#9 Sayma ve Olasılık

- Bu bölümde, doğru, anlamlı mantıksal tanımlar oluşturmak ve geçerli matematiksel ispatlar yapmak için gerekli olabilecek **Sayma İlkelerini** ele alacağız.

Olasılık

S = Örnek Uzay, E = Olay

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(S)}, \quad \sum_{E \subseteq S} P(E) = 1$$

Örnekler:

- 3 mavi top, 5 kırmızı top,...
- Hilesiz bir çift zar atılıyor. Üst yüze gelen sayıların toplamının 6 olma olasılığı kaçtır?
- 3 madeni para atılıyor. Yalnızca 1 yazı gelme olasılığı? / En az 2 Yazı gelme olasılığı? / Hiç yazı gelmeme olasılığı?

Olasılık

Meşhur Örnek ☺ :

Monty Hall Problemi

«Lets Make a Deal»

https://www.youtube.com/watch?v=4Lb-6rxZxx0

Olasılık Ağaçları

Örnek

- A ve B takımları, turnuvada takımlardan biri ardışık iki oyun kazanana veya toplamda üç oyun kazanana kadar birbirleriyle sürekli oynayacaklardır.
- a. Turnuva kaç farklı şekilde oynanabilir?
- b. Turnuvanın kazananını belirlemek için 5 oyunun gerekmesi durumu, turnuvanın tüm oynanma yollarının eşit olasılıkla gerçekleştiği varsayılırsa, bu olayın olasılığı nedir?

Çarpım Kuralı

Theorem 9.2.1 The Multiplication Rule

If an operation consists of k steps and

the first step can be performed in n_1 ways,

the second step can be performed in n_2 ways *[regardless of how the first step was performed]*,

$\vdots$

the kth step can be performed in n_k ways *[regardless of how the preceding steps were performed]*,

then the entire operation can be performed in $n_1 n_2 \cdots n_k$ ways.

Örnek: Kaç farklı PIN?

Permutasyonlar

Örnek

Consider the following nested loop:

for $i := 1$ **to** 4
  for $j := 1$ **to** 3
    [Statements in body of inner loop.
    None contain branching statements
    that lead out of the inner loop.]
  next j
next i

How many times will the inner loop be iterated when the algorithm is implemented and run?

Permütasyonlar

- n elemanlı bir kümenin permütasyonları: $n!$
- n elemanlı bir kümenin r'li permütasyonları : $\mathrm{P(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$
- n elemanlı bir kümenin dairesel permütasyonları : (n-1)!

Permütasyonlar

Örnekler

a. How many ways can the letters in the word *COMPUTER* be arranged in a row?

b. How many ways can the letters in the word *COMPUTER* be arranged if the letters *CO* must remain next to each other (in order) as a unit?

c. If letters of the word *COMPUTER* are randomly arranged in a row, what is the probability that the letters *CO* remain next to each other (in order) as a unit?

a. How many different ways can three of the letters of the word *BYTES* be chosen and written in a row?

b. How many different ways can this be done if the first letter must be B?

Permütasyonlar

Örnekler

İspatla ($n \geq 2$)

