

# ESTUDIO DE VIBRACIONES DE UNA VIGA Y UN MOTOR UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

## **Autor**

PATRICIO WHITTINGSLOW – 55423

Fecha de realización: 19 de junio de 2019

Fecha de entrega: .....

Firma del docente: .....



## Glosario

$\{R\}$	Vector de cargas externas.	$\{D\}$	Vector de desplazamientos.
$[K]$	Matriz de rigidez.	$\chi$	Razón entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del modo estudiado.
$[M]$	Matriz de masa.		Matriz de amortiguamiento.

## Índice

0. Introducción Teórica	1
<b>A Estudio de Motor</b>	<b>1</b>
1. Problema	1
2. Método	2
3. Resultados del dimensionamiento	3
4. Optimización teórica	4
<b>B Viga Empotrada</b>	<b>5</b>
1. Problema	5
2. Método	5
3. Resultados	6
4. Conclusiones	10

## 0. Introducción Teórica

Cuando se tiene una carga dependiente del tiempo la respuesta estructural también lo es. En el caso que sea un problema cuasiestático la resolución se puede hacer para los instantes de tiempos interesantes. Caso contrario se precisa efectuar un *análisis dinámico*.

$$\text{Cuasiestático: } [K]\{D\} = \{R\} \longrightarrow \text{Dinámico: } [M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{R\}$$

donde el termino  $[K]\{D\}$  suele ser referido como las *fuerzas internas*, y  $\{R\}$  siendo las *fuerzas externas*.

El análisis dinámico busca la forma de deformación del sistema cuando este se encuentra excitado por cargas a una frecuencia cercana a la natural. La respuesta en deformación del sistema con una carga cíclica puede ser menor o mayor que con cargas estáticas de misma magnitud máxima, pero cuando la frecuencia de carga se acerca a la natural las deformaciones serán mucho mayor.

Debido a este último punto es de sumo interés conocer la frecuencia natural de un sistema que tiene la posibilidad de someterse a una carga cíclica. Incluso puede ser de gran utilidad conocer el modo de deformación para entender como el sistema almacena energía.

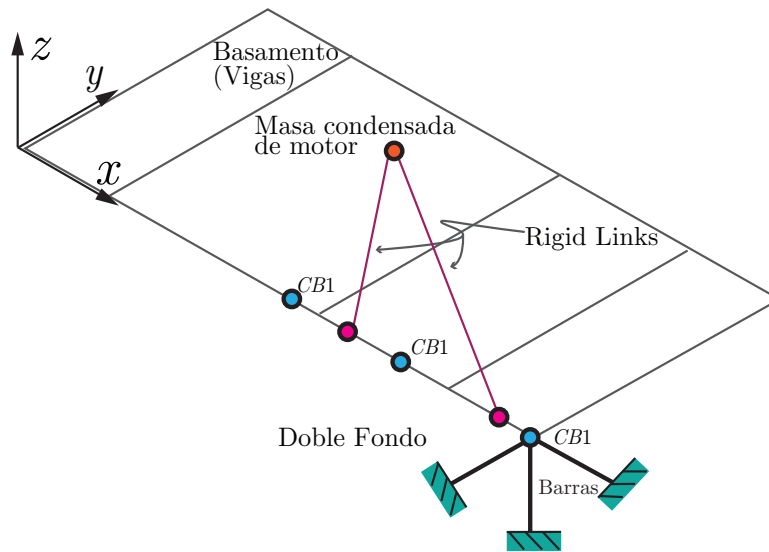
## Parte A

# Estudio de Motor

## 1. Problema

- Se precisa proponer un modelo para la estructura y representar gráficamente.
- Efectuar análisis modal y dimensionar las vigas del basamento. Considerar desplazamiento de 10mm y  $\omega_{exc} = 600\text{rpm}$ .

- Proponer un diseño alternativo superador teórico dejando de lado la perspectiva económica. Este diseño debe reducir cargas transmitidas y los desplazamientos del equipo.



