

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

ELEMENTOS FINITOS II - 31.92

# ESTUDIO DEL DOBLE FONDO DE UN BUQUE

Y un estudio de placas preliminar

**Autor**

PATRICIO WHITTINGSLOW – 55423

Fecha de realización: 24 de abril de 2019

Fecha de entrega: .....

Firma del docente: .....



### Problema

Se estudia la estructura de la base de un buque empleando el uso del método de elementos finitos. Las hipótesis empleadas son de desplazamientos pequeños y material isótropo.

## Glosario

$p$	Carga de presión.
$F$	Rigidez ante la flexión.
$\kappa_0$	Curvatura de placa inicial.

## Índice

<b>1. Introducción Teórica</b>	<b>1</b>
<b>2. Estudio con placas planas</b>	<b>2</b>
2.1. Método . . . . .	2
2.2. Resultados . . . . .	2
2.3. Conclusiones . . . . .	3
<b>3. Estudio de doble fondo de un buque</b>	<b>6</b>
3.1. Método . . . . .	6
3.2. Resultados y optimización . . . . .	7
<b>4. Conclusión</b>	<b>9</b>

## 1. Introducción Teórica

Se opta por resolver el problema con elementos cascaras de 4 nodos y elementos vigas. Antes de comenzar a modelar se estudió el funcionamiento de los elementos placas (Mindlin y Kirchhoff) para tener un concepto fundado de como se pueden emplear y cual es su comportamiento ante casos empotrados y articulados.

En el estudio de cascaras con pequeñas deformaciones en general toma en cuenta las siguientes suposiciones Ugural and Fenster [2003]

1. La relación entre el espesor de la cascara al radio de curvatura es mucho menor a la unidad
2. Desplazamientos son muy pequeños en comparación con el espesor
3. Secciones rectas de un elementos, perpendiculares al plano medio, permanecen rectas y perpendiculares al plano *deformado*.
4. Se desprecia  $\sigma_z$  (al igual que en placas).

Los elementos cascaras tienen la ventaja de poder tomar formas curvas, a diferencia de los elementos placas. Las tensiones en las cascaras (1) varían de forma lineal a lo largo del espesor y a la vez estas tensiones son inversamente proporcional al espesor [Cook et al., 2007].

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} + \frac{M_x z}{t^3/12} \quad \sigma_y = \frac{N_y}{t} + \frac{M_y z}{t^3/12} \quad \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{t} + \frac{M_{xy} z}{t^3/12} \quad (1)$$

Los elementos placas tienen similitudes. Las tensiones también (salvo el corte en  $zx$ ) varían de forma lineal, pero a diferencia de las cascaras, las tensiones son exclusivamente inversamente proporcionales al cubo del espesor. No era el caso para las tensiones axiales de  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  de las cascaras. Para placas [Ugural and Fenster, 2003]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_x + v\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-v^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_y + v\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-v^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+v)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+v} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

donde las segundas derivadas parciales de los desplazamientos se relacionan al espesor según la constitutiva 5

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} F & \nu F & 0 \\ \nu F & F & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)F}{2} \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} - \{\kappa_0\} \right) \quad (5)$$

donde  $F = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  es la rigidez ante la flexión. Resulta aparente ahora que dado un momento sobre la placa (Siendo la curvatura inicial igual a cero) la placa se curvará con un radio proporcional a  $1/t^3$ . Esta curvatura luego definirá las tensiones vistas en (2).

## 2. Estudio con placas planas

Las placas analizadas son Kirchhoff, Mindlin Q4 y Mindlin Q8.

### 2.1. Método

El problema trata una placa de espesor  $t$  con dimensiones  $a \times b$  donde  $a = 1,4\text{m}$  y  $b = 1\text{m}$ . El material es acero\*. Los casos son con presión uniforme  $p$  para los espesores  $t = a$ ,  $t = \frac{a}{10}$  y  $t = \frac{a}{100}$ . El factor de corrección para tensión por corte transversal es igual a  $k = \frac{5}{6}$  usando integración selecta [Cook et al., 2007] para placas Mindlin.

