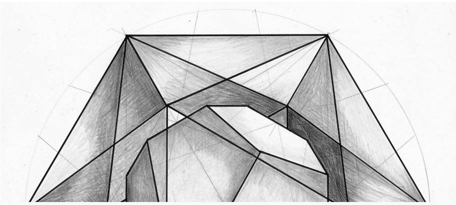
Optimisation mathématique : introduction et application à la gestion de l'eau

UCA – Master Hydroprotech

Sophie Demassey (CMA, Mines Paris – PSL)
sophie.demassey@minesparis.psl.eu http://sofdem.github.io/hydroprotech/

Programme

- introduction
- optimisation



Introduction

Gestion de la qualité de l'eau

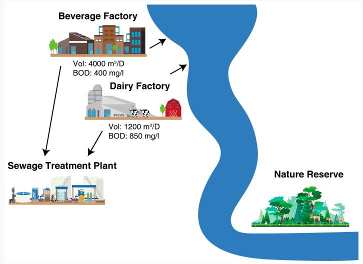


Figure 1 – dimensionner des systèmes de traitement des eaux usées à moindre coût pour respecter une limite environnementale [Zhou 2019]

GESTION DES BARRAGES ET CRUES

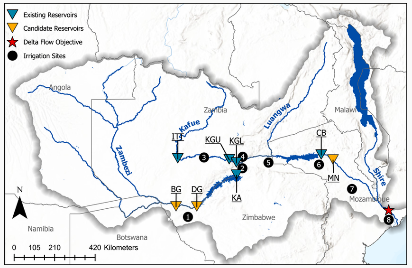


Figure 2 – planifier la construction de barrages et contrôler les débits pour minimiser les risques d'inondation en satisfaisant les besoins des différents usagers [Arnold 2023]

GESTION DES RÉSEAUX D'EAU POTABLE

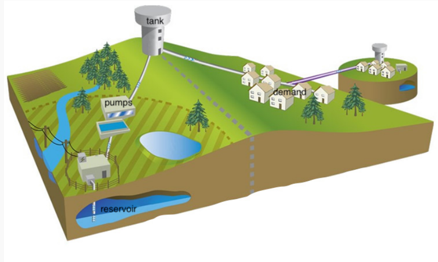


Figure 3 – dimensionner le réseau et opérer pompes et valves à moindre coût énergétique pour satisfaire la demande variable en eau potable [Bonvin 2021]

GESTION DU CAPTAGE

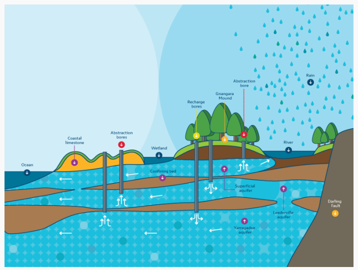


Figure 4 – positionner et dimensionner les puits et pompes pour satisfaire la demande – en qualité et quantité – et minimiser l'impact sur les aquifères – en qualité et quantité [Water Corporation]

GESTION DE LA PRODUCTION HYDRO-ÉLECTRIQUE

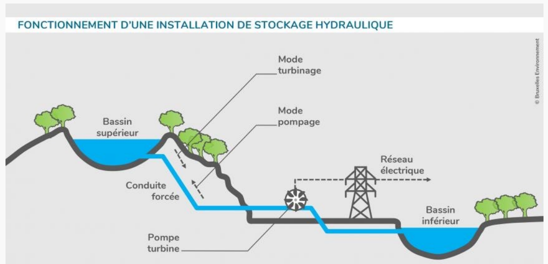


Figure 5 – opérer pompes et turbines pour maximiser la valeur de production électrique en respectant des niveaux de réservoirs

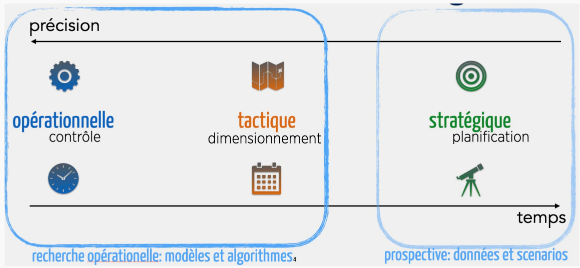
Facettes de l'eau

une commodité à soutirer, collecter, traiter, acheminer, distribuer, valoriser
une ressource à mobiliser dans la limite de disponibilité
un environnement à préserver
un élément météorologique et climatique à maîtriser

