8. Hafta Pazartesi Dersi

12 Nisan 2021 Pazartesi 09:28

$v \in \mathbb{Z}^+$ $\quad \alpha \circ v = v^\alpha$ $\quad \frac{1}{v} \notin \mathbb{Z}^+$

* Vektör Uzayları $(V, \oplus, \odot)$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in R^+$

$\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2 = v_1 v_2 \in R^+$ ✓

$\alpha \in R$ $\quad v \in R^+$

$\alpha \circ v = v^\alpha \in R^+$ ✓

(skalerler = tüm reel sayılar; vektörler = pozitif reel sayılar)

② Toplama kapalı ✓✓ $\quad v_1, v_2 \in V \quad v_1 \oplus v_2 \in V$

Skaler çarpma kapalı $\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad v \in V \quad \alpha v \in V$ ✓✓

✓1) $\underbrace{\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2}_{\text{sol taraf}} \overset{?}{=} \underbrace{\vec{v}_2 \oplus \vec{v}_1}_{\text{sağ taraf}}$

✓2) $(\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2) \oplus \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \oplus (\vec{v}_2 \oplus \vec{v}_3)$

✓3) Vektörel toplamanın birim elemanı $\in V$

✓4) Vektörel toplamanın ters eleman özelliği

✓5) $\alpha \in \mathbb{R}$ (skaler) $\quad \alpha \odot (\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2) = \alpha \odot \vec{v}_1 \oplus \alpha \odot \vec{v}_2$

✓6) $r, s \in \mathbb{R}$ (skalerler), $\vec{v} \in V$ $\quad (r+s) \odot \vec{v} = r \odot \vec{v} \oplus s \odot \vec{v}$

✓7) $r, s \in \mathbb{R}$ (skalerler), $\vec{v} \in V$ $\quad (rs) \odot \vec{v} = r \odot (s \odot \vec{v})$

✓8) $1 \in \mathbb{R}$ (skaler), $\vec{v} \in V$ $\quad 1 \odot \vec{v} = \vec{v}$

1) $\left.\begin{aligned} \vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2 &= v_1 \cdot v_2 \\ \vec{v}_2 \oplus \vec{v}_1 &= v_2 \cdot v_1 \end{aligned}\right\} =$ ✓

3) $\vec{0}_V$: $e \in R^+$ $\quad \forall v \in R^+$

$v \oplus e = v \cdot e = v$

$e = 1 \in R^+$ ✓

4) $\forall v \in R^+$

$v \oplus ? = v \cdot ? = 1 \in R^+$

$1/v \in R^+$ ✓

Let R^+ denote the set of positive real numbers. Define the operation of scalar multiplication, denoted $\circ$, by

$$\underset{\text{skaler}}{\alpha} \circ \underset{\text{vektör}}{x} = x^\alpha \longrightarrow \text{skaler çarpma}$$

for each $x \in R^+$ and for any real number α. Define the operation of addition, denoted $\oplus$, by

$$\underset{\text{vektör}}{x} \oplus \underset{\text{vektör}}{y} = x \cdot y \qquad \text{for all} \quad x, y \in R^+ \longrightarrow \text{vektörel toplama}$$

Thus, for this system, the scalar product of -3 times $\frac{1}{2}$ is given by

$$\underset{\text{skaler}}{-3} \circ \underset{\text{vektör}}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

and the sum of 2 and 5 is given by

$$\underset{\text{vektör}}{2} \oplus \underset{\text{vektör}}{5} = 2 \cdot 5 = 10$$

Is R^+ a vector space with these operations? Prove your answer. $\quad 5 \oplus 2 = 5 \cdot 2 = 10$

2) $\left.\begin{aligned} (\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2) \oplus \vec{v}_3 &= (v_1 v_2) \oplus \vec{v}_3 = v_1 v_2 v_3 \\ \vec{v}_1 \oplus (\vec{v}_2 \oplus \vec{v}_3) &= \vec{v}_1 \oplus (v_2 v_3) = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \end{aligned}\right\} =$ ✓

5) $\left.\begin{aligned} \alpha \circ (\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2) &= \alpha \circ v_1 v_2 = (v_1 v_2)^\alpha \\ (\alpha \circ \vec{v}_1) \oplus (\alpha \circ \vec{v}_2) &= v_1^\alpha \oplus v_2^\alpha = v_1^\alpha \cdot v_2^\alpha \end{aligned}\right\} =$ ✓