Se tiene que para una placa simplemente apoyada con carga uniforme el desplazamiento máximo esta dada por [Ugural and Fenster, 2003]

$$w_{\max} = \frac{16p}{\pi^6 F} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (6)$$

el cual nos dará el error.

Por ultimo se estudiaron las tensiones para la placa simplemente apoyada en todos sus lados y para el caso empotrado en todos sus lados.

### 2.2. Resultados

Los resultados se comparan con la solución analítica para una placa simplemente apoyada (6)<sup>†</sup>. Para los casos estudiados el desplazamiento máximo es  $w_{\max}(t) \approx 6,71e-9\text{m}$ ,  $w_{\max}(0,1t) \approx 6,71e-6\text{m}$ ,  $w_{\max}(0,01t) \approx 6,71e-3\text{m}$ . Como sería de esperar, hay una relación del tipo  $w(t) = Ct^3$ .

#### Caso Empotrado

La tabla 1 muestra un estudio de convergencia para los elementos.

Número de Elementos	Kirchhoff	Mindlin Q4	Mindlin Q8
60	1,758mm	1,869mm	1,955mm
280	1,919mm	1,950mm	1,966mm
4800	1,957mm	1,965mm	1,966mm
15552	1,959mm	1,965mm	1,966mm
21600	1,959mm	1,965mm	1,966mm

**Tabla 1:** Desplazamientos máximos para carga uniforme  $p = 5\text{kPa}$  sobre placa **empotrada** con espesor  $t = \frac{a}{100}$ . Relación de aspecto de elementos 4:3. Utilizando integración selecta [Cook et al., 2007], el más costoso numéricamente por elemento fue Mindlin Q8 por un margen considerable.

\*  $E = 210\text{GPa}$  y  $\nu = 0,3$

† Utilizando  $n = m = 9$  dado que convergía bien para ese número de iteraciones.

### Caso simplemente apoyado

El gráfico 1 muestra el error obtenido para las placas usadas con una variada cantidad de elementos para condiciones de carga/apoyo fijas. Los otros dos gráficos muestran el tiempo de cálculo y el efecto de espesor sobre los elementos Mindlin, 2 y 3 respectivamente. Los elementos Kirchoff no fueron analizados por no prestarse cambios de error graves variando el espesor.

### 2.3. Conclusiones

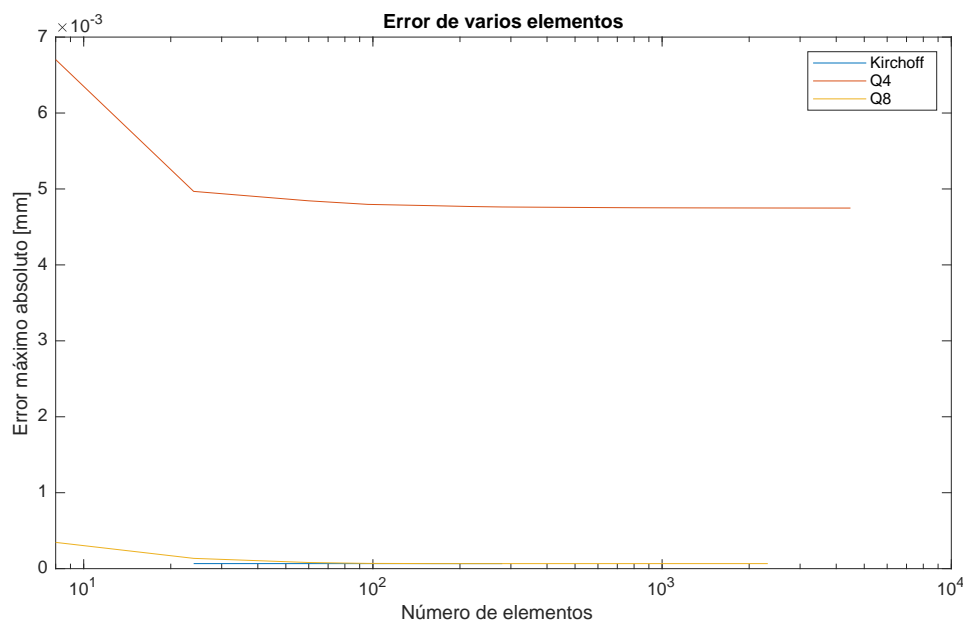
Los elementos Mindlin Q8 y Kirchoff se prestan a converger rápido y con pocos elementos (figura 1). Esto se debe a la gran capacidad de un solo elemento de Kirchoff, permitiendo deformaciones del orden cubico para cada elemento. Los elementos Mindlin Q8 tienen una buena capacidad de captar deformaciones gracias al alto orden de funcionalidad. Los elementos Q4 quedan en tercer lugar.

