

ESTUDIO DE VIBRACIONES DE UNA VIGA Y UN MOTOR UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Autor

PATRICIO WHITTINGSLOW – 55423

Fecha de realización: 10 de junio de 2019

Fecha de entrega:

Firma del docente:



Glosario

$\{R\}$	Vector de cargas externas.	$\{D\}$	Vector de desplazamientos.
$[K]$	Matriz de rigidez.	p	Carga de presión.
$[M]$	Matriz de masa.	κ_0	Curvatura de placa inicial.
			Matriz de amortiguamiento.

Índice

0. Introducción Teórica	1
A Estudio de Motor	1
1. Problema	1
2. Método	2
3. Resultados del dimensionamiento	3
4. Optimización teórica	4
B Viga Empotrada	5
1. Problema	5
2. Método	5
3. Resultados	6
4. Conclusiones	10

0. Introducción Teórica

Cuando se tiene una carga dependiente del tiempo la respuesta estructural también lo es. En el caso que sea un problema cuasiestático la resolución se puede hacer para los instantes de tiempos interesantes. Caso contrario se precisa efectuar un *análisis dinámico*.

$$\text{Cuasiestático: } [K]\{D\} = \{R\} \longrightarrow \text{Dinámico: } [M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{R\}$$

donde el termino $[K]\{D\}$ suele ser referido como las *fuerzas internas*, y $\{R\}$ siendo las *fuerzas externas*.

El análisis dinámico busca la forma de deformación del sistema cuando este se encuentra excitado por cargas a una frecuencia cercana a la natural. La respuesta en deformación del sistema con una carga cíclica puede ser menor o mayor que con cargas estáticas de misma magnitud máxima, pero cuando la frecuencia de carga se acerca a la natural las deformaciones serán mucho mayor.

Debido a este último punto es de sumo interés conocer la frecuencia natural de un sistema que tiene la posibilidad de someterse a una carga cíclica. Incluso puede ser de gran utilidad conocer el modo de deformación para entender como el sistema almacena energía. Un caso famoso de falla por resonancia es el de *Tacoma Narrows* (Angostas de Tacoma, en español). La sección del puente tenía una forma doble-T acostado que, al girar en presencia de un viento con velocidad particular, creaba una diferencia de presiones excitadora entre el lado superior e inferior así contribuyendo al giro hasta por fin fallar.

Parte A

Estudio de Motor

1. Problema

- Se precisa proponer un modelo para la estructura y representar gráficamente.

- Efectuar análisis modal y dimensionar las vigas del basamento. Considerar desplazamiento de 10mm y $\omega_{exc} = 600\text{rpm}$.
- Proponer un diseño alternativo superador teórico dejando de lado la perspectiva económica. Este diseño debe reducir cargas transmitidas y los desplazamientos del equipo.

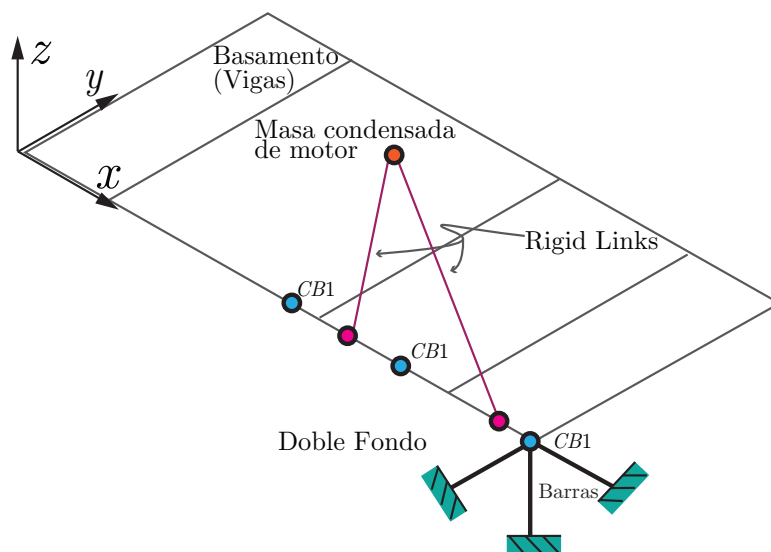


Figura 1: Modelo del motor a grandes rasgos.

