11. Hafta Çarşamba Dersi - Lineer Dönüşümün Temsil Matrisi

05 Mayıs 2021 Çarşamba 08:31

Bir Lineer Dönüşümün Temsil Matrisi

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad L(\vec{x}) = A.\vec{x}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \longmapsto \underset{m\times n}{A} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Ex) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x, x+y, x-y)$

e_1, e_2 standart baz $\qquad e_1, e_2, e_3$ standart baz

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{bmatrix}_{3\times 1} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{3\times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

1. sütun $\quad$ 2. sütun

* **Standart bazlar;** $\boxed{A'\text{nın } i. \text{ sütunu} = L(e_i)}$

↳ sol tarafın standart bazının i. vektörü

A'nın 1. sütunu $= L(e_1) = L((1,0)) = (1, 1+0, 1-0) = (1,1,1)$

A'nın 2. sütunu $= L(e_2) = L((0,1)) = (0, 0+1, 0-1) = (0,1,-1)$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$ bu lineer dönüşüm temsil matrisidir.

* **Standart Baz Dışında Başka Bazlar;**

$L \rightarrow V \rightarrow W$

$\vec{v} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \longmapsto \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m = \vec{w}$

$\{a_1, \dots, a_n\}$ bazı $\qquad \{b_1, \dots, b_m\}$ bazı

1.) $L(a_1), L(a_2), \dots, L(a_n)$ bulunur.

2.) (Gerekirse Bazlar arası geçiş matrisi kullanılarak) her birinin $\{b_1, \dots, b_m\}$ bazındaki koordinatlarını bul.

A'nın her bir sütununa sırayla bunlar yazılır.

Örn $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1 . \vec{b_1} + (x_2 + x_3) \vec{b_2}$

standart baz kullanılmış $\qquad B = \{b_1, b_2\}$ bazı kullanılmış.

1.) $L(e_1), L(e_2), L(e_3)$ bulunur.

$L((1,0,0)) = 1.\vec{b_1} + (0+0).\vec{b_2} = 1\vec{b_1} + 0\vec{b_2}$

$L((0,1,0)) = 0.\vec{b_1} + (1+0).\vec{b_2} = 0\vec{b_1} + 1\vec{b_2}$

$L((0,0,1)) = 0.\vec{b_1} + (0+1).\vec{b_2} = 0\vec{b_1} + 1\vec{b_2}$

$A_{E,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ sol taraf E bazında sağ taraf B bazında L'nin temsil matrisi.

Örn $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} \longmapsto (x_1 + x_2)\vec{u_1} + 2x_2\vec{u_2}$

$\{u_1, u_2\}$ bazı kullanılmış $\qquad \{u_1, u_2\}$ bazı kullanılmış

L lineer operatörünün $U = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bazındaki temsil matrisini bulunuz.

1) $L(\vec{u_1}), L(\vec{u_2})$

$(1,1) = x_1.\vec{u_1} + x_2.\vec{u_2} = x_1 . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$L(\vec{u_1}) = L(\underbrace{(1,1)}_{1.\vec{u_1} + 0.\vec{u_2}}) = L((1\vec{u_1} + 0.\vec{u_2})) = (1+0)\vec{u_1} + 2.0\vec{u_2}$

$= 1\vec{u_1} + 0\vec{u_2}$

$$(1,1) = x_1.\vec{u_1} + x_2.\vec{u_2} = \underbrace{x_1.\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}_{} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$x_1 - x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 0$

$$(-1,1) = x_1.\vec{u_1} + x_2.\vec{u_2} = x_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$x_1 - x_2 = -1 \qquad x_1 = 0$

$x_1 + x_2 = 1 \qquad x_2 = 1$

$$L(\vec{u_1}) = L(\underbrace{(1,1)}_{1.\vec{u_1}+0.\vec{u_2}}) = L((1\vec{u_1}+0.\vec{u_2})) = (1+0)\vec{u_1} + 2.0\,\vec{u_2} = 1.\vec{u_1} + 0.\vec{u_2}$$

$$L(\vec{u_2}) = L(\underbrace{(-1,1)}_{0.\vec{u_1}+1\vec{u_2}}) = L((0.\vec{u_1}+1.\vec{u_2})) = (0+1)\vec{u_1} + 2.1.\vec{u_2} = 1\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$$

$$A_{u,u} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$$

Örn

$$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x_1,x_2)}_{\text{standart bazda}} \mapsto \underbrace{(x_2, x_1+x_2, x_1-x_2)}_{\text{standart bazda}}$$

L'nin $\mathcal{U} = \left\{ \overset{u_1}{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}, \overset{u_2}{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}} \right\}$ ve $V = \left\{ \overset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}} \right\}$

bazlarına göre temsil matrisini bulunuz. $A_{u,v} = ?$

1) $L(u_1) = L(\underbrace{(1,2)}_{\text{standart bazda zaten}}) = (2, 1+2, 1-2) = \underbrace{(2,3,-1)}_{\text{standart bazda}}$

2) $\underbrace{V^{-1}}_{\text{standart bazdan V bazına geçiş matrisi}} \begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\4\\-1\end{bmatrix}}_{\text{A'nın 1.sütunu}}$

$L(u_2) = L((3,1)) = (1, 3+1, 3-1) = \underbrace{(1,4,2)}_{\text{standart bazda}}$

$V^{-1} \cdot \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix}}_{\text{A'nın 2.sütunu}}$

$$A_{u,v} = \begin{bmatrix}-1 & -3\\4 & 2\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

Örn

$$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{\text{standart bazda}} \mapsto \underbrace{(2x_2, -x_1)}_{\text{standart bazda}}$$

$U = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$

$V = \left\{ \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \right\}$ $\quad A_{u,v} = ?$

1) $L(u_1) = L((1,0,-1)) = (2.0, -1) = \underbrace{(0,-1)}_{\text{standart bazda}}$

2) $V^{-1}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\text{V bazında}} \to$ 1.sütun

$L(u_2) = L((1,2,1)) = (2.2, -1) = \underbrace{(4,-1)}_{\text{standart bazda}} \to V^{-1}\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}}_{\text{V bazında}} \to 2.$

$L(u_3) = L((-1,1,1)) = (2.1, -(-1)) = (2,1) \to V^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix} \to 3$

$$A_{u,v} = \begin{bmatrix}0 & -2 & -4\\1 & 3 & 3\end{bmatrix}$$