6) $\left.\begin{aligned} (r+s) \circ \vec{v} &= v^{r+s} \\ r \circ \vec{v} \oplus s \circ \vec{v} &= v^r \oplus v^s = v^r \cdot v^s \end{aligned}\right\} =$ ✓

7) $\left.\begin{aligned} (r \cdot s) \circ \vec{v} &= v^{rs} \\ r \circ (s \circ \vec{v}) &= r \circ v^s = (v^s)^r \end{aligned}\right\} =$ ✓

8) $1 \circ \vec{v} = v^1 = v$ ✓

Altuzaylar $\quad S \subset (V, \oplus, \odot)$

1) $\vec{0}_V \in S$

2) $\forall \vec{s}_1, \vec{s}_2 \in S \quad \vec{s}_1 \oplus \vec{s}_2 \in S$

3) $\forall \alpha \in R, \forall \vec{s} \in S \quad \alpha \odot \vec{s} \in S$

Örn/ yukarıdaki örnek için $(\mathbb{R}^+, \oplus, \circ)$ $\quad \mathbb{Z}^+ \subseteq R^+$ $\quad \mathbb{Z}^+ \not\leq (\mathbb{R}^+, \oplus, \circ)$

$e = \vec{0}_{R^+} = 1 \in \mathbb{Z}^+$ ✓ $\quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{Z}^+ \quad v_1 \oplus v_2 = v_1 v_2 \in \mathbb{Z}^+$ ✓

$\forall \alpha \in R \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{Z}^+$ ✗

$\alpha \circ \vec{v} = v^\alpha \overset{?}{\in} \mathbb{Z}^+$

ters örnek: $\alpha = -2 \in R \quad -2 \circ \vec{v} = v^{-2} = \frac{1}{v^2} \notin \mathbb{Z}^+$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots$

Lineer Kombinasyon ve Germe

soru tipi: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ $\quad V$ için bir geren küme midir!

V'nin tipik bir elemanını yaz. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sayıları $a_1, a_2, \dots, a_n$ cinsinden bulunabilir mi?

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} | \\ v_n \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

sistemi çözmeye çalışıyoruz.

sonuç: sistemin çözümü varsa $\longrightarrow$ Germe var ✓

sistemin çözümü yoksa $\longrightarrow$ Germe yok ✗

Lineer Bağımsızlık

soru tipi: $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ lineer bağımsız mıdır?

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}_V$$

$$c_1 \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} | \\ v_n \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ tek çözüm varsa $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ (trivial çözüm) $\Big\} =$ lineer bağımsızlık var ✓

$\longrightarrow$ sonsuz çözüm varsa $\quad$ lineer bağımsızlık yok ✗

Homojen sistemi çözmeye çalışırız.

$v_1, v_2, \dots, v_n$

* Kümenin içinde en az bir eleman, diğer bazı elemanların

lineer kombinasyonu şeklinde yazılabiliyorsa → lineer bağımsızlık bozulur.

* kümenin içinde sıfır vektörü varsa → lineer bağımsızlık bozulur.

! Teorem $\quad v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \vec{0}$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{n\times n}}_{X} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

*

X matrisi singüler $\iff$ $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineer bağımsız $\boxed{\text{değildir}}$

X'in sütunları

(X^{-1} yok, X tersinebilir değil, $\det(X) = 0$, $X \xrightarrow[\text{isef}]{} \neq I_n$)

$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)}$

X matrisinin tersi varsa $\iff$ $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineer bağımsızdır.

X'in sütunları

(X^{-1} var, $\det(X) \neq 0$, $X \xrightarrow[\text{isef}]{} = I_n$)

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} X_{n\times n} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{isef}} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}_{I_n} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{matrix} \checkmark$$

lineer bağımsızlık

$$\xrightarrow{\text{isef}} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} & & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{\neq I_n} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] \Rightarrow \text{sonsuz çözüm} \; X$$

lineer bağımsızlık yok!

Ex $\quad \vec{v}_1 = (4, 2, 3)^T$ → kitabın kullandığı notasyon, $\quad v_2 = (2, 3, 1)^T, \quad v_3 = (2, -5, 3)^T \in \mathbb{R}^3$

aynı $\rightsquigarrow \langle 4, 2, 3 \rangle$ → webwork'ün kullandığı notasyon

$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3'lüler ve 3 tane → teorem kullanılabilir.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ lineer bağımsız mıdır?