$$P(n, 2) + P(n, 1) = n^2.$$

$$P(n+1, 2) - P(n, 2) = 2P(n, 1).$$

$$P(n+1, 3) = n^3 - n.$$

Toplama Kuralı

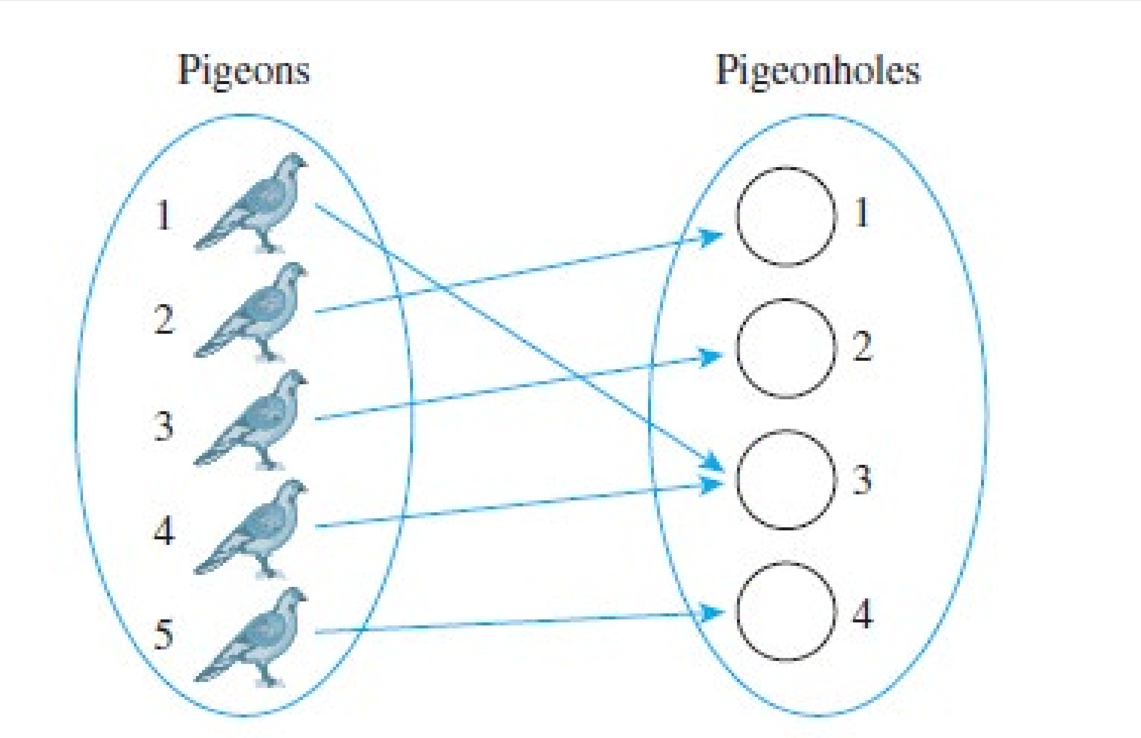
- Ayrık kümelerin birleşim kümesinin elemanlarını saymak
- Kümeler ayrık değilse: The Inclusion/Exculison principle (ekleme-çıkarma prensipi)

Örnekler

a. How many integers from 1 through 1,000 are multiples of 3 or multiples of 5?

b. How many integers from 1 through 1,000 are neither multiples of 3 nor multiples of 5?

Güvercin Yuvası Prensibi (Pigeonhole Principle)



Bir kümeden, bu kümeden daha az sayıda elemanı olan bir kümeye tanımlanacak fonksiyon birebir olamaz: Tanım kümesinin en az iki elemanı, Görüntü kümesinin aynı elemanına eşlenmek zorundadır.

