

Problema de conductividad térmica

-Solución del problema de forma analítica:

Dada la ecuación del calor unidimensional de la forma estacionaria:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Dividiendo nuestro problema en dos partes y asignando cada una de estas a un intervalo comprendido entre el inicio de un material y el final de este, y basándonos en una distribución uniforme del coeficiente de conductividad térmica, podemos dejar la ecuación de la forma:

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Que la doble derivada de "T" respecto "x" sea cero nos informa de que T(x) es una función de pendiente constante. Integrando dos veces se obtiene:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

Nuestras condiciones de contorno serán T(0) = 500K, T(1) = 298,15K y T(0,5) que debemos calcularla. Dado que las barras están en serie si llamamos H al calor transferido de forma que

$$H = k \frac{(T_c - T_f)}{L/2}$$

Podemos plantear la ecuación $H_{ACERO} = H_{ALUMINIO}$ de donde obtenemos T(0,5) = 312.7K.

Aplicando las condiciones de contorno ya es fácil obtener la función solución:

$$T(x) = \begin{cases} -374,532x + 500 \pm 2 \times 10^{-5}, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ -29,16x + 327,31 \pm 2 \times 10^{-5}, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases}$$

-Solución del problema en fortran95:

Como hemos hecho a la hora de solucionarlo a mano, lo primero que debemos hacer que obtenga nuestro programa es la temperatura en la unión de las dos barras, lo cual lo conseguiremos aplicando la misma fórmula antes propuesta. A partir de este punto comienzan las diferencias, la mas importante es que en este caso **no buscamos la función temperatura, sino puntos de dicha función.**

Todo consiste en solucionar el sistema: $\bar{D} \vec{T} = \vec{T''}$

La matriz de derivación la obtenemos a partir de las derivadas progresivas (1ª fila), centradas y regresivas (última fila). El vector doble derivada en este caso estará compuesto de ceros como hemos visto a la hora de resolverlo a mano.

Una vez llegados a este punto, ya lo tenemos prácticamente todo, pues si intentamos resolver el sistema tal y como lo tenemos, nos saldrá un Sistema Compatible Indeterminado. Para evitar esto, debemos aplicar las condiciones de contorno en el vector temperatura.

Deberemos resolver dos sistemas, uno para cada intervalo.

-Resolución del sistema de ecuaciones:

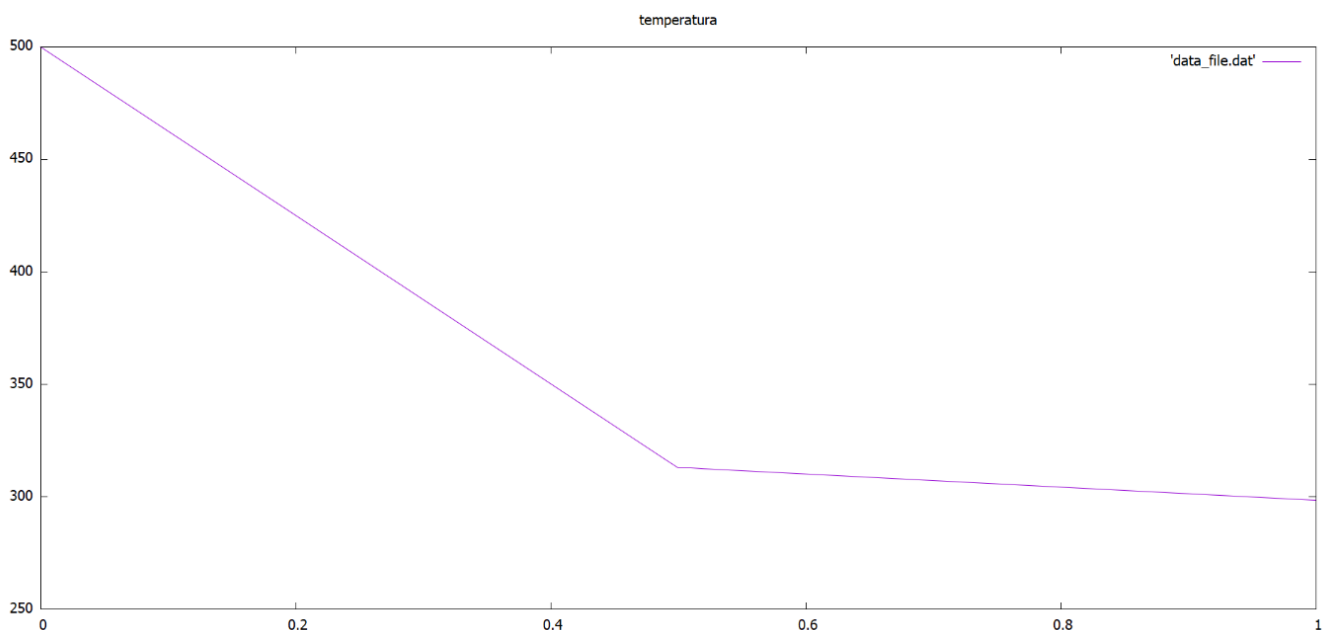
-Métodos iterativos

De los que hemos aprendido durante el curso, podemos usar los métodos de Jacobi, o Gauss-Seidel para resolver el sistema de ecuaciones. Como condición de convergencia tenemos que el radio espectral (supremo de los valores absolutos de los autovalores de la matriz) sea estrictamente menor que 1. Podríamos usar el método de la potencia para calcular ese autovalor, pero no es tan estable y si queremos que funcione siempre no podemos usarlo, así que recurriremos al método QR para calcular los autovalores. Optaremos por el método de factorización Householder.