**Figura 1:** Modelo del motor a grandes rasgos. El problema fue resuelto en MATLAB.

## 2. Método

Elementos usados

- Elemento masa 0D para masa puntual (sin rigidez)
- Elementos viga Timoshenko con masa consistente para basamento
- Elementos Barra simples para Rigid links con rigidez  $1 \times 10^8 \text{ N m}^{-1}$  con matriz de masa nula
- Elemento resorte para los bulones (nodos azules con CB1 en la figura 1) con rigidez longitudinal de bulón  $k_b$  en dirección  $z$  y rigidez  $\frac{k_b}{10}$  en  $x$  e  $y$  para representar el efecto de separar el motor del doble fondo con una resina.

Para el mallado se desarrolló un programa que cree los nodos y una los elementos automáticamente, tomando como input del usuario el tamaño nominal de los elementos viga. En la figura 3 se ve el resultado de dicho programa con tamaño de elemento *máximo*. Para la constante torsional  $J_\tau$  se utilizó una formula aproximada para secciones rectangulares (1)\*

$$J_\tau = h \cdot b^3 \cdot \left( \frac{1}{3} - 0,21 \cdot \frac{b}{h} \cdot \left( 1 - \frac{b^4}{12 \cdot h^4} \right) \right) \quad (1)$$

donde  $b$  es el lado corto y  $h$  el lado largo.

### Selección de parámetros

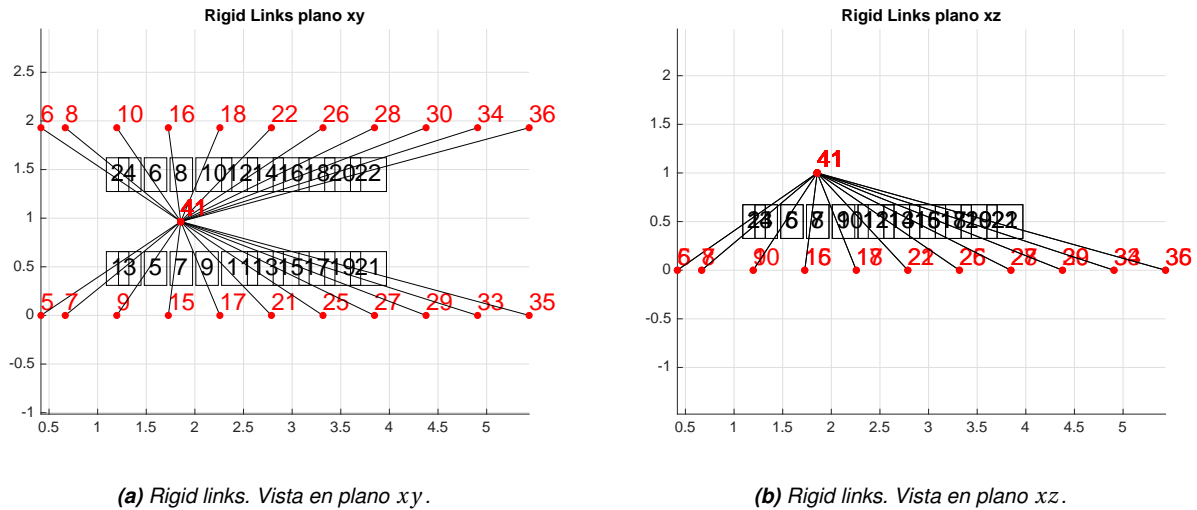
Para un primer análisis se fijaron las distancias entre los bulones de tal forma como para que tengan el mismo espacio entre ellos. Se optó por aplicar el mismo criterio para la posición de los soportes en  $y$ .

	1	2	3	4
Uniones Abulonadas	0,097 m	1,897 m	3,697 m	5,567 m
Soportes en $y$	1,5268 m	2,9565m	4.3863 m	

**Tabla 1:** Posición en  $x$  de los nodos correspondientes a los bulones que unen doble fondo con basamento y las vigas estructurales en  $y$ .