Örnekler

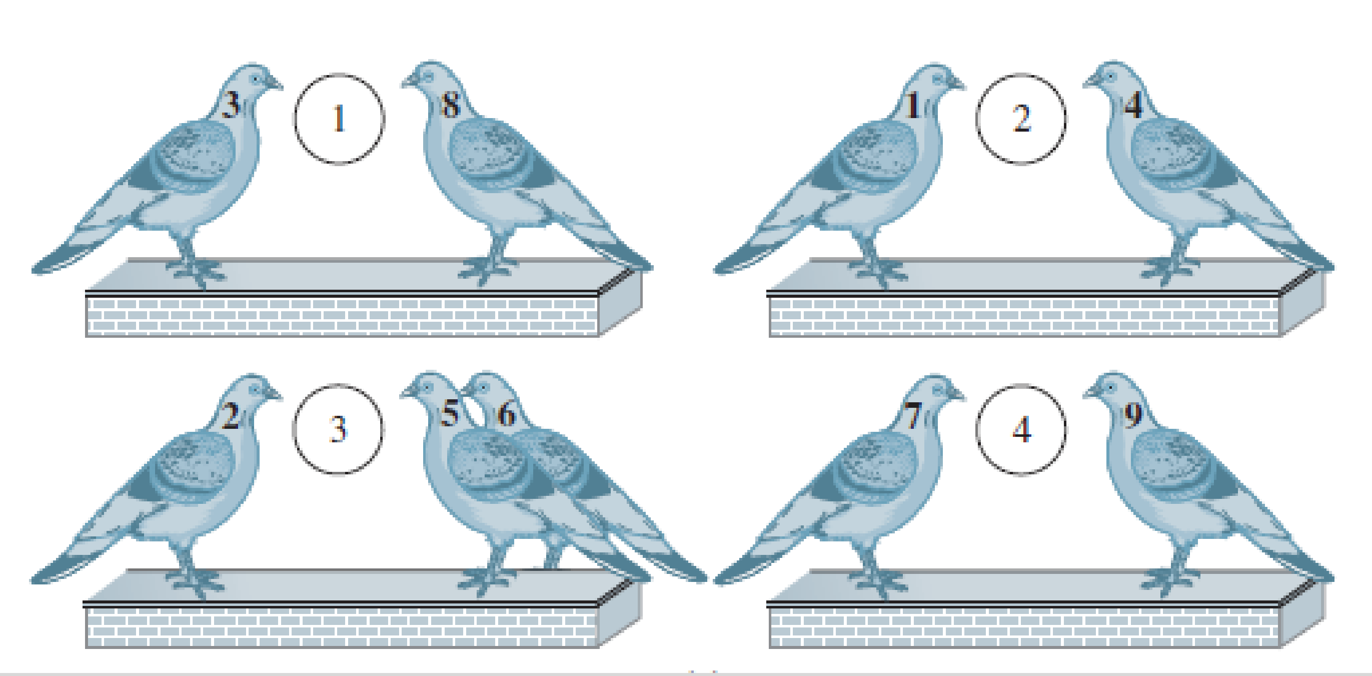
a. In a group of six people, must there be at least two who were born in the same month? In a group of thirteen people, must there be at least two who were born in the same month? Why?

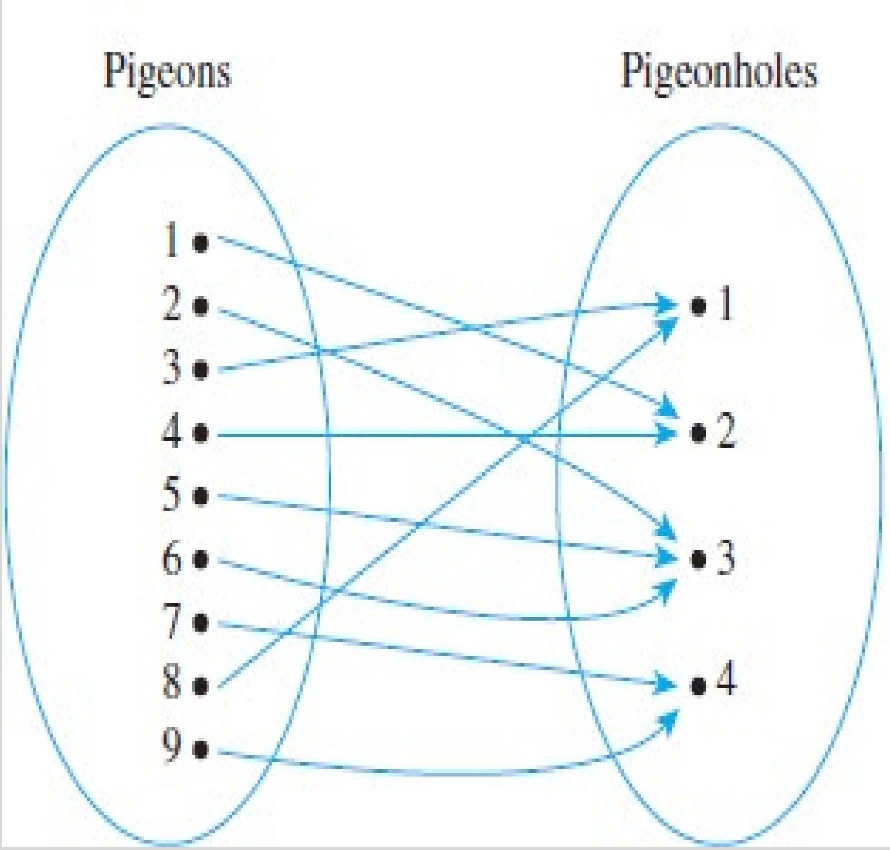
Let $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a. If five integers are selected from A, must at least one pair of the integers have a sum of 9?

b. If four integers are selected from A, must at least one pair of the integers have a sum of 9?

