

Planification de la production d'électricité

Sophie Demasse, CMA – Mines Paris – PSL
sophie.demassey@minesparis.psl.eu

9 octobre 2025

La planification optimale des opérations d'un parc de production électrique consiste à décider du programme de fonctionnement des unités de génération pour répondre à la charge prévue sur un horizon temporel donné, en tenant compte des contraintes techniques qui régissent le fonctionnement des unités et en minimisant les coûts d'opération. Dans le processus de décision sur la gestion de tels systèmes, des exercices de planification sont réalisés à diverses échéances, sur des horizons variant de plusieurs mois à quelques minutes, à partir de modèles – physique du parc et prévisionnel des données – dont la précision augmente à mesure que l'échéance de réalisation du plan approche. Nous nous plaçons ici à une étape plus stratégique qu'opérationnelle dans l'objectif de vérifier la capacité du parc, de quantifier grossièrement le coût d'opération et de visualiser les contributions respectives des différentes unités. À cette échelle, les modèles mathématiques considérés sont assez approximatifs.

Ainsi, la demande est donnée par un profil journalier estimé sur 5 périodes faisant apparaître les pointes de consommation du matin et du soir : 15 gigawatts entre minuit et 6h, 30 gigawatts entre 6h et 9h, 25 gigawatts entre 9h et 15h, 40 gigawatts entre 15h et 18h, et 27 gigawatts entre 18h et minuit.

Les modèles physique et économique de l'opération du parc vont vous être décrits par étapes, en augmentant progressivement la précision. L'objectif du projet est d'intégrer progressivement ces éléments dans un modèle d'optimisation mathématique complet.

Directives

À chaque étape, vous écrirez le modèle de programmation mathématique **sur papier**, avant de l'implémenter avec l'API de votre choix (gurobipy, pyomo, GAMS,...) et le résoudre au moyen du solveur Gurobi. Après chaque résolution, vous reporterez les informations du modèle et de la résolution : type du modèle (PL, PLNE,...), taille du modèle (nombre de contraintes/variables) avant et après prétraitement ; algorithme appelé, tolérance pour l'écart d'optimalité ; coût de la meilleure solution, écart d'optimalité et temps de résolution ; (pour les modèles discrets uniquement) valeur optimale et temps de résolution de la relaxation initiale à la racine et taille de l'arbre de recherche (nombre de noeuds). Vous répondrez également aux questions posées, en justifiant vos réponses de manière synthétique. La valeur optimale approchée C^* (en milliers d'euros) du problème ainsi défini à chaque étape est donnée à titre indicatif. Continuez à avancer sur le projet et sur le modèle même si vos résultats numériques divergent des résultats attendus (notez-le pour y revenir plus tard). Consignes d'implémentation :

- déclarer les valeurs numériques en amont de la création du modèle : pas de valeur numérique (autres que 0/1) dans la définition des contraintes/variables
- définir des fonctions auxiliaires, par exemple pour opérer sur les données numériques.
- employer des noms de variables, de fonctions ou de contraintes, courts mais expressifs : pas nécessaire alors de commenter.
- attention aux unités et aux conversions

1 Modèle de base des centrales thermiques

Nous ne considérons, dans un premier temps, que les centrales thermiques du parc. Celles-ci sont classées en 3 catégories – A, B, C – suivant leurs caractéristiques opérationnelles. La table suivante indique, pour chaque catégorie, le nombre de centrales disponibles (N) et les valeurs de ces caractéristiques

communes à toutes les unités d'une même catégorie, à savoir, dans l'ordre : la puissance minimale (P_{\min} en megawatts) d'appel pour la connexion au réseau, la puissance maximale (P_{\max} en megawatts) et le coût horaire par megawatt généré (C_{mwh} en euros par megawatt-heure).

| catégorie | N | P_{\min} | P_{\max} | C_{mwh} |
|-----------|----|------------|------------|------------------|
| A | 12 | 850 | 2000 | 1.50 |
| B | 10 | 1250 | 1750 | 1.38 |
| C | 5 | 1500 | 4000 | 2.75 |

TABLE 1 – Caractéristiques des centrales par catégorie

1.1 planification journalière du parc thermique

Modéliser ce problème en un programme linéaire en nombres entiers. Sous quelles conditions, en changeant éventuellement les données, le modèle serait-il irréalisable ? non-borné ? Justifier le choix du signe (égalité ou inégalité) dans les contraintes de satisfaction de la demande. Montrer que ce modèle est décomposable, i.e. séparable en sous-problèmes indépendants.

1.2 relaxation continue

Donner une interprétation physique du problème quand on ignore les éventuelles contraintes d'intégralité sur les variables. Décrire un algorithme alternatif de résolution de ce problème, et exhiber une solution, appelée solution MO par la suite.

