



IEL – protokol k projektu

Adam Ližičiar
xlizic00

18. decembra 2021

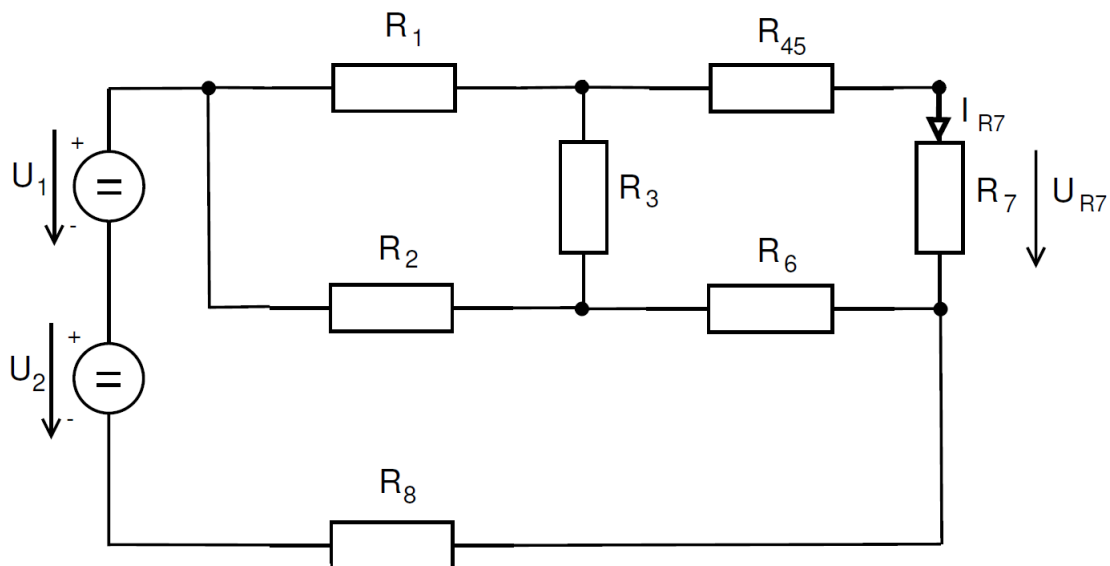
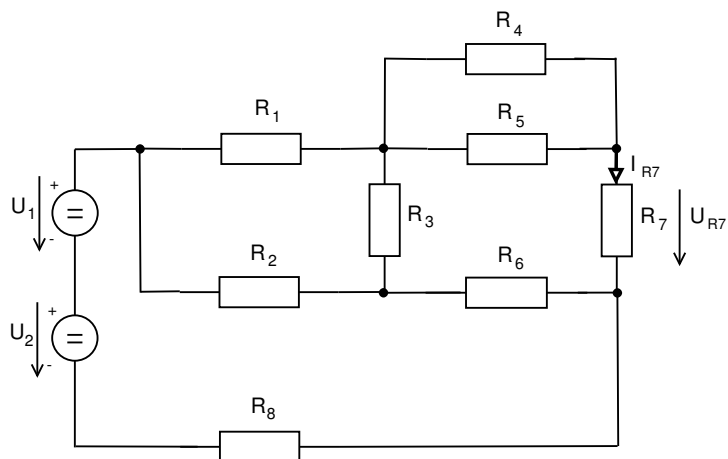
Obsah

| | | |
|---|------------------|----|
| 1 | Příklad 1 | 2 |
| 2 | Příklad 2 | 7 |
| 3 | Příklad 3 | 10 |
| 4 | Příklad 4 | 12 |
| 5 | Příklad 5 | 14 |
| 6 | Shrnutí výsledků | 16 |