Para dimensionar las vigas del basamento iteramos variando  $h$  y  $b$  para todas las vigas. El amortiguamiento del sistema está controlado por la resina en los bulones. Se decidió modelar esto como un amortiguamiento global de  $\zeta = 0,1$  en un

\* Obtenido del libro [Young et al.(2002)Young, Budynas, Sadegh, et al.]



**Figura 3:** Modelo Basamento. Vista en plano  $xy$ . Tome en cuenta que los nodos numerados no necesariamente tienen que coincidir con figura de rigid links.

análisis con amortiguamiento modal. La excitación  $\omega_{exc}$  es de 600 rpm y se calcula la amplitud de excitación según un desplazamiento de 10mm sobre la masa puntual en la dirección  $z$ .

Por último se va efectuar un análisis con amortiguamiento proporcional usando la primer frecuencia natural del sistema como  $\omega_1$  y  $\omega_2 = 1,15\omega_{exc}$ . Se amortiguan estos modos con  $\zeta_1 = 0,06$  y  $\zeta_2 = 0,2$ , respectivamente. El desarrollo de esta formulación queda detallada en la parte B de este informe.

### 3. Resultados del dimensionamiento

Se ve una diferencia importante en la suavidad entre las superficies que representan la amplitud en función de  $h$  y  $b$  según el tipo de amortiguamiento usado. Sin embargo, ambas tienen una interpretación concreta.

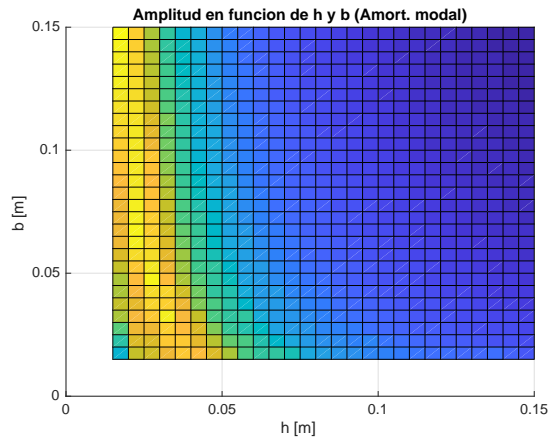
El amortiguamiento modal impone un amortiguamiento global. Esto implica que todo el espectro de frecuencias naturales entra en juego para una excitación dada. Al cambiar la rigidez del sistema su estructura tendrá mayor resistencia ante el movimiento del motor.

Por otro lado el amortiguamiento proporcional discrimina según la frecuencia. Lo que puede estar sucediendo al momento de cambiar las dimensiones de la viga es que cambiamos cual espectro de frecuencias domina. En las zonas de amplitud

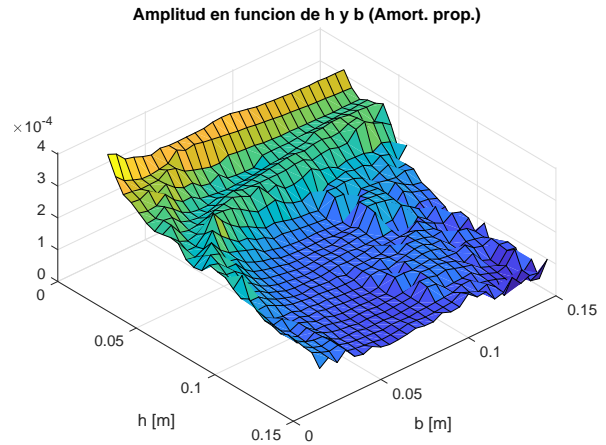
máxima puede ser que dominen las frecuencias cercanas a  $\omega_{exc}$  mientras que en los valles la rigidez de las vigas en conjunto es lo suficientemente diferente para que cambie el modo de deformación.

Vale la pena destacar que no tiene mucho sentido imponer un desplazamiento fijo al motor ya que esto implica el aumento violento de fuerzas en las vigas del basamento a medida que se les aumenta la rigidez. Dicha excitación podría ser mejor modelada con una aceleración sobre la masa puntual.

