# 9. Hafta Çarşamba Dersi

21 Nisan 2021 Çarşamba 08:44

Örn $S = \{ (a+b, \; a-b+2c, \; b, \; c) : a,b,c \in \mathbb{R} \} \; (\leqslant \mathbb{R}^4)$

S için bir baz bulunuz ve boyutunu tespit ediniz.

S'deki tipik bir eleman $\rightarrow \begin{bmatrix} a+b \\ a-b+2c \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} \Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ S için bir geren küme'dir.

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ lineer bağımsızlığı kontrol edilmeli.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \rightarrow X c = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times3} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2r_2+r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{-r_3+r_4 \to r_4}$

$c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$c_2 = 0$

$c_3 = 0$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ lineer bağımsızlığı da sağlar $\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ bir bazdır.

$\Rightarrow \dim(S) = 3$

Örn 2x2 diyagonal matrislerin $\mathbb{R}^{2\times2}$'nin bir altuzayı olduğunu göstermiştik.

Bu altuzay için bir baz bulunuz ve boyutu nedir? $\dim(\mathbb{R}^{2\times2}) = 4$

$\rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} : d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$$\rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}_{2\times 2} : \underline{d_1, d_2 \in \mathbb{R}} \right\}$$

$\downarrow$ $S$'nin tipik bir elemanı

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = d_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1 \to e_1} + d_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2 \to e_4} \Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

$S$ için bir geren kümedir.

$\mathbb{R}^{2\times 2}$'nin standard bazı $= \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{e_4} \right\}$

Bu bazın tüm alt kümeleri lineer bağımsızdır.

$\Rightarrow \{e_1, e_4\}$ lineer bağımsızdır. $\Rightarrow \{e_1, e_4\}$ $S$ için bir bazdır.

$\Rightarrow \dim(S) = 2$ //

**Ör.**

$x_1 = (1,0,1,0)^T$

$x_2 = (0,1,-1,2)^T$

$x_3 = (0,2,2,1)^T$

$x_4 = (1,0,0,1)^T$

$\{\underbrace{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4}_{4 \text{ elemanlı bir küme}}\}$ $\mathbb{R}^4$ için bir baz belirtir mi? (lin. bağ. germe)

$\rightarrow \dim(\mathbb{R}^4) = 4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{X}$$

$$\det(X) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \left( - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2-(-2) + 1-4$$

$$= 4-3 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ lin. bağımsızdır. $\Rightarrow$ bazdır.

**Ör.**

$\vec{x}_1 = (2,1)$

$\vec{x}_2 = (4,3)$

$\vec{x}_3 = (7,-3)$

a) $\{x_1, x_2\}$'nin $\mathbb{R}^2$ için baz olduğunu göster.

b) $\{x_1, x_2, x_3\}$ lineer bağımsız mıdır, neden?

c) $\text{Span}\{x_1, x_2, x_3\}$'ün boyutu nedir?

a) $\;\;4| = 6-4 = 2 \neq 0$ $\quad \{x_1, x_2\}$ lin. bağımsız $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ için bazdır.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-4 = 2 \neq 0$ $\quad$ $\underline{\{x_1, x_2\}}$ lin. bağımsız $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ için $\underline{\text{bazdır.}}$

b) $\mathbb{R}^2$ 'de lineer bağımsız bir küme en fazla 2 elemanlı olabilir. X

c) $\text{Span}\{x_1, x_2, x_3\} = \{ \underline{\alpha_1} x_1 + \underline{\alpha_2} x_2 + \underline{\alpha_3 x_3} : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \} \leqslant \mathbb{R}^2$

$x_3 \in \mathbb{R}^2$ $\quad$ $x_3 = a x_1 + b . x_2$

$\{x_1, x_2\} \rightarrow \text{Span}\{x_1, x_2, x_3\}$ için bazdır.

$\dim(\text{Span}\{x_1, x_2, x_3\}) = 2$