

Exercice de modélisation d'un programme mathématique

1. Affectation. On souhaite extraire l'eau d'un aquifère pour satisfaire une demande variable pouvant monter jusqu'à 5000 m^3 par heure. On dispose de 3 pompes, notées $k = 1, 2, 3$, de débit maximal $q_1 = 1500$, $q_2 = 2000$ et $q_3 = 3500 \text{ m}^3$ par heure et de 5 emplacements possibles, notés $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Contraintes d'exclusion: la pompe 3 ne peut être installée sur l'emplacement 4; et si la pompe 3 est installée sur l'emplacement 5, alors la pompe 2 ne peut être installée sur l'emplacement 4.

2. Coût. Le coût d'installation d'une pompe k à un emplacement j est la somme de:

- un coût fixe c_j , en kilo-euros, qui dépend uniquement de l'emplacement j , comme suit:

j	1	2	3	4	5
c_j	3	2	4	1	1

- un coût qui dépend linéairement du débit maximal de la pompe k à raison de $d = 100$ euros par m^3/h .

3. Modèle. On veut décider de l'installation des pompes pour satisfaire la demande tout en minimisant le coût total d'installation.

$$\min \sum_j \sum_k (1000c_j + rq_k)x_{jk} \quad (1)$$

$$\text{s.t.:} \quad (2)$$

$$\sum_k \sum_j q_k x_{jk} \geq d \quad (3)$$

$$\sum_j x_{kj} \leq 1 \quad \forall k \quad (4)$$

$$\sum_k x_{kj} \leq 1 \quad \forall j \quad (5)$$

$$x_{34} = 0 \quad (6)$$

$$x_{24} \leq 1 - x_{35} \quad (7)$$

$$x_{kj} \in \{0, 1\} \quad \forall k, \forall j. \quad (8)$$

Il s'agit d'un programme linéaire en variables binaires qui peut être résolu, par exemple, par l'algorithme de branch-and-bound.