Se elige entonces una viga rectangular  $h = 6,5\text{mm}$  y  $b = 8\text{mm}$



**(a)** Amplitud en función de las dimensiones  $h$  y  $b$  de la viga considerando desplazamiento  $d = 10\text{mm}$ . Amarillo es mayor, azul es menor.



**(b)** Amplitud en función de las dimensiones  $h$  y  $b$  de la viga en un análisis modal considerando una fuerza constante. Amarillo es mayor, azul es menor.

## 4. Optimización teórica

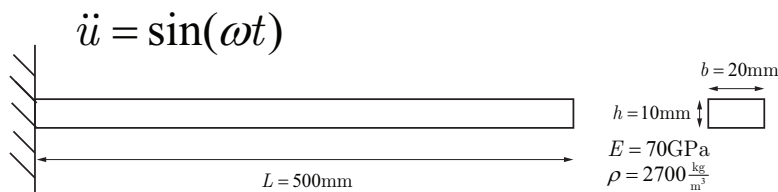
## Parte B

# Viga Empotrada

## 1. Problema

Hallar para el problema descrito en la figura 5:

- Frecuencias Naturales
- Amortiguamiento modal y proporcional
- Carga armónica
- Frecuencia de Barrido



**Figura 5:** Se resolvió para una viga de aluminio empotrada excitada por una aceleración uniforme.

Cabe destacar que el enunciado original otorgado por la cátedra sugería usar para la aceleración excitadora  $\ddot{u} = \sin(\Omega x)$ , el cual nos daría un sistema cuasiestático poco interesante.<sup>†</sup>

## 2. Método

Se resuelve el problema por método de los elementos finitos utilizando vigas de dos nodos. Cada nodo tiene dos grados de libertad,  $v$  como el desplazamiento en  $y$  y  $\theta$  siendo el giro de la viga en el plano  $xy$ .

La matriz de masa usada es *consistente*. Esta y la matriz de rigidez toman la forma: [Cook et al.(2007), p.379]

$$[\mathbf{m}]_{\text{viga}} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{k}]_{\text{viga}} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el problema de autovalores para el sistema sin amortiguamiento (2) y se obtienen las frecuencias naturales del sistema

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{D}\} = 0 \quad (2)$$

Luego se busca la respuesta armónica del sistema ante la carga conocida. Se propone estudiarlo con las autoformas.

$$\{\ddot{\mathbf{Z}}\} + 2\{\Omega\}\{\mathbf{C}_\Phi\}\{\dot{\mathbf{Z}}\} + \{\Omega\}^2\{\mathbf{Z}\} = \{\mathbf{R}_\Phi\} \quad (3)$$

cuya resolución resulta en

$$\{\mathbf{Z}\} = \frac{\{\mathbf{R}_\Phi\}}{\{\Omega\}^2 \sqrt{(1 - \chi^2)^2 + (2\{\mathbf{C}_\Phi\}\chi)^2}} \quad (4)$$

donde  $\chi = \frac{\omega_{\text{exc}}}{\{\Omega\}}$ .

La formulación de **amortiguamiento modal** es la siguiente

$$[\mathbf{C}_\Phi] = \begin{bmatrix} 2\omega_n \zeta_n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_1 \zeta_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

eligiéndose un  $\zeta$  para cada modo.