Generalized Pigeonhole Principle (Genelleştirilmiş)





Generalized Pigeonhole Principle (Genelleştirilmiş)

A generalization of the pigeonhole principle states that if n pigeons fly into m pigeonholes and, for some positive integer k, $k < n/m$, then at least one pigeonhole contains $k + 1$ or more pigeons. This is illustrated in Figure 9.4.2 for $m = 4$, $n = 9$, and $k = 2$. Since $2 < 9/4 = 2.25$, at least one pigeonhole contains three $(2 + 1)$ or more pigeons. (In this example, pigeonhole 3 contains three pigeons.)

Generalized Pigeonhole Principle

For any function f from a finite set X with n elements to a finite set Y with m elements and for any positive integer k, if $k < n/m$, then there is some $y \in Y$ such that y is the image of at least $k + 1$ distinct elements of X.

Generalized Pigeonhole Principle (Genelleştirilmiş)

Generalized Pigenohole Principle (Contrapositive Form)

For any function f from a finite set X with n elements to a finite set Y with m elements and for any positive integer k, if for each $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ has at most k elements, then X has at most km elements; in other words, $n \leq km$.

Örnek

There are 42 students who are to share 12 computers. Each student uses exactly 1 computer, and no computer is used by more than 6 students. Show that at least 5 computers are used by 3 or more students.

Tekrarlı Permütasyon

- $\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$ (r_i: i.cinsten aynı olan elemanların sayısı)

Örnek

- MISSISSIPPI kelimesinin harfleriyle yazılabilecek kaç farklı 11 harfli kelime vardır?

Kombinasyonlar

- n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı
- $C(\mathrm{n},\mathrm{r}) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