De aquí surge la cuestión si es mejor usar elementos Kirchoff o los Q8 para modelar placas planas. Le dirijo la atención al lector a la figura 2. Los elementos Kirchoff son costosos desde un punto de vista numérico. La gran ventaja de los elementos Mindlin es la formulación paramétrica que permite una integración rápida por puntos de Gauss. Los elementos Q4 merecen una mención honorable por permitir modelar grandes cantidades de elementos sin impedimento en el tiempo de resolución.

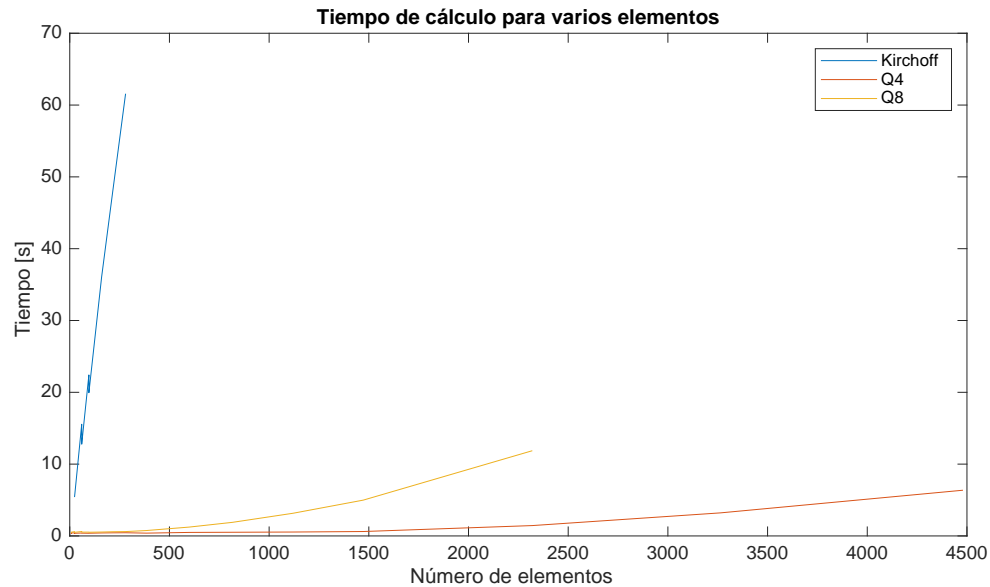
El espesor es otro factor importante para cuando se tiene que fijar el modelo. No sirve modelar una placa espesa con elementos Mindlin. Sería mejor considerar elementos 3D dado que rápidamente se dispara el error para espesores relativamente pequeños (figura 3). Un espesor  $\frac{t}{a} = 0.07$  presenta un error relativo de 10 % para el problema estudiado.

Las tensiones son de gran interés para cualquier aplicación de elementos placas. Como vemos en la figura 4, los dos casos estudiados presentan diferencias marcadas. Para la placa empotrada tenemos una curvatura alta en los bordes y menos pronunciada en el centro. Como bien ya sabemos de las ecuaciones (2), la tensión axil va mano en mano con dicha curvatura  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  y  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . Cabe destacar que las mayores tensiones van a estar en los lados mas largos porque son los que precisan girar mayor cantidad en menos distancia para llegar al  $w_{\text{máx}}$ . Por ultimo, se menciona el máximo local de tensiones ubicado en el centro de la placa debido a otro máximo de la suma  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ .

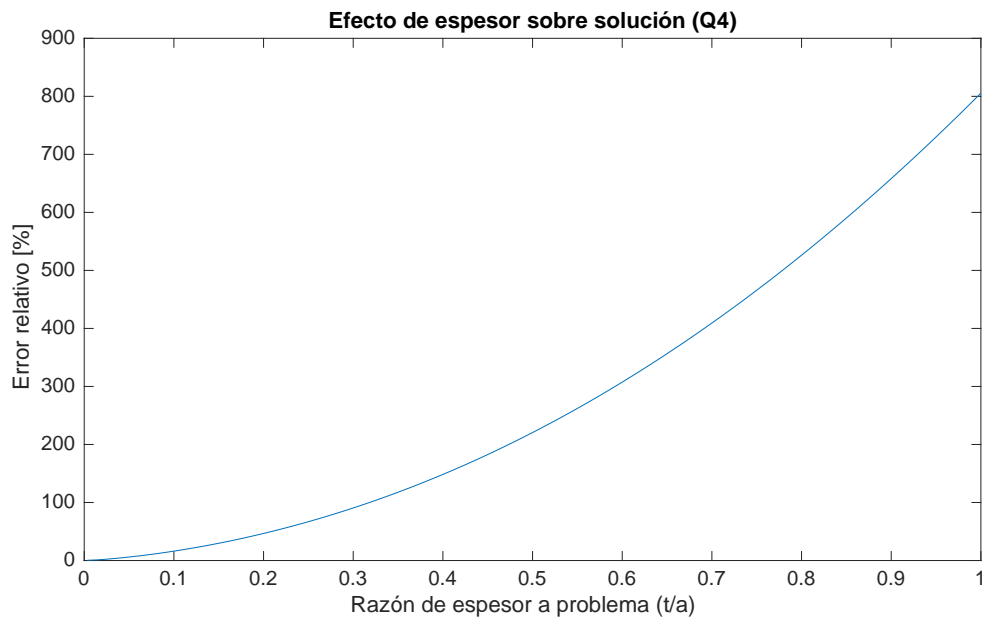
El caso de una placa simplemente apoyada es bien diferente. Al quedar con giro en sus bordes su mayor curvatura quedaría en el centro. Por ende, también estaría allí la mayor tensión axil.



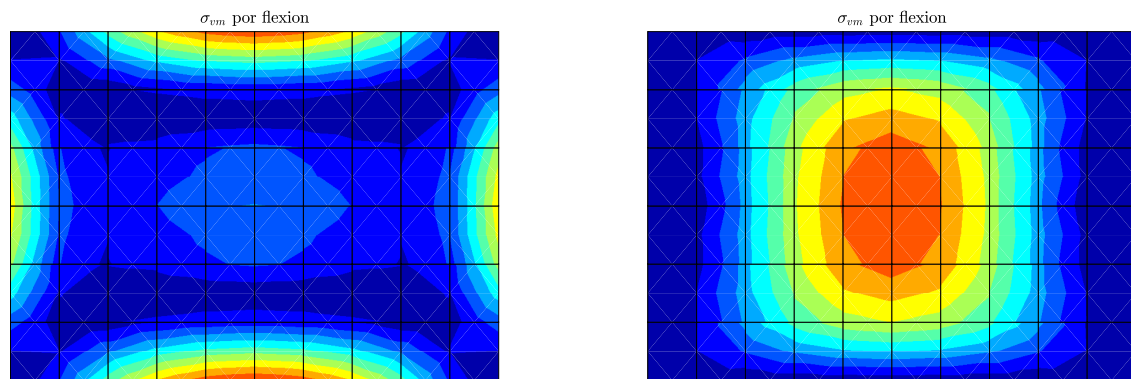
**Figura 1:** El error absoluto mejora con el aumento de elementos, desde siempre.



**Figura 2:** El tiempo de cálculo de los elementos tratados. **Mayor es peor.** Los elementos Kirchhoff integrados simbólicamente son los más pesados numéricamente.