<sup>†</sup> a no ser que  $\Omega$  esté en función del tiempo y no se haya especificado

La formulación de **amortiguamiento proporcional** propone una combinación lineal de la masa y la rigidez según

$$[\mathbf{C}_\Phi] = [\Phi]^T (\alpha [\mathbf{M}] + \beta [\mathbf{K}]) [\Phi] = \alpha [\mathbf{I}] + \beta [\mathbf{\Omega}^2] \quad (6)$$

Si se quiere estudiar un rango de frecuencias excitadoras tal que  $\omega_{\text{exc}} \in [\omega_1, \omega_2]$  y eligiendo dos valores de amortiguamiento para ambas frecuencias  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  se tiene: [Cook et al.(2007)]

$$\alpha = 2\omega_1\omega_2(\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (7)$$

$$\beta = 2(\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (8)$$

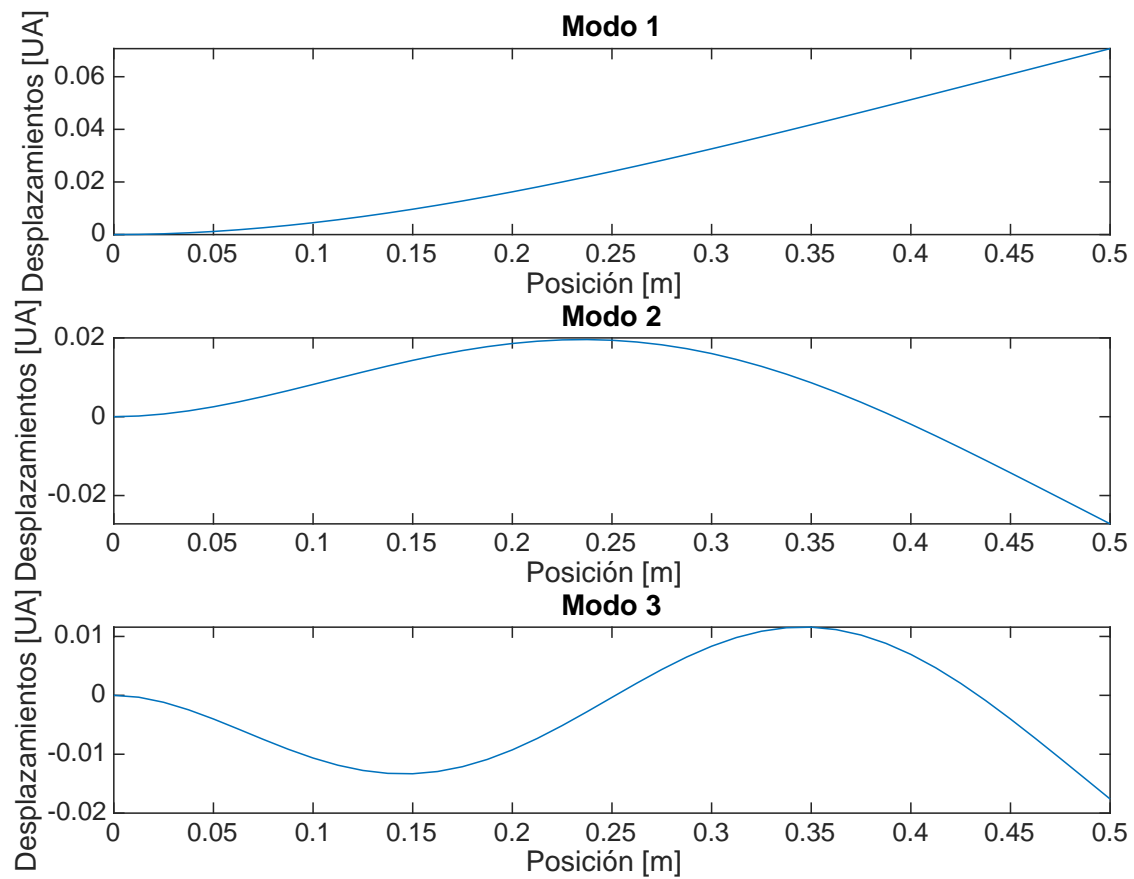
Se opta por estudiar el rango de amortiguamiento  $\zeta \in \{0,05; 0,3\}$ . Este es el rango inferior por donde se puede encontrar el amortiguamiento para problemas similares al enunciado.

