Lineer Dönüşümler

$V, \oplus, \odot \qquad W, \boxplus, \boxdot$

$L : V \to W$ vektör uzaylarında bir eşleme olsun.

V: vektör uzayı, W: vektör uzayı

$\vec{v} \mapsto L(\vec{v}) = \vec{w}$

$f : A \to B$

$a \mapsto b$

$f(a) = b$

L;

1) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ $\quad \boxed{L(\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2) = \underbrace{L(\vec{v}_1)}_{\in W} \boxplus \underbrace{L(\vec{v}_2)}_{\in W}}$

sol taraf → karşılaştır ← sağ taraf

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V$ $\quad \boxed{L(\underbrace{\alpha \odot \vec{v}}_{\in V}) = \underbrace{\alpha \boxdot L(\vec{v})}_{\in W}}$

özelliklerini sağlıyorsa bir lineer dönüşümdür.

* $L : V \to V$ şeklindeki lineer dönüşümlere lineer operatör denir.

Örn

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{v} = (x,y) \Rightarrow L(\vec{v}) = \sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{v} = (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ L, bir lineer dönüşüm müdür?

1) sol taraf: $L\big((x_1,y_1) + (x_2,y_2)\big) = L\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = \sqrt{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2}$

sağ taraf: $L((x_1,y_1)) + L((x_2,y_2)) = \underbrace{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}_{\in \mathbb{R}}$ $\quad \neq$

L, 1. şartı sağlamıyor. $\Rightarrow$ L bir lineer dönüşüm değildir.

2) sol taraf: $L(\alpha(x,y)) = L((\alpha x, \alpha y)) = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2(x^2+y^2)} = |\alpha|\sqrt{x^2+y^2}$

sağ taraf: $\alpha L((x,y)) = \alpha \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ — $\alpha < 0$ ise $\neq$ $\quad \neq$

L, 2. şartı da sağlamıyor.

Örn

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad L(\vec{v}) = (y, x, x+y) \quad \forall \vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (y, x, x+y)$ $\qquad$ L bir lineer dönüşüm müdür?

1) sol taraf: $L\big((x_1,y_1) + (x_2,y_2)\big) = L\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (y_1+y_2, x_1+x_2, x_1+x_2+y_1+y_2)$

sağ taraf: $L((x_1,y_1)) + L((x_2,y_2)) = (y_1, x_1, x_1+y_1) + (y_2, x_2, x_2+y_2) = (y_1+y_2, x_1+x_2, x_1+y_1+x_2+y_2)$ $\quad = ✓$

2) sol taraf: $L(\alpha(x,y)) = L((\alpha x, \alpha y)) = (\alpha y, \alpha x, \alpha x + \alpha y)$

sağ taraf: $\alpha \cdot L((x,y)) = \alpha(y, x, x+y) = (\alpha y, \alpha x, \alpha(x+y))$ $\quad = ✓$

$\Rightarrow$ L, $\mathbb{R}^2$'den $\mathbb{R}^3$'e, bir lineer dönüşümdür.

9. Determine whether the following are linear transformations from P_2 to P_3.

(a) $L(p(x)) = xp(x)$

(b) $L(p(x)) = x^2 + p(x)$

a) $L : P_2 \to P_3$

$p(x) = a_0 + a_1 x \mapsto a_0 + (a_0+a_1)x + 2a_1 x^2$

formations from P_2 to P_3.

(a) $L(p(x)) = xp(x)$

(b) $L(p(x)) = x^2 + p(x)$

→ (c) $L(p(x)) = p(x) + xp(x) + x^2p'(x)$ $\longrightarrow (a_0+a_1x) + x(a_0+a_1x) + x^2(a_1) = a_0 + (a_0+a_1)x + 2a_1x^2$

$L: P_2 \to P_3$

$p(x) = a_0 + a_1x \longmapsto a_0 + (a_0+a_1)x + 2a_1x^2$

1) sol taraf : $L\big((a_0+a_1x) + (b_0+b_1x)\big) = L\big((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x\big) = (a_0+b_0) + (a_0+b_0+a_1+b_1)x + 2(a_1+b_1)x^2$ $= ✓$

sağ taraf : $L(a_0+a_1x) + L(b_0+b_1x) = a_0 + (a_0+a_1)x + 2a_1x^2 + b_0 + (b_0+b_1)x + 2b_1x^2 = (a_0+b_0) + (a_0+a_1+b_0+b_1)x + (2a_1+2b_1)x^2$

2) sol taraf : $L(\alpha(a_0+a_1x)) = L(\alpha a_0 + \alpha a_1 x) = \alpha a_0 + (\alpha a_0 + \alpha a_1)x + 2\alpha a_1 x^2$ $✓$

sağ taraf : $\alpha . L(a_0+a_1x) = \alpha . (a_0 + (a_0+a_1)x + 2a_1x^2) = \alpha a_0 + \alpha(a_0+a_1)x + \alpha 2a_1 x^2$

$\Rightarrow$ L bir lineer dönüşümdür.