2. Método

Elementos usados

- Elemento masa 0D para masa puntual (sin rigidez)
- Elementos viga Timoshenko con masa consistente para basamento
- Elementos Barra simples para Rigid links con rigidez $1 \times 10^8 \text{ N m}^{-1}$ con matriz de masa nula
- Elemento CBUSH para los bulones (nodos azules con CB1 en la figura 1) con rigidez longitudinal de bulon k_b en dirección z y rigidez $\frac{k_b}{10}$ en x e y para representar el efecto de separar el motor del doble fondo con una resina.

Para el mallado se desarrolló un programa que cree los nodos y una los elementos automáticamente, tomando como input del usuario el tamaño nominal de los elementos viga. En la figura 3 se ve el resultado de dicho programa con tamaño de elemento *máximo*. Para la constante torsional J_τ se utilizó una formula aproximada para secciones rectangulares (1)

$$J_\tau = h \cdot b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,21 \cdot \frac{b}{h} \cdot \left(1 - \frac{b^4}{12 \cdot h^4} \right) \right) \quad (1)$$

donde b es el lado corto y h el lado largo.

Selección de parámetros

Para un primer análisis se fijaron las distancias entre los bulones de tal forma como para que tengan el mismo espacio entre ellos. Se optó por aplicar el mismo criterio para la posición de los soportes en y .

	1	2	3	4
Uniones Abulonadas	0,097 m	1,897 m	3,697 m	5,567 m
Soportes en y	1,5268 m	2,9565m	4.3863 m	

Tabla 1: Posición en x de los nodos correspondientes a los bulones que unen doble fondo con basamento y las vigas estructurales en y .