Příklad 1

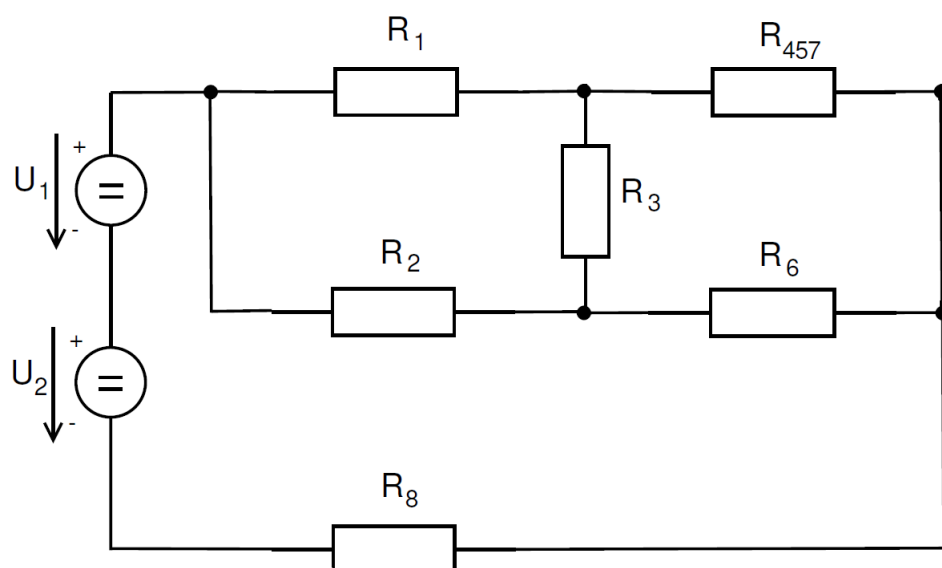
Stanovte napětí U_{R7} a proud I_{R7} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

| sk. | U_1 [V] | U_2 [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] | R_6 [Ω] | R_7 [Ω] | R_8 [Ω] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| G | 130 | 60 | 380 | 420 | 330 | 440 | 450 | 650 | 410 | 275 |



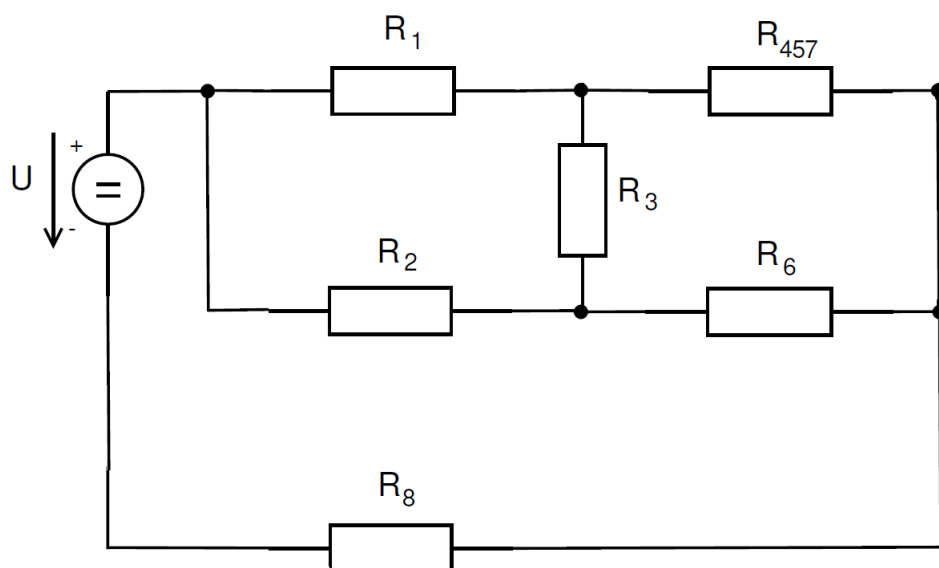
Krok 1 - Zjednodušenie R_4 a R_5 podľa vzorca pre paralelne zapojené rezistory.

$$R_{45} = \frac{R_4 \times R_5}{R_4 + R_5} = \frac{440 \times 450}{440 + 450} = 222.4719\Omega$$