1.3 solutions basiques

Dans les questions 1.3-1.4, on considère le sous-problème de relaxation continue restreint à la seconde période de temps, dénoté (P_2) ci-dessous. Répondre aux questions en utilisant les définitions et en les prouvant par des arguments mathématiques vus en cours : Identifier et supprimer les données, variables et contraintes redondantes de (P_2) pour dégager un modèle linéaire avec exactement 3 variables bornées, couplées par une contrainte d'égalité. Reformuler ce modèle sous forme standard et exprimer le modèle dual.

- est-il possible de n'allumer que des centrales de type A sur la période 2 ? expliciter la solution basique associée. Est-elle dégénérée ? Est-elle optimale ?
- pour quelle autre valeur de la demande, cette solution basique devient-elle dégénérée ?
- la solution MO sur la seconde période est-elle basique ? dégénérée ? optimale ? exhiber la solution duale de même base

1.4 analyse de sensibilité

Étant donnée la solution basique optimale de (P_2) , utilisez les arguments d'analyse de sensibilité pour répondre aux questions suivantes :

- quel serait le surcoût lié à une augmentation de 1MW de la demande sur la première période ?
- de combien la demande peut-elle être augmentée sur la seconde période sans altérer le statut optimal de la base et quel en serait le surcoût ?
- quel serait l'impact sur l'optimum si une centrale supplémentaire de catégorie B était disponible sur la seconde période ?
- quel serait l'impact sur l'optimum si une centrale de catégorie B était indisponible sur la première période ? sur la seconde période ?
- De combien le coût horaire par MW des centrales de catégorie B peut-il augmenter sans altérer le statut optimal de la base ?

1.5 Implémentation du modèle de base ($C^* \approx 869$)

Implémenter le modèle mathématique (1.1). Ce programme mathématique comprend-il des variables discrètes? Le cas échéant, identifier, décrire et comparer les valeurs *best objective*, *best bound*, *root relaxation objective* et *heuristic solution* retournées par Gurobi. Lesquelles parmi ces valeurs sont des bornes inférieures (ou *bornes duales*) ou supérieures (ou *bornes primales*) de l'optimum global? Ce modèle possède-t-il la propriété d'unimodularité?

1.6 Implémentation de la relaxation continue ($C^* \approx 869$)

Résoudre la relaxation continue du modèle précédent (1.1) en utilisant la méthode `Model.relax()` de `gurobipy`. Comparer et expliquer la différence entre la valeur de relaxation continue et la valeur optimale du modèle discret (1.1); et entre la valeur de relaxation continue et la valeur initiale à la racine du modèle discret (1.1). Vérifier numériquement l'optimalité de la solution de `merit-order`.

1.7 reformulation de la relaxation continue ($C^* \approx 869$)

Implémenter le modèle mathématique de la relaxation continue sans les contraintes redondantes (1.3). Caractériser la variante du problème de sac-à-dos correspondant. Résoudre le modèle et reporter les coûts marginaux (ou duaux), les valeurs des variables d'écart et les coûts réduits à l'optimum. Reproduire l'analyse de sensibilité (questions 1.4) à l'aide de ce modèle numérique.

2 Coûts d'opération

Le modèle de coût comme une fonction linéaire de la puissance appelée n'est pas précis. Dans une meilleure approximation, nous différencions maintenant les coûts de la centrale associés à : son démarrage (Cstart en euros), son fonctionnement durant une heure à puissance minimale (Cbase en euros par heure), la génération d'1MWh supplémentaire au-delà de la puissance minimale (Cmwh en euros par megawatt-heure). Les valeurs correspondant aux 3 catégories de centrales sont les suivantes :

| catégorie | Cstart | Cbase | Cmwh |
|-----------|--------|-------|------|
| A | 2000 | 1000 | 2.0 |
| B | 1000 | 2600 | 1.3 |
| C | 500 | 3000 | 3 |

TABLE 2 – Coûts des centrales par catégorie

2.1 coûts de fonctionnement ($C^* \approx 979$)

Intégrer Cbase et Cmwh au modèle discret (1.1), en ignorant Cstart, et comparer les résultats.

2.2 coûts de démarrage ($C^* \approx 1014$)

Intégrer Cstart au modèle précédent (2.1) et comparer les résultats.

3 Réserve de puissance

Pour pallier aux erreurs de prévision sur la demande, une réserve de puissance est observée : à tout instant, la réserve synchronisée – i.e. la capacité supplémentaire disponible des générateurs connectés au réseau – doit pouvoir supporter une hausse de 15% de la demande prévue.