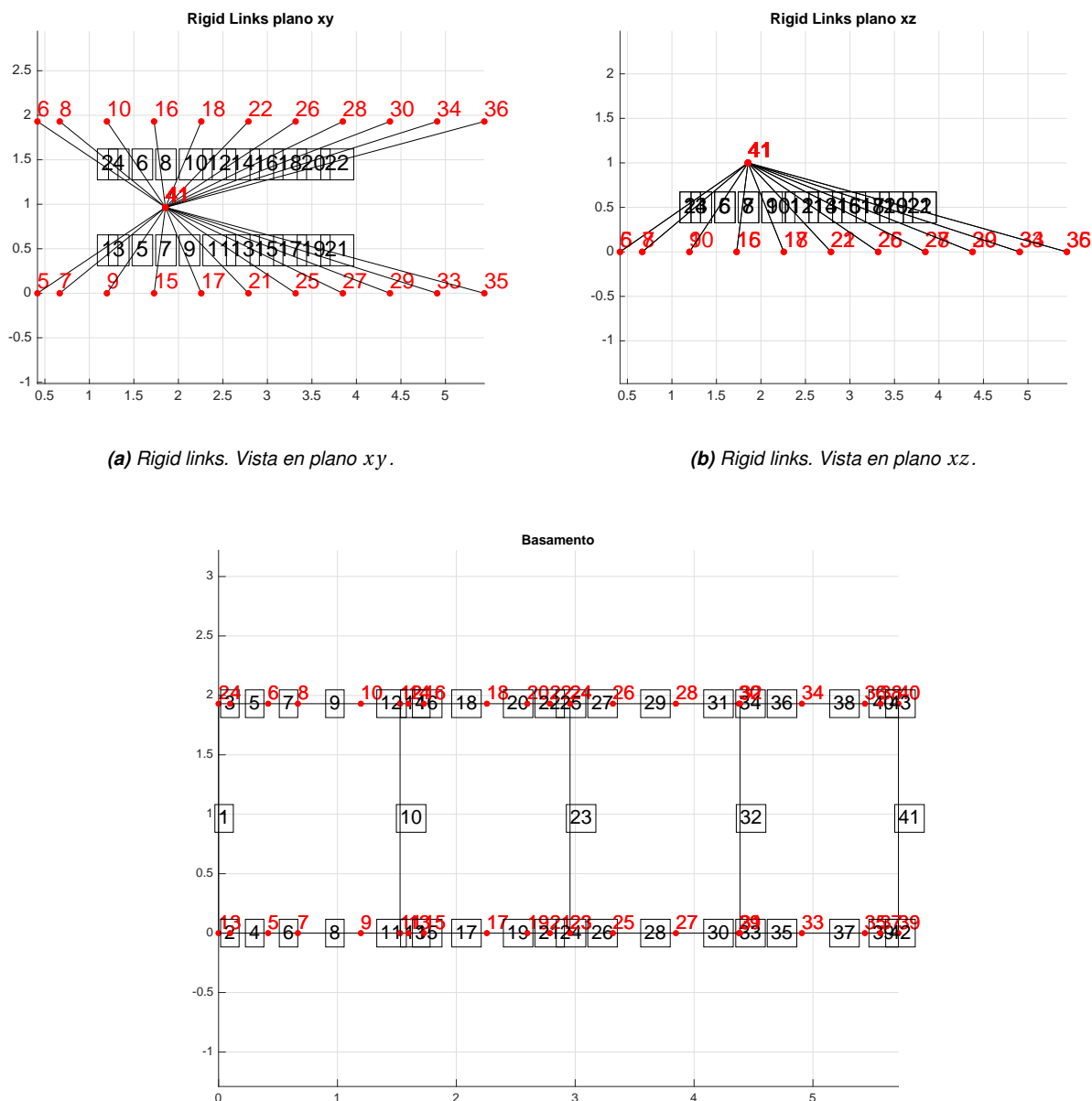


Figura 3: Modelo Basamento. Vista en plano xy . Tome en cuenta que los nodos numerados no necesariamente tienen que coincidir con figura de rigid links.

Para dimensionar las vigas del basamento iteramos variando h y b para todas las vigas. El amortiguamiento del sistema está controlado por la resina en los bulones. Se decidió modelar esto como un amortiguamiento global de $\zeta = 0,1$ en un análisis con amortiguamiento modal. La excitación ω_{exc} es de 600 rpm y se calcula la amplitud de excitación según un desplazamiento de 10mm sobre la masa puntual en la dirección z .

Por último se va efectuar un análisis con amortiguamiento proporcional usando la primer frecuencia natural del sistema como ω_1 y $\omega_2 = 1,15\omega_{exc}$. Se amortiguan estos modos con $\zeta_1 = 0,06$ y $\zeta_2 = 0,2$, respectivamente. El desarrollo de esta formulación queda detallada en la parte B de este informe.

3. Resultados del dimensionamiento

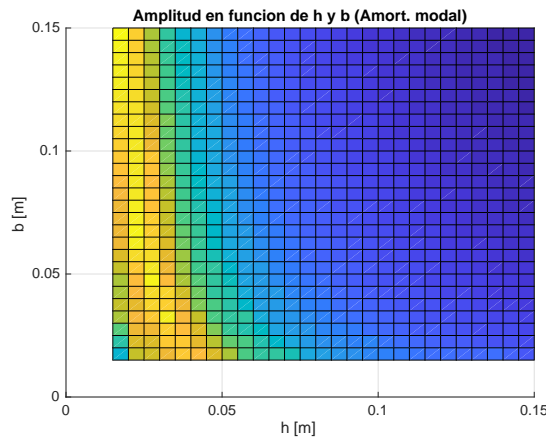
Se ve una diferencia importante en la suavidad entre las superficies que representan la amplitud en función de h y b según el tipo de amortiguamiento usado. Sin embargo, ambas tienen una interpretación concreta.

El amortiguamiento modal impone un amortiguamiento global. Esto implica que todo el espectro de frecuencias naturales entra en juego para una excitación dada. Al cambiar la rigidez del sistema su estructura tendrá mayor resistencia ante el movimiento del motor.

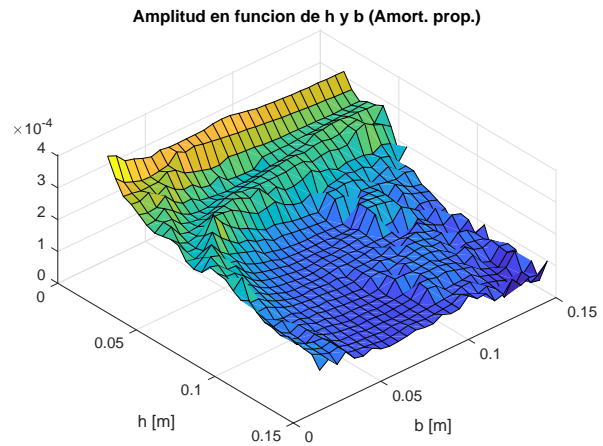
Por otro lado el amortiguamiento proporcional discrimina según la frecuencia. Lo que puede estar sucediendo al momento de cambiar las dimensiones de la viga es que cambiamos cual espectro de frecuencias domina. En las zonas de amplitud máxima puede ser que dominen las frecuencias cercanas a ω_{exc} mientras que en los valles la rigidez de las vigas en conjunto es lo suficientemente diferente para que cambie el modo de deformación.