**Figura 3:** Relación error relativo máximo vs. espesor para elementos Mindlin Q4. Note que es un gráfico adimensional.



(a) Caso empotrado

(b) Caso simplemente apoyado

**Figura 4:** Tensiones calculadas de Von Mises para elementos Q8. Divisiones de elementos visible. Tensiones en Pascales. Se puede observar claramente el comportamiento diferente ante la restricción de giro. Un caso empotrado sufre de flexión en sus bordes mientras que la placa apoyada va fallar por corte.

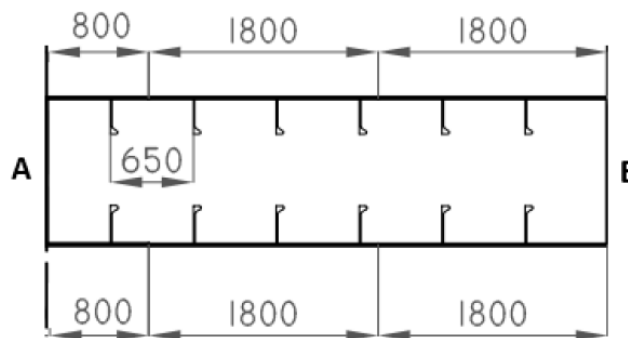
### 3. Estudio de doble fondo de un buque

El buque a estudiar tendrá 5 metros de calado, dándonos una presión sobre el doble fondo de alrededor de  $p = 5\text{kPa}$ . Esta va ser la presión nominal para la cual se va a resolver el problema. Debido a la acción ondulatoria de las olas<sup>‡</sup> el buque en realidad puede ser sometido a una presión aún mayor, por eso se va a tomar un factor de seguridad  $n = 3$  para optimizar. Se van a modelar 4 claras (distancia entre varengas) y una vagra. Las longitudinales van a ser perfiles bulbo  $280 \times 13\text{mm}$ ,  $300 \times 13\text{mm}$  para el fondo y el doble fondo, respectivamente. La distancia entre varengas es de 3,25m y la distancia entre vagras 4,4m. Como no se dispone de perfiles bulbo en el programa a usar (NX 11.0 de Siemens) se utilizarán perfiles “L” de características similares. Las dimensiones de los perfiles L se obtuvieron para que los momentos de Inercia  $I_z$ ,  $I_y$  sean lo más similares.

#### 3.1. Método

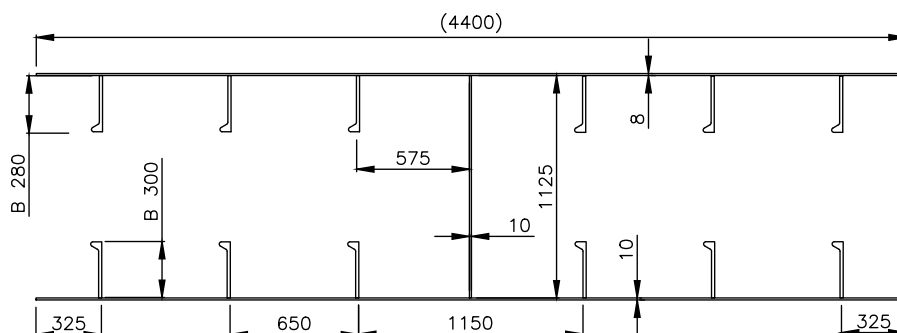
##### Modelo

La cátedra de la materia sugiere un modelo diferente al tratado. Sugiere modelar el espacio desde el plano de una vagra a la próxima considerando un plano de simetría sobre una y considerar apoyos simples sobre la otra. Las varengas también estarían simplemente apoyadas. Se dispone del siguiente dibujo que se destaca por estar en estado de superposición, sobreacotado y subacotado a la vez.



**Figura 5:** Modelo dado en el enunciado del TP. **No fue resuelto.** Apoyo simple sobre el plano B, simetría sobre A (ambas son vagras). Apoyos simples sobre varengas.

El autor optó por adaptar el modelo comenzando por la normalización de las dimensiones. La figura 6 muestra el corte transversal del modelo tratado. Las condiciones de borde que antes se ubicaban sobre las vagras ahora están en el espacio entre vagras. Esto no debería considerarse más que un cambio estético, ya que matemáticamente ambas estructuras son equivalentes si se emplea la simetría de forma correcta.