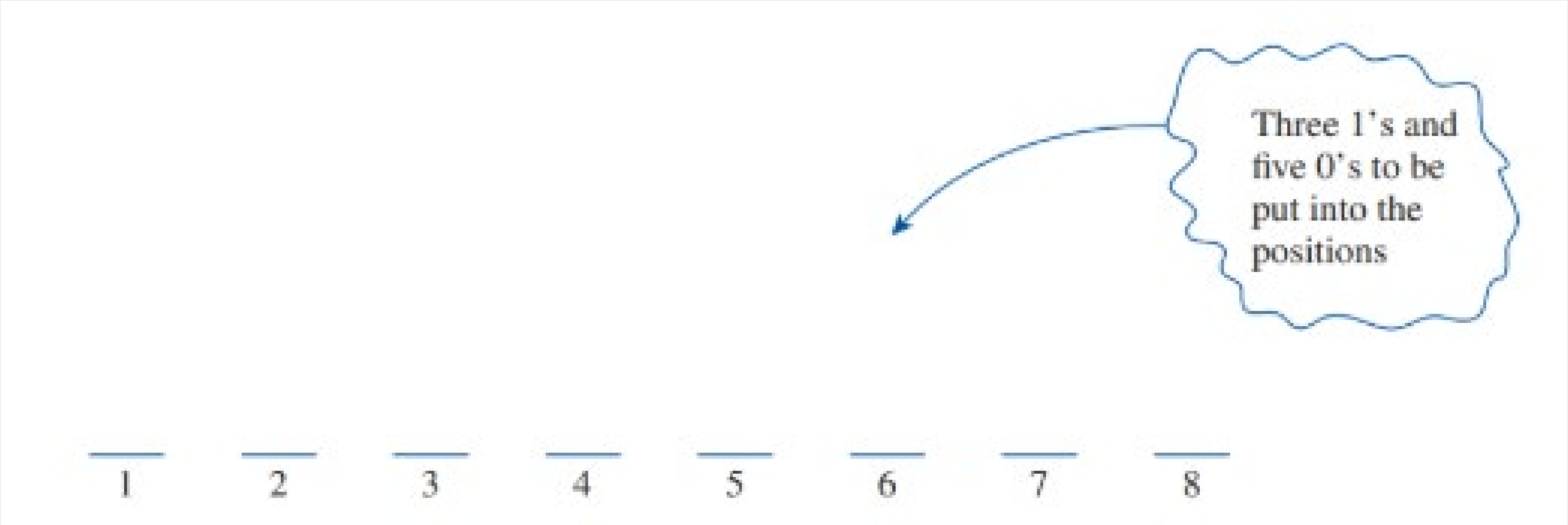
Örnekler

- 12 kişilik bir gruptan 5 kişilik takım oluşturulacak. Kaç farklı takım kurulur? A ve B birlikte olmak şartıyla? A ve B birlikte olmamak şartıyla?
- 5 erkek 7 kadından oluşan bir gruptan 5 kişilik takım kurulacak. 3 erkek 2 kadın olsun? Takımda en az 1 kadın olsun? Takımda en fazla 1 kadın olsun?

Kombinasyonlar

Örnek

- Tam olarak 3 tane 1 içeren kaç farklı 8-bit string yazılır?



Tekrarlı Kombinasyon

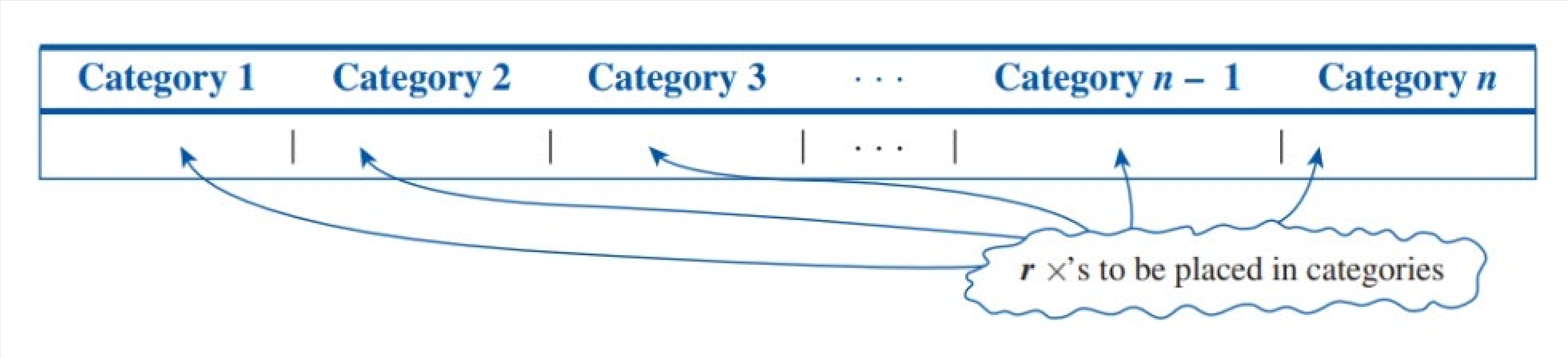
- r eleman (her kategoride en az r tane eleman olmak üzere) n farklı kategoriden seçilecek.

Farklı seçimlerin sayısı $= \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$

Tekrarlı Kombinasyon

- r eleman n farklı kategoriden seçilecek.

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$



Tekrarlı Kombinasyon

Örnekler

- Kırmızı, Sarı, Yeşil balonların bulunduğu bir çekmeceden 5 tane balon seçeceğim. Kaç farklı şekilde seçerim?
- Kırtasiyeden 5 farklı marka kalemden 15 kalem alacağım.
  - Her markadan en az 15 tane varsa
  - En az 6 tanesi Rotring olsun dersek
  - Stokta 5 FC kalmış ise

  Kaç farklı alış-veriş yapılabilir?

The shrewd guess, the fertile hypothesis, the courageous leap to a tentative conclusion—these are the most valuable coin of the thinker at work

— Jerome S. Bruner, 1960