Vale la pena destacar que no tiene mucho sentido imponer un desplazamiento fijo al motor ya que esto implica el aumento violento de fuerzas en las vigas del basamento a medida que se les aumenta la rigidez. Dicha excitación podría ser mejor modelada con una aceleración sobre la masa puntual.

Se elige entonces una viga rectangular $h = 6,5\text{mm}$ y $b = 8\text{mm}$



(a) Amplitud en función de las dimensiones h y b de la viga considerando desplazamiento $d = 10\text{mm}$. Amarillo es mayor, azul es menor.



(b) Amplitud en función de las dimensiones h y b de la viga en un análisis modal considerando una fuerza constante. Amarillo es mayor, azul es menor.

4. Optimización teórica

Para el siguiente análisis se deja a un lado toda perspectiva económica.

Dado que los desplazamientos del motor son fijos ($u = 10\text{mm}$) tenemos asegurado que hemos logrado desplazamientos mínimos de entrada. Ahora solo nos falta asegurar la mínima transmisión de carga. Dado que los desplazamientos son fijos, aumentar la rigidez aumenta las cargas sufridas por el motor. Podríamos intentar optimizar el problema variando dimensiones de las vigas, aunque hay una solución mucho más elegante para este caso particular. El autor ofrece la siguiente solución.

Después de un análisis profundo se opta por montar el motor sobre **humo**. Así es, puro humo obtenido en cualquier asado el domingo. Se toma las propiedades del humo como las de aire a CNPT.

Propiedades del humo: Datos discretos obtenidos de Engineering Toolbox. Correlación calculada usando `nlinfit` en MATLAB. Error relativo es menor a 0,006% para todas las formulas en el rango dado usando los coeficientes mostrados. Unidades estándares (SI).

$$\begin{aligned}\beta_{\text{humo}} &\approx 0,0037 - 1.43 \times 10^{-5}T + 6.58 \times 10^{-8}T^2 & T \in [-80, 40]^\circ\text{C} \\ \rho_{\text{humo}} &\approx 2.22 \times 10^{-5}T^2 - 0,0049T + 1,29 & T \in [-80, 40]^\circ\text{C} \\ k_{\text{humo}} &\approx 0,0241 + 7.98 \times 10^{-5}T - 3.84 \times 10^{-8}T^2 & T \in [-100, 100]^\circ\text{C} \\ \mu_{\text{humo}} &\approx 1.72 - 5 + 5 \times 10^{-8}T - 4.34 \times 10^{-11}T^2 & T \in [-100, 100]^\circ\text{C} \\ c_{p_{\text{humo}}} &\approx 1004 + 0,0385T - 2.63 \times 10^{-4}T^2 & T \in [-100, 100]^\circ\text{C} \\ Pr_{\text{humo}} &\approx 0,716 - 2.61 \times 10^{-4}T & T \in [-100, 100]^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Gracias a este material novedoso que, para nuestra aplicación, no toma cargas en tracción tenemos asegurado que las únicas cargas transmitidas van a ser por radiación sonora. Estas son ínfimas comparadas a las cargas presentes si se fuera a usar un material solido. Se puede incluso instalar el motor en vacío para disminuir estas por completo, pero no sería favorable del punto de vista térmico. Se agrega como otra posibilidad contemplada era de mandar fruta como el soporte en vez de humo, pero que esto le suma complejidad porque habría que analizar cada fruta en específico para ver que sus propiedades sean las adecuadas para el caso.

Parte B

Viga Empotrada

1. Problema

Hallar para el problema descrito en la figura 5:

- Frecuencias Naturales
- Amortiguamiento modal y proporcional
- Carga armónica
- Frecuencia de Barrido

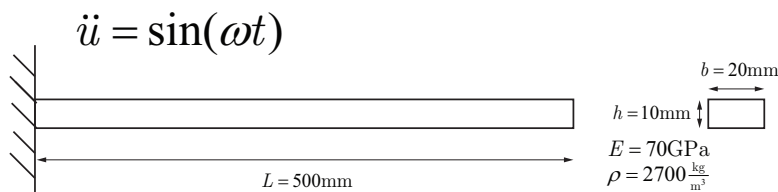


Figura 5: Se resolvió para una viga de aluminio empotrada excitada por una aceleración uniforme.