**Figura 6:** Corte transversal del modelo. La placa superior es el fondo y por el medio queda la vagra. La profundidad (longitud) del modelo es de 16,25m.

Otros incisos del enunciado:

- Realizar un modelo de elementos finitos para la estructura del doble fondo considerando 4 claras (distancia) de varengas

<sup>‡</sup> Conocido como esfuerzos de quebranto/arrufo.

- Las varengas límites de la estructura están simplemente apoyadas

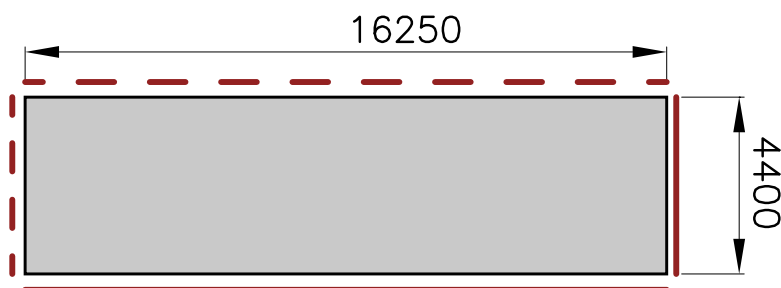
La interpretación más lógica del segundo inciso es modelar la estructura con dos varengas como tapas, cuyas superficies estén simplemente apoyadas, pues si hablará de apoyar los extremos de las varengas estaría rompiendo la simetría sobre una de las vagras. Sin embargo, un lector astuto tal vez se de cuenta que dados los incisos estos, hay otro plano de simetría diferente al de la vagra. Este plano es transversal al modelo y estaría en la línea media entre las dos varengas límites de la estructura. Aplicar simetría resultaría en un modelo de solo dos claras, una **clara** violación al enunciado.

El autor entonces modifica el modelo, otra vez cambiando los límites de la estructura propuesta. Los límites transversales ahora se encuentran sobre la línea media entre dos varengas. Estas modificaciones permiten ver dentro del modelo cuando se obtiene una solución, dando paso a la rápida iteración de secciones. También se presta a menor confusión al momento del mallado al otorgar espesor a las varengas/vagras, pues no hay que dividir ningún espesor de placa por dos [Cook et al., 2007] puesto que no hay planos de simetría que cortan nuestras placas.

Se reitera que los dos modelos son validos, y equivalentes. En este trabajo práctico se va tratar solo **uno**.

### Condiciones de Borde

Se planteo un modelo aprovechando el eje longitudinal simétrico y considerando simetría transversal. Cabe destacar que debido a esta última consideración puede haber discrepancia entre la realidad y lo que se plantea. Es decir, *considerar simetría sobre un eje transversal tomando en cuenta solo 4 claras de distancia es una decisión valida si los esfuerzos se normalizan en magnitud acercándose al borde sin soporte en  $z$ .*<sup>§</sup> Caso contrario se debería tomar aún más claras para ver las tensiones mayores que se pueden llegar a alcanzar.



**Figura 7:** Modelo elegido. Línea punteada representa condiciones de borde de simetría según [Cook et al., 2007]. Línea sólida representa condición de borde especial, idéntica a la simetría con soporte agregado en  $z$  (saliente a la hoja).

La simetría es aplicada de forma que se vean esfuerzos generados por el equilibrio entre las dos fuerzas predominantes en un buque, el peso y la presión hidrostática. Para lograr esto se aplican condiciones de borde de simetría en todos los bordes del modelo y una condición especial en un borde transversal y otro longitudinal. La condición a aplicar es un soporte en la dirección de la gravedad, en este caso, un soporte en  $z$ . Esto dará luz al efecto “reacción” del peso propio del buque ante la presión hidrostática.

## 3.2. Resultados y optimización

Como se puede ver, los esfuerzos se regularizan al acercarse al borde transversal sin soporte en  $z$ , lo cual nos da una idea que la situación vista en la figura 8 podría estar ocurriendo en el interior de un buque. Lo que puede llegar a llamar la atención es que las tensiones son relativamente bajas en los longitudinales.