- Para el barrido de frecuencias de amortiguamiento proporcional se investigará el caso donde se elija  $\zeta_1 = 0,05$  fijo y variando  $\zeta_2$  para obtener las curvas de respuesta a frecuencia.
- El otro caso investigado será  $\zeta_2 = 0,3$  fijo variando así  $\zeta_1$ .

### 3. Resultados

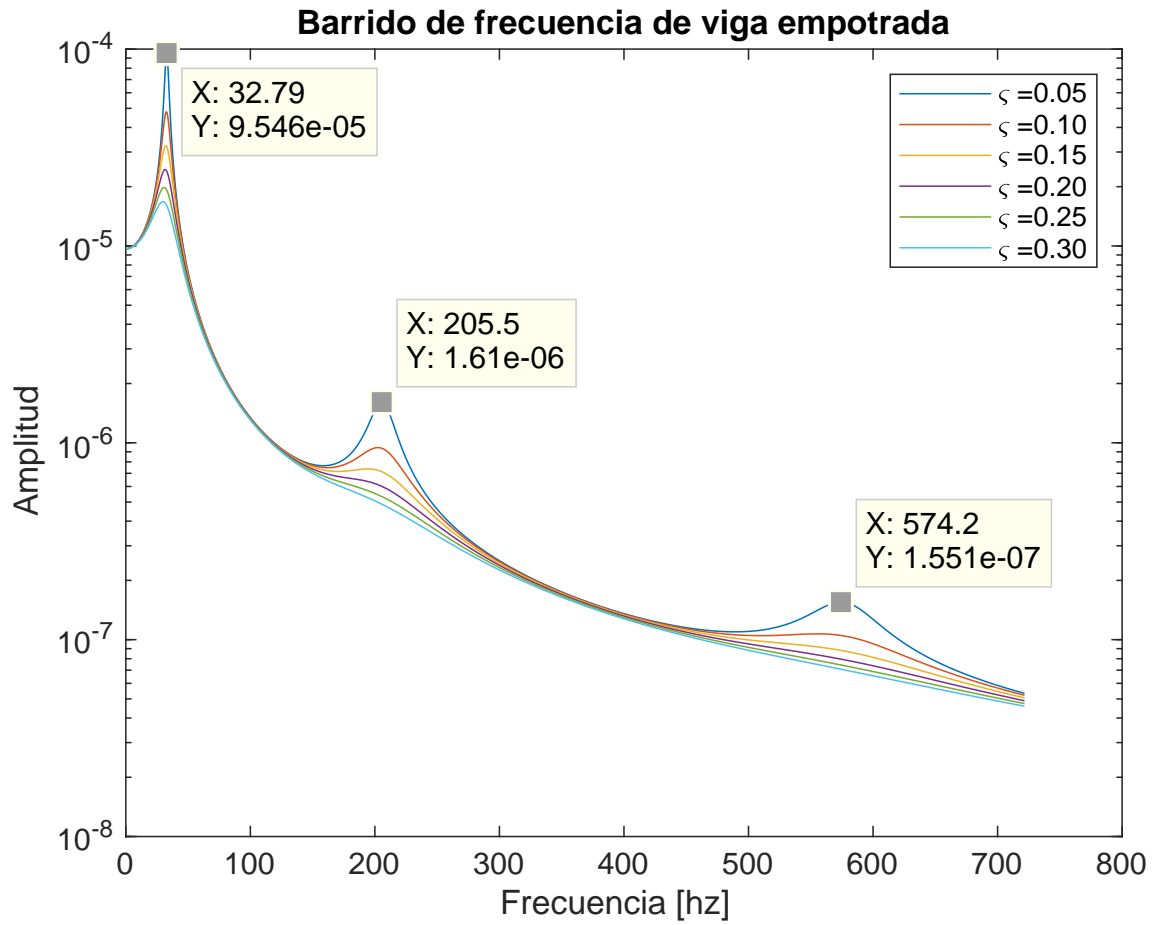
Las primeras tres frecuencias naturales obtenidas con una solución de 8 elementos.