-Métodos directos

Si la condición de convergencia no se cumple, usaremos el método de LU sin pivote, y si en algún momento necesitamos el pivote, usaremos el método de Gauss.

-Gráfica del problema ($T^2(x)$):

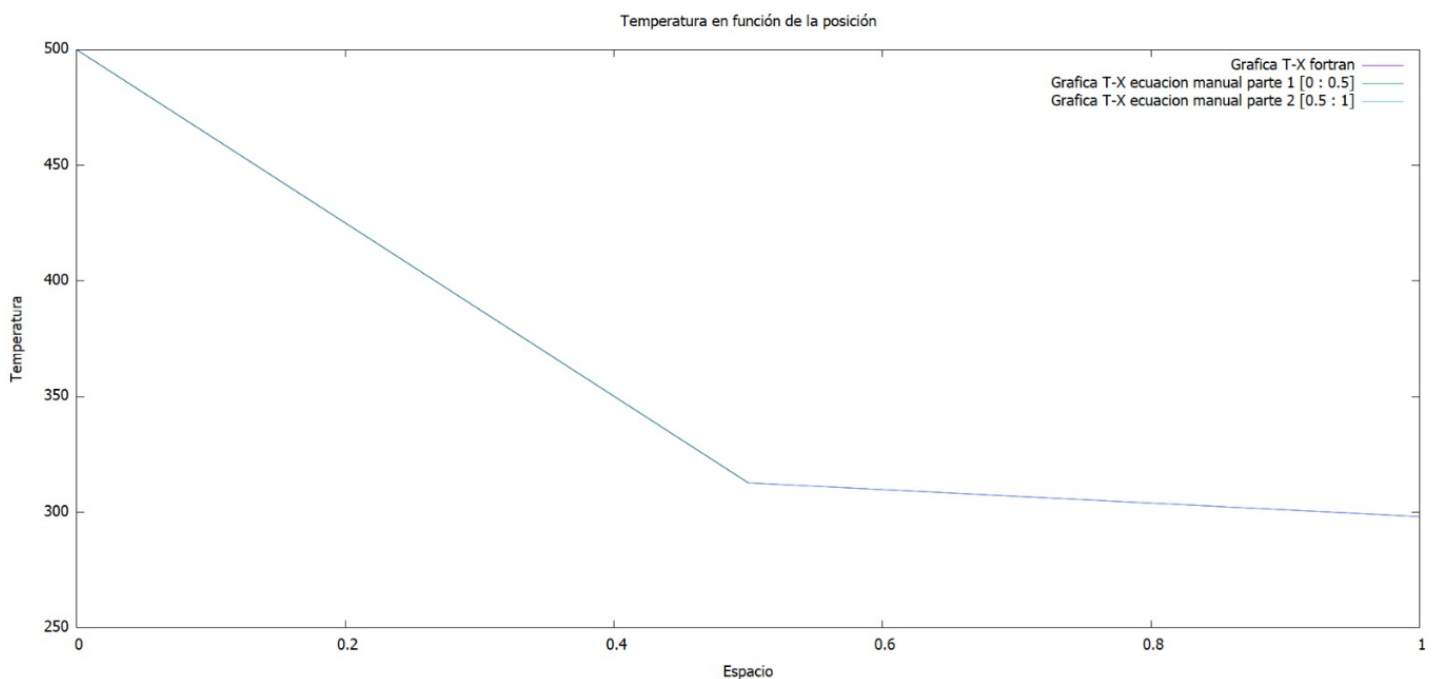


Podemos apreciar que la variación de la temperatura es mucho mayor en la barra de acero que en la de aluminio, lo cual es lógico dado que la conductividad térmica de este último ($209,3\text{W/mK}$) es mucho mayor que la del acero ($16,3\text{W/mK}$).

-Gráfica de errores:

Como podemos observar en la gráfica del error absoluto, éste decrece conforme aumenta el orden de derivación usado para resolver el problema.

Debido a que la solución del problema se trata de un polinomio de grado uno (una recta), el error que se comete al resolverlo con la forma más simple, es decir, con pocos puntos en la matriz de derivación no perfeccionada, es impredecible.



En esta grafica hemos representado la “función” obtenida a partir del programa, uniendo puntos, y la gráfica de la función resultado con 3 decimales. Podemos comprobar que se superponen, pues el error como se ha comentado es totalmente impredecible. Mediante el método de obtención de intervalos de contenido más reducido, hemos comprobado que existía un error de 0,00002. Aumentándole a las ecuaciones obtenidas el error, éste no es computable por “gnuplot”.

[illegible]