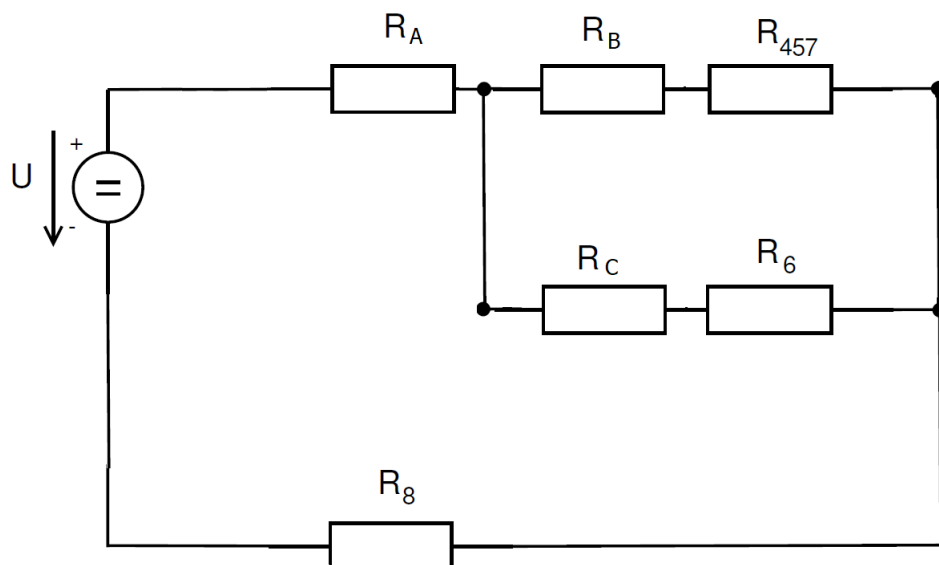
Krok 2 - Zjednodušenie R_{45} a R_7 podľa vzorca pre sériovo zapojené rezistory.

$$R_{457} = R_{45} + R_7 = 222,4719 + 410 = 632,4719\Omega$$



Krok 3 - Zjednodušenie napätia U_1 a U_2 .

$$U = U_1 + U_2 = 130 + 60 = 190V$$

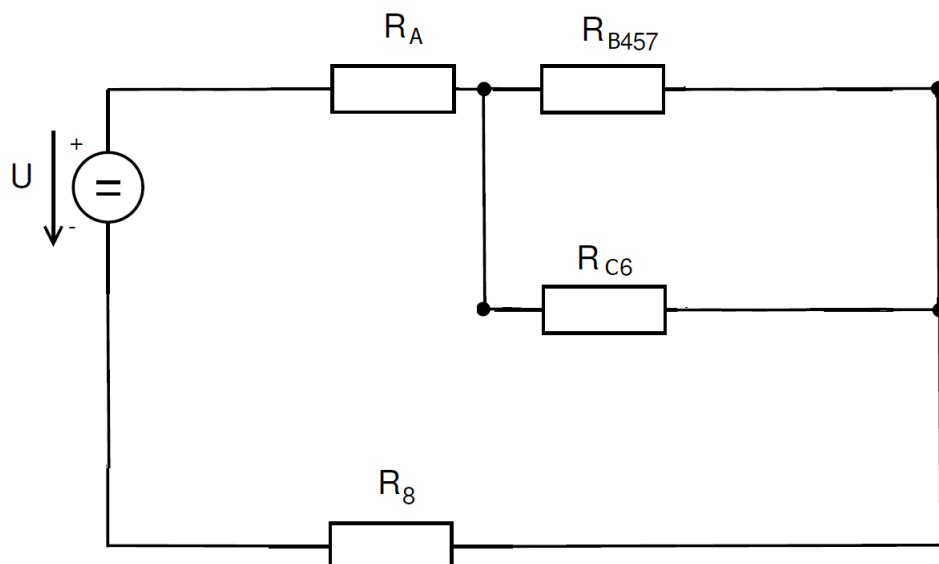


Krok 4 - Zjednodušenie R_1 , R_2 a R_3 pomocou rozloženia trojuholníka na hviezdu.