$$\{\mathbf{\Omega}\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 3627,5 \text{ rad/s} \\ 1295,5 \text{ rad/s} \\ 206,7 \text{ rad/s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 577,3 \text{ Hz} \\ 206,2 \text{ Hz} \\ 32,9 \text{ Hz} \end{Bmatrix}$$

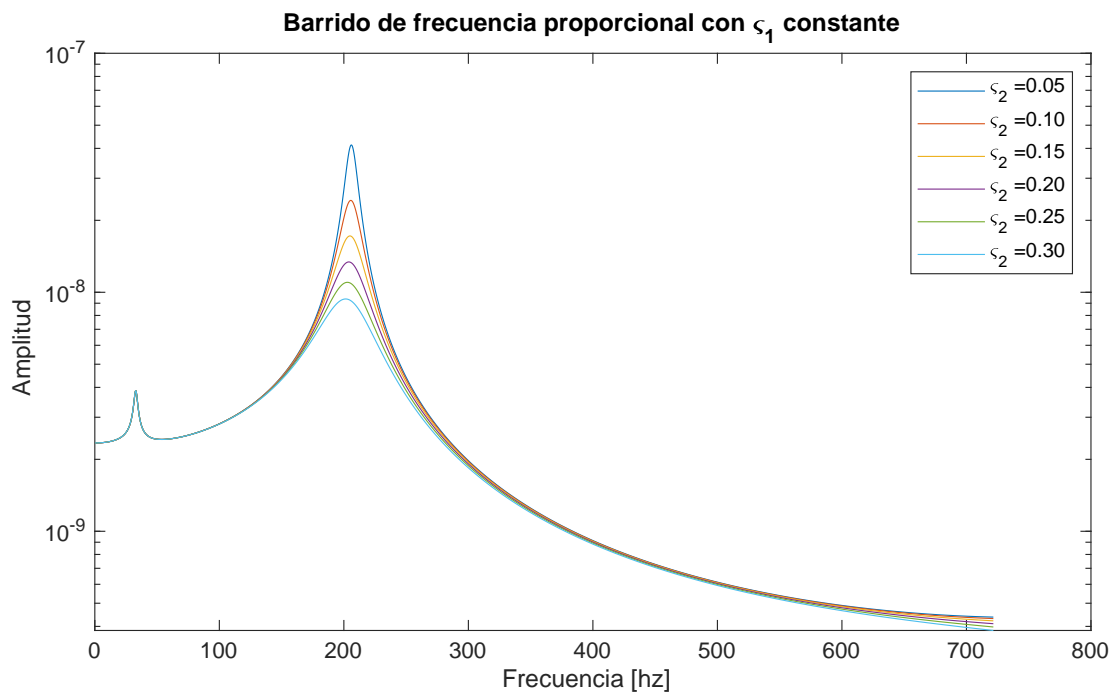


**Figura 6:** Modos de deformación para las frecuencias naturales. El modo 1 corresponde a la frecuencia más baja.

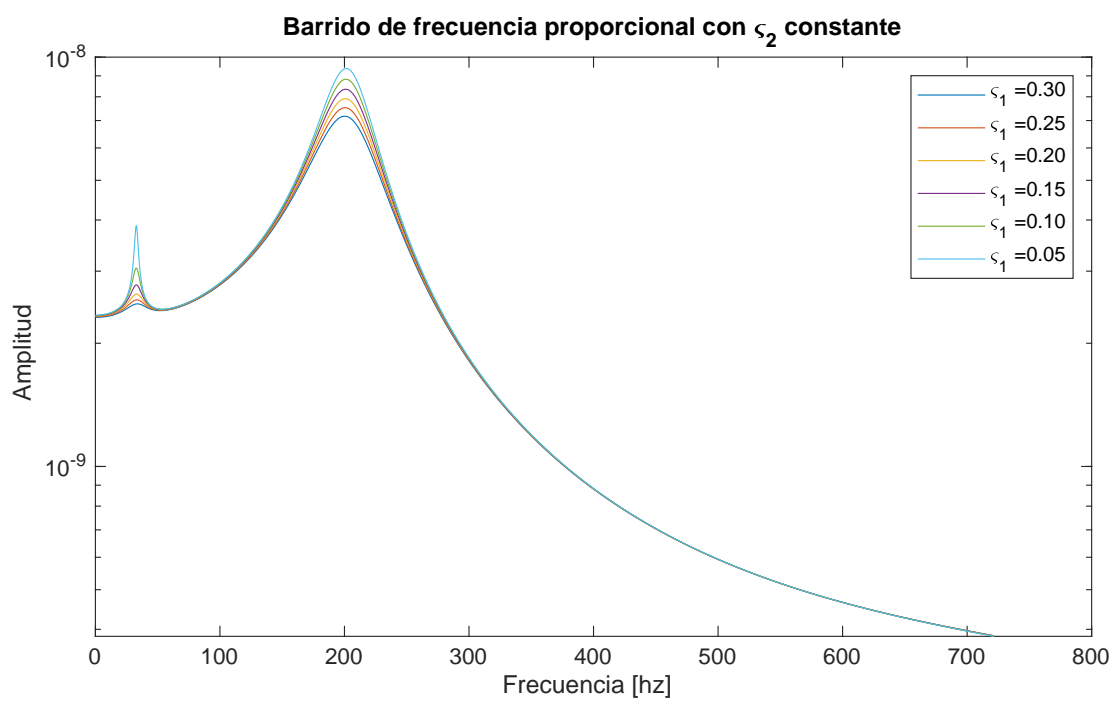




**Figura 7:** Barrido de frecuencia **modal**. Valores de amplitud máxima recuadrados.



**Figura 8:** Barrido de frecuencia **proporcional**.



**Figura 9:** Barrido de frecuencia *proporcional*.

## 4. Conclusiones

Se informa al lector el hallazgo de la frecuencias naturales. Dichas frecuencias están separadas por un  $\Delta\omega$  considerable. Esto es deseable para cuando se tenga una carga cíclica esta trabaje lejos de cualquier frecuencia natural, y si es posible, por debajo de todas. Dado que no se especifico ninguna característica técnica del problema, el gráfico 6 es más una curiosidad. Las formas de los modos no están a escala ni tienen unidades, es solo la forma de respuesta.

A medida que la frecuencia de excitación aumenta la *amplitud del sistema disminuye*<sup>‡</sup> (ver figura 7). Es interesante pensar que si aumentara no tendría sentido buscar las frecuencias naturales porque estas son caracterizadas por un máximo de amplitud. Las