Örn/ $L : P_2 \to P_3$

$a_0 + a_1x \longmapsto a_0 + a_1x + x^2$

1) sol: $L\big((a_0+a_1x) + (b_0+b_1x)\big) = L\big((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x\big) = a_0+b_0 + (a_1+b_1)x + x^2$ $\neq$

sağ: $L(a_0+a_1x) + L(b_0+b_1x) = a_0+a_1x+x^2 + b_0+b_1x+x^2 = a_0+b_0 + (a_1+b_1)x + 2x^2$

$\Rightarrow$ L bir lineer dönüşüm değildir.

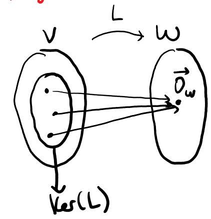
Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği (Kernel) veya Görüntüsü (Image Range)

$L : V \to W$ bir lineer dönüşüm.

Çekirdek : $Ker(L) = \{ \forall \vec{v} \in V : L(\vec{v}) = \vec{0}_W \}$

↓

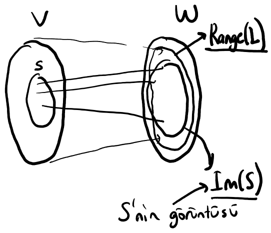
L dönüşümünün çekirdeği



* Ker(L) en azından $\vec{0}_V$'yi içerir.
* $Ker(L) \neq \emptyset$
* $Ker(L) \leqslant V$ (V'nin alt uzayıdır).

Görüntü : → V'nin bir alt uzayının görüntüsü = Image

↘ V'nin görüntüsü = Range



$S \leqslant V$ $\quad Im(S) = \{ L(s) : \forall s \in S \} \leqslant W$

$Range(L) = Im(V) = \{ L(v) : \forall v \in V \} \leqslant W$

* Görüntü kümeleri, W'nun alt uzayıdır.

Örn/ $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ↗ lineer dönüşüm olduğunu gösterin. bir lineer dönüşümdür.

$(x,y,z) \longmapsto (x+y, y+z)$

a) $Ker(L) = ?$

b) $S = span\{e_1, e_3\} \leqslant \mathbb{R}^3$

$Im(S) = ?$

a) $Ker(L) = \{ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : L(\vec{v}) = \underbrace{(0,0)}_{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}} \}$

$= \{ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, y+z) = (0,0) \} \longrightarrow$ $x+y=0$, $y+z=0$ $\quad y = r \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow x = -r$, $z = -r$

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(L) \longrightarrow \begin{bmatrix} -r \\ r \\ -r \end{bmatrix} \rightarrow$ Ker(L)'nin tipik bir elemanı

$r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ Ker(L)'in bir bazıdır.

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$

$\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$

b) $S = \mathrm{span}\{e_1, e_3\} \leqslant \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Im}(S) = ?$ $\qquad \mathrm{Im}(S) = \{ L(s) : \forall s \in S \}$

$s = r_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ r_2 \end{bmatrix} \longrightarrow$ S'nin tipik bir elemanı $\quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(S) &= \{ L((r_1,0,r_2)) : r_1,r_2 \in \mathbb{R} \} \\
&= \{ (r_1+0, 0+r_2) : r_1, r_2 \in \mathbb{R} \} \\
&= \{ (r_1, r_2) : r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}
\end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ Im(S)'nin bir bazıdır.

$\underbrace{\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{\mathbb{R}^2} = \mathrm{Im}(S)$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Soru: $T(x,y) = (x, y, x+y+3)$ → Bir lineer dönüşüm bile değil. → Çekirdek tanımlı değil.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ Çekirdek = ?

$T(x,y) = (0,0,0)$

$x = 0$

$y = 0$

$x + y + 3 \neq 0$

~~Çekirdek = $\varnothing$~~

~~Ker(T) = $\varnothing$~~

1) sol: $T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (x_1+x_2, y_1+y_2, x_1+x_2+y_1+y_2+3)$ $\neq$

sağ: $T((x_1,y_1)) + T((x_2,y_2)) = (x_1, y_1, x_1+y_1+3) + (x_2, y_2, x_2+y_2+3) = (x_1+x_2, y_1+y_2, x_1+y_1+x_2+y_2+6)$

$\Rightarrow$ T bir lineer dönüşüm değildir.