$$R_A = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

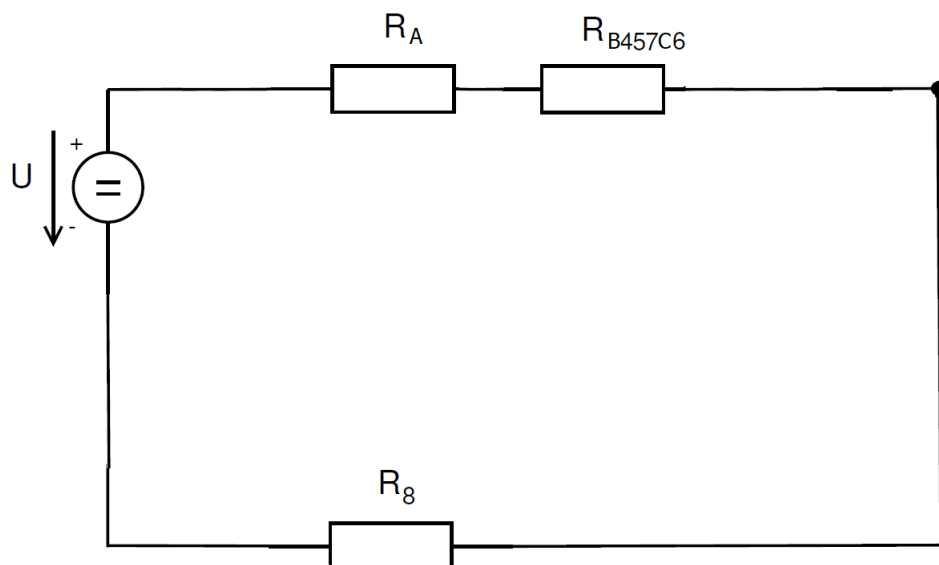
$$R_C = \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$



Krok 5 - Zjednodušenie R_B a R_{457} podľa vzorca pre sériovo zapojené rezistory a taktiež zjednodušenie R_C a R_6 podľa vzorca pre sériovo zapojené rezistory.

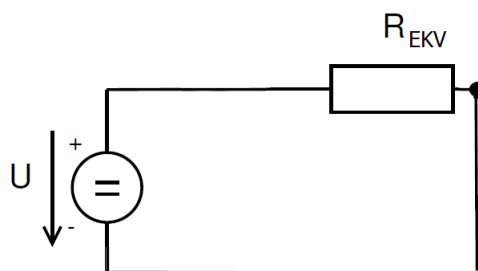
$$R_{B457} = R_B + R_{457} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + R_{457} = \frac{380 \times 330}{380 + 420 + 330} + 632,47 = 110,9735 + 632,4719 = 743,4454\Omega$$

$$R_{C6} = R_C + R_6 = \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_6 = \frac{420 \times 330}{380 + 420 + 330} + 650 = 122,6549 + 650 = 772,6549\Omega$$



Krok 6 - Zjednodušenie R_{B457} a R_{C6} podľa vzorca pre paralelne zapojené rezistory.

$$R_{B457C6} = \frac{R_{B457} \times R_{C6}}{R_{B457} + R_{C6}} = \frac{743,4454 \times 772,6549}{743,4454 + 772,6549} = 378,8844\Omega$$



Krok 7 - Zjednodušenie R_A , R_{B457C6} a R_8 podľa vzorca pre sériovo zapojené rezistory.

$$R_{EKV} = R_A + R_{B457C6} + R_8 = \frac{380 \times 420}{380 + 420 + 330} + 378,8844 + 275 = 795,1233\Omega$$

Výpočet prúdu

$$I = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{190}{795,1233} = 0,2390mA$$

Teraz spätne dopočítame $\mathbf{U_{R5}}$ a $\mathbf{I_{R5}}$:

Vypočítame si úbytok napätia na R_{B457C6} pomocou prúdu, ktorý sa v sériovom obvode nemení.