curvas del barrido de frecuencia son decrecientes en lejanía de una frecuencia natural porque para una fuerza cíclica  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  el tiempo que actúa en una dirección es inversamente proporcional a la frecuencia. Por ende la estructura no tiene tiempo para moverse lejos antes de que se invierta la dirección de la fuerza.

El efecto del amortiguamiento es reducir la amplitud cerca de la frecuencia natural. En la figura 7 se puede apreciar el efecto claramente. Las siguientes dos figuras (8 y 9) tienen un nivel agregado de profundidad. Se estudia el efecto la *fracción de amortiguamiento crítico* [Cook et al.(2007)] cuando se varía el amortiguamientos de los puntos borde del espectro de diseño. Como es de esperar para un valor mayor  $\zeta_1$  se amortiguarán a frecuencias más bajas sin afectar las de alta. De forma complementaria, si se aumenta  $\zeta_2$  la amplitud de la primera frecuencia natural no se ve afectada mientras que a frecuencias más altas se reduce la amplitud considerablemente.

## Referencias

[Cook et al.(2007)] Robert D Cook et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2007.

[Young et al.(2002)Young, Budynas, Sadegh, et al.] Warren Clarence Young, Richard Gordon Budynas, Ali M Sadegh, et al. *Roark's formulas for stress and strain*, volume 7. McGraw-Hill New York, 2002.

---

<sup>‡</sup>Excepto en cercanías de una frecuencia natural