3.1 réserve ($C^* \approx 1015$)

Intégrer la contrainte de réserve de 15% au modèle précédent (2.2) et comparer les résultats.

4 Planification cyclique

La modélisation des coûts de démarrage fait apparaître des contraintes temporelles dites couplantes car elles lient l'activité (et donc les variables du modèle) sur deux périodes successives. L'hypothétique fonctionnement des centrales avant le début de l'horizon de planification impacte donc la solution. On souhaite planifier sur une période plus longue qu'une journée mais sous l'hypothèse d'un profil de demande journalier identique sur toute la durée de planification. La planification cyclique consiste alors ici à identifier tous les jours de l'horizon, et les 5 périodes qui les composent, à une journée type, de sorte que la première période de la journée type succède à la dernière période de cette même journée.

4.1 horizon journalier cyclique ($C^* \approx 989$)

Formuler la version cyclique du modèle précédent (3.1) puis l'intégrer de manière flexible à votre implémentation. Pour ce faire, définir un mode de résolution, cyclique ou non, et définir une fonction `prev(period, mode)` qui retourne l'indice de la période précédente à `period` en fonction de la valeur de l'option. Comparer les résultats. Comparer les avantages de modélisation entre la planification journalière et la planification journalière cyclique.

5 Centrales hydroélectriques

En plus des centrales thermiques, deux centrales hydroélectriques sont disponibles et alimentées par un même réservoir. Allumées, elles délivrent une puissance fixe de, respectivement, 900 et 1400 megawatts pour une vitesse d'abaissement du niveau du réservoir de, respectivement, 0.31 et 0.47 mètres par heure. Les coûts associés à leur activité sont le coût de démarrage (respectivement, 1500 et 1200 euros) et le coût horaire de fonctionnement (respectivement, 90 et 150 euros par heure).

Grâce à leur démarrage rapide, les deux centrales peuvent participer aussi à la réserve de puissance de 15% (quand elles ne sont pas déjà en fonctionnement).

5.1 centrales hydroélectriques ($C^* \approx 890$)

Intégrer les centrales hydroélectriques au modèle précédent (4.1) et comparer les résultats.

5.2 pompage ($C^* \approx 987$)

La capacité du réservoir n'étant pas infinie, le pompage d'une rivière à proximité doit être réalisé quotidiennement pour toujours maintenir le réservoir au même niveau que la veille (i.e. le pompage doit compenser l'abaissement du niveau lié à la production hydroélectrique). Ces pompes peuvent être allumées à tout moment et sont directement alimentées par le parc de production électrique. Leur consommation électrique pour élever le niveau du réservoir d'1 mètre est estimée à 3000 megawatts-heures.

Intégrer le pompage au modèle précédent (5.1) et comparer les résultats.

5.3 paliers de fonctionnement ($C^* \approx 987$) [à faire en cours]

Les deux centrales hydroélectriques admettent, chacune, 4 paliers de fonctionnement possibles ; le changement de paliers (non nécessairement consécutifs) étant instantané :

| niveau | Centrale 1 | | | | Centrale 2 | | | |
|---------------------------|------------|------|------|------|------------|------|------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| puissance (MW) | 900 | 950 | 1000 | 1100 | 1400 | 1500 | 1600 | 1700 |
| abaissement (mètre/heure) | 0.31 | 0.33 | 0.35 | 0.38 | 0.47 | 0.50 | 0.53 | 0.56 |
| coût (euros/heure) | 90 | 95 | 105 | 120 | 150 | 165 | 185 | 210 |

TABLE 3 – Paliers de fonctionnement des centrales hydroélectriques

Intégrer ces paliers de fonctionnement au modèle précédent (5.2) et comparer les résultats. Note : les structures `multidict` et `tupledict` de Gurobipy peuvent être utiles à l'implémentation du modèle.

5.4 exclusion pompage et génération hydro ($C^* \approx 987$) [à faire en cours]

Inclure au modèle précédent (5.3), une contrainte excluant la possibilité de pomper simultanément au fonctionnement des centrales hydroélectriques, et comparer les résultats.

6 Désagrégation

Nous considérons par la suite de nouvelles contraintes opérationnelles des centrales thermiques qui peuvent nécessiter de différencier les centrales d'une même catégorie, ou d'augmenter la précision de la discrétisation temporelle. Dans ce but, vous allez implémenter un nouveau modèle de planification sur un pas de discrétisation plus fin avec les centrales individualisées, et comprenant l'ensemble des contraintes et données du modèle agrégé précédent (5.4).

6.1 individualisation des centrales ($C^* \approx 987$)

Individualiser dans le modèle le fonctionnement de chacune des centrales de chacune des catégories et comparer les résultats.