Cabe destacar que el enunciado original otorgado por la cátedra sugería usar para la aceleración excitadora $\ddot{u} = \sin(\Omega x)$, el cual nos daría un sistema cuasiestático poco interesante.*

2. Método

Se resuelve el problema por método de los elementos finitos utilizando vigas de dos nodos. Cada nodo tiene dos grados de libertad, v como el desplazamiento en y y θ siendo el giro de la viga en el plano xy .

La matriz de masa usada es *consistente*. Esta y la matriz de rigidez toman la forma: [Cook et al.(2007), p.379]

$$[\mathbf{m}]_{\text{viga}} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{k}]_{\text{viga}} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el problema de autovalores para el sistema sin amortiguamiento (2) y se obtienen las frecuencias naturales del sistema

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{D}\} = 0 \quad (2)$$

Luego se busca la respuesta armónica del sistema ante la carga conocida. Se propone estudiarlo con las autoformas.

$$\{\ddot{\mathbf{Z}}\} + 2\{\Omega\}\{\mathbf{C}_\Phi\}\{\dot{\mathbf{Z}}\} + \{\Omega\}^2\{\mathbf{Z}\} = \{\mathbf{R}_\Phi\} \quad (3)$$

cuya resolución resulta en

$$\{\mathbf{Z}\} = \frac{\{\mathbf{R}_\Phi\}}{\{\Omega\}^2 \sqrt{(1 - \chi^2)^2 + (2\{\mathbf{C}_\Phi\}\chi)^2}} \quad (4)$$

donde $\chi = \frac{\omega_{\text{exc}}}{\{\Omega\}}$.

La formulación de **amortiguamiento modal** es la siguiente

$$[\mathbf{C}_\Phi] = \begin{bmatrix} 2\omega_n \zeta_n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_1 \zeta_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

elijendosé un ζ para cada modo.

*a no ser que Ω esté en función del tiempo y no se haya especificado

La formulación de **amortiguamiento proporcional** propone una combinación lineal de la masa y la rigidez según

$$[\mathbf{C}_\Phi] = [\Phi]^T (\alpha [\mathbf{M}] + \beta [\mathbf{K}]) [\Phi] = \alpha [\mathbf{I}] + \beta [\mathbf{\Omega}^2] \quad (6)$$

Si se quiere estudiar un rango de frecuencias excitadoras tal que $\omega_{\text{exc}} \in [\omega_1, \omega_2]$ y eligiendo dos valores de amortiguamiento para ambas frecuencias ζ_1 y ζ_2 se tiene: [Cook et al.(2007)]

$$\alpha = 2\omega_1\omega_2(\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (7)$$

$$\beta = 2(\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (8)$$

Se opta por estudiar el rango de amortiguamiento $\zeta \in \{0,05; 0,3\}$. Este es el rango inferior por donde se puede encontrar el amortiguamiento para problemas similares al enunciado.

- Para el barrido de frecuencias de amortiguamiento proporcional se investigará el caso donde se elija $\zeta_1 = 0,05$ fijo y variando ζ_2 para obtener las curvas de respuesta a frecuencia.
- El otro caso investigado será $\zeta_2 = 0,3$ fijo variando así ζ_1 .

3. Resultados

Las primeras tres frecuencias naturales obtenidas con una solución de 8 elementos.

$$\{\mathbf{\Omega}\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 3627,5 \text{ rad/s} \\ 1295,5 \text{ rad/s} \\ 206,7 \text{ rad/s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 577,3 \text{ Hz} \\ 206,2 \text{ Hz} \\ 32,9 \text{ Hz} \end{Bmatrix}$$