Facettes de la décision

commodités : eau potable, d'irrigation, usée ; eau souterraine, retenue, courante ; minéraux, salinité, polluants ; électricité consommée ou produite
spatialité : installation (pompe, barrage, station), réseau urbain, rivière, aquifère, bassin, région, monde
temporalité : dimensionnement et placement fixe, contrôle court et moyen terme, planification à long terme
données : connues (déterministe, fixe/dynamique) ou prédites (stochastique, probabiliste, robuste)

Temporalité et précision



- niveaux de décision : temps entre la prise de décision et la réalisation
- niveaux de précision : un temps plus court, des données plus précises, des décisions plus fiables

Facettes de la décision

- commodités...
- spatialités...
- temporalités...
- données...
- objectifs : coûts/revenus financiers, impact environnemental, risque/satisfaction des usagers à minimise/maximiser

décider = optimiser

DÉCISION = OPTIMISATION

sélectionner la **meilleure** des alternatives **possibles** – les **solutions** –
au regard d'un critère quantitatif – l'**objectif**.

PROBLÈME DÉCISIONNEL

Comment concevoir et piloter un système/processus pour répondre à un besoin tout en **minimisant** *la consommation de ressources, ou pour* **maximiser** *la production de biens étant donné des ressources limités ?*

- décision stratégique (conception/long-terme) ou opérationnelle (pilotage/court-terme)
- système global (ex : système océanique) ou local (ex : chauffe-eau)
- connaissance imparfaite : dynamiques physiques, prévisions de consommation
- multiples paramètres et critères à prendre en compte simultanément

one person's solutions should not become another person's problem

DES OBJECTIFS À OPTIMISER

temps :	min durée de trajet, min retard
espace :	min distance de trajet, min espace perdu
budget :	min coût, max profit
biens :	max production, min consommation
choix :	max satisfaction
équilibre :	min énergie potentielle

SIMULER, OPTIMISER, MODÉLISER

Comment concevoir et piloter un système/processus ?

- identifier les alternatives possibles
- attribuer un score quantifiant la valeur de chaque alternative
- trouver une alternative de plus haut score

simulation : **évalue** la faisabilité et le score d'une alternative
heuristique : **parcourt et évalue progressivement** quelques alternatives
optimisation : parcourt et évalue **(implicitement) toutes** les alternatives

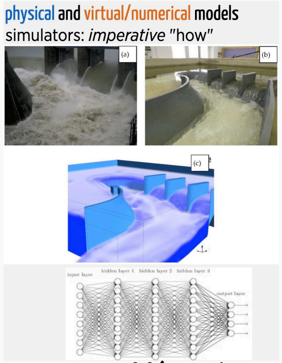
optimisation

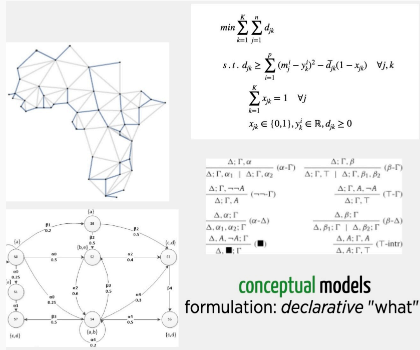
modèle	représentation *précise* du système et du score pour **évaluer**
algorithme	parcours *rapide* des alternatives à la recherche du meilleur score

OPTIMISATION

MODÈLES

La faisabilité et la valeur d'une décision sont observées sur un modèle du système/processus (non sur le système/processus même)





assemblé par des experts ou **entraîné** sur des exemples (machine learning)

MODÈLES D'OPTIMISATION

Un modèle d'optimisation mathématique est

une représentation implicite des solutions du problème
par des **relations** entre des **inconnues** par des **fonctions** analytiques sur des **variables** à valeurs réelles

$$\min \{ f(x) \ : \ g_i(x) \le 0 \, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \, x \in \mathbb{R}^n \}$$

objectif $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: la fonction à minimiser
contraintes $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: les relations à satisfaire simultanément.