$$U_{R_{B457C6}} = I \times R_{B457C6} = 0,2390 \times 378,8844 = 90,5369V$$

$$U_{R_{B457C6}} = U_{R_{B457}} = U_{R_{C6}}$$

Dopočítame si $\mathbf{I_{R7}}$:

$$\mathbf{I_{R7}} = I_{R_{B457}} = \frac{U_{R_{B457}}}{R_{B457}} = \frac{90,5369}{743,4454} = \mathbf{0,1218A}$$

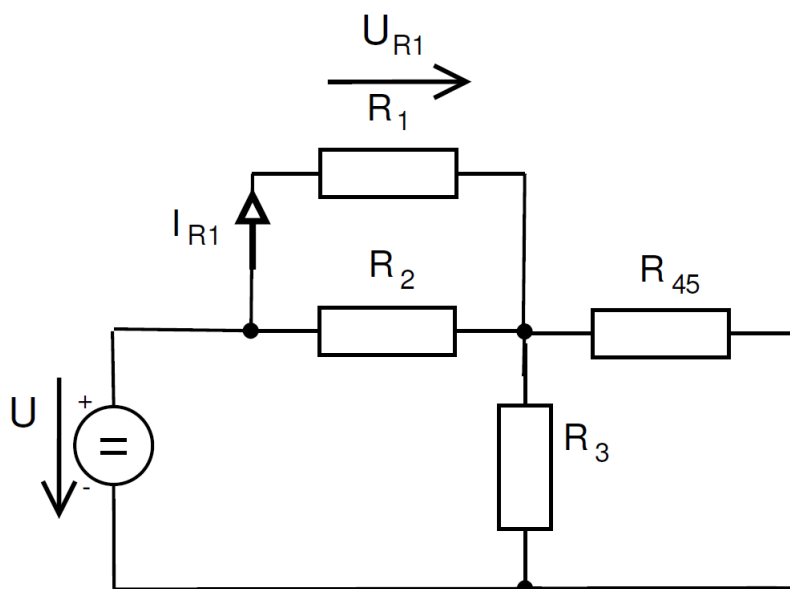
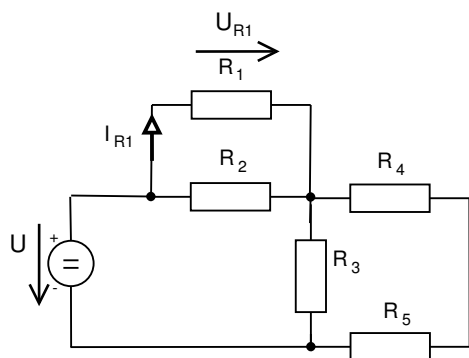
Dopočítame úbytok napätia na $\mathbf{U_{R7}}$:

$$\mathbf{U_{R7}} = I_{R7} \times R_7 = 0,1218 \times 410 = \mathbf{49.9299V}$$

Příklad 2

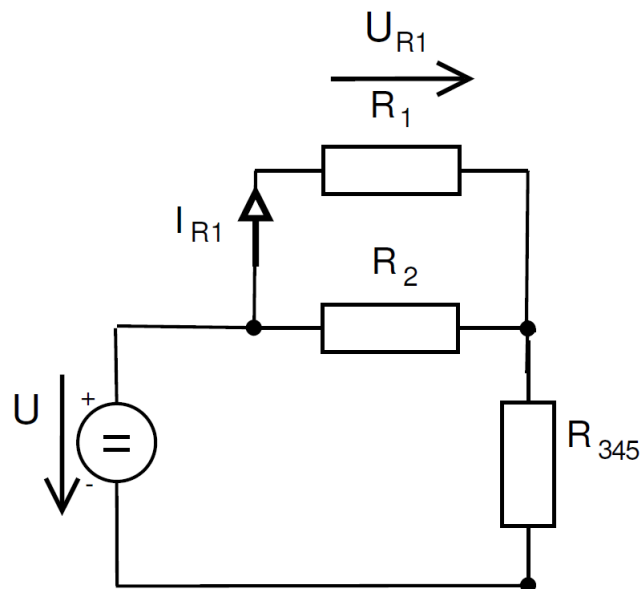
Stanovte napětí U_{R1} a proud I_{R1} . Použijte metodu Théveninovy věty.