Çözüm

$$X = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \text{isef}$$

$$\det(X) = 4 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}_{6+15} + 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{2-9}$$

$$= 56 - 42 - 14 = 0$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad 10 - 12 \neq 0$

$\det(X) = 0 \Rightarrow$ X'in sütunları lineer bağımsız DEĞİL!

Ör $\quad \vec{v}_1 = (1, -1, 2, 3)^T, \quad v_2 = (-2, 3, 1, -2)^T, \quad v_3 = (1, 0, 7, 7)^T \in \mathbb{R}^4$

3 vektör var, 4'lüler → teorem çalışmaz.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & \; \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{set}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{matrix} c_1 - 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} c_3 = r \in \mathbb{R} \\ \text{sonsuz çözüm} \end{matrix} \right\} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ lineer bağımsız [illegible]}$$

$c_1 - 2c_2 + c_3 = 0$ $\quad c_3 = r \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 lineer bağımsız DEĞİL!

$c_2 + c_3 = 0$ $\quad$ sonsuz çözüm

$1, x, x^2$ $\quad 3 \longrightarrow 4$

8. Determine whether the following vectors are linearly independent in P_3 derecesi 3'ten küçük polinomlar = vektörler, skalerler = reel sayı

→ (a) $1, x^2, x^2-2$ $\quad$ → (b) $2, x^2, x, 2x+3$ → lineer bağımlıdır. $\quad 2x+3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot x$

$v_1 \quad v_3 \quad v_2 \quad v_4$ $\quad$ skaler v_1 skaler v_3

→ (c) $x+2, x+1, x^2-1$ $\quad$ → (d) $x+2, x^2-1$ → lineer bağımsızdır.

$c_1(x+2) + c_2(x^2-1) = c_1x + 2c_1 + c_2x^2 - c_2 = 0$

$2c_1 - c_2 \quad c_1 = 0 \quad c_2 = 0$

Örn $\quad v_1 = 1, \quad v_2 = x, \quad v_3 = x^2$ $\quad v_1, v_2, v_3$ lineer bağımsızdır.

$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$

$1, 2$ $\quad c_1 1 + c_2 . x + c_3 x^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

a) $v_1 = 1 \quad v_2 = x^2 \quad v_3 = x^2 - 2$ $\quad (v_3 = v_2 - 2v_1)$ $\quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

P_3 $\quad v_1, v_2, v_3$ lineer bağımlıdır.

$c_1 . 1 + c_2 . x^2 + c_3(x^2-2) = 0$

$c_1 + c_2x^2 + c_3x^2 - 2c_3 = 0$

sabit → $c_1 - 2c_3 = 0$ $\quad c_3 =$ free $= r$ $\quad$ sonsuz çözüm $\Rightarrow$

x^2'nin katsayısı → $c_2 + c_3 = 0$ $\quad c_1 = \quad c_2 =$

Ex $\quad \vec{v_1} = (x+1), \quad \vec{v_2} = (x-1), \quad \vec{v_3} = (x^2 - 1) \in P_3$ $\quad (P_3, \oplus, \cdot)$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ lineer bağımsızdır.

$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$

$c_1(x+1) + c_2(x-1) + c_3(x^2-1) = 0$

$c_1x + c_1 + c_2x - c_2 + c_3x^2 - c_3 = 0$

sabit terim $\quad c_1 - c_2 - c_3 = 0$ $\quad c_1 - c_2 = 0$

x'in katsayısı $\quad c_1 + c_2 = 0$ $\quad c_1 + c_2 = 0$

x^2'nin katsayısı $\quad c_3 = 0$ $\quad c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ lineer bağımsızlık var!

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{v_3} \in \mathbb{R}^{2\times2}$ vektörler = 2x2 matrisler

lineer bağımlıdır.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c_3 & 3c_3 \\ 0 & 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_3 & c_2 + 3c_3 \\ 0 & c_1 + 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 + 2c_3 = 0$ $\quad c_3 =$ free $= r$

$c_2 + 3c_3 = 0$ $\quad$ sonsuz çözüm.

$c_1 = -2r$

$c_2 = -3r$