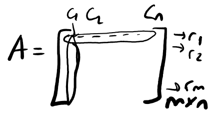

Sıfırlık Uzayı $N(A)$: $Ax=0$'ın tüm çözümlerinin kümesi

Satır Uzayı $R(A)$: A matrisinin satır vektörlerinin gerdiği uzay

$$= \text{span}\{\underbrace{r_1, r_2, \dots, r_m}_{n\text{'liler}}\} \leqslant \mathbb{R}^n$$

Sütun Uzayı $C(A)$: A matrisinin sütun vektörlerinin gerdiği uzay

$$= \text{span}\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \leqslant \mathbb{R}^m$$

Ör/

$$A = \begin{array}{c} \\ r_1 \rightarrow \\ r_2 \rightarrow \\ r_3 \rightarrow \\ r_4 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 \downarrow & c_2 \downarrow & c_3 \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$N(A)$, $R(A)$, $C(A)$ için ayrı ayrı baz bulunuz.

$$A \xrightarrow{\text{iSEF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) $N(A) \rightarrow \underline{Ax=0}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 + x_3 = 0$
$x_2 - x_3 = 0$

$x_3 = r \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow x_1 = -r$
$\Rightarrow x_2 = r$

$N(A)$'nın tipik bir elemanı $= \begin{bmatrix} -r \\ r \\ r \end{bmatrix}$

$\rightarrow r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow N(A)$ için bir bazdır.

2) $R(A) = \text{span}\{r_1, r_2, r_3, r_4\} \leqslant \mathbb{R}^3$

$$A \xrightarrow{\text{iSEF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow R(A)$ için bir bazdır.

3) $C(A) = \text{span}\{c_1, c_2, c_3\} \leqslant \mathbb{R}^4$

→ **1.yol** : A^T 'un satır uzayı $\qquad A^T \xrightarrow{\text{İSEF}}$ sıfırdan farklı satırları al.

2.yol : $A \xrightarrow{\text{İSEF}}$ baz elemanı 1'lerin bulunduğu sütun numarasındaki sütunları A'dan al.

$$\rightarrow A \xrightarrow{\text{İSEF}} \begin{array}{ccc} \text{1.sütun} & \text{2.sütun} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow C(A) \text{ için bir bazdır.}$$

Rank-Nullity Teoremi $\quad A_{m\times n}$

Rank(A) = A'nın satır uzayının boyutu = A'nın sütun uzayının boyutu

Null(A) = N(A)'nın boyutu

$$\boxed{\text{Rank}(A) + \text{Null}(A) = n}$$

Ör:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

R(A) için bir baz bulunuz.

N(A) " " " "

Rank(A) = ? $\quad$ Null(A) = ?

2 ?

$$A \xrightarrow{\text{SEF}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(A) \text{ için bir baz} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ Rank(A) = 2

N(A) için $Ax = 0$ çöz

$$[A \,|\, 0] \xrightarrow{\text{SEF}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$N(A) \text{ için bir baz} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ Null(A) = 2

$$x_1 + 2x_2 - \overset{2r}{x_3} + \overset{r}{x_4} = 0$$
$$x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 2\overset{s}{x_2} + 3r = 0 \Rightarrow$$

$$x_4 = r \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow x_3 = -2r$$
$$x_2 = s \in \mathbb{R}$$
$$x_1 = -3r - 2s$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3r-2s \\ s \\ -2r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rank(A) + Null(A) $= 2+2 = 4 \rightarrow$ A'nın sütun sayısı

Örn/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$ R(A) için bir baz bulunuz.
C(A) " " " "

$$A \xrightarrow{SEF} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\hookrightarrow$ R(A) için bir baz.

$$A \xrightarrow{SEF} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{1.sütun} & \text{2.sütun} & & & \text{5.sütun} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Rank(A) = 3

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

$\hookrightarrow$ C(A) için bir baz.

Bazlar Arası Geçiş

* Bir vektör uzayının farklı bazları olabilir.

* Vektör uzayındaki her bir vektör, bazdaki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$B = \{b_1, b_2, \ldots$ $\qquad \vec{v} = \alpha_1 [\;\;] + \alpha_2 [\;\;]$

$\alpha_1, \alpha_2 = ? \rightarrow$ o baza göre v vektörünün koordinatları.

Örn/ $\mathbb{R}^2$ $\qquad E = \left\{ \overset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\} \rightarrow$ standart baz $\longrightarrow E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e_1, e_2)

$\rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \underset{-2}{\alpha_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underset{5}{\alpha_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{[\vec{v}]_E}$$

$\Rightarrow [\vec{v}]_E = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\vec{v}$ vektörünün

$\rightarrow \quad [\vec{v}]_E = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$[\vec{v}]_E$

$\vec{v}$ vektörünün E bazına göre koordinat vektörü.

$\det B = 1 \neq 0$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ için bir bazdır. $\longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (işaretler)

$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\underset{5}{\alpha_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \underset{7}{\alpha_2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \rightarrow [\vec{v}]_B = ?$

$b = A \quad x$

B^{-1} hep vardır.

$\rightarrow \vec{v} = B . [\vec{v}]_B$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1}\vec{v} = \underbrace{B^{-1}. B}_{I} . [\vec{v}]_B = [\vec{v}]_B$

$[\vec{v}]_B = B^{-1} v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow$ v'nin B bazına göre koordinat vektörü

$\mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ için bir bazdır. $\quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad [\vec{v}]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}. v \qquad \mathcal{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 \\ -1 & 4/5 \end{bmatrix}$

$[\vec{v}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 \\ -1 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 . \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 6 . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

B, herhangi bir bazın matris hali, → bazın vektörleri sütunlara yazılır.

v, herhangi bir vektör olmak üzere

v'nin B bazına göre koordinat vektörü $= \boxed{[\vec{v}]_B = B^{-1} v}$

$\longrightarrow v = \underbrace{B_1 . [\vec{v}]_{B_1} = B_2 . [\vec{v}]_{B_2}}$ $= \ldots\ldots$

$B_2^{-1} \qquad B_2^{-1}$

$$\boxed{\underbrace{B_2^{-1} B_1}\,[\vec{v}]_{B_1} = \underbrace{[\vec{v}]_{B_2}}}$$

B_1 bazından B_2 bazına geçiş matrisi

Örn/ $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ $\mathbb{R}^2$'nin bazları olmak üzere

$\vec{v}$ vektörünün B_2 bazındaki koordinat vektörü $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ ise $[\vec{v}]_{B_1} = ?$

$[\vec{v}]_{B_2} \leftarrow$

B_2 bazından B_1 bazına geçiş matrisi nedir?

$$B_2 [\vec{v}]_{B_2} = B_1 \cdot [\vec{v}]_{B_1} \qquad [\vec{v}]_{B_1} = \underbrace{B_1^{-1} B_2}\,[\vec{v}]_{B_2}$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_1^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

B_2 bazından B_1 bazına geçiş matris

$$[\vec{v}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \checkmark \rightarrow$$

$\vec{v}$'nin B_1 bazına göre koordinat vektörü.