| sk. | U [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] |
|-----|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| C | 200 | 70 | 220 | 630 | 240 | 450 |



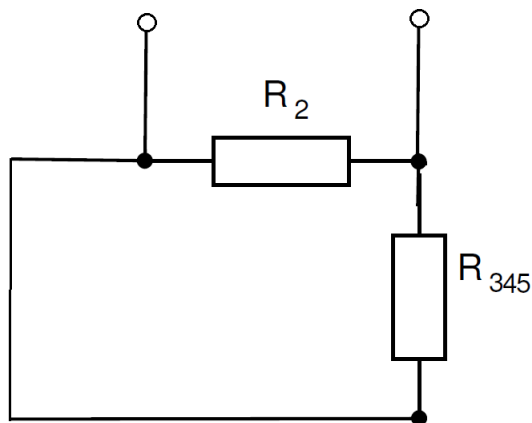
Krok 1 - Zjednodušení R_4 a R_5 podľa vzorca pre sériovo zapojené rezistory.

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 690\Omega$$



Krok 2 - Zjednodušenie R_{45} a R_3 podľa vzorca pre paralelne zapojené rezistory.

$$R_{345} = \frac{R_{45} \times R_3}{R_{45} + R_3} = 329,3182\Omega$$

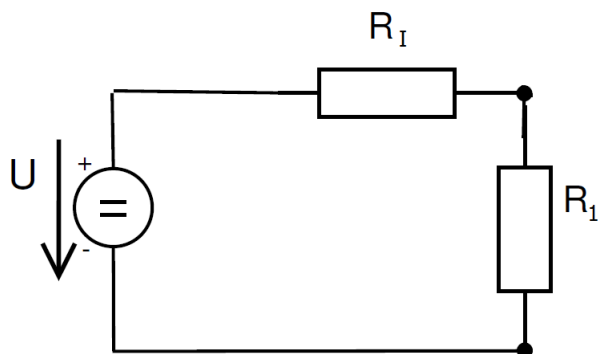


Krok 3 - Skratovanie zdroja a spočítanie vnútorného odporu R_i bez odporu R_1 . Zjednodušenie R_2 a R_{345} .

$$R_i = \frac{R_2 \times R_{345}}{R_2 + R_{345}} = \frac{220 \times 329,3182}{220 + 329,3182} = 131,8908\Omega$$

Krok 4 - Vypočítame U_i .

$$U_i = U \times \frac{R_2}{R_2 + R_{345}} = 200 \times \frac{220}{220 + 329,3182} = 80,0993V$$



Krok 5 - Dovočítame I_{R1} a U_{R1} :

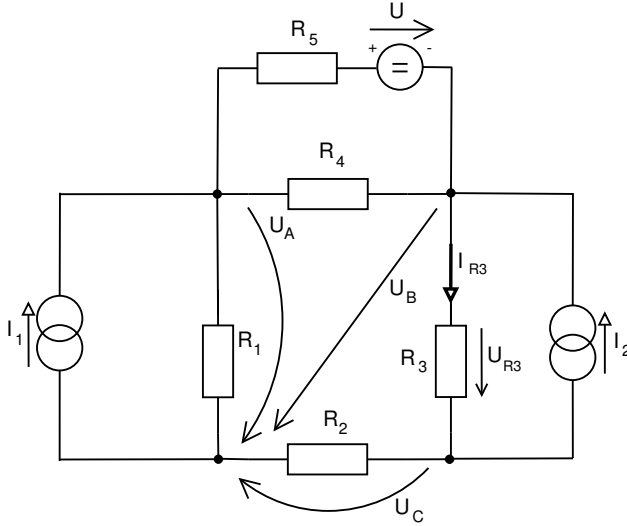
$$I_{R1} = \frac{U_i}{R_i + R_1} = \frac{80,0993}{131,8908 + 70} = 0,3967A$$

$$U_{R1} = I_{R1} \times R_1 = 0,3967 * 70 = 27,7722V$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

| sk. | U [V] | I_1 [A] | I_2 [A] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] |
|-----|---------|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| G | 160 | 0.65 | 0.45 | 46 | 41 | 53 | 33 | 29 |