EXEMPLE 1 : MODÉLISER

dimensionnement de canalisations

choisir le diamètre des canalisations sur deux portions d'un réseau, dans un budget de 180 euros, pour maximiser le débit, sachant que :

- 1ère portion : diamètre maximal=40cm, coût 3 euros/cm, débit 3u/cm
- 2nde portion : diamètre maximal=60cm, coût 2 euros/cm, débit 5u/cm

EXEMPLE 1 : MODÉLISER

dimensionnement de canalisations

choisir le diamètre des canalisations, dans un budget de 180 euros, pour maximiser le débit ; 1ère portion : 40cm max, 3 euros/cm, débit 3u/cm ; 2nde portion : 60cm max, coût 2 euros/cm, débit 5u/cm.

quelles sont les inconnues ? l'objectif ? les contraintes ?

- variables : $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ diamètre (en cm) des canalisations sur les deux portions
- objectif : maximiser le débit (en u) $3x_1 + 5x_2$
- contraintes de dimension : les diamètres sont limités $0 \leq x_1 \leq 40, 0 \leq x_2 \leq 60$
- contrainte de budget : le coût (en euros) est limité $3x_1 + 2x_2 \leq 180$

EXEMPLE 1 : MODÈLE ANALYTIQUE

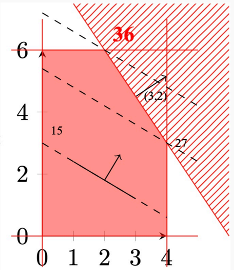
- espace des solutions : $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (diamètre en cm sur les deux portions)
- espaces réalisable : $P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 40, 0 \leq x_2 \leq 60, 3x_1 + 2x_2 \leq 180\}$.
- fonction objectif : $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 \leq 40 \\ & x_2 \leq 60 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

programme mathématique
2 variables x_1, x_2
objectif et contraintes sont des fonctions linéaires en x_1 et x_2

EXEMPLE 1 : MODÈLE GRAPHIQUE

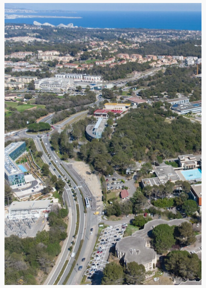
$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 \leq 40 \\ & x_2 \leq 60 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



- chaque contrainte linéaire définit un demi-plan de l'espace $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
- les solutions réalisables sont les points du polyèdre ainsi défini
- chaque ligne pointillée est une droite d'équation $3x_1 + 5x_2 = p$ et contient toutes les solutions de score p
- la solution optimale est un sommet du polyèdre situé sur la ligne pointillée la plus *haute*, soit en $(x_1 = 20, x_2 = 60)$ avec $p = 360$

PRÉCISION & APPROXIMATION

prendre une décision



résoudre un modèle

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N$$

problème concret $\longrightarrow$ modèle abstrait $\xrightarrow{\text{solve}}$ solution théorique $\longrightarrow$ décision pratique

résoudre un modèle $\neq$ résoudre un problème

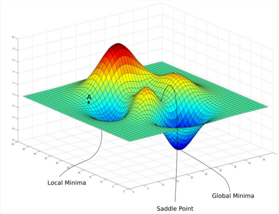
RÉSOUDRE : THÉORIE VS PRATIQUE

modèle $\neq$ problème

- données incertaines (prédiction) et imprécises (tronquées)
- dynamiques/fonctions simplifiées
- objectif conceptuel

résoudre $\min f(x) : g(x) \leq 0$**?**

- tolérance de faisabilité : $g(x) \leq \epsilon$
- tolérance d'optimalité : $f(x) \leq \min f + \epsilon$
- optimum local vs global
- garantie théorique vs pratique : forte complexité, convergence lente, temps limité



algorithmes variés pour des besoins variés

ALGORITHMES D'OPTIMISATION

simulation : **évalue** la faisabilité et le score d'une solution

heuristique : **parcourt et évalue progressivement** quelques solutions

optimisation : parcourt et évalue **(implicitement) toutes** les solutions

2 principes

- generate & test
- divide & conquer

GENERATE & TEST

méthodes numériques et black-box

1. évalue un candidat, 2. choix du prochain candidat

$$\text{guess} \xrightarrow[k=0]{} x_k \underset{k++}{\overset{\text{simulate}}{\rightleftarrows}} f(x_k) \longrightarrow \text{stop?}$$

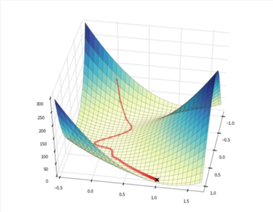
direction/step?