### Proceso de optimización

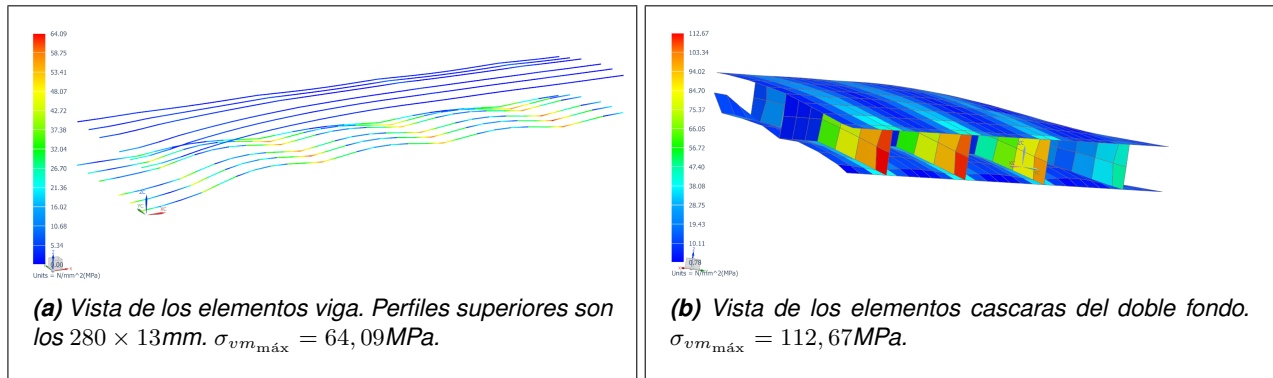
El material a usar para todos los elementos es el acero AISI 4340 *annealed* con una tensión admisible de 470MPa.

El proceso de optimización fue iterativo, cambiando los espesores de las vagras, varengas y fondos hasta que todos tengan una zona que este cerca de  $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n} \approx 150\text{MPa}$ . También se redujeron las secciones de las longitudinales.

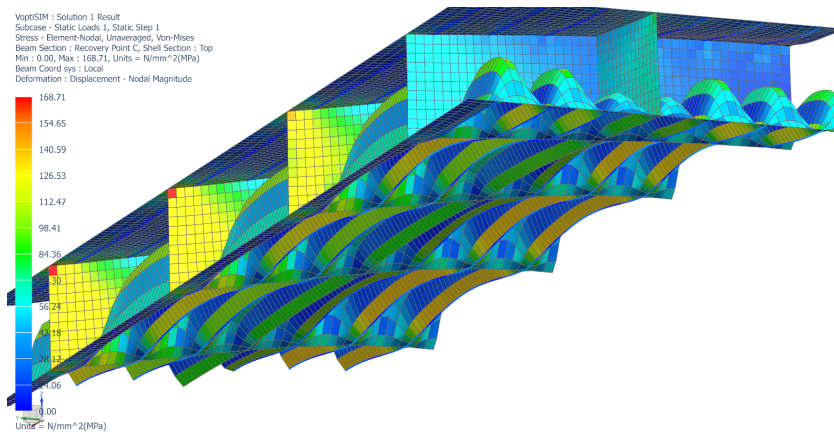
- $t_{vagr\acute{a}s} = 5\text{mm}$

<sup>§</sup>Se explica a que se refiere con el borde sin soporte en  $z$  a continuación.





**Figura 8:** Tensiones máximas Von Mises en MPa.



**Figura 9:** Tensiones son las de Von Mises del resultado final de la optimización.

- $t_{\text{varengas}} = 10\text{mm}$
- $t_{\text{fondo}} = 4\text{mm}$
- $t_{\text{doble fondo}} = 7\text{mm}$
- Bulbos del fondo  $280 \times 13\text{mm}$
- Bulbos del doble fondo  $260 \times 13\text{mm}$

En la figura 9 se puede observar que las secciones quedaron dimensionadas de forma que la tensión ronde la zona amarilla alrededor de  $130\text{MPa}$ . Existen zonas rojas que superan la tensión admisible, pero estas son singularidades y no deberían ser consideradas para el diseño.