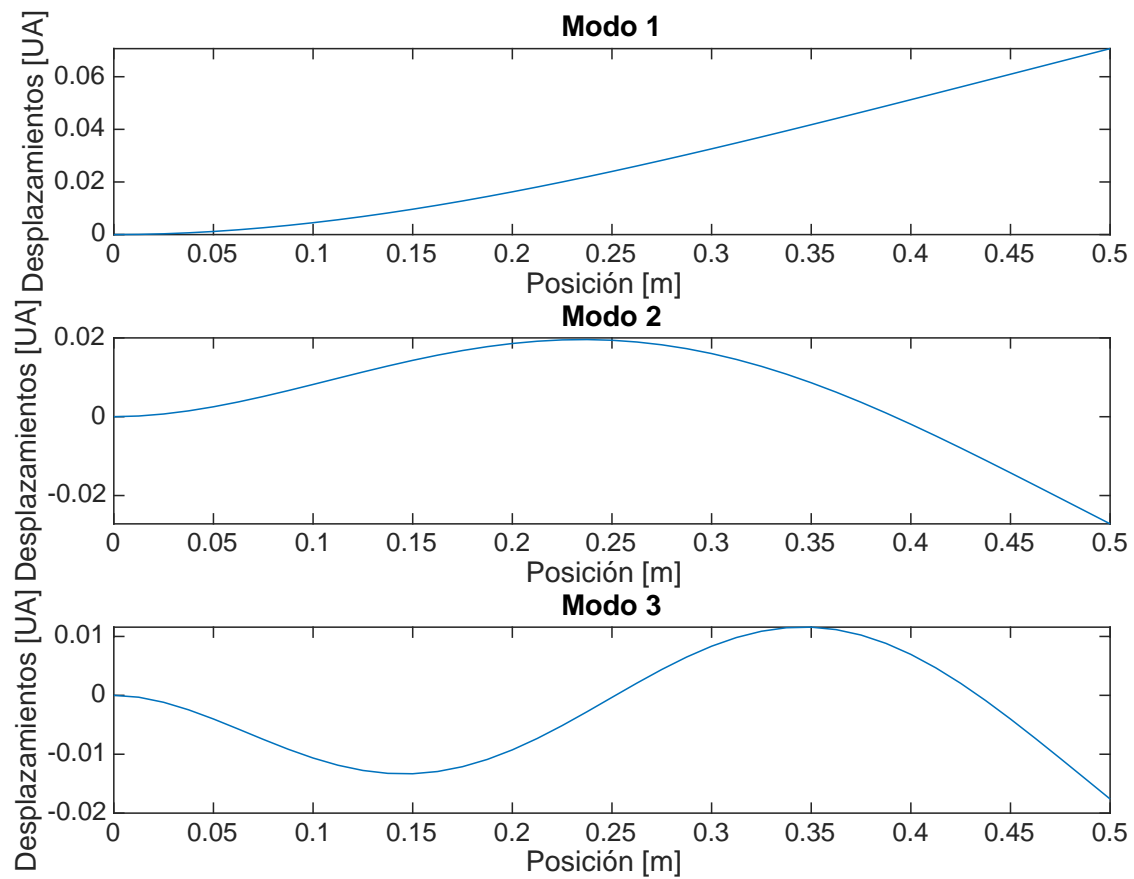


Figura 6: Modos de deformación para las frecuencias naturales. El modo 1 corresponde a la frecuencia más baja.