Krok 1 - Prevedieme odpor na vodivosť

$$G = \frac{1}{R}$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2}$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3}$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4}$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5}$$

Krok 2 - Odvodíme si I_{R5} :

$$I_{R5} = \frac{U}{R_5}$$

Krok 3 - Vytvoríme si rovnice pre uzly

$$A : I_{R5} - G_5 \times (U_A - U_B) - U_A \times G_1 - G_4 \times (U_A - U_B) = -I_1$$

$$B : -I_{R5} + G_5 \times (U_A - U_B) + G_4 \times (U_A - U_B) - G_3 \times (U_B - U_C) = -I_2$$

$$C : G_3 \times (U_B - U_C) - U_C \times G_2 = I_2$$

Krok 4 - Rovnice prevedieme do matice a vypočítame ju:

$$\begin{pmatrix} -G_5 - G_1 + G_4 & G_5 + G_4 & 0 \\ G_5 + G_4 & -G_5 - G_4 - G_3 & G_3 \\ 0 & G_3 & -G_3 - G_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 - I_{R_5} \\ -I_2 + I_{R_5} \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Krok 5 - Prvú maticu preniesieme na druhú stranu

$$\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_5 - G_1 + G_4 & G_5 + G_4 & 0 \\ G_5 + G_4 & -G_5 - G_4 - G_3 & G_3 \\ 0 & G_3 & -G_3 - G_2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -I_1 - I_{R_5} \\ -I_2 + I_{R_5} \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Krok 6 - Po vypočítaní zistíme, že:

$$\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53.3124 \\ -23.9928 \\ -20.8676 \end{pmatrix} V$$

Krok 7 - Vypočítame U_{R_3} a taktiež I_{R_3} :

$$U_{R_3} = U_B - U_C = -3.1252V$$

$$I_{R_4} = \frac{U_{R_3}}{R_3} = -0.0590A$$

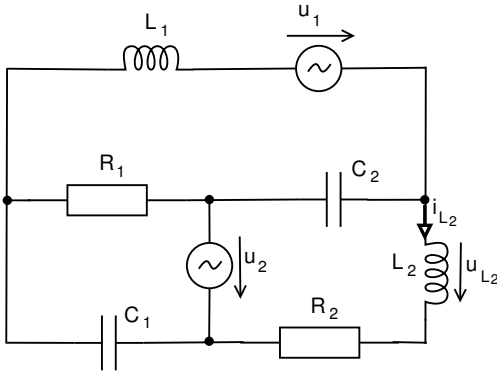
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

| sk. | U_1 [V] | U_2 [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | L_1 [mH] | L_2 [mH] | C_1 [μ F] | C_2 [μ F] | f [Hz] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|------------|------------|------------------|------------------|----------|
| G | 5 | 5 | 13 | 12 | 140 | 60 | 160 | 80 | 60 |



Krok 1 - Zistíme uhlovú frekvenciu ω

$$\omega = 2 \times \pi \times f = 120\pi \text{ rad/s}$$

Krok 2 - Zostavíme matice pre smyčky

$$\begin{bmatrix} \omega \times L_1 \times i - R_1 + \frac{1}{\omega \times C_2} \times i & -R_1 & \frac{1}{\omega \times C_2} \times i \\ R_1 & \frac{1}{\omega \times C_1} + R_1 & 0 \\ \frac{1}{\omega \times C_2} \times i & 0 & \omega \times L_2 \times i + R_2 + \frac{1}{\omega \times C_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Krok 3 - Vypočítame determinanty

Po vyriešení matice vypočítame Cramerovým a Sarrusovým pravidlom determinanty:

$$\Delta = -4.7944 + 5.7079i$$

$$\Delta_3 = 5.2874 + 7.9107i$$

$$I_C = I_{L_2} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = (-0.0089 - 0.0176i)A$$