### Curvas de Schade

H. A. Schade ha publicado una serie de curvas indicativas de desplazamiento bajo carga uniforme en función de varios parámetros para placas reforzadas.

Se calcula todos los parámetros para el doble fondo optimizado, cuyo desplazamiento máximo para el estado de cargas resultó ser  $9,205\text{mm}$ . como no se tienen transversales,  $i_b = 0$ .

$$i_a = \frac{I_{na}}{s_a} + 2 \left( \frac{I_a - I_{na}}{b} \right) = 703,4\text{mm}^3$$

donde  $I_{na} = I_a = 457200\text{mm}^4$  y  $b$  es la distancia entre vagras,  $4400\text{mm}$ .  $s_a = 650\text{mm}$ .

$$\eta = \sqrt{\frac{I_{pa}}{I_{na}} \cdot \frac{I_{pb}}{I_{nb}}} =$$

$$\rho = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{i_b}{i_a}}$$

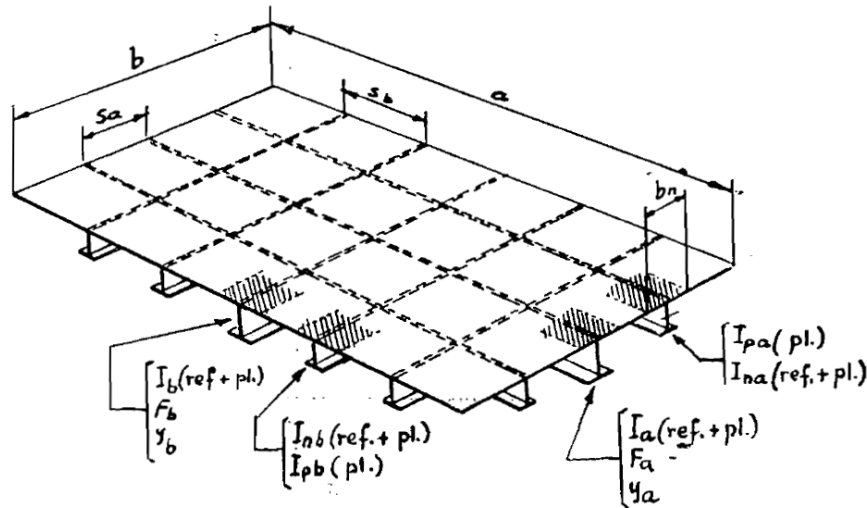


Fig. 4.7-a

$$\eta = 0,124 \sqrt{\frac{I_{pb}^2}{I_a I_{nb}} \frac{b}{s_b}}$$

## 4. Conclusión

Terminado el proceso de optimización, queda el trabajo de contrastarlo con resultados de la realidad o con bibliografía. Se invitan futuros ingenieros a comparar los resultados obtenidos con las curvas de Schade[Domínguez, 1969]. Se puede también continuar el trabajo de reafinar las secciones de las longitudinales pues no dejan de estar sobredimensionadas, incluso después de optimización.

Con esto dicho, el resultado predispone de buenas características. Se pueden observar campos de tensiones en el doble fondo (figura 9) similares a la de una placa empotrada (figura 4a). Se tiene también un pequeño relieve de tensiones en su cara central. Esto se debe a que los longitudinales aportan un pequeño giro a la placa al deformarse. Se tiene entonces una superposición con el caso mencionado anteriormente, y el estado de tensiones de una placa simplemente apoyada (figura 4b).

En conclusión, un estudio preliminar básico puede ayudar inmensamente llegado al final de un informe, como hemos visto. Se ahorró la necesidad de comparar resultados gracias a la semejanza de placas planas con cascaras.

## Referencias

Robert D Cook et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2007.

Ricardo Martín Domínguez. Cálculo de estructuras de buques. *ETSIN-1969*, 1969.

Ansel C Ugural and Saul K Fenster. *Advanced strength and applied elasticity*. Pearson education, 2003.