Köşegenleştirme

$(A \to X \underbrace{D}_{\text{diyagonal matris}} X^{-1}) \Rightarrow A$ köşegenleştirilebilir.

* Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ A'nın farklı özdeğerleri ise, bunlara karşılık gelen özvektörler $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots$ lineer bağımsızdır.

* $A_{n\times n}$ matrisi köşegenleştirilebilirdir ancak ve ancak A'nın tam n tane lineer bağımsız özvektörü var ise.

* Eğer A köşegenleştirilebilir ise $\Rightarrow$ A'nın özvektörleri = X matrisinin sütunları
  A'nın özdeğerleri = D'nin diyagonal girdileri

$A = XDX^{-1}$ tek türlü değildir.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \to X = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{x_1} & \vec{x_2} & \cdots & \vec{x_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{n\times n} \quad X^{-1}$$

burdaki sıra $\longrightarrow$ burdaki sıra $\quad \det X \neq 0$

X matrisi tek tip değildir.

* A'nın n tane farklı özdeğeri varsa $\Rightarrow$ A köşegenleştirilebilir.

! A'nın n tane farklı özdeğeri yoksa A köşegenleştirilemez demek değildir!
$\Rightarrow$ Bakmamız gereken lineer bağımsız özvektörlerin sayısı $\stackrel{?}{=} n$

Örn

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 2 & -5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= (2-\lambda)(-5-\lambda) - (-6) \\ &= -10 + 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 6 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda+4)(\lambda-1) \end{aligned}$$

$4 \quad -1$

$$\to D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow A \text{ köşegenleştirilebilirdir}$$

$\lambda_1 = -4$ için: $(A-\lambda I)\vec{x} = 0$'ın çözümleri

$$(A+4I)\vec{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad 2x_1 - x_2 = 0 \qquad x_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = 2r$$

$$\begin{bmatrix} r \\ 2r \end{bmatrix} = r \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}}$$

$\lambda_2 = 1$ için: $(A-\lambda I)\vec{x} = 0$

$$(A - 1I)\vec{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$ için : $(A-\lambda I)\vec{x}=0$

$(A-1I)\vec{x}=0$

$$\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \qquad x_1 - 3x_2 = 0 \qquad \begin{array}{l}x_2 = r \in \mathbb{R}\\ x_1 = 3r\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}3r\\ r\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow \text{özvektör}$$

$$X = \begin{array}{c}\begin{array}{cc}\lambda_1=-4 & \lambda_2=1\\ \downarrow & \downarrow\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$1-6$

-5

$$A = \underset{X}{\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}}\underset{D}{\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}\underset{X^{-1}}{\begin{bmatrix}-1/5 & 3/5\\ 2/5 & -1/5\end{bmatrix}}$$

(Bir diğer ihtimal $\rightarrow A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/5 & -1/5\\ -1/5 & 3/5\end{bmatrix}$)

Örn/ $A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ $\dashrightarrow$ $\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 2$ (çakışık kök) $\qquad \lambda_2 = 4$

$\lambda_1 = 2$: $(A-2I)\vec{x}=\vec{0} \rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_1 = r \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix}r\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ özvektör

$\lambda_2 = 4$: $(A-(4)I)\vec{x}=\vec{0} \rightarrow \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$-2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$x_2 = r \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix}0\\ r\\ 0\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ özvektör

$\Rightarrow$ 2 tane lineer bağımsız özvektör $\Rightarrow$ A köşegenleştirilemez!

Örn/ $A = \begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$ ---- $\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1$ (çakışık kök)

$\lambda_1 = 0$; $\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 3 tane lineer bağımsız özvektör var

$\Rightarrow$ A köşegenleştirilebilir.

$D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1$; $\rightarrow$ [1 ..., [0 ...

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$; $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{X^{-1} =} \; \ldots$$

$$A = X D X^{-1}$$

1. ~~Find the eigenvalues and the corresponding eigenspaces for each of the following matrices:~~

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (j) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (l) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Verilen matrisler köşegenleştirilebilir mi?

Evet ise $D = ?$ $X = ?$

Evet ise neden? Hayır ise neden?