$*$ L bire-bir (1-1) lineer dönüşümdür $\iff \mathrm{Ker}(L) = \{\vec{0}_V\}$

$*$ $\dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\underbrace{\mathrm{Range}(L)}_{\mathrm{Im}(V)}) = \dim(V) \qquad L: V \to V$

19. Find the kernel and range of each of the following linear operators on P_3:

(a) $L(p(x)) = xp'(x)$ $\quad$ (b) $L(p(x)) = p(x) - \underbrace{p'(x)}_{a_1 + a_2 x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - a_1 - a_2 x = (a_0 - a_1)$

(c) $L(p(x)) = p(0)x + p(1)$

b) $L: P_3 \longrightarrow P_3$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)x + a_2 x^2$

$\mathrm{Ker}(L) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : L(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 0 \}$

$$\mathrm{Ker}(L) = \{ a_0+a_1x+a_2x^2 : \underbrace{L(a_0+a_1x+a_2x^2)} = 0 \}$$

$$= \{ a_0+a_1x+a_2x^2 : \underbrace{(a_0-a_1)}_{0} + \underbrace{(a_1-a_2)}_{0}x + \underbrace{a_2}_{0}x^2 = 0 \}$$

$$= \{0\}$$

$a_0-a_1=0$
$a_1-a_2=0$
$a_2=0$
$a_0=a_1=a_2=0$.

$$\mathrm{Range}(L) = \{ L(p(x)) : \forall p(x) \in P_3 \}$$

$$= \{ \underbrace{(a_0-a_1)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(a_1-a_2)}_{\in\mathbb{R}}x + \underbrace{a_2}_{\in\mathbb{R}}x^2 : \forall a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \text{baz} = \{1, x, x^2\}$$

$$= P_3$$

a) $L : P_3 \to P_3$ $\quad \dim P_3 = 3$

$p(x) \mapsto x p'(x)$

$$a_0+a_1x+a_2x^2 \longmapsto x(a_1+a_2x) = \underline{a_1x+a_2x^2}$$

$\mathrm{Range}(L) = \{ a_1x+a_2x^2 : a_1,a_2 \in \mathbb{R} \}$

$\{x, x^2\} \to$ bir bazdır.
dim = 2

$$\mathrm{Ker}(L) = \{ a_0+a_1x+a_2x^2 : L(a_0+a_1x+a_2x^2) = 0 \}$$

$$= \{ a_0+a_1x+a_2x^2 : \underline{a_1x+a_2x^2} = 0 \}$$

$a_1 = 0 \quad a_2 = 0$

$a_0 = r \in \mathbb{R}$.

$1, x, x^2$

$$= \{ r + 0x + 0x^2 : r \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \underbrace{r}_{r.1} : r \in \mathbb{R} \} \to \{1\} \to \mathrm{Ker}(L) \text{ için bir bazdır.}$$

dim = 1

P_3'teki Tüm sabit polinomlar

c) $L(p(x)) = p(0)x + p(1)$

$L : P_3 \to P_3$

$a_0+a_1+a_2$
a_0

$p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$

$$a_0+a_1x+a_2x^2 \longmapsto \underline{(a_0+a_1+a_2)} + \underline{a_0x}$$

$$L(p(x)) = a_0x + a_0+a_1+a_2$$

$\mathrm{Range}(L) = \mathrm{span}\{1, x\}$

$\{1, x\} \to$ bazdır. $\quad$ dim = 2

$$\mathrm{Ker}(L) = \{ a_0+a_1x+a_2x^2 : L(a_0+a_1x+a_2x^2) = 0 \}$$

$$= \{ a_0+a_1x+a_2x^2 : \underbrace{(a_0+a_1+a_2)}_{0} + \underbrace{a_0}_{0}x = 0 \}$$

$$= \{ 0 + \underbrace{-rx + rx^2}_{r(-x+x^2)} : r \in \mathbb{R} \}.$$

$a_0+a_1+a_2 = 0$
$a_0 = 0 \quad a_2 = r \in \mathbb{R}$
$a_1 = -r$.

$\{-x+x^2\} \to$ Ker(L)'nin bir bazıdır.

$$\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{span}\{-x+x^2\}$$

$$\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$$