12. Hafta Pazartesi Dersi

10 Mayıs 2021 Pazartesi 11:50

Özdeğer ve Özvektörler

$A_{n\times n} \to$ kare matris

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{A}_{\text{matris}}{}_{n\times n}\ \vec{x}_{n\times 1} = \underbrace{\lambda}_{\text{skaler}}\ \vec{x}_{n\times 1}$$

$\vec{x} \to$ ÖZVEKTÖRLER (söz konusu λ için)

skaler $\to$ ÖZDEĞER

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ eşitliğini sağlayabilecek $\vec{x}$ vektörünün bulunabildiği λ skalerlerine A matrisinin özdeğeri denir.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow \underbrace{A}_{\text{matris}}\vec{x} - \underbrace{\lambda}_{\text{skaler}}\vec{x} = \vec{0}_{n\times 1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\underbrace{A}_{\text{matris}} - \lambda \underbrace{I}_{\text{matris}})}_{n\times n \text{ matris}} \underbrace{\vec{x}}_{n\times 1 \text{ vektör}} = \vec{0}_{n\times 1}$$

$\to$ Homojen lineer denklem sistemi

- ~~trivial çözüm $\vec{x} = \vec{0}$~~ istemiyoruz.
- sonsuz çözüm ✓

$\Rightarrow$ Ne zaman çözüm sadece trivial çözüm olur? (istemediğimiz durum)

$$\left[\begin{array}{c|c} A-\lambda I & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{İSEF}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{trivial çözüm}$$

$(A-\lambda I) \to$ ancak $\det(A-\lambda I) \neq 0 \to I_n$

$\to$ istemediğimiz durum

$\Rightarrow$ Trivial olmayan sonsuz çözüm için $\boxed{\det(A-\underbrace{\lambda}_{\text{bilinmeyen}} I) = 0}$

$\Rightarrow$ Hangi λ'lar için bu det 0 olur? $\Rightarrow$ Bu λ'lar özdeğerlerdir.

$\Rightarrow$ $p(\lambda) = \underbrace{\det(A-\lambda I)}_{} = 0 \to$ A'nın karakteristik polinomu

$\Rightarrow$ $p(\lambda)$'nın real kökleri = A'nın özdeğerleri $\to \lambda$!

$\Rightarrow$ Her bir λ için :

$\Rightarrow (A - \underbrace{\lambda}_{\text{biliniyor}} I)\vec{x} = 0$ çözümleri bulunur. $\vec{x} \to$?

$\Rightarrow (A-\underset{\text{biliniyor}}{\lambda I})\vec{x} = 0$? çözümleri bulunur.

$\Rightarrow$ Tüm çözümlerin kümesi $=$ λ'nın öz uzayı $\rightarrow$

$\Rightarrow$ Bu kümenin bazındaki vektörler $=$ λ'nın öz vektörü $\rightarrow$

örn $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

A'nın karakteristik polinomu = ?

A'nın özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen özvektörler ?

$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = 0$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A-\lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (3-\lambda)(-2-\lambda) - 6 \quad \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 12$$

$$-6 + 2\lambda + \lambda^2 - 3\lambda - 6$$

A'nın karakteristik polinomu

$-4 \quad 3$

$p(\lambda)$'nın kökleri = A'nın özdeğerleri

$$p(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda+3) = 0 \quad \boxed{\lambda_1 = 4} \quad \boxed{\lambda_2 = -3}$$

A'nın özdeğerleri

$\rightarrow$ $\lambda_1 = 4$ için :

$(A-4I)\vec{x} = \vec{0}$ çözümleri ?

$$A-4I = \begin{bmatrix} 3-4 & 2 \\ 3 & -2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - 2x_2 = 0$

$x_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = 2r$

$\lambda = 4$ için özuzay $= \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{tipik elemanı}} \begin{bmatrix} 2r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 4$ için özvektör $= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ $\lambda_2 = -3$ için :

$(A-(-3)I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\underset{\lambda=-3}{A-\lambda I} = \begin{bmatrix} 3+3 & 2 \\ 3 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \dashrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$3x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_2 = -3r$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \dashrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$3x_1 + x_2 = 0$
$x_1 = r \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow x_2 = -3r$

$\lambda = -3$ için özuzay $= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\} \xrightarrow{\text{tipik elemanı}} \begin{bmatrix} r \\ -3r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow$ $\lambda = -3$ için özvektör

Örn

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A'nın karakteristik polinomu =?
A'nın özdeğerleri, karşılık gelen özvektör, özuzay?

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 0-\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left[\lambda(1+\lambda) - 2\right] + -2(1+\lambda) + 4 \quad - 2\left(-2 - (-2\lambda)\right)$$

$$= (3-\lambda)\ \lambda(1+\lambda) - 2(3-\lambda) + -2(1+\lambda) + 4 \quad + 4(1-\lambda)$$

$$= (1+\lambda)\underbrace{\left[(3-\lambda)\lambda - 2\right]}_{3\lambda - \lambda^2 - 2} - 2(3-\lambda) + 4 + 4(1-\lambda)$$

$-(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$
$-(\lambda-2)(\lambda-1)$

$$= (1+\lambda)(\lambda-2)(1-\lambda) \quad \underbrace{-2(3-\lambda) + 4}_{\substack{-6+2\lambda+4 \\ -2+2\lambda \\ -2(1-\lambda)}} + 4(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(1+\lambda)(\lambda-2)}_{\lambda^2 - 2\lambda + \lambda - \cancel{2}} \cancel{-2} + \cancel{4}\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda)$$

$$= (1-\lambda)\,\lambda\,(1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 \longleftarrow$ katlı kök

$\lambda_1 = 0$ için:

$(A - 0I)\vec{x} = 0 \qquad A - 0I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$(A - 0I)\vec{x} = 0 \qquad A - 0I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - r/3 - 2r/3 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$4/3 + -2 \rightarrow$

$\frac{2}{3} - 1$

$\frac{4}{3} - 1$

$x_1 - \overset{r}{x_2}/3 - 2\overset{r}{x_3}/3 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

$x_3 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = r$

$\Rightarrow x_1 = r$

$$\lambda = 0\text{'ın özuzayı} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \xrightarrow[\text{elemanı}]{\text{tipik}} \begin{bmatrix} r \\ r \\ r \end{bmatrix} \rightarrow r\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = 0 \text{ için özvektör.}$$

$\lambda_2 = 1$ için :

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-1 & -1 & -2 \\ 2 & 0-1 & -2 \\ 2 & -1 & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

$x_1 = r \in \mathbb{R}$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

$x_2 = -2r + 2s$

$$\lambda = 1 \text{ için özuzay} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} r \\ -2r+2s \\ s \end{bmatrix} = r\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}} + s\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \rightarrow \lambda = 1 \text{ için özvektör}$$

1. Find the eigenvalues (özdeğer) and the corresponding eigenspaces (→ özuzay) for each of the following matrices:

özvektörleri de bulmuş olacağız.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1. Find the eigenvalues and the corresponding eigenspaces for each of the following matrices: → Özuzay

Özvektörleri de bulmuş olacaksınız.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(h)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(j)** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **(l)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$