8. Hafta Çarşamba Dersi

14 Nisan 2021 Çarşamba 08:29

Baz (Taban) ve Boyut — Basis & Dimension

Baz = Germe (Geren Küme) $\{v_1, v_2, \dots\}$ + Lineer bağımsızlık $\{v_1, v_2, \dots\}$

V'nin iskeleti

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ V'nin bir bazıdır $\Leftrightarrow$
- V'nin geren kümesidir.
- Kendi içinde lineer bağımsızdır.

Örn: $\mathbb{R}^2$'de $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\} \to$ geren küme $\to$ Baz

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}} \right\} \to$ geren küme $\to$ Baz değildir.

* Baz'a vektör eklediğinde / çıkardığında baz özelliği bozulur.

$\mathbb{R}^2$'de $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \right\} \to$ germe + lineer bağımsızlık $\Rightarrow$ baz

* Bir vektör uzayının birden fazla bazı olabilir.

Örn: $\left\{ \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \right\} \to \mathbb{R}^2$ için bir bazdır.

Geren küme

Germe: sonsuz çözüm, tek çözüm ✓

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -2a+b \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2a-b \end{array}\right]$$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = a$ $\qquad$ $\alpha_1 + 2(2a-b) = a$

$\alpha_2 = 2a-b$ $\qquad$ $\alpha_1 = -3a+2b$

geren küme ✓

Lineer bağımsızlık

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{lineer bağımsız ✓}$$

Örn: $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ $\quad \{v_1, v_2, v_3\}$ $\mathbb{R}^3$'ün bir bazı mıdır?

Geren küme

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&a\\1&1&0&b\\1&1&1&c\end{array}\right]\xrightarrow[-r_1+r_3\to r_3]{-r_1+r_2\to r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&a\\0&1&-2&b-a\\0&1&-1&c-a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3\to r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&a\\0&1&-2&b-a\\0&0&1&c-b\end{array}\right]$$

$\underline{\alpha_3 = c-b}$

$\alpha_2 - 2\alpha_3 = b-a$

$\alpha_2 - 2c+2b = b-a \Rightarrow \underline{\alpha_2 = 2c-b-a}$

germe ✓

$\alpha_1 + 2\alpha_3 = a$

$\alpha_1 + 2c-2b = a \Rightarrow \underline{\alpha_1 = a+2b-2c}$

Lineer bağımsızlık

$$\det\left(\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\right) = 1.\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} - 0 + 2.\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}$$

$$= 1 - 0 + 0 = 1 \neq 0$$

lineer bağımsız ✓

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ $\mathbb{R}^3$'ün bir bazıdır.

$\{2x,\ x-2\}$ P_3'ün geren kümesi midir? $2x^2+3x-4 \in P_3$

$\alpha_1(2x) + \alpha_2(x-2) = ax^2+bx+c$

$2\alpha_1 x + \alpha_2 x - 2\alpha_2 = ax^2+bx+c.$

$$\left.\begin{array}{l}0=a\\2\alpha_1+\alpha_2=b\\c=-2\alpha_2\end{array}\right\} \quad 2\alpha_1 =$$

Sadece $a=0$ ise çözüm vardır.

Her a,b,c için çözüm yazabilmeliydik.

Geren küme değildir.

$1, x, x^2$