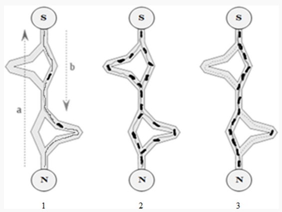
stratégies de choix : aléatoire, énumération, proximité, direction de descente,...

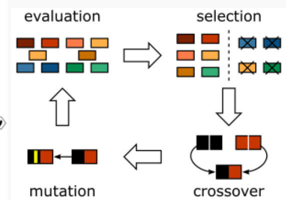
GENERATE & TEST : EXEMPLES

stratégies de choix : aléatoire, énumération, proximité, direction de descente,...

- méthodes du 1er ordre (*gradient*, *simplex*) : direction de descente $f'(x) < 0$
- recherche locale : choix du meilleur voisin
- algorithmes particuliers (*fourmis*) : mémoire collective
- algorithmes évolutionnaires (*génétique*) : reproduction d'une population



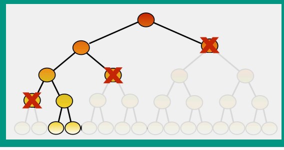




DIVIDE & CONQUER

principe

- séparer l'espace de recherche
- résoudre une relaxation / estimer borne
- backtracker ou continuer

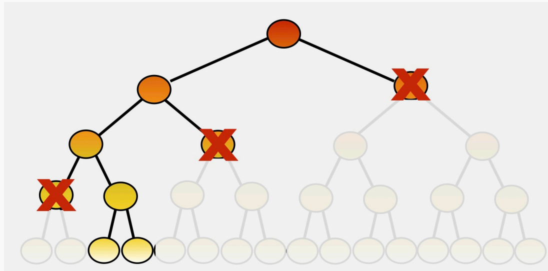


Pour un problème de minimisation :

- **relaxation :** modèle simplifié, rapide à optimiser, donne une borne inférieure
- une solution réalisable donne une borne supérieure
- certificat d'optimalité si les bornes coincident

DIVIDE & CONQUER : EXEMPLES

- heuristique gloutonne : pas de backtrack
- algorithmes de graphe, programmation dynamique
- méthodes arborescentes
- branch-and-bound en optimisation combinatoire



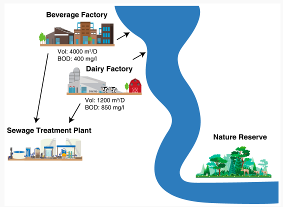
EXERCICE 2 : MODÉLISER

la Demande Biochimique en O_2 mesure la pollution de l'eau en masse d'O_2 requise pour biodégrader la matière organique présente dans l'eau

traitement de l'eau [Zhou, Sustainability 2019]

Par jour, deux fermes produisent resp. $1200m^3$ (DBO=$850g/m^3$) et $4000m^3$ ($DBO = 400g/m^3$) d'eaux usées. Les systèmes de traitement respectifs ramènent 1 tonne DBO à 100kg et 50kg pour un coût de 400 et 500 euros. La part traitée est rejetée dans la rivière dans la limite autorisée de $DBO = 170kg$. La part non traitée a un coût d'évacuation de 0.56 et 0.25 euro par m^3. Est-il possible de respecter la limite environnemental dans un budget journalier de 1250 euros ?

GESTION DE LA QUALITÉ DE L'EAU



- dairy : traitée : 1 tonne → 100kg DBO = 400 euros, évacuée : 0.56 euros$/m^3$
- beverage : traitée : 1 tonne → 50kg DBO = 500 euros, évacuée : 0.25 euros$/m^3$
- quel volume d'eau traiter pour minimiser DBO ($<= 170kg$) dans un budget de 1250 euros ?

- x_1, x_2 : volumes traités (en m^3)
- volumes évacués (en m^3) ? coût (en euros) ?
- volumes : $y_1 = (1200 - x_1)$, $y_2 = (4000 - x_2)$, coût : $0.56 * y_1 + 0.25 * y_2$
- eau traitée : rejet DBO avant (en kg) ? après (en kg) ? coût (en euros) ?
- avant : $r_1 = 850 * x_1 * 10^{-3}$, $r_2 = 400 * x_2 * 10^{-3}$, après : $10\% r_1 + 5\% r_2$
- coût : $400 * r_1 + 500 * r_2$