Note pour limiter l'effort de réimplémentation tout en limitant la taille du nouveau modèle : les variables entières du modèle agrégé deviennent redondantes mais peuvent être conservées dans l'expression de certaines contraintes après conversion en fonctions linéaires des nouvelles variables (`LinExpr` dans `gurobipy`).

6.2 planification au pas horaire ($C^* \approx 987$)

Discrétiser l'horizon de planification et le profil de demande au pas horaire et comparer les résultats.

Note : aligner le pas de discrétisation de la planification sur le pas de discrétisation du profil de demande (plutôt que définir deux valeurs de pas distinctes).

Effectuer la même comparaison en supprimant des modèles la contrainte d'exclusion pompage/génération hydro.

6.3 précision du profil de demande ($C^* \approx 988$)

Préciser le profil journalier de la demande au pas horaire comme suit (en milliers de megawatts) :

[17, 15, 14, 13, 13, 18, 29, 32, 29, 27, 25, 25, 24, 24, 25, 38, 42, 40, 33, 31, 27, 26, 24, 21].

Résoudre le modèle précédent (6.2) avec ce nouveau profil de demande, éventuellement de manière approchée : retourner alors une solution réalisable garantie avec un écart maximal à l'optimal de 100 euros. Comparer les résultats et identifier un élément du problème à l'origine de l'augmentation du temps de résolution.

Effectuer la même comparaison en supprimant du modèle la contrainte d'exclusion pompage/génération hydro. Rétablir la contrainte pour la suite.

6.4 discrétisation à un pas de 2 heures ($C^* \approx 990$)

Reprendre le modèle (6.2) avec un pas de discrétisation de l'horizon de 2 heures et le profil de demande suivant (en milliers de megawatts) également discretisé avec un pas de 2 heures :

[16, 14, 16, 30, 28, 25, 24, 33, 41, 32, 26, 22]

Résoudre et comparer les résultats.

7 Disponibilité variable

Différentes opérations, pour la maintenance typiquement, peuvent affecter temporairement la disponibilité des centrales.

7.1 maintenance nocturne des centrales A ($C^* \approx 1004$)

Dans le modèle (6.2), limiter à 10 le nombre de centrales A disponibles entre 18h et 6h du matin. Comparer le résultat au modèle où ce sont précisément les deux premières centrales de catégorie A qui sont rendues indisponibles entre 18h et 6h du matin.

On supprimera temporairement ces contraintes pour la suite des tests.

8 Contraintes de rampe

Le phénomène de rampe caractérise la montée/descente en puissance progressive – versus non instantanée – des centrales thermiques. Sa modélisation est difficilement compatible avec la discrétisation de l’horizon qui suppose la possibilité d’un changement de régime immédiat et uniquement en début de période. Un modèle mathématique couramment employé consiste à limiter la différence de puissance maximale d’une centrale entre deux périodes consécutives. Ce modèle sera d’autant plus précis que le pas de discrétisation sera petit. On considère ici la discrétisation au pas horaire.

8.1 rampe croissante ($C^* \approx 1016$)

Dans le modèle (6.2), limiter à 400, 600 ou 800 megawatts, l’augmentation de puissance entre deux heures consécutives d’une centrale thermique de catégorie A, B ou C, respectivement.

8.2 rampe de démarrage ($C^* \approx 989$)

Dans le modèle (8.1), relâcher ces limites à 1000, 1500 ou 2000 megawatts respectivement, dans le cas où la centrale est activée dans cette période.

8.3 rampe décroissante et d’arrêt ($C^* \approx 991$)

Dans le modèle (9.2), limiter à 800, 1200 ou 1700 megawatts, la diminution de puissance entre deux heures consécutives d’une centrale thermique de catégorie A, B ou C, respectivement, si celle-ci est active pendant ces deux heures. Limiter à 1000, 1500 ou 2000 megawatts la puissance d’une centrale thermique de catégorie A, B ou C, respectivement, dans l’heure précédent son arrêt.

9 Prévention de l’usure

Des allumages/extinctions trop fréquentes des centrales peuvent conduire à une usure prématurée. Pour les prévenir, on peut limiter la valeur minimale de la durée entre deux événements. (Les valeurs indicatives C^* sont calculées ici sans les contraintes de rampes.)

9.1 durée minimale d’activité ($C^* \approx 994$)

Imposer dans le modèle (6.2) une durée minimale de 8 heures de fonctionnement en continu pour toutes les centrales thermiques connectées.

9.2 durée minimale d’arrêt ($C^* \approx 995$)

Imposer dans le modèle (9.1) une durée minimale de 8 heures de repos en continu pour toutes les centrales thermiques à l’arrêt.