15. Hafta Çarşamba Dersi

02 Haziran 2021 Çarşamba 08:34

$A = X^{-1} D X$

Matrislerde Benzerlik

$A, B \to n \times n$ matrisler

$B = S^{-1} A S$ olacak şekilde bir S matrisi varsa A ve B benzer matrislerdir.

→ # Aynı lineer operatörün farklı bazlardaki temsil matrisleri benzerdir.

Örn

$L : \underset{E}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2$ $\qquad \boxed{L(\vec{x}) = (2x_1, x_1 + x_2)}$

$(x_1, x_2) \longrightarrow (2x_1, x_1 + x_2)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{input}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}}_{\text{output}}$$

$A \Rightarrow$ L'nin standart temsil matrisi

İkinci yol

$L(e_1) = L((1,0)) = (2, 1+0) = (2,1) \to$ A'nın 1.sütunu $\to A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$L(e_2) = L((0,1)) = (0, 0+1) = (0,1) \to$ " 2.sütunu

Başka baz

$u_1 = (1,1)$

$u_2 = (-1,1)$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{U}$

$\mathcal{U}^{-1}$

$\mathcal{U}$ bazına göre temsil matrisini bulalım.

$L(u_1) = L((1,1)) = (2, 1+1) = (2,2) \to$ standart bazda

$(2,2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_1 - \alpha_2 = 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$

$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \to$ 1.sütun

$[(2,2)]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$L(u_2) = L((-1,1)) = (-2, -1+1) = (-2,0) \to$ " "

$(-2,0) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_1 - \alpha_2 = -2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ $\to \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \to$ 2.sütun

$$B = L_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{U}$ bazından V bazına geçiş matrisi $= V^{-1} \mathcal{U}$

V " $\mathcal{U}$ bazına geçiş matrisi $= \mathcal{U}^{-1} V$

standart baz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ det=2 $\qquad \mathcal{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

E'den $\mathcal{U}$'ya geçiş matrisi $= \mathcal{U}^{-1} E = \mathcal{U}^{-1}$

$\mathcal{U}$'dan E'ye " " $= E^{-1} \mathcal{U} = \mathcal{U}$

$L(u_1) = A u_1 = (2,2)$ $\qquad [(2,2)]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1} \underbrace{A u_1}_{(2,2)} \to$ B'nin ilk sütunu

$L(u_2) = A u_2 = (-2,0)$ $\qquad [(-2,0)]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1} \underbrace{A u_2}_{(-2,0)}$

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{U}^{-1} A u_1 & \mathcal{U}^{-1} A u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \mathcal{U}^{-1} A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}}$$

$$\Rightarrow B = \mathcal{U}^{-1} A \, \mathcal{U}$$

$\Rightarrow B = U^{-1} A U$

$\Rightarrow$ Farklı bazlara ait temsil matrisleri benzerdir.

<u>Sonuç</u> <u>A</u> bir lineer operatörün standart bazdaki temsil matrisi ile, bu lineer operatörün U bazındaki temsil matrisi;

$B = U^{-1} A U$ şeklinde bulunabilir.

Örn

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix}$$

$A \rightarrow$ L'nin standard bazdaki temsil matrisi

$\mathbb{R}^3$ için L'nin U bazına göre temsil matrisi; $= B$

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow U^{-1} = \dots$$

$B = U^{-1} A U$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow L_V = ?$$

$B = U^{-1} E \; A \; E^{-1} U$

$U^{-1} V \; A \; V^{-1} U = S^{-1} A S$ ✓

$(V^{-1} U)^{-1} = U^{-1} V$

* $A \rightarrow$ V bazına göre temsil matrisi
$B \rightarrow$ U bazına göre temsil matrisi

$\Rightarrow \boxed{B = U^{-1} V \; A \; V^{-1} U}$

V bazına göre temsil matrisi:

$C = L_V = \underbrace{V^{-1} U}_{S^{-1}} \; B \; \underbrace{U^{-1} V}_{S}$ ✓

$C = L_V = V^{-1} A V$ ✓