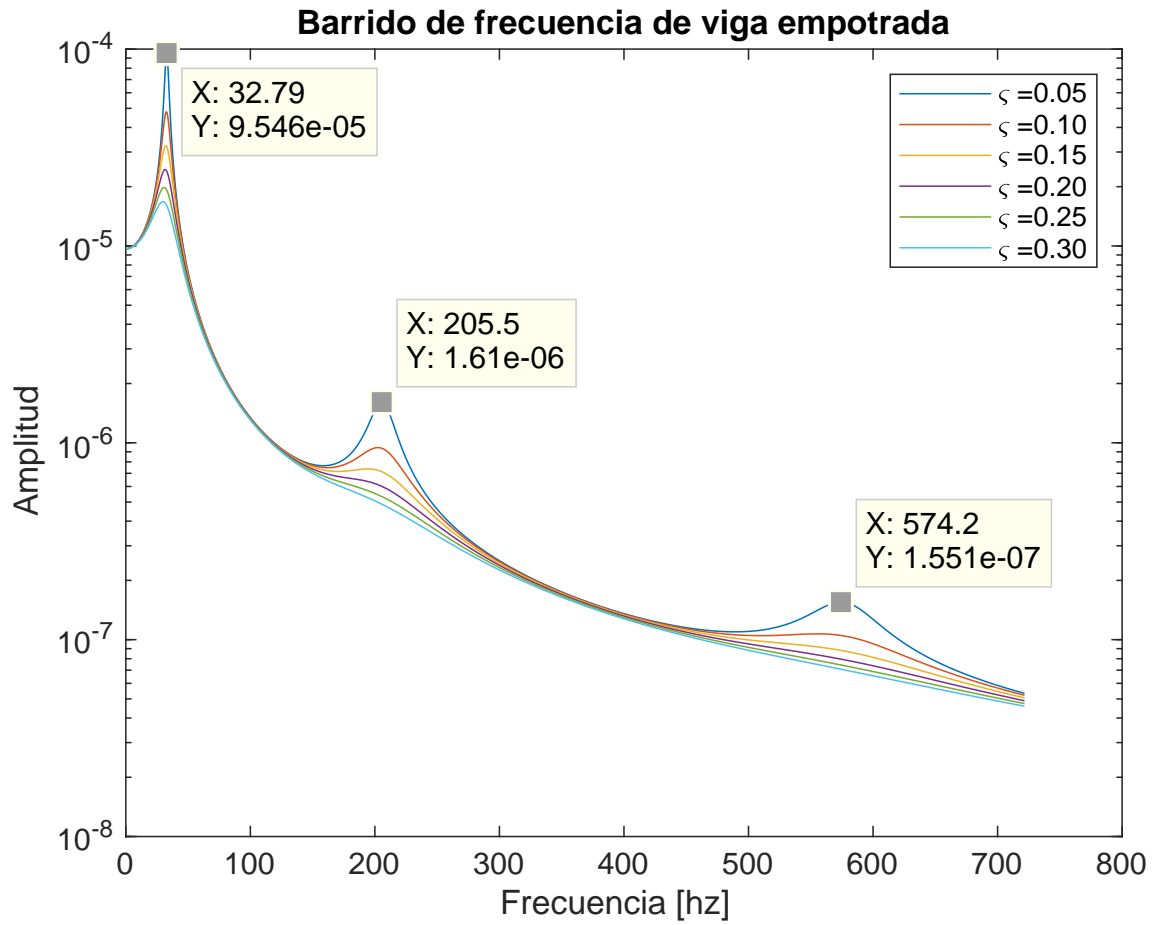


Figura 7: Barrido de frecuencia **modal**. Valores de amplitud máxima recuadrados.

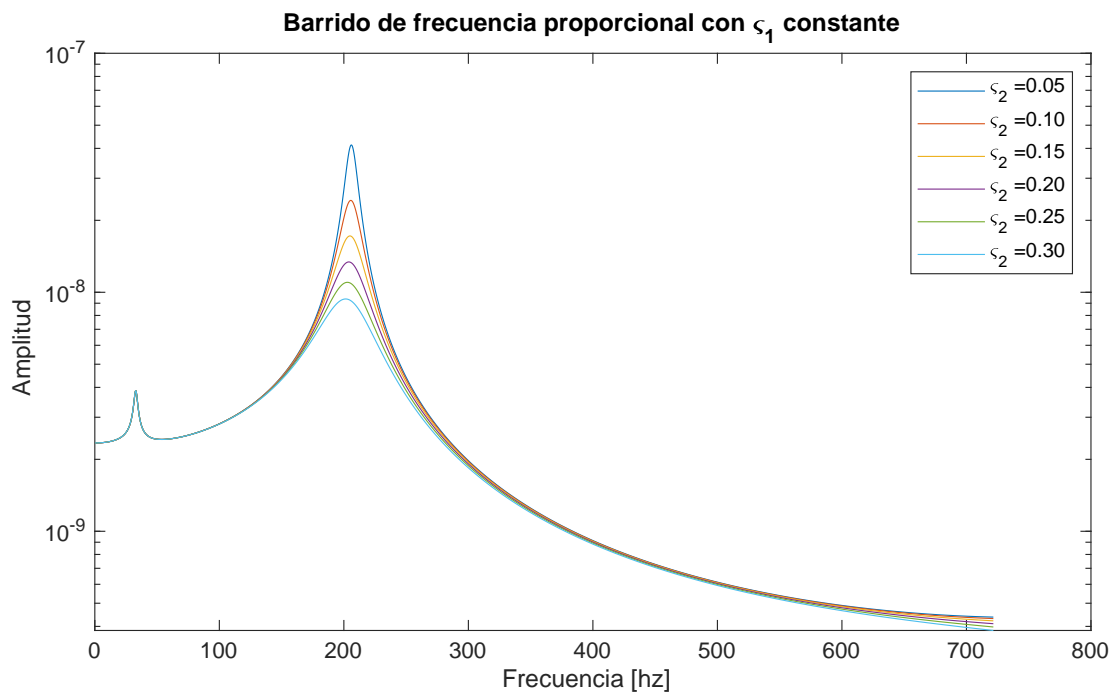


Figura 8: Barrido de frecuencia **proporcional**.

