğrudur.

Sonuç olarak, $\forall n \geq 1$ için $P(n)$ doğrudur ($\forall n \geq 1$ $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ olur).

25. A sequence $b_0, b_1, b_2, \ldots$ is defined by letting $b_0 = 5$ and $b_k = 4 + b_{k-1}$ for all integers $k \geq 1$. Show that $b_n > 4n$ for all integers $n \geq 0$.

verilen tanım: $\boxed{b_0 = 5 \quad b_k = 4 + b_{k-1} \quad , \forall k \geq 1}$

şeklinde yinelemeli tanımı verilen dizi için

ispatlanacak şey $P(n)$ ← $\forall n \geq 0$, $b_n > 4n$ ifadesinin doğruluğunu ispatlayınız

İspat (Mat. ind.)

Temel adım: $P(0)$? $n=0$ $b_0 \stackrel{?}{>} 4 \cdot 0$ $5 > 0$ ✓ $\Rightarrow P(0)$ doğrudur.

İndüksiyon adımı: Bir $k > 0$ için $P(k)$ doğru olsun.

$\boxed{b_k > 4k}$ → ind. hipotez

n=k+1: $b_{k+1} > 4(k+1)$

$\boxed{b_k > 4k}$ → ind. hipotez

$n=k+1$: $b_{k+1} \overset{?}{>} 4(k+1)$

$n=k+1$ için $b_{k+1} = 4 + b_k$ (yinelemeli tanımdan gelir)

$b_k > 4k$ (ind. hip)

her iki tarafına 4 ekleyelim : $\underbrace{4+b_k}_{b_{k+1}} > 4+4k \Rightarrow b_{k+1} > 4(k+1)$

$\Rightarrow P(k+1)$ doğru çıktı.

Sonuç olarak, $P(n)$, $\forall n \geq 0$ için doğrudur. ■

Kuvvetli Matematiksel İndüksiyon Prensibi

P(n)'in n≥a için doğruluğunu ispatlamak;

1. P(a),P(a+1),…,P(b) doğru mu?
2. Her k≥b için a'dan k'ya kadar tüm P(i) doğru ise P(k+1) doğru mu?
3. P(n)'in ∀n≥a için doğru olduğu sonucuna varılır.

mat. ind. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$P(k+1)$

Mat. ind

Temel adım: $n=a$

(ind. hipotezi) varsayım: Bir $k>a$ için $P(k)$ doğru olsun.

$P(k) \overset{?}{\Rightarrow} P(k+1)$

$\forall n \geq a$ için $P(n)$ ✓

a k k+1

Kuvvetli Mat. ind.

Temel adım: $n=a$ ✓ … $n=b$ ✓ (Birden fazla temel adımda bakılacak durum olabilir)

(ind. hipotezi) varsayım: Her $a \leq i \leq k$ için $P(i)$ doğru olsun.

$P(a) \wedge P(a+1) \wedge \ldots \wedge P(b) \wedge \ldots \wedge P(k-1) \wedge P(k) \overset{?}{\Rightarrow} P(k+1)$

$\forall n \geq a$ için $P(n)$ ✓

a b k k+1

Örnek

- $a_0 = 0, a_1 = 4, a_k = 6a_{k-1} - 5a_{k-2}, \forall k \geq 2$ dizisi veriliyor.
- Dizinin ilk 4 terimini yazınız.
- $\forall n \geq 0$ için $a_n = 5^n - 1$ olduğunu ispatlayınız.

verilen yinelemeli tanım: $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $a_k = 6a_{k-1} - 5a_{k-2}$ $\forall k \geq 2$

P(k+1)

yinelemeli tanımı verilen dizi için

P(n) ispatlanacak ifade → $\forall n \geq 0$, $a_n = 5^n - 1$ olduğunu gösteriniz

İspat (Kuvvetli Mat. ind.)

Temel adım: P(0) ? P(1) ? $n=0$: $a_0 \overset{?}{=} 5^0 - 1 = 1-1=0$ $n=1$: $a_1 = 5^1 - 1 = 4$ ✓

Temel adım : P(0) ? P(1) ? $n=0$: $a_0 \overset{?}{=} 5^0 - 1 = 1-1=0$ ✓ $n=1$: $a_1 = 5^1 - 1 = 4$ ✓

P(0) ve P(1) doğrudur.

İndüksiyon adım : Her $a < i \leqslant k$ için P(i) doğru olsun.

(P(2), P(3), ..., P(k-1), P(k) doğru olsun)

ind. hipotezi : ✓ ✓ $a_{k-1} = 5^{k-1} - 1$, $a_k = 5^k - 1$

P(k+1) ?
$n = k+1$
$a_{k+1} \overset{?}{=} 5^{k+1} - 1$

$a_{k+1} = 6 a_k - 5 a_{k-1}$ (yinelemeli tanımdan gelir)

$$a_{k+1} = 6.(5^k - 1) - 5.(5^{k-1} - 1)$$
$$= 6.5^k - 6 - 5.5^{k-1} + 5 = 6.5^k - 5^k - 1 = 5.5^k - 1$$
$$= 5^{k+1} - 1$$

8. Suppose that $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is a sequence defined as follows:

$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,$
$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}$ for all integers $k \geq 3$. → verilen yinelemeli tanım.

a. Prove that $a_n \leq 3^n$ for all integers $n \geq 0$. → ispatlanacak şey → P(n)

P(n)

İspat: (Kuvvetli Mat. ind).

Temel adım : P(0), P(1), P(2) ?

$a_0 \overset{?}{\leqslant} 3^0 = 1$, 1 ✓ $a_1 \overset{?}{\leqslant} 3^1 = 3$, 2, $2 \leqslant 3$ ✓ $a_2 \overset{?}{\leqslant} 3^2 = 9$, 3, $3 \leqslant 9$ ✓ ⇒ P(0), P(1) ve P(2) doğrudur.

İndüksiyon adımı : Her $2 < i \leqslant k$ için P(i) doğru olsun.

ind. hipotezi { (P(3), ..., P(k-3), P(k-2), P(k-1), P(k) doğru olsun.)

$a_{k-2} < 3^{k-2}$ $a_{k-1} < 3^{k-1}$ $a_k < 3^k$

$n = k+1$
$a_{k+1} \overset{?}{\leqslant} 3^{k+1}$
$3^k . 3$

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2} < 3^k + 3^{k-1} + 3^{k-2} = 3^k . \frac{13}{9} < 3^k . 3 = 3^{k+1}$$

$3^k \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)$

$\frac{13}{9} < 3$

$1 + \frac{4}{9}$ $3^k . \frac{13}{9}$

⇒ $a_{k+1} \leqslant 3^{k+1}$ ⇒ P(k+1) doğrudur.

Sonuç olarak, P(n), $\forall n \geqslant 0$ için doğrudur.