Krok 4 - Dopolčítame napätie U_{L_2}

$$X_{L_2} = \omega \times L_2 \times i = 22.6195i\omega$$
$$U_{L_2} = X_{L_2} \times I_{L_2} = (0.3973 - 0.2022i)V$$

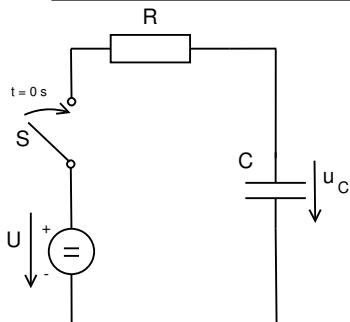
Krok 5 - Vypočítame výsledok - $|U_{L_2}|$ a Φ_{L_2}

$$|U_{L_2}| = \sqrt{Re(U_{L_2})^2 + Im(U_{L_2})^2} = \mathbf{0.4458V}$$
$$\Phi_{L_2} = \arctan\left(\frac{Im(U_{L_2})}{Re(U_{L_2})}\right) = \mathbf{-0.4707rad}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

| sk. | U [V] | R [Ω] | C [F] | $u_C(0)$ [V] |
|-----|---------|------------------|---------|--------------|
| C | 45 | 5 | 30 | 12 |



Krok 1 - Platí:

$$i = \frac{U_R}{R}$$

$$U_R + U_C - U = 0$$

$$U'_C = \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$$

Rovnice dosadíme:

$$U'_C = \frac{U_R}{R \times C}$$

Krok 2 - Vyjádříme si λ

$$\lambda + \frac{1}{R \times C} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{R \times C}$$

Výsledek bude v tvare $U_C(t) = K(t) \times e^{\lambda \times t}$

Krok 3

$$U'_C(t) = K(t) \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + \left(-\frac{1}{R \times C}\right) \times K(t) \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$$

Rovnicu $U_C = \frac{U_R}{R \times C}$ si upravíme na tvar $U'_C + \frac{U_C}{R \times C} - \frac{U}{R \times C} = 0$ a zintegrujeme ju:

$$\begin{aligned} K'(t) &= U \times e^{\frac{t}{R \times C}} \times \frac{1}{R \times C} \\ K(t) &= U \times e^{\frac{t}{R \times C}} + Z \end{aligned}$$

Krok 4 - Dosadenie do vopred pripravenej rovnice

$$\begin{aligned} U_C(t) &= (U \times e^{\frac{t}{R \times C}} + Z) \times e^{-\frac{t}{R \times C}} \\ U_C(t) &= U + Z \times e^{-\frac{t}{R \times C}} \end{aligned}$$

Dosadíme $U_C = 12V$ a $t = 0s$ a vyjadríme Z :

$$\begin{aligned} Z &= -33 \\ U_C(t) &= 45 - 33 \times e^{-\frac{t}{150}} \end{aligned}$$

Krok 5 - Skúška výpočtu

$$\begin{aligned} U'_C + \frac{U_C}{R \times C} - \frac{U}{R \times C} &= 0 \\ U'_C(t) \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + \left(\frac{1}{R \times C}\right) \times K(t) \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + \frac{K(t) \times e^{-\frac{t}{R \times C}}}{R \times C} - \frac{U}{R \times C} &= 0 \\ \frac{U}{R \times C} - \frac{U}{R \times C} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Shrnutí výsledků

| Příklad | Skupina | Výsledky |
|---------|---------|--|
| 1 | G | $U_{R7} = 49,9299V$ $I_{R7} = 0,1218A$ |
| 2 | C | $U_{R1} = 27,7722V$ $I_{R1} = 0,3967A$ |
| 3 | G | $U_{R3} = -3,1252V$ $I_{R3} = -0,0590A$ |
| 4 | G | $ U_{L2} = 0.4458V$ $\varphi_{L2} = -0.4707rad$ |
| 5 | C | $u_C(t) = 45 - 33 \times e^{-\frac{t}{150}}$ |