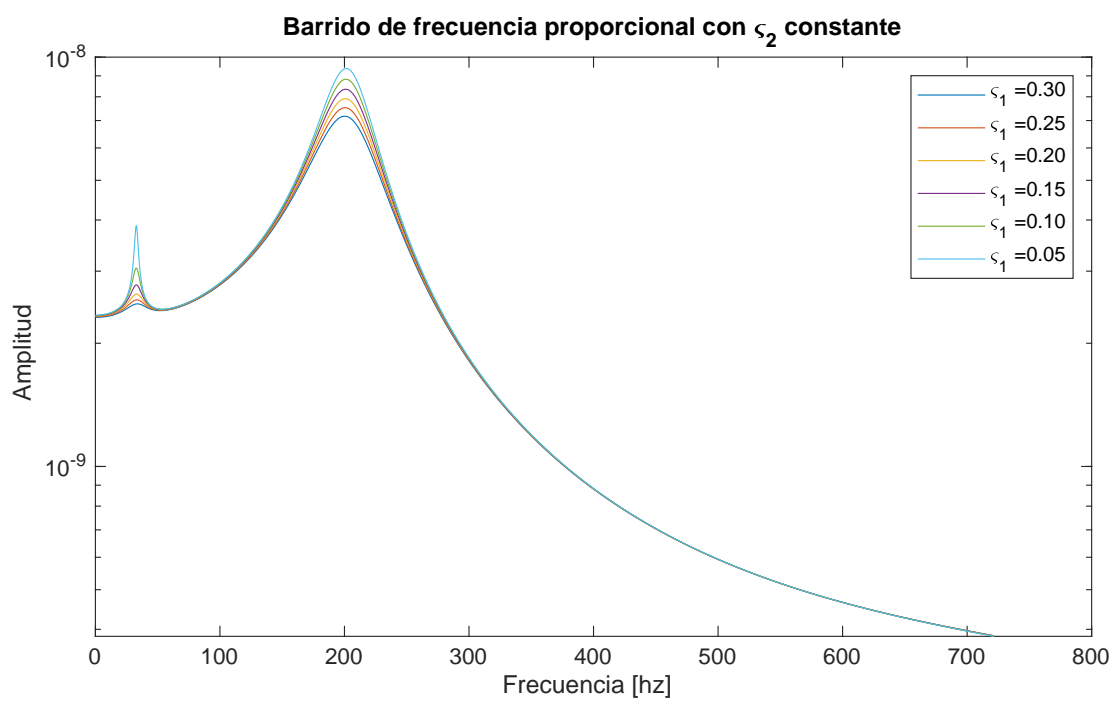


Figura 9: Barrido de frecuencia *proporcional*.

4. Conclusiones

Se informa al lector el hallazgo de la frecuencias naturales. Dichas frecuencias están separadas por un $\Delta\omega$ considerable. Esto es deseable para cuando se tenga una carga cíclica esta trabaje lejos de cualquier frecuencia natural, y si es posible, por debajo de todas. Dado que no se especifico ninguna característica técnica del problema, el gráfico 6 es más una curiosidad. Las formas de los modos no están a escala ni tienen unidades, es solo la forma de respuesta.

A medida que la frecuencia de excitación aumenta la *amplitud del sistema disminuye*[†] (ver figura 7). Es interesante pensar que si aumentara no tendría sentido buscar las frecuencias naturales porque estas son caracterizadas por un máximo de amplitud. Las curvas del barrido de frecuencia son decrecientes en lejanía de una frecuencia natural porque para una fuerza cíclica $F(t) = F_0 \sin \omega t$ el tiempo que actúa en una dirección es inversamente proporcional a la frecuencia. Por ende la estructura no tiene tiempo para moverse lejos antes de que se invierta la dirección de la fuerza.

El efecto del amortiguamiento es reducir la amplitud cerca de la frecuencia natural. En la figura 7 se puede apreciar el efecto claramente. Las siguientes dos figuras (8 y 9) tienen un nivel agregado de profundidad. Se estudia el efecto la *fracción de amortiguamiento crítico* [Cook et al.(2007)] cuando se varía el amortiguamientos de los puntos borde del espectro de diseño. Como es de esperar para un valor mayor ζ_1 se amortiguarán a frecuencias más bajas sin afectar las de alta. De forma complementaria, si se aumenta ζ_2 la amplitud de la primera frecuencia natural no se ve afectada mientras que a frecuencias más altas se reduce la amplitud considerablemente.

Referencias

[Cook et al.(2007)] Robert D Cook et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2007.

[†] Excepto en cercanías de una frecuencia natural