Boyut (Dimension) = dim(V)

Boyut = Vektör uzayında bazın eleman sayısı.

$\mathbb{R}^2 \to \left\{ \underset{e_1}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \right\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

standart baz

$\mathbb{R}^3 \to \left\{ \underset{e_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}} \right\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

standart baz

$\mathbb{R}^n \to \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

$\mathbb{R}^{2\times2} \to \left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \right\}$

standart baz $\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^{2\times2}) = 4$

$\mathbb{R}^{m\times n} \to \dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = m.n$

$\mathbb{R}^{n\times n} \to \dim(\mathbb{R}^{n\times n}) = n^2$

$P_n \to \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \to \dim(P_n) = n$

standart baz

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

* Her vektör uzayı için sonlu bir küme baz olarak bulunamayabilir.

$\to$ sonsuz boyutlu vektör uzayları

Ex

$P \to$ tüm polinomların vektör uzayı

$C \to$ sürekli fonksiyonların vektör uzayı

! * Eğer $\dim(V) = n > 0$ ise,

baz $\to$ lin. bağ., germe

— Her lineer bağımsız n elemanlı küme bir bazdır.

— Her n elemanlı geren küme bir bazdır.

Örn $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\underbrace{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}}_{\text{3 elemanlı küme}}$ $\mathbb{R}^3$ ün bazı mıdır? $\to \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$$\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&0\\3&0&1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix} = 1 + 4 - 3 = 2 \neq 0$$

$0-3$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. bağımsızdır.

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ bazdır. ✓

* Eğer $\dim(V) = n > 0$ bazın eleman sayısı $= n$

— Eleman sayısı n'den küçük olan bir küme geren küme olamaz.

— Eleman sayısı n'den küçük olan lineer bağımsız bir küme, uygun vektör(ler) eklenerek baz haline getirilebilir.

Ör: $(e_1, e_2), e_3$ } baz. baz değil, Lin. bağımsız $\mathbb{R}^3$

$e_1 \quad e_2$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ → geren küme olamaz

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $c \neq 0$ çözüm yok

— Eleman sayısı n'den büyük olan bir geren küme, uygun vektör(ler) çıkarılarak baz haline getirilebilir.

Ör: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^2$ geren küme ✓

baz değil

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ çıkarılırsa lin. bağ., geren küme } → baz ✓

$\boxed{\dim(V) = n}$

* — V'deki lineer bağımsız bir küme **EN FAZLA** n elemana sahip olabilir.

* — V'nin bir geren küme'si **EN AZ** n elemana sahip olmalıdır.

⇒ n'den az elemanlı bir küme lineer bağımsız olabilir/olmayabilir. geren küme olamaz.

n

geren küme

n

{ lin. bağımsız }

n+1

Ör: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız değil. $n = 3$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız.

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in \mathbb{R}^3$ → lineer bağımsız olamaz!

⇒ n'den fazla elemanı olan bir küme geren küme olabilir/olmayabilir. lineer bağımsız olamaz.

Ör: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$ geren küme değil.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$ geren küme ✓

$\{v_1, v_2\}$ → $\mathbb{R}^3$ için geren küme olamaz.

Ör. 4 elemanlı bir küme $\in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız olabilir mi? HAYIR

3 elemanlı bir küme $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ geren küme olabilir mi? HAYIR

3 elemanlı bir küme $\in \mathbb{R}^2$ geren küme olabilir mi? olabilir de olmayabilir de

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ geren küme değil

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ geren küme.

2 elemanlı bir küme $\in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız olabilir mi? olabilir de olmayabilir de

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ lineer bağımsız.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ lineer bağımsız değil.

* Lineer bağımsız bir kümenin tüm alt kümeleri $(\neq \emptyset)$ lineer bağımsızdır.

Ama lineer bağımlı bir kümenin alt kümeleri lineer bağımlı da olabilir, lineer bağımsız da olabilir.

Ör. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$'te lineer bağımlı bir küme.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ lineer bağımsız bir alt küme

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ lineer bağımlı bir alt küme

Ör.

The vectors

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \cancel{\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

span $\mathbb{R}^3$. Pare down the set $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$ to form a basis for $\mathbb{R}^3$.

$x_1 + x_3 = x_2$

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ $\mathbb{R}^3$'ün geren kümesi.

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Baz oluştur.

Kim gitsin?

problem lineer bağımsızlık.

x_2.

$\binom{5}{3} = 10 \qquad \binom{4}{3} = 4$

$x_1 \quad x_3 \quad x_4$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \end{vmatrix} = -2 + 6 - 4 = 0$ ✗

$x_1 \quad x_3 \quad x_4$

$\binom{5}{3}=10 \qquad \binom{4}{3}=4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2+6-4=0 \quad \times$$

$-2 \qquad 8-14 \qquad +6 \qquad 4-6 \qquad -2 \qquad -4$

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow \\ x_3 \rightarrow \\ x_4 \rightarrow \\ x_5 \rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-2x_1+x_4 \rightarrow x_4 \\ -x_1+x_5 \rightarrow x_5}]{-x_1+x_3 \rightarrow x_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \rightarrow x_1 \\ \rightarrow x_3 \\ \rightarrow x_4 \\ \rightarrow x_5 \end{array}$$

sadece 2. tip 3. tip.
satır operasyonu uygula.

$$\boxed{3(-x_1+x_3) = -2x_1+x_4}$$

lineer bağımlılık ilişkisi

$$-3x_1+3x_3 = -2x_1+x_4$$

$$3x_3-x_4 = x_1$$

$\{x_1, x_4, x_5\}$ ✓ $\qquad x_1,\ x_3,\ x_5$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4+4-6 \neq 0$$

$-2 \qquad 8-14$